Essendo infine m. m. c. $(3^2; 2; 11^4 \times 2) = 2 \times 3^2 \times 11^4$, possiamo concludere (§ 6) che la radice minima della

$$\frac{g^{3x}-1}{g^3-1} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod. } \frac{p}{\rho}\right)$$

e quindi (§ 4) la radice minima della

$$N_x - N_0 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

è $2 \times 3^2 \times 11^4 = 263538$.

**15.** TEOREMA DI PLATEAU GENERALIZZATO. — *Dato un gruppo qualsiasi di cifre* C *e dato un qualsiasi numero* p *primo con* g, *base del sistema di numerazione usato, esistono infiniti numeri della forma* CC...C *multipli di* p.

Se il numero rappresentato dal gruppo C è multiplo di $p$, tutt'i numeri C, CC, CCC, ... sono multipli di $p$.

Per tanto in ciò che segue supporremo C rappresentante un numero non multiplo di $p$.

Posto nella teoria generale $N_0 = 0$, $N_1 = C$, la condizione $N_0 \equiv N_1$ (mod. $p$) non essendo soddisfatta perchè supponiamo diversa da 0 almeno qualcuna delle cifre del gruppo C, esiste (§ 3) un numero $\lambda > 1$ per cui

$$N_i \equiv N_0 \qquad (\text{mod. } p)$$

sempre e solo quando $i$ è multiplo di $\lambda$. Trasportando questi risultati della teoria generale al caso nostro, abbiamo appunto $N_0 = 0$ ed $N_i = C_i$, rappresentando $C_i$ il numero formato da $i$ gruppi identici al dato C. Dunque abbiamo

$$C_i \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ossia qualsiasi numero della forma CC...C sarà multiplo di $p$ purchè il numero dei gruppi C che lo costituiscono sia multiplo di $\lambda$. Il numero $\lambda$ dice quanti sono gli elementi della (6) tutti distinti fra loro; o, che è lo stesso, qual'è il *minimo* numero di volte che bisogna scrivere di seguito il gruppo C per avere un numero multiplo di $p$.

Pel calcolo di $\lambda$ rimandiamo il lettore a quanto abbiamo esposto nei §§ 13 e 14.

**16.** In un sistema di numerazione a base $g$:

*se un numero* U *si spezza graficamente in* h *parti delle quali la prima abbia un numero qualsiasi di cifre e tutte le rimanenti ne abbiano* c *per una, la somma di tutte queste parti è congrua ad* U *secondo il modulo* $g^c - 1$.

Difatti, detta $u_i$ la parte seguita in U da altre $i$ parti, si ha

$$U = \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i g^{ic}$$

e quindi anche

$$U = \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i (g^{ic} - 1) + \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i\,.$$

Ma il 2° dei tre termini di quest'eguaglianza è multiplo di $g^c - 1$; dunque

$$U \equiv \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i \qquad (\text{mod. } g^c - 1). \tag{25}$$

Ciò posto, pel § 15 la congruenza

$$g^x - 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

con $p$ primo con $g$, ammette infinite soluzioni; cioè esistono infiniti numeri multipli di $p$ scritti con sole cifre eguali alla massima del sistema. Se qui sopra prendiamo $c$ eguale ad una di queste soluzioni (nella pratica sarà preferita la minima) possiamo per la (25) scrivere

$$U \equiv \sum_{i=0}^{i=h-1} u_i \qquad (\text{mod. } p).$$

Dunque: *In qualsiasi sistema di numerazione, un qualsiasi numero* U *è congruo (secondo un qualsiasi numero* p *primo con la base del sistema) alla somma dei numeri ottenuti dal separare, a partire da destra, finchè sia possibile, le cifre di* U *in gruppi di* c *cifre l'uno, essendo* c *il numero delle cifre di un qualsiasi multiplo di* p, *scritto con sole cifre eguali a* g — 1. (Confr. LORIA: " Carattere di visibilità ecc. „ *Boll. di Mat.*, a. 1902, n. 1).

G. CALVITTI.

# QUISTIONI PROPOSTE

**708.** Data la definizione di eguaglianza posta dal Veronese nella seconda edizione del suo testo di geometria e nella terza edizione della seconda parte, si domanda se sia possibile dimostrare che in due figure eguali a tre punti allineati dell'una corrispondano tre punti allineati dell'altra.

CATANIA.

**709.** Costruire i punti di una ellisse per i quali il raggio di curvatura è eguale al semidiametro coniugato a quello che passa per il punto.

**710.** Sia M un punto d'un ellisse, F un fuoco, P, Q i punti d'incontro della tangente in M col circolo di raggio MF. L'area della curva luogo di P, Q è doppia di quella del cerchio che ha per diametro l'asse maggiore dell'ellisse.

**711.** Siano M un punto qualunque preso sulla sviluppata di un ellisse, A il piede della normale doppia e B, C i piedi delle normali semplici condotte da M all'ellisse, A' il simmetrico di A rispetto al centro dell'ellisse.

1. La retta che passa per il baricentro del triangolo ABC e per il centro dell'ellisse è parallela a BC.

2. La parallela per A a BC è normale ad un'ellisse fissa.

3. Il luogo del circumcentro, del baricentro e dell'ortocentro del triangolo ABC sono curve che hanno per aree rispettivamente

$$\frac{D}{12}, \quad \frac{E}{18}, \quad \frac{E}{2} + D,$$

E e D essendo le aree dell'ellisse e della sua sviluppata.

4. Il luogo del centro dell'iperbole equilatera circoscritta al quadrilatero ABCA' è una curva la cui area è $\frac{E}{8} + \frac{D}{12}$.

5. Il luogo del punto d'incontro degli assi delle due parabole circoscritte al quadrilatero ABCA' è una curva la cui area è $\frac{E}{32}$.

6. Il luogo del centro dell'iperbole d'Apollonio relativa al punto M è una sviluppata d'ellisse: l'area di questo è $\frac{3E}{8}$.

E.-N. Barisien.

# BIBLIOGRAFIA

Wieleitner. — *Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer ordnung.* (Sammlung Schubert XLIII.) Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1905.

Questo libro fa parte dell'ottima raccolta di manuali Schubert, che conta già 49 volumi pubblicati ed altri 25 in preparazione; esso è destinato, come afferma l'Autore nella prefazione, ai principianti, in quanto che si richiede solo la conoscenza dei fondamenti del calcolo differenziale, dell'algebra e della teoria delle coniche.

L'Autore non si è proposto di arricchire la scienza di nuove conquiste, ma di fornire ai giovani una introduzione allo studio della geometria superiore secondo i concetti di Schubert.

Ed ha avuto il merito di raccogliere in un volume di circa 300 pagine le parti fondamentali degli argomenti trattati nel classico libro di Salmon-Fiedler, in forma compendiosa ma chiara, tenendo conto anche dei progressi compiuti negli ultimi 20 anni.

Il volume è preceduto da un indice analitico molto dettagliato, e da una notizia bibliografica delle opere consultate per compierlo e si chiude con un indice alfabetico.

Ecco i titoli delle 14 sezioni in cui si suddivide l'opera: I. Concetti generali. — II. Teoria delle polari - Le singolarità semplici - Relazione fra ordine e classe di una curva. — III. La curva Hessiana e curve associate (Steineriana, Cayleyana).

— IV. Le formule di Plücker — V. Genere - Curve razionali. — VI. Il triangolo analitico - Assintoti - Discussione di curve. — VII. singolarità più elevate. — VIII. Trasformazione delle curve. — IX. Il principio di corrispondenza generalizzato. — X. Sistemi di punti sulle curve. — XI. Applicazione del teorema sopra i sistemi di punti. — XII. Curve del 3° ordine. — XIII. Curve del 4° ordine. — XIV. Sistemi di curve.

Amodeo. — *Vita matematica napoletana.* Studio storico, biografico, bibliografico. — Parte prima (con una tavola di ritratti fuori testo e 5 nel testo). Napoli, Gianni e figli, 1905.

In questo bellissimo volume di 216 pagine il chiaro autore, libero docente di storia delle matematiche a Napoli, ha raccolti i frutti delle sue diligenti ed utili ricerche sulle matematiche e i matematici napoletani, già pubblicate in varie riviste, e più specialmente nelle " Memorie dell'Accademia Pontaniana "; e crediamo che abbia fatto ottima cosa perchè è bene che a questo genere di ricerche sia data pubblicità più larga di quella che può dare il citato periodico.

Questa prima parte si compone di quattro capitoli. Il 1° dal titolo " Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1730 " fu letto all'Accademia pontaniana il 17 novembre 1901 e 12 gennaio 1902, ed ebbe il premio *Tenore* del 1897. In esso si parla della fondazione della Reale Accademia delle scienze di Napoli (20 marzo 1698), di Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679), amico di Galileo e continuatore della sua scuola, di Antonio de Monforte (1646-1717), di Giacinto de Cristofaro (n. nel 1650) ed altri matematici minori.

Il Capitolo 2° " Dai fratelli De Martino a Vito Caravelli " letto all'Accademia Pontaniana nelle tornate del 2 novembre e 7 dicembre 1902, contiene il periodo dal 1732 al 1778, epoca in cui la scoperta dell'antica Ercolano richiamò l'attenzione di molti illustri su Napoli e i Napoletani, e che segnò un principio di risveglio negli studi; infatti fu aumentato il numero delle cattedre di matematica che fino all'ora era stata unica, nel 1735 fu riordinata la Reale Accademia delle scienze, nel 1744 la Reale Accademia di Artiglieria, nel 1754 la Reale Accademia del corpo degl' Ingegneri, le ultime due delle quali furono fuse nel 1769 nella Reale Accademia militare, convertita poi nell'attuale Collegio militare.

Il 3° capitolo " Niccolò Fergola " fu letto all'Accademia Pontoniana nella tornata del 5 luglio 1900. Questo capitolo è una interessante e diligente ricostruzione della storia della vita e delle opere di Niccolò Fergola, che occupò il primo posto fra i matematici napoletani del secolo decimottavo, ricavata con sagace critica storica dagli scritti scientifici dello stesso Fergola, dagli autori del tempo, e dai verbali dell'Accademia delle Scienze.

Il Capitolo 4° " Gl'Istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800 " presenta al lettore un quadro dettagliato e molto interessante delle condizioni delle scuole e della scienza in Napoli nella prima parte del passato secolo, ed in particolare sugli studi privati, istituzione specialissima di origine prettamente napoletana; e fa sfilare una larga schiera di matematici, alcuni dei quali di discreto valore.

Auguriamo che sia presto compiuta quest'opera, che ha indiscutibilmente una notevolissima importanza storica.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

**Finito di stampare il 31 dicembre 1905**

# SEZIONI CONICHE

La teoria delle sezioni coniche, trattata indipendentemente dalla geometria analitica e dalla geometria proiettiva, presenta in tutti i trattati che sono a mia conoscenza delle lacune di una certa importanza.

La più importante è quella relativa allo studio dei diametri, studio che in alcuni trattati viene omesso del tutto, in altri viene fatto soltanto per l'ellisse, considerata come proiezione del cerchio. Eppure tale studio può farsi elementarmente con una semplicità ed una eleganza, che non hanno nulla da invidiare ai metodi della geometria analitica e della geometria proiettiva, purchè si faccia opportunamente uso delle considerazioni planimetriche e stereometriche alternativamente.

Credo dunque fare cosa non del tutto inutile pubblicando questo articolo, nel quale è esposta una trattazione delle coniche, quale a mio parere dovrebbe essere svolta nel 2° biennio degl' Istituti tecnici. Per la natura stessa dell'argomento, questo articolo non può contenere proprietà nuove: anche varie dimostrazioni sono vecchie e note; ma nell'insieme spero che il lettore troverà qualche cosa di nuovo.

## Proprietà generali.

**1.** Definizione. — *Si chiama* **sezione conica** *o più brevemente* **conica** *ogni linea ottenuta come intersezione di un piano con una superficie conica rotonda.*

Esaminiamo tutti i casi che si possono presentare, ed a tale scopo cominciamo col ricordare che si chiama *angolo di una superficie conica rotonda* l'angolo acuto formato dall'asse con una delle generatrici; indicheremo questo angolo colla lettera $\theta$. Inoltre per le sezioni prodotte in una superficie conica da un piano che passa per l'asse è noto il seguente

TEOREMA. — *Un piano passante pel vertice di una superficie conica rotonda, il cui angolo è* $\theta$;

1° *ha tutti gli altri suoi punti esterni alla superficie se forma coll'asse un angolo maggiore di* $\theta$ (fig. 1);

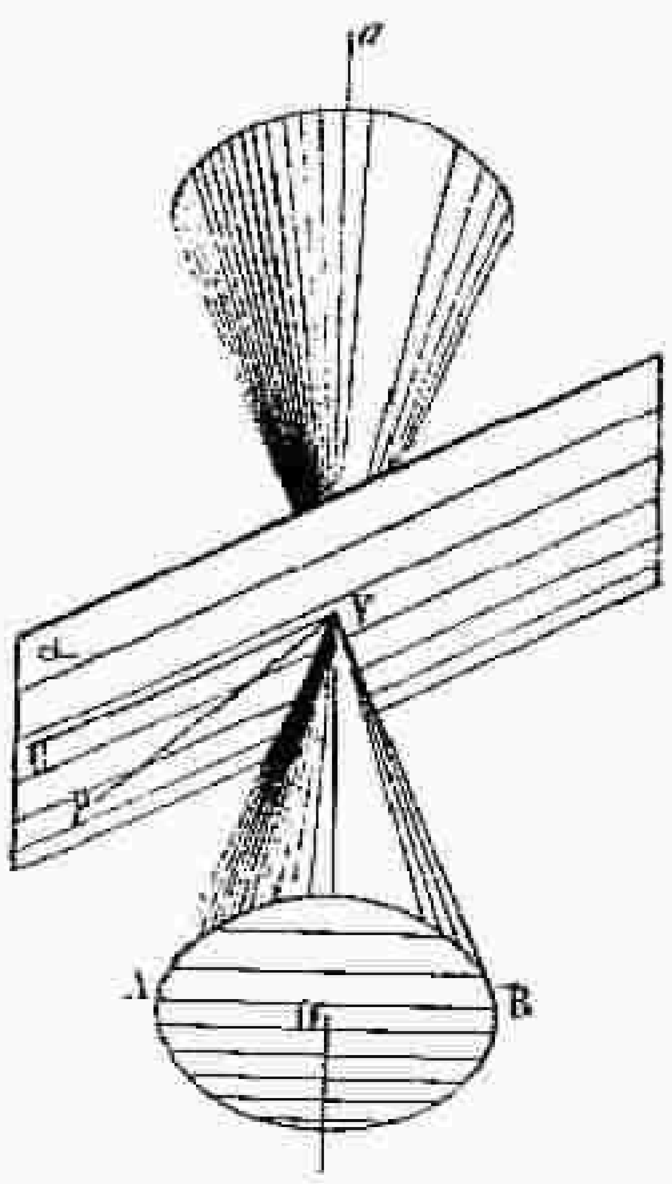


Fig. 1.

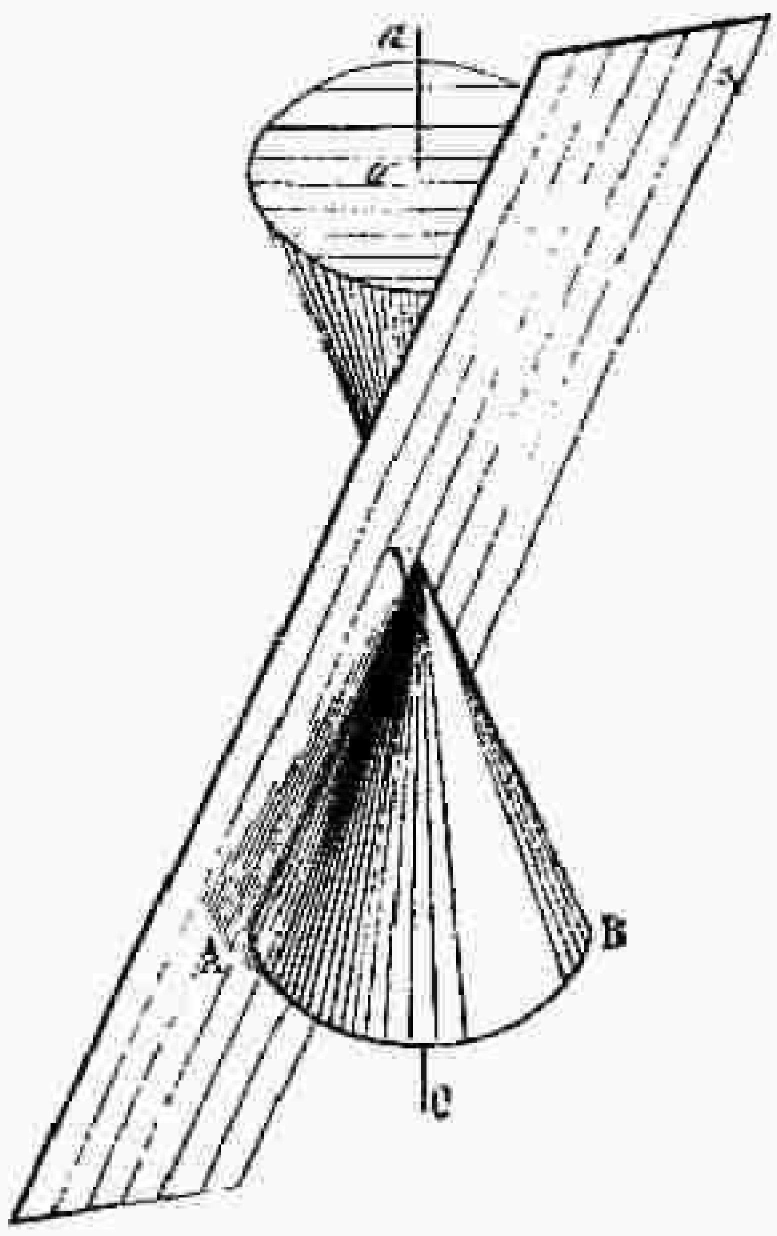


Fig. 2.

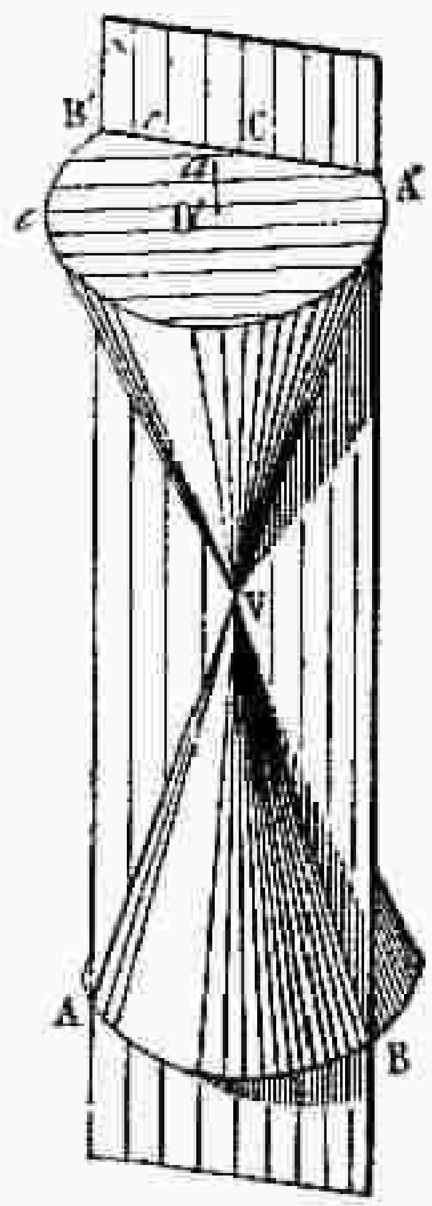


Fig. 3.

2° *ha in comune con essa tutti e soli i punti di una generatrice, se forma coll'asse un angolo eguale a* $\theta$ (fig. 2);

3° *ha in comune con essa tutti e soli i punti di due generatrici, se forma coll'asse un angolo minore di* $\theta$ (fig. 3).

Nel 2° caso il piano si chiama tangente.

**2.** Ciò premesso consideriamo un piano $\alpha$ che non passi per il vertice V del cono, ed insieme con esso il piano $\alpha_v$ parallelo ad $\alpha$ condotto per V.

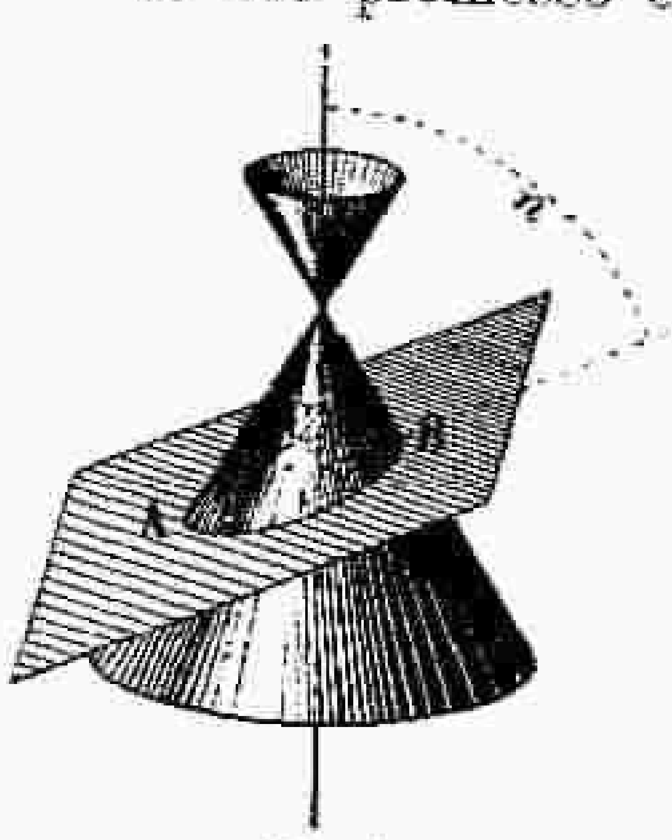


Fig. 4.

1°. Se $\alpha$ e quindi anche $\alpha_v$ forma coll'asse un angolo $\varphi$ maggiore di $\theta$, le due falde della superficie si trovano da parti opposte di $\alpha_v$, e per conseguenza $\alpha$ incontra tutte le generatrici di una falda, ossia la conica che essa determina è tutta sopra una falda della superficie ed i suoi punti sono tutti a distanza finita dal vertice (fig. 4).

2°. Se $\alpha$, e quindi anche $\alpha_v$ forma con l'asse un angolo uguale a $\theta$, $\alpha_v$ ha in comune colla superficie conica una ed una sola generatrice, e le due falde di tale superficie si trovano da parti opposte di $\alpha_v$. Per conseguenza $\alpha$ dovrà incontrare tutte le generatrici di una falda eccetto quella che è contenuta in $\alpha_v$ e quindi è parallela ad $\alpha$ (fig. 5).

In altre parole la conica determinata da $\alpha$ è tutta situata sopra una falda della superficie conica. ed i suoi punti hanno dal vertice distanze che possono essere maggiori di qualunque segmento.

3º. Se $\alpha$, e quindi anche $\alpha_v$, forma coll'asse un angolo minore di $\theta$, il piano $\alpha_v$ ha in comune colla superficie conica due rette e divide in due parti ciascuna delle sue falde. Per conseguenza $\alpha$

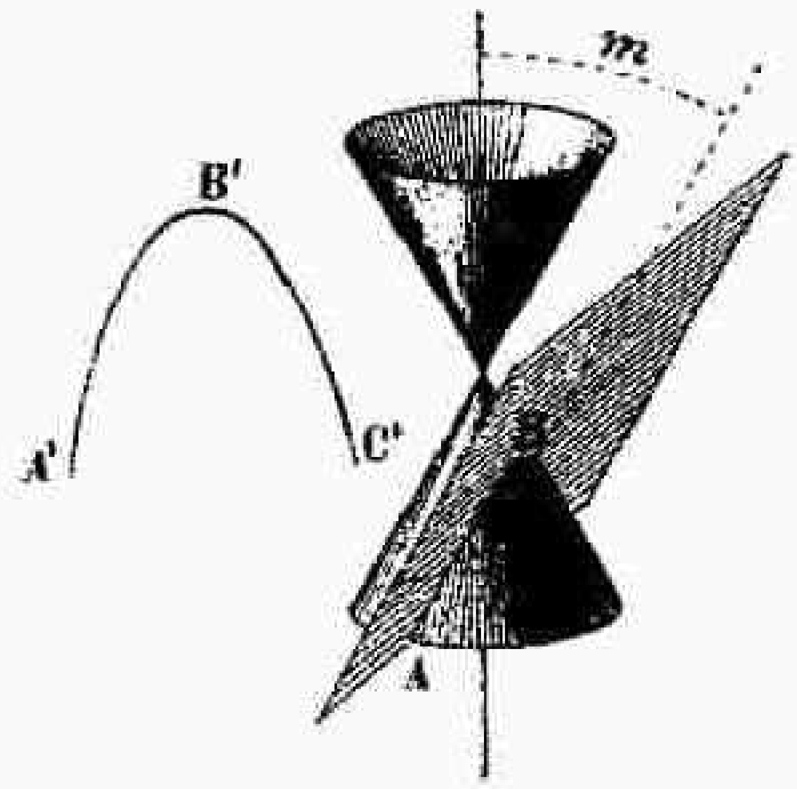



Fig. 5.

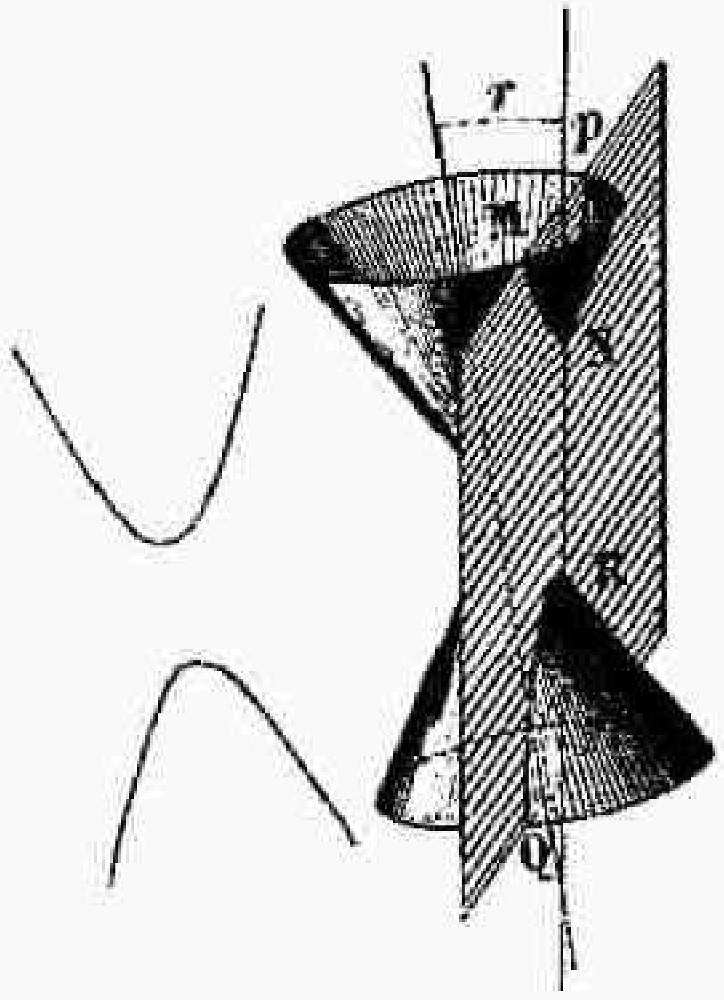



Fig. 6.

incontra tutte quelle generatrici delle due falde che si trovano da una parte di $\alpha_v$, escluse le due contenute in $\alpha_v$ e parallele ad $\alpha$ (fig. 6). In altre parole la conica determinata da $\alpha$ si compone di due rami distinti situati rispettivamente sulle due falde della superficie; e le distanze dei punti di ciascun ramo dal vertice possono diventare maggiori di qualsiasi segmento.

Da questo esame sommario apparisce che le sezioni prodotte in una superficie conica da un piano che non passa pel vertice si possono distinguere in tre classi, che designeremo nel modo seguente:

Definizioni. — 1ª. *Una sezione conica prodotta da un piano $\alpha$ che non passa pel vertice si chiama* **ellisse, parabola** *o* **iperbole**, *secondo che $\alpha$ fa coll'asse un angolo maggiore, eguale o minore di $\theta$.*

2ª. *Un punto del piano $\alpha$ si dice* **interno** *o* **esterno** *ad una conica, secondo che è interno ad una delle falde della superficie o esterno a tutte e due.*

Corollario. — *Il circolo è un caso particolare dell'ellisse.*

Infatti si ottiene un circolo tagliando una superficie conica con un piano perpendicolare all'asse, ossia con un piano che fa coll'asse un angolo $\varphi = 90^0 \, (> \theta)$.

**3.** Da quanto è stato detto fin qui risulta che tutte le sezioni coniche possibili possono raggrupparsi nel seguente quadro, seguitando a chiamare $\varphi$ l'angolo del cono e $\theta$ l'angolo dell'asse col piano secante.

$$\begin{array}{c} \text{piano } \alpha \\ \text{passante per il vertice} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \varphi > \theta & \text{un punto} \\ \varphi = \theta & \text{una retta} \\ \varphi < \theta & \text{due rette} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{piano } \alpha \\ \text{non passante per il vertice} \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \varphi > \theta & \left\{ \begin{array}{l} \text{ellisse} \\ \text{circolo, se } \varphi = 90^0 \end{array} \right. \\ \varphi = \theta & \text{parabola} \\ \varphi < \theta & \text{iperbole} \end{array} \right.$$

Definizione. — *Si chiamano* **assintoti di un'iperbole** *le due rette intersezioni del piano $\alpha$ della medesima coi piani tangenti alla superficie conica lungo le generatrici comuni alla superficie medesima ed al piano $\alpha_v$, condotto pel vertice della superficie, parallelo ad $\alpha$.*

**4.** Teorema. — *Ogni sezione conica ha per asse di simmetria, la proiezione dell'asse della superficie conica sul piano della sezione.*

Condotto per il vertice V il piano $\beta$ perpendicolare al piano $\alpha$ della conica, tanto la superficie conica quanto il piano $\alpha$ risultano simmetrici rispetto a $\beta$, e perciò anche la loro intersezione è simmetrica rispetto al piano $\beta$ ovvero alla retta comune ai piani $\alpha$, $\beta$.

È facile vedere che questa retta incontra in due punti la superficie conica, oppure in uno solo, se è parallela ad una generatrice, il che avviene soltanto se è $\varphi = \theta$.

Definizioni. — 1ª. *La proiezione dell'asse di una superficie conica sul piano di una sezione si chiama* **asse principale della sezione conica.**

2ª. *I punti d'incontro di una conica col suo asse principale si chiamano* **vertici principali.**

Corollari. — 1°. *Un'ellisse o un'iperbole ha due vertici principali, una parabola ne ha un solo.*

2°. *I due assintoti di un'iperbole s'incontrano in un punto dell'asse principale della medesima.*

Infatti le due generatrici comuni alla superficie conica e al piano $\alpha_v$ sono simmetriche rispetto al piano $\beta$, perciò i piani tangenti alla superficie conica luogo di esse sono pure simmetrici rispetto a $\beta$ e si tagliano secondo una retta situata in $\beta$, perciò gli assintoti, intersezioni di questi piani con $\alpha$ si tagliano in un punto della retta $\beta\alpha$ cioè dell'asse principale.

Definizione. — 3ª. *Si chiama* **lunghezza dell'asse principale di un'ellisse o di un'iperbole**, *la distanza dei due vertici principali.*

**5.** Definizioni. — 1ª. *Una retta si dice* **tangente** *ad una conica se è situata nel suo piano ed in un piano tangente alla superficie conica. Il punto comune ad una conica e ad una tangente si chiama* **punto di contatto** *di questa.*

2ª. *La retta situata nel piano di una conica e perpendicolare ad una sua tangente nel punto di contatto si chiama* **normale alla conica**.

Corollario. — *Dato un punto A di una conica, si può condurre in esso una ed una sola tangente.*

Questa è la retta d'intersezione del piano della conica col piano tangente in A alla superficie conica.

È opportuno osservare che, se si considera la retta che passa per due punti A, B di una conica, e si suppone che il punto B si muova sulla curva in modo che la distanza AB decresca indefinitamente. la posizione limite della retta AB è la tangente in A alla conica.

**6.** Teorema. — *Una retta situata nel piano di una conica ha al più due punti comuni con essa.*

Sia $p$ una retta situata nel piano $\pi$ di una conica $\gamma$. È evidente che, se P è un punto comune a $p$ e a $\gamma$, la retta che congiunge P col vertice della superficie conica appartiene a questa superficie e al piano V$p$. Inversamente se $r$ è una generatrice della superficie conica situata nel piano V$p$ essa incontrerà $p$ (purchè $p$ non sia parallela ad $r$) in un punto P comune a $p$ e alla conica $\gamma$.

Siccome un piano condotto pel vertice V della superficie conica non può avere più di due generatrici comuni con essa (§ 1, teor.), ne risulta che una retta $p$ non può avere più di due punti comuni con la conica.

**7.** Prendendo più minutamente in esame le varie posizioni di una retta rispetto ad una conica, al teorema precedente possiamo aggiungere le considerazioni seguenti:

1ª. Se la conica $\gamma$ è una ellisse, la retta $p$ non è parallela ad alcuna generatrice della superficie conica, ed allora essa ha due, uno o nessun punto comune con la conica $\gamma$, secondo che il piano V$p$ ha due, una o nessuna generatrice comune con la superficie.

2ª. Se la conica $\gamma$ è una parabola od una iperbole, ma $p$ non è parallela ad alcuna generatrice della superficie conica, si possono ripetere le stesse considerazioni del caso precedente.

3ª. Se la conica $\gamma$ è una parabola, e $p$ è parallela all'asse, è anche parallela alla generatrice $r$ parallela al piano della parabola; allora è chiaro che il piano V$p$ taglia la superficie secondo la $r$ e secondo un'altra generatrice $r'$ che incontra $p$, ossia la $p$ ha uno ed un solo punto comune colla parabola.

4ª. Se la conica $\gamma$ è una iperbole, e $p$ è parallela ad uno dei due assintoti della medesima, e quindi anche ad una delle due generatrici della superficie conica situate nel piano per V parallelo al piano $\pi$ della sezione conica, il piano V$p$, o taglia la superficie conica secondo la generatrice $r$ e secondo un'altra generatrice $s$, la quale incontrerà $s$ in un punto, oppure coincide col piano tangente lungo la $r$. Nel primo caso la $p$ ha un sol punto comune con la conica, nel secondo caso $p$ coincide con l'assintoto e non ha nessun punto comune a distanza finita colla conica.

Da queste considerazioni discendono i seguenti

Corollari. — 1°. *Ogni retta parallela all'asse di una parabola incontra la parabola in uno ed in un solo punto.*

2°. *Ogni retta parallela ad un assintoto di un'iperbole, incontra l'iperbole in uno ed in un sol punto.*

3°. *Ogni retta che ha un sol punto comune con un'ellisse ed è situata nel suo piano è tangente ad essa.*

4°. *Ogni retta che è situata nel piano di una parabola, ed ha un sol punto comune con essa e non è parallela all'asse, è tangente alla parabola.*

5°. *Ogni retta che è situata nel piano di una iperbole e che non è parallela ad un assintoto ed ha un sol punto comune con essa, è tangente all'iperbole.*

## Fuochi - Eccentricità.

**8.** Teorema. — *Esistono due superficie sferiche inscritte in una superficie conica e tangenti ad un piano $\alpha$ che non passa per il vertice, se $\varphi$ non è uguale a $\theta$; ne esiste una, se è $\varphi = \theta$.*

Si conduca per l'asse il piano $\beta$ perpendicolare ad $\alpha$ e sieno $r$, $r'$ le generatrici in esso contenute, ed $a$ la retta $\alpha\beta$ (fig. 7).

Se $a$ non è parallelo ad $r$ nè ad $r'$ forma con esse un triangolo, ed esistono quattro circoli tangenti ad $r$, $r'$, $a$. Di questi due sono interni all'uno o all'altro degli angoli delle $r$, $r'$ che contengono l'asse del cono. Più particolarmente, se la sezione conica è una ellisse, i due circoli suddetti sono quello inscritto e uno degli exinscritti e sono interni allo stesso angolo; se la sezione è un' iperbole i due circoli sono due degli exinscritti e sono interni rispettivamente ai due angoli delle $r$, $r'$, che contengono l'asse.

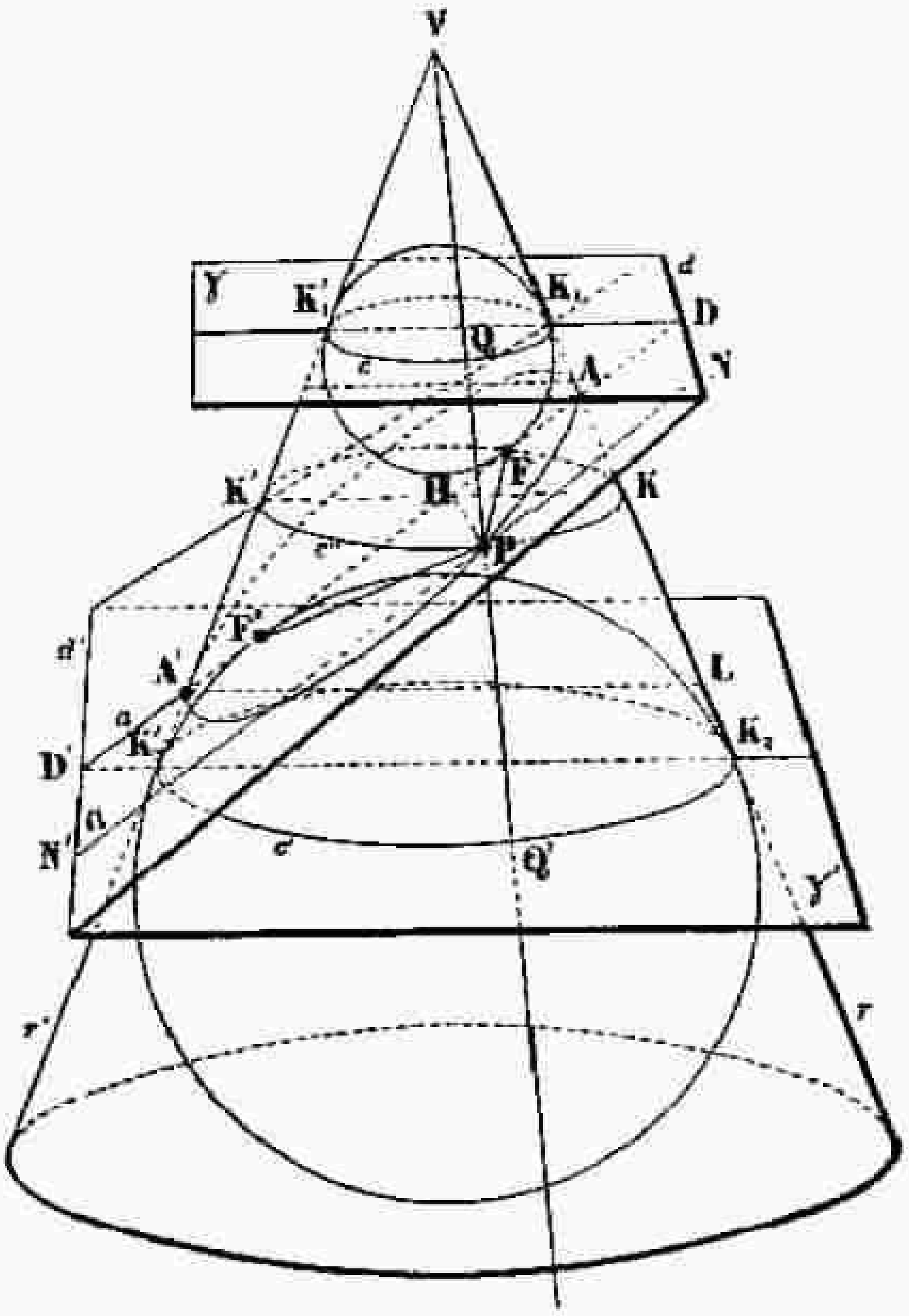



Fig. 7.

In ambedue i casi le sfere, che hanno per sezioni diametrali quei due circoli, sono inscritte alla superficie conica e tangenti al piano $\alpha$.

Se la sezione è una parabola, la retta $a$ risulta parallela ad una delle rette $r$, $r'$, per esempio alla $r'$, ed allora esistono due soli circoli tangenti alle rette $r$, $r'$, $a$, dei quali uno solo è interno a uno degli angoli delle $r$, $r'$ che comprendono l'asse.

La sfera, che ha per sezione diametrale questo circolo, è inscritto nella superficie conica e tangente al piano della sezione conica.

Definizioni. — 1ª. *Chiamasi* **fuoco di una conica** *il punto di contatto del suo piano $\alpha$ con una superficie sferica tangente ad esso e inscritta nella superficie conica.*

2ª. *La retta comune al piano $\alpha$ della sezione e al piano che passa per il circolo comune alla superficie conica e alla superficie sferica inscritta e tangente ad $\alpha$ in un fuoco, si chiama* **direttrice corrispondente a quel fuoco**.

Corollari. — 1°. *I fuochi di una conica sono situati sull'asse principale, le direttrici sono perpendicolari all'asse stesso.*

2°. *Un'ellisse ha due fuochi interni al segmento che ha per estremi i vertici; un'iperbole ne ha pure due esterni al segmento stesso; una parabola ha un solo fuoco. Nel circolo i due fuochi vengono a coincidere nel centro, poichè le due sfere che li determinano toccano il piano del circolo nello stesso punto.*

**9.** Teorema 1°. — *Per i punti di un'ellisse è costante la somma delle distanze dai fuochi; per i punti di un'iperbole è costante la differenza delle distanze dai fuochi.*

Sia P un punto di un'ellisse (o di un'iperbole), Q, Q' i punti d'incontro della generatrice VP coi circoli **c**, **c'** di contatto della superficie conica colle superficie sferiche che determinano i fuochi F, F'.

Poichè i segmenti tangenti condotti da un punto ad una sfera sono eguali, si ha

$$PF = PQ\,, \qquad PF' = PQ'.$$

Se la sezione è un'ellisse (P essendo interno al segmento QQ') si ha $PQ + PQ' = QQ'$, e quindi anche

$$PF + PF' = QQ'.$$

Se la sezione è un'iperbole (P essendo esterno al segmento QQ'), QQ' è uguale alla differenza di PQ e PQ', perciò si ha anche

$$PF - PF' = QQ',$$

oppure

$$PF' - PF = QQ':$$

secondo che il punto P è sull'uno o sull'altro ramo della curva.

Ma il segmento QQ' di generatrice, compreso fra due sezioni normali della superficie conica è costante, e l'indicheremo sempre con $2a$, perciò avremo

| | |
|---|---|
| per i punti dell'ellisse | $PF + PF' = 2a$ |
| » » di un ramo d'iperbole | $PF - PF' = 2a$ |
| » » dell'altro ramo | $PF' - PF = 2a.$ |

Corollari. — 1°. *I due fuochi di un'ellisse o di un'iperbole sono situati a distanze eguali dai due vertici rispettivamente.*

Infatti se A, A' sono i vertici di un'ellisse si deve avere

$$AF + AF' = A'F + A'F',$$

ma si anche

$$AF' = AF + FF', \qquad A'F = A'F' + F'F.$$

perciò si dovrà avere

$$2AF + FF' = 2A'F' + FF',$$

e quindi

$$AF = A'F'.$$

2°. *La costante* 2a *del teorema precedente è* **la lunghezza dell'asse principale.**

Infatti si deve avere nell'ellisse

$$AF + AF' = 2a.$$

ovvero

$$AF + FA' = 2a.$$

ovvero

$$AA' = 2a.$$

Una dimostrazione simile può farsi per l'iperbole

DEFINIZIONE. — *Si chiama* **distanza focale** *di un'ellisse o di una iperbole il segmento che ha per estremi i due fuochi. Indicheremo la sua lunghezza con* 2c.

**10.** TEOREMA 1°. — *La somma delle distanze di un punto situato nel piano di un'ellisse dai due fuochi di questa è minore o maggiore di* 2a *secondo che esso è interno o esterno all'ellisse.*

Se I è un punto interno ad un'ellisse (fig. 8), la semiretta F'I incontra l'ellisse in un punto M esterno al segmento F'I, e si ha

$$IF < IM + MF$$

e quindi (essendo $F'I + IM = F'M$)

$$F'I + IF < F'M + MF.$$

ovvero

$$F'I + IF < 2a.$$

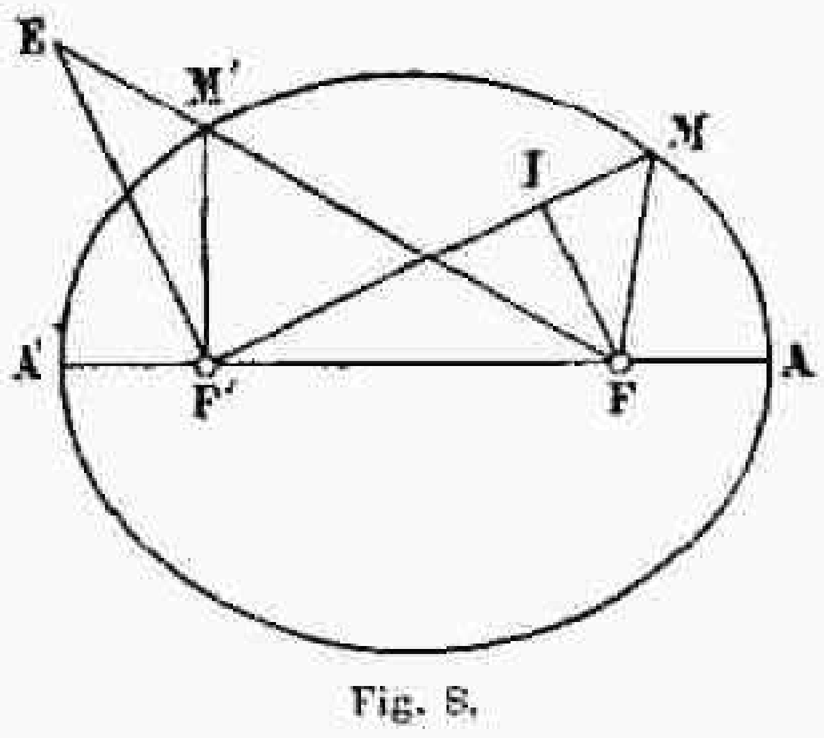


Fig. 8.

Se invece E è un punto esterno all'ellisse, il segmento FE incontra l'ellisse in un punto M', e si ha

$$F'E + EM' > F'M',$$

e quindi (essendo $EM' + M'F = EF$)

$$F'E + EF > F'M' + M'F,$$

ovvero

$$F'E + EF > 2a.$$

TEOREMA 2°. — *La differenza delle distanze di un punto, situato nel piano di un'iperbole, dai fuochi di questa è minore o maggiore di* 2a, *secondo che esso è esterno o interno all'iperbole.*

Se I è un punto interno ad uno dei rami di un'iperbole ed F' il fuoco interno all'altro ramo, è facile vedere che il segmento F'I incontra i due rami d'iperbole ciascuno in un punto; essendo M il punto d'incontro col ramo rispetto al quale I è interno, si ha

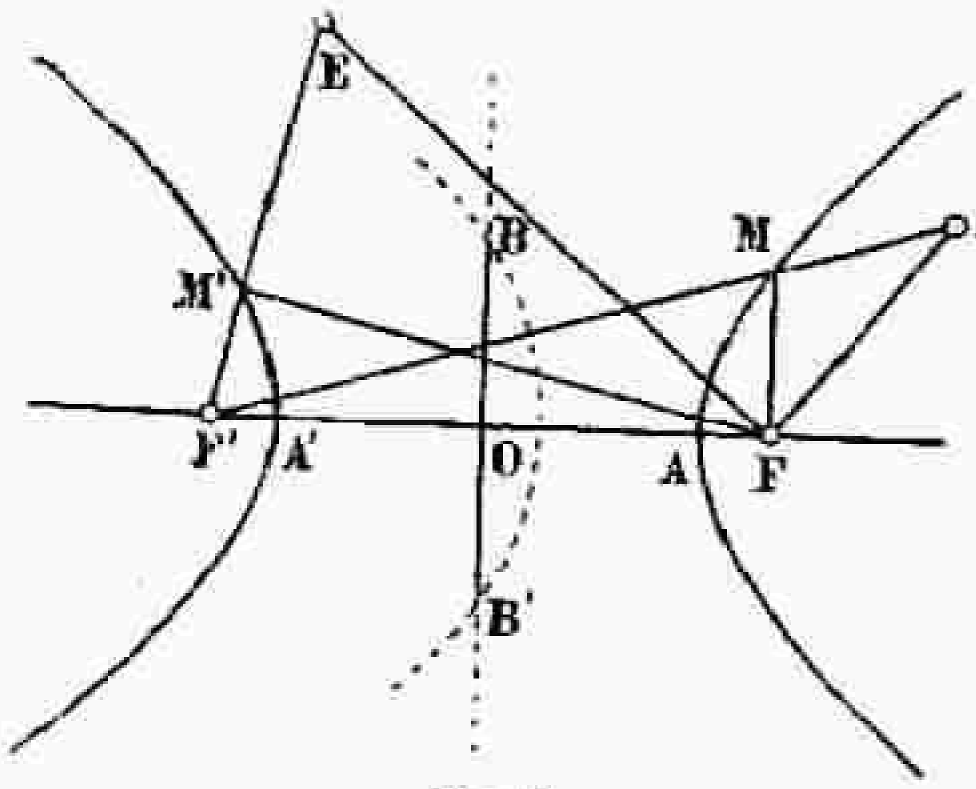


Fig. 9.

$$IF' = IM + MF' = IM + MF + 2a,$$

essendo

$$MF' = MF + 2a:$$

e siccome

$$IM + MF > IF,$$

risulta

$$IF' - IF > 2a.$$

Se invece E è esterno all'iperbole, il segmento EF' taglia il ramo rispetto al quale F' è interno, in un punto M', e si ha

$$EF < EM' + M'F = EM' + M'F' + M'F - M'F'$$

ossia, essendo $M'F - M'F' = 2a$,

$$EF < EF' + 2a,$$

e quindi $2a$ è maggiore della differenza fra EF' ed EF.

Corollari. — 1°. *L'ellisse è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la somma delle distanze dai due punti fissi* (**fuochi**).

2°. *L'iperbole è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi* (**fuochi**).

**II.** Teorema. — *Per tutti i punti di una conica è costante il rapporto delle distanze da un fuoco e dalla direttrice corrispondente.*

Preso un punto qualunque P di una sezione conica (fig. 7), si conduca per esso un piano $\gamma''$ perpendicolare all'asse, che taglierà la superficie conica secondo un circolo $c''$; e sia H la proiezione di P sull'asse della conica. Il piano $\beta$ condotto per l'asse della superficie conica, perpendicolare al piano della sezione conica data, taglia il piano $\gamma''$ e i piani $\gamma$, $\gamma'$ (che passano per i circoli di contatto delle sfere che determinano i fuochi) secondo tre rette parallele, che sono tagliate dall'asse della sezione nei punti H, D, D', dalla generatrice VA nei punti K, $K_1$, $K_2$ dalla generatrice VA' nei punti K', $K'_1$, $K'_2$.

Per il teorema di Talete si ha dunque

$$\frac{KK_1}{HD} = \frac{KK_2}{HD'} = \frac{AK_1}{AD} = \frac{AK_2}{AD'}.$$

Ma si ha pure (indicando con N, N' le proiezioni di P sulle direttrici $d$, $d'$)

$$KK_1 = PQ = PF$$
$$KK_2 = PQ' = PF',$$
$$HD = PN, \qquad HD' = PN'$$
$$AK_1 = AF, \qquad AK_2 = AF'.$$

Perciò si ha pure

$$\frac{PF}{PN} = \frac{PF'}{PN'} = \frac{AF}{AD} = \frac{AF'}{AD'}.$$

In simil guisa si trova

$$\frac{PF}{PN} = \frac{PF'}{PN'} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F'}{A'D'}.$$

Da queste proporzioni discende la verità dell'enunciato teorema. e risulta anche che il rapporto costante delle distanze di un punto della conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice, è il medesimo per ambedue i fuochi.

Se la curva data è una parabola, esiste uno solo dei piani $\gamma$. $\gamma'$ per es. $\gamma$, ma nel resto il ragionamento non varia.

Essendo però l'asse della parabola parallelo alla generatrice $r'$, il triangolo $ADK_1$, risulta isoscele e si ha

$$\frac{PF}{PN} = 1. \qquad \text{ossia} \qquad PF = PN.$$

Definizione. — *Il rapporto costante delle distanze di un punto di una conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice, si chiama* **eccentricità** *e s' indica abitualmente colla lettera* e.

Corollari. — 1°. *L'eccentricità di un' ellisse o di un' iperbole è eguale al rapporto fra la distanza focale e la lunghezza dell'asse.*

Si ha infatti, essendo A, A' punti della conica

$$e = \frac{AF}{AD} = \frac{AF'}{AD'} = \frac{A'F}{A'D} = \frac{A'F'}{A'D'};$$

essendo $AF = A'F'$, $A'F = AF'$, risulta intanto

$$AD = A'D', \qquad AD' = A'D,$$

perciò si ha anche

$$e = \frac{AF - AF'}{AD - A'D} = \frac{FF'}{AA'} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

2°. *L'eccentricità dell'ellisse è $< 1$, quella dell'iperbole è $> 1$, quella della parabola è 1, quella del circolo è 0.*

Infatti nell'ellisse è $2c<2a$, nell'iperbole $2c>a$, nel circolo $2c=0$.

3°. *Se per uno dei vertici* A' *di un'ellisse o di un'iperbole* (fig. 7) *si conduce nel piano che passa per esso e per l'asse della superficie conica una perpendicolare all'asse, e si chiama* L *il punto d'incontro di questa perpendicolare colla superficie conica, il segmento* AL *è uguale alla distanza focale.*

Infatti si ha

$$\frac{AL}{AA'} = \frac{AK_1}{AD} = \frac{AF}{AD} = e.$$

Ma si ha anche

$$\frac{FF'}{AA'} = e;$$

dunque

$$AL = FF'.$$

4°. *Se* A *è il vertice di una parabola,* AO *la perpendicolare da esso condotta all'asse del cono,* OL *la perpendicolare condotta da* O *alla generatrice* VA, *il punto* O *è il centro della sfera inscritta alla superficie conica e tangente al piano della parabola,* AL *è eguale alla distanza del vertice della parabola dal fuoco.*

12. Teorema. — *Un punto del piano di una parabola ha dal fuoco una distanza minore o maggiore di quella che ha dalla direttrice, secondo che esso è interno o esterno alla parabola.*

Se I (fig. 10) è un punto interno ad una parabola, e II' è la perpendicolare da esso condotta alla direttrice, essa incontrerà la parabola in un punto M intorno al segmento II', e si avrà

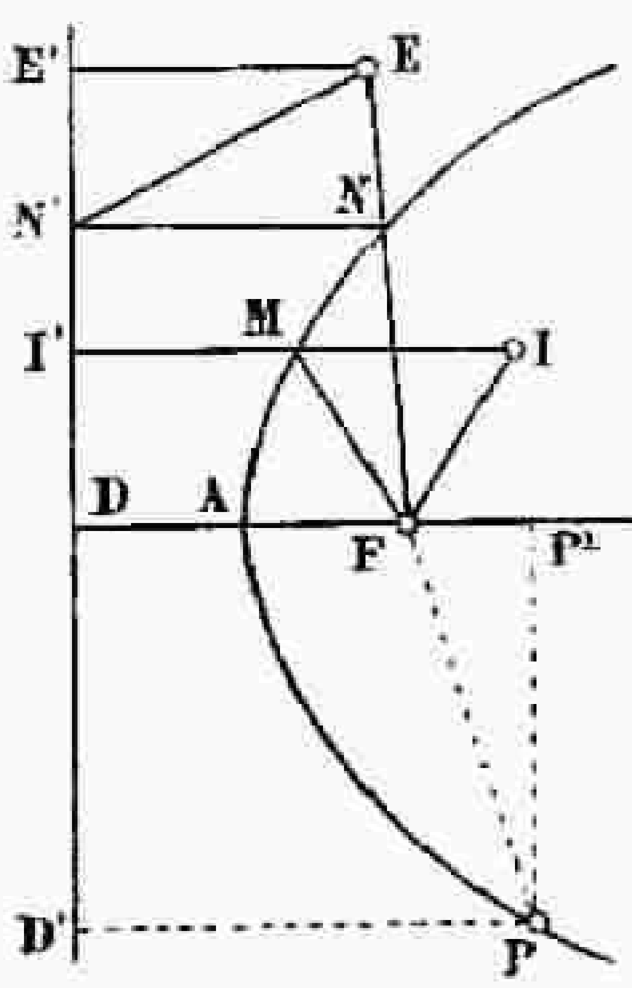


Fig. 10.

$$IF < IM + MF$$

ovvero, essendo $MF = MI'$

$$IF < II'.$$

Similmente, essendo E un punto esterno alla parabola EE' la perpendicolare da E alla direttrice N il punto d'incontro del segmento EF colla parabola, NN' la perpendicolare condotta da N alla direttrice, si ha

$$EE' < EN' < EN + NN',$$

e, siccome $NN' = NF$

$$EE' < EN + NF \qquad \text{ossia} \qquad EE' < EF.$$

Corollario. — *La parabola è il luogo dei punti di un piano equidistanti dal suo punto fisso* (**fuoco**) *e da una retta fissa* (**direttrice**).

**13.** I corollari 1° e 2° del § 10 e il corollario del § 11 enunciano proprietà delle coniche che sono sufficienti a definire l'ellisse, l'iperbole e la parabola nel piano indipendentemente dalla superficie conica dalla quale sono state ricavate come sezioni. Per potere prendere queste proprietà come definizioni delle coniche è necessario però dimostrare il teorema inverso, che è il seguente.

Teorema. — *Ogni curva definita come luogo dei punti di un piano per i quali è costante la somma o la differenza delle distanze da due punti fissi, oppure come luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto e da una retta è una sezione conica.*

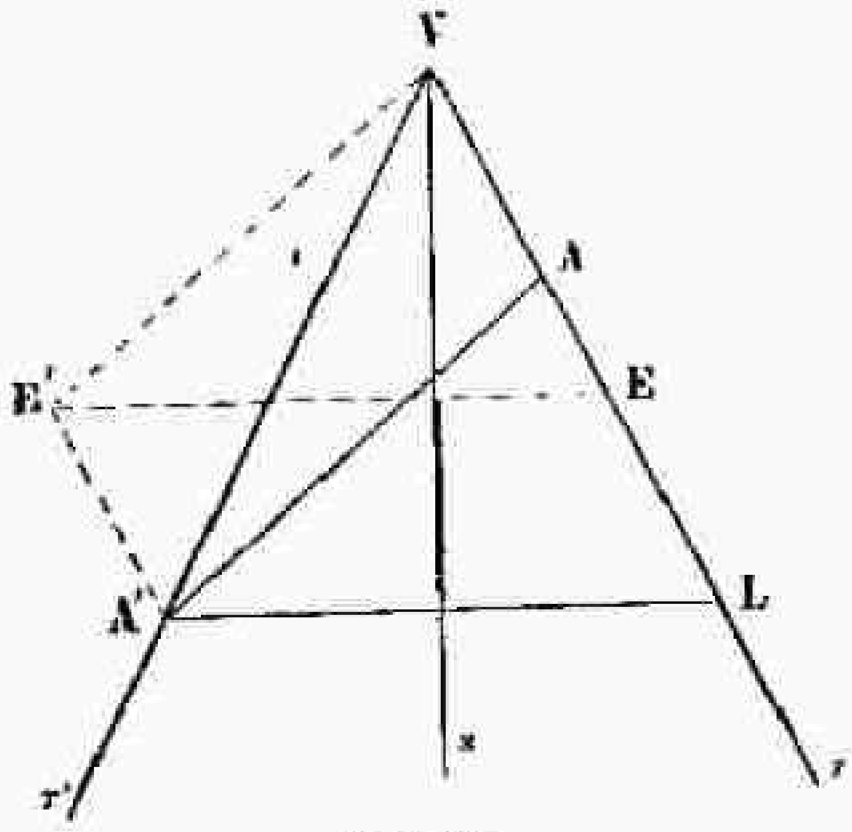


Fig. 11.

1°. Sia data una curva definita come luogo dei punti di un piano. tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi F, F' sia eguale a $2a$.

Prendiamo una superficie conica rotonda arbitraria e siano $r$, $r'$ (fig. 11) due generatrici situate in un piano $\pi$ che passa per l'asse $s$ della superficie. Preso su $r$ un segmento $VE = 2c = FF'$, e condotta per E una perpendicolare ad $s$, si descriva col vertice in V, con raggio $2a$ un circolo. Questo, essendo E interno ad esso. perchè $2c < 2a$, taglierà la perpendicolare suddetta in due punti, uno dei quali, E', è sulla semiretta uscente da E che incontra $s$. Si conduca da E' la E'A' parallela ad $r$, quindi per A' (incontro con $r'$) si conducano A'A parallela a VE' e A'L parallela ad FE. Avremo

$$AL = 2c \qquad AA' = 2a.$$

Se per la retta AA' si conduce un piano perpendicolare a $\pi$, esso taglierà la superficie conica secondo un'ellisse che ha A, A' per vertici e AL per distanza focale, ossia è eguale alla curva data (v. § 11, cor. 3°), perchè, essendo VE'>VE, la VE fa coll'asse della superficie perpendicolare ad EE' un angolo maggiore di quello che fa VE.

2°. Sia data una curva definita come luogo dei punti di un piano, tali che sia costante la differenza delle distanze da due punti.

Si ripeta la stessa costruzione precedente e gli stessi ragionamenti. Si osservi però che affinchè la retta EE′ (fig. 12) incontri il circolo di centro V e raggio $2a$ (che in questo caso è minore di $2c$) è necessario che $2c$ non sia minore della distanza di V da EE′.

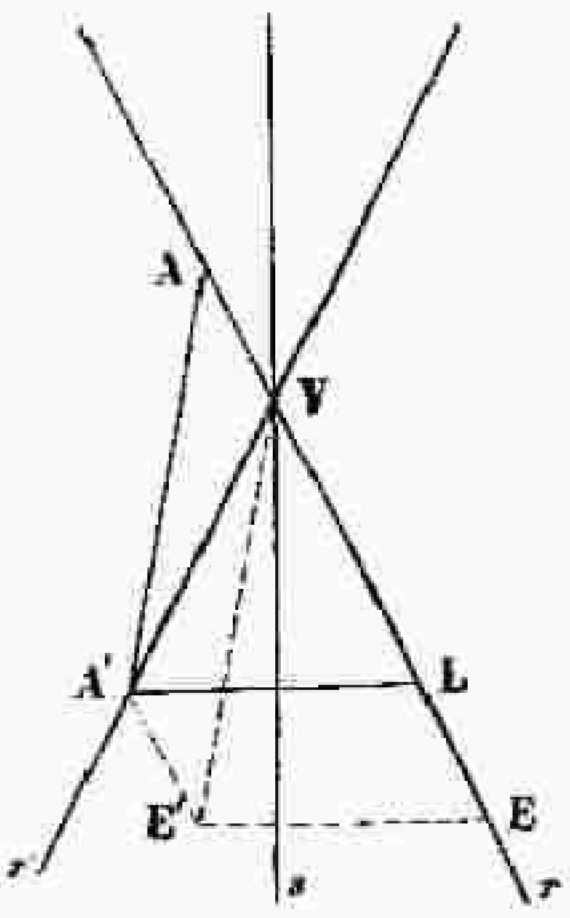


Fig. 12.

3°. Sia data una curva definita come luogo dei punti equidistanti da un punto F e da una retta $d$.

Presa una superficie conica arbitraria, siano $r$, $r'$ le due generatrici contenute in un piano che passa per l'asse $s$. Si costruisca un triangolo EGE′ che abbia un lato EG eguale a metà della distanza di F da $d$, ed i lati E′G, E′E rispettivamente perpendicolari ad $r$ ed $s$. Condotta per E′ la parallela ad $r$ che incontri in O la $s$, e poi per O le OL, OA, perpendicolari ad $r$, $s$ rispettivamente, si ottiene un triangolo OLA che verifica le stesse condizioni ed ha un vertice O sulla $s$. Se da A si conduce una retta $p$ parallela ad $r'$ e per $p$ un piano perpendicolare a quello della figura, questo taglia la superficie conica secondo una parabola che ha la retta $p$ per asse e tale che la distanza dal vertice A al fuoco sia eguale ad AL (§ 11, cor. 4°). Perciò questa parabola è identica alla curva data.

**14.** Teorema. — *Il luogo dei vertici dei coni rotondi che proiettano una data conica* G *è un'altra conica* G′ *situata nel piano perpendicolare a quello della* G *condotta per l'asse della medesima. E più particolarmente*:

1° *se* G *è un'ellisse (o un'iperbole)* G′ *è l'iperbole (o l'ellisse) che ha per fuochi i vertici di* G *e per vertici i fuochi di* G;

2° *se* G *è una parabola,* G′ *è la parabola che ha per fuoco il vertice di* G *e per vertice il fuoco di* G.

1°. Dalle costruzioni fatte nel § precedente apparisce che affinchè V sia vertice di un cono rotondo che proietta un'ellisse (o un'iperbole) G avente A, A′ per vertici (figg. 11 e 12), è necessario e sufficiente che sia situato nel piano perpendicolare a quello della G condotto per AA′, e che si abbia $|VA' - VA| = AL = 2c$ (oppure $VA + VA' = AL = 2c$). Dunque il luogo dei vertici V è un'iperbole (o un'ellisse) che ha A, A′ per fuochi ed ha l'asse principale eguale a $2c$, cioè passa per i fuochi della curva data.

2°. Affinchè V sia vertice di un cono rotondo che proietta una data parabola G di fuoco F e vertice A, è necessario e sufficiente che sia situato nel piano perpendicolare a quello di G condotto per la AF e che si abbia VA = VB (essendo B il simmetrico di A rispetto all'asse del cono), cioè che V sia equidistante da A e dalla retta *d* perpendicolare a *p* condotta per il punto simmetrico di A rispetto ad F. Dunque il luogo dei vertici V è una parabola che ha A per fuoco e F per vertice.

Definizione. — *La conica, luogo dei vertici dei coni rotondi che proiettano una data conica, si chiama la* **conica focale di questa**.

Corollari. — 1°. *La conica focale di un'ellisse è un'iperbole, di un'iperbole è un'ellisse, di una parabola è una parabola eguale.*

2°. *La conica focale della conica focale di una data conica, è la conica stessa.*

3°. *Un'ellisse si può riguardare come sezione di due cilindri circolari che hanno le generatrici parallele ad uno degli assintoti dell'iperbole focale.*

## Assi, centro.

**15.** Teorema. — *Un'ellisse o un'iperbole ha un secondo asse di simmetria perpendicolare al suo asse principale, e che divide per metà la sua lunghezza.*

Infatti per il punto di mezzo O del segmento AA' o FF' di un'ellisse si conduca la perpendicolare all'asse principale, e sia P un punto qualunque dell'ellisse. Si avrà

$$PF + PF' = 2a.$$

Se P' è il simmetrico di P rispetto alla perpendicolare suddetta, si ha, essendo anche F, F' simmetrici rispetto alla stessa retta, PF = P'F', PF' = P'F, e perciò

$$P'F' + P'F = 2a,$$

cioè anche P' appartiene all'ellisse.

Dimostrazione simile può ripetersi per l'iperbole.

Definizione. — 1ª. *L'asse di simmetria perpendicolare all'asse principale di un'ellisse o di un'iperbole si chiama* **asse secondario**.

Corollario. — 1°. *Un'ellisse o un'iperbole è simmetrica rispetto al punto d'incontro dei due suoi assi, ossia questo punto è il* **centro** *della curva.*

Definizione. — 2ª. *Le ellissi e l'iperboli si chiamano anche* **coniche centrali** *(cioè dotate di centro) e le parabole* **coniche non centrali.**

Corollario. — 2°. *L'asse secondario di un'ellisse incontra la curva in due punti* B, B', *che hanno dal centro* O *una distanza* $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Infatti, affinchè un punto sia contemporaneamente sull'ellisse e sull'asse secondario, è necessario e sufficiente che sia

$$PF + PF' = 2a$$
$$PF = PF' \quad \text{ossia} \quad PF = a.$$

Si verificano dunque queste condizioni costruendo un triangolo rettangolo, che ha $a$ per ipotenusa e $c$ per uno dei cateti.

3°. *Un'iperbole non ha alcun punto comune col suo asse secondario.*

## Diametri delle coniche.
## Piani diametrali e diametri delle superficie coniche.

**16.** Teorema. — *Il luogo dei punti di mezzo delle corde parallele di una superficie conica è un piano che passa pel vertice.*

Essendo date quantesivogliano corde parallele fra loro (e per conseguenza non parallele ad alcuna generatrice) sia AA' (fig. 7) una di queste corde che incontri l'asse, e per essa si conduca il piano $\alpha$ perpendicolare al piano AA'V. Questo taglierà la superficie conica secondo una conica centrale, la quale ha un'asse di simmetria secondario $p$. Tutte le corde della superficie parallele ad AA' e situate nel piano $\alpha$ sono dunque tagliate per metà dalla retta $p$, ovvero dal piano V$p$.

Presa allora un'altra corda qualunque CC' parallela ad AA', il piano VCC' determina su $\alpha$ un'altra corda $C_1C'_1$ divisa per metà dalla retta $p$, dunque anche CC' è divisa per metà del piano V$p$.

Corollario. — *Il luogo dei punti di mezzo delle corde di una conica parallele ad una data direzione è una retta.*

Questo luogo è infatti la retta comune al piano della conica e al piano che divide per metà tutte le corde della superficie conica parallele a quella direzione.

Definizioni. — 1ª. *Chiamasi* **piano diametrale** *di una superficie conica rotonda, coniugata ad una data direzione, il piano che divide per metà tutte le corde parallele a quella direzione.*

2ª. *Chiamasi* **diametro** *di una conica coniugato ad una data direzione la retta luogo dei punti di mezzo delle corde parallele a questa direzione.*

**17.** Teorema. — *Se un diametro di una conica incontra la conica stessa in uno o due punti, le parallele alle corde coniugate a questo diametro per quel punto, o per quei punti, sono tangenti alla conica.*

Sia M uno di tali punti; la parallela $p$ alle corde coniugate a quel diametro dovrebbe incontrare la conica in due punti H, K, equidistanti da M, e siccome una curva non può avere più di due punti comuni con una conica, i tre punti H, K, M devono coincidere, cioè la $p$ deve essere tangente alla conica.

Corollario. — *Se un piano diametrale di una superficie conica ha in comune con essa una o due generatrici, i piani che passano per una di queste e sono paralleli alla direzione a cui quel piano diametrale è coniugato, sono tangenti alla superficie.*

**18.** Teorema. — *Tutti i piani diametrali di una superficie conica coniugati alle rette di un piano passano per una retta.*

1°. Se un piano $\pi$ taglia una superficie conica secondo una ellisse od una iperbole, questa ha un centro C, che divide per metà tutte le corde della conica che passano per esso; perciò tutti i piani diametrali della superficie, coniugati alle rette di $\pi$, passano per la retta VC.

2°. Se un piano $\pi$ taglia una superficie conica secondo una parabola, esso è parallelo ad una direttrice $r$. Allora il piano diametrale coniugato ad una retta di $\pi$ deve passare per $r$ (§ 17, Cor.).

Corollari. — 1°. *Tutti i diametri di una conica centrale passano per il centro.*

2°. *Tutti i diametri di una parabola sono paralleli al suo asse.*

**19.** Teorema. — *Tutte le sezioni prodotte in una superficie conica da piani paralleli sono curve simili. Il luogo dei loro centri (se le sezioni sono coniche centrali) è una retta che passa pel vertice.*

Questo teorema apparisce evidente se si pensa che due sezioni parallelle di una superficie conica sono linee omotetiche rispetto al vertice preso come centro.

Definizione. — *Il luogo dei centri delle sezioni coniche ottenute tagliando la superficie conica rotonda con piani paralleli fra loro (e non paralleli ad alcuna generatrice) si chiama* **diametro della superficie coniugato a quei piani.**

Corollario. — *Se un piano diametrale $\pi$ di una superficie conica taglia questa secondo due generatrici, i piani tangenti alla superficie medesima si tagliano secondo il diametro* d *coniugato a $\pi$; e viceversa se da una retta* d *condotta pel vertice della superficie co-*

*nica si possono condurre a questa due piani tangenti, il piano che passa per le due generatrici di contatto è il piano diametrale coniugato alla direzione* d.

Questa proprietà è conseguenza immediata del coroll. del § 17.

**20.** Teorema. — *Se* $\pi$ *è il piano diametrale coniugato ad una retta* d, *il diametro coniugato al piano* $\pi$ *è parallelo a* d ; *e viceversa.*

Sia $\pi$ il piano diametrale coniugato ad una data direzione, e $\pi_1$ un piano parallelo a $\pi$. Per un punto M' della sezione conica prodotta da $\pi_1$ si tracci la corda M'M parallela a $d$, il piano $\pi$ la taglierà nel punto di mezzo L del segmento MM'. Allora se si conduce per V la $d_1$ parallela a $d$, questa incontrerà la corda M'M'' situata nei piani $\pi_1$ e MM'V nel suo punto di mezzo N, perchè essendo MM' divisa per metà in L, anche V sarà il punto di mezzo di MM'' ed N il punto di mezzo di MM'.

Ciò prova che tutte le corde della sezione prodotta da $\pi_1$ sono divise per metà dal punto N, incontro del piano $\pi_1$ colla retta per V parallela alla direzione $d$. Ne segue che N è il centro della conica, ossia $d_1$ è il diametro coniugato a $\pi_1$.

Nello stesso modo si dimostra il teorema inverso.

Corollari. — 1°. *Se* $\pi$ *è il piano diametrale coniugato ad una retta* d, *e* d' *è una retta di* $\pi$, *il piano diametrale* $\pi'$ *coniugato a* d' *è parallelo a* d.

Fra le corde parallele alla retta $d'$ consideriamo quelle che incontrano la $d_1$ che passa per V ed è parallela a $d$. Esse sono divise per metà da $d_1$ dunque il piano diametrale $\pi'$ coniugato a $d'$ passa per $d_1$.

2° *Esistono infinite terne di piani, passanti pel vertice di una superficie conica, tali che ciascuno di essi sia il piano diametrale coniugato alla retta comune agli altri due, e che ciascuna retta comune a due di questi piani sia il diametro coniugato al terzo.*

Condotto per il vertice V un piano $\pi_1$, sia $d_1$ il suo diametro coniugato; per $d_1$ si conduca un piano arbitrario $\pi_2$ e sia $d_2$ il suo diametro coniugato che, per il corollario precedente, deve giacere in $\pi_1$. Infine il piano $\pi_3$ determinato dalle rette $d_1$, $d_2$ deve avere per diametro coniugato una retta $d_3$ giacente in $\pi_1$ e $\pi_2$, ossia $d_3$ è la retta $\pi_1\pi_2$.

3°. *Se* $d_1$ *è il diametro coniugato ad una direzione* d *rispetto ad una conica centrale, il diametro coniugato alla direzione* $d_1$ *deve essere parallelo a* d.

Infatti se $d$ è una retta che passa per il centro della conica e

$d_1$ è il suo diametro coniugato, i piani $Vd$, $Vd_1$ sono coniugati rispetto alla superficie conica.

Definizione. — *Due rette passanti pel centro di una conica centrale si chiamano* **diametri coniugati**, *se ciascuna di esse divide per metà le corde parallele all'altra.*

21. Definizione. — *Due corde di una conica che congiungono un punto di essa coi punti d'incontro della medesima con un diametro si chiamano* **corde supplementari**.

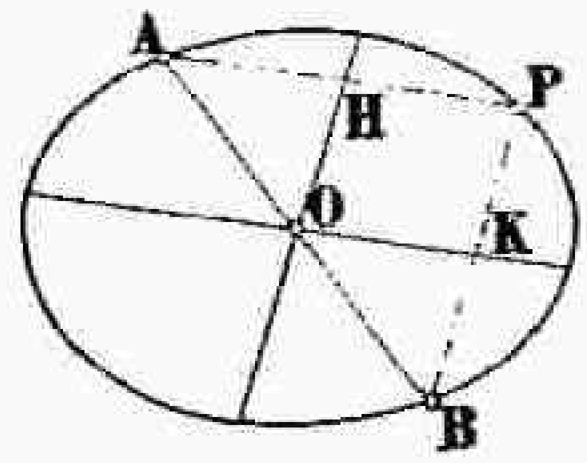


Fig. 13.

Teorema. — *Due corde supplementari di una conica centrale sono parallele a due diametri coniugati.*

Infatti, se P è un punto di una conica centrale, AB un suo diametro, O il centro, le due rette OH, OK che congiungono il centro O coi punti di mezzo H, K delle corde, AP, BP sono i diametri coniugati a queste corde e sono parallele alle BP, AP rispettivamente.

## Assintoti dell' iperbole.

22. Teorema.—*Il diametro che divide per metà le corde di un' iperbole parallele ad una data direzione, divide anche per metà i segmenti paralleli a questa stessa direzione che hanno gli estremi sugli assintoti.*

Se $\alpha$ è il piano dell'iperbole, $\alpha_v$ il piano ad esso parallelo condotto per il vertice V della superficie conica, $r$, $r'$ le generatrici contenute nel piano $\alpha_v$. $\pi$, $\pi'$ i piani tangenti alla superficie lungo $r$, $r'$, le rette $r_1$, $r'_1$ intersezioni di $\alpha$ con $\pi$, $\pi'$ sono per la definizione stabilita nel § 3 gli assintoti dell' iperbole. Per il corollario del § 19 la retta $d = \pi\pi'$ è il diametro coniugato al piano $\alpha_v$ o $\alpha$.

Se ora consideriamo una direzione qualunque $d'$ contenuto in questo piano, il piano diametrale $\sigma'$, coniugato ad essa, passa per $d$ e divide per metà tutte le corde della superficie conica parallele a $d$ ed anche quelle limitate fra i piani $\pi$, $\pi'$. Ne viene per conseguenza che la retta $\alpha\sigma'$ divide per metà tanto le corde della data iperbole quanto quelle della coppia di rette $r_1$, $r'_1$ parallele a $d$.

Apparisce quindi manifestamente che il punto d' incontro dei due assintoti $r_1$, $r_1'$ deve giacere sul diametro $\alpha\sigma'$.

Corollari. — 1°. *Ogni segmento tangente ad un' iperbole, avente i suoi estremi sugli assintoti, è diviso per metà dal punto di contatto.*

2°. *Il punto d'incontro degli assintoti dell' iperbole è il centro della medesima.*

Infatti il punto d'incontro degli assintoti dovendo trovarsi su tutti i diametri dell' iperbole deve coincidere col punto comune a questi, cioè col centro dell'iperbole.

**23.** Teorema. — *Un' iperbole non ha nessun punto comune coi suoi assintoti, ma la distanza di un punto di esso dagli assintoti decresce indefinitamente quando cresce indefinitamente la distanza del punto stesso dal centro.*

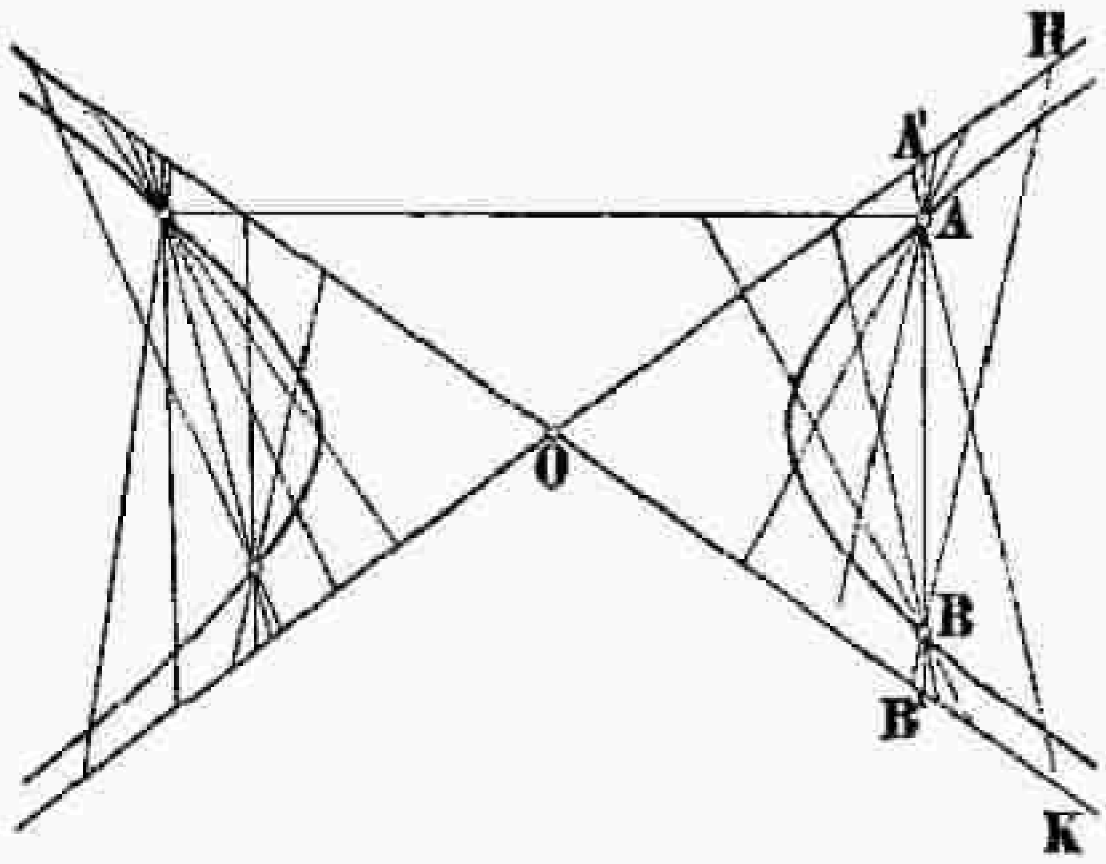


Fig. 14.

Se OH, OK sono gli assintoti di un'iperbole ed A un punto della medesima (fig. 15), è chiaro che si può facilmente ottenere quanti punti si vogliono della curva conducendo per A una secante qualsiasi che tagli le OH, OK in A'. B' e prendendo su essa B'B=AA' (§ 22, Teor.). La distanza di B dall'assintoto OK è eguale alla proiezione di AA' sopra una perpendicolare ad OK, e perciò tende a zero quando la retta A'B' tende ad essere parallela ad OK.

**24.** Teorema. — *L'angolo che ciascuno degli assintoti fa col suo asse principale è l'angolo acuto di un triangolo rettangolo che ha per ipotenusa la distanza focale* 2c *e per cateto la distanza dei vertici* 2a, *compreso fra questi lati.*

Ricordando la costruzione fatta per tagliare un dato cono con un piano in modo che la sezione prodotta sia eguale ad una data iperbole (§ 13, fig. 12) si vede che, se si conduce per EE' il piano perpendicolare all'asse della superficie e in esso per E' la corda KK' perpendicolare ad EE', le rette VK, VK' sono parallele agli assintoti e VE' è parallela all'asse dell'iperbole, dunque l'angolo di un assintoto con l'asse è eguale all'angolo $E'\widehat{V}K$ del triangolo rettangolo E'VK che ha per ipotenusa $VK=VE=2c$ e per cateto $VE'=2a$.

COROLLARIO. — *La distanza di un punto P di un'iperbole da un fuoco è eguale al segmento parallelo ad uno qualunque degli assintoti compreso fra il punto P e la direttrice corrispondente a quel fuoco.*

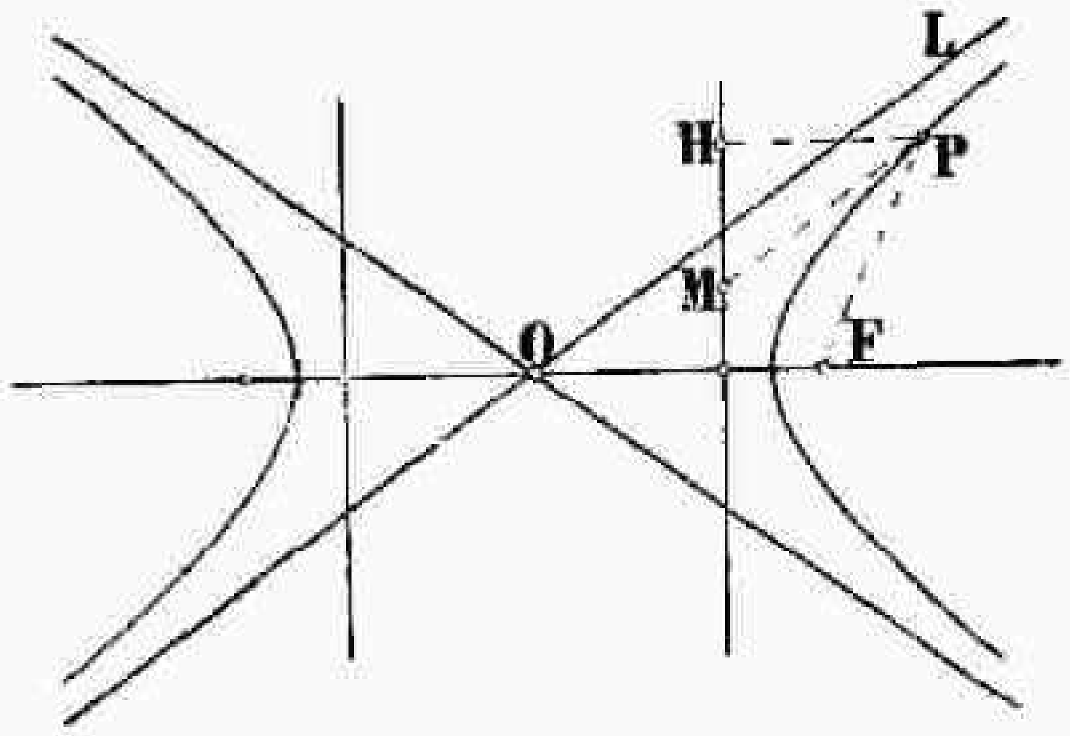



Fig. 15.

Se PH è la distanza di P dalla direttrice corrispondente al fuoco F, PM il segmento parallelo ad un assintoto condotto da P alla direttrice stessa, si ha che $\widehat{HPM}$ è eguale all'angolo dell'asse con un assintoto, e perciò si ha

$$\frac{PM}{PH} = \frac{2c}{2a} = e,$$

ma si ha anche (§ 11, Teor. e Cor. 1°)

$$\frac{PF}{PH} = e\,;$$

perciò

$$PF = PM.$$

G. LAZZERI.

*(Continua)*

# LA RECENTE RIFORMA DEGLI STUDI SECONDARI IN FRANCIA

*del 30 maggio 1902*

(Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905)

Poichè da molto tempo si parla in Italia di una riforma della scuola secondaria, crediamo che riescirà grato ai nostri lettori conoscere la riforma di recente effettivamente compiuta in Francia, per la parte che si riferisce alla matematica; e perciò abbiamo voluto pubblicare i nuovi programmi delle scuole francesi; nel numero successivo pubblicheremo le istruzioni che vanno unite ai medesimi.

Per la perfetta intelligenza dei medesimi premettiamo poche notizie sommarie sull'ordinamento generale delle scuole secondarie in Francia.

L'insegnamento secondario fa seguito a un corso di *Studi primari* d'una durata normale di quattro anni, ed è costituito d'un corso di studi della durata di sette anni diviso in due *cicli*.

PRIMO CICLO. — Durata: quattro anni; classi VI, V, IV, III (dette *de sixième, de cinquième, de quatrième* e *de troisième*).

In questo primo ciclo gli allievi hanno la scelta fra due divisioni. Nella divisione A sono obbligatori il latino e il greco; nella divisione B manca l'insegnamento del latino e greco e si dà maggiore sviluppo all'insegnamento del Francese, delle scienze, del disegno, ecc. Questo primo ciclo conduce ad un *certificato di studi secondari* di primo grado.

SECONDO CICLO. — Durata: tre anni; classi II e I (dette *de seconde* e *de première*) e classe di filosofia o classe di matematiche.

In questo secondo ciclo gli studenti possono scegliere fra quattro sezioni

*Sezione A.* — Latino e greco.
" *B.* — Latino con uno studio più sviluppato delle lingue vive.
" *C.* — Latino con uno studio maggiore delle scienze.
" *D.* — Lingue vive e scienze senza latino.

## Programmi.

I programmi del 30 maggio 1902 per l'insegnamento delle matematiche nelle classi secondarie dei licei e collegi maschili sono modificati come segue. (Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905.)

### *Quinta B (ore 4).*

ARITMETICA. — Numerazione decimale. Addizione e sottrazione dei numeri interi. Moltiplicazione dei numeri interi. Prodotto di una somma o di una differenza per un numero. Prodotto dei fattori. Potenze. Divisione dei numeri interi. Regola pratica. Caratteri di divisibilità per 2, 5, 9, 3. Numeri primi. Regole pratiche per la scomposizione di un numero in prodotto di fattori primi, per la ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune. Revisione del sistema metrico.

GEOMETRIA (vedi Istruzioni). — Uso della riga, della squadra, del compasso e del rapportatore. Linea retta e piano. Angoli. Simmetria rispetto ad una retta. Triangoli. Triangolo isoscele. Casi d'eguaglianza dei triangoli. Perpendicolare ed oblique. Casi d'eguaglianza dei triangoli rettangoli. Rette parallele. Somme d'angoli di un triangolo, di un poligono convesso. Parallelogramma. Rettangolo. Losanga. Quadrato. Circolo. Diametro. Corde ed archi. Tangente. Posizioni reciproche di due circoli. Misura degli angoli. Costruzioni d'angoli e triangoli. Tracciamento delle perpendicolari e delle parallele. Costruzioni di circoli, di tangenti.

Disegno geometrico. — Esecuzione cogli istrumenti delle costruzioni spiegate durante il corso di geometria. Problemi ed esercizi semplici cencernenti ugualmente il corso di geometria; esecuzione grafica della soluzione trovata. Disegni geometrici in cui entrano linee rette e circoli, tolti da motivi di decorazione e di superficie piane: pavimentature in legno, in marmo, mosaici, vetri; acquarelli all'inchiostro della Cina ed in colore di alcuni di questi disegni.

*Quarta B (5 ore).*

Aritmetica. — Frazioni ordinarie. Operazioni. Frazioni decimali. Grandezze proporzionali direttamente e inversamente. Operazioni sui numeri decimali. Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata da un numero intero o decimale a meno di una unità decimale di un ordine dato. Progressioni aritmetiche e geometriche. Somma dei termini delle progressioni limitate. Metodi commerciali del calcolo dell'interesse e sconto. Polizza di sconto. Conti correnti. Nozioni sommarie sui valori.

Geometria. — Punti che dividono una retta in un rapporto dato. Linee proporzionali. Proprietà delle bisettrici di un triangolo. Triangoli simili. Definizione del seno, del coseno e della tangente di un angolo. Definizione delle figure omotetiche. Poligoni simili. Pantografo. Relazioni metriche in un triangolo rettangolo. Costruzioni della quarta proporzionale e della media geometrica. Poligoni regolari: quadrato, esagono e triangolo equilatero. Misura della circonferenza (enunciato). Misura delle aree del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, dei poligoni. Rapporto delle aree di due poligoni simili. Area del cerchio. Costruzione di alcune curve semplici, come la cissoide, le concoidi, ecc.

Disegno geometrico. — Programma eguale a quello della classe precedente. Aggiungere la costruzione grafica di luoghi geometrici, ed il tracciamento delle curve a penna.

*Terza B (4 ore).*

Algebra. — Numeri positivi e negativi. Operazioni. Applicazioni concrete. Monomi, polinomi. Addizione, sottrazione, moltiplicazione dei monomi e polinomi. Identità:

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + a^{m-1}).$$

Divisione dei monomî. Equazioni numeriche di primo grado ad una o due incognite. Variazione e segno dell'espressione $ax+b$; rappresentazione grafica. Equazioni di secondo grado. Relazioni tra i coefficienti e le radici.

Variazioni del trinomio di secondo grado, della funzione $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; rappresentazione grafica.

Uso delle tavole di logaritmi e di antilogaritmi a quattro decimali. Interessi composti.

Geometria. — Del piano e della retta nello spazio. Angolo diedro. Rette e piani paralleli. Retta e piano perpendicolari. — Proiezione di un poligono, di un circolo; ombre di una figura piana sopra un piano in geometria quotata. Definizione degli angoli poliedri, del prisma, della piramide. Proiezioni, ombre proprie e portate sopra un piano. Superficie e volumi del prisma e della piramide. Cono, cilindro, piano tangente. Sfera, cono e cilindro circoscritti. Superficie di rivoluzione. Sezioni piane della sfera. Poli. Ombre proprie e portate sopra un piano. Superficie e volumi del cono e del cilindro di rivoluzione. Superficie e volume della sfera (enunciato). Indicazioni atte a facilitare l'esecuzione dell'acquarello. Rilevamento dei piani, agrimensura, livellamento.

*Seconda C, D (ore 5).*

Algebra. — Operazioni sui numeri positivi o negativi. Monomi; polinomi; termini simili.

Operazioni. — Addizione, sottrazione, moltiplicazione dei monomi e polinomi. Identità:

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \dots a^{m-1}).$$

Divisione dei monomi. Risoluzione delle equazioni di primo grado ad un'incognita. Ineguaglianza di primo grado. Risoluzione e discussione di due equazioni di primo grado a due incognite.

Problemi; messa in equazione. Discussione dei resultati.

Variazione dell'espressione $ax+b$; rappresentazione grafica.

Equazione di secondo grado ad una incognita (non verrà fatta la teoria degli imaginari). Relazioni tra i coefficienti e le radici.

Esistenza e segno delle radici. Studio del trinomio di secondo grado. Variazione del trinomio di secondo grado; rappresentazione grafica.

Variazione dell'espressione $\frac{ax+b}{a'x+b'}$; rappresentazione grafica.

Nozione della derivata; significato geometrico della derivata. Il segno della derivata indica il senso della variazione; applicazioni ad esempi numerici semplicissimi e particolarmente alle funzioni precedentemente studiate.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. Logaritmi.

Uso delle tavole di logaritmi a quattro o cinque decimali. Interessi composti.

GEOMETRIA (figure piane) - *Linea retta e piano.* — Angoli, sensi di un angolo. Rette perpendicolari. Triangoli. Triangolo isoscele. Caso d'eguaglianza dei triangoli. Perpendicolare ed oblique. Triangolo rettangolo. Casi d'eguaglianza. Definizione di un luogo geometrico. Luogo geometrico dei punti equidistanti da due punti o da due rette. Rette parallele. Somma degli angoli di un triangolo, di un poligono convesso. Parallelogrammi. Figure simmetriche rispetto ad un punto o ad una retta. Due figure piane simmetriche sono eguali. Traslazione di una figura piana di forma invariabile.

CIRCOLI. — Intersezione di una retta e di un circolo. Tangente al circolo; le due definizioni della tangente. Archi e corde. Posizioni relative di due circoli. Misura degli angoli. Movimento di rotazione intorno ad un punto. Ogni spostamento di una figura piana di forma invariabile nel proprio piano si riduce ad una rotazione o ad una traslazione.

LUNGHEZZE PROPORZIONALI. — Punti che dividono un segmento in un rapporto dato. Definizione della divisione armonica. Triangoli simili. Ogni parallela ad uno dei lati di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali. Reciproco. Definizione di un fascio armonico.

Proprietà delle bisettrici di un triangolo. Luogo geometrico dei punti per i quali il rapporto delle distanze da due punti fissi è costante.

Nozioni semplici sull'omotetia. Poligoni simili. Seno, coseno, tangente e cotangente degli angoli compresi tra 0 e 2 retti. Relazioni metriche in un triangolo rettangolo ed in un triangolo qualunque. Linee proporzionali nel circolo. Quarta proporzionale; media proporzionale.

Poligoni regolari. Inscrizione nel circolo del quadrato, dell'esagono, del triangolo equilatero, del decagono, del pentadecagono. Due poligoni regolari di un egual numero di lati sono simili. Rapporto dei loro perimetri. Lunghezza di un arco di circolo. Rapporto tra la circonferenza ed il diametro. Calcolo di $\pi$. (Limitarsi al metodo dei perimetri.)

AREA DE' POLIGONI; AREA DEL CIRCOLO. — Misura dell'area del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, di un poligono qualunque. Rapporto delle aree di due poligoni simili. Area di un circolo, di un settore e di un segmento del circolo. Rapporto delle aree di due circoli.

Nozioni di agrimensura. Uso delle catene e della squadra agrimensoria.

*Prima C e D (ore 5).*

Geometria. — Piano e linea retta. Determinazione di un piano. Paralellismo delle rette e dei piani. Retta e piano perpendicolare. Proprietà della perpendicolare e delle oblique condotte dallo stesso punto ad un piano. Angolo diedro. Senso. Angolo piano corrispondente ad un angolo diedro.

Piani perpendicolari tra loro. Proiezione di un'area piana. Traslazione. Rotazione intorno ad un asse. Simmetria rispetto ad una retta. Simmetria rispetto ad un punto. Simmetria rispetto ad un piano. Questo secondo modo di simmetria si riduce al primo.

Angoli triedri. — Disposizione degli elementi. Triedri simmetrici. Ogni faccia di un triedro è minore della somma delle altre due. Limite della somma delle facce di un angolo poliedro convesso. Triedri supplementari. Applicazioni. Casi d'uguaglianza dei triedri.

Omotetia. — Sezioni piane parallele d'angoli poliedri. Aree.

Poliedri. — Poliedri omotetici, poliedri simili. Prismi. Piramide. Nozioni sommarie sulle simmetrie del cubo e dell'ottaedro regolare. Volumi dei parallelopipedi e dei prismi. Volume della piramide. Volume del tronco di piramide a basi parallele. Volume del tronco di prisma triangolare.

Rapporto dei volumi di due poliedri simili.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti.

Cilindro a base circolare. Piano tangente.

Cono a base circolare. Piano tangente. Sezioni parallele alla base.

Superficie di rivoluzione semplici: cilindro, cono.

Sfera. Sezioni piane. Poli. Piano tangente. Cono e cilindro circoscritti.

Superficie laterale del cilindro e del cono di rivoluzione.

Volume del cilindro e del cono a base circolare.

Area della zona. Area della superficie sferica. Volume della sfera.

Geometria descrittiva. — Proiezione e quota di un punto. Rappresentazione della retta. Pendenza. Distanza tra due punti. Rette concorrenti. Rette parallele. Rappresentazione del piano. Scale di pendenza. Piani paralleli. Ribaltamento su di un piano orizzontale. Angolo di due rette. Distanza tra un punto ed una retta. Intersezioni di rette e piani. Applicazione ai problemi d'ombre e di sezioni piane di prismi e di piramidi. Rette e piani perpendicolari. Distanza tra un punto ed un piano. Angolo di una retta e di un piano. Angolo di due piani. Applicazione alla costruzione di poliedri semplici. Rappresentazione del punto, della retta e del piano mediante due piani di proiezione. Intersezioni di rette e di piani. Rette e piani paralleli. Rette e piani perpendicolari. Ribaltamento di un piano sopra un piano orizzontale. Cambiamento del piano verticale.

Riprendere i problemi già enunciati relativamente alle distanze, angoli, ombre e sezioni piane.

Trigonometria. — Funzioni circolari (seno, coseno, tangente e cotangente). Relazioni tra le funzioni circolari di un medesimo arco. Calcolo delle funzioni circolari di alcuni archi: $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$ ecc. Teoria delle proiezioni. Formule d'addizione pel seno, il coseno e la tangente. Espressione di sen $2a$, cos $2a$, tg $2a$. Tutte le funzioni circolari dell'arco $a$ si esprimono razionalmente come funzione di tg $\frac{1}{2}a$. Conoscendo cos $a = b$, trovare i valori del sen e del cos degli archi $\frac{1}{2}a$; scelta dei valori corrispondenti ad un arco $a$ dato.

Conoscendo tg $a$, trovare i valori delle tg degli archi $\frac{1}{2}a$; scelta del valore corrispondente ad un arco $a$ dato.

Trasformare in prodotto la somma e la differenza di due funzioni circolari, seno, coseno o tangente. Problema inverso. Espressione della forma

$$a \cos(\omega t + \alpha) + \cos(\omega t + \beta)$$

ove $t$ designa la sola variabile.

Uso delle tavole di logaritmi a quattro o cinque decimali.

Risoluzione dei triangoli rettangoli. Risoluzione e discussione di alcune equazioni trigonometriche semplici. Relazioni tra i lati e gli angoli di un triangolo. Risoluzione dei triangoli.

Algebra. — Equazione e trinomio di secondo grado. Caso in cui la variabile è una linea trigonometrica. Calcolo delle derivate di funzioni semplici. Studio delle variazioni e della rappresentazione grafica.

Studio di un movimento rettilineo mediante la teoria delle derivate. Velocità ed accelerazione. Moto uniformemente vario.

*(I professori dovranno applicare le teorie d'algebra a numerosi esempî tratti sia dall'algebra, sia dalla trigonometria, sia dalla geometria).*

### *Classe di Matematiche (ore 8).*

Aritmetica. — Numerazione decimale. Addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione dei numeri interi. Teoremi fondamentali riguardanti quelle operazioni. Spiegazione delle regole pratiche per eseguire le operazioni.

Non si cambia il resto di una somma, di una differenza, di un prodotto, aumentando o diminuendo un termine od un fattore di un multiplo del divisore. Resti della divisione di un numero intero per 2, 5, 4, 25, 8, 125, 9, 3, 11. Caratteri di divisibilità per ciascheduno di questi numeri.

Massimo comun divisore di due o più numeri. Numeri primi tra di loro.

Ogni numero che divide un prodotto di due fattori ed è primo con uno di questi fattori, divide l'altro.

Minimo comune multiplo di due o più numeri.

Definizione e proprietà elementari de' numeri primi. Scomposizione di un numero intero in un prodotto di fattori primi. Tale scomposizione non può farsi che in un sol modo. Composizione del massimo comun divisore e del minimo comune multiplo di due o più numeri scomposti in fattori primi.

Frazioni ordinarie. Riduzione di una frazione alla sua più semplice espressione. Riduzione di più frazioni al medesimo denominatore. Minimo comun denominatore. Operazioni sulle frazioni ordinarie.

Numeri decimali. Operazioni (considerando le frazioni decimali come caso particolare delle frazioni ordinarie). Calcolo d'un quoziente con una approssimazione decimale data.

Riduzione di una frazione ordinaria in frazione decimale; condizione di possibilità. Quando la riduzione è impossibile, la frazione ordinaria può riguardarsi come limite di una frazione decimale periodica illimitata.

Quadrato di un numero intero o frazionario; composizione del quadrato della somma di due numeri. Il quadrato di una frazione non è mai uguale ad un numero intero. Definizione ed estrazione della radice quadrata di un numero intero o frazionario con una approssimazione decimale data.

Sistema metrico. Esercizî.

Rapporto di due numeri. Rapporti eguali. Divisione in parti proporzionali.

Misura delle grandezze. Definizione del rapporto di due grandezze della stessa specie.

Teorema: Il rapporto di due grandezze della stessa specie è uguale al quoziente dei numeri che le misurano.

Grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Problemi.

Definizione dell'errore assoluto e dell'errore relativo. Determinazione del limite superiore dell'errore commesso sopra una somma, una differenza, un prodotto, un quoziente, conoscendo i limiti superiori degli errori i cui dati sono errati.

Algebra. — Numeri positivi e negativi. Operazioni su detti numeri.

Monomî, polinomî; addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione de' monomî e de' polinomî.

Principî relativi alla risoluzione delle equazioni. Equazioni di primo grado.

Equazione di secondo grado ad una incognita. (Non si svilupperà la teoria degli imaginari.) Equazioni semplici che si riducono ad esse.

Inequazioni di primo e secondo grado. Problemi di primo e secondo grado.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche. Somma dei quadrati e cubi degli $n$ primi numeri interi.

Logaritmi volgari. Uso delle tavole a cinque decimali. Interessi composti ed annualità.

Coordinate di un punto. Rappresentazione di una retta mediante un'equazione di primo grado. Coefficiente angolare di una retta. Costruzione di una retta mediante la sua equazione.

Variazioni e rappresentazioni grafiche delle funzioni.

$$y = ax + b; \qquad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}; \qquad y = ax^2 + bx + c;$$
$$y = ax^4 + bx^2 + c.$$

Derivata di una somma di un prodotto, di un quoziente, della radice quadrata di una funzione, di sen $x$, cos $x$, tg $x$, cotg $x$.

Applicazione allo studio delle variazioni, alla ricerca de' massimi e minimi di alcune funzioni semplici, specialmente delle funzioni della forma

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}; \qquad x^3 + px + q$$

ove i coefficienti hanno valori numerici.

Derivate dell'area di una curva considerate come funzione delle ascisse. (Si ammetterà la nozione d'area.)

*(Il professore lascerà da parte tutte le questioni sottili sollevate da un'esposizione rigorosa delle teorie delle derivate; avrà specialmente in mira le applicazioni e non esiterà a rivolgersi all'intuizione).*

TRIGONOMETRIA. — Funzioni circolari. Addizione e sottrazione degli archi. Moltiplicazione e divisione per 2. Risoluzione de' triangoli.

Applicazioni della trigonometria alle varie quistioni relative al rilevamento dei piani.

*(Non si parlerà della costruzione delle tavole trigonometriche).*

GEOMETRIA. — Rette. Angoli. Paralellismo. Poligoni. Circolo. Piano; rette e piani. Angoli diedri; angoli poliedri.

Traslazione. Rotazione. Simmetrie.

Omotetia e similitudine. Relazioni metriche. Poligoni regolari.

Prisma, piramide, cilindro, cono, sfera.

Aree e volumi.

Potenza di un punto rispetto ad un circolo e rispetto ad una sfera.

Assi radicali. Piani radicali.

Polare di un punto rispetto ad un circolo; piano polare di un punto rispetto ad una sfera.

Inversione. Applicazioni. Apparecchi di Peaucellier. Proiezione stereografica.

VETTORI. — Proiezione di un vettore sopra un asse; momento lineare rispetto ad un punto; momento rispetto ad un asse.

Somma geometrica di un sistema di vettori; momento risultante rispetto ad un punto; somma dei momenti rispetto ad un asse.

Applicazione ad una coppia di vettori.

Proiezioni centrali. — Piano del quadro. Prospettiva di un punto di una retta, di una linea. Punto di fuga di una retta. Prospettiva di due rette parallele. Retta di fuga di un piano. Concetto di retta all'infinito di un piano.

Coniche - Ellisse. — Tracciamento; tangente; problemi semplici sulle tangenti. Equazione dell'ellisse riferita ai propri assi. Ellisse considerata come proiezione del circolo; problemi semplici sulle tangenti; intersezione dell'ellisse e di una retta.

Iperbole. — Tracciamento, tangente, assintoti; problemi semplici sulle tangenti. Equazione dell'iperbole riferita a' suoi assi.

Parabola. — Tracciamento, tangente; problemi semplici sulle tangenti. Equazione della parabola riferita al proprio asse ed alla tangente nel vertice.

Definizione comune di queste curve mediante un fuoco ed una direttrice.

Sezioni piano di un cono e di un cilindro di rivoluzione.

Geometria descrittiva. — Ribaltamenti. Cambiamento di un piano di proiezione; rotazione intorno ad un asse perpendicolare ad un piano di proiezione.

Applicazione alle distanze ed agli angoli: distanza di due punti, di un punto da una retta, di un punto da un piano; minima distanza di due rette, una delle quali sia verticale o di due rette parallele ad uno stesso piano di proiezione; perpendicolare comune a queste due rette. Angolo di due rette; angolo di una retta e di un piano; angolo di due piani.

Proiezione del circolo. Sfera; sezione piana, intersezione con una retta. Cono e cilindro a direttrice circolare; piano tangente passante per un punto o parallelo ad una retta; ombre; contorni apparenti; sezioni piane. Coni e cilindri circoscritti alla sfera. Ombre.

Rappresentazione di una superfice per mezzo di curve di livello. Quota di un punto della superficie la cui proiezione orizzontale è data. Pendenza d'una linea tracciata sopra una superficie. Linee di eguale pendenza. Linee di massima pendenza.

Applicazione delle precedenti considerazioni alle carte topografiche.

Planimetria e livellamento. Linee e colori convenzionali. Lettura di una carta e specialmente di quella dello Stato Maggiore. Uso della carta sul terreno.

Cinematica. — Unità di lunghezza e tempo. Del moto. Sua relatività. Traiettoria di un punto. Esempi di moto.

Moto rettilineo: Moto uniforme; velocità, sua rappresentazione mediante un vettore. Moto vario; velocità media; velocità ad un momento dato; sua rappresentazione mediante un vettore; accelerazione media; accelerazione ad un dato momento, sua rappresentazione mediante un vettore. Moto uniformemente vario.

Moto curvilineo. Velocità media, velocità ad un momento dato definite come vettori. Valore algebrico della velocità. Odografo. Accelerazione.

Moto circolare uniforme, velocità angolare; proiezione sopra un diametro, moto oscillatorio semplice sopra una retta.

Cambiamento di sistema di comparazione. Composizione delle velocità.

Esempî ed applicazioni (non si insista sulle applicazioni puramente geometriche).

Moto di traslazione di un corpo solido. Scorrimento rettilineo.

Moto rotatorio di un corpo solido intorno ad un asse. Alberi e cuscinetti. Perni e cuscinetti. Arpioni e cerniere.

Studio geometrico dell'*elice*. Movimento ellissoidale d'un corpo. Vite e madrevite.

Trasformazioni semplici di movimenti studiati dal punto di vista pratico: correggie di trasmissione, ruote dentate, bielle e manovelle. (Non si studiano dettagliatamente i meccanismi.)

Dinamica e Statica. — Punto materiale. Inerzia. Forza: sua rappresentazione mediante un vettore. Massa. Indipendenza degli effetti delle forze. Composizione delle forze.

Equilibrio di un punto materiale libero. Equilibrio di un punto materiale sopra una curva od una superficie. Equilibrio di un punto materiale sopra un piano, quando si tiene conto dell'attrito. Moto di un punto pesante libero secondo una verticale.

Movimento parabolico di un punto pesante.

Attrito di scorrimento. Moto d'un punto pesante sulla linea di massima pendenza d'un piano, con o senza attrito.

Lavoro di una forza applicata ad un punto materiale. Unità di lavoro.

Lavoro d'una forza costante, di una forza variabile. Lavoro elementare.

Lavoro totale. Valutazione grafica. Lavoro della risultante di parecchie forze. Teorema delle forze vive per un punto materiale. Esempî semplici.

Forze applicate ad un corpo solido. — Forze parallele. Centro delle forze parallele. Centro di gravità. Sua ricerca in alcuni casi semplici: triangolo, trapezio, quadrilatero, prisma, piramide.

Coppie, composizione di coppie. Riduzione delle forze applicate ad un solido a due forze o ad una forza e ad una coppia.

Condizioni d'equilibrio di un corpo solido. Caso di tre forze, di forze parallele, di forze situate in un medesimo piano.

Equilibrio di un corpo mobile intorno ad un asse fisso, ad un punto fisso oppure sottoposto a riposare sopra un piano fisso.

Macchine semplici in istato di riposo ed in istato di movimento. — Leva. Carico del punto d'appoggio. Verricello. Puleggia fissa e puleggia mobile.

Polispasto, martinetto, piano inclinato.

Si verificherà che se una macchina semplice è in moto, avendo continuamente adempiuto alle condizioni d'equilibrio, il lavoro elementare della potenza è uguale e di segno contrario a quello della resistenza.

Enunciato del teorema generale delle forze vive. Applicazione alle macchine.

Lavoro motore e lavoro resistente.

Resistenze passive. Attrito.

Lavoro delle resistenze passive. Rendimento di una macchina.

Indicazioni sull'uso de' volani e de' freni.

Cosmografia - Sfera celeste. — Distanza angolare. Altezza e distanza zenitale. Teodolite. Leggi del moto diurno. Meridiano. Polo. Giorno siderale. Ascensione retta e declinazione. Canocchiale meridiano.

Terra. — Coordinate geografiche. Dimensioni e rilievo della Terra. Mappamondo. Carte.

Sole. — Movimento proprio apparente sulla sfera celeste. Eclittica. Ineguaglianza dei giorni e delle notti alle differenti latitudini. Stagioni. Anno tropico ed anno sidereo.

Ora siderea; ora media; ora legale. Calendari giuliano e gregoriano.

Luna. — Movimento proprio apparente sulla sfera celeste.

Fasi. — Rotazione. Variazione del diametro apparente. Eclissi di Luna e di Sole.

Pianeti. — Sistema di Copernico. Leggi di Keplero.

Legge di Newton e sue conseguenze. Nozioni sommarie sulle distanze, le dimensioni, la costituzione fisica del sole, dei pianeti e dei loro satelliti. Comete, stelle cadenti; bolidi. Stelle; costellazioni. Nebulose. Via lattea.

*Quarta A (ore 2 normali).*

Aritmetica. — Prodotto di una somma e di una differenza per un numero. Prodotto di fattori. Potenza.

Caratteri di divisibilità per 2, 5, 9, 3.

Numeri primi. Regole pratiche per la scomposizione di un numero in prodotto di fattori primi, per la ricerca del massimo comun divisore e del minimo multiplo comune.

Proporzioni. Esercizi sul sistema metrico, le frazioni e le grandezze direttamente e inversamente proporzionali. Regola pratica per l'estrazione della radice quadrata di un numero intero o decimale a meno di una unità decimale di un ordine dato.

Geometria (vedi Istruzioni). — Uso della riga, della squadra, del compasso e del rapportatore.

Linea retta e piano. Angoli. Triangoli. Triangolo isoscele. Casi d'eguaglianza dei triangoli.

Perpendicolare ed oblique. Casi d'eguaglianza de' triangoli rettangoli.

Rette parallele. Somma degli angoli d'un triangolo, d'un poligono convesso. Parallelogramma. Rettangolo. Losanga. Quadrato.

Circolo. Corde ed archi. Tangente. Posizioni relative dei due circoli.

Misura degli angoli.

Costruzioni elementari sulla retta ed il circolo.

*Terza A (ore 3 normali).*

Aritmetica. — Esercizî sul sistema metrico e le grandezze direttamente e inversamente proporzionali.

Algebra. — Numeri positivi e negativi. Operazioni. Applicazioni concrete. Monomi; polinomi. Addizione, sottrazione, moltiplicazione de' monomi e de' polinomi. Identità:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

Divisione dei monomi. Equazioni numeriche di primo grado ad una o due incognite: disuguaglianza di primo grado ad un'incognita.

Geometria. — Problemi ed interrogazioni sul programma della classe precedente.

Punti che dividono una retta in un rapporto dato. Linee proporzionali.

Triangoli simili. Definizioni del seno, del coseno, della tangente e della cotangente di un angolo.

Definizione delle figure omotetiche. Poligoni simili. Pantografo.

Relazioni metriche in un triangolo rettangolo.

Proprietà delle secanti nel circolo. Costruzioni della quarta proporzionale e della media proporzionale.

Poligoni regolari: quadrato, esagono e triangolo equilatero.

Misura della circonferenza (enunciato).

Misura delle aree del rettangolo, del parallelogramma, del triangolo, del trapezio, dei poligoni, del cerchio.

Rapporti delle aree di due poligoni simili.

*Seconda A, B (ore 2 pel primo semestre).*

Algebra. — Esercizî sulle equazioni di primo grado e la rappresentazione delle variazioni della funzione $(ax + b)$.

Geometria. — Del piano e delle rette nello spazio.

Angolo diedro. Rette e piani paralleli. Retta e piano perpendicolari.

Definizioni degli angoli poliedri, della piramide, del prisma.

Enunciato delle regole relative alle superficie ed ai volumi dei prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere.

*Prima A, B (ore 2 pel secondo semestre).*

ALGEBRA. — Esercizi sulle equazioni numeriche di primo grado, ad una o più incognite, e di secondo grado ad una incognita; rappresentazione delle variazioni di $x^2$ e $\frac{1}{x}$.

GEOMETRIA. — Misura degli angoli. Figure piane simili. Definizione del seno, del coseno e della tangente di un angolo compreso tra 0 e 2 retti.

Relazioni metriche nel triangolo e nel circolo. Misura delle aree piane.

Enunciato delle regole relative alle superficie ed ai volumi dei prismi, piramidi, cilindri, coni e sfere.

*Classe di Filosofia*
*(ore 2 per le matematiche; 1 mezz'ora per la cosmografia).*

MATEMATICHE. — Richiamo delle regole principali relative al calcolo dei numeri positivi e negativi; sviluppi di $(a+b)^2$, $(a+b)^3$; identità $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)(a^n+a^{n-1}b+\dots+b^n)$.

Nozioni sull'algebra geometrica dei Greci, rappresentazione di un numero mediante una linea, di un prodotto mediante la superficie di un rettangolo; figure equivalenti alle identità:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,\ \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$$

Quadrato costruito sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

Costruzione di un rettangolo, avente un lato dato, equivalente ad un rettangolo dato.

Costruzione di un rettangolo equivalente ad un quadrato dato, conoscendo la somma e la differenza de' suoi lati; espressioni di questi lati resultanti dalla costruzione.

Risoluzione algebrica dell'equazione di secondo grado.

Applicazione al problema precedente; confronto dei risultati.

Vantaggi della notazione moderna e specialmente dell'introduzione dei numeri positivi e negativi.

Determinazione, mediante due numeri positivi o negativi, d'un punto di un piano; rappresentazione inversa di un sistema di due numeri per mezzo di un punto di un piano.

Estensione della nozione delle coordinate; longitudine e latitudine di un punto di una sfera.

Rappresentazione grafica della variazione di un fenomeno dipendente da una sola variabile; curve delle temperature, delle pressioni; applicazione alla statica. Nozione di funzioni; rappresentazione grafica di funzioni semplicissime:

$$y = ax,\ y = ax + b,\ y = x^2,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x}.$$

Costruzione di una retta definita da una equazione numerica di primo grado tra $x$, $y$; coefficiente angolare, (1) ordinata all'origine. Coefficiente angolare della retta che congiunge due punti.

Uso della carta a quadretti. Risoluzione di due equazioni numeriche di primo grado a due incognite mediante l'intersezione di due rette, delle equazioni numeriche della forma:

$$x^2 + px + q = 0,\ x^3 + px + q = 0$$

mediante l'intersezione delle curve (una volta tracciate), aventi per equazioni:

$$y = x^2,\ y = x^3$$

colla retta la cui equazione è $y + px + q = 0$.

Grafico delle ferrovie.

Curve fornite dagli apparecchi registratori.

Costruzione di alcune curve semplici definite geometricamente; equazioni di tali curve.

Nozione della tangente e della derivata. Esempi di tangenti ottenute geometricamente come limiti di una secante (circolo, parabola). Coefficiente angolare della tangente: applicazioni ad alcuni casi semplici:

$$y = x^2,\ y = x^3,\ y = \frac{1}{x}.$$

Nozioni sull'uso della derivata per riconoscere il senso della variazione di una funzione.

Valutazione approssimata dell'area di una curva tracciata su carta a quadretti, contando i quadretti contenuti nell'interno della curva: limite dell'errore fornito dal numero dei quadretti traversati dalla curva: quest'errore può venir reso lievissimo adoperando quadrigliatura finissima.

Area del triangolo ottenuta come limite comune di due somme di rettangoli una delle quali inferiore, l'altra superiore all'area cercata. Area della parabola. Problema inverso della ricerca di una derivata. Area di un triangolo, o di una parabola, ottenuta colla ricerca di una funzione la cui derivata rispetto ad $x$ è $ax$ o $ax^2$.

Applicazione del metodo infinitesimale alla valutazione dei volumi e delle superficie dei corpi considerati in geometria elementare.

(1) Il coefficiente angolare sarà definito come il coefficiente di $x$ nell'equazione risoluta rispetto ad $y$, o come l'ordinata del punto, di ascissa eguale all'unità, posto sulla parallela condotta per l'origine.

CONSIGLI GENERALI. — *Il professore non dimenticherà che gli scolari ai quali si rivolge, non sono abituati alle matematiche; eviterà quindi ogni teoria astratta, non metterà innanzi le idee generali, ma cercherà di farle risaltare da esempî particolari, sviluppati colla lentezza ed il dettaglio che stimerà necessarî perchè sia ben seguito. Il programma precedente è destinato a guidarlo, ma non è uno stretto programma.*

*Il maestro sarà libero di svilupparne più o meno certe parti, secondo le attitudini dei proprî allievi, secondo l'interesse che avrà saputo suscitare in loro. Queste osservazioni riguardano specialmente le applicazioni di cui è fatta menzione sulla fine del programma e che, in ogni caso, dovranno venir trattate ampiamente, senza star troppo attaccati al rigore.*

*Si raccomanda al maestro d'introdurre nel proprio insegnamento alcune nozioni storiche; potrà quindi parlare del metodo d'esaustione presso gli antichi (Euclide, Archimede) e dare alcuni dettagli sull'invenzione del calcolo differenziale ed integrale. Il suo scopo è di contribuire allo sviluppo filosofico de' proprî scolari, facendo loro acquistare idee importanti.*

COSMOGRAFIA. — Sistema di Copernico. Il Sole. Sue dimensioni, sua distanza dalla Terra. Costituzione fisica, rotazione, macchie.

Notizie sommarie sui pianeti. La Terra. Forma e dimensioni. Rotazione, poli, equatore, meridiani, paralleli. Longitudine. Latitudine.

La Luna. Moto. Costituzione fisica.

Comete. Stelle cadenti. Bolidi. Stelle. Nebulose. Via lattea.

---

I suddetti programmi saranno obbligatori:

Principiando dall'anno scolastico 1905-1906, per le classi *Quinta B* e *Quarta A* (1° ciclo), come per la classe *Seconda A, B, C, D* (2° ciclo).

Cominciando dall'anno scolastico 1906-1907, per la classi *Quarta B* e *Terza A* (1° ciclo), come per la classe *Prima A, B, C, D* (2° ciclo).

Principiando dall'anno scolastico 1907-1908, per la classe *Terza* (1° ciclo), come per le classi di *Filosofia* e di *Matematiche* (2° ciclo).

---

# PICCOLE NOTE

**Sulle coppie di numeri interi che hanno un dato massimo comun divisore e un dato minimo comune multiplo.**

Come utile esercizio, proponiamoci di risolvere — nel modo più generale — la seguente questione:

*Determinare tutte le possibili coppie di numeri interi che abbiano come massimo comun divisore un dato numero* m, *e come minimo comune multiplo un altro numero* m'.

Cominceremo coll'osservare che, per l'esistenza di una almeno di siffatte coppie, è necessario che $m'$ sia multiplo di $m$. Supposto dunque che ciò si verifichi, indichiamo con $x$ e $y$ due numeri qualunque, aventi $m$ come massimo comun divisore ed $m'$ come minimo comune multiplo. (¹) Ne seguirà

$$xy = mm'.$$

E quindi

$$\xi\eta = q;$$

avendo posto

$$\xi = x : m, \qquad \eta = y : m, \qquad q = m' : m.$$

Dunque, ad ogni coppia di numeri $x$ e $y$, che soddisfino alle condizioni richieste, corrisponderà un'altra coppia di numeri $\xi$ e $\eta$, *che risultano primi tra loro*, ed il cui prodotto uguaglia il quoziente tra $m'$ ed $m$.

Reciprocamente, se $\xi$ e $\eta$ sono due numeri primi tra loro che abbiano come prodotto il quoziente $q$, gli altri due numeri

$$x = m\xi, \qquad y = m\eta$$

avranno appunto per massimo comun divisore $m$, e per minimo comune multiplo $m'$.

Si conclude pertanto: *La ricerca di tutte le possibili coppie di numeri interi, che soddisfino alle condizioni richieste, equivale alla ricerca di tutte le possibili coppie di numeri primi tra loro, il cui prodotto sia uguale al quoziente tra il minimo comune multiplo ed il massimo comun divisore assegnati; purchè poi si moltiplichi ognuna di queste ultime coppie di numeri per il massimo comun divisore prestabilito.*

Ora, se il quoziente $q$ è un numero primo, l'unica coppia di numeri interi, primi tra loro, capaci di dare come prodotto il numero $q$, è evidentemente

$$(1, q).$$

Corrispondentemente, l'unica coppia di numeri richiesti $x$, $y$ sarà

$$(m, m').$$

Lo stesso dicasi nel caso in cui $q$ sia potenza $n^a$ di un numero primo $p$; giacchè allora gli unici divisori di $p^n$, oltre a 1 e $p^n$, sono

$$p, p^2, \ldots, p^{n-1};$$

e due qualunque di questi non sono mai primi tra loro.

Dunque: *Se il quoziente tra il minimo comune multiplo ed il massimo comun divisore assegnati è un numero primo, ovvero è potenza di un numero primo, esiste una sola coppia di numeri che soddisfino alle condizioni richieste: ed è quella costituita dal detto massimo comun divisore e dal detto minimo comune multiplo.*

Quando invece il quoziente $q$ non sia nè un numero primo, nè potenza di un numero primo, ecco come procederemo per ottenerne tutte le possibili decomposizioni in coppie di fattori che risultino primi tra loro.

Osserviamo che, in tal caso, decomposto $q$ in fattori primi, avremo

$$q = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \tag{1}$$

essendo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i *differenti* fattori primi di $q$. Ora, gli unici divisori di $q$, diversi dall'unità, sono quelli che si ottengono o considerando una potenza qualsivoglia di $p_i$ (con $i = 1, 2, \ldots, n$) la quale abbia esponente non maggiore di $\alpha_i$; oppure formando il prodotto tra le analoghe potenze di due o più dei fattori primi

(¹) Sempre ne esistono; giacchè, per esempio, i due numeri stessi $m$ ed $m'$ soddisfano evidentemente alle condizioni richieste.

$p_1, p_2, \ldots, p_n$, combinati arbitrariamente 2 a 2, 3 a 3, ..., $n$ a $n$. Ma se adoperiamo una potenza di $p_i$ con esponente minore di $\alpha_i$, otterremo un divisore di $q$, il quale non è certamente primo col quoziente tra $q$ e quel divisore medesimo; cioè tale divisore non potrà dar luogo ad una decomposizione di $q$ nel prodotto di due numeri che siano primi tra loro: perchè in entrambi figurerebbe il fattore primo $p_i$. Ne segue che tutte le richieste decomposizioni di $q$ si otterranno scegliendo come loro primo numero o l'unità, o una qualunque delle potenze

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n},$$

ovvero il prodotto di due o più di esse, combinate arbitrariamente; e come secondo numero, il prodotto delle potenze che rimangono (avvertendo che nel caso in cui si adoperasse, come primo numero, il prodotto $p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n} = q$, l'altro numero sarebbe evidentemente l'unità; e viceversa). Ma per ogni decomposizione che, in tal modo, mano mano si ottiene, bisognerà poi escludere quella che viene in seguito e che differisce dalla precedente solo per l'ordine dei due numeri che la compongono. Così, se abbiamo

$$q = p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4},$$

scriveremo dapprima la decomposizione evidente

$$(1,\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}).$$

Poi le altre

$$(p_1^{\alpha_1},\ p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_2^{\alpha_2},\ p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}),$$
$$(p_3^{\alpha_3},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3}).$$

Verranno in seguito le 6 decomposizioni

$$(p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2},\ p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3},\ p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_1^{\alpha_1} . p_4^{\alpha_4},\ p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3}),$$
$$(p_2^{\alpha_2} . p_3^{\alpha_3},\ p_1^{\alpha_1} . p_4^{\alpha_4}), \qquad (p_2^{\alpha_2} . p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_3^{\alpha_3}), \qquad (p_3^{\alpha_3} . p_4^{\alpha_4},\ p_1^{\alpha_1} . p_2^{\alpha_2}).$$

Ma di queste, le ultime 3 non differiscono sostanzialmente dalle prime 3. Lo stesso dicasi delle decomposizioni dove il primo numero è il prodotto di tre potenze: giacchè esse coincidono con quelle, già scritte, dove il primo numero è invece rappresentato da una sola potenza. Finalmente, la decomposizione che contiene come primo numero il prodotto di tutte e 4 le potenze che figurano in $q$, e come secondo numero l'unità, non differirà da quella evidente, già scritta al principio.

In base a queste osservazioni, concludiamo: *Se il quoziente* q *è della forma* (1), *ed il numero dei suoi fattori primi differenti è pari (cioè se* n = 2h*), per ottenere tutte le possibili decomposizioni di* q *in coppie di fattori che siano due numeri primi tra loro, basterà scegliere per uno di questi numeri o l'unità, ovvero una qualunque delle potenze*

$$p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n},$$

*ovvero i prodotti di queste* n *potenze combinate, in tutti i modi possibili, due a due, tre a tre, ...,* h *ad* h. *Avvertendo però che delle combinazioni* h *ad* h, *soltanto una metà dovrà essere conservata.*

*Quando invece il numero dei differenti fattori primi di* q *sia dispari (cioè* n = 2h + 1*), si procederà ancora nel solito modo, arrestandoci sempre alle combinazioni* h *ad* h; *le quali però dovranno, in questo secondo caso, essere tutte conservate.*

Ne segue che il numero totale di quelle differenti decomposizioni di $q$ sarà

$$1 + \binom{2h}{1} + \binom{2h}{2} + \ldots + \binom{2h}{h-1} + \tfrac{1}{2}\binom{2h}{h},$$

ovvero

$$1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h-1}+\binom{2h+1}{h},$$

secondo che $n$ è pari o dispari.

Ma evidentemente si ha

$$1+\binom{2h}{1}+\binom{2h}{2}+\ldots+\binom{2h}{h-1}+\tfrac{1}{2}\binom{2h}{h}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{2h}{1}+\binom{2h}{2}+\ldots+\binom{2h}{h}+\ldots+\binom{2h}{2h}\right\},$$

$$1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h-1}+\binom{2h+1}{h}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{2h+1}{1}+\binom{2h+1}{2}+\ldots+\binom{2h+1}{h}+\ldots+\binom{2h+1}{2h+1}\right\}.$$

Per conseguenza, il numero totale delle richieste decomposizioni di $q$ sarà, in ogni caso, espresso da

$$\tfrac{1}{2}\left\{1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}\right\}.$$

E poichè è noto che si ha

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,$$

concluderemo che tali decomposizioni sono in numero di $2^{n-1}$.

Osservisi poi che il caso in cui $q$ sia un numero primo, o potenza di un numero primo, può includersi nel precedente, quando si faccia $n=1$. Giacchè allora il numero delle decomposizioni trovato innanzi si riduce ad 1; e difatti una sola decomposizione si ha in tal caso.

Ricordando infine che, se moltiplichiamo quelle coppie di numeri, precedentemente determinate, per il massimo comun divisore $m$, si ottengono tutte le possibili coppie di numeri che hanno come massimo comun divisore e come minimo comune multiplo i due numeri assegnati $m$ ed $m'$, concluderemo:

*Il numero totale delle coppie di numeri che abbiano per massimo comun divisore* m, *e per minimo comune multiplo* m', *è* $2^{n-1}$; *essendo* n *il numero dei differenti divisori primi del quoziente fra* m' *ed* m.

M. Chini.

---

**Una dimostrazione della formola di Meissel.** (1)

Indicheremo con $\psi(n)$ il numero dei numeri primi inferiori ad $n$, con $f(n, l)$ il numero dei numeri minori di $n$ (incluso $n$) e non divisibili per nessuno dei primi $l$ numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_l$, dove $p_1=2$, e finalmente con $E\left(\frac{p}{q}\right)$ il massimo numero intero minore di $\frac{p}{q}$.

Ciò posto dimostriamo la seguente formola

$$\psi(n)=f(n, l)+l+d-1-\sum_{r=1}^{r=d} f\left\{E\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right), l+r-1\right\} \qquad (1)$$

dove è

$$d=\psi(\sqrt{n})-l.$$

(1) Vedi "Math. Ann.", Bd II e III, oppure G. Wertheim, *Elem. der Zalenth.*, 1887 od anche Gazzaniga, *Teoria dei numeri*, Padova, Drucker, 1903.

Infatti, per ottenere da $f(n, l)$ il numero di tutti i numeri primi inferiori ad $n$ togliamo da $f(n, l)$ l'unità, ed aggiungiamovi i primi $l$ numeri primi: abbiamo così

$$f(n, l) + l - 1 \tag{2}$$

la quale formola darebbe il numero $\psi(n)$, ove tutti i numeri minori di $n$ e non divisibili per alcuno dei primi $l$ numeri primi fossero essi pure primi: ciò comporterebbe una restrizione, cioè $l = \psi(\sqrt{n})$ secondo il teorema di Eratostene: invece, nel caso più generale, converrà togliere dalla (2) il numero di quei numeri che son divisibili per $p_{l+1}\, p_{l+2} \ldots$ e sarà sufficiente arrestarsi a quel numero primo $p_{l+d}$ che è immediatamente minore di $\sqrt{n}$: tale cioè che

$$l + d = \psi(\sqrt{n}) \qquad d = \psi(\sqrt{n}) - l.$$

In tale modo troviamo la condizione imposta alla formola (1). Supponiamo ora di aver levato dalla (2) il numero di tutti i numeri divisibili per $p_{l+1} \ldots p_{l+r-1}$ vogliamo ora togliere il numero di quelli che son divisibili per $p_{l+r}$. Per fare ciò basterà togliere il numero dei prodotti di $p_{l+r}$ per tutti i numeri che non sono divisibili nè per $p_1$, nè per $p_2, \ldots,$ nè per $p_{l+r-1}$ e tutti minori di $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)$: cioè giusto le notazioni adottate il numero

$$f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l + r - 1\right\} - 1$$

dove abbiamo sottratto 1, per essere l'unità compresa nella $f$, mentre non fa al caso nostro essendo il prodotto di $p_{l+r}$ per l'unità un numero primo. Eseguendo l'indicata operazione da $r = 1$ ad $r = d$ otteniamo che dalla (2) si devono togliere in tutto

$$\sum_{r=1}^{r=d} f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l + r - 1\right\} - d$$

numeri, e ne conseguirà la formola (1).

Per arrivare da questa alla formola di Meissel osserviamo che la espressione

$$f\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right),\ l + r - 1\right\} \tag{3}$$

dà tutti numeri primi quando $p_{l+r-1}$ sia immediatamente minore oppure maggiore di $\sqrt{\frac{n}{p_{l+r}}}$, per il che è necessario e basta che sia

$$p_{l+r} > \sqrt{\frac{n}{p_{l+r}}}$$

Ponendo ora

$$p^3_{l+r} > n. \tag{4}$$

$$p^3_{l+1} > n \tag{5}$$

la (4) è verificata qualunque sia $r$ essendo $p_{l+r} \geqq p_{l+1}$. Ora la 5 sussiste quando si ponga $p_l^3$ immediatamente minore di $n$, cioè $p_l$ immediatamente minore di $\sqrt[3]{n}$, o in altri termini

$$l = \psi(\sqrt[3]{n}).$$

Ciò posto per ottenere dalla (3) il numero dei numeri primi minori di $\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)$ cioè $\psi\left\{\mathrm{E}\left(\frac{n}{p_{l+r}}\right)\right\}$, ricordando una osservazione fatta alla formola (2), basterà tomente alle mutate condizioni dell' insegnamento, ed appunto un tal libro presentano ai docenti ed ai discenti i professori Appell, membro dell'Istituto, e Chappuis della Scuola Centrale. L'unione di un matematico con un fisico, nella compilazione di queste lezioni di Meccanica elementare, è stata utilissima; giacchè in questo modo il lavoro risponde più completamente allo scopo pel quale è stato scritto. In tutta l'opera si riscontra una gran chiarezza di esposizione unita al necessario rigore, e ciò la rende doppiamente pregevole: ogni capitolo termina poi con degli esercizii bene scelti, di modo che anche per questa parte l'opera è commendevole.

*Cours de Mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathèmatiques spèciales, par* P. APPELL, *Membre de l'Institut, Professeur à l'École Centrale,* deuxième édition. entièrement refondue. - Paris, Gauthier-Villars, 1905. Un vol. in-8 de 495 pages, avec 186 figures.

È un corso di Meccanica per uso degli allievi della classe di matematiche speciali, pubblicato dal medesimo prof. Appell. In esso, dopo alcune nozioni preliminari sulle grandezze geometriche, l'Appell tratta della cinematica del punto, per poi passare ai movimenti elementari dei sistemi invariabili, corredando ogni teoria con svariati esercizii che servono a meglio chiarirla.

Nella seconda parte del corso l'Appell si occupa del punto materiale tanto libero che vincolato, ed espone finalmente nella terza ed ultima parte la teoria dei momenti, le condizioni di equilibrio di un punto e di un sistema, ponendo poi termine all'opera con la statica dei corpi solidi e con un breve capitolo sulle macchine, nel quale applica le nozioni del lavoro alle condizioni del loro equilibrio quando si fa astrazione dall'attrito. Anche i diversi capitoli della seconda e terza parte del corso sono illustrati con opportuni esercizii, e tutta l'opera si raccomanda, come la precedente, per l'esattezza del linguaggio e per la chiarezza dell'esposizione.

A. B.

AMODEO. — *Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli.* 3ª edizione (1ª ed. tipografica), migliorata e aumentata con 420 fig. intercalate nel testo e molti eserc. Napoli, Pierro, 1905.

Da oltre venti anni il prof. Amodeo fa all'Università di Napoli un corso di Geometria proiettiva che, due volte litografato nel 1896 e nel 1902, viene ora presentato nella sua forma definitiva in bellissima veste tipografica dall'editore Pierro.

L'opera si compone di una introduzione nella quale sono stabiliti i postulati fondamentali per la generazione degli spazi e le altre nozioni fondamentali, e di due parti, nella prima delle quali sono studiate le forme lineari di 1ª, 2ª e 3ª specie, e nella seconda le forme di secondo ordine ad una dimensione.

Il sistema di postulati scelto dall'autore è sostanzialmente quello stesso che egli propose nel 1891 per un $S_n$ negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino; lasciando perfettamente indeterminato il concetto di punto, esso permette di costituire immediatamente una geometria astratta applicabile a qualsiasi ente, e quindi il principio di dualità apparisce perfettamente chiaro ed evidente fin dal principio.

Gli altri concetti direttivi dell'opera sono espressi dall'autore nella prefazione colle parole seguenti:

" Sulla proposizione fondamentale di Desargues si discute se e quando si debba " considerare come postulato.

" Il *gruppo armonico* e le *proiettività* sono definite secondo lo Staudt.

" Le *involuzioni* sono considerate come casi particolari delle *proiettività cicliche*.

" Gli *elementi imaginari* sono considerati come elementi uniti *positivi* di una " omografia binaria e specialmente di un'omografia ciclica di terzo ordine; e per " avere adottata la separazione degli imaginari si può dire che un'involuzione è " trasformata in sè stessa da ogni involuzione armonica ad essa, ma deve dirsi che " è trasformata nella sua inversa.

" Le coniche sono generate mediante forme proiettive di 1ª specie, ma con" temporaneamente ne sono mostrate tutte le altre genesi, sezioni del cono qua" drico, curve fondamentali di una proiettività, proiezione di una circonferenza ecc.

" Le proprietà delle coniche e dei coni dipendenti dal teorema di Steiner sulla " generazione per forme proiettive sono però trattate separatamente da quelle " dipendenti dalla polarità, prima per elementi reali, poi per elementi imaginari.

" In un ultimo capitolo si tratta delle proiettività di secondo ordine e delle " loro applicazioni alla risoluzione dei problemi di secondo e terzo grado, e si fa " un cenno degli elementi comuni a due coniche e dei fasci e delle schiere di " coniche e dei loro centri.

" Tutta la trattazione del corso di Geometria pura è indipendente dalle cogni- " zioni geometriche elementari, mentre di queste cognizioni si fa largo uso, quando " concetti e teorie sono applicate alla geometria proiettiva Euclidea.

" Lo studio particolare che in ogni capitolo si è fatto seguire per le proprietà " particolari nel campo Euclideo, ha assunto proporzioni anche più vaste quando " si è fatta la trattazione delle coniche, in modo da dare un discreto sviluppo ai " metodi di Poncelet e di Chasles. Così si è dato al § " *Centro e diametri* „, ed " all'altro *Fuochi e direttrici* uno sviluppo maggiore di quello ora usato nelle pub- " blicazioni italiane „.

K.

---

Il 23 novembre 1905 è morto a Vienna l'illustre professore

# OTTO STOLZ

membro dell'Accademia imperiale di Vienna.

Poco più di un mese prima, l'11 ottobre, egli mi annunziava per mezzo di una cartolina, scritta tutta di suo pugno, che per malattia si ritirava dall'insegnamento e dall'attività scientifica; ma non avrei creduto che la sua fine dovesse essere così prossima.

Nacque lo Stolz ad Hall (Tirolo) nel 1842; studiò a Vienna Matematica e Astronomia e nel 1867 divenne assistente all'osservatorio e libero docente; nel 1871 fu chiamato all'università d'Innsbruck, dove si è svolta tutta la sua carriera didattica e scientifica.

Lascia importanti lavori sull'aritmetica teorica, l'analisi e l'algebra superiore, tra i quali ricordiamo i seguenti trattati: *Vorlesungen über Algemeine Arithmetik* (2 volumi 1885-86). *Grundzüge der Differentialen Integralrecnung* (2 volumi 1893-96). *Theoretische Aritmetik* (in collaborazione con GNEIMER) 2ª edizione 1902. *Einleitung in die Funktionen Theorie* (2 volumi 1904-05).

Alla memoria dell'illustre matematico, che ha onorato il " Periodico di matematica „ ed il " Supplemento „ della sua collaborazione, invio un caldo e reverente saluto.

G. LAZZERI.

---

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 febbraio 1906

# SEZIONI CONICHE

*(Continuazione v. fasc. precedente)*

## Assintoti dell'iperbole

*(Continuazione).*

**25.** Problema. — *Dati i fuochi e l'asse principale di un'iperbole trovarne gli assintoti e le direttrici.*

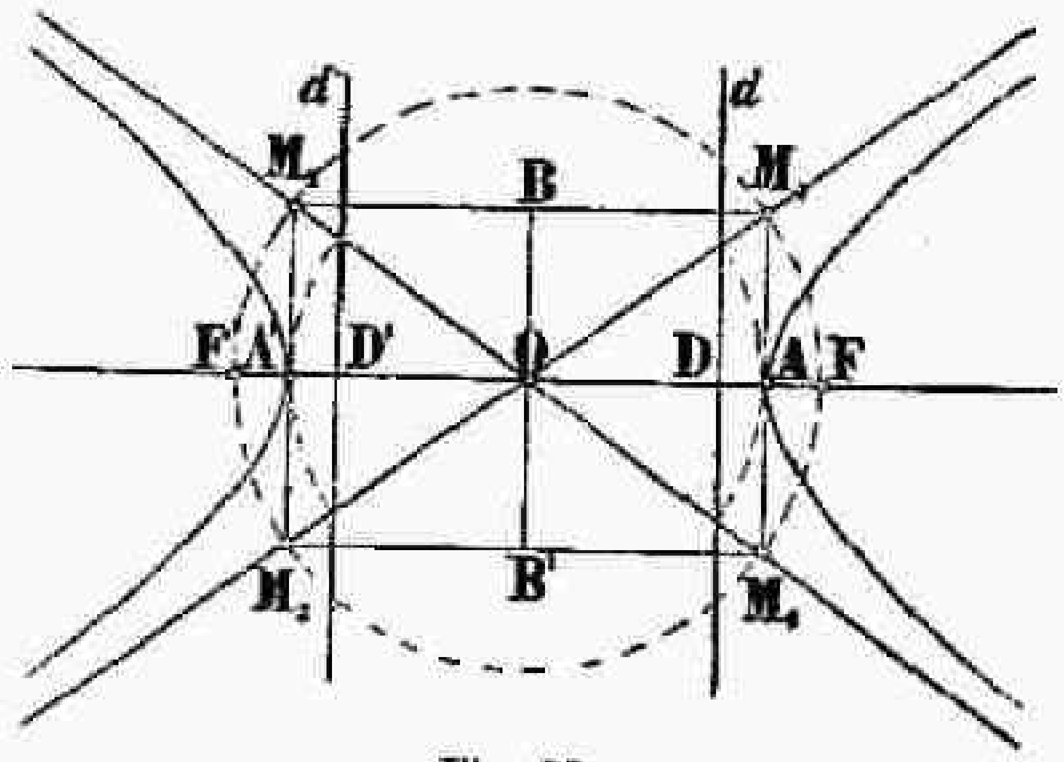


Fig. 16.

Siano F, F' (fig. 16) i fuochi dell'iperbole, e siano $M_1$, $M_4$ e $M_2$, $M_3$ i punti d'incontro del circolo di diametro FF' colle perpendicolari ad AA' in A ed A'. I triangoli $OAM_1$, $OA'M_2$, $OA'M_3$, $OAM_4$ sono rettangoli ed hanno l'ipotenusa eguale a $c$ ed un cateto eguale ad $a$. Essi sono dunque eguali, e quindi $OM_1$ e $OM_2$ sono i prolungamenti di $OM_3$, $OM_4$, e per il teorema del § precedente $M_1M_3$, $M_2M_4$ sono gli assintoti dell'iperbole.

Descritto poi il circolo di diametro AA', è facile vedere che esso incontra gli assintoti trovati in quattro punti, che congiunti convenientemente due a due danno due rette $d$, $d'$ perpendicolari ad AA'; esse sono le direttrici.

Infatti, chiamando X il punto d'incontro di AA' con la direttrice corrispondente al fuoco F e $x$ la sua distanza da O si deve avere

$$\frac{AF}{XA} = e, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{OF - OA}{OA - OX} = e,$$

ossia

$$\frac{c - a}{a - x} = \frac{c}{a}, \qquad \text{da cui} \qquad \frac{c}{a} = \frac{a}{x}.$$

Dunque $x$ è la terza proporzionale dopo $c$ ed $a$; e siccome si ha appunto per la costruzione indicata

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{\mathrm{OD}},$$

risulta che X coincide con D, ossia $d$ è la direttrice.

Chiamando $\mathrm{H}_1$ il punto d'incontro della semiretta $\mathrm{OM}_1$ con $d$ ossia col circolo di diametro AA′, è evidente che i triangoli $\mathrm{OAM}_1$, $\mathrm{OH}_1\mathrm{F}$ sono eguali; perciò l'angolo $\mathrm{O}\widehat{\mathrm{H}_1}\mathrm{F}$ è retto, e quindi la $\mathrm{AH}_1$ è tangente al circolo suddetto in $\mathrm{H}_1$.

**26.** Teorema. — *L'area del triangolo che ha per lati i due assintoti ed una tangente variabile di una iperbole è costante.*

Siano A, B due punti di una iperbole, A′, B′ i punti d'incontro con gli assintoti della retta A, B. È noto (§ 23, Teor.) che deve essere A′A = BB′, e perciò è facile vedere che i parallelogrammi, che hanno per lati gli assintoti e per un vertice A o B rispettivamente, sono equivalenti.

Le tangenti in A, B si trovano costruendo i segmenti che, terminando agli assintoti, sono divisi per metà da A o da B, ed è manifesto che i triangoli formati da questi segmenti con gli assintoti sono rispettivamente doppi dei due parallelogrammi suddetti, e perciò sono equivalenti.

## Proprietà delle tangenti e delle normali delle coniche. Podarie dei fuochi.

**27.** Teorema. — *Le bisettrici degli angoli formati dalle rette che congiungono un punto* P *di una conica centrale coi due fuochi sono l'una tangente e l'altra normale in* P *alla conica. E precisamente la bisettrice che taglia il segmento avente per estremi i fuochi, nel caso dell'elisse è normale, nel caso dell'iperbole è tangente.*

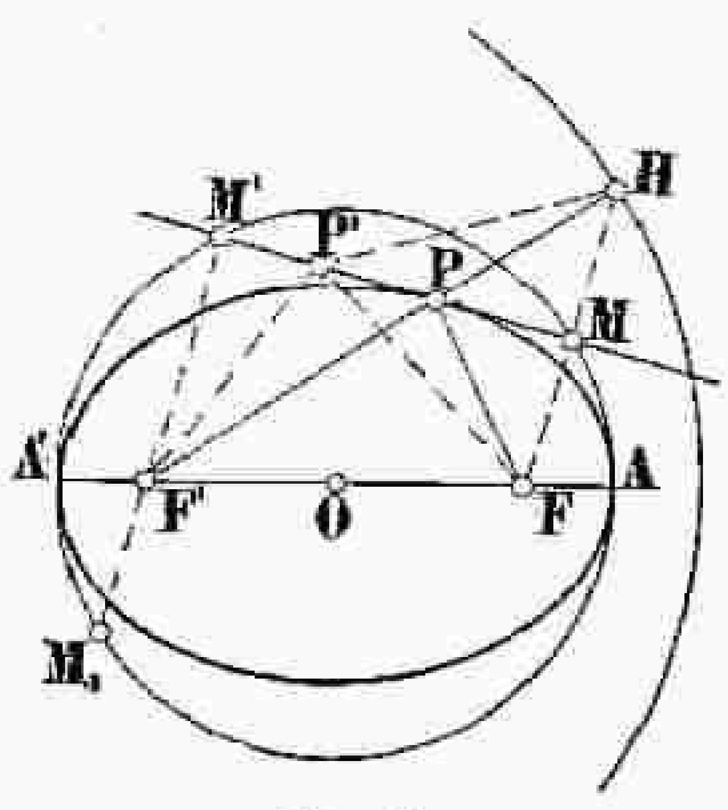


Fig. 17.

Siano F, F′ i fuochi, AA′ l'asse focale, P un punto qualunque di una conica centrale (fig. 17).

Sulla retta PF′ si prenda il segmento PH = PF, dalla parte opposta di F′ o dalla stessa parte, secondo che la conica è ellisse od iperbole. Otteniamo un triangolo PHF isoscele, nel quale la bisettrice PM dell'angolo in P è anche mediana ad altezza; e per conseguenza la retta PM, perpendicolare ad FH nel suo punto di mezzo, è il luogo dei punti equidistanti da F e da H. Da ciò si ricava facilmente che un altro punto P' della retta PM non può appartenere alla curva.

Infatti, essendo P'F = P'H, nel caso dell'ellisse si ha

$$P'F' + P'F = P'F' + P'H > F'H$$

e quindi, essendo

$$F'H = F'P + PH = F'P + PF = 2a,$$

si trae

$$P'F + P'F' > 2a;$$

e nel caso dell'iperbole si ha (supposto P'F' > P'F)

$$P'F' - P'F = P'F' - P'H < F'H$$

ossia, essendo

$$F'H = F'P - PH = F'P - PF = 2a,$$
$$P'F' - P'F < 2a.$$

Se ne conclude che la retta PM ha il solo punto P in comune colla conica, e quindi (§ 7, Cor. 3° e 5°) si può affermare che è tangente alla curva, considerando anche che essa, supposto che la curva sia un'iperbole, non può essere parallela agli assintoti.

Infatti, se PM fosse parallela ad un assintoto, FM sarebbe ad esso perpendicolare, e quindi (§ 25) P sarebbe sull'assintoto medesimo; e ciò è assurdo.

L'altra bisettrice essendo perpendicolare alla PM risulta normale alla curva.

Corollari. — 1°. *Il luogo dei punti simmetrici di un fuoco di una conica centrale rispetto alle tangenti della medesima è il circolo che ha per centro l'altro fuoco e per raggio l'asse focale della conica.*

Infatti H (fig. 17) simmetrico di F rispetto alla tangente PM ha da F' una distanza F'H = 2a.

Definizione. — *I due circoli aventi per centri i fuochi* F, F' *ed i raggi eguali a* 2a *si chiamano* **circoli direttori** *della conica.*

**28.** Definizione. — *Si chiama* **podaria** *o* **pedale** *di un punto rispetto ad una curva il luogo dei punti d'incontro delle tangenti alla curva colle perpendicolari ad esse rispettivamente condotte dal punto stesso.*

Teorema. — *La podaria di ciascuno dei fuochi di una conica centrale è il circolo che ha per diametro l'asse focale.*

Nella figura 17 il punto M, incontro della tangente PM colla perpendicolare ad essa condotta da F, è un punto della podaria considerata. Ma essendo O, M i punti di mezzo dei lati FF', FH del triangolo FF'H, risulta OM parallela ad OH ed eguale alla metà di essa, cioè $OM = a$. Dunque M appartiene al circolo avente per diametro AA'.

Inversamente, se M è un punto di questo circolo, H il simmetrico di F rispetto ad M, P il punto d'incontro di F'H colla perpendicolare in M ad FH, si vede facilmente che MP è tangente in P alla curva, dunque la podaria di F è il circolo di diametro AA'.

2°. *Il prodotto delle distanze dei fuochi di una conica centrale da una tangente variabile è costante.*

Siano M, M' le proiezioni dei fuochi F, F' sulla tangente in P (fig. 17); essi devono trovarsi sul circolo di diametro AA'.

Sia $M_1$ l'altro punto d'incontro di questo circolo colla F'M'. È facile vedere per la simmetria della figura rispetto ad O che MF è eguale a $F'M_1$, dunque

$$FM.F'M' = -F'M_1.F'M' = -F'A.F'A' = -(a-c)(a+c) = a^2 - c^2.$$

E siccome $c^2 = a^2 \mp b^2$, secondo che la curva è un'ellisse od una iperbole, risulta rispettivamente

$$FM.F'M' = \pm b^2.$$

**29.** Teorema. — *Le bisettrici degli angoli formati dalle rette condotte per un punto* P *di una parabola, l'una parallela all'asse, l'altra passante per il fuoco sono una tangente e l'altra normale in* P *alla parabola.*

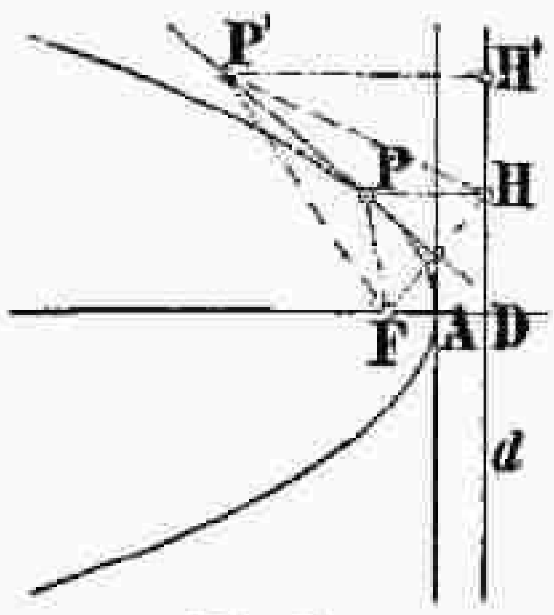


Fig. 18.

La parallela all'asse condotta dal punto P della parabola (fig. 18) incontra la direttrice $d$ in un punto H, tale che è PF = PH. Il triangolo FPH è dunque isoscele, e la bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}H$ del triangolo FPH è anche mediana ed altezza, perciò è il luogo dei punti equidistanti da F e da H.

Sia P' un altro punto della bisettrice suddetta, H' la sua proiezione su $d$; si ha

$$P'H' < P'H, \qquad P'H = P'F,$$

dunque

$$P'H' < P'F$$

il che prova che P' non appartiene alla conica.

La retta PH dunque incontra la parabola soltanto in P, e siccome non può essere parallela all'asse risulta (§ 7, Cor. 4) che è tangente alla parabola.

Corollario. — *Il luogo dei punti simmetrici del fuoco della parabola rispetto alle tangenti ad essa è la direttrice della medesima.*

**30.** Teorema. — *La podaria del fuoco di una parabola rispetto alla parabola stessa è la tangente nel vertice.*

Se M (fig. 18) è il punto d'incontro della tangente PP' colla FH ad essa perpendicolare, abbiamo già visto che divide per metà FH (§ 29). Essendo A, vertice della parabola, punto di mezzo di FD, risulta che AM deve essere parallela a DH, ossia perpendicolare a FD, ossia tangente in A alla parabola.

Inversamente, se M è un punto della tangente nel vertice, H il punto d'incontro di FM colla direttrice *d*, P il punto d'incontro della perpendicolare in M alla FH colla perpendicolare in H alla direttrice, si dimostra facilmente che MP è tangente in P alla curva.

**31.** I teoremi precedenti permettono di costruire le tangenti di una conica, definita per mezzo dei suoi fuochi e dell'asse maggiore, senza bisogno di costruire la conica.

Problema 1°. — *Condurre la tangente in un punto* P *dato di una conica.*

Se la conica è centrale, basterà congiungere P coi fuochi F, F'. La bisettrice dell'angolo $F\widehat{P}F'$ se la conica è iperbole, o quella dell'angolo conseguente a $F\widehat{P}F'$, se la conica è ellisse, è la tangente richiesta (§ 27, Teor.).

Se la conica è una parabola si conduca da P la perpendicolare PH alla direttrice e il segmento PF, essendo F il fuoco. La bisettrice dell'angolo $H\widehat{P}F$ è la tangente richiesta (§ 29, Teor.).

Problema 2°. — *Condurre per un punto le tangenti ad una conica.*

1°. Siano F, F' i fuochi, AA' l'asse di un'ellisse o di un'iperbole, P un punto qualunque del piano (fig. 19 e 20).

Se PH è una delle tangenti richieste, M il piede della perpendicolare ad essa condotta dal fuoco F, il punto M deve trovarsi sul circolo di diametro AA' (§ 28, Teor.) e su quello di diametro FP, essendo $P\widehat{M}F$ retto.

Ciò premesso, apparisce chiaro che le tangenti richieste si possono trovare colle costruzioni seguenti.

Si costruisce il circolo di diametro AA' e quello di diametro FP, i quali potranno incontrarsi al più in due punti M, M'; le rette PM, PM' sono le rette richieste.

Per avere anche i punti di contatto si procede così. Sia N il simmetrico di F rispetto ad M, ed H l'intersezione di PM con F′N; H è il punto di contatto di PM.

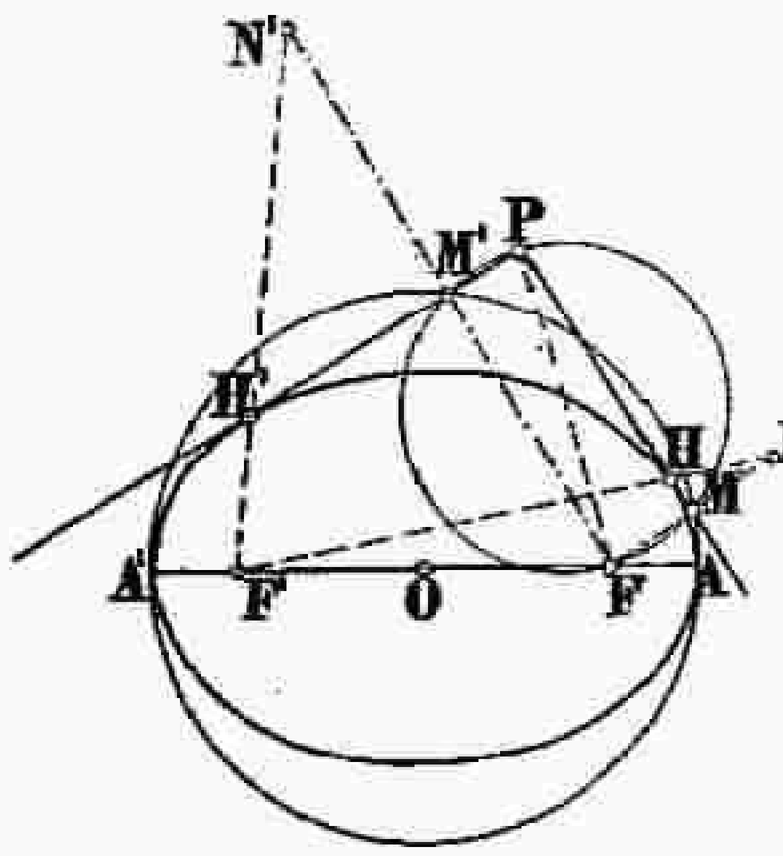



Fig. 19.

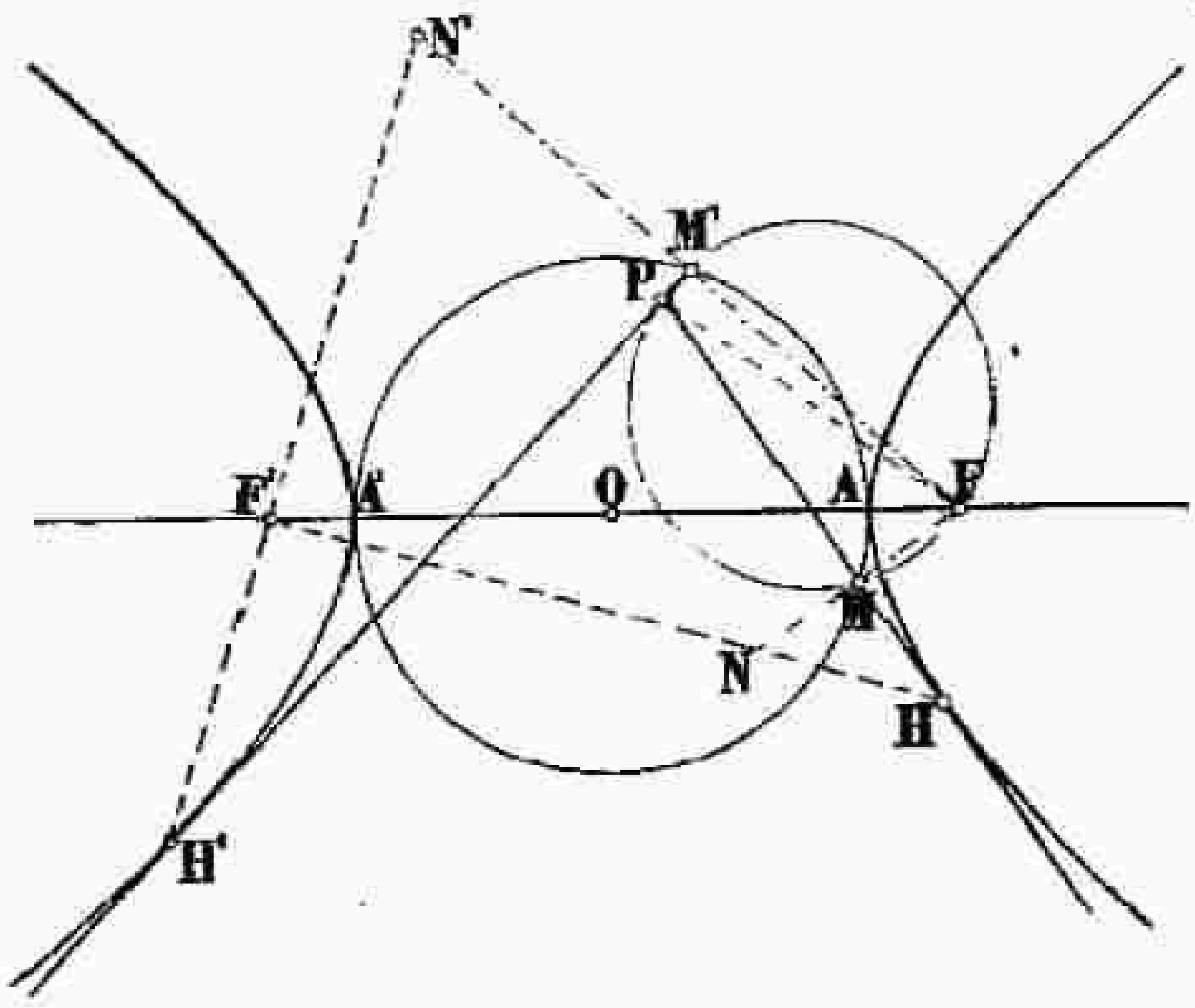



Fig. 20.

Infatti essendo O, M i punti medii di F′F e NF, risulta OM eguale alla metà di NF′, e quindi essendo $OM = a$, risulta

$$F'N = 2a;$$

si ha poi $HN = HF$, e quindi

$$F'H + HF = 2a,$$

oppure

$$F'H - HF = 2a,$$

secondo che la curva è ellisse o iperbole, e HM è bisettrice dell'angolo $F\widehat{H}N$, cioè H è un punto dell'ellisse e HM la tangente in esso.

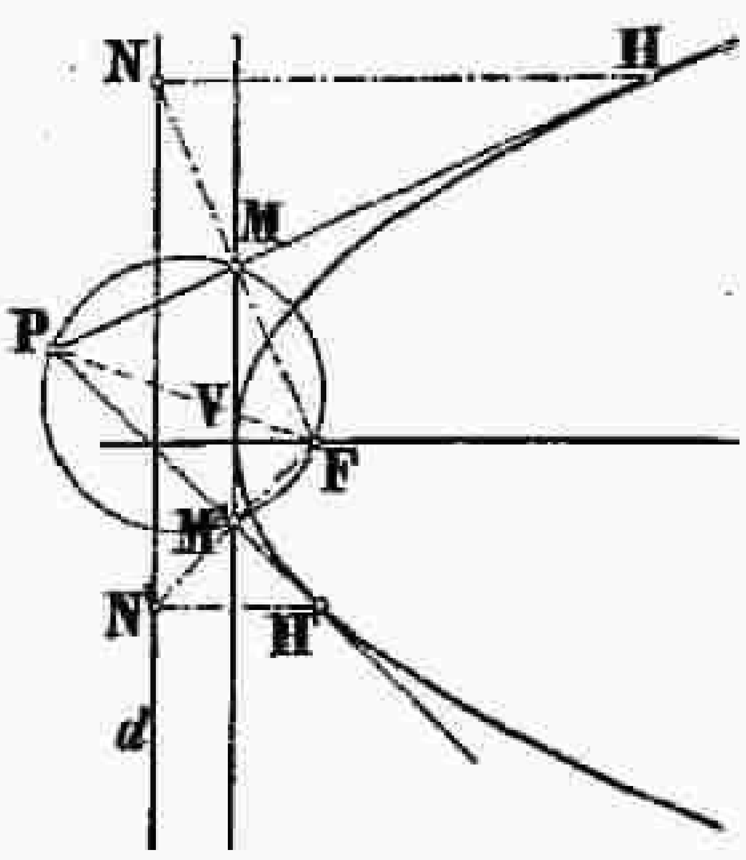



Fig. 21.

Lo stesso dicasi della PM′.

2º. Siano F, V, *d* il fuoco, il vertice e la direttrice di una parabola, P un punto qualunque del piano (fig. 21).

Se PH è una tangente condotta da P alla curva, M il piede della perpendicolare condotta ad essa dal fuoco F; il punto M deve trovarsi sulla tangente in V, che è la podaria del fuoco (§ 30, Teor.), e sul circolo di diametro PF.

Ciò posto, apparisce manifesto che le tangenti richieste si possono ottenere descrivendo il circolo di diametro PF e cercando i punti d'incontro M, M', se esistono, colla parallela alla direttrice $d$ condotta per V. Le rette PM, PM' sono le tangenti richieste. Se N, N' sono i punti d'incontro di $d$ colle FM, FM', e H, H' i punti d'incontro delle rette PM, PM' colle parallele per N, N' all'asse, H, H' sono i punti di contatto delle tangenti suddette.

Infatti, essendo M il punto medio di FN e PM perpendicolare ad FN in M, si ha $HF = HN$; cioè H appartiene alla parabola; e HM è bisettrice dell'angolo $\widehat{FHN}$, cioè (§ 29) è tangente alla parabola.

Lo stesso dicasi della PM'.

Problema 3°. — *Tracciare le tangenti parallele ad una data direzione.*

1°. Se la conica è centrale (fig. 22 e 23), per un fuoco F

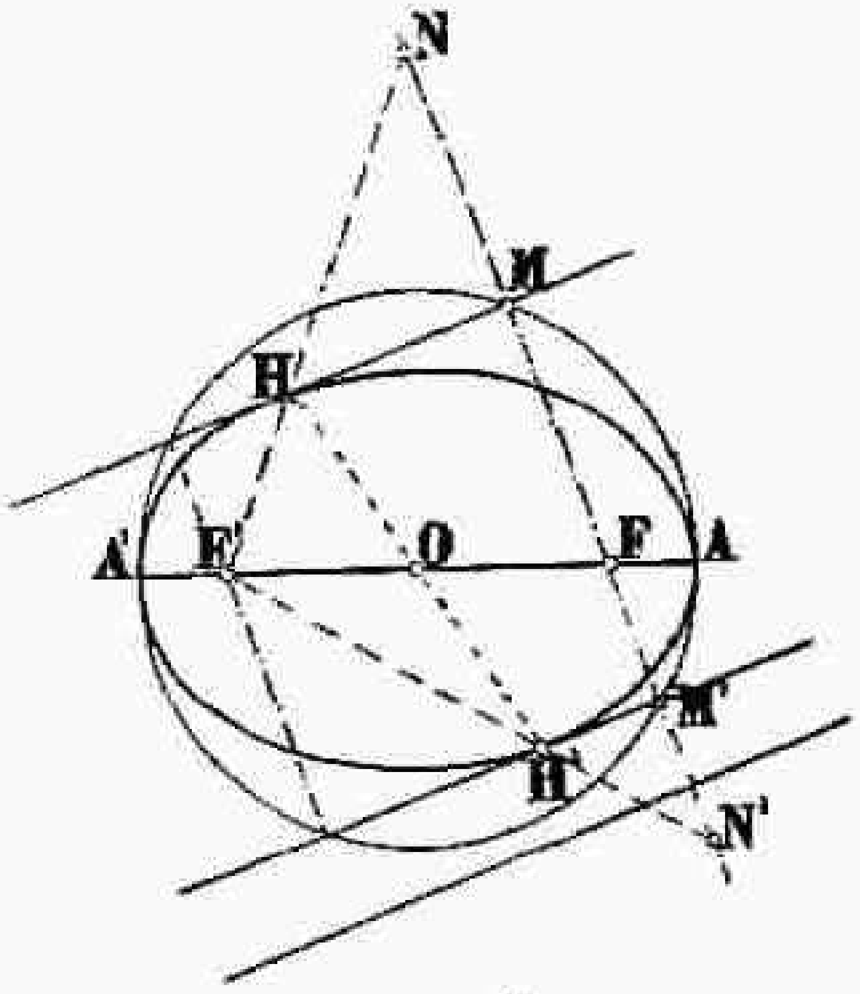



Fig. 22.

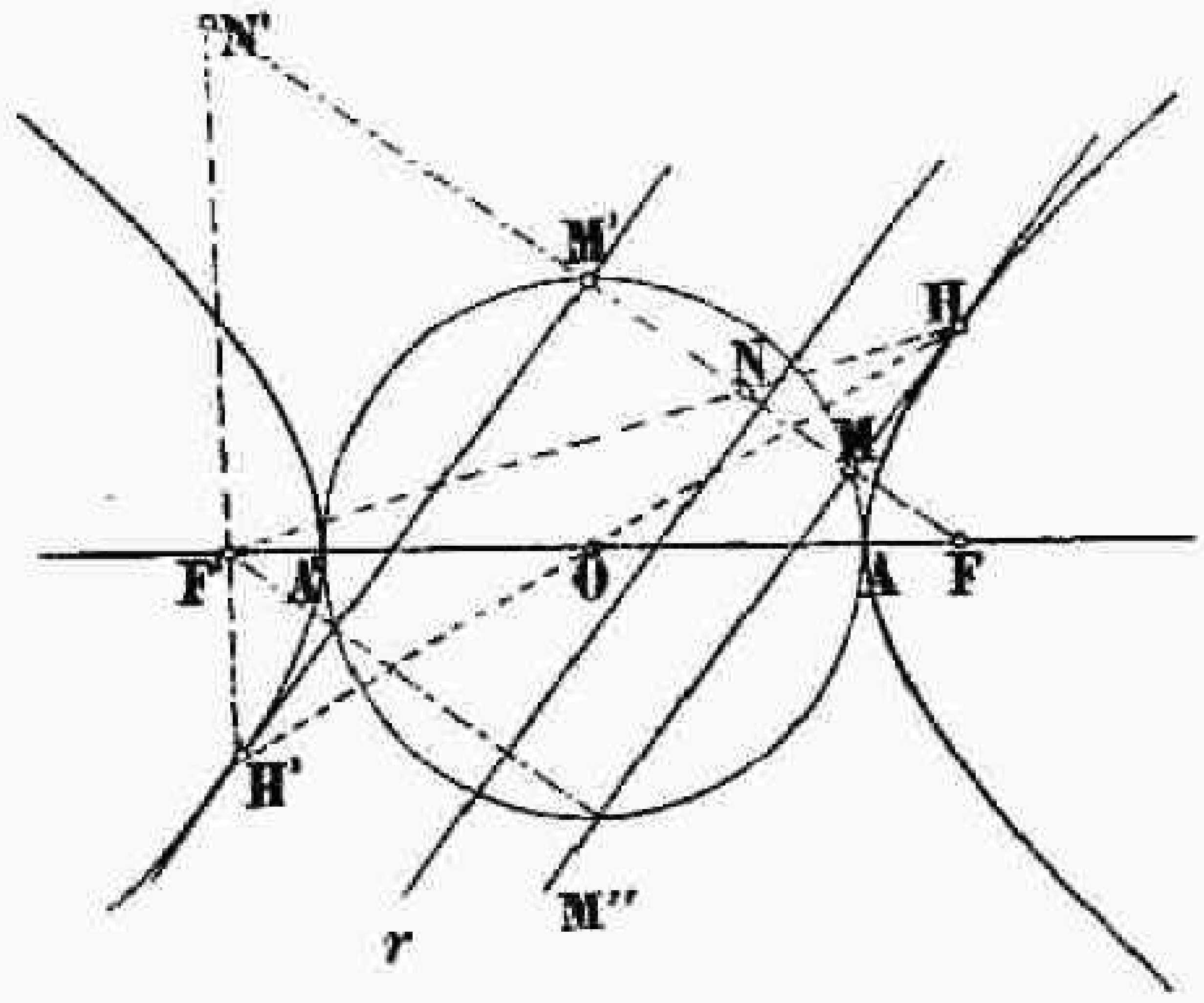



Fig. 23.

si conduca la perpendicolare alla data retta $r$; se M, M' sono i punti d'incontro di quella retta col circolo di diametro AA' le rette condotte per M, M' parallele ad $r$ sono le tangenti richieste. Se N, N' sono i simmetrici di F rispetto a quelle rette, le F'N, F'N' tagliano le medesime nei rispettivi punti di contatto.

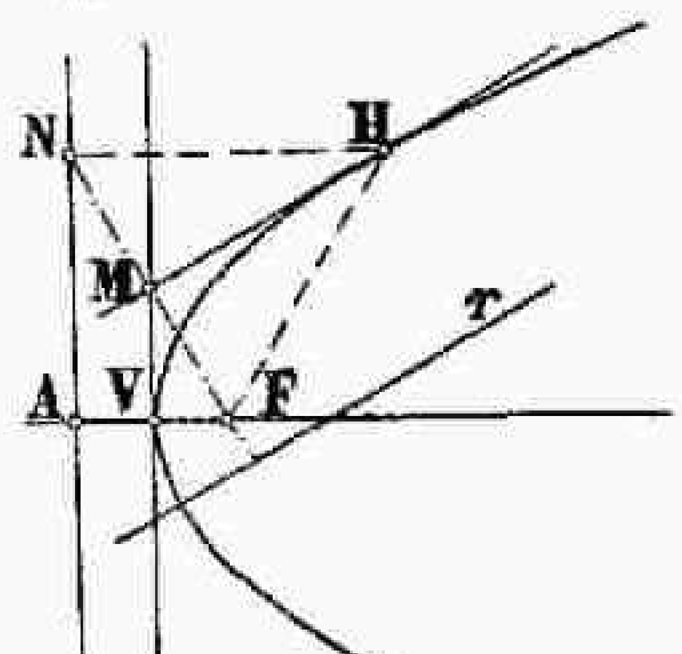



Fig. 24.

2°. Se la curva è una parabola (fig. 24), si conduca per il fuoco F la perpendicolare alla data retta $r$, e siano M, N punti d'incontro di essa con la tangente nel vertice V con la direttrice. La parallela ad $r$ condotta per M è la tangente richiesta, ed il suo punto di contatto è l'incontro della medesima colla parallela all'asse per N.

Tutto ciò si dimostra come nel problema precedente.

È opportuno osservare che da queste costruzioni apparisce che:

1° nel caso dell'ellisse si hanno sempre due tangenti parallele alla $r$;

2° nel caso dell'iperbole si hanno due soluzioni purchè l'angolo acuto formato dalla $r$ coll'asse sia maggiore del complemento di quello formato dalle tangenti condotte da F al circolo di diametro AA′ con l'asse; si ha una soluzione se gli angoli suddetti sono eguali;

3° se la curva è una parabola si ha sempre un'unica soluzione, eccettuato il caso in cui la $r$ sia parallela all'asse.

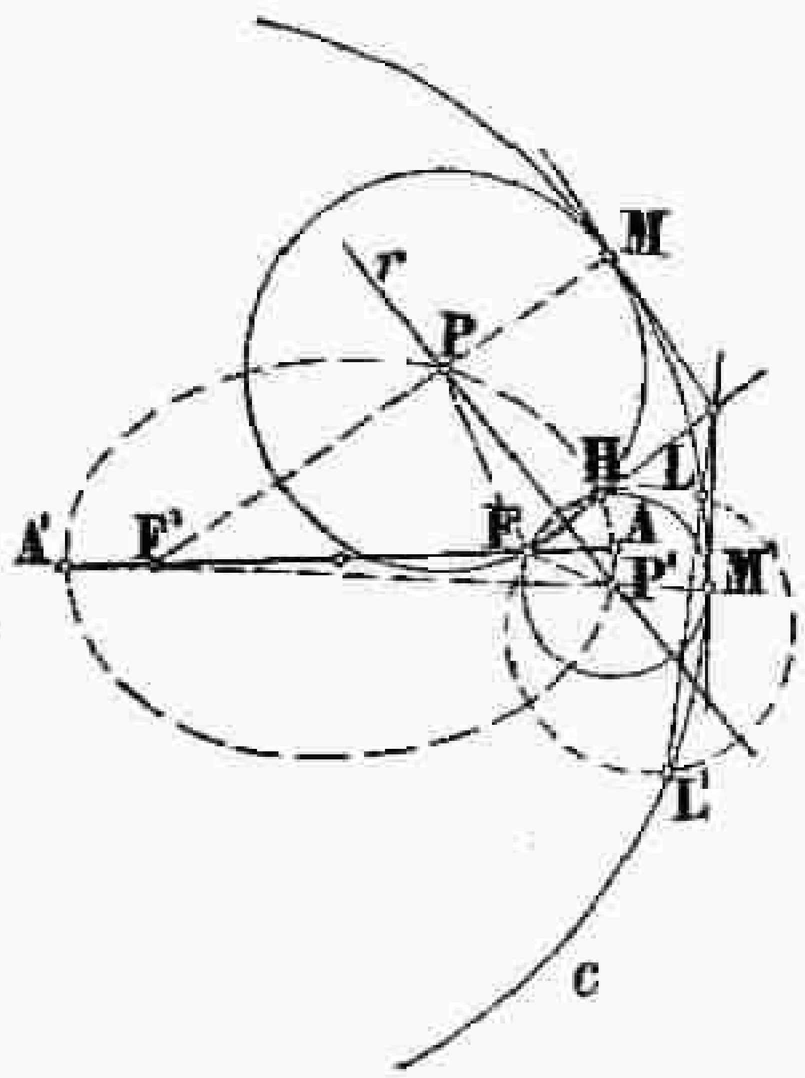


Fig. 25.

**32.** Problema. — *Data una conica per mezzo dei suoi fuochi e dei vertici sull'asse principale, determinare i punti nei quali è incontrata da una retta data.*

1°. Sieno F, F′ i fuochi, AA′ l'asse principale di una conica centrale (figure 25, 26), $c$ il circolo direttore che ha per centro uno dei fuochi, per es. F′, e per raggio $2a = AA'$.

Il circolo che ha per centro un punto P della curva e che passa per l'altro fuoco è tangente al circolo $c$, internamente o

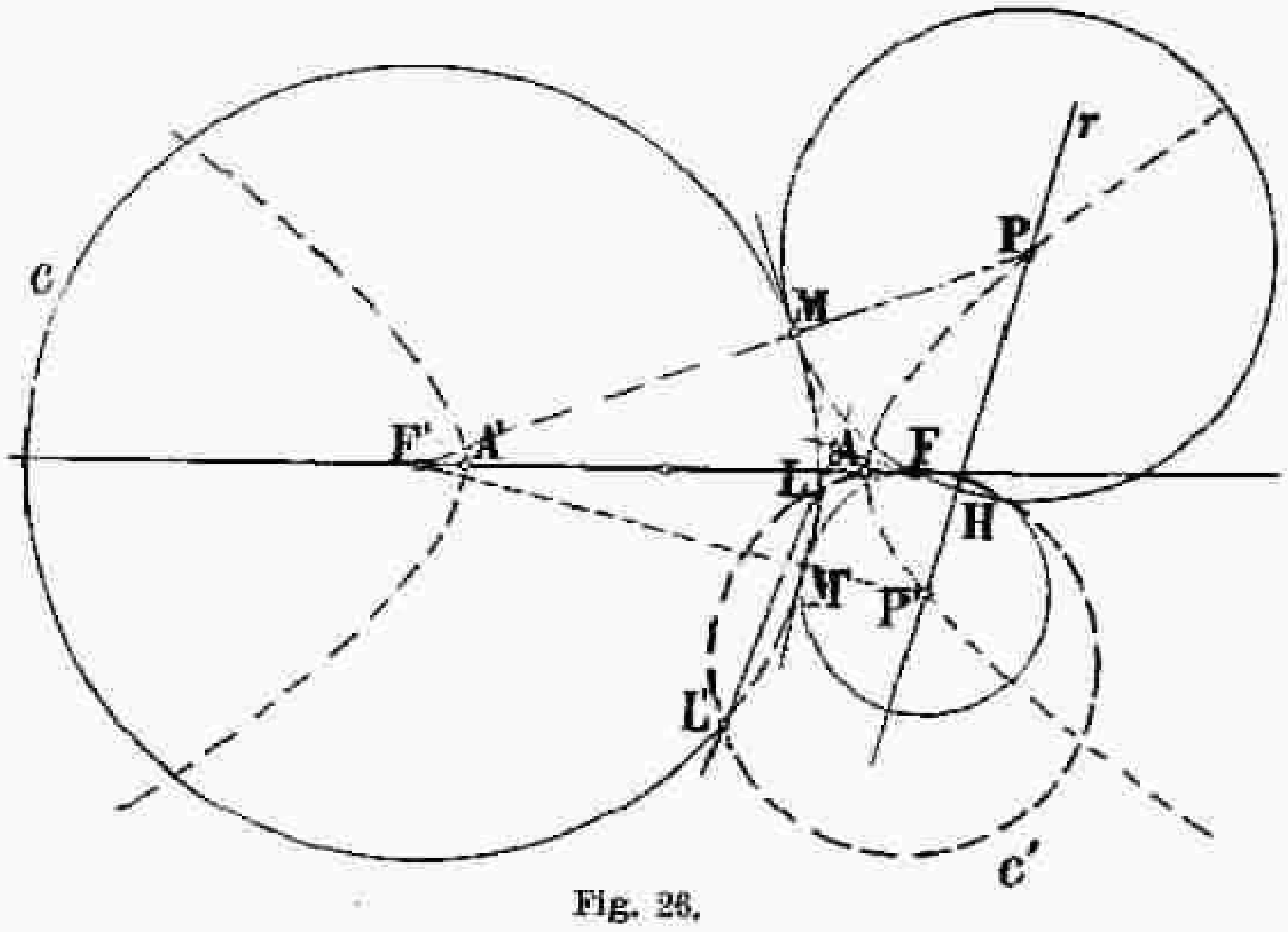


Fig. 26.

esternamente, secondo che la curva è ellisse o iperbole. Infatti essendo la somma (o la differenza) di PF e PF′ eguale a $2a$, la distanza PF′ dei centri di questi due circoli è eguale alla differenza o alla somma dei raggi rispettivamente.

Ciò premesso, è chiaro che per trovare i punti d'incontro di una retta data $r$ con la conica avente F, F' per fuochi e AA' per asse, basterà cercare i punti di questa retta, che sono centri di circoli passanti per F e tangenti a $c$.

Per risolvere questo problema si descriva un circolo $c'$ che abbia il suo centro in un punto scelto arbitrariamente sulla $r$ e che tagli $c$ in due punti L, L'. La retta LL' è l'asse radicale dei circoli $c$, $c'$, la perpendicolare ad $r$ condotta per F, ossia la retta che congiunge F col suo simmetrico H rispetto ad $r$, è l'asse radicale di $c'$ e del circolo che cerchiamo. Il punto d'incontro di questi assi radicali è il centro radicale di $c$, $c'$ e del circolo incognito, perciò l'asse radicale di questo circolo è la tangente condotta dal punto suddetto al circolo $c$.

Se il centro radicale è esterno a $c$ potremo condurre due tangenti ad esso, e le rette che uniscono i punti di contatto con F' tagliano $r$ nei soli punti P, P' che soddisfano le condizioni del problema.

Se il centro radicale è su $c$ si ha una sola soluzione, ossia $r$ è tangente alla curva; se è esterno a $c$ non si hanno soluzioni, cioè $r$ è esterna alla conica.

2°. Sia F il fuoco (fig. 27), MM' la direttrice di una parabola, P un punto della curva; essendo P equidistante dal fuoco e dalla direttrice, il circolo che ha per centro P e passa per il fuoco è tangente alla direttrice.

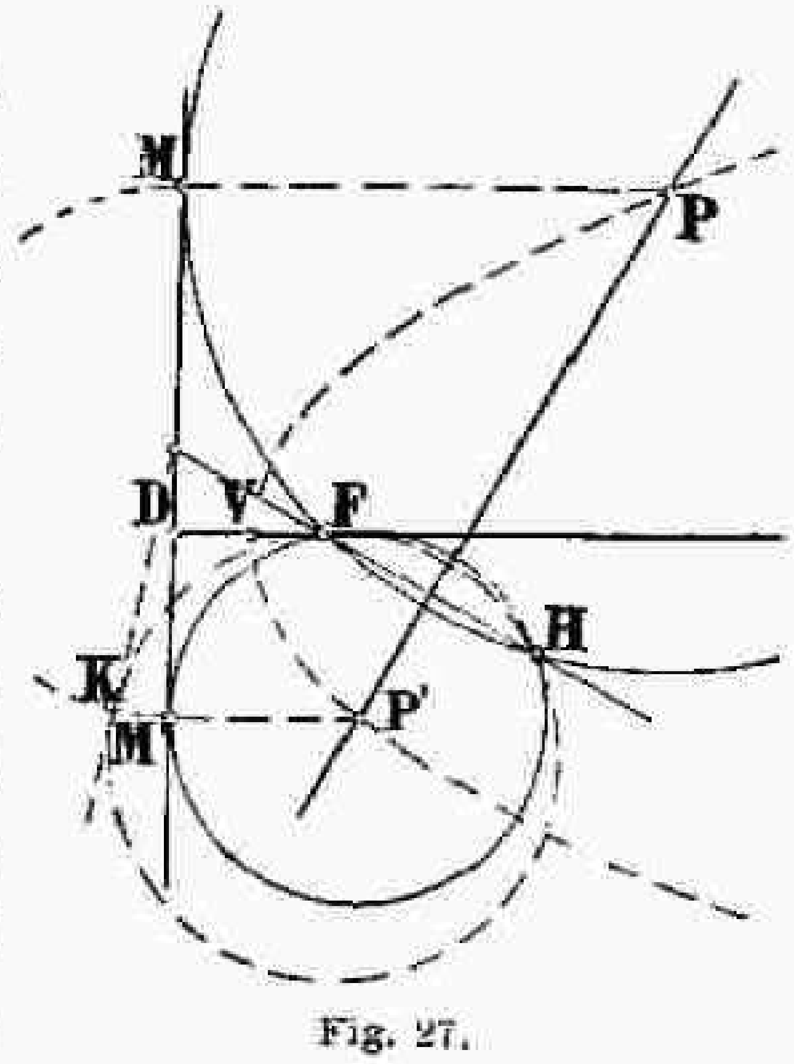


Fig. 27.

Ciò premesso, è chiaro che la ricerca dei punti d'incontro di una retta $r$ con la parabola definita dal suo fuoco e dalla sua direttrice equivale all'altro di trovare i punti della $r$ che sono centri di circoli passanti per F e tangenti alla direttrice.

Per risolvere questo problema si descriva un circolo arbitrario $c'$, che abbia il centro sulla $r$, e passi per F (e quindi anche per il simmetrico H di F rispetto ad $r$).

Per il punto d'incontro D della retta FH colla direttrice, si conduca una tangente DK a $c'$ e sulla direttrice si prenda, dalle due parti di D, DM e DM' eguali a DK; le perpendicolari alla direttrice in M ed M' incontrano la $r$ nei punti cercati. Infatti, essendo $DM^2 = DM'^2 = DF \cdot DH$, i circoli che passano per F, H, M oppure per F, H, M' sono tangenti in M, M' alla direttrice. Secondo che D è esterno o interno al circolo $c'$, si hanno due soluzioni o nessuna.

**33.** Teorema. — *Le due tangenti condotte da un punto ad un'ellisse o ad una iperbole, fanno angoli rispettivamente eguali colle rette che congiungono quel punto ai fuochi.*

Siano PH, PH' (fig. 19, 20) le due tangenti condotte da P alla ellisse, ed N, $N_1$ i simmetrici di F e F' rispetto a queste tangenti rispettivamente. Le rette F'N, $FN_1$ passano per H, H' rispettivamente, ed essendo:

$$F'N = FN_1 = 2a, \qquad PF = PN, \qquad PN_1 = PF',$$

i due triangoli $PFN_1$ e PNF' sono eguali; ne segue

$$N\widehat{P}F' = F\widehat{P}N_1,$$

e quindi anche

$$N\widehat{P}F = F'\widehat{P}N_1,$$

ed infine

$$H\widehat{P}F = H'\widehat{P}F',$$

essendo questi angoli la metà dei due precedenti.

Corollari. — 1°. *La retta che congiunge il fuoco* F *con un punto* P *divide per metà uno degli angoli formati dalle rette che congiungono* F *coi punti di contatto* H, H' *delle tangenti condotte da* P.

Dall'eguaglianza dei triangoli $PFN_1$, PNF', sopra considerati, resulta anche

$$P\widehat{N}F' = P\widehat{F}N_1, \qquad P\widehat{N}H = P\widehat{F}H;$$

nel caso dell'ellisse è

$$P\widehat{N}F' = P\widehat{N}H,$$

e quindi

$$P\widehat{F}H = P\widehat{F}H'$$

cioè FP è la bisettrice dell'angolo $H\widehat{F}H'$; nel caso dell'iperbole $P\widehat{N}F'$ è eguale o supplementare di $P\widehat{N}H$; nel primo caso si ripete il ragionamento precedente; nel secondo $P\widehat{F}H$, $P\widehat{F}H'$ sono supplementari, dal che risulta che PF è la bisettrice dell'angolo conseguente a $H\widehat{F}H'$.

2°. *Il luogo dei vertici degli angoli retti, i cui lati sono tangenti ad una ellisse o ad un'iperbole è un circolo concentrico alla curva di raggio* $r = \sqrt{a^2 \pm b^2}$.

Se l'angolo $H'\widehat{P}H$ è retto, deve esser retto anche l'angolo $F'\widehat{P}N$, per il teorema precedente, ed essendo $F'N = 2a$, si ha

$$\overline{PF'}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 4a^2.$$

Ma d'altra parte essendo PO la mediana del triangolo PFF', si ha pure
$$\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = 2\,\overline{PO}^2 + 2\overline{OF}^2.$$
Confrontando queste eguaglianze si deduce
$$\overline{PO}^2 = 2a^2 - c^2,$$
ossia nel caso dell'ellisse
$$\overline{PO}^2 = 2a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$$
e nel caso dell'iperbole
$$\overline{PO}^2 = 2a^2 - (a^2 + b^2) = a^2 - b^2.$$

3°. *Il segmento di tangente mobile ad una ellisse o ad una iperbole compresa fra due tangenti fisse è visto sotto angolo costante da ciascuno dei fuochi.*

Siano $t_1$, $t_2$ due tangenti fisse nei punti $H_1$, $H_2$ e $t$ la tangente in un punto variabile H e siano $P_1$, $P_2$ i punti d'incontro di $t$ con $t_1$, $t_2$ rispettivamente, e P il punto $t_1t_2$.

Nel caso dell'ellisse l'angolo $P_1FP_2$ è la somma o differenza degli angoli $P_1\widehat{F}H$, $H\widehat{F}P_2$ che sono le metà degli angoli
$$H_1\widehat{F}H\,,\ H\widehat{F}H_2\,;$$
perciò l'angolo $P_1\widehat{F}P_2$ è la metà dell'angolo costante $H_1\widehat{F}H_2$, cioè è eguale agli angoli $H_1\widehat{F}P$ o $P\widehat{F}H_2$.

Un ragionamento simile può ripetersi per l'iperbole.

4°. *Il segmento di una tangente variabile ad una ellisse o ad una iperbole compreso fra le tangenti nei due estremi di una corda passante per un fuoco (in particolare fra le tangenti dei vertici principali) è visto sotto angolo retto da quel fuoco.*

**34.** Teorema. — *Le due tangenti condotte da un punto* P *ad una parabola fanno angoli rispettivamente eguali colla retta che congiunge* P *col fuoco e colla parallela per* P *all'asse* (fig. 21).

Essendo PH, PH' le tangenti condotte da P alla parabola, H, H' i rispettivi punti di contatto, N, N' i piedi delle perpendicolari condotte da H, H' alla direttrice, M, M' i punti d'incontro delle FN, FN' colla tangente nel vertice, si sa che i punti P, M, F, M' stanno su di un circolo e si ha $M'\widehat{P}F = M'\widehat{M}F$, inoltre gli angoli $M'\widehat{M}F$, $M\widehat{H}N$, avendo i lati rispettivamente perpendicolari sono eguali, perciò $H'\widehat{P}F$ è eguale all'angolo $N\widehat{H}M$ ed anche a quello che PH fa con la parallela per P all'asse.

Corollari. — 1°. *La retta che congiunge il fuoco* F *di una parabola con un punto* P *divide per metà l'angolo formato dalle rette* *che congiungono* F *coi punti di contatto delle tangenti condotte da* P *alla parabola.*

L'angolo $\widehat{HFM}$ complementare di $\widehat{FHM}$, o di $\widehat{MHN}$ è uguale a $\widehat{PFM'}$ che è complementare di $\widehat{FPM'}$, e similmente $\widehat{H'FM'}$ è uguale a $\widehat{MFP}$; perciò essendo

$$\widehat{HFP} = \widehat{HFM} + \widehat{MFP}, \qquad \widehat{H'FP} = \widehat{M'FP} + \widehat{H'FM'},$$

risulta

$$\widehat{HFP} = \widehat{PFH'}.$$

2°. *Il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati sono tangenti ad una parabola è la direttrice.*

Se l'angolo $\widehat{HPH'}$ è retto, essendo pure retti gli angoli $\widehat{FMP}$, $\widehat{FM'P}$, il quadrangolo FMPF' deve essere un rettangolo; il suo centro deve essere sulla MM' ed il vertice P deve essere dalla parte opposta di F ed avere da MM' una distanza eguale a quella di F, cioè deve trovarsi sulla direttrice.

3°. *Il segmento di una tangente mobile ad una parabola compreso fra due tangenti fisse è visto dal fuoco sotto un angolo costante eguale all'angolo delle tangenti fisse.*

4°. *Il segmento di una tangente variabile ad una parabola compreso fra due tangenti fisse negli estremi di una corda passante per il fuoco, è vista sotto un angolo retto dal fuoco.*

## Alcune proprietà particolari dell'ellisse.

**35.** Nel § 14 abbiamo visto che ogni conica si può in infiniti modi riguardare come sezione piana di un cono rotondo; il luogo dei vertici di questi coni è la conica focale di quella data.

In particolare, essendo data una ellisse, la sua conica focale è una iperbole, e immaginando che un punto vada a distanza infinita su questa, il cono proiettante ha per limite il cilindro proiettante la data ellisse, e che ha le generatrici parallele all'uno o all'altro degli assintoti della iperbole.

Se dunque per il centro O dell'ellisse si conduce un piano perpendicolare ad un assintoto dell'iperbole focale, esso piano taglia il cilindro colle generatrici parallele all'assintoto stesso secondo un circolo che può considerarsi come proiezione ortogonale della data ellisse.

Siccome segmenti eguali e paralleli hanno sopra un piano qualunque proiezioni eguali e parallele, segue che due diametri coniugati dell'ellisse hanno per proiezioni due diametri coniugati dal circolo cioè due diametri perpendicolari di questo.

Ne segue che il diametro comune all'ellisse e al circolo è l'asse minore dell'ellisse perchè divide per metà tutte le corde ad esso perpendicolari.

Sia AA' (fig. 28) quest'asse minore, $B_1B_1'$ l'asse maggiore, $PM_1$

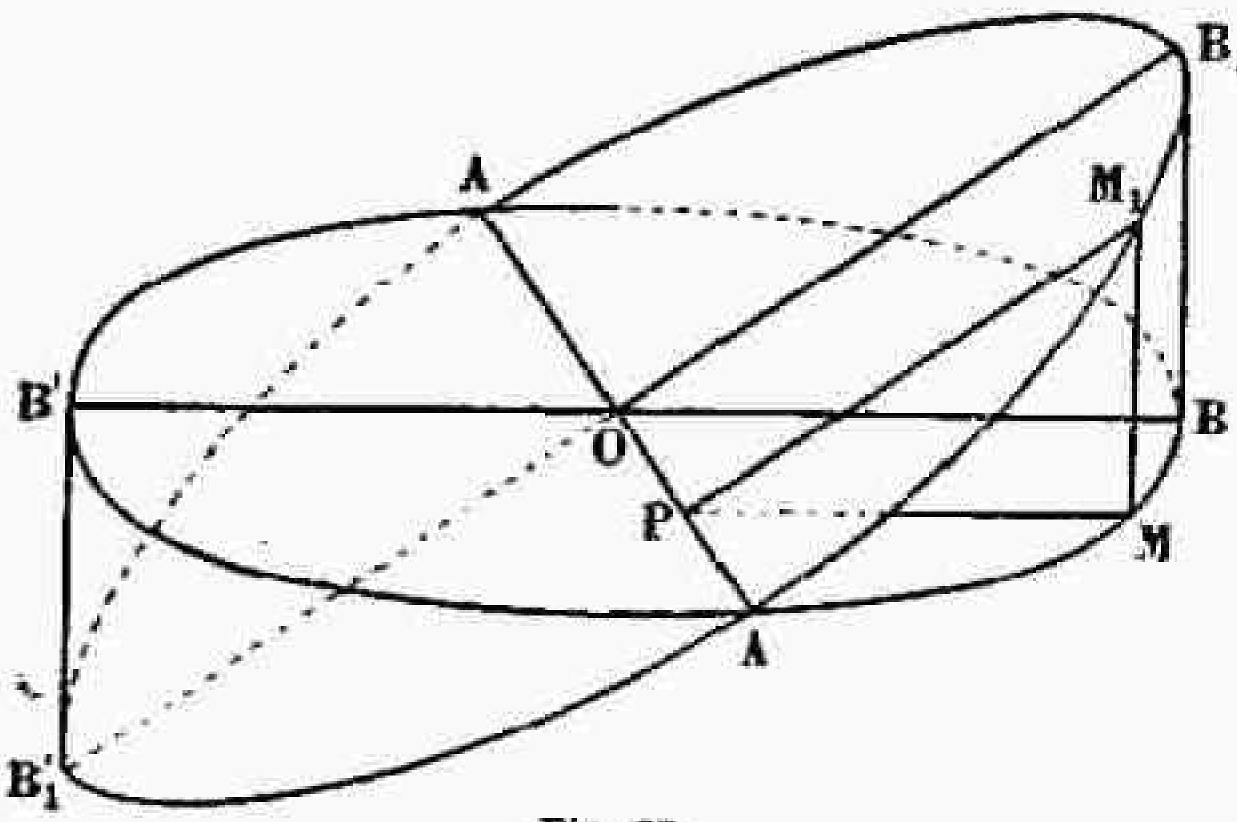



Fig. 28.

una semiretta parallela ad $OB_1$, e OB, PM le proiezioni di $OB_1'$ e $PM_1$.

Dai triangoli simili $PMM_1$, $OBB_1$ si deduce

$$\frac{PM}{PM_1} = \frac{b}{a}.$$

Se immaginiamo ribaltato il piano della ellisse su quello del circolo, questa proporzione rimane conservata, e si deduce la se-

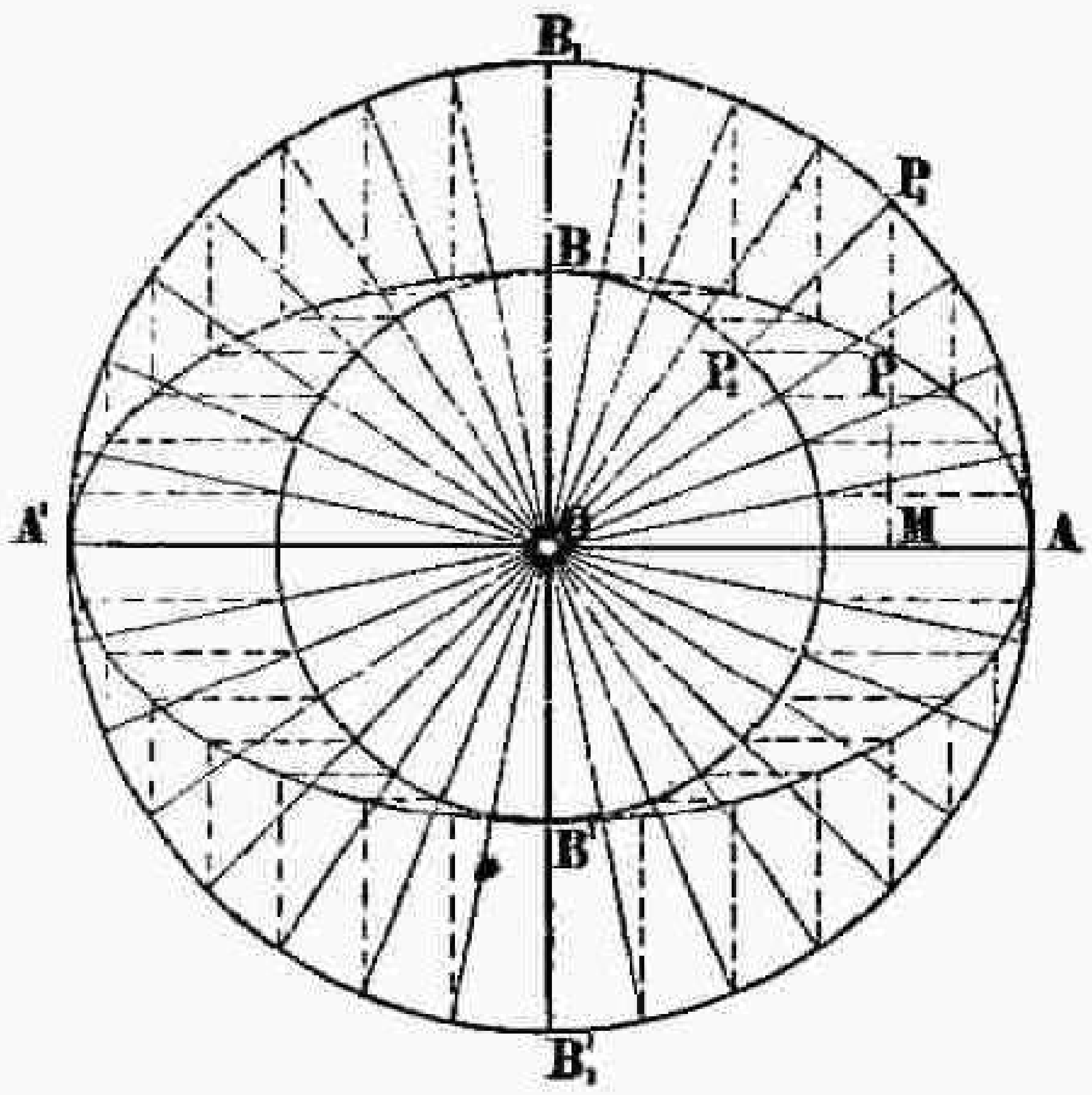



Fig. 29.

guente costruzione per punti della ellisse, dati gli assi della medesima (fig. 29).

Descritti due circoli aventi per diametri gli assi AA′, BB dell'ellisse, si conduca per O una semiretta che incontri i due circoli in $P_2$ e $P_1$. Le parallele per $P_2$ ad AA′ e per $P_1$ a BB′ s'incontrano in un punto P dell'ellisse, perchè, detto N il punto d'incontro di $PP_2$ con BB′ si ha

$$\frac{NP_2}{NP}=\frac{OP_2}{OP_1}=\frac{b}{a}.$$

Ripetendo questa costruzione si possono ottenere con gran rapidità quanti punti si voglia dalla ellisse.

**36.** Teorema. — *L'ellisse si può riguardare come proiezione ortogonale di un circolo.*

Dalla costruzione precedente si ricava

$$\frac{MP}{MP_1}=\frac{b}{a},$$

ed egual proporzione si ottiene per la curva proiezione di un circolo di diametro $AA'=2a$ su di un piano che faccia con esso un angolo eguale a quello del triangolo rettangolo che ha $a$ per ipotenusa e $b$ per cateto.

Corollari. — 1°. *La perpendicolare condotta da un punto* P *dell'ellisse sull'asse maggiore lo divide in due parti* AM, MA′ *per le quali si ha*

$$\frac{MP^2}{AM\,.\,MA'}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Infatti si ha

$$\frac{MP}{MP_1}=\frac{b}{a},$$
$$\overline{MP_1}^2=AM\,.\,MA',$$

e da queste si deduce la proporzione suddetta.

2°. *La perpendicolare condotta da un punto* P *di un'ellisse sull'asse minore la divide in due parti* BN, NB′ *per le quali si ha*

$$\frac{\overline{NP}^2}{BN\,.\,NB'}=\frac{a^2}{b^2}.$$

**37.** Il Corollario 1° del § precedente si può anche dimostrare per altra via, e può essere esteso anche all'iperbole, e con qualche modificazione anche alla parabola, facendo uso del cono, di cui la curva è sezione, nel modo seguente.

TEOREMA 1°. — *Se* P *è un punto di un'ellisse o di un'iperbole, della quale* A, A' *sono i vertici,* H *la proiezione di* P *sull'asse principale, si ha*

$$\frac{\overline{PH}^2}{AH \,.\, HA'} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Per i punti P, A, A' si conducano tre piani perpendicolari all'asse della superficie conica, i quali taglino le generatrici $r$, $r'$ contenute nel piano VAA' nei punti K, K'; A, M; L, A'.

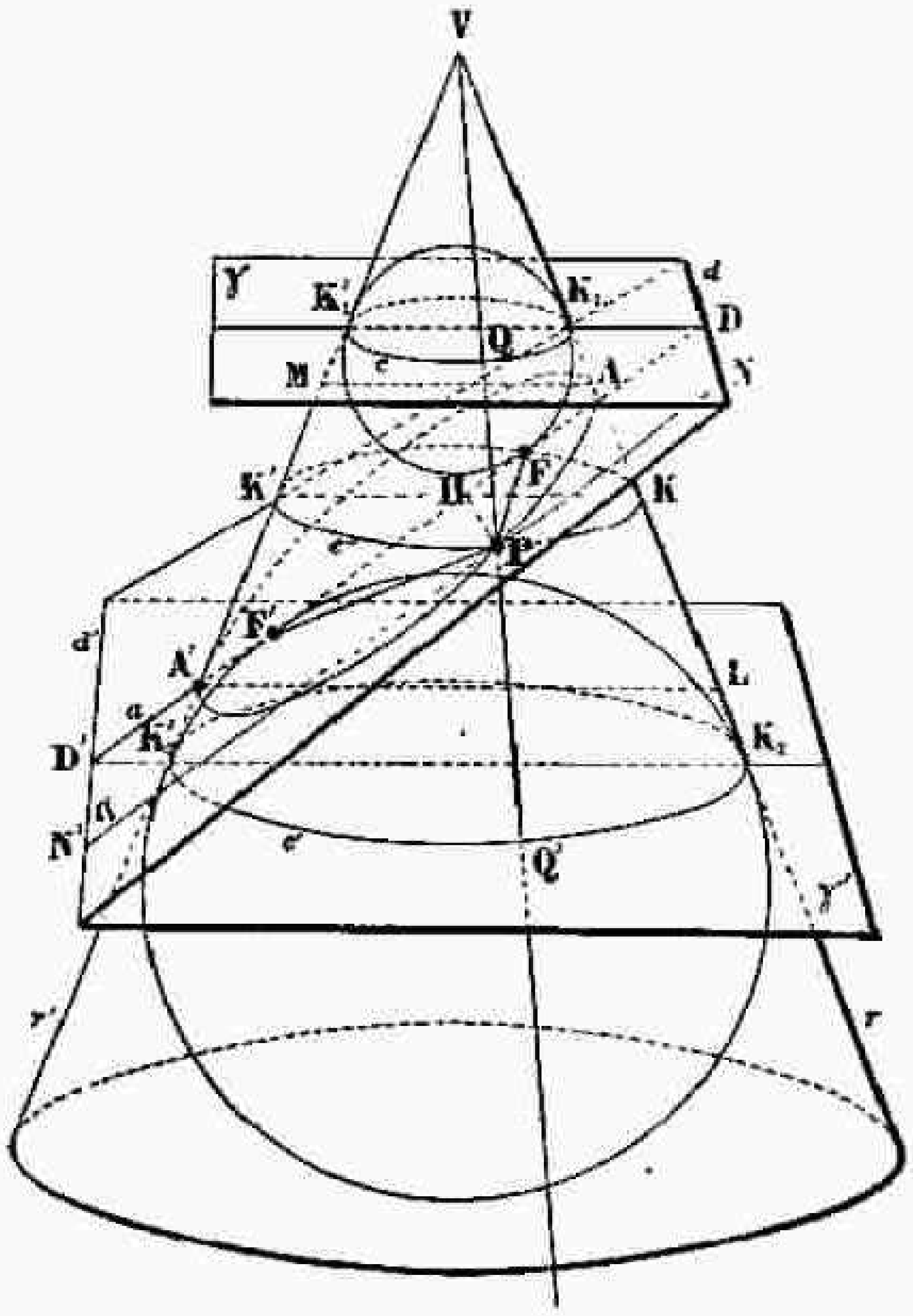



Fig. 30.

Si ha

$$\overline{HP}^2 = KH \,.\, HK'$$

$$KH : AH = LA' : AA', \qquad HK' : HA' = AM : AA'.$$

Perciò

$$\overline{HP}^2 = \frac{AH \,.\, HA' \,.\, LA' \,.\, AM}{AA'^2},$$

$$\frac{\overline{HP}^2}{AH \,.\, HA'} = \frac{LA' \,.\, AM}{AA'^2}. \tag{1}$$

Nel triangolo AA'L è $AA' = 2a$, $AL = 2c$. Da esso, ponendo $A'L = 2\delta$, $AM = 2\delta'$ ed osservando che la proiezione di AL su A'L è $(\delta - \delta')$, si ricava

$$\overline{AA'}^2 = \overline{AL}^2 + \overline{A'L}^2 - 2\,A'L(\delta - \delta'),$$

ovvero

$$4a^2 = 4c^2 + 4\delta^2 - 4\delta(\delta - \delta'),\quad a^2 = c^2 + \delta\delta',\quad \delta\delta' = (a^2 - c^2).$$

Perciò dalla (1) si deduce

$$\frac{\overline{\mathrm{HP}}^2}{\mathrm{AH}\,.\,\mathrm{HA'}} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}.$$

Teorema 2°. — *Se* p *è la misura della distanza dal fuoco di una parabola della direttrice,* P *un punto qualunque della curva,* H *la proiezione di* P *sull'asse della medesima,* A *il vertice, si ha*

$$\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\mathrm{AH}} = 2p.$$

Essendo $r$ la generatrice del cono che passa per A ed $r'$ la sua simmetrica rispetto all'asse, siano K, K' i punti d'incontro di $r$, $r'$ col piano condotto per P perpendicolare all'asse del cono, e B il simmetrico del vertice A rispetto all'asse. Si ha

$$\overline{\mathrm{PH}}^2 = \mathrm{KH}\,.\,\mathrm{HK'}$$

$$\mathrm{HK'} = \mathrm{AB}\,,\qquad \mathrm{HK} : \mathrm{AH} = 2\mathrm{AF} : \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}$$

ossia

$$\mathrm{HK} : \mathrm{AH} = p : \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB},$$

$$\mathrm{HK} = \frac{2p}{\mathrm{AB}}\,.\,\mathrm{AH},\qquad \mathrm{HK}\,.\,\mathrm{HK'} = 2p\,.\,\mathrm{AH}$$

e quindi

$$\frac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\mathrm{AH}} = 2p.$$

**38.** La considerazione del circolo proiezione ortogonale dell'ellisse permette di risolvere con molta facilità vari problemi, come costruzioni di tangenti, ricerca dei punti d'incontro con una retta ecc. relativamente ad un'ellisse individuata dai suoi assi e non disegnata.

Per esempio, volendo tracciare le tangenti che passano da un punto $Q_1$ basterà cercare la proiezione Q di $Q_1$, condurre da Q le tangenti al circolo e poi cercare le rette di cui queste sono proiezioni; tutto ciò può farsi con costruzioni piane per mezzo del ribaltamento.

Agli stessi risultati si può giungere considerando il circolo di cui l'ellisse data è proiezione.

**39.** Teorema 3°. — *Se una retta* r *si muove in modo che due suoi punti* M, N *scorrano su due rette ortogonali* x, y, *ogni punto* P *della* r *percorre un'ellisse.*

Condotta per O, punto d'incontro delle $x$, $y$, la parallela ad $r$ e per P la parallela ad $y$, essendo P' il punto d'incontro di queste rette, si ha $OP' = NP$, ossia il luogo di P' è un circolo. Inoltre, essendo H il punto d'incontro di PP' con $x$, si ha

$$HP : HP' = b : a,$$

quindi il luogo di P è l'ellisse di semiassi $a$, $b$ sulle $x$, $y$.

Corollari. — 1°. *Se* OCM *è un triangolo isoscele, di cui il punto* O *è fisso ed è costante la lunghezza dei lati eguali, mentre il punto* M *si muove sulla retta* x, *il luogo di un punto* P *del lato* PM *è un'ellisse, di cui* x *è l'asse principale, essendo* $a = OC + CP$ *e* $b = OC - CP = PM$ *le lunghezze dei due semiassi.*

Infatti se N è il punto d'incontro della retta CM colla $y$ perpendicolare in O alla $x$, è facile vedere che, essendo $CM = CO$, è pure $CO = CN$, e quindi MN è un segmento di lunghezza costante i coni estremi scorrono sulle rette ortogonali $x$, $y$; perciò il luogo di P è l'ellisse del corollario precedente.

2°. *Se un triangolo* ABC *di forma invariabile si sposta in modo che due vertici* A, B *percorrano due rette* x, y, *il terzo vertice percorre un'ellisse.*

Infatti il circolo circoscritto ad OAB, essendo AB e $A\widehat{O}B$ costanti è di diametro costante. Se tale circolo s'imagina collegato con il triangolo e mobile con esso, il diametro MN che passa per C ha i suoi estremi su due rette fisse $Ox_1$, $Oy_1$ perchè gli archi AM, BN e quindi gli angoli $AOx_1$, $BOy_1$ sono costanti. Dunque C descrive la linea che si ottiene facendo scorrere M, N sulle $x_1$, $y_1$.

**40.** È manifesto che il teorema precedente ed il corollario primo dànno le tre costruzioni seguenti di un'ellisse della quale sono noti gli assi in grandezza e posizione.

1°. Si prenda un segmento $MN = a + b$ diviso da un punto P in due parti $MP = b$, $PN = a$.

Facendo scorrere questo segmento in modo che M, N percorrono due rette ortogonali $x$, $y$, il punto P descrive l'ellisse richiesta.

2°. Si prenda un segmento $M_1N_1 = a - b$ e sul suo prolungamento (dalla parte di $M_1$) un punto P tale che sia $M_1P = b$ e quindi $N_1P = a$.

Facendo scorrere il segmento in modo che $M_1$, $N_1$ percorrano le rette ortogonali $x$, $y$, il punto P descrive l'ellisse cercata.

3°. S'imaginino due aste OC, CM eguali articolate attorno ad O e C. Se M percorre una retta $x$ per O, un punto P di CM descrive un'ellisse. Basterà prendere $OC = CM = \frac{1}{2}(a + b)$, $PM = \frac{1}{2}(a - b)$ per avere l'ellisse cercata.

**41.** Problema. — *Dati due diametri coniugati di un'ellisse trovarne gli assi.*

Siano $MM'$, $NN'$ due diametri, coniugati dell'ellisse, dati in grandezza e posizione; da un estremo $M$ di uno di essi si conduca un segmento $MP$ perpendicolare ad $NN'$ ed eguale alla metà di esso $ON'$; indi si costruisca il circolo di diametro $OP$ e si congiunga $M$ col centro $C$ di questo circolo. Se $H$, $K$ sono i punti d'incontro di tale circolo con la $MC'$, le rette $OH$, $OK$ sono le rette degli assi, e $MK$, $MH$ sono rispettivamente le lunghezze $a = OA$, $b = OB$ delle metà dei medesimi.

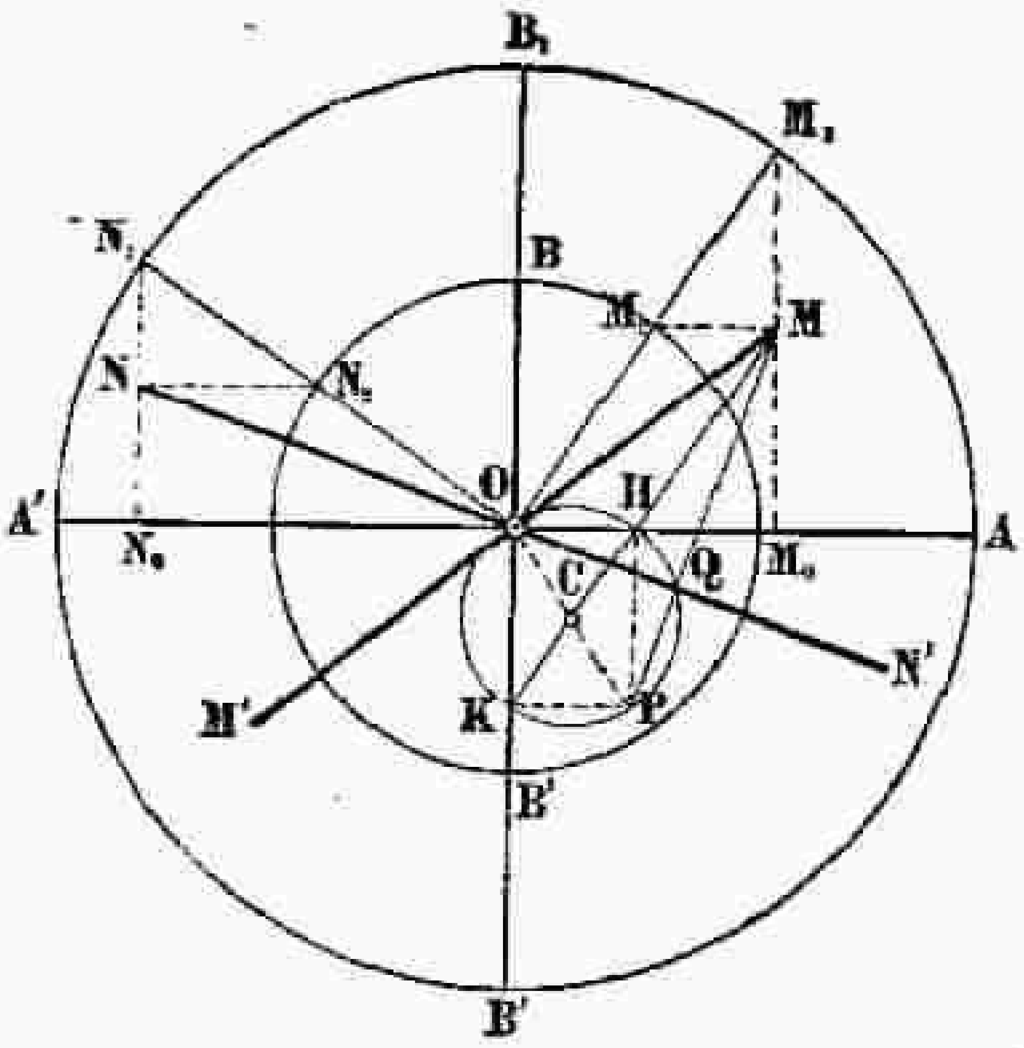


Fig. 31.

Infatti, condotte per $M$ le parallele ad $OH$ e $OK$ e per $O$ la parallela ad $MHK$, si ha $OM_2 = MH$, $OM_1 = MK$, come lati opposti di parallelogrammi, quindi $M_2$, $M_1$ appartengono ai due circoli di centro $O$ e di raggi $b = MH$, $a = MK$.

Similmente, condotte per $N$ le perpendicolari ad $OK$ ed $OH$ e per $O$ la perpendicolare ad $MK$, le coppie di triangoli $ONN_2$, $MPH$ e $ONN_1$, $MPK$ hanno gli angoli rispettivamente eguali, perchè hanno i lati perpendicolari, e perciò sono eguali, essendo anche per ipotesi $ON = MP$. Dunque $N_2$, $N_1$ sono sui circoli di raggi $b = MH$ e $a = MK$ rispettivamente. Inoltre le due rette $OM_1$, $ON_1$ sono perpendicolari, essendo la prima parallela e la seconda perpendicolare ad $MK$.

Ora se costruiamo l'ellisse che ha per assi $AA'$, $BB'$ per mezzo della costruzione indicata nel § 35 coll'aiuto dei due circoli di diametri $AA'$ e $BB'$, apparisce manifesto che $M$, $N$ sono punti di tale ellisse, ed inoltre $OM$, $ON$ essendo ottenuti da due raggi ortogonali del circolo di diametro $AA'$ sono due semidiametri coniugati dell'ellisse.

Corollario 1°. — *In un'ellisse la somma dei quadrati dei due semidiametri coniugati è costante ed eguale alla somma dei semiassi.*

Dal triangolo $OMP$ si ricava, essendo $MC$ una mediana,

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 = 2\,\overline{MC}^2 + 2\,\overline{OC}^2.$$

D'altra parte, essendo $KC = CH$, si ha

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{MK}^2 + \overline{MH}^2 = (MC + CK)^2 + \\ + (MC - CK)^2 = 2\,\overline{MC}^2 + 2\,\overline{CK}^2$$

e siccome $\overline{OC}^2 = \overline{CK}^2$, risulta

$$\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2.$$

2°. *L'area del triangolo che ha per lati due semidiametri coniugati è costante ed eguale all'area del triangolo rettangolo che ha per lati i due semiassi.*

Considerando le due secanti MK, MP del circolo di diametro OP, si ha

$$\overline{MP} \,.\, \overline{MQ} = \overline{MK} \,.\, \overline{MH}\,,$$

ovvero

$$\overline{ON'} \,.\, \overline{MQ} = \overline{OA} \cdot \overline{OB}.$$

Dunque (essendo MQ l'altezza del triangolo OMN') i triangoli OMN', OAB sono equivalenti.

3°. *L'area del parallelogrammo che ha per diagonali due diametri coniugati di un'ellisse è costante ed eguale a quella della losanga che ha per diagonali gli assi.*

Infatti il parallelogrammo MNM'N' e la losanga ABA'B' sono rispettivamente quadrupli dei triangoli OMN', OAB, equivalenti.

4°. *L'area del parallelogrammo che ha per mediane due diametri coniugati di un'ellisse è costante ed eguale a quella del rettangolo che ha per mediane gli assi.*

Infatti, il parallelogrammo che ha per mediane MM', NN' ed il rettangolo che ha per mediane AA', BB', essendo rispettivamente doppi dei parallelogrammi equivalenti MNM'N' e ABA'B', sono pure equivalenti.

**42.** Le proprietà dimostrate nel § precedente possono essere estese con opportune modificazioni anche all'iperbole, purchè si stabilisca per mezzo di una definizione il concetto di *lunghezza* di un diametro, anche se questo non incontra la curva.

Ciò può farsi per mezzo delle seguenti considerazioni. Se un diametro $d_1$ di un'iperbole taglia la curva in due punti A, A', le tangenti in A, A' sono parallele al diametro $d_2$, coniugato a $d_1$, ed i segmenti di esse limitati fra gli assintoti sono uguali e divisi per metà da A, A' respettivamente; perciò i segmenti congiungenti gli estremi di questi segmenti sono paralleli ed eguali ad AA'. Se B, B' sono i punti di mezzo di questi lati, si dirà che BB' è la lunghezza del diametro coniugato ad AA'. In altre parole si stabilisca la seguente

DEFINIZIONE. — *Se un diametro di un'iperbole taglia la curva in due punti* A, A′, *e si costruisce il parallelogrammo che ha gli assintoti per diagonali e* AA′ *per mediana, l'altra mediana* BB′ *si dice lunghezza del diametro coniugato ad* AA′.

Indicheremo le lunghezze AA′, BB′ con $2a$, $2b$. Se AA′ è l'asse principale si ha $a^2 + b^2 = c^2$.

È facile vedere che, se facciamo percorrere ad A, A′ l'iperbole data, i punti B, B′ percorrono una seconda iperbole che ha gli stessi assintoti di quella data, e che si chiama *coniugata* ad essa.

I lati del detto parallelogrammo passanti per B o B′ sono tangenti a questa iperbole, e la lunghezza del diametro coniugato a BB′ è AA′.

Ciò premesso è chiaro che dal teorema del § 26 si ricavano immediatamente le seguenti proposizioni corrispondenti ai corollari 3° e 4° del § precedente.

1°. *L'area del parallelogrammo che ha per mediane due diametri coniugati dell'iperbole è costante.*

2°. *L'area del parallelogrammo che ha per diagonali due diametri coniugati dell'iperbole è costante.*

Infine il corollario 1° si modifica nel modo seguente:

3°. *La differenza dei quadrati di due semidiametri di un'iperbole è costante.*

Siano A, B due punti arbitrari dell'iperbole di centro O, A′, B′ i punti di incontro della AB con gli assintoti, $A_1$, $B_1$, i punti d'incontro di un assintoto con le parallele condotte per A, B all'altro assintoto, $A_3$, $B_3$ le proiezioni di A, B sul primo assintoto, $A_2$, $B_2$ i punti d'incontro di questo con le tangenti in A, B, di guisa che si avrà che $AA_1$ è la mediana, $AA_3$ l'altezza del triangolo $OAA_2$ e $BB_1$ la mediana, $BB_3$ l'altezza del triangolo $OBB_2$, e per conseguenza, per un noto teorema

$$\overline{OA}^2 - \overline{AA_2}^2 = \pm\, 4\overline{OA_1}\,.\,A_1A_3$$
$$\overline{OB}^2 - \overline{BB_2}^2 = \pm\, 4OB_1\,.\,B_1B_3.$$

Si ha poi

$$\frac{A_1A_3}{B_1B_3} = \frac{AA_3}{BB_3} = \frac{AB'}{BB'} = \frac{A'B}{A'A} = \frac{OB_1}{OA_1}.$$

Ne segue

$$OA_1\,.\,A_1A_3 = OB_1\,.\,B_1B_3,$$

e quindi le differenze $\overline{OA}^2 - \overline{AA_2}^2$, $\overline{OB}^2 - \overline{BB_2}^2$ sono eguali, il che prova la proposizione enunciata.

*(Continua)* G. LAZZERI.

# SULL'USO E SULLE TAVOLE DEI VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

## Introduzione.

**1.** Fino a pochi anni fa, per i calcoli trigonometrici, era esclusivamente indicato l'uso dei logaritmi: veggansi, per es., i trattati del LE COINTE (1), del SERRET (2), del BOURDON (3),...; veggasi pure la classica raccolta del REIDT (4), dove, fra tanti esempî numerici, non se ne trova neppure uno (neanche fra i più semplici) nel quale si accenni alla possibilità di procedere senza logaritmi; e veggasi anche il trattato del GOODWIN (5), dove si ricorre ai logaritmi anche per risolvere un triangolo rettangolo avente per cateti $b=0{,}02$ e $c=0{,}10$.

E non era, generalmente, possibile fare diversamente, perchè le ordinarie raccolte di tavole logaritmo-trigonometriche non contenevano nessuna tavola di valori naturali (6); per cui, se in qualche caso (come, per es., nella risoluzione di qualche equazione trigonometrica) si presentavano questi valori, bisognava fare il passaggio ai corrispondenti logaritmi; veggasi, per es., il trattato del KLEYER (7).

**2.** Nei trattati più recenti però l'esclusione dei valori naturali non è più assoluta, giacchè, invece di dire che i calcoli trigonometrici si fanno coi logaritmi *sempre*, si dice *generalmente*: veggansi, per es., i trattati del VACQUANT (8), del BROCKMAN (9), dell' HAMMER (10), dello CHAUVENET (11), ...; veg-

---

(1) LE COINTE. *Leçons sur la Théorie des fonctions circulaires.* (Ed. Mallet-Bachelier, Paris 1858, pag. 87.)

(2) SERRET. *Traité de Trigonométrie.* (Ed. Gauthier-Willars, Paris 1888, pag. 66.)

(3) BOURDON. *Trigonométrie rectiligne et spherique.* (Ed. Gauthier-Willars, Paris 1877, pag. 47.)

(4) REIDT. *Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie.* (Ed. Teubner, Leipzig 1877.)

(5) GOODWIN. *Plane and spherical trigonometry.* (Ed. Longmans, London 1891, pag. 188): trattato autorevolissimo, che da molti anni è libro di testo nel *Royal Naval College* di *Greenwich.*

(6) Le prime tavole logaritmo-trigonometriche complete furono quelle del VLACQ (*Arithmetica logarithmica*, Gouda 1628, e *Trigonometria artificialis*, Gouda 1633); in esse si trovano i valori naturali di seno, secante e tangente, e i logaritmi del seno e della tangente, con dieci cifre decimali e di 10″ in 10″. Di queste tavole il VLACQ stesso pubblicò poi un estratto con sette cifre e di 1′ in 1′ (*Tables de sinus, tangentes, secantes: et de logarithmes des sinus, tangentes*, La Haye 1651), del quale furono fatte molte edizioni. Ne abbiamo sotto gli occhi una, la quale è identica alla precedente, anche in tutta la introduzione; ma, invece del nome di VLACQ, porta quello di OZANNAM (l'autore delle *Récréations mathématiques et phisique*), e non vi è detto nè dove nè quando sia stata pubblicata (crediamo a Parigi nel 1685).

Dalle grandi tavole del VLACQ ricavarono poi il GARDINER le sue tavole a sette cifre e di 10″ in 10″ (*Tables of logarithms*, London 1842, o *Tables de logarithmes*, Avignon 1770) e il VEGA le sue grandi tavole a dieci cifre e di 10″ in 10″ (*Thesaurus logarithmorum completus*, Leipzig 1794); ma nessuna di queste nuove tavole contenne più i valori naturali, come non li contenne più nessuna delle numerosissime che vennero dopo (CALLET, LALANDE, BREMIKER, KÖHLER, BRUHNS, SCHRÖN,...)

(7) KLEYER. *Lehrbuch der Goniometrie.* (Ed. MAIER, Stuttgart 1886, pagg. 232, 233, 235, 248,...)

(8) VACQUANT. *Cours de Trigonometrie.* (Ed. Masson, Paris 1894, Vol. I, pag. 96.)

(9) BROCKMANN. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* (Ed. Teubner, Leipzig 1880, pag. 30.)

(10) HAMMER. *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* (Ed. Metzler, Stuttgart 1885, pag. 34.)

(11) CHAUVENET. *A treatise on plane and spherical Trigonometry.* (Ed. Lippincott, Filadelfia 1891, pag. 44.)

gasi pure il pregievolissimo trattato dell'Heis (1), nel quale anzi si trova una piccola tavola di valori naturali (con quattro cifre e di 20′ in 20′) per quei casi in cui l'uso di tali valori fosse creduto opportuno; e veggasi anche il trattato del Besso (2), nel quale, a nostro parere, si esagera nel senso opposto, escludendo addirittura i logaritmi trigonometrici e usando sempre i valori naturali, con minuziose ricerche sul modo di calcolare questi valori e sull'approssimazione che con essi si può raggiungere.

E, corrispondentemente, anche nelle più recenti raccolte di tavole si aggiunse una tavola di valori naturali, più o meno estesa (3).

**3.** I casi in cui l'uso dei valori naturali è spesso preferibile a quello dei logaritmi, sono quelli in cui non si richiede una grande approssimazione: in cui, per es., le misure delle lunghezze non sono espresse con più di due o di tre cifre, e le misure degli angoli non contengono frazioni di primo; casi frequenti nell'*Ingegneria*, frequentissimi nella *Navigazione*.

E i vantaggi che così si ottengono sono due: quello di diminuire le ricerche da farsi nelle tavole, e quello di evitare l'uso di elementi ausiliari (4).

Così, per es., avendosi da calcolare una formula del tipo

$$b = a \operatorname{sen} \beta, \tag{1}$$

basta cercare il valore di sen $\beta$ ed eseguire una moltiplicazione, mentre che, usando i logaritmi, bisogna fare due ricerche dirette, un'addizione e una ricerca inversa (5). Altrettanto accade per tutte le altre formule che risolvono un triangolo rettangolo piano, e per quelle che risolvono un triangolo obliquangolo in due dei quattro casi fondamentali, e che si ricavano dal teorema dei seni.

Nella risoluzione di un triangolo sferico rettangolo l'uso dei valori naturali non è, generalmente, preferibile all'uso dei logaritmi, perchè, eviden-

---

(1) Heis. *Lehrbuch der Geometrie.* (Ed. Du Mont, Köln 1888, Dritter Teil, pag. 39.)

(2) Besso. *Elementi di Trigonometria piana.* (Ed. Loescher. Roma 1880.) In questo trattato, teoricamente pregievolissimo, sono magistralmente esposte alcune delle ricerche che formano oggetto del nostro studio: precisamente quelle relative agli errori di interpolazione nel seno e nella tangente; però con dei procedimenti che conducono a dei limiti maggiori di quelli ottenuti da noi, e che, dovendo essere elementari, risultano assai artifiziosi.

(3) Veggansi, per es., Chambers, *Mathematical tables* (Ed. Chambers, Edinburgh 1853), fra le quali c'è una tavola che dà il valor naturale di seno soltanto, con sette cifre e di 1′ in 1′: Houel, *Recueil de formules et de tables numériques.* (Ed. Gauthier-Willars, Paris 1868), dove si ha una tavola di valori naturali di tutt'e sei le funzioni trigonometriche, con quattro cifre e di 15′ in 15′; Albrecht, *Logarithmisch-trigonometrische Tafeln.* (Ed. Stankiewicz. Berlin 1884), fra le quali è data anche una tavola per tutt'e sei le funzioni, con quattro cifre e di 10′ in 10′; Claudel. *Tables des carrés* etc. (Ed. Dumond, Paris 1895), in questo volume trovasi una tavola che dà le quattro funzioni seno, coseno, tangente e cotangente di 1′ in 1′ e con cinque cifre decimali (eccezion fatta per i primi quattro gradi, chè per i primi due si hanno sette cifre e per gli altri due se ne hanno sei). Quest'ultima tavola è stata pubblicata da molti altri, e si trova anche annessa al trattato del De Comberousse (*Cours de Mathématiques;* tomo II, *Trigonométrie rectiligne et sphérique.* Ed. Gauthier-Villars, Paris 1893), mentre, strano a dirsi, in tutto il libro all'uso dei valori naturali non si accenna neppure.

E una tavola di valori naturali, più o meno estesa, si trova in tutte le recenti raccolte di tavole nautiche.

(4) E un altro vantaggio, d'indole didattica, si deve, secondo noi, aggiungere a questi: nei corsi in cui della *Trigonometria* si insegnano solo gli elementi (per far vedere come si possa risolvere un triangolo), perchè ricorre a laboriosi e ingombranti calcoli logaritmici, mentre dei brevi e semplici calcoli coi valori naturali sarebbero più che sufficienti?

(5) Risolvere un triangolo rettangolo piano, data l'ipotenusa $a = 142$ (colla approssimazione di una o di due unità) e l'angolo $\beta = 17^\circ{,}5$ (colla approssimazione di un grado, o di un decimo di grado al più), servendosi di logaritmi a cinque cifre decimali (v. Caillet, *Traité de Navigation,* Ed. Robiquet, Paris 1868, pag. 289), equivale, per noi, a servirsi di una gru per alzare una valigia!

temente, non si risparmia nessuna ricerca (nè diretta, nè inversa). Però nella risoluzione di un triangolo sferico obliquangolo, quell'uso può essere opportuno per evitare, come si è accennato, l'uso di elementi ausiliarî [1]. E questo, in pratica, accade principalmente nel caso in cui son dati due lati ($b$, $c$) e l'angolo compreso ($\alpha$); chè, volendosi solo l'angolo $\beta$, o solo il lato $a$, l'uso di una delle due formule

$$\operatorname{ctn} \beta = \operatorname{ctn} b \operatorname{sen} c \csc \alpha - \cos c \operatorname{ctn} \alpha, \tag{2}$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha, \tag{3}$$

può essere molto opportuno, anche se si richiede l'approssimazione di 1'. Come, per es., accade, per la prima, quando si vuol calcolare la rotta iniziale di una navigazione per circolo massimo (nel qual caso anzi, invece della approssimazione di 1', è più che sufficiente l'approssimazione di un decimo di grado); e per la seconda in un problema di *Navigazione* [2], alla cui risoluzione, da qualche tempo, si ricorre frequentissimamente, trasformando la (3) stessa, mediante prostaferisi [3] nell'altra, più facile al calcolo,

$$\cos a = \tfrac{1}{2} \left[ \{\cos (b - c) + \cos (b + c)\} + \{\cos (b - c) - \cos (b + c)\} \cos \alpha \right]. \tag{3$'$}$$

4. Dietro queste considerazioni ci è parso utile estendere ai valori naturali delle funzioni trigonometriche lo studio che già facemmo pei logaritmi dei numeri e pei logaritmi trigonometrici [4]; e così avremo occasione di modificare opportunamente e di completare alcuni risultati già altra volta da noi ottenuti [5].

Considereremo le tre funzioni seno, tangente, secante [6] e non le prime due soltanto [7], perchè una tavola, che non contenga la secante, non permette la notevole semplificazione, che spesso si può ottenere nei calcoli ordinarî, sostituendo ad ogni divisione la corrispondente moltiplicazione.

Così, per es., se dalla (1) si vuole ricavare $a$, sarà certo più opportuna al calcolo la formula

$$a = b \csc \beta,$$

che la formula

$$a = b : \operatorname{sen} \beta;$$

---

(1) " Malgré leur apparente simplicité, les formules que l'on obtient en recourant aux angles " auxiliaires, et même la plupart de celles qui résultent de la trasformation des expressions, ne " sont pas souvent le plus aisément calculables par logarithmes. Sans parler du travail que de" mande la trasformation, le nombre des lectures à faire dans la table rend ordinairement les " recherches assez laborieuses. Ces trasformations sont, à la verité, d'utiles exercices, souvent " imposés dans les examens; mais, au point de vue pratique, elles présentent souvent plus d'in" convénientes que d'avantages (Hoüel, *Journal de Matématiques élémentaires et spéciales*, tomo II, " pag. 478) „.

(2) Chi nei calcoli nautici propose l'uso dei valori naturali fu l'Ammiraglio Magnaghi (*Tavole e Formule nautiche*, Ed. Hoepli, Milano 1883); ci sia però permesso il dire che nella esclusione dei logaritmi egli ha qualche volta esagerato (come già dicemmo del Besso), perchè non crediamo, per es., che la sua tavola di valori naturali a cinque cifre e di 10' in 10' possa servire anche nel calcolo delle distanze lunari, dove, in certi casi, possono occorrere tavole logaritmiche di 10'' in 10'' o con sette cifre (Faye, *Cours d'Astronomie nautique*, Ed. Gauthier-Villars, Parigi 1880, pag. 29).

(3) V. il nostro studio: *Sul calcolo relativo alle rette d'altezza secondo il metodo di Marcq Saint-Hilaire* (" Rivista Marittima „, Gennaio 1903 e Aprile 1904).

(4) *Sulle operazioni fra numeri decimali approssimati...* (" Periodico di Matematica „, 1904, fasc. VI e 1905 fasc. I e II): Cap. III e IV. I §§ di questa nota, che dovremo citare in seguito, saranno, semplicemente, precedenti da una N.

(5) *Errori prodotti dall' interpolazione semplice...* (" Rivista Marittima „, 1895 Luglio); §§ 6 e 7.

(6) Come nelle tavole dell' Hoüel e dell'Albrecht, già citate.

(7) Come nella tavola (pure già citata) pubblicata dal Claudel, che, fra le moderne, è la più nota e la più estesa.

così, la (2) sarà certamente preferibile all'altra

$$\operatorname{ctn} \beta = \frac{\operatorname{ctn} b \operatorname{sen} c - \operatorname{sen} c \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

E, in generale, mediante l'uso della secante si potranno sempre evitare tutte le divisioni in una espressione che sia il quoziente di due monomi, e in una espressione che sia il quoziente di un polinomio per un monomio o viceversa. È anzi in quest'ultimo caso che l'uso della secante può essere opportuno anche per la ricerca inversa, perchè, dovendo, per es., calcolare delle espressioni del tipo

$$\cos(A - B) = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{1 - \cos a \cos b}, \qquad \operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} p}{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q},$$

sarà certo più comodo calcolare invece le altre

$$\sec(A - B) = \csc a \csc b - \operatorname{ctn} a \operatorname{ctn} b, \qquad \csc a = 1 + \operatorname{sen} q \csc p.$$

## Considerazioni generali.

**5.** Se $y = f(x)$ è una funzione avente la derivata seconda finita e continua in tutti gli intervalli in cui occorrerà di considerarla, se $x_0$ e $x_1$ sono due valori qualunque della variabile e $x$ è un valore fra questi compreso, e se si pone

$$x - x_0 = \delta x \qquad \text{e} \qquad x_1 - x_0 = \Delta x,$$

vedemmo già (¹) che si ha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\delta x}{\Delta x} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x)\} - \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right) \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} f''(x_0 + \theta \Delta x), \quad (4)$$

dove $\theta$ rappresenta un numero compreso fra 0 e 1.

Ciò posto, se con $\gamma$ si indica, in generale, l'errore dovuto alla applicazione del principio delle parti proporzionali nell'intervallo $\Delta x$, e con $\gamma_d$ e $\gamma_i$ si indica, più particolarmente, l'errore stesso, secondochè esso si riferisce alla ricerca diretta o alla ricerca inversa, è chiaro che si ha

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\delta x}{\Delta x} \{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\} + \gamma_d$$

$$x = x_0 + \frac{f(x_0 + \delta x) - f(x_0)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \Delta x + \gamma_i;$$

onde, dalle (4), si ha subito

$$\gamma_d = - \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right) \frac{\overline{\Delta x}^2}{2} f''(x_0 + \theta \Delta x), \quad (5)$$

e, siccome, evidentemente,

$$\gamma_i = - \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \gamma_d, \quad (6)$$

si ha anche

$$\gamma_i = + \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right) \frac{\overline{\Delta x}^3}{2} \frac{f''(x_0 + \theta \Delta x)}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \quad (7)$$

(¹) *Sulla ricerca del logaritmo seno e del logaritmo tangente degli archi piccoli* (" La Corrispondenza ,, 1901, fasc. V e VI, e " Periodico di Matematica ,, 1901, fasc. I e II), § 2.

In seguito indicheremo con $g_d$ e $g_i$ i valori assoluti di $\gamma_d$ e di $\gamma_i$, e con $G_d$ e con $G_i$ i limiti superiori che per questi valori si ricaveranno dalla (5) e dalla (7). E, almeno nei casi che considereremo, questi limiti saranno molto minori di quelli che si otterrebbero, ricorrendo (come, per ciò, si fa ordinariamente) alla serie di Taylor.

**6.** Se i valori di $f(x_0)$ e di $f(x_0 + \Delta x)$, che supponiamo dati da una tavola, fossero esatti, il valore di $f(x)$, nella ricerca diretta, e il valore di $x$, nella ricerca inversa, risulterebbero affetti solo dagli errori $\gamma_d$ e $\gamma_i$ rispettivamente.

Ma i valori tavolari di $f(x_0)$ e di $f(x_0 + \Delta x)$ hanno sempre un limitato numero $n$ di cifre decimali, e quindi sono generalmente affetti da un errore d'*arrotondamento*, che, in valore assoluto, ha per massimo una mezza unità dell'ultimo ordine; e altrettanto si deve dire di $f(x)$, perchè questo valore è generalmente limitato allo stesso numero di cifre dei due valori precedenti. Quindi, oltre l'errore $\gamma$, nei valori ricavati dalla tavola colla interpolazione semplice, si avrà un altro errore, che indicheremo con $\lambda$.

Attribuendo a $\lambda_d$, $\lambda_i$, $l_d$, $l_i$, $L_d$, $L_i$ significati analoghi a quelli attribuiti nel § prec., a simboli analoghi, sappiamo già (¹) che si ha

$$L_d = 1 \qquad (8) \qquad\qquad L_i = \frac{\Delta x}{\Delta y}; \qquad (9)$$

dove $\Delta y$ indica, in valore assoluto, la differenza tavolare, ossia la differenza che si deduce dai valori arrotondati che si trovano nella tavola, e non la differenza esatta fra i valori esatti di $f(x_0 + \Delta x)$ e di $f(x_0)$; dove per cifra delle unità di $L_d$ e di $\Delta y$ si prende l'ultima cifra decimale che si considera; dove $L_i$ risulta espresso nelle stesse unità in cui è espresso $\Delta x$.

E si rammenti bene che $L_d$ è il *massimo* di $l_d$, mentre che $L_i$ è di $l_i$ un *limite superiore inabbassabile*.

Osservazione I. — Il valore (assoluto) di $\Delta y$ differisce dalla differenza esatta $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ meno di una unità, perchè l'errore di ogni valore arrotondato ha per massimo una mezza unità se è per eccesso, ed ha invece per *limite superiore* una mezza unità se è per difetto (N. § 14, Oss.); si ha dunque certamente

$$\Delta y - 1 < | f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) | < \Delta y + 1 \qquad (10)$$

e questi limiti sono inabbassabili.

Osservazione II. — Ricordiamo che l'errore $\lambda_d$ consta di due parti, ognuna delle quali ha per massimo una mezza unità: una è costituita dall'errore di arrotondamento di $f(x)$ e l'altra da quello che deriva dagli errori di arrotondamento di $f(x_0 + \Delta x)$ e di $f(x)$.

Osservazione III. — Ricordiamo pure che, nella ricerca inversa, essendo il valore di $f(x)$ il risultato di un calcolo, non sarà, generalmente, affetto solo dall'errore di arrotondamento, ma anche da un altro errore dovuto agli errori dei numeri sui quali si è operato (N. § 58); e che, indicando con $a$

---

(¹) V. il § 3 della nota già citata: *Sulla ricerca del logaritmo seno*... e il § 6 dell'altra nostra nota: *Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice* ("Periodico di Matematica", 1902 fasc. I). Avvertiamo che alcuni simboli sono stati opportunamente modificati, od opportunamente introdotti.

un limite superiore del valore assoluto di questo errore (escluso l'accennato errore di arrotondamento) si ha certamente

$$l_i < (1 + a)\frac{\Delta x}{\Delta y}. \tag{11}$$

OSSERVAZIONE IV. — Ricordiamo finalmente l'apparente paradosso [1] che, se, invece della differenza tavolare $\Delta y$, per la differenza $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ si piglia un valore più appprossimato, l'errore $\lambda_d$, invece di diminuire, può crescere.

E un altro apparente paradosso vogliamo far rilevare ora relativo all'errore $\lambda_i$; ed è che, diminuendo $\Delta x$, il limite superiore inabbassabile $L_i$ di questo errore può crescere anzichè diminuire. Così, per es., essendo

| | |
|---|---|
| Lsen $39^0\,25'\,00'' = \overline{1},80274$ | Lsen $39^0\,25'\,40'' = \overline{1},80285$ |
| Lsen $39\;\;26\;\;00 = \overline{1},80290$ | Lsen $39\;\;25\;\;50 = \overline{1},80287$, |

dato Lsen $x = \overline{1},80286$, secondo che nella ricerca di $x$ si piglia $\Delta x = 60''$ o $\Delta x = 10''$, $L_i$ ha per valore

$$\frac{60''}{16} = 3'',75, \qquad \text{o} \qquad \frac{50''}{2} = 5'',00,$$

rispettivamente.

**7.** Affinchè dunque nell'uso di una determinata tavola numerica si possa ammettere il principio delle parti proporzionali bisogna che si possa ritenere trascurabili la somma dei due errori $\gamma$ e $\lambda$.

Nella ricerca diretta l'errore $\lambda_d$ non dipende nè dalla forma della funzione $f(x)$, nè dalla grandezza del passo $\Delta x$, ma solo dal numero $n$ delle cifre decimali date dalla tavola; l'errore $\gamma_d$ invece dipende dalla forma di $f(x)$, del passo $\Delta x$ e non dipende affatto da $n$. Nella costruzione e nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche si ammette generalmente che $\gamma_d$ sia trascurabile, quando il minimo limite superiore che se ne conosce non supera in valore assoluto una mezza unità dell'ultimo ordine, ossia quando è minore della metà del massimo di $\lambda_d$.

Nella ricerca inversa l'errore $\lambda_i$ dipende sia dalla forma di $f(x)$, sia da $\Delta x$, sia da $n$; e $\gamma_i$, come nella diretta dipende dalla forma di $f(x)$ e da $\Delta x$, ma non da $n$. Si ammette ordinariamente che, in questa ricerca inversa, l'interpolazione si possa fare quando si può fare nella ricerca diretta, ossia quando, come s'è detto orora, il minimo limite superiore che si conosce per $\gamma_d$ è minore di una mezza unità dell'ultimo ordine. Per giustificare questa convenzione possiamo intanto dimostrare che, se $G_d$ è minore di 0,5, $G_i$ è minore di $L_i$. Infatti dalla (6) si ha

$$g_i = \frac{\Delta x}{|f(x_0 + \Delta x) - f(x)|}\, g_d,$$

quindi, per la (9), basta che sia

$$\frac{\Delta x}{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)|}\, G_d < \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

la quale, per la (10), si verifica *a fortiori*, se

$$\frac{\Delta x}{\Delta y - 1}\, G_d < \frac{\Delta x}{\Delta y},$$

[1] V. il § 3 della nota già citata: *Sopra uno degli errori...*

ossia se

$$G_d < \frac{\Delta y - 1}{\Delta y}.$$

E questa è certamente verificata per $G_d < 0{,}5$, perchè il secondo membro cresce al crescere di $\Delta y$ e il suo minimo valore si ha per $\Delta y = 2$ (chè per $\Delta y < 2$ l'interpolazione non occorre). Ma giustificazione molto maggiore, si troverà nei casi che dovremo considerare in seguito, perchè in essi, o $G_d$ sarà molto minore di 0,5, o, se $G_d$ sarà prossimo a 0,5, $\Delta y$ sarà molto maggiore di 2 e quindi $L_i$ molto più piccolo.

Osservazione. — Quando $\Delta y$ è molto grande, $L_i$ è molto piccolo, sempre per la (9), e quindi può presentarsi il caso che nella ricerca inversa si possa, colla interpolazione, ottenere una approssimazione sufficiente senza che $G_i$ sia minore di $L_i$. Questo caso si presenterà in alcuni dei casi che dovremo considerare in seguito, e sarà allora particolarmente esaminato.

**8.** Per eseguire le operazioni aritmetiche richieste dalla interpolazione semplice è bene stabilire delle regole fisse, colle quali si eviti un lavoro inutile nella ricerca diretta, e una approssimazione insufficiente, o illusoria, nella ricerca inversa (N. § 1).

E queste regole, indicando con $\mu$ l'errore da essa prodotto e attribuendo a $m_d$, $m_i$, $M_d$, $M_i$ i soliti corrispondenti significati, devono essere scelte in modo che $M_d$ sia minore del più grande dei due valori $G_d$ ed $L_i$ (perchè l'approssimazione sia sufficiente), senza però essere minore di un decimo del valore stesso (perchè l'approssimazione non sia illusoria); e che altrettanto accada di $M_i$ rispetto al più grande dei due valori $G_i$ ed $L_i$ (N. § 11).

A proposito poi delle regole stesse, ricorderemo che (N. § 50), se quelle relative alla ricerca diretta sono solo opportune e non necessarie, quelle relative alla ricerca inversa sono invece indispensabili, sia perchè danno un criterio logico e fisso per arrestare la divisione (che in questa ricerca occorre e che, generalmente, non riesce esatta) sia perchè danno un'idea, generalmente esatta, della approssimazione del risultato a cui si arriva.

Osservazione. — Stabilimmo già le regole accennate per i logaritmi dei numeri (N. §§ 19 e 20), e per i logaritmi trigonometrici (N. §§ 26 e 27), e facemmo rilevare le lacune e le contraddizioni che, in proposito, si trovano anche nei trattati di *Trigonometria* più autorevoli (N. § 56).

## Applicazione a una tavola di valori naturali.

**9.** Cominciamo col dedurre dalla (5) e dalla (7) i valori di $G_d$ e di $G_i$ per le tre funzioni seno, tangente e secante.

Se

$$f(x) = \operatorname{sen} x,$$

dalla (5) si ha

$$\gamma_d = + \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} \operatorname{sen}(x_0 + \theta \Delta x); \tag{12}$$

ed, osservando che

$$\operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0 = \Delta x \cos(x_0 + \theta_1 \Delta x), \tag{13}$$

dove $\theta_1$ ha il significato di $\theta$, dalle (7) si ha anche

$$\gamma_i = -\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}\frac{\operatorname{sen}(x_0+\theta_1\Delta x)}{\cos(x_0+\theta_1\Delta x)}; \tag{14}$$

dunque $\gamma_d$ e $\gamma_i$ sono sempre per difetto e per eccesso, rispettivamente.

Dalla (12), e dalla (14), se si osserva che il massimo valore del prodotto

$$\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)$$

si ha per $\frac{\delta x}{\Delta x}=\frac{1}{2}$, e se si vuole che $g_i$ risulti espresso in secondi, si ha

$$g_d < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\operatorname{sen}(x_0+\Delta x), \quad (15) \qquad g_i < \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8}\tan(x_0+\Delta x), \quad (16)$$

dove, s'intende, $\Delta x$ è la misura circolare dell'arco $x_1 - x_0$ e $(\Delta x)''$ è la misura dello stesso arco in secondi.

Considerando i limiti superiori trovati per $g_d$ e per $g_i$, che abbiamo detto di indicare con $G_d$ e con $G_i$, si vede che $G_d$ cresce al crescere di $x_0$ da 0 a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$, ed ha per massimo $\frac{1}{8}\overline{\Delta x}^2$; e che $G_i$ pure cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ per $x_0$ tendente a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; è però evidente che $g_i$ non può superare $\Delta x$.

Osservazione. — Dalla (12) e dalla (14), per $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$, si ha anche

$$g_d > \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\operatorname{sen} x_0, \quad (15)' \qquad g_i > \frac{\Delta x\,(\Delta x)''}{8}\tan x_0, \quad (16)'$$

le quali danno dei limiti inferiori per $g_d$ e $g_i$. E la conoscenza di questi limiti può, come vedremo, in seguito essere utilissima, perchè si possono così avere delle limitazioni per gli errori $\gamma_d$ e $\gamma_i$, che certamente si commettono quando, come s'è detto, sia $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$.

**10.** Se

$$f(x) = \tan x,$$

dalla (5) si ha

$$\gamma_d = -\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\overline{\Delta x}^2\frac{\tan(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^2(x_0+\theta\Delta x)}; \tag{17}$$

ed, osservando che

$$\tan(x_0+\Delta x) - \tan x_0 = \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}, \tag{18}$$

dalla (7) si ha anche

$$\gamma_i = +\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\overline{\Delta x}^3\frac{\tan(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^2(x_0+\theta\Delta x)}\cdot\frac{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}\Delta x}; \tag{19}$$

dunque $\gamma_d$ e $\gamma_i$ sono sempre per eccesso e per difetto, rispettivamente.

Dalla (17) e dalla (19), colle considerazioni e coi simboli del § prec., si ha

$$g_d < \frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\cdot\frac{\tan(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)}, \tag{20}$$

$$g_i < \frac{\overline{\Delta x}^2(\Delta x)''}{4}\cdot\frac{\tan(x_0+\Delta x)\cos x_0}{\operatorname{sen}\Delta x\cos(x_0+\Delta x)}. \tag{21}$$

È evidente che $G_d$ cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ quando $x_0$ tende a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; e altrettanto accade di $G_i$, perchè il rapporto

$$\frac{\cos x_0}{\cos(x_0+\Delta x)}$$

cresce al crescere di $x_0$, essendo

$$D_x \frac{\cos x}{\cos(x+\Delta x)} = \frac{\operatorname{sen}\Delta x}{\cos^2(x+\Delta x)}. \tag{22}$$

Osservazione I. — Dalla (17) e dalla (19), per $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$, si ha anche

$$g_d > \frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\cdot\frac{\tan x_0}{\cos^2 x_0}; \quad (20)' \qquad g_i > \frac{\overline{\Delta x}^2(\Delta x)''}{4}\cdot\frac{\tan x_0 \cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}\Delta x \cos x_0}, \quad (21)'$$

dalle quali si può dire quel che s'è detto per la (15)' e per la (16)' nella Oss. al § precedente.

Osservazione II. — Quando si vuol calcolare una espressione trigonometrica coi valori naturali, è, evidentemente, opportuno, se è possibile, sostituire delle addizioni a delle moltiplicazioni {veggasi per es., la (3) e la (3)'}, contrariamente a quanto si cerca di fare quando si vogliono usare i logaritmi.

Così per il calcolo delle (20), (20)', (21), (21)' sarà opportuno osservare che

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{\tan(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\tan(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}, \tag{23}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}\cdot\frac{\tan(x_0+\Delta x)\cos x_0}{\operatorname{sen}\Delta x\cos(x_0+\Delta x)} &= \frac{\csc\Delta x}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x_0+\Delta x)+\operatorname{sen}\Delta x}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)} \\ \frac{1}{4}\cdot\frac{\tan x_0\cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}\Delta x\cos x_0} &= \frac{\csc\Delta x}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen}(2x_0+\Delta x)-\operatorname{sen}\Delta x}{1+\cos 2x_0} \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

**11.** Se

$$f(x) = \sec x$$

dalla (5) si ha

$$\gamma_d = -\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^3(x_0+\theta\Delta x)}; \tag{25}$$

ed osservando che

$$\sec(x_0+\Delta x) - \sec x_0 = \frac{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}{\Delta x\operatorname{sen}(x_0+\theta_1\Delta x)}; \tag{26}$$

dove $\theta_1$ ha il solito significato, dalla (7) si ha anche

$$\gamma_i = +\frac{\delta x}{\Delta x}\left(1-\frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\theta\Delta x)}{\cos^3(x_0+\theta\Delta x)}\cdot\frac{\cos x_0\cos(x_0+\Delta x)}{\operatorname{sen}(x_0+\theta_1\Delta x)}; \tag{27}$$

dunque $\gamma_d$ e $\gamma_i$ sono per eccesso o per difetto rispettivamente.

Dalla (25) e dalla (27), colle solite considerazioni e coi soliti simboli, si ha

$$g_d < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^3(x_0+\Delta x)}, \tag{28}$$

$$g_i < \frac{\Delta x(\Delta x)''}{8}\cdot\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)\tan x_0}. \tag{29}$$

È evidente anche qui, che $G_d$ cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ quando $x_0$ tende a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$. In quanto a $G_i$ si vede subito che esso tende all'$\infty$, tanto per $x_0$ tendente a zero, quanto per $x_0$ tendente a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; ma non è così facile vedere che si ha un minimo solo e trovare il valore di $x_0$ corrispondente. Infatti, volendo applicare il solito metodo indicato dal *Calcolo Infinitesimale*, siccome, dopo facili trasformazioni, si ha

$$D_x\frac{1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)}{\cos^2(x+\Delta x)\tan x} = \frac{4\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}2(x+\Delta x) - \{3+2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\}}{4\cos^4(x+\Delta x)\operatorname{sen}^2 x}$$

occorrerebbe studiare la variazione della funzione

$$\varphi(x) = 4 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) - \{3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\} \quad (30)$$

al variare di $x$ da zero a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$, gli estremi esclusi; ma l'equazione che si ottiene eguagliando $\varphi(x)$ a zero non è risolubile rispetto ad $x$, quindi bisogna ricorrere a qualche artifizio.

Si cominci dall'osservare che si ha

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)}{\cos^2(x+\Delta x)\tan x} = [1+\operatorname{sen}^2(x+\Delta x)] \cdot \left[\frac{\cos x}{\cos(x+\Delta x)}\right] \cdot \left[\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos(x+\Delta x)}\right];$$

ora, è chiaro che i primi due fattori del secondo membro crescono ambedue [per il secondo si ricordi la (22)] al crescere di $x$ da zero a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$; in quanto al terzo, essendo

$$D_x \operatorname{sen} x \cos(x+\Delta x) = \cos(2x+\Delta x), \quad (31)$$

si vede che il suo denominatore cala certamente per $2x + \Delta x \geqslant \frac{1}{2}\pi$, ossia per $x \geqslant \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$; dunque $G_i$ cresce sempre e tende all'$\infty$ al crescere di $x_0$ da $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - \Delta x)$ a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$. Per vedere poi come varî $\varphi(x)$ al variare di $x$ da zero a $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, si noti che (fra questi valori) il primo termine cresce sempre e il secondo cala sempre, perchè

$$D_x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) = 2\operatorname{sen}(4x + 2\Delta x), \quad (32)$$

che è maggiore di zero per $4x + 2\Delta x \leqslant \pi$, ossia per $x \leqslant \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$; e inoltre

$$D_x\{2\cos 2(x_0+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)\} = \operatorname{sen} 2(x+\Delta x)\{\cos 2(x+\Delta x) - 2\}, \quad (33)$$

il cui primo fattore, fra i limiti indicati è certamente positivo, mentre il secondo è sempre negativo. Dunque $\varphi(x)$ da zero a $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$ cambia segno una volta sola e, se $x'$ è il valore corrispondente di $x$, si può asserire che $G_i$ cala sempre al crescere di $x$ da zero fino a $x'$ (l'estremo inferiore escluso) e cresce sempre da $x'$ a $\frac{1}{2}\pi - \Delta x$ (l'estremo superiore escluso); ma, per la ragione indicata, non è possibile trovare questo valore $x'$ e quindi neppure il corrispondente minimo.

Si può però osservare che la diseguaglianza

$$4\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 2(x+\Delta x) < 3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x)$$

è *a fortiori* verificata, se è verificata l'altra

$$4\operatorname{sen}^2 2(x+\Delta x) < 3 + 2\cos 2(x+\Delta x) - \cos^2 2(x+\Delta x).$$

e questa si vede facilmente essere verificata per $2(x+\Delta x)$ non minore dell'arco che ha per coseno $\frac{1}{3}$; quindi, indicando con $\alpha$ l'arco positivo minimo che ha questo coseno, è certo che al variare di $x_0$ da zero a $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$, $G_i$ cala sempre. Il valore $x'$ è dunque compreso fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, e, siccome per la natura della questione che stiamo trattando, si deve supporre che $x_0$ cresca non con continuità ma di successivi intervalli eguali a $\Delta x$, sarà facile, dopo pochi tentativi, trovare, fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\Delta x$, questo valore $x'$ e il minimo corrispondente.

Osservazione I. — È utile osservare, anche qui, che dalla (28) e dalla (29), per $\delta x = \frac{1}{2}\Delta x$, si ha anche

$$g_a > \frac{\overline{\Delta x}^3}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^3 x_0}, \quad (28)' \qquad g_i > \frac{\Delta x(\Delta x)''}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^2 x_0 \tan(x_0+\Delta x)} \quad (29)'$$

delle quali si può ripetere quello che s'è detto per la (15)' e per la (16)' nella Oss. al § 9.

OSSERVAZIONE II. — Analogamente a quanto si è fatto nella Oss. II al § prec. sarà ora opportuno osservare che

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^3(x_0+\Delta x)}=\frac{3-\cos 2(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}\sec(x_0+\Delta x), \tag{34}$$

$$\frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)\tan x_0}=\frac{3-\cos 2(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}\operatorname{ctn} x_0\,. \tag{35}$$

OSSERVAZIONE III. — E anche nella ricerca del minimo di $\varphi(x)$ sarà opportuno, per il calcolo numerico, osservare che la (30) si può trasformare nell'altra equivalente

$$2\varphi(x)=\{4\cos 2\Delta x+\cos 4(x+\Delta x)\}-\{5+4\cos 2(x+\Delta x)+4\cos(4x+2\Delta x)\}. \tag{36}$$

G. PESCI.

*(Continua).*

---

## Sulla divisione all'infinito d'una qualsiasi successione periodica per un qualsiasi numero $p$, primo con la base $g$ del sistema di numerazione adoperato.

I. Dati tre gruppi di cifre A', A'', C costituiti ordinatamente da $\alpha'$, $\alpha''$, $\gamma$ cifre del sistema di numerazione a base $g$, col simbolo

A', A'' (C)

che si ottiene, com'è chiaro, scrivendo successivamente i tre gruppi, ponendo la virgola tra il primo ed il secondo, e chiudendo tra parentesi il terzo, rappresenteremo la successione infinita (che per convenzione diremo *numero* decimale periodico)

A', A''CCC...

dove la scrittura del gruppo C dev'essere immaginata protratta all'infinito.

Al numero A', A'' (C) daremo il nome di *periodico semplice* se A'' e C son gruppi identici, nel caso cioè in cui a cominciare dalla virgola ci son cifre che nello stesso ordine si ripetono all'infinito; daremo invece il nome di *periodico misto* se A'' e C son gruppi differenti, nel caso cioè in cui dopo la virgola sono alquante cifre che più non si ripetono, e vengono poi quelle che nello stesso ordine ripetonsi all'infinito. Ai gruppi A'' e C daremo ordinatamente il nome di *antiperiodo* e *periodo*, e diremo rispettivamente antiperiodiche e periodiche le cifre di cui rimangono costituiti l'uno e l'altro.

*Dividere all'infinito* A', A'' (C) per un numero $p$ vale effettuare successive divisioni, senza mai arrestarsi, tali che tutte abbian $p$ per divisore, che nella prima faccia da dividendo la prima cifra a sinistra di A', A'' (C) ed in ciascuna delle altre faccia da dividendo il numero risultante dallo scrivere a destra del resto della divisione precedente la cifra di A', A'' (C) che vien dopo quella già impiegata in detta divisione precedente.

*Risultato* di siffatta *operazione* diremo il numero che si ottiene scrivendo l'uno di seguito all'altro gl'infiniti quozienti delle successive divisioni, e ponendo una virgola dopo la cifra per trovare la quale è stata adoperata l'ultima cifra a destra di A'.

A cagion d'esempio, si divide all'infinito il numero 134, (0) per 7 quando si converte la frazione $\frac{134}{7}$ in decimale con la nota regola (sistema decimale). E risultato dell'operazione è il *numero* decimale che si *pone eguale* a $\frac{134}{7}$.

È chiaro che il quoziente della prima divisione può essere, come quelli delle altre, anche nullo. Tutti poi i quozienti sono numeri di una sola cifra.

Segue da ciò e da quanto ho dimostrato in principio dell'altra mia nota "sull'indice minimo di N relativo a $p$" (1) che dividendo all'infinito il periodico A', A'' (C) per $p$, primo con la base $g$ del sistema di numerazione, si ha un altro periodico, avente come il primo $\alpha''$ cifre antiperiodiche, e poi $\gamma\lambda$ cifre periodiche, $\lambda$ essendo un intero pel cui significato e calcolo rimandiamo il cortese lettore alla stessa nota succitata.

Attuale nostro scopo è di presentare bellissime ed importanti proprietà, note solo in parte e sotto forma meno generale (2), della successione dei resti che si ottengono dividendo all'infinito A', A'' (C) per $p$, nonchè del nuovo periodo che, come qui sopra abbiamo notato, vien generato dalla citata operazione.

Conserveremo le notazioni della nota surricordata, citandone gli opportuni paragrafi con parentesi rettangolari. Unica osservazione è questa, che bisogna ritenere il numero A del § [1] costituito dai due gruppi A' ed A'' scritti, senza virgola, l'uno appresso dell'altro.

**2. Proprietà della serie** *b*) **del** § [3].

Abbiamo visto [4] che, qualunque sia $k$, si ha

$$N_k = C\frac{g^{k\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} + N_0 g^{k\gamma}$$

e quindi

$$N_k - N^0 g^{k\gamma} = C\frac{g^{k\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}. \qquad (1)$$

Ed abbiamo assodato che la minima radice della congruenza

$$g^{x\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

(1) "Periodico di Matematica", tomo XXI, fasc. III, novembre-dicembre, 1905.

(2) BETTINI, "Sul numero delle cifre del periodo ecc." (*Periodico di Mat.*, tomo XII, 1897) — MURER, "Sulle frazioni periodiche" (idem., idem) — TAGIURI, "Generalizzazioni ecc." (idem, tomo XVIII, 1902).

è $\lambda$ quando è $g^\gamma - 1$ primo con $p$. Supposto anche C primo con $p$ la (1) dice che il minimo valore di $k$ per cui

$$N_k - N_0 g^{k\gamma}$$

diventa multiplo di $p$ è $\lambda$. Per ciò, se $n$ è un divisore di $\lambda$, diverso da $\lambda$, il quoziente

$$Q = \frac{N_\lambda - N_0 g^{\lambda\gamma}}{N_n - N_0 g^{n\gamma}} = \frac{C\dfrac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^\gamma-1}}{C\dfrac{g^{n\gamma}-1}{g^\gamma-1}} = \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^{n\gamma}-1} = \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} g^{in\gamma}$$

è multiplo di $p$. Abbiamo cioè la congruenza

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} g^{in\gamma} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Moltiplicando per $(N_1 - N_0) g^{k\gamma}$, con $k$ intero qualsiasi, abbiamo

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} (N_1 - N_0) g^{\gamma(in+k)} \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p). \tag{2}$$

Ma è evidente l'eguaglianza

$$(N_1 - N_0) g^{t\gamma} = N_{t+1} - N_t,$$

e sappiamo che $N_t \equiv r_t$ (mod $p$), qualunque sia $t$; dunque la (2) può anch'essere scritta così

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} (r_{in+k+1} - r_{in+k}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

ossia

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+k+1} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+k} \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

Le forme che quest'ultima congruenza assume ordinatamente per $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$, ne fanno convinti che dei sommatori seguenti, anch'essi estesi da $i = 0$ ad $i = \frac{\lambda}{n} - 1$,

$$\Sigma r_{in}; \qquad \Sigma r_{in+1}; \qquad \Sigma r_{in+2}; \ \ldots$$

il primo è congruo al secondo, questo al terzo, questo al quarto, e così via, sempre secondo il modulo $p$. Ed allora secondo lo stesso modulo il primo sarà congruo a quello che gli viene, p. es., $m$ posti dopo, $m$ essendo un qualsiasi intero; si ha cioè

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{n}-1} r_{in+m} \qquad (\mathrm{mod}\ p). \tag{3}$$

CONCLUDIAMO: *Se nella serie* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *sopprimiamo tutti gli elementi aventi indici non multipli di* $n$, *si ha la serie*

$$r_0,\ r_n,\ r_{2n},\ r_{3n},\ \ldots \tag{4}$$

*in cui le infinite somme di $\frac{\lambda}{n}$ termini consecutivi sono tutte eguali fra loro, a meno di multipli di* p.

Osservazione. — Supposto $n'$ divisore di $\frac{\lambda}{n}$, $nn'$ sarà divisore di $\lambda$, e quindi per la (3)

$$\sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{nn'}-1} r_{inn'} \equiv \sum_{i=0}^{i=\frac{\lambda}{nn'}-1} r_{inn'+m} \pmod{p}.$$

E così resta dimostrato che se nella (4) si sopprimono tutti gli elementi aventi indici non multipli di $nn'$ si ha la serie

$$r_0\,,\ r_{nn'},\ r_{2nn'},\ r_{3nn'},\ldots$$

nella quale le infinite somme di $\frac{\lambda}{nn'}$ termini consecutivi sono tutte eguali, a meno di multipli di $p$. E così via per $n''$ divisore di $\frac{\lambda}{nn'}$, per $n'''$ divisore di $\frac{\lambda}{nn'n''}$, ecc.

**Proprietà del periodo.**

**3.** Posto

$$q_i = \text{quoz}\,(N_i\,;\,p)$$

siccome abbiam posto

$$r_i = \text{rest}\,(N_i\,;\,p) \qquad (\text{v. [3]})$$

possiamo scrivere

$$N_{\lambda+k} = pq_{\lambda+k} + r_{\lambda+k}$$
$$N_k = pq_k + r_k\,.$$

Sostituendo nella prima di queste due ultime eg. $r_k$ al posto del suo eguale $r_{\lambda+k}$, moltiplicando la seconda per $-g^{\lambda\gamma}$ e sommando infine membro a membro abbiamo

$$N_{\lambda+k} - N_k g^{\lambda\gamma} = p\,(q_{\lambda+k} - q_k g^{\lambda\gamma}) - r_k\,(g^{\lambda\gamma}-1). \tag{5}$$

Poniamo ancora

$$N_{\lambda+k} - N_k g^{\lambda\gamma} = C_\lambda\,;$$
$$q_{\lambda+k} - q_k g^{\lambda\gamma} = Q_k\,; \qquad g^{\lambda\gamma}-1 = G\,; \qquad \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^{\gamma}-1} = G'.$$

Il $C_\lambda$ è dunque il numero costituito dalle $\lambda\gamma$ cifre che bisogna scrivere a destra della ridotta $N_k$ per avere la ridotta $N_{\lambda+k}$; ossia da $\lambda$ gruppi tutti identici a C: esso è indipendente da $k$ ed eguale a CG'.

Il $Q_k$ è il numero costituito dalle cifre che bisogna scrivere a destra del quoziente $q_k$ per avere il quoziente $q_{\lambda+k}$.

Sostituendo, la (5) prende la forma

$$C_\lambda = pQ_k - r_k G. \tag{6}$$

da cui ricaveremo conseguenze importanti per ulteriori dimostrazioni.

Innanzi tutto si noti che $p$ è divisore di G; ed allora, essendo multiplo di $p$ il secondo membro della (6), abbiamo

$$C_\lambda \equiv 0 \pmod{p} \tag{7}$$

Poniamo adesso $C_\lambda = pC'_\lambda$; la (6) diventa

$$pC'_\lambda = pQ_k - r_k G$$

donde scende immediatamente la congruenza

$$pC'_\lambda \equiv pQ_k \qquad (\text{mod } G)$$

e quindi l'altra

$$pC'_\lambda \equiv pQ_k \qquad (\text{mod } \mathbf{G}).$$

Nel caso poi di $p$ primo col modulo possiamo scrivere

$$pC'_\lambda \equiv Q_k \qquad (\text{mod } \mathbf{G}). \tag{8}$$

(Il segno $\mathbf{G}$ sta per " sottomultiplo di $G$ ").

Si noti infine che, essendo multipli di $G'$ così il primo come il terzo termine della (6), possiamo scrivere

$$pQ_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } G')$$

e quindi anche

$$pQ_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } \mathbf{G}').$$

Nel caso di $p$ primo col modulo sarà anche

$$Q_k \equiv 0 \qquad (\text{mod } \mathbf{G}'). \tag{9}$$

(Il segno $\mathbf{G}'$ sta per " sottomultiplo di $G'$ ").

**4.** Richiamando quanto è stato dimostrato al § [16], possiam dire che, spezzato graficamente $Q_k$, da destra verso sinistra, in parti di $c$ cifre l'una (l'ultima a sinistra potrà averne anche meno), se si fa la somma di queste parti, e poi si opera analogamente su questa per avere un'altra somma, e così via, sino ad ottenere una somma (la indicheremo con $S_{k,c}$) avente non più di $c$ cifre, avremo

$$S_{k,c} \equiv Q_k \qquad (\text{mod } g^c - 1). \tag{10}$$

Ma il modulo $g^c - 1$ è il massimo numero di $c$ cifre; dunque $S_{k,c}$ non potrà superarlo.

Se si sceglie $c$ divisore di $\gamma\lambda$, $g^c - 1$ sarà divisore di $G$, e quindi, nel caso di $g^c - 1$ primo con $p$, la (10) può scriversi, per via della (8),

$$S_{k,c} \equiv C'_\lambda \qquad (\text{mod } g^c - 1)$$

Per $k = i$ e $k = j$ si hanno le congruenze

$$S_{i,c} \equiv C'_\lambda \quad (\text{mod } g^c - 1); \qquad S_{j,c} \equiv C'_\lambda \quad (\text{mod } g^c - 1)$$

e quindi

$$S_{i,c} \equiv S_{j,c} \qquad (\text{mod } g^c - 1).$$

Ma abbiamo osservato sopra che i membri di questa congruenza non possono superare il modulo; dev'essere dunque

$$S_{i,c} = S_{j,c}\,.$$

Si noti ancora che $C'_\lambda$ non dipende da $N_0$.

Concludendo: *Se* c *divide* $\lambda\gamma$ *ed è* $g^c-1$ *primo con* p, *il numero* $S_{k,c}$ *si mantiene costante al variare di* k *e di* $N_0$.

**5.** *Per ogni coppia di numeri* c *e* c' *tali che* $\dfrac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}$ *risulti diverso da* 1, *primo con* p *e divisore di* $G'$, *il numero* $S_{k,cc'}$, *se ha più di* $\gamma\lambda$ *cifre,* *è graficamente scomponibile in gruppi identici fra loro, di* $c'$ *cifre, ha cioè forma periodica semplice.*

Difatti per la (10) si ha

$$S_{k,cc'} \equiv Q_k \pmod{g^{cc'}-1}, \quad \text{e quindi} \quad S_{k,cc'} \equiv Q_k \left(\text{mod } \frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}\right).$$

Ma per la fatta ipotesi ha luogo la (9); dunque

$$S_{k,cc'} \equiv 0 \qquad \left(\text{mod } \frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}\right).$$

Possiamo per tanto porre $S_{k,cc'} = D\,\dfrac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1}$.

Siccome l'intero D non ha più di

$$cc' - (cc' - c' + 1) + 1 = c'$$

cifre, se rappresentiamo con D' il gruppo che si ottiene scrivendogli a sinistra gli zeri necessarii (se n'è il caso) perchè esso risulti proprio di $c'$ cifre, e rappresentiamo con V il numero che si ottiene scrivendo $c$ volte di seguito questo gruppo D', abbiamo

$$V = D\,[g^{(c-1)c'} + g^{(c-2)c'} < \ldots + g^{c'} + 1] = D\,\frac{g^{cc'}-1}{g^{c'}-1} = S_{k,cc'}.$$

Osservazione. — Se $n$ è divisore di $\lambda$ diverso da 1 e $\lambda$, la coppia $n$, $\gamma$ soddisfa alle condizioni volute purchè sia $p$ primo in sè e primo con $g^\gamma - 1$. Difatti $p$, essendo primo con $g^\gamma - 1$, non dividerà (per via di $n < \lambda$) il numero $g^{n\gamma} - 1$ (v. [3]) e quindi nemmeno il quoto $\dfrac{g^{n\gamma}-1}{g^\gamma - 1}$, col quale sarà dunque primo. È poi, per la fatta ipot.,

$$\frac{g^{n\gamma}-1}{g^\gamma-1} \neq 1 \quad \text{e divisore di} \quad \frac{g^{\lambda\gamma}-1}{g^\gamma-1}.$$

6. Dalle cose dette ai § 2, 3, 4, 5 risulta quanto segue, nell'ipotesi di $p$ primo in sè, con $g^\gamma - 1$ e con C, e di $n$ divisore di $\lambda$ diverso da 1 e da $\lambda$.

Divisa una circonferenza in $\lambda$ parti eguali; numerati i punti di divisione, a partire da uno qualunque, in un senso o nell'altro; scritti sui raggi che vanno ai punti di divisione i successivi resti $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$ in modo che sul raggio $i$-esimo cada il resto $r_i$; e scritto sulla circonferenza, nel senso del movimento delle sfere d'un orologio, il numero $Q_k$ di $\lambda\gamma$ cifre in modo che su ciascuna delle $\lambda$ parti cadano $\gamma$ cifre;

se nel piano della circonferenza ed intorno al suo centro gira rigido, in un senso o nell'altro, un fascio regolare di $\dfrac{\lambda}{n}$ raggi,

$\alpha$) *la somma dei* $\dfrac{\lambda}{n}$ *resti che vengono a trovarsi contemporaneamente sui lati di questo poliraggio equiangolo si mantiene costante a meno d'un multiplo di* p.

$\beta$) *la somma dei* $\dfrac{\lambda}{n}$ *numeri di* $n\gamma$ *cifre che vengono a trovarsi contemporaneamente negli angoli del detto poliraggio si mantiene costante* *a meno di multipli di* $g^{n\gamma}-1$; *come costante e di forma periodica semplice si mantiene, al variare di* k, *il numero* $S_{k,n\gamma}$, *resto di detta somma per* $\dfrac{g^{n\gamma}-1}{g^{\gamma}-1}$.

**7.** Per fare che siffatti risultati s'imprimano meglio nella mente, si compiaccia il lettore di ricorrere ad un esempio che li chiarisca.

Consigliamo, per es., la divisione all'infinito di 3, 1 (41) per 97 scegliendo $g=10$, ossia facendo uso del sistema decimale. È facile verificare che il risultato dell'operazione è il seguente:

0,0(323857127980839321045506612516921795272310736228620014578777465375403519733416640633135478496 30)

Qui si ha $\gamma=2$; $\lambda=48$ e quindi sono $2.48=96$ le cifre periodiche; è $p=97$; la successione dei resti $r_0, r_1, r_2, \ldots$ è la seguente: 31, 37, 55, 12, 77, 78, 81, 90, 20, 4, 53, 6, 59, 24, 16, 89, 17, 92, 26, 22, 10, 71, 60, 27, 25, 19, 1, 44, 76, 75, 72, 63, 36, 52, 3, 50, 94, 32, 40, 64, 39, 61, 30, 34, 46, 82, 93, 29, ecc...

Si può scegliere, p. es., $n=4$, nel quale caso si trova

$$S_{k,n\gamma}=S_{k,8}=7575757575757575$$

qualunque sia $k$.

Così si trova ecc.

**Ancora dell'indice minimo $\lambda$.**

**8.** Dimostreremo qui altre importanti proprietà di $\lambda$, riferentisi ai risultati segnalati in questa nota. È quasi inutile avvertire che dalle proprietà di $\lambda$ scendono immediatamente proprietà corrispondenti del prodotto $\gamma\lambda$, che, come in principio abbiamo avvertito, è il numero delle cifre periodiche che si ottengono dividendo all'infinito A', A'' (C) per $p$.

**9.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè nel caso di* p *primo, diverso da* 2 *e primo con* g, *si abbia* $\lambda=2n$ *è che i primi* n *elementi* $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{n-1}, r_n$ *sieno diversi da* $r_0$, *e si abbia*

$$r_n+r_0\equiv r_{n+1}+r_1 \pmod p$$

*La condizione è necessaria.* Se è $\lambda=2n$, gli elementi $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ son tutti diversi da $r_0$, perchè è $r_{2n}$ il primo elemento della (6) (v. [3]) eguale ad $r_0$. Inoltre la (3) per $m=1$ diventa

$$r_0+r_n\equiv r_1+r_{n+1} \pmod p.$$

*La condizione è sufficiente.* Difatti dalla congruenza

$$r_0+r_n\equiv r_1+r_{n+1} \pmod p$$

scende la congruenza

$$N_0+N_n\equiv N_1+N_{n+1} \pmod p$$

e da questa l'altra

$$N_{n+1}-N_n\equiv-(N_1-N_0) \pmod p.$$

Ma è

$$N_{n+1}-N_n=(N_1-N_0)\,g^{n\gamma},$$

dunque

$$(N_1-N_0)\,g^{n\gamma}\equiv-(N_1-N_0) \pmod p. \qquad (11)$$

Ma non è

$$N_1 \equiv N_0 \pmod p$$

perchè è per ipotesi $r \neq r_0$; dunque non è

$$N_1 - N_0 \equiv 0 \pmod p$$

il che porta, $p$ essendo primo, che $N_1 - N_0$ e $p$ sono primi fra loro, per cui la congruenza (11) può anche scriversi

$$g^{n\gamma} \equiv -1 \pmod p. \tag{12}$$

Quadrando, abbiamo

$$g^{2n\gamma} \equiv 1 \pmod p$$

ossia

$$g^{2n\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod p. \tag{13}$$

Si noti intanto che non può aversi $g^\gamma - 1 \equiv 0 \pmod p$ perchè si avrebbero (secondo lo stesso modulo) successivamente le congruenze $g^\gamma \equiv 1$; $g^{n\gamma} \equiv 1$ delle quali la seconda combinata con la (12) darebbe $1 \equiv -1 \pmod p$, ossia $2 \equiv 0 \pmod p$ e noi abbiamo escluso per $p$ il valore 2.

Ciò posto, ricordando che le radici della

$$g^{x\gamma} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

sono multiple di $\lambda$, la (13) ne avverte che $2n$ è multiplo di $\lambda$. Ci rimane da mostrare che si ha proprio $2n = \lambda$.

Non può essere $2n = 0 \,.\, \lambda$, perchè sarebbe $n = 0$ e quindi $r_n = r_0$. Non può nemmeno essere $2n = 2 \,.\, \lambda$, perchè sarebbe $n = \lambda$ e quindi $r_n = r_\lambda = r_0$, il che contraddice alla ipotesi. Nè infine può essere $2n = t\lambda$ con $t > 2$, perchè sarebbe

$$r_{\frac{2n}{t}} = r_\lambda = r_0 \qquad \text{con} \qquad \frac{2n}{t} < n$$

il che pure è contrario all'ipotesi. Dev'essere dunque $2n = 1 \,.\, \lambda = \lambda$.

**10.** Corollario 1°. — Nel caso di $r_0 = 0$ ed $r_1 = 1$, pel teorema testè dimostrato, se i primi $n$ elementi della successione

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, r_{n+1}, \ldots$$

sono diversi da zero, la congruenza

$$r_n \equiv r_{n+1} + 1 \pmod p$$

esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè sia $\lambda = 2n$.

Si noti che i numeri non nulli $r_n$ ed $r_{n+1} + 1$ non superano $p$ e quindi non possono essere congrui secondo $p$ se non sono eguali; ed allora si capirà come la congruenza ultima si converta nell'eguaglianza

$$r_n = r_{n+1} + 1.$$

Dunque: *Dato un numero* $N_0$, *anche nullo, multiplo di* p, *e dato un gruppo di cifre* C *rappresentanti un numero congruo ad* 1 *secondo il numero* p, *primo in sè, diverso da* 2 *e primo con* g, *la condizione necessaria e sufficiente perchè sia pari* (= 2n) *il minimo numero di volte che bisogna scrivere* C *a destra di* $N_0$ *per avere un multiplo di* p *è che* *i resti* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *siano diversi da zero, ed* $r_n$ *superi di* 1 *il resto successivo.*

11. Corollario 2°. — Quando $N_0 = 0$, $C = 1$ e $\lambda = 2n$, la divisione parziale, che porge $r_{n+1}$, ha per dividendo $r_n g + 1$, per divisore $p$ e per quoziente un numero di una sola cifra, poniamo $\varepsilon$. Si ha per tanto

$$r_n g + 1 = \varepsilon p + r_{n+1}$$

ma (C 1°) è

$$r_{n+1} + 1 = r_n.$$

Sostituendo viene

$$r_n g + 1 = \varepsilon p + r_n - 1$$

ossia

$$\varepsilon p = r_n (g - 1) + 2.$$

*Dunque nelle fatte ipotesi e per* $g > 3$ *il resto* $r_n$ *è il quoziente di quello tra i primi* $g - 1$ *multipli di* $p$ *che diviso per* $g - 1$ *dà per resto* 2.

G. Calvitti
*Ascoli Piceno.*

# LA RECENTE RIFORMA DEGLI STUDI SECONDARI IN FRANCIA

*del 30 maggio 1902*

(Decreti del 27, 28 luglio ed 8 settembre 1905)

## Istruzioni relative all'insegnamento delle matematiche.

I programmi di matematiche debbono venir considerati come indici delle materie da insegnarsi nelle varie classi; ogni libertà è lasciata al professore di adottare l'ordine che gli convenga, di servirsi dei metodi che gli sembreranno più utili agli scolari che dirige.

Nel secondo ciclo, gli studi dovendo venir sanzionati dall'esame di baccalaureato, il professore deve naturalmente esporre tutto quanto figura nel programma; nel primo ciclo, egli è libero di ogni preoccupazione di esame e non ha altra guida che lo sviluppo dei proprî scolari; può quindi, se lo crede utile, trascurare alcuni punti ed insistere maggiormente sulle parti più accessibili o più necessarie agli scolari speciali che gli vengono affidati; il programma verrà considerato come un massimo; meglio è per i ragazzi acquistare cognizioni precise poco estese, anzichè avere idee vaghe su argomenti molto svariati.

Se è indispensabile lasciare al maestro gran libertà nella scelta dei metodi, affinchè il suo insegnamento abbia una certa efficacia, occorre però ben precisare lo spirito secondo il quale tale insegnamento deve venire impartito, onde conservargli, nel suo insieme, una direzione unica ed evitare che il passaggio da una classe all'altra riesca pel ragazzo causa di confusione nei suoi studi. Si chiede dunque ai professori di inspirarsi alle seguenti indicazioni circa i programmi dei varî cicli.

*1° Ciclo B.*

Bisognerà non dimenticare che gli scolari sono giovani ragazzi, alcuni dei quali lasceranno il liceo dopo la Terza; quindi, gli esercizî pratici dovranno essere moltiplicati ed estendersi su dati reali e non fittizî; la teoria verrà ridotta a spiegazioni fatte sopra esempî concreti, almeno dapprincipio; soltanto poco a poco sarà possibile, con grandi precauzioni, abituare gli allievi alle più semplici nozioni astratte, mostrando con esempî numerosi la necessità di una definizione precisa, di un ragionamento puramente logico, insistendo, ove occorra, sugli errori che si possono commettere, se si ragioni su argomenti mal definiti, su figure i cui elementi e posizione non siano stati esattamente determinati. Le raccolte di problemi divertenti forniranno numerosi esempî che colpiranno l'intelligenza degli scolari; citiamo, a caso, la dimostrazione dell'uguaglianza di 64 e 65, di un angolo retto e di un angolo ottuso, ecc.

Aritmetica. — Gli studenti debbono venire esercitati al calcolo numerico ed alla risoluzione dei problemi la cui soluzione non esige artificio alcuno; non vi è scopo, particolarmente, nel domandare ai ragazzi di limitarsi ad impiegare soltanto mezzi puramente aritmetici, se l'algebra offre una soluzione semplice ed immediata di una quistione. Si insisterà sull'ordine di grandezza dei risultati, richiamando l'attenzione sopra gli errori che il buon senso permette d'evitare: facendo variare i dati di un problema, sostituendo, per esempio, centimetri a metri, si chiederà di prevedere quale sarà l'ordine di grandezza del nuovo risultato, in confronto all'antico; sopratutto bisogna evitare che l'allievo eseguisca macchinalmente dei calcoli, senza rendersi conto, continuamente, della corrispondenza loro colla realtà.

Il programma di contabilità è stato scorciato e sostituito dall'indicazione di nozioni sui calcoli pratici adoperati nella banca e nel commercio, vi si eserciteranno gli studenti, avendo cura di non operare che su dati precisi tolti alle operazioni reali.

Il professore è invitato a trattare questa parte del programma con tanta più cura, inquantochè è stata considerevolmente semplificata, e queste nozioni possono essere indispensabili agli scolari che lasciano il liceo od il collegio dopo il primo ciclo.

La parte teorica è ridotta allo studio dell'addizione, della sottrazione, della moltiplicazione dei numeri interi, della ricerca dei caratteri di divisibilità, delle frazioni, tale studio compiendosi sopra esempî concreti. Tuttavia, non vi ha in ciò niente d'assoluto: se uno studente ha la curiosità di rendersi conto del meccanismo di un'operazione, della ragion d'esistere di una regola data, sarà utile soddisfare tale curiosità e sarebbe dannoso rispondervi con un *fin de non recevoir*.

Algebra. — I fatti più importanti dell'algebra essendo stati incontrati negli esercizi delle classi di Quinta e di Quarta, si potrà, in Terza, precisarli e darne una teoria elementare. Gli enunciati dei teoremi debbono essere precisi, ma è inutile insister troppo sulle eccezioni che possono presentarsi: sappia l'allievo che la proposizione che applica è vera solo sotto certe condizioni; tanto basta; se, in un caso particolare, a tali condizioni non viene adempiuto, egli saprà che deve trattare il problema in sè stesso, e sarà esercizio migliore di quello che consisterebbe nel ricercare, con uno sforzo di memoria, a quali modificazioni del teorema corrisponde questo caso particolare.

Lo studio delle variazioni di una funzione sarà accompagnato da una rappresentazione grafica più esatta, che sia possibile. La curva tracciata servirà a determinare una coordinata in funzione dell'altra; il confronto dei risultati grafici dai numeri calcolati direttamente permetterà di fare apprezzare l'importanza della precisione nel disegno, e si abituerà così lo scolaro a rendersi conto della grandezza dell'approssimazione che può dare il procedimento grafico.

Geometria. — L'insegnamento della geometria dev'essere essenzialmente concreto; ha per iscopo di classificare e precisare le nozioni acquistate coll'esperienza quotidiana, di dedurne altre più nascoste e di mostrare le loro applicazioni ai problemi che si pongono nella pratica.

Esclusa ogni definizione puramente verbale, non si dovrà parlare di un nuovo elemento che dandone la rappresentazione concreta ed indicandone la costruzione; ciò esige che l'ordine generalmente adottato venga modificato; in particolare che la definizione del circolo venga introdotta fino da principio e che l'uso degl' istrumenti da disegno venga indicato a seconda del bisogno. Se il programma è redatto nell'ordine consueto, è allo scopo di non imporre alcun ordine speciale; s'intende che quello indicato non è quello che si seguirà nell' insegnamento.

Dal punto di vista della spiegazione dei fatti, il professore dovrà fare appello all'esperienza, ed ammettere risolutamente come verità sperimentale tutto ciò che sembri evidente ai ragazzi; non vi ha utilità alcuna nel dimostrare l'eguaglianza degli angoli retti, degli angoli corrispondenti, l'esistenza dell'intersezione di un circolo e di una retta di cui un punto sia interno al circolo, ecc. L'allievo non capisce che vi sia ragione di dimostrazione e ritiene solo parole prive di senso; si può, ed è da desiderarsi, far sentire in certi casi la necessità di una dimostrazione; ma non bisogna dare quest'ultima altro che quando l'allievo è convinto che sia indispensabile.

Si avrà così occasione di dimostrare che vi sono due certezze d'ordini differenti: una, sperimentale, appartenente alle scienze fisiche; l'altra, logica, appartenente alle verità matematiche; ma, vi sarebbe un grave inconveniente nel dare a quest'ultima una importanza che in realtà non ha e nel gettare il discredito sulla prima, che, bisogna ben riconoscerlo, è la sola che possediamo, poichè i principî matematici non hanno alcun altro fondamento, almeno per gli studenti. Ciò che importerà far risaltare, è l'importanza del ragionamento logico per ridurre al minimum i fatti sperimentali; sarebbe facile moltiplicare gli esempî; se si costruisce un decagono regolare inscritto, si constata sperimentalmente che è quasi impossibile chiuderlo; al contrario, prendendo per lato di un poligono regolare la metà del lato del triangolo equilatero, si ottiene sensibilmente un eptagono regolare; se si misura la somma degli angoli di un triangolo, si trovano numeri vicini a 180°, ecc. Questi esempî dimostrano che l'esperienza fa presentire una verità, ma non basta a farla conoscere in modo preciso; se è dunque possibile, coll'aiuto di un ragionamento logico, metter questa verità in evidenza o d'infirmare ciò che sembrava dare l'esperienza, vi è molto vantaggio nel farlo; è ugualmente opportuno far risaltare l'interesse pratico presentato dal metodo puramente logico, insistendo sull'avere esso fatto scomparire ogni incertezza nei resultati. Si sarà così preparato lo studio della geometria, che verrà fatto nel secondo ciclo, in cui gli allievi avvertiti non si stupiranno della minuta cura colla quale vengono dimostrati i minimi teoremi.

Un costante richiamo alla nozione del moto sembra debba facilitare l'insegnamento della geometria; così il parallelismo verrà legato alla nozione sperimentale di traslazione, e lo studio delle rette e piani perpendicolari risulterà dalla rotazione; l'idea d'uguaglianza sarà legata a quella del trasporto delle figure, che verrà precisata introducendo la nozione tanto semplice d'orientamento.

Il disegno è chiamato a rappresentare una parte importante nell'insegnamento della gometria così concepito; si dovranno fare eseguire bene esattamente le costruzioni indicate nel corso e mescolare intimamente il calcolo alle misure direttamente effettuate. È specialmente in Terza che si potranno interessare gli allievi, facendo loro eseguire disegni semplicissimi relativi alle ombre e sezioni piane; non sarebbe il caso di indicare i metodi generali della geometria descrittiva o della geometria quotata: ogni quistione dovrà venire studiata in sè stessa, e l'ingegnosità dell'allievo potrà venire esercitata colla ricerca dei modi più atti a dare la soluzione del problema; dovrà servirsi dei più importanti teoremi del corso e giudicherà così della loro utilità. Nulla impedirà di far costruire il corpo rappresentato dal disegno, di calcolarne gli elementi, poi di misurarli mediante il disegno o sul corpo stesso: il confronto dei varî risultati permetterà di apprezzare il valore d'ogni procedimento.

Il disegno non è d'altronde il solo ausiliario di quest'insegnamento: ve ne sono altri che hanno anche maggiore importanza, poichè fanno meglio risaltare il legame della teoria e delle applicazioni. Particolarmente, sarebbe interessante mettere un oggetto di forma semplice in mano all'allievo, domandargli di eseguire su tale oggetto tutte le misure che stimasse necessarie per poter poi riprodurle mediante un disegno, valutarne la superficie, il volume, ecc., i risultati ottenuti permettendo verificazioni sperimentali.

Nello stess'ordine di idee, si raccomanda di esercitare gli allievi all'esecuzione del rilevamento di piani, cosa che potrà farsi senza uscire dell'istituto. È facile tracciare una retta congiungendo due punti situati in sale differenti, misurare la distanza di questi punti, ecc.; si insisterà del resto sull'intervento in queste applicazioni, dei teoremi che possono esser sembrati d'ordine puramente speculativo.

Accanto a questi esercizî pratici, che verrebbero molto facilitati da una collezione di modelli ed apparecchi semplici, si avrà luogo d'abituare gli allievi alla risoluzione di problemi semplicissimi, cercando di far loro indovinare la soluzione e sviluppando così la loro intuizione, esigendo poi una dimostrazione rigorosa, insistendo sull'importanza d'ogni frase, mostrando al bisogno come una parola male scelta o mal definita possa, secondo l'interpetrazione che le vien data, condurre a conclusioni ben differenti.

### *1° Ciclo A e 2° Ciclo A e B.*

L'insegnamento delle matematiche in questi cicli dovrà essere impartito dallo stesso punto di vista del 1° Ciclo B. Il poco di cui dispone il professore non permettendogli di svolgere ampiamente il suo corso, dovrà sopratutto applicarsi a dare in geometria un'idea della forma dei corpi e potrà lasciar da parte, se lo creda utile, ogni teoria un po' astratta. Gli esercizî dovranno specialmente consistere in problemi sulle aree ed i volumi, insistendo sulla scelta delle unità, e facendo rivedere continuamente il sistema metrico; costruzioni semplicissime, ma eseguite con cura, potranno costituire eccellenti compiti; solo nelle classi contenenti allievi desiderosi di dedicarsi in seguito alle scienze potranno darsi a risolvere veri problemi di geometria, teoremi da dimostrare, luoghi geometrici.

Le dimostrazioni si daranno solo quando un sufficiente numero di allievi sarà in grado di comprenderle; pei volumi ci si limiterà, ove occorra, agli enunciati delle regole pratiche, o, in casi semplici, si giustificheranno tali regole impiegando il metodo infinitesimale, senza, beninteso, sollevare a questo riguardo difficoltà alcuna.

Conferenze facoltative. — Nelle conferenze destinate agli scolari desiderosi di fare studî scientifici dopo avere seguito i corsi dei secondi cicli *A* e *B*, viene lasciata al professore la massima libertà;

avendo dinanzi a sè scolari intelligenti e lavoratori, sarà solo giudice dello sviluppo che può dare al proprio corso; l'importante è che formi allievi che possano capire le matematiche; non occorre che ne sappiano molto; ciò che è indispensabile, è che abbiano compreso i principî, e siano abituati al ragionamento logico.

*2° Ciclo C e D.*

I programmi del secondo ciclo scientifico sono stati concepiti in modo da permettere agli scolari che entrano a Matematiche $A$ e $B$ di possedere a fondo gli elementi di geometria, d'algebra e di trigonometria.

La forma da darsi all'insegnamento è quella adottata attualmente, gli studi fatti nel primo ciclo avendo preparato gli scolari a ricevere un insegnamento logico; non si dimenticherà che solo facendo numerosi esercizî si abituano gli allievi a servirsi con sicurezza degli elementi di cui dispongono.

Sarà bene far risaltare i legami intimi tra le varie parti del corso, tenendo di pari passo la parte algebrica e quella geometrica; non vi ha inconveniente alcuno nell'introdurre le relazioni trigonometriche nelle dimostrazioni geometriche, nell'utilizzare per la determinazione dei volumi il metodo infinitesimale, che si può presentare con ogni rigore nei casi semplici.

## Matematiche $A$ e $B$.

In Matematiche $A$ e $B$, il professore non dovrà far corsi sulle materie già scorse nelle classi di Seconda e Prima, in algebra, trigonometria, geometria e geometria descrittiva; ma dovrà accertarsi, con interrogazioni metodiche ed esercizî, che tutti gli allievi le studino e le posseggano.

Specialmente, sarebbe interessante riunire in geometria tutto quanto è descrittivo, poi tutto quanto è metrico, avvicinando lo studio dello spazio a quello del piano: ciò non presenterebbe difficoltà alcuna a studenti che hanno già fatto un primo studio della geometria ed avrebbe il vantaggio di aggruppare i fatti simili, presentando così una veduta d'insieme, senza la quale resta ben difficile coordinare le idee.

Occorre appena insistere sull'importanza da darsi agli esercizî pratici, quali rilevamento di piani, esecuzione di disegni; solo facendone una gran quantità, lo studente riterrà la geometria descrittiva e vi prenderà interesse.

In meccanica, non verrà sollevata difficoltà alcuna sui principî: il principio dell'indipendenza degli effetti delle forze potrà venir ridotto a questo che, se parecchie forze agiscono in un momento $t$

sopra un punto materiale, l'accelerazione che possiede in quel momento è la somma geometrica delle accelerazioni che possederebbe, se ogni forza agisse da sola. Il professore dovrà evitare tutti gli sviluppi e gli esercizî che presentano solo un interesse geometrico: allo scopo appunto di sopprimere ogni occasione di sviluppi di tal genere i teoremi aventi rapporti coi vettori sono stati ridotti al minimo indispensabile e trasportati nel programma di geometria, ove si presentano sotto il loro vero aspetto. Il professore dovrà scegliere esercizî di meccanica di carattere pratico, collegati a meccanismi, a movimenti, ad equilibri familiari agli studenti; dovrà porre problemi precisi, con dati numerici, in modo da abituare i principianti ai varî sistemi d'unità ed all'uso del sistema metrico; eviterà le generalità e l'abuso del calcolo, esercitando gli allievi a ragionare direttamente sopra ciascuna quistione. Nella spiegazione della realizzazione pratica de' movimenti di traslazione, di rotazione, del movimento elicoidale e delle trasformazioni di movimenti usate nelle macchine, il professore non si contenterà delle figure, e neppur dei modelli; dovrà far vedere agli allievi macchine usuali, analizzarle con loro, mostrar loro i mutui legami dei pezzi e le trasformazioni di ruote che ne risultano. Così in statica e dinamica, sarà utile scegliere esercizî presentanti un carattere pratico, ed eseguirne le realizzazioni sperimentali. Correggendo i lavori scritti che comportano calcoli numerici, il professore dovrà cogliere ogni occasione per spiegare agli scolari i metodi di approssimazione.

In cosmografia, converrà non sviluppare i metodi di misura od osservazioni interessanti per l'astronomo di professione, ma dare specialmente nozioni d'astronomia fisica.

Almeno un'ora per settimana deve venir dedicata *esclusivamente* ai problemi, alle prove pratiche di calcolo, di geometria descrittiva, di meccanica ed agli esercizî sui corsi. Tutti gli esercizî dovranno riferirsi rigorosamente al programma; nessun nuovo sviluppo teorico dovrà esser dato a proposito di un esercizio.

# BIBLIOGRAFIA

*Théorie et pratique des approximations numériques*, par CH. FASSBINDER. Paris, Gauthier-Villars, 1906 (in-8, de VI-90 pages, fr. 3).

Il classico lavoro, che il GUYOU pubblicò sotto il modesto titolo: *Note sur les approximations numériques* [1], ha fatto scuola; dopo il fascicolo del GRBISS [2], ne è uscito un altro del FASSBINDER, e questo, come quello, ha per scopo principale di volgarizzare le idee dell'innovatore maestro. Eccone un rapido cenno,

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1891.
(2) *Approximations numériques*. Ed. Nony, Paris, 1898.

che vorremmo facesse nascere in qualche lettore il desiderio di occuparsi un po' di questi studi, fra noi, purtroppo, trascuratissimi [1].

L'opera è divisa in cinque capitoli, seguiti da un svariata e abbondante raccolta di utili esercizi.

Il primo capitolo contiene le definizioni fondamentali; opportuni esempi numerici e opportunissime rappresentazioni grafiche chiariscono queste definizioni e le fissano nella mente del lettore. Il capitolo finisce coi due noti teoremi [2], che stabiliscono le relazioni fra l'errore relativo e il numero delle cifre esatte. A proposito di queste definizioni, ci sia permesso insistere sopra i vantaggi che deriverebbero dalla definizione di ordine di una cifra decimale, altra volta da noi stessi raccomandata [3]; l'esposizione della teoria delle approssimazioni sarebbe sensibilmente semplificata e facilitata, poichè, p. es., sarebbe molto più semplice e più chiaro il dire che due cifre sono degli ordini $+3$ e $-2$, anzichè il dire che sono rispettivamente del terzo ordine, e del secondo ordine decimale (§ 3). Aggiungiamo anche che sarebbe bene, qui e in seguito, considerare fra gli esempi il caso in cui l'errore derivi dall'arrotondamento dell'ultima cifra, perchè questo caso, in pratica, si presenta frequentissimamente.

Nel secondo capitolo si risolve il primo dei due problemi che si considerano nella teoria in discorso, e cioè: *conoscendo i limiti superiori degli errori assoluti di alcuni numeri, trovare un limite superiore dell'errore assoluto del risultato di un calcolo da eseguirsi sui numeri stessi.* Si comincia coi teoremi che danno gli errori assoluti dei risultati delle operazioni fondamentali, fino alla estrazione di radice cubica: il teorema relativo al prodotto è esteso a un numero qualunque di fattori, e le dimostrazioni sono molto dettagliate (forse troppo, e ciò per una ragione che vedremo poi). Seguono alcuni esempi numerici; e a quelli che non sono *semplici* (che richiedono cioè più di una operazione) l'A., molto giustamente e molto opportunamente, cerca di dare una disposizione analoga a quella che il GUYOU dà solo per la risoluzione del secondo problema. Si ripetono poscia tutte le stesse considerazioni per i due casi in cui, invece dell'errore assoluto, si voglia conoscere l'errore relativo, oppure il numero delle cifre esatte.

Nel terzo capitolo si risolve il secondo dei problemi accennati, e cioè: *calcolare con un errore assoluto inferiore a un numero dato una espressione numerica data* (nella ipotesi, ben s'intende, che i numeri sui quali si deve operare si abbiano o

---

(1) E ciò perchè nelle nostre scuole non si parla affatto di questo importante argomento; mentre, evidentemente, la sua conoscenza è indispensabile per coloro, e sono i più, i quali studiano la matematica solo per applicarla poi alla *Ingegneria,* alla *Navigazione,* alla *Balistica,* alla *Astronomia,...* È per questo che, anche quando si tratta di applicazioni numeriche semplicissime, i giovani studiosi procedono senza criteri fissi e razionali, e spingono talvolta i risultati a una approssimazione, non solo illusoria, ma addirittura puerile.

In Francia la teoria delle approssimazioni numeriche è richiesta per l'ammissione a tutte le scuole pratiche, come la *Scuola d'Arti e Mestieri,* la *Scuola Navale,...* (e i candidati devono saper risolvere dei problemi di questo tipo: " Indicando con $a$ e $b$ l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo, si ha $a = 75^m$ e $b = 32^m$ colla approssimazione di $0^m,2$ e di $0^m,1$ rispettivamente; con quale approssimazione si può ottenere l'angolo opposto a $b$? " (S. N. 1891). " Le dimensioni di un tronco di cono, approssimate per eccesso, sono: raggi delle basi $6^m,3$ e $3^m,1$, altezza $5^m,9$; si domanda con quale approssimazione comune bisogna misurare queste dimensioni, per poterne dedurre il volume del tronco stesso colla approssimazione di $1^{m^3}$ "). Ed ora è giustamente richiesta anche da coloro che, nell'ultimo anno della scuola secondaria, hanno preferita la classe di *Matematica* a quello di *Filosofia.*

Perchè non si può fare altrettanto in Italia, specialmente dopo le modificazioni portate nei programmi dei licei colla legge del Novembre 1904? A noi pare che ai giovani che si preparano allo studio delle matematiche applicate, sarebbe molto più utile insegnare come si debbano eseguire le ordinarie operazioni sui numeri che si presentano in pratica, anzichè insegnar loro (in terza classe) i complementi della teoria dei numeri primi.

(2) Veggasi VIELLE, *Théorie générale des approximations numériques.* (Ed. Mallet-Bachelier, Paris, 1854): è l'opera più estesa sull'argomento, e da essa hanno poi attinto tutti i compilatori. Solo quarant'anni dopo la sua pubblicazione la teoria delle approssimazioni ha subìto una importante modificazione, e ciò nel lavoro, già accennato, del Com.te GUYOU.

(3) Veggasi *Sull'ordine delle cifre di un numero decimale,* " Periodico di Matematica ", Anno X, fasc. I. Fra le semplificazioni derivanti da questa definizione abbiamo ripetutamente esperimentato essere utilissima quella che riguarda la divisione fra due numeri decimali. Così, p. es., dovendo dividere 0,00626378 per 1627,3, oppure 5853,8 per 0,027, si vede subito, senz'altro, che la prima cifra del quoziente nel primo caso (3) è dell'ordine $-6$, e nel secondo caso (2) è dell'ordine $+5$. Dalla *Aritmetica* si hanno invece diverse regole, non sempre semplici nè sempre chiare, tanto che la loro applicazione è sempre penosa ed è spesso causa di incertezze e di errori.

si possano calcolare colla approssimazione che si trova essere necessaria). Lo svolgimento di questo capitolo è identico a quello del precedente ed è minuziosamente accurato. Una prova di questa minuziosa cura si ha nell'ultimo §. dove si considera l'operazione, che rende razionale il denominatore di una frazione, dal punto di vista dei calcoli approssimati; e si osserva, per es., che sarebbe dannoso, anzichè vantaggioso, sostituire la seconda alla prima delle due espressioni

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{(1+\sqrt{2})\sqrt{\pi}}{\pi}.$$

Il quarto capitolo contiene le note regole per le operazioni abbreviate (moltiplicazione, divisione, estrazione di radice quadrata e anche estrazione di radice cubica): vi notiamo solo che il ragionamento che segue gli esempi della moltiplicazione e della divisione, è piuttosto una *giustificazione* della regola, anzichè (come dice l'A.) una *dimostrazione* (1).

L'ultimo capitolo è forse quello che è meno pregievole. L'A. comincia coll'accennare alla semplicità, che si potrebbe introdurre in molte dimostrazioni colla considerazione dei numeri negativi; e ciò perchè egli ha voluto serbare ai quattro capitoli precedenti un carattere strettamente aritmetico. Ma a noi pare che questo procedimento sia inutile e dannoso: inutile perchè la teoria delle approssimazioni non si insegna certo a chi non conosce gli elementi dell'*Algebra* (2), dannoso, perchè in qualche punto richiede delle prolissità, le quali (come già accennammo parlando del secondo capitolo) nuòcciono alla chiarezza. Segue l'esposizione, in forma generale, del metodo del Guyou: e qui crediamo che sarebbe opportuno un maggiore sviluppo, specialmente per ciò che riguarda la soluzione del secondo problema.

Concludendo però, diremo che il lavoro del sig. Fassbinder è semplice, chiaro ed elementare, e che, se vi fossero introdotte le poche e leggiere modificazioni accennate, non lascierebbe a desiderare di meglio.

G. Pesci.

## *Sammlung Göschen.* — Leipzig. - N. 41. Mahler. *Ebene Geometrie.* — N. 72. Doehlemann. *Projektive Geometrie.*

La collezione Göschen ha molta analogia con l'ottima raccolta dei manuali Hoepli e con la biblioteca degli studenti del Giusti. Si compone di volumetti di 160 a 200 pagine, elegantemente legati in tela al prezzo di 80 pfennig (L. 1); in ciascuno dei quali si trova una rapida, chiara e facilmente intelligibile esposizione delle parti fondamentali di una data scienza o di una parte di essa, in guisa da servire come ottimo avviamento allo studio di opere più voluminose e perfette.

La collezione è prossima ad avere 300 volumi, dei quali una quarantina si riferiscono alle matematiche.

Abbiamo sott'occhio la 4ª edizione della geometria piana e la 3ª edizione della geometria proiettiva, recentemente pubblicate.

---

(1) A proposito della teoria delle approssimazioni numeriche e delle operazioni abbreviate, a noi pare che, per la pratica, sarebbe molto necessario considerare anche quest'altra questione: *conoscendo l'approssimazione dei dati, in che modo si devono eseguire le ordinarie operazioni per non arrivare, nei risultati, a un'approssimazione illusoria?* Questo problema, si può osservare, è implicitamente compreso nel primo dei due problemi fondamentali; ma a noi pare tanto importante, che dovrebbe essere studiato a sè, e che le semplici regole, che, nei casi ordinari, si possono trovare per la sua soluzione, dovrebbero costituire un capitolo dell'*Aritmetica pratica.* Nel caso in cui gli errori che affettano i dati siano quelli soltanto che derivano dall'arrotondamento dell'ultima cifra (che è il caso più frequente e al quale si possono ricondurre tutti gli altri) demmo già, noi stessi, delle regole per le quattro operazioni fondamentali e le applicammo alle operazioni occorrenti per l'ordinaria interpolazione (*Sulle operazioni fra numeri decimali approssimati...* "Periodico di matematica „. Vol. XIX, fasc. VI e Vol. XX, fasc. I e II). Facciamo notare che per l'applicazione di queste nostre regole non occorre affatto eseguire le operazioni in modo diverso dal solito (meno, nella moltiplicazione, l'inversione dell'ordine dei prodotti parziali; inversione che si può seguire anche nell'*Aritmetica Elementare* (v. Baltzer) e che, del resto, tutti fanno quando eseguiscono la interpolazione diretta in una tavola logaritmo-trigonometrica, avente le solite tavolette ausiliarie); e questo ci pare un vantaggio notevole, chè le regole per le operazioni abbreviate sono poco semplici, e (se non si ha l'occasione di applicarle spesso) si dimenticano facilmente.

(2) Se così fosse, non si potrebbe neppure adottare l'accennata definizione generale di ordine di una cifra decimale; ma così non è, e l'esame dei programmi delle scuole francesi ce lo ha dimostrato.

Nella prima notiamo anzitutto una novità tipografica. Le figure sono stampate a due colori; in nero le linee fondamentali, in rosso le secondarie. Questa disposizione rende le figure molto chiare e nitide; ma non è senza inconvenienti.

Infatti talvolta la sovrapposizione non è perfetta ed allora la chiarezza sparisce; questo inconveniente sembra si sia manifestato maggiormente nelle figure più complesse della geometria proiettiva, poichè nella 3ª edizione di questo trattatello si è stimato conveniente ritornare al vecchio sistema e stampare le figure soltanto in nero.

Per dare un'idea del contenuto, riportiamo sommariamente l'indice delle due operette.

MAHLER - *Ebene Geometrie.*

I. Sezione: Simmetria e congruenza. — Cap. I. Il circolo - Luoghi geometrici. — II. L'angolo. — III. Delle figure in generale. — IV. Simmetria centrale — V. Simmetria assiale. — VI. Congruenza. — VII. Il parallelogrammo ed il trapezio. — VIII. Il circolo. — IX. Poligoni regolari. — X. Equivalenza.

II. Sezione: Similitudine — Cap. XI. Segmenti proporzionali determinati da parallele. — XII. Segmenti proporzionali determinati da trasversali. — XIII. Similitudine dei poligoni. — XIV. Misura delle figure rettilinee. — XV. Misura del circolo.

III. Sezione: Problemi geometrici. — Cap. XVI. Natura dei problemi e modo di trattarli.

DOEHLEMANN - *Projektive Geometrie.*

I. Sezione: Relazioni prospettive delle forme fondamentali. — II: Forme armoniche. — III: Le relazioni proiettive delle forme di prima specie. — IV: Relazioni proiettive sullo stesso sostegno. — V: La conica generata da forme proiettive fondamentali di prima specie. — VI: La teoria delle polari rispetto ad una conica. — VII: Le superficie coniche e rigate di second'ordine determinate da forme proiettive.

## LAISANT. — *Initiation mathématique.* Ouvrage étranger a tout programme dédié aux amis de l'enfance. Genève, Georg — Paris, Hachette — 1906.

" Coloro per i quali la parola " istruire „ è sinonimo d' " annoiare „ e talvolta " di " torturare „ sono veri malfattori pubblici. È tempo che il loro dominio ne" fasto prenda fine „. Con queste parole l'illustre autore esprime il concetto che l'ha guidato nel comporre quest'aureo libretto, nel quale egli ha raccolto una grande quantità di cognizioni matematiche, apparentemente disparate, ma in realtà collegate da un filo logico, scelto con molto acume, alle quali gli educatori dell'infanzia potranno attingere largamente per istruire i bambini, divertendoli, e per fare germogliare nei loro giovani cervelli, senza alcuno sforzo, i germi di nozioni matematiche assai elevate.

Soprattutto, dice l'A. ai maestri, procurate di divertire il fanciullo, *non gli fate imparar nulla a memoria*, e a 11 anni, se è d'intelligenza media, comprenderà le matematiche meglio che i nove decimi dei nostri baccellieri. Quel che più interessa si è che egli ci avrà preso gusto e avrà piacere a intraprenderne lo studio.

Non si creda con questo che il nuovo libro del Laisant sia da confondersi con uno dei molti libri, alcuni anche ottimi, di *ricreazioni matematiche* che già esistono. Questi richiedono di solito una discreta cultura matematica precedente, e applicano tali nozioni alla risoluzione di quistioni divertenti. Invece in quello sono raccolte con molta diligenza delle quistioni dilettevoli, che vengono adoperate come mezzo pedagogico per destare la curiosità dei bambini e fare entrare nelle loro menti i germi di molte cognizioni matematiche, alcuna delle quali assai elevate.

Con quali mezzi il Laisant abbia raggiunto lo scopo sarebbe troppo lungo dire qui; ci limiteremo a dire che tutti i rami della matematica sono stati messi a contribuzione, che il libro è scritto con molta semplicità e spigliatezza, che invogliano a leggere; e ad esprimere il voto che tutti coloro che si sono dedicati all'educazione e all'istruzione dell'infanzia, lo meditino per il bene dei bambini affidati alle loro cure.

K.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 aprile 1906

# SEZIONI CONICHE

*(Continuazione e fine v. fasc. precedente)*

## L'iperboloide di rotazione ad una falda.

**43.** Sieno $d$, $u$ due rette sghembe invariabilmente collegate fra loro, ed imaginiamo che la $u$ ruoti compiendo un intero giro attorno a $d$. Essa genera una superfice che si chiama iperboloide di rotazione ad una falda.

Sia DU il segmento perpendicolare in D a $d$ ed in U ad $u$, e $v$ la retta simmetrica di $u$ rispetto al piano $d$U. Ogni piano $\pi_1$ perpendicolare a $d$ taglia $d$, $u$, $v$ in tre punti $D_1$, $U_1$, $V_1$; e per la simmetria delle rette $u$, $v$ si ha $D_1U_1 = D_1V_1$, e quindi $U_1$, $V_1$ appartengono ad uno stesso circolo di centro $D_1$. Ciò prova che le due rette $u$, $v$ rotando attorno a $d$ generano la medesima superficie. È poi manifesto che le due rette $u$, $v$ hanno per proiezione sul piano $\pi$ perpendicolare in D alla $d$ la stessa tangente al circolo che ha per raggio DU.

In seguito a queste considerazioni si può stabilire la seguente

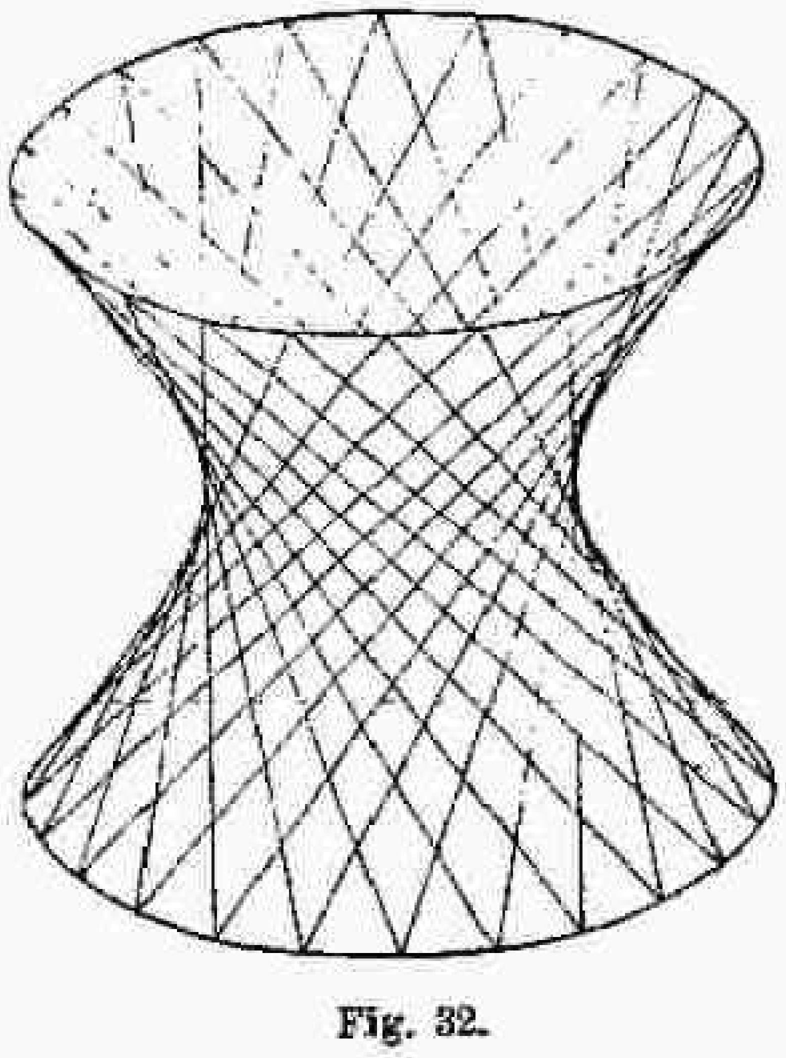


Fig. 32.

Definizione. — *Chiamasi* **iperboloide di rotazione ad una falda** *il luogo delle rette* u, v *che hanno per proiezione sopra un piano* $\pi$ *le tangenti di un circolo* c, *fanno con tale proiezione un angolo costante e incontrano il suddetto circolo. Il circolo* c *si chiama* **circolo di gola** *dell'iperboloide; le rette* u, v *si dicono* **generatrici** *e la retta* d *perpendicolare a* $\pi$ *nel centro di* c *si dice* **asse dell'iperboloide.**

Da questa definizione discendono i seguenti

Teoremi — 1°. *Ogni piano* $\pi_1$ *perpendicolare all'asse* d *taglia l'iperboloide secondo un circolo, il cui raggio cresce col crescere della distanza di* $\pi_1$ *dal piano del circolo di gola.*

2°. *Per ogni punto del circolo di gola passano due generatrici dell'iperboloide.*

3°. *Le generatrici dell'iperboloide si possono aggruppare in due sistemi* $u_1$, $v_1$. *Due generatrici dello stesso sistema non s'incontrano, due generatrici di diverso sistema s'incontrano.*

Sieno $A_1$, $A_2$, due punti del circolo di gola, $a_1$, $a_2$ le tangenti ad esso in due punti: $p$ la perpendicolare a $\pi$ nel punto $a_1a_2$, $u_1$, $v_1$ le generatrici che passano per $A_1$ e $u_2$, $v_2$ le generatrici che passano $A_2$. Essendo queste quattro generatrici egualmente inclinate su $\pi$, i quattro trilateri $u_1a_1p$, $v_1a_1p$, $u_2a_2p$, $v_2a_2p$ sono eguali; ed essendo due di questi trilateri da una parte e due dall'altra del piano $\pi$, una generatrice $u_1$ dovrà incontrare una generatrice $v_2$, ma non la $u_2$ e $v_1$ dovrà incontrare la $u_2$ ma non la $v_2$.

4°. *Due generatrici di diverso sistema giacciono in un piano.*

5°. *Per ogni punto* P *di una generatrice* u *di un sistema passa una generatrice* v *dell'altro sistema.*

Infatti la retta simmetrica di $u$ rispetto al piano $d$P è evidentemente una generatrice $v$.

6°. *In ogni piano che contiene una generatrice* u *di un sistema giace una retta* v *dell'altro sistema.*

Infatti un piano $\sigma$ contenente una generatrice $u$ deve tagliare il piano $\pi$ secondo una retta che passa per il punto A d'incontro di $u$ col circolo di gola $c$, e quindi deve tagliare $c$ in un altro punto A′ o essere tangente a $c$. Nel primo caso per A′ deve passare una generatrice $v'$ che incontrando $u$ deve giacere in $\sigma$; nel secondo caso $\sigma$ è il piano proiettante di $u$ su $\pi$, e deve contenere anche la $v$ che passa per A.

**44.** Teorema. — *Ogni retta che non sia una generatrice ha in comune coll'iperboloide due, uno o nessun punto.*

Sia $r$ una retta che non sia una generatrice dell'iperboloide. Se essa incontra in P una generatrice $u$, il piano $ru$ deve contenere una generatrice $v$ dell'altro sistema, la quale perciò incontra $u$ in un punto P′, che può essere coincidente con P o distinto da P. Se questo punto coincide con P, la $r$ non può avere altri punti comuni con la superficie, perchè se ne avesse un altro P″ dovrebbero per P″ passare una retta $u'$ ed una $v'$, che incontrando $v$ ed $u$ rispettivamente giacerebbero nel piano $ru$, il che è assurdo. Se P′ è distinto da P, la $r$ incontra l'iperboloide in questi due punti, e non può incontrarlo in altri, perchè se esistesse un terzo punto d'incontro P″, la generatrice $v''$ condotta per P″ incontrando la $u$ giacerebbe in $ru$, e quindi incontrerebbe anche la $v$; e ciò è assurdo.

Si possono poi avere rette che non incontrano la superficie. Ne è un esempio ogni retta di $\pi$ esterna al circolo di gola.

DEFINIZIONE. — *Ogni retta che incontra l'iperboloide in un sol punto si dice tangente ad esso.*

COROLLARI. — 1°. *Il luogo delle tangenti in un punto ad un iperboloide è il piano delle due generatrici che passano per quel punto, e si dice piano tangente in quel punto.*

2°. *Ogni piano che contiene una generatrice è tangente all'iperboloide.*

**45.** TEOREMA. — *Un iperboloide si può imaginare come luogo dalle rette che si appoggiano a tre sue generatrici di un sistema.*

Siano $u_1$, $u_2$, $u_3$ tre generatrici di un sistema dell'iperboloide. Ogni generatrice $v$ dell'altro sistema deve incontrare $u_1$, $u_2$, $u_3$. Viceversa per ogni punto $P_1$ di $u_1$ passa una sola retta (intersezione dei piani $Pu_2$, $Pu_3$) che incontra le $u_2$, $u_3$ ed è la generatrice $v$ che passa per P.

**46.** TEOREMA. — *Esistono due sfere inscritte nell'iperboloide (cioè tangenti a tutte le sue generatrici) e ad un piano dato $\pi$ non parallele all'asse.*

Sia $d'$ la proiezione dell'asse $d$ dell'iperboloide sul piano dato $\pi$, A uno dei punti d'incontro di $d'$ coll'iperboloide, $u$ una delle generatrici passanti per A. I piani perpendicolari al piano $d'u$ condotti per le bisettrici degli angoli delle rette $d'$, $u$ costituiscono il luogo dei punti equidistanti da queste rette e tagliano $d$ in due punti $C_1$, $C_2$ rispettivamente, pure equidistanti da $d'$, $u$; perciò le sfere di centro $C_1$ o $C_2$ e di raggio eguale alla distanza di questo punto da $d'$ e da $u$ sono tangenti a $d'$ (e quindi al piano $\pi$) e alla generatrice $u$. Ne risulta che esse sono tangenti anche a tutte le generatrici del sistema di $u$ e per ragioni di simmetria anche a quelle dell'altro sistema.

**47.** TEOREMA. — *La sezione prodotta in un iperboloide da un piano $\pi$ non parallelo all'asse è una ellisse od una iperbole, che ha per fuochi i punti di contatto di $\pi$ colle sfere inscritte nell'iperboloide e tangenti a $\pi$, ed ha per direttrici le rette d'intersezione di $\pi$ coi piani dei circoli di contatto delle sfere suddette coll'iperboloide.*

1°. Siano $F_1$, $F_2$ i punti di contatto delle sfere suddette $S_1$, $S_2$ con $\pi$, P un punto qualunque della sezione prodotta da $\pi$ nell'iperboloide, $Q_1$, $Q_2$ i punti d'incontro della generatrice $u$ dell'iperboloide, condotta per P, coi due circoli di contatto delle sfere $S_1$, $S_2$ coll'iperboloide.

Poichè i segmenti tangenti condotti da un punto ad una sfera sono eguali, si ha

$$PF_1 = PQ_1,\ PF_2 = PQ_2,$$

e quindi

$$PF_1 \pm PF_2 = PQ_1 \pm PQ_2 = Q_1Q_2,$$

dove s'intende preso il segno + o — secondo che P è interno o esterno al segmento $Q_1Q_2$.

Dunque la sezione è un ellisse o un iperbole poichè il segmento $Q_1Q_2$ è costante al variare di P sulla curva.

2°. Siano $\gamma_1, \gamma_2$ i piani paralleli condotti per i circoli di contatto di $S_1$, $S_2$ coll'iperboloide, $\alpha$ il piano condotto per l'asse perpendicolare a $\pi$ e poniamo $\gamma_1\pi = d_1$, $\gamma_2\pi = d_2$, $\alpha d_1 = D_1$, $\alpha d_2 = D_2$. Tracciamo anche per il punto P il piano $\gamma$ parallelo a $\gamma_1, \gamma_2$ e sia $H = \gamma\alpha\pi$.

Chiamando $\delta_1$, $\delta_1'$ le distanze di P dal fuoco $F_1$ e dalla retta $d_1$, si ha, $\delta_1 = PF_1 = PQ_1$, $\delta'_1 = HD_1$.

Si ha dunque (per il teor. di Talete)

$$\frac{\delta_1}{\delta'_1} = \frac{PQ_1}{HD_1} = \frac{Q_1Q_2}{D_1D_2},$$

e siccome $Q_1Q_2$ è costante al variare di P sulla curva, si ha che $d_1$ è la direttrice corrispondente al fuoco $F_1$.

## L'esagono gobbo
### ed i teoremi di Pascal e di Brianchon.

**48.** Definizione. — *Siano $u_1$, $u_2$, $u_3$ tre rette sghembe fra loro due a due, e $v_1$, $v_2$, $v_3$ tre rette che si appoggiano ad esse, e perciò sono pure sghembe due a due. Queste sei rette prese in un ordine determinato, in modo che le* u *si alternino colle* v, *formano una figura che si dice* **esagono gobbo**. *I 6 punti d'incontro di due rette consecutive si dicono* **vertici** *e i 6 piani di due rette consecutive si dicono* **facce** *dell'esagono gobbo.*

Scelto per es. l'ordine $u_1v_1u_2v_2u_3v_3$, le tre coppie di vertici e facce

$$u_1v_1,\quad v_2u_3;\qquad v_1u_2,\quad u_3v_3;\qquad u_2v_2,\quad v_3u_1$$

sono opposte.

Teorema. — *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un*

Teorema. — *Le tre rette d'intersezione dei piani opposti di un* *esagono gobbo sono le intersezioni dei piani determinati dalle coppie di rette dell'esagono che non sono facce del medesimo, e quindi passano per un punto.*

La congiungente i punti

$u_1v_1$, $v_2u_3$ giace nei piani $u_1v_2$, $v_1u_3$
$v_1u_2$, $u_3v_3$ » » $v_1u_3$, $u_2v_3$
$u_2v_2$, $v_3u_1$ » » $u_2v_3$, $v_2u_1$

perciò queste tre congiungenti passano per il punto d'incontro dei tre piani $u_1v_2$, $v_1u_3$, $u_2v_3$.

*esagono gobbo, sono le congiungenti dei tre punti comuni alle rette dell'esagono che non sono vertici del medesimo, e perciò giacciono in un piano.*

La retta comune ai piani

$u_1v_1$, $v_2u_3$ passa per i punti $u_1v_2$, $v_1u_3$
$v_1u_2$, $u_3v_3$ » » $v_1u_3$, $u_2v_3$
$u_2v_2$, $v_3u_1$ » » $u_2v_3$, $v_2u_1$

perciò queste tre rette d'intersezione stanno nel piano che passa per i tre punti $u_1v_2$, $v_1u_3$, $u_2v_3$.

**49.** Teorema di Brianchon. — *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un esalatero circoscritto ad un circolo, passano per un punto (detto* punto di Brianchon*).*

Teorema di Pascal. — *I tre punti d'incontro dei lati opposti di un esagono inscritto in un circolo sono situati sopra una retta (detta* retta di Pascal*).*

Sia $U_1V_1U_2V_2U_3V_3$ un esagono inscritto in un circolo e $u'_1v'_1u'_2v'_2u'_3v'_3$ l'esalatero circoscritto formato dalle rispettive tangenti in quei punti. Voglio dimostrare che le coppie di rette $U_1V_2$, $V_2U_3$; $V_1U_2$, $U_3V_3$; $U_2V_2$, $V_3U_1$ s'incontrano in tre punti situati in linea retta e le congiungenti i vertici $u'_1v'_1$, $v'_2u'_3$; $v'_1u'_2$, $u'_3v'_3$; $u'_2v'_2$, $v'_3u'_1$ passano per un punto. Essendo $d$ la perpendicolare al piano $\sigma$ del circolo $c$ condotto per il suo centro O, $u$ una retta perpendicolare in U ad un suo raggio OU non situata nel piano del circolo $c$ nè parallela a $d$, si consideri l'iperboloide che ha $d$ per asse e $u$ per generatrice, iperboloide che taglia $\sigma$ nel circolo $c$; e siano $u_1$, $u_2$, $u_3$ le generatrici di un sistema di questo iperboloide che passano per $U_1$, $U_2$, $U_3$ e $v_1$, $v_2$, $v_3$ le generatrici dell'altro sistema che passano per $V_1$, $V_2$, $V_3$ rispettivamente.

Se proiettiamo questo esagono gobbo sul piano $\sigma$ ortogonalmente (cioè dal punto all'$\infty$ di $d$) otteniamo come proiezioni delle sei generatrici $u_1$, $v_1$, $u_2$, $v_2$, $u_3$, $v_3$, le sei tangenti del circolo $c$ nei punti $U_1$, $V_1$, $U_2$, $V_2$, $U_3$, $V_3$, cioè $u'_1$, $v'_1$, $u'_2$, $v'_2$, $u'_2$, $v'_3$, come proiezioni dei punti $(u_1v_1)$ ecc. otteniamo i punti $(u'_1v'_1)$ ecc. E siccome le rette congiungenti le coppie di punti $(u_1v_1)$, $(v_2u_3)$; $(v_1u_2)$, $(u_3v_3)$; $(u_2v_2)$, $(v_3u_1)$ passano per un punto, passeranno pure per un punto le rette che uniscono i vertici opposti dell'esalatero circoscritto $u'_1v'_1u'_2v'_2u'_3v'_3$.

Se tagliamo l'esagono gobbo con $\sigma$, otteniamo come sezione

del piano $u_1v_1$ la retta $U_1V_1$
» $v_1u_2$ » $V_1U_2$
» $u_2v_2$ » $U_2V_2$
» $v_2u_3$ » $V_2U_3$
» $u_3v_3$ » $U_3U_3$
» $v_3u_1$ » $V_3U_1$.

Dunque le coppie di lati opposti $U_1V_1$, $V_2U_3$; $V_1U_2$, $U_3V_3$; $U_2V_2$, $V_3U_1$ s'incontrano nei tre punti ove le rette comuni alle facce opposte dell'esagono gobbo considerato incontrano $\sigma$, e siccome queste tre rette giacciono in un piano, i punti suddetti sono sulla retta comune a quel piano e al piano $\sigma$.

**50.** I ragionamenti precedenti sussistono anche nel caso in cui un vertice dell'esagono inscritto coincide col successivo. Se per esempio $U_1$, $V_1$ coincidono, le due generatrici $u_1$, $v_1$ dell'iperboloide che passano per essi individuano il piano che le proietta sulla tangente al circolo di gola in quel punto, cosicchè il lato $U_1V_1$ diventa la tangente al detto circolo nel punto $U_1$, e similmente i due lati $u'_1$, $v'_1$ dell'esalatero circoscritto vengono a coincidere ed il punto $(u'_1v'_1)$ viene a coincidere col punto $(u_1v_1)$ cioè col punto di contatto della retta $u'$ (o $v'$) col circolo di gola.

Tenendo conto di queste considerazioni possiamo enunciare i seguenti teoremi, che si dimostrano in modo perfettamente identico ai due precedenti.

1°. *Se un pentalatero è circoscritto ad un circolo, la congiungente un vertice col punto di contatto del lato opposto e le congiungenti i due vertici appartenenti a questo lato con gli altri due vertici ad essi rispettivamente non consecutivi, concorrono in un punto.*

1°. *Se un pentagono è inscritto in un circolo, il punto d'incontro di un lato colla tangente nel vertice opposto e i due punti d'incontro dei lati concorrenti in questo vertice coi rimanenti lati ad essi rispettivamente non consecutivi sono in linea retta.*

La dimostrazione si ricava da quella del teorema precedente supponendo che $U_1$ coincida con $V_1$, ma gli altri vertici siano tutti distinti.

2°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad un circolo, le due rette congiungenti i vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

2°. *Se un quadrangolo è inscritto in un circolo, i due punti d'incontro dei lati opposti, e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici opposti stanno in linea retta.*

Se ABCD è il quadrangolo inscritto, si supponga dapprima che $U_1$ e $V_1$ coincidano con A, $U_2$ con B, $V_2$ e $U_3$ con C, e $V_3$ con D, ed avremo che il punto d'incontro delle tangenti in A, C giace sulla retta determinata dai punti d'incontro dei lati opposti del quadrangolo ABCD. Supponendo poi che $U_1$ e $V_1$ coincidono con B, $U_2$ con C, $V_2$ e $U_3$ con D e $V_3$ con A, si dimostra che su questa retta giace anche il punto d'incontro delle tangenti in B, D. Ecc.

3°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad un circolo, la congiungente due vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto de' due lati concorrenti in uno di questi vertici, coi due vertici rimanenti, passano per un punto.*

3°. *Se un quadrangolo è inscritto in un circolo, il punto d'incontro di due lati opposti e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici situati sopra uno di questi lati con i due lati rimanenti che non passano per essi, stanno in linea retta.*

Se ABCD è un quadrangolo inscritto, supponendo che $U_1$, $V_1$ coincidano con A, $U_2$, $V_2$ con B, $U_3$ con C, $V_3$ con D, dal ragionamento del § 49 si deduce che i tre punti d'incontro della tangente in A con BC, della tangente in B con AD e dei lati AB, CD, stanno in linea retta. Ecc.

4°. *Se un trilatero è circoscritto ad un circolo, le tre rette congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

4°. *Se un triangolo è inscritto in un circolo, i tre punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici rispettivamente opposti stanno in linea retta.*

Essendo A, B, C i vertici del triangolo inscritto si supponga che $U_1$ e $V_1$ coincidano con A, $U_2$ e $V_2$ con B, $U_3$ e $V_3$ con C e si ripeta la dimostrazione del § 49.

**51.** I teoremi dei §§ 49, 50, possono essere estesi ad una sezione conica qualunque. Infatti sia $c$ una sezione conica, situata in un piano $\pi$, $c'$ il circolo sezione del cono a cui appartiene $c$ fatta con un piano $\pi'$ perpendicolare all'asse. La curva $c$ è la proiezione del circolo $c'$ su $\pi$ fatta dal vertice V del cono, e ogni poligono inscritto o circoscritto a $c$ è evidentemente proiezione di un altro poligono inscritto o circoscritto a $c'$.

Se per esempio consideriamo un esagono inscritto a $c$ e l'esagono corrispondente inscritto a $c'$, i punti d'incontro dei lati opposti del primo sono le proiezioni dei punti d'incontro dei lati opposti del secondo, e perciò sono come questi in linea retta.

Possiamo dunque enunciare i seguenti teoremi:

1°. *Le tre rette congiungenti i vertici opposti di un esalatero circoscritto ad una conica passano per un punto.*

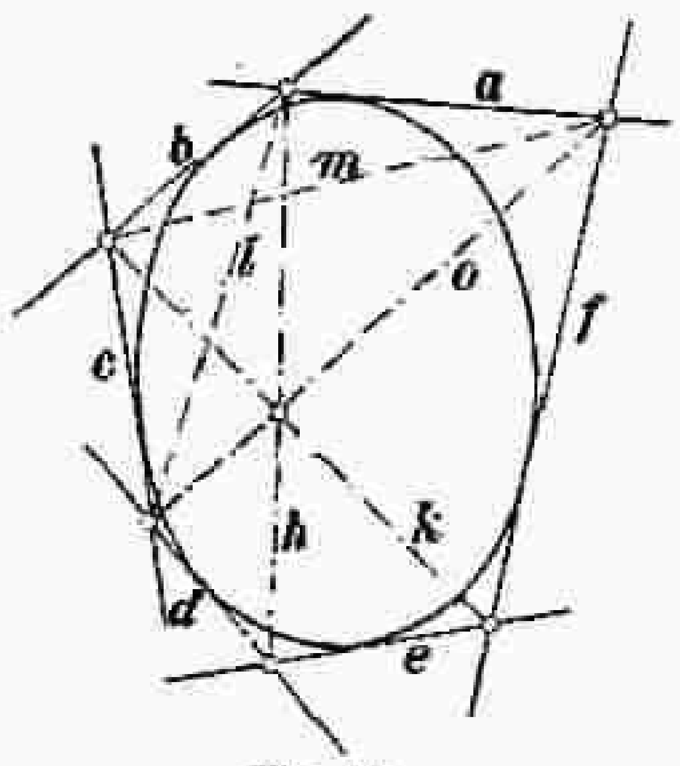



Fig. 33.

2°. *Se un pentalatero è circoscritto ad una conica, la congiungente un vertice col punto di contatto del lato opposto, e le congiungenti i due vertici appartenenti a questo lato con gli altri due vertici ad essi rispettivamente non consecutivi concorrono in un punto.*

3°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, le due rette congiungenti i vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei lati opposti passano per un punto.*

4°. *Se un quadrilatero è circoscritto ad una conica, la congiungente due vertici opposti e le due rette congiungenti i punti di contatto dei due lati concorrenti in uno di questi vertici, coi due vertici rimanenti, passano per un punto.*

5°. *Se un trilatero è circoscritto ad una conica, le tre rette congiungenti i vertici coi punti di contatto dei lati rispettivamente opposti passano per un punto.*

1°. *I tre punti d'incontro dei lati opposti di un esagono inscritto in una conica sono situati sopra una retta.*

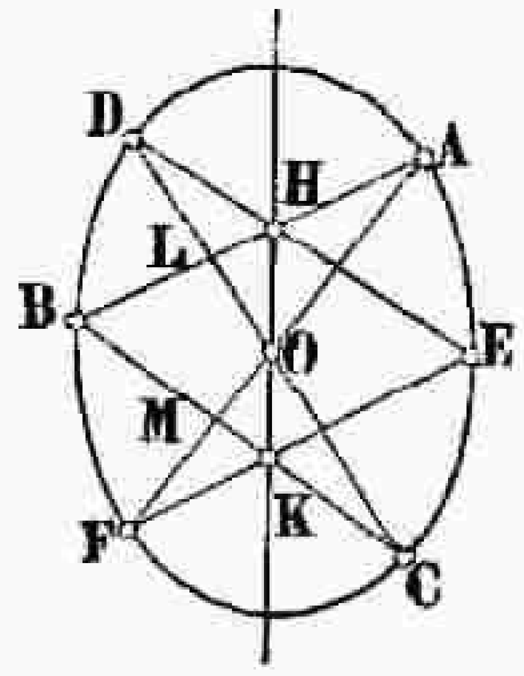



Fig. 34.

2°. *Se un pentagono è inscritto in una conica, il punto d'incontro di un lato colla tangente nel vertice opposto, e i due punti d'incontro dei lati concorrenti in questo vertice coi rimanenti lati ad essi rispettivamente non consecutivi sono in linea retta.*

3°. *Se un quadrangolo è inscritto in una conica, i due punti d'incontro delle coppie di lati opposti, e i due punti d'incontro delle coppie di tangenti nei vertici opposti stanno in linea retta.*

4°. *Se un quadrangolo è inscritto in una conica, il punto d'incontro di due lati opposti e i due punti d'incontro delle tangenti nei vertici situati sopra uno di questi lati con i due lati rimanenti che non passano per essi stanno in linea retta.*

5°. *Se un triangolo è inscritto in una conica, i tre punti d'incontro dei lati colle tangenti nei vertici rispettivamente opposti stanno in linea retta.*

G. Lazzeri.

# SULL'USO E SULLE TAVOLE DEI VALORI NATURALI DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

*(Continuazione e fine v. fasc. precedente)*

---

**12.** Applichiamo ora tutti i risultati precedenti a una tavola di seni, tangenti e secanti, di 1′ in 1′ e con cinque cifre decimali.

Sia
$$f(x) = \operatorname{sen} x\,.$$

Per quanto si disse nel § 9, il massimo di $G_d$ si ha per $x_0 + \Delta x = 90^\circ$, ma
$$\Delta x = \text{arc } 1' = 0{,}00029\cdot 08882\cdot \ldots,$$
da cui
$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} = 0{,}00000\cdot 00105\cdot 7\ldots;$$
quindi, presa per cifra delle unità l'ultima cifra decimale della tavola, dal dal secondo membro della (15) si deduce che sarà certamente sempre
$$G_d < 0{,}0011\,. \tag{37}$$
Dunque nella ricerca diretta di seno l'interpolazione è permessa sempre, perchè, non solo $G_d$ è sempre minore di una mezza unità, ma è addirittura trascurabile rispetto ad $L_d$ (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 9) che $G_i$ cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ al tendere di $x_0$ a $90^\circ - \Delta x$; poscia si osservi che, siccome la differenza $\operatorname{sen}(x_0 + \Delta x) - \operatorname{sen} x_0$, per la (13), diminuisce sempre, anche $\Delta y$ generalmente diminuisce, e quindi $L_i$, per la (9), generalmente cresce. Ma, scorrendo la tavola, si vede che $\Delta y$ è certamente minore di 2 per $x$ maggiore di $87^\circ 50'$, quindi (non occorrendo l'interpolazione per $\Delta y$ minore di 2) basta studiare come variano $G_i$ ed $L_i$ fino a questo valore di $x$. Per ciò, considerando separatamente l'intervallo in cui $\Delta y$ (che al più è eguale a 30) ha sempre due cifre, e l'intervallo in cui $\Delta y$ ha una sola cifra o è al più eguale a 10, si vede prima di tutto (scorrendo nuovamente la tavola) che è
$$\left.\begin{array}{lll} 30 \geqq \Delta y \geqq 10 & \text{per} & x < 70^\circ 08' \\ 10 \geqq \Delta y & \text{»} & 70^\circ 08' < x < 87^\circ 50' \end{array}\right\}; \tag{38}$$
e che, corrispondentemente, dal secondo membro della (16) e dalla (19), si ha
$$\left.\begin{array}{rll} G_i < 0''0061 & \text{e} & 2'' \leqq L_i \leqq 6'' \\ 0'',0060 < G_i < 0''0577 & \text{»} & 6'' \leqq L_i \leqq 30'' \end{array}\right\}; \tag{38)'}$$
Dunque anche nella ricerca inversa $G_i$ è trascurabile rispetto ad $L_i$ (§ 7).

Sarà utile, per il seguito, ricordare che le due limitazioni or ora indicate per $L_i$ corrispondono rispettivamente ai casi in cui $\Delta y$ abbia sempre due cifre, o generalmente una cifra.

OSSERVAZIONE I. — Quando l'interpolazione non occorre, e questo accade sempre per $x$ maggiore di 87°50′ e può accadere fra 86°18′ e 87°50 (perchè $\Delta y$ è eguale a 1, per la prima volta, per $x_0 = 86°18'$), il solo arrotondamento di $f(x)$ può evidentemente portare un errore maggiore di 30″.

OSSERVAZIONE II. — Dalla (15) e dalla (15)′ si ha che per $x = 89°59'30''$ è certamente

$$0{,}0010 < g_d < 0{,}0011\,;$$

e dalla (16) e dalle (16)′ si ha che per $x = 87°49'30''$ è certamente

$$0'',057 < g_i < 0''058\,;$$

quindi i limiti superiori $G_d$ e $G_i$ da noi trovati per $g_d$ e $g_i$ non potranno mai più subire un abbassamento sensibile, qualunque altra via si segua per la loro ricerca.

OSSERVAZIONE III. — A proposito delle limitazioni (38), veggasi N. § 42, Oss. III.

**13.** Sia

$$f(x) = \tan x\,.$$

Come si osservò nel § 10, $G_d$ cresce sempre al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ al tendere di $x_0$ a $90° - \Delta x$; l'interpolazione non è dunque sempre permessa. Cercando fino a che valore sia permessa e osservando che, per essere $\Delta x = 1'$, basta far crescere $x$ di 1′ per volta, dopo pochi tentativi dal secondo membro della (20) si deduce che, se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 80°44'\,, & \text{si ha} & G_d < 0{,}500 \\ x > 80°44'\,, & \text{»}\ \text{»} & G_d > 0{,}502 \end{array}\right\}. \tag{39}$$

Dunque nella ricerca diretta di tangente l'interpolazione è permessa solo se $x$ non supera 80°44′, perchè solo allora $G_d$ è minore di una mezza unità dell'ultimo ordine (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 10) che $G_i$ cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$\infty$ al tendere di $x_0$ a $90° - \Delta x$; poscia si osservi che, siccome la differenza $\tan(x_0 + \Delta x) - \tan x_0$, per la (18), cresce sempre, $\Delta y$ generalmente cresce, e quindi $L_i$, per la (9), generalmente cala e tende a zero. Ciò posto, supponiamo, per ora, che l'interpolazione si faccia solo per $x$ minore di 80°44′, come nella ricerca diretta (§ 7), e studiamo come corrispondentemente variano $G_i$ ed $L_i$. Per ciò si osservi (scorrendo la tavola) che, al variare di $x$ da 0° a 80°44′, $\Delta y$ varia da 29 a 1120 (gli estremi inclusi), e considerando separatamente l'intervallo in cui $\Delta y$ ha due cifre sole o è al più eguali a 100, l'intervallo in cui $\Delta y$ ha sempre tre cifre, e l'intervallo in cui $\Delta y$ ha sempre quattro cifre, si vede prima di tutto che è

$$\left.\begin{array}{rcr} 29 \leqslant \Delta y \leqslant 100 & \text{per} & x < 57°21' \\ 100 \leqslant \Delta y < 1000 & \text{»} & 57°21' < x < 80°11' \\ 1000 < \Delta y \leqslant 1120 & \text{»} & 80°11' < x < 80°44' \end{array}\right\} \tag{40}$$

e che, corrispondentemente, dal secondo membro della (21), e della (9) si ha

$$\left.\begin{array}{rcr} G_i < 0'',0069 & \text{e} & 2'',07 > L_i \geqslant 0'',60 \\ 0'',0068 < G_i < 0'',0253 & \text{»} & 0'',60 \geqslant L_i > 0'',06 \\ 0'',0253 < G_i < 0'',0268 & \text{»} & 0'',06 > L_i \geqslant 0'',05 \end{array}\right\}. \tag{40'}$$

Esaminando questi risultati si vede che, per $x$ minore di $57°21'$, $G_i$ si può considerar trascurabile rispetto ad $L_i$; da $57°21'$ a $80°44'$ non è più così, ma $G_i$ è sempre minore di $L_i$ e, generalmente anche della metà di $L_i$ (§ 7).

Anche qui sarà utile ricordare, per il seguito, che le tre limitazioni or ora indicate per $L_i$ corrispondono rispettivamente ai casi in cui $\Delta y$ abbia generalmente due cifre, o sempre tre, o sempre quattro.

OSSERVAZIONE. — Dalla (20) e dalla (20)', dalla (21) e dalla (21)', si ha che per $x = 80°43'30''$ è certamente

$$0{,}49 < g_d < 0{,}50, \qquad 0'',026 < g_i < 0'',027;$$

quindi anche qui si può concludere come nella Oss. II al § precedente.

**14.** In questo § ci proponiamo di studiare a quali condizioni sarebbe possibile l'interpolazione nella ricerca diretta di tangente per $x$ maggiore di $80°44'$.

Prima di tutto si può osservare che, se si ammette che l'errore $\gamma_d$ sia trascurabile anche quando, in valore assoluto, è solo minore di una unità, l'interpolazione può essere spinto fino a $82°38'$, perchè se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 82°38' & \text{si ha} & G_d < 0{,}996 \\ x > 82°38' & \text{»} \ \text{»} & G_d > 1{,}002 \end{array}\right\}. \tag{41}$$

Si può poscia osservare che, se si suppone l'arco dato affetto da un errore avente per massimo, in valore assoluto, $\varepsilon''$, l'interpolazione può essere spinta anche oltre i limiti indicati: fino a che, per es., $G_d$ resta minore dell'errore prodotto nella tangente cercata dall'errore $\varepsilon''$ dell'arco [1]. Per ciò deve essere

$$G_d < \frac{\varepsilon''}{(\Delta x)''}\,[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)], \tag{42}$$

ossia

$$G_d < \frac{\varepsilon''\,\Delta x}{(\Delta x)''}\,f'(x_0 + \theta\Delta x).$$

Nel nostro caso, se si suppone che l'errore accennato sia solo quello che deriva dall'arrotondamento dell'arco ai decimi di secondo, si ha

$$\frac{\varepsilon''}{(\Delta x)''} = \frac{0{,}05}{60} = \frac{1}{1200};$$

inoltre si sa che

$$G_d = \frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\cdot\frac{\tan\,(x_0 + \Delta x)}{\cos^2(x_0 + \Delta x)}, \qquad f'(x_0 + \theta\Delta x) = \frac{1}{\cos^2(x_0 + \theta\Delta x)},$$

quindi, perchè sia verificata la (42), basta che si abbia

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\cdot\frac{\tan\,(x_0 + \Delta x)}{\cos^2(x_0 + \Delta x)} < \frac{\Delta x}{1200}\cdot\frac{1}{\cos^2 x_0},$$

ossia

$$\tan(x_0 + \Delta x) < \frac{1}{300\,\Delta x}\cdot\frac{1 + \cos 2(x_0 + \Delta x)}{1 + \cos 2x_0}; \tag{43}$$

ed è facile vedere che questa è verificata fino ad $x_0 = 84°57'$. Nelle ipotesi fatte, si potrebbe dunque nella ricerca diretta di tangente, spingere l'interpolazione fino $84°58'$.

---

(1) Crediamo che questo criterio potrebbe essere utile in pratica, onde stabilire convenientemente, per determinate specie di applicazioni e per determinate tavole, a che punto sia opportuno limitare l'interpolazione.

Si osservi finalmente che per l'intervallo nel quale (sempre nella ricerca diretta di tangente) non si può ammettere il principio delle parti proporzionali, sorge naturalmente l'idea di calcolare prima la tangente del complemento (chè allora l'interpolazione è, evidentemente, permessa) e poscia l'inversa del valore così ottenuto. Volendo però tenere conto esatto dell'errore che così risulterebbe in $\tan x$, in causa degli errori $\gamma_d$ e $\lambda_d$ che affettano la tangente del complemento, si trova facilmente che, se si tiene conto solo di $\gamma_d$, fino a 89°45′ quell'errore è certamente minore di 0,52, ma che, se si tiene conto anche di $\lambda_d$ (1), il limite superiore inabbassabile di quell'errore fino da 80°, o da 85°, è già maggiore di 32, o di 130, unità. Questo artifizio dunque potrebbe produrre un errore molto maggiore di quello che si vuole evitare.

Si potrebbero allora cercare altri artifizi, come si fa pei logaritmi trigonometrici degli archi piccoli, ma a noi pare che nei casi in cui l'interpolazione nella ricerca del valor naturale di tangente non possa condurre alla approssimazione che si vuol raggiungere, convenga meglio ricorrere all'uso dei logaritmi.

**15.** In questo § ci proponiamo di vedere se l'interpolazione, nella ricerca inversa di tangente, è possibile per $x$ maggiore di 80°44′ (§ 7, Oss.).

Dalla (21) si ricava, senz'altro, che per

$$80°44' < x < 89°30', \qquad 0'',0268 < G_1 < 0'',5169, \tag{44}$$

mentre che, corrispondentemente,

$$1124 \leqslant \Delta y \leqslant 369660, \qquad 0'',0534 > L_1 > 0'',0001; \tag{44$'$}$$

per cui, se si ammette che sia trascurabile un errore di mezzo secondo circa, l'interpolazione è lecita fino a 89°30′. Si noti che, al crescere di $x$, $G_1$ cresce, mentre $L_1$ cala fino a diventar trascurabile rispetto a $G_1$; contrariamente a quello che accade al decrescere di $x$ (§ 13).

Per $x$ maggiore di 89°30′, si può ricorrere a un artifizio analogo a quello accennato alla fine del § precedente; calcolare cioè l'inversa del valore dato, la quale evidentemente è la cotangente dell'arco incognito, cercare poscia l'arco corrispondente e prenderne il complemento. Bisogna però assicursi che non si presenti l'inconveniente che si è presentato nella ricerca diretta. Sia $d$ il valore assoluto dell'errore da cui è affetta la tangente data; se con $e$ si indica il valore assoluto dell'errore che, conseguentemente, affetta il valore inverso di $\tan x$, ossia $\tan(90° - x)$, si ha evidentemente

$$e < \frac{d}{(\tan x - d)^2};$$

per cui, se con $f$ si indica il valore assoluto, espresso in secondi, dall'errore che si commette nella ricerca di $90° - x$ e quindi di $x$, sarà certamente

$$f < \frac{e \cdot 60''}{\Delta y},$$

ossia

$$f < \frac{d \cdot 60''}{(\tan x - d)^2 \cdot \Delta y}. \tag{45}$$

(1) È per non aver fatta una osservazione come questa che l'Houel, nella ricerca dei logaritmi degli archi piccoli, (*Tables de logarithmes a cinq décimales*. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1877. Introd. pagina XI) ha creduto di proporre una metodo che renda trascurabile l'errore di interpolazione, mentre invece l'errore prodotto da quel metodo può superare anche 38 unità (V. il § 38 della nota citata *Sulla ricerca del logaritmo seno*... dove demmo anche, a maggior conferma, un esempio numerico).

Di qui risulta che, essendo $x$ maggiore di 89°30′ e supponendo che $d$ derivi solo dall'arrotondamento dell'ultima cifra di $\tan x$, si ha certamente

$$f < 0'',000078 \tag{46}$$

e che quindi l'inconveniente accennato non si presenta affatto.

Concludendo: nella ricerca inversa di tangente l'interpolazione è permessa sempre, purchè alle considerazioni fatte alla fine del § 13 si aggiunga ora che da 80°44′ a 89°30′ $L_i$ è generalmente minore di $G_i$ e finisce col diventar trascurabile rispetto allo stesso $G_i$; e che per $x$ maggiore di 89°30′ conviene ricorrere all'artificio or ora accennato.

OSSERVAZIONE I. — Supposto che l'errore che affetta $\tan x$ non sia dovuto solo all'arrotondamento e che quindi $d$ possa essere maggiore di una mezza unità dell'ultimo ordine, la validità dell'artifizio accennato non cessa, perchè, anche supponendo $d$ eguale a dieci unità dell'ultimo ordine, sarebbe sempre

$$f < 0'',0016\,. \tag{47}$$

OSSERVAZIONE II. — La ricerca dell'arco $90^0 - x$ dà luogo ai due errori $\gamma_i$ e $\lambda_i$; ma l'errore in questione è sempre, come $\gamma_i$, tascurabile rispetto a $\lambda_i$ (§ 13), anche nell'ipotesi della Oss. prec.

**16.** Sia

$$f(x) = \sec x\,.$$

Come già si disse nel § 14, $G_d$ cresce al crescere di $x_0$ e tende all'$x$ al tendere di $x_0$ a $90^0 - \Delta x$; procedendo quindi come nel § 13, dal secondo membro della (28), dopo pochi tentativi, si deduce che, se

$$\left.\begin{array}{lll} x < 80^0 43'\,, & \text{si ha} & G_d < 0{,}498 \\ x > 80^0 43'\,, & \text{»} \quad \text{»} & G_d > 0{,}500 \end{array}\right\}. \tag{48}$$

Dunque nella ricerca diretta di secante l'interpolazione è permessa solo se $x$ non supera 80°43′ (§ 7).

Per la ricerca inversa si cominci col ricordare (§ 11) che $G_i$ tende all'$\infty$ al tendere di $x_0$ a zero, cala al crescere di $x_0$, raggiunge il suo minimo fra $\frac{1}{2}\alpha - \Delta x$ e $45^0 - \frac{1}{2}\Delta x$ (essendo $\alpha$ il minimo arco positivo che ha per coseno $\frac{1}{3}$), poi cresce e per $x_0$ tendente a $90^0 - \Delta x$ tende nuovamente all'$\infty$; poscia si osservi che, siccome la differenza $\sec(x_0 - \Delta x) - \sec x_0$, per la (26), diventa piccolissima per $x_0$ tendente a zero e poi cresce sempre al crescere di $x_0$, altrettanto generalmente accade di $\Delta y$, e quindi $L_i$ è grandissimo per $x_0$ tendente a zero, e poi generalmente cala al crescere di $x_0$ fino a $90^0 - \Delta x$. Ma, scorrendo la tavola, si vede che $\Delta y$ è certamente minore di 2 per $x$ minore di 2°09′, per $x$ minore di questo valore non occorre quindi la interpolazione; siccome inoltre anche qui supponiamo, per ora, che l'interpolazione si faccia solo quando è permessa nella ricerca diretta, basterà studiare come varino $G_i$ ed $L_i$ al variare di $x_0$ da 2°09′ a 80°43′.

Ciò preposto, cominciamo dal cercare per quale valore di $x_0$ $G_i$ sia minimo; dopo pochi tentativi si trova che il secondo membro della (36) cambia segno fra 35°15′ e 35°16′; il minimo di $G_i$ si ha dunque, nelle nostre ipotesi, per $x_0$ eguale a 35°15′, e dal secondo membro della (29) si ha subito che questo minimo è $0'',0061744\ldots$ [1] Poscia, scorrendo la tavola, osserviamo che al crescere di $x$ da $2^\circ 09'$ a $80^\circ 43'$, $\Delta y$ varia da 2 a 1101 (gli estremi inclusi); e, considerando separatamente l'intervallo in cui $\Delta y$ ha una cifra sola o è al più eguale a 10 l'intervallo in cui $\Delta y$ ha sempre due cifre o è al più eguale a 100, l'intervallo in cui $\Delta y$ ha sempre tre cifre e l'intervallo in cui $\Delta y$ ha sempre quattro cifre, si vede prima di tutto che è

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta y \leqslant 10 & \text{per} & 2^\circ 09' < x < 17^\circ 57' \\ 10 \leqslant \Delta y \leqslant 100 & » & 17^\circ 57' < x < 59^\circ 50' \\ 100 \leqslant \Delta y < 1000 & » & 59^\circ 50' < x < 80^\circ 15' \\ 1000 < \Delta y \leqslant 1101 & » & 80^\circ 15' < x < 80^\circ 43' \end{array}\right\}, \tag{49}$$

e che corrispondentemente, dal secondo membro della (29) e dalla (9), si ha

$$\left.\begin{array}{rcl} 0'',0583 > G_i > 0'',0081 & \text{e} & 30'' \geqslant L_i \geqslant 6'' \\ 0'',0061 < G_i < 0'',0088 & » & 6'',0 \geqslant L_i \geqslant 0'',6 \\ 0'',0087 < G_i < 0'',0259 & » & 0'',60 \geqslant L_i > 0'',06 \\ 0'',0258 < G_i < 0'',0271 & » & 0'',060 > L_i > 0'',055 \end{array}\right\}. \tag{49)'$$

Esaminando questo risultato, si vede che per $x$ minore di $59^\circ 50'$, $G_i$ si può considerare trascurabile rispetto ad $L_i$; da $59^\circ 50'$ a $80^\circ 43'$ non è più così, ma $G_i$ è sempre minore della metà di $L_i$ (§ 7).

Anche qui sarà utile ricordare che le quattro limitazioni ora indicate per $L_i$ corrispondono rispettivamente ai casi in cui $\Delta y$ abbia generalmente una cifra, o generalmente due cifre, o sempre tre, o sempre quattro.

Osservazione I. — Per $x$ minore di $2^\circ 09'$ si faccia un'osservazione analoga alla Oss. I del § 12.

Osservazione II. — Dalla (28) e dalla (28)', dalla (29) e (29)'

$$\begin{array}{lcl} \text{per } x = 2^\circ 09' 30'' & \text{si ha} & 0'',057 < g_i < 0'',059, \\ \text{per } x = 80^\circ 42' 30'' & » \ » & 0,49 < g_d < 0,50, \\ & \text{e} & 0'',026 < g_i < 0'',028, \\ \text{per } x = 35^\circ 15' 30'' & \text{si ha} & 0'',0061 < g_i < 0'',0062; \end{array}$$

quindi anche qui si può concludere come nella Oss. II al § 12.

**17.** In questo § e nel seguente ci proponiamo di fare uno studio analogo a quello fatto nei §§ 14 e 15.

Prima di tutto, nella stessa ipotesi fatta in principio del § 14, l'interpolazione nella ricerca diretta di secante può anche qui essere spinta fino a $82^\circ 38'$, perchè, se

$$\left.\begin{array}{lcl} x < 82^\circ 38'' & \text{si ha} & G_d < 0,992 \\ x > 82^\circ 38'' & » \ » & G_d > 1,002 \end{array}\right\}. \tag{50}$$

Supponendo poscia che l'arco dato sia affetto da un errore avente per massimo $\varepsilon''$, si può anche qui (§ 14) osservare che l'interpolazione potrebbe essere spinta fin dove è verificata la (42). La quale, essendo ora

$$G_d = \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \frac{1 + \text{sen}^2 (x_0 + \Delta x)}{\cos^3 (x_0 + \Delta x)}, \qquad f'(x_0 + \theta \Delta x) = \frac{\text{sen}(x_0 + \theta \Delta x)}{\cos (x_0 + \theta \Delta x)},$$

[1] I calcoli numerici necessari per questa ricerca ci riuscirono alquanto penosi per un deplorevole errore di stampa, che si trova nella tavola del Vlacq e che è *fedelmente* riprodotto in quella dell'Ozannam: nella pagina che va da $19^\circ 30'$ a $20^\circ 00'$, il seno di $19^\circ 30'$ è 0,3338009, invece di essere 0,3338069, e questo errore ci condusse, ripetutamente (finchè, per caso, non ce ne accorgemmo) a risultati numerici che contraddicevano ai risultati teorici precedentemente ottenuti. E un altro errore, pure fedelmente riprodotto dall'Ozannam, avemmo occasione di rilevare nella pagina che va da $70^\circ 00'$ a $70^\circ 30'$: in essa il seno di $70^\circ 30'$ è 9,9425415, invece di 0,9426415.

nelle stesse ipotesi diventa

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \cdot \frac{1+\operatorname{sen}^2(x_0+\Delta x)}{\cos^3(x_0+\Delta x)} < \frac{\Delta x}{1200} \cdot \frac{\operatorname{sen} x_0}{\cos^2 x_0},$$

ossia

$$3-\cos 2(x_0+\Delta x) < \frac{1}{150\,\Delta x}\,\frac{1+\cos 2(x_0+\Delta x)}{1+\cos 2x_0}\,[\operatorname{sen}(2x_0+\Delta x)-\operatorname{sen}\Delta x]; \quad (51)$$

ed è facile vedere che questa è verificata fino ad $x_0 = 84°56'$. Nelle ipotesi fatte, si potrebbe dunque, nella ricerca diretta di secante, spingere la interpolazione fino a $84°57'$.

E, finalmente, esaminando se per la ricerca diretta di secante sarebbe possibile seguire un artifizio analogo a quello indicato nel § 14 (calcolando cioè prima il coseno dell'arco dato e poscia l'inversa del valore così ottenuto) si vede che, se dei due errori $\gamma_d$ e $\lambda_d$, da cui risulta affetto il coseno, si tenesse conto solo del primo, l'errore risultante nella secante così calcolate sarebbe minore di 0,26 fino a $89°45'$, ma che, se si tien conto anche del secondo, il limite superiore inabbassabile di quell'errore fino da $80°$ o da $85°$, è già maggiore di 33, o di 131, unità.

Anche per la ricerca diretta della secante quindi, si deve concludere come si è concluso nel § 14.

**18.** Passiamo ora alla ricerca inversa di secante.

Dalla (29) si ricava, senz'altro, che per

$$80°43' < x < 89°30', \qquad 0'',0271 < G_1 < 0'',5169, \quad (52)$$

mentre che, corrispondentemente,

$$1106 \leqslant \Delta y \leqslant 369645, \qquad 0'',0543 > L_1 > 0'',0001; \quad (52)$$

per cui, anche qui, si può ritenere lecita l'interpolazione fino a $89°30'$.

Per $x$ maggiore di $89°30'$ si può ricorrere a un artifizio identico a quello del § 15: calcolare cioè l'inversa del valore dato, la quale evidentemente è il coseno dell'arco incognito e cercare l'arco corrispondente. E, volendo assicurarsi che l'errore prodotto da questo artificio è trascurabile, basta ripetere il ragionamento del § 15; si arriva così a una formula che si può senz'altro ricavare dalla (45) sostituendo $\sec x$ a $\tan x$, e da essa, nelle stesse ipotesi, si deduce una limitazione identica alla (46).

Concludendo: anche nella ricerca inversa di secante l'interpolazione è sempre possibile, purchè alle considerazioni fatte alla fine del § 16, se ne aggiungano altre, analoghe a quelle fatte alla fine del § 15.

Osservazione. — Si ripetano qui osservazioni analoghe a quelle del § 15, perchè, nelle stesse ipotesi, si arriva a una limitazione identica alla (47).

**19.** Per completare il nostro studio, non ci resta più che da trovare le regole di cui parlammo al § 8, per eseguire i piccoli calcoli di interpolazione.

Prima di tutto, affinchè il calcolatore sappia se può, o no, nella ricerca diretta, fare l'interpolazione, supporremo che la tavola dia le differenze tavolari solo fin dove l'interpolazione stessa è lecita (¹). Per cui nel caso che qui

(¹) Generalmente, nelle tavole logaritmo-trigonometriche, si mettono le differenze tavolari, spesso colle relative tavolette, anche dove l'interpolazione, nella ricerca diretta, non è lecita. Così per es.: il Bruhns nella sua tavola di 1″ in 1″, dà le tavolette accennate, meno che da 10′ a 1°20′ per mancanza di spazio (Pref. pag. VII): ebbene, usando, nella ricerca diretta, queste tavolette (come egli stesso fa in alcuni esempî proposti nella prefazione), si può, per $x$ minore di 1′, commettere un errore maggiore di 150.

stiamo considerando, per il seno la tavola darà le differenze sempre (§ 12), mentre che per la tangente e per la secante le darà solo fino a 80°44′ e a 80°43′, rispettivamente (§§ 13 e 16).

Ciò posto, per la ricerca diretta si ha la stessa regola che abbiamo dato (N. § 26) per la tavola dei logaritmi trigonometrici dello stesso passo (un primo) e dello stesso numero di cifre decimali (cinque), e che crediamo inutile ripetere qui. Infatti per questa regola si ha (N. § 35)

$$M_d = 0{,}1 : 3, \tag{53}$$

ed è sempre $L_d = 1$, mentre $G_d$ per il seno è addirittura trascurabile rispetto ad $L_d$ (§ 12, (37)), e per la tangente e per la secante (dove l'interpolazione è lecita) è minore di 0,5 (§ 13, (39); § 16, (48)). Anzi, essendo $M_d$ anche minore di $L_d : 10$ (non però di $L_d : 100$), si ottiene nel prodotto una cifra illusoria, ma (N. § 35) il vantaggio, che si avrebbe cercando di risparmiare questa cifra inutile, sparirebbe davanti al danno di una regola molto meno semplice.

Osservazione. — Se per la tangente e per la secante si spinge l'interpolazione fino a 82°38′ (§§ 14 e 17), la regola resta ancora la stessa, perchè neppure allora $G_d$ supera $L_d$.

**20.** Anche per la ricerca inversa si potrebbe seguire la regola che abbiamo data (N. § 27) per la tavola or ora ricordata, e che stabilisce di arrestare la divisione di $\delta y \times \Delta x$ per $\Delta y$ alla cifra delle decine di secondi, delle unità di secondo, dei decimi, dei centesimi..., secondo che $\Delta y$ ha una, due, tre, quattro,... cifre; il che, in sostanza, equivale a prendere per la parte proporzionale tante cifre quante ne ha $\Delta y$; come precisamente si è stabilite per tutte le altre tavole (N. §§ 20, 22, 23). E infatti per questa regola si ha (N. § 35)

$$M_d = 5'', \qquad M_d = 0'',5\,, \qquad M_d = 0'',05\,, \qquad M_d = 0''005\ldots \tag{54}$$

e, ricordando tutte le limitazioni (38)′, (40)′, (49)′, si vede che $G_i$ è sempre minore di $L_i$, anzi generalmente trascurabile rispetto allo stesso $L_i$, e che $M_d$ è generalmente minore di $L_i$, senza essere minore di $L_i : 10$ (§ 8). Però ora crediamo opportuno modificare alquanto la regola accennata, per le seguenti due ragioni.

Nella tavola che stiamo esaminando la differenza tavolare $\Delta y$ comincia a poter essere di una cifra sola per il seno di un arco maggiore di 70°08′, e per la secante di un arco minore di 17°57′; e quindi è solo in questi casi che la ricerca dell'arco incognito sarebbe arrestata alle decine di secondo. Siccome però, per scrivere solo la cifra delle decine di secondo senza scrivere quella delle unità, bisognerebbe ricorrere a insolite e imbarazzanti convenzioni (1), crediamo preferibile scrivere anche la cifra illusoria delle unità.

Inoltre, volendo estendere l'interpolazione oltre 80°44″ per la tangente e oltre 80°43′ per la secante (§§ 15 e 18), si è osservato che è $G_i$ che è minore di $L_i$, e che finisce col diventare addirittura trascurabile rispetto allo stesso $L_i$, bisogna quindi (§ 8) che $M_i$ sia generalmente minore di $G_i$ e non di $L_i$. Ma $G_i$ è al più uguale a 0″,516..., quindi converrà arrestarsi ai decimi di secondo, perchè così $M_i$ sarà generalmente minore di $G_i$, senza essere minore di $G_i : 10$.

Concludendo: invece di arrestare la divisione di $\delta y \times \Delta x$ per $\Delta y$ come si è detto, converrà meglio arrestarla alle unità di secondo, se $\Delta y$ ha due o una cifra, e ai decimi di secondo se $\Delta y$ ha tre o più cifre.

---

(1) V. p. es., Baltzer, *Die Elemente der Matematik.* (Ed. Hirzel, Lipsia, 1875. Vol. I. pagg. 53 a 54.)

Osservazione. — Nel caso in cui per la ricerca inversa di tangente e di secante oltre 89°30' si ricorra all'artifizio indicato nei §§ 15 e 18, la regola ora accennata resta la stessa, perchè la ricerca si viene a fare sopra la tangente o sopra il seno di un arco minore di 30'; essendo allora $\Delta y$ di due cifre sempre, si arriva alle unità di secondo, e il dubbio che questa approssimazione possa essere illusoria per effetto dell'errore $f$ non sussiste, perchè il limite di questo errore, dato dalla (46) e anche dalla (47), è certamente trascurabile rispetto a $L_1$ (compreso ora fra 2'' e 6'', gli estremi inclusi).

G. Pesci.

Livorno, gennaio-marzo 1906. (1)

# LA COSTRUZIONE DELL'ASSE CENTRALE DI UN SISTEMA DI FORZE (2)

Se un sistema di forze qualunque agisce sopra un corpo, si può in generale ridurre ad una forza unica e ad una coppia. Se l'asse della coppia ha la stessa direzione della retta d'azione della forza, questa retta si dice *asse centrale.* Noi supponiamo noto ai nostri lettori che in questo caso il momento della coppia è minimo.

---

(1) *Correggendo le bozze.* — Il Ch.mo Prof. Fontoura da Costa della *Escola Naval* di Lisbona, al quale avevamo comunicata la prima parte di questo lavoro, ci ha, molto gentilmente, mandato un pregievolissimo e raro libriccino, che ci obbliga a modificare un po' quanto abbiamo asserito nella nota (2) al § 3.

Esso si intitola: "*Methodo de Reducção das distancias observadas no calculo das longitudes, por* Francisco de Paula Travassos". Coimbra, na Real Impremsa da Universidade, Anno de MDCCCV; ed ha tutte le dimensioni eguali a quelle del notissimo volumetto di tavole logaritmiche pubblicato, nello stesso anno, da Lalande.

Contiene, principalmente, una tavola di coseni naturali con sei cifre e di 10'' in 10'' (con le tavolette delle parti proporzionali); e questa va aggiunta a quelle che abbiamo citate nella nota (3) al § 2.

Inoltre, nella introduzione (di 44 pagine), l'A. insegna il modo di calcolare, coi valori naturali, l'angolo orario e le distanze lunari, e accenna (a pag. 41) ad altri calcoli ancora (come per es., quello dell'altezza) che si potrebbero eseguire in modo analogo. Egli quindi propose l'uso di questi valori nei principali calcoli nautici circa ottant'anni prima del Magnaghi; e la sua tavola dà un'approssimazione sufficiente anche nel calcolo delle distanze lunari, perchè essa è a sei cifre, anzichè a cinque, e il suo passo è di 10'', anzichè di 10'.

Notiamo finalmente che, per ambedue i calcoli accennati, l'A., molto opportunamente, trasforma la formula

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

nell'altra

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos (b + c)}{\frac{1}{2}\{\cos (b - c) - \cos (b + c)\}} - 1 .$$

(2) Appena pubblicato il n. III del corrente anno di questo periodico, contenente il mio articolo "Sulla composizione delle *forze* nello spazio" il chiaro prof. F. J. Vaes (che in unione al Dr. N. Quint dirige il pregievole giornale olandese *Wiskundig Tijdschrift*) ebbe la cortesia d'inviarmi le bozze di stampa del presente articolo, che stava per uscire nel suo giornale, e che tratta lo stesso argomento con metodo interamente diverso. Ho perciò creduto utile pubblicare in questo giornale la traduzione dell'articolo del prof. Krediet, mentre il mio è già stato riprodotto in Olandese nel *Wiskundig Tijdschrift.*

(Nota di G. Lazzeri.)

Generalmente si cerca questa risultante e questa coppia risultante, scomponendo le forze date in tre parallele ai tre assi di coordinate ortogonali, trasportando le componenti nell'origine coll'aggiunta di coppie, e per conseguenza il sistema si riduce a forze concorrenti nell'origine e a coppie nei piani delle coordinate.

Se P è la grandezza di una forza, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sono i suoi coseni di direzione, $a$, $b$, $c$ le coordinate del suo punto d'applicazione, ed R è la grandezza della risultante e $\lambda$, $\mu$, $\nu$ i suoi coseni di direzione, e finalmente L, M, N sono i momenti delle coppie risultanti nei tre piani, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned} R\lambda &= \Sigma P\alpha \\ R\mu &= \Sigma P\beta \\ R\nu &= \Sigma P\gamma \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} L &= \Sigma P\,(b\gamma - c\beta) \\ M &= \Sigma P\,(c\alpha - a\gamma) \\ N &= \Sigma P\,(a\beta - b\alpha) \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

È superfluo dimostrare queste relazioni, che si trovano in tutti i libri di meccanica. Noi le abbiamo menzionate per servircene.

---

Proiettiamo le forze P sui tre piani coordinati, che consideriamo come i tre piani di proiezione della geometria descrittiva.

Consideriamo per fissare le idee il piano XOY. Le proiezioni delle forze P formano su questo piano, un sistema piano di forze. I punti d'applicazione di queste sono dati dalle coordinate $a$, $b$, le componenti parallele agli assi $x$, $y$ da $P\alpha$, $P\beta$. Questo sistema si può ridurre coi mezzi ordinari della meccanica o della statica grafica. La risultante, per rimanere nel caso più generale, avrà per retta d'azione quella rappresentata dall'equazione

$$y\Sigma P\alpha - x\Sigma P\beta = \Sigma\,(b\alpha - a\beta).$$

Così, tenendo conto delle (1), si ha

$$x\mu - y\lambda = \frac{N}{R}. \tag{2}$$

Analogamente negli altri due piani troviamo le rette

$$\left.\begin{aligned} y\nu - z\mu &= \frac{L}{R} \\ z\lambda - x\nu &= \frac{M}{R} \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Supponiamo di aver costruito con un disegno di geometria descrittiva queste tre rette. Si possono considerare le rette (3) come proiezioni di una retta nello spazio, e si può costruire la proiezione di questa sul terzo piano di proiezione. Analiticamente ciò equivale ad eliminare $z$ fra le due equazioni (3). Questa eliminazione dà

$$x\mu - y\lambda = -\frac{L\lambda + M\mu}{R\nu}. \tag{4}$$

Questa retta è parallela a quella data dall'equazione (2). La distanza fra di esse è

$$p = -\frac{N}{R\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} - \frac{L\lambda + M\mu}{R\nu\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},$$

ossia

$$p = -\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{R\nu\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}. \tag{5}$$

Se trasportiamo l'origine in un punto $x$, $y$, $z$, le equazioni (1) non cambiano, eccettuate le tre ultime. Esse diventano

$$\begin{aligned} L_1 &= \Sigma P\{(b-y_1)\gamma - (c-z_1)\beta\} \\ M_1 &= \Sigma P\{(c-z_1)\alpha - (a-x_1)\gamma\} \\ N_1 &= \Sigma P\{(a-x_1)\beta - (b-y_1)\alpha\}, \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} L_1 &= L - R(y_1\nu - z_1\mu) \\ M_1 &= M - R(z_1\lambda - x_1\nu) \\ N_1 &= N - R(x_1\mu - y_1\lambda). \end{aligned}$$

Se $x_1, y_1, z_1$ è un punto dell'asse centrale, i valori di $L_1, M_1, N_1$ sono proporzionali a $R\lambda$, $R\mu$, $R\nu$; e quindi l'equazioni dell'asse centrale sono

$$\frac{L - R(y_1\nu - z_1\mu)}{\lambda} = \frac{M - R(z_1\lambda - x_1\nu)}{\mu} = \frac{N - R(x_1\mu - y_1\lambda)}{\nu}.$$

Ciascuna di queste frazioni è eguale a

$$\frac{L\lambda + M\mu + N\nu}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} \qquad \text{ossia a} \qquad L\lambda + M\mu + N\nu.$$

Così la proiezione dell'asse centrale sul piano XOY ha per equazione

$$\frac{N - R(x_1\mu - y_1\lambda)}{\nu} = L\lambda + M\mu + N\nu,$$

ovvero

$$x_1\mu - y_1\lambda = \frac{N}{R} - \frac{\nu(L\lambda + M\mu + N\nu)}{R}. \tag{6}$$

Essa è pure parallela alla retta (2); e la distanza fra le rette (2) e (6) è data da

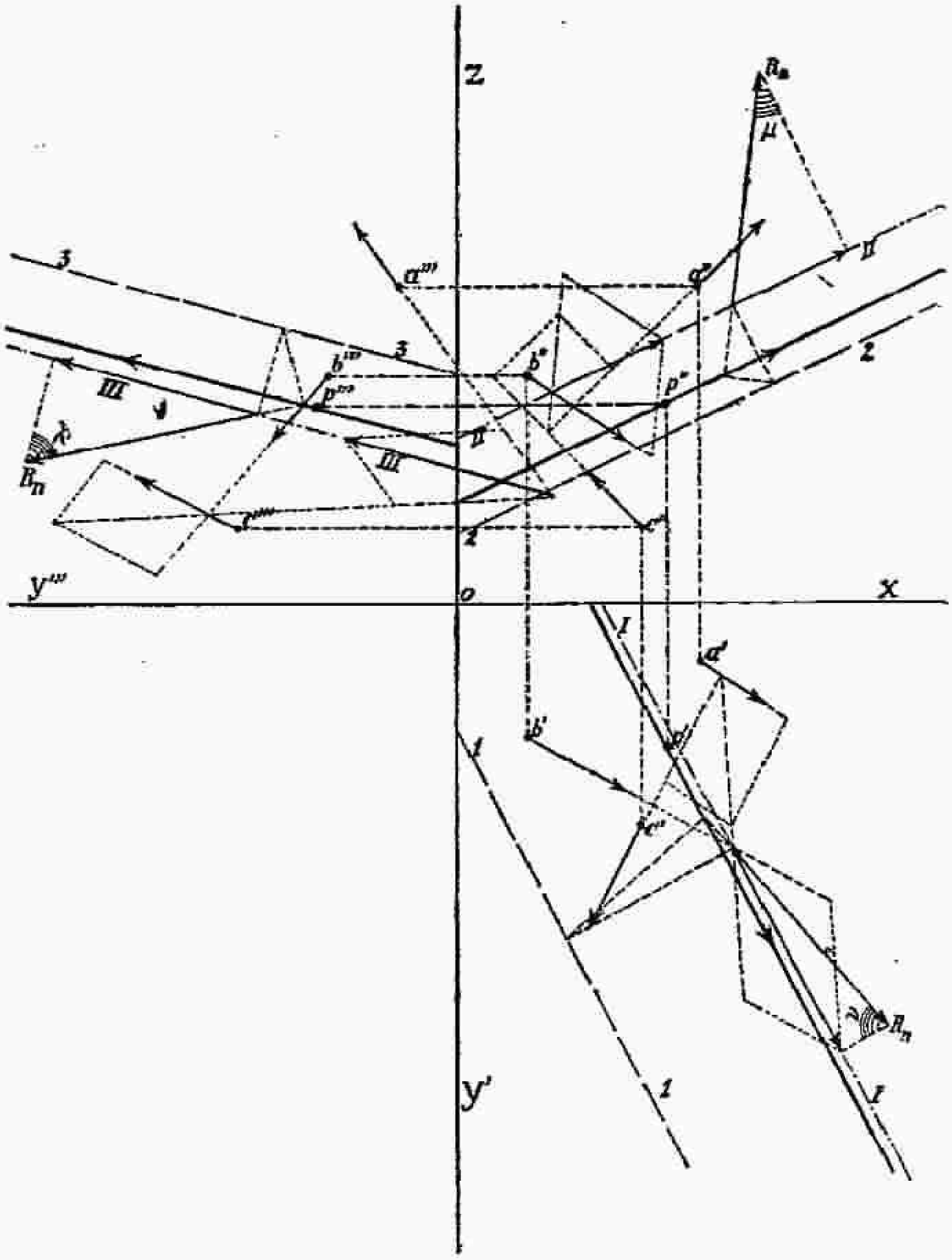
$$q = -\frac{\nu(L\lambda + M\mu + N\nu)}{R\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}, \tag{7}$$

dunque

$$q = p\nu^2. \tag{8}$$

È chiaro che la risultante delle forze nel piano XOY ha la grandezza

$$\sqrt{(\Sigma P\alpha)^2 + (\Sigma P\beta)^2} \qquad \text{ossia} \qquad R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}.$$




Facciamo rotare la risultante R, attorno alla sua proiezione sul piano XOY, per ribaltarla su questo piano; allora avremo costruito l'angolo che ha $\nu$ per coseno. Allora la costruzione di $q$, $p$, che è nota, è facile e non richiede spiegazioni.

Pertanto la proiezione dell'asse centrale sul piano XOY è trovata. Analogamente si trovano le altre proiezioni. Come riprova si costruiranno tutte e tre le proiezioni.

Come abbiamo dimostrato il momento della coppia nel piano XOY è

$$N_1 = N - R(x_1\mu - y_1\lambda);$$

dunque, tenendo conto della (5), avremo

$$N_1 = \nu(L\lambda + M\mu + N\nu),$$

oppure (7)

$$N_1 = -qR\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}.$$

Così $N_1$ è il momento della forza $\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$ agente secondo la retta (5) rispetto ad un punto dell'asse centrale. La nostra costruzione dà dunque l'asse centrale, le risultanti

$$R\sqrt{\mu^2 + \nu^2}, \qquad R\sqrt{\nu^2 + \lambda^2}, \qquad R\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$$

e la grandezza delle coppie L, M, N, cioè le proiezioni della risultante e della coppia risultante.

Nella figura abbiamo eseguito la costruzione per tre forze date.

KREDIET
*Rotterdam.*

## ALCUNE PROPRIETÀ METRICHE DELLA CUBICA DEL WALLIS

1. Se l'equazione

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

ha tre radici reali distinte $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ legate fra loro dalla relazione

$$2\beta = \alpha + \gamma,$$

deve essere

$$\beta = -\frac{B}{3A} \quad e \quad B^2 > 3AC.$$

Discende da ciò che, data una parabola cubica del Wallis

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{1}$$

le rette, e queste solamente, passanti per il punto di essa di ascissa $-\frac{b}{3a}$, cioè pel punto d'inflessione della parabola, incontrano la parabola stessa in due ulteriori punti reali equidistanti dal punto di flesso, se il loro coefficiente angolare $\mu$ soddisfa alla relazione

$$b^2 + 3a\mu > 3ac.$$

Se N è il punto di flesso ed M, M′ sono i punti d'intersezione di una retta per N colla cubica, le corde MN, NM′ e gli archi che hanno gli estremi negli stessi punti, limitano porzioni di piano di area uguale.

Reciprocamente, se la corda MM′ interseca la parabola cubica in un punto N, compreso fra M ed M′, in modo che le aree racchiuse dagli archi MN, NM′ e dalle corde MN, NM′ siano uguali, devono essere M e M′ equidistanti da N e quindi N essere il flesso.

Si osservi, infatti, che, in questo caso, l'area $\Lambda$ della porzione di piano limitata dall'arco MM′, dalle ordinate in M ed M′ e dall'asse $x$ deve coincidere con l'area $\Lambda'$ del trapezio limitato dalla corda MM′, dalle ordinate ai punti M, M′ e dall'asse $x$.

Siano $(x_1, y_1)$ $(x'_1, y'_1)$ le coordinate dei punti M, M′; si ponga

$$x_0 = \frac{x_1 + x'_1}{2} \qquad y_0 = \frac{y_1 + y'_1}{2}$$

e con $\bar{y}$ si indichi l'ordinata in $x_0$ alla parabola cubica. Per la nota formula di Simpson, (1) l'area $\Lambda$ è data da

$$\Lambda = \frac{x'_1 - x_1}{6}\,(y_1 + 4\bar{y} + y'_1)$$

e quella del trapezio da

$$\Lambda' = \frac{x'_1 - x_1}{2}\,(y_1 + y'_1) = \frac{x'_1 - x_1}{6}\,(y_1 + 4y_0 + y'_1)$$

da cui si trae, per l'eguaglianza $\Lambda = \Lambda'$.

$$\bar{y} = y_0\,.$$

Deve dunque N avere le coordinate $x_0, y_0$, ciò che dimostra l'asserto.

**2.** Tre punti della cubica M, N, M′ fra le cui ascisse $\alpha, \beta, \gamma$ passa la relazione

$$2\beta = \alpha + \gamma, \tag{2}$$

non sono allineati se N non è il punto d'inflessione. In questa ipotesi pei tre punti passa sempre una parabola conica, ed in generale una sola

$$y = mx^2 + nx + p. \tag{3}$$

---

(1) Sarà bene ricordare che se $f(x)$ è una funzione razionale intera di grado non superiore al 3º, si ha identicamente

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Il secondo membro si assume come valore approssimato per l'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

se $f(x)$ non soddisfa alle dette condizioni. Cfr. Peano, *Applicazioni geometriche di Calcolo infinitesimale*. Torino, 1887. Cap. V. § 6. n. 32.

La porzione di piano limitata dai due archi MN delle due parabole ha area uguale a quella limitata dai due archi NM'; e ciò è una conseguenza immediata della già ricordata formula di Simpson. La quale ci autorizza ad enunciare la proprietà reciproca, e cioè: se una parabola cubica (1) ed una parabola conica (3) si intersecano in tre punti M, N, M' in modo che siano uguali le aree delle porzioni di piano limitate dagli archi MN delle due curve e dagli archi NM', fra le ascisse $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dei tre punti passa la relazione (2).

Infatti, essendo $(x_1, y_1)$ $(x'_1, y'_1)$ le coordinate di M, M', se si pone

$$2x_0 = x_1 + x'_1$$

e si indicano con $y_0$, $y'_0$ le ordinate in $x_0$ alla parabola cubica e conica rispettivamente, dev'essere

$$\frac{x'_1 - x_1}{6}(y_1 + 4y_0 + y'_1) = \frac{x'_1 - x_1}{6}(y_1 + 4y'_0 + y'_1),$$

ciò che porta

$$y_0 = y'_0.$$

È dunque $x_0$ l'ascissa di N, come si voleva provare.

Una parabola cubica (1) ed una parabola conica (3) hanno le proprietà accennate se fra i coefficienti delle loro equazioni passano le relazioni

$$27a^2(d-p) - 9a(b-m)(c-n) + 2(b-m)^3 = 0$$
$$(b-m)^2 > 3a(c-n).$$

Data una parabola cubica (1), qualunque parabola conica (3) che incontri la precedente in tre punti M, N, M' di ascisse $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ per le quali sia

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta = h \tag{4}$$

limita con essa, mediante i due archi che hanno gli estremi comuni in M, N (od in N, M'), una porzione di piano di area costante

$$\frac{ah^4}{4}.$$

Fissata una parabola cubica (1), l'inviluppo di tutte le parabole coniche (3) soddisfacenti alle predette condizioni è costituito dalle due cubiche parallele alla fissa alla distanza $\pm \frac{2ah^3}{3\sqrt{3}}$ secondo la direzione dell'asse della parabola conica. E $\pm \frac{2ah^3}{3\sqrt{3}}$ sono le lunghezze dei due segmenti massimi che le due parabole intercettano sulle rette parallele all'asse $y$, fra i punti M, M'; essi tagliano le corde MN, NM' in due punti distanti da N di $\frac{l}{\sqrt{3}}$, $\frac{l'}{\sqrt{3}}$ se $l$, $l'$ sono le lunghezze di quelle due corde.

**3.** Per tre punti qualunque del piano M, N, M′ passano infinite cubiche del Wallis; se fra le ascisse dei tre punti intercede la relazione (2), le cubiche limitano a due a due, mediante gli archi MN, e mediante gli archi NM′, porzioni di piano di area uguale. Reciprocamente, se due cubiche del Wallis si tagliano in tre punti M, N, M′ in modo da limitare aree uguali mediante i due archi MN e i due NM′, i tre punti M, N, M′ hanno ascisse $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ legate dalla relazione (2). (¹)

Due cubiche del Wallis

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$y = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$$

godono delle dette proprietà, se sono verificate le relazioni

$$27\,(a-a')^2\,(d-d') - 9\,(a-a')\,(b-b')\,(c-c') + 2\,(b-b')^3 = 0$$
$$(b-b')^2 > 3\,(a-a')\,(c-c').$$

Tenuta fissa una parabola conica (3), una parabola del Wallis che passando per l'origine l'incontra in tre punti M, N, M′ fra le cui ascisse intercede la relazione (4) limita colla conica stessa, mediante i due archi MN (od i due NM′), una porzione di piano di area

$$\frac{ph^4}{4\,(\beta^3-\beta h^2)}. \tag{5}$$

Fra tutte quelle delle parabole del Wallis ora considerate per cui i tre punti d'intersezione non sono da una stessa banda dell'asse $y$, le due che incontrano la conica nei punti di ascisse

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,h, & \dfrac{h}{\sqrt{3}}, & \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\,h \\[2ex] -\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\,h, & -\dfrac{h}{\sqrt{3}}, & \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\,h \end{array} \tag{6}$$

sono quelle che rendono minima l'area (5).

Le cubiche del Wallis che, passando per l'origine, incontrano una parabola conica fissa (3) in punti le cui ascisse sono legate dalla relazione (4), inviluppano la curva del 10° ordine

$$27\,p^2x^6\,(Z-p)^2 - 4\,h^2\,[h^4Z^4 - 9\,h^2Z^3px^2 + 9\,h^2Z^2p^2x^2 + 27\,p^2x^4Z^2 - 36\,p^3x^4Z + 27\,p^4x^4]$$

dove Z sta in luogo del trinomio

$$y - mx^3 - nx.$$

Se invece della relazione (4) si pone l'altra

$$\gamma - \beta = \beta - \alpha = \rho\beta, \tag{7}$$

(¹) Due curve $y = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $y = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ $(m \geqq n)$ che si incontrano in $m$ punti, le cui ascisse sono in progressione aritmetica limitano, colle ordinate ai punti comuni estremi e l'asse $x$, porzioni di piano uguali; la proposizione reciproca non vale se non per $m \leqq 3$, che è il caso da noi considerato.

essendo $\rho$ un numero reale qualsivoglia, l'inviluppo delle cubiche è costituito dalle due parabole coniche

$$y = mx^2 + nx + p\,\frac{3-\rho^2}{3-3\rho^2} \qquad (8)$$
$$y = mx^2 + nx + p\,\frac{3-5\rho^2}{3-3\rho^2}$$

parallele alla fissa, secondo la direzione del loro asse.

Le parabole del Wallis che, passando per l'origine, incontrano la conica (3) in tre punti le cui ascisse siano legate dalla relazione

$$\gamma - \beta = \beta - \alpha = \sqrt{3}\,\beta$$

son quelle che limitano colla (3) stessa mediante gli archi MN (o NM') l'area minima fra tutte quelle che incontrano la (3) in tre punti non situati tutti dalla stessa banda dell'asse $y$ e fra le cui ascisse passi la relazione (2).

Queste cubiche inviluppano le due parabole coniche ottenute dalla fissa per traslazione parallela all'asse $y$ di ampiezza $\pm p$; come tosto si vede ponendo nelle (8) $\rho = \sqrt{3}$.

**4.** Tenuta fissa una parabola cubica (1), un'altra parabola del Wallis che, passando per l'origine, incontra la prima in tre punti M, N, M' le cui ascisse siano legate dalla relazione (4), limita con essa, mediante i due archi MN (o i due NM'), una porzione di piano di area

$$\frac{dh^4}{4\,(\beta^3 - \beta h^2)}.$$

Quest'area diventa minima per quelle cubiche che incontrano la fissa nei punti di ascisse (6). Queste cubiche, al variare di $h$ inviluppano due cubiche ottenute dalla fissa (1) per traslazione parallela all'asse di ampiezza $\pm\, d$.

Tutte le parabole del Wallis che, passando per l'origine, incontrano la fissa (1) in tre punti fra le cui ascisse intercede la relazione (4), inviluppano la curva del 12° ordine

$$27d^2x^6\,(Z-d)^2 - 4h^2\,[h^4Z^4 - 9h^2Z^3dx^2 + 9h^2Z^2d^2x^3 + 27h^2x^4Z^2 - \\ - 36d^3x^4Z + 27d^4x^4]$$

dove Z sta in luogo del quadrinomio

$$y - ax^3 - bx^2 - cx.$$

Se in luogo della relazione (4) si pone la (7), l'inviluppo è costituito dalle due parabole del Wallis

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,\frac{3-\rho^2}{3-3\rho^2}$$
$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,\frac{3-5\rho^2}{3-3\rho^2}.$$

È facile vedere come si debbano modificare i risultati di questo paragrafo e del precedente, nel caso che la cubica variabile debba passare per un punto fisso diverso dall'origine.

Notiamo, per ultimo, che l'area compresa fra un arco di parabola del Wallis e la corda relativa, o fra un arco di parabola del Wallis ed uno di parabola conica (3) cogli stessi estremi, od infine fra due archi di due parabole del Wallis cogli stessi estremi, supposto che l'ulteriore punto d'intersezione delle due curve non appartenga agli archi considerati, è equivalente ad un parallelogrammo costruito sulla corda che passa per gli estremi degli archi e su un segmento parallelo all'asse $y$ che sia i $\frac{4}{3}$ del segmento che le due curve intercettano sulla retta parallela all'asse $y$ pel punto di mezzo della corda. [1]

FILIPPO SIBIRANI

*Bologna.*

# SUI SISTEMI MISTI DI JACOBIANI E DI DETERMINANTI K

In una Memoria pubblicata in Crelle, [2] Jacobi, considerando i determinanti d'ordine $n$ che si possono dedurre da una matrice jacobiana di $n$ funzioni ad $n+1$ variabili, ha dimostrato una relazione semplicissima che intercede fra le derivate parziali prime di quei determinanti, e Clebsch d'altro canto, considerando gli jacobiani che si possono costruire con $n+1$ funzioni ad $n$ variabili, stabiliva un teorema assai notevole partendo da considerazioni d'indole geometrica. [3]

Considerando sistemi di jacobiani costruiti coi determinanti K [4] di $n$ funzioni scelte fra $n+1$ ad $n-1$ variabili, oppure sistemi di determinanti K costruiti con gli jacobiani di $n+1$ funzioni ad $n+1$ variabili scelte fra $n+2$ e, d'altra parte, i determinanti K dedotti da una certa matrice costruita con $n$ funzioni ad $n$ variabili e le loro derivate parziali prime, si ottengono risultati analoghi che credo non noti e che perciò espongo qui brevemente. Comincio coll'osservare che:

*I determinanti* K *di* $n+1$ *funzioni* f *omogenee ad* n *variabili e degli jacobiani* I *di queste funzioni prese* n *ad* n *sono, a meno di un fattore, identici. Questo fattore è lo stesso di quello per cui le* f *differiscono* (Clebsch) *dalle* $\varphi$, *jacobiani delle* I.

(1) Si noti che la stessa proprietà vale per l'area racchiusa da un arco di parabola conica (3) e la corda relativa.

(2) JACOBI C. G. J. *Theoria novi multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi.* Crelle, vol. XXVII.

(3) CLEBSCH, *Ueber eine Eigenschaft von Functionaldeterminanten.* Crelle, vol. LXIX, pag. 355. V. anche PASCAL, *I determinanti*, pag. 306.

(4) V. PASCAL, *op. cit.* pag. 293.

Infatti, posto

$$I_r = \frac{\partial (f_1 \dots f_{r-1} f_{r+1} \dots f_{n+1})}{\partial (x_1 \dots x_n)}, \qquad \varphi_r = \frac{\partial (I_1 \dots I_{r-1} I_{r+1} \dots I_{n+1})}{\partial (x_1 \dots x_n)}$$

$(r = 1, 2, \dots n+1)$ si ha

$$K(f_1 \dots f_{n+1}) = f_1 I_1 + \dots + f_{n+1} I_{n+1}$$

ma pel teorema di Clebsch [1] $f_i = M\varphi_i$ essendo M un fattore costante dunque

$$K(f_1 \dots f_{n+1}) = M(I_1\varphi_1 + \dots I_{n+1}\varphi_{n+1}) = MK(I_1 \dots I_{n+1}). \quad \text{c. v. d.}$$

Noto ora, di passaggio, un teorema anch'esso immediata conseguenza del teorema di Clebsch:

*Il determinante di funzioni*

$$D = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & & f_{n+1} \\ \frac{\partial I_1}{\partial x_1} & \frac{\partial I_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial I_1}{\partial x_n} & \frac{\partial I_2}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

*equivale, a meno di un fattore, alla somma dei quadrati degli jacobiani $\varphi$. Questo fattore è lo stesso di quello per cui le f differiscono dalle $\varphi$.*

Inatti, sviluppando per la prima linea, si ha

$$D = \Sigma f_i \varphi_i = M \Sigma \varphi_i^2. \qquad \text{c. v. d.}$$

*a)* Consideriamo $n+1$ funzioni $f_1 \dots f_{n+1}$ delle variabili $x_1 \dots x_{n-1}$, e, trascurando volta per volta una funzione $f$, costruiamo gli $n+1$ determinanti K che indicheremo rispettivamente con $k_1 \dots k_{n+1}$; trascurando poi volta per volta due determinanti $k$, costruiamo delle $n-1$ funzioni rimanenti gli $\binom{n+1}{2}$ jacobiani $I_{ij}$; è facile trovare, seguendo la dimostrazione di Clebsch, delle semplici relazioni fra i determinanti $I_{ij}$ e le funzioni $f_i$.

Essendo $a_i$, $b_i$, $c_i$ delle arbitrarie, consideriamo il determinante

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_1}{\partial x_{n-1}} & a_1 & b_1 & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial k_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{n+1}}{\partial x_{n-1}} & a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma a_i f_i & \Sigma b_i f_i & \Sigma c_i f_i \end{vmatrix}.$$

Se si sviluppa per i minori compresi fra le ultime tre colonne a destra, si trova

$$R = \sum_{i=1}^{n+1} a_i f_i \sum_{ij}^{n+1} b_i c_j I_{ij} - \sum_{i=1}^{n+1} b_i f_i \sum_{ij}^{n+1} a_i c_j I_{ij} + \sum_{i=1}^{n+1} c_i f_i \sum_{ij}^{n+1} b_i a_j I_{ij} =$$
$$= \sum_{ijl} a_i b_j c_l (f_i I_{jl} - f_j I_{il} + f_l I_{ij}).$$

[1] V. *loc. cit.*

D'altra parte, sottraendo dall'ultima linea di R le precedenti moltiplicate per $f_1 \dots f_{n+1}$, gli ultimi tre elementi dell'ultima linea diventano zero e gli altri sono della forma

$$-\sum_i f_i \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \Sigma f_i k_i + \sum_i k_i \frac{\partial f_i}{\partial x_j}.$$

Ora la prima parte è nulla, perche $\Sigma f_i k_i$ è lo sviluppo di un determinante con due colonne eguali di elementi $f$; la seconda parte è pure nulla perchè lo sviluppo di un determinante con due colonne eguali di elementi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Dunque $R = 0$ qualunque siano le arbitrarie $a_i, b_i, c_i$. Ne segue, per qualunque combinazione $i\ j\ l$ degli indici $1, 2, \dots, n+1$

$$f_i I_{jl} - f_j I_{il} + f_l I_{ij} = 0. \qquad (*)$$

Questa è una delle relazioni cui alludevamo e che può scriversi

$$\frac{f_i}{f_j} \cdot \frac{I_{jl}}{I_{il}} + \frac{f_l}{f_j} \cdot \frac{I_{ij}}{I_{il}} = 1.$$

Si noti che qui non è necessaria l'ipotesi della omogeneità delle funzioni $f$; ipotesi indispensabile per l'annullamento di R nei sistemi di soli jacobiani.

Dalla (*) segue che: *Se* i j l *è una combinazione semplice degli indici* $1, 2, \dots n+1$ *tale che* due qualsiasi *degli indici siano pari (o dispari), è nullo ogni determinante*

$$D_{ijl} = \begin{vmatrix} 0 & \dots & f_j & \dots & f_i & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & f_l & \dots & f_j & \dots & 0 \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_j}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_l}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial k_{n+1}}{\partial x_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial k_1}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial k_i}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial k_j}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial k_l}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial k_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Basta moltiplicare per $\frac{1}{f_j}$ e sviluppare per i minori compresi fra le prime due righe tenendo conto della (*).

*b)* Siano ora $f_1, \dots f_{n+1}$ $n+1$ funzioni delle $n+2$ variabili $x_1, \dots x_{n+2}$ e, trascurando volta per volta una variabile, si costruiscano gli $n+2$ jacobiani $I_l$; trascurando di nuovo una variabile alla volta, si costruiscano gli $n+2$ determinanti K delle I e si consideri il determinante

$$R = \begin{vmatrix} I_1 & \dots & I_{n+2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial I_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_1} & a_1 & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial I_1}{\partial x_{n+2}} & \dots & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{n+2}} & a_{n+2} & b_{n+2} \\ 0 & \dots & 0 & \Sigma a_i x_i & \Sigma b_i x_i \end{vmatrix}$$

in cui $a_i$, $b_i$ indicano delle arbitrarie. Se si sviluppa per i minori compresi fra le due ultilme colonne a destra, si trova

$$R = \Sigma\, b_i x_i\, \Sigma\, a_i k_i - \Sigma\, a_i x_i\, \Sigma\, b_i k_i$$

deve $k_i$ dinotano gli $n+2$ determinati K; di seguito

$$R = \Sigma\, a_r b_s\, (k_r x_s - k_s x_r)\,.$$

Facciamo l'ipotesi che le $f_i$ siano tutte omogenee dello stesso grado $m$; allora, sottraendo dall'ultima linea di R le precedenti moltiplicate rispettivamente per $-m, x_1, \ldots x_{n+2}$, gli elementi dell'ultima linea diventano zero; dunque $R=0$ qualunque siano le arbitrarie $a_i$, $b_i$.

Ne segue, per qualunque combinazione $r\,s$ degli indici

$$k_r x_s - k_s x_r = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{k_r}{k_s} = \frac{x_r}{x_s}\,;$$

a meno di un fattore comune le $k$ coincidono dunque con le $x$. La ricerca di questo fattore la di cui rappresentazione effettiva nel caso contemplato dal Clebsch *sembra legata a rilevanti difficoltà* (¹) qui si può fare con tutta facilità addirittura pel caso generale, perchè da

$$(m-1)(n+1)k_i = \begin{vmatrix} (m-1)(n+1)\,I_1 & \frac{\partial I_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial I_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial I_1}{\partial x_{i+1}} \cdots \frac{\partial I_1}{\partial x_{n+2}} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ (m-1)(n+1)\,I_{n+2} & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{i-1}} \cdots \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_{n+2}} \end{vmatrix}$$

segue

$$(m-1)(n+1)\,k_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial\,(I_1 \ldots I_{n+2})}{\partial\,(x_1 \ldots x_{n+2})}\,;$$

a meno di un fattore numerico il fattore di proporzionalità richiesto è dunque, in valore assoluto, il jacobiano delle I rispetto alle $x$.

Dal teorema dimostrato segue immediatamente che: *Il determinante formato orlando il jacobiano*

$$\frac{\partial\,(I_1 \ldots I_{n+2})}{\partial\,(x_1 \ldots x_{n+2})}$$

*con una linea di variabili ed una colonna di funzioni in modo che sia zero l'elemento d'incrociamento equivale, a meno di un fattore numerico, al prodotto del jacobiano stesso per la somma dei quadrati delle variabili.*

---

(¹) ... Aber seine wirkliche Darstellung scheint mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden, die ich nur für drei Functionen mit zwei Variabeln und für vier Functionen mit drei Variabeln durch besondere Betrachtungen habe überwinden können ... CLEBSCH, *loc. cit.*

Veggasi anche: ROSANES, *Ueber Functionen welche ein den Functionaldeterminanten analoges Verhalten zeigen.* Crelle. Vol. LXXV, pag. 166.

Infatti

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 \ldots\ldots x_{n+2} \\ I_1 & \frac{\partial I_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial I_1}{\partial x_{n-2}} \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ I_{n+2} & \frac{\partial I_{n+2}}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial I_{n-2}}{\partial x_{n-2}} \end{vmatrix} = x_1 k_1 + \ldots + x_{n+2} k_{n+2} = \\ = -\frac{1}{(m-1)(n+1)} \frac{\partial(I_1 \ldots I_{n-2})}{\partial(x_1 \ldots x_{n-2})} \Sigma x_i^2.$$

*c)* Consideriamo ora $n$ funzioni $f_1 \ldots f_n$ ad $n$ variabili $x_1 \ldots x_n$ e la matrice

$$\begin{Vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ \cdot & \cdot \qquad \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{Vmatrix}.$$

Sopprimendo da essa le colonne $2^a$, $3^a$, ... $(n+1)^{ma}$ si ottengono $n$ determinanti K che chiameremo rispettivamente $k_1, k_2, \ldots k_n$. Ciò posto si ha

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_1} = I + K_1(21) + K_1(31) + \ldots + K_1(n1)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_2} = (-1) I + K_2(12) + K_2(32) + \ldots + K_2(n2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial k_n}{\partial x_n} = (-1)^{n-1} I + K_n(1n) + K_n(2n) + \ldots + K_n(n-1, n),$$

dove I indica il jacobiano delle $f$ rispetto alle $x$ e $K_i(hi)$ è il determinante dedotto dalla matrice sopprimendo la $(i+1)^{ma}$ colonna e sostituendo però alla $(h+1)^{ma}$ alle derivate $\frac{\partial f_i}{\partial x_h}$ le derivate seconde $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial x_i}$. Perciò $K_1(21) = K_2(12)$, $K_1(31) = -K_3(13) \ldots$ e quindi

$$\frac{\partial k_1}{\partial x_1} - \frac{\partial k_2}{\partial x_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{\partial k_n}{\partial x_n} = nI.$$

Dunque:

*La somma, coi segni alternati, delle derivate dei determinanti* k *rispetto alle variabili* x *è identicamente uguale al prodotto di* n *pel jacobiano delle funzioni* f *rispetto alle variabili* x.

Corollario. — *È nullo il determinante formato orlando il circolante di elementi* $\frac{\partial k_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial k_n}{\partial x_n}$ *con una linea ed una colonna di elementi* I, $-$I, ..., $(-1)^{n-1}$I *in modo che sia* I *l'elemento d'incrociamento.*

Invero basta sottrarre dalla prima linea moltiplicata per $n$ del determinante

$$\begin{vmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{I} & -\mathrm{I} \ldots & (-1)^{n-1}\mathrm{I} \\ \mathrm{I} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} \ldots & \frac{\partial k_n}{\partial x_n} \\ -\mathrm{I} & \frac{\partial k_2}{\partial x_2} & \frac{\partial k_3}{\partial x_3} \ldots & \frac{\partial k_1}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n-1}\mathrm{I} & \frac{\partial k_n}{\partial x_n} & \frac{\partial k_1}{\partial x_1} \ldots & \frac{\partial k_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{vmatrix}$$

la $2^a$, $3^a, \ldots, (n+1)^{ma}$ rispettivamente moltiplicate per $(-1)^0, (-1)^1, \ldots (-1)^{n-1}$ perchè tutti gli elementi della prima linea si annullino.

ROBERTO OCCHIPINTI.

---

## RAPPRESENTAZIONE DELLE OMOGRAFIE NELLO SPAZIO A TRE DIMENSIONI

Il sig. Ascoli nel fasc. V, anno 1905 di questo Periodico si è occupato della rappresentazione mediante i punti dello spazio delle $\infty^3$ omografie binarie che si possono segnare sopra una forma di prima specie. Ora io mi propongo di ritornare su questo argomento per mostrare una costruzione geometrica del punto immagine dell'omografia considerata, e ancora per studiare l'omografia dello spazio che si può dedurre dalla corrispondenza posta fra le omografie binarie e le loro trasformate, e farne poi un'applicazione alla rappresentazione delle rotazioni sferiche, e in particolare di quelle che trosformano un dodecaedro regolare in se stesso. Tale applicazione venne già fatta dallo Stefanos il quale studiò le rotazioni che sovrapongono un cubo a se stesso.

1. Consideriamo le omografie segnate su di una conica $C^2$. Esse formano un sistema $\Sigma_3$ lineare $\infty^3$ come i punti e i piani dello spazio ordinario $S_3$. Sia:

$$\Omega(xx') = a_{11}x_1x'_1 + a_{12}x_1x'_2 + a_{21}x_2x'_1 + a_{22}x_2x'_2 = 0$$

l'equazione dell'omografia; i suoi coefficienti saranno le coordinate omogenee dell'omografia, essendo

$$x_1x'_1 = 0 \qquad x_1x'_2 = 0 \qquad x_2x'_1 = 0 \qquad x_2x'_2 = 0$$

le equazioni delle omografie fondamentali di coordinate

$$(1, 0, 0, 0); \quad (0, 1, 0, 0); \quad (0, 0, 1, 0); \quad (0, 0, 0, 1)$$

e

$$x_1x'_1 + x_1x'_2 + x_2x'_1 + x_2x'_2 = (x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2) = 0$$

quella di coordinate (1, 1, 1, 1) ossia l'omografia unità.

Immaginiamo di condurre per la conica $C^2$ situata nel piano $\omega$ una quadrica $S^2$ che supponiamo a rette reali; le generatrici ($g$) di essa saranno poste in corrispondenza proiettiva colle direttrici ($d$) qualora le due punteggiate A, B, C ...; A', B', C', ... proiettive su $C^2$ siano rispettivamente prospettive ai sistemi ($g$) e ($d$).

Tre coppie di generatrici e direttrici corrispondenti si incontrano in tre punti che individuano un piano $\pi$ segante $S^2$ lungo una conica $C^2_\pi$, sulla quale i due sistemi di rette della quadrica determineranno due punteggiate proiettive di cui i tre punti considerati sono uniti; ne segue che tutti i punti sono uniti, cioè per ogni punto di $C^2_\pi$ passa una generatrice $g$ e una direttrice $d$ proiettanti da quel punto una coppia di punti corrispondenti in $\Omega(xx') = 0$.

Si ha quindi che ad ogni omografia data su $C^2$ corrisponde un piano dello spazio, e viceversa dato un piano dello spazio esso sega $S^2$ lungo una conica dai cui punti partono una generatrice e una direttrice proiettanti su $C^2$ due punteggiate proiettive in una determinata omografia. Se ora noi a questo piano $\pi$ facciamo corrispondere il suo polo P nella polarità definita dalla quadrica $S^2$, resta stabilita una corrispondenza biunivoca e senza eccezione fra i punti dello spazio e le omografie poste su $C^2$. Il punto P sarà detto l'*immagine* dell'omografia considerata. La conica $C^2_\pi$ taglierà la $C^2$ secondo due punti che saranno i punti uniti dell'omografia e quindi la retta comune ai piani delle due coniche sarà l'*asse* dell'omografia.

**2.** Da quanto si è detto segue questa costruzione per il punto immagine di un'omografia:

*L'immagine di un'omografia di* $C^2$ *è il vertice di un cono circoscritto a* $S^2$, *del quale ciascun piano tangente taglia* $S^2$ *secondo due rette* g, d, *appoggiate a due punti* x, x' *corrispondenti nell'omografia.*

Se l'omografia data è involutoria si vede subito che la sua immagine è il centro dell'involuzione. Dunque:

*Le involuzioni hanno per immagini i punti del piano* $\omega$ *di* $C^2$.

Se l'omografia è degenere, ad essa corrisponderà un punto della quadrica $S^2$ e precisamente il punto ove si tagliano la generatrice $g_1$ e la direttrice $d_2$ passanti pei due punti singolari $(g_1d_1)$, $(g_2d_2)$ dell'omografia degenere. Le involuzioni paraboliche hanno per immagini i punti di $C^2$, l'identità ha per immagine il polo O di $\omega$.

Data un'omografia rappresentata da un punto qualunque A dello spazio i suoi punti uniti sono i due punti di $\omega$ in cui il piano $\alpha$ polare di A sega $C^2$; ne segue che il luogo dei punti immagini di omografie aventi i medesimi punti uniti è la polare OA della retta congiungente i punti stessi. Il cono quadrico $O^2$ di vertice O e circoscritto alla quadrica $S^2$ lungo $C^2$ sarà il luogo delle immagini delle omografie paraboliche che saranno definite dalla relazione

$$I^2 - 4\Delta = 0$$

dove si è posto

$$I = a_{12} - a_{21} \qquad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Dati sulla conica $C^2$ due punti $x = (gd)$, $x' = (g'd')$, essi saranno gli elementi singolari di una certa omografia degenere rappresentata dal punto P in cui il piano $(gd')$ tocca $S^2$; tutti i punti di questo piano rappresentano omografie in cui sono corrispondenti i punti $x$, $x'$ e analogamente tutti i punti del piano $(g'd)$ tangente alla quadrica $S^2$ nel punto P′ rappresenteranno omografie in cui sono corrispondenti i punti $x'$, $x$; avremo dunque che:

*Il luogo dei punti che rappresentano omografie in cui sono corrispondenti due punti dati* x, x′ *è il piano tangente alla quadrica* $S^2$ *nel punto che rappresenta l'omografia degenere avente* x, x′ *per elementi singolari.*

I due piani $(gd')$, $(g'd)$ si tagliano nella retta $xx'$ che rappresenta omografie involutorie in cui i punti $x$, $x'$ si corrispondono in doppio modo.

Come casi particolari dei precedenti possiamo dire che:

*Il luogo dei punti rappresentanti omografie aventi un dato punto unito* x *è il piano tangente alla quadrica* $S^2$ *nel punto* x; *e il luogo delle involuzioni che hanno un dato punto doppio* x *è la tangente a* $C^2$ *in* x.

**3.** Consideriamo due omografie A, A′ l'una inversa dell'altra, tali che nella prima ad un punto $x = (gd)$ corrisponda un punto $x' = (g'd')$ e nella seconda a $x'$ corrisponda $x$.

Siccome i due piani $(gd')$ e $(g'd)$ sono separati armonicamente dal punto O e dal piano ω, anche i punti A e A′ saranno separati armonicamente da O e ω, quindi:

*Due omografie l'una inversa dell'altra sono rappresentate da due punti corrispondenti nell'omologia armonica che ha per centro* O *e per piano* ω, *e reciprocamente.*

**4.** Vediamo ora di stabilire la condizione perchè due punti dello spazio rappresentino omografie armoniche. Sappiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè due omografie siano armoniche è che ad una coppia di elementi corrispondano nelle due omografie gli stessi elementi, ma permutati. Ora prendiamo a considerare le omografie rappresentate da due punti A e B che siano poli armonici rispetto alla quadrica $S^2$. Il piano α polare di A passa per B che sarà centro di una determinata involuzione $I_\alpha$ sulla conica $C^2_\alpha$ secondo cui $\alpha$ taglia $S^2$. Similmente il piano polare $\beta$ di B passa per A e resta determinata su $C^2_\beta$ secondo cui $\beta$ taglia $S^2$, un'involuzione $I_\beta$ di centro A.

Ad una retta $r$ passante per B in $\alpha$ e che sega $C^2_\alpha$ in due punti $a$, $a'$ coniugati in $I_\alpha$ è polare reciproca una retta $r'$ condotta per A e che sega $C^2_\beta$ in due punti $b$, $b'$ coniugati in $I_\beta$. Le rette $g$, $d$ di $S^2$ passanti per $a$ passano per i punti $b$, $b'$ rispettivamente, e le rette $g'$, $d'$ passanti per $a'$ conterranno i punti $b'$, $b$ rispettivamente. Ne segue che sulla conica $C^2$ a due punti $x$, $y$ corrispondono nelle due omografie A e B gli stessi elementi, ma permutati; quindi le due omografie sono armoniche. Reciprocamente se due omografie sono armoniche le loro immagini sono poli armonici rispetto alla quadrica $S^2$. Questa condizione venne stabilita considerando omografie non degeneri, ora noi diremo in ogni caso che:

*Condizione necessaria e sufficiente perchè due omografie siano armoniche è che le loro immagini siano poli armonici rispetto alla quadrica* $S^2$.

E si avrà anche che:

*Il luogo dei punti che rappresentano omografie armoniche ad una data è il piano polare del punto immagine dell'omografia data.*

Un'omografia degenere e una non degenere saranno armoniche quando gli elementi singolari dell'omografia degenere sono corrispondenti nell'altra. Due omografie degeneri sono armoniche quando hanno un elemento singolare in comune. Due involuzioni armoniche sono tali che il centro dell'una sta sull'asse dell'altra.

**5.** Si sa che due omografie si dicono *antiarmoniche* quando l'una è armonica all'inversa dell'altra. In tal caso il prodotto delle due omografie è un'involuzione. Il luogo delle immagini delle omografie antiarmoniche ad una data sarà dunque il piano polare al punto rappresentante l'omografia data nella polarità $\Pi_1$, prodotto dell'omologia armonica che ha per centro O e per piano $\omega$ e della polarità $\Pi$ definita dalla quadrica $S^2$. Nello stesso modo che la quadrica $S^2$ è il luogo dei punti immagini di omografie armoniche a se stesse, sussisterà un'altra quadrica $S_1^2$, passante pur essa per $C^2$, che sarà il luogo delle omografie antiarmoniche a se stesse e quindi tali che il loro quadrato è un'involuzione; ossia sarà il luogo delle omografie cicliche di 4° ordine definite dall'equazione

$$a_{12}^2 + a_{21}^2 - 2a_{11}a_{22} = 0.$$

Due poli armonici rispetto a $S_1^2$ saranno immagini di omografie antiarmoniche.

**6.** La corrispondenza fra lo spazio $S_3$ e il sistema $\Sigma_3$ delle omografie di $C^2$ può essere stabilita in modo tale che ai punti di riferimento di $S_3$ corrispondano le omografie di riferimento di $\Sigma_3$ e che siano fra loro corrispondenti un piano e un'omografia che abbiano le stesse coordinate. In tal caso indicando con $a_{rs}$ le coordinate di un omografia e del punto corrispondente, con $r$ la caratteristica dell'omografia; il luogo dei punti che rappresentano omografie aventi una data caratteristica è una superficie di 2° ordine di equazione

$$r\mathrm{I}^2 - (1+r)^2 \Delta = 0 .$$

Ponendo $r = -1$ e $r = 0$ si ha

$$\mathrm{I} = 0 \qquad \Delta = 0$$

che sono le equazioni del piano $\omega$ luogo delle omografie involutorie e della quadrica $S^2$ luogo delle omografie degeneri.

Ponendo $r = 1$ e $r = i$ si ha

$$\mathrm{I}^2 - 4\Delta = 0 \qquad \mathrm{I}^2 - 2\Delta = 0$$

che rappresentano rispettivamente il cono $O^2$ luogo delle omografie paraboliche e la quadrica $S_1{}^2$ luogo delle omografie cicliche di 4° ordine.

7. Consideriamo ora un'omografia generale rappresentata dal punto P dello spazio, essa è trasformata da un'omografia A in un'altra P' e le coordinate della nuova omografia sono forme lineari delle coordinate di P. Quindi un'omografia A determina un'omografia $\Omega_a$ dello spazio $S_3$ in cui sono corrispondenti un punto P immagine di un'omografia P di $C^2$ e il punto P' immagine della sua trasformata. Un'omografia degenere è trasformata da $\Omega_a$ in un'omografia pure degenere, quindi in $\Omega_a$ ad un punto P di $S^2$ corrisponde un punto P' della quadrica stessa in modo che alla generatrice $g$ e alla direttrice $d$ passanti per P corrispondono rispettivamente la generatrice $g'$ e la direttrice $d'$ passanti per P', cioè:

*L'omografia $\Omega_a$ trasforma in se stessa la quadrica $S^2$ e ciascun sistema di rette della quadrica medesima.*

Due omografie fra loro armoniche di $C^2$ sono trasformate da $\Omega_a$ in due omografie armoniche, quindi a due poli P e Q coniugati rispetto a $S^2$ corrispondono in $\Omega_a$ pure due poli coniugati. Un'involuzione è pure trasformata da $\Omega_a$ in un'involuzione, dunque ad un punto P del piano $\omega$ di $C^2$ corrisponde un punto P' del piano stesso, cioè $\omega$ è un piano unito di $\Omega_a$. Pure cangiati in sè stessi saranno i punti O, A, $A^{-1}$ immagini dell'identità, dell'omografia A e della sua inversa; sarà quindi AO una retta di punti uniti in $\Omega_a$. Essa sarà poi una retta unita per tutte le omografie dello spazio che si ottengono trasformando il sistema $\Sigma_3$ delle omografie binarie con quelle del fascio rappresentato dalla retta OA. E poichè ad un punto P e al suo piano polare rispetto a $S^2$ corrisponde in $\Omega_a$ un punto P' e il suo piano polare $\pi'$, ne segue che i piani polari dei punti di $s = OA$ sono piani uniti di $\Omega_a$ passanti per una retta $s'$ di $\omega$ polare reciproca di $s$. Questa retta $s'$ è una retta unita sulla quale si trovano due punti uniti di $\Omega_a$ che sono i punti uniti dell'omografia A cioè i punti dove $s'$ sega $C^2$. Dunque:

*L'omografia $\Omega_a$ dello spazio possiede una retta* s *di tutti punti uniti e una retta* s' *di tutti piani uniti.*

Dato l'asse $s'$ di A e una coppia $a, a'$ di punti corrispondenti, resta determinata l'omografia A, e quindi anche $\Omega_a$ che cangia adunque in sè stessa la quadrica $S^2$, la conica $C^2$ e tutte le coniche di $S^2$ sezioni con piani passanti per $s'$.

Se $e, f$ sono i punti uniti di A cioè i punti ove $s'$ sega $C^2$; $a, a'$; $a', a''$ due coppie di punti corrispondenti in A, e $r$ la sua caratteristica, si avrà

$$r^2 = (efaa')\ (efa'a'') = (efaa'') = a'(efaa'') = (efpp')$$

dove $p, p'$ sono due punti corrispondenti in $\Omega_a$ sulla retta $s'$, cioè:

*La caratteristica delle punteggiate proiettive corrispondenti sulla retta* s', *o quella dei fasci di piani passanti per* OA, *è il quadrato della caratteristica dell'omografia* A.

Il sistema $\infty^3$ delle omografie di $C^2$ dà adunque luogo ad un sistema $\infty^3$ di omografie dello spazio, le quali hanno tutte in comune il punto unito O immagine dell'identità, e il piano unito $\omega$ immagine delle involuzioni.

**8.** Consideriamo le omografie di un fascio F e del suo armonico F'; esse saranno rappresentate da due rette $f, f'$ polari reciproche rispetto a $S^2$. L'omografie del fascio F come quelle del fascio F' daranno luogo a due serie $\infty^1$ di omografie dello spazio le cui rette di punti uniti saranno le rette che proiettano da O i punti di $f$ e $f'$. Se sono P, P' e Q, Q' i punti ove $f, f'$ segano rispettivamente $S^2$, essi sono i vertici di un tetraedro PP'QQ' di cui due spigoli opposti sono $f$ e $f'$, e gli altri spigoli sono le coppie di generatrici e direttrici di $S^2$ uscenti dai vertici del tetraedro stesso. Siano $g, d$ la generatrice e la direttrice uscenti da P, e $g', d'$, quelle uscenti da P', saranno $g, g'$; $d, d'$ le altre due coppie di spigoli opposti del tetraedro e quindi $g, d'$ e $g'\ d$ le rette uscenti rispettivamente da Q e Q'. Allora le coppie di rette $g, d'$ e $g', d$ tagliano $C^2$ in coppie A, A'; B, B' di punti corrispondenti in tutte le omografie del fascio F e le coppie $g, d$; $g', d'$ tagliano $C^2$ in coppie A, B'; B, A' di punti corrispondenti in tutte le omografie di F', quindi:

*I piani* OAB, OA'B' *sono corrispondenti in tutte le omografie dello spazio le cui corrispondenti omografie binarie hanno per immagini i punti della retta* f *e quelli della sua polare reciproca* f'.

Reciprocamente, prese su $C^2$ due coppie di punti A, A'; B, B' ed A, B'; B, A', esse determinano due fasci F, F' di omografie a cui appartengono come coppie comuni di punti corrispondenti; i due fasci F, F′ sono armonici e le loro immagini sono due rette $f, f'$ polari reciproche rispetto ad $S^2$, e dànno luogo a due serie $\infty^1$ di omografie dello spazio che hanno una coppia di piani corrispondenti in comune. Per O passa una retta $r$ coniugata in $\Pi$ al piano OAB e una retta $r'$ coniugata al piano OA′B′; le due rette $r, r'$ sono corrispondenti in tutte le omografie dello spazio che corrispondono ai fasci F, F′ di omografie di $C^2$.

**9.** *Rappresentazione coi punti dello spazio ordinario delle rotazioni sferiche.* — La rappresentazione coi punti dello spazio delle omografie binarie di $C^2$ può essere applicata alla rappresentazione delle rotazioni attorno ad un punto fisso. Osserviamo infatti che, se assumiamo come quadrica $S^2$ una sfera avente per centro l'immagine O dell'omografia identica, e come piano delle omografie involutorie il piano all'infinito, allora l'omografia dello spazio che ora abbiamo studiato diventa una rotazione attorno al punto O. Ne segue che ad ogni rotazione attorno al punto O corrisponde un'omografia segnata sul cerchio all'infinito della sfera, e reciprocamente ad ogni omografia su questo cerchio corrisponde una rotazione attorno al punto O. Si vede quindi che la rappresentazione coi punti dello spazio delle omografie segnate sul cerchio all'infinito della sfera può servirci alla rappresentazione delle rotazioni sferiche.

**10.** Essendo $i$ il raggio della sfera di centro O la sostituzione lineare che lega in questo caso particolare le coordinate $a_{rs}$ dell'omografie con quelle del punto immagine sarà:

$$a_{11} = -ix_1 - x_3 \qquad a_{12} = -ix_3 + x_4$$
$$a_{21} = -ix_3 - x_4 \qquad a_{22} = ix_1 - x_2$$

da cui si ha:

$$\Delta = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$
$$\mathrm{I} = 2x_4 .$$

Uguagliate a zero, queste due espressioni ci rappresentano precisamente la sfera di centro O (di coordinate 0, 0, 0, 1) e raggio $i$ e il piano all'infinito.

Vediamo ora come si possa individuare il punto immagine di una certa rotazione. Questo punto sarà posto sull'asse di rotazione; per stabilire la sua distanza dal centro O osserviamo che se $\theta$ è l'argomento dell'angolo di rotazione, esso sarà legato alla caratteristica dell'omografia corrispondente sul cerchio all'infinito dalla relazione

$$\theta = i \log r \tag{1}$$

che sussisterà a meno di un multiplo di $\pi$. Ora detta R questa distanza avremo:

$$\mathrm{R} = \frac{1}{x_4}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \frac{i}{\mathrm{I}}\sqrt{\mathrm{I}^2 - 4\Delta}\,,$$

ed essendo

$$r = \frac{I + \sqrt{I^2 - 4\Delta}}{I - \sqrt{I^2 - 4\Delta}},$$

si ha:

$$R = i\frac{r-1}{r+1}$$

e ricordando la (1), si ottiene

$$R = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta i} - e^{\frac{1}{2}\theta i}}{e^{-\frac{1}{2}\theta i} + e^{\frac{1}{2}\theta i}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Dunque: *Il punto immagine di una rotazione* $\theta$ *attorno ad un asse passante per* O *si trova sull'asse stesso ad una distanza uguale a* $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

Una relazione prestabilita legherà le due direzioni secondo cui possiamo misurare questo segmento coi due sensi secondo cui possono avvenire le rotazioni. Se considerassimo la rotazione inversa di argomento $-\theta$, ad essa corrisponderebbe l'omografia di caratteristica $\frac{1}{r}$ e si avrebbe

$$R = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

cioè: *due rotazioni inverse sono rappresentate da due punti simmetrici rispetto ad* O. Da quanto si è stabilito si può dedurre che O è il punto immagine della rotazione nulla, il piano all'infinito è il luogo dei punti immagini delle rotazioni di argomento uguale a $\pi$.

11. Per quanto si è visto al n. 7 il luogo dei punti che rappresentano rotazioni che sovrapongono ad una retta $r$ uscente da O un'altra $r'$ pure uscente da O è dato da due rette $f$, $f'$ polari reciproche rispetto alla sfera di centro O. Indichiamo con $r_1$, $-r_1$ i due raggi della retta $r$; e $r'_1$, $-r'_1$ quelli di $r'$. Una rotazione la quale sovraponga $r_1$ a $r'_1$ sarà quella che si ottiene facendo rotare $r_1$ di un angolo $\theta = \widehat{r_1 r'_1}$ senza che esca dal suo piano, quindi la sua immagine sarà sulla normale a detto piano alla distanza di $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, misurata nella direzione voluta dal senso della rotazione. Siccome poi $r_1$ può sovraporsi a $r'_1$ con una rotazione di argomento $\pi$ attorno alla bisettrice del loro angolo, la retta $f$, luogo delle rotazioni che sovrapongono $r_1$ a $r'_1$, sarà parallela a questa bisettrice, e per quanto si è detto prima alla distanza uguale a $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

La sua reciproca $f'$ rappresenterà le rotazioni che sovrapongono $r_1$ a $-r'_1$, e sarà parallela alla bisettrice dell'angolo formato da $r_1$ e $-r'_1$ a una distanza da questa uguale a $-\cot\frac{\theta}{2}$. Le rette simmetriche di $f$, $f'$ rispetto al punto O rappresenteranno rotazioni che sovrapongono rispettivamente $r'_1$ a $r_1$, $-r'_1$ a $r_1$. Dunque:

*Il luogo dei punti che rappresentano rotazioni che sovrapongono due raggi uscenti da* O *è una retta.*

**12.** *Rotazioni che sovrapongono un poliedro regolare a se stesso.* — Quanto è stato detto nei capitoli precedenti ci può servire allo studio delle rotazioni che sovrapongono un poliedro regolare a se stesso. Noteremo prima di tutto che le rotazioni che trasformano in se stesso un poliedro regolare trasformano pure in se stesso la figura che si ottiene conducendo pei vertici i piani tangenti alla sfera circoscritta, figura che è un poliedro regolare che si dice *polare* del primo. Le rotazioni adunque che trasformano in se stesso il cubo e il dodecaedro regolare saranno le stesse di quelle delle loro figure polari, l'ottaedro e l'icosaedro regolare. Lo studio della configurazione dei punti immagini delle rotazioni che fanno rientrare in se stessi il cubo e il tetraedro regolare venne già fatto dallo Stefanos, noi verremo esaminando invece la configurazione formata dai punti corrispondenti alle rotazioni trasformanti il dodecaedro in se stesso.

**13.** Calcoliamo il numero N di queste rotazioni. Se supponiamo di considerare uno qualunque dei cinque poliedri regolari il quale abbia S spigoli, F faccie $m$-latere, V vertici con angoli solidi $n$-lateri, il poliedro ritornerà in sè stesso ogni volta che porteremo uno spigolo fisso a coincidere con un altro arbitrario, e questo può farsi in due modi diversi; oppure una faccia fissa con una arbitraria il che si può fare in $m$ modi diversi, od un vertice fisso in un vertice arbitrario il che può avvenire in $n$ modi differenti. Si ha quindi:

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{S} = m\mathrm{F} = n\mathrm{V}.$$

Applicando questa formola al dodecaedro si ha $\mathrm{N} = 60$. Queste 60 rotazioni vanno ripartite rispetto agli assi nel modo seguente:

*a*) venti rotazioni intorno alle congiungenti i vertici opposti;

*b*) ventiquattro rotazioni intorno alle congiungenti i centri delle faccie opposte;

*c*) quindici rotazioni intorno alle congiungenti i punti medi degli spigoli opposti;

*d*) l'identità.

Riguardo all'angolo di rotazione dobbiamo notare che le *a*) sono rotazioni di argomento uguale a $\pm \frac{2\pi}{3}$, le *c*) sono rotazioni di argomento uguale a $\pi$. In quanto poi alle *b*) avremo che 12 di esse sono di argomento uguale a $\pm \frac{2\pi}{5}$, e le altre 12 di argomento $\pm \frac{4\pi}{5}$. Ricordando poi il modo di costruire il punto immagine di una rotazione potremo affermare che le *a*) saranno rappresentate dai vertici di un dodecaedro a faccie parallele al dato e inscritto nella sfera di raggio uguale a $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$; le *b*) saranno rappresentate dai vertici di due icosaedri inscritti rispettivamente nelle sfere di raggio uguale a $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ e $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}$, che saranno a faccie parallele fra loro e alle faccie dell'icosaedro polare del dodecaedro dato. Le $c$) poi saranno sul piano all'infinito.

**14.** Vediamo ora se esistono rotazioni coniugate ad una data rotazione. Indichiamo con $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ i sei raggi condotti dal centro O perpendicolarmente a sei faccie non opposte del dodecaedro dato, e con le medesime lettere precedute dal segno — i raggi opposti a questi. Allora noi sappiamo che, date due rotazioni coniugate, ad un raggio condotto da O corrispondono nelle due rotazioni due raggi fra loro opposti, e reciprocamente; se quindi noi consideriamo ad esempio la rotazione che possiamo indicare colla sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_2 \end{pmatrix}$$

per trovare le rotazioni coniugate cominciamo a cercare quelle in cui ad $a_1$ corrisponde $-a_1$. Queste saranno evidentemente 5; pure 5 saranno quelle in cui $a_2$ si sovrapone a $-a_3$, ma una di esse sarà compresa nelle precedenti; quindi avremo altre 4 rotazioni coniugate alla data; se ne avranno poi altre 3 distinte dalle precedenti fra quelle in cui ad $a_3$ corrisponde $-a_4$, e così via; in modo che il numero delle rotazioni coniugate alla fissata sarà

$$5+4+3+2+1=15.$$

Avremo quindi che ad ogni rotazione sono coniugate quindici rotazioni, i cui punti rappresentativi saranno pertanto situati sul piano polare del punto che rappresenta la rotazione data nella polarità definita dalla sfera $S^2$.

In particolare poi avremo che ai venti punti della nostra configurazione che sono i vertici del dodecaedro corrisponderanno in detta polarità i piani passanti per le venti faccie dell'icosaedro minore; ai vertici di questo icosaedro corrisponderanno i piani delle faccie del dodecaedro; ai vertici dell'icosaedro maggiore corrisponderanno i piani passanti per cinque vertici dell'icosaedro minore. I punti all'infinito avranno per piani polari i piani diagonali e al centro O corrisponderà il piano all'infinito. Avremo dunque:

*I punti della nostra figura giacciono per gruppi di 15 su 60 piani, e la medesima è trasformata in sè stessa dalla polarità definita dalla sfera* $S^2$.

**15.** Possiamo ora dimostrare che: *i sessanta punti della figura che stiamo esaminando sono distribuiti per gruppi di cinque su 72 rette.*

Infatti, preso un raggio qualunque $a_1$ perpendicolare ad una faccia del dodecaedro dato, si ha che il luogo dei punti cui corrispondono rotazioni che sovrapongono $a_1$ ad un altro raggio è una retta, quindi sovraponendo $a_1$ successivamente ai dodici raggi perpendicolari alle dodici faccie avremo dodici rette, e sostituendo ad $a_1$ successivamente $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$, avremo in tutto 72 rette. Siccome poi una faccia può sovraporsi ad un'altra in 5 modi differenti, su ciascuna di esse si troveranno 5 punti della nostra figura. Queste 72 rette saranno evidentemente a 2 a 2 polari reciproche rispetto a $S^2$.

Esse saranno le 6 normali condotte per O alle sei coppie di faccie opposte del dodecaedro, i 30 spigoli del dodecaedro che forma parte della nostra figura, le 6 intersezioni delle coppie di faccie opposte di questo dodecaedro col piano all'infinito, i 30 spigoli dell'icosaedro minore. Riguardo alla posizione nello spazio dei 60 punti considerati si può notare che gli spigoli dell'icosaedro minore passano per due vertici del dodecaedro, e che i vertici dell'icosaedro maggiore sono i punti comuni ai cinque spigoli che incontrano una stessa faccia del dodecaedro.

In causa della polarità che trasforma la nostra configurazione in sè stessa, insieme alle due proprietà che abbiamo già dimostrato si verificheranno anche le due proprietà correlative, cioè:

*Per ciascuno dei 60 punti che rappresentano le rotazioni che sovrapongono a sè stesso il dodecaedro passano 15 dei 60 piani considerati.*

*Per ciascuna delle 72 rette su cui sono disposti 5 dei medesimi punti passano 5 dei 60 piani considerati.*

**16.** Altre proprietà di questa figura saranno le seguenti a 2 a 2 correlative:

*Per ciascuno dei 60 punti passono 6 delle 72 rette.*

*In ciascuno dei 60 piani sono situate 6 delle 72 rette.*

*Esistono 200 rette su ciascuna delle quali sono situati tre dei 60 punti considerati.*

*Per ciascuna di queste 200 rette passano tre dei 60 piani considerati.*

La prima proprietà è subito provata osservando che, se noi consideriamo una qualunque delle nostre rotazioni, per essa i raggi $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ vengono portati su altri 6 raggi, e così i loro opposti, quindi per il punto che rappresenta la rotazione devono passare 6 delle 72 rette.

Per la terza proprietà si noti che l'immagine delle rotazioni che sovrappongono un angoloide del dodecaedro dato ad un altro è una retta (quella stessa che rappresenta le rotazioni che sovrapongono le faccie corrispondenti nell'icosaedro polare). Queste rette saranno 200 e siccome un angoloide può sovraporsi ad un altro in tre modi differenti, su ciascuna retta vi saranno tre punti della nostra configurazione.

Queste 200 rette sono le 60 diagonali delle faccie del dodecaedro, e le loro 60 rette polari congiungenti uno dei vertici del dodecaedro con uno dell'icosaedro maggiore e uno dell'icosaedro minore. Le 30 rette congiungenti due vertici dell'icosaedro minore non consecutivi nè opposti, e le loro polari che sono gli spigoli dell'icosaedro maggiore. Le 10 rette congiungenti due vertici opposti del dodecaedro e le 10 intersezioni del piano all'infinito col piano passante pel centro e perpendicolare ad esse.

Essendo la nostra configurazione simmetrica rispetto al punto O, essa sarà trasformata in sè stessa dall'omologia armonica determinata dal punto O e dal piano all'infinito, cosa che si deduce anche dal fatto che tutte le rotazioni considerate sono a due a due inverse fra loro.

ANDREA MIOTTI.

# SULLA TRASFORMAZIONE DEL RADICALE $\sqrt{a+\sqrt{b}}$

**1.** È noto che il radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ si può trasformare nella somma di due radicali semplici se la differenza $a^2-b$ è un quadrato perfetto $h^2$; altra trasformazione, se non m'inganno non è stata sin oggi eseguita. Di modo che, se non risulta soddisfatta la relazione $a^2-b=h^2$, riesce disagevole calcolare numericamente il valore del radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

Io mi propongo ora di mostrare che tale radicale si può, in certi casi, decomporre anche nella somma di due radici quarte di quantità razionali.

**2.** Poniamo le equazioni

$$\begin{cases} \sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \\ \sqrt{-a+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\,, \end{cases} \tag{1}$$

in cui supporremo le quantità $a$ e $b$ razionali, e proponiamoci di risolverle, se sarà possibile, con dei valori razionali delle incognite $x$ ed $y$.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, quadrando le (1) si hanno le equazioni equivalenti

$$\begin{aligned} a+\sqrt{b}&=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt[4]{xy} \\ -a+\sqrt{b}&=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt[4]{xy} \end{aligned} \tag{2}$$

dalle quali sommando e sottraendo membro a membro si ottiene

$$a=2\sqrt[4]{xy} \qquad \sqrt{b}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\,. \tag{3}$$

La prima delle equazioni (3) può essere soddisfatta nel solo caso in cui il prodotto $xy$ sia la quarta potenza di una quantità razionale $z$.

Posto allora

$$xy=z^4 \tag{4}$$

le (3) diventano

$$a = 2z \qquad b = x + y + 2z^2. \tag{5}$$

Dalle (4) e (5) risulta molto facilmente

$$x + y = b - \frac{a^2}{2} \qquad xy = \frac{a^4}{16}$$

quindi i valori delle quantità $x$ ed $y$ sono dati dalle radici della seguente equazione

$$v^2 - \left(b - \frac{a^2}{2}\right)v + \frac{a^4}{16} = 0.$$

Risulta cioè

$$x = \frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4} \qquad y = \frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4}.$$

Le quantità $x$ ed $y$ risulteranno razionali nel caso in cui il prodotto $b(b - a^2)$ è un quadrato perfetto.

Posto allora

$$b(b - a^2) = h^2, \tag{6}$$

le (1) diventano

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}, \tag{7}$$

$$\sqrt{-a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} - \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}, \tag{8}$$

risulta cioè che: *i radicali* $\sqrt{\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{b}}}$, $\sqrt{-\mathrm{a} + \sqrt{\mathrm{b}}}$, *in cui* a *e* b *sono quantità razionali, si possono decomporre rispettivamente nella somma e nella differenza di due radici quarte di quantità razionali, se il prodotto* $\mathrm{b}(\mathrm{b} - \mathrm{a}^2)$ *è un quadrato perfetto.*

**3.** Allo stesso risultato si può giungere, facendo uso della nota trasformazione

$$\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}},$$

nel seguente modo:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{b}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{a^2}{b}}} = \sqrt[4]{b}\left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{b}}}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{b}}}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[4]{b}\left[\sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4b}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4b}}\right]$$

ossia

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2\sqrt{b(b - a^2)}}{4}} \tag{9}$$

e quindi per la (6)

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 + 2h}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b - a^2 - 2h}{4}}.$$

La (9), qualunque sia il prodotto $b(b - a^2)$, è sempre vera, come si può facilmente verificare, ma essa evidentemente non offre alcun vantaggio quando $b(b - a^2)$ non è un quadrato perfetto.

Analogamente si dimostrerebbe la (8).

**4.** Osserviamo che se al posto delle quantità $a$ si sostituisce $\sqrt{a}$, la (6) diventa

$$b(b-a)=h^2, \tag{10}$$

e la (7) si può scrivere

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{\frac{2b-a+2h}{4}}+\sqrt[4]{\frac{2b-a-2h}{4}};$$

risulta cioè che *il radicale* $\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, *in cui* a *e* b *sono quantità razionali, si può decomporre nella somma di due radici quarte di quantità razionali nel caso in cui risulti verificata la relazione* (10).

Evidentemente, nel caso in cui sia $a>b$, la trasformazione è anche possibile, purchè però $a(a-b)$ risulti un quadrato perfetto.

**5.** Consideriamo ora i radicali $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ e $\sqrt{-a-\sqrt{b}}$. Essi si possono porre rispettivamente sotto la forma

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{-1}\,\sqrt{-a+\sqrt{b}} \qquad \sqrt{-a-\sqrt{b}}=\sqrt{-1}\,\sqrt{a+\sqrt{b}}$$

quindi, se risulta verificata la relazione (6), dalle (7) e (8) si ha

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{\frac{2b-a^2+2h}{4}}-\sqrt[4]{\frac{2b-a^2-2h}{4}}\right] \tag{11}$$

$$\sqrt{-a-\sqrt{b}}=\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{\frac{2b-a^2+2h}{4}}+\sqrt[4]{\frac{2b-a^2-2h}{4}}\right]. \tag{12}$$

*Esempio numerico.* — Supposto $a=6$, $b=48$ e quindi $h=24$, risulta verificata la relazione (6), quindi dalle (7), (8), (11) e (12) si ottiene

$$\sqrt{6+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3} \qquad \sqrt{-6+4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt{6-4\sqrt{3}}=\sqrt{-1}\,[\sqrt[4]{27}-\sqrt[4]{3}] \qquad \sqrt{-6-4\sqrt{3}}=\sqrt{-1}\,[\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{3}].$$

**6.** Vediamo ora se i risultati ottenuti si possono applicare alle radici delle equazioni biquadratiche.

È noto che le radici dell'equazione

$$x^4-2px-q=0, \tag{13}$$

in cui supporremo $p$ e $q$ razionali, sono date dalla

$$x=\pm\sqrt{p\pm\sqrt{p^2+q}}. \tag{14}$$

Acciocchè al radicale (14) si possano applicare le trasformazione (7) e (11) è necessario che risulti soddisfatta una relazione analoga alla (6), che cioè il prodotto

$$(p^2+q)(p^2+q-p^2)=q(q+p^2)$$

risulti un quadrato perfetto. Posto allora

$$q(q+p^2)=k^2 \tag{15}$$

dalle (7) e (11) si ha

$$\sqrt{p+\sqrt{p^2+q}}=\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}+\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}$$

$$\sqrt{p-\sqrt{p^2+q}}=\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}-\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}\right]$$

e quindi le radici dell'equazione (13), nel caso in cui risulti soddisfatta la relazione (6), sono

$$\begin{aligned}&\pm\left[\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}+\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}\right]\\ &\pm\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{\frac{p^2+2q+2k}{4}}-\sqrt[4]{\frac{p^2+2q-2k}{4}}\right].\end{aligned} \tag{16}$$

Analoghe considerazioni si possono fare per le equazioni

$$x^4+2px^2-q=0\,,\qquad x^4\pm 2px^2+q=0\,.$$

*Esempio numerico.* — Supposto $p=3$ $q=3$ risulta soddisfatta, per $k=6$, la relazione (15), quindi le radici dell'equazione

$$x^4-6x^2-3=0$$

sono

$$\begin{aligned}&\pm\tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{108}+\sqrt[4]{12}\right]\\ &\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\sqrt[4]{108}-\sqrt[4]{12}\right].\end{aligned}$$

SALVATORE COMPOSTO.

# PICCOLE NOTE

## Sulle formule fondamentali della teoria delle funzioni circolari.

Quando s'abbia l'intenzione d'introdurre le funzioni circolari sulla base delle coordinate cartesiane ortogonali, si dimostri subito che *il quadrato della misura d'un segmento è uguale alla somma dei quadrati delle differenze fra le coordinate dei suoi estremi*, perchè s'avrà un mezzo semplicissimo per impiantare una formola madre, diciam così, di tutte quelle che stanno a fondamento della teoria delle funzioni circolari.

**1.** Dato un arco qualsiasi $\alpha$ e detto P il punto del cerchio trigonometrico avente per ascissa $\cos\alpha$ e per ordinata $\operatorname{sen}\alpha$, siccome le coordinate del centro sono nulle, il teorema su citato porta all'eguaglianza

$$\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1\,. \tag{1}$$

**2.** Ponendo

$$\begin{aligned}&M\equiv(\cos m\,;\ \operatorname{sen} m)\,, && N\equiv(\cos n\,;\ \operatorname{sen} n)\,,\\ &M_1\equiv[\cos(m+s)\,;\ \operatorname{sen}(m+s)]\,; && N_1\equiv[\cos(n+s)\,;\ \operatorname{sen}(n+s)]\,;\end{aligned}$$

con $m$, $n$, $s$ scelti comunque nel campo dei numeri reali, le corde MN e $M_1N_1$ sono eguali, giacchè la seconda non è che la prima cambiata di posto. Da siffatta eguaglianza e dal teorema sul quadrato della misura d'un segmento, sopra richiamato, scende che

$$\begin{aligned}(\cos m-\cos n)^2+(\operatorname{sen} m-\operatorname{sen} n)^2=&[\cos(m+s)-\cos(n+s)]^2\\ &+[\operatorname{sen}(m+s)-\operatorname{sen}(n+s)]^2.\end{aligned}$$

Sviluppando, o riducendo come suggerisce la (1), otteniamo

$$\cos m \cos n + \operatorname{sen} m \operatorname{sen} n = \cos(m+s)\cos(n+s) + \operatorname{sen}(m+s)\operatorname{sen}(n+s), \quad (2)$$

che è la formola della quale abbiamo fatto cenno in principio.

**3.** Per quanto segue occorre tener presente non altro che i valori di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ per archi $x$ aventi l'estremo nell'estremo del 1°, 2°, 3° e 4° quadrante.

Se nella (2) facciamo $m = \alpha$, $n = 0$, $s = -\alpha$, abbiamo la relazione

$$\cos\alpha = \cos(-\alpha),$$

donde il teorema:

a) *I coseni di due archi contrarii sono uguali.*

Se vi facciamo, come sopra, $m = \alpha$, $n = 0$, ma $s = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, otteniamo la relazione

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$

la quale porge il teorema:

b) *Se due archi sono complementari, il seno dell'uno è uguale al coseno dell'altro,* che, permettendo di scrivere

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{1}{\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)}, \qquad \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{2}\pi - \alpha)}{\cos(\frac{1}{2}\pi - \alpha)}$$

ossia

$$\csc\alpha = \sec(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha), \qquad \cot\alpha = \tan(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha),$$

offre i due corollari:

c) *Se due archi sono complementari, la secante (tangente) dell'uno è uguale alla cosecante (cotangente) dell'altro.*

Ponendo ancora nella (2) $m = \alpha$, $n = -\frac{1}{2}\pi$, $s = -\alpha + \frac{1}{2}\pi$ essa diventa

$$-\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)$$

e dà così il teorema:

d) *I seni di due archi contrarii sono contrarii.*

Per $m = \alpha$, $n = \beta$, $s = -\beta$ la (2) diventa

$$\cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha - \beta). \quad (3)$$

Per $m = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, e poi, come sopra, $n = \beta$, $s = -\beta$ la (2) diventa

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha)\operatorname{sen}\beta = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \beta),$$

che, pel teorema b), può essere scritta come segue

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta). \quad (4)$$

Cambiando $\beta$ in $-\beta$ nelle (3) e (4) e tenendo conto dei teoremi a) e d) abbiamo le altre due relazioni

$$\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha + \beta),$$
$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}(\alpha - \beta).$$

Le ultime quattro formole traducono il teorema d'*addizione* e *sottrazione*.

Lasciamo al lettore di ottenere con altre semplici opportune sostituzioni altre formole fondamentali.

Ascoli, 6 aprile 1906.

G. Calvitti.

## INTORNO ALLA QUISTIONE 708.

La questione 708, proposta dal prof. Catania, è la seguente:

*Data la definizione di eguaglianza posta dal Veronese nella seconda edizione del suo testo di geometria e nella terza edizione della seconda parte, si domanda se sia possibile dimostrare che in due figure eguali a tre punti allineati dell'una corrispondano tre punti allineati dell'altra.*

L'egregio proponente esclude che si faccia uso della definizione, contenuta nella prima parte della terza edizione del testo suddetto. Osservo però che tale definizione non diversifica dalle altre, anche se in essa è aggiunto che i segmenti delle due figure, i quali hanno estremi corrispondenti, sieno *corrispondenti*. È questo un di più, posto evidentemente dall'illustre autore per maggior chiarezza (si tratta d'un libro scolastico); perchè la corrispondenza dei segmenti suddetti è necessaria conseguenza della corrispondenza univoca che ha luogo fra i punti delle due figure rettilinee. Fra i punti di queste, infatti, non può aver luogo una corrispondenza diversa da quella che può considerarsi in esse fra i punti di tutti i segmenti eguali, che hanno gli estremi corrispondenti.

Riguardo poi alla questione proposta, osservo ch'essa è trattata nel testo del Veronese alle pagg. 23 e 24 della prima parte della terza edizione. La dimostrazione ch'ivi ne è data non è, parmi, molto chiara, a cagione di qualche omissione; ma può chiarirsi, e rendersi forse migliore, modificandola, nella sua prima parte, così:

Sieno A, B, C tre punti in linea retta di una delle due figure eguali, ed A′, B′, C′ i loro corrispondenti dell'altra. Se le due figure sono rettilinee e se C è compreso fra A e B, al segmento AB corrispondendo il segmento uguale A′B′, a C corrisponderà, per il postulato del segmento rettilineo, dato a pag. 11, un punto C″, interno al segmento A′B′, per modo da avere A′C″ = AC, C″B′ = CB. — Poichè la corrispondenza fra le due figure eguali è univoca, il punto C′ non potrà che coincidere con C″.

Adunque i punti A′, B′, C′ sono in linea retta, e si seguono nello stesso ordine dei loro corrispondenti A, B, C.

PROF. R. GRILLI.

Treviso, 5 marzo 1906.

# QUISTIONI PROPOSTE

**717.** Trovare l'equazione in coordinate cartesiane della curva i punti della quale hanno per coordinate

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}\left(\frac{3}{2}\cos\varphi - \cos^3\varphi\right) \\ y = \dfrac{a^2 - b^2}{b}\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi\right). \end{cases}$$

Studiare questa curva mostrando in particolare che la sua area è equivalente a quella della sviluppata dell'ellisse i cui semiassi sono $a$ e $b$.