la (10) è soddisfatta e le (11) diventano

$$\begin{cases} y \operatorname{sen} \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = \cos^2 \varphi \, (a \cos^2 \varphi + x) \\ y \cos \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{sen}^2 \varphi \, (a \operatorname{sen}^2 \varphi - x). \end{cases} \tag{12}$$

Dalla divisione della seconda per la prima si ricava

$$\frac{\operatorname{sen}^3 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a \cos^2 \varphi + x}{a \operatorname{sen}^2 \varphi - x}$$

da cui

$$x = a \frac{\cos^5 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}^5 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sen}^3 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sommando l'equazioni (12) moltiplicate per $\operatorname{sen}^2 \varphi$ $\cos^2 \varphi$ rispettivamente, si trova

$$y \left\{ \operatorname{sen}^3 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + \cos^3 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \right\} = a \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Dunque la rappresentazione parametrica è

$$\begin{cases} x = a \dfrac{\cos^5 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{sen}^5 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sen}^3 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ y = a \dfrac{\operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\cos^3 \varphi \, (1 + \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{sen}^3 \varphi \, (1 + \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \tag{13}$$

3. Conservando ancora le notazioni dei casi precedenti, indichiamo con B''_1, B''_2 i punti di contatto delle tangenti ai circoli di centri A_1, A_2 passanti per M condotte da A_2, A_1 rispettivamente; con P'' il punto d'incontro di queste tangenti, con H'' la proiezione di P'' sull'asse x.

Dalla similitudine dei triangoli $A_2P''H''$, $A_2A_1B''_1$ e $A_1P''H''$, $A_1A_2B''_2$ si ricava

$$\frac{PH}{A_2P} = \frac{A_1B''_1}{A_1A_2}, \qquad \frac{PH}{A_1P} = \frac{A_2B''_2}{A_1A_2}$$

da cui (indicando con x, y le coordinate di P'')

$$\frac{y}{\sqrt{(a + x)^2 + y^2}} = \frac{r_2}{2a}, \qquad \frac{y}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} = \frac{r_1}{2a}. \tag{14}$$

Eliminando r_1, r_2 fra queste equazioni e la

$$r_1 + r_2 = 2a$$

si trova per equazione del luogo di P'', cioè

$$y \left\{ \frac{1}{\sqrt{(a + x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a - x)^2 + y^2}} \right\} = 1,$$

che liberata dai radicali diventa

$$3y^8 + 8y^6 (a^2 + x^2) + 6y^4 (a^2 - x^2)^2 + (a^2 - x^2)^4 = 0.$$

Si può anche trovare la rappresentazione parametrica, come nei due casi precedenti.

Ponendo

$$r_2 = 2a \cos^2 \varphi, \qquad r_1 = 2a \operatorname{sen}^2 \varphi,$$

dalle quali risulta

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

le (14) diventano

$$\begin{cases} y^2 \cos^2\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi) = (a+x)^2 \,\mathrm{sen}^4\varphi \\ y^2 \,\mathrm{sen}^2\varphi\,(1+\cos^2\varphi) = (a-x)^2 \cos^4\varphi, \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y\cos\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = (a+x)\,\mathrm{sen}^2\varphi \\ y\,\mathrm{sen}\,\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = (a-x)\cos^2\varphi. \end{cases} \tag{15}$$

Da cui, dividendo la prima per la seconda

$$\frac{a+x}{a-x} = \frac{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}},$$

e quindi

$$x = a\,\frac{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sommando la (15) dopo averle moltiplicate per $\cos^2\varphi$, $\mathrm{sen}^2\varphi$ rispettivamente si ha

$$y\left\{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\right\} = 2a\,\mathrm{sen}^4\varphi\cos^4\varphi.$$

Per conseguenza la rappresentazione parametrica della curva è data dalle formule

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}} \\ y = a\,\dfrac{2\,\mathrm{sen}^4\varphi\cos^4\varphi}{\cos^3\varphi\,(1+\mathrm{sen}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{sen}^3\varphi\,(1+\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}. \end{cases} \tag{16}$$

4. Finalmente s'indichino con M_1, M_2 i punti opposti di M sui circoli c_1, c_2 che passano per M ed hanno per centri A_1, A_2 con B'''_1, B'''_2 i punti di contatto delle tangenti condotte da M_2 a c_1 e da M_1 a c_2, con P‴ il punto d'incontro di queste tangenti, con H‴ la proiezione di P‴ sull'asse x, e cerchiamo l'equazione del luogo di P‴.

Per la similitudine dei triangoli $P'''H'''M_1$, $A_2B'''_2M_1$ e $P'''H'''M_2$, $A_1B'''_1M_2$ si ha

$$\frac{P'''H'''}{P'''M_2} = \frac{A_1B'''_1}{A_1M_2}, \qquad \frac{P'''H'''}{P'''M_2} = \frac{A_2B'''_2}{A_2M_1}$$

da cui

$$\frac{y}{\sqrt{(r_1+a+x)^2+y^2}} = \frac{r_2}{2a+r_1}, \qquad \frac{y}{\sqrt{(r_2+a-x)^2+y^2}} = \frac{r_1}{2a+r_2},$$

con

$$r_1 + r_2 = 2a;$$

l'equazioni precedenti si possono scrivere

$$\begin{cases} y^2\left\{(2a+r_1)^2 - r_2^2\right\} = r_2^2\,(r_1+a+x)^2 \\ y^2\left\{(2a+r_2)^2 - r_1^2\right\} = r_1^2\,(r_2+a-x)^2 \end{cases}$$

od anche

$$\begin{cases} 8ar_1y^2 = r_2^2\,(r_1+a+x)^2 \\ 8ar_2y^2 = r_1^2\,(r_2+a-x)^2. \end{cases} \tag{17}$$

Per avere l'equazione del luogo basta eliminare r_1, r_2 fra le (17) e la

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Il calcolo riesce anche in questo caso assai laborioso, perciò ci limitiamo a cercare la rappresentazione parametrica. Ponendo nelle (17)

$$r_2 = 2a\cos^2\varphi, \qquad r_1 = 2a\,\mathrm{sen}^2\varphi,$$

si trova

$$\begin{cases} 2y \operatorname{sen}\varphi = \cos^2\varphi\,(a + 2a \operatorname{sen}^2\varphi + x) \\ 2y\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi\,(a + 2a\cos^2\varphi - x). \end{cases} \tag{18}$$

Dividendo la prima di queste per la seconda si trova

$$\frac{a + 2a\operatorname{sen}^2\varphi + x}{a + 2a\cos^2\varphi - x} = \frac{\operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi}$$

da cui

$$\begin{aligned} x(\operatorname{sen}^3\varphi + \cos^3\varphi) &= a\,\{\operatorname{sen}^3\varphi - \cos^3\varphi + 2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\} \\ &= a\,(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\,(1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi). \end{aligned}$$

Sommando le stesse equazioni (18) dopo averle moltiplicate per $\operatorname{sen}^2\varphi$, $\cos\varphi$ rispettivamente si ha

$$2y\,(\operatorname{sen}^3\varphi + \cos^3\varphi) = 4a\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi.$$

Dunque

$$\begin{cases} x = a\,\dfrac{(\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi)\,(1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + 2\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi)}{\operatorname{sen}^3\varphi + \cos^3\varphi} \\ y = 2a\,\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}^3\varphi + \cos^3\varphi} \end{cases}$$

od anche

$$\begin{cases} x = a\left(2\,\dfrac{\cos^3\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi}{\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi} - \cos 2\varphi\right) \\ y = \frac{1}{2}\,a\,\dfrac{\operatorname{sen}^2 2\varphi}{\cos^3\varphi + \operatorname{sen}^3\varphi}. \end{cases}$$

QUISTIONI PROPOSTE

725. Se P_1, P_2 sono due punti qualunque di una cubica di Agnesi [1] allineati col vertice O, dimostrare che:

1° il luogo del punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ è una retta m;

2° il luogo del punto P coniugato armonico di O rispetto a P_1P_2 è una parabola;

3° le tangenti alla cubica nei punti P_1, P_2 e la tangente alla parabola in P, concorrono in un medesimo punto M; e il segmento $\overline{PM}$ è bisecato dalla retta m;

4° le tangenti alla cubica nei punti P_1, P_2 tagliano l'assintoto in due punti equidistanti dalla intersezione di quest'ultimo con la retta $\overline{P_1P_2}$.

V. Retali.

[1] La equazione della cubica d'Agnesi *(versiera)* riferita al suo asse di simmetria e alla tangente nel vertice è $xy^2 = 4p^2(2p - x)$.

Una vita preziosa si è spenta anzi tempo, e un uomo d'intelletto gagliardo tragicamente è stato strappato a quel nucleo di pochi volenterosi che, nell'arduo, diuturno e mal ricompensato studio delle scienze pure, ritraggono l'unica loro intellettuale soddisfazione. Il

Prof. Dott. GIOVANNI CRESCI

mentre conduceva a passeggio i quattro figlioletti, nel traversare un ponte sul Tanaro, in Alessandria, ebbe l'atroce dolore di vedere un figlio, pieno di vita e di robustezza, cadere nelle acque infide del fiume in piena. Il povero padre si slanciò, nelle acque per salvare il figlio adorato, ma fu soprafatto dai vortici e incontrò morte lacrimata e immatura.

Noi, che fummo amici sinceri e affezionati dello scenziato modesto e studioso, il quale, alla scuola secondaria, dette non pochi lavori, tutti indiscutibilmente pregevolissimi, poichè hanno avuto l'onore di molteplici edizioni, noi che conoscemmo le alte sue virtù di cittadino, di padre e di educatore, versiamo lacrime sulla sua tomba troppo presto dischiusa, e inviamo un mesto affettuoso saluto alla vedova derelitta, ai poveri orfani.

La Redazione.

La Ditta Raffaello Giusti, editrice di molte opere scolastiche del compianto Professore, si unisce a noi nell'inviare sentite condoglianze alla sventurata famiglia.

Errata-Corrige. — Nel fasc. I. Luglio-Agosto 1906, a pag. 29, linea 7, in di: "sono irriducibili", si ponga: "sono irriducibili ed hanno i numeratori primi fra loro,".

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 20 decembre 1906

ONORANZE AL PROF. ULISSE DINI

La facoltà di scienze dell'Università di Pisa ha deliberato di porgere degno tributo di onore e d'affetto al suo decano, l'illustre prof. ULISSE DINI, senatore del Regno, nel quarantesimo anniversario della nomina di lui a professore; ed ha perciò pubblicato la seguente circolare, che sono lieto di portare a conoscenza dei lettori del "Periodico di Matematica".

Pisa, gennaio 1907.

Chiarissimo Signore,

Il 16 ottobre 1907 il prof. ULISSE DINI, senatore del Regno, compirà il 40° anno dalla sua nomina a professore nell'Università di Pisa.

A tutti i cultori della scienza sono noti i grandi meriti di lui come matematico e come insegnante.

Questa Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, che si onora di averlo nel suo seno, ha pensato in tale occasione di rivolgersi a quanti furono o sono del Dini o colleghi o discepoli o ammiratori della sua opera, perchè vogliano associarsi a lei nel far degnamente onore al grande maestro.

Le invia pertanto una nota di sottoscrizione pregandola di voler aderire e raccogliere delle adesioni e delle offerte.

Con ossequio

Per la Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali

La Commissione

Prof. MARIO CANAVARI, *Preside della Facoltà*
Prof. EUGENIO BERTINI
Prof. ONORATO NICOLETTI, *Segretario Cassiere.*

N.B. — Si prega di rimandare le note di sottoscrizione colle relative offerte non oltre il 30 aprile prossimo venturo all'indirizzo del prof. Onorato Nicoletti, Via S. Martino n. 3, p. 2°, Pisa.

Il " Periodico di Matematica „ si associa con entusiasmo alla bella iniziativa, e fa caldo appello a tutti i cultori della matematica, perchè vogliano concorrere a rendere la manifestazione degna del grande scienziato che si vuole onorare.

Specialmente si rivolge agli innumerevoli professori ed ingegneri che in questi quarant'anni sono usciti dalla R. Università o dalla R. Scuola normale superiore di Pisa. Essi sono legione; e tutti, evocando le memorie vicine o lontane della vita di studenti, ricordano che il Dini non è soltanto un grande scienziato, ma anche un maestro incomparabile, di una attività a tutta prova, sempre animato dal fuoco sacro dell'entusiasmo per la sua scienza, entusiasmo che sa comunicare ai suoi allievi.

Io sono certo che da tutte le parti d'Italia e dell'estero, ove sono stati dispersi dalle vicende della vita e della carriera, gli scolari del Dini vorranno inviare il loro contributo, affinchè nel nome grande del maestro si possa istituire (come so essere nelle intenzioni dei promotori) qualche fondazione benefica a favore di studenti della facoltà che gli è sempre stata e gli è così cara, alla quale ha consacrato le forti energie del suo alto intelletto e del suo nobile cuore.

Ed egli, il buon maestro, sarà felice di vedere che in un giorno solenne, il plebiscito di affetto riconoscente e di venerazione, che a lui tributano i suoi scolari del passato e del presente si converte in un'opera che renderà caro ed amato il suo nome anche agli scolari dell'avvenire.

Coloro che desiderano maggiori informazioni e schiarimenti, possono chiederli ad uno qualunque dei componenti la commissione.

Le offerte che saranno inviate alla direzione del *Periodico di matematica* saranno trasmesse al Segretario-cassiere della commissione, e di esse verrà reso conto nel giornale.

G. Lazzeri.

DAVIDE BESSO

Il professor Davide Besso si spegneva serenamente, in Frascati, ove era stato trasportato per alleviare le sofferenze di mal di cuore, l'otto agosto dell'anno ora scorso.

Da circa dieci anni non apparteneva più all'insegnamento universitario, che aveva chiuso e coronato la sua lunga carriera d'insegnante dell'Istituto Tecnico di Roma, e che aveva abbandonato agli ultimi del 1896, nel pieno vigore delle forze, nella maturità del forte ingegno. Aveva pure, quasi al tempo stesso, abbandonato gli studi scientifici prediletti; ma alla scuola ed alla scienza egli aveva già dedicato tutto sè stesso; nella scuola aveva passata la parte migliore della sua vita.

Fondava in Roma, nel 1886, il " Periodico di Matematica "; [1] ed al suo sviluppo, nei primi anni, aveva efficacemente contribuito.

È ben giusto quindi che il Periodico onori, nè lasci cadere in un ingrato oblio, la memoria del suo fondatore; e che un allievo, affettuosamente memore, dica in breve dell'opera proficua e feconda dello studioso e dell'insegnante, quasi a sciogliere un debito di gratitudine, e a recare un tributo di affetto al maestro indimenticabile.

***

Davide Besso, nato il 28 luglio 1845 in Trieste, da agiata famiglia, compì in patria i primi studi; seguì poscia i primi tre corsi universitari a Pavia e l'ultimo a Pisa, ove si laureò in matematiche nel giugno 1866. Insegnò subito e per quattro anni nella scuola tecnica comunale di Viadana; nel 1870 passò in quella regia di Perugia e finalmente, un anno dopo, otteneva per concorso la cattedra di matematica nell'Istituto Tecnico di Roma, risorto allora a nuova e rigogliosa vita sotto la direzione sapiente ed illuminata del Rodriguez. A Roma, dal 1874 al febbraio 1888, insegnò nel secondo biennio con amore senza pari, con uno scrupolo sconfinato, con energia e con originalità. E furon questi gli anni più operosi della sua vita scien-

[1] Dopo il primo anno di vita, il Periodico fu diretto dal Besso e dal compianto prof. Lugli fino al 1890.

tifica; gli anni, forse, più belli, passati fra l'affetto della mamma adorata e della famiglia, stabilitasi in Roma; fra gli studi indefessi e l'insegnamento che pur tanta parte assorbiva della sua attività.

Nel 1887, dopo essersi l'anno innanzi cimentato con onore al concorso per ordinario di Algebra a Napoli (e tra i concorrenti erano il Capelli, il compianto e sventurato Cesàro e il Frattini), prese parte al concorso di Calcolo infinitesimale a Modena.

Riuscì secondo ed ebbe la cattedra nel febbraio dell'anno dopo. Lasciò, dopo circa diciotto anni, la modesta cattedra dell'Istituto e fu professore a Modena, ov'ebbe anche, per qualche anno, l'incarico dell'insegnamento dell'Algebra.

Eppure, strano a dirsi, il cambiamento pur tanto ambito, ebbe quasi ad addolorarlo. Fu colpito profondamente, e certo esageratamente, del giudizio che la commissione diè del suo modesto ma coscienziosissimo lavoro; al punto di dire ai suoi amici, che se quel giudizio avesse in precedenza conosciuto, non avrebbe abbandonato l'Istituto!

La perdita della madre dilettissima portò un colpo gravissimo alla sua salute, alla sua operosità. Da allora si manifestò in lui una specie di *taedium vitae*; il desiderio di ritirarsi, di farsi quasi dimenticare. A soli cinquant'anni si sentiva vecchio, sfiduciato, senza la necessaria energia per restare nell'insegnamento superiore; bisognava, così ripeteva, lasciar il posto a chi avrebbe fatto meglio, ad uno più giovane, più valoroso.

Le preghiere dei parenti, degli amici, non fecero che differire di poco la irrevocabile determinazione. Appena ottenuta la promozione ad ordinario (dicembre 1895), chiedeva ed otteneva il collocamento a riposo (novembre 1896).

Si ritirò a vita privata, passando parte dell'anno a Trieste, parte a Roma; occupato a completare la sua biblioteca matematica, ricchissima di opere preziose, di opuscoli rari, di cui era ricercatore infaticabile e per la quale spendeva buona parte del suo, dedicando il resto ai poveri. La biblioteca aveva donato e trasportato a proprie spese alla patria.

Queste le poche vicende della vita dello studioso.

***

La produzione scientifica di D. Besso può nettamente dividersi in due parti. Una parte riguarda questioni elementari o storiche e comprende, oltre le sue poche opere didattiche, i numerosi articoli pubblicati nell'Annuario dell'Istituto Tecnico di Roma, e nei primi volumi del Periodico di Matematica.

Alcune di queste pubblicazioni, veri gioielli di eleganza matematica, sono anche molto importanti; e pure, si noti bene, non furono mai presentate nei concorsi universitari.

Un'altra parte riguarda gli studi sul calcolo integrale, sulla teoria delle equazioni differenziali lineari e sulle equazioni del quinto e del sesto grado. Queste ultime ricerche, continuate con amore per quasi un decennio, rappresentano la parte più cospicua e più importante dell'opera scientifica del Besso.

I lavori giovanili, dal 1868 al 1874, contengono eleganti risultati sul calcolo di alcuni integrali definiti; una estensione di un noto teorema sull'integrale di Dirichlet, e l'espressione in termini finiti di alcune notevoli serie.

Il primo lavoro sulle equazioni differenziali lineari, frutto di lunga preparazione e di matura riflessione, è del 1881; ed a questo, senza interruzione, seguirono tutti gli altri numerosi, pubblicati nelle Memorie e nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei. Tali lavori, in massima parte, trattano di alcune proprietà delle equazioni differenziali lineari omogenee che presentano una certa analogia con altre delle equazioni algebriche e che, come disse il Beltrami, *sebbene siano state fino ad ora poco considerate dai matematici si possono con buon fondamento reputare feconde di utili conseguenze per la teoria delle dette equazioni differenziali.* (1)

Il Besso infatti con mezzi assai semplici dimostra numerose proprietà sul prodotto di m integrali particolari di quelle equazioni; sulla somma di due potenze, ad eguale esponente, di due integrali particolari; mette in bella relazione i teoremi trovati colla teoria delle equazioni algebriche; estende al caso di una equazione di ordine n due teoremi dati da Brioschi ed Hermite per l'equazione differenziale del second'ordine. Due di questi teoremi sono notevolissimi ed esprimono che il prodotto di m soluzioni particolari quali si vogliano di un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n soddisfa ad un'equazione differenziale lineare omogenea d'ordine eguale al numero delle combinazioni con ripetizione di n cose ad m ad m; e poi che le derivate logaritmiche di m soluzioni particolari d'un'equazione differenziale lineare ecc., sono le radici d'un'equazione algebrica di grado m, i coefficienti della quale si possono esprimere razionalmente per mezzo del prodotto di quelle m soluzioni, d'alcune sue derivate, dei coefficienti della data equazione differenziale e d'alcune loro derivate.

Questi teoremi provocarono importanti osservazioni del Casorati; (2) e può ben dirsi costituiscano il punto di partenza di tutte le altre numerose memorie del Besso. Le quali, a loro volta, mostrano la importanza dei due teoremi e tutto il partito che il Besso, con rara perizia, con calcoli a volte lunghi e laboriosi, ma sempre eleganti, ha saputo ricavarne, relativamente alle equazioni differenziali del 2° e 3° ordine. Così, ad esempio, nella memoria: " Di alcune proprietà

(1) Transunti R. Acc. d. Lincei, vol. VII, serie III, seduta 17 dicembre 1882.
(2) Transunti R. Acc. d. Lincei, vol. VI, serie III, pag. 121 (1881).

dell'equazione differenziale lineare omogenea del second'ordine e di alcune equazioni algebriche „, in cui egli s'imbatte in un bellissimo teorema relativo ad uno speciale determinante, potenza di quello famoso di Vandermonde, considerando il caso che il prodotto di m soluzioni particolari della data equazione sia costante, il Besso riesce a risolvere, per radicali, una estesissima classe di equazioni algebriche. La formazione dell'equazione algebrica che ha per radici le derivate logaritmiche di m soluzioni particolari di una equazione differenziale ecc. di ordine n non è agevole, come già osservava il Casorati. Il Besso fa il calcolo per un'equazione di second'ordine e per sei soluzioni particolari; deduce agevolmente la condizione perchè un'equazione di second'ordine, mancante del termine colla derivata prima ammetta sei soluzioni particolari il cui prodotto è costante; poscia, dalla relazione tra l'equazione algebrica ottenuta e la equazione originaria differenziale, è condotto alla risoluzione, per serie ipergeometriche, di una particolare classe di equazioni del 6° grado, portando così *un pregevole complemento ai risultati già noti* di questa teoria. (1)

I lavori di Halphen e di Goursat sull'equazione differenziale del quart'ordine soddisfatta dal prodotto delle coppie di soluzioni di due equazioni differenziali del secondo, conducono il Besso a nuove generalizzazioni e ad un teorema notevole su quattro integrali fondamentali dell'equazione del quarto ordine sopradetta, dei quali è nulla una forma quadratica.

Pregevolissima è la memoria sull'equazione del quinto grado, inspirata dalle classiche ricerche di Brioschi. Il Besso prende le mosse dal teorema che le radici di un'equazione algebrica di grado n, priva del secondo termine, soddisfano ad un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine $n-1$; valendosi poi di un bel teorema di Brioschi forma l'equazione di quarto ordine soddisfatta dalle radici di un'equazione algebrica di quinto grado ridotta dalla forma di Jerrard. L'equazione così formata rientra in una classe assai generale, studiata dal Goursat, integrabile per serie ipergeometriche di ordine superiore; dalla integrazione così ottenuta è facile allora esprimere, colle stesse serie, le radici dell'equazione di Jerrard.

Nè basta; chè i resultati conseguiti in precedenti lavori, permettono di dare alla ricerca una forma assai semplice ottenendo la detta risoluzione mediante serie ipergeometriche di terz'ordine; e il Besso riesce pure ad esprimere, con serie ipergeometriche di second'ordine le radici quadrate delle radici della risolvente di Brioschi dell'equazione di quinto grado.

La estensione dei risultati precedenti conduce alla ricerca delle equazioni differenziali di 3° e 4° ordine integrabili per serie ipergeo-

(1) CASORATI. Trasunti R. Acc. d. Lincei, vol. VIII, serie III, pag. 354 (1884).

metriche; alla risoluzione dell'equazione trinomia $y^n + y - x = 0$, mediante serie ipergeometriche di ordine $n - 2$; e di alcune più complicate ancora.

Le prime cinque memorie sulle equazioni differenziali e poi tutto il complesso dei suoi lavori sullo stesso argomento, valsero al Besso per ben due volte uno dei premi offerti dal Ministro della P. I., per relazione del Beltrami; il quale, a nome della Commissione dei Lincei, formulava il voto *che i non pochi matematici, italiani e stranieri, i quali si occupano degli stessi argomenti, prendano nella debita considerazione le belle proposizioni ed i risultati semplici ed importanti che il signor Besso è riuscito a conseguire, col lavoro perseverante di più di cinque anni.* (1)

Ma bisognava per ciò non aver la modestia del Besso, la sua ritrosia a parlar delle sue cose, de' suoi lavori!

***

L'Annuario dell'Istituto Tecnico di Roma, dal 1877 al 1884, contiene alcuni pregevolissimi articoli, parte e frutto dell'elevato insegnamento che il Besso impartiva nel 2° biennio dell'Istituto.

Nei teoremi elementari sui massimi e minimi, da una serie ingegnosissima di disuguaglianze stabilite in modo elementare, egli trae una serie di teoremi, nuovi in gran parte, sui massimi e minimi di certe funzioni a più variabili e che sfuggono al metodo classico elementare fondato sulla discussione delle radici di un'equazione di secondo grado. Questa nota succosa, elegantissima, contiene, se non ci inganniamo, una tra le più belle, semplici e generali dimostrazioni del teorema che la media aritmetica di quanti si vogliano numeri positivi è sempre maggiore della loro media geometrica, quando almeno due di essi sono diseguali; teorema che il Besso estende in un certo senso, considerando la media delle potenze r^{me}, e la media dei prodotti r ad r.

E lo stesso Annuario contiene un'altra nota di una impareggiabile eleganza. Con mezzi semplici, elementarissimi e rigorosi, dopo aver rilevato che una dimostrazione contenuta nel noto trattato di Trigonometria del Serret, non è rigorosa, il Besso riesce a stabilire le limitazioni pel seno e coseno di un arco, limitazioni che si estendono ad una potenza intera e positiva qualsiasi dell'arco. È in fondo una bella elementare dimostrazione dello sviluppo del seno e del coseno di un arco in serie ordinata per le potenze dell'arco stesso.

Agli stessi intenti sono dedicate altre due note; una sul calcolo dell'errore per la ricerca del logaritmo di un numero non compreso nelle tavole e per il problema inverso; l'altra relativa alla celebre

(1) Rend. Acc. d. Lincei, vol. II, serie IV, pag. 383. Adunanza solenne del 9 maggio 1886.

formula del pendolo semplice. La dimostrazione del Besso potrebbe prender onorevolmente posto nei trattati elementari di meccanica e ci sembra, oltre che rigorosa, assai più semplice delle moltissime altre proposte. E notiamo infine un'altra nota contenente una bella osservazione che non credo fatta da altri; cioè che l'eguaglianza delle mediane in un triangolo sferico non trae di conseguenza l'eguaglianza dei corrispondenti lati. Il Besso dà anche, oltre un esempio, la condizione necessaria e sufficiente perchè questo avvenga.

Gli articoli pubblicati nel Periodico di Matematica, dal primo all'ottavo anno, sono numerosissimi: esercizi per la scuola, oggetto costante delle sue cure e dei suoi pensieri, vere miniere di acute osservazioni e risultati conseguiti nel lungo insegnamento; articoli didattici; ricerche originali e tra queste, per non dilungarci troppo, citiamo solamente quelle sul tetraedro a facce eguali; su alcune proprietà e su una serie di punti notevoli del triangolo; sul tronco di prisma,, ecc.; e finalmente anche tre articoli di storia della matematica. Di questa era studiosissimo e coltissimo; e nella età matura si era financo dato allo studio del latino per poter fare ricerche dirette sulle fonti.

Nel breve articolo sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze de' suoi spigoli, egli ha rivendicato a Tartaglia la formula attribuita ad Eulero, Lagrange, Mascheroni; e la nota su di un opuscolo di Michelangelo Ricci è una illustrazione dotta ed erudita degli eleganti e notevoli teoremi sui massimi e sui minimi geometrici scoperti dal celebre porporato romano e da altri geometri italiani, continuatori della gloriosa tradizione di Galileo, Torricelli e Viviani.

***

Una breve, ma speciale menzione meritano i pochi libri di testo del Besso. Nei primi anni nel suo insegnamento aveva tradotto dal tedesco, pei suoi allievi, la Geometria popolare del Littrow e l'avea corredata di note piane e chiare. Egli era un caldo fautore dell'idea di dar presto ai giovani il concetto di funzione, e in un articolo del Giornale di Matematiche, in cui aveva riassunte le note del Littrow, con una serie bene appropriata di esempi facili, intuitivi, mostrava la necessità di introdurre e svolgere tale concetto, dominante nella matematica e che serve di base a tutte le sue applicazioni, sin dai primissimi elementi.

Gli elementi di Trigonometria piana, con un'appendice di tavole di seni e coseni, editi nel 1880, sono un piccolo, modestissimo libriccino di appena cento pagine; fedele riassunto delle lezioni che, da anni, seguiva nel 3° corso dell'Istituto. Ed è, può sembrare fino impossibile, un libro originalissimo e che completamente e profondamente si scosta dalle solite rifritture e raffazzonature.

Il Besso destinava al quarto anno la teoria delle funzioni circolari, e molto ragionevolmente; i suoi elementi quindi non considerano che la risoluzione dei triangoli rettilinei e trattano con diffusione dei metodi elementari pel calcolo, con una data approssimazione, del seno e del coseno di un angolo e del problema inverso. Il calcolo e la risoluzione degli svariati problemi sui triangoli rettilinei sono sempre fatti e condotti in modo da poter, premessa una teoria elementare delle approssimazioni numeriche, assegnare il grado di approssimazione del risultato. Egli stesso, valentissimo e celerissimo calcolatore, aveva calcolato con una determinata approssimazione e coi metodi esposti negli elementi, le tavole di seni e coseni naturali di dieci in dieci primi, ecc. Questa appendice di poche pagine racchiude un lavoro lungo, faticoso, ma esattissimo. Nè va taciuta un'altra dote di questi elementi; la raccolta cioè numerosa, notevolissima e in gran parte pure originale, degli esercizi proposti.

***

Il Besso era un lavoratore infaticabile, coscienziosissimo. Non diceva cosa, nè scriveva o pubblicava lavoro che non fosse lungamente meditato e ponderato. L'insegnante poi era perfetto. Ricordo con un senso di profonda, riverente ammirazione, la cura, lo scrupolo con cui faceva le sue lezioni, rivedeva i nostri compiti, controllando minuziosamente i calcoli, non lasciando inosservata la più lieve menda; rammento ancora il salutare rigore che egli ci usava. Entrando in quella piccola stanzetta in cui soleva far lezione, ci sembrava di entrare in un tempio!

Era apparentemente di modi burberi, di poche e misurate parole; bastava conoscerlo un po' da vicino per conoscere il suo ottimo cuore, la rettitudine del suo animo, per ammirarlo ed amarlo. Caritatevolissimo egli era, si è detto; i pochi gioielli che possedeva aveva anche dato in opere di beneficenza. La sua cultura matematica, non era vasta; ma ciò che sapeva, sapeva profondamente. Aveva la passione pei libri rari e n'era conoscitore provetto. Era modesto, incredibilmente modesto, e forse l'esagerato concetto dei suoi doveri di studioso, di insegnante lo indussero a ritirarsi dall'insegnamento. Quanti saprebbero o potrebbero fare altrettanto?

***

Se è un sacro dovere pei giovani onorare la memoria di coloro che dedicarono il loro ingegno, la vita alla scuola e conseguirono ancora un posto onorevole, per quanto modesto, nella scienza, nessuno più del Besso, crediamo, sia di ciò degno. Possano le poche e sincere parole dell'allievo contribuire in minima parte ad onorare la memoria del maestro!

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE
DI
DAVIDE BESSO

I. **Giornale di matematiche.**

1. Sull'integral seno e l'integral coseno [v. VI, pp. 313-323 (1868)].
2. Sull'integrale $\int_0^\beta \frac{\operatorname{sen}^m x}{x} dx$ [v. VII, pp. 210-212 (1869)].
3. Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare [v. VII, pp. 131-136 (1869)].
4. Sopra alcuni integrali doppi [v. X, pp. 79-92 (1872)].
5. Sopra alcuni integrali definiti [v. X, pp. 119-127 (1872)].
6. Sulla serie $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^\mu}$ [v. X, pp. 160-164 (1872)].
7. Sull'integrale $\int F(x) \log x \, dx$ esteso fra limiti reali e positivi quando la $F(x)$ sia una funzione razionale [v. XII, pp. 1-14 (1874)].
8. Sull'integrale del prodotto di una funzione razionale pel logaritmo di una funzione razionale [v. XXV, pp. 356-362 (1887)].

II. **Reale Accademia dei Lincei: Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali** (Serie III).

9. Alcune proposizioni sulle equazioni differenziali lineari [v. X, pp. 252-258 (1880-81)].
10. Sul prodotto di più soluzioni particolari d'un'equazione differenziale lineare omogenea e specialmente sul prodotto di due soluzioni particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea del terz'ordine [v. XIV, pp. 3-13 (1882-83)].
11. Di alcune proprietà dell'equazione differenziale lineare omogenea del second'ordine e di alcune equazioni algebriche [v. XIV, pp. 14-29 (1882-83)].
12. Sopra una classe d'equazioni del sesto grado risolubili per serie ipergeometriche [v. XIV, pp. 30-39 (1882-83)].
13. Di alcune proprietà dell'equazione lineare, non omogenea del second'ordine [v. XIV, pp. 40-45 (1882-83)].
14. Sul prodotto di due soluzioni di due equazioni differenziali lineari omogenee del second'ordine [v. XIX, pp. 219-231 (1883-84)].
15. Sull'equazione del quinto grado [v. XIX, pp. 232-244 (1883-84)].
16. Di una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine, integrabile per serie ipergeometriche [v. XIX, pp. 245-250 (1883-84)].
17. Di una classe d'equazioni differenziali lineari del terz'ordine, integrabile per serie ipergeometriche [v. XIX, pp. 251-252 (1883-84)].
18. Sopra una classe d'equazioni trinomie [v. XIX, pp. 631-642 (1883-84)].

III. **Rendiconti della R. Accademia dei Lincei: Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

19. Intorno ad un'equazione differenziale ipergeometrica [Serie III, v. VII, p. 230 (1882-83)].
20. Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine, e sull'equazione del quinto grado. Nota 1ª [Serie IV, v. I, pp. 183-186 (1884-85)].
21. Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del quart'ordine, e sull'equazione del quinto grado. Nota 2ª [Serie IV, v. I, pp. 233-237 (1884-85)].
22. Sulle equazioni trinomie e, in particolare, su quelle del settimo grado [Ser. IV, v. I, pp. 237-243 (1884-85)].

23. Di alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee alle differenze finite del second'ordine [Ser. IV, v. I, pp. 381-383 (1884-85)].
24. Sopra una classe d'equazioni differenziali lineari del second'ordine, e sull'equazione del quinto grado [Serie IV, v. II, 1° sem., pp. 593-597 (1885-86)].
25. Di alcune equazioni alle derivate parziali del prim'ordine [Ser. IV, v. III, 2° sem., pp. 158-160 (1887)].
26. Sopra alcune equazioni differenziali ipergeometriche [Ser. V, v. III, 2° sem., pp. 393-400 (1894)].
27. Di una formola relativa all'integrale ellittico completo di prima specie, contenuta in una precedente Nota, e di altre a quella affini [Ser. V, v. IV, 1° sem., pp. 229-232 (1895)].

IV. **Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena.**

28. Sull'integrazione dell'equazione differenziale lineare omogenea del second'ordine quando sia conosciuta una funzione intera del secondo grado a coefficienti costanti di due suoi integrali fondamentali [Ser. II, v. VII, pp. 239-244 (1888)].
29. Sull'integrazione dell'equazione differenziale lineare omogenea del terz'ordine quando sia conosciuta una funzione intera del secondo grado a coefficienti costanti di tre suoi integrali fondamentali [Ser. II, v. VII, pp. 245-252 (1888)].

V. **Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.**

30. Di alcune formole relative alla funzione sferica $P_n(x)$ [v. XII, pp. 65-80 (1895)].

VI. **Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.**

31. Sul tetraedro a facce eguali [v. I, pp. 1-12 (1886)].
32. Corollari e generalizzazione di un teorema di Eulero sul quadrilatero [Ibid. pp. 53-56].
33. Sull'errore nel calcolo del seno di un angolo colle tavole e sopra un noto teorema di goniometria [Ibid. pp. 122-126].
34. Esercizi per la scuola [Ibid. pp. 149-151].
35. Di alcune proprietà del triangolo [v. II, pp. 1-6 (1887)].
36. Dimostrazione elementare di un teorema sul centro di gravità di un arco di circolo [Ibid. pp. 26-27].
37. Sull'insegnamento della trigonometria nelle scuole secondarie [Ibid. pp. 41-49].
38. Di una serie di punti notevoli nel triangolo [Ibid. pp. 53-54].
39. Teoremi sul tronco di prisma [v. III, pp. 175-179 (1888)].
40. Sul concetto di limite. 100 esercizi proposti [Ibid. pp. 41-55].
41. Sulla media aritmetica [Ibid. pp. 119-121].
42. Proposizioni riferentisi a trasformazioni di alcuni polinomi [Ibid. pp. 145-147].
43. Sui triangoli simili [Ibid. pp. 180-183].
44. Sopra una ricerca goniometrica di Aristarco di Samo [v. IV, pp. 14-17 (1889)].
45. Sulla ricerca del volume della piramide triangolare quando sono date le lunghezze dei suoi spigoli [Ibid. pp. 144-145].
46. Sulla misura del quadrato e sul teorema di Pitagora. Esercizi [Ibid. pp. 24-26].
47. Sulla potenza di un binomio e di un polinomio [Ibid. pp. 115-121].
48. Sull'eguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi [v. V, pp. 12-15 (1890)].
49. Sopra un opuscolo di Michelangelo Ricci [v. VIII, pp. 1-3 (1893)].

VII. **Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma.**

50. Sopra un teorema di Dirichlet [pp. 18-40 (1877)].
51. Teoremi elementari sui massimi e minimi [pp. 7-24 (1879)].
52. Dimostrazione elementare di alcune formole per il calcolo dei seni e coseni [pp. 25-35 (1879)].
53. Sull'approssimazione dell'ordinaria interpolazione nelle tavole di logaritmi [pp. 38-46 (1883)].
54. Sopra un notissimo fenomeno di rifrazione [pp. 47-54 (1883)].

55. Sulla durata dell'oscillazione del pendolo semplice circolare [pp. 55-60 (1883)].
56. Di una proprietà del triangolo sferico [pp. 61-66 (1883)].
57. Di alcune regole per la trisezione approssimata dell'angolo (1884).

VIII. **Opere pubblicate separatamente.**

58. Geometria popolare di C. L. Littrow, traduzione dal tedesco con note. Milano, 1869. E. Treves.
59. Elementi di trigonometria piana. Roma, 1880. E. Loescher.
60. Tavole di seni e coseni. Appendice agli Elementi di trigonometria piana. Roma, 1880. E. Loescher.
61. Nozioni sui logaritmi e sugli interessi composti esposte secondo i nuovi programmi per le scuole tecniche. Con una tavoletta di logaritmi. Roma, 1881. Libr. A. Manzoni.

Messina, gennaio 1907. R. MARCOLONGO.

SOLUZIONI INTERE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

appartenenti a equazioni indeterminate del tipo $\sum_{r=1}^{r} x_r^n = x_{r+1}^n$

Oggetto della presente *Nota* è lo studio di alcune particolari soluzioni intere di equazioni indeterminate del tipo seguente:

$$x_1^n + x_2^n + \ldots + x_r^n = x_{r+1}^n . \tag{1}$$

Per il caso di $r = 2$ si ha la nota equazione di FERMAT, alla quale corrisponde il teorema (non ancora completamente dimostrato) conosciuto sotto il nome di *ultimo teorema di* FERMAT e così enunciato *non esistono tre numeri interi* x_1, x_2, x_3, *tali da soddisfare l'equazione*

$$x_1^n + x_2^n = x_3^n \tag{2}$$

quando sia n (*intero e*) *maggiore di* 2.

Tutte le possibili soluzioni intere della (2) per $n = 2$ sono date dalle formole

$$x_1 = u + \sqrt{2uv}, \quad x_2 = v + \sqrt{2uv}, \quad x_3 = u + v + \sqrt{2uv}$$

dove u e v sono degli interi positivi tali che $2uv$ sia un quadrato perfetto. (1) In particolare per $u = a$ e $v = 2a$ si hanno le soluzioni $x_1 = 3a$, $x_2 = 4a$, $x_3 = 5a$ che sono in progressione aritmetica.

Per il caso poi di $r = 3$ si ottiene l'equazione a quattro indeterminate, studiata dall'EULERO e più tardi dal BINET: e precisamente questi due matematici dimostrarono che una tale equazione per il caso dell'esponente $n = 3$ ammette infinite soluzioni intere dipendenti dai valori di due parametri. Il sig. HERMITE dimostrò lo stesso

(1) D. GAMBIOLI, *Memoria bibliografica sull'ultimo teorema di* FERMAT, "Periodico di Matem.", Anno XVI, Fasc. IV.

fatto per via geometrica. [1] Per valori convenienti di questi parametri, le formole dell'Eulero ci dànno le soluzioni $x_1 = 3a$, $x_2 = 4a$, $x_3 = 5a$, $x_4 = 6a$: è infatti

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3:$$

tali soluzioni costituiscono pure una progressione aritmetica.

Ciò premesso sorgono queste questioni:

1° le due equazioni indeterminate

$$x_1^n + x_2^n = x_3^n \qquad x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_4^n$$

ammettono altri sistemi di soluzioni intere in progressione aritmetica oltre quelle ora nominate?

2° l'equazione indeterminata (1) per il caso di $r > 3$ ammette soluzioni (intere) in progressione aritmetica?

Ci occuperemo in questa *Nota* della prima questione dimostrando i due teoremi seguenti.

I. *L'equazione indeterminata*

$$x_1^n + x_2^n = x_3^n$$

ammette un sistema di soluzioni intere in progressione aritmetica solo per n $= 2$, *e in tal caso deve essere*

$$x_1 : 3 = x_2 : 4 = x_3 : 5.$$

II. *L'equazione indeterminata*

$$x_1^n + x_2^n + x_3^n = x_4^n$$

ammette un sistema di soluzioni intere in progressione aritmetica solo per n $= 3$ *e in tal caso deve essere*

$$x_1 : 3 = x_2 : 4 = x_3 : 5 = x_4 : 6. \tag{3}$$

È manifesto che se l'ultimo teorema di FERMAT fosse completamente dimostrato, sarebbe pure facilmente dimostrato il primo teorema enunciato.

***

1. Dimostriamo dunque il teorema I; ossia, posto $x_1 = x, x_2 = x + a$ e $x_3 = x + 2a$ vediamo di cercare le soluzioni intere della equazione indeterminata

$$x^n + (x + a)^n = (x + 2a)^n. \tag{4}$$

Premettiamo che x e a si possono supporre primi fra loro, [2] altrimenti se avessero un divisore δ comune, in ambo i membri della (4) vi sarebbe un fattore δ^n da sopprimere. Inoltre per essere

$$x^n = (x + 2a)^n - (x + a)^n$$

si vede che x^n deve essere multiplo di a e quindi $a = 1$.

---

[1] *Nouv. Annales de Math.*, 1872. Cfr. anche una nota sullo stesso argomento pubblicata dal sig. MIRIMANOFF, nei *Nouv. Annales de Math.*, 1903.

[2] Deve evidentemente escludersi il caso di $a = x$; infatti ne verrebbe $1 + 2^n = 3^n$ relazione soddisfatta soltanto per $n = 1$.

Siamo con ciò condotti a studiare l'equazione

$$x^n + (x+1)^n = (x+2)^n. \tag{4'}$$

Dimostreremo che essa ammette una soluzione intera solo per $n = 2$ *e in tal caso è* $x = 3$.

Intanto è facile cosa il provare che la (4)' per n dispari non ammette soluzioni intere. Invero per la (4)' x deve essere certo dispari, e quindi x deve soddisfare una delle due *congruenze* seguenti

$$x \equiv 1 \quad \text{oppure} \quad x \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Ora per $x \equiv 1$ (mod. 4) e quindi $x+1 \equiv 2$ e $x+2 \equiv 3$ (mod. 4) essendo $2^n \equiv 0$ (mod. 4) e $3^{2m+1} \equiv 3$ (mod. 4) perchè rispetto al modulo 4, il numero 3 *appartiene all'esponente* 2, il primo membro della (4)' ci dà (per $n = 2m+1$)

$$x^{2m+1} + (x+1)^{2m+1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 4)$$

mentre il secondo membro è

$$(x+2)^{2m+1} \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Dunque la (4)' non è certo verificata in questo caso.

Parimente la (4)' non è verificata per $x \equiv 3$ (mod. 4): poichè è allora

$$x+1 \equiv 0 \text{ e } x+2 \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 4)$$

e il primo membro della (4)' diventa ($n = 2m+1$)

$$x^{2m+1} + (x+1)^{2m+1} \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 4)$$

mentre il secondo membro è

$$(x+2)^{2m+1} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 4).$$

Si conclude che la (4)' per n dispari non può essere soddisfatta da nessun valore intero di x.

2. Discutiamo allora il caso di n pari. Ammessa vera la (4)' abbiamo

$$x^n = (x+2)^n - (x+1)^n$$

donde si vede che per n pari il secondo membro, epperò anche x^n, deve essere divisibile per $x+2+x+1 = 2x+3$.

Dunque x e $2x+3$ non possono essere primi fra loro, anzi devono avere per massimo comun divisore 3. Per il caso di $x = 3$ la (4)' è soddisfatta soltanto se è $n = 2$. Infatti abbiamo

$$3^2 + 4^2 = 5^2 \qquad \text{e per } n > 2 \qquad 3^n + 4^n < 5^n.$$

Noi dimostreremo che la (4)' per $n > 2$ non ammette alcuna soluzione intera e che per $n = 2$ ammette l'unica soluzione intera $x = 3$.

Pongasi allora $x = 3y$, e quindi $2x+3 = 3(2y+1)$: per quanto si è sopra detto deve essere $3^n y^n$ divisibile per $3(2y+1)$, ossia $3^{n-1}.y^n$ divisibile per $2y+1$; ma y e $2y+1$ sono primi fra loro, quindi $2y+1$ dividerà 3^{n-1}, cioè sarà

$$2y+1=3^{r-1} \qquad \text{con } r \leqq n.$$

Si ricava

$$y=\frac{3^{r-1}-1}{2}$$

e quindi

$$x=\frac{3^r-3}{2}, \qquad x+1=\frac{3^r-1}{2} \qquad \text{e} \qquad x+2=\frac{3^r+1}{2}.$$

La (4)' assume allora la forma seguente

$$\left(\frac{3^r-3}{2}\right)^n+\left(\frac{3^r-1}{2}\right)^n=\left(\frac{3^r+1}{2}\right)^n$$

ossia

$$(3^r-3)^n+(3^r-1)^n=(3^r+1)^n. \tag{5}$$

D'altra parte dalla (4)' si deduce

$$x^n=(x+2)^n-(x+1)^n$$

e quindi sviluppando

$$x^n=\binom{n}{1}(x+1)^{n-1}+\binom{n}{2}(x+1)^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}(x+1)+1$$

la parte indipendente da x nel secondo membro è la seguente somma

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+1=2^n-1.$$

Onde la (4)' non potrà sussistere se non è 2^n-1 divisibile per x cioè

$$2^n-1=\mathrm{K}\,\frac{3^r-3}{2} \text{ (dove K è un numero intero)}$$

ossia

$$2^{n+1}-2=\mathrm{K}\,(3^r-3). \tag{6}$$

Incominciamo a supporre $\mathrm{K}=1$; vediamo cioè se può essere

$$2^{n+1}-2=3^r-3. \tag{6)'$$

In tal caso la (5) diviene

$$(2^{n+1}-2)^n+(2^{n+1})^n=(2^{n+1}+2)^n \tag{5)'$$

e dividendo ambo i membri per 2^n

$$(2^n-1)^n+2^{n^2}=(2^n+1)^n$$

e sviluppando

$$2^{n^2}=(2^n+1)^n-(2^n-1)^n=\binom{n}{1}(2^n)^{n-1}.2+\binom{n}{3}(2^n)^{n-3}.2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{n}{n-3}(2^n)^3.2+\binom{n}{n-1}2^n.2$$

e ancora dividendo ambo i membri per 2^{n+1}

$$2^{n^2-n-1}=\binom{n}{1}2^{n^2-2n}+\binom{n}{3}2^{n^2-4n}+\ldots+\binom{n}{n-3}2^{2n}+\binom{n}{n-1}.$$

Ora osserviamo che per $n > 2$ il primo membro [1] e tutti i termini del secondo membro eccetto l'ultimo, cioè $\binom{n}{n-1} = n$, sono divisibili per 2^{2n}; dunque dovrebbe essere n divisibile per 2^{2n}, ciò che è assurdo.

È chiaro poi che per $n = 2$ la $(5)'$ ossia, in virtù della $(6)'$, la (5) è soddisfatta per $n = r = 2$: si ricade cioè nella soluzione $x = 3$ per la $(4)'$, soluzione già avvertita.

Supponiamo allora nella (6) $K > 1$: in tale ipotesi deve essere

$$2^{n+1} - 2 > 3^r - 3$$

da cui

$$2^{n+1} > 3^r - 1$$

ed ancora, poichè 3^r è dispari,

$$2^{n+1} > 3^r.$$

Da questa diseguaglianza si deduce intanto

$$(n+1)\log 2 > r \log 3$$

$$r < (n+1)\frac{\log 2}{\log 3}$$

ma è certamente

$$\frac{\log 2}{\log 3} < \frac{2}{3}$$

quindi „a fortiori „

$$r < \frac{2}{3}(n+1).$$

Ne segue

$$n - r > n - \frac{2}{3}(n+1)$$

e cioè

$$n - r > \frac{n-2}{3} \tag{7}$$

Ciò premesso dalla (5) si ottiene

$$(3^r - 3)^n = (3^r + 1)^n - (3^r - 1)^n$$

e quindi sviluppando

$$(3^r)^n = \binom{n}{1}(3^r)^{n-1}(2+3) - \binom{n}{2}(3^r)^{n-2}.3^2 + \binom{n}{3}(3^r)^{n-3}(2+3^3) - \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-3}(3^r)^3(2+3^{n-3}) - \binom{n}{n-2}(3^r)^2.3^{n-2} + \binom{n}{n-1}3^r.(2+3^{n-1}) - 3^n.$$

Notiamo che per la (7) deve essere sempre $r < n$; ciò posto, dividendo ambo i membri dell'ultima eguaglianza per 3^r, otteniamo

$$3^{rn-r} = \binom{n}{1}3^{nr-2r}(2+3) - \binom{n}{2}3^{nr-3r}.3^2 + \binom{n}{3}3^{nr-4r}(2+3^3) - \ldots$$

$$\ldots + \binom{n}{n-3}3^{2r}(2+3^{n-3}) - \binom{n}{n-2}3^r.3^{n-2} + \binom{n}{n-1}(2+3^{n-1}) - 3^{n-r}. \tag{8}$$

---

[1] Infatti è $n^2 - n - 1 > 2n$ ossia $n^2 - 3n - 1 > 0$ per $n > 3$.

Ora si vede che tanto il primo membro di questo sviluppo che tutti i termini del secondo membro, escluso il penultimo, certamente sono divisibili o per 3^{2r} o per 3^{n-r} a seconda che è risp. $n-r > 2r$ oppure $n-r \leqq 2r$. Intanto $n-r \leqq 2r$ non può essere, poichè altrimenti il termine $\binom{n}{n-1}(2+3^{n-2})$ ossia n dovrebbe essere divisibile per 3^{n-r}, ciò che per $n \geqq 8$ non può avvenire. Infatti per $n \geqq 8$ è

$$3^{n-2} > n^3$$

onde

$$3^{\frac{n-2}{3}} > n$$

ma per la (7) sarà

$$3^{n-r} > 3^{\frac{n-2}{3}}$$

onde a più forte ragione

$$3^{n-r} > n;$$

dunque per $n \geq 8$ non può esser n divisibile per 3^{n-r}.

Rimangono a esaminarsi i casi $n=2$, $n=4$ ed $n=6$. Ma per $n=2$ si ricade nella soluzione intera già considerata. Per $n=4$ in virtù della (7) viene $r=2$ ed è facile vedere che la (5) non può essere verificata. Per $n=6$ in virtù sempre della (7) $r<6$ e quindi poichè, come si può provare facilmente, r deve essere pari, [1] i valori possibili per r saranno 4 e 2: ma dovendo essere

$$2^{n+1}-2 = K(3^r-3) \quad (K \text{ intero})$$

si vede che $n=6$ e $r=4$ non è possibile. Così pure si vede che per $n=6$ e $r=2$ benchè quest'ultima condizione sia soddisfatta non è certamente soddisfatta la (5): e invero il primo membro della (5) dà 6^6+8^6 e il secondo membro 10^6 ed è manifestamente

$$6^6+8^6 < 10^6$$

come si verifica, senza fare calcoli, in conseguenza della relazione

$$3^2+4^2=5^2.$$

Resta ancora a vedersi se lo sviluppo (8) ossia la equazione (5) possono essere verificati quando è $n-r > 2r$. In tale ipotesi il primo membro della (8) e tutti i termini del secondo, escluso il penultimo, avrebbero in evidenza $2r$ fattori 3: quindi anche questo penultimo termine ossia n dovrebbe essere divisibile per 3^{2r}: ora se fosse $n = 3^{2r}.q$ si vede subito che tanto il primo membro che tutti i termini del secondo, escluso il penultimo, avrebbero in evidenza $2r+s$ (s un numero intero conveniente) fattori 3 e quindi il penultimo ter-

[1] Infatti se fosse r dispari si avrebbe $3^{r-1}-1 \equiv 0 \pmod{4}$ $3^r-1 \equiv 2 \pmod{4}$ e $3^r+1 \equiv 0 \pmod{4}$, quindi poichè la (5) si può scrivere nel modo seguente

$$3^n(3^{r-1}-1)^n + (3^r-1)^n = (3^r+1)^n$$

si vede che il primo termine del primo membro e il secondo membro sarebbero divisibili per 2^{2n} mentre non lo sarebbe il secondo termine del primo membro.

mine cioè n dovrebbe essere divisibile o per 3^{n-r} (se fosse $n-r \leq 2r+s$, ma ciò si è or ora visto che non può succedere); oppure per 3^{2r+s} cioè $n = 3^{2r+s} . q$, e così via di seguito, ripetendo lo stesso ragionamento, si concluderebbe poi che n deve contenere più di $2r+s$ fattori 3. Dunque lo sviluppo (8) per $n = 2m > 2$ non può mai essere verificato.

Riassumendo così i risultati ottenuti in questo numero per n pari e nel numero precedente per n dispari possiamo concludere che l'*equazione*

$$x^n + (x+a)^n = (x+2a)^n$$

dove x, a *ed* n *sono degli interi è soddisfatta solo per* $n=2$ *e in tal caso deve essere* $x = 3a$.

3. Passiamo a considerare l'equazione

$$x^n + (x+a)^n + (x+2a)^n = (x+3a)^n \tag{9}$$

e vediamo se esistono valori interi per x, a ed n tali che questa venga soddisfatta. Come nel caso precedente possiamo supporre x e a primi fra loro; concluderemo anche qui che deve essere $a=1$. Invero sviluppando la (9) otteniamo

$$2x^n = \binom{n}{2} x^{n-2} . a^2 (3^2 - 2^2 - 1) + \binom{n}{3} x^{n-3} . a^3 (3^3 - 2^3 - 1) + .$$
$$\ldots + \binom{n}{n-1} x . a^{n-1} (3^{n-1} - 2^{n-1} - 1) + a^n (3^n - 2^n - 1) \cdot$$

Donde risulta che il primo membro cioè $2x^n$ è divisibile per a^2, ma essendo x primo con a dovrebbe essere 2 multiplo di a^2 quindi è necessariamente $a=1$. (¹)

Siamo con ciò condotti a cercare le soluzioni intere della equazione

$$x^n + (x+1)^n + (x+2)^n = (x+3)^n. \tag{9'}$$

Dimostreremo che questa equazione ammette solo la soluzione intera $x = 3$ *per* $n = 3$.

Intanto proveremo subito che per n pari la (9)' non ammette soluzioni intere. Infatti per x dovrà certamente essere soddisfatta una delle tre congruenze seguenti

$$x \equiv 0, \quad x \equiv 1, \quad x \equiv 2 \quad (\text{mod. } 3).$$

Ora se è $x \equiv 0$ (mod. 3) e quindi

$$x+1 \equiv 1 \quad x+2 \equiv 2 \quad x+3 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 3)$$

essendo $2^{2m} \equiv 1$ (mod. 3) per il primo membro della (9)' abbiamo

$$x^{2m} + (x+1)^{2m} + (x+2)^{2m} \equiv 2 \quad (\text{mod. } 3)$$

mentre per il secondo membro $(x+3)^{2m} \equiv 0$ (mod. 3).

(¹) E chiaro che non può essere $a = x$.

Per $x \equiv 1$ e $x \equiv 2$ (mod. 3) si verifica pure facilmente che i due membri della (9)' non sono congrui fra loro rispetto al mod. 3 per n pari.

Dunque la (9)' per n pari non ammette soluzioni intere.

4. Occupiamoci pertanto di cercare se la (9)' ammette soluzioni intere per n dispari: avvertiamo subito che x dovrebbe essere dispari; infatti dalla (9)' si deduce

$$x^n + (x+2)^n = n\,(x+1)^{n-1}.2 + \binom{n}{2}(x+1)^{n-2}.2^2 + \ldots + 2^n.$$

Ora si vede che se x fosse pari il primo membro sarebbe divisibile per 2^n e dunque dovrebbe essere tale anche il secondo membro e in particolare il primo termine $n\,(x+1)^{n-1}.2$ dovrebbe essere divisibile per 2^2; ciò che non può essere, essendo tanto n che $x+1$ dispari. Dunque non potrà essere la (9)' soddisfatta altro che per x dispari: cioè per x dovrà verificarsi certamente una delle seguenti congruenze.

$$x \equiv 1,\ x \equiv 3,\ x \equiv 5,\ x \equiv 7 \text{ o } x \equiv 9 \qquad (\text{mod. } 10).$$

Lasciamo per ultimi i casi di $x \equiv 3$ e $x \equiv 5$ (mod. 10) ed esamiminiamo i casi rimanenti.

Incominciamo dal caso $x \equiv 1$ (mod. 10); avremo in tale ipotesi

$$x+1 \equiv 2 \qquad x+2 \equiv 3 \qquad \text{e} \qquad x+3 \equiv 4 \qquad (\text{mod. } 10).$$

L'esponente dispari n sarà della forma $4h+1$ oppure $4h+3$; essendo

$$2^{4h+1} \equiv 2,\ 3^{4h+1} \equiv 3,\ 4^{4h+1} \equiv 4 \qquad (\text{mod. } 10)$$

per $n = 4h+1$ si ha

$$x^{4h+1} + (x+1)^{4h+1} + (x+2)^{4h+1} \equiv 6 \text{ mentre } (x+3)^{4h+1} \equiv 4 \ (\text{mod. } 10).$$

Invece essendo

$$2^{4h+3} \equiv 8, \qquad 3^{4h+3} \equiv 7, \qquad 4^{4h+3} \equiv 4 \qquad (\text{mod. } 10)$$

per $n = 4h+3$ si ottiene

$$x^{4h+3} + (x+1)^{4h+3} + (x+2)^{4h+3} \equiv 6 \text{ e } (x+3)^{4h+3} \equiv 4 \quad (\text{mod. } 10).$$

Dunque la (9)' non è soddisfatta.

Supponiamo $x \equiv 7$ e quindi

$$x+1 \equiv 8, \qquad x+2 \equiv 9, \qquad x+3 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 10).$$

Essendo

$$7^{4h+1} \equiv 7, \qquad 8^{4h+1} \equiv 8, \qquad 9^{4h+1} \equiv 9 \qquad (\text{mod. } 10)$$

per $n = 4h+1$ viene

$$x^{4h+1} + (x+1)^{4h+1} + (x+2)^{4h+1} \equiv 4 \text{ mentre } (x+3)^{4h+1} \equiv 0 \ (\text{mod. } 10).$$

Invece per $n = 4h+3$ risulta, essendo

$$7^{4h+3} \equiv 3, \qquad 8^{4h+3} \equiv 2 \qquad \text{e} \qquad 9^{4h+3} \equiv 9 \qquad (\text{mod. } 10),$$

$$x^{4h+3} + (x+1)^{4h+3} + (x+2)^{4h+3} \equiv 4 \text{ mentre } (x+3)^{4h+3} \equiv 0 \ (\text{mod. } 10).$$

Quindi neppure in questo caso la (9)' può essere soddisfatta.

Supponiamo

$$x \equiv 9 \text{ e cioè } x+1 \equiv 0, \quad x+2 \equiv 1, \quad x+3 \equiv 2 \quad (\text{mod. } 10).$$

Si ottiene in questo caso, per $n = 4h+1$

$$x^{4h+1} + (x+1)^{4h+1} + (x+2)^{4h+1} \equiv 0 \text{ mentre } (x+3)^{4h+1} \equiv 2 \ (\text{mod. } 10).$$

invece per $n = 4h+3$

$$x^{4h+3} + (x+1)^{4h+3} + (x+2)^{4h+3} \equiv 0 \text{ mentre } (x+3)^{4h+3} \equiv 8 \ (\text{mod. } 10).$$

Si conclude che la (9)' non è soddisfatta per $x \equiv 9$ (mod. 10).

Passiamo infine a discutere i due casi $x \equiv 3$ e $x \equiv 5$ (mod. 10) e vediamo se possono ambo i membri della (9)' essere fra loro congrui rispetto al mod. 10.

Se è $x \equiv 3$ e quindi

$$x+1 \equiv 4, \quad x+2 \equiv 5, \quad x+3 \equiv 6 \quad (\text{mod. } 10)$$

per l'esponente $n = 4h+1$ i due membri della (9)' non sono congrui fra loro nel modulo 10, mentre che lo sono se è l'esponente $n = 4h+3$; ciò facilmente si verifica.

Così pure facilmente si verifica che per $x \equiv 5$ (mod. 10) ambo i membri della (9)' sono congrui fra loro nel modulo 10 se è $n = 4h+1$ mentre non lo sono per $n = 4h+3$.

Di guisa che, riassumendo, si può dire che, se la (9)' ammette soluzioni intere, ciò può accadere solo nei due casi seguenti

a) $x \equiv 3$ (mod. 10) ed $n = 4h+3$

b) $x \equiv 5$ (mod. 10) ed $n = 4h+1$.

5. Occupiamoci prima del caso *b)*: in altre parole essendo d un numero intero, vediamo se può essere mai verificata l'equazione seguente

$$(10d+5)^{4h+1} + (10d+6)^{4h+1} + (10d+7)^{4h+1} = (10d+8)^{4h+1} \quad (10)$$

dalla quale si deduce

$$(10d+5)^{4h+1} + (10d+7)^{4h+1} = (10d+8)^{4h+1} - (10d+6)^{4h+1}.$$

Ora si osservi che il primo membro è divisibile per

$$10d+5+10d+7 = 20d+12 = 2(10d+6);$$

dunque sarà tale anche il secondo membro e quindi in particolare $(10d+8)^{4h+2}$ divisibile per $2(10d+6)$ cioè potremo porre

$$(10d+8)^{4h+1} = 2m(10d+6) \quad (m \text{ un num. intero})$$

ossia

$$2^{4h-1}(5d+4)^{4h+1} = m(5d+3).$$

Ma $5d+3$ e $5d+4$ sono primi fra loro, quindi 2^{4h-1} deve essere divisibile per $5d+3$ ossia sarà

$$5d+3 = 2^{r-1} \quad \text{con} \quad r \leq 4h.$$

Pertanto avremo $10d+6=2^r$; di guisa che la (10) si potrà scrivere nel modo seguente

$$(2^r-1)^{4h+1}+(2^r)^{4h+1}+(2^r+1)^{4h+1}=(2^r+2)^{4h+1}.$$

Sviluppando si ottiene

$$2(2^r)^{4h+1}=\binom{4h+1}{1}(2^r)^{4h}.2+\binom{4h+1}{2}(2^r)^{4h-1}(2^2-2)+\binom{4h+1}{3}(2^r)^{4h-2}.2^3+\dots$$
$$\dots+\binom{4h+1}{4h}2^r(2^{4h}-2)+2^{4h+1}$$

e dividendo ambo i membri per 2

$$(2^r)^{4h+1}=\binom{4h+1}{1}(2^r)^{4h}+\binom{4h+1}{2}(2^r)^{4h-1}(2-1)+\binom{4h+1}{3}(2^r)^{4h-2}.2^2+\dots$$
$$\dots+\binom{4h+1}{4h-1}(2^r)^2.2^{4h-2}+\binom{4h+1}{4h}2^r(2^{4h-1}-1)+2^{4h}.$$

Intanto si vede subito che non può essere $r<4h$ poichè dividendo ambo i membri di quest'ultima eguaglianza per 2^r il quoziente del primo membro sarebbe pari, mentre quello del secondo sarebbe dispari: dunque se la (10) è vera dovrà essere intanto $r=4h$. In tale ipotesi l'ultima eguaglianza diventa

$$(2^r)^{r+1}=\binom{r+1}{1}(2^r)^r+\binom{r+1}{2}(2^r)^{r-1}(2-1)+\binom{r+1}{3}(2^r)^{r-2}.2^2+\dots$$
$$\dots+\binom{r+1}{r-1}(2^r)^2.2^{r-2}+\binom{r+1}{r}2^r(2^{r-1}-1)+2^r. \qquad (11)$$

Al secondo membro di questa eguaglianza sostituiamo l'espressione seguente di valore certamente maggiore

$$\binom{r+1}{1}(2^r)^r+\binom{r+1}{2}(2^r)^{r-1}.2+\binom{r+1}{3}(2^r)^{r-2}.2^2+\dots$$
$$\dots+\binom{r+1}{r-1}(2^r)^2 2^{r-2}+\binom{r+1}{r}2^r.2^{r-1}+2^r. \qquad (12)$$

Notiamo che

$$r+1<2^{\frac{r}{2}} \text{ per } r>4$$

e che

$$\binom{r+1}{\nu}=\frac{(r+1)\,r\,(r-1)\dots(r-\nu+2)}{1.2.3\dots\nu}<\frac{2^{\frac{r\nu}{2}}}{2^{\nu-1}}=2^{\frac{r\nu}{2}-\nu+1}$$

onde

$$\binom{r+1}{\nu}.(2^r)^{r-\nu+1}.2^{\nu-1}<2^{\frac{r\nu}{2}-\nu+1}.2^{r^2-r\nu+r}.2^{\nu-1}=2^{r^2-\frac{r\nu}{2}+r}$$

e poichè è per lo meno $\nu=1$, segue a maggior ragione

$$\binom{r+1}{\nu}(2^r)^{r-\nu+1}.2^{\nu-1}<2^{r^2+\frac{r}{2}}$$

quindi sarà lo sviluppo (12) ossia

$$\sum_{\nu=1}^{r+1}\binom{r+1}{\nu}(2^r)^{r-\nu+1}\,.\,2^{\nu-1}<(r+1)\,2^{r^2+\frac{r}{2}}$$

ma per $r>4$ è $r+1<2^{\frac{r}{2}}$, perciò avremo infine

$$\sum_{\nu=1}^{r+1}\binom{r+1}{\nu}(2^r)^{r-\nu+1}\,.\,2^{\nu-1}<2^{r^2+r}$$

ma 2^{r^2+r} è il primo membro della (11): pertanto si conclude che sarà a maggior ragione per $r>4$ il primo membro della (11) maggiore del secondo membro. Si verificherà poi subito che la (11) non può essere soddisfatta neppure per $r=4$: (¹) $r<4$ evidentemente non può essere poichè $r=4h$.

Rimane infine a considerare il caso di $x\equiv 3$ (mod. 10) per $n=4h+3$. Vediamo cioè se si può mai soddisfare alla equazione seguente

$$(10d+3)^{4h+3}+(10d+4)^{4h+3}+(10d+5)^{4h+3}=(10d+6)^{4h+3}. \qquad (13)$$

Da questa si ricava

$$(10d+3)^{4h+3}+(10d+5)^{4h+3}=(10d+6)^{4h+3}-(10d+4)^{4h+3};$$

donde si vede che essendo il primo membro divisibile per $10d+3+$ $+10d+5=20d+8=2\,(10d+4)$ lo dovrà essere anche il secondo membro: quindi in particolare dovrà essere $(10d+6)^{4h+3}$ divisibile per $2\,(10d+4)$. Poniamo dunque $(10d+6)^{4h+3}=2m\,(10d+4)$ dove m è intero, quindi

$$2^{4h+1}\,(5d+3)^{4h+3}=m\,(5d+2):$$

ma $5d+3$ e $5d+2$ sono fra loro primi, pertanto dovrà essere

$$5d+2=2^{r-1} \qquad \text{con} \qquad r-1\leq 4h+1.$$

Avremo così $10d+4=2^r$, epperò la (13) diventa

$$(2^r-1)^{4h+3}+(2^r)^{4h+3}+(2^r+1)^{4h+3}=(2^r+2)^{4h+3}. \qquad (13)'$$

Sviluppando e dividendo per 2 si ottiene

$$(2^r)^{4h+3}=\binom{4h+3}{1}(2^r)^{4h+2}+\binom{4h+3}{2}(2^r)^{4h+1}(2-1)+\binom{4h+3}{3}(2^r)^{4h}.2^2+\ldots$$
$$\ldots+\binom{4h+3}{4h+2}2^r(2^{4h+1}-1)+2^{4h+2}.$$

Analogamente a quanto si è fatto pel caso precedente si concluderà che deve essere $r=4h+2$. Fatto dunque $r=4h+2$ si tratta

---

(¹) Tale verifica si può fare eseguendo pochi e brevi calcoli numerici: infatti per $r=4$ il primo membro della (11) dà 16^5 e il secondo membro ci dà

$$5\,.\,16^4+10\,.\,16^3+10\,.\,16^2\,.\,2^2+5\,.\,16\,.\,7+16=5\,.\,16^4+10\,.\,16^3+10\,.\,16^2\,.\,2^2+36\,.\,16.$$

Ora la somma di questi quattro termini non può certo essere eguale a 16^5, poichè i primi tre termini e 16^5 sono divisibili per 2^{11}, mentre che il quarto termine cioè $36\,.\,16$ contiene solo 6 fattori 2.

di vedere se è possibile soddisfare alla equazione seguente, per qualche valore di r,

$$(2^r)^{r+1} = \binom{r+1}{1}(2^r)^r + \binom{r+1}{2}(2^r)^{r-1}(2-1) + \binom{r+1}{3}(2^r)^{r-2}.2^2 + \dots$$
$$\dots + \binom{r+1}{r-1}(2^r)^2 . 2^{r-2} + \binom{r+1}{r} 2^r(2^{r-1}-1) + 2^r .$$

Ma questa è l'equazione (11) già considerata più sopra e si è visto che per $r \geqq 4$ non è certo soddisfatta. Resta a vedersi se lo può essere per $r = 2$: in tale ipotesi la (13)' diventa

$$(2^2 - 1)^3 + (2^2)^3 + (2^2 + 1)^3 = (2^2 + 2)^3$$

ossia

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

relazione certamente vera.

Riassumendo così i risultati ottenuti in questo numero e nei due numeri precedenti possiamo concludere col seguente teorema:

L'equazione

$$\mathrm{x}^n + (\mathrm{x} + \mathrm{a})^n + (\mathrm{x} + 2\mathrm{a})^n = (\mathrm{x} + 3\mathrm{a})^n$$

ammette soluzioni intere soltanto per $\mathrm{n} = 3$ *e in tal caso l'unica soluzione è* $\mathrm{x} = 3\mathrm{a}$.

***

Abbiamo così risolto completamente la prima delle due questioni proposteci nel principio di questa *Nota*. La seconda questione era di vedere se l'equazione

$$x_1^n + x_2^n + \dots + x_r^n = x_{r+1}^n \qquad (1)$$

per $r > 3$ ammette soluzioni intere in progressione aritmetica.

Una risposta esauriente a tale questione per ora non la possiamo dare: essa potrà, se mai, formar l'argomento di un'altra *Nota*. Accenneremo soltanto che l'equazione

$$x^n + (x + a)^n + (x + 2a)^n + \dots + [x + (r - 1)a]^n = (x + ra)^n$$

per alcuni valori di r e di a non ammette soluzioni intere.

Così ad es. per $a = 2p + 1$ e $r = 4h + 1$ quest'ultima equazione non può essere verificata per nessun valore nè pari nè dispari di x qualunque sia il valore di n; ciò che si può agevolmente verificare. Anzi questo caso particolare e altri casi particolari da noi esaminati ci fanno sorgere il dubbio che l'equazione ora scritta non ammetta mai soluzioni intere per $r > 3$.

Molto più interessante ancora sarebbe di esaminare la questione più generale seguente: *per quali valori cioè di* r *e di* n *l'equazione* (1) *ammette soluzioni intere*. Ma la risoluzione di questo problema presenterà certo delle difficoltà gravissime; basti pensare che non fu ancora trovata una dimostrazione completa ed esauriente pel celebre teorema di FERMAT, teorema che riguarda appunto l'esistenza delle soluzioni intere dell'equazione (1) per il caso di $r=2$.

Fano, 2 gennaio 1907.

AMERIGO BOTTARI.

SUGLI AUTOMORFISMI DI CERTI GRUPPI DI OPERAZIONI

1. Fra gli elementi a, b dei due gruppi G ed F d'ordini rispettivi g, f, si stabilisca la corrispondenza $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ per effetto della quale ad ogni operazione a_i od al prodotto $a_i a_j$ di due operazioni del primo corrisponda nel secondo l'operazione b_i, od il prodotto $b_i b_j$, se è $g=f$, o ad ogni operazione del primo ne corrisponda uno stesso numero nel secondo, se è $g<f$. I due gruppi G ed F, astrattamente identici, sono allora in *isomorfismo semplice*, o *d'un grado*, od *oloedrico*, nel primo caso, ed in *isomorfismo multiplo*, (1) o *di più gradi*, (2) o *meriedrico*, (3) nel secondo. In quest'ultima ipotesi è evidentemente, $f=\theta g$ se è $g<f$, ed è $g=\theta f$ se è $g>f$, indicando con θ un numero intero e positivo qualunque.

La corrispondenza può anche stabilirsi fra gli elementi di uno stesso gruppo G scritti in due ordini differenti: si ha allora un *automorfismo*, (4) $\begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix}$ che è *identico* nel caso particolare in cui ogni operazione corrisponde a sè stessa. Se poi G è un gruppo abeliano (5) e ad ogni sua

(1) *Simple e multiple isomorphism* è in BURNSIDE, *Theory of Groups of a finite order*, 1897, p. 22, ed in generale in tutti gli scrittori inglesi ed americani.

(2) *Di un grado e di più gradi* è in NETTO-BATTAGLINI, *Teoria delle Sostituzioni*, 1885, pag. 92.

(3) FROBENIUS, WEBER, ecc. *Holoëdrischer* o *einstufiger Isomorphismus; Meriëdrischer* o *mehrstufiger Isomorphismus*. Le denominazioni *holoédrique* e *meriédrique* furono introdotte da C. JORDAN, *Traité des Substitutions*, 1868, pag. 56. Il concetto d'isomorfismo fra due gruppi da lui per primo esplicitamente introdotto fu subito dopo generalizzato dal Prof. A. CAPELLI, (*Sopra l'isomorfismo dei gruppi di sostituzioni*, "Giornale di Matematiche di Battaglini", vol. XVI) che continuò ad usare gli stessi termini ormai quasi da tutti adottati.

(4) FROBENIUS, *Berliner Sitzungsberichte*, 1901, pag. 1324. Il concetto d'automorfismo d'un gruppo è già in GIERSTER, *Die Untegruppen der Galois'chen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades*, "Mathem. Annalen", vol. 17, 1881, pagg. 319-365. Cfr. inoltre, KLEIN F. *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichung vom fünften Grade*, 1884, pag. 232

(5) La denominazione qui usata non corrisponde esattamente a quella di C. JORDAN, *op. cit.* pag. 171, giacchè per noi è abeliano solo quel gruppo nel quale tutte le operazioni sono fra loro permutabili, mentre per Jordan, che fu colui che introdusse questa denominazione in omaggio al matematico ABEL, sono abeliani anche vari gruppi i di cui elementi non sono tutti permutabili.

operazione si fa corrispondere la potenza ψ di sè medesima, [1] si ha un *automorfismo* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1^{\psi} \end{pmatrix}$ che diremo *di potenza* ψ.

Siano $I_1 = \begin{pmatrix} a_u \\ a_v \end{pmatrix}$ ed $I_2 = \begin{pmatrix} a_v \\ a_w \end{pmatrix}$ due automorfismi di G; è $I_1 I_2 = \begin{pmatrix} a_u \\ a_w \end{pmatrix}$; ma d'altra parte I_1 fa corrispondere $(a_v a_j)$ ad $(a_u a_i)$ ed I_2 fa corrispondere $(a_w a_y)$ ad $(a_v a_j)$ per cui $I_1 I_2$ fa corrispondere $(a_w a_y)$ ad $(a_u a_i)$. Il prodotto dei due automorfismi I_1, I_2 di G è ancora un automorfismo dello stesso G. Tutti gli automorfismi d'un gruppo possono quindi venir considerati quali operazioni d'un nuovo gruppo I che diremo *gruppo degli automorfismi* del gruppo dato.

In ciascun automorfismo d'un gruppo l'operazione identica corrisponde a sè stessa, e le altre operazioni che si corrispondono hanno naturalmente ordini uguali.

Il prof. Frobenius ha mostrato come l'automorfismo di G può essere ottenuto operando su questo mediante elementi che lo trasformano in sè stesso; ma quando il gruppo è abeliano e contiene operazioni d'ordini [2] maggiori del due, se ne può ottenere l'automorfismo dando quale moltiplicatore di destra ad ogni sua operazione la potenza di questa che ha per esponente un numero che è primo rispetto all'ordine di G, quale ad esempio sarebbe lo stesso ordine di G diminuito di un'unità. Un simile automorfismo corrisponde necessariamente ad un'operazione invariante del gruppo I. L'automorfismo ottenuto col trasformare tutte le operazioni di un gruppo per mezzo di una di esse è detto *congrediente*; ogni altro automorfismo è *contragrediente.* [3] La totalità degli automorfismi congredienti d'un gruppo dato forma un gruppo H che è invariante [4] nel gruppo degli automorfismi.

Quando l'ordine g di G è un prodotto di numeri primi, $g = \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i})$, il 2 eccettuato, [5] e se ne forma il gruppo H degli automorfismi congredienti, e successivamente il gruppo H_1 degli automorfismi di H, quello H_2 di H_1, quello H_3 di H_2, e così di seguito, se la serie G, H, H_1, H_2, H_3,... ha l'identità per ultimo termine, allora G è prodotto diretto dei gruppi ciclici i di cui ordini sono $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $p_3^{m_3}$, ... rispettivamente. In modo reciproco si ottiene quale ultimo termine l'identità nel formare la serie

---

(1) YOUNG, "Transac. Amer. Math. Soc.,, III, 1902, pag. 186.

(2) Ogni automorfismo d'un gruppo abeliano A può ottenersi in due modi: 1º col renderlo isomorfo ad uno dei suoi sottogruppi in modo che nessuna operazione corrisponda alla propria inversa; 2º col fare corrispondere ogni sua operazione al prodotto di sè medesima per l'operazione che le corrisponde nel dato automorfismo. Cfr. G. A. MILLER, "Bull. Amer. Math. Soc.,, vol. VI, 1900, pag. 337.

(3) KLEIN, *op. cit.* pag. 232. HÖLDER, "Math. Annalen,, XLIII, pag. 314. *Congrediente* e *contragrediente* corrispondono ai due termini *inner* ed *outer* di *Frobenius.*

(4) HÖLDER, *Bildung zusammengesetzter Gruppen,* "Math. Annalen,, XLVI, pag. 326.

(5) Indichiamo sempre con p un numero primo diverso da due; sono p_1, p_2, ... numeri primi differenti e come p diversi dal 2. La notazione $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i})$ sta pel prodotto $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_n^{m_n}$. Analogamente, $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{x_i - y_i})$ sta pel prodotto $p_1^{x_1 - y_1} p_2^{x_2 - y_2} \ldots p_n^{x_n - y_n}$.

di gruppi G, H, H_1, H_2, H_3, ... ciascuno dei quali è gruppo d'automorfismi congredienti del precedente, se G è prodotto diretto di gruppi ciclici i di cui ordini sono $p_1^{m_1}$, $p_2^{m_2}$, $p_3^{m_3}$, ... rispettivamente. I gruppi che godono di questo carattere speciale costituiscono una classe (1) molto rimarchevole che come caso particolare abbraccia quei gruppi che hanno per gruppo d'automorfismi congredienti un gruppo abeliano e che, a cagione delle numerose proprietà che hanno comuni coi gruppi abeliani, si dicono *metabeliani*. I sottogruppi dei gruppi di quest'ultima categoria o sono essi stessi metabeliani, oppure sono abeliani. Quando H è abeliano, i commutatori di G sono invarianti, (2) e reciprocamente, se i commutatori d'un gruppo G sono invarianti, il suo gruppo H degli automorfismi congredienti è abeliano.

2. Sia p un numero primo qualunque ed ammettiamo che il gruppo G d'ordine $g = p$ sia generato da un'operazione a: ogni suo automorfismo deve permutare fra loro le $p-1$ operazioni $a, a^2, a^3, \ldots, a^{p-1}$, e se uno di essi sostituisce a^α ad a, deve pure sostituire $a^{2\alpha}$ ad a^2, $a^{3\alpha}$ ad a^3, ecc. Il simbolo $\begin{pmatrix} a^m \\ a^{m\alpha} \end{pmatrix}$ rappresenta dunque un automorfismo di G per ognuno dei valori di α che siano compresi fra 1 e $p-1$, ma non per $\alpha = p$. Lo rappresenta però ancora per $\alpha = p + \alpha'$, e quest'ultimo automorfismo coincide con quello rappresentato dal simbolo $\begin{pmatrix} a^m \\ a^{m\alpha'} \end{pmatrix}$, $(m = 1, 2, \ldots, p-1)$. Dunque, se G è d'ordine p, l'ordine di I è $p-1$. La potenza n-esima dell'automorfismo $\begin{pmatrix} a^m \\ a^{m\alpha} \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} a^m \\ a^{m\alpha^n} \end{pmatrix}$, per cui se α è una radice primitiva della congruenza

$$\alpha^{p-1} - 1 \equiv 0, \qquad (\text{mod } p),$$

il gruppo I è un gruppo ciclico (3) generato dall'automorfismo $\begin{pmatrix} a^m \\ a^{m\alpha} \end{pmatrix}$. Allora, se a_j è un'operazione che soddisfa alle relazioni

$$a_j^{p-1} = 1, \qquad a_j^{-1} a_1 a_j = a_1^\alpha,$$

il gruppo $\{a_j, a_1\} = \mathrm{K}$ è l'*olomorfo* (4) di G, ed ogni automorfismo di quest'ultimo può essere ottenuto col trasformarlo mediante una delle operazioni del suo olomorfo.

Il sottogruppo che corrisponde a sè stesso in ogni possibile automorfismo di G è sottogruppo *caratteristico* ed è invariante in K. Un sottogruppo caratteristico di un gruppo dato è necessariamente un suo sottogruppo invariante, ma un sottogruppo invariante, non è necessariamente caratteristico, ed è ben noto che se un gruppo non possiede sottogruppo

(1) Questa classe di gruppi è stata ampiamente studiata alcuni anni addietro dal prof. Ahrens, (Leipziger Berichte, XLIX, 1897, pag. 616 e sgg.) I gruppi che qui son detti *metabeliani*, sono caso particolare di quei gruppi, ed ammettono a loro volta come caso speciale i gruppi amiltoniani se hanno per gruppo *H* il gruppo del quarto ordine.

(2) Dedekind, "Math. Annalen" XLVIII, pag. 553.

(3) Se l'ordine d'un gruppo possiede radici primitive, il gruppo è ciclico, e reciprocamente.

(4) Frobenius, *Endliche Gruppen*, Berliner Sitzungsberichte, 1895, pag. 185. Burnside, *op. cit.*, pag. 228; Burkhardt H. *Endliche discrete Gruppen*, pag. 221.

caratteristico è semplice od è il risultato di un prodotto di gruppi semplici in isomorfismo oloedrico.

Imaginiamo G generato da due sottogruppi caratteristici aventi la sola operazione identica in comune: il loro automorfismo è sufficiente a determinare l'automorfismo di G, quest'ultimo automorfismo essendo completamente determinato da una serie qualunque di sue operazioni. Ma G è il prodotto diretto di quei due sottogruppi caratteristici, e dunque il gruppo I di G è pur esso il prodotto diretto dei gruppi d'automorfismi dei due sottogruppi caratteristici.

3. Sia p^n l'ordine di G che supponiamo ciclico e generato da un'operazione a_1: esso contiene $p^{n-1}(p-1)$ operazioni d'ordine p^n, e se a_j è una di esse, la corrispondenza $\binom{a_1}{a_j}$ definisce un automorfismo. La congruenza

$$\alpha^{p^{n-1}(p-1)}-1\equiv 0, \qquad (\bmod p^n)$$

possiede radici primitive, per cui il gruppo I di G è pur esso ciclico. Se è $p=2$ il gruppo I è abeliano e d'ordine 2^{n-1}, ma non è ciclico giacchè la congruenza

$$\alpha^{2^{n-1}}-1\equiv 0, \qquad (\bmod 2^n), \qquad (n>2)$$

non possiede radici primitive. Ne possiede invece la congruenza

$$\alpha^{2^{n-2}}-1\equiv 0, \qquad (\bmod 2^n),$$

ed è sempre possibile sceglierne fra di esse una α che soddisfi alla congruenza

$$\alpha^{2^{n-3}}\equiv 1+2^{n-1}, \qquad \bmod 2^n.$$

Le potenze dell'automorfismo $\binom{a_j}{a_j^{\alpha}}$ formano così un gruppo ciclico d'ordine 2^{n-2}, ed è $\binom{a_j}{a_j^{1+2^{n-1}}}$ il solo automorfismo del secondo ordine in esso contenuto. Così $\binom{a_j}{a_j^{\alpha}}$ ed $\binom{a_j}{a_j^{-1}}$, l'ultimo non essendo contenuto nel sottogruppo generato dal primo, sono due automorfismi permutabili ed indipendenti d'ordini 2^{n-2} e 2. Essi generano un gruppo abeliano d'ordine 2^{n-1} che è il gruppo degli automorfismi di G.

Supponiamo G metabeliano ed ancora d'ordine $g=\prod_1^n(p^{m_i})$; siano $h_1, h_2, \ldots$ le operazioni invarianti di H d'ordini rispettivi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ e che ordinatamente corrispondono alle operazioni $a_1, a_2, \ldots$ di G. Se $u_1, u_2, \ldots$ sono le operazioni invarianti di G, formanti il gruppo U, è

$$a_i^{-1}a_1a_i=u_ia_1, \qquad (i=1, 2, \ldots)$$

per cui

$$a_i^{-1}a_1^{\varepsilon_i}a_i=u_i^{\varepsilon_i}a_1^{\varepsilon_i}=a_1^{\varepsilon_i}.$$

Se fosse $g=p^m$ ed $\varepsilon_n>\varepsilon_{n-1}>\varepsilon_{n-2}>\ldots>\varepsilon_2>\varepsilon_1$, l'operazione $a_1^{\varepsilon_n}$ sarebbe permutabile con ciascuna delle operazioni di G, e sarebbe quindi contenuta in U; ma ciò non potendo essere, a meno che non sia $\varepsilon_n \gtreqless \varepsilon_1$ dobbiamo dedurne che se il gruppo H di G è abeliano ed è $g=p^m$, il gruppo H deve possedere almeno due operazioni indipendenti che hanno ordine più elevato di tutte le operazioni rimanenti. Ora, poichè abbiamo supposto G metabeliano, cioè prodotto diretto dei sottogruppi d'ordini $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots$ rispettivamente, se è $g = \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i})$, e poichè il gruppo H di G è prodotto diretto dei gruppi H' d'automorfismi congredienti di tali sottogruppi fattori, ne concludiamo che in questi gruppi d'automorfismi H' vi sono operazioni invarianti h'_i, d'ordini rispettivi $p_i^{\varepsilon_i}$, che sono indipendenti dalle operazioni h_i. Dunque $(h_1 h_2 \ldots h_n)$ ed $(h'_1 h'_2 \ldots h'_n)$ sono due generatori indipendenti di H e sono dell'ordine il più elevato, cioè d'ordine $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{\varepsilon_i})$, multiplo dell'ordine di ogni altro generatore indipendente di H. Tutto ciò può riassumersi nel dire che il gruppo H d'un gruppo G non può essere prodotto diretto di gruppi ciclici se l'ordine di ciascuno di questi non è sottomultiplo di uno almeno dei rimanenti ordini. (¹)

Se gli ordini delle operazioni u_i hanno ε_i per m. c. m., i commutatori formati da a_1 colle rimanenti operazioni di G formano un gruppo abeliano; e siccome quando un gruppo è abeliano il m. c. m. degli ordini di un certo numero di operazioni è esso stesso ordine di qualcuna delle operazioni del gruppo, così ε_i deve essere ordine di uno dei commutatori di G, cioè, in altre parole, (²) l'ordine di ogni operazione di H, se questo è abeliano, è ordine di un commutatore di G.

4. Se è $g = 2^r \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i})$, e G è ancora ciclico, possiamo costruirne il gruppo I notando che G è prodotto diretto dei gruppi che hanno 2^r, $p_1^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots$ per rispettivi ordini. Ogni automorfismo di G trasformerà in sè stesso ognuno di questi gruppi. Costruiamone i gruppi d'automorfismi e facciamone il prodotto diretto: ogni operazione del gruppo risultante corrisponderà ad un automorfismo di G. L'ordine g_1,

$$g_1 = 2^{r-1} \overset{n}{\underset{1}{\pi}} [p_i^{m_i - 1} (p_i - 1)],$$

di un tale gruppo corrisponderà al numero di operazioni di G, cioè al numero di automorfismi di cui G è capace.

Quando H sia abeliano e sia $g = \mu \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i}) = \mu\omega$, il numero μ non essendo multiplo di nessuno dei numeri p_i, ed in G è contenuto un sottogruppo abeliano massimo A d'ordine $g : \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i) = g : \rho$, l'ordine di H sarà rappresentato da $\overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{\varepsilon_i})$, essendo $1 < \varepsilon_i \leq \frac{1}{2}(m_i + 1)$. Sia H_1 il sottogruppo di H che corrisponde ad A ed il cui ordine è un multiplo di ρ, e che, all'infuori dei fattori p_i, non contiene altri fattori primi. Il gruppo H contiene un'operazione d'ordine ρ che non appartiene ad H_1, ma che con questo sottogruppo genera H. Sia a_y l'operazione di G che corrisponde a quest'operazione di H: la a_y non è permutabile con nessuna delle opera-

(¹) Fite, "Trans. Amer. Math. Soc.„ III, 1902, pag. 335.
(²) Fite, *Loc. cit.*, pag. 342.

zioni di A se queste non appartegono pure ad U, ed il numero di commutatori di G corrisponde all'ordine di H_1, cioè a $\overset{n}{\underset{1}{\pi}}(p_i^{\varepsilon_i-1})$. Ma l'ordine di U è $\mu\overset{n}{\underset{1}{\pi}}(p_i^{m_i-\varepsilon_i})$, dunque,

$$m_i-\varepsilon_i \gtreqless \varepsilon_i-1, \qquad \varepsilon_i \gtreqless \tfrac{1}{2}(m_i+1).$$

È così stabilito che l'ordine di ogni operazione di H, gruppo degli automorfismi congredienti di G, è divisore di ω se H è abeliano e G contiene un sottogruppo abeliano A del quale $g:\omega$ è l'ordine. Se a_z è una operazione di A che non appartiene ad U, essa dovrà essere permutabile con almeno $g:\omega$ operazioni di G, per cui il numero di operazioni di G che in esso sono coniugate è sottomultiplo di ω. Quindi anche il numero di commutatori di G risultanti dalla moltiplicazione di a_z per le rimanenti operazioni di G è sottomultiplo di ω, e tali commutatori formano, com'è noto, un gruppo. Ne concludiamo che l'ordine di quell'operazione di H_1 che corrisponde ad a_z, cioè l'ordine di una qualunque delle operazioni di H_1 è sottomultiplo di ω. Se ora a_x è un'operazione di G non appartenenti ad A, ed a_x con A genera un sottogruppo di G, dovrà esistere una qualche potenza $\overset{n}{\underset{1}{\pi}}(p_i^{\varepsilon_i})$ di a_x, $(\varepsilon_1 \gtreqless m_1, \varepsilon_2 \gtreqless m_2, \ldots \varepsilon_n \gtreqless m_n)$, che sarà contenuta in A, e se tale potenza coinciderà coll'operazione a_z, questa dovrà essere permutabile con almeno $g:\overset{n}{\underset{1}{\pi}}(p_i^{m_i-\varepsilon_i})$ operazioni di G, per cui il numero di operazioni di G ad esse coniugate sarà un sottomultiplo del numero rappresentato dal prodotto $\overset{n}{\underset{1}{\pi}}(p_i^{m_i-\varepsilon_i})$. L'ordine dell'operazione corrispondente ad H è così divisore del numero espresso da quest'ultimo prodotto, ed il numero che rappresenta l'ordine di ciascuna operazione di H è divisore del numero ω. Quando poi G è gruppo abeliano d'ordine p^n e lo intendiamo generato da n operazioni indipendenti e permutabili $a_1, a_2, \ldots, a_n$ d'ordine p, dall'essere ciascuna di esse invariante, nel mentre G possiede sottogruppo caratteristico, dovranno esistere automorfismi capaci di trasformare qualcuna delle operazioni del gruppo in altre. Il simbolo $\left(\begin{matrix} a_j \\ a_i^{m_{ij}} \end{matrix}\right)$, $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, sostituisce l'operazione $(a_1^{z_1} a_2^{z_2} \ldots a_n^{z_n})$ all'operazione $(a_1^{v_1} a_2^{v_2} \ldots a_n^{v_n})$, essendo,

$$z_1 \equiv \Sigma\, m_{1i}v_i\,, \quad z_2 \equiv \Sigma\, m_{2i}v_i\,, \ldots, z_n \equiv \Sigma\, m_{ni}v_i\,, \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

e se le p^n operazioni così formate non sono tutte distinte, il precedente simbolo non può rappresentare un automorfismo quando ognuna delle p^n operazioni del gruppo si sostituisce successivamente all'operazione $(a_1^{v_1} a_2^{v_2} \ldots a_n^{v_n})$. Se tale condizione è soddisfatta il simbolo predetto rappresenta una permutazione delle operazioni fra loro, permutazione che lascia invariata la tavola di moltiplicazione del gruppo: quel simbolo rappresenta dunque un automorfismo e gli elementi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ devono essere numeri definiti rispetto al modulo p, se $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sono dati. Il precedente sistema di n congruenze simultanee deve dunque ammettere soluzioni definite rispetto alle v, il che avviene quando sia soddisfatta la condizione, necessaria e sufficiente, che il valore del determinante $|m_{nn}|$ dei coefficenti non sia un multiplo di p. Avremo così definito un distinto automorfismo del gruppo per ogni distinta serie di congruenze [1] della forma precedente, e che soddisfano alla condizione enunciata.

5. Se μ è il m. c. m. degli ordini m_i delle operazioni del gruppo abeliano G, questo ammette un automorfismo di potenza ψ quando è $\psi-1=s\mu$ ove s è un numero intero qualunque, ossia quando, a_i ed a_j essendo due operazioni qualunque di G, e ψ essendo primo rispetto ai loro ordini, è possibile la relazione

$$a_i^{\psi} a_j^{\psi} = (a_i a_j)^{\psi}, \tag{α}$$

che diventa,

$$a_i^{\psi} a_j^{\psi} a_i a_j = (a_i a_j)^{\psi+1} = a_i (a_i a_j)^{\psi} a_j = a_i a_j^{\psi} a_i^{\psi} a_j ,$$

se si moltiplicano i due membri per $a_i a_j$. Ne deduciamo l'altra relazione,

$$a_i^{\psi-1} a_j^{\psi} = a_j^{\psi} a_i^{\psi-1},$$

che possiamo pure scrivere,

$$a_i^{\psi-1} a_j = a_j a_i^{\psi-1}, \tag{α'}$$

e che deve essere soddisfatta da ogni coppia $a_i a_j$ di operazioni di G. Colla (α) possiamo pure scrivere,

$$a_i^{\psi-1} a_j^{\psi-1} = (a_i a_j)^{\psi-1}, \tag{β}$$

e questa relazione insieme alla (α) ci mostra che G ammette un automorfismo di potenza ψ quando oltre ad essere invariante la $(\psi-1)$-esima potenza di ogni sua operazione, esso ammette ancora un automorfismo di potenza $(\psi-1)$. Che queste condizioni siano sufficienti si deduce dal fatto che il prodotto di (β) per $a_i a_j$ riproduce (α).

Ponendo $\psi-1=\tau$ le (α') e (β) diventano rispettivamente,

$$a_i^{\tau} a_j = a_j a_i^{\tau}, \qquad a_i^{\tau} a_j^{\tau} = (a_i a_j)^{\tau} ,$$

e se queste sono soddisfatte, lo sono pure le due altre

$$a_i^{\nu\tau} a_j = a_j a_i^{\nu\tau}, \qquad a_i^{\nu\tau} a_j^{\nu\tau} = (a_i a_j)^{\nu\tau}, \tag{γ}$$

nelle quali ν è un numero intero qualunque. Siccome $a_i^{\nu\tau}$ è invariante, moltiplicando l'ultima relazione per $a_i a_j$ abbiamo,

$$a_i^{\nu\tau+1} a_j^{\nu\tau+1} = (a_i a_j)^{\nu\tau+1},$$

che indica che G ammette un automorfismo di potenza $(\nu\tau+1)$, se questo è un numero primo rispetto agli ordini di ognuna delle operazione di G. Se dunque esiste un numero qualunque τ pel quale le due relazioni (γ) sono verificate da ogni coppia di operazioni a_i, a_j di G, e se $(\tau+1)$ è un numero primo rispetto agli ordini di tutte le operazioni di G, allora questo gruppo ammette un automorfismo [2] di potenza ψ, essendo ψ un

---

[1] Due di tali serie si considerano distinte se la congruenza $m_{rs} \equiv m'_{rs} \pmod p$ non sussiste per ciascuna delle coppie di coefficenti corrispondenti. Il gruppo definito da questi automorfismi è il ben noto gruppo lineare omogeneo.

[2] Cfr. YOUNG J. *On the Olomorphism of a Group.* "Trans. Amer. Math. Soc.„ III, 1902, p. 188.

numero che può assumere qualunque valore della forma $\nu\tau+1$. Per $g=p^n$ possiamo supporre τ della forma p^{m_1}, e l'ipotesi $\tau=\nu p^{m_1}$ rende possibile l'altra $\tau=\nu'\nu p^{m_1}$, (ν primo con p), e potremo scegliere ν' in modo che la differenza $(\nu'\nu-1)$ sia divisibile per l'ordine p^t dell'operazione d'ordine più elevato. Così, un gruppo G d'ordine p^n ammette automorfismi di potenza τ solo quando ammette automorfismi di potenza p^{m_1}, ed a τ può venir assegnato un qualunque valore della forma $(\nu p^{m_1}+1)$. Le operazioni di G i di cui ordini non superano in valore il numero $p^{m_1+\alpha}$, $(\alpha=0, 1, 2, \ldots)$, formano un sottogruppo invariante L, ed il gruppo quoziente G : L è abeliano.

Se G non è abeliano, τ deve esclusivamente aver la forma $(\tau p^{m_1}+1)$, e se p^{m_1} è il più piccolo valore pel quale il gruppo G d'ordine p^n ammette un automorfismo di potenza τ, se ne ottengono tutti gli automorfismi di tale potenza coll'assegnare a τ tutti i possibili valori della forma $(\nu p^{m_1}+1)$, $(\nu=1, 2, \ldots, p^{t-m})$, essendo p^t il più elevato degli ordini delle operazioni di G che sono d'ordine più elevato. Il gruppo non abeliano G d'ordine p^n ammette dunque p^{t-m_1}, automorfismi di potenza τ, l'automorfismo indentico compreso, e questi automorfismi, considerati quali operazioni, costituiscono un sottogruppo I_1 d'ordine p^{t-m_1} del gruppo [1] d'automorfismi I di G, e che è ciclico, a meno che non sia $p=2$ ed $m_1=1$. In questo caso, se è $t>3$ il gruppo I_1 è abeliano.

È facile vedere che gli automorfismi di potenza τ d'un gruppo G sono invarianti nel gruppo I di G, giacchè, se essendo a_1 un'operazione qualunque di G è T un automorfismo di questo, è, $T^{-1}a_1T=a'_1$; e se T_1 è un automorfismo di potenza τ, cioè se è $T_1^{-1}a_1T_1=a_1^\tau$, allora tanto T_1T che TT_1 trasformano a_1 in $a_1'^\tau$.

6. È noto che quando un gruppo abeliano G è ciclico il suo gruppo I è oloedricamente isomorfo alle operazioni che trasformano un generatore di G in potenze i di cui esponenti sono numeri primi rispetto al suo ordine, per cui solo quando G è ciclico anche il gruppo I è abeliano. Se G non è ciclico ma contiene un sottogruppo ciclico L il di cui ordine è potenza d'un numero primo p, il suo gruppo I è oloedricamente isomorfo al gruppo transitivo di sostituzioni il cui grado è uguale al numero di operazioni di G che hanno generato L, e che sono quelle di grado più elevato. Ora, poichè in un tale gruppo transitivo l'ordine supera il grado, dobbiamo escludere che possa trattarsi di gruppo abeliano, e dunque non sarà neppure abeliano il gruppo I di G. Così, se G non è ciclico, il suo gruppo I non può essere abeliano. Inoltre, se l'ordine del gruppo abeliano G è multiplo di p, il suo gruppo I contiene necessariamente una operazione d'ordine $(p-1)$, giacchè, se p^m è la più alta potenza di p contenuta nell'ordine di G, il gruppo L d'ordine p^m (m primo con p), contenuto in G è pur esso abeliano, e può ottenersene l'automorfismo dando quale moltiplicatore di destra ad ognuna delle sue operazioni (n.° 1)

[1] Le operazioni di I_1 sono invarianti in I.

la propria potenza m-esima. Se poi è p^{m_1} l'ordine dell'operazione di L che è dell'ordine il più elevato, e scegliamo m per modo che appartenga all'esponente $p-1$ rispetto [1] al modulo p^{m_1}, l'automorfismo di L dovrà evidentemente corrispondere ad un'operazione d'ordine $p-1$ del suo gruppo I.

Quando nel moltiplicare fra loro le operazioni corrispondenti rendiamo il gruppo ciclico generale G, d'ordine $g = 2^r \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{m_i})$, isomorfo al suo sottogruppo d'ordine $g_1 = 2^{r_1} \overset{n}{\underset{1}{\pi}} (p_i^{s_i})$, $(r_1 < r - 1,\ s_i < m_i)$, otteniamo un automorfismo di G che corrisponde ad un'operazione d'ordine g_1 di I. Ma questo è prodotto diretto dei gruppi d'automorfismi dei gruppi d'ordini $2^r, p^{m_1}, p_2^{m_2}, \ldots, p_n^{m_n}$ rispettivamente (n.° 4), e siccome ognuno di questi gruppi d'automorfismi possiede operazioni del secondo ordine se l'ordine del gruppo corrispondente è maggiore di 2, così il gruppo I di G è ciclico solo quando è $r=0$, oppure $r=1$, ed uno degli esponenti dei fattori rimanenti non è nullo, ed anche quando è $r=1$, oppure $r=2$, e sono nulli gli esponenti di tutti i rimanenti fattori.

7. Nel gruppo H degli automorfismi congredienti di G sia una qualunque operazione che trasforma un elemento h_i d'ordine p^m nella sua potenza ε_i-esima, e sia J il gruppo di G che in tale isomorfismo di G ad H corrisponde all'operazione identica: sia p^e una potenza di p che divide l'ordine di J. Il prof. Fite ha dimostrato [2] che allora, al modo stesso che h_i viene trasformato in $h_i^{\varepsilon_i}$, così un'operazione d'ordine p^m corrisponderà ad h_i nell'isomorfismo di G ad H, se è $\varepsilon_i \equiv 1$, (mod p). Se il gruppo H di G è abeliano ed a_i, a_j sono due operazioni di G i di cui ordini s_i, s_j hanno σ per m. c. m., poichè è,

$$a_i^{-1} a_j a_i = u a_j, \tag{5}$$

se con θ indichiamo un numero intero qualunque, è (n.° 5),

$$a_i^{-1} a_j^\theta a_i = u^\theta a_j^\theta, \qquad (a_i a_j)^\theta = u^{\frac{1}{2}\theta(\theta-1)} a_i^\theta a_j^\theta,$$

ed anche,

$$(a_i a_j)^\sigma = u^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)} a_i^\sigma a_j^\sigma = u^{\frac{1}{2}\sigma(\sigma-1)}.$$

Ma se u' è l'ordine di u, è

$$s_i \equiv 0, \qquad s_j \equiv 0, \qquad (\text{mod } u'),$$

per cui tanto se s_i ed s_j sono numeri dispari, che se sono numeri contenenti il fattore 2 a differenti potenze, è $(a_i a_j)^\sigma = 1$; e se contengono il fattore 2 ad una stessa potenza, è $(a_i a_j)^{2\sigma} = 1$.

Quando $a_i a_j = a_y$ sia d'ordine s_y e chiamiamo p^{x_i} la più alta potenza di p contenuta in s_i; p^{x_j} la più alta potenza di p contenuta in s_j; p^{x_y} la più alta potenza di p contenuta in s_y, per quanto precede e pel fatto che è $a_j a_y^{-1} = a_i^{-1}$ ed $a_y^{-1} a_i = a_j^{-1}$, dei tre numeri x_i, x_j, x_y due sono

---

(1) La proposizione: "il numero m appartiene all'esponente $p-1$ rispetto al modulo p^{m_1}", significa: $p-1$ è il minore esponente, diverso da zero, pel quale sussiste la congruenza: $m^{p-1} \equiv 1$ (mod p^{m_1}). Cfr. P. GAZZANIGA. *Gli elementi della Teoria dei numeri*, 1903, pag. 69.

(2) *Loc. cit.*, pag. 346.

uguali ed il terzo può esser minore degli altri due od uguale ad essi. Ma se è $p = 2$, quel terzo numero può esser maggiore dei due altri. Così è $\sigma \equiv 0$, (mod s_y) se gli ordini delle due operazioni a_i, a_j non contengono una stessa potenza del fattore 2, ed è $2\sigma \equiv 0$, (mod s_y) nel caso contrario. Inoltre, se con P indichiamo il prodotto delle potenze di quei fattori primi che in s_i ed s_j entrano ad uno stesso esponente, e facciamo $s_i : \mathrm{P} = s'_i$, $s_j : \mathrm{P} = s'_j$, l'ordine s_y di a_y sarà un multiplo del m. c. m. di s'_i ed s'_j, salvo il caso nel quale i numeri s_i, s_j contengono il fattore 2 a potenze differenti, giacchè allora s_y deve essere un multiplo di tale m. c. m.

Se poi s_i ed s_j sono numeri primi fra di loro, è evidentemente $s_i s_j$ l'ordine di $a_i a_j$, poichè in questo caso le due operazioni a_i ed a_j sono permutabili.

Facendo $g = p^n$ ed $s_i = p^{n_i}$, $s_j = p^{n_j}$, $(n_i > n_j)$, l'ordine del prodotto $a_i a_j$ sarà p^{n_i}, e sarà quindi 2^{n_i} se è $p = 2$. Ma quando è $n_i = n_j + 1$, allora l'ordine di $a_i a_j$ è 2^{n_j}. Dunque, quando le due operazioni a_i, a_j di G corrispondono a due operazioni di H d'ordini differenti, l'ordine del loro prodotto è uguale o maggiore dell'ordine dell'operazione che fra le due ha grado più elevato.

Indicando con τ_i e τ_j le potenze p^m-esime delle due operazioni a_i, a_j rispettivamente, per la relazione (δ) abbiamo,

$$(a_i a_j)^{p^m} = u^{\frac{1}{2} p^m (p^m - 1)} a_i^{p^m} a_j^{p^m} = \tau_i \tau_j \,,$$

e ne deduciamo che se p^{ε_i} è il più elevato fra gli ordini dei commutatori di G, ed è $g = p^n$, le potenze p^m-esime delle sue operazioni formano un gruppo.

8. Non potendo esser ciclico il gruppo I di G se tale non è H, un gruppo ciclico d'ordine g' è gruppo d'automorfismi d'un gruppo G d'ordine p^n solo quando è $g' = p^n (p-1)$. Inoltre, essendo abeliano il gruppo I del gruppo ciclico G, e potendo esso venir rappresentato quale gruppo regolare di sostituzioni i cui elementi corrispondono alle operazioni d'ordine più elevato nel gruppo ciclico, ne segue che il gruppo I di un tale gruppo G d'ordine p^n è d'ordine $p^{n-1}(p-1)$, (Cfr. n.° 3). In particolare per $p = 2$ è $p^{n-1}(p-1) = 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$. Il gruppo I di G è così il prodotto diretto di due sottogruppi ciclici aventi p^{n-1} e $(p-1)$ per rispettivi ordini: il primo di questi sottogruppi è formato da tutte quelle operazioni di I che trasformano le operazioni di G in potenze i cui esponenti sono numeri η che verificano la congruenza $\eta \equiv 1$, (mod p). Quando poi ad esempio I sarà un gruppo numerico, mod p^n, i numeri η corrispondenti agli elementi di quel sottogruppo d'ordine p^{n-1} saranno costituiti di fattori minori di p^n, e che, diminuiti di un'unità, saranno multipli di p. Sarà inoltre,

$$\eta_i^{p^n} \equiv 1, \qquad (\text{mod } p^{m+1}),$$

ed η^{p^n} dovrà essere costituito di numeri congrui coll'unità rispetto al modulo p^n. Dunque, ogni numero η che soddisfi alla relazione

$$\eta - 1 = \theta \cdot p^{m-1},$$

essendo θ un numero intero qualunque, è potenza p^m-esima di un altro numero η_1 che soddisfa alla relazione

$$\eta_1 - 1 = \theta . p^n,$$

essendo θ ed n numeri arbitrari. Inoltre, pel fatto stesso che, in generale, la potenza 2^n-esima, $(n > 0)$, di ciascuna delle operazioni di I è potenza 2^n-esima di un'operazione del sottogruppo ciclico d'ordine 2^{n-2}, e poichè tali potenze sono le operazioni di I permutabili colle operazioni d'ordine 2^{m+2} di G, ne segue che ogni numero η che soddisfa alla relazione

$$\eta_1 - 1 = \theta . 2^{m+2},$$

è potenza 2^m-esima di un numero, mod 2^n, essendo l'esponente n ancora arbitrario. Reciprocamente, se η è un numero dispari qualunque, la sua potenza 2^m-esima, diminuita di un'unità è divisibile per 2^{m+1}. Siccome infine I è prodotto diretto di un gruppo ciclico il di cui ordine è un numero pari, per un'operazione del secondo ordine, ne segue che se un numero η possiede una radice 2^m-esima, mod p^n, possederà 2^{m+1} di tali radici, $(m + 1 < n)$. In particolare, se il gruppo ciclico G è d'ordine 2^n, il suo gruppo I è prodotto diretto d'un gruppo ciclico d'ordine 2^{n-2} formato dalle operazioni di I che sono permutabili colle operazioni del quarto ordine di G, pel gruppo del secondo ordine generato da quell'operazione di I che trasforma nell'inversa ogni operazione di G. Il quadrato di ogni operazione di I è dunque quadrato di un'operazione del sottogruppo ciclico d'ordine 2^{n-2}; ma siccome tutte le operazioni di questo sottogruppo sono permutabili colle operazioni di quarto ordine di G se questo è d'ordine 2^n, così i loro quadrati sono permutabili colle operazioni di ottavo ordine di G e tali quadrati trasformano ogni operazione in una sua potenza il di cui esponente m_1 soddisfa alla congruenza

$$m_1 \equiv 1, \qquad (\text{mod } 2^3). \tag{ε}$$

Tutte le operazioni di I essendo permutabili colle operazioni d'ordine 2^3 di G che siano quadrati delle operazioni del sottogruppo ciclico d'ordine 2^{n-2}, così correlativamente ogni numero dispari m_1 che soddisfa alla relazione (ε) è quadrato d'un numero dispari, cioè è residuo quadratico rispetto al modulo 2^n. In I il quadrato dell'operazione identica è la stessa operazione identica, e correlativamente, ogni numero dispari è residuo quadratico di 2, ed ogni numero dispari m_1 che soddisfa alla relazione

$$m_1 \equiv 1, \qquad (\text{mod } 2^2),$$

è residuo quadratico di 2^2.

Quando è $n = \theta\tau$, ed i numeri θ e τ sono primi fra loro, gli $f(\theta)$ numeri interi e positivi minori di n e che hanno in comune con esso un fattore massimo τ, costituiscono un gruppo abeliano se vengono combinati per moltiplicazione rispetto al modulo n. Tale gruppo è allora gruppo I del gruppo ciclico G d'ordine θ. Ma è noto come affinchè G sia ciclico [1]

[1] Cfr. G. A. Miller, "Amer. Journ. of Math.", XXVII, pag. 316.

è condizione necessaria che θ possegga radici primitive, (1) per cui solo quando θ avrà una delle forme 2^2, p^n, p^{2n} il gruppo abeliano G sarà ciclico (2) e conterrà una sola operazione del secondo ordine: ciò è quanto dire che una metà appunto delle sue operazioni avranno nel gruppo radici quadratiche, in virtù del principio pel quale le potenze $(n-1)$-esime delle operazioni di un qualunque gruppo abeliano costituiscono un gruppo quoziente che coincide col gruppo stesso se n è primo col suo ordine. Se in G sono n operazioni indipendenti, quelle del secondo ordine costituiscono un gruppo d'ordine 2^m, ed allora $\frac{1}{2^m}$ degli elementi di G avranno radici quadratiche, ed ogni numero che possegga una di tali radici, ne possederà 2^m rispetto al modulo n, o rispetto al modulo θ. Ciò evidentemente equivale al dire che la congruenza $x^2 \equiv m$, (mod θ), oppure mod n, essendo m e θ numeri primi fra loro, o non ammette soluzioni o ne ammette 2^m, essendo m il numero, accresciuto di β. ($\beta = 2$, 1 o 0 a seconda che θ è della forma $8n$, $8n+4$, od è incongruo collo zero rispetto al modulo 2^2), dei fattori primi dispari che sono contenuti nel numero intero θ.

Poco innanzi abbiamo detto (cfr. n.° 6) che se L è sottogruppo di G generato da un'operazione a_1 d'ordine p^n, il suo gruppo d'automorfismi I possiede un sottogruppo ciclico d'ordine p^{n-1} se p è un numero primo dispari, e ne contiene uno d'ordine 2^{n-2} se è $p=2$; che se a_1 è una operazione del secondo ordine di I che trasforma ogni elemento di L nell'inverso e che tale operazione non appartiene al sottogruppo ciclico d'ordine 2^{n-2} formato da tutte le operazioni di I che trasformano una operazione del quarto ordine di L in sè stessa. Tale sottogruppo insieme ad L deve dunque generare I, e se poniamo in relazione tutto ciò colla condizione necessaria perchè un dato numero appartenga ad un esponente dato rispetto ad un certo modulo, non è difficile determinare l'esponente al quale un numero deve appartenere rispetto al modulo 2^n, giacchè tale esponente coincide appunto coll'ordine della corrispondente operazione di I. Siccome infatti nel sottogruppo ciclico d'ordine 2^{n-2} un'operazione d'ordine 2^m è permutabile con ognuna delle operazioni d'ordine 2^{n-m} di L, ma non con quelle d'ordine $2^{n-(m-1)}$ e siccome a_1 trasforma ogni operazione

---

(1) La proposizione: „il numero a è radice primitiva rispetto al modulo m, o radice primitiva di m„, significa: a appartiene all'esponente $\varphi(m)$. Cfr. P. GAZZANIGA, *Op. cit.* pag. 69. Colla notazione $\varphi(m)$ indichiamo come di solito, l'*indicatore di Gauss*, numero dei numeri non superiori ad m e primi con m. Per $m=p$ è $\varphi(p)=p-1$, e per $m=p^n$, è $\varphi(p^n)=p^{n-1}(p-1)$, numero che corrisponde all'ordine del gruppo I del gruppo ciclico G d'ordine p^n. Per $m=\prod_1^n (p_i^{m_i})$ è evidentemente $\varphi(m)=\varphi(p_1^{m_1}) \cdot \varphi(p_2^{m_2}) \ldots$ Tutte le radici primitive d'un numero della forma p^n sono evidentemente date dal prodotto dei numeri appartenenti all'esponente p^{n-1}, per le $f(p-1)$ potenze d'un numero che pur non essendo radice primitiva di p^n, appartiene però all'esponente $p-1$, mod p. Così ad esempio, si hanno le radici primitive di 3^n col moltiplicare 3^n-1 per i numeri della forma $3\theta+1$, essendo θ uno dei $\varphi(3^\alpha-1)$ numeri interi e positivi primi con $3^\alpha-1$ e minori di questo.

(2) Si può notare la corrispondenza fra questa proprietà ed il *teorema* che nella Teoria dei numeri porta il nome di *Wilson*, il quale stabilisce che il prodotto dei $\varphi(\theta)$ numeri primi con θ e minori di θ, è rispetto al modulo θ, congruo con $+1$; ma che è congruo con -1 se θ è della forma $2^2, p^n, p^{2n}$, essendo sempre p un numero primo diverso dal 2, ed n un numero intero e positivo.

di L nell'inversa, ne segue che chiamando θ uno qualunque dei $\varphi(2^m)$ numeri primi con 2^m e minori di questo, i numeri che appartengono all'esponente 2^m, $(m > 1)$, devono essere della forma $\pm(\theta \cdot 2^{n-m} + 1)$. La proposizione reciproca è vera. Per $m = 1$, ai numeri della forma predetta dobbiamo aggiungere il numero 2^{n-1}. Così appartengono all'esponente 2^{n-2} tutti i numeri η tali che le congruenze

$$\eta \equiv 3 \qquad \text{ed} \qquad \eta \equiv 5, \qquad (\text{mod } 2^n),$$

siano soddisfatte.

C. ALASIA.

SOPRA ALCUNE CONGRUENZE

Siano dati tre numeri qualunque x, y, z; essi possono riguardarsi come radici dell'equazione cubica

$$\Omega^3 - a\Omega^2 + b\Omega - c = 0, \tag{1}$$

perciò si avrà

$$x + y + z = a \qquad xy + yz + zx = b \qquad xyz = c. \tag{2}$$

Moltiplicando i due membri della (1) per Ω^{n-3}, dove n è intero e $\geqslant 3$, si ha

$$\Omega^n - a\Omega^{n-1} + b\Omega^{n-2} - c\Omega^{n-3} = 0.$$

E facendo successivamente in questa, Ω eguale x, y, z e sommando, otterremo la nota formola di ricorrenza

$$S_n - aS_{n-1} + bS_{n-2} - cS_{n-3} = 0. \tag{3}$$

Avendo posto

$$S_n = x^n + y^n + z^n.$$

Dalla (3), dando ad n i valori n, $n-1$, $n-2\ldots$, e dalle equazioni (2) si ricava il sistema

$$\begin{aligned} S_n - aS_{n-1} + bS_{n-2} - cS_{n-3} &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ S_4 - aS_3 + bS_2 - cS_1 &= 0 \\ S_3 - aS_2 + bS_1 &= 3c \\ S_2 - aS_1 &= -2b \\ S_1 &= a, \end{aligned}$$

Dal quale si trae

$$S_n = \begin{vmatrix} 0 & -a & b & -c & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & b & -c & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a & b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & -a & b & -c \\ 3c & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a & b \\ -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -a \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se indichiamo con Δ_{n-1} il complemento algebrico di a, sviluppando S_n secondo gli elementi della 1ª colonna si ha

$$(-1)^{n+1}S_n = a\Delta_{n-1} + 2b\Delta_{n-2} + 3c\Delta_{n-3}. \tag{4}$$

Sviluppando poi il determinante Δ_{n-1} secondo gli elementi della 1ª linea

$$-\Delta_{n-1} = a\Delta_{n-2} + b\Delta_{n-3} + c\Delta_{n-4}. \tag{5}$$

Sia $a = 0$: allora le (4) (5) ci dànno

$$\left.\begin{aligned} (-1)^{n+1}S'_n &= 2bA_{n-4} + 3cA_{n-5} \\ -A_{n-4} &= bA_{n-6} + cA_{n-7} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

essendo A_{n-4} ciò che diventa Δ_{n-2} dopo la sostituzione $a = 0$ e le evidenti riduzioni. Dico che per $m > 0$

$$S'_{2m+1} \equiv 0 \pmod{c}.$$

In virtù delle (6), $\frac{S'_{2m+1}}{c}$ sarà intero quando lo è $\frac{A_{2m-3}}{c}$ o $\frac{A_{2m-5}}{c}$ o successivamente

$$\frac{A_{2m-7}}{c}, \quad \frac{A_{2m-9}}{c}, \ldots, \frac{A_5}{c}, \quad \frac{A_3}{c}$$

e poichè $\frac{A_3}{c} = 2b$, tutti i termini della serie precedente sono interi e tale è anche $\frac{S'_{2m+1}}{c}$. Potremo dunque asserire

Se x, y, z *sono tre numeri qualunque legati dalla relazione* $x + y + z = 0$ *l'espressione*

$$\frac{x^{2m+1} + y^{2m+1} + z^{2m+1}}{xyz}$$

con m *positivo e diverso da zero, è sempre un numero intero* (1).

Osserviamo che per n dispari, se x, y sono numeri qualunque ponendo $z = -(x + y) = -p$ e $xy = q$ si ha

$$a = 0, \qquad b = q - p^2, \qquad c = -pq$$

e la 1ª delle (6) ci dà

$$x^n + y^n = p^n + 2(q - p^2)A_{n-4} - 3pqA_{n-5} \tag{7}$$

intendendo che nei determinanti A_n si facciano le sostituzioni precedenti. La (7) esprime $x^n + y^n$ in funzione di $x + y$ e xy.

Sia $b = 0$. In tale ipotesi le (4) (5) ci dànno

$$\left.\begin{aligned} (-1)^{n+1}S''_n &= aB_{n-1} + 3cB_{n-3} \\ -B_{n-1} &= aB_{n-2} + cB_{n-4} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Se $h > 0$ dico che

$$S''_{3h+2} \equiv 0 \pmod{a}$$

Ora, affinchè $\frac{S''_{3h+2}}{a}$ sia intero, per le (8), debbono essere interi successivamente i termini della serie

$$\frac{B_{3h-1}}{a}, \quad \frac{B_{3h-4}}{a}, \quad \frac{B_{3h-7}}{a}, \ldots, \frac{B_2}{a}$$

e poichè $\frac{B_2}{a} = a$ così resta assodato che

(1) Vedere le questioni 3076-3077 (Tomo XIII, N. 7) proposte nell'"Intermédiaire des Mathématiciens" e non ancora risolte.

Se x, y, z *sono tre numeri qualunque legati dalla relazione* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ *l'espressione*

$$\frac{x^{3h+2}+y^{3h+2}+z^{3h+2}}{x+y+z}$$

con $h>0$ *è sempre un numero intero.*

Sia infine $c=0$. Potremo allora supporre p. es. $z=0$ e sarà:

$$x+y=a \qquad xy=b.$$

Dalle (4) (5) si ha

$$\left.\begin{array}{r}(-1)^{n+1}(x^n+y^n)=aC_{n-1}+2bC_{n-2}\\ -C_{n-1}=aC_{n-2}+2bC_{n-3}\end{array}\right\}. \tag{9}$$

Con procedimento analogo ai precedenti si ritrova la nota proprietà che x^n+y^n è divisibile per $x+y$ allorchè n è dispari: ciò poteva anche ottenersi dalla (7).

Anche la 1ª delle (9) dà lo sviluppo di x^n+y^n in funzione di $x+y$ e xy poichè i determinanti C_s non sono altro che i Δ_s in cui sia stato fatto $c=0$.

Poniamo nelle (4) (5) al posto di x, y, z rispettivamente yz, zx, xy; allora al posto di a, b, c dovremo porre rispettivamente b, ac, c^2 ed avremo

$$\left.\begin{array}{r}(-1)^{n+1}(y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n)=b\Delta'_{n-1}+2ac\Delta'_{n-2}+3c^2\Delta'_{n-3}\\ -\Delta'_{n-1}=b\Delta'_{n-2}+ac\Delta'_{n-3}+c^2\Delta'_{n-4}\end{array}\right\}. \tag{10}$$

Se $b=0$ segue subito dalla 1ª delle (10) che

$$y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n\equiv 0 \qquad (\text{mod } c)$$

per $n>0$; ma è facile dimostrare che per $n\geqq 5$ è altresì

$$y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n\equiv 0 \qquad (\text{mod } c^3).$$

Invero se $b=0$, Δ'_{n-2} e Δ'_{n-3} hanno la forma c^2M per $n>5$; e per $n=5$ hanno rispettivamente la forma c^2N, cN_1. Dunque

Se x, y, z *sono tre numeri qualunque legati dalla relazione* $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ *l'espressione*

$$x^ny^n+y^nz^n+x^nz^n$$

è divisibile per $(xyz)^3$ *per* $n\geqq 5$ *ed è divisibile per* xyz *per* $n>0$.

Se $a=0$ dalle (10) si ha

$$\left.\begin{array}{r}(-1)^{n+1}(y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n)=b\Delta'_{n-1}+3c^2\Delta'_{n-3}\\ -\Delta'_{n-1}=b\Delta'_{n-2}+c^2\Delta'_{n-4}\end{array}\right\}. \tag{11}$$

Avremo

$$y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n\equiv 0 \qquad (\text{mod } b)$$

dove n ha una delle forme $3k+1$, $3k+2$ con $k>0$.

Infatti, nelle due ipotesi di n eguale a $3k+1$ o $3k+2$ consideriamo le due serie

$$\frac{\Delta'_{n-3}}{b}, \quad \frac{\Delta'_{n-6}}{b}, \quad \frac{\Delta'_{n-9}}{b}, \ldots, \frac{\Delta'_1}{b}=1$$
$$\frac{\Delta'_{n-3}}{b}, \quad \frac{\Delta'_{n-6}}{b}, \quad \frac{\Delta'_{n-9}}{b}, \ldots, \frac{\Delta'_2}{b}=b.$$

Poichè l'ultimo termine di ciascuna di esse è intero, in forza delle (11) lo saranno tutti gli altri e quindi anche

$$\frac{y^nz^n+z^nx^n+x^ny^n}{b}. \qquad \text{c. v. d}$$

BERRY. — *Compendio di storia dell'astronomia*, tradotto dall'inglese dal D. Dionisio Gambioli con due appendici sulle specole e sugli astronomi italiani dei tempi recenti, riveduto e corretto dall'astronomo E. Millosevich, Direttore dell'Osservatorio del Collegio Romano. — Società editrice Dante Alighieri. Roma, 1907.

La storia dell'astronomia del Berry, tradotta dal prof. D. Gambioli, riveduta dal prof. Millosevich è un libro scritto da persona competentissima in tutte le parti dell'astronomia e specialmente dell'astronomia teoretica.

L'autore, libero da pregiudizi di cattedra, giudica nettamente, e assegna ai fatti astronomici e specialmente ai più recenti fatti acquisiti di astro-fisica la giusta loro portata.

Il libro evita in generale l'algoritmo, ma non lo tace nella sua essenza, e rende conto, come può, dei fenomeni anche i più inaccessibili alla comune cultura, mentre dell'acquisto di essi narra l'istoria. Esso contiene due importanti appendici del traduttore sugli astronomi e sulle specole italiane.

Il libro è profittevole specialmente ai giovani che già posseggono, una coltura generale scientifica, e meriterebbe diffusione.

Q.

Parole dette dal Prof. Giovanni Frattini il 20 dicembre 1906 agli alunni dell'Istituto Tecnico di Roma, presso la bara del Professore **Ugo Dainelli.**

" Diletti giovani,

" Ogni famiglia, e così pure ogni società di persone affratellate per comunanza d'intento o di ufficio, ha un piccolo camposanto, che essa perlustra con memore pensiero, ogni volta che un compagno si diparte dal mondo. Visitiamo il piccolo camposanto di coloro che insegnarono nell'Istituto tecnico di Roma, durante i sette lustri passati dalla sua fondazione, soffermandoci al ricinto dei professori di matematica, oggi che un altro di essi fu rapito da morte. — Quanta gloria in angusto spazio! E primo fra tutti Giuseppe Battaglini. Questi, che insieme col Betti, col Brioschi, col Cremona e altri sommi, fu l'anima di quel rinnovamento degli studj matematici che accompagnava il rinnovamento politico della nostra Italia, non fu schivo di dividere l'opera sua tra l'Università e l'Istituto tecnico di Roma, nel quale tenne cattedra di geometria proiettiva. All'Istituto tecnico di Roma spetta pertanto il merito di essere stato tra i primi e più efficaci promotori dei metodi della proiettività, per l'addietro in Italia ignorati o quasi. — In meno eccelso, ma pur sempre altissimo loco del piccolo camposanto, troveremo l'anima buona di Davide Besso. Il Besso morì in Frascati l'estate passata, reduce dall'Istria irredenta, ove peregrinò lungamente per farvi, a sue spese, nobile propaganda d'italianità, mediante la diffusione di buoni e sani libri italiani, che largamente donava ai contadini e ai poveri. Fu matematico insigne, ricercatore di metodi e scrittore di opere didascaliche e scolastiche, non so se più ammirabili ed ammirate per felicità d'invenzione o per sapienza di metodo. — Un gradino più sotto troveremo infine Oreste Verger e Aurelio Lugli, il quale ultimo, succeduto al Besso nell'Istituto tecnico di Roma e nella direzione del benemerito *periodico di matematica per l'insegnamento secondario*, dopochè il Besso salì alla cattedra di calcolo sublime nell'Università di Modena, non fu indegno del suo antecessore. Il povero Lugli fu con noi pochi anni, essendo morto in età giovane.

" Sulla zolla che ricopre questi genj tutelari dell'insegnamento matematico del nostro istituto, io v'invito, o giovani, a deporre oggi il feretro di Ugo Dainelli, affinchè il vostro maestro abiti eterno con loro, come ne è degno. Dei lavori scientifici del Dainelli non è qui luogo di discorrere: chè, ad una parte la mia impreparazione mi vieta di darvene degno conto; nè voi, dall'altra, siete in età da apprezzarne l'alto merito e l'importanza. Elevate questioni di meccanica, eleganti applicazioni del calcolo infinitesimale alla geometria, interrotti trattenimenti con la *fata delle matematiche*, e voglio dire con la teoria dei numeri, dalla quale il Gauss, d'immortale memoria, non seppe mai far divorzio, e per cui scrisse. *illecebris harum quaestionum ita fui implicatus ut eas deserere non potuerim.*

" Questi fugaci cenni bastano a dimostrare come l'opera scientifica del Dainelli non fosse meno geniale del suo magistero, di quel magistero che voi, o giovani, conosceste per prova, e della cui eccellenza mi siete qui testimonj. — Dite: Traeste profitto dalla parola del maestro vostro, oppure l'ascoltaste col vuoto nell'anima e lo sbadiglio sulle labbra? Usciste dall'aula scolastica col cervello annebbiato e gonfio di astruserie, o non piuttosto, uscendone, sentiste di saper fare alcun che di utile e bello che prima ignoravate? — La vostra risposta non è dubbia, e non già perchè il maestro sia morto, ma perchè eguale la deste mentre era vivo. — Ah! Non appartenne il Dainelli alla rea scuola di que' pedagogisti, che col gelo del dubbio e dell'ipercritica uccidono nelle anime giovinette la gemma ibernante della originalità; ma tal gemma promosse e fecondò col caldo dell'amore e la domestichezza della parola. Quegli errori, che nella comune dei discepoli sono un abito e quasi una seconda natura, egli non corresse con l'arido precetto, ma con lo sprone a fare, a tentare, ad osare, e perfino ad errare. *Errando discitur*, per quella legge dei contrarj onde il veleno genera l'antidoto e dalle cose morte si trae la vita: che anzi ben sapeva, il provetto maestro, essere vieppiù ferma e durevole quella scienza a cui si giunge, non per via retta, ma come a rifugio dai traviamenti dell'errore.

" E le passeggere collere del buon Dainelli, le ricordate? Per quelle collere, per i suoi scatti conditi di toscana arguzia, voi imparaste ad amarlo; nè solo come dal pubblico dei teatri si ama la goldoniana figura del *burbero benefico*, ma per una ragione ben più profonda. Chè, quanto buono e indulgente con gli altri, altrettanto fu il Dainelli severo censore di sè medesimo; talchè con fine intuito giovanile voi arrivaste a comprendere che non co' discepoli si rammaricava il maestro, ma con sè stesso, ogni volta che lo assalisse un ingiustificato malcontento dell'opera propria, o il disgusto di non poter travasare nel minor vaso delle vostre menti tutto l'ideale scientifico, onde era pieno il suo intelletto. Questa sfiducia di sè, che aveva radice in un alto sentimento del dovere, fu la maggiore tortura inflitta al buon Dainelli dalla lunga malattia che lo trasse al sepolcro. Tortura e torto insieme: chè, se infermo delle membra, egli ebbe alacre e saldo lo spirito fino all'ora estrema. Voi lo vedeste, o giovani. Malato venne alla scuola; conversò, lavorò con voi, nè da voi si ritrasse che per coricarsi sul letto di morte. *Secessit magister*. Il maestro era stanco, e si trasse in disparte!

" Voi, o giovani, dipartiti che sarete da questo luogo per tornare alle vostre famiglie e per continuare gli studj sotto altra guida, custodite fortemente nei cuori la buona e cara immagine di lui. Soprattutto vi sia impresso nell'animo il ricordo delle sue virtù. Da buon matematico, egli non servì che alla verità (e qui ripeto le parole che vi dissi ieri al ferale annunzio della sua fine, e che mi ricorsero al labbro quando il benemerito vostro preside mi conferì l'onorifico, per quanto doloroso incarico, di aggiungere al comune dolore queste disadorne parole). Egli amò la giustizia, che è verità e armonia di proporzioni nell'ordine morale; onorò la patria, che è verità di palpiti e di affetti; estimatore al vero della manchevolezza umana, praticò infine, la tolleranza e la pietà. Talchè io credo che queste parole, scevre d'esagerazione e inspirate a verità, siano il miglior omaggio, che per me rendere si possa alla memoria del diletto mio collega e maestro vostro.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare l'11 febbraio 1907

LE GEODETICHE DEL TORO [1]

LIOUVILLE, studiando le geodetiche su di un elissoide qualunque, prende per punto di partenza la definizione seguente: " *La geodetica è quella linea che sarebbe descritta, in seguito ad un impulso qualunque, da un punto mobile soggetto a restare sulla superficie ed il cui movimento non venisse ad essere alterato da alcuna forza acceleratrice* ".

Partendo da questo concetto meccanico, piuttosto che dalla proprietà geometrica delle geodetiche, *di aver esse, in ogni loro punto,* — come è ben noto — *il loro piano osculatore normale alla superficie, nel punto di osculazione,* abbiamo potuto verificare l'andamento di un punto, non soggetto a forze, sulla superficie del toro, e discutere l'equazione che si ricava dai due integrali delle aree e delle forze vive.

La presente memoria si specializza in due parti.

Nella prima parte abbiamo cercato di esprimere l'equazione integrale della superficie sotto forma finita, introducendo le funzioni θ di Jacobi e valendoci delle celebri trasformazioni degli integrali ellittici. [2]

Nella seconda parte abbiamo considerato due casi limiti, in cui le equazioni delle traiettorie si semplificano notevolmente: il primo caso si ha quando la velocità iniziale fa un angolo piccolissimo con un parallelo (ad es. con l'equatore); il secondo caso si ha quando la velocità iniziale fa un angolo piccolissimo con un meridiano. Nel 1° caso, la curva serpeggia fra due paralleli; nel 2° essa invade tutta la su-

(1) Ho il dovere di far notare che il presente lavoro è in gran parte una revisione, correzione e variazione di un'altra pubblicazione da me fatta, per mio conto, nel 1897. Faccio pure rilevare che sullo stesso argomento hanno scritto anche, per quanto è a mia conoscenza, posteriormente al 1897, i distintissimi professori dott. M. Puglisi (" Rendiconti del Circ. Mat. „ di Palermo, t. XIV) e dott. G. Carboni (Frosinone, 1904).

(2) Ci siam valsi in modo speciale del *Trattato delle funzioni ellittiche* del CAYLEY, tradotto dal BRIOSCHI, del *Trattato delle funzioni ellittiche* dell'HALPHEN; e della *Teoria della funzioni ellittiche* del PASCAL.

perficie in infinite spire, che si vanno addossando al meridiano. Questi sono però due *casi limiti*, ai quali tendono queste trajettorie, senza però mai identificarvisi; e servono a distinguere le trajettorie in due grandi categorie, a seconda che si avvicinano ai caratteri dell'una o dell'altra specie di curve: *le prime rimangono nella regione in cui la curvatura totale delle superficie è positiva; le seconde entrano anche nella regione in cui la curvatura totale è negativa.*

Tale è il concetto generale della presente Nota, in cui i concetti meccanici entrano — dirò così — come mezzo e non come fine.

PARTE PRIMA.

§ 1. — L'equazione del toro espressa mediante le funzioni ellittiche.

1. Consideriamo la superficie di un toro circolare, e sia R il raggio del cerchio generatore e p la distanza del centro dell'asse, consideriamo inoltre una superficie parallela e vicinissima alla prima. Essendo le geodetiche di una superficie generate da un punto che si muove per il solo impulso iniziale, senza essere sollecitato da alcuna forza, tale punto, nell'intercapedine delle due superficie, sarà libero di muoversi in modo che i suoi spostamenti sieno invertibili. Il punto esercita sulla superficie una pressione diretta nel senso della normale alla superficie, ugnale e contraria alla reazione della superficie; quindi essa è parallela all'asse di rotazione z quando si trova sui paralleli generati dai punti parabolici M, N.

2. Calcoliamo l'intensità della reazione.

Se X, Y, Z sono i coseni di direzione della normale in un punto della superficie, e λ è la reazione della superficie, si ha:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \lambda Y$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \lambda Z.$$

Quindi

$$\lambda^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2;$$

e però se ds è l'arco di geodetica,

$$\lambda\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)}.$$

Posto

$$v = \frac{ds}{dt}$$

e

$$\frac{1}{\rho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

(essendo ρ il raggio di prima curvatura della trajettoria nel punto), si ha

$$\lambda = \frac{v^2}{\rho}.$$

Poichè la trajettoria è geodetica, ρ coincide con il raggio r di curvatura della sezione normale, che ha nel punto la medesima tangente della trajettoria; per cui si ha:

$$\lambda = \frac{v^2}{r}.$$

Dunque: *Se una trajettoria passa dalla regione del toro a curvatura totale* K *positiva a quella negativa toccando uno dei paralleli* (dei punti parabolici) *descritti dai punti* M, N, *la reazione della superficie sarà positiva* (cioè diretta nel senso dell'involucro esterno) *nella regione delle* $K > 0$ (esterna); *sarà negativa* (cioè diretta nel senso dell'involucro interno) *nella regione delle* $K < 0$ (interna); *sarà nulla sui paralleli dei punti parabolici. Se la trajettoria non tocca i paralleli dei punti parabolici e passa da una regione all'altra, la reazione sarà sempre* > 0.

Se quindi si considera la proiezione ortogonale su un piano normale all'asse di rotazione della trajettoria generata dal movimento del punto materiale P, nel primo caso, nel punto dove essa attraversa la proiezione del parallelo di uno dei punti parabolici (M od N) presenta un flesso, perchè il piano osculatore della curva è piano proiettante, contenendo esso la normale alla superficie.

3. Le equazioni del moto del punto generatore sulla superficie ammettono i due integrali delle aree e delle forze vive.

Essi sono:

$$x\frac{ds}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2h$$

i quali, se si pone $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, prendono la forma

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c \qquad (1)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2h. \qquad (2)$$

Se $d\sigma$ è l'arco del meridiano che passa pel punto della trajettoria, si ha

$$d\sigma^2 = dr^2 + dz^2;$$

per cui, dalla (2),

$$\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2h; \tag{3}$$

ed inoltre, dalla (1),

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^4},$$

da cui

$$dt^2 = \frac{r^4}{c^2}\, d\varphi^2.$$

La (3) si può anche scrivere

$$d\sigma^2 + r^2 d\varphi^2 = 2h\, dt^2$$

quindi

$$d\sigma^2 + r^2 d\varphi^2 = \frac{2hr^4}{c^2}\, d\varphi^2$$

ossia

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = r^2\left(\frac{2hr^2}{c^2} - 1\right) = \frac{2hr^2}{c^2}\left(r^2 - \frac{c^2}{2h}\right).$$

Ponendo $\frac{c^2}{2h} = K^2$, si ha:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{r}{K}\right)^2 (r^2 - K^2)$$

donde

$$d\varphi = \pm \frac{K d\sigma}{r\sqrt{r^2 - K^2}}.$$

Integrando, si ha

$$\varphi = \varphi_0 \pm \int \frac{K d\sigma}{r\sqrt{r^2 - K^2}}. \tag{4}$$

4. L'integrale (4) vale per qualunque superficie di rotazione. Data la curva meridiana, si ha:

$$z = \varphi(r)$$
$$dz = \varphi'(r)\, dr;$$

e quindi

$$d\sigma^2 = dr^2 + dz^2 = \{1 + \varphi'^2(r)\}\, dr^2;$$

per cui la (4) diviene

$$\varphi = \varphi_0 \pm K \int \frac{\sqrt{\varphi'^2(r) + 1}}{r\sqrt{r^2 - K^2}}\, dr. \tag{4'}$$

L'equazione delle geodetiche si può dunque esprimere mediante una quadratura.

Nel nostro caso, essendo p la distanza del centro del cerchio generatore dall'asse delle z ed R il raggio del cerchio, si ha:

$$(r - p)^2 + z^2 = R^2$$

da cui

$$z^2 = R^2 - (r - p)^2;$$

e differenziando:

$$2z\,dz = -2(r-p)\,dr$$

donde

$$dz = -\frac{(r-p)\,dr}{\sqrt{R^2-(r-p)^2}}.$$

La (4') prende allora la forma

$$\varphi = \varphi_0 \pm K \int \frac{R\,dr}{r\sqrt{\{R^2-(r-p)^2\}\{r^2-K^2\}}}. \qquad (4'')$$

5. Se ds è l'elemento lineare si ha (per le superficie di rotazione):

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 d\varphi^2 + d\sigma^2 \\ &= r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 \end{aligned}$$

ovvero

$$ds^2 = \{1+\varphi'^2(r)\}\,dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Nel caso del toro, è

$$1+\varphi'^2(r) = \frac{R^2}{R^2-(r-p)^2},$$

per cui l'equazione delle forze vive prende la forma

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \frac{R^2}{R^2-(r-p)^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2h \qquad (5)$$

e quella delle aree:

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \qquad (6)$$

Consideriamo la proiezione L', sul piano xy, di un punto L del toro.

Mentre L descrive sul toro una geodetica, L' si muove sul piano xy, ed r e φ varieranno in modo che sieno soddisfatte le (5) e (6). Ora

$$\frac{R^2}{R^2-(r-p)^2} = 1 + \frac{(r-p)^2}{R^2-(r-p)^2}$$

quindi la (5) diviene

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2}(r-p)^2\left(2h-\frac{c^2}{r^2}\right) = 2h, \qquad (7)$$

la quale, mettendo c^2 in evidenza nell'ultimo termine, si può scrivere così:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 &= 2h - \frac{c^2}{R^2}(r-p)^2\left(\frac{2h}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right) \\ &= 2h - \frac{c^2}{R^2}(r-p)^2\left(\frac{1}{K^2}-\frac{1}{r_2}\right). \end{aligned}$$

Fissiamo ora un valore di c ed uno di h, e consideriamo la geodetica che corrisponde a questi valori. Siano c' ed h' questi due valori, diciamo K' il corrispondente valore di K, costruiamo l'espressione

$$2\mathrm{U} = -\frac{c^2}{\mathrm{R}^2}(r-p)^2\left(\frac{1}{\mathrm{K}'^2}-\frac{1}{r'^2}\right) \qquad (\alpha)$$

e consideriamo il moto di un punto del piano attratto dal centro delle coordinate con una forza la cui funzione potenziale è data dalla (α); per cui si avranno i due integrali delle aree e delle forze vive, che saranno

$$r'^2\frac{d\varphi}{dt} = c'.$$

Consideriamo il moto di un punto del piano corrispondente ai valori iniziali $h' = h$, $c' = c$; gli integrali corrispondenti saranno

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2h + 2\mathrm{U}.$$

La trajettoria del moto di questo punto sarà allora la proiezione della trajettoria del moto di L sul toro, corrispondente ai valori di c ed h. Si ha, dalla (7):

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= 2h - \frac{c^2}{r^2} - \frac{(r-p)^2}{\mathrm{R}^2}\left(2h - \frac{c^2}{r^2}\right)\\ &= \left(2h - \frac{c^2}{r^2}\right)\left[1 - \frac{(r-p)^2}{\mathrm{R}^2}\right]\\ &= \left(2h - \frac{c^2}{r^2}\right)\cdot\frac{\mathrm{R}^2-(r-p)^2}{\mathrm{R}^2}\end{aligned}$$

od anche

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2hr^2-c^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{R}^2-(r-p)^2}{\mathrm{R}^2},$$

da cui

$$dt = \pm\frac{r\mathrm{R}dr}{\sqrt{2h\left(r^2-\frac{c^2}{2h}\right)[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}$$

ossia

$$dt = \pm\frac{r\mathrm{R}dr}{\sqrt{2h}\,.\sqrt{(r^2-\mathrm{K}^2)[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}.$$

Ed integrando si ha:

$$t + \tau = \pm\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2h}}\int\frac{rdr}{\sqrt{(r^2-\mathrm{K}^2)[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}. \qquad (8)$$

Notiamo sin d'ora che gli integrali (4″) e (8) si possono esprimere mediante le funzioni ellittiche.

6. Determiniamo però prima i valori che può assumere la costante K. Consideriamo a tal uopo la circonferenza equatoriale esterna del toro, e supponiamo che il mobile sia situato inizialmente in un punto M di essa; si ha allora $r = R + p$. Se la velocità è diretta tangenzialmente alla circonferenza equatoriale che passa per M, esso la descrive con moto uniforme, poichè la circonferenza equatoriale è una geodetica. La velocità u del punto è espressa dalla formula

$$u = (R + p)\frac{d\varphi}{dt};$$

l'integrale delle aree diviene

$$u\,(p + R) = c$$

e quello delle forze vive

$$u^2 = 2h.$$

Ne consegue allora che è

$$(p + R)^2 = \frac{c^2}{u^2} = \frac{c^2}{2h} = K^2.$$

Variando la velocità iniziale del punto, e indicando con α l'angolo la nuova direzione fa con la tangente in M al circolo equatoriale, il punto M descrive di nuovo una geodetica. La componente della velocità lungo il circolo equatoriale è allora $u\cos\alpha$; e, considerando il moto della proiezione del punto sul circolo equatoriale, si ha:

$$K^2 u^2 = (p + R)^2 \cos^2\alpha.$$

Se si fosse considerato un punto del circolo equatoriale interno, nel 1° caso si sarebbe avuto

$$K^2 = (p - R)^2$$

e nel 2° caso

$$K^2 = (p - R)^2 \cos^2\alpha.$$

Se il punto è situato inizialmente su un parallelo di raggio r, consideriamo il meridiano che passa per M, e sia θ_0 l'angolo che il raggio del meridiano passante per M fa col raggio del parallelo passante per il medesimo punto. Si ha:

$$r = p + R\cos\theta_0 .$$

Se la velocità iniziale u del punto materiale M è tangente al parallelo, nel primo istante il punto resterà intorno all'asse del toro sul parallelo. Quindi, nel primo istante, si ha:

$$u = r\frac{d\varphi}{dt} = (p + R\cos\vartheta_0)\frac{d\varphi}{dt}.$$

Ora per l'integrale delle aree si ha

$$(p + R\cos\vartheta_0)\,u = c$$

e per quello delle forze vive

$$u^2 = 2h$$

quindi

$$K^2 = (p + R\cos\vartheta_0)^2.$$

Se finalmente la velocità iniziale del punto materiale M fa un angolo α con la tangente in M al parallelo, si ha:

$$K^2 = (p + R\cos\vartheta_0)^2 \cos^2\alpha.$$

Il massimo valore di K^2 è quindi $(p+R)^2$; il minimo è zero, e si ha quando il punto si muove inizialmente (e quindi sempre) sur un meridiano (il meridiano è una geodetica), per cui è allora

$$\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

e quindi

$$K^2 = 0.$$

7. Determiniamo ora quali valori può assumere la reazione.

La reazione, che prova il punto muovendosi sulla geodetica, è data da

$$\lambda = \frac{v^2}{r};$$

e poichè $v^2 = 2h$ è

$$\lambda = \frac{2h}{r};$$

quindi, sul cerchio equatoriale esterno, si ha:

$$\lambda = \frac{2h}{R+p}$$

e per conseguenza

$$\lambda > 0.$$

Sul cerchio equatoriale interno si ha invece

$$\lambda = -\frac{2h}{p-R}$$

e quindi

$$\lambda < 0,$$

tenendo presente, in tutti e due i casi, che è

$$K > 0 \qquad \text{e} \qquad p > R.$$

Su un meridiano si ha:

$$\lambda = \frac{2h}{R}$$

e quindi

$$\lambda > 0.$$

Dunque *lungo i meridiani e i circoli equatoriali la pressione del punto sulla superficie è costante.*

Se supponiamo che il mobile parta da un punto M del circolo equatoriale esterno, allora si ha:

$$\lambda = \frac{2h}{r};$$

e se r è raggio di una sezione normale

$$R < r < p + R;$$

quindi nel punto di partenza il minimo valore della pressione si ha quando la velocità iniziale è diretta secondo la tangente al circolo equatoriale, il massimo si ha quando è diretta secondo il meridiano; cioè *l'equatore e il meridiano sono rispettivamente per* M *linee di minima e di massima pressione.*

§ II.

1. I due integrali da calcolare sono

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{(r^2-\mathrm{K}^2)\,[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}$$

e

$$\int \frac{rdr}{\sqrt{(r^2-\mathrm{K}^2)\,[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}.$$

Ponendo

$$g=\frac{dr}{\sqrt{(r^2-\mathrm{K}^2)\,[\mathrm{R}^2-(r-p)^2]}}$$

e

$$\frac{r-\mathrm{K}}{r+\mathrm{K}}=y^2,$$

sostituendo si ha:

$$g=\frac{4\mathrm{K}ydy}{\sqrt{\{\mathrm{K}^2(1+y^2)^2-\mathrm{K}^2(1-y^2)^2\}\,\{\mathrm{R}^2(1-y^2)^2-[\mathrm{K}(1+y^2)-p(1-y^2)]^2\}}}.$$

Ora

$$\sqrt{\mathrm{K}^2(1+y^2)^2-\mathrm{K}^2(1-y^2)^2}=2\mathrm{K}y$$

e

$$\mathrm{R}^2(1-y^2)^2-[\mathrm{K}(1+y^2)-p(1-y^2)]^2=$$
$$=[\mathrm{R}+\mathrm{K}-p-(\mathrm{R}-\mathrm{K}-p)\,y^2]\,[\mathrm{R}-\mathrm{K}+p-(\mathrm{R}+\mathrm{K}+p)\,y^2]$$

quindi

$$g=\frac{2dy}{\sqrt{[\mathrm{R}+\mathrm{K}-p-(\mathrm{R}-\mathrm{K}-p)\,y^2]\,[\mathrm{R}-\mathrm{K}+p-(\mathrm{R}+\mathrm{K}+p)\,y^2]}}$$

ossia

$$g=\frac{2dy}{\sqrt{\mathrm{R}^2-(\mathrm{K}-p)^2}\sqrt{(1-m^2)\,(1-n^2)}},$$

avendo posto:

$$m=\frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}}$$
$$n=\frac{\mathrm{R}-p-\mathrm{K}}{\mathrm{R}-p+\mathrm{K}}.$$

2. Si è visto (§ I, 6) che per $K = p + R$ il mobile descrive con moto uniforme il circolo equatoriale esterno; e che per $K = p - R$ il mobile descrive il circolo equatoriale interno.

Consideriamo ora i due casi

$$\begin{matrix} K < p - R \\ K > p - R \end{matrix} \qquad (K < p + R).$$

Intanto, se il punto descrive il circolo equatoriale esterno con moto uniforme, con velocità $u = \sqrt{2h}$, l'espressione della trajettoria è

$$r = R + p,$$

ed il tempo è dato da

$$\begin{aligned} t - \tau &= \frac{R + p}{u} (\varphi - \varphi_0) \\ &= \frac{R + p}{\sqrt{2h}} (\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

Nel circolo equatoriale interno si ha:

$$t = \frac{p - R}{\sqrt{2h}} (\varphi - \varphi_0).$$

Per $\tau = 0$, $\varphi_0 = 0$ allora le due precedenti formule diventano corrispondentemente

$$t = \frac{p + R}{\sqrt{2h}} . \varphi$$

$$t = \frac{p - R}{\sqrt{2h}} . \varphi$$

le quali formule riprovano che il moto è uniforme.

3. Consideriamo ora distintamente ciascuno dei due casi generali indicati nel precedente numero, e vediamo di determinare l'equazione della proiezione ed il tempo.

***

Caso 1°. $K < p - R \quad (K < p + R)$. Allora

$$(K - p)^2 - R^2 > 0$$

e quindi

$$g = \frac{2dy}{\sqrt{(K - p)^2 - R^2} \; \sqrt{-(1 - my^2)(1 - ny^2)}} .$$

Ed essendo

$$\begin{matrix} R + p + K > 0 \\ R + p - K > 0 \end{matrix}$$

ne segue che è

$$m > 0;$$

ed inoltre, essendo

$$\begin{aligned} R - p &< 0 \\ R - p - K &< 0 \\ R - p + K &< 0, \end{aligned}$$

è

$$\frac{m}{n} = \frac{(R + K + p)(R + K - p)}{(R - K + p)(R - K - p)} = \frac{(R + K)^2 - p^2}{(R - K)^2 - p^2}.$$

E poichè è

$$\begin{aligned} K + R &< p \quad \text{e quindi} \quad (K + R)^2 < p^2 \\ K - R &< p \quad \text{e quindi} \quad (K - R)^2 < p^2 \end{aligned}$$

ne segue

$$0 < \frac{m}{n} < 1.$$

Poniamo

$$h^2 = \frac{m}{n}, \qquad \text{ove} \qquad 0 < h^2 < 1,$$

$$y^2 = \frac{z^2}{n}, \qquad \text{da cui} \qquad dy = \frac{dz}{\sqrt{n}},$$

$$\gamma = \frac{r dr}{\sqrt{(r^2 - K^2)[R^2 - (r - p)^2]}} = rg$$

$$\gamma' = \frac{dr}{r\sqrt{(r^2 - K^2)[R^2 - (r - p)^2]}} = \frac{g}{r};$$

si ha:

$$\gamma = \frac{2K}{\sqrt{p^2 - (K - R)^2}} \cdot \frac{n + z^2}{n - z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{-(1 - h^2 z^2)(1 - z^2)}}$$

$$\gamma' = \frac{2}{K\sqrt{p^2 - (K - R)^2}} \cdot \frac{n - z^2}{n + z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{-(1 - h^2 z^2)(1 - z^2)}}.$$

Facciamo la posizione

$$z = \frac{dn\,(u, h')}{h}$$

ove

$$1 > h'^2 > 0 \qquad \text{e} \qquad h^2 + h'^2 = 1.$$

Si ha

$$\frac{dz}{\sqrt{-(1 - z^2)(1 - h^2 z^2)}} = -\frac{h'^2}{h} \cdot \frac{snu\,.\,cnudu}{\sqrt{\frac{h'^2}{h^2}\, cn^2 u\,.\,h'^2 sn^2 u}} = -du$$

quindi

$$\gamma = -\frac{2K}{\sqrt{p^2 - (K - R)^2}} \cdot \frac{h^2 n + dn^2(u, h')}{h^2 n - dn^2(u, h')}\, du$$

$$\gamma' = -\frac{2}{K\sqrt{p^2 - (K - R)^2}} \cdot \frac{h^2 n - dn^2(u, h')}{h^2 n + dn^2(u, h')}\, du.$$

Ora

$$\frac{h^2n + dn^2(u, h')}{h^2n - dn^2(u, h')} = \frac{m + dn^2(u, h')}{m - dn^2(u, h')}$$
$$= \frac{2m}{m - dn^2(u, h')} - 1$$
$$= \frac{2m}{m - (1 - h'^2 sn^2 u)} - 1$$
$$= \frac{2m}{(m-1)\left\{1 + \frac{h'^2}{m-1} sn^2 u\right\}} - 1$$
$$= \frac{2m}{m-1} \cdot \frac{1}{1 - \lambda sn^2 u} - 1$$

avendo posto $\lambda = \frac{h'^2}{1-m}$.

Ed inoltre, ponendo

$$\rho = -\frac{2K}{\sqrt{p^2 - (K-R)^2}},$$

si ha

$$\gamma = \rho\left\{-\frac{2m}{1-m} \cdot \frac{du}{1 - \lambda sn^2 u} - du\right\}.$$

Analogamente per calcolare γ' si osservi che

$$\frac{m - dn^2(u, h')}{m + dn^2(u, h')} = \frac{2m}{m + dn^2(u, h')} - 1$$
$$= \frac{2m}{m+1} \cdot \frac{1}{1 - \lambda' sn^2 u} - 1$$

ove $\lambda' = \frac{h'^2}{1+m}$.

Ed allora se poniamo

$$\sigma = -\frac{2}{K\sqrt{p^2 - (K-R)^2}}$$

risulta

$$\gamma' = \sigma\left\{\frac{2m}{m+1} \cdot \frac{du}{1 - \lambda' sn^2 u} - du\right\}.$$

Ora si ha identicamente

$$\frac{1}{1 - \lambda sn^2 u} = 1 + \frac{\lambda sn^2 u}{1 - \lambda sn^2 u}$$

quindi

$$\gamma = \rho\left\{-\frac{2m}{1-m}\left(du + \lambda \frac{sn^2 u du}{1 - \lambda sn^2 u}\right) - du\right\}$$

ossia

$$\gamma = -\rho\left\{\frac{1+m}{1-m} du + \frac{2m\lambda}{1-m} \cdot \frac{sn^2 u du}{1 - \lambda sn^2 u}\right\}.$$

Poniamo inoltre

$$\lambda = h'^2 sn^2 a$$

e poichè è anche

$$\lambda = \frac{h'^2}{1-m}$$

si ha

$$\frac{1}{1-m} = sn^2 a$$

e quindi

$$m = -\frac{cn^2 a}{sn^2 a};$$

ed allora avremo

$$\begin{aligned}
\gamma &= \rho\left\{-\frac{1+m}{1-m}du - \frac{2mh'^2 sn^2 a}{1-m}\cdot\frac{sn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 a sn^2 u}\right\} \\
&= \rho\left\{-\frac{1+m}{1-m}du + 2h'^2 sn^2 a cn^2 a\cdot\frac{sn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 a sn^2 u}\right\} \\
&= \rho\left\{-\frac{1+m}{1-m}du + \frac{2snacna}{dna}\cdot\frac{h'^2 snacnadnasn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 a sn^2 u}\right\} \\
&= \rho\left\{(cn^2 a - sn^2 a)du + \frac{2snacna}{dna}\cdot\frac{h'^2 snacnadnasn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 a sn^2 u}\right\}.
\end{aligned}$$

Analogamente per γ' si ha:

$$\begin{aligned}
\gamma' &= \sigma\left\{\frac{2m}{1+m}\left(du + \lambda'\frac{sn^2 u}{1-\lambda' sn^2 u}\right) - du\right\} \\
&= \sigma\left\{-\frac{1-m}{1+m}du + \frac{2m\lambda'}{1+m}\cdot\frac{sn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 b sn^2 u}\right\} \\
&= \sigma\left\{(cn^2 b - sn^2 b)du + \frac{2snbcnb}{dnb}\cdot\frac{h'^2 snbcnbdnbsn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 b sn^2 u}\right\}
\end{aligned}$$

avendo posto

$$\lambda' = h'^2 sn^2(b, h')$$

e poichè

$$\lambda' = \frac{h'^2}{1+m}$$

si è avuto

$$\frac{1}{1+m} = sn^2 b$$

e quindi

$$m = \frac{cn^2 b}{sn^2 b}$$

$$\frac{m}{1+m} = cn^2 b$$

$$1-m = \frac{sn^2 b - cn^2 b}{sn^2 b}.$$

Ora

$$\begin{aligned}
\int\frac{h'^2 snbcnbdnbsn^2 u du}{1-h'^2 sn^2 b sn^2 u} &= \pi(u, b) \\
&= \frac{\theta'(b)}{\theta(b)}u + \tfrac{1}{2}\log\frac{\theta(u-b)}{\theta(u+b)}
\end{aligned}$$

quindi, per la (4''), § I, 4, si ha

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \mathrm{KR}\,\sigma \left\{ (cn^2b - sn^2b)\,u + \frac{2snbcnb}{dnb}\,\pi(u, b) \right\}$$

ed essendo

$$\mathrm{KR}\,\sigma = \frac{2\mathrm{R}}{\sqrt{p^2 - (\mathrm{R}-\mathrm{K})^2}}$$

si ha

$$\frac{(\varphi-\varphi_0)\sqrt{p^2-(\mathrm{R}-\mathrm{K})^2}}{2\mathrm{R}} = \left\{\left[cn^2b - sn^2b + \frac{2snbcnb}{dnb}\cdot\frac{\theta'(b)}{\theta(b)}\right]u + \right.$$
$$\left. + \frac{snbcnb}{dnb}\log\frac{\theta(u-b)}{\theta(u+b)}\right\}.$$

Analogamente, per la (8), § I, 5, si ha:

$$\frac{(t+\tau)\sqrt{2h}}{\mathrm{R}\rho} = \left\{\left[cn^2a - sn^2a + \frac{2snacna}{dna}\cdot\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\right]u + \frac{snacna}{dna}\log\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right\}.$$

Osservazione. — Vediamo quali relazioni intercedano fra K e b e tra K ed a.

Abbiamo posto

$$m = \frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}}$$

e siccome

$$m = \frac{cn^2b}{sn^2b}$$

così

$$\frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}} = \frac{cn^2b}{sn^2b}$$

d'onde

$$\frac{\mathrm{R}+p}{\mathrm{K}} = \frac{cn^2b+sn^2b}{cn^2b-sn^2b}$$

e quindi

$$\mathrm{K} = (\mathrm{R}+p)(cn^2b - sn^2b).$$

Analogamente, essendo

$$m = -\frac{cn^2a}{sn^2a} = \frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}},$$

si ha

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{R}+p}{cn^2a - sn^2a}.$$

Il parametro b riceve valori reali; il parametro a riceve valori immaginari puri (vedi *Nota* a pag. 31).

***

Caso 2°.

$$\mathrm{K} > p - \mathrm{R} \qquad (\mathrm{K} < p + \mathrm{R}) \tag{1}$$

e quindi

$$\mathrm{R} - p + \mathrm{K} > 0 \tag{2}$$
$$\mathrm{R}^2 - (\mathrm{K}-p)^2 > 0$$

per cui, ponendo

$$m = \frac{R + p + K}{R + p - K}$$

$$n = \frac{K + p - R}{K - p + R}$$

si ha

$$g = \frac{1}{\sqrt{R^2 - (K - p)^2}} \cdot \frac{2dy}{\sqrt{(1 + ny^2)(1 - my^2)}}.$$

Ora, per la (1) si ha

$$\frac{p + K - R}{p + R - K} > 0$$

e per la (2)

$$\frac{p + K - R}{R - p + K} > 0,$$

essendo $p + K - R > 0$.

Consideriamo il rapporto $\frac{n}{m}$ e distinguiamo i tre seguenti casi:

$$\frac{n}{m} > 1$$

$$\frac{n}{m} = 1$$

$$\frac{n}{m} < 1.$$

Si ha

$$n - m = \frac{p + K - R}{K + R - p} - \frac{K + R + p}{p - K + R}$$

$$= \frac{p^2 - (K - R)^2 - (K + R)^2 + p^2}{(K + R - p)(p - K + R)}$$

$$= \frac{2p^2 - 2(K^2 + R^2)}{(K + R - p)(p - K + R)}$$

e, siccome il denominatore è positivo, si distinguono i tre casi:

$$p^2 > K^2 + R^2; \quad p^2 < K^2 + R^2; \quad p^2 = K^2 + R^2.$$

Sottocaso 1°.

$$p^2 > K^2 + R^2$$

allora

$$n - m > 0$$

ossia

$$\frac{n}{m} - 1 > 0$$

e quindi

$$\frac{n}{m} > 1;$$

per cui

$$g = \frac{1}{\sqrt{R^2 - (K - p)^2}} \cdot \frac{2dy}{\sqrt{(1 + ny^2)(1 - my^2)}}$$

per $y=\frac{z}{\sqrt{n}}$ prende la forma

$$g=\frac{2}{\sqrt{n}\sqrt{R^2-(K-p)^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)\left(1-\frac{m}{n}z^2\right)}}$$

in cui $R^2-(K-p)^2>0$ perchè

$$\begin{array}{lll} K>p-R & \text{e quindi} & R+K-p>0 \\ K<R+p & \text{e quindi} & R-K+p>0; \end{array}$$

ed inoltre, essendo

$$n=\frac{p+K-R}{R+K-p}=\frac{p^2-(K-R)^2}{R^2-(K-p)^2}$$

e $\frac{m}{n}=h^2$, si ha

$$g=\frac{2}{\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-h^2z^2)}}$$

in cui il coefficiente è reale poichè è

$$0<\frac{m}{n}<1.$$

Ora

$$\gamma=gr,\quad \gamma'=\frac{g}{r},\quad r=\frac{n+z^2}{n-z^2}.K$$

per cui si ha

$$\gamma=\frac{2K}{\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{n+z^2}{n-z^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-h^2z^2)}}$$

$$\gamma'=\frac{2}{K\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{n-z^2}{n+z^2}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-h^2z^2)}}.$$

Poniamo

$$\lambda^2-\frac{1}{1+h^2}$$

e facciamo la trasformazione

$$z=\frac{1}{h}\,cn\,(u,\lambda);$$

allora

$$dz=-\frac{1}{h}\,sn\,(u,\lambda)\,dn\,(u,\lambda)\,du,$$

$$dn\,(u,\lambda)=\sqrt{1-\lambda^2sn^2\,(u,\lambda)}=\frac{\sqrt{h^2+cn^2\,(u,\lambda)}}{\sqrt{1+h^2}}$$

$$1+z^2=1+\frac{1}{h^2}cn^2\,(u,\lambda)=\frac{h^2+cn^2\,(u,\lambda)}{h^2}$$

$$1-h^2z^2=1-cn^2\,(u,\lambda)=sn^2\,(u,\lambda)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-h^2z^2)}}=-\frac{du}{\sqrt{1+h^2}}$$

e quindi

$$\gamma = -\frac{2K}{\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\cdot\frac{h^2n+cn^2(u,\lambda)}{h^2n-cn^2(u,\lambda)}du$$

$$\gamma' = -\frac{2}{K\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}\cdot\frac{h^2n-cn^2(u,\lambda)}{h^2n+cn^2(u,\lambda)}du.$$

E posto

$$\rho = -\frac{2K}{\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}$$

$$\sigma = -\frac{2}{K\sqrt{p^2-(K-R)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+h^2}}$$

si ha

$$\gamma = \rho\,\frac{m+cn^2(u,\lambda)}{m-cn^2(u,\lambda)}du$$

$$\gamma' = \sigma\,\frac{m-cn^2(u,\lambda)}{m+cn^2(u,\lambda)}du.$$

Ora

$$\frac{m+cn^2u}{m-cn^2u} = \frac{2m}{m-cn^2u}-1 = \frac{2m}{m-1+sn^2u}-1$$

$$= \frac{2m}{m-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1-m}sn^2u}-1$$

quindi

$$\gamma = \rho\left\{\frac{2m}{m-1}\cdot\frac{du}{1-\frac{1}{1-m}sn^2u}-du\right\};$$

e per l'identità

$$\frac{1}{1-ksn^2u} = 1+\frac{ksn^2u}{1-ksn^2u}$$

si ha

$$\gamma = \rho\left\{\frac{m+1}{m-1}du-\frac{2m}{(m-1)^2}\cdot\frac{sn^2u}{1-\frac{1}{1-m}sn^2u}du\right\}.$$

Poniamo

$$\frac{1}{1-m} = \lambda^2 sn^2(a,\lambda)$$

si ha

$$m = -\frac{dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)}$$

$$m+1 = \frac{\lambda^2 sn^2(a,\lambda) - dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)} = \frac{2\lambda^2 sn^2(a,\lambda) - 1}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)}$$

$$\frac{m}{(m-1)^2} = -\frac{dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)}\lambda^4 sn^4(a,\lambda)$$

$$= -\lambda^2 sn^2(a,\lambda)\, dn^2(a,\lambda)$$

quindi

$$\gamma = \rho\left\{[1-2\lambda^2 sn^2(a,\lambda)]\,du + 2\,\frac{dn^2(a,\lambda)\, sn^2(a,\lambda)\,\lambda^2 sn^2(u,\lambda)}{1-\lambda^2 sn^2(a,\lambda)\, sn^2(u,\lambda)}\,du\right\}$$

$$= \rho\left\{[1-2\lambda^2 sn^2(a,\lambda)]du + \frac{2sn(a,\lambda)dn(a,\lambda)}{cn(a,\lambda)}\cdot\frac{\lambda^2 sn(a,\lambda)cn(a,\lambda)dn(a,\lambda)sn^2(u,\lambda)}{1-\lambda^2 sn^2(a,\lambda)sn^2(u,\lambda)}du\right\}$$

Analogamente, per γ', si ha:

$$\frac{m - cn^2(u,\lambda)}{m + cn^2(u,\lambda)} = \frac{2m}{m+1-sn^2(u,\lambda)} - 1$$

$$= \frac{2m}{m+1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{1+m}sn^2(u,\lambda)} - 1;$$

e poichè è identicamente

$$\frac{1}{1-ksn^2(u,\lambda)} = 1 + \frac{ksn^2(u,\lambda)}{1-ksn^2(u,\lambda)},$$

si ha

$$\gamma' = \sigma\left\{\frac{m-1}{m+1}du + \frac{2m}{(m+1)^2}\cdot\frac{sn^2(u,\lambda)}{1-\frac{1}{1+m}sn^2(u,\lambda)}du\right\}.$$

Posto

$$\frac{1}{1+m} = \lambda^2 sn^2(b,\lambda)$$

ove b è reale, si ha

$$\gamma' = \sigma\left\{[1-2\lambda^2 sn^2(b,\lambda)]\,du + \frac{2\lambda^2 sn^2(b,\lambda)\, dn^2(b,\lambda)\, sn^2(u,\lambda)}{1-\lambda^2 sn^2(b,\lambda)\, sn^2(u,\lambda)}\,du\right\}$$

$$= \sigma\left\{[1-2\lambda^2 sn^2(b,\lambda)]du + \frac{2sn(b,\lambda)dn(b,\lambda)}{cn(b,\lambda)}\cdot\frac{\lambda^2 sn(b,\lambda)cn(b,\lambda)dn(b,\lambda)sn^2(u,\lambda)}{1-\lambda^2 sn^2(b,\lambda)\, sn^2(u,\lambda)}du\right\}.$$

Ed allora

$$\varphi = \varphi_0 \pm \mathrm{KR}\sigma \left\{ [1 - 2\lambda^2 sn^2(b,\lambda)]\, u + \frac{2sn(b,\lambda)\, dn(b,\lambda)}{cn(b,\lambda)}\, \pi(u,b) \right\}$$

$$= \varphi_0 \pm \mathrm{KR}\sigma \left\{ \left[1 - 2\lambda^2 sn^2 b + \frac{2snb\,dnb}{cnb} \cdot \frac{\theta'(b)}{\theta(b)} \right] u + \frac{snb\,dnb}{cnb} \log \frac{\theta(u-b)}{\theta(u+b)} \right\}$$

e

$$t + \tau = \frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2h}}\, \rho \left\{ \left[1 - 2\lambda^2 sn^2 a + \frac{2sna\,dna}{cna} \cdot \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} \right] u + \frac{sna\,dna}{cna} \log \frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)} \right\}$$

nelle quali b è reale ed a prende valori immaginari puri.

Osservazione. — Dalla relazione

$$\frac{1}{1-m} = \lambda^2 sn^2(a,\lambda) \qquad \text{si ha} \qquad m = -\frac{dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)}$$

e dalla

$$\frac{1}{1+m} = \lambda^2 sn^2(b,\lambda) \qquad \text{si ha} \qquad m = \frac{dn^2(b,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(b,\lambda)};$$

e poichè

$$m = \frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}}$$

ne segue che tra K ed a, K e b esistono le relazioni

$$\frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}} = -\frac{dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)}$$

$$\frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}} = \frac{dn^2(b,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(b,\lambda)}.$$

Ora

$$\lambda^2 = \frac{1}{1+h^2} = \frac{1}{1+\dfrac{m}{n}}$$

$$m = \frac{\mathrm{R}+p+\mathrm{K}}{\mathrm{R}+p-\mathrm{K}}, \qquad n = \frac{p+\mathrm{K}-\mathrm{R}}{\mathrm{K}+\mathrm{R}-p},$$

per cui si hanno le equazioni di relazione:

$$\mathrm{K}^3 - (\mathrm{R}+p)\,\mathrm{K}^2 + (1-2sn^2 a)\,\mathrm{K} - (\mathrm{R}+p) = 0$$
$$\mathrm{K}^3 - (\mathrm{R}+p)\,\mathrm{K}^2 - (1-2sn^2 b)\,\mathrm{K} + (\mathrm{R}-p)(1-2sn^2 b) = 0.$$

Sottocaso 2°.

$$p^2 < \mathrm{K}^2 + \mathrm{R}^2$$

allora

$$n - m = 2 \cdot \frac{p^2 - (\mathrm{K}^2+\mathrm{R}^2)}{\mathrm{R}^2 - (p-\mathrm{K})^2};$$

e poichè il denominatore è >0, si ha $n-m<0$ e quindi $0<\frac{n}{m}<1$ cioè

$$\frac{p^2-(K-R)^2}{(K+R)^2-p^2}=\frac{n}{m}<1.$$

Poniamo $y=\frac{z}{\sqrt{m}}$; si ha

$$g=\frac{1}{\sqrt{R^2-(K-p)^2}}\cdot\frac{2dy}{\sqrt{(1+ny^2)(1-my^2)}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-(K-p)^2}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{\left(1+\frac{z^2}{h^2}\right)(1-z^2)}}.$$

Poniamo $\lambda^2=\frac{h^2}{1+h^2}$ e facciamo la trasformazione $z=cn\,(u,\lambda)$; si ha:

$$g=-\frac{2}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-(K-p)^2}}\cdot\frac{du}{\sqrt{\frac{1+h^2}{h^2}}}$$

$$=-\frac{2du}{\sqrt{m+n}\sqrt{R^2-(K-p)^2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{R^2-(K-p)^2}}{\sqrt{RK}}\,du;$$

e facendo

$$\rho=-\frac{\sqrt{R}\sqrt{R^2-(p-K)^2}}{\sqrt{K}}$$

$$\sigma=-\frac{\sqrt{R^2-(p-K)^2}}{KR\sqrt{K}}$$

si ha

$$\gamma=\rho\cdot\frac{m+cn^2(u,\lambda)}{m-cn^2(u,\lambda)}\,du$$

$$\gamma'=\sigma\cdot\frac{m-cn^2(u,\lambda)}{m+cn^2(u,\lambda)}\,du.$$

Si hanno così forme identiche alle precedenti; quindi

$$\varphi=\varphi_0\pm KR\sigma\left\{\left[1-2\lambda^2sn^2b+\frac{2snbdnb}{cnb}\cdot\frac{\theta'(b)}{\theta(b)}\right]u+\frac{snbdnb}{cnb}\log\frac{\theta(u-b)}{\theta(u+b)}\right\}$$

$$t+\tau=\frac{R\sigma}{\sqrt{h}}\left\{\left[1-2\lambda^2sn^2a+\frac{2snadna}{cna}\cdot\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\right]u+\frac{snadna}{cna}\log\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right\}$$

OSSERVAZIONE.

$$n = -\frac{dn^2(a,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(a,\lambda)} \qquad (a \text{ imaginario})$$

$$m = \frac{dn^2(b,\lambda)}{\lambda^2 sn^2(b,\lambda)} \qquad (b \text{ reale})$$

e però le relazioni tra K ed a, K e b sono analoghe a quelle determinate nel 1° Sottocaso.

SOTTOCASO 3°. — $p^2 = K^2 + R^2$ allora $n - m = 0$ ossia $n = m$ e per $y = \frac{z}{\sqrt{m}}$ si ha

$$g = \frac{2}{\sqrt{m}\sqrt{R^2 - (K-p)^2}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-z^2)}}.$$

Allora

$$\begin{aligned} m\{R^2 - (K-p)^2\} &= \frac{R+p+K}{R+p-K}(R-p+K)(R+p-K) \\ &= (R+K)^2 - p^2 \\ &= 2KR \end{aligned}$$

quindi

$$g = \frac{2}{\sqrt{2KR}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-z^2)}} = \sqrt{\frac{2}{KR}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1-z^2)}}$$

e perciò

$$\gamma = \sqrt{\frac{2K}{R}} \cdot \frac{m+z^2}{m-z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+z^2)}}$$

$$\gamma' = \frac{1}{K}\sqrt{\frac{2}{KR}} \cdot \frac{m-z^2}{m+z^2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1+z^2)}}.$$

Posto $z = cn\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha

$$\begin{aligned} \gamma &= -\sqrt{\frac{K}{R}} \cdot \frac{m + cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{m - cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} du \\ &= \rho \cdot \frac{m + cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{m - cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} du \end{aligned}$$

$$\gamma' = \sigma \cdot \frac{m - cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{m + cn^2\left(u, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} du$$

ove

$$\rho = -\sqrt{\frac{K}{R}}, \qquad \sigma = -\frac{1}{K}\sqrt{\frac{1}{KR}}$$

le quali formule si deducono da quelle dei precedenti sottocasi quando si faccia $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Allora

$$\varphi - \varphi_0 = -\frac{2}{K}\sqrt{2KR}\left\{\left[cn^2 b + \frac{2snbdnb}{cnb}\cdot\frac{\theta'(b)}{\theta(b)}\right]u + \frac{snbdnb}{cnb}\log\frac{\theta(u-b)}{\theta(u+b)}\right\}$$

$$t + \tau = -2\sqrt{\frac{2KR}{h}}\left\{\left[cn^2 a + \frac{2snadna}{cna}\cdot\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}\right]u + \frac{snadna}{cna}\log\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right\}.$$

Osservazione. — Le relazioni fra K ed a, K e b sono:

$$m = -\frac{dn^2\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2cn^2\left(a, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$n = \frac{dn^2\left(b, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2cn^2\left(b, \frac{1}{\sqrt{1}}\right)}.$$

G. Repetto.

(Continua).

LE TRASFORMAZIONI PEDALI ED ANTIPEDALI, NEL PIANO E NELLO SPAZIO

I.

Dati un piano π un punto fisso P ed una curva Γ, proiettando ortogonalmente O sulle tangenti di Γ si ottengono infiniti punti, i quali costituiscono una curva Π che chiamasi *pedale* (o *podaria*) di O rispetto a Γ e che, a partire dal Maclaurin, fu oggetto di svariate indagini. [1] Tenendo fisso O e variando Γ nasce così un procedimento

[1] Cfr. l'opera dell'A. *Spezielle algebr. und transscendente ebene Kurven* (Leipzig, 1902), p. 672-685.

per mutare ogni curva del piano considerato in altra, il quale, come osservò S. Lie, (¹) rientra nella grande categoria delle trasformazioni di contatto.

Inversamente, se, i dati essendo gli stessi, si unisce O ad un punto qualunque P della curva Γ e si conduce da P la perpendicolare alla retta OP, si ottengono infinite rette, il cui inviluppo è una curva $\overline{\Pi}$, che, evidentemente, ha per pedale la curva proposta e che, per tal ragione, porta il nome di *antipedale* (o *antipodaria*) di Γ rispetto O. Tale costruzione dell'antipedale è così semplice che l'Ameseder potè col suo mezzo stabilire un buon numero di proprietà eleganti delle antipedali delle curve algebriche. (²)

Non ostante tali ripetute investigazioni, se non c'inganniamo, l'intima natura delle due trasformazioni pedale ed antipedale venne trascurata da coloro che sino ad ora le studiarono e ciò perchè tutti le considerarono soltanto *come agenti sopra gli elementi di una determinata curva e non su tutte le rette e tutti punti del piano in cui si opera.* Ora, quando si considerano da questo secondo punto di vista, si giunge con la massima facilità a provare che esse appartengono ad un tipo di corrispondenze che L. Cremona rese famigliari a tutti.

Per giungere a tale risultato nel modo più semplice, prendiamo il punto fisso O per origine di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e indichiamo con x, y le coordinate del piede della perpendicolare calata da O sulla retta di coordinate plückeriane ξ, η. In grazia di notissime formole, si trova subito la seguente coppia di relazioni:

$$x = -\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad y = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} \tag{1}$$

le quali dànno evidentemente la rappresentazione analitica della trasformazione pedale; risolvendole rispetto a ξ, η si ottengono queste altre formole

$$\xi = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \eta = -\frac{y}{x^2+y^2}, \tag{2}$$

che costituiscono la rappresentazione analitica della trasformazione antipedale. Le (1), (2) mostrano che fra le rette ed i punti del piano π passa una corrispondenza cremoniana quadratica. Per meglio determinarla supponiamo che il punto P (x, y) descriva la retta $\Xi x + \mathrm{H} y + 1 = 0$; in forza delle (1) si deduce che la corrispondente retta r inviluppera la conica

$$\Xi\xi + \mathrm{H}\eta - (\xi^2+\eta^2) = 0 \tag{3}$$

(¹) Vedi S. Lie e G. Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, T. I (Leipzig, 1896), p. 17.

(²) Veggasi l'articolo *Theorie de negativen Fusspunktkurven* (Archiv Mathematik, T. LXIV, 1879, p. 164-170).

ossia (in coordinate cartesiane)

$$\frac{\Xi x + \mathrm{H}y + 2}{\sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}; \tag{3'}$$

invece, se la retta r ruota attorno al punto Q di coordinate x, y, il corrispondente punto P descriverà la conica

$$\mathrm{X}x + \mathrm{X}y - (x^2 + y^2) = 0. \tag{4}$$

Ora l'equazione (3') rappresenta la conica luogo de' punti equidistanti dal punto O e dalla retta $\Xi x + \mathrm{H}y + 2 = 0$, cioè la parabola che ha O per fuoco e per direttrice la retta $\Xi x + \mathrm{H}y + 1 = 0$, donde si è partiti; dunque nel piano rigato il sistema omaloidico è costituito da tutte le parabole col fuoco in O. Invece la (4), scritta sotto la forma

$$\left(x - \frac{\mathrm{X}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mathrm{Y}}{2}\right)^2 = \frac{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2}{4}, \tag{4'}$$

rappresenta il circolo avente per diametro il segmento OQ; ciò prova che nel piano punteggiato il sistema omaloidico consta dei circoli passanti pel punto O.

La Jacobiana del primo sistema è una curva di terza classe, degenerata nel punto O e nei punti ciclici del piano I, J; invece la Jacobiana del secondo sistema è una curva di terz'ordine formata dalla retta all'infinito del piano e dai raggi ciclici OI, OJ.

Ricordando le note relazioni che intercedono fra due curve che si corrispondono in una trasformazione quadratica tra due piani, si ottengono senza stento i risultati seguenti:

I. L'antipedale di una curva algebrica d'ordine n non passante per il polo nè pei punti ciclici è in generale una curva di classe $2n$, avente per tangenti n-ple la retta all'infinito ed i raggi ciclici uscenti dall'origine; se la curva primitiva ha d punti doppi e c cuspidi, l'antipedale avrà d tangenti doppie e c flessi; le altre caratteristiche dell'antipedale si ottengono applicando le formole di Plücker. Infatti dalla formola che dà l'ordine in funzione della classe e dei numeri delle tangenti doppie e dei flessi si deduce per l'ordine n' dell'antipedale:

$$n' = 2n(2n-1) - 2\left(3\frac{n(n-1)}{2} + d\right) - 3c$$

cioè

$$n' = n^2 + n - (2d + 3c);$$

ma la classe ν della curva Γ è data da

$$\nu = n(n-1) - (2d + 3c)$$

dunque

$$n' = 2n + \nu$$

cioè " l'ordine dell'antipedale di una curva algebrica è eguale alla classe aumentata del doppio dell'ordine di questa ". Per trovare i numeri d', c' dei punti doppi e delle cuspidi dell'antipedale, applichiamo la formola che dà la classe in funzione dell'ordine, ecc., e scriviamo che l'antipedale è dello stesso genere della curva di partenza; otterremo

$$2d' + 3c' = (2n + \nu)(2n + \nu - 1) - 2n,$$
$$2d' + 2c' = (2n + \nu - 1)(2n + \nu - 2) - \nu + 2n - c - 2$$

da cui anzitutto segue, sottraendo,

$$c' = 2\nu + c,$$

e poi

$$d' = \frac{(2n + \nu)(2n + \nu - 1)}{2} - n - 3(3\nu + c).$$

Supponiamo ad esempio che si tratti di una curva razionale esente da punti di regresso: sarà allora $d = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ e $c = 0$; quindi $\nu = 2(n-1)$ epperò $c' = 6(n-1)$ e $d' = 4(n-1)(2n-3)$, risultati ottenuti già dall'Ameseder, il quale però li credette sussistere per una curva razionale *qualunque*, mentre per la loro validità si esige che la curva di partenza sia esente da cuspidi (ad es. se la curva Γ avesse c cuspidi, il numero delle cuspidi dell'antipedale scenderebbe $6(n-1)-2c$). Allorquando, contrariamente alle ipotesi sin quì fatte, la curva Γ passa h volte per il polo e k volte per ciascun punto ciclico, l'antipedale è della classe $2n - (2h + k)$, ha la retta all'infinito per tangente multipla secondo $n - 2k$ e ciascuno dei raggi ciclici OI, OJ per tangente multipla secondo $n - (h + k)$, O ne è quindi un fuoco di molteplicità $[n - (h + k)]^2$.

Esempio. — Se Γ è un'ellisse di centro O, l'antipedale è la *curva di Talbot*, curva (razionale) di sest'ordine e quarta classe, fornita di sei cuspidi e quattro punti doppi, bitangente tanto alla retta all'infinito del piano, quanto ai raggi ciclici uscenti dal punto O. Delle stesse proprietà gode l'antipedale di una conica rispetto ad un punto qualunque del suo piano; ma se il polo sta sulla curva l'antipedale è soltanto di terza classe, mentre se la conica è un cerchio l'antipedale è una conica e riducesi ad un punto se O vi appartiene (cosa geometricamente evidente).

2. La pedale rispetto al polo O di una curva Γ di classe ν, avente la retta all'infinito per tangente ι-pla e O per fuoco $\varkappa^2$-plo, è una curva dell'ordine $2\nu - (\iota + 2\varkappa)$ avente O per punto multiplo secondo $\nu - (\iota + \varkappa)$ volte per ciascun punto ciclico. Nell'ipotesi che sia $\iota = \varkappa = 0$ e che Γ sia generale come inviluppo, la pedale è del genere $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ ed ha O, I, J per punti ν-pli; essa quindi è della classe $\nu(\nu+1)$ e possiede $3\nu(\nu-1)$ flessi e $\nu(\nu-1)(\nu^2+3\nu-6)$ bitangenti. (1)

Notiamo da ultimo che l'ordine dell'antipedale e la classe della pedale si potrebbe anche ottenere come corollari dell'equazione tangenziale della prima e locale della seconda, da stabilirsi con procedimenti del tutto analoghi a quelli che nel seguente § verranno usati per risolvere le questioni corrispondenti nello spazio.

II.

Le considerazioni ed i calcoli precedenti si possono generalizzare allo spazio ordinario (anzi si potrebbero estendere ad uno spazio euclideo ad un numero qualunque di dimensioni). Dato, infatti, un punto fisso O, si può stabilire fra i punti ed i piani dello spazio una corrispondenza univoca associando ad ogni piano π il piede P della perpendicolare calata su di essa da O e ad ogni punto P il piano π condotto da P perpendicolarmente alla retta OP. In conseguenza se il piano π inviluppa una superficie Σ, il punto corrispondente descriverà una superficie Π, che dicesi *pedale* (o *podaria*) di O, mentre se P descrive una superficie il piano corrispondente π inviluppera una superficie $\overline{\Pi}$ di cui la data è la pedale e che perciò chiamasi *antipedale* (o *antipodaria*) della data rispetto al polo O.

Le formole che legano le coordinate cartesiane ortogonali x, y, z del punto P alle coordinate plückeriane ξ, η, ζ del piano che gli corrisponde sono, quando si assuma O per origine,

$$x=-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ y=-\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2},\ z=-\frac{\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \quad (5)$$

da cui si traggono queste altre:

$$\xi=-\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ \eta=-\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ \zeta=-\frac{z}{x^2+y^2+z^2}; \quad (6)$$

quelle definiscono analiticamente la *trasformazione pedale* nello spazio, queste la *trasformazione antipedale*. (2) Da le une o le altre emerge

---

(1) Cfr. EM. WEYR, *Costruction des Krümmungskreises für Fusspunktcurven.* (Wiener Ber. T. LIX, 1869), p. 169-177.

(2) Il lettore noterà certamente la somiglianza di queste formole con quelle della trasformazione per raggi vettori reciproci di centro O e potenza 1

$$x'=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\ y'=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\ z'=\frac{z}{x^2+y^2+z^2};$$

la stessa osservazione vale naturalmente anche pel piano.

che si è in presenza di una trasformazione quadratica univoca fra i punti ed i piani dello spazio. Per determinarla con maggior precisione supponiamo che il punto (x, y, z) descriva il piano di equazione $\Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z + 1 = 0$; il punto corrispondente invilupperà allora la superficie di equazione

$$\Xi\xi + \mathrm{H}\eta + \mathrm{Z}\zeta - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0; \tag{7}$$

mentre se il piano (ξ, η, ζ) ruota attorno al punto $Q(X, Y, Z)$ il punto che gli corrisponde descriverà la superficie di equazione

$$Xx + Yy + Zz - (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Sono queste le equazioni dei due sistemi omaloidici risp. dello spazio di piani e dello spazio di punti.

Ora la quadrica (7) ha la seguente equazione locale

$$\frac{\Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z + 2}{\sqrt{\Xi^2 + \mathrm{H}^2 + \mathrm{Z}^2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \tag{7'}$$

mentre la (8) si può scrivere

$$\left(x - \frac{X}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{Y}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{Z}{2}\right)^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{4}. \tag{8'}$$

Perciò nello spazio di piani le superficie del relativo sistema omaloidico sono quadriche di rivoluzione (precisamente la quadrica relativa al piano $\Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z + 1 = 0$ è il luogo de' punti equidistanti da O e dal piano $\Xi x + \mathrm{H} y + \mathrm{Z} z + 2 = 0$), mentre nello spazio di punti il sistema omaloidico consta delle sfere passanti per O (in particolare al punto Q corrisponde la sfera di diametro OQ). La Jacobiana del primo sistema è una superficie di quarta classe degenerata nel cerchio immaginario all'infinito e nel punto O contano due volte; invece la Jacobina dell'altro è una superficie di quart'ordine costituita dal piano all'infinito contato due volte e dalla sfera di centro O e raggio zero. Con ciò la struttura di quei due sistemi può dirsi pienamente conosciuta.

Le formole (4) e (6) permettono di trovare subito l'equazione locale della pedale di una superficie di nota equazione tangenziale e l'equazione tangenziale della antipedale di una superficie di nota equazione locale; se ne deduce che l'ordine di Π è in generale eguale al doppio della classe di Σ, mentre la classe di $\overline{\Pi}$ è in generale al doppio del suo ordine; inoltre il cerchio immaginario all'infinito è per Π multiplo di un grado eguale alla classe di Σ, ecc. Così, se è dato l'elissoide rappresentato in coordinate cartesiane e plückeriane risp. dalle equazioni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad (9) \qquad a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1 = 0 \quad (10)$$

si vede subito che, rispetto al suo centro (origine) come polo, esso ha per pedale e antipedale la superficie rappresentata dalla prima e dalla seconda delle equazioni seguenti:

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-(x^2+y^2+z^2)^2=0, \quad (11) \qquad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=0. \quad (12)$$

La ricerca dell'equazione locale dell'antipedale evidentemente non differisce da quella dell'inviluppo del piano

$$\xi x+\eta y+\zeta z+1=0 \tag{13}$$

i parametri ξ, η, ζ essendo legati dalla relazione (12); potremo quindi applicare il noto metodo dei moltiplicatori di Lagrange e ridurre la questione all'eliminazione di ξ, η, ζ, fra le equazioni (12), (13) e le tre seguenti:

$$x+2\lambda\xi\left\{\frac{1}{a^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}=0, \quad y+2\lambda\eta\left\{\frac{1}{b^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}=0,$$
$$z+2\lambda\zeta\left\{\frac{1}{c^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}=0.$$

Ora, moltiplicando queste equazioni risp. per ξ, η, ζ e sommando, tenendo poi conto delle (12), (13) si deduce essere

$$2\lambda=-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},$$

epperò le tre equazioni precedenti divengono

$$\begin{gathered}x=\frac{\xi}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\left\{\frac{1}{a^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}, \quad y=\frac{\eta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\left\{\frac{1}{b^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\},\\ z=\frac{\zeta}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}\left\{\frac{1}{c^2}-2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\}\end{gathered} \tag{14}$$

e si è ridotti ad eliminare ξ, η, ζ fra le equazioni (12), (14). A tale scopo poniamo

$$\theta=\frac{1}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \tag{15}$$

ed avremo invece delle (14) le relazioni seguenti

$$x=\theta\xi\left(\frac{\theta}{a^2}-2\right), \quad y=\theta\eta\left(\frac{\theta}{b^2}-2\right), \quad z=\theta\zeta\left(\frac{\theta}{c^2}-2\right). \tag{16}$$

Sostituiamo nella (13) i valori di ξ, η, ζ che ne risultano ed otterremo:

$$\frac{x^2}{\frac{\theta}{a^2}-2}+\frac{y^2}{\frac{\theta}{b^2}-2}+\frac{z^2}{\frac{\theta}{c^2}-2}+\theta=0; \tag{17}$$

se invece teniamo conto della (12) avremo quest'altra relazione:

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{\theta}{a^2}-2\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{\theta}{b^2}-2\right)^2}+\frac{z^2}{c^2\left(\frac{\theta}{c^2}-2\right)^2}-1=0; \tag{18}$$

tutto è ridotto ad eliminare θ fra le due ultime equazioni scritte e fra i due ad esse equivalenti.

Ora la (18) non è che la derivata rispetto a θ della (17); quindi l'equazione cercata altro non è che quella che nasce eguagliando a zero il discriminante della (17). Pongasi pertanto:

$$\begin{cases} a_0=6 \\ a_1=-3\,(a^2+b^2+c^2) \\ a_2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+4\,(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) \\ a_3=-3\,[a^2(b^2+c^2)\,x^2+b^2(c^2+a^2)y^2+a^2(a^2+b^2)\,z^2+4\,a^2b^2c^2] \\ a_4=24\,a^2b^2c^2\,(x^2+y^2+z^2) \end{cases} \tag{19}$$

e si vedrà che la detta equazione si scrive come segue:

$$(a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2)^3-27\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}^2=0. \tag{20}$$

Questa è apparentemente di 12° grado nelle coordinate x, y, z, ma si abbassa al 10° per la mutua elisione dei due termini $\pm 27\,a_2^6$; è degno di nota che A. Cayley, (¹) partendo da altri principi, ha pure ridotta la ricerca dell'equazione locale dell'antipedale alla determinazione del discriminante di una forma binaria biquadratica.

Ma possiamo aggiungere un'osservazione non priva d'interesse. Dette ξ, η, ζ le coordinate plückeriane del piano tangente nel punto (x, y, z) della pedale (11) si trova subito essere

$$\xi=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\{a^2-2(x^2+y^2+z^2)\},\quad \eta=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\{b^2-2(x^2+y^2+z^2)\}, \tag{21}$$

$$\zeta=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\{c^2-2(x^2+y^2+z^2)\}.$$

Ora queste differiscono dalle (14) per lo scambio di ξ, η, ζ risp. in x, y, z e di a^2, b^2, c^2 nei loro inversi; ne viene che l'equazione tangenziale della pedale — che è il risultato dell'eliminazione di x, y, z fra le equazioni (11) e (21) — nasce dalla equazione (20) locale dell'antipedale eseguendo in questa i detti scambi. Quell'equazione è

(¹) Cfr. la nota *Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculairement aux rayons ménés par le centre* (Annali di Matem., T. 2, 1859, p. 3-14, oppure Mathematical Papers, T. IV, p. 123-133).

dunque ancora la (20), purchè alle quantità a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 si attribuiscano i valori seguenti:

$$\begin{cases} a_0 = 6\, a^2b^2c^2 \\ a_1 = -3\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) \\ a_2 = b^2c^2\xi^2 + c^2a^2\eta^2 + a^2b^2\zeta + 4\,(a^2 + b^2 + c^2) \\ a_3 = -3\,[(b^2 + c^2)\,\xi^2 + (c^2 + a^2)\,\eta^2 + (a^2 + b^2)\,\zeta^2 + 4] \\ a_4 = 24\,(\xi^2 + \eta^2 + \zeta). \end{cases}$$

Emerge da ciò che le proprietà projettive della pedale considerata come luogo non differiscono da quelle dell'antipedale considerata come inviluppo e viceversa. Ora non è questa una prerogativa dell'ellissoide, e delle quadriche in genere, ma è un fatto che si riscontra sulle pedali ed antipedali delle superficie algebriche qualunque, come passiamo a dimostrare.

Sia

$$f\,(x, y, z, t) = 0$$

l'equazione di una superficie di ordine n, ove x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali e t si è introdotta per l'omogeneità; sia similmente:

$$\varphi\,(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0$$

l'equazione tangenziale di una superficie di classe ν, ove ξ, η, ζ sono coordinate plückeriane di un piano e τ serve per conseguire l'omogeneità delle formole. L'equazione tangenziale dell'antipedale della prima sarà, in virtù delle (5),

$$f\,(-\xi,\ -\eta,\ -\zeta,\ \ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0 \tag{22}$$

mentre l'equazione locale della pedale della seconda sarà, grazie alle (6),

$$\varphi\,(-x,\ -y,\ -z,\ \ x^2 + y^2 + z^2) = 0. \tag{23}$$

Ora se con $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right), \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)$, si indicano i valori assunti dalle quattro derivate parziali della funzione φ, quando a ξ, η, ζ, τ si sostituiscano risp. i valori $-x, -y, -z, x^2 + y^2 + z^2$, si trova subito che le le coordinate plückeriane Ξ, H, Z del piano che tocca la pedale considerata nel punto (x, y, z) sono date dalle formole seguenti:

$$\Xi = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) - 2x\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)}{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)},\quad \mathrm{H} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) - 2y\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)}{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)},\quad \mathrm{Z} = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) - 2z\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)}{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)}; \tag{24}$$

emerge da ciò che l'equazione tangenziale della pedale si ottiene eliminando x, y, z fra le equazioni (23), (24).

D'altronde l'equazione locale dell'antipedale si ottiene cercando l'inviluppo del piano

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0$$

quando ξ, η, ζ variano soddisfacendo sempre all'equazione (22). Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso attuale dà le seguenti equazioni:

$$x + y\left\{-\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\xi\right\} = 0,\quad y + \lambda\left\{-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\eta\right\} = 0,$$

$$z + \lambda\left\{-\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)\zeta\right\} = 0, \tag{25}$$

ove, analogamente a quanto si praticò prima, con $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)$, $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)$ si designarono i valori assunti dalle quattro derivate prime della funzione f quando a x, y, z, t si sostituiscono risp. $-\xi, -\eta, -\zeta, \xi^2 + \eta^2 + \xi^2$. Ora moltiplicando quelle equazioni risp. per ξ, η, ζ e sommando si trova, tenendo conto delle equazioni (25), (22)

$$\lambda = \frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}.$$

Tale valore sostituito nelle equazioni precedenti fa assumere ad esse l'aspetto seguente

$$X = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)},\quad Y = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - 2\eta\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)},\quad Z = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)}. \tag{26}$$

L'equazione locale dell'antipedale è il risultato dell'eliminazione di ξ, η, ζ fra le equazioni (22), (26); ora quando le funzioni f, φ non differiscono che per i valori dei relativi coefficienti numerici, questa operazione è identica a quella che vedemmo necessaria per giungere all'equazione tangenziale della superficie pedale: gli è ciò che riscontrammo nell'elissoide e che resta esteso (assieme alle conseguenze che ne derivano) a tutte le superficie algebriche.

III.

È stata anche considerata nel piano [1] la trasformazione in virtù di cui ad ogni tangente di una curva è associato il simmetrico ri-

---

[1] V. la succitata opera dell'A., p. 685.

spetto alla stessa di un punto fisso del piano della curva. Similmente nello spazio si può associare al piano tangente in punto di una data superficie il simmetrico rispetto a tale piano di un punto fisso dello spazio. Ora è chiaro che tale nuova trasformazione, al pari della trasformazione pedale, *non è connessa alla considerazione di una curva o superficie speciale, ma esercita la propria azione su tutti gli elementi del piano o dello spazio.* Le coordinate (x, y, z) (ξ, η, ζ) di due elementi corrispondenti sono legati dalle relazioni seguenti

$$x = -\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad y = -\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}, \quad z = -\frac{2\zeta}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$$

oppure da queste altre che ne derivano

$$\xi = -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad \eta = -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \quad \zeta = -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Questa nuova trasformazione può evidentemente ottenersi combinando una trasformazione pedale con un'omotetia di centro O e rapporto 2. Le sue proprietà sono dunque analoghe a quelle della trasformazione pedale e la generalità dei calcoli precedenti possono adattarsi a questa nuova trasformazione, come il lettore riconoscerà senza fatica.

GINO LORIA.

DI UNA GENERAZIONE DEL COMPLESSO TETRAEDRALE

L'oggetto di cui mi occuperò in queste brevi ricerche, è un noto sistema di rette detto *complesso tetraedrale*; esso fu studiato per primo dal Reye, ed in seguito da molti altri geometri, i quali ne enunciarono i vari metodi di generazione e ne ritrovarono le interessanti proprietà

Tra le principali generazioni, di cui farò breve cenno, a titolo di prefazione, si può considerare come fondamentale e più elementare, quella che si ha congiungendo i punti corrispondenti di due sistemi collineari di uno stesso spazio a tre dimensioni; essa fu data dal Reye assieme alla sua duale. Un'altra costruzione, suscettibile di esser trasformata mediante la legge di dualità fu ritrovata dal Müller e si ottiene dal sistema di tutte le rette che segano una quaterna di piani (facce d'un tetraedro) secondo un data birapporto. È ancora un complesso tetraedrale quello che si può ottenere da due fasci di raggi projettivi non concentrici nè complanari, come insieme di tutte le congruenze determinate da ciascuna coppia di raggi corrispondenti. Infine, e questo interessa maggiormente il mio lavoro, il complesso accennato si può ottenere nel seguente modo: si considerino due cubiche sghembe passanti per quattro punti (vertici d'un tetraedro) ed aventi in comune una rigata (od un cono del secondo ordine) e si fissi una secante ad esse comune: il sistema di tutte le cubiche, che passano per i quattro punti dati, ed hanno per secante la retta data, determina una tripla infinità di corde, la quale costituisce un complesso tetraedrale.

I quattro punti ora trovati sono i punti uniti di ogni omografia mediante la quale si può costruire il complesso: il quale è determinato così dalle due cubiche di cui si è detto, come dal tetraedro (fondamentale) e da un suo raggio, non passante per alcun vertice, nè situato su alcuna faccia del tetraedro stesso: anzi la denominazione data al complesso deriva da questa proprietà.

Ciò posto farò vedere, come alla generazione mediante cubiche sghembe, si possa ridurre il seguente metodo costruttivo che forma oggetto dei miei ragionamenti:

Si considerino due stelle reciproche di centri S_1 ed S_2: ogni punto P dello spazio Σ, in cui si suppongono collocate le due stelle, determina due raggi S_1P, S_2P, ai quali corrisponde una coppia di piani intersecantisi in una certa retta a. In tale modo ad ogni punto P di Σ è associata una retta a: il sistema di queste rette è un complesso tetraedrale.

Difatti mentre il punto P descrive un piano generico π, le coppie di piani che determinano la retta a associata a P, si corrispondono in una omografia tra le due stelle (S_1) ed (S_2): in modo che tutte le rette a associate ai punti di π sono corde di una cubica $C^{(3)}$ passante per S_1 e per S_2. Tale cubica la dirò *associata* al piano π.

Ora è facile vedere che la $C^{(3)}$ passa per altri due punti fissi oltre S_1 ed S_2. Infatti un punto di $C^{(3)}$ è tale che i piani corrispondenti alle due rette che lo proiettano da S_1 e da S_2 si tagliano su π: e reciprocamente ogni retta di π determina con S_1 ed S_2 due piani le cui rette corrispondenti, ove s'incontrino, determinano un punto di $C^{(3)}$. Ora detta s la retta S_1S_2, ogni piano del fascio (S) proietta tanto da S_1 che da S_2 una retta di π: i due raggi corrispondenti a questo piano, che in generale non sono incidenti, giacciono rispettivamente nei piani σ_1 e σ corrispondenti ad s. Facendo descrivere ad un piano, tutto il fascio (s) le coppie di raggi corrispondenti formano due fasci proiettivi: se la reciprocità non è degenere vi sono due sole coppie $m_1\,m_2$, $n_1\,n_2$ che sono tra loro incidenti: i punti d'incontro M, N stanno sulla retta $r\equiv(\sigma_1\,\sigma_2)$; per essi passa la cubica $C^{(3)}$.

Il ragionamento fatto, indipendente dalla posizione particolare di π, mostra che un'altra cubica $C_1^{(3)}$ associata ad un piano π_1, generico, distinto da π passa ancora per i quattro punti S_1S_2MN: e ci si persuade facilmente che le due cubiche hanno in comune una rigata, (od un cono del secondo ordine), associata ai punti della retta d'intersezione di π con π_1.

Fissiamo ora un punto generico di questa intersezione: resterà fissata una secante comune a $C^{(3)}$ ed a $C_1^{(3)}$: facciamo variare un piano intorno a questo punto in modo da esaurire tutti i punti di Σ; allora le cubiche associate, passeranno sempre per i punti fissi ed avranno per secante la retta che abbiamo determinata: in tale modo la generazione del sistema delle rette a si è ricondotta ad una delle note generazioni del complesso tetraedrale.

Quello che ci resta ancora da vedere, si è come per *ogni* complesso determinato da un tetraedro reale e da un suo raggio sia possibile la costruzione mediante stelle reciproche: esso costituisce la parte principale delle mie ricerche, ed ora la esporrò sistematicamente in quello che segue.

1. Sia dato un complesso k mediante un tetraedro reale ed una delle sue rette; vogliamo determinare una reciprocità la quale generi nel modo indicato, il complesso stesso. A tenore delle considerazioni precedenti, sappiamo che i centri delle due stelle devono essere due vertici del tetraedro: abbiamo perciò sei coppie tra cui scegliere i punti S_1, S_2; presane una ad arbitrio, siano M, N, gli altri due vertici, σ_1, σ_2 i piani S_1MN, S_2MN, ed s, m_1, m_2, n_1, n_2, r, rispettivamente gli spigoli S_1S_2, S_1M, S_2M, S_1N, S_2N, MN, come fu fatto nelle notazioni precedenti. Come appare dai ragionamenti già seguìti, i piani $\sigma_1\,\sigma_2$ devono nella cercata reciprocità corrispondere alla retta s, e le coppie m_1m_2, n_1n_2, sono quelle coppie corrispondenti a piani del fascio (s), che sono tra loro incidenti. Ora non è difficile rilevare, che detti μ e ν questi due piani, deve essere $\mu \equiv (m_1m_2)$, $\nu \equiv (n_1n_2)$. Infatti se si considera la proiettività nella quale ad una retta di σ_1 corrisponde l'intersezione del piano corrispondente con σ_2, e si indicano con r_1r_2, s_1s_2, le coppie incidenti, è facile persuadersi che, come ad r_1 corrisponde il piano r_2s, così ad $r_2 \equiv [r_2s,\ \sigma_2]$ corrisponde il piano r_1s cioè r_1r_2 stesso. Si conclude dunque che r_1r_2, s_1s_2, devono rispettivamente coincidere colle coppie m_1m_2, n_1n_2.

2. Riassumendo i risultati precedenti, possiamo asserire che tra la stella (S_1) e la stella (S_2) devono risultare le seguenti corrispondenze:

$$\begin{matrix} s & \sigma_1 & m_1 & \mu & n_1 & \nu \\ \sigma_2 & s & \mu & m_2 & \nu & n_2. \end{matrix} \tag{1}$$

Ora è facile vedere che affinchè esse resultino soddisfatte è sufficiente porre:

$$\begin{matrix} s & m_1 & n_1 \\ \sigma_2 & \mu & \nu \end{matrix} \tag{2}$$

e siccome i tre elementi $s\, m_1\, n_1$ ed i corrispondenti non sono situati in una stessa forma di prima specie, per stabilire una reciprocità tra le due stelle, rimane ancora l'arbitrarietà di far corrispondere ad un elemento, retta o piano di (S_1) l'elemento reciproco di (S_2): dobbiamo ora usare di questa arbitrarietà in modo che la reciprocità risultante generi il complesso K, determinato dal tetraedro S_1S_2MN, e da una sua retta, che dirò a.

3. Proiettiamo perciò la retta a da S_1 e da S_2 e siano p e q le rette d'intersezione dei piani proiettanti, rispettivamente con σ_1 e con σ_2. Consideriamo una reciprocità in cui verificandosi le corrispondenze (2) a p corrisponda un generico piano π del fascio (S) che tagli σ_2 in una retta p'.(¹) Tra le rette di σ_1 e le intersezioni dei piani corrispondenti con σ_2 risultano allora poste le seguenti corrispondenze:

$$\begin{matrix} m_1 & n_1 & p \\ m_2 & n_2 & p'. \end{matrix}$$

Indichiamo con q' la retta di σ_1 cui corrisponde q e sia cioè q' corrispondente nella reciprocità al piano sq e quindi q corrispondente ad sq'. È facile vedere che se q' e p' non sono incidenti la reciprocità non può generare il complesso K: difatti i piani proiettanti a passano per p e per q: le rette corrispondenti devono giacere in sp' ed sq' e quindi non possono incontrarsi; il che deve avvenire.

Bisognerà quindi disporre dell'arbitrarietà di π in modo che risulti p' incidente a q'.

4. Facciamo perciò variare π tenendo fisso p, e denominiamo $p''\, p'''\, p^{\text{v}} \ldots$ le altre sue intersezioni con σ_2, $q''\, q'''\, q^{\text{v}} \ldots$ le rette a cui risulta allora corrispondente q. Si avrà allora:

$$\begin{matrix} m_1\; n_1\; p\; q' \barwedge m_2\; n_2\; p'\; q \\ m_1\; n_1\; p\; q'' \barwedge m_2\; n_2\; p''\; q \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

ed indicando colle maiuscole corrispondenti, le intersezioni di queste rette con r:

$$\begin{matrix} M\; N\; P\; Q' \barwedge M\; N\; P'\; Q \\ M\; N\; P\; Q'' \barwedge M\; N\; P''\; Q \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

Ma per una nota legge si ha:

$$M\; N\; P'\; Q \barwedge N\; M\; Q\; P',$$

quindi:

$$M\; N\; P\; Q' \barwedge N\; M\; Q\; P',$$

d analogamente

$$M\; N\; P\; Q'' \barwedge N\; M\; Q\; P''$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

(¹) Che vi siano delle reciprocità in cui verificandosi le corrispondenze (2) a p corrisponde π, assai semplice rilevare: anzi ve ne sono infinite, bastando, per averne una, aggiungere alle (2) corrispondenza di una retta qualunque di π passante per S_2, eccettuate s e la retta $\pi\sigma_1$, al ano S_1p; come si vedrà anche in seguito (v. numero 5).

Risulta allora che se noi stabiliamo una proiettività facendo corrispondere ai tre elementi N M Q i tre elementi M N P, in essa si corrispondono le coppie P′Q′, P″Q″, P‴Q‴,... Questa proiettività è una involuzione, perchè M ed N si corrispondono in doppio modo: se indichiamo con R, S, i suoi elementi doppi si avrà:

$$\mathrm{M\ N\ P\ R} \barwedge \mathrm{N\ M\ Q\ R};$$

e siccome è

$$\mathrm{N\ M\ Q\ R} \barwedge \mathrm{M\ N\ R\ Q},$$

risulterà:

$$\mathrm{M\ N\ P\ R} \barwedge \mathrm{M\ N\ R\ Q}$$

ed indicando con $r_1\, r_2$ le rette $\mathrm{S_1R}$, $\mathrm{S_2R}$:

$$m_1\ n_1\ pr_1 \barwedge m_2\ n_2\ r_2\ q.$$

Cioè se a p si fa corrispondere il piano sr_2, risulterà a q corrispondente il piano sr_1 cioè lo stesso $sr_2 \equiv r_1r_2 \equiv s\mathrm{R}$. Diciamo ρ e σ i due piani $s\mathrm{R}$ ed $s\mathrm{S}$.

5. Stabiliamo ora definitivamente la nostra reciprocità aggiungendo alle corrispondenze (2), quella del piano $\mathrm{S_1}a \equiv \mathrm{S_1}p$, ad una retta l qualunque di ρ passante per $\mathrm{S_1}$ fatta eccezione per s e per r_2: che la reciprocità sia determinata, lo prova il fatto che i quattro elementi $s\ m_1\ n_1\ (\mathrm{S_1}a)$ e i loro corrispondenti, sono indipendenti tra loro, se si suppone, come è necessario, che la retta non passi per alcun vertice, nè sia situata su alcuna faccia del tetraedro: ed inoltre mai tre di essi appartengono ad una stessa forma di prima specie. Ora questa reciprocità genera il complesso dato. Infatti le corrispondenze (2) ne dicono che il complesso ha per tetraedro $\mathrm{S_1\,S_2\,M\,N}$: e inoltre, come risulta immediatamente dal considerare la 4ª coppia, a p corrisponde il piano ρ e quindi (4) esso corrisponde anche a q. Allora il piano $\mathrm{S_2}q$ proiettante a, ha per corrispondente una retta di ρ che è quindi incidente ad l.

Il complesso, generato dalla data reciprocità possiede anche la retta a e quindi non può essere distinto da quello assegnato.

6. Riassumendo possiamo enunciare:

I. *Vi sono sei coppie di stelle reciproche, generanti un complesso determinato da un tetraedro reale e da un suo raggio.*

II. *Vi sono infinite reciprocità generanti lo stesso complesso, ed i cui centri sono due assegnati vertici del tetraedro* $\mathrm{S_1}$ *ed* $\mathrm{S_2}$: *in queste reciprocità, un piano di* $\mathrm{S_1}$ *proiettante una retta del complesso, ha per corrispondenti due fasci di raggi situati in due piani* ρ *e* σ *passanti per* $\mathrm{S_1\,S_2}$: *escluso lo spigolo stesso e le rette d'intersezione dei piani colla faccia del tetraedro passante per* $\mathrm{S_2}$ *e che non contiene questo spigolo.*

A questi enunciati possiamo aggiungere la seguente:

Osservazione. — *I piani* ρ *e* σ *possono non esser reali.*

7. Proponiamoci ora di togliere questa restrizione, la quale compromette in parte i risultati ottenuti; perciò ricordiamo che i piani ρ e σ saranno o no reali assieme (4) ai punti doppi della involuzione:

$$\mathrm{M\ N\ P\ Q'\ Q''} \ldots, \ \mathrm{\Lambda\ N\ M\ Q\ P'\ P''} \ldots,$$

cioè quindi secondo che la coppia PQ, non separa o separa la coppia MN.

Ora sia dato il tetraedro ABCD ed un raggio a del complesso: potranno verificarsi due casi: o il raggio a, non attraversa il tetraedro finito, o lo attraversa: nel primo caso, esso taglierà tutte le facce in punti esterni ai triangoli su esse segnati: nel 2° esso ne taglierà due in punti interni e due in punti esterni. In ogni caso vi saranno due facce, ad esempio ACD, BCD che sono incontrate da a, in punti esterni ai triangoli su esse determinati. Si rileva allora, che se si scelgono come centri delle due stelle, i vertici non comuni alle due facce, cioè A e B; le coppie CD ed HK che sostituiscono MN e PQ non si separano; allora esistono e sono reali i piani ρ e σ, cioè si conclude:

III. *Vi sono sempre due vertici del tetraedro che si possono assumere come centri di infinite reciprocità reali* [1] *generanti lo stesso complesso.*

A. Comessatti.

SOPRA UN NOTO INVARIANTE DELLE FORME BINARIE DI GRADO PARI

L'espressione

$$\mathrm{I} = a_0\, a_n - \binom{n}{1} a_1\, a_{n-1} + \binom{n}{1} a_2\, a_{n-2} - \ldots + a_n\, a_0\,, \qquad (1)$$

tenuta coi coefficienti della forma binaria di grado n (pari)

$$F(x, y) = a_n\, x^n + \binom{n}{1} a_{n-1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_{n-2}\, x^{n-2} y^2 + \ldots + a_0\, y^n$$

è un *invariante* di questa forma, cioè, se noi sottoponiamo la forma $F(x, y)$ alla sostituzione binaria

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \beta y_1 \\ y &= \gamma x_1 + \delta y_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

[1] Per "*reciprocità reali*" intendo quelle nelle quali ad elementi reali corrispondono elementi

Nota. — L'ipotesi della realità dei vertici del tetraedro si è fatto per non introdurre corrispondenze tra stelle di centri imaginari; il caso in cui due vertici siano imaginari coniugati e due quando si scelgano questi ultimi come centri delle stelle si può, con poche ed ovvie modificazioni, far rientrare in quello studiato.

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri assunti ad arbitrio (col vincolo che sia $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$), e così otteniamo una nuova forma in x_1, y_1, la combinazione analoga a (1), eseguita coi coefficienti della nuova forma, vale quanto il prodotto di I per una potenza determinata di $\alpha\delta - \beta\gamma$.

Questa proprietà è nota, e noi vogliamo soltanto darne una dimostrazione molto elementare.

Osserviamo che la sostituzione arbitraria (2), che possiamo anche indicare con $A = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$, si può esprimere come prodotto di cinque sostituzioni dei tre tipi speciali $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Questo è un caso particolare d'un teorema molto più generale sulle sostituzioni, ma qui possiamo evitare di richiamarlo, dimostrando direttamente la verità di questa proposizione particolare. Chiamiamo generalmente S_ν, T_ν le sostituzioni S e T dove si legga k_ν e h_ν al posto di k e h.

Supponiamo, in principio, che γ sia diversa da zero, e poniamo

$$h_1 = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma}, \quad h_2 = \delta, \qquad k_1 = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma}, \quad k_2 = \gamma,$$

poi eseguiamo, con una regola nota, il prodotto $S_1 T_1 R T_2 S_2$. A scanso di equivoci, avvertiamo che qui si indica con PQ ciò che si ottiene operando prima Q, e poi operando P sul risultato: se per la P si passa da x, y a x_1, y_1, e per la Q da x_1, y_1 a x_2, y_2, si passerà per la PQ, come qui la intendiamo, da x, y a x_2, y_2. Eseguito dunque il prodotto $S_1 T_1 R T_2 S_2$, noi vediamo che questo coincide con A.

Supponiamo ora che γ sia nullo, e poniamo

$$h_1 = -\frac{\beta}{\alpha\delta}, \qquad k_1 = -\alpha, \qquad k_2 = -\delta.$$

Eseguendo il prodotto $S_1 T_1 R S_2 R$, noi otteniamo A. È dunque vero che A si esprime sempre con cinque sostituzioni dei tre tipi S, R, T.

È facile vedere che R muta il segno di tutti i coefficienti d'indice impari della forma $F(x, y)$, dunque non muta I. La S moltiplica per k^n ogni termine di I, ed anche questo è chiaro.

Vediamo che effetto fa la T sulla forma $F(x, y)$. Chiamando ξ il rapporto $\frac{x}{y}$, noi possiamo scrivere

$$F(x, y) = y^n \left[a_n \xi^n + \binom{n}{1} a_{n-1} \xi^{n-1} + \ldots + a_0 \right]. \tag{3}$$

La T muta y in y_1, e ξ in $\xi_1 + h$. Ora noi chiamiamo $f(\xi)$ la funzione che nella (3) figura in parentesi, cioè poniamo $F(\xi, 1) = f(\xi)$, per comodità; e poi richiamiamo la formula di Taylor nel caso di un polinomio di grado n, cioè

$$f(\xi_1 + h) = f(h) + \xi_1 f'(h) + \ldots + \frac{\xi_1^n}{n!} f^{(n)}(h), \tag{4}$$

dove $f^{(\nu)}$ denota generalmente la derivata ν^{ma} di f rispetto a ξ. Questa derivata si può definire e la formula (4) si può scrivere indipendentemente da ogni considerazione infinitesimale.[1] Dalle relazioni (3), (4) risulta che la sostituzione T muta $F(x, y)$ nella forma

$$b_n x_1^n + \binom{n}{1} b_{n-1} x_1^{n-1} y_1 + \binom{n}{2} b_{n-2} x_1^{n-2} y_1 + \ldots + b_0, \qquad (5)$$

dove si ponga generalmente

$$b_\nu = \frac{(n-\nu)!}{n!} f^{(\nu)}(h).$$

Ora noi comporremo coi cofficienti di (5) l'espressione analoga a I, e otterremo

$$J = \frac{1}{n!} [f(h) f^{(n)}(h) - f'(h) f^{(n-1)}(h) + \ldots + f^{(n)}(h) f(h)]. \qquad (6)$$

Questa forma J è un polinomio in h. Se, facendone la derivata rispetto ad h, noi troviamo un polinomio di grado r, ciò dimostra che $J(h)$ è un polinomio di grado $r+1$; se troviamo una costante diversa da zero, ciò dimostra che $J(h)$ è di primo grado; se troviamo invece zero, dovremo abbandonare l'ipotesi che il polinomio $J(h)$ contenga effettivamente h, e asserire che ne è indipendente.

Derivando, dunque, rispetto ad h il secondo membro di (6), otteniamo, prescindendo da $\frac{1}{n!}$ l'espressione

$$f^{(n+1)} f + f^{(n)} f' - f^{(n)} f' - f^{(n-1)} f'' + \ldots + f f^{(n+1)}.$$

I termini intermedi si distruggono a coppie; sopravanzano i due estremi, i quali sono nulli perchè la derivata $(n+1)^{ma}$ di una funzione di grado n rappresenta zero. Dunque noi possiamo proprio dire che soltanto in apparenza l'espressione (6) contiene h, ma in fatto ne è indipendente. Per $h=0$ le espressioni (1) e (6) non possono differire, dunque risultano uguali anche per ogni altro valore di h.

Ora la sostituzione A vale $S_1 T_1 R T_2 S_2$ oppure $S_1 T_1 R S_2 R$, secondo che sia γ diverso da zero o nullo. Nell'uno e nell'altro caso il modulo di A vale $k_1 k_2$. Ponendo $k_1 k_2 = m$, noi vediamo che, se la forma $F(x, y)$ è sottoposta alla sostituzione A, l'espressione (1), costruita coi coefficienti della trasformata, risulta uguale al prodotto dell'antica I per il fattore m^n. Rimane dunque dimostrata l'*invariantività* dell'espressione I.

Messina, 15 febbraio 1907. L. ORLANDO.

---

[1] V. il trattato d'Algebra di H. Weber, Vol. I. Cap. I.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 725 E 728

725. *Se* P_1, P_2 *sono due punti qualunque di una cubica di Agnesi allineati col vertice* O, *dimostrare che:*

1° *il luogo del punto medio del segmento* $\overline{P_1P_2}$ *è una retta* m;

2° *il luogo del punto* P *coniugato armonico di* O *rispetto a* P_1P_2 *è una parabola.*

3° *le tangenti alla cubica nei punti* P_1, P_2 *e la tangente alla parabola in* P, *concorrono in un medesimo punto* M; *e il segmento* $\overline{PM}$ *è bisecato dalla retta* m;

4° *le tangenti alla cubica nei punti* P_1, P_2 *tagliano l'assintoto in due punti equidistanti dalla intersezione di quest'ultimo con la retta* $\overline{P_1P_2}$.

V. Retali.

Risoluzione del sig. E.-N. Barisien di Parigi.

L'equazione della cubica d'Agnesi riferita al suo asse di simmetria e alla tangente nel vertice è

$$(x-2p)\,y^2+4p^2x=0,$$

ovvero, ponendo $2p=a$,

$$y=a\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Ponendo $\dfrac{x}{a-x}=t^2$, si ha che le coordinate d'un punto in funzione di t sono

$$x=\frac{at^2}{1+t^2},\qquad y=at.$$

Sia $y=nx$, la retta OP_1P_2; si ha allora

$$at=n\cdot\frac{at^2}{1+t^2},$$

ovvero

$$t^2-nt+1=0.$$

Se t_1, t_2 sono i parametri di P_1 e P_2, e (x_1,y_1) (x_2,y_2) le coordinate di questi punti, si ha

$$t_1+t_2=n,\qquad t_1t_2=1. \tag{1}$$

$$y_1+y_2=a(t_1+t_2)=an,\qquad y_1y_2=a^2t_1t_2=a^2. \tag{2}$$

$$x_1+x_2=\frac{y_1+y_2}{n}=a,\qquad x_1x_2=\frac{y_1y_2}{n^2}=\frac{a^2}{n^2}. \tag{3}$$

1°. L'ascissa del punto medio di P_1P_2 è

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

ovvero per la prima delle (3)

$$x=\frac{a}{2}.$$

Questa equazione rappresenta una retta parallela all'assintoto, equidistante da quello e dal vertice. Il punto medio di P_1P_2 descrive dunque questa retta m dell'enunciato.

2°. Indicando con X, Y le coordinate del coniugato armonico P di O rispetto a P_1 e P_2, si ha

$$\frac{2}{X}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{a}{\frac{a^2}{n^2}}=\frac{n^2}{a},\quad \text{ossia}\quad X=\frac{2a}{n^2},$$

$$Y=nX=\frac{2a}{n}.$$

Eliminando n fra queste equazioni, si trova che il luogo di P è la parabola

$$Y^2=2aX. \tag{4}$$

3°. La tangente alla parabola in P ha per equazione

$$Y.\frac{2a}{n}=a\left(X+\frac{2a}{n^2}\right),$$

ossia

$$2anY=a(n^2X+2a). \tag{5}$$

L'equazione generale d'una tangente alla cubica d'Agnesi nel punto di parametro t, è

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}}=\frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}},$$

ossia

$$\frac{X-\frac{at^2}{1+t^2}}{\frac{2at}{(1+t^2)^2}}=\frac{Y-at}{a},$$

ossia

$$X(t^2+1)^2-2tY=at^2(t^2-1). \tag{6}$$

Le tangenti in P_1 e P_2 hanno dunque per equazioni

$$X(t_1^2+1)^2-2t_1Y=at_1^2(t_1^2-1), \tag{7}$$
$$X(t_2^2+1)^2-2t_2Y=at_2^2(t_2^2-1). \tag{8}$$

Risolviamo il sistema delle (7), (8) per avere le coordinate del punto M d'incontro delle tangenti in P_1, P_2.

Eliminando Y si ha

$$X[t_2(t_1^2+1)^2-t_1(t_2^2+1)^2]=at_1t_2[t_1(t_1^2-1)-t_2(t_2^2-1)],$$
$$X[t_1t_2(t_1^3-t_2^3)+2t_1t_2(t_1-t_2)-(t_1-t_2)]=at_1t_2[t_1^3-t_2^3-(t_1-t_2)],$$

e dividendo per t_1-t_2

$$X[t_1t_2(t_1^2+t_2^2+t_1t_2)+2t_1t_2-1]=at_1t_2[t_1^2+t_2^2+t_1t_2-1]. \tag{9}$$

Ora, per le (1), si ha

$$t_1+t_2=n,\qquad t_1t_2=1,\qquad t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=n^2-2;$$

e la (9) diviene allora

$$n^2X=a(n^2-2),\qquad X=\frac{a(n^2-2)}{n^2}. \tag{10}$$

Sottraendo la (8) dalla (7), si ha

$$X[t_1^4-t_2^4+2(t_1^2-t_2^2)]-2(t_1-t_2)Y=a[t_1^4-t_2^4-(t_1^2-t_2^2)],$$

o, dividendo per t_1-t_2,

$$X[(t_1^2+t_2^2)(t_1+t_2)+2(t_1+t_2)]-2Y=a[(t_1^2+t_2^2)(t_1+t_2)-(t_1+t_2)],$$

ovvero

$$X[n(n^2-2)+2n]-2Y=a[n(n^2-2)-n],$$

ovvero

$$n^3X-2Y=an(n^2-3).$$

Da cui, tenendo conto della (10)

$$2Y=n^3X-an(n^2-3)=an(n^2-2)-an(n^2-3)=an,$$

e

$$Y=\frac{an}{2}. \tag{11}$$

Le (10) (11) dànno dunque le coordinate del punto M d'incontro delle tangenti alla cubica in P_1 e P_2. Queste coordinate soddisfano l'equazione (5) della tangente in P alla parabola (4).

Se si osserva che

$$X_P+X_M=\frac{2a}{n^2}+\frac{a(n^2-2)}{n^2}=a,$$

si vede che il luogo del punto medio di PM è la retta m.

Osservazione. — Eliminando n fra la (10) e (11), si vede che il luogo del punto M è la cubica

$$2Y^2(a-X)=a^3.$$

4°. Facendo $X=a$ nelle (7) e (8), si ha per le ordinate dei punti in cui le tangenti in P_1 e P_2 incontrano l'assintoto

$$2t_1Y_1=a(3t_1^2+1),$$
$$2t_2Y_2=a(3t_2^2+1).$$

Da cui

$$Y_1+Y_2=\frac{a}{2}\left[\frac{3t_1^2+1}{t_1}+\frac{3t_2^2+1}{t_2}\right]=\frac{a}{2t_1t_2}[3t_1t_2(t_1+t_2)+t_1+t_2].$$

$$Y_1+Y_2=2an, \qquad \frac{Y_1+Y_2}{2}=an.$$

Siccome la retta P_1P_2 ovvero $y=nx$ incontra l'assintoto nel punto d'ordinata na, resta dimostrata la proposizione enunciata.

Altre risoluzioni dei sigg. proff. E. Nannei; J. Rose, Nivelles (Belgio) e ing. Ferrari, I. T. di Varese.

728. *Integrare il sistema*

$$\frac{d^8y}{dx^8}+\frac{d^6z}{dx^6}+\frac{d^5y}{dx^5}+\frac{d^5z}{dx^5}+\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}+z=0,$$
$$\frac{d^8z}{dx^8}+\frac{d^6y}{dx^6}+\frac{d^5z}{dx^5}+\frac{d^5y}{dx^5}+\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2z}{dx^2}+y=0.$$

F. Sibirani.

Risoluzione del sig. prof. J. Rose, Nivelles (Belgio).

Da queste due equazioni si deduce per addizione e sottrazione, ponendo $y+z=u$, $y-z=v$

$$\frac{d^8u}{dx^8}+\frac{d^6u}{dx^6}+2\frac{d^5u}{dx^5}+2\frac{d^4u}{dx^4}+\frac{d^2u}{dx^2}+u=0, \tag{1}$$
$$\frac{d^8v}{dx^8}-\frac{d^6v}{dx^6}+\frac{d^2v}{dx^2}-v=0. \tag{2}$$

le equazioni caratteristiche di queste sono

$$s^8 + s^6 + 2s^5 + 2s^3 + s^2 + 1 = 0,$$
$$t^8 - t^6 + t^2 - 1 = 0.$$

La prima si scrive anche

$$s^6(s^2 + 1) + 2s^3(s^2 + 1) + s^2 + 1 = 0,$$

ovvero

$$(s^3 + 1)^2 (s^2 + 1) = 0,$$

ovvero

$$(s + 1)^2 (s^2 + 1)(s^2 - s + 1)^2 = 0,$$

ed ha per radici, $-1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$.

La seconda si può anche scrivere

$(t^2 - 1)(t^6 + 1) = 0$ ovvero $(t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)(t^4 - t^2 + 1) = 0$,

e le sue radici sono $+1, -1, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}$.

L'equazione (1) ha dunque per soluzione

$$y + z = (A + Bx)e^{-x} + (C\cos x + D \operatorname{sen} x) + $$
$$+ e^{\frac{1}{2}x}\left[(E + Fx)\operatorname{sen}\frac{x\sqrt{3}}{2} + (G + Hx)\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right],$$

e la (2) ha per soluzione

$$y - z = A_1 e^x + B_1 e^{-x} + (C_1 \cos x + D_1 \operatorname{sen} x) + $$
$$+ e^{x\sqrt{\frac{3}{2}}}\left[(E_1 + F_1 x)\operatorname{sen} x\sqrt{\frac{1}{2}} + (G_1 + H_1 x)\cos x\sqrt{\frac{1}{2}}\right].$$

Da queste due equazioni si deducono subito i valori di y e z.

N. B. — Dopo la pubblicazione del Fasc. IV ci giunse un'altra risoluzione della quistione **698** dal prof. F. Sibirani di Bologna, ed altra della quist. **721** dal sig. Teofilo Rietti, studente della R. U. di Bologna.

QUISTIONI PROPOSTE

729. La tangente in un punto M d'una curva piana (C) incontra 'asse Oy in T e la normale incontra l'asse Ox in N. Determinare la urva (C), sapendo che il baricentro b del triangolo MNT descrive ına retta Ob.

730. Siano (C) una curva piana, P la proiezione del punto M della urva sull'asse delle x, T il punto d'incontro della tangente in M col- 'asse Oy, TQ la perpendicolare ad OM. Determinare la curva (C) tale he TQ passi per P.

731. Sia (C) una curva piana; la normale in un punto M di questa urva incontri Oy in N', le parallele a Ox e MN' tracciate per i unti M e O rispettivamente s'incontrino in R. Determinare (C) con condizione che sia RN' = OM.

J. Rose.

BIBLIOGRAFIA

A. Bassi, *Risoluzione dei triangoli piani. Norme ed esempi.* Volume di 360 pagine. G. B. Paravia.

Con vivo compiacimento cerco di dare qualche notizia di questa importantissima pubblicazione dell'egregio collega prof. Alfredo Bassi, che nella sua modesta residenza di Mondovì, mentre da un lato attende con coscienza al suo ufficio, dall'altro pensa al miglioramento della Scuola, rivolgendo a profitto di essa il ricco patrimonio delle sue conoscenze.

Come dice l'A., questo è il primo d'una serie di volumi che egli si propone di pubblicare a beneficio dell'insegnamento secondario.

Il titolo dell'opera, tenuto conto delle pubblicazioni congeneri, sembra assai modesto, ed il lettore potrà credere che si tratti d'una delle solite collezioni di esercizi, in generale malamente scelti, peggio ordinati, spesso poco soddisfacenti nella risoluzione e nella discussione, e quasi sempre senza un'idea direttrice, che, come fiaccola, dovrebbe illuminare il cammino ai giovani che vogliono intraprendere la via della risoluzione dei problemi, i quali, come si sa, presentano, per dir così, una infinita varietà.

L'A. felicemente classifica i diversi casi che si possono presentare nella risoluzione dei triangoli, e per ogni classe dà le norme che devono guidare nella risoluzione e nella discussione, recando in questa, con criterii proprii, un notevole progresso di fronte agli usuali metodi di discussione. E il progresso consiste principalmente nella determinazione, quando è possibile, delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè gli elementi calcolati, se reali e positivi, rappresentino, senz'altro, una soluzione del problema; o nella sostituzione di condizioni equivalenti alle usuali, le quali condizioni equivalenti sono notevolmente più semplici. In ciò l'A. ha superato felicemente delle difficoltà non comuni.

L'opera comprende due parti, un'appendice ed una ricca serie di esercizii proposti.

Parte I. *Risoluzione algebrica dei triangoli piani. Norme ed esempi.*

Cap. I. L'A. richiama le relazioni metriche fondamentali, mettendo subito in rilievo il fatto, che se una relazione metrica traduce una proprietà geometrica *caratteristica* per la figura, ogni soluzione, se reale e positiva, è senz'altro accettabile. Esamina quindi ciascuna delle relazioni metriche allo scopo di dedurre se rappresenta, o meno, la condizione necessaria e sufficiente all'esistenza, degli elementi che in essa compaiono, in un medesimo triangolo.

Se x, y, z sono le misure dei lati d'un triangolo, è necessario e sufficiente che per la sua esistenza sia verificata la limitazione

$$|y-z| < x < y+z. \tag{1}$$

Se occorre applicare il teorema di Stewart (o quelli che di esso sono conseguenza, come il teorema della mediana, della bisettrice, ecc.), che non esprime una proprietà caratteristica per il triangolo, e se $AD = t$ è una trasversale condotta per A, m, n i segmenti CD, DB, l'A. dimostra che alla precedente condizione si possono sostituire le altre:

$$|y-t| < m < y+t$$
$$|y-t| < n < z+t,$$

qualche volta con notevole vantaggio. Così, risolvendo il triangolo, dati l_a ed i segmenti u, v che essa determina su a, trova:

$$a = u+v, \qquad b = \sqrt{u^2 + \frac{u}{v} l_a^2}, \qquad c = \sqrt{v^2 + \frac{v}{u} l_a^2}.$$

Essendo a, b, c positivi, per la loro accettazione si deve verificare la (1), ma riesce più semplice di constatare che

$$b - u < l_a < b + u.$$

Circa la relazione $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2ap$, dove p è il valore assoluto della proiezione di b su a, e che non rappresenta un vincolo analitico caratteristico per il triangolo, l'A. alla (1) trova di sostituire la condizione equivalente $o < p < b$ (2) con notevole semplificazione in molti casi. Così, risolvendo il triangolo, dati

$$a, \; h_b, \; h_c \; (h_b < h_c),$$

trova:

$$b = \frac{a^2 h_c}{h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} \pm h_b\sqrt{a^2 - h_c^2}}, \qquad c = \frac{a^2 h_b}{h_c\sqrt{a^2 - h_b^2} \pm h_b\sqrt{a^2 - h_b^2}},$$

i segni corrispondendosi. Invece di verificare la (1) riesce assai più semplice verificare la (2) che in questo caso si riduce a

$$\sqrt{a^2 - h_c^2} < a,$$

che è soddisfatta.

È notevole pure l'osservazione che se è nota l'area S del triangolo, dovendosi fare uso della formola di Erone, o di qualcuna di quelle che da essa si deducono, i valori trovati per i lati, o in parte dati, in parte trovati, se reali e positivi, corrispondono effettivamente a un triangolo, senza che verifica alcuna sia necessaria. Considerazioni analoghe vengono sviluppate per i dati:

$$\mathrm{R}, \; r, \; r_a, \; r_b, \; r_c.$$

Così l'A. risolvendo il triangolo, dati m_a, h_a, R, trova per determinare i lati delle formole molto lunghe, che qui non riporto. Solo noto che senza questa osservazione, se si volesse verificare la (1), la cosa riuscirebbe assai disagevole.

Cap. II. *Triangoli rettangoli.* Stabilite le relazioni metriche fondamentali, l'A. dà le norme per la discussione. Rileva il fatto importantissimo che nella risoluzione d'un triangolo rettangolo i valori dei lati verificando necessariamente la relazione di Pitagora (relazione *caratteristica* per il triangolo), saranno, senz'altro accettabili, se reali e positivi. E non occorrerà, come fanno certi autori, di verificare che il lato che si è assunto come ipotenusa è maggiore di ciascuno dei rimanenti.

Così, risolvendo il triangolo rettangolo, conoscendo la somma a dell'ipotenusa x e del cateto y, e la somma b dei cateti y e z, si trova, per avere y, l'equazione:

$$y^2 + 2(a - b)\,y - (a^2 - b^2) = 0.$$

Poi:

$$z = b - y, \qquad x = a - y.$$

I valori di y sono reali se $a > b$ (il caso $a = b$ è considerato a parte). In tale ipotesi un valore di y risulta negativo, e si rifiuta, l'altro positivo è dato da

$$y = -(a - b) + \sqrt{2a(a - b)}.$$

In corrispondenza:

$$z = a - \sqrt{2a(a - b)}, \qquad x = 2a - \sqrt{2a(a - b)}.$$

Perchè sia positivo z si richiede che $a < 2b$. Essendo positivo z, con più ragione lo sarà x. Siccome, intanto, nella risoluzione si fa uso del teorema di Pitagora, ogni altra discussione è superflua, e la condizione di possibilità è

$$b < a \lessgtr 2b.$$

Cap. III. *Triangolo isoscele. Triangolo equilatero.* Sono riportate le relazioni metriche principali. Per le norme relative alla discussione, se x è la base, y uno degli altri due lati, e x e y sono incogniti, è necessario e basta che sia $x < 2y$. Se è data la base a, si deve avere $a < 2y$. Se è dato b, si deve avere $b > \frac{1}{2}x$. Ma se la risoluzione si fa dipendere da quella del triangolo rettangolo di lati

$$b, \; \tfrac{1}{2}a, \; h_a,$$

siccome si usa il teorema di Pitagora, ogni verifica riesce superflua.

Cap. IV. *Esempi.* Gli esempi sono opportunamente scelti, esaurientemente ed elegantemente risoluti e discussi, applicando nella discussione tutte le risorse che nei capitoli precedenti sono state rilevate.

Parte II. *Risoluzione trigonometrica dei triangoli piani.*

Cap. IV. Osservato che se fra i dati si trovano elementi angolari la risoluzione non si può, in generale, compiere nel campo algebrico, e così se si vogliono determinare angoli, l'A. distingue i casi:

I. Fra i dati non vi sia alcun lato;

II. Vi sia un lato;

III. Vi siano due lati.

Se si tratta dei casi fondamentali considerati nella Trigonometria, l'A. rimanda ai buoni libri di testo. In ogni caso la risoluzione completa si fonda su *tredici* relazioni, che si riducono ad *otto* se il triangolo è rettangolo. Delle tredici relazioni solo tre sono distinte, e si possono prendere:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0, \ \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

A queste si possono sostituire:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta}, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\alpha+\gamma)}.$$

Qui l'A. dimostra che questi vincoli analitici fra lati ed angoli (se reali e positivi, e per gli angoli che siano minori di 180°) esprimono, ciascuno, la condizione necessaria e sufficiente per la coesistenza in uno stesso triangolo degli elementi contenuti in essa, tenuto conto di alcune condizioni che l'A. determina. Dopo di avere sviluppato opportune considerazioni sulla risoluzione trigonometrica dei triangoli, giunge a dimostrare che per la discussione basta determinare le condizioni che fra i dati debbono sussistere affinchè essi possano ricevere valori reali e positivi per i lati, reali positivi e minori di 180° per gli angoli incogniti.

Al n. 71 l'A. in particolare ferma la sua attenzione sul caso in cui siano dati due angoli α e β, e sia:

$$\alpha + \beta < 180^0,$$

e viene alla conclusione notevole che quando il problema è determinato, ammette sempre una soluzione e una sola, e nessuna discussione è necessaria.

Al n. 72 osserva che se invece di conoscere due angoli del triangolo fossero noti un angolo e un elemento angolare, oppure due elementi angolari, la figura richiesta sarebbe, astrazion fatta dal terzo dato, nota in forma. Quindi con considerazioni geometriche viene a concludere che le condizioni di possibilità riguarderanno *solo i dati angolari*, e le soluzioni saranno tante quante terne di angoli α, β, γ si potranno ricavare.

Cap. VII. *Sulla risoluzione geometrica.* Notevoli e lucide norme sono indicate per la risoluzione e la discussione.

Capp. VIII, IX, X, XI. *Esempi.* Gli esempi, che sono quelli trattati algebricamente, sono, come quelli ampiamente, esaurientemente ed elegantemente risoluti e discussi, sia dal lato analitico, come da quello grafico. Sono rilevate, opportunamente, le soluzioni limiti, e le quistioni di massimo e di minimo che eventualmente si presentano. È da richiamare, in particolar modo, l'attenzione del lettore sugli esercizi del cap. XI, dove, gli esempi trattati hanno, per la loro forma, una vera impronta d'originalità.

Appendice. — *Sulla risoluzione grafica e sullo studio analitico dei triangoli piani, quando gli elementi determinativi siano, tutti o in parte, dati di posizione.*

§ 1. *Norme relative alla risoluzione e alla discussione.* Spiegato il soggetto da trattare, l'A. divide in due categorie le quistioni da studiare, secondo che gli elementi noti siano tutti dati di posizione, o solo in parte. In ogni caso, mediante i dati in grandezza e quelli che dalla posizione si possono dedurre (e per questi ultimi si avrà una certa arbitrarietà), si potranno esprimere anche analiticamente le incognite.

Servirà a tale scopo una conveniente scelta di coordinate cartesiane e polari.

I problemi sono divisi in gruppi, secondochè si conoscono tre punti notevoli, due, uno o nessuno. Per il primo gruppo è notato che i tre punti non sono assolutamente arbitrarii. Il loro triangolo può, in certi casi, essere costruito a parte, e poi situato, in altri casi ciò non è possibile. Per gli altri gruppi l'A. fa importanti considerazioni, e mostra come si possano spesso utilizzare i metodi dei luoghi geometrici e della similitudine.

§ 2. *Esempi*. Come per la 1ª e 2ª parte gli esempi sono felicemente scelti, esaurientemente ed elegantemente risoluti e discussi, sia dal lato geometrico, sia dal lato analitico.

Esercizi. — Si chiude l'opera con una ricchissima collezione di esercizi proposti, in numero di 1106. Notevolissimi quelli relativi al cap. XI. Per molti di essi, in opportune note, sono indicati degli avviamenti.

Ed ora termino questa rapida recensione ringraziando l'A. per il piacere che mi ha procurato nella lettura d'un libro così ben pensato e così ben condotto.

Tale libro dovrebbe figurare nella biblioteca d'ogni ordine di scuole, e per quelle superiori essere additato ai giovani più volenterosi come modello perfetto di rigore e di eleganza nella risoluzione e discussione dei problemi grafici e analitici. Ciò facendo gl'Insegnanti non solo incoraggerebbero un collega che con vero intelletto d'amore, con coscienza e scienza ha scritto un ottimo libro, ma renderebbero un grande servigio all'insegnamento secondario.

S. Catania.

SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

Con vivo piacere pubblichiamo la seguente circolare, augurando che la nobile iniziativa sia feconda di bene per l'avvenire scientifico del nostro paese.

Illustrissimo Signore,

Nel Congresso dei Naturalisti Italiani, tenutosi a Milano nel settembre 1906, fu fatto solenne voto per la costituzione di una Società Italiana per il progresso delle scienze. La proposta, che trovò unanime consenso nell'Assemblea, è la manifestazione di un desiderio e di un bisogno sentiti e soddisfatti da molto tempo presso tutte le nazioni, che prendono parte al grande movimento scientifico moderno.

Vigorosi frutti hanno portato associazioni consimili, come è ben noto, in Inghilterra dal 1831, in Germania dal 1822, in Svizzera dal 1815, in Francia dal 1864, negli Stati Uniti d'America dal 1853 ed in tempi recenti nell'Australia e nell'Africa del Sud; fra queste, l'Associazione Britannica vanta risultati, che possono dirsi gloriosi.

In Italia un primo Congresso di scienziati fu tenuto nel 1839 a Pisa; e ad esso seguirono undici Congressi tenuti a Torino (1840), Firenze (1841), Padova (1842), Lucca (1843), Milano (1844), Napoli (1845), Genova (1846), Venezia (1847), Siena (1862), Roma (1873), Palermo (1875).

Se però i risultati scientifici di queste riunioni nostre meritano larga menzione, bisogna riconoscere che l'intento principale seguito in esse ebbe carattere politico: e tali convegni giovarono mirabilmente all'affratellamento delle forze intellettuali delle varie provincie, in un paese che voleva e conseguì il proprio risorgimento a nazione unica.

In oggi però il movimento in favore della ricostituzione di tali congressi si ispira unicamente ad un ideale scientifico.

Non è chi non senta la necessità di temperare fra i cultori della scienza la tendenza all'eccessiva specializzazione; un congresso a larga rappresentanza di scienze, che hanno punti di contatto e campi comuni, viene a meglio disciplinare le riunioni di specialisti dando loro necessariamente una benefica armonia di intenti. E gli studiosi di una disciplina, raccolti a fianco di studiosi di una disciplina affine, comprendono meglio gli aiuti reciproci, che possono prestarsi, e dall'analisi fatta da un punto di vista speciale possono salire a vedute e comprensioni filosoficamente più larghe.

In molti, ancora, è il desiderio di una solenne manifestazione nazionale delle scienze di fronte al paese, il quale forse non apprezza ancora al suo giusto valore l'importanza della ricerca scientifica, nè quale forza rappresenti, per la prosperità civile ed economica di una nazione, l'insieme di uomini che del culto delle scienze hanno fatto lo scopo della loro vita.

In altri, infine, è il proposito di creare in Italia una vita scientifica, propriamente detta, che estenda le sue radici e tragga i suoi succhi dalle forze vive del paese stesso, ciò che non può non riescire di straordinario incremento della cultura nazionale. E tale scopo verrà raggiunto col riunire le energie volenterose di tutti coloro che amano le scienze; cioè non solo dei loro cultori, per così dire, di professione, ma anche di coloro che ne seguono con vigile simpatia il progresso continuo e glorioso. Si verrà così a ricostituire con nuove vedute l'antica associazione italiana, riprendendo la interrotta tradizione dei Congressi informati ai nuovi bisogni dei tempi.

La nuova Società, alla quale chiediamo l'adesione della S. V., risponde quindi a necessità complesse e sentite per diverse ragioni. La concordia e lo slancio, con cui numerose società ed enti scientifici hanno accordato il loro appoggio alla grandiosa iniziativa, dimostrano ampiamente la nostra affermazione. E tali società troveranno nella nuova, a cui avranno dato vita, modo di esplicare anche più intensamente la propria attività ed insieme di contribuire al largo intento, comune a quanti hanno a cuore il progresso delle scienze.

La sottoscritta Commissione nominata dalla presidenza del Congresso di Milano, a tradurre in atto il voto del Congresso stesso ed a costituirsi in Comitato Ordinatore della futura Associazione, ha scelto Parma a sede del primo congresso di questa, da tenersi nel settembre del 1907; ivi si procederà a formare la nuova Società formulandone il relativo Statuto ed il Regolamento.

La S. V. è quindi pregata di inviare la propria adesione a questo Congresso. La quota di iscrizione è stata fissata sin d'ora in lire 5, per fare fronte alle spese di organizzazione e per costituire un primo fondo alla nuova Società. Le scienze, che si propone sieno rappresentate, sono: Matematica, Astronomia, Geodesia-Fisica, Fisica terrestre, Meteorologia-Meccanica ed Ingegneria, Elettrotecnica-Chimica ed applicazioni, Agronomia - Geografia - Mineralogia, Geologia e Paleontologia - Botanica - Zoologia ed Anatomia comparata - Antropologia, Etnografia, Paletnografia - Anatomia, Istologia, Fisiologia, Patologia, Igiene, Batteriologia - Statistica e scienze economiche.

Ci affrettiamo ad aggiungere che l'adesione, oggi chiesta, non implica alcun vincolo rispetto alla Società da fondarsi, spettando alla prima riunione di Parma il compito di regolare la costituzione e le norme per l'esistenza della **Società Italiana per il Progresso delle Scienze.**

Roma, 25 Gennaio 1907.

IL COMITATO ORDINATORE

Ettore Artini - Deputato Pietro Cardani - Giovanni Celoria - Arturo Issel - Fr. Sav. Monticelli - Senatore Emanuele Paternò - Romualdo Pirotta - Guglielmo Romiti - Alfonso Sella - Senatore Vito Volterra.

Per informazioni o comunicazioni scrivere all'indirizzo; Comitato ordinatore della Società per il progresso delle Scienze. (Roma, Via del Collegio Romano, 26.)

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 22 marzo 1907

UNA FORMOLA SUI COEFFICIENTI POLINOMIALI E SU DI UN DETERMINANTE RICORRENTE

Nota di Ernesto Pascal

Nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo ho pubblicato recentemente alcune Note su certi determinanti, di speciale costruzione, che ho chiamati *ricorrenti*.

L'occasione dello studio generale di questi determinanti, mi venne dall'essermi occupato di dimostrare la proprietà dell'annullarsi di uno speciale di essi, proprietà che dovea servire a completare una certa dimostrazione del dott. Burgatti sulle equazioni differenziali lineari.

In questa breve Nota elementare, che mi sembra adatta all'indole li questo *Periodico*, io tratto principalmente di una semplice formola ui coefficienti polinomiali, formola donde, fra altro, può immediatanente trarsi la dimostrazione dell'annullarsi di quel tal determinante ui ho accennato più su.

***

Indichiamo con

$$\binom{m}{r_1\ r_2 \ldots r_{i-1}}$$

coefficiente polinomiale

$$\frac{m}{r_1!\ r_2!\ \ldots\ r_{i-1}!\ r_i!}$$

sendo

$$r_i = m - \sum_{k=1}^{i-1} r_k$$

di esso chiamiamo $r_1 \ldots r_i$ gli *indici*.

Indichiamo con $A_i^{(2n)}$ la somma di tutti i possibili coefficienti poomiali del numero $2n$, ad i indici *pari* (diversi da zero); poniamo è:

$$A_i^{(2n)} = \sum_h \binom{2n}{2h_1,\ 2h_2, \ldots 2h_{i-1}} \qquad (i = 1,\ 2, \ldots) \tag{1}$$

endendo che $2h_1, 2h_2, \ldots 2h_{i-1}$ e

$$2h_i = 2n - \sum_{k=1}^{i-1} 2h_k \tag{2}$$

rappresentino una partizione del numero $2n$ in i numeri pari diversi da zero, e che il sommatorio debba estendersi *a tutte le possibili siffatte partizioni, con ripetizioni,* con questa ultima frase volendo poi significare che debbono includersi tutti quei numeri polinomiali (eguali fra loro) nei quali la totalità degli h sia la medesima, ma l'ordine di disposizione, di quei fra loro diversi, sia diverso.

Indichiamo poi similmente con $B_i^{(2n)}$ una somma analoga, ma colla differenza che in ogni termine i due ultimi indici sieno sempre *dispari* e tutti gli altri pari; cioè sia

$$B_i^{(2n)} = \sum_h \binom{2n}{2h_1,\ 2h_2,\ \ldots\ 2h_{i-2},\ 2h_{i-1}-1} \qquad (i=2,\ 3,\ \ldots) \tag{3}$$

l'ultimo indice essendo naturalmente anche dispari è dato da

$$2h_i - 1 = 2n - \sum_{k=1}^{i-1} 2h_k - 1. \tag{4}$$

È evidente che la (3) ha significato per

$$i = 2,\ 3,\ \ldots;$$

per $i=1$ porremo poi

$$B_1^{(2n)} = 1.$$

È facile prima di tutto trovare una formola di ricorrenza fra le somme A.

Si ha:

$$\frac{A_2^{(2n)}}{(2n)!} = \frac{1}{2!\,(2n-2)!} + \frac{1}{4!\,(2n-4)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-2)!\,2!}$$

$$\begin{aligned}\frac{A_3^{(2n)}}{(2n)!} = {} & \frac{1}{2!}\left[\frac{1}{2!\,(2n-4)!} + \frac{1}{4!\,(2n-6)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-4)!\,2!}\right] + \\ & + \frac{1}{4!}\left[\frac{1}{2!\,(2n-6)!} + \frac{1}{4!\,(2n-8)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-6)!\,2!}\right] + \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + \frac{1}{(2n-4)!}\left[\frac{1}{2!\ 2!}\right] = \\ & = \frac{1}{2!}\,\frac{A_2^{(2n-2)}}{(2n-2)!} + \frac{1}{4!}\,\frac{A_2^{(2n-4)}}{(2n-4)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-4)!}\,\frac{A_2^{(4)}}{4!}.\end{aligned}$$

Così continuando è evidente che può scriversi in generale:

$$\frac{A_i^{(2n)}}{(2n)!} = \frac{1}{2!}\frac{A_{i-1}^{(2n-2)}}{(2n-2)!} + \frac{1}{4!}\frac{A_{i-1}^{(2n-4)}}{(2n-4)!} + \ldots + \frac{1}{(2n-2i+2)!}\frac{A_{i-1}^{(2i-2)}}{(2i-2)!}, \tag{5}$$

che può anche scriversi:

$$A_i^{(2n)} = \binom{2n}{2} A_{i-1}^{(2n-2)} + \binom{2n}{4} A_{i-1}^{(2n-4)} + \ldots + \binom{2n}{2_{n-2i+2}} A_{i-1}^{(2i-2)}. \tag{6}$$

Possiamo ora scrivere identicamente:

$$A_{i+1}^{(2n)} + 2A_i^{(2n)} = \sum_h \binom{2n}{2h_1, \ldots, 2h_{i-1}} \sum_{h=0}^{h_i} \binom{2h_i}{2h}, \tag{7}$$

in cui $\sum\limits_h$ deve, al solito, come nella (1), estendersi a tutti i valori delle h, e h_i è quello dato dalla (2).

Ed infatti le due serie di termini che si ottengono dal secondo membro per $h = 0$ e $h = h_i$ danno esattamente, come è evidente, il doppio di $A_i^{(2n)}$, perchè, per la (1), ciascuna di esse è $A_i^{(2n)}$.

Osservando poi che

$$\binom{2n}{2h_1, \ldots, 2h_{i-1}} \binom{2h_i}{2h} = \binom{2n}{2h_1, \ldots, 2h_{i-1}, 2h},$$

e che, per h diverso da zero e da h_i, il secondo membro è un coefficiente polinomiale a $i+1$ indici, si vede che il sommatorio di tutti i termini, meno quelli per $h = 0$ e $h = h_i$, forma esattamente $A_{i+1}^{(2n)}$.

Intanto per una formola elementare sui coefficienti binomiali è:

$$\sum_{h=0}^{h_i} \binom{2h_i}{2h} = \sum_{h=1}^{h_i} \binom{2h_i}{2h-1},$$

onde, sostituendo al secondo membro della (7) e osservando che allora questo può scriversi:

$$\sum_h \binom{2n}{2h_1, \ldots, 2h_{i-1}} \binom{2h_i}{2h-1} = \sum_h \binom{2n}{2h_1, \ldots, 2h_{i-1}, 2h-1},$$

che per la formola (3), con un opportuno mutamento di indici è $B_{i+1}^{(2n)}$, abbiamo la formola:

$$A_{i+1}^{(2n)} + 2A_i^{(2n)} = B_{i+1}^{(2n)}; \tag{8}$$

la quale stabilisce un legame fra le somme di coefficienti polinomiali di $2n$, a tutti indici pari, e quelle di coefficienti polinomiali a due indici dispari e gli altri pari.

Dalla (8) possono dedursi le somme A espresse per le B colla formola notevole:

$$A_{i+1}^{(2n)} = B_{i+1}^{(2n)} - 2B_i^{(2n)} + 2^2 B_{i-1}^{(2n)} - \ldots + (-2)^i B_1^{(2n)}. \tag{9}$$

***

Dalla (9) possiamo dedurre una conseguenza importante.

Per $i = n$ evidentemente il primo membro è zero, perchè non possono costruirsi coefficienti polinomiali di $2n$ con $n+1$ indici pari diversi da zero. Onde possiamo dedurre:

$$B_{n+1}^{(2n)} - 2B_n^{(2n)} + 2^2 B_{n-1}^{(2n)} - \ldots + (-2)^n B_1^{(2n)} = 0. \tag{10}$$

Ora per quanto abbiamo dimostrato nel § 1 della prima delle Note ricordate in principio sui determinanti ricorrenti,[1] il primo membro di (10) non è altro che lo sviluppo del determinante ricorrente:

$$(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{1!} & 2 & 0 & \dots\dots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 2 & \dots\dots 0 \\ \frac{1}{5!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots\dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots\dots 2 \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \frac{1}{(2n-3)!} & \dots\dots \frac{1}{1!} \end{vmatrix} \qquad (11)$$

onde possiamo affermare che *il determinante* (11) *è identicamente zero*, e questo determinante poi, col facile cangiamento che abbiamo già fatto notare nel § 3 della succitata Nota, diventa precisamente quel determinante nullo, cui abbiamo accennato nell'introduzione.

***

Possiamo trovare una formola di ricorrenza analoga alla (6), ma per le somme B anzichè per le A.

Ciò si ottiene combinando in modo opportuno la (6) e la (8).

Si ha:

$$\begin{aligned} B_{i+1}^{(2n)} = & \binom{2n}{2}\left[A_i^{(2n-2)} + 2A_{i-1}^{(2n-2)}\right] + \\ & + \binom{2n}{4}\left[A_i^{(2n-4)} + 2A_{i-1}^{(2n-4)}\right] + \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots + \\ & + \binom{2n}{2n-2i}\left[A_i^{(2i)} + 2A_{i-1}^{(2i)}\right] + \\ & + \left(\frac{2n}{2n-2i+2}\right) 2A_{i-1}^{(2i-2)}\,; \end{aligned}$$

onde infine, osservando che l'ultimo termine è eguale a

$$2\binom{2n}{2n-2i+2}\frac{(2i-2)!}{2^{i-1}} = \frac{(2n)!}{(2n+2i+2)!\;2^{i-2}},$$

[1] PASCAL, *I determinanti ricorrenti e le loro proprietà*. Rend. Ist. Lomb. (2), t. XL, 1907.

si ha:

$$B_{i+1}^{(2n)} = \binom{2n}{2} B_i^{(2-2)} + \dots + \binom{2n}{2n-2i} B_i^{(2i)} + \frac{(2n)!}{(2n-2i+2)!\ 2^{i-2}}. \tag{12}$$

***

Termineremo dando i valori delle prime somme B, valori che si ricavano facilmente sviluppando le potenze $(2n)^{me}$ dei binomi, trinomi, quadrinomi, dei quali i termini abbiano i valori ± 1, e combinando fra loro in modo opportuno i risultati ottenuti, si trova:

$$\left.\begin{array}{l} B_2^{(2n)} = 2^{2n-1} \\ B_3^{(2n)} = \frac{1}{4}(3^{2n}-1) - 2^{2n-1} \\ B_4^{(2n)} = 2^{4n-3} + 2^{2n-1} - \frac{1}{2}(3^{2n}-1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{13}$$

Milano, marzo del 1907.

LE GEODETICHE DEL TORO

(Continuazione e fine — v. fasc. precedente)

PARTE SECONDA.

Andamento delle geodetiche sul toro.

§ 1. — *Curve che rimangono nella regione in cui la curvatura totale è* >0.

1. Per vedere l'andamento delle curve sulla superficie, trasformiamo l'integrale che dà φ, introducendo un angolo ausiliario.

Sia M posto sulla circonferenza equatoriale esterna, e sia α l'angolo che la velocità iniziale del punto fa con il circolo equatoriale.

Possiamo supporre:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Se M è la posizione attuale del mobile, e θ è l'angolo che il raggio OM della circonferenza meridiana per M fa con il diametro di essa, normale all'asse di rotazione, si ha:

$$r = p + R\cos\theta.$$

Allora, poichè

$$d\sigma = R d\theta,$$

la formula

$$\varphi = \varphi_0 \pm K\int\frac{d\sigma}{r\sqrt{x^2 - K^2}},$$

notando che $K = (p + R)\cos\alpha$, diventa

$$\varphi = \varphi_0 \pm R(p+R)\cos\alpha . \int\frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{(p+R\cos\theta)^2 - (p+R)^2\cos^2\alpha}}$$

Osserviamo ora che

$$(p+R\cos\theta)^2 - (p+R)^2\cos^2\alpha =$$
$$= \{p + R\cos\theta - (p+R)\cos\alpha\}\ \{p + R\cos\theta + (p+R)\cos\alpha\};$$

e, poichè $\cos\varphi = 1 - \operatorname{sen}^2\frac{\varphi}{2}$, si ha

$$R\cos\theta = R - 2R\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2},$$

$$(p+R)\cos\alpha = p + R - 2(p+R)\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2},$$

e quindi

$$p + R\cos\theta + (p+R)\cos\alpha =$$
$$= p + R - 2R\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} + p + R - 2(p+R)\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$
$$= 2(p+R)\left(1 - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) - 2R\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$
$$= 2(p+R)\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2R\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2};$$

per cui

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{P+R}{2}\cos\alpha \times$$

$$\times\int_0^\theta\frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{p+R}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{p+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)}}$$

Ora, per ipotesi, è $\alpha < \frac{\pi}{2}$, quindi $\frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4}$, per cui

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} > \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Perchè il radicale sia > 0, basterà che sia

$$\frac{P+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} > \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2};$$

quindi θ oscilla fra $+\theta_0$ e $-\theta_0$, ove

$$\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}=\sqrt{\frac{p+R}{R}}\,.\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\,. \tag{1}$$

Per la trajettoria, per cui α soddisfa alla

$$\sqrt{\frac{p+R}{R}}\,.\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\leqslant 1,$$

vi è un valore reale di θ_0 che soddisfa alla (1).

Sieno M_0, M'_0 i punti della trajettoria corrispondenti a $+\theta_0$ e $-\theta_0$; e siano σ e σ' i paralleli passanti per quei punti, ai quali essa risulterà tangente. La trajettoria sega già in M il cerchio equatoriale (nel punto di partenza); essa lo segherà in un altro punto B.

Chiamiamo con φ l'angolo compreso fra i piani meridiani passanti per i punti M e B. Sia $\varphi=0$ per $\theta=0$. Il mobile tocca in M'_0 il parallelo inferiore; e sia $\varphi_{MM'_0}$ l'angolo compreso fra i piani meridiani passanti per i punti M, M'_0; si ha:

$$\varphi_{MM'_0}=-\frac{p+R}{2}\cos\alpha\times$$

$$\times\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{p+R}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{p+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}}\,.$$

Chiamando $f(\theta)$ il denominatore dell'integrando, si ha

$$\varphi_{MM'_0}=+\frac{p+R}{2}\cos\alpha\int_{-\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{f(\theta)}$$

ed analogamente

$$\varphi_{M,B}=\frac{p+R}{2}\cos\alpha\left\{\int_{-\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{f(\theta)}+\int_0^{+\theta_0}\frac{d\theta}{f(\theta)}\right\}$$

$$=\frac{p+R}{2}\cos\alpha\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta}{f(\theta)}\,.$$

2. Sia α abbastanza piccolo da poter considerare $\operatorname{sen}\alpha=\alpha$, $\cos\alpha=1$, allora $\theta_0=\sqrt{\frac{p+R}{R}}$; e, poichè è $\theta<\theta_0$, a maggior ragione sarà θ molto piccolo e dell'ordine di α; quindi

$$p+R\cos\theta=p+R$$

$$\frac{p+R}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{p+R}{R}$$

$$\frac{p+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{p+R}{4R}\left\{\alpha^2-\theta^2\frac{R}{p+R}\right\}.$$

Ed allora

$$\varphi_{MB}=\frac{p+R}{2}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta}{(p+R)\sqrt{\frac{p+R}{R}\cdot\frac{p+R}{4R}\left(\alpha^2-\theta^2\cdot\frac{R}{p-R}\right)}}$$

$$=2\sqrt{\frac{R}{p+R}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\left(\theta\sqrt{\frac{R}{p+R}}\right)}{\sqrt{\alpha^2-\left(\theta\sqrt{\frac{R}{p+R}}\right)^2}}$$

$$=2\sqrt{\frac{R}{p+R}}\operatorname{arsen}\left(\frac{\theta_0}{\alpha}\sqrt{\frac{R}{p+R}}\right).\text{(1)}$$

Ora $\theta=\alpha\sqrt{\frac{p+R}{R}}$; quindi

$$\varphi_{MB}=2\sqrt{\frac{R}{p+R}}\cdot\operatorname{arsen}1$$

$$=2\sqrt{\frac{R}{p+R}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi\cdot\sqrt{\frac{R}{p+R}}.$$

L'arco di equatore compreso tra i due punti successivi d'incontro con la trajettoria è

$$\text{arc }MB=\pi\sqrt{R(p+R)}.$$

Se $\sqrt{\frac{R}{p+R}}$ è irrazionale, sono infiniti i punti in cui la trajettoria compresa fra i due paralleli incontra la circonferenza equatoriale.

Se il numero suddetto è invece razionale, allora il numero dei punti in cui la trajettoria incontra la circonferenza è limitato, e la trajettoria è una curva chiusa. Ciò avverrà qualunque sia R, purchè p sia della forma $R\left(\frac{1}{q^2}-1\right)$, dove q è un numero razionale.

3. Al risultato precedente si può dare un'interpretazione geometrica.

I due raggi di curvatura della superficie del toro nella striscia infinitamente sottile compresa fra σ e σ' sono a meno di infinitesimi di ordine superiore, R e $p+R$. La curvatura totale è $\frac{1}{\sqrt{R(p+R)}}$;

---

(1) $\varphi=\operatorname{arsen}\left(\frac{\theta}{\alpha}\sqrt{\frac{R}{p+R}}\right)$ è una curva che si discosta tanto meno dalla trajettoria quanto più α è piccolo.

e la striscia infinitamente sottile compresa fra i due paralleli, si può flettere e, senza lacerature nè ripiegature, adattarla su di una superficie sferica di raggio $\sqrt{R(p+R)}$.

La trajettoria, che sappiamo essere una geodetica, si adatterà su di un cerchio massimo, e così pure il cerchio equatoriale; e ciò avviene pel fatto che la distanza fra due punti successivi d'incontro della trajettoria con l'equatore è $\pi\sqrt{R(p+R)}$.

Nel caso in cui

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{R}{p+R}},$$

si ha che la trajettoria serpeggia attorno alla trajettoria primitiva $(\alpha=0)$, ed è compresa fra due paralleli $(\theta_0, -\theta_0)$. In questo caso il moto è stabile.

Il tempo t è dato dall'espressione

$$\begin{aligned} t &= \pm\frac{1}{\sqrt{2h}}\int\frac{r\,d\sigma}{\sqrt{r^2-K^2}} \\ &= \pm\frac{1}{\sqrt{2h}}\int_0^\theta\frac{(p+R\cos\theta)\,d\theta}{\sqrt{\left(\frac{p+R}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{p+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}} \end{aligned}$$

e, come prima, si deduce

$$\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}=2\int_0^{\theta_0};$$

quindi il tempo che il punto impiega per passare da M_0 ad M'_0 è uguale a quello che impiega per passare da M'_0 a B. L'intervallo di tempo che il punto impiega per passare da M a B è, se α è infinitesimo,

$$\begin{aligned} t_1 &= 2(p+R)\sqrt{\frac{2}{h}}\sqrt{\frac{R}{p+R}}\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{p+R}{R}\alpha^2-\theta^2}} \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2}{h}}\sqrt{(p+R)R}+\frac{2\pi}{u}\sqrt{(p+R)R}, \end{aligned}$$

se u è la velocità del mobile.

Nel caso che la direzione del moto si discosti molto poco dal circolo equatoriale, l'equazione della trajettoria è

$$\begin{aligned} \varphi-\varphi_0 &= \sqrt{\frac{R}{p+R}}\int\frac{d\theta}{\sqrt{\frac{p+R}{R}\alpha^2-\theta^2}} \\ &= \sqrt{\frac{R}{p+R}}\left\{\operatorname{arcsen}\frac{\theta}{\alpha}\sqrt{\frac{R}{p+R}}+\gamma\right\}. \end{aligned}$$

Se per $\varphi = \varphi_0$, $\theta = 0$, sarà $\gamma = 0$, e si ha

$$\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \frac{\theta}{\alpha}\sqrt{\frac{R}{p+R}};$$

per cui, dalla $r = p + R\cos\theta$, si ha

$$\frac{r-p}{R} = \cos\left\{\alpha\sqrt{\frac{p+R}{R}}\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)\right\}$$

segna i paralleli equidistanti dal cerchio equatoriale esterno, i quali non possono essere oltrepassati dal punto e saranno reali; cioè il moto del punto è compreso in una zona limitata da due paralleli se è

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}} \leqslant 1.$$

Questa zona è contenuta nella regione a curvatura positiva, se è

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}};$$

perchè allora, essendo $\operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, è $\theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, e $\theta_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ è l'equazione dei due paralleli dei punti parabolici.

Se quindi

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

allora la trajettoria serpeggiando occupa tutta la regione dei punti ellittici e tocca i paralleli dei punti parabolici.

Se è

$$1 > \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}} > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

la trajettoria entra nella regione dei punti iperbolici, giacchè i paralleli limiti sono in questa regione.

Il massimo valore che può assumere $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}}$ per l'esistenza dei paralleli limiti è l'unità. In questo caso, essendo cioè $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+R}{R}} = 1$, è $\theta_0 = \pi$, cioè i paralleli limiti coincidono col circolo equatoriale interno; ma la trajettoria non può toccarlo, perchè il circolo equatoriale interno è anche una geodetica, quindi lo taglia. In questo caso la trajettoria descrive serpeggiando tutto il toro.

Si ha allora

$$\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{p+R}, \qquad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{p}{p+R},$$

per cui

$$\cos\alpha = 1 - 2 \cdot \frac{R}{p+R} = \frac{p-R}{p+R};$$

e quindi

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+R}{2} \cos\alpha \times$$

$$\times \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{p+R}{R}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{p+R}{R}\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= \varphi_0 \pm \frac{p-R}{2} \times \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{\left(\frac{p}{R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Ora se $p = R$, allora

$$\varphi = \varphi_0, \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

cioè si hanno i meridiani.

Ma in generale è $\frac{R}{p} < 1$, e quindi

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+R}{2} \cos\alpha \times$$

$$\times \int \frac{d\theta}{\left\{p + R\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)\right\} \cdot \cos\frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{\frac{p}{R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}.$$

Poniamo

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = cn\left(u, \sqrt{\frac{R}{p}}\right),$$

e quindi

$$\cos\frac{\theta}{2} = sn\left(u, \sqrt{\frac{R}{p}}\right);$$

allora

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = -\, sn u\, dn u\, du$$

$$d\theta = -\,2 dn u\, du$$

$$p + R\left(2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right) = p + R\,(2sn^2u - 1)$$

$$= p - R + 2R sn^2 u$$

$$= (p-R)\left(1 + \frac{2R}{p-R} sn^2 u\right)$$

$$\frac{p}{R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{p}{R} - cn^2 u;$$

e quindi

$$\varphi = \varphi_0 \pm \cos\alpha \int \frac{(p+\mathrm{R})\, dnudu}{(p-\mathrm{R})\left(1+\frac{2\mathrm{R}}{p-\mathrm{R}}\, sn^2u\right) snu \sqrt{\frac{p}{\mathrm{R}} - cn^2u}}$$

$$= \varphi_0 + \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{p}} \int \frac{du}{\left(1+\frac{2\mathrm{R}}{p-\mathrm{R}}\, sn^2u\right) snu}.$$

§ 2. — *Le curve invadono tutta la superficie.*

1. Consideriamo in ultimo il caso in cui

$$\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+\mathrm{R}}{\mathrm{R}}} > 1$$

per cui la condizione

$$\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2} < \mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{p+\mathrm{R}}{\mathrm{R}}}$$

è sempre soddisfatta; ed il moto del punto non è più limitato ad una sola regione, cioè non è stabile.

In tal caso consideriamo l'angolo ξ della velocità iniziale col meridiano. Si ha $\xi = \frac{\pi}{2} - \alpha$; e quindi

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\frac{\xi}{2} + \mathrm{sen}\,\frac{\xi}{2}\right\},$$

$$\mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\frac{\xi}{2} - \mathrm{sen}\,\frac{\xi}{2}\right\},$$

per cui

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\{1 + \mathrm{sen}\,\xi\}, \qquad \mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\{1 - \mathrm{sen}\,\xi\},$$

e quindi

$$\frac{p+\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\cos^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}\{1 + \mathrm{sen}\,\xi\} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} + \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}\,\mathrm{sen}\,\xi,$$

$$\frac{p+\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}\{1 - \mathrm{sen}\,\xi\} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}} - \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} - \frac{p+\mathrm{R}}{2\mathrm{R}}\,\mathrm{sen}\,\xi.$$

Quindi l'equazione della trajettoria diviene

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+B}{2} \operatorname{sen} \xi \times$$

$$\times \int \frac{d\theta}{(p + R\cos\theta \sqrt{\left\{\frac{p+R}{2R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right\}^2 - \frac{(p+R)^2}{4R^2}\operatorname{sen}^2\xi}.$$

Perchè il valore di questo integrale sia reale, essendo

$$\frac{p+r}{2R} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

sempre positiva, dev'essere

$$\frac{p+R}{2R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \geqslant \frac{p+R}{2R}\operatorname{sen}\xi\,,$$

ossia

$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \leqq \frac{p+R}{2R}(1-\operatorname{sen}\xi)\,.$$

Ora, perchè questa condizione sia soddisfatta, qualunque sia θ, è necessario che sia

$$\frac{p+R}{2R}(1-\operatorname{sen}\xi) \geqslant I\,, \qquad \text{ossia} \qquad \operatorname{sen}\xi \leqslant \frac{p-R}{p+R};$$

condizione che è verificata se è

$$\sqrt{\frac{p+R}{R}}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} \geqslant 1\,;$$

e quindi, se l'angolo ξ è abbastanza piccolo, il moto del punto non è stabile. In tal caso si può porre

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+R}{2}\,.\,\xi \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\left(\frac{p+R}{2R} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)},$$

e poichè $I - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$, viene

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+R}{2}\xi \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\left(\frac{p+R}{2R} - \frac{1\cos\theta}{2}\right)}$$

$$= \varphi_0 \pm R(p+R)\int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)^2}$$

$$= \varphi_0 \pm \frac{p+R}{R}\int \frac{d\theta}{\left(\frac{p}{R}+\cos\theta\right)^2},$$

Poniamo $\frac{P}{R}=\alpha$; si ha:

$$\int\frac{d\theta}{(\alpha+\cos\theta)^2}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta},$$

quindi

$$\int\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{(\alpha+1)\cos^2\frac{\theta}{2}+(\alpha-1)\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}.$$

ossia

$$\int\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}=\frac{2}{\alpha+1}\int\frac{\dfrac{d\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{1+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}tg^2\frac{\theta}{2}}.$$

Ora $\frac{\alpha-1}{\alpha+1}=\frac{p-R}{p+R}>0$; quindi si può porre $\frac{p-R}{p+R}=m^2$, e si ha:

$$\int\frac{d\theta}{\alpha+\cos\theta}=\frac{2}{m(\alpha+1)}\operatorname{artg}\left(\sqrt{\frac{p-R}{p+R}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right).$$

Ed essendo $\alpha=\frac{p}{R}$, si ha

$$\frac{\partial\varphi\left(\frac{p}{R}\right)}{\partial p}=\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},$$

e quindi

$$\varphi=\varphi_0\mp\frac{p+R}{R}\xi R\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{2R}{\sqrt{p^2-R^2}}\operatorname{artg}\left(\sqrt{\frac{p-R}{p+R}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\right].$$

Poniamo

$$y=\operatorname{artg}\left(\sqrt{\frac{p-R}{p+R}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right),$$

d'onde

$$\sqrt{\frac{p-R}{p+R}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}y;$$

ed inoltre, posto $\sqrt{\frac{p-R}{p+R}}=n$, viene

$$n\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\operatorname{tg}y.$$

Ora, per $\theta=0$, cioè nel punto di partenza, si ha;

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}y=0, & \text{e quindi} & y=0; \\ \text{per } \theta=\theta_0 & \text{poniamo} & \varphi=\varphi_0; \end{array}$$

per $\theta = \frac{\pi}{2}$ si ha $\operatorname{tg} y = n < 1, y = \frac{\pi}{4}$

per $\theta = \pi$ „ „ $\operatorname{tg} = \infty$, $y = \frac{\pi}{2}$

per $\theta = \frac{3\pi}{2}$ „ „ $\operatorname{tg} y = -n > -1, y = \frac{3\pi}{4}$

per $\theta = 2\pi$ „ „ $\operatorname{tg} y = 0$, $y = \pi$

per $\theta = k\pi$ „ „ $y = k\frac{\pi}{2}$.

2. Consideriamo due punti d'incontro della trajettoria col circolo equatoriale esterno

$$\theta_1 = 2\mu\pi, \qquad \theta_2 = 2(\mu + 1)\pi;$$

ed in conseguenza

$$y_1 = \mu\pi, \qquad y_2 = (\mu + 1)\pi$$

e corrispondentemente

$$\varphi_1 = \varphi_0 \mp (p + R)\xi \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{2R}{\sqrt{p^2 - R^2}}\mu\pi\right)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \mp (p + R)\xi \frac{\partial}{dp}\left(\frac{2R}{\sqrt{p^2 - R^2}}(\mu + 1)\pi\right);$$

quindi

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (p + R)\xi \,.\, 2\pi R \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{p^2 + R^2}}.$$

L'intervallo fra due punti consecutivi di incontro della trajettoria col circolo equatoriale esterno è quindi costante, ed è eguale a

$$2\pi(p + R)\left\{\xi R \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{p^2 - R^2}}\right\},$$

donde si vede che gli intervalli sono tanto più piccoli quanto più piccolo è ξ, e quindi i punti d'incontro con la circonferenza sono altrettanto numerosi; e se $\xi R \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{p^2 - R^2}}$ è una frazione, la trajettoria rientra in se stessa.

3. Se consideriamo i due punti del cerchio equatoriale interno

$$\theta_1 = (2\mu + 1)\pi \quad \text{e quindi} \quad y_1 = \left(\mu + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$\theta_2 = (2\mu + 3)\pi \quad \text{„} \quad y_2 = \left(\mu + \frac{3}{2}\right)\pi,$$

si ha

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (p + R)\xi \,.\, 2\pi R \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{\sqrt{p_2 - R_2}}.$$

Quindi gli intervalli dei punti in cui la trajettoria sega il cerchio equatoriale interno sono eguali a quelli in cui sega l'esterno; al limite, per $\xi = 0$, si ha il meridiano.

4. Se la posizione iniziale del mobile è in un punto del circolo equatoriale interno, e se la velocità iniziale è diretta tangenzialmente al cerchio, esso descrive il circolo equatoriale interno con moto uniforme; e si ha

$$u\,(p - \mathrm{R}) = c \qquad (c = \text{cost.})$$

Ora $u^2 = 2h$, quindi

$$\frac{c^2}{(p - \mathrm{R})^2} = 2h.$$

5. Se la velocità iniziale fa un angolo α con la tangente al circolo equatoriale, si ha

$$u\,(p - \mathrm{R}) \cos\alpha = c,$$

d'onde

$$(p - \mathrm{R})^2 \cos^2\alpha = \frac{c^2}{2h}.$$

In tal caso, se M è un punto della trajettoria, si ha

$$r + \mathrm{K} = 2\left[(p - \mathrm{R})\cos^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right],$$

$$r - \mathrm{K} = 2\left[(p - \mathrm{R})\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right],$$

quindi

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p - \mathrm{R}}{2}\cos\alpha \times$$

$$\times \int \frac{d\theta}{\sqrt{\left(\frac{p-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{p-\mathrm{R}}{\mathrm{R}}\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}}.$$

Poichè $p > \mathrm{R}$, la quantità sotto radicale è sempre positiva; quindi θ può assumere tutti i valori tra 0 e 2π. Il moto non è stabile, e la trajettoria incontrerà la primitiva dopo che θ avrà compiuta la intera circonferenza.

6. Se il punto M è situato inizialmente su un parallelo qualsiasi, e la sua velocità iniziale fa un angolo α con la tangente al parallelo, si ha

$$\mathrm{K} = (p + \mathrm{R}\cos\theta_0)\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} - r &= (p + \mathrm{R}\cos\theta_0)\cos\alpha - (p + \mathrm{R}\cos\theta) \\
&= (p + \mathrm{R}\cos\theta_0)\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) - p - \mathrm{R}\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= \mathrm{R}\cos\theta_0\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right) - 2p\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2} - \mathrm{R}\left(1 - 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= -2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}\,.\,\{p + \mathrm{R}\cos\theta_0\} + \mathrm{R}\,\{\cos\theta_0 - 1\} + 2\mathrm{R}\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2},
\end{aligned}$$

$$K+r=(p+R\cos\theta_0)-2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0)+p+R-2R\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Aggiungendo e sottraendo $R\cos\theta_0$ e semplificando, si ha

$$K+r=2\cos^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0)+R(1-\cos\theta_0)-2R\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}.$$

Si ha ulteriormente:

$$r-K=-2R\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}-R(\cos\theta_0-1)+2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0).$$

$$=2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0)+R(1-\cos\theta_0)-2R\,\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$=-2R\left(\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\right)+2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0).$$

Ora

$$\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta_0}{2}=\left(\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}+\mathrm{sen}\frac{\theta_0}{2}\right)\left(\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}-\mathrm{sen}\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$=2\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{4}\cos\frac{\theta-\theta_0}{4}\,.\,2\cos\frac{\theta+\theta_0}{4}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{4}$$

$$=\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2};$$

quindi

$$r-K=-2R\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}+2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0).$$

Ed osservando che l'espressioni che dànno $r+K$ e $r-K$ non differiscono tra loro che per lo scambio del seno col coseno dell'angolo α, si ha

$$r+K=-2R\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}+2\cos^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0).$$

L'equazione

$$\varphi=\varphi_0\pm K\int\frac{d\sigma}{\sqrt{r^2-K^2}},$$

posto

$$A=2\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0)-2R\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\,.\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

$$B=2\cos^2\frac{\alpha}{2}(p+R\cos\theta_0)-2R\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\,.\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2},$$

assume in tal caso la forma

$$\varphi=\varphi_0\pm\frac{R(p+R\cos\theta_0)\cos\alpha}{2}\int\frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{A\,.\,B}};$$

ovvero, posto

$$A' = \frac{A}{2R} = \operatorname{sen}^2\left(\frac{p}{R} + \cos\theta_0\right) - \operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

$$B' = \frac{B}{2R} = \cos^2\left(\frac{p}{R} + \cos\theta_0\right) - \operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}.$$

si ha

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p + R\cos\theta_0}{4}\cos\alpha \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{A'\,.\,B'}}.$$

7. Se $\alpha = 0$, cioè se il mobile esce tangenzialmente al parallelo, si ha:

$$\varphi = \varphi_0 \pm \frac{p+R\cos\theta_0}{4} \times$$

$$\times \int \frac{d\theta}{(p+R\cos\theta)\sqrt{\operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\left\{\left(\frac{p}{R}+\cos\theta_0\right) - \operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}\right\}}}$$

Distingueremo due casi:

$$\theta_0 < \frac{\pi}{2}, \qquad \theta_0 > \frac{\pi}{2}.$$

Se $\theta_0 < \frac{\pi}{2}$, cioè il parallelo appartiene alla regione dei punti ellittici, allora $\cos\theta_0 > 0$; e quindi, perchè il radicale sia reale, essendo:

$$\frac{p}{R} + \cos\theta_0 - \operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{\theta-\theta^0}{2} > 0,$$

dev'essere

$$\operatorname{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2} < 0,$$

ossia, per $\theta > 0$, si deve avere

$$\theta \leqq \theta_0,$$

ed il parallelo passa al disopra del circolo equatoriale; e per $\theta < 0$, cioè quando il parallelo passa al disotto del circolo equatoriale, posto $\theta = -\theta_1$, dove $\theta_1 > 0$, la precedente condizione si riduce a

$$\operatorname{sen}\frac{\theta_0-\theta_1}{2}\operatorname{sen}\frac{\theta_0+\theta_1}{2} > 0,$$

che è verificata per

$$\theta_1 \leqq \theta_0.$$

Il mobile oscilla quindi fra i due paralleli $+\theta_0$ e $-\theta_0$, e descrive per ciò una delle traiettorie innanzi studiate.

Se poi è $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$, allora il parallelo è nella regione dei punti iperbolici; e ponendo

$\theta - \pi$ in luogo di θ
$\theta_1 - \pi$ " di θ,

si ha

$$\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}=-\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_0}{2}$$

e

$$\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_0}{2}=\mathrm{sen}\frac{\theta_1-\theta}{2}=-\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_1}{2},$$

e la quantità sotto il radicale diviene

$$\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_1}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_1}{2}\left\{\frac{p}{R}-\cos\theta_1+\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_1}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_1}{2}\right\},$$

e poichè

$$\frac{p}{R}-\cos\theta_1>0,$$

perchè il radicale sia reale si deve avere

$$\mathrm{sen}\frac{\theta+\theta_1}{2}\,\mathrm{sen}\frac{\theta-\theta_1}{2}>0,$$

e quindi

$$|\,\theta\,|>|\,\theta_1\,|,$$

cioè le traiettorie non penetrano nella regione dei punti iperbolici compresi fra i due paralleli $+\theta_1$ e $-\theta_1$.

NOTA.

Consideriamo l'equazione

$$\mu=h^2 sn^2(a,h), \tag{1}$$

e vediamo quali valori assumerà a per i varî valori di μ.

1. Sia

$$\mu<0.$$

Poniamo

$$a=\int_0^{\psi}\frac{dt}{\sqrt{1-h^2\,\mathrm{sen}^2 t}}.$$

Allora

$$sn(a,h)=\mathrm{sen}\,\psi$$

e la (1) diviene

$$\mu=h^2\,\mathrm{sen}^2\psi. \tag{2}$$

Essendo $\mu<0$, poniamo $\mu=-\xi^2$, ove ξ è reale. Dalla (2) si ha

$$\xi i=h\,\mathrm{sen}\,\psi; \tag{3}$$

e ponendo $\psi=i\theta$, ove θ è reale, si ha

$$\mathrm{sen}\,\psi=\mathrm{sen}\,i\theta=i\,sh\theta,$$

per cui la (3) ci dà

$$\xi=h\,.\,sh\theta,$$

equazione possibile, qualunque sia ξ, perchè $sh\theta$ varia tra $+\infty$ e $-\infty$, lo zero compreso.

Con questa sostituzione l'integrale diventa, quando si ponga $t = i\tau$ (essendo per $t = i\theta$, $\tau = \theta$):

$$a = \int_0^{\theta i} \frac{dt}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2 \tau}}$$

$$= \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{1 + h^2 sh^2 \tau}}$$

$$= i \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{1 + h^2 sh^2 \tau}}$$

quindi il valore di a è imaginario puro.

2. Sia

$$\mu > 0.$$

Distingueremo: $0 < \mu < 1$, $\mu > 1$.

α) Se $0 < \mu < 1$, l'equazione (1) è possibile per un valore reale di a, poichè anche il secondo membro è < 1.

β) Se poi è $\mu > 1$ allora a non può essere più reale. Allora, posto

$$a = \int_0^{\psi} \frac{dt}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2 t}}, \tag{4}$$

si ha

$$sn\,(a, h) = \operatorname{sen} \psi.$$

Poniamo $\psi = \frac{1}{2}\pi - i\xi$, allora $\operatorname{sen}\psi = ch\xi = sn\,(a, h)$ e la (4) diviene

$$a = \int_0^{\frac{1}{2}\pi - i\xi} \frac{dt}{\sqrt{1 - h^2 \operatorname{sen}^2 t}}.$$

E posto $t = \frac{1}{2}\pi - i\tau$ si ha:

$$a = \int_0^{\xi} \frac{-i d\tau}{\sqrt{1 - h^2 ch^2 \tau}}.$$

Ora nel limite inferiore ($\tau = 0$) è $ch\tau = 1$; e siccome è $h^2 < 1$ così $1 - h^2 > 0$. Invece nel limite superiore ($\tau = \xi$) è $h^2 ch^2 \xi > 1$, poichè $ch^2 \tau \geqslant 1$, e quindi $1 - h^2 ch^2 \xi < 0$.

Per cui se τ_0 è una radice dell'equazione

$$ch\tau = \frac{1}{h^2},$$

scindendo l'integrale precedente in due parti, si ha:

$$a = -i \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - h^2 ch^2 \tau}} - i \int_{\tau_0}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - h^2 ch^2 \tau}}.$$

Ma

$$\int_{\tau_0}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - h^2 ch^2 \tau}} = \frac{1}{i} \int_{\tau_0}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{h^2 ch^2 \tau - 1}}$$

quindi

$$a = -i \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1 - h^2 ch^2 \tau}} - \int_{\tau_0}^{\xi} \frac{d\tau}{\sqrt{h^2 ch^2 \tau - 1}}$$

donde si vede che, in tal caso, a è complessa.

G. Repetto.

Sassari, aprile 1906.

PROIETTIVITÀ NELLO SPAZIO DI PUNTI GENERATE DA PROIETTIVITÀ NELLO SPAZIO DI RETTE

Assumendo come coordinate di una retta p, considerata come unente due punti y', y'' o come intersezione di due piani ξ', ξ'', le sei note quantità

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_{12} = \rho\,(y'_1 y''_2 - y'_2 y''_1) = \sigma\,(\xi'_3 \xi''_4 - \xi'_4 \xi''_3)\\
p_2 &= p_{23} = \rho\,(y'_2 y''_3 - y'_3 y''_2) = \sigma\,(\xi'_1 \xi''_4 - \xi'_4 \xi''_1)\\
p_3 &= p_{31} = \rho\,(y'_3 y''_1 - y'_1 y''_3) = \sigma\,(\xi'_2 \xi''_4 - \xi'_4 \xi''_2)\\
p_4 &= p_{34} = \rho\,(y'_3 y''_4 - y'_4 y''_3) = \sigma\,(\xi'_1 \xi''_2 - \xi'_2 \xi''_1)\\
p_5 &= p_{14} = \rho\,(y'_1 y''_4 - y'_4 y''_1) = \sigma\,(\xi'_2 \xi''_3 - \xi'_3 \xi''_2)\\
p_6 &= p_{24} = \rho\,(y'_2 y''_4 - y'_4 y''_2) = \sigma\,(\xi'_3 \xi''_1 - \xi'_1 \xi''_3),
\end{aligned}$$

dove ρ e σ sono due fattori di proporzionalità, si ha identicamente $\sum_{i=1}^{3} p_i p_{i+3} = 0$. Le trasformazioni proiettive dello spazio rigato si ottengono da trasformazioni proiettive dello spazio di punti o di piani, e precisamente la collineazione

$$y_r = \sum_1^4{}_k\, a_{rk}\, y'_k \tag{1}$$

dà luogo alla proiettività nello spazio di rette:

$$\begin{aligned}
p_{12} &= A^{12}_{12} p'_{12} + A^{12}_{23} p'_{23} + A^{12}_{31} p'_{31} + A^{12}_{34} p'_{34} + A^{12}_{14} p'_{14} + A^{12}_{24} p'_{24}\\
p_{23} &= A^{23}_{12} p'_{12} + A^{23}_{23} p'_{23} + A^{23}_{31} p'_{31} + A^{23}_{34} p'_{34} + A^{23}_{14} p'_{14} + A^{23}_{24} p'_{24}\\
p_{31} &= A^{31}_{12} p'_{12} + A^{31}_{23} p'_{23} + A^{31}_{31} p'_{31} + A^{31}_{34} p'_{34} + A^{31}_{14} p'_{14} + A^{31}_{24} p'_{24}\\
p_{34} &= A^{34}_{12} p'_{12} + A^{34}_{23} p'_{23} + A^{34}_{31} p'_{31} + A^{34}_{34} p'_{34} + A^{34}_{14} p'_{14} + A^{34}_{24} p'_{24}\\
p_{14} &= A^{14}_{12} p'_{12} + A^{14}_{23} p'_{23} + A^{14}_{31} p'_{31} + A^{14}_{34} p'_{34} + A^{14}_{14} p'_{14} + A^{14}_{24} p'_{24}\\
p_{24} &= A^{24}_{12} p'_{12} + A^{24}_{23} p'_{23} + A^{24}_{31} p'_{31} + A^{24}_{34} p'_{34} + A^{24}_{14} p'_{14} + A^{24}_{24} p'_{24},
\end{aligned}$$

dove si indica con A^{hk}_{pq} il subdeterminante di 2° ordine formato colla h^{ma} e colla k^{ma} orizzontale e colle verticali p^{ma} e q^{ma} del determinante A modulo della (1); sicchè $A^{hk}_{pq} = -A^{kh}_{pq} = -A^{hk}_{qp} = A^{kh}_{qp}$. Analogamente la collineazione $\xi_r = \sum_1^4{}_k\, b_{rk}\, \xi'_k$ dà luogo nello spazio di rette alla proiettività

$$p_{hk} = B^{mn}_{34} p'_{12} + B^{mn}_{14} p'_{23} + B^{mn}_{24} p'_{31} + B^{mn}_{12} p'_{34} + B^{mn}_{23} p'_{14} + B^{mn}_{31} p'_{24},$$

dove hk, mn sono tra le coppie 12, 23, 31, 34, 14, 24 due che non hanno nessun indice comune. Se la $y_r = \Sigma\, a_{rk}\, y'_k$ e la $\xi_r = \Sigma\, b_{rk}\, \xi'_k$

coincidono, cioè se le b_{ik} sono proporzionali ai subdeterminanti A_{ik} complementari della a_{ik} in A, coincidono pure le due proiettività originate nello spazio di rette per la nota proprietà:

$$A_{ri}\,A_{sj} - A_{rj}\,A_{si} = A\,(a_{hm}\,a_{kn} - a_{hn}\,a_{km}) = A\,A^{hk}_{mn}\,,$$

se $A_{ri}\,A_{sj} - A_{rj}\,A_{si}$ è il complemento algebrico del determinante omologo di A^{hk}_{mn} nel reciproco di A.

Così la correlazione $y_r = \sum_1^4{}_k\, d_{rk}\,\xi'_k$ genera nello spazio di rette la proiettività

$$p_{hk} = D^{hk}_{34}\,p'_{12} + D^{hk}_{14}\,p'_{23} + D^{hk}_{24}\,p'_{31} + D^{hk}_{12}\,p'_{34} + D^{hk}_{23}\,p'_{14} + D^{hk}_{31}\,p'_{24}$$

e la correlazione $\xi_r = \sum_1^4{}_k\, c_{rk}\,y'_k$ genera le proiettività

$$p_{hk} = C^{mn}_{12}\,p'_{12} + C^{mn}_{23}\,p'_{23} + C^{mn}_{31}\,p'_{31} + C^{mn}_{34}\,p'_{34} + C^{mn}_{14}\,p'_{14} + C^{mn}_{24}\,p'_{24}$$

per le quali due ultime vale la stessa osservazione che per le precedenti.

Tra i coefficienti delle trasformazioni proiettive nello spazio di rette così generate, per es. tra le A^{hk}_{pq}, poichè sono i subdeterminanti di 2° ordine di un determinante del 4°, passano 15 relazioni, delle quali tre del tipo:

$$A = A^{hk}_{12}\,A^{mn}_{34} + A^{hk}_{23}\,A^{mn}_{14} + A^{hk}_{31}\,A^{mn}_{24} + A^{hk}_{14}\,A^{mn}_{23} + A^{hk}_{24}\,A^{mn}_{31} + A^{hk}_{34}\,A^{mn}_{12}$$

e dodici del tipo:

$$0 = A^{ab}_{12}\,A^{cd}_{34} + A^{ab}_{23}\,A^{cd}_{14} + A^{ab}_{31}\,A^{cd}_{24} + A^{ab}_{14}\,A^{cd}_{23} + A^{ab}_{24}\,A^{cd}_{31} + A^{ab}_{34}\,A^{cd}_{12}$$

dove *ab*, *cd* sono due tra i gruppi 12, 23, 31, 34, 14, 24 che hanno un indice comune. Viceversa: data una proiettività nello spazio di rette, tra i coefficienti della sua espressione analitica debbono passare le 15 relazioni soprascritte. Infatti i coefficienti della p'_{ij} non sono che le coordinate della retta corrispondente allo spigolo del tetraedro fondamentale che unisce i due vertici P_i e P_j (cioè i due vertici che hanno rispettivamente non nulla la i^{ma} e la j^{ma} coordinata); ora le coordinate della retta su cui stanno gli spigoli del tetraedro fondamentale debbono soddisfare a 12 relazioni $\sum_1^3{}_i\,(p'_i\,p_{i+3} + p_i\,p'_{i+3}) = 0$ che dicono che esse si tagliano a 2 a 2, a meno di tre coppie sghembe che danno le altre tre relazioni. Cioè l'espressione analitica di una proiettività nello spazio di rette ha per coefficienti delle quantità, che possono considerarsi come subdeterminanti di 2° ordine di un determinante del 4°, i cui elementi sono appunto i coefficienti della proiettività che trasforma l'uno nell'altro i due spazi di punti che danno luogo ai due spazi proiettivi di rette.

Data una proiettività nello spazio di punti è facile trovare a quale proiettività nello spazio di rette dia luogo; per passare da una proiettività nello spazio di rette a quello che la genera nello spazio di punti, si possono usare le seguenti relazioni. (1)

Si ha identicamente:

$$\begin{vmatrix} A^{14}_{14} & A^{14}_{31} & A^{14}_{34} & A^{14}_{12} & A^{14}_{24} \\ A^{31}_{14} & A^{31}_{31} & A^{31}_{34} & A^{31}_{12} & A^{31}_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ A^{12}_{14} & A^{12}_{31} & A^{12}_{34} & A^{12}_{12} & A^{12}_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{31} & 0 & 0 \\ a_{43} & a_{44} & a_{41} & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{14} & a_{11} & 0 & 0 \\ -a_{42} & 0 & 0 & a_{44} & a_{41} \\ -a_{12} & 0 & 0 & a_{14} & a_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{22} & 0 & a_{31} & A_{42} & 0 \\ 0 & A_{22} & a_{41} & A_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{23} & 0 & A_{33} & a_{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} \end{vmatrix}$$

Ora il primo fattore vale

$$\begin{vmatrix} A^{14}_{14} & A^{14}_{31} & A^{14}_{12} \\ A^{31}_{14} & A^{31}_{31} & A^{31}_{12} \\ A^{12}_{14} & A^{12}_{31} & A^{12}_{21} \end{vmatrix}$$

il 2° fattore vale $A_{22} A^{14}_{14}$, il determinante prodotto vale $a^2_{11} . A_{22} . A . A^{14}_{14}$ quindi si ha:

$$a^2_{11} . A = \begin{vmatrix} A^{14}_{14} & A^{14}_{31} & A^{14}_{12} \\ A^{31}_{14} & A^{31}_{31} & A^{31}_{12} \\ A^{12}_{14} & A^{12}_{31} & A^{12}_{12} \end{vmatrix}$$

analogamente per gli altri elementi di A.

Quindi data la proiettività di modulo M

$$p_{12} = m_{11} p'_{12} + m_{12} p'_{23} + m_{13} p'_{31} + m_{14} p'_{34} + m_{15} p'_{14} + m_{16} p'_{24}$$

. . . . ,

se nello spazio di punti le corrisponde una collineazione $x_r = \Sigma a_{rk} x'_k$ si ha a meno del fattore $M^4 = A$

$$a^2_{11} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} & m_{15} \\ m_{31} & m_{33} & m_{35} \\ m_{51} & m_{53} & m_{55} \end{vmatrix} \quad a^2_{12} = -\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{14} \\ m_{31} & m_{32} & m_{36} \\ m_{51} & m_{52} & m_{56} \end{vmatrix} \quad a^2_{13} = -\begin{vmatrix} m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{33} & m_{33} & m_{34} \\ m_{52} & m_{53} & m_{54} \end{vmatrix} \quad a^2_{14} = -\begin{vmatrix} m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{54} & m_{55} & m_{56} \end{vmatrix}$$

$$a^2_{21} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{13} & m_{15} \\ m_{21} & m_{23} & m_{25} \\ m_{61} & m_{63} & m_{65} \end{vmatrix} \quad a^2_{22} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{16} \\ m_{21} & m_{22} & m_{26} \\ m_{61} & m_{62} & m_{66} \end{vmatrix} \quad a^2_{23} = \begin{vmatrix} m_{12} & m_{43} & m_{14} \\ m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{62} & m_{63} & m_{64} \end{vmatrix} \quad a^2_{24} = \begin{vmatrix} m_{14} & m_{15} & m_{16} \\ m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{vmatrix}$$

$$a^2_{31} = -\begin{vmatrix} m_{21} & m_{23} & m_{25} \\ m_{31} & m_{33} & m_{35} \\ m_{41} & m_{43} & m_{45} \end{vmatrix} \quad a^2_{32} = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{26} \\ m_{31} & m_{32} & m_{36} \\ m_{41} & m_{42} & m_{46} \end{vmatrix} \quad a^2_{33} = \begin{vmatrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{vmatrix} \quad a^2_{34} = \begin{vmatrix} m_{24} & m_{25} & m_{26} \\ m_{34} & m_{35} & m_{36} \\ m_{44} & m_{45} & m_{46} \end{vmatrix}$$

$$a^2_{41} = -\begin{vmatrix} m_{41} & m_{43} & m_{45} \\ m_{51} & m_{53} & m_{55} \\ m_{61} & m_{63} & m_{65} \end{vmatrix} \quad a^2_{42} = \begin{vmatrix} m_{41} & m_{42} & m_{46} \\ m_{51} & m_{52} & m_{56} \\ m_{61} & m_{62} & m_{66} \end{vmatrix} \quad a^2_{43} = \begin{vmatrix} m_{42} & m_{43} & m_{44} \\ m_{52} & m_{53} & m_{54} \\ m_{62} & m_{63} & m_{64} \end{vmatrix} \quad a^2_{44} = \begin{vmatrix} m_{44} & m_{45} & m_{46} \\ m_{54} & m_{55} & m_{56} \\ m_{64} & m_{65} & m_{66} \end{vmatrix} .$$

(1) Cfr. *Compound determinants by* W. H. Metzler in *American Journal*, 1894.

Se invece nello spazio di punti corrisponde una correlazione $x_r = \Sigma\, b_{rk}\, \xi'_k$, i suoi coefficienti a meno dell'analogo fattore sono:

$$d_{11}^2 = \begin{vmatrix} m_{12} & m_{14} & m_{16} \\ m_{32} & m_{34} & m_{36} \\ m_{52} & m_{55} & m_{56} \end{vmatrix} \quad d_{12}^2 = -\begin{vmatrix} m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{vmatrix} \quad d_{13}^2 = -\begin{vmatrix} m_{11} & m_{15} & m_{16} \\ m_{31} & m_{35} & m_{36} \\ m_{51} & m_{65} & m_{56} \end{vmatrix} \quad d_{14}^2 = -\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} \end{vmatrix}$$

$$d_{21}^2 = -\begin{vmatrix} m_{12} & m_{14} & m_{16} \\ m_{22} & m_{24} & m_{26} \\ m_{62} & m_{64} & m_{66} \end{vmatrix} \quad d_{22}^2 = \begin{vmatrix} m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{63} & m_{64} & m_{65} \end{vmatrix} \quad d_{23}^2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{15} & m_{16} \\ m_{21} & m_{25} & m_{26} \\ m_{61} & m_{65} & m_{66} \end{vmatrix} \quad d_{24}^2 = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} \end{vmatrix}$$

$$d_{31}^2 = -\begin{vmatrix} m_{22} & m_{24} & m_{26} \\ m_{32} & m_{34} & m_{36} \\ m_{42} & m_{44} & m_{46} \end{vmatrix} \quad d_{32}^2 = \begin{vmatrix} m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{43} & m_{44} & m_{45} \end{vmatrix} \quad d_{33}^2 = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{25} & m_{26} \\ m_{31} & m_{35} & m_{36} \\ m_{41} & m_{45} & m_{46} \end{vmatrix} \quad d_{34}^2 = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} \end{vmatrix}$$

$$d_{41}^2 = -\begin{vmatrix} m_{42} & m_{44} & m_{46} \\ m_{52} & m_{54} & m_{56} \\ m_{62} & m_{64} & m_{66} \end{vmatrix} \quad d_{42}^2 = \begin{vmatrix} m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{53} & m_{54} & m_{55} \\ m_{63} & m_{64} & m_{65} \end{vmatrix} \quad d_{43}^2 = \begin{vmatrix} m_{41} & m_{45} & m_{46} \\ m_{51} & m_{55} & m_{56} \\ m_{61} & m_{65} & m_{66} \end{vmatrix} \quad d_{44}^2 = \begin{vmatrix} m_{41} & m_{42} & m_{43} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} \end{vmatrix}.$$

Aosta, aprile 1906.

Dott. Agostino Borio.

SOPRA UN' EQUAZIONE FUNZIONALE

da cui discendono due notevoli formole di Matematica attuariale

Nella *Teoria delle assicurazioni sulla vita* (detta altrimenti *Matematica attuariale*, o più semplicemente *Attuaria*), si presentano spesso delle questioni che sono di grande interesse anche per i matematici puri; ed in prova di ciò, mostreremo come due importanti formule di tale Teoria siano conseguenza della risoluzione di una certa *equazione funzionale*, quando ad un fattore costante arbitrario che in questa figura si attribuiscano rispettivamente i particolari valori 1 e 2.

*
* *

1. Perciò proponiamoci dapprima di determinare tutte le possibili funzioni $\varphi(x)$, continue e derivabili, tali che se y e z sono due altre variabili indipendenti qualsivogliano, si abbia, per ogni terna di valori di x, y, z:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x+z)=c\,.\,\varphi(x+u), \tag{1}$$

essendo u funzione continua e derivabile delle sole y e z, mentre c indica una costante diversa da zero, prestabilita arbitrariamente.

Dalla (1), derivando parzialmente rispetto ad y e rispetto a z, ricaviamo le altre

$$\varphi'(x+y)=c\varphi'(x+u)\,.\,\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varphi'(x+z)=c\varphi'(x+u)\,.\,\frac{\partial u}{\partial z} \tag{2}$$

E derivando queste rispetto ad x, otteniamo

$$\varphi''(x+y)=c\varphi''(x+u)\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varphi''(x+z)=c\varphi''(x+u)\,.\,\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Epperò

$$\frac{\varphi''(x+y)}{\varphi'(x+y)}=\frac{\varphi''(x+z)}{\varphi'(x+z)}.$$

Il rapporto

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)}$$

non muta dunque di valore col mutare arbitrariamente quello della variabile x; cioè deve risultare

$$\frac{d}{dx}\log\varphi'(x)=a,$$

con a quantità costante; ed il logaritmo essendo neperiano.

Mediante due successive integrazioni, si conclude pertanto che le richieste funzioni $\varphi(x)$ dovranno essere della forma

$$\varphi(x)=ke^{ax}+b, \tag{3}$$

con k e b nuove costanti.

Si osservi subito che nell'ipotesi che fosse $k=0$, la costante b, a cui si ridurrebbe allora la funzione $\varphi(x)$, dovrebbe — per la possibilità della (1) — essere necessariamente uguale a zero, quando il valore di c che figura nella (1) fosse differente da 2; e risulterebbe invece una costante arbitraria, quando fosse $c=2$.

Ma ora proveremo che, anche nell'ipotesi che la funzione $\varphi(x)$ non sia costante — e quindi k differente da zero —, dovrà essere $b=0$, se è $c \neq 2$; mentre per $c=2$ il valore di b resterà del tutto arbitrario.

Infatti, sommando membro a membro le (2), otteniamo

$$\varphi'(x+y)+\varphi'(x+z)=c\varphi'(x+u)\,.\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Ma derivando ambo i membri della (1) rispetto ad x, abbiamo

$$\varphi'(x+y)+\varphi'(x+z)=c\varphi'(x+u).$$

La funzione u deve perciò soddisfare all'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=1, \tag{4}$$

cioè ha necessariamente la forma

$$u=y+v,$$

con v funzione della sola differenza $z-y$.

Di più, facendo $x=0$ nella (1), dobbiamo avere l'identità

$$\varphi(y)+\varphi(z)=c\varphi(u). \tag{5}$$

Ma dalla (3) si ricava

$$\varphi(y)+\varphi(z)=k(e^{ay}+e^{az})+2b$$
$$c\varphi(u)=cke^{au}+bc.$$

Epperò

$$e^{ay}+e^{az}=ce^{au}+\frac{b(c-2)}{k}.$$

Da quest'uguaglianza, con derivazioni parziali rispetto ad y e a z, si deduce

$$e^{ay}=ce^{au}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad e^{az}=ce^{au}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

E quindi, a causa della (4):

$$e^{ay}+e^{az}=ce^{au}.$$

Dunque, perchè abbiano luogo simultaneamente le (3), (4) e (5), deve essere

$$b(c-2)=0.$$

Ne segue che se è $c \neq 2$, dovremo prendere $b=0$; mentre per $c=2$, il valore di b resterà del tutto arbitrario.

Si conclude pertanto: *Tutte le possibili funzioni* $\varphi(\mathrm{x})$ *che soddisfano la* (1) *sono quelle della forma*

$$\varphi(x)=ke^{ax}, \tag{6}$$

ovvero dell'altra

$$\varphi(x)=ke^{ax}+b, \tag{7}$$

secondo che il fattore c *della* (1) *è diverso da* 2, *ovvero è uguale a* 2; *ed essendo* a, b, k *delle costanti completamente arbitrarie.* [1]

---

[1] Appare dunque che le funzioni più generali possibili che soddisfano la (1) sono quelle che risultano supponendo $c=2$, perchè allora nella loro espressione comune figurano tre costanti arbitrarie, e non due sole, come avviene per tutti gli altri valori di c.

La funzione u delle due variabili y e z dovrà poi, in ogni caso, avere l'espressione

$$u = \frac{1}{a} \log \frac{e^{ay} + e^{az}}{c} = y + \frac{1}{a} \log \frac{1 + e^{a(z-y)}}{c}.$$

Se quindi supponiamo $c = 1$, abbiamo:
Tutte le possibili funzioni $\varphi(x)$ *che soddisfano alla condizione*

$$\varphi(x+y) + \varphi(x+z) = \varphi(x+u) \tag{8}$$

sono quelle date dalla (6).
E sarà allora

$$u = y + \frac{1}{a} \log \{ 1 + e^{a(z-y)} \}. \tag{9}$$

Mentre: *Tutte le possibili funzioni* $\varphi(x)$ *che soddisfano alla condizione*

$$\varphi(x+y) + \varphi(x+z) = 2\varphi(x+u) \tag{10}$$

sono quelle date dalla (7).
Ed allora sarà

$$u = y + \frac{1}{a} \log \frac{1 + e^{a(z-y)}}{2}. \tag{11}$$

2. Vogliansi ora determinare tutte le possibili funzioni $f(x)$, tali che per esse abbiasi

$$f(x+y) \,.\, f(x+z) = \rho \,.\, f(x+u), \tag{12}$$

con u, al solito, funzione di y e z, ed anche ρ indipendente da x; quindi

$$\rho = \frac{f(y) \,.\, f(z)}{f(u)}.$$

Posto

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \varphi(x),$$

rileviamo che le nuove funzioni si deducono, mediante quest'ultima eguaglianza, da tutte quelle per cui ha luogo la (8); cioè sono *tutte e sole* quelle la cui derivata logaritmica $\varphi(x)$ ha l'espressione (6). Ne segue che esse sono date dalla formula

$$f(x) = \mathrm{A} e^{m e^{ax}}, \tag{13}$$

con A, a, m costanti arbitrarie.

La corrispondente funzione u avrà ancora l'espressione (9); epperò si deduce facilmente che il fattore ρ della (12) coincide colla costante A che figura nella (13).

Vogliansi invece tutte le possibili funzioni $f(x)$ per le quali si abbia

$$f(x+y) \,.\, f(x+z) = \rho \, [f(x+u)]^2, \tag{14}$$

con ρ sempre indipendente da x, e quindi

$$\rho = \frac{f(y) \, . \, f(z)}{[f(u)]^2} \, .$$

Posto anche in questo caso

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \varphi(x),$$

riconosciamo subito che tali funzioni si deducono, mediante questa uguaglianza, da tutte quelle per cui ha luogo la (10); cioè coincidono colle funzioni la cui derivata logaritmica $\varphi(x)$ l'espressione (7). Epperò esse vengono date dalla formula

$$f(x) = \mathrm{A} e^{me^{ax}+bx} \tag{15}$$

dove A, a, m, b, indicano quattro costanti del tutto arbitrarie.

La corrispondente funzione u avrà poi l'espressione (11); e quindi per il fattore ρ della (14) si trova, dopo facili calcoli, il valore

$$\rho = e^{b(z-y) - \frac{2b}{a} \log \frac{1+e^{a(z-y)}}{2}} \, .$$

3. Supponiamo ora che la variabile x rappresenti un numero qualunque di anni, e si indichi con $f(x)$ quella funzione che dà, per ogni valore di x, il numero delle persone di un certo gruppo che sono ancora in vita all'età x. Vogliamo vedere a quale speciale tipo di funzioni dovrebbe appartenere $f(x)$ affinchè, per ogni coppia di persone scelte arbitrariamente, esista una sola persona che presenti in qualunque istante la stessa probabilità di vita di quella coppia: cioè che, rispetto alla mortalità, essa sia sostituibile alla coppia medesima.

Perciò si osservi che le probabilità che hanno due persone, l'una d'anni y e l'altra d'anni z, di essere ancora in vita dopo un numero qualunque x di anni, sono rispettivamente

$$\frac{f(x+y)}{f(y)} \quad \text{e} \quad \frac{f(x+z)}{f(z)} \, .$$

Per il principio della probabilità composta, la probabilità che dopo x anni quelle due teste siano entrambe in vita, sarà

$$\frac{f(x+y)}{f(y)} \, . \, \frac{f(x+z)}{f(z)} \, .$$

Se dunque esiste una testa sostituibile a quelle due, nel senso già detto, vuol dire che esiste una funzione u delle variabili y e z, che rappresenta l'età di quella persona ideale, e che per ogni coppia di valori di y e z soddisfa alla condizione

$$\frac{f(x+y)}{f(y)} \, . \, \frac{f(x+z)}{f(z)} = \frac{f(x+u)}{f(u)} \, ,$$

qualunque sia poi il valore di x.

Per la funzione $f(x)$, e la conseguente funzione u delle variabili y e z, deve dunque aver luogo la (12); epperò $f(x)$ ha necessariamente la forma (13).

Si giunge così alla *formola di Gompertz*, tanto notevole in Attuaria; la quale adattata ad una *tavola di mortalità* (col particolarizzare, mediante tre valori forniti dalla tavola, le tre costanti arbitrarie che in detta formola figurano), permette appunto — come è noto agli *attuari* — la sostituzione di una sola testa a due qualunque altre.

Possiamo inoltre aggiungere che l'età u di quell'unica testa si otterrà — a causa della (9) — coll'aggiungere alla minore delle due età che si considerano la quantità

$$\frac{1}{a}\log(1+e^{a\delta}),$$

oppure alla maggiore di esse, la quantità

$$\frac{1}{a}\log(1+e^{-a\delta}),$$

essendo δ la differenza delle due età medesime. E se poi queste fossero uguali, la quantità da aggiungersi all'età comune, per ottenere quella dell'unica testa, sarebbe

$$\frac{1}{a}\log 2.$$

4. Proponiamoci invece di vedere a quale speciale tipo di funzioni deve appartenere $f(x)$ affinchè, per ogni coppia di persone che abbiano differenti età, esista un'altra coppia, formata da teste della medesima età, e che abbia la stessa probabilità di vita della precedente.

In questo caso, qualunque siano i valori di y e z, e per qualsivoglia valore di x, dovremo invece avere

$$\frac{f(x+y)}{f(y)}\cdot\frac{f(x+z)}{f(z)}=\left[\frac{f(x+u)}{f(u)}\right]^2,$$

dove u rappresenta l'età comune delle due nuove teste.

Appare quindi che una tale funzione $f(x)$ dovrà soddisfare alla condizione (14); epperò $f(x)$ avrà necessariamente la forma (15).

Si giunge così alla importante *formula di Makeham*, (1) la quale adattata ad una tavola di mortalità (col particolarizzare le quattro

(1) Invece il LAURENT, nel suo ben noto manuale: *Théorie et pratique des assurances sur la vie*, giunge (pag. 22) a quella formula col proporsi il problema della sostituzione di una sola testa a due qualunque altre; perchè non si accorge che, in tal caso, il valore della costante b che figura nella (15) deve essere uguale a zero.

costanti arbitrarie che in essa figurano, mediante quattro valori forniti dalla tavola), permette appunto — come è noto in Attuaria — la sostituzione di una coppia di teste della medesima età ad un'altra coppia formata da teste di età differenti.

Di più, a causa della (11), l'età u comune alle due nuove teste si otterrà aggiungendo alla minore delle due età differenti la quantità

$$\frac{1}{a}\log\frac{1+e^{a\delta}}{2},$$

ovvero alla maggiore di esse, la quantità

$$\frac{1}{a}\log\frac{1+e^{-a\delta}}{2},$$

essendo ancora δ la differenza tra le due età che si considerano; ed intendendo — come abbiamo sempre supposto fin qui — che i logaritmi siano neperiani.

MINEO CHINI.

NUMERI INTERI, CHE SI POSSONO DECOMPORRE

nella somma o nella differenza dei quadrati di due numeri interi

Oggetto del presente lavoro è, in sostanza, di risolvere per numeri interi le equazioni indeterminate di secondo grado $x^2 \pm y^2 = A$, ove A s'intende un numero intero.

A taluno potrà sembrare per lo meno strano, che ci possa essere ancora chi, occupandosi di questioni riguardanti la teoria dei numeri, ritorni su argomenti già da lungo tempo studiati e approfonditi anche da punti di vista più elevati. Ma, se si pensa che talvolta molti si disinteressano di problemi elementari importanti, solo per il fatto che le vie, che conducono alla loro risoluzione, sono o lunghe, o difficili, o richiedono la conoscenza di nozioni non sempre elementari, si comprenderà come possa essere utile, che vengano indicati anche dei metodi semplici per la risoluzione di quelle questioni.

Se nell'equazione generale di Pell: $x^2 - Dy^2 = A$ supponiamo $D = \mp 1$, ritroviamo le equazioni $x^2 \pm y^2 = A$ da noi prese a studiare. Dai vari autori queste equazioni sono perciò considerate come casi particolari dell'equazione di Pell, e, come tali, per risolverle, vengono applicati ad esse i metodi usati per l'equazione generale, fondati sulla teoria dei residui quadratici. Solo nel trattato di Bachmann [1] a pag. 222 e segg. ho notato, per risolvere l'equazione $x^2 + y^2 = A$, un procedimento, che, nelle linee generali è uguale al nostro, sebbene la trattazione che noi daremo sia più sistematica, e non richieda, per il suo sviluppo, che la conoscenza di pochi teoremi di dominio comune. Per l'equazione $x^2 - y^2 = A$, un semplice procedimento per risolverla, quando A è un quadrato perfetto, è indicato nel trattato elementare di G. Wertheim: " Anfangsgründe der Zahlenlehre ", Braunschweig, 1902; pag. 139. Noi lo riprodurremo, supponendo A generico.

Notiamo ancora come i varî autori, che si occuparono della questione, [1] si sieno sempre limitati, allo scopo di fare un'applicazione diretta della teoria generale dell'equazione di Pell, alla risoluzione dell'equazione $x^2 + y^2 = A$ nel solo caso, in cui A è un numero dispari, i cui fattori primi sono del tipo $4p + 1$. In tali trattati, a quanto mi consta, la condizione necessaria e sufficiente per la risolubilità in numeri interi della equazione soprascritta, sebbene sia nota, non si trova enunciata *in forma esplicita.*

Nei primi cinque capitoli di questo scritto studieremo la prima delle due equazioni considerate, nel sesto l'ultima. Per entrambe indicheremo la condizione necessaria e sufficiente per la loro risolubilità in numeri interi, il numero delle soluzioni che ammettono, e daremo un metodo per determinarle tutte.

Il presente lavoro, sebbene contenga anche risultati, che non crediamo noti, non ha quindi la pretesa di voler essere originale nel concetto, ma solo nel metodo. Se poi il lettore, giunto alla fine, senza incontrare difficoltà, avrà acquistato una nozione esatta dei risultati ottenuti, il nostro intento sarà raggiunto.

CAPITOLO I.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero intero sia decomponibile nella somma dei quadrati di due numeri interi.

§ 1. Premettiamo alcune definizioni allo scopo di semplificare, nel seguito, la dicitura.

Colla notazione:

$$A = \{a, \overline{a}\}$$

(1) L. Dirichlet, *Lezioni sulla teoria dei numeri.* Traduz. di A. Faifofer, Venezia. 1881, § 68. — G. Wertheim, *Elemente der Zahlentheorie,* Leipzig, 1887, § 112. — P. Bachmann, *Die Elemente der Zahlentheorie,* Leipzig, 1892. Vierter Abschnitt, n. 19, 20, 21. — P. Gazzaniga, *Gli elementi della teoria dei numeri.* Padova, 1903, § 6.

intenderemo di esprimere che il numero A è decomponibile nella somma di due quadrati di basi a, $\overline{a}$, ossia che fra a, $\overline{a}$ e A passa la relazione:

$$A = a^2 + \overline{a}^2. \tag{1}$$

Intenderemo in seguito che A, a, $\overline{a}$ sieno numeri interi.

Diremo poi semplicemente che $\{a, \overline{a}\}$ è una decomposizione di A. I numeri a, $\overline{a}$ saranno chiamati i *termini* della decomposizione.

La decomposizione $\{\overline{a}, a\}$ del numero A, che differisce dalla precedente solo per l'ordine dei termini, sarà considerata *identica* alla decomposizione $\{a, \overline{a}\}$.

Posto che valga la (1), il numero A, oltre alle decomposizioni $\{a, \overline{a}\}$ $\{\overline{a}, a\}$, ammette quelle che si ottengono cambiando segno all'uno, o all'altro, o ad entrambi i termini delle decomposizioni precedenti. In tutto avremo, in generale, pel numero A otto decomposizioni (che si riducono a quattro, se uno dei termini è uguale a zero, o se i due termini sono uguali); ma noi converremo sempre di considerare decomposizioni distinte, i cui termini sono positivi, perchè, note queste, sono note anche le altre.

Una decomposizione sarà chiamata *eccezionale*, se uno dei termini è zero; nel caso opposto si dirà *regolare*. È ovvio che i soli quadrati perfetti ammettono decomposizioni eccezionali.

Una decomposizione si dirà poi *propria*, se i termini sono numeri primi fra loro; *impropria* nel caso opposto.

§ 2. Teorema. — *Se* A, B, C, ... *sono numeri decomponibili nella somma di due quadrati, anche il prodotto* ABC ... *è decomponibile nella somma di due quadrati.*

Supponiamo, conforme all'ipotesi fatta, che sia:

$$A = \{a, \overline{a}\}, \qquad B = \{b, \overline{b}\}, \qquad C = \{c, \overline{c}\}, \ldots .$$

Si noti che vale l'identità:

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = (mp - nq)^2 + (mq + np)^2.$$

Applicandola alle decomposizioni di A e B, risulterà:

$$AB = \{ab - \overline{a}\overline{b},\ a\overline{b} + \overline{a}b\}$$

ossia il numero AB è decomponibile nella somma di due quadrati.

Applicando la stessa identità alle decomposizioni dei numeri AB e C, si dimostra il teorema anche pel prodotto ABC, e così si procederebbe per un prodotto di quanti si vogliano fattori.

Corollario. — *Le potenze di un numero decomponibile nella somma di due quadrati sono esse pure decomponibili nella somma di due quadrati.*

Avvertenza. — Si noti che il teorema inverso non è vero. Ad es. il numero $3^2 . 7^2 = 441$ ammette la decomposizione eccezionale $\{21, 0\}$, ma i fattori 3 e 7 di 441 non ammettono nessuna decomposizione. (1)

§ 3. A base del teorema fondamentale, che segue, sono le due proposizioni seguenti:

a) Se un numero divide la somma di due quadrati primi fra loro, esso pure è decomponibile nella somma di due quadrati.

b) Un numero primo della forma $4p+1$ *ammette una ed una sola decomposizione, mentre un numero primo della forma* $4p-1$ *non ammette nessuna decomposizione.* (Fermat-Euler.)

Questi teoremi saranno in seguito indicati rispettivamente colle designazioni: *a*) e *b*).

Una dimostrazione del primo teorema può essere data a mezzo della teoria delle frazioni continue e la dimostrazione del secondo si può far dipendere dal primo e dal teorema di Wilson: " Il numero $1 + \underline{|p-1}$ è divisibile per p solo se p è un numero primo ". (2) Dimostrazioni più elementari non ne conosciamo, e perciò rimandiamo il lettore ai trattati citati.

Passiamo ora a dimostrare il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero intero si possa decomporre nella somma di due quadrati è ch'esso non contenga potenze dispari di fattori primi di tipo* $4p-1$.

Scomposto un numero A in fattori primi, risulti:

$$A = 2^\lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_m^{\alpha_m} Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_n^{\beta_n},$$

ove con $P_1, P_2, \ldots, P_m$ si sono indicati numeri primi di tipo $4p+1$, e con $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ numeri primi di tipo $4p-1$. (3)

Il fattore 2^λ ammette sempre una decomposizione: regolare, se λ è dispari, eccezionale se λ è pari.

Infatti, nel primo caso si può scrivere:

$$2^\lambda = \left\{2^{\frac{\lambda-1}{2}}, 2^{\frac{\lambda-1}{2}}\right\},$$

e nel secondo:

$$2^\lambda = \left\{2^{\frac{\lambda}{2}}, 0\right\}.$$

In virtù del teorema *b*) e del corollario del § 2, le potenze $P_1^{\alpha_1}, P_2^{\alpha_2}, \ldots, P_m^{\alpha_m}$ ammetteranno anch'esse ciascuna una decomposizione.

---

(1) Sarà oggetto di un'altra Nota lo studio delle decomposizioni razionali di numeri razionali.

(2) Cfr. G. Wertheim: *Anfangsgründe der Zahlentheorie*, Braunschweig, 1902, § 61; ovvero P. Gazzaniga, *loc. cit.*

(3) È ovvio che un numero dispari, primo o no, si può sempre mettere sotto l'una o l'altra delle due forme.

Infine ogni fattore $Q_r^{\beta_r}$, se β_r è un numero pari, ammette la decomposizione eccezionale:

$$Q_r^{\beta_r} = \left\{Q_r^{\frac{\beta_r}{2}}, 0\right\}.$$

In conclusione, quando gli esponenti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono tutti numeri pari, i fattori di A sono decomponibili nella somma di due quadrati, e quindi A stesso, in virtù del teorema del § 2, ammetterà una decomposizione.

Con ciò la condizione enunciata nel teorema appare sufficiente.

Per dimostrare ch'essa è anche necessaria, basterà provare che, se qualcuno degli esponenti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ è dispari, A non ammette alcuna decomposizione.

Intanto, se A ammettesse una decomposizione, questa non potrebbe essere che impropria. Infatti supposto che $a, \bar{a}$ sieno due numeri primi fra loro, tali che risulti:

$$A = a^2 + \bar{a}^2, \tag{1}$$

ogni numero Q_r, dividendo A, e quindi la somma $a^2 + \bar{a}^2$, sarebbe, in virtù del teorema *a*), decomponibile nella somma di due quadrati, il che invece è negato dal teorema *b*).

Se vale la (1), avremo dunque necessariamente:

$$a = \rho a', \qquad \bar{a} = \rho \bar{a}'.$$

Supponiamo che ρ sia il m. c. d. dei numeri $a, \bar{a}$ e scriviamo la (1) sotto la forma:

$$A = \rho^2 (a'^2 + \bar{a}'^2).$$

Siccome a' e $\bar{a}'$ sono numeri primi fra loro, la somma $a'^2 + \bar{a}'^2$ non può essere divisibile per nessuno dei numeri Q_r e perciò questi dovranno trovarsi tutti in ρ^2. Ma i fattori primi di questo numero hanno tutti l'esponente pari, mentre invece ciò non accade per tutti i fattori Q_r che entrano in A, dunque nemmeno la decomposizione impropria $\{\rho a', \rho \bar{a}'\}$ è possibile.

Corollario. — *I numeri dispari della forma* $4p - 1$ *non sono decomponibili nella somma di due quadrati.*

È chiaro infatti che tali numeri devono contenere un numero dispari di fattori primi (distinti, o no) di tipo $4p - 1$, e che perciò non tutti gli esponenti dei diversi fattori di questo tipo potranno essere pari.

Osservazione. — Si badi però di non concludere che i numeri dispari della forma $4p + 1$ sono decomponibili nella somma di due quadrati. Infatti tali numeri contengono bensì un numero pari di fattori di tipo $4p - 1$, ma non è però detto, che ciascuno dei differenti fattori di questo tipo sia contenuto in quei numeri un numero pari di volte, cioè comparisca con esponente pari.

CAPITOLO II.

Decomposizione dei prodotti di due numeri interi.

§ 4. Teorema. — *Se due numeri* A, B *sono decomponibili ciascuno nella somma di due quadrati, il prodotto* AB *è, in generale, decomponibile nella somma di due quadrati in almeno due modi distinti.*

Sia, secondo l'ipotesi:

$$A = \{a, \overline{a}\}, \qquad B = \{b, \overline{b}\}.$$

Poichè si ha identicamente:

$$(a^2 + \overline{a}^2)(b^2 + \overline{b}^2) = (ab - \overline{ab})^2 + (a\overline{b} + \overline{a}b)^2$$
$$= (ab + \overline{ab})^2 + (a\overline{b} - \overline{a}b)^2,$$

il prodotto AB ammetterà le due decomposizioni:

$$AB = \{ab - \overline{ab},\quad a\overline{b} + \overline{a}b\}, \qquad \text{(I)}$$

$$AB = \{ab + \overline{ab},\quad a\overline{b} - \overline{a}b\}. \qquad \text{c. d. d.} \qquad \text{(II)}$$

Osservazione I. — Poichè noi ci occupiamo, com'è già stato avvertito, delle sole decomposizioni a termini positivi, i numeri $a, \overline{a}, b, \overline{b}$ sono positivi, e le differenze $ab - \overline{ab}$, $a\overline{b} - \overline{a}b$ s'intenderanno prese in valore assoluto.

Osservazione II. — Potrà darsi che, in qualche caso particolare, le due decomposizioni (I), (II) del prodotto AB coincidano. Vediamo quando ciò accada.

Può darsi che sia:

$$|ab - \overline{ab}| = ab + \overline{ab}.$$

Allora, se $ab - \overline{ab}$ è positivo, dev'essere:

$$\overline{ab} = 0.$$

In tal caso dev'essere zero uno almeno dei numeri $\overline{a}, \overline{b}$.

Se $ab - \overline{ab}$ è negativo, dev'essere:

$$ab = 0,$$

e quindi dev'essere zero uno almeno dei numeri a, b.

L'uguaglianza dei secondi termini delle decomposizioni (I), (II) è una conseguenza necessaria dell'uguaglianza dei primi. Le (I), (II) coincidono anche se:

$$a\bar{b} + \bar{a}b = ab + \bar{a}\bar{b},$$

ossia, se:

$$(a - \bar{a})(b - \bar{b}) = 0.$$

Perciò dev'essere, o $a = \bar{a}$, o $b = \bar{b}$ (o, in particolare, contemporaneamente $a = \bar{a}$, $b = \bar{b}$).

Anche in questo secondo caso la condizione di coincidenza:

$$|ab - \bar{a}\bar{b}| = |a\bar{b} - \bar{a}b|$$

è una conseguenza necessaria della precedente.

Concludiamo dunque che *le due decomposizioni* (I), (II) *del prodotto* AB *coincidono, se l'una o l'altra delle decomposizioni* $\{a, \bar{a}\}$, $\{b, \bar{b}\}$ *dei fattori è eccezionale, ovvero se l'una o l'altra di queste decomposizioni ha i termini uguali.*

Allo scopo di semplificare la dicitura, diremo in seguito, che le decomposizioni $\{ab - \bar{a}\bar{b}, a\bar{b} + \bar{a}b\}$ e $\{ab + \bar{a}\bar{b}, a\bar{b} - \bar{a}b\}$ del prodotto AB si ottengono *operando mediante le formole* (I), (II) sulle decomposizioni $\{a, \bar{a}\}$, $\{b, \bar{b}\}$ dei fattori A, B.

§ 5. Teorema — *Se* A *e* B *sono due numeri interi decomponibili nella somma di due quadrati, e* A *è un numero primo, ogni decomposizione del prodotto* AB *può sempre ottenersi operando su due opportune decomposizioni dei fattori mediante l'una o l'altra delle formole* (I), (II).

Sia $\{a, \bar{a}\}$ una decomposizione di A, e $\{X, Y\}$ una generica decomposizione di AB. [1]

Determiniamo ora due numeri x', y' soddisfacenti alle equazioni:

$$\begin{cases} X = \bar{a}x - ay, \\ Y = \bar{a}x + ay; \end{cases} \tag{1}$$

e due numeri x'', y'' soddisfacenti alle equazioni:

$$\begin{cases} X = ax + \bar{a}y, \\ X = -\bar{a}x + ay; \end{cases} \tag{2}$$

e consideriamo poi di tali numeri il solo valore assoluto.

La risoluzione dei due sistemi (1) e (2) è sempre possibile, perchè il determinante dei coefficienti delle incognite è uguale ad A, e quindi è diverso da zero.

È facile poi verificare che entrambe le soluzioni delle (1) e delle (2) sono termini di una decomposizione del numero B. Infatti quadrando

[1] Ricordiamo che si tratta sempre di decomposizioni, i cui termini sono interi e positivi.

e sommando membro a membro le (1), o le (2), si ha $X^2+Y^2=$ $=(a^2+\bar{a}^2)(x^2+y^2)$, cioè $AB=A(x^2+y^2)$, e quindi $B=x^2+y^2$.

I termini di queste decomposizioni potranno non essere entrambi positivi, ma poichè abbiamo già avvertito che delle soluzioni dei due sistemi consideriamo il solo valore assoluto, così tali soluzioni costituiranno due decomposizioni di B a termini positivi. Se riusciremo a provare che è possibile soddisfare all'uno o all'altro dei due sistemi (1), (2) mediante valori interi di x e y, il teorema sarà dimostrato.

Dalle (1) si ricava:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{a^2+\bar{a}^2}(aX+\bar{a}Y), \\ y' = \dfrac{1}{a^2+\bar{a}^2}(-\bar{a}X+aY); \end{cases} \tag{1'}$$

e dalle (2):

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{1}{a^2+\bar{a}^2}(aX-\bar{a}Y), \\ y'' = \dfrac{1}{a^2+\bar{a}^2}(\bar{a}X+aY). \end{cases} \tag{2'}$$

Moltiplicando fra loro il numeratore di x' pel numeratore di y'' abbiamo:

$$(aX+\bar{a}Y)(\bar{a}X+aY)=a\bar{a}(X^2+Y^2)+(a^2+\bar{a}^2)XY,$$

ossia, ricordando che $X^2+Y^2=AB$ e $a^2+\bar{a}^2=A$:

$$(aX+\bar{a}Y)(\bar{a}X+aY)=(a\bar{a}B+XY)(a^2+\bar{a}^2).$$

Il prodotto dei due numeratori è dunque divisibile per $a^2+\bar{a}^2$, che è, per ipotesi, un numero primo, quindi l'uno o l'altro dei numeratori considerati sarà divisibile per $a^2+\bar{a}^2$. Ciò prova che o x', o y'' è un numero intero.

Poichè, come s'è visto più sopra, entrambe le coppie di numeri x', y' e x'', y'' soddisfano all'equazione $x^2+y^2=B$, in cui B è intero, se x' è intero dovrà pure essere intero y', e se, invece, è intero y'', lo stesso avverrà di x''.

Osservazione. — Il teorema dimostrato fa dipendere *ogni* decomposizione intera di un numero non primo dalle decomposizioni intere dei suoi fattori primi. A priori non è escluso che decomposizioni fratte dei fattori di un prodotto possano dar luogo a decomposizioni intere del prodotto, ma il teorema ci assicura che queste decomposizioni si possono sempre ottenere partendo da decomposizioni intere dei fattori.

CAPITOLO III.

Decomposizioni delle potenze di un numero primo.

§ 6. Teorema. — *Se il numero* A *ammette la decomposizione* $\{a_1, \bar{a}_1\}$, *il numero* A^r *ammette la decomposizione* $\{a_r, \bar{a}_r\}$, *ove i due numeri* a_r, $\bar{a}_r$ *sono dati dalle formole ricorrenti:*

$$\begin{cases} a_r = a_1 a_{r-1} - \bar{a}_1 \bar{a}_{r-1}, \\ \bar{a}_r = a_1 \bar{a}_{r-1} + \bar{a}_1 a_{r-1}. \end{cases} \tag{III}$$

Il teorema è vero per $r = 2$, perchè, posto:

$$a_2 = a_1^2 - \bar{a}_1^2, \qquad \bar{a}_2 = 2a_1\bar{a}_1,$$

si ha:

$$a_2^2 + \bar{a}_2^2 = (a_1^2 - \bar{a}_1^2)^2 + (2a_1\bar{a}_1)^2 = (a_1^2 + \bar{a}_1^2)^2 = A^2.$$

Supposto ora che sia:

$$a^2_{r-1} + \bar{a}^2_{r-1} = A^{r-1},$$

si trova:

$$\begin{aligned} a_r^2 + \bar{a}_r^2 &= (a_1 a_{r-1} - \bar{a}_1 \bar{a}_{r-1})^2 + (a_1\bar{a}_{r-1} + \bar{a}_1 a_{r-1})^2 \\ &= (a_1^2 + \bar{a}_1^2)\ (a^2_{r-1} + \bar{a}^2_{r-1}) = A \,.\, A^{r-1} = A^r. \end{aligned}$$

Il teorema è dunque vero qualunque sia r.

In seguito, per decomposizione $\{a_r, \bar{a}_r\}$ della potenza A^r, la cui base ammette la decomposizione $\{a_1, \bar{a}_1\}$, intenderemo sempre quella decomposizione, che è fornita dalle formole (III).

§ 7. Teorema. — *Se un numero* A *ammette la decomposizione* $\{a_1, \bar{a}_1\}$, *e si conviene di porre* $a_0 = 1$, $\bar{a}_0 = 0$, *la potenza* r^{ma} *di* A *ammette le decomposizioni:*

$$\{A^m a_{r-2m},\ A^m \bar{a}_{r-2m}\};$$

ove m *può assumere i valori:*

$$0, 1, 2, \ldots, \frac{r}{2}, \qquad \textit{se r è pari},$$

ed i valori:

$$0, 1, 2, \ldots, \frac{r-1}{2}, \qquad \textit{se r è dispari}.$$

Si ha infatti, in virtù del teorema precedente:

$$(A^m a_{r-2m})^2 + (A^m \bar{a}_{r-2m})^2 = A^{2m}\,(a^2_{r-2m} + \bar{a}^2_{r-2m}) = A^{2m} \,.\, A^{r-2m} = A^r.$$

Osservazione I. — Si noti che, se r è pari, le decomposizioni di A^r, indicate nel teorema, sono in numero di $\frac{r}{2}+1$, e precisamente sono:

$$\left\{a_r, \overline{a}_r\right\}, \left\{A a_{r-2}, A\overline{a}_{r-2}\right\}, \ldots, \left\{A^{\frac{r-2}{2}} a_2, A^{\frac{r-2}{2}} \overline{a}_2\right\}, \left\{A^{\frac{r}{2}}, 0\right\};$$

se r è dispari, sono in numero di $\frac{r+1}{2}$, e precisamente sono:

$$\left\{a_r, \overline{a}_r\right\}, \left\{A a_{r-2}, A\overline{a}_{r-2}\right\}, \ldots, \left\{A^{\frac{r-3}{2}} a_3, A^{\frac{r-3}{2}} \overline{a}_3\right\}, \left\{A^{\frac{r-1}{2}} a_1, A^{\frac{r-1}{2}} \overline{a}_1\right\}.$$

Non possiamo però concludere che il numero A^r ammette nel primo caso, in tutto, $\frac{r}{2}+1$ decomposizioni, e nel secondo $\frac{r+1}{2}$, perchè bisognerebbe dimostrare che le decomposizioni indicate sono tutte le possibili decomposizioni di A^r, e che sono tutte distinte; e questo non avrà luogo, in generale, se A è generico. Vedremo invece in seguito che questo succede, se A è un numero primo di tipo $4p+1$.

Osservazione II. — Noi siamo partiti dalla decomposizione $\{a_1, \overline{a}_1\}$ di A e abbiamo indicate certe decomposizioni di A^r. Vediamo ora come queste decompozioni possano ottenersi operando mediante le formole (I) e (II).

Partendo da

$$A = \{a_1, \overline{a}_1\},$$

e applicando la (I) si ha:

$$A^2 = \{a_1^2 - \overline{a}_1^2, \; 2a_1\overline{a}_1\} = \{a_2, \overline{a}_2\}.$$

Applicando invece la (II) si ottiene:

$$A^2 = \{a_1^2 + \overline{a}_1^2, \; 0\} = \{A, 0\}.$$

Pel numero A^2 si hanno così le due decomposizioni $\{a_2, \overline{a}_2\}$, $\{A, 0\}$, di cui è parola nel teorema precedente.

Operando sulle decomposizioni $\{a_1, \overline{a}_1\}$, $\{a_2, \overline{a}_2\}$ di A e A^2 mediante la (I), si ha:

$$A^3 = \{a_1a_2 - \overline{a}_1\overline{a}_2, \; a_1\overline{a}_2 + \overline{a}_1a_2\} = \{a_3, \overline{a}_3\};$$

operando invece colla (II):

$$A^3 = \{a_1a_2 + \overline{a}_1\overline{a}_2, \; a_1\overline{a}_2 - \overline{a}_1a_2\} = \{a_1(a_1^2 + \overline{a}_1^2), \; a_2(a_1^2 + \overline{a}_1^2)\} = \{Aa_1, A\overline{a}_1\}.$$

Operando sulle decomposizioni $\{a_1, \overline{a}_1\}$, $\{A, 0\}$ di A e A^2 mediante la (I), si ha:

$$A^3 = \{Aa_1, A\overline{a}_1\}.$$

Operando colla (II) si otterrebbe lo stesso risultato, il che è conseguenza del fatto che $\{A, 0\}$ è una decomposizione eccezionale di A^2 (v. § 4, oss. II).

Possiamo ora osservare che, operando mediante la (II) sulle decomposizioni $\{a_1, \overline{a}_1\}$ e $\{a_2, \overline{a}_2\}$, si ottiene la stessa decomposizione di A^3, che si ha operando colla (I) sulle decomposizioni $\{a_1, \overline{a}_1\}$ e $\{A, 0\}$.

Questo fatto si può accertare in generale.

Si considerino due decomposizioni di A^{r-1} consecutive nella successione: $\{a_{r-1}, \overline{a}_{r-1}\}$, $\{Aa_{r-3}, A\overline{a}_{r-3}\}, \ldots$ e sieno, ad es.:

$$\{A^m a_{r-2m-1}, A^m \overline{a}_{r-2m-1}\}, \quad \{A^{m+1} a_{r-2m-3}, A^{m+1} \overline{a}_{r-2m-3}\}.$$

Operando colla (II) sulle decomposizioni

$$\{a_1, \overline{a}_1\} \quad \text{e} \quad \{A^m a_{r-2m-1}, A^m \overline{a}_{r-2m-1}\}$$

si ha:

$$A^r = \{A^m (a_1 a_{r-2m-1} + \overline{a}_1 \overline{a}_{r-2m-1}), A^m (a_1 \overline{a}_{r-2m-1} - \overline{a}_1 a_{r-2m-1})\}$$

Ora dalle formole ricorrenti (III) si ha:

$$A a_{r-1} = a_1 a_r + \overline{a}_1 \overline{a}_r,$$
$$A \overline{a}_{r-1} = a_1 \overline{a}_r - \overline{a}_1 a_r,$$

quindi la precedente decomposizione di A^r si può scrivere:

$$A^r = \{A^{m+1} a_{r-2(m+1)}, A^{m+1} \overline{a}_{r-2(m+1)}\}.$$

Operando colla (I) sulle decomposizioni

$$\{a_1, \overline{a}_1\} \quad \text{e} \quad \{A^{m+1} a_{r-2m-3}, A^{m+1} \overline{a}_{r-2m-3}\}$$

si ha:

$$A^r = \{A^{m+1} (a_1 a_{r-2m-3} - \overline{a}_1 \overline{a}_{r-2m-3}), A^{m+1} (a_1 \overline{a}_{r-2m-3} + \overline{a}_1 a_{r-2m-3})\}.$$

E questa decomposizione di A^r coincide, in virtù delle (III), colla decomposizione ottenuta precedentemente.

Possiamo dunque concludere che, operando sulle decomposizioni di A^{r-1} indicate nel teorema e su quella di A mediante le (I) e (II), si ottengono le stesse decomposizioni di A^r, come operando solo colla (I) sulla decomposizione di A e su tutte quelle di A^{r-1}. Soltanto quando $r-1$ è dispari entrambe le (I) e (II) dovranno essere applicate alla $\{a_1, \overline{a}_1\}$ e alla decomposizione $\left\{A^{\frac{r-2}{2}} a_1, A^{\frac{r-2}{2}} \overline{a}_1\right\}$ di A^{r-1}, che è ultima nella successione data.

§ 8. Teorema. — *Se P è un numero primo di tipo* $4p+1$ *e* $\{p_1, \overline{p}_1\}$ *è la sua decomposizione, il numero* P^r *ammette le sole decomposizioni:*

$$\{p_r, \overline{p}_r\}, \{Pp_{r-2}, P\overline{p}_{r-2}\}, \ldots, \{P^{\frac{r}{2}}, 0\}, \qquad \textit{se r è pari,}$$

$$\{p_r, \overline{p}_r\}, \{Pp_{r-2}, P\overline{p}_{r-2}\}, \ldots, \{P^{\frac{r-1}{2}} p_1, P^{\frac{r-1}{2}} \overline{p}_1\}, \qquad \textit{se r è dispari.}$$

In virtù del teorema *b)* di Fermat-Euler, il nostro teorema è verificato per $r=1$, basterà quindi dimostrare che, se è vero per la potenza $(r-1)^{ma}$ di P, è vero anche per la potenza r^{ma}.

Ammettiamo dunque che le sole decomposizioni di P^{r-1} sieno:

$$\left\{p_{r-1}, \overline{p_{r-1}}\right\},\ \left\{\mathrm{P}p_{r-3}, \mathrm{P}\overline{p_{r-3}}\right\}, \ldots, \left\{\mathrm{P}^{\frac{r-1}{2}}, 0\right\}, \qquad \textit{se } r-1 \textit{ è pari,}$$

$$\left\{p_{r-1}, \overline{p_{r-1}}\right\},\ \left\{\mathrm{P}p_{r-3}, \mathrm{P}\overline{p_{r-3}}\right\}, \ldots, \left\{\mathrm{P}^{\frac{r-2}{2}}, p_1, \mathrm{P}^{\frac{r-2}{2}}\overline{p_1}\right\} \quad \textit{se } r-1 \textit{ è dispari.}$$

Operando su esse e sull'unica decomposizione $\{p_1, \overline{p_1}\}$ di P mediante le (I) e (II) si passa alle decomposizioni di P^r indicate nel teorema, in virtù di quanto è stato visto nell'osservazione II del § precedente. Siccome poi il teorema del § 5 ci assicura che così si ottengono tutte le decomposizioni di P^r, così il nostro teorema rimane provato.

Osservazione I. — Se si considera il numero primo 2, anzichè un numero primo della forma $4p+1$, applicando successivamente il teorema del § 5, si verifica immediatamente che, siccome il numero 2 ammette la sola decomposizione $\{1, 1\}$,

la potenza r^{ma} *ammette la sola decomposizione eccezionale*

$$\left\{2^{\frac{r}{2}}, 0\right\}, \qquad \textit{se r è pari,}$$

e la sola decomposizione impropria a termini uguali

$$\left\{2^{\frac{r-1}{2}}, 2^{\frac{r-1}{2}}\right\}, \qquad \textit{se r è dispari.}$$

Osservazione II. — *La potenza* r^{ma} *di un numero* Q *di tipo* $4p-1$ *non ammette alcuna decomposizione, se r è dispari* (v. teor. § 3). *Se invece r è pari, ammette la sola decomposizione eccezionale:*

$$\left\{Q^{\frac{r}{2}}, 0\right\}.$$

Infatti una decomposizione $\{X, Y\}$ di Q^r (nel caso che r sia pari) non può essere propria, perchè, essendo X^2+Y^2 divisibile per Q, questo numero ammetterebbe (v. teor. *a)*) una decomposizione, il che è negato dal teorema di Fermat-Euler. Se dunque la decomposizione $\{X, Y\}$ è impropria, siccome X e Y, com'è ovvio, non possono avere come fattore comune che una potenza di Q, posto: $X = Q^m X'$ e $Y = Q^m Y'$, in modo che risultino X' e Y' primi fra loro, si avrebbe $Q^{r-2m} = \{X', Y'\}$, il che, come s'è visto più sopra, è assurdo.

§ **9.** Teorema. — *Se il numero* A *ammette la decomposizione* $\{a_1, \overline{a_1}\}$, *la decomposizione* $\{a_r, \overline{a_r}\}$ *di* A^r, *data dalle formole ricorrenti* (III), *può anche ottenersi prendendo* a_r *uguale alla parte reale, e* $\overline{a_r}$ *uguale al coefficiente dell'unità immaginaria* $i\,(=\sqrt{-1})$ *nello sviluppo di* $(a_1 + i\overline{a_1})^r$.

Il teorema, com'è ovvio, è verificato per $r=1$.

Si osservi ora che:

$$(a_1 + i\overline{a}_1)^2 = a_1^2 - \overline{a}_1^2 + i2a_1\overline{a}_1,$$

e che i due numeri

$$a_1^2 - \overline{a}_1^2, \qquad 2a_1\overline{a}_1$$

sono precisamente i termini della decomposizione $\{a_2, \overline{a}_2\}$ di A^2. Ciò prova il teorema per il caso, in cui $r = 2$.

Dimostriamo ora che, se il teorema è vero per un valore di r, è pure vero per il valore successivo.

Supponiamolo verificato per un valore dispari di r. Lo stesso sarebbe, se r fosse pari.

Ricordando che, posto $i = \sqrt{-1}$, si ha:

$$i^{4m+1} = i, \quad i^{4m+2} = -1, \quad i^{4m+3} = -i, \quad i^{4m} = 1,$$

si avrà:

$$(a_1 + i\overline{a}_1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} a_1^{2n+1} + i\binom{2n+1}{1} a_1^{2n}\overline{a}_1 -$$

$$- \binom{2n+1}{2} a_1^{2n-1}\overline{a}_1^2 - i\binom{2n+1}{3} a_1^{2n-2}\overline{a}_1^3 + \binom{2n+1}{4} a_1^{2n-3}\overline{a}_1^4 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} a_1^3\overline{a}_1^{2n-2} + i(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-1} a_1^2\overline{a}_1^{2n-1} +$$

$$+ (-1)^n\binom{2n+1}{2n} a_1\overline{a}_1^{2n} + i(-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\overline{a}_1^{2n+1},$$

ove i simboli $\binom{p}{q}$ hanno il noto significato di coefficienti binomiali.

Poniamo ora:

$$a_{2n+1} = \binom{2n+1}{0} a_1^{2n+1} - \binom{2n+1}{2} a_1^{2n-1}\overline{a}_1^2 + \binom{2n+1}{4} a_1^{2n-3}\overline{a}_1^4 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2} a_1^3\overline{a}_1^{2n-2} + (-1)^n\binom{2n+1}{2n} a_1\overline{a}_1^{2n},$$

$$\overline{a}_{2n+1} = \binom{2n+1}{1} a_1^{2n}\overline{a}_1 - \binom{2n+1}{3} a_1^{2n-2}\overline{a}_1^3 + \binom{2n+1}{5} a_1^{2n-4}\overline{a}_1^5 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-1} a_1^2\overline{a}_1^{2n-1} + (-1)^n\binom{2n+1}{2n+1}\overline{a}_1^{2n+1}.$$

Siccome i secondi membri sono rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i nello sviluppo di $(a_1 + i\overline{a})^{2n+1}$, si avrà, per ipotesi:

$$A^{2n+1} = \{a_{2n+1}, \overline{a}_{2n+1}\}.$$

Applicando le formole:

$$a_{2n+2} = a_1 a_{2n+1} - \bar{a}_1 \bar{a}_{2n+1},$$

$$\bar{a}_{2n+2} = a_1 \bar{a}_{2n+1} + \bar{a}_1 a_{2n+1},$$

si otterrà la decomposizione $\{a_{2n+2}, \bar{a}_{2n+2}\}$ di A^{2n+2}.

Sostituendo ad a_{2n+1} e ad $\bar{a}_{2n+1}$ i loro valori si trova:

$$a_{2n+2} = \binom{2n+1}{0} a_1^{2n+2} - \left[\binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{1}\right] a_1^{2n} \bar{a}_1^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \left[\binom{2n+1}{2n} + \binom{2n+1}{2n-1}\right] a_1^2 \bar{a}_1^{2n} + (-1)^{n+1} \binom{2n+1}{2n+1} \bar{a}_1^{2n+2},$$

$$\bar{a}_{2n+2} = \left[\binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{0}\right] a_1^{2n+1} \bar{a}_1 - \left[\binom{2n+1}{3} + \binom{2n+1}{2}\right] a_1^{2n+1} \bar{a}_1^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \left[\binom{2n+1}{2n-1} + \binom{2n+1}{2n-2}\right] a_1^3 \bar{a}_1^{2n-1} +$$

$$+ (-1)^n \left[\binom{2n+1}{2n+1} + \binom{2n+1}{2n}\right] a_1 \bar{a}^{2n+1}.$$

Ricordando ora che $\binom{p}{p} = 1$ e che, per convenzione, $\binom{p}{o} = 1$, ove si tenga pure presente la nota formola

$$\binom{p}{q} = \binom{p-1}{q} + \binom{p-1}{q-1},$$

si ha:

$$a_{2n+2} = \binom{2n+2}{0} a_1^{2n+2} - \binom{2n+2}{2} a_1^{2n} \bar{a}_1^2 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n \binom{2n+2}{2n} a_1^2 \bar{a}_1^{2n} + (-1)^{n+1} \binom{2n+2}{2n+2} \bar{a}_1^{2n+2},$$

$$\bar{a}_{2n+2} = \binom{2n+2}{1} a_1^{2n+1} \bar{a}_1 - \binom{2n+2}{3} a_1^{2n-1} \bar{a}_1^3 + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-1} \binom{2n+2}{2n-1} a_1^3 \bar{a}_1^{2n-1} + (-1)^n \binom{2n+2}{2n+1} a_1 \bar{a}_1^{2n+1}.$$

Aggiungendo ora membro a membro queste due uguaglianze, dopo aver moltiplicato per i la seconda si ha, com'è ovvio:

$$a_{2n+2} + i\bar{a}_{2n+2} = (a_1 + i\bar{a})^{2n+2}.$$

Il teorema rimane dunque dimostrato.

Avvertenza. — Ove qualcuno dei termini della decomposizione $\{a_r, \bar{a}_r\}$ di A^r risultasse negativo, s'intenderà, come al solito, di prenderlo col segno cambiato.

Esempio. — Trovare la decomposizione $\{a_4, \bar{a}_4\}$ del numero 13^4.

Poichè $13 = \{3, 2\}$, e:

$$\begin{aligned}(3+2i)^4 &= 3^4 + 4 \,.\, 3^3 \,.\, 2 \,.\, i - 6 \,.\, 3^2 \,.\, 2^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 2^3 \,.\, i + 2^4 \\ &= 3^4 - 6 \,.\, 3^2 \,.\, 2^2 + 2^4 + i\,(4 \,.\, 3^3 \,.\, 2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 2^3) \\ &= -119 + 120i,\end{aligned}$$

sarà

$$a_4 = 119, \quad \bar{a}_4 = 120.$$

§ 10. Teorema I. — *Se* P *è un numero primo della forma* $4p+1$, *la decomposizione* $\{p_r, \bar{p}_r\}$ *di* P^r *è propria.*

Supponiamo invece che p_r e $\bar{p}_r$ ammettano come m. c. d. un numero m diverso da 1, cosicchè risulti:

$$p_r = mp'_r, \quad \bar{p}_r = m\bar{p}'_r.$$

Poichè:

$$P^r = (mp'_r)^2 + (m\bar{p}'_r)^2 = m^2(p'^2_r + \bar{p}'^2_r),$$

e P è numero primo, m sarà certamente una potenza di P. Se dunque ammettiamo che p_r e $\bar{p}_r$ non sieno primi fra loro, risulta ch'essi non possono essere divisibili entrambi che per una potenza di P.

Ora nel teorema precedente abbiamo visto che p_r e $\bar{p}_r$ si esprimono in funzione di p_1 e $\bar{p}_1$, termini della decomposizione di P, mediante polinomi, che sono omogenei di grado r rispetto a queste quantità, e i cui termini si possono ordinare in modo che risultino di segni alternati e che procedano per potenze di p_1 decrescenti di due in due unità. Perchè questi polinomi sieno divisibili per P, cioè per $p_1^2 + \bar{p}_1^2$, è necessario che sieno divisibili per $p_1 - i\bar{p}_1$, e perciò occorre che, posto $p_1 = i\bar{p}_1$, essi si annullino. Questo invece non accade, perchè, data la loro struttura, tutti i loro termini assumono lo stesso segno.

Se dunque p_r e $\bar{p}_r$ non sono divibili per P, essi, per quanto s'è visto più sopra, devono essere primi fra loro.

Teorema II. — *Se* P *è un numero primo della forma* $4p+1$, *le decomposizioni:*

$$\{p_r, \bar{p}_r\}, \quad \{Pp_{r-2}, P\bar{p}_{r-2}\}, \ldots,$$

che sono le sole ammesse da P^r, *sono tutte distinte.*

Non può infatti essere, ad es.:

$$\{P^m p_{r-2m}, P^m \bar{p}_{r-2m}\} = \{P^n p_{r-2n}, P^n \bar{p}_{r-2n}\},$$

perchè si dovrebbe avere:

$$P^m p_{r-2m} = P^n p_{r-2n}, \quad P^m \bar{p}_{r-2m} = P^n \bar{p}_{r-2n},$$

ovvero:

$$P^m p_{r-2m} = P^n \overline{p}_{r-2n}, \qquad P^m \overline{p}_{r-2m} = P^n p_{r-2n},$$

e, suppposto $m < n$, si avrebbe:

$$p_{r-2m} = P^{n-m} p_{r-2n}, \qquad \overline{p}_{r-2m} = P^{n-m} \overline{p}_{r-2n},$$

ovvero, rispettivamente:

$$p_{r-2m} = P^{n-m} \overline{p}_{r-2n}, \qquad \overline{p}_{r-2m} = P^{n-m} p_{r-2n}.$$

Nell'un caso, o nell'altro, risulterebbe allora, contrariamente al teorema precedente, che la decomposizione $\{p_{r-2m}, \overline{p}_{r-2m}\}$ di P^{r-2m} non sarebbe propria.

Teorema III. — *Se* P *è un numero primo della forma* $4p+1$, *il numero* P^r *ammette* $\frac{r}{2}+1$ *decomposizioni, se* r *è pari,* $\frac{r+1}{2}$, *se* r *è dispari.*

Abbiamo visto infatti (§ 8) che se $\{p_1, \overline{p}_1\}$ è la decomposizione di P, il numero P^r ammette le sole decomposizioni:

$$\{p_r, \overline{p}_r\},\ \{Pp_{r-2}, P\overline{p}_{r-2}\}, \ldots, \{P^{\frac{r}{2}}, 0\}, \qquad \text{se } r \text{ è pari,}$$

$$\{p_r, \overline{p}_r\},\ \{Pp_{r-2}, P\overline{p}_{r-2}\}, \ldots, \{P^{\frac{r-1}{2}} p_1, P^{\frac{r-1}{2}} \overline{p}_1\}, \qquad \text{se } r \text{ dispari.}$$

Col teorema precedente abbiamo provato che queste decomposizioni, qualunque sia r sono tutte distinte, quindi non resta che fare il computo di esse e il teorema resterà dimostrato.

Osservazione. — Notiamo che P^r ammette sempre una sola decomposizione propria, e, se r è pari, una decomposizione eccezionale.

G. Bisconcini.

(Continua).

PICCOLE NOTE

Sui residui quadratici di un numero primo della forma $4n+3$.

Vogliamo fare qui qualche osservazione a proposito di un'elegante questione sollevata la prima volta dal Lagrange e posta poi formalmente dal Dirichlet. [1]

Dalla formula di Wilson

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p)$$

(1) " Journal für die Mathematik ", 3, 1828, p. 407.

si trae facilmente l'altra: (1)

$$\frac{p-1}{2}!^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \qquad (\text{mod } p);$$

per $p = 4n + 3$ si ha

$$\frac{p-1}{2}!^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

e quindi

$$\frac{p-1}{2}! \equiv \pm 1 \qquad (\text{mod } p). \tag{I}$$

Il Dirichlet (*loc. cit.*) chiede una regola che faccia conoscere in qual caso si deve prendere il segno $+$ o il segno $-$. Si tratta dunque di decidere quand' è che $\frac{p-1}{2}!$ è residuo o non residuo di p. Se μ indica il numero dei residui quadratici di p che sono $< \frac{1}{2}p$, poichè per $p = 4q + 3$, 1 è residuo, e -1 non residuo, la questione è evidentemente ridotta a decidere della parità di μ.

Le regole date a questo fine dal Jacobi (2) sono utili soltanto per p non molto grande. La formula offerta allo stesso fine dal Cauchy (3) contiene i numeri di Bernouilli, e non è pratica. Le regole esibite da Liouville e da Kronecker (4) sono pure empiriche e laboriose. La quistione resta dunque tuttavia insoluta; perciò non crediamo inutili le osservazioni seguenti.

Si ha

$$\frac{p-1}{2}! = \frac{p-3}{2}!\,\frac{p-1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\,p - \frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!;$$

onde per $p = 4n + 3$

$$\left.\begin{array}{r} \frac{p-2}{2}!^2 \equiv 1 \\ \left(\frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}!\right)^2 \equiv 1 \\ \left(\frac{3}{2^2}\,\frac{p-5}{2}!\right)^2 \equiv 1 \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (\text{mod } p)$$

ed in generale

$$\{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\dots(2y-1)\}^2\,\frac{p-2y-1}{2}!^2 \equiv 2^{2y} \qquad (\text{mod } p).$$

In queste formule, valide per ogni y intero e $< \frac{p}{2}$, si faccia $y = \frac{p-1}{2}$; viene

$$\{1\,.\,3\,.\,5\dots(p-2)\}^2 \equiv 2^{p-1} \qquad (\text{mod } p),$$

e pel teorema di Fermat

$$\{1\,.\,3\,.\,5\dots(p-2)\}^2 \equiv 1 \qquad (\text{mod } p),$$

---

(1) Per questa formula e analoghe Cfr. VECCHI, *Intorno al teorema di Wilson*, "Periodico di Matematica„, 1900.

(2) Cfr. il *Canon arithmeticus* dell'autore e la sua memoria nel "Journal für die Mathematik„ 9, 1832, p. 189.

(3) *Théorie des nombres.*

(4) "Journal de Mathematique„ (2) 5, 1860, p. 127 e 267.

ossia

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2) \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

È evidente che si dovrà prendere il segno positivo o il segno negativo, secondochè sarà pari o dispari il numero dei non residui che figurano nel prodotto $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2)$.

Dunque: *Se* ν *è il numero dei non residui dispari di un numero primo* p *della forma* $4n+3$, *si ha*

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2) = (-1)^{\nu} \pmod{p}. \tag{2}$$

Ora la (1) si può scrivere

$$\frac{p-1}{2}\,! \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}.$$

Collo stesso procedimento testè usato otteniamo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\frac{p-3}{2}\,! \equiv (-1)^{\mu+1} \\ \frac{3}{2^2}\,\frac{p-5}{2}\,! \equiv (-1)^{\mu} \\ \frac{3 \cdot 5}{2^3}\,\frac{p-7}{2} \equiv (-1)^{\mu-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \pmod{p}$$

ed in generale

$$(1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 2y-1)\,\frac{p-2y-1}{2}\,! \equiv (-1)^{\mu+y}\,2^{y} \pmod{p}.$$

Posto $y = \frac{p-1}{2}$, viene

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2) \equiv (-1)^{\mu+\frac{p-1}{2}}\,2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p};$$

e quindi

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2) \equiv (-1)^{\mu+1}\,2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ossia:

Per ogni numero primo p *della forma* $4n+3$ *si ha*

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (p-2) \equiv (-1)^{\mu+1}\,2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \tag{3}$$

dove μ *è il numero dei suoi non residui* $< \frac{p}{2}$.

Ora dalle (2), (3) si ottiene

$$(-1)^{\nu} \equiv (-1)^{\mu+1}\,2^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p};$$

per $p = 8k+3$ è

$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1,$$

onde

$$(-1)^{\nu} \equiv (-1)^{\mu} \pmod{p}$$

ossia

$$\nu \equiv \mu \pmod{2}.$$

Per $p = 8k - 1$ è

$$\left(\frac{2}{p}\right) = 1$$

onde

$$(-1)^{\nu} \equiv (-1)^{\mu+1} \pmod{p}$$

ossia

$$\nu \equiv \mu + 1 \pmod{2}.$$

Concludiamo che

Il numero dei non residui $< \frac{1}{2}$ p *ed il numero dei non residui dispari di un numero primo della forma* $4n+3$ *hanno la stessa parità o parità diversa secondo che il numero è della forma* $8k+3$ *o dell'altra* $8k-1$.

Da quanto precede risulta pure che è:

per $p = 8k + 3$

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (p-2) \equiv \frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^{\mu} \equiv (-1)^{\nu} \pmod{p}$$

e per $p = 8k - 1$

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (p-2) \equiv -\frac{p-1}{2}! \equiv (-1)^{\mu+1} \equiv (-1)^{\nu} \pmod{p}$$

Mario Vecchi.

Su certi riferimenti prospettivi delle superficie.

1°. Il Dottor Grassi pubblicò negli Atti dell'Accademia dei Lincei (1901, 2° semestre) una dimostrazione di due teoremi, comunicatigli dal prof. Bianchi, su certe corrispondenze delle superficie per proiezione, nella quale si ricorre ai principii e ai metodi della Geometria differenziale. Credo utile mostrare ai lettori di questo periodico come ai medesimi teoremi possa arrivarsi per via geometrica più semplice.

2°. È noto, e si dimostra subito del resto, che:

" *Se si proietta stereograficamente una quadrica* F^2 *da un suo ombelico* O *sopra un piano* π *parallelo al piano* ω *ad essa tangente in* O, *i sistemi (di linee) coniugati della quadrica, si mutano in sistemi (di linee) ortogonali del piano* „.

Infatti se si considera l'involuzione formata dalle coppie di direzioni coniugate uscenti da un punto qualunque P di F^2, i cui elementi doppi son forniti dalle due generatrici della quadrica uscenti da P, e si proietta dal punto O, si ottiene un fascio involutorio di piani, i cui elementi doppi sono i piani proiettanti le dette generatrici, o, anche (per le note proprietà delle rette di una quadrica appartenenti a sistemi diversi), i due piani congiungenti la retta OP con le due generatrici a e b di F^2 situate nel piano ω. Ora le rette a e b, poichè per ipotesi O è un ombelico di F^2, passano per i punti ciclici di ω, o, ciò che fa lo stesso, di π, quindi, se P' è l'immagine di P su π, il fascio involutorio OP, vien tagliato da π in un fascio involutorio di raggi avente per raggi doppi le rette che da P' vanno ai punti ciclici di π, ossia in un fascio ortogonale. D'altra parte questo fascio di raggi è quello cui danno luogo le immagini in π delle direzioni coniugate di F^2 uscenti da P, quindi per la proiezione di F^2 da O su π, i sistemi coniugati di F^2 si mutano in sistemi ortogonali di π.

3°. La proprietà espressa da questo teorema è caratteristica per le quadriche e i loro ombelichi: vale cioè (e in questo consiste il primo teorema del prof. Bianchi) l'osservazione importante:

Se la proiezione di una superficie F da un punto O sopra un piano π muta i sistemi coniugati di F in sistemi ortogonali di π, la superficie F è una quadrica con un ombelico in O e il piano ω ad essa tangente in O è parallelo a π.

Infatti se da O si conduce il piano ω parallelo a π, ω sega in un fascio di raggi involutorio ortogonale tutti i fasci involutori di piani proiettanti da O i fasci di raggi costituiti dalle coppie di direzioni coniugate uscenti dai vari punti di F. Ne segue che delle due direzioni asintotiche uscenti da un punto qualsiasi di F, ognuna si appoggia a una delle due rette a, b che congiungono O ai punti ciclici di ω, e quindi la sezione di F con un piano qualunque passante, ad es., per a è una linea che ha con ogni sua tangente un contatto tripunto, cioè una linea retta. Lo stesso vale per la retta b; per conseguenza F, contenendo un doppio sistema di rette è una quadrica, che passa per a e b e quindi anche per O. Tanto basta per giustificare il teorema enunciato.

4°. Un altro teorema notevole che si riconnette con quest'ordine di idee è il seguente (pure del prof. Bianchi):

“*Se la proiezione di una superficie reale F da un punto O sopra un'altra superficie reale F′ dà luogo a una corrispondenza conforme tra F ed F′, questa corrispondenza è contenuta in una omotetia o in una trasformazione per raggi vettori reciproci dello spazio col centro in O*”.

Si osservi innanzi tutto che, dato un fascio involutorio ellittico reale di piani, esistono due sole giaciture reali tali che i piani ad esse paralleli taglino il fascio involutorio di piani in un fascio di raggi ortogonali.

Infatti se AA′, BB′ sono i quattro punti, distinti in due coppie di punti immaginari coniugati, in cui i due piani doppi (immaginari) del fascio di piani tagliano il circolo immaginario all'infinito o *assoluto*, le due sole giaciture determinate dalle rette *reali* AA′ e BB′ danno luogo a piani secanti il fascio dato in fasci di raggi ortogonali.

Ciò posto, notisi che se P e P′ sono due punti corrispondenti qualunque di F ed F′, il piano tangente ad F′ in P′ sega il fascio involutorio di piani proiettanti da O il fascio involutorio delle coppie di direzioni ortogonali di F uscenti da P in un fascio involutorio di raggi che, per l'ipotesi, è del pari ortogonale: quindi se F″ ed F‴ sono le trasformate di F per una omotetia o per una trasformazione per raggi vettori reciproci col centro in O, la corrispondenza fra F′ ed F″, oppure quella tra F′ ed F‴, determinata dalla prospettività rispetto al centro O è anche una corrispondenza per parallelismo di piani tangenti. Segue, com'è noto, che essa è una omotetia, e per conseguenza, resta stabilito il teorema enunciato.

Bari, 7 aprile 1907.

G. Scorza.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 688 E 717

688. *Essendo data un'ellisse si consideri una corda AB tale che i prodotti delle distanze delle sue estremità da ciascuno degli assi siano uguali. Dimostrare che il luogo della proiezione del centro dell'ellisse sulla corda AB è una lemniscata di Bernouilli.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Vacchi, R. U. di Bologna.

Sia l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Siano P_1 (x_1y_1) e P_2 (x_2y_2) gli estremi della corda; la sua equazione sarà

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1},$$

e quella della perpendicolare ad essa condotta dal centro

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = -\frac{y}{x};$$

da queste ricavo

$$-\frac{y}{x} = \frac{x - x_1}{y - y_1},$$

che per la (1) diventa

$$x_1^2 \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{a^2} - 2x(x^2 + y^2)x_1 + (x^2 + y^2)^2 - y^2b^2 = 0, \tag{2}$$

oppure

$$y_1^2 \frac{a^2x^2 + b^2y^2}{b^2} - 2y(x^2 + y^2)y_1 + (x^2 + y^2)^2 - x^2a^2 = 0. \tag{3}$$

Analogamente si ha per x_2 e per y_2; quindi x_1, x_2 sono le radici della (2) ed analogamente y_1, y_2 della (3).

Caso I. — Sia $x_1x_2 = y_1y_2$; la relazione evidentemente per la (2) e la (3) diventa

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2b^2}{c^2}(y^2 - x^2),$$

che è appunto l'equazione d'una lemniscata del Bernouilli.

Caso II. — Sia invece la relazione $x_1y_1 = x_2y_2$; questa per la (1) diventa

$$x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} = x_2\sqrt{a^2 - x_2^2},$$

da cui

$$a^2(x_1^2 - x_2^2) = x_1^4 - x_2^4,$$

ed essendo $x_1^2 - x_2^2 \neq 0$

$$a^2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

che per la (2) diventa

$$a^2 = \frac{4a^4x^2(x^2+y^2)^2}{(a^2x^2+b^2y^2)^2} - \frac{2a^2[(x^2+y^2)^2 - y^2b^2]}{a^2x^2+b^2y^2}$$

che si può scrivere

$$(a^2x^2 - b^2y^2)\{a^2x^2 + b^2y^2 - 2(x^2+y^2)^2\} = 0,$$

equazione complessiva d'una iperbole degenerata in due rette e d'una lemniscata iperbolica di Both.

717. *Trovare l'equazione in coordinate cartesiane della curva i punti della quale hanno per coordinate*

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2-b^2}{a}\left(\dfrac{3}{2}\cos\varphi - \cos^3\varphi\right) \\ y = \dfrac{a^2-b^2}{b}\left(\dfrac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}^3\varphi\right). \end{cases}$$

Studiare questa curva, mostrando in particolare che la sua area è equivalente a quella della sviluppata dell'ellisse i cui semiassi sono a *e* b.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. Borio, R. L. di Aosta.

Scriviamo le equazioni date così:

$$\begin{cases} 2ax = (a^2-b^2)(3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi) \\ 2by = (a^2-b^2)(3\operatorname{sen}\varphi - 2\operatorname{sen}^3\varphi) \end{cases};$$

sommando membro a membro, e poi quadrando; e così pure sottraendo e poi quadrando, si ha

$$\begin{cases} (2ax+2by)^2 = (a^2-b^2)^2[9(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi) + 4(\cos^6\varphi + \operatorname{sen}^6\varphi) \\ \qquad - 12(\cos^4\varphi+\operatorname{sen}^4\varphi) + 18\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ \qquad - 12\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi) + 8\cos^3\varphi\operatorname{sen}^3\varphi] \\ (2ax-2by)^2 = (a^2-b^2)^2[9(\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi) + 4(\cos^6\varphi+\operatorname{sen}^6\varphi) \\ \qquad - 12(\cos^4\varphi+\operatorname{sen}^4\varphi) - 18\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi \\ \qquad + 12\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi+\cos^2\varphi) - 8\cos^3\varphi\operatorname{sen}^3\varphi] \end{cases}$$

e fatte alcune riduzioni

$$\begin{cases} (2ax+2by)^2 = (a^2-b^2)^2(1+2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)^3 \\ (2ax-2by)^2 = (a^2-b^2)^2(1-2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi)^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2ax+2by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}(1+2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi) \\ (2ax-2by)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}(1-2\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi), \end{cases}$$

sommando

$$(2ax+2by)^{\frac{2}{3}} + (2ax-2by)^{\frac{2}{3}} = 2(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}$$

od anche

$$\left(a\frac{x}{\sqrt{2}} + b\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(a\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = (a^2-b^2)^{\frac{2}{3}}. \qquad (1)$$

Ricordiamo l'equazione dell'asteroide $X^{\frac{2}{3}} + Y^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}$; facendo rotare gli assi di 45° attorno all'origine, questa diviene

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = m^{\frac{2}{3}}$$

se $m = a^2 - b^2$ la (1) è la trasformata di questa mediante l'affinità $X = ax$, $Y = by$, data la semplicità della costruzione dell'asteroide, si ha così modo non complicato di vedere l'andamento della curva proposta e di costruirla. La sua area è data da

$$4\int_0^{\frac{a^2-b^2}{2}} y\,dx = 4\,\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(-\frac{9}{4}\,\mathrm{sen}^2\varphi + \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^4\varphi + \frac{9}{2}\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi\,-\right.$$

$$\left.-\,3\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^4\varphi\right)d\varphi = 4\,\frac{(a^2-b^2)^2}{ab}\left[-\frac{9}{4}\left(-\frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right) + \right.$$

$$+\frac{3}{2}\left(-\frac{\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi}{4} - \frac{3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{8} + \frac{3\varphi}{8}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi}{4} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{3} + \frac{\varphi}{8}\right) -$$

$$\left.-\,3\left(\frac{\mathrm{sen}^5\varphi\cos\varphi}{6} - \frac{\mathrm{sen}^3\varphi\cos\varphi}{24} - \frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}{16} + \frac{\varphi}{16}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{3(a^2-b^2)\pi}{8ab}$$

che è pure il valore dell'area dell'evoluta dell'ellisse i cui semiassi sono a e b.

QUISTIONI PROPOSTE

732. Essendo date due parabole aventi lo stesso asse e lo stesso vertice trovare il luogo del punto d'incontro di una tangente dell'una con una tangente ad essa perpendicolare dell'altra.

733. Dimostrare che

$$\int_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=\mathrm{arc}\cos\frac{a}{b}} \frac{\mathrm{sen}\omega\cos^2\omega\,d\omega}{\sqrt{a^2-b^2\cos^2\omega}} = -\frac{\pi a^2}{2b^3}.$$

E. N. Barisien.

734. Essendo M_1, M_2, M_3 i piedi delle normali condotte da un punto P ad una parabola, trovare:

1° il luogo dei punti P pei quali l'area del triangolo $M_1 M_2 M_3$ è eguale ad una costante data K^2,

2° il luogo dei punti P pei quali i tre punti M_1, M_2, M_3 sono in linea retta.

735. Se i vertici A, B, C, D di un quadrangolo corrispondono ai vertici A', B', C', D' di un altro quadrangolo in modo che delle sei coppie di lati

$$\begin{cases} AB \\ C'D' \end{cases} \quad \begin{cases} AC \\ D'B' \end{cases} \quad \begin{cases} AD \\ B'C' \end{cases} \quad \begin{cases} CD \\ A'B' \end{cases} \quad \begin{cases} DB \\ A'C' \end{cases} \quad \begin{cases} BC \\ A'D' \end{cases}$$

cinque abbiano i punti d'intersezione sopra una retta r, anche il punto d'incontro della sesta coppia di rette è sopra la stessa retta r.

K.

BIBLIOGRAFIA

TARRY GASTON. — *Tablettes des cotes relatives à la base 20580 des facteurs premiers d'un nombre inférieur à N et non divisible par 2, 3, 5 ou 7.* 1906. In-8 gr.

L'Autore si propone di costruire nuove Tavole per la scomposizione dei numeri nei loro fattori primi, pei primi dodici milioni, riducendole al minimo volume.

A tal'uopo, egli ha imaginato un nuovo procedimento, che ha il vantaggio di sostituire alle successive divisioni del numero considerato, coi differenti numeri primi p, addizioni *mentali* di numeri inferiori alla metà di p. Così, la semplificazione introdotta equivale a quella portata dai logaritmi pel calcolo delle divisioni.

Come esempio d'applicazione del nuovo metodo, egli pubblica col nome di *Tablettes des cotes*... una Tavola de' fattori primi dei numeri da 1 a 100489.

L'accoglienza che verrà fatta a questa pubblicazione gli dirà se debba seguire o abbandonare il suo progetto.

PROF. F. CALDARERA. — *Corso di Meccanica razionale* (in-8° grande). Vol. I, (1900) *Cinematica. Studio delle forze.* — Vol. II, (1901) *Statica-Dinamica.* — Vol. III, (1906) *Equilibrio e moto dei sistemi continui - Idrostatica - Idrodinamica.* — Palermo, Tip. matematica.

Questo trattato rispecchia, nelle linee generali, le lezioni, che il Caldarera tiene da più lustri nell'Ateneo Palermitano. Ma l'opera non è circoscritta entro i limiti angusti delle esigenze scolastiche: vi si trovano acconciamente inserite teorie e applicazioni complementari, ed è pur tenuto conto dei più recenti indirizzi di ricerca, il che attesta nel venerando autore una invidiabile e ancor giovanile agilità di comprensione.

I due primi volumi, usciti già da qualche anno, sono certo ben noti ai lettori del *Periodico*. Non è dunque il caso di discorrerne ora. Ecco piuttosto una rapida rassegna del terzo volume, testè pubblicato.

Anzitutto un capitolo introduttivo sulle trasformazioni degli integrali semplici e multipli, e poi la cinematica dei sistemi continui, in cui le nozioni fondamentali sono egregiamente coordinate così ai complementi differenziali di Beltrami come alla discussione geometrica delle deformazioni locali e dei caratteri salienti del moto.

Seguono la statica e la dinamica dei sistemi continui secondo Cauchy, cui l'A. riattacca per via energetica, mediante il principio dei lavori virtuali, il caso particolarmente importante dei corpi elastici: in poche pagine è fatto posto al teorema di Betti e a qualche sua semplice applicazione; e si arriva alla definizione delle due forme tipiche di vibrazioni elastiche (onde piane longitudinali e trasversali).

Nel capitolo dedicato all'idrostatica sono sviluppate applicazioni importanti: la formula barometrica, fino ai dettagli del calcolo numerico; le condizioni di stabilità dei galleggianti; e la teoria delle forme ellissoidiche di equilibrio di masse fluide rotanti.

Per bene apprezzare lo svolgimento dato all'idrodinamica giova aver presente lo stato attuale di questa dottrina.

Essa poggia, come ogni altro ramo della meccanica, sopra basi solide, ormai fuori di discussione: e queste consentono applicazioni brillanti a tutti i fenomeni, in cui non è sensibile, o almeno in prima approssimazione può essere trascurata, l'influenza delle condizioni ai limiti.

Ma, dove tale influenza diviene essenziale, come in molti problemi della idraulica pratica, la idrodinamica razionale non ha ancora saputo rispondere alle esigenze dei tecnici, pur esperendo le più affinate risorse dell'analisi.

Così mentre per le quistioni concernenti corpi solidi, sia rigidi che elastici, i precetti della ingegneria sono figliazione naturale delle teorie meccaniche, l'idraulica è, per ora, in gran parte costretta a desumere i propri criteri direttivi da un empirismo più o meno sagace, senza aver modo di lumeggiarli, vagliandoli e collegandoli con metodo matematico.

Tutto ciò nettamente apparisce dal trattato del Caldarera.

Vi si fanno apprezzare le cose semplici e belle, mettendo tra altro in rilievo i risultati modernissimi di Hugoniot e di Hadamard sulla propagazione delle onde; ma non si dissimulano le gravi difficoltà, che rimangono da superare, nè si lascia, per dir così, illanguidire con lusinghe matematiche il senso della realtà. L'A. lo tiene al contrario ben desto; e là dove, come ad es. nella foronomia, le ricerche teoriche hanno finora fallito, egli si prende cura di far intanto conoscere al lettore i fenomeni e i risultati sperimentali.

Imitabile esempio, che si ispira a sani criteri di filosofia naturale!

T. Levi-Civita.

E. Bertini. — *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità.* Pisa, Spoerri, 1907.

La collezione di opere scientifiche, che lo Spoerri di Pisa va pubblicando, si è arricchita col volume del prof. Bertini, qui sopra citato, d'un libro che davvero riempie, come ormai suol dirsi con frase un po' vieta, una lacuna dolorosamente sentita.

La Geometria degli iperspazi non solo offre il mezzo a facili generalizzazioni di proprietà già note del piano e dello spazio ordinario e interpreta in maniera, in certo senso, intuitiva importanti teoremi algebrici, come con intendimenti poco benevoli fu osservato a sazietà dai molti detrattori che essa, come ogni scienza nova, incontrò; ma si è rivelata e si rivela, con chiarezza ogni giorno maggiore, come uno dei più potenti strumenti di ricerca posti a disposizione di chi voglia, con suoi studi originali, aumentare il numero delle verità geometriche conosciute. Oltre di che la luce portata dalla nozione di iperspazio (resasi ben naturale dopo che classici lavori del Plücker ebbero dimostrato il carattere astratto della geometria proiettiva ordinaria) su questioni di ordine logico e filosofico in generale, non poteva non farle assumere un'importanza sempre più grande in tutti i campi della matematica.

Consci di tutto questo, i proff. Segre e Bertini si eran fatti da un pezzo, nei loro corsi universitari, volgarizzatori ardenti e sistematici di teorie a cui avevano dato anche validissimi contributi personali e che, per la loro data tutt'affatto recente, si trovavano sparse in lavori staccati comparsi su per le riviste scientifiche e gli atti delle Accademie. Così essi rendevano possibile ai giovani studenti di impadronirsi presto di proposizioni che posseggono, non ostante l'apparente astrattezza, chiara evidenza intuitiva, e lo sviluppo assunto dagli studi geometrici in Italia, che costituisce senza alcun dubbio, una delle migliori glorie nostre nella rinascita intellettuale seguita al risorgimento politico attesta, con l'efficacia di una prova di fatto, come essi non si ingannassero nell'annettere tanta importanza alle teorie iperspaziali.

Ora, accanto a tanto fervore di indagini nove, per opera specialmente di giovani geometri italiani, era strano dover notare l'assenza, o quasi, nella letteratura scientifica nostra e straniera di un trattato che raccogliesse ed esponesse in maniera sistematica quanto nella geometria proiettiva degli iperspazi si era venuto ricercando e costruendo.

Il nostro Autore, dunque, pubblicando per le stampe, secondo l'espresso desiderio di tutti gli studiosi di geometria, con aggiunte e modificazioni notevolissime il corso di lezioni, che, qualche anno fa, fu redatto in poche copie litografate per uso dei suoi studenti, ci ha dato non solo un bel libro di matematica, fornito di tutte quelle doti di ordine scrupoloso e chiarezza cristallina che i suoi scolari hanno avuto occasione di apprezzare e ammirare nelle sue lezioni, ma anche un'opera assolutamente indispensabile, per chi voglia *orientarsi* rapidamente nella geometria moderna e arrivare, con la minima spesa di tempo e di fatica, a conoscere quali siano i problemi la cui soluzione sia oggi più urgente e quali i mezzi più adatti per affrontarli con probabilità di successo.

* * *

L'indice particolareggiato, che si trova alla fine del volume in discorso, dà una chiara idea del suo contenuto: ma non sarà male se per comodo dei lettori ne diciamo qualche parola anche qui.

Posta la nozione di spazio a r dimensioni (S_r) in modo puramente numerico (in questo, forse, non sapremmo andar del tutto d'accordo col chiarissimo Autore, poichè altro è un puro insieme di numeri, altro è il gruppo delle coordinate di un ente in una varietà, anche nel caso in cui a tale ente, per la rinunzia ad ogni rappresentazione concreta, si arrivi con un semplice processo di definizione per astrazione), si estendono agli S_r le proposizioni fondamentali che si raccolgono intorno ai concetti di appartenenza e di intersezione e si esamina con cura particolare, in vista delle belle conseguenze dedottene dal Severi nell'esame di una classica questione geometrico-algebrica sulla rappresentabilità di una forma mediante altre, il caso in cui gli spazi di cui si cerca lo spazio d'appartenenza sono situati, in vario modo, in posizione *regolare*.

Dopo ciò, lo studio degli spazi subordinati di un S_r, considerati come luoghi di punti o come inviluppi d'iperpiani, conduce a un'opportuna scelta delle loro coordinate che, mettendo in luce le proprietà caratteristiche delle varietà da essi costituite, offre una bella generalizzazione del teorema (già rivelatosi tanto fecondo nelle mani del Klein e del Segre, per non citare che i maggiori): *la geometria della retta dello spazio ordinario è la geometria di una quadrica dello spazio a cinque dimensioni.*

Segue lo studio approfondito delle omografie e delle correlazioni fra due S_r distinti o coincidenti, determinandosi sulle orme del Segre e del Predella, ma più specialmente di quest'ultimo, le corrispondenze proiettive involutorie, i più notevoli tipi di omografie o correlazioni degeneri, i tipi di omografie o correlazioni fra spazi sovrapposti proiettivamente distinti e deducendosene una semplice dimostrazione del celebre teorema di Weierstrass sulla condizione necessaria e sufficiente perchè una forma bilineare possa trasformarsi in un'altra per mezzo di sostituzioni lineari.

I teoremi sui sistemi polari rendono spontaneo e immediato il passaggio allo studio delle quadriche di un S_r (generabili anche mediante stelle reciproche), le cui proprietà più notevoli si raggruppano tutte intorno alla nozione di elementi coniugati e le questioni relative alle quadriche più volte specializzate, agli spazi lineari contenuti in una quadrica generale, ai sistemi formati da questi, alla distinzione cui alcuni di essi danno luogo fra le quadriche a $2q$ dimensioni a seconda della parità del numero q, ai fasci di quadriche non tutte o tutte specializzate e alla loro quartica base, danno occasione non solo di richiamare i teoremi sui sistemi polari e sulle omografie, ma anche di esporre la generalizzazione dell'ordinaria proiezione stereografica e di porre nella loro vera luce teoremi noti della geometria rigata.

Ai due capitoli dedicati alle quadriche ne seguono quattro in cui si esaminano questioni relative a ipersuperficie o varietà qualunque: notevole fra tutti quello rivolto allo studio dei sistemi lineari di ipersuperficie dove si espongono teoremi importantissimi del Castelnuovo, che era tempo cominciassero a comparire nei trattati sistematici, e cercando di generalizzarli si arriva a dedurre mediante un procedimento dovuto al Severi un importante teorema sulla rappresentabilità di una forma mediante una combinazione lineare di più altre.

Negli ultimi capitoli si tornano a considerare varietà particolari (curve razionali, superficie rigate razionali e superficie di Veronese, cui si riferisce un importante teorema del Del Pezzo) considerandole sempre da vari punti di vista e mostrando tutte le fecondità delle teorie cui danno luogo, con belle applicazioni allo studio di questioni di geometria piana (*quartiche*) o di geometria dello spazio ordinario (*superficie romana di Steiner*).

Chiude il volume un'appendice (che ne accresce il valore in maniera notevole per chi voglia dedicarsi allo studio della così detta geometria su un ente algebrico), dove si espongono in tre capitoli le proprietà fondamentali dei *rami* di una curva algebrica, della scomposizione delle singolarità delle curve piane mediante successive trasformazioni quadratiche, e, infine, le formule di Chasles, Zeuthen e Veronese.

G. Scorza.

Bari, 4 aprile 1907.

ERRATA-CORRIGE.

A pag. 291, l. 5 formola (5)

Invece di: $\binom{n}{2} b_{n-2}\, x_1{}^{n-2}\, y_1$ si ponga: $\binom{n}{2} b_{n-2}\, x_1{}^{n-2}\, y_1{}^2$.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 28 maggio 1907