cui esponente sia eguale al quoziente della divisione per 2 del numero dei resti fra essi intermedii aumentato di 1.

Consideriamo fra i resti, che si ottengono nel cercare il massimo comun divisore tra i numeri A e B, i resti R_h ed R_{h+2n}, e siano R_{h+1}, R_{h+2}, ..., R_{h+2n-1} i resti fra essi intermedii: ciò è lo stesso di dire che fra i due resti considerati ve n' hanno altri $(2n-1)$ intermedii.

Frattanto il lemma precedente dà diritto a stabilire le seguenti n diseguaglianze:

$$R_h > 2\,R_{h+2.1}\,,\ R_{h+2.1} > 2\,R_{h+2.2}\,,\ \ldots,\ R_{h+2(n-1)} > 2\,R_{h+2n}\,,$$

le quali, moltiplicate membro a membro, e soppresso poi nella diseguaglianza risultante il prodotto $R_{h+2.1}\,R_{h+2.2}\ldots R_{h+2(n-1)}$, che è fattor comune ad ambo i membri di essa, dànno

$$R_h > 2^n\,.\,R_{h+2n}.$$

Quest'ultima diseguaglianza dimostra appunto quanto è stato asserito.

3. Teorema. *Se nella ricerca del massimo comun divisore tra due numeri* A *e* B *si debbono fare più di* 2 n *divisioni, il minore di essi* B *è maggiore di* $2^{n-1}(n+2)$.

Siano

$$R_1\,,\ R_2\,,\ \ldots,\ R_{2n-1}\,,\ R_{2n}$$

i resti delle successive prime $2n$ divisioni. Da queste divisioni, poichè il quoziente di ciascuna di esse dev'essere almeno eguale ad 1, risulta:

$$(1)\qquad B - R_1 \geq R_2\,,\ R_1 - R_2 \geq R_3\,,\ \ldots,\ R_{2n-2} - R_{2n-1} \geq R_{2n}.$$

Da queste eguaglianze o diseguaglianze, sommando membro a membro, otteniamo

$$(2)\qquad B \geq R_2 + R_3 + \ldots + R_{2n-2} + 2\,R_{2n-1} + R_{2n}$$

e poichè sappiamo *(corollario 2)* che

$$R_3 > 2^{n-2}\,.\,R_{2n-1}\,,\ R_5 > 2^{n-3}\,.\,R_{2n-1}\,,\ \ldots,\ R_{2n-3} > 2\,.\,R_{2n-1}\,,$$

sarà

$$R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} > 2\,R_{2n-1}(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-4} + 2^{n-3}),$$

ossia

$$R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} > 2\,R_{2n-1}\,(2^{n-2} - 1),\ (*)$$

donde proviene ancora

$$(3) \qquad R_3 + R_5 + \ldots + R_{2n-3} + 2\,R_{2n-1} > 2^{n-1} . R_{2n-1}$$

Le (2) e (3) forniscono la seguente diseguaglianza

$$(4) \qquad B > R_2 + R_4 + \ldots + R_{2n-2} + 2^{n-1} . R_{2n-1} + R_{2n}.$$

Con processo identico a quello tenuto per passare dalle (1) alla diseguaglianza (4), possiamo, escludendo dalle (1) dapprima le due prime eguaglianze e diseguaglianze, poi le prime quattro, ecc., dedurre successivamente

$$(C_1) \quad R_2 > R_4 + R_6 + \ldots + R_{2n-2} + 2^{n-2} . R_{2n-1} + R_{2n},$$
$$(C_2) \quad 2\,R_4 > 2\,R_6 + 2\,R_8 + \ldots + 2\,R_{2n-2} + 2^{n-2} . R_{2n-1} + 2\,R_{2n},$$
$$(C_3) \quad 2^2 . R_6 > 2^2 . R_8 + \ldots + 2^2 . R_{2n-2} + 2^{n-2} . R_{2n-1} + 2^2 . R_{2n},$$

. . . .

. . . .

$$(C_{n-3}) \qquad 2^{n-4} . R_{2n-6} > 2^{n-4} . R_{2n-4} + 2^{n-4} . R_{2n-2} + $$
$$+ 2^{n-2} . R_{2n-1} + 2^{n-4} . R_{2n},$$

$$(C_{n-2}) \quad 2^{n-3} . R_{2n-4} > 2^{n-3} . R_{2n-2} + 2^{n-2} . R_{2n-1} + 2^{n-3} . R_{2n}.$$

Ora la (4) e la (C_1) dànno

$$(5) \quad B > 2\,R_4 + 2\,R_6 + \ldots + 2\,R_{2n-2} + 3 . 2^{n-2}\,R_{2n-1} + 2\,R_{2n};$$

(*) Anche indipendentemente dalla conoscenza delle proprietà delle progressioni geometriche, si può in generale dimostrare che

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

osservando che, per essere

$$1 + 2 = 2 + 2 - 1 = 2 . 2 - 1 = 2^2 - 1;$$
$$1 + 2 + 2^2 = 2^2 - 1 + 2^2 = 2 . 2^2 - 1 = 2^3 - 1;$$
$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^3 - 1 + 2^3 = 2^3 . 2 - 1 = 2^4 - 1, \text{ ecc.}$$

siamo indotti a ritenere che

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

E questa eguaglianza, ottenuta per induzione, si mostrerà che è vera sempre, provando che la legge di eguaglianza fra il primo ed il secondo membro sussiste ancora per il caso che ad ambi i membri di essa si aggiunga il termine seguente a 2^{n-1}, ossia 2^n. Infatti il secondo membro diviene allora $2^n - 1 + 2^n = 2 . 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$, il quale ha col primo membro $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ la stessa relazione che ha $2^n - 1$ colla somma $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$. Dunque resta dimostrato quanto si voleva.

la (5) e la (C_2) forniscono quest'altra diseguaglianza

$$(6) \qquad B > 2^2 . R_6 + 2^2 . R_8 + \ldots + 2^2 . R_{2n-2} + \\ + 4 . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^2 . R_{2n};$$

dalla (6) e dalla (C_3) risulta

$$B > 2^3 . R_8 + 2^3 . R_{10} + \ldots + 2^3 . R_{2n-2} + 5 . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^3 . R_{2n} .$$

E così di seguito procedendo, si verrà ad avere

$$B > 2^{n-3} . R_{2n-4} + 2^{n-3} . R_{2n-2} + (n-1) 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^{n-3} . R_{2n},$$

e poi

$$B > 2^{n-2} . R_{2n-2} + n . 2^{n-2} R_{2n-1} + 2^{n-2} . R_{2n} .$$

E poichè si ha

$$R_{2n-2} \geq R_{2n-1} + R_{2n},$$

sarà ancora

$$B > 2^{n-2} R_{2n-1} (n+1) + 2 . 2^{n-2} R_{2n},$$

ossia

$$B > 2^{n-2} R_{2n-1} . (n+1) + 2^{n-1} . R_{2n} .$$

Ma, per ipotesi, dovendosi fare per la ricerca del massimo comun divisore tra A e B più di $2n$ divisioni, è lo stesso che dire che dev'essere R_{2n} almeno eguale ad 1, ed R_{2n-1} almeno eguale a 2, e per conseguenza dall' ultima diseguaglianza si trae che

$$B > 2^{n-2} . 2 (n+1) + 2^{n-1},$$

ossia

$$B > 2^{n-1} (n+2).$$

4. Teorema. *Se* n *è il più piccolo numero intero che soddisfa alla condizione di essere* $2^{n-1}(n+2)$ *maggiore del più piccolo di due numeri dati, nella ricerca del massimo comun divisore fra questi due numeri non si possono fare più di* $2n$ *divisioni.*

Infatti, se nella ricerca del massimo comun divisore fra i due dati numeri si potessero fare più di $2n$ divisioni, allora, per il teorema (3), dovremmo conchiudere che il minore dei due numeri dati dovrebbe essere maggiore di $2^{n-1}(n+2)$, il che contraddice all'ipotesi fatta. Dunque resta dimostrato quanto si voleva.

5. Osservazione. Invece del teorema (4) i trattati di aritmetica di Bertrand e di Serret riportano quest'altro:

Se 2^n *è la più piccola potenza del 2 che supera il minore* *di due numeri dati, nella ricerca del massimo comun divisore tra questi due numeri non si possono fare più di* 2 n *divisioni.*

Ognun vede quale risultato più soddisfacente apporta il teorema (4) sul (5).

Citerò tuttavia uno dei moltissimi esempi, che si potrebbero addurre, per mostrare sia il maggior vantaggio che arreca il teorema (4) rispetto al (5), e sia ancora come si possa dire, in senso assoluto, soddisfacente la conclusione a cui conduce il teorema (4).

Volendo cercare il massimo comun divisore tra 144 ed 89, vediamo che il più piccolo numero n tale da soddisfare alla condizione

$$2^{n-1}(n+2) > 89$$

è 5, giacchè per $n=5$ si ha $2^{n-1}(n+2)=16\times 7=112$.

Quindi, per il teorema (4), possiamo conchiudere che nella ricerca del massimo comun divisore fra 144 e 89 non si debbono fare più di 10 divisioni.

Mentre invece, poichè la più piccola potenza di 2 che supera 89 è 2^7, si dovrebbe, per il teorema (5), conchiudere che questo numero massimo di divisioni dovrebbe essere 14.

Cercando poi il massimo comun divisore fra 144 ed 89 si trova realmente che si debbono fare 10 divisioni (massimo numero di divisioni che viene appunto indicato dal teorema (4)).

Bari, 21 febbraio 1889.

STEFANO GATTI.
Professore di matematica al R. Liceo di Bari.

Il teorema di Pitagora e il postulato delle parallele

Nel fascicolo Settembre-Ottobre 1888 di questo Periodico il prof. D. Besso proponeva, fra le altre questioni, la seguente:

Dedurre il postulato delle parallele dalla proposizione: Il quadrato del numero che misura l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è eguale alla somma dei quadrati dei numeri che misurano i cateti.

Qui, manifestamente, la proposizione pitagorica deve intendersi ammessa per qualsiasi triangolo rettangolo, ma la quistione riesce più interessante se conveniamo di ammetterla soltanto per quei triangoli rettangoli pei quali possa effettivamente sottoporsi a verificazione sperimentale, vale a dire soltanto per quelli i cui lati risultino per essa commensurabili fra loro; allora infatti il postulato delle parallele che se ne deduce potrà considerarsi, *anche* per questa via, suscettibile di pratica verificazione.

Stante l'identità

$$a^2 + \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2,$$

tutti i triangoli rettangoli che hanno i cateti proporzionali ai numeri razionali $a, \frac{a^2-1}{2}$, sono appunto nella condizione, se è vera la proposizione premessa, di avere tutti e tre i lati proporzionali a numeri razionali e quindi fra loro commensurabili; perciò noi considereremo la proposizione stessa come verificata per tutti e soli i triangoli di questa classe che corrispondono ad un dato particolare valore di a (*).

Se A B C è uno di questi triangoli, rettangolo in A, ponendo $a : \frac{a^2-1}{2} = m$, avremo:

$$\mathrm{A\,B : A\,C} = m$$

$$(1) \quad \mathrm{B\,C}^2 = \mathrm{A\,B}^2 + \mathrm{A\,C}^2 = \frac{\mathrm{A\,B}^2}{m^2} \cdot (1+m^2) = \mathrm{A\,C}^2 \cdot (1+m^2).$$

Anzitutto dimostriamo la reciproca, cioè che se fra i lati di un triangolo hanno luogo queste due relazioni, esso è rettangolo in A.

Su A C si tiri per A la perpendicolare $\mathrm{A\,D} = \mathrm{A\,B}$ e si unisca C con D: dal triangolo A C D, poichè in esso $\mathrm{A\,D : A\,C} = m$, si ha

$$\mathrm{C\,D}^2 = \mathrm{A\,C}^2 + \mathrm{A\,D}^2$$

onde, per la (1), $\mathrm{C\,D} = \mathrm{B\,C}$ e i due triangoli sono eguali.

S'imaginino ora costruiti tre segmenti le cui misure sodisfino le equazioni

$$x : y = m, \quad y : z = m, \quad x + z = \mathrm{B\,C},$$

(*) Il caso praticamente più semplice corrisponde ad $a = 3$. Potevamo servirci anche dell'altra identità $a^2 + \left(\frac{a^2}{4} - 1\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 1\right)^2$ e allora il caso più semplice era per $a = 4$.

rappresentati cioè da

$$x = \frac{BC}{1+m^2} \cdot m^2 \qquad y = \frac{BC}{1+m^2} \cdot m \qquad z = \frac{BC}{1+m^2}.$$

Con due di essi, x e y, e col lato A B si formi il triangolo P Q S, facendo

$$PS = x \quad QS = y \quad PQ = AB;$$

poichè

$$PS^2 + QS^2 = \frac{BC^2}{1+m^2} \cdot m_2$$

e per la (1)

$$\frac{BC^2}{1+m^2} \cdot m^2 = AB^2$$

sarà

$$PS^2 + QS^2 = PQ^2,$$

ed essendo ancora

$$PS : QS = m,$$

ne deduciamo essere il triangolo P Q S rettangolo in S.

Si prolunghi P S d'un segmento

$$SR = z = \frac{BC}{1+m^2}$$

e si tiri Q R; dal triangolo rettangolo Q S R, in cui

$$SQ : SR = m,$$

si ha

$$QR^2 = QS^2 + RS^2 = \frac{BC^2}{1+m^2},$$

ma per la (1)

$$\frac{BC^2}{1+m^2} = AC^2,$$

onde

$$QR = AC,$$

ed essendo

$$PR = x + z = BC$$

concluderemo che i due triangoli P Q R ed A B C sono fra loro eguali. Ma P Q R è diviso dall'altezza corrispondente all'ipotenusa in due triangoli i cui cateti hanno fra loro lo stesso rapporto m dei cateti di esso; altrettanto avverrà dunque del triangolo A B C e di qualsiasi altro triangolo della classe che si considera.

Ciò posto, nel nostro triangolo A B C si tiri l'altezza A D, per D le corrispondenti altezze D E, D F dei due triangoli A D B, A D C: avremo

$$AF : DF = m \quad , \quad DF : CF = m \quad , \quad AF + CF = AC,$$

dalle quali

$$AF = \frac{AC}{1+m^2} \cdot m^2 \ , \ DF = \frac{AC}{1+m^2} \cdot m \quad , \quad CF = \frac{AC}{1+m^2} \cdot$$

Similmente:

$$BE = \frac{AB}{1+m^2} \cdot m^2 \ , \ DE = \frac{AB}{1+m^2} \cdot m \quad , \quad AE = \frac{AB}{1+m^2},$$

ed essendo

$$AB = AC \cdot m$$

si deduce

$$AF = DE, \qquad DF = AE.$$

I due triangoli ADE, ADF, rettangoli in E e in F, hanno dunque anche gli altri due angoli rispettivamente uguali, e poichè i due DAE, DAF sono fra loro complementari, la somma degli angoli di ciascuno di essi è eguale a due retti.

Di questa proprietà d'un triangolo il postulato delle parallele, com'è noto, è logica conseguenza.

S. Sbrana.

Rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali

(Continuazione)

Potenze dei numeri irrazionali.

Sia (fig. 6ª e 7ª) un angolo $X_0 O X$; siano $X_1 O X_2$, $X_2 O X_3$, $X_3 O X_4 \ldots . X_{p-1} O X_p$ tanti angoli uguali al dato e contati nel senso positivo $X_0 O X_1$, e altrottanti angoli $X_0 O X_{-1}$, $X_{-1} O X_{-2} \ldots . X_{-(p-1)} O X_{-p}$ uguali essi pure al dato e contati nel senso negativo $X_1 O X_0$.

Fatto centro in O e con raggi l'unità lineare OU e un segmento qualsivoglia OA, descrivansi due circonferenze che sechino le rette OX nei punti U ed A rispettivamente. — Chiameremo A_0 A_1 i punti U, A appartenenti ai lati OX_0 OX_1.

Forminsi ora le spezzate $A_0 A_1 A_2 \ldots . A_p$; $A_0 A_{-1} A_{-2} \ldots . A_{-p}$ i cui lati siano paralleli ai successivi segmenti UA terminati alle rette $O X_0$, $O X_1$, $O X_2 \ldots . O X_p$ e alle rette $O X_0$, $O X_{-1}$, $O X_{-2} \ldots . O X_{-p}$.

I risultanti triangoli $A_0 O A_1$, $A_1 O A_2$, $A_2 O A_3 \ldots . A_{p-1} O A_p$; $A_0 O A_{-1}$ $A_{-1} O A_{-2} \ldots . A_{-(p-1)} O A_{-p}$ come tutti simili al triangolo costante $O A U$, sono simili tra loro; e sono pure simili i triangoli determinati da due coppie di lati comprendenti angoli equimolteplici di $X_0 O X_1$ o di $X_1 O X_0$.

Sia ora $O A = \alpha$ e suppongasi α razionale.

Allora si ha . . . . $O A_1 = \alpha$

$$O A_2 : O A_1 = O A : O U \text{ ; onde } \quad O A_2 = O A_1^2 = \alpha^2$$

$$O A_3 : O A_2 = O A : O U \quad \text{»} \quad O A_3 = O A_2 \cdot O A = \alpha^3$$

$$\ldots \ldots \ldots \quad \text{»} \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$O A_p : O A_{p-1} = O A : O U \quad \text{»} \quad O A_p = O A_{p-1} \cdot O A = \alpha^p.$$

E si ha pure analogamente

$$O A_{-1} : O A_0 = O U : O A \text{; onde } O A_{-1} = \frac{O A_0 \cdot O U}{O A} = \frac{1}{O A} = \alpha^{-1}$$

$$O A_{-2} : O A_{-1} = O U : O A; \quad \text{»} \quad O A_{-2} = \frac{O A_{-1}}{O A} = \frac{1}{O A^2} = \alpha^{-2}$$

$$\ldots \ldots \ldots \quad \text{»} \quad \ldots \ldots \ldots$$

$$O A_{-p} : O A_{-(p-1)} = O U : O A; \quad \text{»} \quad O A_{-p} = \frac{O A_{-(p-1)}}{O A} = \frac{1}{O A_p} = \alpha^{-p}.$$

Adunque se α è razionale, le rette che congiungono il punto O coi vertici della spezzata rappresentano le potenze positive, nulla, e negative del numero α.

Questi stessi segmenti converremo che rappresentino ancora quelle potenze anche quando sia α irrazionale e dato da (M, N).

Allora, giusta quanto si è detto circa il prodotto di due numeri irrazionali, sarà, ad es: $O A_2$ maggiore di tutti i quadrati m_r^2, minore dei quadrati n_s^2, e anche maggiore di tutti i prodotti come $m_r\, m_s$, e minore dei prodotti $n_r\, n_s$ poichè, supposto $m_r > m_s$ e $n_r > n_s$, essendo $O A_2$ maggiore di m_r^2 è pur maggiore di $m_r\, m_s$, ed essendo minore di n_s^2 è pur minore di $n_r\, n_s$.

È per conseguenza $O A_2 = (M^2, N^2)$, e analogamente si ragiona per $O A_3, O A_4 \ldots . O A_p$.

In quanto ai segmenti $O A_{-2}$ $O A_{-3}$ $O A_{-4} \ldots . O A_{-p}$ osserviamo che è ad es:

$$O A_{-2} = \frac{1}{O A^2} = \frac{1}{(M^2, N^2)}.$$

Cosicchè, giusta quanto fu detto sul quoziente di due numeri irrazionali, è OA_{-2} minore dei quadrati $\frac{1}{m_r^2} = m_r^{-2}$ nonchè dei quozienti $\frac{1}{m_r m_s}$ e maggiore dei quadrati $\frac{1}{n_s^2} = n_s^{-2}$, nonchè dei quozienti $\frac{1}{n_r n_s}$ per cui è

$$OA_{-2} = (N^{-2}, M^{-2})$$

e analogamente si conchiude per OA_{-3}, OA_{-4}, ... OA_{-p}.

Abbiamo così trovato per le potenze ad esponente intero, positivo e negativo di un numero irrazionale le seguenti formole di definizione:

$$(M, N)^p = (M^p, N^p),$$
$$(M, N)^{-p} = (N^{-p}, M^{-p}).$$

Osservazione. — Il numero α, razionale o irrazionale, può essere maggiore dell'unità, come nella figura 6ª; o minore come nella figura 7ª. Nel primo caso risulta chiaramente, dalla similitudine dei diversi triangoli considerati, che i segmenti OA_1 OA_2 OA_3 .... OA_p vanno crescendo, e i segmenti OA_{-1} OA_{-2} OA_{-3} .... OA_{-p} vanno diminuendo; e indefinitamente come è facile dimostrare.

Poichè difatti presa su OA_2 la $OA'_1 = OA_1$
» » OA_3 .... $OA'_2 = OA_2$
. . . .
» » OA_p , $OA'_{p-1} = OA_{p-1}$

risultano i triangoli $A_1A_2A'_1$, $A_2A_3A'_2$ ..... $A_{p-1}A_pA'_{p-1}$ che sono simili e in cui i lati omologhi A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 .... $A_{p-1}A_p$ vanno crescendo: cosicchè andranno pure crescendo i segmenti $A_2A'_1$, $A_3A'_2$, $A_4A'_3$ .... $A_pA'_{p-1}$.

Ma si ha:

$$OA_1 = OA$$
$$OA_2 = OA_1 + A_2A'_1$$
$$OA_3 = OA_2 + A_3A'_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$OA_p = OA_{p-1} + A_pA'_{p-1};$$

di qui sommando si ottiene:

$$OA_p > OA + (p-1)\,A_2A'_1$$

ed è chiaro che, prendendo p, e quindi anche $(p-1)\ A_2\ A_1'$, abbastanza grande può rendersi $O\,A_p$ maggiore di qualunque segmento, per quanto grande.

Si dimostrerebbe in modo analogo che $O\,A_{-p}$ può rendersi minore di qualunque segmento per quanto piccolo.

Se invece consideriamo la figura 7ª, che si riferisce al caso di α razionale o irrazionale minore dell'unità, si giunge a conclusioni affatto opposte.

Ciò è naturale: poichè essendo ora $O\,A_0$ il maggiore dei due segmenti $O\,A_0$, $O\,A_1$ i lati $O\,A_0$ $O\,A_1$ del triangolo $O\,A_0\,A_1$ disegnato nella fig. 6ª riescono ora scambiati e scambiato per conseguenza riesce il senso $X_0\,O\,X_1$ degli angoli positivi col senso $X_1\,O\,X_0$ cosicchè le conclusioni ottenute precedentemente nei campi positivi e negativi risultano invertite.

Conchiudendo si trova il noto:

Teorema. — Le successive potenze a esponente intero e positivo d'un numero, razionale o irrazionale, maggiore dell'unità vanno crescendo e le potenze a esponente negativo vanno decrescendo indefinitamente col crescere dell'esponente; mentre il contrario avviene se il numero è minore dell'unità.

Radici dei numeri irrazionali.

Le considerazioni fatte sulla spezzata $A_{-p}\,A_{-(p-1)}\ldots A_{-2}\,A_{-1}\,A_0\,A_1\,A_2\ldots A_{p-1}\,A_p$ sussistono indipendentemente dal valor comune degli angoli in O. Se quindi pensiamo che questi angoli vadano continuamente decrescendo una spezzata, come la suddetta, i cui lati abbiano, sui lati di quegli angoli, una inclinazione costante, tende a una curva, detta spirale equiangola, le cui tangenti $x\,y$ fanno (figura 8ª) coi raggi *vettori* che vanno al punto di contatto un angolo costante.

I raggi *vettori* vanno crescendo nel senso A M di quella parte della curva che giace nell'angolo ottuso $O\,A\,x$ poichè $O\,A$ cresce quando il punto A si sposta da A verso x; decrescono nel senso opposto. Vanno cioè crescendo quando ruotano intorno O nel senso degli angoli positivi, vanno decrescendo nel senso opposto. Questo però avviene per una spirale derivante da una spezzata come quella della figura 6ª: per una spirale derivante da una spezzata della figura 7ª avviene il contrario.

I raggi *vettori* si conservano di lunghezza costante se l'angolo O A x della spirale equiangola è retto, poichè in tal caso quella curva si riduce a una circonferenza.

Poichè poi il raggio *vettore* può farsi ruotare di infiniti giri attorno O nel senso positivo o negativo, le spire della curva sono in numero infinito e vicine o lontane dal polo tanto quanto si vuole senza che mai passino pel polo stesso.

Supposta ora descritta una qualunque spirale equiangola e in essa segnati due raggi *vettori* O U, O A_n uguali all'unità e a un segmento qualunque, dividasi l'angolo U O A_n in n parti uguali colle rette O A_1 O A_2 . . . O A_{n-1}. Siano α β i numeri rappresentati dai segmenti O A_n O A_1; si ha, come vedemmo a proposito delle potenze:

$$\alpha = \beta^n$$

e β dicesi radice n^{sima} di α.

Se β, e quindi anche α, è razionale la radice n^{sima} di α si definisce quel numero la cui potenza n^{sima} è uguale ad α.

Se β è irrazionale e dato da (P, Q) allora essendo

$$\alpha = (P^n, Q^n)$$

si definisce β, cioè la radice n^{sima} di α, come l'irrazionale che separa le due classi dei numeri le cui potenze n^{sime} sono rispettivamente minori e maggiori del dato numero α.

Logaritmi dei numeri irrazionali.

Siano O U, O A, O B tre raggi vettori di una spirale equiangola; siano 1, a, b i numeri che li misurano e siano α, β le misure degli angoli A O U, B O U riferiti ad un angolo unitario qualunque.

Circa i valori a, b possono presentarsi quattro casi: studiamo, in ciascuno di questi casi, il rapporto $\beta : \alpha$.

1° caso.

Suppongasi

$$a > 1 ; \ b > 1.$$

Il rapporto $\beta : \alpha$ può essere intero; frazionario; incommensurabile.

Se è $\beta = m\,\alpha$ si ha corrispondentemente $b = a^m = a^{(\beta : \alpha)}$.

Se è $\beta = \frac{m}{n}\alpha$ e si segna l'angolo V O U $= \frac{1}{n}\cdot\alpha$, si trova

$$a = \mathrm{O\,V}^n \ldots\ldots \quad 1)$$
$$b = \mathrm{O\,V}^m \ldots\ldots \quad 2)$$

e dalla 1) deriva:

$$\mathrm{O\,V} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

e quindi la 2) diventa

$$b = a^{\frac{m}{n}} = a^{(\beta\,:\,\alpha)}.$$

Se infine $\beta : \alpha$ è un numero irrazionale (P, Q) cosicchè sia:

$$p\,\alpha < \beta < q\,\alpha$$

allora il raggio O B cade nell'angolo dei raggi O B′, O B″ formanti colla O U angoli uguali a $p\,\alpha$, $q\,\alpha$: perciò, per la natura della curva, sarà corrispondentemente:

$$\mathrm{O\,B'} < \mathrm{O\,B} < \mathrm{O\,B''}$$

ossia:

$$a^p < b < a^q.$$

E poichè O B separa le due classi di segmenti O B′, O B″ così avremo:

$$b = (a^p, a^q)$$
$$b = a^{(\beta\,:\,\alpha)}$$

dando così la definizione di una potenza a esponente incommensurabile.

Adunque qualunque sia la natura del rapporto $\beta : \alpha$ si è trovato:

$$b = a^{(\beta\,:\,\alpha)}$$

ossia, prendendo l'angolo A O U come unità di misura:

$$b = a^{\beta}.$$

2° caso.

Sia:

$$a > 1\,;\ b < 1.$$

L'angolo B O U essendo in senso opposto all'angolo unitario A O U, è misurato da un numero negativo $-\beta'$ e ragionando come nel 1° caso, si ottiene:

$$b = a^{-\beta'}.$$

3° CASO.

Sia:

$$a < 1\,;\ b > 1$$

Si ha ancora come nel 2° caso $\beta = -\beta'$ e si trova ancora:

$$b = a^{-\beta'}.$$

4° CASO.

Sia:

$$a < 1\,;\ b < 1$$

L'angolo B O U avendo lo stesso senso dell'angolo unitario A O U, il numero β è positivo e si ha:

$$b = a^{\beta}.$$

Adunque in ogni caso è

$$\beta = log_a b$$

qualora si misuri β prendendo l'angolo A O U come unità.

Si vede da ciò che si è detto come una spirale equiangola faccia graficamente l'ufficio di una tavola di logaritmi, dove i raggi *vettori* rappresentano i numeri e gli angoli dei raggi stessi col raggio unitario rappresentano i logaritmi, qualora si prenda come unità angolare l'angolo formato dal raggio, base dei logaritmi, col raggio unitario medesimo.

È chiaro che il logaritmo della base è l'unità: che il logaritmo dell'unità è lo zero: che secondochè la base sia maggiore o minore dell'unità i logaritmi dei numeri maggiori dell' unità sono positivi, i logaritmi dei numeri minori dell'unità negativi, o viceversa: che il logaritmo di $(+\infty)$ è $\pm\infty$ e il logaritmo di zero è $\mp\infty$ a seconda che è la base maggiore o minore dell'unità.

È pur facile dedurre dalla spirale medesima quell'altra definizione di logaritmo che nasce dal confronto di due progressioni: poichè gli angoli dei raggi *vettori* essendo in progressione aritmetica i raggi stessi sono in progressione geometrica: come sarebbe pur facile ricavare le proprietà fondamentali dei logaritmi ecc., ecc.

Mi basterà dimostrare che dai logaritmi calcolati in un sistema di base O A si possono dedurre i logaritmi in un nuovo sistema moltiplicando gli antichi per una costante che è il modulo.

Si ha difatti

$$\frac{BOU}{A'OU} = \frac{BOU}{AOU} \cdot \frac{AOU}{A'OU} = \frac{BOU}{AOU} \cdot \frac{1}{\frac{A'OU}{AOU}}$$

ossia:

$$log_{a'} b = log_a b \cdot \frac{1}{log_a a'}.$$

CONCLUSIONE.

In tutto ciò che si è detto fin qui si tenne conto soltanto del valore dei segmenti rappresentanti i numeri irrazionali. Volendo tener conto anche del senso di quei segmenti otteniamo di estendere alle quantità algebriche le conclusioni trovate pei semplici numeri irrazionali.

Tale estensione è nota per ciò che riguarda la somma e la differenza. Quanto al prodotto, riferendoci alla figura 10ª rappresenteremo i moltiplicandi positivi con segmenti contati da O verso X_1: i negativi con segmenti da O verso X_2 e i moltiplicatori positivi con segmenti contati da O verso Y_1: i negativi da O verso Y_2. Allora applicando la costruzione conosciuta si vede che il prodotto positivo O $C_{(11)(22)}$ risulta da fattori dello stesso segno, mentre il prodotto negativo O $C_{(12)(21)}$ risulta da fattori di segno contrario.

Analogamente si conchiude circa il quoziente.

Si vede anche dalla figura 11ª come le potenze di grado pari di una quantità negativa siano positive, quelle di grado dispari negative.

Infine troviamo che le radici e i logaritmi delle quantità negative, non hanno una rappresentazione grafica, poichè i raggi della spirale equiangola possono tirarsi per il polo in tutte le possibili direzioni del piano.

A. BIFFIGNANDI.

ESAMI DI LICENZA LICEALE

1889 — Sessione di Luglio

TEMI DI MATEMATICA

(Il candidato ha la scelta fra i due temi qui sotto proposti)

GEOMETRIA.

Costruire un triangolo di cui siano date la lunghezza della base e le lunghezze delle perpendicolari tirate da un punto assegnato della base su ciascuno degli altri due lati.

ALGEBRA.

Di due cilindri circolari retti è conosciuta la somma V dei volumi, la somma k^2 dei quadrati dei loro raggi, e si sa inoltre che le loro superficie laterali sono equivalenti ognuna ad una superficie data S.

Calcolare il raggio e l'altezza di ciascuno dei due cilindri.

ESERCIZI PER LA SCUOLA

Sulla potenza di un binomio e di un polinomio.

1. Provare che, se a e b sono positivi ed è $a > b$, si ha

$$a^2 - b^2 > (a - b)^2.$$

2. La differenza di due numeri è eguale a 12, e la differenza dei loro quadrati a 264: trovare i due numeri.

3. La somma di due numeri è eguale ad a, e la somma dei loro quadrati è eguale b: esprimere, mediante a e b, 1) il prodotto dei due numeri; 2) il quadrato della loro differenza.

4. Trovare due numeri tali che la loro somma sia eguale a 18 e la somma dei loro quadrati a 194.

5. La somma di due numeri è eguale ad a e il loro prodotto è eguale a b: esprimere, mediante a e b, il quadrato della differenza dei due numeri.

6. La somma di due numeri è eguale a 26 ed il loro prodotto a 144: trovare i due numeri.

7. Provare che, se la somma di due numeri è eguale a 26, ed il loro prodotto a 144, ciascuno di essi, sostituito in luogo di x, annulla il trinomio $x^2 - 26\,x + 144$.

8. Provare che, se il trinomio $x^2 - a\,x + b$ si annulla per un valore di x, diverso da $\frac{a}{2}$, esso dovrà pure annullarsi per un altro valore di x, e sarà la somma di quei due valori eguale ad a, ed il loro prodotto eguale a b.

9. Trovare una relazione fra la somma di due numeri, la somma dei loro cubi ed il loro prodotto.

10. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma dei loro cubi a 3887: trovare il loro prodotto.

11. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma dei loro cubi a 3887: trovare i due numeri.

12. Provare che l'uguaglianza

$$x^3 + p\,x = q$$

è soddisfatta quando s'intenda con x la differenza di due numeri, con p il triplo loro prodotto, e con q la differenza dei loro cubi. (*)

(*) TARTAGLIA, che aveva trovato la formola pel cubo di un binomio, è stato forse guidato da questa trasformazione alla scoperta della regola per la risoluzione dell'equazione $x^3 + px = q$. Ciò mi sembra risultare:

1) Dalle parole premesse alla dimostrazione dell'accennata formola:

" La causa della regola data per cavar la radice cuba e similmente quella da formar il rotto delle propinque radici cube delli numeri non cubi, si può assegnare da questa sottoscritta proposizione non posta da Euclide nè da altri eccetto che da Hieronimo Cardano da noi a lui mostrata, con la qual proposizione fu da me trovata la regola generale al capitolo di cosa e cubo eguale a numero e a molti altri suoi dipendenti l'anno 1534 in Venezia come al suo luogo si dirà " (a pag. 80 dell'opera: *La seconda parte del general trattato di numeri et misure* di NICOLÒ TARTAGLIA. Venezia, 1556).

2) Dalle famose terzine colle quali enuncia la regola corrispondente a quella forma dell'equazione cubica:

13. Trovare un numero che sostituito in luogo di x renda soddisfatta l'uguaglianza

$$x^3 + 360\,x = 2863$$

14. Verificare l'identità

$$a^3 + b^3 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 6\,\frac{a+b}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

15. Applicare la precedente identità alla ricerca proposta al N. 11.

16. Verificare l'identità

$$a^4 + b^4 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4 + 12\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \ (*)$$

17. Provare che, se la somma di due numeri è eguale a 23 e la somma delle loro quarte potenze a 67937, il quadrato della loro differenza deve annullare il trinomio

$$x^2 + 3174\,x - 263655$$

18. La somma di due numeri è eguale a 23, e la somma delle loro quarte potenze a 67937: trovare i due numeri.

19. Esprimere la differenza, fra la quarta potenza della somma di due numeri e la somma delle loro quarte potenze, in funzione della somma dei due numeri e del loro prodotto.

Quando ch'el cubo con le cose appresso,
  Se agguaglia a qualche numero discreto,
  Trovan due altri differenti in esso:

Dappoi terrai questo per consueto,
  Ch'el lor produtto sempre sia eguale
  Al terzo cubo delle cose neto;

El residuo poi suo generale
  Delli lor lati cubi ben sottratti,
  Darà le tua cosa principale.

(*Quesiti et invenzioni diverse* di NICOLÒ TARTALEA bresciano. Venezia, 1546).

(*) Le identità proposte ai N.i 14 e 16 sono state stabilite dal CAVALIERI, e da lui applicate alle dimostrazioni di quei suoi celebri teoremi che si traducono nelle eguaglianze

$$lim\left(\frac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^4}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{4}$$

$$lim\left(\frac{1^4+2^4+\ldots+n^4}{n^5}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{5}$$

(*Exercitationes geometricae sex* Auctore F. BONAVENTURA CAVALERIO. Bononiae, 1647).

20. Applicare la relazione richiesta nel precedente esercizio alla ricerca proposta al N. 18.

21. Esprimere la differenza

$$(a+b)^5-(a^5+b^5)$$

in funzione della somma $a+b$, e del prodotto $a\,b$.

22. La somma di due numeri è eguale a 14 e la somma delle loro quinte potenze a 161294: trovare i due numeri.

23. Verificare l'identità

$$a^6+b^6=2\left(\frac{a+b}{2}\right)^6+2\left(\frac{a-b}{2}\right)^6+$$
$$+30\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

24. Provare che, se a e b sono interi, il quoziente

$$\frac{(a+b)^7-(a^7+b^7)}{7\,a\,b\,(a+b)}$$

è il quadrato d'un numero intero.

25. Con successive moltiplicazioni del binomio $a+b$ per sè stesso, si formino gli sviluppi delle potenze seconda, terza, quarta, ecc. fino alla dodicesima.

26. Quale relazione ha luogo fra il coefficiente del terzo termine nello sviluppo di $(a+b)^7$ e i coefficienti dei termini secondo e terzo nello sviluppo di $(a+b)^6$? Verificare che la stessa relazione ha luogo fra il coefficiente del quinto termine nello sviluppo di $(a+b)^{12}$ e i coefficienti dei termini quarto e quinto nello sviluppo di $(a+b)^{11}$. E in generale che, indicando con $L_{n,r}$ il coefficiente di $a^{n-r}\,b^r$ nello sviluppo di $(a+b)^n$, cioè il coefficiente del termine $(r+1)^{mo}$, si ha, per tutti quei valori di n ed r,

$$L_{n,\,r}=L_{n-1,\,r-1}+L_{n-1,\,r}\ (*)$$

27. Dimostrare che la precedente relazione ha luogo qualunque sia l'intero positivo n.

(*) Gli sviluppi delle potenze d'un binomio, fino alla dodicesima, sono stati trovati da Tartaglia, il quale ha pure trovato che i coefficienti sono legati da questa legge (a pag. 72 dell'opera già citata: *La seconda parte del general trattato di numeri et misure* di NICOLÒ TARTAGLIA. Venezia, 1556). Ma egli non ha data la formola generale dello sviluppo di $(a+b)^n$, come sembra avere creduto qualche autore moderno.

28. Mediante la precedente relazione dimostrare la formola

$$L_{n,r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}$$

29. Dimostrare che il numero $L_{n,r}$ ha la proprietà espressa dall'eguaglianza

$$L_{n,r} = L_{n,n-r}$$

30. Dimostrare che il prodotto di m numeri interi consecutivi è divisibile pel prodotto $1.2.3\ldots m$.

31. Dimostrare le due eguaglianze

$$L_{n,o} + L_{n,1} + L_{n,2} + \ldots + L_{n,n-1} + L_{n,n} = 2^n$$
$$L_{n,o} - L_{n,1} + L_{n,2} - \ldots - (-1)^n L_{n,n-1} + (-1)^n L_{n,n} = 0$$

32. Dimostrare che, se x è minore di 1, la somma

$$(1+x)^{529} + (1-x)^{529}$$

è minore di 2^{529}.

33. Dimostrare che, nello sviluppo di $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ è un termine indipendente da x, e trovare questo termine.

34. Nello sviluppo di $(a+b)^n$ i termini terzo, quarto e quinto sieno eguali rispettivamente a 4320, 5760, 3840: trovare a, b ed n.

35. Trovare a, b ed n colla condizione che quattro termini consecutivi nello sviluppo di $(a+b)^n$ sieno eguali rispettivamente a 2916, 4860, 4320, 2160.

36. Dimostrare che, posto

$$P_n = 1.2.3\ldots n$$

la potenza $(a+b)^n$ è eguale alla somma di tutti i valori che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta} a^\alpha b^\beta$$

quando s'attribuiscano ad α e β tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che sia $\alpha + \beta = n$, e s'intenda sostituita l'unità al simbolo P_0.

37. Nello sviluppo della settima potenza di $h+c$ porre $h = a+b$, poi sviluppare le potenze di $a+b$, e ordinare secondo le potenze decrescenti di a.

38. Sviluppare $(a+b+c)^9$ secondo le potenze decrescenti di a, e provare che lo sviluppo è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_9}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi positivi, non escluso lo zero, tali che sia

$$\alpha + \beta + \gamma = 9.$$

39. Dimostrare che la potenza

$$(a + b + c)^n$$

è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che la loro somma sia eguale ad n.

40. Dimostrare che la potenza

$$(a + b + c + d + \ldots)^n$$

è eguale alla somma di tutti i termini che si deducono dalla formola

$$\frac{P_n}{P_\alpha . P_\beta . P_\gamma . P_\delta \ldots} a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$$

quando si attribuiscano ad α, β, γ tutti i valori interi e positivi, non escluso lo zero, tali che sia

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = n$$

41. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un trinomio.

42. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un quadrinomio.

43. Assegnare il numero dei termini dello sviluppo della potenza n^a d'un polinomio di m termini.

44. Applicare il teorema proposto al N. 40 al quadrato, al cubo ed alla quarta potenza d'un polinomio di m termini.

45. Verificare l'identità

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \left(-\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 + \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} d\right)^2 +$$
$$+ \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c - \frac{1}{2} d\right)^2$$

46. Verificare l'identità

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=24\,abc$$

47. Verificare l'identità

$$\left.\begin{array}{r}(a+b+c+d)^4-(a+b+c-d)^4-\\ -(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-\\ -(-a+b+c+d)^4+(-a+b+c-d)^4+\\ +(-a+b-c+d)^4+(-a-b+c+d)^4\end{array}\right\}=192\,abcd$$

48. Trovare il coefficiente di x^4 nello sviluppo di

$$(1+x+x^2)^3$$

49. Trovare il coefficiente di x^7 nello sviluppo di

$$(1+2\,x+3\,x^2+4\,x^3)^4$$

50. Qual'è il cofficiente di x^8 nello sviluppo di

$$(1+x+x^2+\ldots.+x^{10})^2?$$

D. Besso.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 23 e 24

23 *Dato un triangolo ABC si costruisca un secondo triangolo $A_1B_1C_1$ coi lati B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 eguali rispettivamente ai segmenti AA', BB', CC' che uniscono i vertici A, B, C con i punti A', B', C' dei lati ad essi opposti, o dei loro prolungamenti, determinati dalle*

$$\frac{\mathrm{B\,A'}}{\mathrm{A'C}}=\frac{\mathrm{C\,B'}}{\mathrm{B'A}}=\frac{\mathrm{A\,C'}}{\mathrm{C'B}}=m,$$

in cui m *significa un numero positivo o negativo. Sia $A_2B_2C_2$ il triangolo derivato, con analoga costruzione, dal triangolo $A_1B_1C_1$, e $A_3B_3C_3$ quello derivato da $A_2B_2C_2$. Provare: 1° che esistono tre valori di* m *per ciascuno dei quali il triangolo $A_2B_2C_2$ è simile al triangolo ABC; 2° che esistono sei valori di* m *per ciascuno dei quali il triangolo $A_3B_3C_3$ è simile al triangolo ABC.*

D. Besso.

Soluzione del Prof. *S. Catania* (*).

Si dicano a, b, c i numeri che misurano i lati del triangolo fondamentale, rispettivamente opposti agli angoli A, B, C, ed egual significato abbiano a_1, b_1, c_1 rispetto al primo triangolo derivato, a_2, b_2, c_2 rispetto al secondo, e a_3, b_3, c_3 rispetto al terzo.

(*) Altre soluzioni di questa questione vennero inviate dai Sigg. Prof.ri *G. Riboni, F. Viaggi.*

Dall'essere

$$\frac{BA'}{A'C} = m \quad \text{si trae} \quad A'C = \frac{a}{m+1}$$

e dal triangolo $AA'C$ si deduce:

$$AA'^2 = AC^2 + A'C^2 - 2\,AC\,.\,A'C.\cos C.$$

Esprimendo $\cos C$ in funzione di a, b, c, e tenendo conto delle notazioni sopra indicate, dopo facili riduzioni si ha:

$$(m+1)^2\, a_1^2 = b^2 m^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\, m + c^2.$$

Similmente si ottiene:

$$(m+1)^2\, b_1^2 = c^2 m^2 + (c^2 + a^2 - b^2)\, m + a^2$$
$$(m+1)^2\, c_1^2 = a^2 m^2 + (a^2 + b^2 - c^2)\, m + b^2.$$

Nello stesso modo partendo dal triangolo $A_1 B_1 C_1$ si esprimono a_2, b_2, c_2 in funzione di a_1, b_1, c_1, ai quali ultimi numeri sostituendo i valori dati dalle tre precedenti formole si ha:

$$(m+1)^4\, a_2^2 = c^2 m^4 + 2\,(c^2 + a^2 - b^2)\, m^3 + (5a^2 - b^2 - c^2)\, m^2 + \\ + 2\,(a^2 + b^2 - c^2)\, m + b^2$$

$$(m+1)^4\, b_2^2 = a^2 m^4 + 2\,(a^2 + b^2 - c^2)\, m^3 + (5b^2 - c^2 - a^2)\, m^2 + \\ + 2\,(c^2 + b^2 - a^2)\, m + c^2$$

$$(m+1)^4\, c_2^2 = b^2 m^4 + 2\,(b^2 + c^2 - a^2)\, m^3 + (5c^2 - a^2 - b^2)\, m^2 + \\ + 2\,(c^2 + a^2 - b^2)\, m + a^2.$$

Ora il triangolo ABC può essere simile ad $A_2B_2C_2$ o a $B_2C_2A_2$ o a $C_2A_2B_2$, dove le lettere che occupano uno stesso posto sono vertici omologhi a quelli indicati dalle lettere di egual posto nel triangolo ABC.

Nel primo caso per la similitudine devono sussistere le relazioni

$$\frac{a_2}{a} = \frac{b_2}{b} = \frac{c_2}{c}$$

Quadrando, sostituendo per a_2^2, b_2^2, c_2^2 i valori ora trovati, togliendo i denominatori, trasportando, riducendo e ordinando rispetto ad m, le dette relazioni si riducono a

$$A\, m^4 + 2\,(A - B)\, m^3 - (A + B)\, m^2 - 2\,(A - B)\, m + B = o$$
$$C\, m^4 + 2\,(C - D)\, m^3 - (C + D)\, m^2 - 2\,(C - D)\, m + D = o$$

dove

$$b^4 - a^2 c^2 = A\,,\; a^4 - b^2 c^2 = B\,.\; c^4 - a^2 b^2 = C\,,\; c^2 b^2 - a^4 = D.$$

Queste due equazioni ammettono evidentemente le due soluzioni comuni 1 e -1. La soluzione $m = -1$ deve considerarsi come estranea. Abbassando le due equazioni precedenti al secondo grado, col dividerne i primi membri per $m^2 - 1$, si ottengono due equazioni quadratiche le quali non ammettono nessun'altra soluzione in comune.

Nel secondo caso si hanno altre due equazioni di quarto grado a cui deve soddisfare il valore di m, le quali ammettono soltanto il fattor comune $m^2 + 2m$. Escludendo la soluzione $m = o$, che non corrisponde a nessuna costruzione, si ha $m = -2$.

Nel terzo caso si ha $m = -\frac{1}{2}$.

Dunque esistono tre valori di m, e sono $1, -2, -\frac{1}{2}$, per ciascuno dei quali il secondo triangolo derivato riesce simile al triangolo fondamentale.

Partendo dal triangolo $A_2 B_2 C_2$ si possono esibire a_3, b_3, c_3 in funzioni di a_2, b_2, c_2, e poi, per mezzo delle formole precedenti, in funzione di a, b, c. Così si ha:

$$(m+1)^6 a_3^2 = a^2 m^6 + 3(a^2 + b^2 - c^2) m^5 + 3(4b^2 + c^2 - a^2) m^4 +$$
$$+ (2c^2 - 11a^2 + 9b^2) m^3 + 3(-a^2 - b^2 + 4c^2) m^2 + 3(-b^2 + c^2 + a^2) m + a^2$$

ecc., ecc.

Anche qui, come precedentemente, il triangolo A B C può essere simile al triangolo $A_3B_3C_3$ in tre maniere diverse. La prima maniera dà luogo a due equazioni, a cui i valori di m devono soddisfare, le quali non ammettono nessuna soluzione comune. La seconda, dopo facili riduzioni, dà luogo alle due condizioni seguenti a cui m deve soddisfare:

$$\begin{gathered} A(m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1) + \\ + C(3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m) = o \\ B(m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1) + \\ + A(3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m) = o \end{gathered}$$

le quali sono soddisfatte dalle soluzioni comuni alle due equazioni

$$(1) \qquad m^6 + 3m^5 - 3m^4 - 11m^3 - 3m^2 + 3m + 1 = o$$
$$(2) \qquad 3m^5 + 3m^4 - 9m^3 - 12m^2 - 3m = o.$$

La seconda essendo divisibile per 3 ed ammettendo le soluzioni $m = o$, $m = -1$ che non verificano la prima, si riduce a

$$m^3 - 3m - 1 = o.$$

Il primo membro di questa equazione è un divisore esatto del primo membro dell'equazione (1), onde le (1) e (2) ammettono tre soluzioni comuni, che sono quelle dell'equazione cubica

$$m^3 - 3m - 1 = o.$$

Quest'equazione ha tutte e tre le sue radici reali, le quali si possono trovare col metodo esposto a pag. 266 della trigonometria del Serret, traduzione italiana di *A. Ferrucci*, 1856. Applicando questo metodo si trovano per m i tre valori seguenti:

$$m' = 2\,sen\,70^\circ\ ,\ m'' = -2\,sen\,10^\circ\ ,\ m''' = -2\,sen\,50^\circ.$$

La terza maniera di essere simili i triangoli A B C, $A_3 B_3 C_3$ dà luogo all'equazione cubica

$$m^3 + 3m^2 - 1 = 0.$$

le cui radici sono le reciproche di quelle dell'equazione precedente.

Dunque esistono sei valori di m, e sono i tre ora trovati ed i loro reciproci, per ciascun dei quali il terzo triangolo derivato riesce simile al triangolo fondamentale.

Si può inoltre notare che dalla definizione di m risulta che se un valore di m dà un triangolo derivato simile al fondamentale, anche il valore reciproco dà un triangolo derivato simile ad A B C.

Infine la costruzione del triangolo $A_1B_1C_1$ si eseguisce nel seguente modo: Da A′ si guidi la parallela a BB′, nello stesso senso di BB′ ed eguale a BB′. Detto E l'altro estremo di questo segmento parallelo a BB′, unendo A con E, sarà AA′E il primo triangolo derivato.

24. *Se* a, b, c, f *rappresentano numeri positivi e si ha*

$$ax^2 + bxy + cy^2 = f \text{ e } v^2 = x^2 + y^2$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di v^2 sono dati dall'equazione $(b^2 - 4ac)\, v^4 + 4f\,(a + c)\, v^2 - 4f^2 = o.$

A. Lugli.

Dimostrazione del Prof. *M. Rocchetti* (*).

Dall'equazione $x^2 + y^2 = v^2$ si ha $x^2 = v^2 - y^2$; questo valore si sostituisce nella prima equazione e, tolto il radicale, si ottiene

$$y^4\,[b^2 + (a-c)^2] - y^2 \left\{v^2\,[b^2 + 2a\,(a-c)] - 2f\,(a-c)\right\} + \\ + a^2v^4 - 2afv^2 + f^2 = o.$$

Perchè il valore di y^2 sia reale, deve verificarsi la relazione

$$\left\{v^2\,[b^2 + 2a\,(a-c)] - 2f\,(a-c)\right\}^2 - \\ - 4\,[b^2 + (a-c)^2]\,(a^2v^4 - 2afv^2 + f^2) \geqq o;$$

sviluppando e riducendo, si ottiene

$$(b^2 - 4ac)\, v^4 + 4f\,(a+c)\, v^2 - 4f^2 \geqq o. \tag{1}$$

I valori che annullano il primo membro della (1) sono

$$v_1^2 = \frac{2f}{(a+c) - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}} \tag{2}$$

$$v_2^2 = \frac{2f}{(a+c) + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}} \tag{3}$$

Se $b^2 - 4ac = o$ il primo membro della (1) si annulla soltanto per $v^2 = \dfrac{f}{a+c}$, che rappresenta il minimo.

Se $b^2 - 4ac < o$, il valore (2) rappresenta il massimo e il valore (3) il minimo.

Se $b^2 - 4ac > o$, il valore (2) rappresenta il minimo e il valore (3) il massimo.

Dunque in tutti i casi i valori massimo e minimo di $x^2 + y^2$ sono dati dai valori (2) e (3), che annullano il primo membro della (1).

(*) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Sigg. Prof.ri *S. Catania, F. Viaggi, U. Scarpis.*

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

A. I. G. T.

(A PROPOSITO DI UN LIBRO RECENTE)

Già da parecchi anni fu fondato in Inghilterra e ivi prospera un sodalizio (Association for the Improvement of Geometrical Teaching, o brevemente A. I. G. T.), avente per iscopo di promuovere e dirigere gli studii atti a far progredire i metodi d'insegnamento della Geometria, e, in particolare, di tener viva un'agitazione pacifica contro l'uso esclusivo nelle scuole degli *Elementi* di Euclide (1). Nell'epoca in cui esso venne istituito — quantunque centinaia di insegnanti non dissimulassero che sarebbero stati lieti di surrogare con qualche testo moderno quello del vecchio Alessandrino — i supremi Corpi esaminatori si ostinavano a esigere non solo che le proposizioni di Geometria elementare si studiassero nell'ordine adottato da Euclide, ma anche che si dimostrassero in modo identico a quello che egli aveva proposto. Per vincere questa resistenza l'A. I. G. T. ottenne l'appoggio dell'Associazione Britannica per l'avanzamento della Scienza: infatti al Congresso che questa tenne a Bradford nel 1873 fu letta una relazione (2) favorevole in massima alle idee dell'*Association*, in cui però è detto che in quel tempo non esisteva ancora un libro avente tale autorità da poter bandire Euclide, sono pòi espresse alcune idee sull'indirizzo che tale libro dovrebbe avere (3) ed è preso impegno di

---

(1) Il discorso inaugurale fu pronunziato dal prof. HIRST e si legge tradotto in italiano, assieme al resoconto della prima seduta, a pag. 180–187 del T. IX (1871) del *Giornale di Matematiche*.

Si veggano anche sullo stesso argomento i due lavori:

HIRST. *Discorso sull'Introduzione agli Elementi di Geometria del Prof. Wright* (*Giornale di Matematiche*, T. VI (1868), pag. 369).

WILSON. *Euclide come testo di Geometria elementare* (l. c., pag. 361).

L'esempio della rivolta contro Euclide venne dall'alto. Infatti nel discorso pronunciato nel 1869 da Sylvester per l'inaugurazione del Congresso dell'Associazione Britannica leggiamo i periodi: « Io mi rallegrerei.... di vedere Euclide sepolto onorevolmente negli scaffali a una profondità maggiore di quella a cui può arrivare qualunque scandaglio, fuori della portata di qualunque scolaro..... Il primo studio di Euclide mi fece odiare la Geometria; ciò spero varrà a scusarmi se il modo con cui ho parlato di esso come libro di testo ha urtate le opinioni di alcuni fra i presenti (e so che ve ne sono alcuni che collocano Euclide come secondo in santità solo rispetto alla Bibbia e lo considerano come una delle basi della costituzione inglese). »

Quale contrasto fra questa opinione e l'ammirazione sconfinata che si è professata per Euclide durante tanto tempo, della quale fanno fede le parole che, a tredici secoli di distanza, scrissero il commentatore Proclo [« Se ad essi (gli *Elementi* di Euclide) tu vuoi aggiungere o togliere qualcosa, riconoscerai che ti allontani dalla Scienza e ti lasci fuorviare verso l'errore o l'ignoranza »] e Lagrange [« La geometria è una lingua morta, e colui che non la studia in Euclide fa lo stesso di chi volesse apprendere il Greco ed il Latino leggendo le opere moderne scritte in queste due lingue »]!

(2) Report of the Committee appointed to consider the possibility of Improvement in the Methods of Instructions in Elementary Geometry, the Committee consisting of Prof. Sylvester, Prof. Cayley, Prof. Hirst, Rev. Prof. B. Price, Prof. H. I. S. Smith, Dr. Spottiswoode, Mr. R. B. Hayward, Dr. Salmon, Rev. Prof. Townsend, Prof. Fuller, Prof. Kelland, Mr. J. M. Wilson and Prof. Clifford (secretary) (*Report of British Association*, 1873, p. 459-460).

(3) Non sarà forse senza interesse per il lettore il sapere che il principale fra i suggerimenti dati consiste nel consigliare di premettere all'insegnamento della Geometria pura quella disciplina che apparve nelle nostre scuole col nome di Geometria intuitiva, e che questo consiglio venne seguito.

ritornare sull'argomento quando questo libro fosse stato compiuto. L'A. I. G. T. — che fin dal 1873 aveva schizzato tale lavoro — non rimase insensibile a questo invito, e tre anni dopo fu in grado di presentare un *Syllabus of Plane Geometry*, sul quale nel 1876 fu fatta una relazione (1) lusinghiera al Congresso tenuto a Glasgow dall'Associazione Britannica (2); le conclusioni di questa relazione si rilevano dal seguente periodo che ci piace riportare: " La Commissione non esita a dare come risultato dell'esame complessivo che essa fece del *Syllabus*, che questo si manifesta redatto con tanta cura e con tali riguardi verso le condizioni essenziali del problema, da rendere desiderabilissimo che esso venga analizzato dettagliatamente da deputazioni autorizzate delle Università e degli altri grandi Istituti di istruzione del Regno onde deciderne l'adozione come testo degli esami di Geometria elementare dopo avervi introdotte quelle modificazioni che il detto esame può eventualmente dimostrare necessarie. „ Incoraggiata da questo successo, l'A. I. G. T. prese l'iniziativa di una petizione alle autorità di Cambridge e Oxford per ottenere una maggiore libertà nell' insegnamento della Geometria; questa petizione fu firmata da un gran numero di persone competenti ed ebbe per effetto l'autorizzazione di sostituire nell' insegnamento le dimostrazioni euclidee con altre del pari soddisfacenti.

Un permesso analogo fu concesso dagli altri Istituti. Onde oggidì in Inghilterra, un candidato a un esame, per rendere palese la verità di un teorema di Geometria, può adoperare qualsiasi ragionamento, purchè sintetico e basato su proposizioni che, anche nel testo Greco, precedono quella da dimostrare. Si può quindi dire che gli sforzi dell'A. I. G. T. siano stati coronati da esito soddisfacente per quanto concerne i rudimenti della Scienza dell'estensione.

A facilitare il raggiungimento del proprio scopo l'A. I. G. T. intraprese una serie di pubblicazioni.

La prima di esse è il *Syllabus* (London, Macmillan), a cui sopra si alluse e contiene in sunto ristrettissimo ciò che si deve sostituire ai primi sei Libri di Euclide: il disegno ivi schizzato fu eseguito sia dall'Associazione stessa coll'opera *The Elements of Plane Geometry* (London, Sonnenschein), sia dal Wilson coll'*Elementar Geometry* (London, Macmillan).

Ma questi lavori, per quanto pregevoli, non hanno un grande interesse per noi Italiani, che possediamo già parecchi buoni trattati i quali, pur essendo informati al metodo euclideo, insegnano il modo di arrecare agli *Elementi* quei miglioramenti che lo stato attuale della Scienza esige e i programmi ufficiali consentono. Per converso è stato recentemente pubblicato dalla stessa A. I. G. T. un nuovo opuscolo (*A Syllabus of Modern Plane Geometry*, 32 p., London, Macmillan) che può interessare noi pure, perchè esso non ha un esatto riscontro (per quanto so) nella letteratura nostra, potendosi designare come un riassunto di Geometria complementare.

Dopo un'*Introduzione*, in cui si trovano le nozioni sui segmenti rettilinei,

(1) V. *Report of British Association*, 1876, p. 8-13.

(2) La Commissione era la stessa di prima, coll'aggiunta del Prof. Henrici e dei Sigg. J. W. L. Glaisher e Hayward (relatore).

esso contiene un interessantissimo capitolo sulle *Proprietà dei Triangoli*, ove sono raccolti i teoremi fondamentali della teoria delle trasversali con molteplici applicazioni, e le proprietà fondamentali dei punti, rette, circonferenze connesse a un triangolo e che i moderni (specialmente Brocard, Lemoine, Taylor e Tucker) hanno per primi considerate. Segue poi un capitolo sulle *Forme armoniche* e uno sulle *Proprietà armoniche del quadrangolo e del quadrilatero completi*. I due capitoli seguenti concernono i *Cerchii* (poli e polari, cerchii ortogonali, assi radicali, centri di similitudine); il successivo alcuni *Problemi di massimo e minimo* trattati geometricamente e i due ultimi un cenno sui *Rapporti anarmonici* e il *Metodo della projezione*.

Ci sia permesso di chiudere questo articolo con due osservazioni.

L'una si riferisce a quanto nel *Syllabus* è detto intorno al principio di dualità. A nostro avviso, anche in un primo insegnamento della Geometria projettiva si può dimostrare che per ogni proposizione della Geometria di posizione ne esiste un'altra — che si dirà correlativa della prima — di cui enunciato e dimostrazione si ottengono dall'enunciato e dalla dimostrazione della prima mediante certi scambi di parole: basta infatti notare che ogni ragionamento che si fa nella Geometria di posizione nasce combinando opportunamente i postulati dello spazio relativi all'incidenza di punti, rette, piani, e che questi postulati sono a due a due correlativi, fatta eccezione per quelli che sono correlativi a sè stessi. Per conseguenza quanto è detto a pag. 15-16 dell'opuscolo in questione può rendersi più completo ed esatto. Esempi opportuni si potranno addurre per scemare le difficoltà che la precedente dimostrazione del principio di dualità può presentare ad un principiante a cagione della generalità di essa.

L'altra osservazione concerne gli elementi imaginarii. L'introdurre la nozione di punti imaginarii unicamente come un artificio per evitare la distinzione dei varii casi di una stessa figura, non ci sembra un sistema degno del patrocinio di un'Associazione pel progresso dell'insegnamento geometrico, anzi sembrerebbe meritevole di venir combattuto da essa. Noi possediamo già dei mezzi per definire e studiare gli elementi imaginarii, sia considerati in coppie sia presi separatamente, mezzi i quali non lasciano nulla a desiderare e per rigore e per chiarezza, e ai quali non manca che una maggior diffusione per divenire patrimonio di tutti. Già in Italia si è cominciato ad adottarli vuoi nell'insegnamento universitario vuoi nei trattati migliori; or non sarebbe forse un compito nobilissimo per l'A. I. G. T. quello di ottenerne l'adozione anche in Inghilterra? E questo compito è di tanto più grave momento inquantochè in alcune produzioni geometriche contemporanee si nota una rilassatezza di rigore, che — è forza riconoscerlo! — si riscontra assai più di rado in quelle di Analisi e alla diffusione della quale è urgente di opporsi: uno dei modi più efficaci perciò è secondo noi appunto il cacciare dal santuario della Geometria pura le ordinarie trattazioni degli elementi immaginarii (e, aggingiamo, degli elementi all'infinito) alle quali molti perdonano la deficiente esattezza grazie alla loro maggiore intelligibilità.

Genova, 23 Maggio 1889.

Gino Loria.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica, Journal d'histoire des Mathématiques publié par Gustav Eneström. Stockholm; N. 1 et 2, 1889.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Maggio-Giugno. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole preparatoire de Saint-Barbe. 3e Serie, Treizième année. N. 6, 7, Juin-Juillet. Paris, Librairie Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. Vuibert. 13e année. N. 17, 18, 19, 20. Paris, M. Nony et Cie, 17 Rue des Ecoles, 1889.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo Dr F. Gomes Teixeira professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 2. Coimbra, 1889.

Le Scuole secondarie, eco dell'Associazione nazionale fra gli insegnanti delle Scuole secondarie. Anno VI, n. 16, 17. Milano, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Juin-Juillet, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. 3, Fasc. 5, 6: Maggio, Giugno 1889.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III, Fasc. 3, Maggio-Giugno 1889.

Rivista Scientifico-industriale compilata da Guido Vimercati. Anno XXI, n. 6 a 11. Firenze, 1889.

Agamennone (G.) — Registratore di terremoti a doppia velocità (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

Bardelli (G.) — Baricentri e momenti d'inerzia di superficie e di solidi di rotazione (Rend. R. Istituto Lom., 1889).

Beltrami (E.) — Sul principio di *Huygens* (Rend. R. Istituto Lom., 1889) — Sull'estensione del principio di D'Alembert all'elettrodinamica (Rend. R. Acc. Lincei, 1889) — Note fisico matematiche (Rend. Circolo mat. Palermo, 1889) — Sulla funzione potenziale della circonferenza (Id. id.).

Bigiavi (C.) — Sulle equazioni differenziali lineari (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

Clasen (B.-I.) — Sur une nouvelle méthode de résolution des équations linéaires e sur l'application de cette méthode au calcul des déterminants. (Paris, Gauthier-Villars, 1889).

Fazzini (U.) — *Elementi di Geometria* ad uso delle scuole industriali, agrarie e professionali. Scuola agraria di Scandicci presso Firenze, editrice, 1889.

Gardenghi (G.) — Teoria matematica della previdenza. Parma, 1889 — Prezzo L. 6.

Giudice (F.) — Sulle funzioni iperboliche e circolari (Giorn. di Mat. di Battaglini. Vol. XXVII, 1889).

Gugliuzzo Fazio (A.) — Caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e pei numeri della forma $q.10+1$. Appunti. Palermo, Libreria L. Pedone Lauriel, 1889. — Prezzo: cent. 50.

Lalbalettrier (G.) — *Trigonométrie rectiligne* suivie des principes de la nouvelle *Géométrie du triangle* à l'usage des Candidats aux Baccalauréats ès sciences et aux écoles du Gouvernement. Librairie Croville-Morant, Paris.

Longchamps (G. de) — Sur le cercle de Joachimsthal (Mathesis, t. IX).

Padova (E.) — La teoria di Maxwell negli spazii curvi (Rend. R. Acc. Lincei, 1889).

Peano (G.) — I principii di Geometria logicamente esposti (Torino, Bocca, 1889).

Poncini (G.) — Lotto e lotterie. Parma, 1885. — Prolusione ad un corso libero di calcoli finanziari tenuto nella R. Università di Parma durante l'anno 1888-89. Parma, 1889.

Teixeira (F. G.) — Sur le développement des fonctions implicites (Journal de math. Liouville-Resal-Jordan, 1889).

Vivanti (G.) — Fondamenti della teoria dei tipi ordinati (Annali di mat., 1889).

Sopra una proprietà dei fuochi delle coniche

Sia F un fuoco di una conica fissa, e sia P un punto qualunque fisso nel piano di essa. Per F e per P facciamo passare una conica qualunque, che incontrerà la prima in quattro punti A, B, C, D. Se chiamo α, β, γ, δ gli angoli che la retta F P fa con le rette che congiungono F con A, B, C, D, mi propongo di dimostrare la seguente relazione che esiste fra questi angoli:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \text{costante}.$$

L'equazione della conica fissa in coordinate polari, prendendo F come polo e la retta F P come asse, è della forma

$$\rho = p \frac{1}{1 + e \cos (\theta - \omega)} \quad (1)$$

in cui ρ è il raggio vettore, p è un parametro costante per una stessa conica, e è l'eccentricità, θ è il modulo ed ω è infine l'angolo che la retta F P fa con l'asse maggiore.

Ora cerchiamo l'equazione polare della conica variabile che passa per F e P. L'equazione generale di una conica in coordinate polari è

$$\rho^2 (a \cos^2 \theta + h \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta) + \rho (g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta) + c = o.$$

Ora, siccome questa conica passa pel polo F, dovrà essere evidentemente $c = o$, e l'equazione si riduce alla seguente:

$$\rho (a \cos^2 \theta + h \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta) + g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta = o. \quad (2)$$

Se vogliamo ora esprimere che la conica medesima passa per P, siccome P sta sull'asse polare, basterà fare $\theta = o$ nell'equazione (2), per ottenere la lunghezza F P. Si ricava F P $= \frac{-g}{a} =$ costante, la quale espressione indica che relazione deve esistere fra i coefficienti a e g.

Per trovare i punti d'incontro della conica fissa con la conica mobile, basterà dunque risolvere il sistema di due equazioni (1) e (2) a due incognite ρ e θ. Sostituendo il valore di ρ della (1) nella (2), avremo una equazione che contiene solamente la θ:

$$p\,\frac{(a \cos^2 \theta + h \operatorname{sen} \theta \cos \theta + b \operatorname{sen}^2 \theta)}{1 + e \cos (\theta - \omega)} + g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta = o. \qquad (3)$$

Quest'equazione risoluta rispetto a θ darà i quattro valori α, β, γ, δ. Anzitutto moltiplichiamola per $1 + e \cos (\theta - \omega)$, e ponendo poi $\cos (\theta - \omega) = \cos \theta \cos \omega + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \omega$ con semplici riduzioni si perviene all'equazione:

$$\cos^2 \theta\,(p\,a + e\,g \cos \omega) + \operatorname{sen}^2 \theta\,(p\,b + e\,f \operatorname{sen} \omega) + \qquad (4)$$
$$+ \operatorname{sen} \theta \cos \theta\,(h\,p + e\,f \cos \omega + e\,g \operatorname{sen} \omega) + g \cos \theta + f \operatorname{sen} \theta = o.$$

Ora esprimiamo $\operatorname{sen} \theta$ e $\cos \theta$ in funzione della tangente dell'angolo $\frac{1}{2}\theta$. Si hanno le formole:

$$\cos \theta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

Sostituendo questi valori e togliendo i denominatori si giunge finalmente alla seguente:

$$\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta\right)^2 \left(p\,a + e\,g \cos \omega\right) + h \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta \left(p\,b + e\,f \operatorname{sen} \omega\right) +$$
$$+ 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta\right) \left(h\,p + e\,f \cos \omega + e\,g \operatorname{sen} \omega\right) +$$
$$+ g \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta\right) \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta\right) + 2\,f \operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\theta\right) = o. \qquad (5)$$

Questa equazione è di quarto grado in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\theta$, e risoluta dà i valori $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\beta$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma$, $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\delta$. Ma si vede facilmente che nella (5) il termine noto è $(p\,a + e\,g \cos \omega + g)$, ed il coefficiente di $\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\theta$ è $(p\,a + e\,g \cos \omega - g)$. Dunque per la teoria delle equazioni si ha:

$$\frac{p\,a + e\,g\cos\omega + g}{p\,a + e\,g\cos\omega - g} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta. \qquad (6)$$

Ora si è visto che $\mathrm{F\,P} = \frac{-g}{a}$. Se chiamiamo M questo valore di F P, si ha $g = -a\,\mathrm{M}$, e sostituendo nella (6) si ha finalmente:

$$\frac{p - \mathrm{M}(e\cos\omega + 1)}{p - \mathrm{M}(e\cos\omega - 1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta. \qquad (7)$$

Ma questa formola dimostra il teorema, perchè nel primo membro p, M, ω, e sono costanti.

Questo teorema è molto generale; infatti una conica è determinata da cinque condizioni. Ora la conica mobile è sottoposta a due sole condizioni, cioè di passare per F e P. Vi sarà dunque un numero di coniche tre volte infinito che soddisfa al teorema.

La conica mobile può essere un circolo, anzi vi saranno infiniti circoli che soddisfano al teorema, che sono quelli che passano per i due punti F e P.

Analogamente la conica fissa può essere un cerchio, ed in tal caso il fuoco F sarà il centro del cerchio.

Se la conica mobile fosse evanescente, cioè si riducesse a due rette, il teorema dovrebbe sussistere ancora. Una delle rette passerà per F ed una per P. Quella che passa per F incontri la conica nei punti A e B. Evidentemente si ha $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta = 1$, e quindi rimane $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta =$ costante. Il quale teorema si può enunciare così: Se in una conica una retta passa per un punto fisso P incontrando la conica in coppie di punti C D, si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{P\,F\,C}\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\,\mathrm{P\,F\,D} = \text{costante.}\ (*)$$

Se F P fosse zero, nella formola (7) bisognerà porre $\mathrm{M} = o$, e si può enunciare il seguente teorema: Se una conica qualunque passa per il fuoco F di una conica fissa, incontrandola in punti A, B, C, D, se chiamo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gli angoli che la tangente in F fa con

(*) Teorema di Mac Cullagh V. Salmon, *Sezioni coniche*, pag. 202, es. 8.

le rette che uniscono F con A, B, C, D, si ha sempre la relazione:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = 1. \qquad (8)$$

Questo teorema somministra un'elegante costruzione per risolvere il problema: Costruire una conica quando sieno dati tre punti ed un fuoco della medesima.

Sieno A, B, C i tre punti ed F il fuoco.

Per F conduco una retta qualunque F D. Mi propongo di trovare uno dei punti D in cui questa retta taglia la conica incognita.

Congiungiamo i punti A, B, C con F, e costruiamo un cerchio col centro in F e di raggio qualunque, il quale incontrerà le rette F A, F B, F C, F D rispettivamente nei punti A′, B′, C′, D′. Se descrivo la conica determinata dai cinque punti A′, B′, C′, D′, F, per il teorema antecedente se chiamo α, β, γ, δ gli angoli che fa la tangente in F a questa conica, colle quattro rette che partono da F, abbiamo:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = 1.$$

Se ora consideriamo la conica che passa per i tre punti A, B, C, e che è tangente in F alla conica ora costruita, questa incontrerà la conica incognita in quattro punti A, B, C, D′, tali che

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta' = 1$$

cioè

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta'.$$

o, ciò che è lo stesso, il punto D′ coinciderà col punto D, e sarà il punto d'incontro della retta F D colla conica ora descritta. Così si potranno trovare altri punti della conica da descriversi.

È facile vedere che senza bisogno di costruire le coniche di cui ho parlato, si può condurre la tangente in F, e determinare il punto d'incontro della retta F D con costruzioni semplicissime e colla sola riga, servendosi del notissimo teorema di Pascal sull'esagono iscritto.

Un altro corollario che si deduce dal teorema (8) è il seguente: Se i quattro punti d'incontro della conica mobile colla conica fissa

A, B, C, D sono infinitamente vicini, od in altre parole, se le due coniche hanno un contatto di terz'ordine, si avrà: $\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2} \alpha = 1$, da cui $\alpha = \frac{\pi}{2}$; il che si enuncia dicendo:

Se una conica ha un contatto di terz' ordine con un' altra, e passa per il fuoco F di quest'ultima, la tangente in F è perpendicolare alla retta che congiunge F col punto di contatto.

I teoremi ora esposti hanno i loro corrispondenti col metodo delle polari reciproche. Ora indicherò soltanto il teorema reciproco al teorema (8).

Prendendo F per polo, alla conica fissa corrisponde un cerchio, essendo F il fuoco della conica medesima. Alla conica mobile corrisponderà una parabola, e la direzione della tangente in F corrisponderà alla direzione dell'asse della parabola. Dunque si può enunciare il teorema seguente:

Se quattro tangenti comuni ad un cerchio e ad una parabola fanno coll'asse di quest'ultima degli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, fra essi esiste la relazione

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = 1.$$

Il teorema (7) ed i seguenti ammettono la reciproca.

Infatti se nella (6) poniamo

$$\frac{p\, a + e\, g \cos \omega + g}{p\, a + e\, g \cos \omega - g} = \text{costante},$$

si ricava immediatamente $\frac{-g}{a} = \text{costante}$, il che dimostra che la conica mobile passa costantemente per un punto fisso P, la cui distanza da F avevamo chiamata con M.

Per terminare osservo che se la conica fissa è un cerchio, $p = \mathrm{R}$ raggio ed $e = o$, si ha

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma \ \operatorname{tg} \frac{1}{2} \delta = \frac{\mathrm{R} - \mathrm{M}}{\mathrm{R} + \mathrm{M}}.$$

A. Sauve.

SULLA TEORIA DELLE PARALLELE

È noto che se esiste un triangolo in cui la somma degli angoli sia eguale a due angoli retti, altrettanto avviene per qualsivoglia altro triangolo rettilineo, ed il postulato delle parallele, ossia che da un punto qualunque non può condursi che una sola parallela ad una retta data, è verificato. Per una via diversa si giunge qui ad una proposizione equivalente, sussistendo la quale, il postulato delle parallele è parimenti verificato. E senz'altro entro in materia, non presupponendo altre cognizioni all'infuori di quelle che d'ordinario si sogliono premettere alla teoria, e cioè dei soli primi teoremi dell'Euclide.

Teorema 1° — Due rette perpendicolari ad una medesima non possono incontrarsi.

Dimostrazione. — Se è possibile che le due rette A C, B D (Tav. III, fig. 1) s'incontrino in O, allora nella sovrapposizione del piano a sè stesso mediante una mezza rotazione attorno ad A B, le due rette C C′ e D D′ verrebbero ad avere un altro punto comune O′ dall'altra parte di A B senza coincidere, il che è contrario all'assioma della retta.

Teorema 2° — Due rette che fanno con una terza angoli ordinatamente uguali, non possono incontrarsi.

Dimostrazione. — Tirisi pel punto di mezzo della A B (fig. 2) la O G perpendicolare a C F, e si prolunghi fino ad incontrare l'altra retta D E nel punto H. Risulteranno i due triangoli O G A, O B H che dico essere congruenti: infatti essi hanno i lati O A ed O B uguali per ipotesi, e questi lati sono adiacenti ad angoli rispettivamente uguali, gli uni come opposti al vertice, gli altri per ipotesi. Sarà perciò, nei due triangoli, l'angolo in H uguale all'angolo in G, cioè la retta G H perpendicolare anche alla D E, e le due rette C F, D E perpendicolari ad una medesima non potranno incontrarsi.

Scolio 1° — Dalla uguaglianza di una coppia degli angoli formati attorno ai punti A e B (di due angoli *corrispondenti*), deriva quella degli angoli delle rimanenti coppie, e quella degli angoli *alterni* (tanto interni che esterni), e infine l'uguaglianza della somma degli angoli interni dalla stessa parte a due angoli retti.

Scolio 2° — Per un punto C (fig. 3), esterno ad una retta A B, si può dunque condurre almeno una retta E F che non incontri la A B, quale è ad esempio la perpendicolare alla retta C D, che sia condotta, alla sua volta da C ad angolo retto sulla stessa A B. Ora: o la E F è l'unica retta del piano, fra tutte quelle tirate per C, che non incontri la retta data A B, o non lo è. Nel primo caso avverrà che qualsivoglia altra retta per C, facente colla E F un angolo qualunque, anche piccolissimo, incontrerà la A B (da una parte o dall'altra del punto D), e la E F stessa potrà dirsi costituire la posizione limite di una retta che ruoti in qualunque senso attorno a C, in modo da incontrare la A B successivamente in punti sempre più lontani da D; che se invece vi sono altre rette per C, oltre la E F, che non incontrano la A B, allora queste saranno necessariamente in numero infinito, e cioè, com'è manifesto, tutte quelle comprese in un certo angolo (che avrà E F per bisettrice), i cui lati sieno le ultime rette, a partire dalla E F stessa e dalle due parti di questa, che non incontrano la A B. Siano H K ed H′ K′ le due rette nominate, per modo che qualsivoglia retta per C non compresa entro l'angolo H C H′ e nel suo opposto, incontri la A B da una banda o dall'altra del punto D, e precisamente a distanza tanto maggiore da D quanto minore è la inclinazione sua sulla H K o sulla H′ K′: si potrà allora dire anche qui che ciascuna di queste due rette è la posizione limite di una retta mobile che da C si diriga successivamente a punti sempre più lontani della retta A B.

Esprimeremo questo fatto dicendo con ardita ma comoda metafora che la E F nell'un caso, o le H K ed H′ K′ nell'altro, incontrano la retta data A B a *distanza infinita*.

Definizione. — Due rette che s'incontrano a distanza infinita diconsi *parallele*: e deriva dalle considerazioni precedenti, che per un punto C esterno ad una retta data A B o si potrà condurre a questa una sola parallela, o se ne potranno condurre due (una per ciascun verso), simmetriche rispetto alla perpendicolare calata da C sulla A B.

Teorema 3° — Se il punto di concorso di due rette (di cui una sia fissa e l'altra ruoti attorno ad un punto) si allontana indefinitamente, l'angolo da esse formato finisce col divenire più piccolo di qualunque angolo dato.

Dimostrazione. — Siano le rette A B, C L (fig. 4) fra loro parallele, e sia ω un angolo piccolo a piacere: una retta condotta per C, e che faccia colla C L l'angolo ω, incontrerà per l'ipotesi la retta A B in un punto M. Prendasi ora su questa, a partire da M, un segmento M N uguale a C M e tirisi la C N; sarà allora, nel triangolo C M N, l'angolo in N uguale all'angolo M C N, e però minore dell'angolo ω.

Una retta C M che ruoti attorno a C, in modo che il suo punto d'intersezione colla A B vada successivamente ed indefinitamente allontanandosi, può quindi fare con questa un angolo minore di ogni angolo dato, C. V. D.

Teorema 4° — Una parallela alla retta A B in C, è parallela alla stessa in ogni altro suo punto.

Dimostrazione. — Sia C D (fig. 5) una parallela ad A B condotta per il punto C: dico che la parallela ad A B (nello stesso senso in cui lo è la C D, per esempio verso destra) tirata per un altro punto qualunque M od M' della C D, coincide con questa retta.

Si tiri infatti per M una retta che faccia colla C D un angolo ω piccolo a piacere, e congiungasi C con un punto qualunque E della detta retta situato al di sopra della A B: sarà per ipotesi la C E una secante della A B, ed a maggior ragione lo sarà la M E che dovrà incontrare la A B in un punto situato a sinistra di quello in cui concorrono la A B stessa e la C E. Che se il punto considerato è M', alla sinistra di C, si tiri per esso la M' E' che faccia colla M' C un angolo ω' piccolo a piacere, e se è possibile essa non incontri la A B, rimanendo cioè tutta al di sopra di questa retta (nel caso della figura). Allora se si conduce per C la C F facente colla C D un angolo uguale ad ω', questa (Teorema 2°) non incontrerà la M' E', ossia sarà tutta da una stessa parte, e precisamente al di sopra (nel caso nostro) della medesima, e però non potrà incontrare neppure la A B che rispetto alla M′ E′ stessa giace dall'altra parte. Non sarebbe dunque C D la parallela alla A B tirata pel punto C e nel verso A-B, come è stato supposto: è perciò necessario l'ammettere che la M′ E′ tirata comunque per M′ e al di sotto della M′ C D, incontri la retta data A B.

Concludendo: le parallele alla retta A B, nel verso da A a B, passanti per M od M′, sono adunque le M D ed M′ D′ coincidenti con la C D parallela in C, C. V. D.

Corollario. — Se la C D è l'unica parallela ad A B che si possa tirare per C, ossia se è parallela ad A B in entrambi i sensi A B e B A, anche per ogni altro punto della C D passerà una retta unica parallela ad A B, che sarà la stessa C D. Ma se questa è l'unica parallela ad A B per M, essa sarà perpendicolare alla M L condotta per M ad angolo retto sulla A B, laonde «*Se due rette* A B, C D *perpendicolari ad una medesima retta* C H *sono parallele, qualunque altra retta* M L *perpendicolare ad una di esse è perpendicolare anche all'altra*».

Teorema 5° — Se un quadrangolo è rettangolo, i suoi lati opposti sono fra di loro uguali.

Dimostrazione. — Sia il quadrangolo L M M′ L′ (fig. 6) avente, per ipotesi, tutti gli angoli retti, e, se è possibile, sia la M L maggiore della M′ L′: allora sovrapponendo il rettangolo a sè stesso dopo averlo rovesciato, e posto L L′ sovra L′ L, dovrebbe il punto M cader fuori della L′ M′ ed il punto M′ entro il segmento L M, in guisa che la M M′, nella nuova posizione, traverserebbe il lato M′ M del rettangolo primitivo, e però non sarebbe perpendicolare alle L M, L′ M′ contrariamente all'ipotesi.

Analogamente si dimostrerebbe l'uguaglianza degli altri due lati opposti.

Corollario. — Da questo teorema e dal precedente corollario deriva immediatamente la proposizione «*Se due rette sono parallele fra di loro in entrambe le loro opposte direzioni, esse sono dappertutto ugualmente distanti, ossia si possono condurre loro delle perpendicolari comuni, le quali sono uguali*».

Reciprocamente abbiamo il teorema seguente.

Teorema 6° — Se due rette ammettono due perpendicolari comuni, esse sono parallele in entrambe le loro opposte direzioni.

Dimostrazione. — Sieno le A C, B D (fig. 7) perpendicolari, per ipotesi, all'una e all'altra delle A B, C D: per il teorema precedente sarà A C = B D ed A B = C D. Condotta allora la diagonale C B, si avranno i due triangoli congruenti A B C e D C B, ne' quali saranno perciò uguali gli angoli A B C e B C D opposti ai lati uguali A C e B D. Adunque la diagonale C B del rettangolo dato forma coi lati opposti di questo angoli alterni interni uguali. Ma con la giusta posizione di due, tre, ecc., rettangoli congruenti ad A B D C, come è indicato nella figura, si formano altri rettangoli A E F C, A G H C, ecc., della stessa natura, nei quali cioè le diagonali C E, C G, ecc., formano angoli uguali coi lati opposti; e d'altronde aumentando indefinitamente il numero dei rettangoli, l'angolo C G A finisce col diventare più piccolo di ogni angolo dato (Teorema 3°): dunque anche l'angolo G C H, uguale a C G A, ha la stessa proprietà, e la retta C H essendo la posizione limite della diagonale C G allorchè il punto G si allontana indefinitamente sulla A B è parallela ad A B.

Che poi la C H sia parallela a questa retta anche nella direzione opposta B A, si deduce dal fatto che essa è perpendicolare ad A C, donde segue che quanto avviene da una parte di questa retta, si ripete simmetricamente dall'altra parte. Laonde le due rette A B, C D perpendicolari, per ipotesi, alle due A C, B D, sono parallele in entrambe le loro direzioni, C. V. D.

Scolio 1° — Se in un quadrangolo A B D C i due angoli A e B sono retti, ed i lati opposti A C, B D ed A B, C D sono fra di loro uguali, eziandio i rimanenti angoli del quadrangolo saranno retti, ed i suoi lati opposti saranno perciò paralleli.

Scolio 2° — Nelle ipotesi dello scolio precedente, tirando la diagonale A D, deriva inoltre che i triangoli A B D, D C A sono tra loro uguali, e però che in ciascuno la somma dei tre angoli è uguale a due retti. Ma se ciò avviene, il postulato euclideo delle parallele è vero, come fu avvertito: sicchè quando sieno verificate le sopradette ipotesi, si può affermare senz'altro l'esistenza o la verità del postulato medesimo.

Sassari, 18 febbraio 1889.

A. Suini.

ESEMPI GEOMETRICI DI LIMITI

Nel secondo fascicolo di questo periodico il signor Benucci ha mostrato un esempio geometrico di limite, considerando la serie dei triangoli, ciascuno dei quali ha per lati le mediane di quello che lo precede.

Io mi propongo con questa Nota di generalizzare quello studio, giovandomi anche di alcuni risultati ottenuti dal signor Besso nella Nota inserita in questo periodico « Di alcune proprietà del triangolo » anno II, fascicolo I.

1. Sia dato il triangolo ABC (Tav. III, fig. 8ª), si dividano i lati AB, BC, CA nei punti C′, A′, B′, in modo che sia

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{CB'}{B'A}=\frac{AC'}{C'B}=m$$

essendo m un numero dato qualsivoglia, che riterremo positivo quando A′, B′, C′ sieno sui lati, negativo quando sui loro prolungamenti.

Da A′ si conduca A′D eguale e parallela alla BB′; il triangolo AA′D dico che ha per lati i tre segmenti AA′, BB′, CC′.

Infatti si congiunga D con B′ e si prolunghi fino ad incontrare in P il lato AB; sarà DB′ eguale e parallela a BA′, ed inoltre si avrà:

$$\frac{BP}{PA}=\frac{CB'}{B'A}=\frac{BA'}{A'C}=m,$$

da cui risulta che la figura A′CB′P è un parallelogrammo, e però

$$A'C=B'P \quad \text{e} \quad BC=DP.$$

Essendo BC eguale e parallela a DP, sarà pure BP eguale e parallela a CD, e poichè $BP = AC'$ (non potendosi dividere un segmento in un rapporto dato che in un sol modo rispetto alla grandezza delle parti) sarà AC' eguale e parallela a CD, e però anche AD eguale e parallela a CC'. c. d. d.

2. Dal punto M, in cui la $A'D$ incontra il lato AC, si conduca la parallela a BC fino ad incontrare in N il lato AB; dico che il triangolo AMN è ottenuto da $A'AD$ nello stesso modo come questo fu ottenuto da ABC (bisogna però pensare di percorrere il contorno in senso opposto a quello con cui si è percorso il primo).

Infatti essendo

$$\Delta\,.\,A'MC \sim MB'D$$

si ha

$$\frac{DM}{MA'} = \frac{DB'}{A'C} = \frac{BA'}{A'C} = m$$

e però il lato AM del triangolo AMN ha la proprietà enunciata.

Il lato AA' è segato in Q dalla DP in modo che

$$\frac{A'Q}{QA} = \frac{CB'}{B'A} = \frac{PQ}{QB'} = m, \tag{1}$$

ed inoltre si ha che

$$\frac{PN}{NB} = \frac{B'M}{MC} = m, \tag{2}$$

per cui combinando la (1) colla (2) si ha

$$PN : NB = PQ : QB'.$$

Quest'ultima proporzione mostra che la NQ è parallela alla BB', e quindi anche alla $A'D$, e che il quadrilatero $MNQD$ è un parallelogrammo, e quindi $MN = DQ$.

Per provare che anche il terzo lato AN è eguale al segmento $A'S$, che nel triangolo $A'AD$ congiunge il vertice A' col punto S dividente il lato AD nel rapporto m, si osservi che essendo

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AS}{SD} = m$$

la $A'S$ è parallela ad AB; inoltre si ha

$$\frac{BC'}{BN} = \frac{AP}{BN} = \frac{AB'}{MC} = \frac{m+1}{m} = \frac{BC}{BA'},$$

e però NA' sarà parallela a CC' e quindi ad AD; allora essendo il quadrilatero $NA'SA$ un parallelogrammo, si conchiude che

$$AN = A'S. \qquad \text{c. d. d.}$$

3. Si noti che il triangolo AMN è simile ad ABC, e che applicando ripetutamente questo procedimento si formerà una serie indefinita di triangoli ABC, $AA'D$, AMN, ecc., ecc., che indicheremo brevemente con

$$\alpha) \qquad T \quad T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \ldots\ldots$$

tali che quelli di posto dispari saranno simili fra di loro, e così pure quelli di posto pari.

4. Stabiliamo geometricamente il rapporto del triangolo $AA'D$ al triangolo dato ABC, e però quello di uno qualunque della serie (α) al suo precedente.

Dalle proporzioni

$$\frac{MC}{MB'} = \frac{AB'}{B'C} = \frac{1}{m}$$

si ricava componendo

$$\frac{MC}{B'C} = \frac{1}{m+1} \qquad \frac{B'C}{AC} = \frac{m}{m+1}$$

e però

$$\frac{MC}{AC} = \frac{m}{(m+1)^2}.$$

Ora

$$\frac{\Delta\,.\,A'MC}{\Delta\,.\,A'AC} = \frac{MC}{AC} = \frac{m}{(m+1)^2}, \quad \frac{\Delta\,.\,A'AC}{\Delta\,.\,ABC} = \frac{A'C}{BC} = \frac{1}{m+1}.$$

Quindi, moltiplicando membro a membro queste proporzioni, si ha

$$(\beta) \qquad \frac{\Delta\,.\,A'MC}{\Delta\,.\,ABC} = \frac{m}{(m+1)^3}.$$

Ma dalla

$$\frac{AC}{MC} = \frac{(m+1)^2}{m}$$

dividendo si ottiene:

$$\frac{AM}{MC} = \frac{m^2+m+1}{m}$$

e quindi

$$\frac{\Delta . AMA'}{\Delta . A'MC} = \frac{AM}{MC} = \frac{m^2+m+1}{m}, \quad \frac{\Delta . A'AD}{\Delta . A'MA} = \frac{A'D}{A'M} = m+1.$$

Moltiplicando membro a membro si ha

$$(\gamma) \qquad \frac{\Delta . A'AD}{\Delta . A'MC} = \frac{(m^2+m+1)(m+1)}{m}.$$

Moltiplicando di nuovo la (β) per la (γ) si ha

$$(\delta) \qquad \frac{\Delta . A'AD}{\Delta . ABC} = \frac{T_1}{T} = \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}.$$

Si riconosce facilmente, ponendo eguale ad y l' espressione $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$ e risolvendo poi l'equazione di secondo grado in m così ottenuta, che l'espressione stessa diventa minima per $m = 1$, cioè quando ogni triangolo della serie (α) abbia per lati le mediane di quello che lo precede; essa non ha alcun massimo, potendo annullarsi il denominatore per $m = -1$, nel qual caso le rette A A′, B B′, C C′ diventano parallele rispettivamente ai lati opposti.

5. Quando il valore del rapporto (δ) sia < 1, si potrà considerare il limite a cui tende la somma di tutti i triangoli della serie (α); ora condizione necessaria e sufficiente affinchè $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2} < 1$ è che sia $m > o$, ossia che i punti A′ B′ C′ sieno sui lati del triangolo A B C; in questo caso se si prende come unità di misura il triangolo stesso ABC, si ha

$$S = 1 + \frac{m^2+m+1}{(m+1)^2} + \frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4} + \cdots\cdots$$

e però

$$\lim S = \frac{m^2+2m+1}{m} = \frac{(m+1)^2}{m}.$$

Nella stessa ipotesi di $m > o$ si potrebbero determinare separatamente i limiti a cui tendono le due somme di triangoli simili di posto pari e dispari nella serie (α).

6. La formola $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$ non cambia di valore se in luogo di m si pone $\frac{1}{m}$, il che significa che se i lati del triangolo ABC si dividono nel rapporto m percorrendo il perimetro in senso opposto a quello tenuto finora, il triangolo formato con le nuove rette AA′, BB′, CC′ sarà equivalente a quello formato coi primitivi segmenti.

Si osservi che questi triangoli equivalenti non saranno in generale eguali, poichè si riconosce facilmente che il triangolo ABC dovrebbe essere equilatero.

Volendo studiare la variazione dei triangoli della serie (α) basterà restringere la variazione di m fra i limiti -1 e $+1$; a due valori differenti di m compresi in quest'intervallo corrispondono differenti valori per i triangoli, giacchè l'equazione $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}=k$, dove k è una costante, dà due radici reciproche per m, alle quali corrispondono, per ciò che si è detto, triangoli equivalenti. Al variare di m da -1 a $+1$ i triangoli decrescono da valori infinitamente grandi, fino ai $\frac{3}{4}$ del triangolo dato quando $m=1$. Al valore $m=o$ corrisponde il triangolo dato ABC.

7. Fissato il valore di m sarà facile calcolare i lati dei triangoli simili al dato ABC, che nella serie (α) occupano i posti dispari; chiamando x il lato omologo di $a=BC$, nel triangolo T_2, si avrà:

$$\frac{T_2}{T}=\frac{x^2}{a^2}=\frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4},$$

da cui

$$x=a\,\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}.$$

Anche nella serie dei lati omologhi pei triangoli simili che occupano il posto dispari nella (α) si potrà considerare il limite della somma quando $m > o$; si avrà:

$$S = a\,\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2} + a\,\frac{(m^2+m+1)^2}{(m+1)^4} + \ldots\ldots$$

$$\lim S = \frac{a\,(m^2+m+1)}{m}.$$

E poichè i perimetri di triangoli simili stanno come due lati omologhi, indicando con $\sum p$ la somma dei perimetri de' triangoli simili che nella serie (α) occupano posto dispari, avremo

$$\sum p : \frac{a\,(m^2+m+1)}{m} = (a+b+c) : a$$

e però

$$\lim \sum p = \frac{(a+b+c)\,(m^2+m+1)}{m}.$$

Pavia, 18 aprile 1889.

Francesco Panizza.

SULLA RICERCA DEL VOLUME DELLA PIRAMIDE TRIANGOLARE
quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli

La formola che dà il volume di una piramide triangolare in funzione delle lunghezze dei suoi spigoli si trova in una Memoria di *Eulero* del 1758, in una di *Lagrange* del 1773, nell'opera di *Mascheroni:* « Problemi per gli agrimensori », Pavia, 1793, in una nota della Geometria di *Legendre*, ed in molti libri moderni. Essa si suole ricavare da quella che esprime il volume d'una piramide triangolare in funzione delle lunghezze di tre spigoli contigui e degli angoli ch'essi formano due a due, la quale si ottiene applicando delle formole di trigonometria sferica.

Ma il calcolo del volume d'una piramide triangolare, date le lunghezze dei suoi spigoli, era stato già effettuato dal *Tartaglia*, e nel seguente modo, che è molto elementare (*). Sia S A B C (Tav. III, fig. 9) una piramide triangolare e sieno date le lunghezze de'suoi spigoli. Condotta la S D perpendicolare ad A B, e la C E pure perpendicolare ad A B, e da D la parallela a C E fino al punto H, in cui essa incontra la parallela ad A B condotta per C, e infine, nel piano D S H, la S M perpendicolare a D H, sarà S M l'altezza della piramide quando si prenda per base la faccia A B C. Ora, essendo noti i lati dei due triangoli A B C, S A B, si possono calcolare, applicando proposizioni di Euclide, i segmenti B E, B D e le due altezze C E, S D; così sarà nota la C H, eguale alla differenza di quei due segmenti, e saranno pur noti i due lati S D, D H del triangolo S D H. Il terzo lato di questo triangolo si ricaverà poi dal triangolo S C H, rettangolo in H, del quale sono noti il cateto C H e la ipotenusa S C. Calcolati così i tre lati del triangolo, si potrà valutarne l'altezza S M.

D. Besso.

(*) *La quarta parte del general trattato de' numeri et misure*, di Nicolò Tartaglia; nella quale si riducono in numeri quasi la maggior parte delle figure, così superficiali, come corporee della Geometria: et oltre a ciò s'applicano alla materia, o si metteno in atto prattico, cose molto utile a tutte le qualità delle persone, et infinitamente desiderate dei studiosi delle Divine Mathematice. Venezia, 1560.

SOLUZIONE DELLE QUISTIONI 24, 25, 26

24. *Se* a, b, c, f *rappresentano numeri positivi e si ha:*

$$a x^2 + b x y + c y^2 = f \quad ed \quad r^2 = x^2 + y^2 ,$$

dimostrare elementarmente che i valori massimo e minimo di r^2 *sono dati dall'equazione*

$$(b^2 - 4 a c) r^4 + 4 f (a + c) r^2 - 4 f^2 = 0.$$

A. Lugli.

Altra soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Si supporrà che a, b, c, f siano semplicemente numeri reali.

Se $f = 0$, la prima equazione si scinde in due lineari omogenee a coefficienti reali, se $b^2 - 4 a c \geqq 0$, o complessi, se $b^2 - 4 a c < 0$; e secondo che si verifichi l'uno o l'altro caso r^2 ammette due valori minimi eguali a 0, o non ne ammette; valore massimo non ne ha in nessun caso.

Se f è diverso da zero, possiamo supporlo positivo, senza togliere con ciò nulla alla generalità; e tale ipotesi faremo. Ricorrendo alla variabile θ legata alle x, y dalle relazioni

$$x = r \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} \theta$$

(le quali possono sostituire la seconda equazione proposta), ed eliminando x, y tra esse e la prima equazione data, si ottiene

$$r^2 = \frac{f}{a \cos^2 \theta + b \operatorname{sen} \theta \cos \theta + c \operatorname{sen}^2 \theta}$$

e da questa, con l'aiuto dell'angolo ausiliario ψ determinato dalle

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{a - c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \qquad \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}$$

dopo agevoli trasformazioni si deduce

$$r^2 = \frac{2 f}{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \operatorname{sen} (\psi + 2 \theta)}$$

dalla quale, se chiamiamo r_1^2, r_2^2 il massimo e il minimo di r^2,

$$r_1^2 = \frac{2 f}{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \quad r_2^2 = \frac{2 f}{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \tag{α}$$

che son radici dell'equazione

$$(b^2 - 4 a c) r^4 + 4 f (a + c) r^2 - 4 f^2 = 0.$$

Per accettare i valori di r_1^2. r_2^2 bisogna evidentemente che essi sieno positivi: quindi

$$\begin{array}{llll}
\text{se} & a+c<0 & \text{e} \quad b^2-4ac<0, & r^2 \text{ non ha nè massimo nè minimo} \\
\text{»} & a+c<0 & \text{»} \quad b^2-4ac>0 & \multirow{3}{*}{\Bigg\}, r^2 \text{ ha solo minimo}} \\
\text{»} & a+c=0 & & \\
\text{»} & a+c>0 & \text{»} \quad b^2-4ac>0 & \\
\text{»} & a+c>0 & \text{»} \quad b^2-4ac<0, & r^2 \text{ ha massimo e minimo.}
\end{array}$$

Nel caso $b^2 - 4ac = 0$, del quale non ci siamo occupati nello specchietto precedente, si ha la formola seguente:

$$r^2 = \frac{2f}{a + c + [a + c]' \operatorname{sen} (\psi + 2\theta)}$$

nella quale $[a + c]'$ sta a rappresentare il valore assoluto di $a + c$; se a (e quindi c) è negativo, r^2 ha sempre valore negativo, quindi r immaginario ed r^2 non ha nè massimo nè minimo; se a (e quindi c) è positivo, si possono accettare le formole (α).

25. *Dato un cerchio ed un triangolo circoscritto al medesimo, condurre una coppia di tangenti al cerchio che stacchi dai lati del triangolo dato segmenti proporzionali ai tre segmenti dati.*

A. Sauve.

Soluzione del Prof. *F. Palatini* (*).

Cominciamo dallo studiare il luogo dei punti tali, che la coppia di tangenti che da ognuno di essi può condursi ad una conica data stacchi sopra due tangenti fisse della medesima segmenti proporzionali a due segmenti dati.

Sia K la conica data, che supporremo dotata di centro, e siano m_1, m_2 i due segmenti dati e supponiamo dapprima che le tangenti fisse t_1, t_2 siano parallele fra loro. Si vede allora senza veruna difficoltà che il luogo cercato è costituito dalle quattro rette parallele a t_1, t_2, le quali tagliano internamente ed esternamente la distanza delle due tangenti date nel rapporto m_1, m_2.

Ma siano ora comunque poste le due tangenti date t_1, t_2 e sia la t_1 destinata a contenere i segmenti corrispondenti ad m_1. Conducendo per un punto qualunque S del piano un fascio di raggi e facendo corrispondere fra loro i due punti d'incontro di ciascun raggio colla curva data, otteniamo sopra questa due forme punteggiate projettive, e conducendo le tangenti alla K in tutti i suoi punti e facendo corrispondere fra loro le tangenti che toccano la curva in punti corrispondenti delle due punteggiate, otteniamo due fasci di raggi del secondo

(*) Un altra soluzione di questa quistione, oltre le due che qui si pubblicano, venne inviata dal Sig. Prof. *S. Catania*.

ordine projettivi. Se poi seghiamo uno di questi due fasci colla tangente t_1 e l'altro colla t_2, otteniamo sopra queste tangenti due punteggiate projettive. I punti d'incontro delle coppie di raggi corrispondenti dei due fasci del secondo ordine si trovano evidentemente in linea retta, cioè sulla polare s di S; siccome poi i fasci stessi oltre ad essere projettivi sono anche in involuzione, così si vede che nelle nostre due punteggiate sopra t_1, t_2 sono segmenti determinati da punti corrispondenti quelli staccati sulle due rette dalla coppia di tangenti alla nostra curva uscenti da un punto qualunque della s. Le nostre due punteggiate sopra t_1, t_2 sono simili, cioè hanno proporzionali i segmenti corrispondenti, se si corrispondono fra loro i punti all'infinito delle medesime. Ora questi punti all'infinito si corrisponderanno, quando vi saranno due tangenti uscenti da un punto di s parallele alle due tangenti t_1, t_2, ciò che avviene evidentemente quando s contiene il polo L (v. Tav. III, fig. 10) della retta DE parallela alla corda di contatto BC di t_1, t_2 e simmetrica a questa corda rispetto al centro della curva, cioè quando s contiene il punto L simmetrico ad A (punto d'incontro di t_1, t_2) rispetto al centro della curva, giacchè le tangenti che escono da tal punto L sono precisamente parallele alle t_1, t_2.

Da quanto abbiamo fin qui detto possiamo adunque concludere: ogni retta passante per L è tale, che le coppie di tangenti che escono dai punti di essa determinano sulle t_1, t_2 segmenti proporzionali, e solo punti posti sopra una di tali rette godono di questa proprietà. Dunque il luogo da noi cercato sarà o una retta od un sistema di rette passanti per L. Sia g la retta od una delle rette che costituiscono il nostro luogo, per cui ogni coppia di tangenti condotta da un punto di g alla K segna sopra t_1, t_2 due segmenti x, y tali che:

$$x : y = m_1 : m_2 .$$

Quindi se sono $R\,S$, $H\,K$ i due segmenti determinati dalle tangenti alla curva, parallele alla g, sulle t_1, t_2, avremo:

$$\mathrm{RS} : \mathrm{HK} = \mathrm{RS} : \mathrm{QT} = m_1 : m_2.$$

Ma i triangoli QPR, SPT sono evidentemente simili, per cui si ha:

$$\mathrm{QT} : \mathrm{PT} = \mathrm{RS} : \mathrm{PS}$$

e siccome per la simiglianza dei triangoli PST, MLN si ha:

$$\mathrm{PT} : \mathrm{PS} = \mathrm{MN} : \mathrm{ML}$$

così risulterà infine:

$$\mathrm{ML} : \mathrm{MN} = \mathrm{RS} : \mathrm{QT} = m_1 ; m_2$$

Dunque se g è una delle rette i cui punti soddisfano al problema, essa deve tagliare t_2 in un punto tale, che sia:

$$\mathrm{ML} : \mathrm{MN} = m_1 : m_2$$

Reciprocamente è facile vedere che ogni retta la quale passi per L e seghi t_2 nel modo anzidetto è tale, che le tangenti alla K ad essa parallele determinano sopra t_1, t_2 due segmenti che stanno fra loro come $m_1 : m_2$. Difatti sia g una tal retta, R S ed H K $=$ Q T siano i segmenti determinati rispettivamente sopra t_1, t_2 dalle due tangenti parallele alla g. Essendo simili i triangoli P S T, Q P R, M L N, avremo:

$$\mathrm{SR : QT = PS : PT = ML : MN} = m_1 : m_2.$$

E siccome noi abbiamo dimostrato che, data una retta qualunque passante per L, ogni coppia di tangenti condotte da un suo punto qualunque alla curva stacca sopra t_1, t_2 due segmenti di rapporto costante, così si vede che la retta g la quale passa per L ed il cui punto all'infinito soddisfa al problema, è una retta che appartiene al luogo che stiamo studiando.

Ora sulla t_2 vi sono due punti N tali, che sia:

$$\mathrm{ML : MN} = m_1 : m_2$$

perciò il nostro luogo è l'insieme di due rette passanti per L e che si costruiscono nel modo indicato. Notiamo che di queste due rette una è esterna e l'altra è interna all'angolo P L M, per cui una di esse taglia e l'altra non taglia la curva.

Se poi si vuole che il rapporto delle coppie di segmenti determinati sopra t_1, t_2 dalle coppie di tangenti che soddisfano al problema sia eguale a quello di m_1, m_2 senz'altra specificazione, cioè senza determinare su quali delle due tangenti fisse si devono trovare i segmenti che corrispondono ad m_1 e su quale quelli che corrispondono ad m_2, allora naturalmente il luogo si compone di un'altra coppia di rette passanti per L e che si ottengono con costruzione analoga a quella indicata per le altre due rette già considerate.

Risolto così questo problema, noi possiamo risolvere molte altre questioni riguardanti la costruzione di coppie di tangenti che stacchino sopra certe rette date, tangenti ad una o a più coniche, segmenti con dati rapporti, e fra tali questioni entra appunto la 25ª proposta nel Periodico e che noi tratteremo, come abbiamo fatto per il problema sopra risolto, considerando una conica qualunque dotata di centro, invece di un cerchio.

Sia dunque A B C (fig. 11) il dato triangolo circoscritto alla nostra conica K e si voglia condurre una coppia di tangenti tali, che i segmenti determinati sopra A B, B C, C A stiano fra loro ordinatamente come tre segmenti dati m_1, m_2, m_3. Perciò costruisco le due rette L M, L N, luogo dei punti dai quali tirando le coppie di tangenti alla curva, esse determinano sopra A B, B C coppie di segmenti che stanno fra loro come $m_1 : m_2$. Poi costruisco le due rette P Q, P R luogo dei punti, dai quali tirando alla curva le coppie di tangenti, esse determinano sopre B C, C A coppie di segmenti che stanno fra loro come $m_2 : m_3$. Le due coppie di rette così costruite si tagliano in quattro punti. Sia H uno di questi punti, da cui si conduca la coppia di tangenti alla curva e siano ordinatamente a, b, c i segmenti che essa stacca dai lati A B, B C, C A. Allora si ha evidentemente:

$$a : b = m_1 : m_2, \qquad b : c = m_2 : m_3$$

cioè:

$$a : b : c = m_1 : m_2 : m_3.$$

Evidentemente le due rette, luogo dei punti dai quali conducendo le coppie di tangenti alla curva, esse staccano sopra A B, A C segmenti proporzionali ad m_1, m_3 devono passare per i quattro punti E, F, G, H d'intersezione delle due coppie di rette prima considerate, cioè saranno le diagonali del quadrangolo semplice E F G H. Dunque si vede che in generale vi sono quattro coppie di tangenti che soddisfano al problema. Se poi osserviamo che delle due rette L M, L N una taglia la curva e l'altra no, ciò che avviene pure delle altre due rette P Q, P R, vediamo che almeno tre dei punti E, F, G, H cadono sempre fuori della curva, (potendo essere interno solo quello in cui si tagliano le due rette che segano la conica) e quindi tre coppie di tangenti che soddisfano al problema esistono sempre (sono sempre reali), mentre la quarta può non esistere (essere immaginaria).

Prima di chiudere notiamo che, applicando le considerazioni svolte nel risolvere il nostro primo problema al caso in cui la conica data sia un'iperbole e le tangenti fisse t_1, t_2 i suoi assintoti, osservando che il punto L simmetrico ad A (che in questo caso è il centro della curva) rispetto al centro della conica è A stesso, si può facilmente concludere che in ogni iperbole, tirata una retta qualunque per il centro, le coppie di tangenti che dai punti di questa possono condursi alla curva determinano sui due assintoti segmenti proporzionali. E siccome le due punteggiate projettive simili, che abbiamo considerato sopra t_1, t_2 nel risolvere quel problema, in questo caso hanno unito il loro punto d'intersezione, così si vede pure che queste due punteggiate sono prospettive e perciò le rette che ne congiungono i punti corrispondenti formano un fascio di raggi, il cui centro dovrà giacere evidentemente all'infinito.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Lemma. — « Se una circonferenza è inscritta in una striscia e da un punto « qualunque del suo piano si conducono le tangenti, il segmento da esse staccato su un lato della striscia è quarto proporzionale dopo la distanza del « punto dall'altro lato, l'altezza della striscia, e il segmento d'una delle tangenti « compreso tra il punto di contatto e quello scelto. »

Sia O la circonferenza che tocchi in X, Y i lati XX', YY' d'una striscia; le tangenti condotte da un punto V incontrino in M, N il lato XX', e la VM incontri in S l'altro lato e tocchi in T la circonferenza; sia I il punto all'infinito dei lati della striscia.

Fissato il senso positivo della rotazione, si hanno le seguenti eguaglianze d'angoli:

$$NOV = XOM = MOT = IOS = \frac{1}{2} XOT$$

perciò i fasci O (N X M I), O (V M T S) sono eguali e

$$(N X M I) = (V M T S);$$

dalla quale eguaglianza di rapporti anarmonici, ricordando che I è punto all'infinito e osservando che $XM = MT$, si deduce

$$NM = \frac{VT \cdot MS}{VS}$$

e questa dimostra il lemma, perchè M S, V S sono proporzionali all'altezza della striscia e alla distanza di V dal lato Y Y'.

Corollario. « Date due tangenti fisse d'un cerchio, il luogo geometrico dei « punti tali che le coppie di tangenti condotte da essi stacchino sulle tangenti « fisse segmenti proporzionali a segmenti dati, coincide col luogo dei punti le « cui distanze dalle tangenti parallele alle fisse sono inversamente proporzionali « ai segmenti dati: risulta quindi di due rette, delle quali una segante del cer« chio l'altra no ».

Ciò premesso, occupiamoci del problema proposto.

Del triangolo dato si costruisca il simmetrico rispetto al centro del cerchio; le coppie di tangenti condotte dai quattro punti, le cui distanze dai lati del secondo triangolo sono inversamente proporzionali ai segmenti dati, risolvono il problema.

I quattro punti sono o tutti e quattro esterni o tre esterni e uno interno alla circonferenza: quindi le soluzioni possono essere quattro o tre.

26. *Se una piramide ha per base un poligono regolare, la somma dei quadrati degli spigoli laterali è eguale a tante volte la somma dei quadrati della congiungente il vertice col centro della base e del raggio del cerchio circoscritto al poligono base, quanti sono i lati di questo poligono.*

Soluzione del Prof. *A. de Zolt* (*).

Sia A B C... la base, V il vertice della piramide, M la projezione normale di V sul piano della base, O il centro di questa.

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sig. Prof. *L. Bosi*, *S. Catania*, *F. Palatini*, *G. Russo*, *U. Scarpis*, *F. Viaggi* e dal Sig. *L. Tessari*.

Dai triangoli OAM, OBM, ecc.; si hanno le n eguaglianze

$$AM^2 = MO^2 + OA^2 - 2\,MO \,.\, OA \cos AOM,$$

$$BM^2 = MO^2 + OB^2 - 2\,MO \,.\, OB \cos BOM,$$

. . . .

che, sommate membro a membro, danno l'eguaglianza

$$\sum AM^2 = n\,MO^2 + n\,OA^2 - 2\,MO \sum OA \cos AOM.$$

Ora, un poligono, i cui lati siano equipollenti ai segmenti OA, OB, OC,... è chiuso, è quindi nulla la sua projezione su qualunque retta, in particolare sulla OM; ossia è

$$\sum OA \cos AOM = 0,$$

e però

$$\sum AM^2 = n\,MO^2 + n\,OA^2.$$

Infine, aggiungendo ai due membri di questa eguaglianza $n\,MV^2$, si ha, per il teorema pitagorico

$$\sum AV^2 = n\,OV^2 + n\,OA^2; \text{ c. d. d.}$$

QUISTIONI PROPOSTE. (*)

27. Dimostrare che, se l'equazione

$$t^4 - 4\,t^3 + \alpha\,t^2 - 4\,t + \beta = 0$$

ha le quattro radici positive, dev'essere

$$\alpha = 6, \quad \beta = 1.$$

28*. Se da un punto, interno ad un poligono equilatero, si guidano segmenti terminati ai lati, uno per ciascun lato, e tutti egualmente inclinati sui rispettivi lati, la somma di tutti questi

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate agli alunni delle nostre Scuole secondarie e di esse si pubblicheranno soltanto le soluzioni inviate dagli alunni stessi.

segmenti è indipendente dalla posizione di quel punto, e, per un dato poligono, essa è minima quando i segmenti sono perpendicolari ai rispettivi lati.

29*. Se nella formola

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}$$

si moltiplicano i due termini della frazione per $1 - \cos a$, e poi si sostituisce al coseno il suo valore in funzione del seno, si trova

$$\operatorname{tang}\frac{a}{2} = \pm\frac{1 \mp \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen} a},$$

la quale dà quattro valori per $\operatorname{tang}\frac{a}{2}$, mentre si può dimostrare a priori che, quando è dato $\operatorname{sen} a$, la tangente di $\frac{a}{2}$ ha due soli valori distinti; come si spiega l'apparente contraddizione?

30*. Se nella eguaglianza $\operatorname{tang}(\pi - a) = -\operatorname{tang} a$ si pone $a = \frac{\pi}{2}$, si ottiene $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = -\operatorname{tang}\frac{\pi}{2}$, da cui $\operatorname{tang}\frac{\pi}{2} = 0$; dove sta l'errore?

31*. Il volume d'una sfera supera d'un decimetro cubo quello del tetraedro regolare in essa inscritto; calcolare la lunghezza del raggio a meno d'un millimetro.

32*. L'angolo al vertice d'un triangolo isoscele è di 178° 50′; calcolare a meno di $\frac{1}{1000000}$, e senza valersi di tavole trigonometriche, il rapporto della base al perimetro.

D. Besso.

33. Esprimere in funzione del raggio della sfera circoscritta al dodecaedro (icosaedro) regolare, la somma dei quadrati delle rette che congiungono un vertice del dodecaedro (icosaedro) con quelli che non fanno parte delle facce concorrenti al vertice scelto.

34*. L'area di un triangolo qualunque è uguale al prodotto dei segmenti che il cerchio inscritto, o uno dei cerchi ex-iscritti, determina su uno dei lati del triangolo, per la cotangente della metà dell'angolo opposto.

G. Russo.

35*. I numeri della forma $4a + 1$ divengono quadrati perfetti per $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$

P. Montesano.

36*. Se m è pari ed a è un numero dispari qualunque, il binomio $a^m + 1$ diviso per 4 e 8 dà sempre per resto 2.

37*. Trovare il resto della divisione per 13 di 7^{100}.

38*. Dimostrare che se in un poligono $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ si dividono i lati, nel medesimo senso, internamente od esternamente nei punti $A'_1, A'_2, \ldots\ldots A'_n$ in modo che sia

$$A_1 A'_1 : A'_1 A_2 = A_2 A'_2 : A'_2 A_3 = \ldots\ldots, = A_n A'_n : A'_n A_1,$$

i due poligoni $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$, $A'_1 A'_2 \ldots\ldots A'_n$ hanno lo stesso centro di gravità.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Arithmetices principia nova methodo exposita a IOSEPH PEANO in R. Accademia militari professore, Analysin infinitorum in R. Taurinensi Atheneo docente (Torino, Bocca, 1882; pag. XVI-20).

Una delle idee più grandiose e geniali di Leibnitz è il progetto di creare una scrittura simbolica universale, nella quale tutti i concetti complessi fossero espressi, secondo regole fisse, mediante i segni convenzionali di pochi concetti elementari. Di questa scrittura simbolica universale, destinata ad essere un modo di esprimersi indipendente dalle varie lingue e analogo a quello usato nella numerazione scritta, egli credeva potersi trarre per la Logica, la Metafisica e qualunque altra scienza astratta, dei vantaggi simili a quelli che dal calcolo algebrico ottenne la Matematica. Guidato dall'analogia, egli credeva che con questi simboli, partendo dalle più semplici relazioni scambievoli delle idee, si potesse trasformarle, combinarle e giungere così a nuove relazioni, si potessero cioè trarre delle conseguenze e formulare dei giudizii; la cui verità dipenderebbe unicamente dall'avere applicato a dovere il calcolo logico. E, quasi trascinato dall'affascinante suo sogno, egli soggiungeva: In questa lingua non si potrebbe esprimere che la verità!

Io non so se vi sia finora stato qualcuno dotato di sufficiente vigoria intellettuale per mettere ad esecuzione con tutta questa ampiezza il concetto di Leibnitz, nè ho gran fiducia che la mente umana abbia ancora raggiunto un livello abbastanza alto per poter creare uno strumento con cui chiunque possa ragionare sempre esattamente. Ma invece, ridotto il disegno di Leibnitz a più modeste proporzioni, si può asserire che esso fu attuato dai cultori di quell'importante disciplina che si chiama Logica matematica o Calcolo della logica (*). Questa dottrina, esatta quanto la Matematica, ma più astratta, e però suscettibile di più numerose applicazioni, fu coltivata con successo dal Boole e da altri in Inghilterra, dallo Schröder in Germania, e fece il suo ingresso in Italia or fa un anno colla pubblicazione, per parte del Peano, dell'opera *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann preceduto dalle operazioni della Logica deduttiva* (Torino, Bocca, 1888).

Quello però che — almeno per quanto sappiamo — non era ancora stato fatto, era di mostrare come il Calcolo della logica si potesse vantaggiosamente applicare all'esposizione completa di qualche teoria: finora si avevano soltanto esempi sparsi di ragionamenti eseguiti con quel metodo, i quali, appunto per essere stati scelti evidentemente ad arte, potevano difficilmente persuadere i più restii ad ammettere la bontà del metodo stesso. Quindi nessuna argomentazione più persuasiva avrebbe potuto arrecare il Peano per far bene accogliere la dottrina ch'egli ha patrocinata presso di noi, del presentare l'opuscolo al quale è consacrata questa nota bibliografica.

In questo lavoro sono anzitutto riassunti, sotto forma concisa ma lucidissima, quei principii di Logica matematica necessari per l'intelligenza di ciò che segue. È della massima importanza che il lettore si sforzi di impadronirsene, anzi di famigliarizzarsi con essi; fissi specialmente la sua attenzione sull'ultima parte (pag. XIII-XVI) dell'introduzione (intitolata *Logicae notationes*), ove troverà esposta sotto forma nuova la teoria delle rappresentazioni di cui il Dedekind fece sì largo uso nell'opuscolo *Was sind und was wollen die Zahlen?* (**)

Dopo di ciò il Peano entra in argomento. Egli non si occupa, come fece Dedekind, di pervenire alla nozione di numero col puro ragionamento; ma ammette l'esistenza di enti, che chiama *numeri*, definiti da certe proprietà caratteristiche, le quali bastano e per generare tutto il gruppo partendo da un suo elemento (l'*unità*) e per stabilire tutte le proprietà del gruppo stesso. I teoremi sull'addizione formano il principal soggetto del § 1 degli *Arithmetices principia;* invece la sottrazione, la moltiplicazione, l'elevazione a potenza e la divisione sono studiate risp. nei §§ 2, 4, 5 e 6; le dimostrazioni, esposte tutte con i simboli logici, hanno per caratteristica comune un'applicazione dell'induzione completa. Nel § 7 sono raccolti, sotto il titolo di *Theoremata varia* gli enunciati di alcune proposizioni della teoria dei numeri, la dimostrazione delle quali è consigliata al lettore come esercizio utilissimo. Il § 8, ispirato agli stessi con-

---

(*) Sull'importanza della Logica matematica io mi sono già espresso in questo stesso periodico (T. III, pag. 115, nota) e nel mio discorso *I Poligoni di Poncelet* (Torino, 1889, pag. 47 e 48).

(**) Cf. questo periodico, T. III, pag. 155.

cetti che informano il Libro VII di Euclide, ha per iscopo i *Numerorum rationes*, cioè studia le proprietà dei rapporti e le operazioni su di essi. Il § 3 è dedicato ai teoremi sui numeri massimi e minimi di una classe. Dei due rimanenti (§ 9, *Rationalium systemata. Irrationales.* § 10, *Quantitatum systemata*) l'uno ha per iscopo di estendere ai numeri irrazionali i teoremi già dimostrati per gli interi e i rapporti, l'altro contiene una serie di teoremi relativi alla teoria di Cantor dei gruppi lineari di punti. Nell'introdurre i numeri irrazionali, l'A. si attiene in sostanza al ben noto procedimento che porta ordinariamente il nome di Dedekind; perciò egli introduce anzitutto (pag. 15) la nozione di limite superiore di una classe di numeri razionali e definisce la natura delle relazioni fra un numero razionale e un limite superiore espresse dai segni

$$> \quad = \quad <;$$

la definizione di irrazionale si può leggere poi nella prop. 5, § 9, che dice:

Quantità è ogni ente il quale si possa identificare al limite superiore d'una classe di numeri razionali, classe che non sia nulla e tale che esistano dei numeri razionali maggiori di tutti i suoi elementi. Nelle quantità sono compresi tutti i numeri reali positivi, razionali e irrazionali, eccettuati 0 e ∞.

Nel terminare questo annuncio (che, se tempo e spazio non ci fossero mancati, avremmo trasformato in un commento) degli *Arithmetices principia* non possiamo a meno di avvertire il lettore a non scoraggiarsi per le difficoltà che gli presenterà l'intelligenza del metodo usato dall'A. e di consigliarlo a tradurre in linguaggio comune gli enunciati delle proposizioni e le loro dimostrazioni (*); così facendo, non solo egli potrà persuadersi *ad oculo* dei vantaggi nella concisione che il Calcolo della logica offre, ma potrà anche farne nuove applicazioni ad altri argomenti a cui esso è evidentemente applicabile (**).

Mantova, 27 giugno 1889.

GINO LORIA.

GIUSEPPE GARDENGHI — *Teoria matematica della previdenza.* — Parma, Tip. Battei, 1889. — Prezzo L. 6.

Fino dal 1886 il Prof. Giuseppe Gardenghi pubblicò negli Annali di previdenza del Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio un molto lodato studio *Sull'ordinamento tecnico delle Società di mutuo soccorso*, nel quale si risolvevano, col semplice sussidio dell'Aritmetica e in base a certe ipotesi di mortalità e morbosità, i problemi che più interessano la previdenza. Quello studio fece nascere nella mente dell'A. il concetto di altro lavoro di maggior mole, in cui i problemi stessi fossero trattati colla generalità, che si raggiunge soltanto col-

---

(*) Aggiungiamo qui l'indicazione di alcuni errori di stampa che potrebbero sfuggire a qualche lettore inesperto:

pag.	XII,	linea	2,	invece di	$[x]\,\varepsilon\, a$	si legga	$[x\,\varepsilon]\, a$
»	»	»	23,	»	$[\varepsilon\,\alpha]\, y$	»	$[\varepsilon]\,\alpha\, y$
»	XIII,	»	18,	»	ɜ	»	ε
»	1,	prop.	3,	»	a, b, c	»	a, b
»	»	»	4,	»	a, b	»	a, b, c
»	12,	»	21,	»	$D\,(a, b)$	»	Ɑ (a, b).

(**) Tale è tutta la Geometria di Euclide.

l'uso del calcolo algebrico, e fossero svolte, come l'A. medesimo dice, *nuove considerazioni, che difficilmente si potrebbero esporre col solo sussidio dell'Aritmetica.*

Questo nuovo ed importante lavoro, che ci sta ora davanti in una bella e corretta edizione del Battei di Parma, non è puramente teorico, come il suo titolo potrebbe far credere, ma teorico-pratico, in quanto vi si trovano non soltanto le discussioni e le formule teoriche, ma ben'anche tutti i sussidi di tavole e di esempi numerici, che possono facilitare l'uso pratico delle formule stesse; e queste sono sempre ridotte alle espressioni più opportune per le applicazioni numeriche. Però, sebbene la parte pratica del libro, pel fine a cui mira, sia della maggiore importanza, e, per la competenza grande dell'A. sulla materia, sia riescita altamente lodevole per accuratezza e lucidità, e gli abbia imposto un lavoro considerevole e spesso ingrato, l'indole di questo periodico consiglia di prendere in esame speciale soltanto ciò che si trova in esso di interessante sotto l'aspetto teorico. Per questa ragione non mi tratterrò qui nè sulle numerose tabelle di calcoli numerici, di cui l'A. ha opportunamente e pazientemente corredato il suo libro, nè sull'ultima parte del suo lavoro, che è di vitale interesse per le società di mutuo soccorso, come quella che concerne il loro ordinamento economico e in cui si sviluppano, corredandoli di esempi, diversi metodi per la formazione dei loro bilanci tecnici, dai quali soltanto si possono dedurre un giudizio sicuro sul loro stato economico e le norme per i provvedimenti, che potessero essere necessari a garantire ai soci l'adempimento degli impegni presi verso di loro.

L'A. premette una introduzione, nella quale sono esposte con brevità e chiarezza le nozioni e i teoremi elementari del calcolo delle probabilità, dei quali si dovranno fare applicazioni nel corso del libro. Opportunamente, a raggiungere la chiarezza nella esposizione di concetti complessi, qui e dovunque occorre, egli fa uso, anzi che di molte parole, di esempi pratici bene scelti come quello, con cui, dopo avere accennato alle probabilità di tener conto dei gradi differenti di indecisione di tutti gli avvenimenti possibili per calcolare la probabilità matematica di uno qualunque di essi, chiarisce come gli avvenimenti stessi possono decomporsi in altri, ciascuno dei quali abbia un egual grado di indecisione.

Il calcolo delle probabilità non è rigorosamente applicabile agli avvenimenti sociali, perchè non si conoscono a priori nè il numero dei casi possibili, nè quello dei favorevoli ad un dato avvenimento, nè è dato apprezzare i loro gradi relativi di indecisione. Si può soltanto, mediante ripetute osservazioni, avere del rapporto, che dà il valore della probabilità matematica di uno qualunque di essi, una cognizione tanto più approssimata, quanto è maggiore il numero delle osservazioni fatte, come si deduce dalla *legge dei grandi numeri*. Con ciò l'A. nel § 2 prova la necessità e chiarisce il significato delle tavole statistiche relative agli avvenimenti sociali, che si hanno a considerare; tavole, il grado di attendibilità delle quali dipenderà, a tenore delle cose esposte, da due elementi, cioè dal numero degli avvenimenti osservati e dalla omogeneità loro. Le tavole di mortalità e di sopravvivenza difettano spesso grandemente per amendue le parti, ed è perciò utile fare uso dei metodi di correzione e di interpolazione, che l'A. svolge nei §§ 4 e 5 dopo avere nel § 3 date le note definizioni del quoziente di mortalità relativo ad un dato periodo di tempo e del quoziente istantaneo di mortalità, nonchè quello del quoziente di vitalità da lui introdotto.

Il metodo di correzione delle tavole di mortalità esposto tanto graficamente quanto algebricamente consiste nel tener successivamente conto di diverse serie di osservazioni fatte tutte ad eguali intervalli di tempo e nel completarle mediante l'interpolazione per sostituire poi ai risultati diretti della osservazione le medie aritmetiche di quelli, che si riscontrano nelle diverse serie così completate. — Quanto al metodo di interpolazione, l'A. parte dall'ipotesi che, almeno entro limiti abbastanza vicini, il quoziente istantaneo di mortalità aumenti in progressione geometrica d'anno in anno, e giunge per una via nuova e spedita alla formula nota del Gompertz, che contiene, come si sa, tre costanti da determinare quando siano noti i numeri dei superstiti in tre età differenti. Della bontà di questa formula, cioè del vantaggio, che si ha a farne uso, si ha una riprova nel § 9, in cui da un confronto fatto tra i risultati ottenuti colla formula stessa, quando i tre numeri necessari per la determinazione delle costanti siano tutti desunti da una certa tavola di mortalità, e i dati di diverse tavole, si rileva come quelli differiscano dai dati della tavola prescelta meno che questi fra di loro.

Col § 6, che definisce scientificamente i concetti di *vita probabile* di una persona e di *vita media* di un gruppo di persone, si chiude la parte generale e preparatoria del libro.

L'A., che, mirando principalmente all'utilità pratica del suo lavoro, ha voluto metterlo al livello delle colture matematiche più limitate, ha avuto ricorso al calcolo infinitesimale allora soltanto che questo era necessario a completare teoricamente un concetto, e lo ha fatto in guisa che le parti della monografia, in cui del calcolo medesimo si fa uso e che (quando non sono rimandate in nota o contraddistinte da annotazioni speciali) sono, per comodo del lettore, impresse in carattere minuto, possono essere tralasciate, in quanto tutto il rimanente costituisce un insieme completo ed intelligibile per sè. Gli elementi del calcolo delle probabilità, le tavole di mortalità e morbosità e le formule note dell'interesse composto costituiscono per il resto, a un di presso, i fondamenti ed il materiale tutto, con cui l'A. procede ad edificare la propria teoria, nella quale egli discute e risolve colla maggiore chiarezza e generalità tutti i problemi di previdenza, che si attengono direttamente all'uomo, e ai quali provvedono le società di mutuo soccorso. Così nei §§ 7, 10 e 13 si trovano le espressioni dei valori attuali per le singole età di un contributo vitalizio costante e di un'annualità vitalizia immediata a favore dei viventi al principio, alla metà e alla fine di ogni anno; nel § 11, premesse alcune considerazioni e formule relative all'interesse continuo, si tratta delle annualità o meglio rendite vitalizie pagabili per intervalli eguali ad $\frac{1^{\text{simo}}}{m}$ di anno e, trovando il limite per $m = \infty$ e facendo uso della formula di Eulero, che esprime un integrale definito per mezzo di una somma, si ottiene una espressione approssimata della rendita vitalizia continua; nei §§ dal 14 al 18 inclusivamente si trovano le espressioni analitiche delle annualità vitalizie differite (pensioni di vecchiaia) e si dimostrano alcuni teoremi interessanti ed originali, dai quali risulta come, calcolate le pensioni vitalizie decorribili da una data età, se ne possano dedurre immediatamente quelle relative ad un'altra decorrenza qual si voglia. Nei §§ dal 19 al 22 i teoremi relativi alla probabilità composta sono applicati a calcolare il valore attuale di una pensione a favore di due individui da pagarsi fin che entrambi siano morti, e delle probabilità composte medesime si dà una nuova ed elegante rappresentazione geometrica. La determinazione di una legge ausiliare di sopravvivenza con individui fittizi, per ciascuno dei quali la probabilità di sopravvivere dopo un certo intervallo di tempo sia eguale alla probabilità che sopravviva almeno una tra due persone di data età, non è nuova, ma è ottenuta qui con metodo nuovo e praticamente utile. I problemi relativi alla assicurazione della vita vengono risoluti in alcuni dei capitoli seguenti nella loro maggiore generalità, ed è notevole la espressione data nel § 28 del valore attuale di una somma da pagarsi al momento della morte di una persona in funzione di quello di una rendita vitalizia continua. Le numerose questioni relative alle casse per le vedove sono trattate nei §§ dal 29 al 31, nei quali si dimostrano, fra altro, alcune relazioni tra i valori dei diversi sussidi, le quali giovano in pratica perchè facilitano ed abbreviano i calcoli numerici. Nel § 32 l'A., da una questione propostasi, prende opportunità a trattare con larghezza notevole la nota teoria delle annualità ordinarie. Finalmente si determinano le espressioni dei valori attuali dei sussidi in caso di malattia in base ad una legge di morbosità data dall'A. medesimo nel volume, che ho avuto già occasione di ricordare; ed anche le formule relative a tali sussidi sono ridotte a quelle per le annualità vitalizie, il che permette di estendere ai sussidi stessi la maggior parte delle conclusioni, a cui si è giunti parlando delle pensioni di vecchiaia. E non posso qui omettere di notare come nel libro le formule, relative ai valori attuali di un contributo vitalizio costante, siano opportunamente collegate con quelle, che danno i valori attuali dei sussidi riferibili ai diversi casi considerati, per modo che i calcoli numerici fatti per gli uni servono in parte per gli altri e reciprocamente.

Le matematiche applicate ai problemi sociali hanno ancora pochi cultori in Italia e più nel campo degli economisti che in quello dei matematici. È da augurarsi che il Gardenghi, il quale colla monografia, che abbiamo rapidamente esaminata, ha senza dubbio aggiunto ai molti, che già aveva, un nuovo e grande titolo di benemerenza verso le società di mutuo soccorso, ne acquisti pure un altro verso la scienza dando nel nostro paese un forte e durevole impulso a questo ramo di matematiche, che ha un così grande avvenire.

Gregorio Ricci.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des Mathématiques publié par Gustav Eneström. Stockholm: n. 3, 1889.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Luglio-Agosto. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématique élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. de Longchamps, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, Lucien Lévy, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3e Serie, Treizième année. N. 8, 9. Août-septembre. Paris, libraire Ch. Delagrave, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. III, Fasc. 7, 8. Luglio, Agosto 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion, professeur à l'Université de Gand, et J. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Août-Septembre, 1889.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo III, Fasc. 4 e 5, luglio-agosto e settembre-ottobre, 1889.

Bustelli (A. M.) — L'insegnamento dell'aritmetica e della geometria secondo i nuovi programmi ufficiali per le scuole primarie e popolari. S. Lapi, Città di Castello, 1889 — Prezzo L. 1. 40.

Carrara (B.) — La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi. Torino, Paravia, 1889.

Carrozzini (A.) — Introduzione allo studio dell'algebra. Opera ad uso delle scuole secondarie. Urbino, 1889 — Prezzo L. 2. 50.

D'Ocagne (M.) — Quelques proprietés de l'ellipse, deviation, écart normal. — Détermination du rayon de courbure de la courbe intégrale. — Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au concours général de 1887 (Nouvelles annales de mathématiques, 1888) — Calcul direct des termes d'une réduite de rang quelconque d'une fraction continue périodique (C. R. Académie des sciences, mars, 1889). — Sur certaines courbes qu'on peut adjoindre aux courbes plates pour l'étude de leurs propriétés infinitésimales (Jornal de sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Lisboa, 1889). — Note sur les systèmes de péninvariants principaux des formes binaires (Bruxelles, 1888).

D'Ocagne et Neuberg. — Remarques sur une transformation biquadratique. Bruxelles, 1889.

Fazzini (U.) — Sopra alcune rappresentazioni di una funzione di una variabile reale per serie d'integrali definiti. Firenze, 1889.

Francavilla (F.) — Elementi d'aritmetica razionale ad uso delle scuole ginnasiali e tecniche. Cesena, Tip. Nazionale, 1889 — Prezzo L. 2.

Gatti (S.) — Del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di due o più numeri. Bari, 1889.

Gerbaldi (F.) — Sul sistema di due coniche (Annali di matem., 1889).

Giudice (F.) — Sui numeri poliedrici (Rend. cir. mat. Palermo, tomo III, 1889) — Sulla possibilità di funzioni di stesso valore, equivalenti, non identiche (Id. id.).

Grassi (F.) — Trattato di Trigonometria piana e sferica di G. A. Serret. Tradotto sulla 6a edizione francese e coll'aggiunta di 800 esercizii. Torino. Bocca, 1889 — Prezzo L. 3. 25.

Ingrami (G.) — Sulle funzioni implicite d'una variabile reale. — Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali (Rend. R. Acc. delle Scienze di Bologna, 1889).

Loria (G.) — Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma lineare di quarta specie (Gior di mat. di Battaglini, vol. XXVII, 1889). — Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet (Bib mathematica di G. Eneström).

Maggi (G. A.) — Sui principî della teorica della funzione potenziale (Rend. R. Istituto lomb. 1889).

Nicoli (F.) — Interpretazione geometrica del campo delle soluzioni di una equazione lineare a quattro variabili (Memorie R. Acc. di Scienze di Modena).

Ricci (G. B.) — Sintesi delle nozioni di aritmetica prescritta agli alunni del ginnasio inferiore. Roma, Spellani, 1889.

DEI POLIGONI

ɔHE CORRISPONDONO AI TRIANGOLI RETTANGOLI ED AGLI ACUTANGOLI

ed alcune questioni relative di probabilità

---

1. Nella sua nota: *La rottura del diamante,* apparsa nel vo-
me XXIV (1886) del *Giornale di Battaglini,* l'illustre Prof. Cesàro
olve, incidentalmente, e con semplicissima rappresentazione geo-
etrica, la questione:

*Un triangolo, preso ad arbitrio, è piuttosto ottusangolo
acutangolo?*

Per comodo del lettore rammenterò la suaccennata soluzione
e è punto di partenza per questo breve scritto.

Il Prof. Cesàro comincia ad osservare che in un triangolo
uilatero la somma delle distanze da un punto interno ai lati è
stante, ed eguale all'altezza. Se quindi si rappresentano con seg-
enti ad esse proporzionali i tre angoli di un triangolo, in guisa
e l'angolo retto sia rappresentato dalla metà dell'altezza di un
iangolo equilatero ABC, ciascun punto P nell'interno del trian-
olo rappresenterà, mediante le sue distanze, dai lati, i tre angoli
un certo triangolo, cioè una *possibile forma di triangolo;* e
ceversa, ogni forma di triangolo avrà il suo rappresentativo in un
nto P nell'interno di ABC.

Tutti e soli i triangoli acutangoli vengono così rappresentati
i punti interni al triangolo PQR formato congiungendo i punti
edî dei lati di ABC, essendochè per essi soltanto le tre distanze
i lati sono inferiori alla metà dell'altezza. E poichè la superficie
i PQR è $\frac{1}{4}$ di quella di ABC, si deduce tosto che:

La probabilità che un triangolo preso ad arbitrio sia acutan-
olo è $\frac{1}{4}$, e $\frac{3}{4}$ quindi quella che esso sia ottusangolo.

2. Considerando questo esempio mi parve non inutile ricercarne,

comecchè potesse sembrar molto ovvio, alcune conseguenze e generalizzazioni; e pervenni infatti a risultati che mi sembrano curiosi.

Ritornando anzitutto sull'esempio precedente, osservo che il contorno del triangolo $P\,Q\,R$ rappresenta i triangoli rettangoli (la cui probabilità rispetto agli ottusangoli ed agli acutangoli è, naturalmente, nulla), le tre altezze rappresentano i triangoli isosceli, e i lati di $A\,B\,C$ rappresentano triangoli con un angolo nullo (con due lati paralleli). L'esame del rapporto delle lunghezze di queste linee rappresentative, ci conduce alle facili conseguenze:

« *La probabilità che un triangolo preso a capriccio sia iso-* « *scele è maggiore di quella che sia rettangolo; e precisamente* « *le due probabilità stanno fra loro* $::\sqrt{3}:1$. »

« *Prese a capriccio tre rette di un piano è più facile* (2 *con-* « *tro* 1) *che due di queste siano parallele anzichè perpendicolari.* »

Finalmente i vertici di $A\,B\,C$ rappresentano triangoli con due angoli nulli, i punti P, Q, R triangoli isosceli rettangoli, e il centro del triangolo rappresenta i triangoli equilateri. Onde si deduce:

« *La probabilità che un triangolo sia isoscele rettangolo è* « *tripla di quello che esso sia equilatero.* »

« *Gettate tre rette a capriccio su un piano, è più facile* « (3 *contro* 1) *che vengano ad essere parallele, anzichè a for-* « *mare angoli eguali* (*un triangolo equilatero*). »

Non è poi forse ozioso osservare che questi risultati, a cui si è data forma più concreta colla considerazione dei tre angoli di un triangolo, concernono sostanzialmente tre grandezze la cui somma sia costante, ossia le tre parti di una stessa grandezza. Onde si potrebbe ad esempio dire:

« *Diviso a caso un segmento in tre parti, è più probabile* « *che una sia maggiore della metà del segmento, anzichè tutte* « *minori.* »

« *Presi due punti a caso su un segmento è più probabile* « (2 *contro* 1) *che uno di essi cada a un estremo, anzichè nel* « *punto di mezzo: ed è più facile che tutti e due cadano agli* « *estremi, anzichè dividano il segmento in parti eguali. Ecc.* »

3. Volendo estendere queste ricerche ai quadrilateri, e in gene-

rale ai poligoni, trovai necessario introdurre un nuovo elemento angolare - variabile da poligono a poligono - che potesse considerarsi come il correspettivo dell'angolo retto per il triangolo. Le analogie cui questo elemento dà luogo sono davvero notevoli, come apparirà dagli sviluppi seguenti.

Osservando che in un triangolo 2 angoli almeno devono essere inferiori a un retto, nasce spontanea la domanda se sia possibile fissare per il *massimo* numero di angoli di un poligono un *limite superiore* (naturalmente inferiore a due retti).

Se n è il numero dei lati del poligono (convesso o no, ma non intrecciato) la somma de' suoi angoli sarà $= 2R(n-2)$. Si può quindi tosto concludere che un angolo almeno deve essere $\leqq \frac{2R(n-2)}{n}$, che due almeno devono essere inferiori od al più eguali a $\frac{2R(n-2)}{n-1}$. Per tre angoli non si può dire altro che devono essere tutti $\overline{\overline{<}} \frac{2R(n-2)}{n-2}$ cioè di $2R$, e a *fortiori* un limite superiore (che sia minore di due retti non si può assegnare a quattro, cinque,... angoli.

Se ne deduce che l'angolo che risponde alla proposta questione, e che noi indicheremo con R', è $= \frac{2R(n-2)}{n-1}$. E si vede che due angoli almeno del poligono non possono superare R', mentre per altro dei *due più piccoli angoli del poligono* uno almeno può evidentemente accostarsi a questo limite finchè si vuole; basta infatti assumere l'altro angolo piccolissimo e i rimanenti $n-2$ poco superiori ad R'.

Si noti poi che si ha:

$$R' = \frac{2R(n-2)}{n-1} = \frac{2R\left[2(n-1)-2\right]}{2(n-1)} \tag{1}$$

epperò è l'angolo al perimetro del poligono regolare di $2(n-1)$ lati.

Onde possiamo concludere che,

« *I due più piccoli angoli del poligono di* n *lati, e questi* « *due soltanto,* DEVONO *essere entrambi inferiori all'angolo* R′, « *che è poi l'angolo del poligono regolare di* $2(n-1)$ *lati.* »

Od anche :

« *Al più* $n-2$ *angoli del poligono* POSSONO *eguagliare o su-* « *perare il valore di* R′. »

In particolare adunque :

Un angolo al più di un triangolo può essere $\geqq 90°$, angolo del quadrilatero regolare.

Due angoli al più di un quadrilatero possono essere $\geqq 120°$, angolo dell'esagono regolare.

Tre angoli al più di un pentagono possono essere $\geqq 135°$, angolo dell'ottagono regolare.

I poligoni che contengono il maggior numero possibile di angoli $= R'$, ossia che ne hanno $n-2$, vanno considerati come analoghi al triangolo rettangolo; e li diremo *poligoni* R' — *angoli*. Come analoghi ai triangoli acutangoli vanno considerati quelli che hanno tutti gli angoli inferiori ad R', e che diremo *acuminati.*

Così un quadrilatero sarà R' angolo se ha due angoli $= 120°$; acuminato, se tutti gli angoli sono inferiori a $120°$.

4. Occupiamoci ora in particolare dei quadrilateri, e cominciamo a vedere se un quadrilatero preso a capriccio sia piuttosto acuminato o no. Domanda questa analoga a quella propostasi dal Prof. Cesàro e cui si risponde con una rappresentazione analoga.

Ricordiamo che la somma delle distanze fra le facce e un qualunque punto interno a un tetraedro regolare è costante, ed eguale all'altezza: proposizione del resto evidente quando si osservi che il tetraedro può concepirsi come somma di 4 piramidi aventi il vertice in quel punto e per base le facce.

Assumiamo un tetraedro regolare T, di cui A, B, C, D, siano i vertici. Le altezze cadranno nei baricentri A', B', C', D' delle facce e questi punti determineranno un nuovo tetraedro, che diremo T'; il quale ha le facce parallele alle omonime di T e situate da esse ad una distanza eguale a $\frac{1}{3}$ dell'altezza h di T. Se la quarta parte di h si assume come rappresentativa dell'angolo retto, ogni punto nell'interno di T potrà rappresentare, per mezzo delle sue distanze dalle facce, i quattro angoli di un certo quadrilatero, e viceversa.

Allora i punti interni a T' rappresenteranno tutti e soli i quadrilateri ***acuminati,*** perchè per essi soltanto le distanze dalle facce sono minori di $\frac{1}{3}h$. I quadrilateri acuminati hanno così rappresentazione affatto analoga ai triangoli acutangoli; ad anche sotto questo punto di vista l'angolo R' appare come l'analogo dell'angolo retto.

Poichè T' ha uno spigolo eguale a $\frac{1}{3}$ di quello di T, e quindi volume eguale a $\frac{1}{27}$ di esso, si ha:

« *La probabilità che un quadrilatero preso a caso* (*convesso*
« *o no*) *sia acuminato piuttosto che no, è* $\frac{1}{27}$. »

Volendo poi distinguere i convessi dagli altri, troviamo le regioni di T che rappresentano gli uni e gli altri.

I piani condotti per i punti di mezzo delle altezze parallelamente alle rispettive basi tagliano da T' quattro tetraedri aventi spigolo metà e quindi complessivamente volume $\frac{1}{8}$ di esso, e rimane un solido O — evidentemente un ottaedro regolare — ogni punto interno al quale, avendo dalle facce di T distanze minori di $\frac{h}{2}$ (e rappresentanti quindi angoli minori di $\frac{4\,R}{2}$), sarà rappresentativo di un quadrilatero convesso. I punti invece di T esterni ad O rappresentano quadrilateri non convessi. E poichè O risulta, per il detto, la metà di T, si deduce tosto:

« *È egualmente probabile che un quadrilatero preso a caso*
« *sia convesso, quanto che non lo sia.* »

« *La probabilità che un quadrilatero convesso sia acumi-*
« *nato è* $\frac{2}{27}$. »

Un quadrilatero non convesso non può, naturalmente, essere acuminato: nella rappresentazione si vede appunto che T' è tutto interno ad O, e quindi fuori dalle regioni di T rappresentative di quadrilateri concavi.

5. Alla divisione volgare dei triangoli in acutangoli, rettangoli, ottusangoli, corrisponderebbe per i quadrilateri una assai più minu-

ziosa. Essendo affatto ozioso creare per tutte le *diverse forme possibili* di quadrilateri nomi speciali, ci limiteremo a disegnare con simboli significativi i diversi tipi.

Ossorviamo che due angoli al certo sono inferiori ad R', in questo caso $= 120^\circ$; gli altri due potranno essere minori, eguali, o maggiori di R', ed uno anche potrebbe eguagliare o superare $2\,R'$. Abbiamo così 8 tipi, che disegneremo chiudendo tra parentesi i valori dei due angoli maggiori:

I. tipo: $(> 2\,R')\,(< R')$; II. tipo: $(= 2\,R')\,(< R')$;
III. tipo: $(> R')\,(> R')$; IV. tipo: $(> R')\,(= R')$;
V. tipo: $(> R')\,(< R')$; VI. tipo: $(= R')\,(= R')$;
VII. tipo: $(= R')\,(< R')$; VIII. tipo: $(< R')\,(< R')$;

dove è sottinteso che l'angolo disegnato col simbolo $> R'$ sia per altro $< 2\,R'$.

Fondandosi sulla rappresentazione data precedentemente, è facile vedere quali regioni del tetraedro T rappresentino questi diversi tipi, e così dedurne le relative probabilità. Ommettendo figure e dimostrazioni, che condurrebbero a sviluppi tanto noiosi quanto facili, accenneremo ai risultati.

I tipi I, III, V, VIII sono rappresentati da volumi; e dirò quindi che le probabilità relative ad essi *sono a 3 dimensioni*.

I tipi II, IV, VII sono rappresentati da superficie; le probabilità relative *sono a 2 dimensioni*, e nulle rispetto alle precedenti.

Il tipo VI è rappresentato da linee.

6. Consideriamo anzitutto i tipi a probabilità 3 – dimensionali.

I. Tipo: $(> 2\,R')\,(< R')$ — I quadrilateri di questo tipo sono rappresentati da 4 tetraedri aventi lo spigolo eguale a $\frac{1}{3}$ di quello di T, e volume $= \frac{1}{27}$ di T. Si ottengono segando T con piani paralleli alle facce e distanti dai vertici di $\frac{1}{3}\,h$. La probabilità relativa è quindi $\frac{4}{27}$.

III. Tipo $(> R')(> R')$ — Sono rappresentati da 6 tetraedri eguali a T', e aventi rispettivamente uno spigolo a comune con esso. Questi tetraedri si ottengono prolungando le facce di T', e considerando le regioni di T che restano contemporaneamente al di là di due facce di T'. (Dicendo che un punto è al di là di un piano parallelo a una faccia, intendo che giaccia in quella delle due regioni del tetraedro che contiene il vertice opposto a questa faccia). Così la faccia $B' C' D'$, prolungata, sega T in un triangolo equilatero composto di $B' C' D'$ stesso e di altri tre eguali ad esso. Questi tre triangoli sono basi di altrettanti tetraedri eguali a T' (terminati ognuno dal prolungamento di due facce di T' e da porzioni di due facce di T). Per ogni faccia di T' si hanno così tre di questi tetraedri; ma ognuno appoggia a due facce, per cui i distinti sono in numero di $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

La probabilità dunque relativa a questo tipo è $\frac{6}{27}$.

V. Tipo: $(> R')(< R')$ — Sono rappresentati dalle regioni di T che restano contemporaneamente al di là di una faccia, e al di qua di un'altra faccia di T'. Esse si riducono a 4 ottaedri regolari aventi rispettivamente a comune una faccia con T', 3 con i tetraedri del caso precedente, 1 con quelli del primo caso, e 3 situate sulle facce di T.

Così al di sopra della faccia $B' C' D'$ esiste l'ottaedro di cui tre vertici sono i punti B', C', D', e gli altri 3 sono sugli spigoli di T che partono da A, e a $\frac{1}{3}$ di essi; il suo volume è manifestamente $\frac{1}{2}$ del tetraedro che ha lo spigolo $\frac{2}{3}$ di quello di T, cioè è $\frac{1}{2} \times \frac{8}{27}$ di T. La probabilità relativa è quindi $\frac{4}{27} \times 4 = \frac{16}{27}$.

VIII. Tipo: $(< R')(< R')$. Sono rappresentati, come dicemmo, da T', e la relativa probabilità è quindi $\frac{1}{27}$.

Concludendo possiamo dire:

« In un quadrilatero preso a caso, ma non intrecciato, la pro-
« babilità che tutti gli angoli siano inferiori a 120° è $\frac{1}{27}$; quella che

« uno solo superi 120°, ma non 240°, è $\frac{16}{27}$; quella che due superino « 120° è $\frac{6}{27}$; e finalmente quella che un angolo superi 240° è $\frac{4}{27}$. »

Queste sono le probabilità per un quadrilatero qualunque. Facile è dedurne le probabilità per i quadrilateri convessi o non convessi soltanto.

Cominciamo dai convessi.

I quadrilateri del tipo I non sono convessi.

I quadrilateri del tipo III, e convessi, sono rappresentati dalle parti delle regioni considerate nel caso generale che rimangono nell'interno dell'ottaedro O. Da ognuno dei 6 tetraedri allora considerati l'ottaedro esclude due tetraedri di spigolo metà e di volume quindi $\frac{1}{8}$ di essi; la probabilità è quindi $\frac{3}{4}$ di quella generale, cioè $\frac{3}{4} \times \frac{6}{27} = \frac{1}{6}$.

Riguardo ai quadrilateri del tipo V si osservi che di ognuno dei 4 ottaedri rappresentativi del caso generale una metà rimane nell'interno di O; poichè le 4 faccie di O che non poggiano sulle faccie di T (ma lo segano a distanza $\frac{1}{2} h$ dai vertici) passano per i centri di quei 4 ottaedri. La probabilità relativa a questo caso, per i quadrilateri convessi, è quindi $\frac{1}{2} \times \frac{16}{27} = \frac{8}{27}$.

Finalmente i quadrilateri del tipo VIII sono sempre convessi, epperò la probabilità è sempre $\frac{1}{27}$.

Così, trattate separatamente le probabilità dei convessi, se ne possono ottenere, con semplici differenze, quelle degli altri. E si ha il seguente quadro:

TIPO	Probabilità relativa per un quadrilatero					
	qualunque		convesso		non convesso	
	Valori assoluti	Numeri proporzionali	Valori assoluti	Numeri proporzionali	Valori assoluti	Numeri proporzionali
$(>2R')(<R')$	$\frac{4}{27}$	4	. .	. .	$\frac{4}{27}$	8
$(>R')(>R')$	$\frac{6}{27}$	6	$\frac{1}{6}$	9	$\frac{3}{54}$	3
$(>R')(<R')$	$\frac{16}{27}$	16	$\frac{8}{27}$	16	$\frac{8}{27}$	16
$(<R')(<R')$	$\frac{1}{27}$	1	$\frac{1}{27}$	2	. .	. .
Somme delle probabilità	1	27	$\frac{1}{2}$	27	$\frac{1}{2}$	27

Il lettore potrà dedurne confronti curiosi. Così ad es. la probabilità che un angolo solo sia maggiore di 120° (V tipo) è eguale tanto per i quadrilateri convessi e per i non convessi; quella che due siano maggiori di 120° è tripla per il convesso, ecc.

7. Proseguendo nell'esame degli altri tipi, non distingueremo, per non entrare in troppe minuzie, i quadrilateri convessi dagli altri. Si trova:

II Tipo: $(=2R')(<R')$. I quadrilateri di questo tipo sono rappresentati dai 4 triangoli ottenuti segando T con piani paralleli alle facce, a distanza $\frac{1}{3}h$ dai vertici. Detta I la superficie di una faccia di T, sarà $\frac{4}{9}$ la complessiva di questi triangoli.

IV. Tipo: $(>R')(=R')$ — VII Tipo: $(=R')(<R')$. — Il caso generico che un angolo sia eguale ad R' è rappresentato da 4 triangoli, sezioni di T con piani a distanza $\frac{2}{3}h$ dai vertici; e la cui superficie complessiva è $\frac{16}{9}$; di ognuno di questi triangoli la parte che rappresenta il tipo VII è la quarta parte (una faccia di T'').

Le probabilità relative di questi tre tipi II, IV, VII, stanno quindi fra loro : : 1 : 3 : 1 ; onde ad es. si avrebbe:

« È egualmente probabile che l'angolo maggiore di un qua-
« drilatero preso a caso sia $= 240°$, quanto che sia $= 120°$. »

Finalmente i quadrilateri del VI tipo, cioè: $(= R')$ $(= R')$ sono rappresentati dagli spigoli di T'. La probabilità relativa, nulla rispetto a quella dei tipi precedenti, si potrebbe paragonare colle altre lineari, per es. con quella dei quadrilateri aventi tre angoli eguali (rappresentati dalle altezze del tetraedro T) oppure quella dei quadrilateri aventi due angoli nulli (rappresentati dagli spigoli di T). E si troverebbe che le probabilità relative a questi tre casi stanno : : $1 : \sqrt{\frac{8}{3}} : 3$. Si vede così in particolare che è più probabile che un quadrilatero abbia tre angoli eguali, anzichè due di 120° ciascuno.

8. Un poligono R' — angolo, quello cioè che ha $n - 2$ angoli eguali a $\frac{2(n-2)R}{n-1}$, è da considerarsi, sotto il nostro punto di vista, come la generalizzazione del triangolo rettangolo. Esso è determinato quando siano dati gli $n - 1$ lati $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$ degli angoli R'; e l'ultimo lato a_n si può esprimere in termini degli altri (e, s'intende, dell'angolo R'), mercè una relazione, che è da considerarsi come la generalizzazione di quella di Pitagora.

Essa si può dedurre immediatamente dall'equazione fondamentale della poligonometria, stabilita da Lescell.

Posto $\alpha = 180° - R' = \frac{180°}{n-1}$, si ricava:

$$
\begin{aligned}
a_n^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{n-1}^2 &+ 2(a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{n-2} a_{n-1}) \cos\alpha \\
&+ 2(a_1 a_3 + a_2 a_4 + \ldots\ldots + a_{n-3} a_{n-1}) \cos 2\alpha \\
&+ 2(a_1 a_4 + a_2 a_5 + \ldots\ldots + a_{n-4} a_{n-1}) \cos 3\alpha \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad + 2\, a_1 a_{n-1} \cos(n-2)\alpha.
\end{aligned}
$$

Questa relazione per $n = 3$ dà il teorema pitagorico, per $n = 4, 5$ rispettivamente dà eguaglianze, che si ricavano dalle figure immediatamente, prescindendo da considerazioni trigonometriche. Posto poi $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots = a_{n-1}$ fornisce il diametro di un poligono regolare di $2(n-1)$ lati, in funzione del suo lato.

9. La rappresentazione delle possibili forme di poligoni di n lati si può fare ricorrendo a spazî ad $n-1$ dimensioni, in modo analogo a quello che abbiamo veduto per i casi particolari di $n = 3, 4$. Ma non entreremo in questo argomento, che non è nell'indole del *Periodico*. Ci basti accennare che la probabilità che un poligono sia acuminato si trova così in generale data da $1 : (n-1)^{n-1}$.

Dott. Vittorio Murer.

LE PROPRIETÀ DEI PRODOTTI E DEI QUOZIENTI

ESTESE AI MONOMI ALGEBRICI.

1. Si dice *prodotto di due numeri* la somma di tante parti eguali al primo (*moltiplicando*) quante sono le unità del secondo (*moltiplicatore*); e ***prodotto di più numeri*** (*fattori*) il risultato che si ottiene moltiplicando il prodotto dei primi due per il terzo, il prodotto dei primi tre per il quarto e così di seguito fino all'ultimo numero.

Da ciò risulta che il prodotto è sempre omogeneo col moltiplicando e che l'unità a cui si riferisce il secondo fattore è il primo, quella a cui si riferisce il terzo fattore è il prodotto dei primi due, quella a cui si riferisce il quarto è il prodotto dei primi tre, e così via.

2. Il prodotto di più fattori gode, come la somma, della proprietà commutativa e della associativa.

La proprietà commutativa può dimostrarsi così: abbiamo per definizione:

$$a\,b\,c = (a\,b) + (a\,b) + \ldots\ldots + (a\,b) =$$

$$\left.\begin{array}{r} a \\ +\,a \\ . \\ +\,a \end{array}\right| \left.\begin{array}{r} +\,a \\ +\,a \\ . \\ +\,a \end{array}\right| \begin{array}{r} +\ldots+\,a \\ +\,a \\ . \\ +\,a \end{array} = (a\,c) + (a\,c) + \ldots\ldots + (a\,c) = a\,c\,b$$

Dunque

$$(1) \qquad a\,b\,c = a\,c\,b.$$

E si vede allora che, potendosi cambiare di posto due fattori consecutivi, si potrà, ripetendo più volte la stessa operazione, invertire i fattori d'un prodotto nel modo che più piace. Dunque:

Un prodotto non si altera, cambiando l'ordine dei suoi fattori. È bene però avvertire che, nel cambiare l'ordine dei fattori d'un prodotto, ciascuno di essi non si riferisce più alla unità di prima, ma a quella relativa al posto che va ad occupare, conforme a quanto è stato detto sopra.

3. La proprietà associativa è in parte contenuta nella definizione stessa del prodotto di più fattori, ed in parte si può dimostrare in questo modo: abbiamo, invertendo,

$$(2) \qquad a\,(b\,c) = (b\,c)\,a = b\,c\,a = a\,b\,c$$

cioè:

Un prodotto non si altera, sostituendo a due o più dei suoi fattori un fattore unico; oppure, sostituendo ad uno dei suoi fattori, altri fattori di cui esso sia il prodotto.

4. Esaminiamo ora le proprietà del quoziente.

Si dice *quoziente di due numeri* un terzo numero che moltiplicato per il secondo (divisore) riproduce il primo (dividendo).

Quindi abbiamo:

$$(a : b)\,b = a$$
$$(a\,b) : b = a$$

da cui si vede che *il valore d'un numero non si altera, prima dividendo e poi moltiplicando, oppure prima moltiplicando e poi dividendo successivamente per un altro numero.*

Può accadere che i numeri dati siano omogenei fra loro; in tal caso il quoziente si dice più propriamente *rapporto* dei due numeri, e l'unità a cui esso si riferisce è il divisore stesso o un'altra quantità equivalente. Può invece accadere che il dividendo ed il divisore non siano omogenei; ed allora il quoziente è sempre omogeneo col dividendo, ed equivale ad una parte aliquota del medesimo.

Osserveremo infine che il quoziente di due numeri non ha significato altro che quando il dividendo è un multiplo del divisore.

Ciò posto, vediamo altre proprietà dei prodotti e dei quozienti.

5. *La moltiplicazione e la divisione sono operazioni invertibili;* dico cioè che le due espressioni $(a\,b):c$ e $(a:c)\,b$ hanno sempre lo stesso valore, allorchè a è multiplo di c.

Abbiamo infatti:

$$(a:c)\,b\,c = (a:c)\,c\,b = a\,b;$$

onde si deduce che

$$(a\,b):c = (a:c)\,b, \tag{3}$$

come dovevasi dimostrare.

Le espressioni della forma $a \,.\, b : c : d \,.\, e : f$ si dicono *monomi*, e, finchè hanno significato, essi godono sempre della proprietà commutativa.

La (3) può scriversi in quest'altro modo:

$$b\,(a:c) = (b\,a):c \tag{4}$$

e dimostra in parte che i monomi godono anche della proprietà associativa, e quindi di tutte le altre proprietà che da essa derivano. In particolare abbiamo che:

Il prodotto di più monomi vale un monomio unico formato coi fattori e divisori di ciascuno.

Di qui si trae la nota regola per la moltiplicazione dei monomi.

6. Allo scopo di stabilire la regola della divisione dei monomi, occorre dimostrare le due seguenti eguaglianze:

$$a:(b\,c) = (a:b):c \tag{5}$$

$$a:(b:c) = (a:b).\,c \tag{6}$$

Ciò si fa partendo dall'idea di quoziente. Infatti abbiamo:

$$(a:b):c\,(b\,c) = (a:b):c\,.\,c\,.\,b = (a:b)\,b = a$$

e quindi la (5) è vera.

Similmente, si ha:

$$\begin{aligned}(a : b) \cdot c \cdot (b : c) &= (a : b) \cdot c \cdot b : c \\ &= (a : b)\, b \cdot c : c \\ &= (a : b)\, b = a\end{aligned}$$

donde si deduce che anche la (6) è vera.

7. Dalla (5) e dalle proprietà dei monomi avanti dimostrate ricavasi che:

$$a : b \cdot c \cdot d : e : f = (a \cdot c \cdot d) : (b \cdot e \cdot f)$$

cioè: *Un monomio vale il quoziente del prodotto dei suoi fattori diviso per il prodotto dei suoi divisori.*

Dalla (5) e dalla (6) si deduce pure che:

$$(a : b \cdot c : d) : (e \cdot f : g) = a : b \cdot c : d : e : f \cdot g$$

cioè: *Il quoziente di due monomi vale un monomio unico formato coi termini del primo, col segno che hanno, e coi termini del secondo, col segno mutato; cioè i divisori convertiti in fattori e i fattori in divisori.*

8. Le eguaglianze (2), (3), (4) e (5) sussistono finchè le divisioni, ivi indicate, sono possibili; volendo renderle generali, converrà estendere ancora l'idea di numero. A tale scopo ammetteremo che l'unità possa dividersi in un numero qualunque di parti eguali, e chiameremo *frazione o numero frazionario* quello che si ottiene contando una o più di queste parti. Sicchè in ogni frazione si distingueranno sempre due termini: *il numeratore*, che indica quante parti eguali dell'unità si sono contate; ed il *denominatore* che indica in quante parti eguali è stata divisa l'unità. La frazione di numeratore a e denominatore b si indica con $\frac{a}{b}$.

9. Si può subito dimostrare che, colle frazioni, qualsivoglia divisione di numeri interi è resa possibile, e propriamente che:

Il quoziente di due numeri interi è sempre una frazione che ha per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore.

Questa verità si desume facilmente dalla proprietà commutativa del prodotto. Abbiamo infatti che $a\,b = b\,a$, qualunque sia l'unità a cui il primo fattore si riferisce; onde se l'unità fosse $\frac{1}{b}$, si avrebbe:

$$\frac{a}{b}\,b = \frac{b}{b}\,a = a\,;$$

da cui, per la definizione di quoziente,

(7) $$a : b = \frac{a}{b}\,.$$

10. Dal concetto di prodotto, nel caso che il moltiplicatore sia intero, si ha

$$\frac{a}{c}\,b = \frac{a\,b}{c}\,;$$

e quindi per la (7)

$$(a : c)\,b = (a\,b) : c$$

donde si vede che la (3) vale qualunque siano i numeri interi a, b e c.

11. Per generalizzare la (4), dove comparisce un moltiplicatore frazionario, bisogna estendere il significato di prodotto. Diremo quindi *prodotto di due numeri un terzo numero che è formato col moltiplicando come il moltiplicatore si origina dall'unità.*

Questa definizione, che comprende quella data ragionando di soli numeri interi, applicata ad un moltiplicatore frazionario, ci dà:

$$a\,.\frac{b}{c} = (a : c)\,b$$

e, per la (3), essendo $(a : c)\,b = (a\,b) : c$, verrà

$$a\,.\frac{b}{c} = (a\,b) : c$$

la quale, può anche scriversi,

$$a\,.(b : c) = (a\,b) : c\,;$$

e così si dimostra che la (4) vale per tutti i numeri interi.

12. Se ora osserviamo, che un numero qualunque a può considerarsi equivalente al prodotto $b\,c\,a$ riferito all'unità frazionaria $\frac{1}{b\,c}$; esso sarà divisibile per b, per c e per il prodotto $b\,c$; onde si può ritenere che anche la (5) valga senza restrizioni.

La (6) poi vale pur essa in ogni caso, perchè è conseguenza delle eguaglianze precedenti.

13. Passiamo a considerare il prodotto ed il quoziente di numeri frazionari.

Il prodotto di due o più frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Abbiamo infatti, per la (7) e per la definizione di prodotto,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = (a : b) : d \,.\, c = (a : b) \,.\, c : d$$

$$= a \,.\, c : b : d = a \,.\, c : (b\,d) = \frac{a\,c}{b\,d}.$$

Similmente si trova: $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c\,a}{b\,d}$; e quindi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

La quale eguaglianza ci dimostra che anche il prodotto di frazioni gode della proprietà commutativa. E quindi dell'associativa, perchè anche per le frazioni si può ripetere la dimostrazione del n. 3.

Il quoziente di due frazioni è una frazione che ha per numeratore il prodotto del numeratore della prima per il denominatore della seconda, e per denominatore il prodotto dei termini rimanenti.

Si ha infatti:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a\,d}{b\,c},$$

perchè $\frac{a\,d}{b\,c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\,d\,c}{b\,c\,d} = \frac{a}{b} \,.\, d : d \,.\, c : c = \frac{a}{b}$; onde abbiamo identicamente $\left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$.

Adunque, se il prodotto ed il quoziente di numeri frazionari conservano le loro proprietà fondamentali, si può dire che le eguaglianze (3), (4), (5) e (6) valgono qualunque siano i numeri rappresentati dalle lettere che vi compariscono.

14. Tutto ciò riguarda il valore assoluto dei numeri. Volendo

avere riguardo anche al segno, si vedrà che nessuna delle cose dette viene a variare.

Dal concetto di prodotto apparisce chiaro che, se il moltiplicatore è positivo, il prodotto è positivo o negativo, secondochè il moltiplicando è rispettivamente positivo o negativo; se al contrario il moltiplicatore è negativo, il prodotto è positivo o negativo, secondochè il moltiplicando è negativo o positivo. Onde si deduce che: *fattori di segno eguale danno un prodotto positivo, e fattori di segno differente danno un prodotto negativo.*

Applicando questo risultato ad un prodotto di molti fattori si vedrà che esso è *positivo*, quando il numero dei fattori negativi è pari; è *negativo, quando lo stesso numero è dispari.*

Da ciò si deduce subito che, l'inversione di posto dei fattori, non altera il segno del prodotto; per la qual cosa, un prodotto di numeri qualunque, positivi o negativi conserva sempre le sue proprietà.

15. Riguardo al quoziente di due numeri qualunque è facile vedere che, dopociò che si è stabilito intorno al prodotto, esso esiste sempre ed è positivo, se i numeri hanno segno eguale, è negativo, se i numeri hanno segno differente. Onde si può ritenere che le eguaglianze (1), (2), (3), (4), (5) e (6) sussistano per tutti i numeri: positivi, negativi, interi o frazionari.

16. Siamo ora in grado di concludere quello che ci siamo proposti di dimostrare, cioè: se colla parola monomio comprendiamo un'espressione della forma $a \,.\, b : c : d \,.\, e : f$, la quale (convenendo di rappresentare con $\frac{a}{b}$ il quoziente $a : b$ qualunque siano i numeri a e b anche se non interi e positivi ambedue) può sempre ridursi all'altra $\frac{a\,b\,e}{c\,d\,f}$, dove le lettere stanno a rappresentare numeri qualunque; possiamo affermare che i monomi godono di tutte le proprietà dei prodotti e dei quozienti, e che possono ad essi applicarsi tutte le regole di calcolo valevoli per questi.

M. Gremigni.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

(Continuazione e fine).

Estate 1885, I). — *Trovare i rapporti dei lati d'un triangolo nel quale gli angoli stanno come* $3:4:5$.

Risposta: $a:b:c = 2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$.

Estate 1885, II). — *Un grave è lanciato verticalmente: è dato il tempo trascorso dall'istante in cui esso passa per una data posizione all'istante in cui esso ritorna, scendendo, in quella stessa posizione. Trovare la velocità iniziale.*

Chiamisi v_0 la velocità iniziale cercata, T il tempo della durata del moto di ascesa, uguale a quello del moto di discesa, a cui corrisponde lo spazio s, $2t$ il tempo dato ed s' lo spazio percorso dal mobile prima che incominci il tempo $2t$. Sarà $v_0 = gT$ ed

$$s = v_0 T - \frac{1}{2} g T^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$$

onde, osservando che anche gli spazii percorsi, in tempi uguali, nel moto di ascesa e discesa sono uguali:

$$s' = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g t^2,$$

da cui deducesi

$$v_0 = \sqrt{2g\left(s' + \frac{1}{2} g t^2\right)}.$$

Estate 1887, I). — *Trovare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo sapendo che il perimetro misurato col metro è* 1,20 *e che la distanza del vertice dell'angolo retto dall'ipotenusa è* 0,24.

Soluzione algebrica. S'indichi in generale con $2p$ il perimetro del triangolo e con h l'altezza relativa all'ipotenusa. Se x, y rappresentano i cateti e z l'ipotenusa del triangolo cercato, le equazioni che servono alla risoluzione del problema sono

$$x + y + z = 2p\,;\quad x\,y = h\,z\,;\quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Dalle due ultime si deduce: $(x + y)^2 = 2\,h\,z + z^2$ e dalla prima $(x + y)^2 = (2p - z)^2$, onde

$$2\,h\,z + z^2 = (2p - z)^2 \text{ da cui } z = \frac{2\,p^2}{h + 2\,p}.$$

Tenendo conto di questo valore si ha

$$(x + y)^2 = \frac{4\,p^2\,(h + p)^2}{(h + 2p)^2} \text{ ossia } x + y = + \frac{2\,p\,(h + p)}{h + 2\,p}$$

e $x\,y = \dfrac{2\,p^2\,h}{h + 2\,p}$.

Conoscendo ora la somma e il prodotto dei due cateti, questi saranno dati dalle radici dell'equazione di 2° grado

$$X^2 - \frac{2\,p\,(h + p)}{h + 2p}\,X + \frac{2\,p^2\,h}{h + 2\,p} = 0,$$

ossia

$$x = \frac{p\,(h + p) + p\,\sqrt{p^2 - 2\,p\,h - h^2}}{h + 2\,p}\,;\quad y = \frac{p\,(h + p) - p\,\sqrt{p^2 - 2\,p\,h - h^2}}{h + 2\,p}.$$

Perchè questi valori siano reali occorre che sia

(1) $\qquad p^2 - 2ph - h^2 > 0$, ovvero $\left(\dfrac{p}{h}\right)^2 - 2\left(\dfrac{p}{h}\right) - 1 > 0.$

Ed osservando che le radici dell'equazione:

$$\left(\frac{p}{h}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{h}\right) - 1 = 0$$

sono $\dfrac{p}{h} = 1 \pm \sqrt{2}$ si deduce che i valori di $\dfrac{p}{h}$ pei quali la disuguaglianza (1) è soddisfatta debbono essere o maggiori di $1 + \sqrt{2}$ o minori di $1 - \sqrt{2}$. Questi ultimi però sono da respingere, il rapporto $\dfrac{p}{h}$ dovendo essere positivo, onde si hanno soltanto da considerare quelli pei quali $\dfrac{p}{h} > \sqrt{2} + 1$.

Si ha poi il teorema: Se l'altezza d'un triangolo rettangolo, rispetto all'ipotenusa, è data ed è $= h$, il minimo perimetro $2p$ che può avere questo triangolo si ha quando $\frac{p}{h} = \sqrt{2} + 1$. Se il perimetro d'un triangolo rettangolo è dato ed è $= 2p$, la massima altezza di questo triangolo rispetto all'ipotenusa si ha quando

$$\frac{h}{p} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

Nel caso particolare considerato dall'enunciato i lati del triangolo cercato sono:

$$x = \text{m. } 0{,}4\,; \quad y = \text{m. } 0{,}3\,; \quad z = \text{m. } 0{,}5.$$

Soluzione geometrica. Si costruisca un triangolo che abbia per base il perimetro e per altezza l'altezza data, e in cui l'angolo al vertice sia $\frac{3}{2}$ di un angolo retto, quindi si tirino dal vertice delle rette formanti coi lati che concorrono in esso, angoli uguali agli angoli alla base del primo triangolo.

ESTATE 1887, II). — *Un punto* M *è dato per mezzo delle sue distanze* p, q *da due rette* O P, O Q *fra loro perpendicolari. Condurre per* M *una retta* P M Q *in modo che la somma dei quadrati dei segmenti* P M, Q M *sia uguale ad un quadrato dato. Discutere qualche caso particolare, per esempio quello in cui* q = p.

Siano N, S i piedi delle perpendicolari calate da M su OP, OQ, onde $MN = OS = p$, $ON = SM = q$. Posto $OP = x$, sarà:

$$NP = x - q\,; \quad QS = \frac{qp}{x-q}\,; \quad OQ = \frac{xp}{x-q}$$

e perciò

$$MP^2 = p^2 + (x-q)^2\,; \quad MQ^2 = q^2 + \frac{q^2 p^2}{(x-q)^2},$$

sicchè indicando con a il lato del quadrato dato, alla determinazione di x servirà l'equazione

$$(x-q)^2 + p^2 + q^2 + \frac{q^2 p^2}{(x-q)^2} = a^2.$$

Per risolverla pongasi $(x-q)^2 = z$. Con ciò essa riducesi alla seguente

$$z^2 + (p^2 + q^2 - a^2)\, z + p^2 q^2 = 0 \tag{1}$$

da cui si ha

$$z = \frac{a^2 - p^2 - q^2 \pm \sqrt{(a^2 - p^2 - q^2)^2 - 4\,p^2\,q^2}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 - p^2 - q^2 \pm \sqrt{[a^2 - (p+q)^2][a^2 - (p-q)^2]}}{2}.$$

Trovata z si ha x dall'equazione $x = q \pm \sqrt{z}$.

Perchè i valori di z e quelli pure d'x sieno reali basta che sia soddisfatta l'unica condizione $a > p + q$. Invero deducendosi dalla medesima che $a^2 > (p+q)^2$ ed a *fortiori* $a^2 > p^2 + q^2$, si ha allora che le radici della (1) sono reali e per di più positive, onde anche i valori di x sono reali. Alla x corrispondono poi quattro valori, i quali, indicando con z', z'' le radici della (1), sono:

$$q + \sqrt{z'},\ q + \sqrt{z''},\ q - \sqrt{z'},\ q - \sqrt{z''}.$$

Determinata x per completare la soluzione del problema, basta portare da O verso P o in direzione opposta, secondochè x è positiva o negativa, un segmento $= x$ poi congiungerne l'estremità con M e prolungare la congiungente fino ad incontrare OQ od il suo prolungamento.

Se $p = q$ risulta

$$x = q \pm \sqrt{\frac{a^2 - 2\,p^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4\,p^2}}{2}}$$

onde il minimo valore che può avere a, perchè i valori di x siano reali, si ha quando $a = 2p$ e quindi $x = 2p$. In tal caso la retta PMQ forma angoli uguali con OP, OQ.

Autunno 1887, I a). — *Per mezzo di* a *e* b, *misure delle basi d'un trapezio, si esprima il valore di quella retta la quale, essendo parallela alle basi, divide il trapezio in due parti equivalenti.*

Risposta: $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

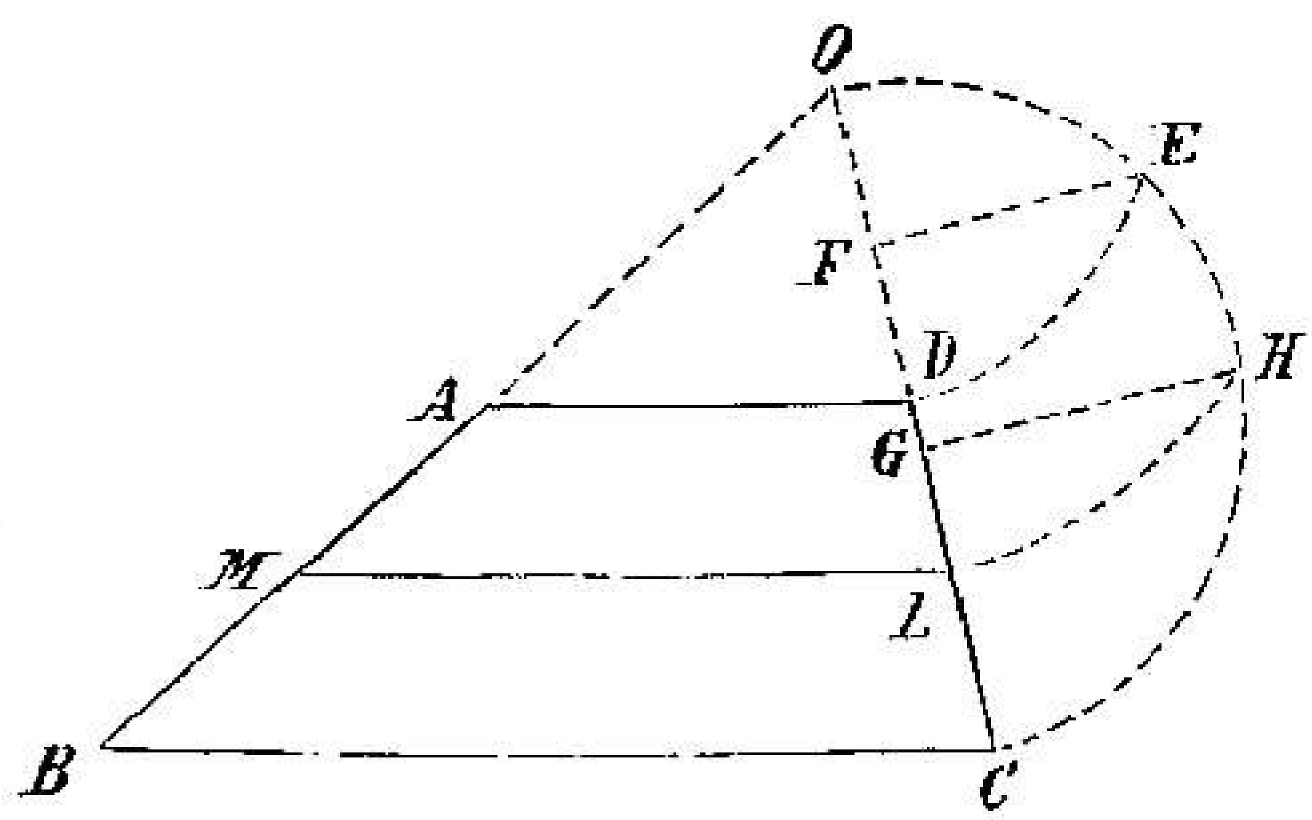
Osservazione. — La soluzione di questo quesito è analoga a quella del quesito dell'autunno 1882. — Trattando la questione più generalmente, ossia richiedendo solo che le due parti abbiano il rapporto $m : n$, si trova per valore della retta x cercata

$$x = \sqrt{\frac{ma^2 + nb^2}{m + n}} = \sqrt{b^2 + m\,\frac{(a+b)(a-b)}{m+n}}.$$

Se m, n, a, b sono segmenti dati, si può facilmente costruire x colle seguenti operazioni: 1° trovando un segmento c quarto proporzionale dopo $m+n, a+b, a-b$; 2° costruendo un quadrato, di lato d, equivalente al rettangolo di c ed m; 3° trovando l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di lati b e d.

AUTUNNO 1887, I b). — *Si risolva geometricamente il problema: dividere un trapezio in due parti equivalenti con una retta parallela alle sue basi.*

Sia $ABCD$ il trapezio dato e si voglia dividere con una retta parallela alle basi in due che siano fra loro come due segmenti dati m, n.



Si prolunghino i lati concorrenti BA, CD finchè s'incontrino in O, su OC come diametro si descriva una semicirconferenza e nella medesima s'inscriva una corda $OE = OD$ e da E si cali la perpendicolare EF ad OC. Dividasi internamente FC in G così che sia $FG : GC = m : n$, s'innalzi da G la perpendicolare ad OC fino ad incontrare la semicirconferenza in H e su OC si porti $OL = OH$. Finalmente tirisi per L la LM parallela alle basi del trapezio, il quale resta così diviso come si voleva.

Infatti dai triangoli simili OML, OAD, OBC, si ha:

$$\Delta\, OML : \Delta\, OAD = OL^2 : OD^2 = OG : OF; \ \Delta\, OBC : \Delta\, OML = OC : OG$$

e dividendo

$$\text{trap. } AMLD : \Delta\, OML = FG : OG; \ \text{trap. } MBCL : \Delta\, OML = GC : OG$$

e quindi, essendo uguali i conseguenti:

$$\text{trap. } AMLD : \text{trap. } MBCL = FG : GC = m : n.$$

Se $m = n$ il punto G è il centro di FC.

AUTUNNO 1887, II a e b). — *Si trovino i coseni degli angoli d'un trapezio isoscele, dato che le basi del trapezio siano misurate da* a *e* b *e le diagonali da* d. *Si trovino gli angoli del trapezio supponendo* a = 8; b = 3; d = 7,5.

Risposta. Chiamando α uno degli angoli alla base $a > b$ del trapezio, si ha: $\cos \alpha = \frac{1}{2} \frac{a - b}{\sqrt{d^2 - ab}}$.

Se $a = 8$, $b = 3$; $d = 7{,}5$ risulta: $\alpha = 65^\circ.\ 27'.\ 59''$.

Estate 1888, I). — *Trovare i lati d'un parallelogrammo che ha un angolo semiretto, quando si conoscono l'area e il perimetro. Quand'è che il problema è possibile?*

Risposta. Indicando l'area e il perimetro con a^2 e $2p$, due lati consecutivi del parallelogrammo saranno:

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - a^2 \sqrt{2}}; \quad \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - a^2 \sqrt{2}}.$$

Perchè il problema sia possibile conviene che sia $\frac{p^2}{4} \geq a^2 \sqrt{2}$. Anzi dato p il massimo valore che può avere a^2 si ha quando $a^2 = \frac{p^2}{4\sqrt{2}}$, mentre data a^2 il minimo valore che può avere p si ha quando $p = 2a \sqrt[4]{2}$.

Estate 1888, II). — *Data la differenza di due numeri e data la differenza dei loro cubi, trovare i due numeri. Discutere la soluzione.*

Risposta. Chiamando d la differenza dei due numeri, a^3 quella dei loro cubi, i numeri cercati sono

$$\frac{d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4a^3 - d^3}{3d}}; \quad -\frac{d}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4a^3 - d^3}{3d}},$$

dove, pel radicale, vanno presi insieme i segni superiori o gli inferiori. Il problema ha perciò due soluzioni le quali sono reali se $4a^3 \geq d^3$, immaginarie nel caso contrario.

Data d il minimo valore che può avere a^3 si ha quando $a^3 = \frac{d^3}{4}$ e data a^3 il massimo valore che può avere d si ha per $d = a \sqrt[3]{4}$. Nel caso del massimo e del minimo, ossia di $4a^3 = d^3$, si trova poi che i due numeri sono uguali e di segno contrario.

Osservazione. — La soluzione di questo quesito, di quello della Estate 1879, II *a*), e di quelli analoghi, può farsi dipendere, fino al caso delle quinte potenze, dalla risoluzione d'una equazione di 1° o 2° grado, in virtù delle seguenti identità:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2\,ab$$
$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)^3 \mp 3\,ab\,(a \pm b)$$
$$a^4 + b^4 = (a + b)^4 - 4\,ab\,(a + b)^2 + 2\,a^2\,b^2$$
$$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)^5 \mp 5\,ab\,(a \pm b)^3 \pm 5\,a^2\,b^2\,(a \pm b),$$

come fu altrove notato per un caso particolare (*V.* Oss. che accompagna la soluzione del tema dell' Estate 1879, II *a*)). Tali identità sono poi incluse nella seguente formula generale di Waring

$$a^n + b^n = (a + b)^n - n\,ab\,(a + b)^{n-2} + \frac{n\,(n-3)}{1\,.\,2}\,(ab)^2\,(a+b)^{n-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^m\,\frac{n\,(n-2\,m+1)\,(n-2\,m+2)\ldots.(n-m-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots.\,m}\,(a\,b)^m\,(a+b)^{n-2m} + \ldots$$

che può dimostrarsi facilmente col metodo di conclusione da n ad $n+1$.

Autunno 1888, I). — *I lati di un triangolo circoscritto ad un circolo di raggio dato sono in progressione aritmetica, la cui differenza è uguale alle quarta parte del raggio. Trovare i lati.*

Indicando con x il lato di grandezza media e con r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo, gli altri lati saranno $x - \frac{r}{4}$, $x + \frac{r}{4}$ e si avrà: area $\Delta = \frac{3\,r\,x}{2}$. Ma l'area del triangolo, per una nota formola, è anche espressa da

$$\sqrt{\frac{3\,x}{2}\,.\,2\,x\left(2\,x + \frac{r}{4}\right)\left(2\,x - \frac{r}{4}\right)}\,.$$

onde uguagliando, e risolvendo rispetto ad x l'equazione che si ottiene, risulta $x = \frac{r}{8}\sqrt{13}$. I lati del triangolo sono perciò espressi da $\frac{r}{8}(\sqrt{13} - 2)$: $\frac{r}{8}\sqrt{13}$: $\frac{r}{8}(\sqrt{13} + 2)$.

A. Lugli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
27, 33, 34, 35 e 36

27. *Dimostrare che, se l'equazione*

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

: *le quattro radici positive, dev'essere* $\alpha = 6$, $\beta = 1$.

D. Besso.

Dimostrazione del Prof. *G. Frattini* (*).

Supponiamo che l'equazione

$$t^4 - 4t^3 + \alpha t^2 - 4t + \beta = 0$$

bia le quattro radici positive. Le tre radici della derivata

$$2t^3 - 6t^2 + \alpha t - 2 = 0$$

anno positive; e avranno una somma eguale a 3 e un prodotto eguale a 1. ı è noto che, se la somma di tre numeri positivi è 3, il loro prodotto è nore di 1, ed eguale ad 1 solo quando i tre numeri siano eguali fra loro, conseguentemente all'unità. Perciò le radici della precedente equazione saranno .te e tre eguali fra loro e all'unità. Ciò prova che $\alpha = 6$. Pertanto l'equane si potrà scrivere

$$(t-1)^4 = 1 - \beta.$$

radici di questa, quando $1 - \beta$ non sia zero, sono o tutte e quattro immaıarie (se $1 - \beta$ è negativo) o due reali e due immaginarie (se $1 - \beta$ è positivo). rchè adunque siano tutte e quattro reali, dovrà essere $1 - \beta = 0$, cioè $\beta = 1$.

Dimostrazione del Prof. *F. Viaggi*.

Pongo

$$6 - \alpha = m \qquad 1 - \beta = n. \tag{1}$$

ıno t_1, t_2, t_3, t_4, le quattro radici supposte positive, della equazione; essendo

$\overline{\beta}$ la loro media geometrica ed 1 la loro media aritmetica dev'essere

$\overline{\beta} \leqq 1$ e quindi $\beta \leqq 1$: inoltre

$\leqq (t_1 - t_2)^2 + \ldots + (t_3 - t_4)^2 = 3(t_1 + \ldots + t_4)^2 - 8(t_1 t_2 + \ldots + t_3 t_4) = 8(6 - \alpha) = 8m.$

(*) Altre soluzioni di questa questione pervennero dai Sig. Prof. *S. Catania, S. Gatti, F. Pañni, U. Scarpis* e *G. Tolomei.*

Si può adunque conchiudere che, se le radici della equazione sono tutte positive,

$$6 > m \geqq 0 \qquad 1 > n \geqq 0.$$

Notisi che una delle quantità m, n s'annulla solo quando le quattro radici sono eguali tra loro; perciò esse sono ambedue eguali a zero o ambedue maggiori di zero.

Se m, n sono eguali a zero, ossia se $\alpha = 6$ e $\beta = 1$, la proposta equazione ha evidentemente le quattro radici eguali ad 1.

Supponiamo invece, se è possibile, m ed n maggiori di zero. Se s'indica con $f(t)$ il primo membro della data equazione, si ha, tenuto conto delle (1),

$$f(t) = (1-t)^4 - (mt^2 + n)$$

e poichè se t si fa crescere da 0 ad 1, $f(t)$ decresce continuamente dal valore positivo $1-n$ al negativo $-(m+n)$, l'equazione $f(t) = 0$ ammette una e una sola radice tra 0 ed 1. Inoltre poichè la differenza $\left(t'' + \frac{1}{t''}\right) - \left(t' + \frac{1}{t'}\right) = \left(t'' - t'\right) \frac{t' t'' - 1}{t' t''}$ è positiva, quando $1 \leqq t' < t''$, e quindi la funzione $t + \frac{1}{t}$ cresce, quando t cresca da 1 a $+\infty$, la funzione

$$f(t) = t^2 \left\{ \left(t + \frac{1}{t} - 2\right)^2 - m \right\} - n$$

cresce dal valore negativo $-(m+n)$ a $+\infty$, quando t si faccia crescere da 1 a $+\infty$: perciò l'equazione $f(t) = 0$ ammette una sola radice tra 1 e $+\infty$. L'ipotesi adunque che m, n sieno maggiori di zero va rifiutata, perchè essa condurrebbe a conchiudere che la equazione proposta ha due sole radici positive, contrariamente a quanto si suppone nel testo.

33. *Esprimere in funzione del raggio della sfera circoscritta al dodecaedro (icosaedro) regolare, la somma dei quadrati delle rette che congiungono un vertice del dodecaedro (icosaedro) con quelli che non fanno parte delle facce concorrenti al vertice scelto.*

G. Russo.

Soluzione del Prof. *F. Viaggi*.

Sieno A, B vertici opposti: qualunque altro vertice del poliedro insieme con essi forma un triangolo rettangolo di cui AB è ipotenusa.

Caso del dodecaedro.

I tre pentagoni, che passano per B, contengono i 10 vertici non situati con A su una stessa faccia; di questi 1 è B, 3 congiunti con B formano costole del poliedro, 6 congiunti con B dànno diagonali delle facce: quindi chiamando r, c, d i numeri che misurano raggio, costola del poliedro e diagonale a faccia, la somma domandata è

$$4r^2 + 3(4r^2 - c^2) + 6(4r^2 - d^2) = (26 + 2\sqrt{5})\,r^2,$$

ıdo $\qquad d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,c, \quad c = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,r.$

Caso dell'icosaedro.

I cinque triangoli che passano per B contengono i 6 vertici non situati A su una stessa faccia; di questi 1 è B e 5 congiunti con B dànno co- del poliedro: quindi chiamando r, c i numeri che misurano raggio e costola icosaedro, e ricordando che $c = r\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}$, la somma domandata è

$$4r^2 + 5(4r^2 - c^2) = (14 + 2\sqrt{5})\,r^2.$$

34*. ***L'area di un triangolo qualunque è uguale al prodotto dei ıenti che il cerchio inscritto, o uno dei cerchi ex-iscritti determina ıno dei lati del triangolo, per la cotangente della metà dell'angolo ısto.***

G. Russo

Dimostrazione del Sig. *A. Restifa* allievo del R. Liceo di Acireale.

Indicando con r il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC, con l punto in cui questo cerchio è tangente a BC, si ha $BM = r\cot\frac{B}{2}$, $= r\cot\frac{C}{2}$ onde $BC = a = r\left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$ e similmente

$$b = r\left(\cot\frac{C}{2} + \cot\frac{A}{2}\right), \qquad c = r\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}\right).$$

Rammentando ora che l'area T del triangolo ABC uguaglia il prodotto ;emiperimetro pel raggio del cerchio inscritto, addiziono le tre uguaglianze ıe, divido per 2 e moltiplico per r e così trovo

$$T = r^2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right).$$

Ma se $A + B + C = \pi$ si ha

$$\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} \ (*),$$

ıue sarà

$$T = r^2\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2} = BM \,.\, MC\cot\frac{A}{2}.$$

(*) V. Trigonometria del *Serret*, esercizi al libro II.

Ove si chiami poi M' il punto in cui il cerchio ex-inscritto, tangente ai lati dell'angolo A, tocca BC, avendosi $BM' = MC$, $M'C = BM$, è chiaro che si ha pure $T = BM' \,.\, M'C \cot \frac{A}{2}$.

35*. *I numeri della forma $4a + 1$ divengono quadrati perfetti per $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$* (*).

P. Montesano.

Dimostrazione del Sig. *P. Marano* alunno del R. Istituto nautico di Catania.

I numeri della forma $4a + 1$ sono dispari e perciò non possono essere che quadrati di numeri dispari. Adunque se vi è un numero di cui $4a + 1$ sia il quadrato, tale numero sarà della forma $2n + 1$, n rappresentando un intero positivo, compreso zero. Se $2n + 1$ soddisfa alla questione, dovrà essere

$$4a + 1 = 4n^2 + 4n + 1$$

da cui: $a = n(n + 1)$. Così tutti i numeri di questa forma ed essi soli sostituiti ad a fanno diventare $4a + 1$ un quadrato perfetto. E poichè per $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ si ha $a = 0, 2, 6, 12, 20, \ldots$, il teorema è dimostrato.

Dimostrazione del Sig. *A. Longo* alunno del R. Liceo di Acireale. (**)

Si consideri in generale una serie di numeri

$$n_1, n_2, n_3, \ldots\ldots\ldots n_p$$

tale che si abbia $n_2 - n_1 = \delta$, $n_3 - n_2 = 2\delta$; ...... $n_p - n_{p-1} = (p-1)\delta$. Sommando ottengo:

$$n_p - n_1 = \delta\left[1 + 2 + \ldots + (p-1)\right] = \delta\,\frac{p(p-1)}{2}.$$

E poichè i numeri $0, 2, 6, 12, 20, \ldots$ formano una serie consimile, nella quale $n_1 = 0$, $\delta = 2$, così si ha in questo caso $n_p = p(p-1)$. Sostituendo ora ad a in $4a + 1$ il valore generale $p(p-1)$, di un termine qualunque di quest'ultima serie, si ottiene

$$4a + 1 = 4p(p-1) + 1 = (2p-1)^2, \; c.\ d.\ d.$$

36*. *Se* m *è pari ed* a *è un numero dispari qualunque, il binomio $a^m + 1$ diviso per 4 e 8 dà sempre per resto 2.*

A. Lugli.

Dimostrazione del Sig. *G. Piuma* alunno nel R. Liceo Colombo di Genova. (***)

Pongasi $a = 2n + 1$ ed $m = 2h$. Essendo a dispari, anche a^h sarà dispari

---

(*) Il Prof. *G. Russo* osserva che questa questione potrebbe essere generalizzata così « I numeri della forma $n\,a + 1$ divengono quadrati perfetti per $a = 0$, $n + 2$, $(2n + 2)\,2$, $(3n + 2)\,3, \ldots$ ».

(**) Inviarono altre dimostrazioni i Signori: *A. Baldassare* e *S. Jovino* alunni del R. Istituto tecnico di Bari; *S. Lopriore* alunno del R. Liceo di Bari.

(***) Altre dimostrazioni vennero inviate dai Signori *P. Marano* alunno del R. Istituto nautico di Catania ed *A. Baldassare* alunno del R. Istituto tecnico di Bari.

r cui ponendo $a^h = 2k + 1$, si avrà:

$$a^m = a^{2h} = (a^h)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \quad \text{e} \quad a^m + 1 = 4k(k+1) + 2.$$

Manifestamente $4h(k+1)$ è un multiplo di 4, onde $a^m + 1$ diviso per dà per resto 2.

Ora k è pari o dispari. In ogni caso uno dei fattori del prodotto $k(k+1)$ multiplo di 2 cosicchè $4k(k+1)$ è divisibile per 8. Segue che $a^m + 1$ dio per 8 dà pure per resto 2.

QUISTIONI PROPOSTE. (*)

39. Trovare il numero delle radici reali dell'equazione

$$a x^4 + 4 x^3 + 2 a x^2 - 4 x + a = 0$$

cui a è compreso fra 0 ed 1, e separarle.

40. Eliminare x, y, z dalle tre equazioni

$$A x + B y + C z = 0$$

$$\frac{A_1}{x} + \frac{B_1}{y} + \frac{C_1}{z} = 0$$

$$A_2 x^2 + B_2 y^2 + C_2 z^2 = 0.$$

41*. Se con $\binom{m}{r}$ s'indica il numero delle combinazioni di m eleti ad r ad r, ha luogo la relazione

$$\binom{n-1}{2r} + \frac{n-1}{2r-1}\binom{n-2}{2r-2} = \binom{n}{2r}.$$

D. Besso.

42*. Se in un esagono $AB'CA'BC'$ inscritto in un cerchio, ette AA', BB', CC' che uniscono i vertici opposti, si incontrano in unto, il prodotto dei lati di posto dispari è uguale al prodotto dei di posto pari. Si ha cioè $AB'.CA'.BC' = A'B.C'A.B'C$.

A. Sauve.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono specialmente destinate alunni delle nostre Scuole secondarie e di esse si pubblicheranno soltanto luzioni inviate dagli alunni stessi.

43*. Dei tre quadrati inscritti in un triangolo il maggiore è quello che appoggia al lato minore. — La proposizione ammette eccezioni?

44*. Se si circoscrive un cerchio ad un triangolo equilatero ABC, dimostrare geometricamente: 1° che la somma delle distanze di un punto qualunque P, dell' arco BC, ai vertici B e C è uguale a PA; 2° che la somma $PA+PB+PC$ è massima quando P è il punto medio dell' arco BC.

45. Se A' è il punto del lato BC di un triangolo ABC pel quale si ha $BA' : A'C = m$ e P il punto in cui AA' incontra la circonferenza circoscritta al triangolo, dimostrare: 1° che

$$PA+PB+PC=\frac{c(a+c)+mb(a+b)}{\sqrt{(1+m)(mb^2+c^2)-a^2 m}};$$

2° che il valore massimo della somma delle tre distanze del punto P ai tre vertici del triangolo si ha quando questa somma uguaglia

$$2\sqrt{R(R+2r_1)},$$

dove R e r_1 indicano il raggio del cerchio circoscritto al triangolo e quello del cerchio ex-inscritto relativo al lato a.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA (*)

BELLINO CARRARA — *La coincidenza dei due metodi di approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi.* — Torino, G. B. Paravia, 1889.

Il metodo delle successive approssimazioni del Newton, applicato al calcolo della radice positiva della equazione $x^2 - N = 0$, in cui si supponga N numero positivo, conduce a formare la serie

$$a_0, \ a_1, \ a_2, \ldots\ldots, a_{m-1}, a_m, \ldots$$

nella quale a_0 è un valore approssimato di $\sqrt{N}$, e un termine qualunque si deduce dal precedente per mezzo della relazione: $a_m = \frac{1}{2}\left(a_{m-1} + \frac{N}{a_{m-1}}\right)$.

Il metodo del Lagrange invece fornisce il valore della radice sotto forma di frazione continua, nella quale, se N è numero intero, un certo numero, che

---

(*) Per deficienza di spazio si rimette al fascicolo I. dell' anno venturo un altro articolo bibliografico dei Prof. *R. De Paolis* e *G. Frattini* su di un libro del Prof. Anton Maria Bustelli.

suppongo n, di quozienti incompleti, a cominciare dal secondo, si ripete periodicamente. In tale ipotesi sieno:

$$u_0\ ,\ u_1\ ,\ u_2\ ,\ \ldots\ldots\ ,\ u_m\ ,\ \ldots$$

le ridotte della frazione continua formate adoperando kn, $2kn$, $4kn$, . ., $2^m kn$,... quozienti incompleti.

Si ha il teorema: se $a_0 = u_0$, è anche $a_m = u_m$.

Tale coincidenza, segnalata già nell'Algebra del Serret, come dichiara lo stesso Prof. Carrara, in quella si presenta come corollario d'una teoria alquanto complicata: ora il Prof. Carrara ha avuto la buona idea di dimostrare il teorema per via diretta, corredandolo di qualche altro teorema notevole, d'una tavola che dà gli sviluppi in frazione continua delle radici quadrate dei primi 78 numeri naturali, e di opportune considerazioni. Delle quali la più importante dal lato pratico è la seguente: se, scelto v_0 come primo termine della serie delle a, a_m è eguale alla frazione irreducibile $\frac{\alpha}{\beta}$, è $a_m - \sqrt{N} < \frac{1}{\beta}$.

In una nota a pagina 8 si legge che il metodo del Newton *non assicura per se stesso senza ulteriori discussioni l'avvenuta approssimazione verso il valore della radice*; e, in fine dell'opuscolo, che *nel calcolo delle radici quadrate irrazionali dei numeri interi* il metodo del Newton *riceve* da quello del Lagrange *la sicurezza d'una ben definita approssimazione*. Ora se, come appare dal ravvicinamento dei due passi citati, l'egregio A. ha inteso dire che senza la coincidenza da lui messa in luce rimangono incogniti i limiti degli errori che si commettono prendendo a_1, a_2, ... come valori approssimati di $\sqrt{N}$, io credo che si apponga male. E invero, sia N *intero o no*, se è p l'errore per eccesso o per difetto del primo valore a_0 che si assume, si dimostra per via elementare che l'errore di a_m è

$$a_m - \sqrt{N} = \left(\frac{p}{2}\right)^{2m} \cdot \frac{2}{a_{m-1}\ a^2_{m-2}\ a^4_{m-3}\ \ldots\ a_0^{2^{m-1}}}$$

dalla quale si ricava la seguente limitazione:

$$2I\left(\frac{p}{2I}\right)^{2^m} < a_m - \sqrt{N} < 2i\left(\frac{p}{2i}\right)^{2^m}$$

in cui i è approssimato per difetto a $\sqrt{N}$ ma non maggiore di a_0, I eguale al maggiore dei due numeri a_0, a_1.

F. Viaggi.

Pubblicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini. Vol. XXVII. Settembre-Ottobre. Napoli, B. Pellerano editore, 1889.

Journal de Mathématique élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, LUCIEN LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'Ecole préparatoire de Saint-Barbe. 3ª Série, Treizième année. N. 10, 11. Octobre, novembre. Paris, libraire Ch. Delagrave, 1889.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par H. VUIBERT. 14 année. N. 1, 2, 3, 4, 5. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1889.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomica publicado pelo Dott. F. GOMES TEIXEIRA, professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 3. Coimbra, 1889.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome neuvième. Octobre, novembre, 1889.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. III, Fasc. 9, 10, 11. Settembre, ottobre, novembre 1889.

AMANZIO (D.) — Trattato di aritmetica teorica. 2ª edizione. Napoli, Morano editore, 1889. Prezzo L. 3, 75.

BIGIAVI (C.) — Sopra una classe di equazioni differenziali lineari a coefficienti doppiamente periodici (Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa, 1889).

BOSI (L.) — Soluzione della questione 67ª, proposta nel giornale di Battaglini, volume XXVII.

CATANIA (S.) — Sulle cubiche gobbe (Atti Acc. Gioenia di Scienze Naturali in Catania, 1885). — Sulle curve piane algebriche del quarto ordine. Catania, 1883.

DEMCZYNSKI (G.) — Elementi di aritmetica teorico-pratica ad uso delle Scuole secondarie del Regno. 2ª edizione. Milano, Cesana, 1890. Prezzo L. 2, 50.

FRATTINI (G.) — Aritmetica pratica ad uso delle Scuole elementari del Regno. Parte I, 3ª edizione: cent. 40; parte II, 2ª edizione: cent. 45; parte III, 2ª edizione: cent. 50. G. B. Paravia e C.

GOMES TEIXEIRA (F.) — Curso de Analyse infinitesimal: Calculo integral (primeira parte). Porto, typografia occidental, 1889.

GRABLOVITZ (G.) — Metodo per determinare le costanti della marea lunare con con una o due singole osservazioni al giorno (Annali dell'Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica, Roma, 1889).

GRILLI (R.) — Saggio di un nuovo trattato d'algebra elementare per i Licei. Correggio, 1889.

MILLOSEVICH (E.) — Orbita definitiva della cometa 1888-III (Memorie degli Spettroscopisti italiani, 1889). — Sulla difficoltà di determinare esattamente una differenza di longitudine in estrema prossimità ai poli (Annuario dell'Istituto cartografico italiano, 1889).

NICOLI (F.) — Intorno ad un'interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni lineari (Atti della R. Acc. di Scienze lettere ed arti in Modena, 1875). — Intorno ad un caso di movimento di una figura piana la quale scorre nel suo piano e varia rimanendo simile a sè stessa (Id. id. 1881). — Intorno ad un caso di movimento di una figura piana che si conserva simile a sè stessa (Id. id. 1882). — Intorno a due casi di movimento di una figura solida che rimane simile a sè stessa (Id. id. 1882). — Intorno agli elementi uniti di due forme geometriche collineari (Id. id. 1889).

N. N. — Studio riassuntivo della funzione $F(x) = ax^2 + bx + c$. Lecce. Prezzo cent. 20.

RAZZABONI (A.) — Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra al modo di Gauss (Giornale di matematiche di Battaglini. Vol. XXVII, 1889).