risulta

$$\alpha'_p = \frac{S}{1-\gamma_p-\frac{1}{\beta_p}}; \quad \beta'_p = \frac{S}{1-\alpha_p-\frac{1}{\gamma_p}}; \quad \gamma'_p = \frac{S}{1-\beta_p-\frac{1}{\alpha_p}}. \qquad (2)$$

Da queste si ricava agevolmente

$$x_p = \frac{h_a}{1-\gamma_p-\frac{1}{\beta_p}}; \quad y_p = \frac{h_b}{1-\alpha_p-\frac{1}{\gamma_p}}; \quad z_p = \frac{h_c}{1-\beta_p-\frac{1}{\alpha_p}}. \qquad (3)$$

Inversamente si ha

$$\alpha_p = -\frac{cz_p}{by_p}; \quad \beta_p = -\frac{ax_p}{cz_p}; \quad \gamma_p = -\frac{by_p}{ax_p}. \qquad (4)$$

Notiamo ancora che, sommando fra loro membro a membro le (2), si ha la relazione

$$\frac{1}{1-\gamma_p-\frac{1}{\beta_p}} + \frac{1}{1-\alpha_p-\frac{1}{\gamma_p}} + \frac{1}{1-\beta_p-\frac{1}{\alpha_p}} = 1, \qquad (5)$$

la quale, evidentemente, non è indipendente dalla (1); essa ci sarà utile in seguito.

3. Nel piano del triangolo ABC consideriamo ora tre punti L, M, N. Vogliamo determinare l'area del triangolo LMN, che denoteremo con Δ, in funzione di $\alpha_l, \ldots, \alpha_m, \ldots, \alpha_n \ldots$.

Essendo T l'intersezione delle rette BN, CM, si ha:

$$\frac{\text{area BMNC}}{S} = \frac{\text{area BMNC}}{\text{area BTC}} \cdot \frac{\text{area BTC}}{S} = \frac{x_m x_n}{x_t^2} \cdot \frac{x_t}{h_a} = \frac{x_m x_n}{h_a x_t};$$

abbiamo poi [(3)]

$$x_m = \frac{1}{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}}; \quad x_n = \frac{1}{1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}}; \quad x_t = \frac{1}{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_n}};$$

sicchè, sostituendo,

$$\frac{\text{area BMNC}}{S} = \frac{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_n}}{\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)}.$$

Analogamente

$$\frac{\text{area CNLA}}{S} = \frac{1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_l}}{\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)};$$

$$\frac{\text{area ALMB}}{S} = \frac{1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_m}}{\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)}.$$

Avendosi poi evidentemente

$$\Delta = S - (\text{BMNC} + \text{CNLA} + \text{ALMB})$$

si ricava

$$\frac{\Delta}{S}=1-\frac{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_n}}{\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)}-$$

$$-\frac{1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_l}}{\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)}-\frac{1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_m}}{\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)}. \quad (6)$$

Questa formola è suscettibile di semplificazione. Per via diretta la semplificazione riuscirebbe assai difficilmente; per isfuggire calcoli laboriosi, ricorreremo al seguente artifizio: Sommiamo la (6) con le sue analoghe, le quali s'ottengono da essa tenendo fisse le l, m, n e facendo circolare α, β, γ, il che, evidentemente, è lecito; così facendo, giusta la relazione (5), s'ottiene

$$3\frac{\Delta}{S}=\frac{1}{1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}}+\frac{1}{1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}}+\frac{1}{1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}}+$$

$$+\frac{1}{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}}+\frac{1}{1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}}+\frac{1}{1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}}+$$

$$+\frac{1}{1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}}+\frac{1}{1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}}+\frac{1}{1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}}$$

$$-\frac{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_n}}{\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)}-$$

$$-\frac{1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_l}}{\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)}-\frac{1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_m}}{\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)}$$

$$-\frac{1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_n}}{\left(1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}\right)\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)}-$$

$$-\frac{1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_l}}{\left(1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)}-\frac{1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_m}}{\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)}$$

$$-\frac{1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_n}}{\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)\left(1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}\right)}-$$

$$-\frac{1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_l}}{\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)}-\frac{1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_m}}{\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)\left(1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}\right)}.$$

Raccogliendo opportunamente, questa diviene

$$
\begin{aligned}
3\,\frac{\Delta}{S} = {} & \frac{\gamma_m-\gamma_n}{\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)} + \frac{\beta_m-\beta_n}{\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)\left(1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}\right)} + \\
& + \frac{\alpha_m-\alpha_n}{\left(1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}\right)\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)} + \\
& + \frac{\gamma_n-\gamma_l}{\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)} + \frac{\beta_n-\beta_l}{\left(1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}\right)\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)} + \\
& + \frac{\alpha_n-\alpha_l}{\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)} + \\
& + \frac{\gamma_l-\gamma_m}{\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)} + \frac{\beta_l-\beta_m}{\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)} + \\
& + \frac{\alpha_l-\alpha_m}{\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)\left(1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}\right)}.
\end{aligned}
$$

Sommando per colonne, osservando che le somme delle varie colonne sono fra loro eguali, perchè s'ottengono le une dalle altre facendo circolare opportunamente le lettere, avremo finalmente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta}{S} &= \frac{\frac{1}{\beta_l}(\gamma_n-\gamma_m)+\frac{1}{\beta_m}(\gamma_l-\gamma_n)+\frac{1}{\beta_n}(\gamma_m-\gamma_l)}{\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)} = \\
&= \frac{\frac{1}{\gamma_l}(\alpha_n-\alpha_m)+\frac{1}{\gamma_m}(\alpha_l-\alpha_n)+\frac{1}{\gamma_n}(\alpha_m-\alpha_l)}{\left(1-\alpha_l-\frac{1}{\gamma_l}\right)\left(1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}\right)\left(1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}\right)} = \\
&= \frac{\frac{1}{\alpha_l}(\beta_n-\beta_m)+\frac{1}{\alpha_m}(\beta_l-\beta_n)+\frac{1}{\alpha_n}(\beta_m-\beta_l)}{\left(1-\beta_l-\frac{1}{\alpha_l}\right)\left(1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}\right)\left(1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}\right)}. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

A questa formola si può anche dar la forma seguente:

$$
\frac{\Delta}{S} = \frac{(\gamma_l-\gamma_m)\left(\frac{1}{\beta_l}-\frac{1}{\beta_n}\right)-\left(\frac{1}{\beta_l}-\frac{1}{\beta_m}\right)(\gamma_l-\gamma_n)}{\left(1-\gamma_l-\frac{1}{\beta_l}\right)\left(1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}\right)\left(1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}\right)} = \ldots . \qquad (7')
$$

Mediante queste formole semplicissime possiamo facilmente determinare l'area d'un triangolo LMN, percorrendo i lati d'un altro triangolo ABC, preso ad arbitrio nel piano del primo; più in generale, potremo calcolare l'area racchiusa da una spezzata qualunque, operando sul triangolo ausiliare ABC.

4. Quando uno o più fra i rapporti $\alpha_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n$ sono nulli, il che ha luogo quando qualcuno dei vertici del triangolo LMN appartiene al perimetro del triangolo fondamentale, le (7) assumono una forma indeterminata. Per isfuggire a tale inconveniente si può ricorrere alle formole (3) e (4), ed esprimere $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \gamma_n$ in funzione di $x_1, y_1, z_1, \ldots, z_n$. Così facendo, si trova agevolmente

$$\frac{\Delta}{S} = \frac{x_1 y_m z_n + x_m y_n z_1 + x_n y_1 z_m - x_n y_m z_1 - x_1 y_n z_m - x_m y_1 z_n}{h_a h_b h_c}. \qquad (8)$$

Questa formula può scriversi

$$\Delta = \frac{S}{h_a h_b h_c} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_m & y_m & z_m \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix}. \qquad (8')$$

Lasciamo al lettore la considerazione dei vari casi particolari, assai interessanti, i quali si hanno dando ai vertici del triangolo LMN particolari posizioni rispetto a quelli di ABC; da essi si possono dedurre molti teoremi, alcuni de' quali abbastanza noti.

5. Se i punti LMN sono alllineati è nulla l'espressione che dà Δ; viceversa, se $\Delta = 0$ i punti L, M, N sono allineati. Potremo dunque affermare:

" *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti* L, M, N, *presi nel piano del triangolo* ABC *siano allineati, è che sia verificata la relazione*

$$\frac{1}{\beta_1}(\gamma_m - \gamma_n) + \frac{1}{\beta_m}(\gamma_n - \gamma_1) + \frac{1}{\beta_n}(\gamma_1 - \gamma_m) = 0, \qquad (9)$$

o una analoga „.

La condizione affinchè i punti L, M, N siano allineati, può eziandio dedursi dalla (8'); si ha allora:

" *Essendo* $x'_1, y'_1, \ldots, z'_n$ *quantità* **proporzionali** *alle distanze dei punti* L, M, N *da' lati* BC, CA, AB, *del triangolo* ABC, *condizione necessaria e sufficiente affinchè essi punti siano allineati è il verificarsi della relazione*

$$\begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x'_m & y'_m & z'_m \\ x'_n & y'_n & z'_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

6. Nel piano del triangolo ABC consideriamo ora due punti P, Q. Per ogni punto X appartenente alla retta PQ sarà soddisfatta la relazione

$$\frac{1}{\alpha_x}(\beta_p - \beta_q) + \beta_x\left(\frac{1}{\alpha_q} - \frac{1}{\alpha_p}\right) + \frac{\beta_q}{\alpha_p} - \frac{\beta_p}{\alpha_q} = 0. \qquad (11)$$

Vogliamo determinare il *rapporto di partizione* del lato BC, mediante la retta PQ. Supponiamo, a tale uopo, che X, percorrendo la retta PQ, si porti sull'intersezione di tale retta col lato BC; allora è $\beta_x = 0$, e quindi la (11) dà

$$\frac{1}{\alpha_x}(\beta_p - \beta_q) + \frac{\beta_q}{\alpha_p} - \frac{\beta_p}{\alpha_q} = 0,$$

da cui

$$\alpha_x = \frac{-\frac{1}{\beta_p} + \frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p - \gamma_q}.$$

Dunque: *I rapporti di partizione determinati dalla retta* PQ *sui lati* BC, CA, AB *del triangolo* ABC, *hanno per espressione*

$$\frac{-\frac{1}{\beta_p} + \frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p - \gamma_q}; \quad \frac{-\frac{1}{\gamma_p} + \frac{1}{\gamma_q}}{\alpha_p - \alpha_q}; \quad \frac{-\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{\alpha_q}}{\beta_p - \beta_q}.$$

Un altro punto R appartiene alla retta PQ se

$$\frac{\frac{1}{\beta_p} - \frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p - \gamma_q} = \frac{\frac{1}{\beta_p} - \frac{1}{\beta_r}}{\gamma_p - \gamma_r}, \tag{12}$$

che, sott'altra forma, esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti siano allineati.

7. Nel piano del triangolo ABC consideriamo poi una retta p, e denotiamo con P_a, P_b, P_c i punti in cui essa incontra i lati BC, CA, AB, con p_a, p_b, p_c i valori dei rapporti semplici $\frac{BP_a}{CP_a}, \frac{CP_b}{AP_b}, \frac{AP_c}{BP_c}$. Pel notissimo teorema di MENELAO abbiamo

$$p_a p_b p_c = 1. \tag{13}$$

Per le conclusioni a cui siam venuti al n. (6), osservando la (11), è facile conchiudere che

" *Il verificarsi d'una delle tre relazioni equivalenti*

$$\frac{p_b}{\beta_p} + \frac{\gamma_p}{p_c} = 1; \quad \frac{p_c}{\gamma_p} + \frac{\alpha_p}{p_a} = 1; \quad \frac{p_a}{\alpha_p} + \frac{\beta_p}{p_b} = 1, \tag{14}$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè il punto P *e la retta* p *s'appartengano.* (1)

Da queste relazioni è facile dedurre che

" *Detto* R *il punto d'incontro delle rette* p, q, *si ha*

$$\alpha_r = \frac{\frac{1}{p_c} - \frac{1}{q_c}}{p_b - q_b}; \quad \beta_r = \frac{\frac{1}{p_a} - \frac{1}{q_a}}{p_c - q_c}; \quad \gamma_r = \frac{\frac{1}{p_b} - \frac{1}{q_b}}{p_a - q_a} \text{ ''}. \tag{15}$$

(1) La questione 818 del " Supplemento " è un caso particolare di questa proposizione.

E quindi è ovvio che " *Il verificarsi della relazione*

$$\frac{\dfrac{1}{p_c}-\dfrac{1}{q_c}}{p_b-q_b}=\frac{\dfrac{1}{p_c}-\dfrac{1}{r_c}}{p_b-r_b}, \tag{16}$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè le rette p, q, r *passino per uno stesso punto* ".

In particolare " *Il verificarsi della relazione*

$$\frac{1-\dfrac{1}{p_c}}{1-p_b}=\frac{1-\dfrac{1}{q_c}}{1-q_b} \tag{17}$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè le rette p, q *siano parallele* ".

8. Le considerazioni svolte precedentemente s'applicano molto utilmente nella investigazione delle proprietà di figure geometriche, dipendenti dall'allineamento di punti e dalla concorrenza di rette. Daremo alcuni esempi dimostrando una serie di proprietà notevolissime sui triangoli.

Premettiamo la dimostrazione d'un classico teorema che dovremo applicare nelle considerazioni che stiamo per isvolgere.

Consideriamo ancora nel piano del triangolo ABC il triangolo LMN; denotiamo rispettivamente con P_a, P_b, P_c i punti in cui le rette MN, NL, LM incontrano i lati BC, CA, AB del triangolo ABC. Si ha: (1)

$$p_a=\frac{-\dfrac{1}{\beta_m}+\dfrac{1}{\beta_n}}{\gamma_m-\gamma_n}; \qquad \frac{-\dfrac{1}{\gamma_n}+\dfrac{1}{\gamma_l}}{\alpha_n-\alpha_l}; \qquad \frac{-\dfrac{1}{\alpha_l}+\dfrac{1}{\alpha_m}}{\beta_l-\beta_m};$$

moltiplicando queste relazioni fra loro membro a membro, tenendo ben presente che è

$$\alpha_l\beta_l\gamma_l=\alpha_m\beta_m\gamma_m=\alpha_n\beta_n\gamma_n=-1,$$

si trova agevolmente

$$p_ap_bp_c=\frac{-\dfrac{1}{\alpha_l\beta_m\gamma_n}\left(1-\dfrac{\alpha_l}{\alpha_m}-\dfrac{\beta_m}{\beta_n}-\dfrac{\gamma_n}{\gamma_l}\right)+\dfrac{\alpha_n}{\alpha_m}+\dfrac{\beta_l}{\beta_n}+\dfrac{\gamma_m}{\gamma_l}-\alpha_l\beta_m\gamma_n\cdot\alpha_n\beta_l\gamma_m}{-\alpha_l\beta_m\gamma_n-\dfrac{\alpha_l}{\alpha_m}-\dfrac{\beta_m}{\beta_n}-\dfrac{\gamma_n}{\gamma_l}+\dfrac{\alpha_n}{\alpha_m}+\dfrac{\beta_l}{\beta_n}+\dfrac{\gamma_m}{\gamma_l}+\alpha_n\beta_l\gamma_m}.$$

Da questa relazione risulta che se è $\alpha_l\beta_m\gamma_n=-1$, ossia se le rette AL, BM, CN concorrono in un punto, è pure $p_ap_bp_c=1$, ossia i punti $P_aP_bP_c$ sono allineati; viceversa se $p_ap_bp_c=1$, si deduce $\alpha_l\beta_m\gamma_n=-1$. Diremo dunque col DESARGUES:

TEOREMA. — *Se le congiungenti i vertici omologhi di due triangoli concorrono in un punto, i punti d'incontro de' loro lati omologhi sono allineati; e viceversa.*

(1) Per le notazioni si ricordi ciò che s'è detto precedentemente.

Quando due triangoli sono in tali condizioni essi si chiamano *omologici*; si chiamano rispettivamente *centro* e *asse d'omologia*, i punti di concorrenza delle congiungenti i vertici omologhi e la retta che contiene i punti d'incontro de' lati omologhi.

9. Preso un punto P nel piano del triangolo ABC, chiamiamo *algebricamente associati al punto* P i punti P_a, P_b, P_c, definiti rispettivamente dai rapporti $\alpha_p, -\beta_p, -\gamma_p; -\alpha_p, \beta_p, -\gamma_p; -\alpha_p, -\beta_p, \gamma_p$. V'è dunque un punto algebricamente associato al punto P, relativamente a ciascun lato. È evidente che P_a può ottenersi da P nel seguente modo: Siano rispettivamente B'_p, C'_p i punti in cui le rette A_pC_p, A_pB_p incontrano i lati AC, AB; le rette BB'_p, CC'_p, AA_p concorrono nel punto P_a. Analogamente si possono ottenere i punti P_b, P_c. Il triangolo $P_aP_bP_c$ è circoscritto ad ABC ed è omologico con esso, essendo P il centro d'omologia. Il triangolo ABC, è anche il triangolo pedale di P rispetto a $P_aP_bP_c$.

È facile vedere che le rette PQ_a, QP_a, essendo P, Q due punti qualunque del piano del triangolo, passano per uno stesso punto A_r del lato BC, e si ha (n. 6)

$$\alpha_r = -\frac{\frac{1}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p+\gamma_q}.$$

Analogamente le coppie di rette PQ_b, QP_b; PQ_c, QP_c, si tagliano nei punti B_r, C_r dei lati AC, AB, e si ha

$$\beta_r = -\frac{\frac{1}{\gamma_p}+\frac{1}{\gamma_q}}{\alpha_p+\alpha_q};\ \gamma_r = -\frac{\frac{1}{\alpha_p}+\frac{1}{\alpha_q}}{\beta_p+\beta_q}.$$

Si deduce

$$\alpha_r\beta_r\gamma_r = -1,$$

Presa una retta p nel piano del triangolo ABC, chiamiamo *algebricamente associate alla retta* p le rette a_p, b_p, c_p definite rispettivamente dai rapporti $p_a, -p_b, -p_c; -p_a, p_b, -p_c; -p_a, -p_b, p_c$. V'è dunque una retta algebricamente associata alla retta p, relativamente a ciascun vertice. È evidente che a_p può ottenersi da p nel seguente modo: Siano rispettivamente P'_b, P'_c i punti in cui le rette che uniscono B, C coi punti d'incontro delle rette AP_a, CP_c; AP_a, BP_b incontrano i lati opposti; i punti P'_c, P'_b, P_a appartengono a una medesima retta a_p. Analogamente si possono ottenere b_p, c_p. Il triangolo di lati a_p, b_p, c_p è inscritto in ABC ed è omologico con esso, essendo p l'asse d'omologia.

È facile vedere che, essendo p, q due rette qualunque del piano del triangolo, i punti pa_q, qa_p sono allineati con A e che la trasversale angolare che li congiunge taglia il lato BC in un punto R_a, e si ha (n. 7)

$$r_a = \frac{\frac{1}{p_c}+\frac{1}{q_c}}{p_b+q_b}.$$

Analogamente i punti pb_q, qb_p; pc_q, qc_p sono allineati con B, C e si ha

$$r_b = \frac{\frac{1}{p_a}+\frac{1}{q_a}}{p_c+q_c};\ r_c = \frac{\frac{1}{p_b}+\frac{1}{q_b}}{p_a+q_a}.$$

Si deduce

$$r_ar_br_c = 1,$$

e si conchiude che le rette AA_r, BB_r, CC_r concorrono in un punto R. Diremo dunque:

TEOREMA. — *Le congiungenti ciascuno di due punti dati con l'algebricamente associato all'altro rispetto a un medesimo lato si tagliano su questo lato;*

le congiungenti i punti così ottenuti coi vertici opposti al triangolo concorrono in un punto.

e si conchiude che i punti R_a, R_b, R_c stanno su una stessa retta r.

Diremo dunque:

TEOREMA. — *I punti d'incontro di ciascuna di due rette date con l'algebricamente associata all'altra rispetto a uno stesso vertice, sono allineati con questo;*

i punti d'incontro delle rette così ottenute co' lati opposti del triangolo sono allineati.

10. Giusta ciò che s'è detto nei n. 8 e 9, dalle proposizioni precedenti, deduciamo, come corollari, le seguenti:

« *Se un triangolo dato è inscritto in un triangolo e circoscritto a un altro, e se il triangolo circoscritto al dato è omologico con esso e con quello inscritto, il dato e quest'ultimo sono fra loro omologici* ».

« *Se un dato triangolo è circoscritto a un triangolo e inscritto in un altro, e se il triangolo inscritto nel dato è omologico con esso e con quello circoscritto, il dato e quest'ultimo sono omologici fra loro* ».

Consideriamo ora un triangolo ABC, quindi un triangolo $A_pB_pC_p$ inscritto in esso, e poscia un triangolo $A'_qB'_qC'_q$ inscritto nel precedente. Per le proprietà or ora enunciate se ABC è omologico con $A_pB_pC_p$ e $A'_qB'_qC'_q$, quest'ultimi sono fra loro omologici; se $A'_qB'_qC'_q$ è omologico con ABC e con $A_pB_pC_p$, quest'ultimi triangoli sono omologici fra loro. È facile ora dimostrare che se $A_pB_pC_p$ è omologico con ABC e $A'_qB'_qC'_q$, questi due triangoli sono fra loro omologici. Infatti, sia P il punto di concorso delle rette AA_p, BB_p, CC_p; e sia Q il punto d'incontro delle rette $A_pA'_q$, $B_pB'_q$, $C_pC'_q$; dico che i triangoli ABC, $A'_qB'_qC'_q$ sono omologici. Sia R il punto d'incontro delle rette BB'_q, CC'_q e la retta AR tagli B_pC_p in un punto X; essendo ABC e $XB'_qC'_q$ tra loro omologici, le rette A_pX, $B_pB'_q$, $C_pC'_q$ concorrono in un punto; dunque AX passa per Q e X' coincide con A'_q. Ciò vuol dire che le rette $A_pA'_q$, $B_pB'_q$, $C_pC'_q$ concorrono in un punto R, ed in tal modo è provato l'asserto.

Siamo dunque in grado d'enunciare la seguente importante proprietà:

TEOREMA. — *Se di tre triangoli gli uni inscritti negli altri, due sono omologici col terzo, essi sono omologici fra loro.*

Da questo teorema si possono dedurre, come casi particolari, molte notevoli proprietà del triangolo. Ne enunciamo una abbastanza nota. (1)

« *Le rette che uniscono i punti medi de' lati d'un triangolo ai punti medi delle altezze corrispondenti concorrono in un punto* (*Punto di* LEMOINE) ».

(1) SCHLÖMILCH, *Esercizi d'analisi*; I. § 33.

11. Consideriamo ancora, come al n. 9, due punti P, Q co' loro algebricamente associati. Il rapporto di partizione del lato BC, determinato dalla retta PQ è

$$r_a = \frac{-\frac{1}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p-\gamma_q},$$

che non muta cambiando β_p, β_q, γ_p, γ_q rispettivamente in $-\beta_p$, $-\beta_q$, $-\gamma_p$, $-\gamma_q$. Ciò vuol dire che la retta P_aQ_a, che congiunge gli algebricamente associati a P, Q, taglia il lato BC nel suo punto d'incontro con la PQ.

Inoltre le rette P_bQ_b, P_cQ_c, concorrono in un punto del lato BC, attesochè il rapporto di partizione del lato BC, determinato tanto dall'uno quanto dall'altra ha per espressione

$$-\frac{\frac{1}{\beta_p}-\frac{1}{\beta_q}}{-\gamma_p+\gamma_q}.$$

In conclusione avremo:

Teorema. — *Le tre congiungenti i punti algebricamente associati a due punti dati rispetto a ciascun lato d'un triangolo, incontrano i lati rispettivi in punti che stanno sulla congiungente i punti dati, e s'incontrano due a due sui lati del triangolo dato.*

Consideriamo ancora, come al n. 9, due rette p, q colle loro algebricamente associate. Detto R il punto d'incontro delle rette pq, si ha

$$\varkappa_r = \frac{\frac{1}{p_c}-\frac{1}{q_c}}{p_b-q_b};$$

questo rapporto non muta cambiando p_b, q_b, p_c, q_c rispettivamente in $-p_b$, $-q_b$, $-p_c$, $-q_c$. Ciò vuol dire che il punto a_pa_q d'incontro delle algebricamente associate a p, q, e il punto d'incontro delle rette p, q stesse, sono allineati con A.

Inoltre i punti a_pb_q, c_pc_q sono allineati con A, attesochè il rapporto tanto dell'uno quanto dell'altro di questi punti sul lato BC ha per espressione

$$-\frac{\frac{1}{p_c}-\frac{1}{q_c}}{p_b-q_b}.$$

In conclusione avremo:

Teorema. — *I tre punti d'incontro delle rette algebricamente associate a due rette date rispetto a ciascun vertice d'un triangolo stanno sulle rette che congiungono i vertici del triangolo col punto d'incontro delle rette date, e sono due a due allineati coi vertici del triangolo dato.*

12. Tenuto conto del teorema enunciato al n. 10, e delle osservazioni fatte al n. 9, dai teoremi precedenti e da quelli del n. 9, si deducono le seguenti proprietà generali:

Teorema. — *Se due triangoli circoscritti a un terzo sono con esso omologici:*

1°. *Le congiungenti i vertici omologhi d'essi sono lati d'un triangolo inscritto al dato ed omologico con esso e con gli altri due; l'asse*

Teorema. — *Se due triangoli inscritti in un terzo sono con esso omologici.*

1°. *I punti d'incontro dei lati omologhi d'essi sono vertici d'un triangolo circoscritto al dato ed omologico con esso e con gli altri due,* *dell'omologia di questo triangolo col dato contiene i centri delle omologie del dato cogli altri due.*

2°. *I punti d'incontro delle congiungenti i vertici omologhi di ciascuno d'essi con il centro dell'omologia dell'altro col dato, sono vertici d'un triangolo inscritto nel dato ed omologico con esso.*

il centro dell'omologia di questo triangolo col dato è il punto d'incontro degli assi delle omologie del dato cogli altri due.

2°. *Le congiungenti i punti d'incontro dei lati omologhi di ciascuno d'essi con l'asse dell'omologia, dell'altro col dato, sono lati d'un triangolo circoscritto al dato e omologico con esso.*

(Continua).

R. VERCELLIN.

UN PROBLEMA DI ANALISI COMBINATORIA

(posto da LORD KELVIN)

1. Il problema, che vogliamo considerare, è il seguente:

" Quanti sono i casi che si possono presentare nella risoluzione " numerica di un triangolo sferico, quando si suppongano dati i tre " lati, ciascuno colla approssimazione di un primo? „

Questo problema è stato considerato da LORD KELVIN (1), il quale, a proposito della risoluzione del triangolo di posizione (che ha per vertici lo zenit dell'osservatore, l'astro osservato, e quello dei due poli che è posto dalla medesima parte dell'equatore celeste dalla quale si trova lo zenit) dati i tre lati (e cioè i complementi della declinazione e dell'altezza dell'astro e il complemento della latitudine assoluta dell'osservatore), fa la seguente considerazione.

Quando pensiamo alle migliaia di triangoli calcolati giornalmente da tutti i bastimenti in navigazione, possiamo per un momento essere condotti a pensare che ognuno di essi sia già stato risolto, e che ogni nuovo calcolo sia semplicemente la ripetizione di un calcolo già fatto. Ma questo sarebbe un grande errore, anche supponendo che per gli usi pratici non occorra spingere la approssimazione oltre un primo. Infatti, vi sono 5400 primi in 90 gradi, e quindi vi sono

$$5400^3 = 157464000000$$

(1) *Proceedings of the Royal Society (of London)*, vol. XIX, 1870-71, pag. 260. La stessa considerazione è ripetuta, con altre parole, nella prefazione alle *Tables for facilitating Sumner's method at sea*. Londra, Taylor, 1876.

(Correggendo le bozze). L'illustre professore, il più grande scienziato, teorico e pratico, moderno, è morto in questi giorni: la sua tomba è stata posta accanto a quella di NEWTON; nessuno più di Lui meritava questo sommo onore.

triangoli da risolvere; e ciò, pur supponendo di calcolarne 1000 al giorno, richiederebbe circa 400000 anni (quattromila secoli!). *Anche servendosi solo delle soluzioni di triangoli, i cui lati siano un numero intero di gradi, i triangoli da risolversi sarebbero*

$$90^3 = 729000,$$

e questo numero è ancora troppo grande, e la corrispondente disposizione in una tavola è troppo complicata.

2. A noi pare che alla precedente conclusione si possano fare tre obbiezioni.

La prima è questa, che non basta supporre tutt'e tre i lati acuti, perchè nel triangolo di posizione due lati (il complemento dell'altezza e il complemento della latitudine assoluta) sono bensì acuti sempre, ma il terzo lato (il complemento della declinazione) può essere ottuso (quando la latitudine vera e la declinazione sono di segno contrario). Per il triangolo di posizione bisognerebbe dunque supporre due lati variabili da 0° a 90°, e il terzo variabile da 0° a 180°. Notiamo subito che questa supposizione si può sempre fare anche nella risoluzione di un triangolo sferico qualunque (dati i tre lati), perchè la risoluzione di un triangolo avente due o tre lati ottusi si riduce immediatamente alla risoluzione di un triangolo avente un sol lato ottuso [1].

La seconda obbiezione è che per risolvere tutti i triangoli possibili non è necessario considerare le *disposizioni* con ripetizione (come evidentemente si è fatto per giungere al risultato accennato), ma basta considerare le *combinazioni* con ripetizione; perchè, variando l'ordine dei dati, non occorre un nuovo calcolo e basta variare corrispondentemente l'ordine degli angoli.

La terza obbiezione, finalmente sta in ciò, che, per evitar di iniziare moltissimi calcoli inutili, si deve naturalmente supporre che si verifichi *a priori* se le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza del triangolo son soddisfatte. Si noti però che della prima non occorre tener conto, perchè, bastando supporre un sol lato, al più, ottuso, essa è sempre verificata.

Concludendo: il numero cercato è il numero delle combinazioni con ripetizione che si possono formare con tre numeri interi, due dei quali variano da 1 a 5400 e il terzo varia da 1 a 108000, escludendo tutte quelle combinazioni nelle quali ciascuno dei tre numeri in esse compresi non sia minore della somma degli altri due.

OSSERVAZIONE. — Se a, b, c sono i lati di un triangolo sferico e due o tre di essi sono ottusi, e se a, b', c' sono i lati del colunare (avente

---

[1] Due triangoli sferici si dicono *colunari* quando si possono disporre in modo che abbiano un lato comune, e che gli altri due lati dell'uno siano i prolungamenti degli altri due lati dell'altro, quando cioè si può con essi formare un fuso (V. CASEY, *A Treatise on Spherical Trigonometry.* Dublino, Hodges, 1889).

con esso in comune il lato a), è facile verificare che le *quattro* condizioni

$$a+b+c<360^\circ, \quad a<b+c, \quad b<c+a, \quad c<a+b,$$

necessarie e sufficienti per l'esistenza del triangolo primitivo, equivalgono alle *tre* condizioni

$$a<b'+c', \quad b'<c'+a, \quad c'<a+b',$$

necessarie e sufficienti per l'esistenza del triangolo colunare accennato.

3. Si ricordi, prima di tutto, che, dati n elementi in un dato ordine, per formare tutte le loro combinazioni con ripetizione e di classe k, basta far seguire ogni combinazione con ripetizione di classe $k-1$ da ciascun degli elementi che seguono l'ultimo, cominciando dall'ultimo stesso; e si immagini d'avere così formate tutte le combinazioni con ripetizione e di classe 3 dei primi $\frac{n}{2}$ numeri, presi nell'ordine naturale e supponendo n pari.

Tutte queste combinazioni potranno essere divise in n gruppi, in modo che quelle del primo gruppo abbiano tutte per primo elemento 1, che quelle del secondo gruppo abbiano tutte per primo elemento 2, ... che quelle del p^o gruppo abbiano tutte per primo elemento p. Ognuno di questi gruppi potrà a sua volta esser diviso in tante linee, in modo che le combinazioni appartenenti a una stessa linea abbiano, successivamente, tutte lo stesso secondo elemento: così il primo gruppo verrà diviso in n linee, tali che le combinazioni contenute nella prima, nella seconda, ... nella q^a linea comincieranno con

$$1,1; \quad 1,2; \ldots \quad 1,q; \ldots$$

il secondo gruppo verrà diviso in $n-1$ linee, tali che le combinazioni contenute nella prima, nella seconda, ... nella q^a linea comincieranno con

$$2,2; \quad 2,3; \ldots \quad 2,(q+1); \ldots;$$

il p^o gruppo verrà diviso in $n-(p-1)$ linee, tali che le combinazioni contenute nella prima, nella seconda, ... nella q^a linea comincieranno con

$$p,p; \quad p,(p+1); \ldots \quad p,(q+p-1); \ldots.$$

Ciò posto, per la risoluzione del nostro problema, basta cercare il numero delle combinazioni che, in ciascun gruppo, soddisfano alle due seguenti condizioni: prima che ciascuno dei due primi elementi sia al più uguale a $\frac{1}{2}n$ (perchè basta supporre che uno solo dei lati possa essere ottuso); seconda, che il terzo elemento sia minore della somma degli altri due (perchè, per il modo col quale le combinazioni sono formate, tanto il primo che il secondo elemento sono certamente minori della somma degli altri due).

Si cominci dall'escludere gli $\frac{n}{2}$ gruppi nei quali il primo elemento è maggiore di $\frac{n}{2}$. Considerando poscia il secondo elemento, si osservi che dal primo gruppo devono essere escluse tutte quelle linee nelle quali il secondo elemento è maggiore di $\frac{n}{2}$, resteranno così $\frac{n}{2}$ linee soltanto; che per la stessa ragione nel secondo gruppo resteranno solo $\frac{n}{2}$, linee, . .; nel p^0 gruppo $\left(p \leqq \frac{n}{2}\right)$ resteranno solo $\frac{n}{2}-(p-1)$ linee, . .; nel $\left(\frac{n}{2}\right)^0$ gruppo resterà una linea sola.

Si escludano ora da ciascuna linea rimasta tutte quelle combinazioni nelle quali il terzo elemento non è minore delle somme degli altri due. Nel primo gruppo resta una sola combinazione per ogni linea; infatti la prima e la seconda combinazione della q^a linea sono

$$1, q, q; \qquad \text{e} \qquad 1, q, (q+1),$$

e quindi la seconda (e, *a fortiori*, ognuna di quelle che seguono) va esclusa. Nel secondo gruppo restano due sole combinazioni per ogni linea; infatti la prima, la seconda e la terza combinazione della q^a linea sono

$$2, (q+1), (q+1; \qquad 2, (q+1), (q+2); \qquad 2, (q+1), (q+3),$$

e quindi la terza (e, *a fortiori*, ognuna di quelle che seguono) va esclusa. Nel p^0 gruppo restano solo p combinazioni per ogni linea; infatti la prima, la seconda, ... la r^a combinazione della q^a linea sono

$$p, (q+p-1), (q+p-1); \qquad p, (q+p-1), (q+p)\ldots$$
$$\ldots p, (q+p-1), (q+p+r-2)$$

quindi l'ultima combinazione che resta è quella in cui

$$q+p+r-2=p+(q+p-1)-1 \quad , \quad \text{ossia} \qquad r=p.$$

Del primo, del secondo... del p^0 gruppo restano dunque

$$\frac{n}{2}, \quad 2\left(\frac{n}{2}-1\right), \ldots \quad p\left(\frac{n}{2}-[p-1]\right),$$

combinazioni soltanto.

Indicando con N il numero cercato, sarà quindi

$$\mathrm{N}=\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p\left[\frac{n}{2}-(p-1)\right]=\frac{n+2}{2}\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p-\sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} p^2,$$

da cui, con facili trasformazioni,

$$\mathrm{N}=\frac{n(n+2)(n+4)}{48}.$$

Questo è dunque il numero delle combinazioni con ripetizione che si possono formare con *tre* dei primi n numeri interi essendo n pari; colle condizioni che due di essi varino da 1 ad $\frac{n}{2}$ soltanto; e che ciascuno dei tre numeri che formano una stessa combinazione sia minore della somma degli altri due.

Osservazione. — È molto notevole che il numero precedente risulti precisamente uguale al numero delle combinazioni con ripetizione e di classe k che si possono formare con $\frac{n}{2}$ elementi differenti, senza nessuna delle condizioni ora accennate.

4. Applicando la formula precedente al caso considerato da Lord Kelvin, si ha

$$N = 26\,258\,581\,800,$$

che è minore di un sesto di quello indicato dal Thomson stesso. Nel caso poi che i lati si suppongano variabili di 1° in 1°, (anzichè di $1'$ in $1'$) si ha

$$N = 125\,580.$$

Evidentemente il primo di questi risultati non ha nessuna importanza pratica e solo soddisfa a una pura curiosità scientifica, ma altrettanto non si può dire del secondo. Infatti, da esso facilmente risulta che una tavola, la quale desse i tre angoli (p. es. colla approssimazione di $1'$) variando i tre lati di 1° in 1°, potrebbe benissimo essere calcolata e racchiusa in un solo volume (contrariamente a quanto si è concluso nella considerazione riportata in principio); e questa tavola *generale* renderebbe inutili molte tavole *speciali*, che si usano nei calcoli nautici.

Prof. Giuseppe Pesci
della R. Accademia Navale.

SUPERFICIE CHE PASSANO INFINITE VOLTE PER CURVE o punti arbitrariamente scelti

1. In un fascio di piani di sostegno l siano scelti ad arbitrio n piani; in ciascuno piano α_i sia dato una curva c_i di equazione

$$(i = 1, 2, \dots n) \quad z = a_{0,i}\, x^m + a_{1,i}\, x^{m-1} + \dots + a_{m-1,i}\, x + a_{m,i} \quad (1)$$

quando la si riferisca ad un sistema di assi cartesiani, di cui l'asse z coincidente con l e l'asse x colla sezione di α_i con un piano β normale ad l in un punto O.

Vogliamo costruire una superficie che passa infinite volte per le n curve c_i arbitrariamente fissate sugli n piani dati.

Come coordinate di un punto M prenderemo la distanza z di M dal piano β e le coordinate polari della proiezione di M sul piano β, fissata che sia in questo una retta λ come asse polare. Di più, seguendo una convenzione introdotta dal Loria (1) sulle coordinate polari, la coppia di numeri r, ω rappresenti un punto del piano anche se r è negativo e più precisamente il punto che dista di $-r$ da O sul raggio che forma coll'asse polare l'angolo $\omega + \pi$.

Se $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ sono gli angoli che i piani, scelti nel fascio, fanno col piano per λ, le equazioni delle n curve c_i sono

$$(i = 1, 2, \ldots n) \qquad \begin{cases} \omega = \omega_i \\ z = a_{0,i}\, r^m + a_{1,i}\, r^{m-1} + \ldots + a_{m-1,i}\, r + a_{m,i}\,. \end{cases}$$

Si costruiscano le $m+1$ funzioni razionali intere di grado non maggiore di $n-1$ in t, $\psi_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots m)$ che per

$$t = \operatorname{sen}\frac{\omega_1}{2}, \qquad t = \operatorname{sen}\frac{\omega_2}{2}, \ldots\ t = \operatorname{sen}\frac{\omega_n}{2}$$

assumono i valori

$$a_{k,1},\ a_{k,2}, \ldots a_{k,n}.$$

Allora la funzione $\psi_k\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)$ assume per

$$\omega \equiv \omega_i \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

il valore $a_{k,i}$. Indichiamo infine con $\varphi(\omega)$ la funzione

$$\operatorname{sen}\frac{\omega - \omega_1}{2} \,.\, \operatorname{sen}\frac{\omega - \omega_2}{2} \ldots \operatorname{sen}\frac{\omega - \omega_n}{2},$$

che si annulla per tutti e soli i valori di ω che siano congrui ad $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ rispetto al modulo 2π.

Ciò posto, l'equazione

$$z = \psi_0\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right) r^m + \psi_1\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right) r^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + \psi_{m-1}\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right) r + \psi_m\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right) + \omega\varphi(\omega) \qquad (2)$$

rappresenta una superficie che soddisfa alle volute condizioni: infatti ogni volta che sia

$$\omega \equiv \omega_i \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi)$$

(1) G. Loria. *Osservazioni sulle coordinate polari*, "Periodico di Matematica", 1909.

l'equazione (2) si riduce a

$$z = a_{0,i}\, r^m + a_{1,i}\, r^{m-1} + \ldots + a_{m-1,i}\, r + a_{m,i}.$$

Ogni piano del fascio non coincidente cogli n piani contenenti le c_i taglia la superficie secondo infinite curve del tipo (1): ogni piano normale ad l taglia la superficie secondo una curva che passa infinite volte per i punti che desso piano ha in comune colle c_i.

2. In un piano γ siano dati n punti $A_1, A_2, \ldots A_n$: prendiamo su γ stesso un punto O, per modo che i raggi $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ siano distinti, e per O una retta λ.

Siano $r_1, r_2, \ldots r_n$ le lunghezze dei raggi $OA_1, OA_2, \ldots OA_n$ e siano $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ gli angoli che questi raggi formano con una determinata direzione di λ.

Denotiamo con $\psi(t)$ una funzione di t razionale intera che per

$$t = \operatorname{sen}\frac{\omega_1}{2}, \qquad t = \operatorname{sen}\frac{\omega_2}{2}, \ldots\; t = \operatorname{sen}\frac{\omega_n}{2}$$

assume rispettivamente i valori

$$r_1, r_2, \ldots r_n.$$

Se O si assume in γ come polo e λ come asse polare, l'equazione

$$r = \psi\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)$$

è l'equazione, in coordinate polari, di una curva L che passa per gli n punti $A_2, A_2, \ldots A_n$.

Sarà definito un sistema di coordinate cilindriche se per O mandiamo un asse normale a γ e lo prendiamo per asse z. Su ciascun piano uscente da z e con centro nel punto in cui questo incontra la linea L si immagini tracciato un circolo il cui raggio sia $\omega\varphi(\omega)$, essendo ω l'angolo che il piano considerato forma con il piano contenente z e λ e $\varphi(\omega)$ la funzione definita nel paragrafo precedente.

Il luogo di questi circoli è la superficie

$$z^2 + \left[r - \psi\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)\right]^2 - \omega^2\varphi(\omega)^2 = 0,$$

che soddisfa alle volute condizioni. Ogni volta, infatti, che sia

$$\omega \equiv \omega_i \qquad (\operatorname{mod} 2\pi) \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

l'equazione precedente definisce l'unico punto

$$z = 0, \qquad r = \psi\left(\operatorname{sen}\frac{\omega_i}{2}\right), \qquad \omega = \omega_i.$$

La superficie considerata è il luogo di un circolo mobile il cui centro percorre infinite volte la linea

$$r = \psi\left(\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right)$$

ed il cui raggio, variabile con ω, si annulla per

$$\omega \equiv \omega_i \qquad (\text{mod}\, 2\pi) \qquad (i = 1, 2 \ldots n).$$

La sezione di questa superficie con γ è una linea

$$r = \psi\left(\text{sen}\,\frac{\omega}{2}\right) \pm \omega\varphi(\omega)$$

che passa infinite volte per gli n punti $A_1, A_2, \ldots A_n$.

È ovvio osservare che in luogo di circoli si possono prendere altre curve.

FILIPPO SIBIRANI.

Bologna, maggio 1907.

I SISTEMI LINEARI DI CERCHI

sulla sfera e sulle superfici a curvatura costante positiva

1. Sono note le proprietà semplici ed eleganti dei sistemi lineari di cerchi sul piano; ed è pure noto come tali proprietà offrano molte analogie con quelle di somiglianti sistemi di cerchi sopra una sfera. Le proprietà di questi ultimi si deducono nel modo più semplice, segando la sfera coi piani di un fascio o di una stella: ed è questa la via che ordinariamente si segue nella esposizione di dette proprietà.

Tuttavia un tale metodo di esposizione, se da una parte presenta il vantaggio di una maggiore semplicità e speditezza (talchè sarà sempre didatticamente preferibile), dall'altra ha lo svantaggio di non porre nel debito rilievo tutta la portata delle proprietà in questione, facendone esso dipendere la dimostrazione da considerazioni stereometriche, e subordinandole quindi alla forma effettiva che la sfera ha nello spazio. Invece le proprietà dei sistemi lineari di cerchi tracciati sopra una sfera sono inerenti alla superficie di questa considerata in sè stessa, indipendentemente dalla sua forma effettiva: appartengono cioè a quella categoria di proprietà che costituiscono la cosiddetta *geometria della superficie*, e che, conservandosi inalterate comunque si fletta (senza rotture nè stiramenti) la superficie stessa, appartengono non ad essa soltanto, ma altresì a tutte le sue deformate, cioè, nel caso della sfera, a tutte le superficie a curvatura costante positiva. (¹)

Da questo punto di vista può quindi sembrare preferibile una esposizione delle proprietà in questione, in cui esse vengano dedotte

(¹) Veggasi a questo proposito: L. BIANCHI, *Lezioni di Geom. differenziale*, vol. I, §§ 98, 100, 174.

senza uscire dalla superficie, facendone scaturire la dimostrazione da sole considerazioni di geometria sferica; e che resti quindi valevole per una qualunque superficie a curvatura costante positiva.

È quanto s'è cercato di fare nelle pagine che seguono, e più specialmente nei §§ 2-7, essendo i due ultimi §§ destinati in ispecial modo a collegare il metodo di trattazione ivi adottato, coll'altro che si segue ordinariamente.

Le cose svolte nei §§ 2-7 sono, come s'è dichiarato or ora, applicabili senz'altro ad una qualsiasi superficie a curvatura costante positiva: basterà perciò sostituire la parola *geodetica* all'altra *cerchio massimo*. È noto inoltre come la geometria sulla superficie a curvatura costante positiva coincida in sostanza colla cosiddetta *geometria non-euclidea sul piano ellittico*: la teoria che segue può quindi anche, se si vuole, essere riguardata come quella dei sistemi lineari di cerchi sul piano in geometria ellittica, bastando perciò sostituire la parola *retta* all'altra *cerchio massimo*: sotto un tale punto di vista essa si presenta come la naturale estensione dell'ordinaria teoria omonima sul piano euclideo.

Si noterà infine che la stessa teoria è pure immediatamente estensibile ai *sistemi lineari di coni rotondi* in una stella, bastando perciò sostituire le parole, *raggio, piano, angolo, diedro, cono* rispettivamente alle altre *punto, cerchio massimo, arco, angolo, cerchio minore*.

Con ciò mi sembra sufficientemente spiegato il modesto scopo di questo articolo.

2. Abbiasi una sfera Σ, di cui assumeremo il raggio eguale all'unità: su ogni suo cerchio massimo intenderemo sempre fissato a piacere un senso che diremo positivo. Se A e B sono due punti di Σ, indicheremo con AB la misura del minore dei due archi di cerchio massimo aventi gli estremi in A e B (*distanza sferica* di A e B), positiva o negativa secondochè, percorrendo il detto arco da A in B, si procede nel senso positivo fissato sul cerchio massimo AB, o nel senso opposto.

Con tale convenzione è chiaro che $AB+BA=0$, e $AB\equiv AC+CB$ (mod. 2π), C essendo un terzo punto qualsiasi del cerchio massimo AB.

3. Ciò premesso, dati su Σ due punti qualunque A e B, determiniamo il luogo geometrico dei punti P di Σ, per cui è costante ed $=h$ il rapporto:

$$\frac{\cos PA}{\cos PB}.$$

Anzitutto, se da un tale punto P si conduce il cerchio massimo normale al cerchio massimo AB, ed è O l'uno o l'altro dei punti in cui lo incontra, per la nota relazione che passa fra i lati di un triangolo sferico retttangolo, si avrà:

$$\cos PA = \cos PO \cos OA$$
$$\cos PB = \cos PO \cos OB$$

e quindi:

$$h \equiv \frac{\cos PA}{\cos PB} = \frac{\cos OA}{\cos OB}.$$

Di qui, dividendo e componendo, si ottiene:

$$\frac{h-1}{h+2} = \frac{\cos OA - \cos OB}{\cos OA + \cos OB} = \frac{\cos(OC + CA) - \cos(OC + CB)}{\cos(OC + CA) + \cos(OC + CB)}$$

avendo con C indicato il punto medio dell'arco AB, e quindi, per una nota formula di trigonometria:

$$\frac{h-1}{h+1} = \operatorname{tg}\frac{OC + CB + OC + CA}{2} \operatorname{tg}\frac{OC + CB - OC - CA}{2}$$

onde, riflettendo che

$$CB = -CA = \frac{AB}{2}$$

si avrà:

$$\frac{h-1}{h+1} = \operatorname{tg} OC \operatorname{tg}\frac{AB}{2}$$

cioè:

$$\operatorname{tg} OC = \frac{\dfrac{h-1}{h+1}}{\operatorname{tg}\dfrac{AB}{2}}.$$

Pertanto, se Q è un secondo punto per cui si abbia

$$\frac{\cos QA}{\cos QB} = h$$

ed O' è l'uno o l'altro dei punti in cui il cerchio massimo AB è incontrato dell'altro ad esso normale condotto da Q, avendosi ugualmente:

$$\operatorname{tg} O'C = \frac{\dfrac{h-1}{h+1}}{\operatorname{tg}\dfrac{AB}{2}}$$

risulterà:

$$\operatorname{tg} OC = \operatorname{tg} O'C$$

e però O' coinciderà con O o col suo opposto: ad ogni modo i due punti P e Q verranno a trovarsi sul medesimo cerchio massimo normale al cerchio massimo AB. Inversamente, se R è un punto qualunque di questo cerchio massimo normale, si avrà sempre:

$$\cos RA = \cos RO \cos OA$$
$$\cos RB = \cos RO \cos OB$$

e però:

$$\frac{\cos RA}{\cos RB} = \frac{\cos OA}{\cos OB} = h.$$

Ne concludiamo:

" Il luogo geometrico dei punti di Σ per cui è costante ed $=h$ il rapporto dei coseni delle distanze sferiche dai due punti fissi A e B, è il cerchio massimo normale al cerchio massimo AB, che lo incontra nei due punti opposti O determinati dalla relazione:

$$\operatorname{tg} CO = \frac{\frac{1-h}{1+h}}{\operatorname{tg}\frac{AB}{2}} \tag{1}$$

essendo C il punto medio dell'arco AB ".

4. Si abbia ora un cerchio minore qualunque γ di Σ, di centro sferico M e raggio sferico $r\left(<\frac{\pi}{2}\right)$. Se P è un punto qualunque di Σ e conduciamo per P un cerchio massimo qualunque ad incontrare γ in A e B, il prodotto:

$$\operatorname{tg}\frac{PA}{2}\operatorname{tg}\frac{PB}{2}$$

è costante al variare del cerchio massimo segante attorno a P.

Infatti, indicando con d la distanza sferica PM, e con C il punto medio dell'arco $AB(<\pi)$, si ha in ogni caso:

$$\frac{\cos d}{\cos r} = \frac{\cos PM}{\cos MC \cos CB} = \frac{\cos PC}{\cos CB}$$

cioè:

$$\frac{\cos PC}{\cos CB} = k$$

avendo indicato con k il valore costante del rapporto: $\frac{\cos d}{\cos r}$. Ora dividendo e componendo, si ha:

$$\frac{\cos PC - \cos CB}{\cos PC + \cos CB} = \frac{k-1}{k+1}$$

ovvero:

$$-\operatorname{tg}\frac{PC-CB}{2}\operatorname{tg}\frac{PC+CB}{2} = \frac{k-1}{k+1}$$

ossia, poichè: $CB = -CA$:

$$\operatorname{tg}\frac{PC+CA}{2}\operatorname{tg}\frac{PC+CB}{2} = \frac{1-k}{1+k}$$

cioè appunto:

$$\operatorname{tg}\frac{PA}{2}\operatorname{tg}\frac{PB}{2} = \frac{1-k}{1+k} = \rho$$

ove ρ è una costante

La diremo *potenza sferica* del punto P rispetto al cerchio γ: essa ha in ogni caso l'espressione:

$$\rho = \frac{1-k}{1+k} = \frac{\cos r - \cos d}{\cos r + \cos d}. \tag{2}$$

Se si mutano gli archi PA e PB nei loro supplementari, si ha:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi-PA}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-PB}{2}=\operatorname{ctg}\frac{PA}{2}\operatorname{ctg}\frac{PB}{2}=\frac{1}{\rho}$$

cioè le potenze di due punti opposti di Σ rispetto allo stesso cerchio γ (ovvero di uno stesso punto rispetto a due cerchi opposti) sono inverse l'una dall'altra.

Se P è esterno a γ e al suo opposto, i due archi PA e PB sono dello stesso senso, e però (trattandosi di archi $<\pi$ in valore assoluto) i valori di $\operatorname{tg}\frac{PA}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{PB}{2}$ hanno lo stesso segno, onde il loro prodotto, cioè la potenza di P rispetto a γ, è positivo: il contrario avviene se P è interno a γ o al suo opposto.

Ciò si deduce anche dalla (2): da essa infatti risulta $\rho>0$ se è:

$$-\cos r<\cos d<\cos r$$

cioè (trattandosi di archi $<\pi$), se:

$$\pi-r>d>r$$

il che avviene appunto quando P è esterno a γ ed al suo opposto. Si ha poi $\rho=0$ per $d=r$, cioè per i punti di γ, e $\rho=\infty$ per $d=\pi-r$, cioè per i punti del cerchio opposto di γ. Per $d=\frac{\pi}{2}$, cioè per i punti del cerchio polare di M, si ha $\rho=1$. In tutti gli altri casi, cioè quando P è interno a γ o al suo opposto, si ha $\rho<0$.

Nei casi in cui $\rho>0$, è $\rho=\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}$ ove t è la misura dell'arco ($<\pi$) di cerchio massimo tangente condotto da P al cerchio γ: infatti in tal caso si ha:

$$k=\frac{\cos d}{\cos r}=\cos t \tag{3}$$

e però:

$$\rho=\frac{1-k}{1+k}=\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}.$$

Nei casi in cui $\rho<0$, è invece $\rho=-\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}$, ove s è la misura dell'arco di cerchio massimo condotto per P normalmente a PM, compreso fra P e il cerchio γ: infatti si ha in tal caso:

$$\frac{1}{k}=\frac{\cos r}{\cos d}=\cos s \tag{4}$$

e però:

$$\rho=\frac{\frac{1}{k}-1}{\frac{1}{k}+1}=-\operatorname{tg}^2\frac{s}{2}.$$

5. Siano ora γ e γ' due cerchi minori di Σ, di raggi sferici r ed r'. Se P è un punto di egual potenza rispetto ad essi, e se ne indicano con d e d' le distanze sferiche dai due centri M ed M', poichè è:

$$k = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

da $\rho = \rho'$ si deduce $k = k'$, cioè:

$$\frac{\cos d}{\cos r} = \frac{\cos d'}{\cos r'}$$

ovvero:

$$\frac{\cos d}{\cos d'} = \frac{\cos r}{\cos r'}.$$

Per ciò che s'è visto al n. 2, abbiamo dunque che:

" Il luogo geometrico dei punti P di Σ di eguale potenza sferica rispetto ai due cerchi γ e γ', è il cerchio massimo normale a quello passante per i centri M ed M', e che lo incontra nei due punti opposti O, determinati $\left(\text{secondo la (1) in cui si ponga } h = \frac{\cos r}{\cos r'}\right)$, da:

$$\operatorname{tg} CO = \frac{\dfrac{\cos r' - \cos r}{\cos r' + \cos r}}{\operatorname{tg}\dfrac{MM'}{2}}$$

ovvero:

$$\operatorname{tg} CO = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{r+r'}{2}\operatorname{tg}\dfrac{r-r'}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{MM'}{2}} \text{ ''}. \tag{5}$$

Tale cerchio lo diremo il *cerchio radicale* dei due cerchi dati.

Se sul cerchio massimo MM' si sceglie il senso positivo in guisa che la distanza sferica MM' sia positiva, essendo allora $r, r', \frac{MM'}{2}$ tutti compresi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, il minore dei due archi CO che soddisfano alla (5) sarà $\gtreqless 0$ secondochè $r \gtreqless r'$; cioè dei due punti O che soddisfano alla (5) il più vicino a C è sempre dalla parte del centro del cerchio più piccolo, e se $r = r'$ esso coincide col punto medio dell'arco MM'.

Se $MM' = 0$, si ha $\operatorname{tg}\frac{MM'}{2} = 0$, quindi $\operatorname{tg} CO = \infty$, $CO = \frac{\pi}{2}$ (salvo il caso $r = r'$, in cui si ha indeterminazione, come è ben naturale avendosi allora un sol cerchio); se $MM' = \pi$, si ha $\operatorname{tg}\frac{MM'}{2} = \infty$, e $\operatorname{tg} CO = 0$, $CO = 0$. Pertanto se due cerchi di Σ sono paralleli, il loro cerchio radicale è il corrispondente equatore.

Evidentemente, essendo ρ ed $\frac{1}{\rho}$ le potenze di un punto rispetto a due cerchi opposti, tali potenze sono costanti insieme, cioè due cerchi hanno lo stesso cerchio radicale che i loro opposti.

Un punto comune a due cerchi di Σ ha potenza nulla rispetto ad entrambi; quindi se i due cerchi si segano, il loro cerchio radicale passa per i due punti d'incontro; se si toccano, il cerchio radicale è la tangente sferica comune; se non hanno punti comuni, non ne hanno neppure col loro cerchio radicale.

6. Se tre o più cerchi di Σ ammettono due punti (non opposti) P e Q di eguale potenza, ammettono pure come tali tutti e soli i punti del cerchio massimo PQ, ed hanno i centri su uno stesso cerchio massimo perpendicolare al precedente. Infatti il cerchio massimo PQ è cerchio radicale di essi, comunque presi a due a due, onde i loro centri determinano a due a due un cerchio massimo normale a quello, e però sono su uno stesso cerchio massimo.

Viceversa se tre o più cerchi di Σ hanno i centri su uno stesso cerchio massimo α, ed ammettono un punto P di egual potenza, ammettono pure come tali tutti e soli i punti del cerchio massimo β condotto da P normalmente ad α: infatti oltre P essi hanno come punti di egual potenza i poli di α, onde si ricade nel teorema precedente.

Un cosiffatto sistema di cerchi su di una sfera si dice un *Fascio di cerchi*, ed il cerchio massimo β il *cerchio radicale del fascio*, che si considera come facente parte del fascio stesso. Per ciò che s'è visto alla fine del n. 4, se due cerchi d'un fascio si segano, per i due punti comuni (*punti base del fascio*) passano tutti i cerchi del fascio; se si toccano, nel punto di contatto (unico *punto base*) si toccano tutti i cerchi del fascio; se non hanno punti comuni, altrettanto avviene per due cerchi qualunque del fascio.

I cerchi opposti ai cerchi di un fascio formano pure un fascio, avente il medesimo cerchio radicale, e per punti base gli opposti dei punti base del primo.

Si è visto alla fine del n. 3 che è:

$$\rho = \mathrm{tg}^2 \frac{t}{2} \qquad \text{ovvero:} \qquad \rho = -\mathrm{tg}^2 \frac{s}{2}$$

secondochè P è esterno o interno a γ o al suo opposto. Ne segue immediatamente:

Ogni punto del cerchio radicale di un fascio, esterno a tutti i cerchi del fascio ed ai loro opposti, è centro di un cerchio ortogonale a tutti i cerchi del fascio. Viceversa: se tre o più cerchi sono segati ortogonalmente da due cerchi fissi, essi formano un fascio il cui cerchio radicale è il cerchio massimo determinato dai centri dei due cerchi fissi: infatti tali due centri sono punti di egual potenza rispetto a tutti i cerchi considerati. Ne segue in particolare che tutti i cerchi ortogonali ai cerchi di un fascio costituiscono un secondo fascio, avente come luogo dei centri il cerchio radicale del primo, e come cerchio radicale il luogo dei centri del primo fascio.

Ogni punto del cerchio radicale di un fascio, interno a tutti i cerchi del fascio o a quelli del fascio opposto, è centro di un cerchio segato da tutti i cerchi del fascio in punti diametralmente opposti di esso cerchio. Viceversa: se tre o più cerchi ne segano due altri fissi in coppie di punti diametralmente opposti, essi formano un fascio, di cui è cerchio radicale il cerchio massimo determinato dai centri dei due cerchi fissi: infatti questi due centri hanno egual potenza rispetto a tutti i cerchi considerati.

7. Consideriamo un fascio di cerchi: sia O l'uno o l'altro dei due punti opposti in cui il cerchio dei centri è incontrato dal cerchio radicale (punti che per brevità diremo i *punti centrali* del fascio), e siano d la distanza di O dal centro del cerchio generico del fascio, r il raggio sferico di questo, ρ la potenza di O rispetto a tutti i cerchi del fascio: esaminiamo se e quando possano esistere nel fascio cerchi di raggio nullo, cioè ridotti a semplici punti, i quali, quando esistano, si diranno i *punti limiti del fascio.*

Avendosi in generale:

$$\rho = \frac{\cos r - \cos d}{\cos r + \cos d}$$

è, per $r = 0$:

$$\rho = \frac{1 - \cos d}{1 + \cos d} = \operatorname{tg}^2 \frac{d}{2}$$

da cui si hanno per $\operatorname{tg} \frac{d}{2}$ due valori reali eguali e di segno opposto, uno eguale a zero, o nessuno, secondochè $\rho \gtreqless 0$. Pertanto in un fascio di cerchi Σ esistono *due punti limiti*, situati ad eguali distanze dalle due parti di O sul cerchio massimo luogo dei centri, se il fascio *non ha punti base*, e le distanze dei punti limiti da O sono determinate dall'equazione:

$$\operatorname{tg} \frac{d}{2} = \pm \sqrt{\rho}. \tag{6}$$

Se il fascio consta di cerchi tangenti, l'*unico punto base* O è anche *unico punto limite.* Se il fascio ha *due punti base*, allora *non esistono punti limiti.*

Nel primo caso O è centro di un cerchio ortogonale a tutti i cerchi del fascio, il cui raggio t è determinato da:

$$\rho = \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}$$

onde dalla (6) si ha:

$$t = d$$

cioè tale cerchio passa per i due punti limiti, i quali pertanto sono punti base del fascio ortogonale. Nel secondo caso, essendo il cerchio radicale tangente a tutti i cerchi del fascio, i cerchi del fascio ortogonale passano tutti per O ivi toccandosi, onde O è unico punto base e quindi anche unico punto limite del fascio ortogonale. Nel terzo caso, se δ è la semicorda (sferica) comune a tutti i cerchi del fascio, quello fra essi che ha il centro in O ha δ per raggio sferico, onde (essendo i suoi raggi le tangenti condotte da O ai cerchi del fascio ortogonale), la potenza di O rispetto al fascio ortogonale sarà:

$$\sigma = \mathrm{tg}^2 \frac{\delta}{2} > 0\,;$$

esistono pertanto nel fascio ortogonale due punti limiti, situati, secondo la (6) a distanze uguali ed opposte da O, determinate dall'equazione:

$$\mathrm{tg}\frac{d}{2} = \pm \sqrt{\sigma}$$

di qui e dalla precedente si deduce $d = \delta$, onde i punti limiti del fascio ortogonale coincidono coi punti base del fascio primitivo.

In particolare se il fascio è costituito da una serie di paralleli, i due punti limiti sono i corrispondenti poli, ed il fascio ortogonale si riduce al corrispondente sistema di meridiani.

8. Tre cerchi di Σ, non appartenenti ad uno stesso fascio, ammettono sempre due punti di egual potenza fra loro opposti, punto di concorso dei cerchi radicali di essi cerchi presi a due a due, i quali diconsi i loro *centri radicali*; infatti i punti comuni a due di tali cerchi radicali sono punti di egual potenza rispetto ai tre cerchi, e appartengono quindi anche al terzo cerchio radicale.

Se quattro o più cerchi di Σ hanno lo stesso centro radicale P comunque presi a tre a tre, si dicono formare una *rete* di cerchi, e P dicesi un *centro radicale della rete*: esso è esterno a tutti i cerchi della rete, e centro di un cerchio normale a tutti i cerchi della rete, se la sua potenza rispetto a questi è positiva. È situato su tutti i cerchi della rete, se la sua potenza è zero. È interno a tutti i cerchi della rete, e centro di un cerchio segato in punti diametralmente opposti da tutti i cerchi della rete, se la sua potenza è negativa.

Viceversa si vede subito che tutti i cerchi di Σ normali ad uno stesso cerchio, o tutti i cerchi per un punto, o tutti i cerchi seganti un cerchio fisso in punti diametralmente opposti, costituiscono una rete, di cui è centro radicale il punto fisso o il centro del cerchio fisso.

9. Sia un cerchio γ ed un punto P di Σ, e ρ la potenza di P rispetto a γ. Indichiamo con S il centro di Σ e con Q il punto in cui la retta SP incontra il piano di γ. Assunto sulla retta SP come positivo il senso da S verso P, indichiamo con δ il valore algebrico della distanza SQ: dico che si ha in ogni caso:

$$\delta = \frac{1+\rho}{1-\rho}. \tag{7}$$

Infatti sia in primo luogo P esterno a γ e al suo opposto: condotta da P la tangente sferica a γ, e nel punto di contatto T la retta tangente a γ stesso, questa passerà per Q: allora se $t < \frac{\pi}{2}$ si ha dal triangolo TSQ:

$$\mathrm{ST} = \mathrm{SQ} \cos \mathrm{TSQ} = \mathrm{SQ} \cos \mathrm{TSP}$$

cioè, essendo ora $\mathrm{SQ} = \delta$:

$$1 = \delta \cos t;$$

se $t > \frac{\pi}{2}$ si ha dal triangolo TSQ:

$$\mathrm{ST} = \mathrm{SQ} \cos \mathrm{TSQ} = \mathrm{SQ} \cos (\pi - \mathrm{TSP})$$

ovvero, essendo ora $\mathrm{SQ} = -\delta$

$$1 = -\delta \cos (\pi - t) = \delta \cos t$$

e però in ambedue i casi per la (3) si ha:

$$\delta = \frac{1}{\cos t} = \frac{1}{k}.$$

Sia invece P interno a γ o al suo opposto; condotto il cerchio massimo normale al raggio sferico di γ passante per P, esso segherà γ in due punti A e B, e il segmento di retta AB passerà per Q e ne sarà bisecato: allora se P è interno a γ, è $s < \frac{\pi}{2}$ e il triangolo QSB dà:

$$\mathrm{SQ} = \mathrm{SB} \cos \mathrm{QSB} = \mathrm{SB} \cos \mathrm{PSB}$$

ovvero, essendo $\mathrm{SQ} = \delta$, $\mathrm{SB} = 1$:

$$\delta = \cos s;$$

se P è interno all'opposto di γ, è $s > \frac{\pi}{2}$ e il triangolo QSB dà:

$$\mathrm{SQ} = \mathrm{SB} \cos \mathrm{QSB} = \mathrm{SB} \cos (\pi - \mathrm{PSB})$$

cioè, essendo ora $\mathrm{SQ} = -\delta$, $\mathrm{SB} = 1$:

$$-\delta = \cos (\pi - s)$$
$$\delta = \cos s:$$

in ambedue i casi per la (4) si ha:

$$\delta = \cos s = \frac{1}{k}.$$

Si ha dunque sempre in valore algebrico:

$$\delta = \frac{1}{k} = \frac{1+\rho}{1-\rho}.$$

Se pertanto P ha eguale potenza sferica rispetto a due cerchi γ e γ', da $\rho = \rho'$ si deduce $\delta = \delta'$, cioè i due punti Q e Q' coincidono. Viceversa ogni punto P di Σ ha egual potenza rispetto a tutti i cerchi i cui piani passano per un medesimo punto della retta PS.

Ne segue in particolare che il piano del cerchio radicale di due cerchi γ e γ' passa per la retta d'intersezione dei loro piani: e ancora che i piani dei cerchi di un fascio passano tutti per la stessa retta, e viceversa: questa retta r la diremo per brevità l'*asse* del fascio di cerchi.

Possiamo dunque asserire che: " I cerchi di un fascio sulla sfera, non sono che le sezioni fatte su di essa coi piani di un fascio ".

10. Per brevità diremo *diametro centrale* di un fascio di cerchi su Σ, il diametro di Σ che ha per estremi i due *punti centrali* del fascio: è facile vedere allora che il diametro centrale di un fascio è perpendicolare al suo *asse* r: infatti il piano del cerchio dei centri è normale ai piani dei cerchi del fascio, e quindi anche alla retta r che è loro comune; pertanto il diametro centrale, come intersezione dei piani del cerchio dei centri e del cerchio radicale, cade perpendicolarmente sull'asse r, il quale giace in quest'ultimo piano.

Pertanto, se r ed r' sono gli assi di due fasci di cerchi di Σ mutuamente ortogonali, essi incontrano ad angolo retto, in due punti che chiameremo R ed R', il comune diametro centrale, e sono inoltre ortogonali fra di loro. Inoltre, poichè detta ρ la potenza di uno dei centri del fascio rispetto ai cerchi del fascio stesso, la sua potenza rispetto ai cerchi del fascio ortogonale è $\rho' = -\rho$, dalla (7) segue che le distanze $SR = \delta$ ed $SR' = \delta'$ soddisfano alla relazione:

$$\delta\delta' = 1$$

cioè i punti R ed R' sono inversi rispetto alla sfera Σ. Le due rette r ed r' sono quindi rispetto a Σ, o ambedue tangenti nello stesso punto O (e ciò avviene quando sia $\delta = \delta' = 1$, cioè $\rho = \rho' = 0$, cioè l'uno e l'altro fascio sono costituiti da cerchi toccantisi in O); ovvero una esterna e l'altra segante (se p. es. r è esterna, è $|\delta| > 1$, quindi $\rho > 0$, ed il primo fascio non ha punti base, mentre il secondo ne ha due).

I punti base di un fascio di cerchi di Σ sono evidentemente i punti in cui il suo asse incontra Σ, e i punti limiti i punti di contatto dei piani tangenti condotti dal suo asse a Σ. Delle due rette r ed r' pertanto, l'una è la congiungente i punti di contatto dei piani tangenti condotti dall'altra alla sfera Σ.

Insomma le due rette r ed r' sono sempre due rette coniugate rispetto a Σ, e possiamo concludere che:

" Due fasci di cerchi mutuamente ortogonali sopra una sfera Σ, non sono che le intersezioni di Σ con due fasci di piani aventi per assi due rette coniugate rispetto a Σ ".

È facile pure riconoscere che, dato su Σ un fascio di cerchi di asse r, i cerchi del fascio ortogonale non sono che i cerchi di contatto dei coni rotondi circoscritti a Σ dai punti di r: ovvero anche le intersezioni di Σ colle sfere del fascio costituito dalle sfere che hanno i centri su r e segano Σ ortogonalmente.

Analoghe considerazioni possono farsi per una rete di cerchi su Σ; i suoi cerchi non sono che le intersezioni di Σ coi piani di una stella.

Dalle considerazioni di questi due ultimi §§ risulta pertanto come la teoria dei sistemi lineari dei cerchi quale è stata esposta nei §§ precedenti, coincida in sostanza con quella che ordinariamente suol farsi con sole considerazioni di stereometria. Ma mentre quest'ultima è valevole solo sulla sfera, l'altra qui esposta è suscettibile invece di una più larga interpretazione, come già si è dichiarato al principio di questo articolo, ed apparisce quindi di una portata maggiore.

Dott. Pietro Mercatanti.

Oneglia, Aprile 1907.

SULLA EQUAZIONE LINEARE INDETERMINATA

Seguendo un metodo da me impiegato nel risolvere uno speciale " Problema sulla partizione dei numeri " (Vedi questo " Periodico di Matematica " Vol. XVIII, Settembre-Ottobre 1902) determino in questa nota il numero delle soluzioni in numeri interi positivi, o nulli, della equazione lineare indeterminata

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = n, \tag{1}$$

in cui le $a_1, a_2, \ldots a_m$ sono numeri interi positivi assegnati, come n.

La deduzione della formula a cui pervengo, introdotta una certa funzione numerica, non richiede, come avverrebbe secondo Le Besgue, alcuna risoluzione di equazioni binomie.

1. Il numero delle soluzioni della specie indicata della equazione (1), è il coefficiente di u^n nello sviluppo del prodotto

$$(1 + u^{a_1} + u^{2a_1} + \ldots)(1 + u^{a_2} + u^{2a_2} + \ldots)\ldots(1 + u^{a_m} + u^{2a_m} + \ldots).$$

Indicato con

$$\sum_{i=0}^{i=\infty} c_iu^i = c_0 + c_1u + c_2u^2 + \ldots + c_nu^n + \ldots$$

il detto sviluppo, e supposto $|u| < 1$, potremo scrivere

$$1 = (1 - u^{a_1}) \cdot (1 - u^{a_2}) \ldots (1 - u^{a_m}) \cdot \sum_{i=0}^{i=\infty} c_i u^i.$$

Derivando logaritmicamente i due membri rispetto ad u si ottiene

$$\sum_{j=1}^{j=m} \frac{a_j u^{a_j - 1}}{1 - u^{a_j}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} i c_i u^{i-1}}{\sum_{i=0}^{i=\infty} c_i u^i},$$

ossia, ponendo di nuovo $(1 - u^{a_1})^{-1} = \sum_{j=0}^{j=\infty} u^{a_1 j}$,

$$\sum_{j=1}^{j=m} a_j \sum_{r=0}^{r=\infty} u^{a_j(r+1)-1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} i c_i u^{i-1}}{\sum_{i=0}^{i=\infty} c_i u^i},$$

e sviluppando il sommatorio esterno:

$$\sum_{r_1=0}^{r_1=\infty} a_1 u^{a_1(r_1+1)-1} + \sum_{r_2=0}^{r_2=\infty} a_2 u^{a_2(r_2+1)-1} + \ldots + \sum_{r_m=0}^{r_m=\infty} a_m u^{a_m(r_m+1)-1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} i c_i u^{i-1}}{\sum_{i=0}^{i=\infty} c_i u^i}.$$

Prima di eliminare il denominatore, ordiniamo il primo membro (costituito di serie assolutamente convergenti per $|u| < 1$) secondo le potenze ascendenti di u: i coefficienti a_k dei termini simili ad u^{j-1}, soddisfanno alla condizione $a_k(r_k + 1) - 1 = j - 1$, ossia

$$a_k(r_k + 1) = j,$$

e sono, perciò, divisori di j scelti tra $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Reciprocamente: se a_k è divisore di j, cioè se si ha $a_k q = j$, con q intero, quando l'indice variabile r assume il valore $r_k = q - 1$, si avrà $q = r_k + 1$, ossia $a_k(r_k + 1) - 1 = j - 1$, epperò sarà a_k coefficiente di un termine simile ad u^{j-1}.

Dunque, a riduzion fatta, il coefficiente di u^{j-1} nel primo membro è la somma $\sigma(j)$ di tutti i divisori di j, scelti tra $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Onde potrà scriversi

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \sigma(j) u^{j-1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=\infty} i c_i u^{i-1}}{\sum_{i=0}^{i=\infty} c_i u^i}.$$

E ora, ad eliminare il denominatore, formiamo la serie-prodotto delle due serie

$$\sigma(1) + \sigma(2) u + \sigma(3) u^2 + \ldots + \sigma(j) u^{j-1} + \ldots,$$
$$c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots + c_{j-1} u^{j-1} + \ldots$$

Il termine generale di essa è

$$\{\sigma(1) c_{j-1} + \sigma(2) c_{j-2} + \ldots + \sigma(j-1) c_1 + \sigma(j) c_0\} u^{j-1},$$

e siccome le serie-fattori sono assolutamente convergenti, si avrà:

$$\sum_{j=1}^{j=\infty} \{\sigma(1)\, c_{j-1} + \sigma(2)\, c_{j-2} + \ldots + \sigma(j-1)\, c_1 + \sigma(j)\, c_0\}\, u^{j-1} = \sum_{i=1}^{i=\infty} i c_i u^{i-1}.$$

2. Da questa identità, eguagliando i coefficienti dei termini di eguali gradi in u, si trae la formola di ricorrenza:

$$\sigma(1)\, c_{i-1} + \sigma(2)\, c_{i-2} + \ldots + \sigma(i-1)\, c_1 + \sigma(i)\, c_0 = i c_i, \qquad (2)$$

la quale, notato che $c_0 = 1$, per $i = n, n-1, n-2, \ldots$, dà luogo al sistema

$$\begin{array}{r} -nc_n + \sigma(1)\, c_{n-1} + \sigma(2)\, c_{n-2} + \ldots + \sigma(n-1)\, c_1 = -\sigma(n), \\ -(n-1)\, c_{n-1} + \sigma(1)\, c_{n-2} + \ldots + \sigma(n-2)\, c_1 = -\sigma(n-1), \\ -(n-2)\, c_{n-2} + \ldots + \sigma(n-3)\, c_1 = -\sigma(n-2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -1\,.\, c_1 = -\sigma(1), \end{array}$$

di n equazioni lineari rispetto alle incognite $c_1, c_2, \ldots c_n$, col determinante $(-1)^n \underline{|n} \neq 0$, che fornisce [1]

$$c_n = \frac{1}{\underline{|n}} \begin{vmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots\sigma(n-1) & \sigma(n) \\ -(n-1) & \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots\sigma(n-2) & \sigma(n-1) \\ 0 & -(n-2) & \sigma(1) & \ldots\sigma(n-3) & \sigma(n-2) \\ 0 & 0 & -(n-3) & \ldots\sigma(n-4) & \sigma(n-3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\sigma(1) & \sigma(2) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & \sigma(1) \end{vmatrix} \qquad (3)$$

3. Nel caso particolare in cui sia

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_m = 1,$$

evidentemente si ha

$$\sigma(i) = m$$

per ogni valore dell'intero i, e la formola precedente dà:

$$c_n = \frac{1}{\underline{|n}} \begin{vmatrix} m & m & m & \ldots m & m \\ -(n-1) & m & m & \ldots m & m \\ 0 & -(n-3) & m & \ldots m & m \\ 0 & 0 & -(n-3) & \ldots m & m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots m & m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots -1 & m \end{vmatrix}$$

D'altra parte, nel caso attuale la (2) diviene

$$nc_n = m\,(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1});$$

eliminando $c_0, c_1, c_2 \ldots c_{n-2}$, tra questa e quella che da essa si deduce mutando n in $n-1$, si ricava

$$nc_n = (m + n - 1)\, c_{n-1},$$

[1] Cfr. E. Fergola, *Giorn. di Mat.* (Anno I, 1863, Febbraio), dove *impropriamente* si parla di soluzioni positive, anzichè non negative.

da cui si trae facilmente

$$c_n = \binom{m+n-1}{n}.$$

Così risulta confermato che l'equazione

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n,$$

ammette $\binom{m+n-1}{n}$ soluzioni in numeri interi non negativi.

Nello stesso tempo, confrontando le ultime due forme di c_n, si viene a stabilire lo sviluppo del determinante precedente, mediante l'identità

$$\begin{vmatrix} m & m & m & \ldots & m & m \\ -(n-1) & m & m & \ldots & m & m \\ 0 & -(n-2 & m & \ldots & m & m \\ 0 & 0 & -(n-3) & \ldots & m & m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m & m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & m & m \end{vmatrix} = m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1),$$

che, d'altronde, non è difficile dedurre direttamente.

4. Un altro caso particolare è degno di nota, ed è quello in cui si supponga

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3, \ldots a_m = m$$

ed

$$m \geqq n.$$

Allora, la stessa formola (3), in cui però $\sigma(i)$ indichi la somma di *tutti* i divisori di i, fornisce il numero delle soluzioni non negative della equazione:

$$1 \,.\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + mx_m = n.$$

GASPARE MIGNOSI.

Palermo, Maggio 1907.

DIMOSTRAZIONE PLANIMETRICA DEL TEOREMA DEI TRIANGOLI OMOLOGICI

Il prof. Faifofer a pag. 123 dei suoi *Elementi di Geometria ad uso dei licei* (13ª ed., 1902) dimostra il seguente teorema, caso particolare del teorema dei triangoli omologici: (1)

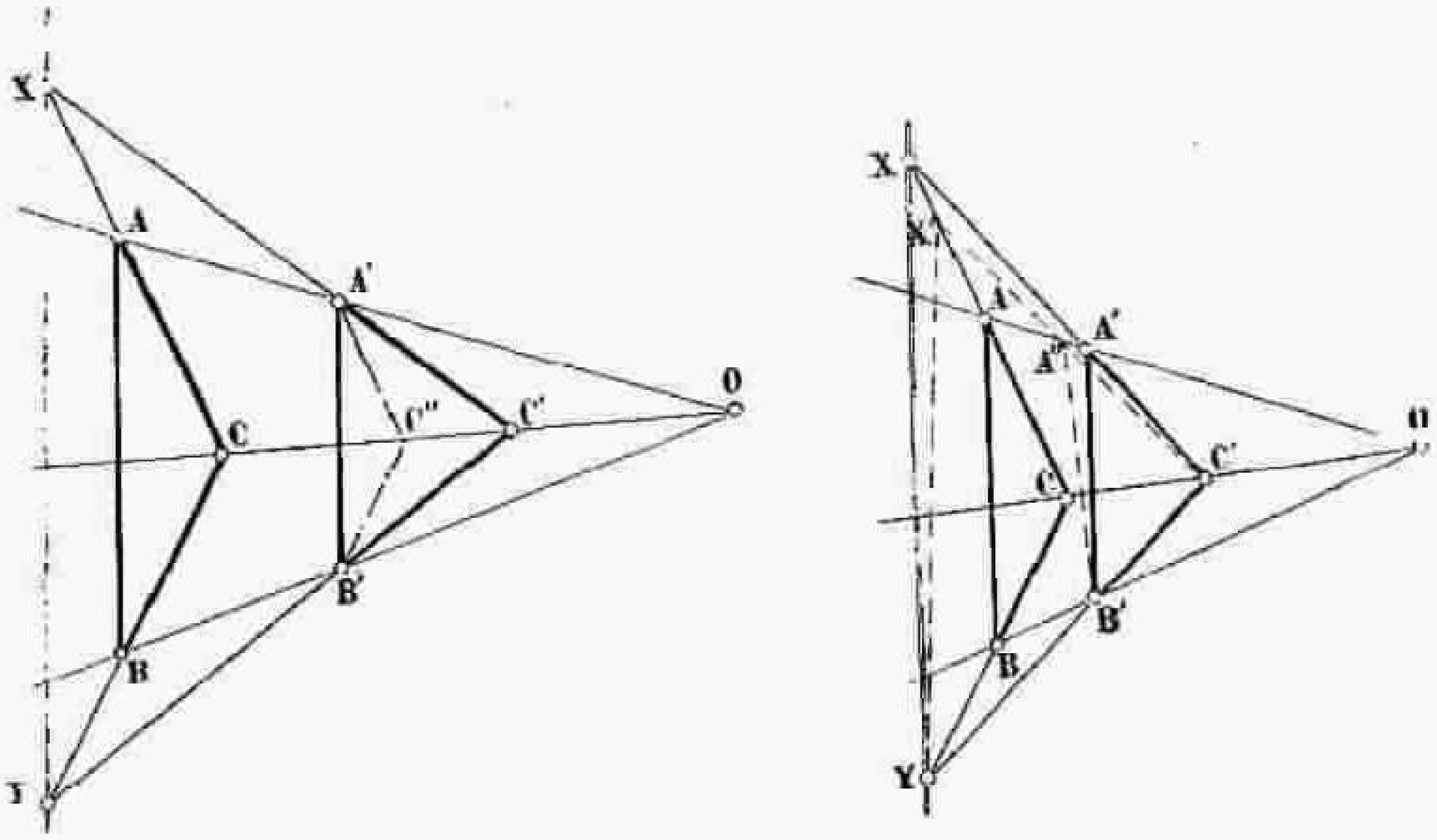
(1) È sostanzialmente la stessa dimostrazione quella data dal prof. PALATINI alla fine dell'articolo "Una conversazione coi fusionisti „ (Questo *Periodico*, vol. XIV, pag. 205).

Se i vertici di due triangoli sono, a due a due, allineati con uno stesso punto, e due lati di un triangolo sono rispettivamente paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i rimanenti lati sono paralleli.

Da questo teorema traggo, mediante le considerazioni seguenti, la dimostrazione del caso generale. Si ha dapprima:

Se due triangoli, non aventi alcun elemento in comune, hanno i vertici, a due a due, allineati con uno stesso punto, e due lati corrispondenti paralleli, le rimanenti coppie di lati corrispondenti s'intersecano in punti di una retta parallela a quei due lati.

Siano ABC, A'B'C' i due triangoli soddisfacenti alle condizioni dell'enunciato e nei quali AB e A'B' siano i due lati paralleli. Siano X



e Y i punti d'incontro delle coppie di lati rimanenti. Dico che XY è parallela ad AB (e ad A'B').

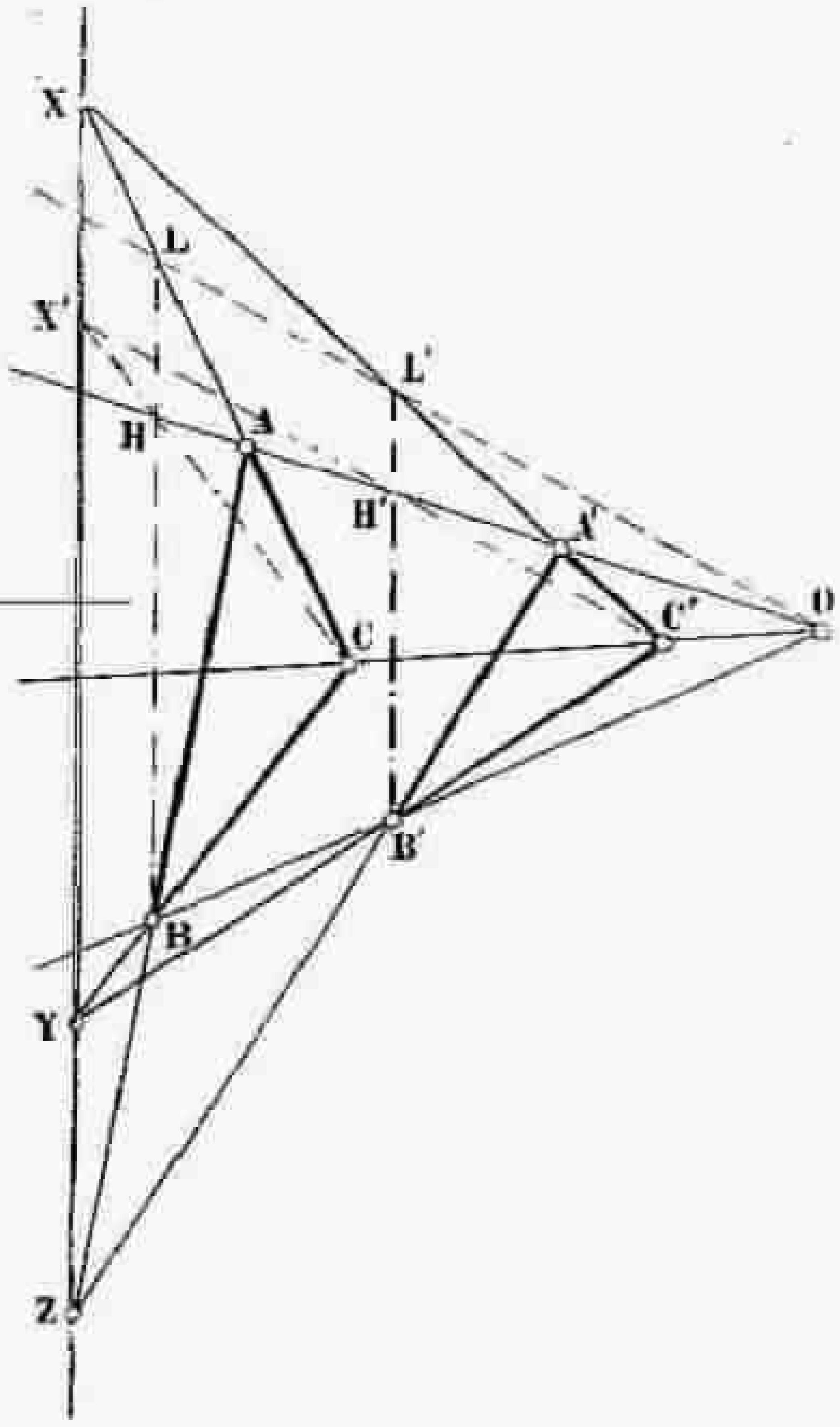
Conduciamo da A' la A'C'' parallela ad AC; per il teorema precedente, B'C'' risulterà parallela a BC. Consideriamo allora i due triangoli XCY e A'C''B': essi hanno i vertici X e A', C e C', Y e B' situati rispettivamente sopra tre raggi uscenti da C' ed hanno anche le due coppie di lati AC, A'C'' e CB, C''B' formate da rette parallele, perciò i terzi lati XY ed AB sono paralleli. c. d. d.

Reciprocamente: *Se due triangoli hanno i vertici a due a due allineati con uno stesso punto e due coppie di lati corrispondenti s'incontrano in due punti di una retta parallela ad uno dei rimanenti lati dei due triangoli, essa è parallela anche al rimanente lato dell'altro triangolo e perciò questi sono paralleli.*

Siano ABC, A'B'C' due triangoli i cui vertici AA', BB', CC' siano allineati con un punto O e le due coppie di lati AC, A'C' e BC, B'C' s'incontrino in due punti X e Y di una retta parallela ad AB. Dico che AB e A'B' sono anch'essi paralleli. Se, infatti, non fossero tali, potremmo condurre da B' la parallela ad AB fino ad incontrare OA in un punto A''. Unito C' con A'' e detto X' il punto d'incontro con CA, per il teorema precedente, X'Y risulterebbe parallela ad AB, il che è assurdo.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema generale:

Se due triangoli non aventi alcun elemento in comune, hanno i vertici, a due a due, allineati con uno stesso punto, le coppie di lati corrispondenti s'intersecano in punti di una stessa retta. (È sottinteso che nessuna di queste coppie sia formata da lati paralleli, chè altrimenti ricadremmo in uno dei casi precedenti).



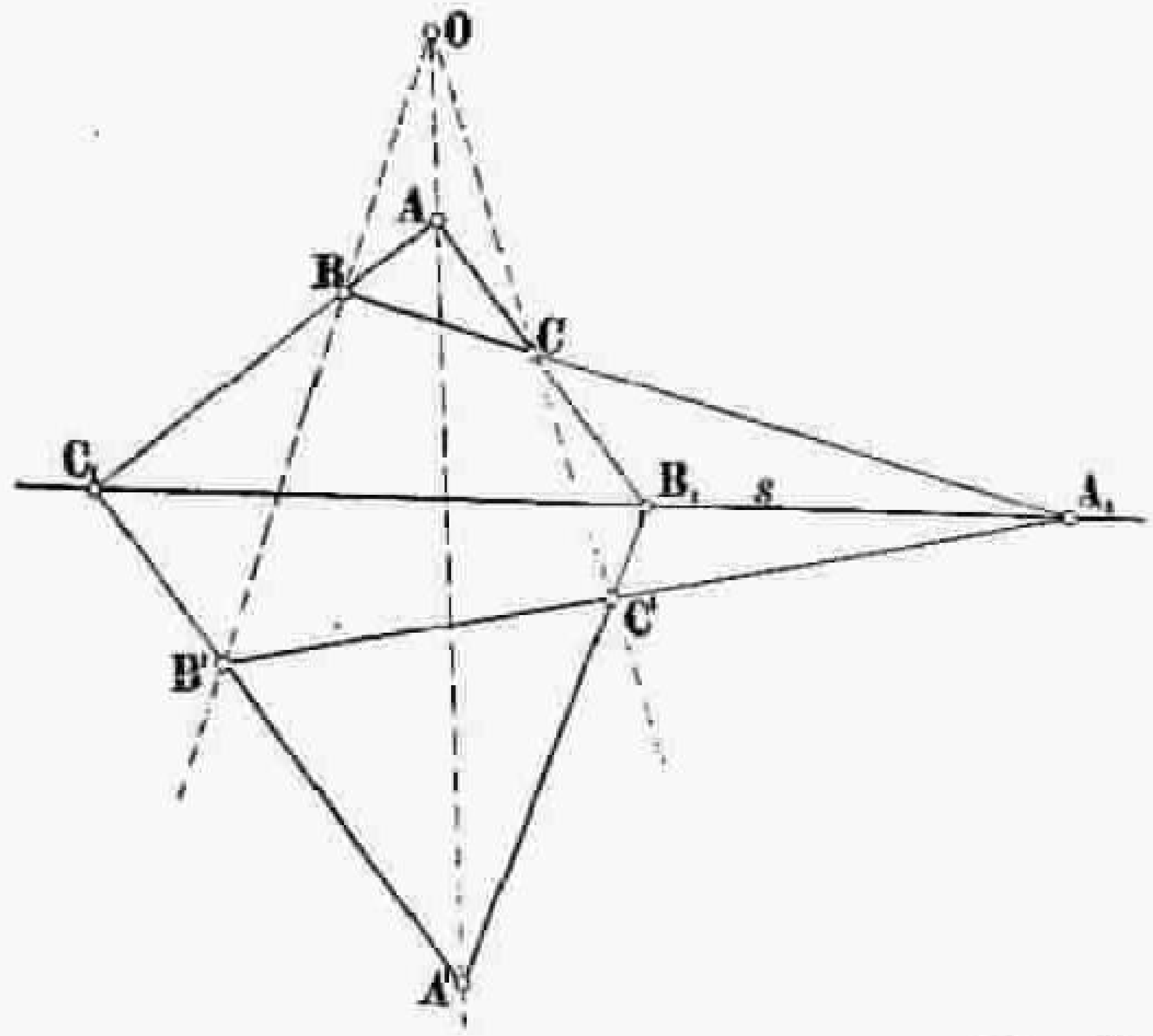
Siano ABC, A'B'C' due triangoli i cui vertici AA', BB', CC' siano allineati con O e siano X, Y, Z rispettivamente i punti d'incontro delle coppie di lati corrispondenti AC, A'C'; BC, B'C'; AB, A'B'. Si vuol dimostrare che X, Y, Z sono allineati.

Conduciamo da B la parallela a XY e siano H e L rispettivamente i punti ove essa incontra il raggio OA e il lato AC; uniamo C con H e sia X' il punto d'incontro con la XY; uniamo infine X' con C' e sia H' il punto d'incontro con lo stesso raggio OA.

I due triangoli HCB, H'C'B' hanno i vertici HH', CC', BB' situati sopra tre raggi concorrenti in un punto O e due coppie di lati CH, C'H' e CB, C'B' s'intersecano in due punti X', Y di una retta parallela al terzo lato HB di uno dei due triangoli, perciò BH e B'H' sono paralleli. Conduciamo ora il raggio OL e sia L' il punto ove esso interseca C'A'. Poichè i due triangoli LCB e L'C'B' hanno i vertici LL', CC', BB' situati sopra tre raggi concorrenti in O e due coppie di lati LC, L'C' e CB, C'B' si intersecano in due punti X, Y di una retta parallela al terzo lato LB di uno dei due triangoli, anche L'B' è parallela ad LB, cioè L' è sul prolungamento di B'H'. Infine consideriamo i due triangoli LAB, L'A'B': essi hanno i vertici LL', AA', BB' situati sopra tre raggi concorrenti in O e inoltre un lato LB dell'uno è parallelo al lato L'B' dell'altro, perciò le altre coppie di lati corrispondenti s'incontrano in due punti X e Z di una retta parallela ai lati stessi, cioè XZ è parallela a LB. Poichè le due rette XY e XZ sono entrambe parallele a LB, esse coincidono e il teorema è così dimostrato.

Reciprocamente: *Se due triangoli, non aventi alcun elemento in comune, sono tali che le coppie di lati corrispondenti s'intersecano in punti di una medesima retta, le coppie di vertici corrispondenti sono allineati con uno stesso punto.*

Siano ABC, A'B'C' due triangoli tali che, le coppie di lati AC, A'C'; BC, B'C'; AB, A'B' s'intersechino in tre punti B_1, A_1, C_1 di una



stessa retta. Sia O il punto d'incontro di AA' e CC'; dico che anche BB' passa per O. Infatti si indichi con B'' il punto in cui OB' incontra AB; allora, essendo ACB'', A'C'B' nelle condizioni della proposizione diretta, devono C'B' e CB'' incontrarsi sopra B_1C_1, il che porta evidentemente a concludere che B'' coincide con B.

È assai facile vedere che tutti i teoremi enunciati sussistono anche quando le rette AA', BB', CC' in essi considerate, invece di concorrere in un punto O, siano parallele.

Archimede Bellatalla.

Pisa, 3 Dicembre 1907.

INTORNO AD UN RADICALE CONTINUO

Nota di Michele Cipolla

È nota la relazione

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \tag{1}$$

se n è il numero dei radicali quadratici del primo membro e i radicali si suppongono tutti positivi, ma non è nota una formola che valga *qualunque sia la scelta dei segni pei radicali medesimi.* [1]

Crediamo quindi di fare cosa utile segnalando il seguente teorema che risolve la questione in modo assai elegante.

I. *Se con* i_r *si indica l'unità positiva o negativa, posto*

$$\varepsilon_{1,\,n-1} = \frac{1 - i_1 i_2 \dots i_{n-1}}{2}, \quad \varepsilon_{2,\,n-1} = \frac{1 - i_2 i_3 \dots i_{n-1}}{2}, \dots, \quad \varepsilon_{n-1,\,n-1} = \frac{1 - i_{n-1}}{2}, \tag{2}$$

si ha

$$+\sqrt{2 + i_{n-1}\sqrt{2 + i_{n-2}\sqrt{2 + \dots + i_1\sqrt{2}}}} = 2\cos\left(1 + 2\varepsilon_{1,\,n-1} + 2^2\varepsilon_{2,\,n-1} + \dots + 2^{n-1}\varepsilon_{n-1,\,n-1}\right)\frac{\pi}{2^{n+1}}. \tag{3}$$

La proposizione è vera manifestamente per $n = 1$, poichè si riduce alla relazione notissima

$$\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4};$$

per $n = 2$ si ha

$$\sqrt{2 + i_1\sqrt{2}} = 2\cos(1 + 2\varepsilon_{1,1})\frac{\pi}{8},$$

da cui

per $i_1 = 1$, $\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2\cos\frac{\pi}{8}$, e per $i_1 = -1$, $\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2\cos\frac{3\pi}{8}$,

che sono formole anch'esse notissime.

Ammettiamo allora che la (1) sia vera per n, e dimostriamo che sussiste per $n+1$, cioè che si ha pure la relazione

$$+\sqrt{2 + i_n\sqrt{2 + i_{n-1}\sqrt{2 + \dots + i_1\sqrt{2}}}} = 2\cos\left(1 + 2\varepsilon_{1,\,n} + 2^2\varepsilon_{2,\,n} + \dots + 2^n\varepsilon_{n,\,n}\right)\frac{\pi}{2^{n+2}} \tag{4}$$

dove è

$$\varepsilon_{r,\,n} = \frac{1 - i_r i_{r+1} \dots i_n}{2} \qquad (1 \leqslant r \leqslant n).$$

Sia in primo luogo $i_n = +1$. Aggiungendo 2 ad ambo i membri di (4) ed estraendo la radice quadrata, per la nota relazione

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

---

[1] Sono anche note alcune altre formule corrispondenti ad una particolare scelta dei segni. Recentemente il prof. C. Alasia segnala nel *Supplemento* (anno IV, fasc. I, novembre 1907, pag. 16, quest. 878) la formola

$$2\cos\left(60^\circ + (-1)^n\frac{30^\circ}{2^n}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \dots - \sqrt{2}}}$$

e propone che si dimostri deducendola dalla relazione $\operatorname{sen}(45^\circ \pm x) = \sqrt{\frac{1 \pm \operatorname{sen} 2x}{2}}$

si ricava:

$$\sqrt{2+i_n\sqrt{2+i_{n-1}\sqrt{2+\ldots+i_1\sqrt{2}}}}=$$
$$=2\cos(1+2\varepsilon_{1,n-1}+2^2\varepsilon_{2,n-1}+\ldots+2^{n-1}\varepsilon_{n-1,n-1})\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

E poichè, in virtù dell'ipotesi $i_n=+1$, si ha per $1\leqslant r<n$

$$\varepsilon_{r,n}=\varepsilon_{r,n-1}\,,\qquad \varepsilon_{n,n}=0,$$

la relazione precedente può mettersi sotto la forma

$$\sqrt{2+i_n\sqrt{2+i_{n-1}\sqrt{2+\ldots+i_1\sqrt{2}}}}=$$
$$=2\cos(1+2\varepsilon_{1,n}+2^2\varepsilon_{2,n}+\ldots+2^n\varepsilon_{n,n})\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

Il segno che compete al primo radicale è il segno $+$, poichè l'argomento sotto il coseno è minore di $\frac{\pi}{2}$. Infatti si osservi che le ε hanno o il valore 0 o il valore 1 e che perciò

$$(1+2\varepsilon_{1,n}+2^2\varepsilon_{2,n}+\ldots+2^n\varepsilon_{n,n})\frac{\pi}{2^{n+2}}\leqslant(2^{n+1}-1)\frac{\pi}{2^{n+2}}<\frac{\pi}{2}.$$

Per $i_n=+1$ la formola (1) è dunque dimostrata.

Supponiamo ora che sia $i_n=-1$. Moltiplicando ambo i membri della (3) per -1 e poi aggiungendo 2 ed estraendo la radice quadrata, in virtù della relazione $1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$, si ha

$$(5)\quad +\sqrt{2+i_n\sqrt{2+i_{n-1}\sqrt{2+\ldots+i_1\sqrt{2}}}}=$$
$$=2\operatorname{sen}(1+2\varepsilon_{1,n-1}+2^2\varepsilon_{2,n-1}+\ldots+2^{n-1}\varepsilon_{n-1,n-1})\frac{\pi}{2^{n+2}}=$$
$$=2\cos[2^{n+1}-(1+2\varepsilon_{1,n-1}+2^2\varepsilon_{2,n-1}+\ldots+2^{n-1}\varepsilon_{n-1,n-1})]\frac{\pi}{2^{n+2}}=$$
$$=2\cos[1+2(1-\varepsilon_{1,n-1})+2^2(1-\varepsilon_{2,n-1})+\ldots+$$
$$+2^{n-1}(1-\varepsilon_{n-1,n-1})+2^n]\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

Intanto si ha, per $i_n=-1$,

$$1-\varepsilon_{r,n-1}=1-\frac{1-i_r i_{r+1}\ldots i_{n-1}}{2}=\frac{1+i_r i_{r+1}\ldots i_{n-1}}{2}=$$
$$=\frac{1-i_r i_{r+1}\ldots i_n}{2}=\varepsilon_{r,n}\qquad(1\leqslant r<n)$$

ed inoltre

$$\varepsilon_{n,n}=\frac{1-i_n}{2}=1$$

e però la (5) assume la forma (4). La relazione (2) sussiste dunque in generale.

2. Giova mettere la (2) sotto un'altra forma. Si muti in essa i_r in i_{n-r} e si ponga

$$\lambda_1 = \frac{1-i_1}{2},\ \lambda_2 = \frac{i-i_1 i_2}{2},\ \lambda_3 = \frac{1-i_1 i_2 i_3}{2}, \ldots,\ \lambda_{n-1} = \frac{1-i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}{2}$$

si ottiene

$$\text{(6)}\qquad \sqrt{2+i_1\sqrt{2+i_2\sqrt{2+\ldots+i_{n-1}\sqrt{2}}}} = \\ = 2\cos(2^{n-1}\lambda_1 + 2^{n-2}\lambda_2 + \ldots + 2\lambda_{n-1}+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

3. Facciamo alcune applicazioni.

Per $i_r = 1$ si ottiene la formola (1).

Per $i_1 = -1$ e $i_2 = i_3 = \ldots = +1$ si ha $\lambda_r = 1$ e però

$$\text{(6')}\qquad \underset{(n)}{\sqrt{2-}}\underset{(n-1)}{\sqrt{2+}}\underset{(n-2)}{\sqrt{2+}}\ldots+\underset{(1)}{\sqrt{2}} = 2\cos\frac{(2^n-1)\pi}{2^{n+1}}.$$

Per $i_r = -1$ si ha $\lambda_r = \dfrac{1-(-1)^r}{2}$ e però se n è pari,

$$\text{(7)}\qquad \underset{(n)}{\sqrt{2-}}\underset{(n-1)}{\sqrt{2-}}\underset{\ldots}{\ldots}-\underset{(1)}{\sqrt{2}} = 2\cos(2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^3+2+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} = \\ = 2\cos\frac{(2^{n+1}+1)\pi}{3\,.\,2^{n+1}},$$

e se n è dispari

$$\text{(8)}\qquad \underset{(n)}{\sqrt{2-}}\underset{(n-1)}{\sqrt{2-}}\underset{\ldots}{\ldots}-\underset{(1)}{\sqrt{2}} = 2\cos(2^{n-1}+2^{n-3}+\ldots+2^4+2^2+1)\frac{\pi}{2^{n+1}} = \\ = 2\cos\frac{(2^{n+1}-1)\pi}{3\,.\,2^{n+1}}.$$

Supponiamo ancora che sia $i_r = (-1)^r$ e però:

$$\lambda_r = \frac{1-(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}}{2};$$

si ottiene per n pari:

$$\text{(9)}\qquad \underset{(n)}{\sqrt{2-}}\underset{(n-1)}{\sqrt{2+}}\underset{(n-2)}{\sqrt{2-}}\underset{\ldots}{\ldots}-\underset{(1)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 2\cos\dfrac{(2^{n+2}+1)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 0 \pmod{4}, \\ 2\cos\dfrac{(2^{n+2}-1)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

e per n dispari:

$$\text{(10)}\qquad \underset{(n)}{\sqrt{2-}}\underset{(n-1)}{\sqrt{2+}}\underset{(n-2)}{\sqrt{2-}}\underset{\ldots}{\ldots}+\underset{(1)}{\sqrt{2}} = \begin{cases} 2\cos\dfrac{(2^{n+2}-3)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 1 \pmod{4}, \\ 2\cos\dfrac{(2^{n+2}+3)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Supponiamo infine che sia $i_r = (-1)^{r-1}$ e però

$$\lambda_r = \frac{1-(-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}}{2};$$

si ottiene, per n pari:

$$(11)\quad \sqrt[(n)]{2+\sqrt[(n-1)]{2-\sqrt[(n-2)]{2+\ldots+\sqrt[(1)]{2}}}}=\begin{cases} 2\cos\dfrac{(2^{n+1}+3)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 0 \pmod{4}, \\ 2\cos\dfrac{(2^{n+1}-3)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 2 \pmod{4}, \end{cases}$$

e per n dispari:

$$(12)\quad \sqrt[(n)]{2+\sqrt[(n-1)]{2-\sqrt[(n-2)]{2+\ldots+\sqrt[(1)]{2}}}}+\begin{cases} 2\cos\dfrac{(2^{n+1}+1)\pi}{5\,.\,2^{n+1}}, & \text{se è } n\equiv 1 \pmod{4}, \\ 2\cos\dfrac{(2^{n-1}-1)\pi}{5\,.\,2^{n-1}}, & \text{se è } n\equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

4. La formola (6) ci dice che il radicale continuo del primo membro si esprime mediante il doppio del coseno di un angolo minore di $\frac{\pi}{2}$ e multiplo di $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ secondo un numero dispari. Viceversa è facile osservare che il doppio del coseno di un arco minore di $\frac{\pi}{2}$ è multiplo di $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ secondo un numero dispari qualunque è sempre esprimibile con un radicale continuo del tipo (6). Infatti l'espressione

$$2^{n-1}\lambda_1+2^{n-2}\lambda_2+\ldots+2\lambda_{n-1}+1$$

rappresenta nel sistema binario un numero dispari qualunque inferiore a 2^n.

Premesso ciò, dato un arco minore di $\frac{\pi}{2}$ e multiplo di $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ secondo un numero dispari m, è facile rappresentare il doppio del suo coseno con un radicale del tipo (6).

Si rappresenterà dapprima m nel sistema binario, osservando che si ha evidentemente

$$\left.\begin{aligned} m &\equiv 1 \\ \mathrm{E}\left(\frac{m}{2}\right) &= \lambda_{n-1} \\ \mathrm{E}\left(\frac{m}{2^2}\right) &= \lambda_{n-2} \\ \ldots&\ldots \\ \mathrm{E}\left(\frac{m}{2^{n-1}}\right) &= \lambda_1 \end{aligned}\right\} \pmod{2}.$$

Quindi si determineranno le i con le formole

$$i_1=1-2\lambda_1,\quad i_2=\frac{1-2\lambda_2}{1-2\lambda_1},\quad i_3=\frac{1-2\lambda_3}{1-2\lambda_2},\ \ldots,\quad i_{n-1}=\frac{1-2\lambda_{n-1}}{1-2\lambda_{n-2}},$$

e basterà osservare che i_r ha il valore $+1$ o -1 secondo che λ_r e λ_{r-1} sono uguali o disuguali.

Per es. si voglia esprimere con un radicale continuo del tipo (6) $2\cos 29\frac{\pi}{64}$. Qui è $n=5$, e si ha

$$\left.\begin{aligned} 29&\equiv 1\\ \lambda_4\equiv 14&\equiv 0\\ \lambda_3\equiv \ 7&\equiv 1\\ \lambda_2\equiv \ 3&\equiv 1\\ \lambda_1\equiv \ 1&\equiv 1\end{aligned}\right\}\pmod{2}.$$

Quindi si ricava

$$i_1=-1,\quad i_2=+1,\quad i_3=+1,\quad i_4=-1$$

e però

$$2\cos 29\frac{\pi}{64}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}.$$

Per l'espressione di $2\cos 59\frac{\pi}{128}$ si ha $n=6$,

$$\left.\begin{aligned} 59&\equiv 1\,, & \lambda_3&\equiv 7\equiv 1\\ \lambda_5\equiv 29&\equiv 1\,, & \lambda_2&\equiv 3\equiv 1\\ \lambda_4\equiv 14&\equiv 0\,, & \lambda_1&\equiv 1\equiv 1\end{aligned}\right\}\pmod{2},$$

e quindi

$$i_1=-1,\quad i_2=+1,\quad i_3=+1,\quad i_4=-1,\quad i_5=-1.$$

Dunque

$$2\cos 59\frac{\pi}{128}=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}}}}.$$

5. Le formole (2) e (6) ci forniscono due modi diversi di considerare il radicale continuo con un numero infinito di radicali.

Poniamo dapprima

$$R_1=\sqrt{2}\,,\ R_2=\sqrt{2+i_1\sqrt{2}}\,,\ \ldots,\ R_n=\sqrt{2+i_1\sqrt{2+\ldots+i_{n-1}\sqrt{2}}}\,,\ \ldots$$

La serie

$$\frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{2^2}+\ldots+\frac{\lambda_{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$$

è sempre convergente e la sua somma σ è sempre minore di 1.

Allora per la formola (6) si ha

$$\lim_{n=\infty} R_n=2\cos\frac{\sigma\pi}{2}.$$

Questo limite si chiama il valore del radicale continuo *a destra* e si scrive

$$\sqrt{2+i_1\sqrt{2+i_2\sqrt{2+\ldots}}}=2\cos\frac{\sigma\pi}{2}.$$

Per es. si ha, in virtù delle formole (1) e (6′),

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=2,\qquad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}=0,$$

per le (7), (8)

$$\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots}}}=1,$$

per le (9) e (10)

(13) $$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\ldots}}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e per le (11) e (12)

(14) $$\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2-\ldots}}}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Poniamo ora invece

$$R'_1=\sqrt{2},\quad R'_2=\sqrt{2+i_1\sqrt{2}},\quad R'_3=\sqrt{2+i_2\sqrt{2+i_1\sqrt{2}}},\ldots,$$
$$R'_n=\sqrt{2+i_{n-1}\sqrt{2+\ldots+i_1\sqrt{2}}},\ldots$$

Il limite di R'_n per $n=\infty$, quando esiste, si chiama il valore del radicale continuo *a sinistra*. In questo caso però la formola (2) non ci dà una serie come la formola (6), poichè nella (2) tutti i termini della somma sotto il coseno variano in generale con n. Il radicale continuo a sinistra o converge o è indeterminato, poichè le R' hanno valori compresi tra 0 e 2.

Un esempio di radicale continuo a sinistra convergente si ottiene quando le i_r sono o tutte uguali a 1 o tutte uguali a -1. È chiaro allora che si ha

$$\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=2,\qquad \ldots-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}=1.$$

Invece per $i_r=(-1)^{r-1}$ si ottiene un radicale continuo a sinistra indeterminato. Infatti in tal caso si ha

$$R'_{2k}=\underset{(2k)}{\sqrt{2+\underset{(2k-1)}{\sqrt{2-\underset{(2k-2)}{\sqrt{2+\ldots+\underset{(1)}{\sqrt{2}}}}}}}},$$

$$R'_{2k+1}=\underset{(2k)}{\sqrt{2-\underset{(2k-1)}{\sqrt{2+\underset{(2k-2)}{\sqrt{2-\underset{(2k-3)}{\sqrt{2+\ldots+\underset{(1)}{\sqrt{2}}}}}}}}}}$$

e si ottiene (v. formola (14))

$$\lim_{k=\infty} R'_{2k}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

e (v. formola (13))

$$\lim_{k=\infty} R'_{2k+1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

MICHELE CIPOLLA.

Corleone, 28 novembre 1907.

L'ASSOCIAZIONE " MATHESIS „

Bologna, 7 gennaio 1908.

Chiarissimo Collega

. . . .

Ed ora veniamo alla povera " Mathesis „?

Crede Lei proprio possibile che in una forma *legale* la " Mathesis „ sia ormai risorgibile, o trasformabile? Io ne dubito assai, e credo che meglio sarebbe metterci d'accordo in cinque o sei, soci od ex soci della " Mathesis „ e fare senz'altro un appello ai Colleghi tutti dell'insegnamento medio e dell'insegnamento superiore per costituire una Società nuova sul genere di quella progettata già nella Circolare ultima, ormai di vecchia data, relativa alla trasformazione che avrebbe dovuto subire la " Mathesis „. Mi pare che ormai la pazienza abbia superato ogni limite e che sia tempo d'agire specialmente di fronte alle proposte dei Vailati ossia della Commissione Reale, sulle quali è necessario che una larga ma disciplinata discussione si apra.

Ella decida! io sono a sua disposizione!

Cordiali auguri e saluti.

ALBERTO CONTI.

Torino, 14 gennaio 1908.

Caro Lazzeri

La lettura della lettera del prof. Riboni, segretario della " Mathesis „, inserita nell'ultimo numero del *Periodico,* dimostra la necessità di venire ad una misura estrema per salvare l'Associazione. Io non dovrei interloquire, perchè non sono più socio; ma data la mia speciale condizione, credo sarà benignamente tollerata anche la mia parola.

Credo dunque sia dovere dei membri del Comitato non ancora dimissionari (quanti, e chi sono?) di sostituirsi al Presidente, ormai moralmente decaduto, e di bandire nuove elezioni fra i Soci, affinchè finalmente l'Associazione torni ad avere chi l'amministri e riprenda la sua vita normale. Se questo non si facesse entro un certo periodo (un mese, ad esempio) dovrebbe un gruppo qualunque di soci invitare i colleghi ad eleggere una commissione provvisoria che avesse l'incarico di esporre in un Bollettino le condizioni attuali della Società, di pubblicare l'elenco dei Soci, e di fare regolarmente le elezioni, consegnando al nuovo Comitato la direzione della Società.

Se non si riuscisse a fare neppur questo, converrebbe allora ritenere sciolta l'attuale Società, e mettersi d'accordo fra alcuni professori, ancora soci o no, per rivolgersi a tutti gli insegnanti di matematica invitandoli a unirsi in una nuova associazione simile *in massima* all'attuale, la quale si nominasse un Comitato provvisorio incaricato della revisione dello Statuto e della costituzione definitiva della Società. I fondi giacenti presso il Segretario prof. Riboni passerebbero alla nuova Società.

Se queste idee ti sembrano ragionevoli, pubblicale, fallo pervenire all'attuale Comitato (se c'è ancora) ed ai Soci, e adoperati, tu che sei socio dei più stimati, ad attuarle. Vedo da me che ciò che io propongo non è *legale*; ma chi parla più ormai di legalità nella povera moribonda " Mathesis ", dopo che lo Statuto suo è stato così dimenticato in questi due ultimi anni? Così non si deve andare avanti: e bisogna bene che qualcuno esca dall'attuale indecoroso stato d'incertezza, non foss'altro per dire ufficialmente le solenni parole: " Mathesis " è morta! Almeno si potranno destinare ad un'opera buona quei po' di soldi che sono ancora in cassa, e qualcuno benedirà la memoria della defunta associazione!

Ma io troverei meglio fatto di rinascere e di tornare a lavorare come si faceva dieci anni fa... te ne ricordi?... Io sì; e ci ripenso con una specie di malinconia....

Scusami tu e fammi scusare dai Soci se ho scritto questa lettera. Che vuoi? non posso scordare la vecchia " Mathesis ", che ho tenuta a battesimo e presieduta per sei anni!....

Ti saluto coll'antico affetto, e mi dico *tuo aff.^{mo}*

Prof. RODOLFO BETTAZZI.

In seguito a queste ed altre lettere, è stata compilata una circolare, che sarà inviata a tutti i professori interessati, allo scopo di costituire una nuova *Società Italiana di Matematica*.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 736, 737 E 738

736. *Se* $K_1, K_2, \ldots K_t$ *sono tutti numeri interi positivi non maggiori dell'intero* n *che non hanno per divisori delle potenze* h^{me} *si ha:*

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sqrt[h]{\frac{n}{K_i}} = n$$

(dove il simbolo $\sqrt{\;}$ *indica la radice* h^{ma} *a meno di un'unità).*

G. B. ZECCA.

Risoluzione del proponente.

La totalità dei primi n numeri interi può essere scritta in t linee, ponendo in ciascuna linea il prodotto di una delle K per le potenze h^{me} dei successivi interi fino al massimo (prodotto) che non supera n.

Siccome la decomposizione di un numero intero in un fattore h^{plo} (che cioè sia la potenza h^{ma} di un intero) e in un altro *non divisibile* per alcuna potenza h^{ma} di intero è *unica* (se il numero dato decomposto in fattori primi è $\prod_1^i a_i^{\alpha_i}$, i due fattori sono rispettivamente $(\prod_1^i a_i^{q_i})^h$ e $\prod_1^i a_i^{r_i}$ essendo q_i e r_i il quoziente intero ed il resto di α_i per h), così avremo nel quadro numeri tutti diversi ed evidentemente *tutti* i numeri interi non maggiori di n.

Consideriamo ad esempio la linea:

$$1^h . K_1, \quad 2^h . K_1, \quad 3^h . K_1, \ldots, m_1^h . K_1.$$

Dovrà essere

$$m_i^h \,.\, K_i \leqslant n < (m_i + 1)^h \, K_i .$$

Sarà dunque

$$m_i = \sqrt[h]{\frac{n}{K_i}} .$$

Dunque

$$\sum_{i=1}^{i=t} \sqrt[h]{\frac{n}{K_i}} = \sum_1^t m_i = n. \qquad \text{c. d. d.}$$

Altra risoluzione del sig. Vacchi, R. U. di Bologna.

737. *Sia* N *il punto d'incontro della normale ad un ellisse in un punto* M *coll'asse maggiore di questa,* P *il piede della perpendicolare condotta dal centro alla parallela alla tangente in* M, *condotta per* N. *Si trovi l'area della curva luogo di* P, *che è una curva unicursale del 6° ordine.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. prof. J. Rose di Nivelles (Belgio).

L'equazioni della tangente e della normale all'ellisse nel punto di coordinate $a \cos \varphi$, $b \operatorname{sen} \varphi$ essendo

$$xb \cos \varphi + y \,.\, a \operatorname{sen} \varphi = ab$$
$$xa \operatorname{sen} \varphi - y \,.\, b \cos \varphi = (a^2 - b^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi$$

le coordinate del punto N sono $\frac{c^2}{a} \operatorname{sen} \varphi, 0$, e perciò, essendo $e = \frac{c}{a}$, le equazioni delle rette NP e OP sono

$$ay \operatorname{sen} \varphi + bx \cos \varphi - abe^2 \cos^2 \varphi = 0$$
$$y = x \,.\, \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi .$$

Il luogo del punto P è dunque

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2x^2 + b^2y^2) = a^4e^4x^4 ,$$

ossia in coordinate polari

$$\rho^2 = \frac{(a^2 - b^2)^2 \cos^4 \theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta} .$$

L'area della curva è

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\theta = 2 (a^2 - b^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 \theta \, d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta} =$$

$$= 2 (a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \, d\theta - 2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta + 2b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2 - b^2) \cos^2 \theta + b^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)\pi}{2} - \frac{2\pi b^2}{2} + 2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{\left(\frac{a^2 - b^2}{b^2}\right) + \frac{1}{\cos^2 \theta}} =$$

$$= \frac{\pi (a^2 - b^2)}{2} - \pi b^2 + 2b^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,(tg\,\theta)}{\frac{a^2}{b^2} + tg^2\,\theta} =$$

$$= \frac{\pi (a^2 - b^2)}{2} - \pi b^2 + \frac{b^3 \pi}{a} = \frac{\pi\,(a - b)^2 (a + 2b)}{2a} .$$

738. 1°. *Se i raggi dei circoli exinscritti di un triangolo sono in progressione aritmetica, la retta che congiunge il punto di Gergonne al baricentro è parallelo al lato medio.*

2°. *Se i raggi dei circoli exinscritti sono in progressione geometrica, la retta che congiunge il centro del circolo inscritto al punto di Lemoine è parallela al lato medio. La retta che congiunge il punto di Nagel al punto di Gergonne è pure parallela al medesimo lato.*

3°. *Se i raggi dei circoli exinscritti sono in proporzione armonica, i lati sono in progressione aritmetica, il baricentro, il centro del circolo inscritto ed il punto di Nagel sono sopra una retta parallela al lato medio.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. R. Vercellin, R. U. di Torino.

Preso un punto P nel piano d'un triangolo ABC, denotiamo ordinatamente con A_p, B_p, C_p i punti in cui le rette AP, BP, CP incontrano i lati BC, CA, AB e con α_p, β_p, γ_p i valori dei rapporti semplici (BCA_p), (CAC_p), (ABC_p).

La convenzione fatta pel punto P valga anche per un punto qualunque del piano del triangolo. È noto che il *rapporto di partizione* determinato dalla retta PQ sul lato BC, ha per valore [1]

$$\frac{-\frac{1}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p-\gamma_q},$$

quindi: condizione necessaria e sufficiente affinchè la retta PQ sia parallela al lato BC, è il verificarsi della relazione

$$-\frac{1}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_q}=\gamma_p-\gamma_q.$$

In particolare: la retta che congiunge il punto di Gergonne al baricentro è parallela al lato BC, se si verifica la relazione

$$\frac{r_c}{r_a}-1=-\frac{r_b}{r_a}+1, \qquad \text{ossia} \qquad r_b+r_c=2r_a;$$

la retta che congiunge il centro del circolo inscritto al punto di Lemoine è parallela al lato BC se è verificata la relazione

$$\frac{c}{a}-\frac{c^2}{a^2}=-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}, \qquad \text{ossia} \qquad c(a-c)=b(b-a),$$

che equivale alla

$$r_b r_c=r_a^2; \tag{1}$$

la retta che congiunge il punto di Nagel al punto di Gergonne è parallela a BC se si verifica la relazione:

$$\frac{r_c}{r_a}-\frac{r_a}{r_c}=-\frac{r_b}{r_a}+\frac{r_a}{r_b},$$

ossia la (1). La retta che contiene il baricentro, l'incentro e il punto di Nagel è parallela a BC se si verifica la relazione:

$$\frac{r_a}{r_c}-1=-\frac{r_a}{r_b}+1, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{2r_a},$$

(1) V. la mia nota: *Sul triangolo*, in questo stesso fascicolo.

oppure:

$$\frac{c}{a} - 1 = -\frac{b}{a} + 1, \qquad \text{ossia} \qquad b + c = 2a.$$

Restano pertanto pienamente dimostrate le verità dell'enunciato.

Altra risoluzione del sig. prof. J. Rose di Nivelles (Belgio).

1°. Siano b e K il baricentro ed il punto di Gergonne, A' il punto d'incontro di AK e BC.

Il teorema di Menelao dà nel triangolo BAA'

$$\frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{A'K}} = \frac{a\,(p-a)}{(p-b)\,(p-c)}.$$

Se

$$2r_a = r_b + r_c, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{2}{p-a} = \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c},$$

la frazione precedente è eguale a 2, e BK è parallela a BC.

2°. Siano I, L, N il centro del circolo inscritto, il punto di Lemoine ed il punto di Nagel; A_1, A_2, A_3 i punti d'incontro di AI, AL, AN con BC.

Si trova facilmente pel teorema di Menelao

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IA'}} = \frac{b+c}{a} \qquad \frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA'}} = \frac{b^2+c^2}{a^2}$$

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NA'}} = \frac{a}{p-a},$$

IL è parallela a BC nel caso in cui

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IA'}} = \frac{\mathrm{LA}}{\mathrm{LA'}}, \qquad \text{ovvero} \qquad b^2 + c^2 = a\,(b+c) \tag{1}$$

e KN è parallelo al medesimo lato se

$$\frac{\mathrm{KA}}{\mathrm{KA'}} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NA'}}, \qquad \text{ovvero} \qquad (p-a)^2 = (p-b)\,(p-c). \tag{2}$$

Le relazioni (1) e (2) si deducono dalla relazione

$$r_a^2 = r_b\, r_c.$$

3°. Il baricentro, il centro del circolo inscritto ed il punto di Nagel sono sopra una parallela a BC, se

$$\frac{\mathrm{IA}}{\mathrm{IA'}} = \frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{NA'}} = 2$$

ovvero

$$b + c = 2a, \qquad 2p = 3a$$

cosa che risulta dell'ipotesi

$$\frac{2}{r_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \qquad \text{ossia} \qquad 2\,(p-a) = p - b + p - c.$$

Si vede anche che i lati sono in progressione aritmetica.

QUISTIONI PROPOSTE

742. Trovare l'equazione dell'inviluppo della retta che congiunge i punti (x_1, y_1) (x_2, y_2), essendo

$$x_1 = a \cos^n \varphi, \qquad x_2 = a' \cos^n \varphi$$
$$y_1 = b \operatorname{sen}^n \varphi, \qquad y_2 = b' \operatorname{sen}^n \varphi$$

dove φ è un angolo variabile e trovare l'ordine della curva stessa.

743. 1°. Si considerino due iperboli equilatere coniugate. Tutte le ellissi concentriche ad esse, aventi per assi gli asintoti e tangenti alle iperboli, hanno eguale area.

2°. Si consideri un ipocicloide a 4 regressi. Tutte le ellissi concentriche all'ipocicloide aventi per assi le tangenti di regresso di questa, e tangenti alla curva hanno costante la somma delle lunghezze degli assi.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Anton Maria Bustelli. — *Elementi di filosofia della matematica nei riguardi didascalici*, con prefazione di V. Cerruti. Roma-Milano, Società editrice " Dante Alighieri ", 1905-1907.

Chi sortì da natura carattere intensamente laborioso e mente appassionatamente dedita alle speculazioni scientifiche, difficilmente si adatta all'assoluta inazione, anche se questa non è in fondo che il giusto riposo che tien dietro a una vita attiva tutta spesa nel raggiungimento del più nobile degli ideali, l'educazione scientifica della gioventù.

Tal si può dire del venerando Professore Anton Maria Bustelli che, nobile esempio alla gioventù non raramente bisognosa di stimoli, si è accinto con animo sereno ed indomita volontà a studiare l'intima natura delle nostre conoscenze matematiche mostrandone, con rara perizia filosofica, il nesso e l'origine.

L'opera compita sarà divisa in otto fascicoli, col seguente contenuto:

I. *Prolegomeni.* — II. *Appunti di logica della matematica.* — III. *La singolarità e la pluralità.* — IV. *La grandezza e la quantità.* — V. *Lo spazio e l'estensione. - Il tempo e la durata.* — VI. *Il moto e la velocità.* — VII. *La materia e la forza. - La materia e la massa.* — VIII. *Gli elementi della matematica e la loro propedeutica.*

Di questi fascicoli i primi due furono pubblicati nel 1905 e i due successivi soltanto nel 1907, in causa di una prolungata indisposizione del chiaro Maestro. Ora Egli attende alla redazione dei fascicoli V e VI: e poichè tutto fa sperare che continui nello stato ottimo di sua salute, si ritiene che in un avvenire prossimo si avrà tutta l'opera completa.

Le idee sono espresse in tutto il lavoro con encomiabile chiarezza ed è lodevole la diligenza che manifesta l'Autore nello stabilire i concetti veramente primordiali, il giusto ufficio dei postulati e le varie specie di definizioni.

Sarebbe stato forse bene evitare l'uso della frase *finzione logica* (§ 19) che non sembra troppo adatta. Così pure il Capo IV del II fascicolo: *Il nuovo programma di matematica per i ginnasi e licei* non sembra propriamente al suo posto, costituendo esso un fatto speciale troppo diverso dalla trattazione teorica precedente. Tutto al più si sarebbe potuto riunire in una *Appendice* a parte, e non nel corpo del lavoro.

Sono assai giudiziose le osservazioni profonde che nel Fascicolo III si fanno dall'Autore sull'infinito, sul numero e il tempo, sulle operazioni accrescitive e diminutive. Forse sarebbe stato meglio lasciare da parte i grammatici col loro *singolare* e *plurale*. E in quanto alla *potenza riflessa*, quantunque sia tutto giusto ciò che dice l'Autore, non si comprende la ragione perchè s'introduca questa nuova operazione dal momento che non si ha nessuna regola speciale per effettuarla, ma si deve ricorrere alla regola generale, ciò che non succede ad esempio per la moltiplicazione considerata come caso speciale dell'addizione.

Il Fascicolo IV è particolarmente denso di concetti utili che vengono esposti con molta perizia e commendevole ordine.

È un'idea felice quella dell'introduzione del *modulo* (§ 28), col quale l'Autore tratta con molta semplicità e rigore dei numeri negativi, degli irrazionali radicali e degli irrazionali logaritmici.

In quest'ultima parte del lavoro pubblicato sono studiate in modo originale e completo le operazioni dei tipi

$$s = a + a', \qquad p = ff', \qquad v = b^e, \qquad w = b^v,$$

ricavandone risultati ed osservazioni degni di nota, e il lavoro si chiude con un capitolo assai ben fatto sull'algoritmo.

Un indice bibliografico accompagna ciascuno dei quattro fascicoli, il che facilita la ricerca delle fonti per coloro che intendono approfondirsi nel difficile e complicato argomento che l'Autore con mano maestra, ha saputo efficacemente sviluppare in tutti i suoi particolari.

La parte pubblicata ci dà affidamento che la parte ancora in formazione completerà degnamente la prima. Auguriamoci che venga presto il giorno in cui gli altri fascicoli vengano alla luce; in tal modo si avrà il piacere di leggere tutto di seguito un'opera che ha il pregio incontestabile di spingere la nostra mente alla meditazione, il che costituisce il distintivo precipuo di un'opera veramente filosofica.

G. PIRONDINI.

Roma, gennaio 1908.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 Gennaio 1908

SUL TRIANGOLO

(Continuaz. e fine — v. fascicolo precedente)

---

13. Consideriamo ancora un triangolo ABC e, nel suo piano, due punti P, Q; giusta le notazioni sin qui adoperate, indichiamo rispettivamente con A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro delle coppie di rette B_pC_p, B_qC_q; C_pA_p, C_qA_q; A_pB_p, A_qB_q, e con A', B', C' i punti d'incontro delle coppie di rette B_pC_q, B_qC_p; C_pA_q, C_qA_p; A_pB_q, A_qB_p. Sappiamo che le rette B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 contengono rispettivamente i punti A, B, C. Ciò premesso; il rapporto di partizione determinato dalla trasversale angolare AB_1C_1, sul lato BC, ha per espressione (n. 7):

$$\frac{-\frac{1}{\gamma_p}+\frac{1}{\gamma_q}}{\beta_p-\beta_q}.$$

Poichè, inoltre, per il punto A', si ha (n. 7)

$$\alpha_{a'}=\frac{-\frac{1}{\gamma_p}+\frac{1}{\gamma_q}}{\beta_p-\beta_q},$$

si conchiude che *i punti* A, B_1, C_1, A' *sono allineati.*

Si ha inoltre:

$$\beta_{a'}=\frac{\beta_p\gamma_q-\beta_q\gamma_p}{-\gamma_p+\gamma_q};$$

$$\gamma_{a'}=\frac{\frac{1}{\beta_p}-\frac{1}{\beta_q}}{\frac{1}{\beta_p\gamma_q}-\frac{1}{\beta_q\gamma_p}}=\frac{\gamma_p\gamma_q(\beta_p-\beta_q)}{\beta_p\gamma_q-\beta_q\gamma_p};$$

Consideriamo ancora un triangolo ABC e, nel suo piano, due rette p, q; giusta le notazioni sin qui adoperate, indichiamo rispettivamente con a_1, b_1, c_1 le rette che uniscono le coppie di punti (BP_b, CP_c), (BQ_b, CQ_c); (CP_c, AP_a), (CQ_c, AQ_a); (AP_a, BP_b), (AQ_a, BQ_b), e con a', b', c' le rette determinate dalle coppie di punti (BP_b, CQ_c), (BQ_b, CP_c); (CP_c, AQ_a), (CQ_c, AP_a); (AP_a, BQ_b), (AQ_a, BP_b). Sappiamo che i punti a_1b_1, b_1c_1, c_1a_1 appartengono ai lati AB, BC, CA. Ciò premesso, è chiaro che il rapporto determinato dal punto b_1c_1 sul lato BC ha per espressione (n. 6)

$$\frac{-\frac{1}{p_b}+\frac{1}{q_b}}{-p_c+q_c}.$$

Poichè, inoltre, per la retta a', si ha (n. 6)

$$a'_a=\frac{-\frac{1}{p_b}+\frac{1}{q_b}}{-p_c+q_c},$$

si conchiude che *le rette* BC, b_1, c_1, a' *concorrono in un punto.*

Si ha poi:

$$a'_b=\frac{-\frac{1}{p_c}+\frac{1}{q_c}}{\frac{1}{p_bq_c}-\frac{1}{p_cq_b}}=\frac{p_bq_b(p_c-q_c)}{-p_bq_c+p_cq_b},$$

$$a'_c=\frac{-p_bq_c+p_cq_b}{q_b-p_b};$$

perciò è facile verificare che ha luogo la relazione

$$\frac{\frac{1}{\beta_p}-\frac{1}{\beta_q}}{\gamma_p-\gamma_q}=\frac{\frac{1}{\beta_p}-\frac{1}{\beta_{a'}}}{\gamma_p-\gamma_{a'}},$$

talchè si può dire (n. 6) che i punti P, Q, A′ sono allineati. In conclusione:

" *I punti* A′, B′, C′, P, Q *appartengono ad una retta* ".

perciò è facile verificare che ha luogo la relazione

$$\frac{\frac{1}{p_c}-\frac{1}{q_c}}{p_b-q_b}=\frac{\frac{1}{p_c}-\frac{1}{a'_c}}{p_b-a'_b},$$

talchè si può dire (n. 7), che le rette p, q, a' sono concorrenti. Dunque:

" *Le rette* a′, b′, c′, p, q *formano fascio* ".

14. Le conclusioni a cui ora siamo giunti ci mettono senz'altro in grado d'enunciare le seguenti proprietà:

Teorema. — *I vertici di due triangoli inscritti in un terzo, ed omologici con esso, appartengono a una medesima conica.*

Ed infatti, i punti A_p, B_p, C_p, A_q, B_q, C_q, sono vertici d'un esagono nel quale le coppie di lati opposti s'incontrano in tre punti allineati (n. 12 e 13), dunque, per l'inverso del noto teorema di Pascal, quell'esame è inscrittibile in una conica.

Corollario. — *Se una conica è circoscritta ad un triangolo inscritto in un dato e con esso omologico, le congiungenti i vertici del dato coi punti in cui la conica incontra ulteriormente i lati opposti, concorrono in un punto.*

Teorema: — *I lati di due triangoli circoscritti ad un terzo ed omologici con esso, sono tangenti a una stessa conica.*

Ed infatti, le rette AP_a, BP_b, CP_c, AQ_a, BQ_b, CQ_c sono lati d'un esagono nel quale le congiungenti i vertici opposti concorrono in un punto (n. 12 e 13), dunque, per l'inverso del noto teorema di Brianchon, l'esagono è circoscrittibile ad una conica.

Corollario. — *Se una conica è inscritta in triangolo circoscritto ad un triangolo dato e con esso omologico, le ulteriori tangenti alla conica, condotte pei vertici del triangolo dato, incontrano i lati opposti in tre punti allineati.*

15. Consideriamo in un piano due triangoli ABC, LMN, fra loro così riferiti, e una retta p, tale che le congiungenti i punti L, M, N rispettivamente co' punti in cui la retta p incontra i lati BC, CA, AB concorrano in un punto P. Dimostreremo che le congiungenti i vertici A, B, C del triangolo ABC rispettivamente co' punti in cui la retta p taglia i lati MN, NL, LM concorrono pure in un punto.

Siano ordinatamente A_q, B_q, C_q i punti in cui le rette che congiungono i vertici A, B, C rispettivamente co' punti $p\overline{MN}$, $p\overline{NL}$, $p\overline{LM}$ tagliano i lati BC, CA, AB. Siccome (n. 6)

$$p_a=\frac{-\frac{1}{\beta_p}+\frac{1}{\beta_l}}{\gamma_p-\gamma_l};\quad p_b=\frac{-\frac{1}{\gamma_p}+\frac{1}{\gamma_m}}{\alpha_p-\alpha_m};\quad p_c=\frac{-\frac{1}{\alpha_p}+\frac{1}{\alpha_n}}{\beta_p-\beta_n},$$

essendo

$$p_a p_b p_c = 1,$$

si ricava

$$\frac{(\alpha_p - \alpha_n)(\beta_p - \beta_l)(\gamma_p - \gamma_m)}{\alpha_n \beta_l \gamma_m (\alpha_p - \alpha_m)(\beta_p - \beta_n)(\gamma_p - \gamma_l)} = -1.$$

Ciò posto, abbiamo:

$$l_b = \frac{-\frac{1}{\gamma_m} + \frac{1}{\gamma_n}}{\alpha_m - \alpha_n}; \qquad l_c = \frac{-\frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\alpha_n}}{\beta_m - \beta_n},$$

e quindi

$$\frac{1}{l_c} - \frac{1}{p_c} = \frac{\beta_m - \beta_n}{-\frac{1}{\alpha_m} + \frac{1}{\alpha_n}} - \frac{\beta_p - \beta_n}{-\frac{1}{\alpha_p} + \frac{1}{\alpha_n}} =$$

$$= \frac{\alpha_n [\alpha_m (\beta_m - \beta_n)(\alpha_p - \alpha_n) - \alpha_p (\alpha_m - \alpha_n)(\beta_p - \beta_n)]}{(\alpha_m - \alpha_n)(\alpha_p - \alpha_n)} =$$

$$= \frac{\alpha_n}{\alpha_p - \alpha_n} \cdot \frac{\frac{1}{\gamma_m}(\alpha_n - \alpha_p) + \frac{1}{\gamma_n}(\alpha_p - \alpha_m) + \frac{1}{\gamma_p}(\alpha_m - \alpha_n)}{\alpha_m - \alpha_n},$$

e analogamente,

$$l_b - p_b = \frac{-\frac{1}{\gamma_m} + \frac{1}{\gamma_n}}{\alpha_m - \alpha_n} - \frac{-\frac{1}{\gamma_p} + \frac{1}{\gamma_m}}{\alpha_p - \alpha_m} =$$

$$= \frac{\gamma_p (\gamma_m - \gamma_n)(\alpha_p - \alpha_m) - \gamma_n (\alpha_m - \alpha_n)(\gamma_p - \gamma_m)}{\gamma_m \gamma_n \gamma_p (\alpha_m - \alpha_n)(\alpha_p - \alpha_m)}$$

$$= \frac{1}{\alpha_p - \alpha_m} \cdot \frac{\frac{1}{\gamma_m}(\alpha_n - \alpha_p) + \frac{1}{\gamma_n}(\alpha_p - \alpha_m) + \frac{1}{\gamma_p}(\alpha_m - \alpha_n)}{\alpha_m - \alpha_n}.$$

Per conseguenza si ha

$$\alpha_q = \frac{\frac{1}{l_c} - \frac{1}{p_c}}{l_b - p_b} = \frac{\alpha_n (\alpha_p - \alpha_m)}{\alpha_p - \alpha_n}.$$

In modo analogo, si trova

$$\beta_q = \frac{\beta_l (\beta_p - \beta_n)}{\beta_p - \beta_l}; \qquad \gamma_q = \frac{\gamma_m (\gamma_p - \gamma_l)}{\gamma_p - \gamma_m}.$$

Da queste, in virtù della (α), si ricava

$$\alpha_q \beta_q \gamma_q = -1,$$

e si conchiude che le rette AA_q, BB_q, CC_q concorrono in un punto Q. Dunque potremo enunciare il seguente

Teorema. — *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo co' punti in cui una certa retta incontra i lati d'un altro triangolo, concorrono in* *un punto, anche le congiungenti i vertici di quest'ultimo rispettivamente co' punti in cui la stessa retta incontra i lati del primo, concorrono in un punto.*

È notevole il caso in cui i due triangoli dati siano tali che, scelta, invece della retta p, precedentemente considerata, la retta all'infinito del piano, sussistano le proprietà contemplate dal teorema precedente, giacchè esso allora prende la forma seguente:

TEOREMA. — *Se le parallele, condotte pei vertici d'un triangolo, ai lati d'un altro, concorrono in un punto, anche le parallele condotte per i vertici del secondo, rispettivamente ai lati del primo, concorrono in un punto.*

16. Invocando il principio della dualità nel piano, dal teorema generale precedentemente dimostrato, si deduce il seguente:

TEOREMA. — *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo, con un punto del suo piano, incontrano rispettivamente i lati d'un altro in tre punti allineati, anche le congiungenti i vertici del secondo, collo stesso punto, incontrano rispettivamente i lati del primo in tre punti allineati.* (1)

Questo teorema può, del resto, facilmente dimostrarsi con metodo analogo a quello seguito nella dimostrazione precedente.

17. Ora faremo seguire alcune proprietà le quali hanno molta analogia con quelle stabilite nei n. 15 e 16. Seguiremo però un procedimento alquanto diverso da quello che abbiamo precedentemente adottato, anche per mostrare come, le nozioni che qui s'invocano possano venire variamente applicate.

Consideriamo un triangolo ABC e, nel suo piano, un punto generico P, e una retta generica p. Dimostreremo che, detti Q_a, Q_b, Q_c, rispettivamente, i punti in cui le rette che uniscono A, B, C rispettivamente co' punti $p\overline{B_pC_p}$, $p\overline{C_pA_p}$, $p\overline{A_pB_p}$, i punti Q_a, Q_b, Q_c appartengono a una medesima retta q.

Abbiamo infatti:

$$q_a = \frac{\dfrac{1}{p_c} - \dfrac{1}{\gamma_p}}{p_b - \beta_p}; \quad q_b = \frac{\dfrac{1}{p_a} - \dfrac{1}{\alpha_p}}{p_c - \gamma_p}; \quad q_c = \frac{\dfrac{1}{p_b} - \dfrac{1}{\beta_p}}{p_a - \alpha_p},$$

e quindi

$$q_a q_b q_c = 1,$$

poichè è

$$p_a p_b p_c = -\alpha_p \beta_p \gamma_p = 1.$$

Viceversa, è facile riconoscere che, essendo Q_a, Q_b, Q_c, rispettivamente, i punti in cui una certa retta q taglia i lati BC, CA, AB del triangolo ABC, le rette AQ_a, BQ_b, CQ_c incontrano rispettivamente le rette B_pC_p, C_pA_p, A_pB_p in tre punti allineati.

---

(1) Nel tradurre per dualità parecchi teoremi, crediamo bene dare agli enunciati che s'ottengono una forma alquanto diversa da quella che s'otterrebbe direttamente, mercè i soliti scambi.

Intanto potremo dire:

Teorema. — *Le congiungenti i vertici d'un dato triangolo, rispettivamente con tre punti allineati presi ordinatamente sui tre lati d'un triangolo in esso inscritto e con esso omologico, incontrano i lati opposti in tre punti allineati.*

In particolare, abbiamo:

« *Le parallele condotte pei vertici d'un triangolo rispettivamente ai lati d'un triangolo inscritto nel dato, e con esso omologico, incontrano i lati opposti in tre punti allineati* ».

18. Si abbiano due triangoli ABC, A'B'C' complanari. Supponiamo che le parallele condotte per A, B, C rispettivamente alle rette B'C', C'A', A'B' incontrino i lati BC, CA, AB del triangolo ABC in tre punti allineati. Vogliamo far vedere che anche le parallele condotte per A', B', C' rispettivamente alle rette BC, CA, AB incontrano i lati B'C', C'A', A'B' del triangolo A'B'C' in tre punti allineati. Siano rispettivamente A_1, B_1, C_1 i vertici del triangolo che ha per lati le parallele condotte per A, B, C alle rette B'C', C'A', A'B'. I triangoli $A_1B_1C_1$, A'B'C' sono evidentemente simili ed hanno le rette omologhe fra loro parallele, sicchè basterà provare che le parallele condotte per A_1, B_1, C_1 rispettivamente ai lati BC, CA, AB incontrano ordinatamente le rette B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 in tre punti allineati. Ora, i due triangoli ABC, $A_1B_1C_1$ sono omologici per la fatta ipotesi; inoltre, il triangolo ABC è inscritto nel triangolo $A_1B_1C_1$; dunque, per il corollario del n. 17, risulta subito che le parallele condotte per A_1, B_1, C_1 rispettivamente alle rette BC, CA, AB tagliano B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 in tre punti allineati. Dunque:

Teorema. — *Se le parallele condotte pei vertici d'un triangolo rispettivamente ai lati d'un altro, incontrano i lati del primo in tre punti allineati, anche le parallele condotte pei vertici del secondo, rispettivamente ai lati del primo, incontrano i lati del secondo in tre punti allineati.*

19. Si abbiano ora, in un piano π, due triangoli ABC, LMN, fra loro così riferiti. Supponiamo che si sia trovata, in π, una certa retta p, tale che le congiungenti i vertici A, B, C del triangolo ABC, rispettivamente con i punti $p\overline{MN}$, $p\overline{NL}$, $p\overline{LM}$ incontrino i lati BC, CA, AB in tre punti allineati. Faremo vedere che anche le congiungenti i punti L, M, N rispettivamente coi punti pBC, pCA, pAB tagliano MN, NL, LM in tre punti allineati.

Preso pertanto, fuori di π, un punto S, si proiettino da S i punti del piano π su un piano π' parallelo al piano pS. In seguito a tale operazione la figura ABCLMNp viene trasformata in una nuova figura A'B'C'L'M'N'p'_∞, essendo p'_∞ la retta all'infinito del punto π'. Poichè, com'è ben noto, l'allineamento dei punti e la concorrenza delle rette si mantengono per proiezione e sezione, le congiungenti i punti A', B', C' rispettivamente ai punti p'_∞M'N', p'_∞N'L', p'_∞L'M', ossia le parallele condotte per A', B', C' ordinatamente a M'N', N'L', L'M', tagliano le rette B'C', C'A', A'B' in tre punti allineati. Talchè (n. 18) le parallele condotte per L', M', N' ordinatamente a B'C', C'A', A'B', ossia le congiungenti i punti L', M', N' rispettivamente ai punti $p\overline{B'C'}$, $p'\overline{C'A'}$, $p'\overline{A'B'}$ tagliano le rette M'N', N'L', L'N' in tre punti allineati. Quindi, trattandosi sempre di proprietà proiettive, nel piano π, si ha che le congiungenti i punti L, M, N rispettivamente ai punti $p\overline{BC}$, $p\overline{CA}$, $p\overline{AB}$, tagliano le rette MN, NL, LM in tre punti allineati. Dunque diremo:

Teorema. — *Dati due triangoli complanari, fra loro riferiti, se le congiungenti i vertici dell'uno, coi punti in cui una certa retta taglia i lati dell'altro, incontrano i lati opposti del primo in tre punti allineati, anche le congiungenti i vertici del secondo rispettivamente co' punti in cui la stessa retta taglia i lati del primo, incontrano i lati opposti del secondo in tre punti allineati.*

Il duale del teorema precedente può enunciarsi come segue:

Teorema. — *Dati due triangoli complanari, fra loro riferiti, se le congiungenti i vertici d'uno d'essi, colle proiezioni sui lati opposti del medesimo dei vertici dell'altro, da un certo punto, sono concorrenti, anche le congiungenti i vertici del secondo colle proiezioni sui lati opposti di esso dei vertici del primo, dallo stesso punto, sono concorrenti.*

20. Sulle mediane AG, BG, CG, d'un dato triangolo ABC, prendiamo rispettivamente tre punti L, M, N. Ci proponiamo di far vedere che le parallele condotte per A, B, C, rispettivamente alle mediane del triangolo LMN, concorrono in un punto.

Osserviamo anzitutto che, per le fatte ipotesi, si hanno le relazioni:

$$\alpha_l=\beta_m=\gamma_n=-1,$$
$$\beta_l\gamma_l=\alpha_m\gamma_m=\alpha_n\beta_n=1.$$

Ciò posto, detto R il punto medio del segmento MN, s'indichi con p la retta LR e con P_∞ il punto in cui la medesima incontra la retta all'infinito del piano. Siano infine A_p, B_p, C_p, rispettivamente, i punti in cui le parallele alle mediane del triangolo LMN, condotte per A, B, C tagliano i lati BC, CA, AB. Manifestamente la retta p è la mediana uscente da L. Ciò posto, si ha (n. 2)

$$x_r=\frac{1}{2}(x_m+x_n)=\frac{1}{2}h_a\left(\frac{1}{1-\gamma_m-\frac{1}{\beta_m}}+\frac{1}{1-\gamma_n-\frac{1}{\beta_n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}h_a\left(\frac{1}{2-\gamma_m}+\frac{1}{2-\alpha_n}\right),$$

$$y_r=\frac{1}{2}(y_m+y_n)=\frac{1}{2}h_b\left(\frac{1}{1-\alpha_m-\frac{1}{\gamma_m}}+\frac{1}{1-\alpha_n-\frac{1}{\gamma_n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}h_b\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_m-2}+\frac{1}{2-\alpha_n}\right),$$

$$z_r=\frac{1}{2}(z_m+z_n)=\frac{1}{2}h_c\left(\frac{1}{1-\beta_m-\frac{1}{\alpha_m}}+\frac{1}{1-\beta_n-\frac{1}{\alpha_n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}h_c\left(\frac{1}{2-\gamma_m}+\frac{\alpha_n}{\alpha_n-2}\right).$$

Per conseguenza, risulta

$$\alpha_r=-\frac{cz_r}{by_r}=-\frac{3\alpha_n-\alpha_n\gamma_m-2}{3\gamma_m-\alpha_n\gamma_m-2}, \qquad (a)$$

$$\beta_r=-\frac{ax_r}{cz_r}=\frac{4-\alpha_n-\gamma_m}{3\alpha_n-\alpha_n\gamma_m-2}, \qquad (b)$$

$$\gamma_r=-\frac{by_r}{ax_r}=\frac{3\gamma_m-\alpha_n\gamma_m-2}{4-\alpha_n-\gamma_m}. \qquad (c)$$

Si ha inoltre

$$\alpha_p=\frac{\frac{1}{p_c}-1}{p_b-1},$$

e quindi, siccome è

$$p_b=\frac{-\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_r}}{\alpha_1-\alpha_r}=\frac{-\beta_1+\frac{1}{\gamma_r}}{-1-\alpha_r};$$

$$p_c=\frac{-\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_r}}{\beta_1-\beta_r}=\frac{1+\frac{1}{\alpha_r}}{\beta_1-\beta_r},$$

si deduce

$$\alpha_p=-\frac{1+\frac{1}{\beta_r}-\frac{\beta_1}{\beta_r}-\gamma_r}{1-\frac{1}{\beta_r}-\beta_1\gamma_r+\gamma_r}.$$

Questa, a cagione delle (a), (b) e (c), diviene:

$$\alpha_p=-\frac{-3\alpha_n\beta_1+\alpha_n\beta_1\gamma_m+2\alpha_n+2\beta_1-4\gamma_m+4}{-3\beta_1\gamma_m+\beta_1\gamma_m\alpha_n+2\beta_1+2\gamma_m-4\alpha_n+4}$$

e poichè si ha analogamente

$$\beta_p=-\frac{-3\beta_1\gamma_m+\beta_1\gamma_m\alpha_n+2\beta_1+2\gamma_m-4\alpha_n+4}{-3\gamma_m\alpha_n+\gamma_m\alpha_n\beta_1+2\gamma_m+2\alpha_n-4\beta_1+4},$$

$$\gamma_p=-\frac{-3\gamma_m\alpha_n+\gamma_m\alpha_n\beta_1+2\gamma_m+2\alpha_n-4\beta_1+4}{-3\alpha_n\beta_1+\alpha_n\beta_1\gamma_m+2\alpha_n+2\beta_1-4\gamma_m+4},$$

si ricava

$$\alpha_p\beta_p\gamma_p=-1,$$

e si conchiude che le rette AA_p, BB_p, CC_p concorrono in un punto P.

Ed ora facilmente possiamo venire ad una importantissima conclusione. Consideriamo due triangoli complanari ABC, $A'B'C'$; siano rispettivamente G, G' i loro baricentri. Supponiamo che le parallele condotte per A', B', C' rispettivamente alle mediane AG, BG, CG concorrano in un punto P'. Allora, riferendoci alla conclusione precedente, è facile vedere che anche le parallele condotte per A, B, C alle mediane A'G', B'G', C'G', del triangolo A'B'C', concorrono in un punto P. Trasportiamo infatti, nel piano che si considera, la figura A'B'C'P' parallelamente a se stessa, e facciamo così coincidere P' con G; è evidente che i punti A', B', C' si troveranno, dopo lo spostamento, sulle mediane AG, BG, CG, e ricadiamo così nel caso dianzi contemplato. In conclusione, potremo dire:

Teorema. — *Se le parallele condotte pei vertici d'un triangolo alle mediane d'un altro concorrono in un punto, anche le parallele condotte pei vertici del secondo rispettivamente alle mediane del primo, concorrono in un punto.*

Come si vede, questo teorema è analogo al noto teorema dei triangoli *ortologici*, dovuto a Steiner; invero, se nell'enunciato del teorema precedente, alla parola " mediane " sostituiamo la parola " altezze " abbiamo il teorema di Steiner. Perciò, per semplice analogia, noi proponiamo di chiamare *bariologici*, due triangoli, quando si trovano nel caso contemplato dal teorema precedentemente enunciato.

21. Questo teorema può facilmente generalizzarsi come segue:

Teorema. — *Dati due triangoli complanari* ABC, A'B'C' *e una retta* p *nel loro piano, essendo rispettivamente* P, P' *i poli di essa rispetto ai triangoli medesimi, se le congiungenti i vertici* A, B, C *dell'uno rispettivamente coi punti in cui la retta* p *incontra le rette* A'P', B'P', C'P' *concorrono in un punto, anche le congiungenti i vertici* A', B', C' *del secondo coi punti in cui la stessa retta* p *incontra le rette* AP, BP, CP, *concorrono in un punto.*

Siccome le proprietà di cui è parola in questo teorema dipendono da concorrenza di rette ed allineamento di punti, esse si conservano per proiezione e sezione; perciò, per dimostrarlo, basterà far vedere la sua validità in un caso particolare, che si deduce da quello generale, mediante un'operazione di proiezione e sezione, opportunamente scelta.

Essendo π il piano che si considera, si scelga, fuori di esso, un punto S; preso quindi un piano π_1, parallelo al piano pS, si proietti, da S, i punti del piano π_1. La figura ABCA'B'C'pPP', dopo tale proiezione, si trasformerà in una nuova figura $A_1B_1C_1A'_1B'_1C'_1p_\infty P_1P'_1$, essendo p_∞ evidentemente la retta all'infinito del piano π_1. Perciò P_1, P_1 non sono altro che i baricentri de' triangoli $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$. Se, dunque, le rette congiungenti rispettivamente i vertici del triangolo ABC, co' punti in cui la retta p taglia rispettivamente le rette A'P', B'P', C'P', concorrono in un punto, si avrà, come conseguenza, che, nel piano π_1, le parallele condotte per i vertici di $A_1B_1C_1$, rispettivamente alle mediane del triangolo $A'_1B'_1C'_1$, concorrono in un punto; i triangoli $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$, così riferiti, sono dunque *bariologici*, quindi (n. 20), le parallele condotte pei vertici di $A'_1B'_1C'_1$ alle mediane del triangolo $A_1B_1C_1$, ossia le congiungenti i punti A'_1, B'_1, C'_1 rispettivamente co' punti $p_\infty \overline{A_1P_1}, p_\infty \overline{B_1P_1}, p_\infty \overline{C_1P_1}$, concorrono in un punto. Trattandosi di proprietà proiettive, si avrà, corrispondentemente, che nel piano π, le congiungenti i vertici di $A'B'C'$, rispettivamente ai punti in cui la p taglia le rette AP, BP, CP, concorrono in un punto.

Rimane in tal modo pienamente dimostrato il teorema generale enunciato.

22. Traducendo per dualità il teorema ora dimostrato, si ha:

Teorema. — *Dati due trilateri complanari* abc, a'b'c', *così riferiti, e un punto* P *nel loro piano, essendo rispettivamente* p, p' *le polari di esso punto, rispetto ai trilateri medesimi, se i punti d'incontro de' lati* a, b, c *dell'uno, rispettivamente con le congiungenti il punto* P *coi punti* a'p', b'p', c'p', *sono allineati, anche i punti d'incontro de' lati* a', b', c' *dell'altro con le congiungenti lo stesso punto* P *co' punti* ap, bp, cp, *sono allineati.*

Suppongasi ora, in particolare, d'aver due triangoli complanari ABC, A'B'C', aventi in comune il baricentro; le polari d'esso rispetto ai due triangoli, coincidono con la retta all'infinito del piano che si considera. Applichiamo il teorema precedente al caso in cui esso sia valido, qualora il punto P dell'enunciato coincida con questo comune baricentro. Esso prende, allora, la forma che segue:

" *In due triangoli aventi lo stesso baricentro: se le parallele condotte pel comune baricentro di lati dell'uno incontrano i lati dell'altro in tre punti allineati, anche le parallele condotte per lo stesso baricentro, ai lati del secondo, incontrano i lati del primo rispettivamente in tre punti allineati* ".

23. Consideriamo, in un piano π, due triangoli ABC, A'B'C'; siano G, G' rispettivamente i loro baricentri. Supponiamo che le parallele condotte per G a B'C', C'A', A'B', incontrino rispettivamente i lati BC, CA, AB del triangolo ABC in tre punti allineati; faremo vedere che, in quella ipotesi, anche le parallele condotte per G' ai lati BC, CA, AB del triangolo ABC, incontrano i lati B'C', C'A', A'B' del triangolo A'B'C', in tre punti pure allineati. Osserviamo, all'uopo, che se si muovesse il triangolo A'B'C' parallelamente a se stesso, fino a far coincidere il punto G' con G, il triangolo medesimo assumerebbe una nuova ben determinata posizione $A'_1B'_1C'_1$, che ora è opportuno considerare. Siccome le parallele condotte per G ai lati $B'_1C'_1, C'_1A'_1, A'_1B'_1$, non sono altro che le parallele condotte per lo stesso punto a B'C', C'A', A'B' rispettivamente, per la fatta ipotesi, le parallele condotta per G (baricentro comune ai triangoli ABC, $A'_1B'_1C'_1$) a BC, CA, AB, incontrano i lati $B'_1C'_1, C'_1A'_1, A'_1B'_1$ rispettivamente in tre punti allineati (n. 22). Per conseguenza, anche le parallele condotte per G' rispettivamente a BC, CA, AB, incontrano i lati B'C', C'A', A'B', del triangolo A'B'C', in tre punti allineati. Dunque potremo dire:

Teorema. — *Se le parallele condotte pel baricentro d'un triangolo ai lati d'un altro incontrano i lati del primo rispettivamente in tre punti* *allineati, anche le parallele condotte pel baricentro del secondo ordinatamente ai lati del primo, incontrano i lati del secondo rispettivamente in tre punti allineati.*

24. Da questo teorema, mediante il metodo di proiezione, precedentemente usato, deducesi la proprietà generale seguente:

Teorema. — *Dati due triangoli complanari, fra loro riferiti, se le congiungenti i punti d'incontro dei lati d'uno d'essi con una certa retta, con il polo d'essa rispetto all'altro, incontrano i lati di quest'ultimo in tre punti allineati, anche le congiungenti i punti d'incontro di quella stessa retta rispettivamente coi lati del secondo, col polo di essa rispetto al primo, incontrano i lati di questo in tre punti allineati.*

Infatti, le proprietà contemplate da questo teorema si conservano per proiezione e sezione; risulta perciò che esso sussiste nella generalità dei casi, poichè è facile scegliere un'opportuna operazione di proiezione e sezione, in seguito alla quale la figura che si considera in questo teorema, viene trasformata in guisa da ricadere nel teorema del numero precedente. Basta, all'uopo, proiettare i punti del piano π, che si considera, da un centro S, preso fuori di esso, su di un piano π_1, parallelo al piano individuato dal punto S e da quella certa retta che si considera nel precedente teorema.

Traducendo per dualità il teorema precedente, si ricava la seguente proprietà:

Teorema. — *Dati due triangoli complanari, fra loro riferiti, se le congiungenti i vertici d'uno d'essi rispettivamente coi punti in cui le congiungenti un certo punto coi vertici dell'altro, incontrano la polare di esso punto rispetto al primo, sono concorrenti, anche le congiungenti i vertici del secondo coi punti in cui le congiungenti lo stesso punto coi vertici del primo, incontrano la polare di esso punto rispetto al secondo, concorrono in un punto.*

È qui opportuno notare che, seguendo il procedimento adottato nei paragrafi 22 e 23, dal teorema precedentemente enunciato ricaviamo nuovamente il teorema dei triangoli *bariologici*, da noi dimostrato ed enunciato al n. 20.

25. Applicando opportunamente l'ultimo teorema enunciato al n. 15, possiamo agevolmente dimostrare altre notevoli proprietà. Segnaliamo anzitutto il seguente:

Teorema. — *Se le congiungenti i punti d'incontro dei lati d'un triangolo con una certa retta, coi punti in cui le congiungenti rispettivamente i vertici d'un altro col polo di essa retta rispetto al medesimo, incontrano i lati opposti, concorrono in un punto, anche le congiungenti i punti d'incontro dei lati del secondo triangolo con quella stessa retta, coi punti in cui le congiungenti i vertici del primo col polo di quella retta rispetto ad esso, incontrano i lati opposti, concorrono in un punto.*

Si abbiano, infatti, in un piano π, due triangoli ABC, $A_1B_1C_1$. Sia p una retta del loro piano, tale che, essendo rispettivamente P, P_1 i poli di essa rispetto ai triangoli suddetti, le rette che uniscono ordinatamente i punti $p\overline{BC}$, $p\overline{CA}$, $p\overline{AB}$ coi punti $a_1\overline{A_1P_1}$, $b_1\overline{B_1P_1}$, $c_1\overline{C_1P_1}$ concorrono in un punto Q. Vogliamo mostrare che in tale ipotesi, le rette che uniscono ordinatamente i punti $p\overline{B_1C_1}$, $p\overline{C_1A_1}$, $p\overline{A_1B_1}$ coi punti $a\overline{AP}$, $b\overline{BP}$, $c\overline{CP}$, concorrono in un punto Q_1. Scelto all'uopo un punto S, non appartenente al piano π, proiettiamo da S i punti di π su un piano π', parallelo al piano pS. In seguito a tale operazione, la figura $ABCA_1B_1C_1pPP_1Q$ viene trasformata in una nuova figura $A'B'C'A'_1B'_1C'_1p'_\infty P'P'_1Q'$, essendo, evidentemente, p'_∞ la retta all'infinito del piano π' e P' e P'_1 i baricentri dei triangoli $A'B'C'$, $A'_1B'_1C'_1$. Trattandosi di proprietà proiettive, dall'ipotesi fatta si deduce che, nel piano π', le parallele condotte pei punti medi dei lati del triangolo $A'_1B'_1C'_1$ rispettivamente ai lati del triangolo $A'B'C'$ concorrono nel punto Q'; perciò, tenendo ben presente l'ultimo teorema enunciato al n. 15, si deduce che anche le parallele condotte pei punti medi dei lati di $A'B'C'$ rispettivamente ai lati del triangolo $A'_1B'_1C'_1$ concorrono in punto Q'_1. Corrispondentemente, nel piano π, si ha che le rette che uniscono ordinatamente i punti $p\overline{B_1C_1}$, $p\overline{C_1A_1}$, $p\overline{A_1B_1}$ coi punti $a\overline{AP}$, $b\overline{BP}$, $c\overline{CP}$ concorrono in un punto Q_1. Il teorema è dimostrato.

Dualmente si ha:

Teorema. — *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo, con un punto del suo piano, tagliano in tre punti allineati le rette che uniscono i vertici d'un altro coi punti in cui i lati opposti del medesimo incontrano la polare di quel punto rispetto ad esso, anche le congiungenti i vertici del secondo, con lo stesso punto, tagliano in tre punti allineati le rette che uniscono i vertici del primo coi punti in cui i lati opposti del medesimo incontrano la polare di quel punto rispetto ad esso.*

26. Suppongasi ora, in particolare, d'avere due triangoli aventi in comune il baricentro; suppongasi, inoltre, che essi siano tali che sia ad essi applicabile il teorema precedente, qualora, anzichè un punto generico del piano, si scelga il comune baricentro. È facile vedere che, in tal caso, si ha la seguente proprietà:

“ *In due triangoli aventi lo stesso baricentro: se le mediane dell'uno incontrano rispettivamente i lati dell'altro in tre punti allineati, anche le mediane del secondo incontrano rispettivamente i lati del primo in tre punti allineati* „.

Da cui si deduce facilmente la seguente importante proprietà:

Teorema. — *Se le parallele condotte pel baricentro d'un triangolo rispettivamente alle mediane d'un altro, incontrano i lati del primo in tre punti allineati, anche le parallele condotte pel baricentro del secondo, rispettivamente alle mediane del primo, incontrano i lati del secondo in tre punti allineati.*

Mediante il metodo delle proiezioni, precedentemente usato, da questo teorema si deduce il seguente generale:

TEOREMA. — *Dati tre triangoli ABC, A'B'C' e una retta p nel loro piano comune, essendo P, P' rispettivamente i poli di essa rispetto ai medesimi, se le congiungenti il punto P coi punti pA'P', pB'P', pC'P' incontrano rispettivamente i lati BC, CA, AB in tre punti allineati, anche le congiungenti il punto P' coi punti* $p\overline{AP}$, $p\overline{BP}$, $p\overline{CP}$ *incontrano rispettivamente i lati B'C', C'A', A'B' in tre punti allineati.*

Dualmente, si ha:

TEOREMA. — *Dati due triangoli ABC, A'B'C' e un punto P nel loro piano comune, essendo p e p' rispettivamente le polari di esso rispetto ai medesimi, se le congiungenti i vertici A, B, C rispettivamente con le proiezioni dei punti* $p'\overline{B'C'}$, $p'\overline{C'A'}$, $p'\overline{A'B'}$ *dal punto P sulla retta p, sono concorrenti, anche le congiungenti i vertici A', B', C' rispettivamente con le proiezioni dei punti* $p\overline{BC}$, $p\overline{CA}$, $p\overline{AB}$ *dal punto P sulla retta p' sono concorrenti.*

Questo teorema può eziandio dedursi dal teorema dei triangoli *bariologici.*

27. Con metodo analogo a quello seguito al n. 20, si può facilmente dimostrare la seguente importante proprietà:

TEOREMA. — *Se le parallele condotte per i vertici d'un triangolo rispettivamente alle mediane d'un altro, incontrano i lati del primo in tre punti allineati, anche le parallele condotte pei vertici del secondo, rispettivamente alle mediane del primo, incontrano i lati del secondo rispettivamente in tre punti allineati.*

Non riportiamo la dimostrazione, che lasciamo al lettore.

Lasciamo parimenti al lettore la generalizzazione di questo teorema, nonchè le considerazioni analoghe a quelle da noi svolte nei §§ 21, 22, 23 e 24. Seguendo questa via s'incontrerà la seguente notevole proprietà:

TEOREMA. — *Se le congiungenti i vertici d'un triangolo, coi punti in cui i lati opposti incontrano le parallele condotte pel baricentro rispettivamente ai lati d'un altro, sono concorrenti, anche le congiungenti i vertici del secondo coi punti in cui i lati opposti d'esso incontrano le parallele condotte pel baricentro di quest'ultimo triangolo rispettivamente ai lati del primo sono concorrenti.*

È evidente che le proprietà qui segnalate, applicate variamente a casi particolari, ci dànno modo di dimostrare molti teoremi, di notevole importanza nella recente geometria del triangolo.

R. VERCELLIN.

SULLA TRASFORMAZIONE DEI RADICALI SOVRAPPOSTI

In un altro mio lavoro [1] feci notare che il problema della trasformazione dei radicali sovrapposti non è stato oggetto di studio continuato, e che esso fu solamente risolto in alcuni casi particolari [2] per i radicali della forma

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Dissi, inoltre, che nessun tentativo era stato fatto, per lo addietro, per trasformare i radicali

$$\sqrt{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}}, \qquad \sqrt[4]{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}}$$
$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_n}}} \text{ ecc.,}$$

ma che solo il prof. De Longchamps, nel *Supplemento al Periodico di Matematica*, [3] trasformò $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ nella somma di quattro radicali semplici; dimostrai, infine, alcuni teoremi i quali risolvono, in molti casi, la questione elementare, ma interessante, della trasformazione dei radicali sovrapposti.

Qui mi propongo ora di pubblicare quello stesso mio lavoro, con diverse aggiunte e modifiche, generalizzando alcuni teoremi in esso contenuti.

È bene notare che i teoremi che seguono trattano di casi del tutto differenti da quelli da me pubblicati precedentemente in questo Periodico, nei volumi XXI (fasc. VI) e XXII (fasc. I e II).

§ 1. — Sulla trasformazione dei radicali

$$\sqrt{\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_{m-1}}\pm\sqrt{a_m}}, \qquad \sqrt{a_1\pm\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{m-1}\pm\sqrt{a_m}}}}.$$

1. Teorema I. — *Il radicale $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può trasformare nella somma di due radici quarte di quantità razionali, se il prodotto* $a(a-b)$ *è un quadrato perfetto.*

---

[1] *Sulla trasformazione dei radicali sovrapposti*. Bologna, P. Cuppini, editore, 1904.

[2] Vedi Lacroix, *Complément des éléments d'algèbre*, Paris, 1801 — G. Candido, *La formola di Waring e sue notevoli applicazioni* — F. Castellano, *Elementi d'algebra*.

[3] Anno V, fasc. VI.

Poniamo infatti

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \qquad \sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y} \tag{1}$$

e proponiamoci, se sarà possibile, di risolvere le equazioni (1) con valori razionali delle incognite x ed y.

Considerando di ogni radicale il solo segno positivo, quadrando le (1) si ottengono le equazioni equivalenti:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt[4]{xy} \qquad \sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt[4]{xy}$$

dalle quali risulta

$$\sqrt{a}=\sqrt{x}+\sqrt{y}. \tag{2}$$

Moltiplicando membro a membro le (1) si ha inoltre

$$\sqrt{a-b}=\sqrt{x}-\sqrt{y} \tag{3}$$

e quindi, dalle (2) e (3) si ottiene

$$\sqrt{a(a-b)}=x-y \qquad \frac{2a-b}{2}=x+y. \tag{4}$$

Se le quantità x ed y sono razionali, la prima delle (4) può sussistere solo nel caso in cui il prodotto $a(a-b)$ sia il quadrato di una quantità razionale c. Ponendo allora

$$a(a-b)=c^2 \tag{5}$$

le (4) diventano

$$c=x-y \qquad \frac{2a-b}{2}=x+y$$

dalle quali si ricava

$$x=\frac{1}{4}(2a-b+2c) \qquad y=\frac{1}{4}(2a-b-2c).$$

Segue quindi dalle (1) che, nel caso in cui risulti verificata la relazione (5), si ha

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\sqrt[4]{\frac{2a-b+2c}{4}}\pm\sqrt[4]{\frac{2a-b-2c}{4}} \tag{6}$$

come volevasi dimostrare.

Osservazione. — Tenuto conto della (5), risultano vere le seguenti uguaglianze

$$2a-b+2c=\frac{1}{a}(a+c)^2 \qquad 2a-b-2c=\frac{1}{a}(a-c)^2$$

quindi la (6) si può scrivere

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4a}}\left[\sqrt{a+c}\pm\sqrt{a-c}\right]. \tag{7}$$

2. Allo stesso risultato si può giungere facendo uso della nota trasformazione

$$\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}} \qquad (8)$$

nel seguente modo: [1]

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt[4]{a}\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{b}{a}}} = \sqrt[4]{a}\left[\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\frac{b}{a}}}{2}} \pm \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\frac{b}{a}}}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[4]{a}\left[\sqrt{\frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{4a}} \pm \sqrt{\frac{2a-b-2\sqrt{a(a-b)}}{4a}}\right] =$$

$$= \sqrt[4]{\frac{2a-b+2\sqrt{a(a-b)}}{4}} \pm \sqrt[4]{\frac{2a-b-2\sqrt{a(a-b)}}{4}} \qquad (9)$$

e quindi tenuto conto della (5), si ottiene immediatamente la (6).

Esempio numerico. — Supposto $a=8$, $b=6$, $c=4$ risulta verificata la (5); si ha quindi

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \sqrt[4]{\frac{9}{2}} \pm \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

oppure dalla (7)

$$\sqrt{\sqrt{8} \pm \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{3} \pm 1).$$

3. Consideriamo ora l'equazione biquadratica

$$x^4 - \sqrt{p}\, x^2 + q = 0 \qquad (10)$$

in cui p e q sono quantità razionali. Le sue radici, com'è noto, sono date dalla

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{\frac{p}{4}} \pm \sqrt{\frac{p}{4} - q}}. \qquad (11)$$

Acciocchè al radicale che comparisce nel secondo membro della (11) si possa applicare la trasformazione (6) è necessario che il prodotto

$$\frac{p}{4}\left[\frac{p}{4} - \left(\frac{p}{4} - q\right)\right] = \frac{pq}{4}$$

sia un quadrato perfetto, o, ciò che è lo stesso, è necessario che il prodotto pq sia un quadrato perfetto. Ponendo allora

$$pq = r^2 \qquad (12)$$

(1) Cfr. F. Castellano, *Elementi d'algebra*, pag. 217.

dalla (6) si ha

$$\sqrt{\sqrt{\frac{p}{4}} \pm \sqrt{\frac{p}{4} - q}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{p+4q+4r} \pm \sqrt[4]{p+4q-4r}\right]$$

e quindi

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[4]{p+4q+4r} \pm \sqrt[4]{p+4q-4r}\right]. \tag{13}$$

Risulta cioè che *le radici dell'equazione biquadratica* (10) *si possono esprimere mediante somme e differenze di due radici quarte di quantità razionali, se è verificata la relazione* (12).

Osservazione. — Tenuto conto della (12) risulta

$$p + 4q + 4r = \frac{1}{p}(p+2r)^2 \quad p + 4q - 4r = \frac{1}{p}(p-2r)^2$$

quindi la (13) si può scrivere

$$x = \pm \frac{1}{2\sqrt[4]{p}}\left[\sqrt{p+2r} \pm \sqrt{p-2r}\right]. \tag{14}$$

Esempio numerico. — Applicando la (13), le radici dell'equazione

$$x^4 - \sqrt{18}\, x^2 + 2 = 0$$

sono date dalla

$$x = \pm \frac{1}{2}\left[\sqrt[4]{50} \pm \sqrt[4]{2}\right]$$

oppure, per la (14), dalla

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\left[\sqrt{5} \pm 1\right].$$

4. Considerando sempre di ogni radicale il solo segno positivo, si ha

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{b} + \sqrt{a^2}}. \tag{15}$$

Ma al radicale $\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{a^2}}$ si può applicare la trasformazione (6) se il prodotto $b(b-a^2)$ è un quadrato perfetto. Posto infatti

$$b(b-a^2) = k^2 \tag{16}$$

si ha

$$\sqrt{\sqrt{b}+\sqrt{a^2}} = \sqrt[4]{\frac{2b-a^2+2k}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b-a^2-2k}{4}}$$

e quindi

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt[4]{\frac{2b-a^2+2k}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2b-a^2-2k}{4}} \tag{17}$$

risulta cioè che *il radicale* $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, *in cui le quantità* a *e* b *sono razionali, si può decomporre nella somma di due radici quarte di quan-*

tità razionali, se il prodotto $b(b-a^2)$ *è un quadrato perfetto*, come ho dimostrato direttamente altrove. [1]

Possiamo anche qui osservare che, tenuto conto della (16), risultano vere le seguenti uguaglianze:

$$2b-a^2+2k=\frac{1}{b}(b+k)^2 \qquad 2b-a^2-2k=\frac{1}{b}(b-k)^2$$

e quindi la (17) si può scrivere

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt[4]{4b}}\left(\sqrt{b+k}+\sqrt{b-k}\right). \tag{18}$$

5. Per semplificare gli enunciati e le dimostrazioni dei teoremi che seguono osserviamo che, se le 2^n quantità

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \ldots a_{2^n-1} \quad a_{2^n} \qquad (n \text{ intero e } > 1)$$

sono legate dalle seguenti $n-1$ relazioni

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a_6}{a_5}=\dfrac{a_8}{a_7}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-3}}=\dfrac{a_{2^n}}{a_{2^n-1}} \\
(2) & \dfrac{a_3}{a_1}=\dfrac{a_7}{a_5}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-1}}{a_{2^n-3}} \\
(3) & \dfrac{a_5}{a_1}=\dfrac{a_{13}}{a_9}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-3}}{a_{2^n-7}} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(n-1) & \dfrac{a_{2^{n-2}+1}}{a_1}=\dfrac{a_{2^n-(2^{n-2}-1)}}{a_{2^{n-1}+1}}
\end{array}\right\} \tag{19}$$

la cui legge di formazione non ha bisogno di schiarimento alcuno, ponendo

$$S=a_1 \pm a_2+a_3 \pm a_4+\ldots+a_{2^n-1} \pm a_{2^n}$$

risulta

$$S=\frac{1}{a_1^{n-1}}(a_1 \pm a_2)(a_1+a_3)(a_1+a_5)\ldots(a_1+a_{2^{n-2}+1})(a_1+a_{2^{n-1}+1}). \tag{20}$$

Negli n fattori della (20) aventi la forma $(a_1 \pm a_i)$ i valori dell'indice i sono:

$$2 \qquad 2+1 \qquad 2^2+1 \ldots 2^{n-2}+1 \qquad 2^{n-1}+1 \tag{21}$$

come si può facilmente verificare.

È bene avvertire, inoltre, che dei due fattori (a_1+a_2) ed (a_1-a_2), che compariscono nella (20), bisogna scegliere il primo, per

$$S=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{2^n-1}+a_{2^n}$$

---

(1) *Periodico di Matematica*, maggio-giugno 1906.

ed il secondo, per

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2^n-1} - a_{2^n}.$$

In ciò che segue supporremo sempre n intero e maggiore di 1.

6. Teorema II. — *Il radicale*

$$\lambda = \sqrt{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2} + \ldots + \sqrt{a_{2^n-1}} \pm \sqrt{a_{2^n}}} \tag{22}$$

in cui le quantità a *sono razionali, si può trasformare nel prodotto di una radice quarta di quantità razionale per la somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle relazioni* (19).

2ª. *I prodotti* $a_1(a_1 - a_i)$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21), *siano dei quadrati perfetti* h^2, *siano cioè:*

$$a_1(a_1 - a_2) = h_1^2 \quad a_1(a_1 - a_3) = h_2^2 \ldots a_1(a_1 - a_{2^{n-1}+1}) = h_n^2. \tag{23}$$

Osserviamo infatti che, per la prima condizione imposta alle quantità a e tenuto conto di quanto è stato esposto al Numero precedente, il radicale (22) si può scrivere

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{a_1^{n-1}}} \sqrt{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2}}\sqrt{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_3}} \ldots \sqrt{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2^{n-1}+1}}}. \tag{24}$$

A ciascuno dei radicali della forma $\sqrt{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_i}}$, che compariscono nel secondo membro della (24), tenuto conto delle relazioni (23), si può applicare la trasformazione (7); si ha quindi

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_2}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{4a_1}}\left(\sqrt{a_1 + h_1} \pm \sqrt{a_1 - h_1}\right) \\
\sqrt{\sqrt{a_1} \pm \sqrt{a_3}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{4a_1}}\left(\sqrt{a_1 + h_2} + \sqrt{a_1 - h_2}\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sqrt{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2^{n-1}+1}}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{4a_1}}\left(\sqrt{a_1 + h_n} + \sqrt{a_1 - h_n}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Dalle (24) e (25) risulta allora

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{2n} a_1^{2n-1}}}\Big[(\sqrt{a_1 + h_1} \pm \sqrt{a_1 - h_1})(\sqrt{a_1 + h_2} + \sqrt{a_1 - h_2}) \ldots$$
$$\ldots (\sqrt{a_1 + h_n} + \sqrt{a_1 - h_n})\Big] \tag{26}$$

che dimostra il teorema, giacchè, come si può facilmente osservare, il secondo membro della (26) non è altro se non il prodotto di una radice quarta di quantità razionale per la somma di 2^n radicali semplici.

7. Così, per esempio, nel caso particolare di $n=2$, le relazioni (19) e (23) diventano rispettivamente

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_4}{a_3} \tag{27}$$

$$a_1(a_1-a_2)=h_1^2 \qquad a_1(a_1-a_3)=h_2^2 \tag{28}$$

e dalla (26) si ricava

$$\sqrt{\sqrt{a_1}\pm\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}\pm\sqrt{a_4}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{a^3_1}}\Big[\big(\sqrt{(a_1+h_1)(a_1+h_2)}\pm\sqrt{a_1-h_1)(a_1+h_2)}+$$

$$+\sqrt{(a_1+h_1)(a_1-h_2)}\pm\sqrt{(a_1-h_1)(a_1-h_2)}\Big]. \tag{29}$$

Esempio numerico. — Supposto

$$a_1=32 \quad a_2=30 \quad a_3=24 \quad a_4=22{,}5 \quad h_1=8 \quad h_2=16$$

risultano verificate le relazioni (27) e (28); dalla (29) si ha quindi

$$\sqrt{\sqrt{32}\pm\sqrt{30}+\sqrt{24}\pm\sqrt{22{,}5}}=\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\left[\sqrt{15}\pm 3+\sqrt{5}\pm\sqrt{3}\right].$$

8. Teorema III. — *Il radicale*

$$\mu=\sqrt{a_1\pm\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_{2^n-1}}\pm\sqrt{a_{2^n}}} \tag{30}$$

in cui le quantità a *sono razionali, si può decomporre nella somma di* 2^n *radicali semplici, se risultano verificate le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* a *siano legate dalle seguenti* $n-1$ *relazioni:*

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & \dfrac{a_2}{a^2_1}=\dfrac{a_4}{a_3}=\dfrac{a^6}{a^5}=\dfrac{a_8}{a_7}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-2}}{a_{2^n-3}}=\dfrac{a_{2^n}}{a_{2^n-1}} \\ (2) & \dfrac{a_3}{a^2_1}=\dfrac{a_7}{a_5}=\ldots=\dfrac{a_{2^n-1}}{a_{2^n-3}}\;. \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n-1) & \dfrac{a_{2^{n-2}+1}}{a_1^2}=\dfrac{a_{2^n-(2^{n-2}-1)}}{a_{2^{n-1}+1}}. \end{array}\right\} \tag{31}$$

(1)

2ª. *Le differenze* $a_1^2-a_i$, *in cui l'indice* i *assume i valori* (21), *siano dei quadrati perfetti* h^2, *siano cioè:*

$$a_1^2-a_2=h_1^2 \qquad a_1^2-a_3=h_2^2\ldots a_1^2-a_{2^{n-1}+1}=h_n^2. \tag{32}$$

Osserviamo, infatti, che le relazioni (32) si possono scrivere:

$$a_1^2(a_1^2-a_2)=(a_1h_1)^2 \quad a_1^2(a_1^2-a_3)=(a_1h_2)^2\ldots a_1^2(a_1^2-a_{2^{n-1}+1})=(a_1h_n)^2. \tag{33}$$

Inoltre, se al posto della quantità a_1 sostituiamo a_1^2, il radicale (22) si trasforma nel radicale (30). Quindi a quest'ultimo radicale potremo

(1) È facile osservare che le relazioni (31) sono analoghe alle (19), e si ottengono da queste sostituendo a_1^2 al posto di a_1.

applicare la trasformazione (26) solo quando risultino soddisfatte le relazioni (19) e (23) in cui, però, alla quantità a_1 venga sostituita a_1^2. Con tale sostituzione le (19) e (23) diventano analoghe alle (31) e (33); quindi dalla (26) risulta:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt[4]{2^{2n}\,a_1^{2(2n-1)}}}\Big[\big(\sqrt{a_1^2+a_1h_1}\pm\sqrt{a_1^2-a_1h_1}\big)\big(\sqrt{a_1^2+a_1h_2}+\sqrt{a_1^2-a_1h_2}\big)\ldots$$
$$\ldots\big(\sqrt{a_1^2+a_1h_n}+\sqrt{a_1^2-a_1h_n}\big)\Big]$$

ossia

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2^n\,a_1^{n-1}}}\Big[\big(\sqrt{a_1+h_1}\pm\sqrt{a_1-h_1}\big)\big(\sqrt{a_1+h_2}+\sqrt{a_1-h_2}\big)\ldots$$
$$\ldots\big(\sqrt{a_1+h_n}+\sqrt{a_1-h_n}\big)\Big]. \tag{34}$$

che dimostra il teorema.

9. Così, per esempio, nel caso particolare [1] di $n=2$, le relazioni (31) e (32) diventano rispettivamente

$$\frac{a_2}{a_1^2}=\frac{a_4}{a_3} \tag{35}$$

$$a_1^2-a_2=h_1^2 \quad a_1^2-a_3=h_2^2 \tag{36}$$

e dalla (34) si ricava quindi

$$\sqrt{a_1\pm\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}\pm\sqrt{a_4}}=\frac{1}{2\sqrt{a_1}}\Big[\sqrt{(a_1+h_1)(a_1+h_2)}\pm\sqrt{(a_1-h_1)(a_1+h_2)}+$$
$$+\sqrt{(a_1+h_1)(a_1-h_2)}\pm\sqrt{(a_1-h_1)(a_1-h_2)}\Big]. \tag{37}$$

Esempio numerico. — Supposto

$$a_1=12 \quad a_2=80 \quad a_3=108 \quad a_4=60 \quad h_1=8 \quad h_2=6$$

risultano verificate le relazioni (35) e (36); dalla (37) si ha allora

$$\sqrt{12\pm4\sqrt{5}+6\sqrt{3}\pm2\sqrt{15}}=\frac{1}{2}\Big[\sqrt{30}\pm\sqrt{6}+\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\Big].$$

§ 2. — Sulla trasformazione dei radicali continui.

10. Chiameremo *radicali continui* i radicali della forma

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}}. \tag{1}$$

In questo paragrafo ci proponiamo di trasformare il radicale continuo (1), in cui le quantità a sono tutte razionali, nella somma di due radici $(2n)^{me}$ di quantità razionali.

---

[1] La trasformazione di questo caso particolare fu esposta, con procedimento differente, dal prof. De Longchamps nel *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno V, fasc. VI.

È bene ricordare che di ogni radicale che abbia doppio segno, noi considereremo sempre solamente quello positivo.

11. Dimostriamo prima il seguente

LEMMA. — *Il radicale*

$$\lambda = \sqrt{\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}} \tag{2}$$

in cui le quantità a, b, c *sono razionali, si può trasformare nella somma di due radici* $(2n)^{me}$ *di quantità razionali, se risulta soddisfatta la seguente relazione:*

$$\left(\frac{b}{2^n}\right)^2 = ac. \tag{3}$$

Dalla (3) si ha infatti

$$b^2 = 2^{2n}\, ac$$

da cui

$$\sqrt[n]{b} = 2\sqrt[2n]{ac}.$$

Risulta allora

$$\lambda = \sqrt{\sqrt[n]{a} \pm 2\sqrt[2n]{ac} + \sqrt[n]{c}} = \sqrt{\left[\sqrt[2n]{a} \pm \sqrt[2n]{c}\right]^2}$$

ossia

$$\sqrt{\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} + \sqrt[n]{c}} = \sqrt[2n]{a} \pm \sqrt[2n]{c} \tag{4}$$

come volevasi dimostrare.

12. TEOREMA I. — *Il radicale continuo*

$$\mu = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}} \tag{5}$$

in cui le quantità a *sono razionali e positive, si può trasformare nella somma di due radici* $(2n)^{me}$ *di quantità razionali, se sono soddisfatte le seguenti condizioni:*

1ª. *Le quantità* $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ *siano legate dalle seguenti relazioni:*

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2} \qquad a_3 = \frac{a_2^2}{2} \ \ldots\ a_{n-1} = \frac{a^2_{n-2}}{2}. \tag{6}$$

2ª. *Il prodotto* $a_n(a_n - a^2_{n-1})$ *sia un quadrato perfetto* h^2, *sia cioè:*

$$a_n(a_n - a^2_{n-1}) = h^2. \tag{7}$$

Per $n = 2$ il radicale (5) diventa

$$\mu = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}}$$

e le relazioni (6) e (7) si riducono alla sola

$$a_2(a_2 - a_1^2) = h^2. \tag{8}$$

In questo caso il teorema è stato dimostrato al N. 4, e siamo giunti al seguente risultato:

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}} = \sqrt[4]{\frac{2a_2 - a_1^2 + 2h}{4}} + \sqrt[4]{\frac{2a_2 - a_1^2 - 2h}{4}}. \tag{9}$$

Osserviamo intanto che dalla (8) risulta

$$a_1^2 = \frac{a_2^2 - h^2}{a_2}$$

quindi si ha

$$\frac{2a_2 - a_1^2 + 2h}{4} = \frac{(h + a_2)^2}{4a_2} \qquad \frac{2a_2 - a_1^2 - 2h}{4} = \frac{(h - a_2)^2}{4a_2}$$

e perciò la (9) si può anche scrivere

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2}} = \sqrt[4]{\frac{(h + a_2)^2}{4a_2}} + \sqrt[4]{\frac{(h - a_2)^2}{4a_2}}. \tag{10}$$

Per $n = 3$, il radicale (5) e le relazioni (6) e (7) diventano rispettivamente

$$\mu = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}} \tag{11}$$

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2} \tag{12}$$

$$a_3 (a_3 - a_2^2) = h^2. \tag{13}$$

Al radicale $\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}$, tenuto conto della (13), si può applicare la trasformazione (10), si ha quindi

$$\sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}} = \sqrt[4]{\frac{(h + a_3)^2}{4a_3}} + \sqrt[4]{\frac{(h - a_3)^2}{4a_3}}$$

e perciò il radicale (11), ricordando l'avvertenza precedentemente fatta, si può scrivere:

$$\mu = \sqrt{\sqrt[4]{\frac{(h + a_3)^2}{4a_3}} + \sqrt[4]{a_1^4} + \sqrt[4]{\frac{(h - a_3)^2}{4a_3}}}. \tag{14}$$

Acciocchè al radicale (14) si possa applicare la trasformazione (4), è necessario che si verifichi la relazione analoga alla (3), è necessario, cioè, che risulti

$$\left(\frac{1}{16} a_1^4\right)^2 = \frac{1}{16a_3^2} [(h + a_3)(h - a_3)]^2$$

dalla quale, tenuto conto della (13), si ha

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2}$$

che è identica alla (12). Applicando allora la trasformazione (4) si ottiene

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3}}} = \sqrt[8]{\frac{(h + a_3)^2}{4a_3}} + \sqrt[8]{\frac{(h - a_3)^2}{4a_3}}. \tag{15}$$

Analogamente, per $n=4$ il radicale (5) e le relazioni (6) e (7) diventano rispettivamente

$$\mu=\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{a_4}}}} \tag{16}$$

$$a_2=\frac{a_1^2}{2} \qquad a_3=\frac{a_2^2}{2} \tag{17}$$

$$a_4(a_4-a_3^2)=h^2. \tag{18}$$

Osserviamo intanto che al radicale

$$\mu_1=\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{a_4}}}$$

si può applicare la trasformazione (15), poichè la seconda delle (17) e la (18) sono rispettivamente analoghe alle (12) e (13); si ha allora

$$\mu_1=\sqrt[8]{\frac{(h+a_4)^2}{4a_4}}+\sqrt[8]{\frac{(h-a_4)^2}{4a_4}}$$

e quindi il radicale (16) si può scrivere

$$\mu=\sqrt{\sqrt[8]{\frac{(h+a_4)^2}{4a_4}}+\sqrt[8]{a_1^8}+\sqrt[8]{\frac{(h-a_4)^2}{4a_4}}}. \tag{19}$$

Acciocchè al radicale (19) si possa applicare la trasformazione (4), è necessario che sia verificata la relazione analoga alla (3), che risulti cioè

$$\left(\frac{a_1^8}{2^8}\right)^2=\frac{1}{16a_4^2}\left[(h+a_4)(h-a_4)\right]^2$$

la quale, tenuto conto della (18), diventa

$$a_2=\frac{a_1^2}{2}$$

relazione identica alla prima delle (17). Si ha allora

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\sqrt{a_3+\sqrt{a_4}}}}=\sqrt[16]{\frac{(h+a_4)^2}{4a_4}}+\sqrt[16]{\frac{(h-a_4)^2}{4a_4}}. \tag{20}$$

Ammettiamo ora come dimostrato il teorema per un valore intero di $n>4$, e proponiamoci di dimostrare che esso è anche vero se ad n si sostituisce il valore $n+1$.

Supponiamo adunque che, se le quantità $a_1\, a_2 \ldots a_n$ sono legate dalle relazioni (6) e (7), il radicale (5) possa trasformarsi nella somma di due radicali analoghi a quelli che compariscono nei secondi membri delle (10), (15) e (20); supponiamo, cioè, che si abbia:

$$\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}=\sqrt[2^n]{\frac{(h+a_n)^2}{4a_n}}+\sqrt[2^n]{\frac{(h-a_n)^2}{4a_n}}. \tag{21}$$

Consideriamo ora il radicale continuo

$$\gamma = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1}}}}} \tag{22}$$

in cui le quantità razionali e positive a siano legate dalle relazioni

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2} \quad a_3 = \frac{a_2^2}{2} \ldots \quad a_{n-1} = \frac{a^2_{n-2}}{2} \quad a_n = \frac{a^2_{n-1}}{2} \tag{23}$$

$$a_{n+1}(a_{n+1} - a^2_n) = h^2. \tag{24}$$

È evidente che al radicale

$$\gamma_1 = \sqrt{a_2 + \sqrt{a_3 + \ldots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n-1}}}}}$$

si può applicare la trasformazione (21), poichè dalle (23) e (24) risulta che le quantità $a_2\, a_3 \ldots a_{n+1}$ soddisfano alle relazioni analoghe alle (6) e (7); si ha quindi

$$\gamma_1 = \sqrt[2^n]{\frac{(h + a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}} + \sqrt[2^n]{\frac{(h - a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}}$$

ed il radicale (22) si può scrivere allora

$$\gamma = \sqrt{\sqrt[2^n]{\frac{(h + a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}} + \sqrt[2^n]{(a_1)^{2^n}} + \sqrt[2^n]{\frac{(h - a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}}}. \tag{25}$$

Acciocchè al radicale (25) si possa applicare la trasformazione (4), è necessario che sia verificata la relazione analoga alla (3), che sia cioè

$$\left[\left(\frac{a_1}{2}\right)^{2^n}\right]^2 = \frac{1}{16a^2_{n+1}}\left[(h + a_{n+1})(h - a_{n+1})\right]^2$$

dalla quale, tenuto conto della (24), risulta

$$a_2 = \frac{a_1^2}{2}$$

che è identica alla prima delle (23). Applicando quindi al radicale (25) la trasformazione (4) si ha:

$$\sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}} = \sqrt[2^{n+1}]{\frac{(h + a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}} + \sqrt[2^{n+1}]{\frac{(h - a_{n+1})^2}{4a_{n+1}}} \tag{26}$$

come volevasi dimostrare.

Il teorema resta così completamente dimostrato.

13. Se nell'enunciato del teorema precedente, al posto della quantità a_1 poniamo $-a_1$, le relazioni (6) e (7) restano inalterate, ma il radicale (5) prende la forma

$$\mu_1 = \sqrt{-a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}. \tag{27}$$

Ricordiamo intanto che, se risulta verificata la relazione (8), si ha: [1]

$$\sqrt{-a_1+\sqrt{a_2}}=\sqrt[4]{\frac{2a_2-a_1^2+2h}{4}}-\sqrt[4]{\frac{2a_2-a_1^2-2h}{4}} \qquad (28)$$

quindi, con un procedimento analogo a quello fatto precedentemente si può dimostrare il seguente

Teorema II. — *Il radicale continuo*

$$\sqrt{-a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}} \qquad (29)$$

in cui le quantità a *sono razionali e positive, si può trasformare nella differenza di due radici* $(2n)^{me}$ *di quantità razionali, se risultano soddisfatte le relazioni* (6) *e* (7).

Il risultato al quale si giunge è il seguente:

$$\sqrt{-a_1+\sqrt{a_2+\ldots+\sqrt{a_{n-1}+\sqrt{a_n}}}}=\sqrt[2n]{\frac{(h+a_n)^2}{4a_n}}-\sqrt[2n]{\frac{(h-a_n)^2}{4a_n}}. \qquad (30)$$

Lascio al lettore la cura di fare la dimostrazione.

Esempi numerici. — Per $n=3$, supposto

$$a_1=\pm 4 \qquad a_2=8 \qquad a_3=72 \qquad h=25$$

risulta

$$\sqrt{\pm 4+\sqrt{8+\sqrt{72}}}=\sqrt[8]{32}\pm\sqrt[8]{8}.$$

Per $n=4$, supposto

$$a_1=\pm 4 \qquad a_2=8 \qquad a_3=32 \qquad a_4=2592 \qquad h=2016$$

si ha

$$\sqrt{\pm 4+\sqrt{8+\sqrt{32+\sqrt{2592}}}}=\sqrt[16]{2048}\pm\sqrt[16]{32}$$

e così via di seguito.

Salvatore Composto.

(Continua).

[1] Cfr. la mia Nota pubblicata nel *Periodico di Matematica*, maggio-giugno 1906.

OSSERVAZIONI SOPRA DUE ARTICOLI DEL SIGNOR AMERIGO BOTTARI

1. Nell'articolo " Soluzioni intere dell'equazione pitagorica ecc. „ pubblicato nel fascicolo Novembre-Dicembre 1907 di questo stesso *Periodico*, il sig. A. Bottari di Fano dimostra, per mezzo di considerazioni assai laboriose, il teorema seguente: *Le soluzioni intere (positive) dell'equazione*

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

ci sono date dalle formole:

$$x=u+w,\quad y=v+w,\quad z=u+v+w, \tag{2}$$

nelle quali si ha:

$$u=p^2\mathrm{K},\quad v=2^{2s-1}\mathrm{P}^2\mathrm{K},\quad w=2^s p\mathrm{PK}, \tag{3}$$

s *e* K *essendo due numeri interi qualsiasi,* p *e* P *essendo due numeri dispari qualsiansi, purchè primi fra loro.*

Tale risultato potevasi ottenere con tutta facilità nel modo seguente.

2. Dalla (1) si vede tosto che deve essere $x<z, y<z, z<x+y$; sicchè potremo porre $x=z-v,\ y=z-u,\ z=x+y-w$. Risolvendo tale sistema rispetto ad x, y, z si hanno le (2). Sostituendo nella (1) i valori dati dalle (2), si ha la relazione

$$w^2=2uv, \tag{4}$$

che manifestamente è la condizione necessaria e sufficiente perchè le (2) siano soluzioni della (1).

Dalla (4) risulta che i numeri u e v non possono ammettere lo stesso numero di fattori 2; scambiandosi, al più, uno coll'altro i due numeri x, y e corrispondentemente i due numeri u e v, potremo supporre che u ammetta meno fattori 2 di v; indicando con K il m. c. d. di u e v, possiamo dunque porre:

$$u=a\mathrm{K} \quad \text{e} \quad v=b\mathrm{K}, \tag{5}$$

dove a è un numero dispari primo con b. Ricordando la (4), si ha di qui

$$w^2=2ab\mathrm{K}^2, \tag{6}$$

dalla qual relazione si vede appunto che a deve essere il quadrato di un numero dispari p e che b deve avere la forma $2^{2s-1}\mathrm{P}^2$, dove s

è un intero qualsiasi, mentre P è un numero dispari primo con p. Sostituendo nelle (5) e nella (6) tali valori di a e di b, si hanno tosto le (3).

3. Lo stesso sig. Bottari, nell'articolo " Soluzioni intere in progressione aritmetica ecc. ", pubblicato dal *Periodico* nel fascicolo Gennaio-Febbraio 1907, giunge ai risultati seguenti: 1°. *Se* x, y, z *sono tre numeri interi (positivi) in progressione aritmetica tali che sia*

$$x^n + y^n = z^n, \tag{1}$$

si ha necessariamente $n = 1$ *ed*

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3},$$

oppure $n = 2$ *ed*

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}.$$

2°. *Se* x, y, z, t *sono quattro numeri interi (positivi) in progressione aritmetica tali che sia*

$$x^n + y^n + z^n = t^n, \tag{2}$$

si ha necessariamente $n = 1$ *ed*

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} = \frac{t}{4},$$

oppure $n = 3$ *ed*

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{t}{6}.$$

Anche a questo risultato l'A. giunge con lunghe e faticose considerazioni; mentre si può ottenere brevemente e semplicemente, come ora vedremo.

4. Consideriamo anzitutto l'equazione (1).

Si ponga $x = y - a$, $z = y + a$. La (1) assume allora la forma

$$y^n + aP = aQ. \tag{3}$$

Trascurando, al più, un divisore comune ad x, y, z, si può supporre y ed a primi fra loro. Dalla (3) abbiamo allora:

$$a = 1, \quad x = y - 1, \quad z = y + 1. \tag{4}$$

Se n è dispari, dalla (1) e dalle (4) si ha:

$$y^n = 2\binom{n}{1}y^{n-1} + 2\binom{n}{3}y^{n-3} + 2\binom{n}{5}y^{n-5} + \ldots + 2\binom{n}{n-2}y^2 + 2.$$

Si vede di qui che non può essere $n \geqq 3$, giacchè altrimenti si avrebbe $y > 1$ ed y^2 divisore di 2, il che è assurdo. In tal caso si deve dunque avere $n = 1$; e conseguentemente $y = 2$, $x = 1$, $z = 3$.

Se n è pari, dalla (1) e dalle (4) si ha

$$y^{n-1}=2ny^{n-2}+2\binom{n}{3}y^{n-4}+2\binom{n}{5}y^{n-6}+\ldots+2\binom{n}{n-3}y^{2}+2n.$$

Si vede di qui che non può essere $n \geqslant 4$, giacchè altrimenti si avrebbe $2n$ multiplo di y e minore di esso, il che è assurdo. In tal caso si deve dunque avere $n=2$; e conseguentemente $y=4$, $x=3$, $z=5$.

5. Consideriamo invece l'equazione (2).

Si ponga $x=y-a$, $z=y+a$, $t=y+2a$. La (2) assume allora la forma

$$2y^{n}+2aP=2aQ. \tag{5}$$

Trascurando, al più, un divisore comune ad x, y, z, t, si può supporre y ed a primi fra loro. Dalla (5) abbiamo allora:

$$a=1, \quad x=y-1, \quad z=y+1, \quad t=y+2. \tag{6}$$

Facilmente si vede che n non può esser pari. Si ricordi a tal uopo che le potenze dei multipli di 3 sono esse pure multipli di 3 e che le potenze pari dei numeri non divisibili per 3 sono multipli di 3 aumentati di 1. Siccome uno ed uno solo dei numeri consecutivi x, y, z è multiplo di 3, così la somma $x^{n}+y^{n}+z^{n}$ è in ogni caso un multiplo di 3 più 2; mentre t^{n} non può mai essere tale.

Se $n=1$, dalla (2) e dalla (6) si deduce ovviamente $x=1$, $y=2$, $z=3$, $t=4$.

Supponendo n dispari e $\geqslant 3$, dalla (2) e dalle (6) si ha una relazione della forma

$$2y^{2}P_{1}+2ny=2y^{2}Q_{1}+ny2^{n-1}+2^{n}, \tag{7}$$

dalla quale si vede intanto che deve essere $y=2^{h}$, con $h \leqslant n-1$. Sostituendo nella (7) e dividendo per 2^{h+1}, abbiamo allora

$$2^{h}P_{1}+n=2^{h}Q_{1}+n2^{n-2}+2^{n-1-h}; \tag{8}$$

donde si deduce che, essendo n dispari, si ha necessariamente $h=n-1$. Con tale sostituzione la (8) diventa

$$2^{n-1}P_{1}+(n-1)=2^{n-1}Q_{1}+n2^{n-2}$$

e ci dice che $n-1$ deve essere divisibile per 2^{n-2}. Siccome ciò può avvenire solo per $n=3$, così vediamo che in tal caso si deve avere

$$h=n-1=2, \quad y=2^{h}=4, \quad z=y+1=5, \quad t=y+2=6.$$

Cattaneo Paolo.

SULLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONI (1)

(I) $x = 1 + \{1 + (1 + x^2)^2\}^2$;

(II) $x = 1 + [1 + \{1 + (1 + x^2)^2\}^2]^2$;

(III) $x = y + \{y + (y + x^2)^2\}^2$.

da W. H. Young. Sc. D., F. R. S.

I.

Evidentemente le radici dell'equazione

$$x = 1 + (1 + (1 + x^2)^2)^2 \tag{1}$$

hanno questa proprietà, che se a è una radice, un'altra radice è

$$1 + a^2.$$

Del resto le radici dell'equazione

$$x = 1 + x^2 \tag{2}$$

soddisfano l'equazione (1).

Restano da considerare le radici di (1) che non siano radici di (2).

Sia x_1 una tal radice. Allora ce n'è un'altra

$$x_2 = 1 + x_1^2,$$

eppure un'altra

$$x_3 = 1 + x_2^2. \tag{3}$$

Si nota che

$$x_1 = 1 + x_3^2.$$

Si vede subito che x_1, x_2, x_3 sono tutte diverse fra loro e dalle radici di (2).

Finora abbiamo parlato di cinque delle radici, restano altre tre.

Sia x_4 una di queste tre, verrà esclusa la possibilità che x_4 sia uguale ad una delle precedenti; se non è evidente, lo vedremo nel seguito.

Troviamo nello stesso modo dall'x_4 due altre radici x_5 e x_6, come sopra, dall'x_1, le x_2 o x_3.

Dalle (3) abbiamo

$$\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2,$$

donde

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 1,$$

(1) V. *Periodico di Matematica*, Anno XXII, fasc. IV, pag. 190, quistioni proposte 726, 727.

donde

$$\frac{x_1 - x_3}{x_3^2 - x_1^2} = x_1 + x_2 + 1,$$

ossia

$$(x_1 + x_3)(x_1 + x_2 + 1) = -1.$$

Mettendo

$$p_1 = -(x_1 + x_2 + x_3),$$
$$p_2 = x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2,$$
$$p_3 = -x_1x_2x_3$$

segue dall'equazione precedente

$$x_1^2 + p_2 + x_1 + x_3 = -1 = x_1^2 - x_2,$$

ossia

$$p_2 = p_1. \tag{A}$$

Essendo

$$-1 = x_1^2 + p_2 + x_1 + x_3 = x_2^2 + p_2 + x_2 + x_1 = x_3^2 + p_2 + x_3 + x_2,$$

abbiamo

$$-3 = \Sigma x^2 + 3p_2 + 2\Sigma x = p_1^2 - 2p_2 + 3p_2 - 2p_1 = p_1^2 + p_2 - 2p_1,$$

donde

$$p_1^2 - p_1 + 3 = 0. \tag{B}$$

Dalle (3) abbiamo ancora

$$x_2 - x_3 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = (x_1 + x_2)(x_3^2 - x_1^2) =$$
$$= (x_1 + x_2)(x_3 + x_1)(x_3 - x_1) = (x_1 + x_2)(x_3 + x_1)(x_2^2 - x_3^2).$$

Segue, x_2 e x_3 essendo diverse,

$$1 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1). \tag{4}$$
$$= -(p_1 + x_1)(p_1 + x_3)(p_1 + x_2) = -p_1^3 - p_1^2(x_1 + x_2 + x_3) - p_1p_2 - x_1x_2x_3,$$

donde

$$p_3 = 1 + p_1p_2 = 1 + p_1^2 = -2 + p_1. \tag{C}$$

Dalle (A), (B), (C) segue che x_1, x_2, x_3 sono radici dell'equazione

$$x^3 + p_1x^2 + p_1x + p_1 - 2 = 0,$$

dove p_1 è una radice dell'equazione quadratica

$$p_1^2 - p_1 + 3 = 0.$$

Evidentemente avremo x_1, x_2, x_3 prendendo una di queste radici, e x_4, x_5, x_6, prendendo l'altra.

II.

Si vede subito che

a) tutte le radici di

$$x = 1 + (1 + x^2)^2$$

sono radici della (II);

b) nessuna radice di

$$x = 1 + (1 + (1 + x^2)^2)^2$$

soddisfa la (II), fuori quelle che soddisfano pure

$$x = 1 + x^2;$$

c) se x è una radice, $1 + x^2$ è un'altra radice.

Fuori delle radici date dalla (*a*), abbiamo 12 radici che si aggruppano in tre gruppi di quattro, legate fra loro dalla (*b*).

Considerando $x_2 - x_3$ abbiamo l'analoga della (4), ossia

$$1 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_4)(x_4 + x_1).$$

Considerando $x_2 - x_4$ troviamo

$$-1 = (x_1 + x_3)(x_4 + x_2), \tag{5}$$

oppure

$$\begin{aligned} -x_1 &= x_1(x_1 + x_3)(x_4 + x_2) = (x_2 - 1 + x_1x_3)(x_4 + x_2) \\ &= x_2^2 - x_2 + x_2x_4 - x_4 + x_1x_3(x_4 + x_2) \\ &= x_3 - 1 - x_2 + x_2x_4 - x_4 + x_1x_3(x_4 + x_2), \end{aligned}$$

donde

$$(x_2 + x_4) - (x_1 + x_3) = -1 + x_1x_3(x_2 + x_4) + x_2x_4.$$

Analogamente

$$(x_1 + x_3) - (x_2 + x_4) = -1 + x_2x_4(x_1 + x_3) + x_1x_3.$$

Sommando, e mettendo

$$p_1 = -\sum_1^4 x_i, \quad p_2 = \sum_1^4 x_ix_j, \quad p_3 = -\sum_1^4 x_ix_jx_k, \quad p_4 = x_1x_2x_3x_4,$$

abbiamo

$$0 = -2 - p_3 + x_2x_4 + x_1x_3,$$

oppure, usando la (5),

$$p_3 = p_2 - 1; \tag{D}$$

Abbiamo anche:

$$-p_3 = x_1x_3(x_2 + x_4) + x_2x_4(x_1 + x_3),$$

o

$$-p_3 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)(x_1x_3 + x_2x_4) - x_1x_3(x_1 + x_3) - x_2x_4(x_2 + x_4),$$

donde

$$\begin{aligned} p_3 &= +p_1(1 + p_2) + x_3(x_2 - 1) + x_1(x_4 - 1) + x_4(x_3 - 1) + x_2(x_1 - 1) \\ &= p_1(1 + p_2) - 1 + p_1 \end{aligned}$$

da (5). Segue

$$p_3 = 2p_1 - 1 + p_1p_2 \tag{E}$$

o adoperando (D)

$$p_2 = 2p_1 + p_1p_2. \tag{E'}$$

Ma evidentemente

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \Sigma x^2 + 2p_2 \\ &= -4 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2p_2 \\ &= -4 - p_1 + 2p_2 \end{aligned}$$

donde

$$2p_2 = p_1^2 + p_1 + 4. \tag{F}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}2p_4 &= (x_1x_3 + x_2x_4)^2 - x_1^2x_3^2 - x_2^2x_4^2\\ &= (p_2+1)^2 - (x_2-1)(x_4-1) - (x_3-1)(x_1-1)\\ &= (p_2+1)^2 - (p_2+1) - 2 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4\\ &= p_2^2 + p_2 - 2 - p_1.\end{aligned} \tag{G}$$

Le equazioni (D), (E) o (E'), (F) e (G) determinano p_1, p_2, p_3, p_4 e allora x_1, x_2, x_3, x_4 sono date come radici di

$$\Theta^4 + p_1\Theta^3 + p_2\Theta^2 + p_3\Theta + p_4 = 0.$$

Possiamo esprimere p_1, p_2, p_3, p_4 come funzioni di p_2.

Abbiamo

$$p_1 = \frac{p_2}{2+p_2}, \quad p_3 = p_2 - 1, \quad p_4 = \frac{1}{2}\left(p_2^2 + p_2 - 2 - \frac{p_2}{2+p_2}\right)$$

e p_2 soddisfa l'equazione

$$p_2^3 + p_2^2 - 5p_2 - 8 = 0.$$

Possiamo anche esprimere p_1, p_2, p_3, p_4 come funzioni di p_1 cioè

$$p_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4)$$

$$p_3 = p_2 - 1 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 2)$$

$$p_4 = \frac{1}{8}(p_1^2 + p_1 + 4)^2 + \frac{1}{4}(p_1^2 + p_1 + 4) - 1 - \frac{1}{2}p_1.$$

In ogni modo avremo evidentemente tre quaderne di radici del tipo

$$x_1 \,.\, x_2 \,,\, x_3 \,,\, x_4 \,.$$

Le radici si aggruppano allora così in cinque gruppi

(I) y_1, y_2 dove $y_1 = 1 + y_1^2$ e $y_2 = 1 + y_2^2$;

(II) z_1, z_2 dove $z_2 = 1 + z_1^2$ e $z_1 = 1 + z_2^2$ sono radici di $z^2 + z + 2 = 0$,

(III) x_1 x_2 x_3 x_4 dove $x_2 = 1 + x_1^2$, $x_3 = 1 + x_2^2$, $x_4 = 1 + x_3^2$, $x_1 = 1 + x_4^2$

(IV) x'_1 x'_2 x'_3 x'_4 ecc.

(V) x''_1 x''_2 x''_3 x''_4 ecc.

e queste (III), (IV), (V) sono le radici di

$$\Theta^4 + p_1\Theta^3 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4)\Theta^2 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 2)\Theta + \\ + \frac{1}{2}(p_1^2 - p_1 + 6) = 0,$$

dove p_1 è una radice di

$$-4p_1 = (p_1 - 1)(p_1^2 + p_1 + 4),$$

cioè di

$$p_1^3 + 7p_1 - 4 = 0,$$

di cui una radice sola è reale.

III.

$$x = y + \{ y + (y + x^2)^2 \}^2.$$

Si ha come nel § I

$$1 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1).$$

Questo ci dà facilmente

$$\left.\begin{array}{l} 1 + y = x_3 + (p_2 - y)(x_2 + x_3) + x_2 x_3 \\ 1 + y = x_1 + (p_2 - y)(x_3 + x_1) + x_3 x_1 \\ 1 + y = x_2 + (p_2 - y)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 \end{array}\right\}. \qquad \text{(L)}$$

Dalle due prime sottraendo

$$0 = x_3 - x_1 + (p_2 - y)(x_2 - x_1) + x_3(x_2 - x_1),$$

ossia

$$p_2 - y + x_3 = \frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_1},$$

ossia

$$1 + p_2 - y + x_3 = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2 - x_1} = -(x_2 + x_1),$$

donde

$$p_2 = p_1 + y - 1. \qquad \text{(A')}$$

Anche sommando le (L) si ha

$$\begin{aligned} 3 + 3y &= -p_1 + 2(p_2 - y)(-p_1) + p_2 \\ &= -p_1 - 2p_1 p_2 + 2p_1 y + p_2, \end{aligned}$$

donde

$$2p_1^2 + 2p_1 y - 2p_1 + 3y + 3 - 2p_1 y + p_1 - p_1 - y + 1 = 0$$

ovvero

$$2p_1^2 + 2y - 2p_1 + 4 = 0$$

ovvero

$$p_1^2 - p_1 + y + 2 = 0. \qquad \text{(B')}$$

Come prima avremo

$$p_3 = 1 + p_1 p_2 = 1 + p_1^2 + p_1(y - 1) = p_1 y - 1 - y.$$

Finalmente l'equazione delle x_1, x_2, x_3 è

$$X^3 + p_1 X^2 + (p_1 + y - 1) X + p_1 y - 1 - y = 0,$$

dove p_1 è una radice della (B'). L'altra radice ci dà x_4, x_5, x_6.

Le altre due radici della (III) sono le radici dell'equazione

$$x = y + x^2.$$

SULLA TEORIA DEI LIMITI

Nota di S. Pincherle

È una osservazione ovvia quella che le proposizioni sui limiti si dimostrano con maggiore facilità e con mezzi più potenti quando si abbia ad operare su variabili continue, che non quando si tratti di successioni discrete. L'introduzione, nelle dimostrazioni di simili teoremi, di una variabile continua, più che un artificio di opportunità, si presenta molte volte come naturale conseguenza del fatto che il limite da determinarsi o di cui si vuole provare l'esistenza sarà definito come una determinata sezione del continuo.

Nella presente nota mi propongo di dare, in base a questo concetto, una nuova dimostrazione di un teorema fondamentale della teoria dei limiti, dimostrazione che mi sembra, in confronto delle altre, presentare un maggiore grado di chiarezza e gettare maggiore luce sull'intima ragione dell'identità che si tratta di stabilire.

1. Si suppone che il lettore conosca la definizione di *limite* di una successione: diremo *regolare* una successione avente limite. Ricorderemo poi la definizione di *massimo* e *minimo limite.* [1] Data una successione di numeri reali

$$a_0, a_1, \dots a_n, \dots, \tag{1}$$

massimo limite di essa è un numero λ tale che, ε essendo positivo e piccolo a piacere, per tutti i valori di n superiori ad un indice assegnabile $\overline{n}$ sia

$$a_n < \lambda + \varepsilon,$$

mentre per infiniti valori

$$n_1, n_2, \dots n_r, \dots$$

dell'indice, sia

$$a_{n_r} > \lambda - \varepsilon.$$

Analogamente, minimo limite della (1) è un numero μ tale che per ε positivo preso a piacere, sia

$$a_n > \mu - \varepsilon$$

per tutti gli indici n superiori ad un indice assegnabile $\overline{n}$, mentre per infiniti valori n_s dell'indice è

$$a_{n_s} < \mu + \varepsilon.$$

---

(1) *La plus grande o la plus petite des limites* secondo il CAUCHY. V. PRINGSHEIM, *Encykl. der Math. Wissenschaften*, I. A. 3, p. 70. In PEANO (*Formulaire*, 1901, p. 131) vi è la citazione del passo di CAUCHY.

Ogni successione ammette un massimo limite, che può anche essere $+\infty$, ed un minimo limite che può essere $-\infty$. Se λ e μ coincidono, la successione (1) è regolare.

2. Ricordato ciò, si abbia la successione di numeri positivi

$$a_0,\ a_1, \ldots\ a_n, \ldots, \tag{1}$$

e la successione di numeri positivi, crescenti e tendenti all'infinito

$$\rho_0, \rho_1 \ldots . \rho_n, \ldots \tag{2}$$

Si supponga che la successione

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{\rho_{n+1}-\rho_n}} \tag{3}$$

sia regolare, e si indichi con λ il suo limite. Essendo dunque ε positivo e piccolo a piacere, si avrà un numero $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ sia

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < (\lambda + \varepsilon)^{\rho_{n+1}-\rho_n}, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > (\lambda - \varepsilon)^{\rho_{n+1}-\rho_n};$$

onde, essendo n_1 un intero fisso e maggiore di $\bar{n}$, ed n un intero arbitrario maggiore di n_1, sarà:

$$a_n < \frac{a_{n_1}}{(\lambda+\varepsilon)^{\rho_{n_1}}}(\lambda+\varepsilon)^{\rho_n}$$

e

$$a_n > \frac{a_{n_1}}{(\lambda-\varepsilon)^{\rho_{n_1}}}(\lambda-\varepsilon)^{\rho_n}.$$

Se dunque si forma $a_n x^{\rho_n}$, dove x è una variabile positiva, questo prodotto tenderà, per $n=\infty$, a zero per ogni x minore di $\frac{1}{\lambda+\varepsilon}$, e all'infinito per ogni x maggiore di $\frac{1}{\lambda-\varepsilon}$. E poichè ε è piccolo a piacere, ne viene che $\frac{1}{\lambda}$ costituisce una sezione nell'insieme dei numeri positivi, tale che $a_n x^{\rho_n}$ tende a zero per tutti i valori di x minori, e all'infinito per tutti i valori maggiori; e ciò qualunque sia la successione

$$n_1,\ n_2,\ n_3, \ldots$$

di valori interi indefinitamente crescenti che si attribuisce ad n.

Ciò posto, si consideri la successione

$$a_n^{\frac{1}{\rho_n}}. \tag{4}$$

Se essa non è regolare, avrà un massimo limite che indicheremo con μ ed un minimo limite che indicheremo con μ_1. Si avrà dunque per ogni n da un indice in poi

$$a_n < (\mu + \varepsilon)^{\rho_n}$$

e per una successione di indici $n_1, n_2, \ldots n_r, \ldots$:

$$a_{n_r} > (\mu - \varepsilon)^{\rho_{n_r}}.$$

Da ciò risulta che per $x < \frac{1}{\mu + \varepsilon}$ la $a_n x^{\rho_n}$ tende a zero, e per $x > \frac{1}{\mu - \varepsilon}$ la $a_{n_r} x^{\rho_{n_r}}$ tende all'infinito; μ dunque non può differire da λ.

Ma si ha pure per ogni n da un indice in poi

$$a_n > (\mu_1 - \varepsilon)^{\rho_n}$$

e per una successione di indici $m_1, m_2, \ldots m_s, \ldots$

$$a_{m_s} < (\mu_1 + \varepsilon)^{\rho_{m_s}}$$

onde $a_n x^{\rho_n}$ tende all'infinito per $x > \frac{1}{\mu_1 - \varepsilon}$ e la successione $a_{m_s} x^{\rho_{m_s}}$ tende a zero per $x < \frac{1}{\mu_1 + \varepsilon}$; dunque anche μ_1 non può differire da λ. Pertanto μ e μ_1 coincidono fra di loro e con λ; cioè:

" Se la successione (3) è regolare, è regolare anche la (4) e tende " allo stesso limite ". [1]

3. Se ora mutiamo a_n in e^{α_n}, discende subito dalla proposizione precedente il noto teorema dello Stolz [2]

" se la successione

$$\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\rho_{n+1} - \rho_n}$$

" è regolare, e la successione delle ρ_n è crescente e tende all'infinito, " la successione

$$\frac{\alpha_n}{\rho_n}$$

" è pure regolare e tende allo stesso limite; " proposizione, come è noto, ricca di conseguenze.

4. Nel caso delle $\rho_n = n$, il numero λ che si è considerato al § 2 è l'inverso del raggio di convergenza della serie

$$\Sigma \alpha_n x^n,$$

ed è facile vedere che la stessa proprietà ha luogo per ogni successione di ρ_n positive, crescenti e tendenti all'infinito, nel caso in cui il *minimo limite* delle differenze $\rho_{n+1} - \rho_n$ non sia zero.

---

(1) Cfr. Cahen, *Ann. de l'Ec. Normale*, S. III, T. XI, 1894, p. 88, dove però si trova nell'enunciato del teorema una inesattezza, forse per errore di stampa.

(2) *Math. Ann.*, T. XIV, p. 232 (1879). Cfr. Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 98 (1894).

5. Con considerazioni non dissimili, si possono dimostrare i seguenti teoremi, di cui lasciamo la dimostrazione al lettore:

" Se esistono i limiti positivi di $\frac{1}{\rho_n} \log \sum_1^n a_\nu$ e di $\frac{1}{\rho_n} \log a_n$, questi " sono uguali se il minimo limite di $\rho_{n+1} - \rho_n$ non è zero.

" Se esistono i suddetti limiti, e $\rho_{n+1} - \rho_n$ tende a zero come $\frac{k}{n}$, il " limite della prima espressione supera di $\frac{1}{k}$ quello della seconda. (1)

PICCOLE NOTE

Un problema di analisi combinatoria.

Nel numero di Gennaio-Febbraio 1908 del *Periodico di Matematica*, il professore Pesci risolve il problema seguente di analisi combinatoria:

" Trovare il numero N, ch'è il numero delle combinazioni con ripetizione che si possono formare con tre numeri intieri, due dei quali variano da 1 a m e il terzo varia da 1 a $2m$, escludendo tutte quelle combinazioni nelle quali ciascuno dei tre numeri in esse compresi non sia minore della somma degli altri due ".

Mi pare che la soluzione seguente sia la più semplice:

Il numero cercato è, in altre parole, il numero dei diversi sistemi dei valori che possono avere a, b, c rispondenti alle condizioni

$$1 \leqslant a \leqslant m \qquad (1) \qquad\qquad c < a + b \qquad (4)$$
$$1 \leqslant b \leqslant m \qquad (2) \qquad\qquad a < b + c \qquad (5)$$
$$1 \leqslant c \leqslant 2m \qquad (3) \qquad\qquad b < a + c. \qquad (6)$$

Per non contare due volte due sistemi che si distinguono soltanto per l'ordine dei dati basta aggiungere la condizione

$$a \leqslant b \leqslant c. \tag{7}$$

(1) In una nota pubblicata dal compianto CESÀRO nel *Bulletin des sciences mathématiques* per
il 1890 (pag. 114), l'esimio analista mostrava di ritenere artificioso l'uso delle serie di potenze per
la dimostrazione di teoremi sui limiti, per esempio per quello sul prodotto di due serie sempli-
cemente convergenti. Non mi sembra però che questo uso, sebbene indiretto, possa riguardarsi
come poco conforme alla natura della questione. Una serie di potenze $\Sigma a_n x^n$ è così intimamente
legata alla successione $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$, dei suoi coefficienti, da poterla rappresentare quasi come
un punto di uno spazio di cui la successione rappresenta il sistema delle coordinate; inoltre
il vantaggio di potersi giovare di una variabile continua, nella serie o nel suo termine gene-
rale $a_n x^n$, fornisce, come si è già avvertito, mezzi più efficaci di dimostrazione e vi conferisce
simmetria e chiarezza. E poichè ho ricordato quella nota del Cesàro, mi par opportuno di aggiun-
gere come precisamente in essa si contengono due risultati assai degni di attenzione: vi si trova
indicato infatti, per la prima volta, quel modo di intendere la somma di una serie indeterminata
che, generalizzato e perfezionato poi dal BOREL, ha acquistato diritto di cittadinanza nella scienza;
inoltre, vi è dato un geniale concetto di grado d'interminazione delle serie, cui vennero riattac-
cate notevoli considerazioni dal KNOPP (*Multiplikation divergenten Reihen; Sitz. bericht der Berl.
Math. Gesellschaft*, dicembre 1907, p. 1) e di cui una interessante applicazione, più recentemente
ancora, è stata data dal FÉJER (*Comptes rendus*, 2 febbraio 1908).

Le condizioni (5) e (6) possono dedursi da (7); (3) da (4), (1) e (2). Rimangono

$$1 \leqslant a \leqslant b; \quad 1 \leqslant b \leqslant m \quad \text{e} \quad b \leqslant c < a + b$$

quest'ultima può scriversi $b \leqslant c \leqslant a + b - 1$.

Supponiamo a e b costanti. Il numero dei c compatibili con le condizioni sarà

$$\sum_{c=b}^{c=a+b-1} 1 = (a + b) - (b - 1) = a.$$

Variando a, avremo il numero delle combinazioni di a e c possibili

$$\sum_{a=1}^{a=b} \sum_{c=b}^{c=a+b-1} 1 = \sum_{a=1}^{a=b} a = \binom{b+1}{2}.$$

In fine, se variamo b, otterremo

$$N = \sum_{b=1}^{b=m} \sum_{a=1}^{a=b} \sum_{c=b}^{c=a+b-1} 1 = \sum_{b=1}^{b=m} \binom{b+1}{2} = \binom{m+2}{3}$$

ossia

$$N = \frac{m(m+1)(m+2)}{6},$$

o, se $m = \frac{n}{2}$,

$$N = \frac{n(n+2)(n+4)}{48},$$

che è precisamente il numero ottenuto dal prof. Pesci.

G. Rabinovice
studente dell'Università di Odessa.

QUISTIONI PROPOSTE

744. Se in un tetraedro due spigoli opposti hanno eguale lunghezza a, e altri due spigoli opposti eguali lunghezza b:

1° la congiungente i punti medî degli altri due spigoli è la loro normale comune;

2° gli angoli diedri agli spigoli eguali sono eguali;

3° dette α, β le misure di questi diedri, si ha

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta};$$

4° nel quadrilatero sghembo formato dalle coppie di spigoli opposti eguali, le normali nei quattro vertici ai piani dei due lati che vi concorrono giacciono sopra un iperboloide e il birapporto di queste generatrici è $(m, m', n, n') = \frac{a^2}{b^2}$.

L. Bianchi.

745. La cissoide di Diocle $x(x^2+y^2)=2ay^2$ è polare reciproca di sè stessa rispetto al cerchio

$$x^2+y^2+2a(x-a)=0,$$

rispetto alla iperbole equilatera

$$x^2-y^2+2a(x-a)=0$$

e alle due parabole $y^2 \pm 6a\sqrt{3}\,.(x-a)=0$.

Ognuna di queste quattro coniche ha doppio contatto con la cissoide.

Se denotiamo con Z la cuspide, con Y il punto $(2a, 0)$ e con C e Γ le intersezioni respettive della tangente cuspidale con una corda di contatto e colla corrispondente corda comune (che unisce i due punti di semplice intersezione della conica con la cissoide) si ha

$$\frac{Z\Gamma}{Y\Gamma}:\frac{ZC}{XC}=-\frac{1}{2}\,.$$

746. La parabola semicubica $y^2=x^3$ è polare reciproca di sè stessa rispetto ad ognuna delle ∞^1 coniche concentriche

$$3\lambda x^2+y^2=4\lambda^3,$$

dove λ è un parametro variabile. Ognuna di tali coniche ha doppio contatto colla cubica sopra una retta variabile c e la taglia ulteriormente sopra un'altra γ, parallela a c. Il rapporto delle distanze di c e γ dalla cuspide è -2.

747. La cubica iperbolica $xy^2=1$ è polare reciproca di sè stessa rispetto a ognuna delle iperbole

$$4x^2-\lambda^3y^2=3\lambda^2,$$

dove λ è parametro variabile. Queste iperbole hanno ognuna doppio contatto colla cubica, e il rapporto delle distanze dall'asintoto d'inflessione, della corda di contatto e dell'altra corda comune è eguale a $-\frac{1}{2}$.

748. La parabola cubica $y=x^3$ è polare reciproca di sè medesima rispetto alle iperbole

$$-3\lambda^4x^2+4y^2=\lambda^6,$$

λ essendo un parametro variabile. Ognuna di queste iperbole ha doppio contatto con la cubica sopra una retta c passante per l'origine, e la interseca sopra un'altra retta γ pure passante pel flesso. Se denotiamo con y la retta che unisce l'origine con la cuspide e con la z la tangente stazionaria (asse delle x) il rapporto anarmonico $(yzc\gamma)$ è eguale a $-\frac{1}{2}$.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

M. D'OCAGNE. — *Calcul Graphique et Nomographie*. Paris, Doin. — (L. 5).

Il noto editore DOIN ha intrapresa, sotto la direzione del Dott.r TOULOUSE (della *École des Hautes-Études*), la pubblicazione di una grande enciclopedia scientifica, che sarà divisa in quaranta sezioni e che comprenderà, circa, mille volumi. Questi volumi, nella maggior parte illustrati, avranno il formato in *18-jésus*, saranno rilegati e consteranno di quattrocento pagine circa; e il prezzo stabilito (di cinque lire al volume) è davvero molto modesto, tanto più che, come risulta dal saggio che abbiamo sott'occhio, rilegatura, carta, caratteri e figure nulla lasciano a desiderare dal punto di vista della solidità, della chiarezza e dell'eleganza.

Il carattere scientifico dell'opera è così esposto dall'editore. *Actuellement, les livres de science se divisent en deux classes bien distinctes: les livres destinés aux savants spécialisés, le plus souvent in compréhensibles pour tous les autres, faute de rappeler au début des chapitres les connaissances nécessaires, et surtout faute de définir les nombreux termes techniques incessamment forgés, ces derniers rendant un mémoire d'une science particulière inintelligible à un savant qui en a abandonné l'étude durant quelques années: et ensuite les livres écrits pour le grand public, qui sont sans profit pour des savants et même pour des personnes d'une certaine culture intellectuelle.* L'Encyclopédie scientifique *a l'ambition de s'adresser au public le plus large. Le savant spécialisé est assuré de rencontrer dans les volumes de sa partie une mise au point très exacte de l'état actuel des questions; car chaque Bibliothèque, par ses techniques et ses monographies, est d'abord fait avec le plus grand soin pour servir d'instrument d'études et de recherches à ceux qui cultivent la science particulière qu'elle représente, et sa devise pourrait être:* Par les savants, pour les savants. *Quelques-uns de ces livre seront même, par leur caractère didactique, destinés à devenir des ouvrages classique et à servir aux études de l'enseignement secondaire ou supérieur. Mais, d'autre part, le lecteur non spécialisé est certain de trouver, tous les fois que cela sera nécessaire, au seuil de la section — dans un ou plusieurs volumes de généralités, — et au seuil du volume, — dans un chapitre particulier, — des données qui formeront une véritable introduction le mettant à même de poursuivre avec profit sa lecture. Un vocabulaire technique, placé, quand il y aura lieu, à la fin du volume, lui permettra de connaître toujours les sens des mots spéciaux.* Un indice, che uscirà dopo la pubblicazione di un certo numero di volumi e che sarà periodicamente ristampato, rinvierà il lettore ai differenti volumi ed alle pagine dove si trovano trattati i casi particolari in questione.

Delle quaranta sezioni, quelle che possono direttamente interessare i nostri lettori, sono quattro:

1° **Matematica**, 2° **Meccanica** (dirette dal Prof. DRACH, della Università di Poitiers);

3° **Matematica applicata**, 4° **Meccanica applicata e Genio** (dirette dal Professore D'OCAGNE, dell'*École des Ponts et Chaussées*, e dell'*École polytechnique*).

Il volume che ci proponiamo di esaminare, rapidamente, è uno dei *diciotto* volumi che devono formare la terza delle quattro sezioni ora citate; di questi diciotto volumi

tre costituiscono la **Scienza del Calcolo**, e sono: *Calcolo numerico, Calcolo grafico e Nomografia, Calcolo meccanico*;

quattro costituiscono l'**Analisi applicata**, e sono: *Teoria e pratica delle operazioni finanziarie, Teoria matematica delle assicurazioni, Economia razionale, Statistica matematica*;

undici costituiscono la **Geometria applicata**, e sono: *Metrologia, Astronomia geodetica, Navigazione, Geodesia elementare, Geodesia sferoidica, Geodesia superiore, Topografia, Metrofotografia, Cartografia, Geometria descrittiva, Prospettiva.*

La nuova opera del D'OCAGNE consta, come dice il suo titolo, di due parti, la cui riunione in un solo volume ci pare molto logica, perchè gli abbachi della Nomografia non sono, in sostanza, che soluzioni grafiche fatte una volta per sempre e per tutti i casi utili.

È noto che il *Calcolo grafico*, il quale per il creatore della *Statica Grafica* non era che una premessa alla *Statica* stessa, ha poi preso uno sviluppo tanto considerevole da richiedere, per il suo svolgimento, un grosso volume da sè; (1) ma lo svolgimento dato dall'autore alla prima parte è molto più generale e molto più sintetico di quelli comunemente noti.

Nella introduzione si richiamano alcune nozioni fondamentali di *Geometria analitica* (coordinate cartesiane e tangenziali, principio di dualità, coordinate parallele, trasformazione omografica), che sono poi di grande utilità, specialmente nella esposizione dei principî fondamentali della *Nomografia* moderna.

Nel primo capitolo *(Aritmetica e Algebra grafiche)*, dopo un utilissimo e opportuno paragrafo sulle scale metriche, tratta rapidamente delle operazioni fondamentali dell'*Aritmetica* (forse un po' troppo *rapidamente*, perchè vi manca, p. es., l'elevazione a potenza e l'estrazione di radice). Poi passa alla risoluzione dei sistemi lineari; e qui troviamo di notevole un procedimento sistematico per l'applicazione del metodo ideato dal MASSAU. Indi tratta della risoluzione di una equazione di grado qualunque coi noti metodi di LILL e di BELLAVITIS; cui aggiunge l'interpolazione parabolica grafica (che applica alla rappresentazione dei risultati di osservazioni fisiche) e un interessante cenno sulle imagini logaritmiche del MEHMKE.

Il secondo capitolo *(Integrazione grafica)* è ancora più moderno e più interessante del primo: esso potrebbe, principalmente, considerarsi come una esposizione, sapientemente e didatticamente ordinata, degli importanti risultati raggiunti dal MASSAU e da lui pubblicati in una serie di memorie, che cominciarono nel 1873 (2). Vi troviamo di notevole:

nella prima parte del capitolo *(Proprietà fondamentali delle curve integrali)*, il paragrafo sulla ordinata media di un arco parabolico (sul quale argomento l'autore pubblicò già una notevole memoria originale);

nella seconda parte *(Tracciato grafico degli integrali)*, una elegantissima costruzione per rettificare approssimativamente un arco di circonferenza (anche su questo argomento l'autore pubblicò recentemente una breve nota originale);

---

(1) Un esempio notevolissimo è dato dal secondo volume della traduzione francese delle *Lezioni di Statica Grafica* del FAVARO: questo volume, specialmente per le importanti aggiunte del traduttore, occupa ora più di quattrocento pagine.

(2) In Italia, la prima pubblicazione su questo argomento crediamo sia quella del SAVIOTTI *Nota sui metodi grafici di integrazione.* — Giornale del Genio civile. Marzo 1882.

nella terza parte *(Integrali parabolici)*, la generazione d'un integrale parabolico per dilatazione del suo poligono integrante (concetto nuovissimo dovuto all'autore);

nella quarta parte finalmente *(Equazioni differenziali del primo ordine)*, il tracciato approssimativo degli integrali (che pure crediamo dovuto, almeno in massima parte, all'autore stesso).

Passiamo ora alla seconda parte del volume, cioè alla *Nomografia*, la cui elevazione al grado di scienza è dovuta all'autore stesso. Egli, da quando (nel 1884) ebbe la geniale e feconda idea degli abbachi a punti allineati, continuò indefessamente (e così continua tuttora) a raccogliere, a sviluppare, a generalizzare tutto quanto si riferisce ad ogni genere di tavole grafiche; e così dalle sue mani, in quindici anni appena (1), potè uscire questa nuova scienza, che sta prendendo uno sviluppo sempre maggiore (2).

L'esposizione è un po' più semplice e un po' più didattica che nel precedente suo *Traité*; inoltre l'opera è arricchita di tutti i più notevoli risultati, raggiunti nelle applicazioni e nella teoria, nei nove anni ormai trascorsi, dacchè il *Traité* stesso vide la luce.

Nel primo capitolo (terzo di tutto il volume), dopo aver parlato delle scale metriche, cartesiane, trasformate, proiettive, passa a parlare degli abbachi cartesiani a tre variabili e del loro frazionamento, dell'anamorfosi generale e dell'anamorfosi per sistemi di cerchi, degli abbachi più generali a linee concorrenti, e, finalmente, dell'uso dei trasparenti a due e a tre indici, mostrando come questi ultimi si applichino agli abbachi esagonali del LALLEMANDE.

Nel secondo capitolo, dopo le generalità relative al metodo dei punti allineati (basati sul principio di dualità), parla dei nomogrammi di genere 0 (aventi cioè tutte le scale rettilinee) e di genere 1 (aventi una sola scala curvilinea): tale argomento, a ragione, è ampiamente svolto, perchè è indubbiamente questo il tipo di abbachi che ha dato luogo al maggior numero di applicazioni. Aggiunge poscia una nuova teoria (3): quella dei valori critici, la quale rende inutili molte laboriose trasformazioni algebriche, cui prima si doveva necessariamente ricorrere. Viene quindi ai nomogrammi di genere 2 e 3; e qui parla degli abbachi conici del SOREAU, i quali si possono rendere circolari con una trasformazione omografica. (A questo proposito però ci permettiamo di dire, che questa trasformazione non ci pare *évidemment très favorable en pratique*, perchè, per molte ragioni, può invece essere spesso opportuno passare invece dalla forma circolare alla forma conica). Come applicazione notevolissima del metodo dei punti allineati, riferisce qui un elegante procedimento di interpolazione empirica, dovuta al capitano BATAILLER: questa applicazione e le altre già fatte del LAFAY e dal SOREAU, alla ricerca delle funzioni empiriche, mettono in luce vivissima l'importanza pratica della *Nomografia*. Il capitolo finisce colla teoria dei nomogrammi ad allineamenti multipli a scale

---

(1) Il grande *Traité de Nomographie* è del 1899.

(2) A titolo d'onore, vogliamo qui citare, come uno dei più efficaci e innovatori collaboratori del d'OCAGNE, l'Ing. SOREAU: egli, nelle sue due memorie

Contribution a la théorie et aux applications de la Nomographie (Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils, Agosto 1901),

La capacité et la valance en Nomographie (16 Maggio 1906),

la prima delle quali occupa più di trecento pagine, ha proposti nuovi procedimenti, nuove generalizzazioni, veramente importanti e originali.

(3) Questa teoria fu primitivamente esposta dall'autore nella nota " *Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4* ", pubblicata nel *Bulletin de la Société de Mathématique* del 1907.

rettilinee parallele, a scale circolari concentriche (del SOREAU), a scale coniche: questi ultimi anche per equazioni a quattro variabili di ordine nomografico superiore a 4.

Nel terzo capitolo parla dei nomogrammi a indice qualunque, il primo tipo dei quali si ha negli abbachi a squadra del GOEDSEELS; a cui seguono i nomogrammi a punti equidistanti. Vengono poi i nomogrammi a quote mobili; e in questo tipo rientrano l'ordinario regolo logaritmo, gli abbachi polari, gli abbachi a immagini logaritmiche.

E il volume finisce con una magistrale classificazione, che abbraccia non solo tutti gli abbachi fin qui conosciuti e utilizzati, ma anche tutti quelli che potranno essere costruiti e utilizzati in seguito.

Una sola osservazione, di secondaria importanza, ci pare di poter fare al modo col quale tutta l'opera è svolta: l'autore si è forse un po' troppo attenuto a quel che (al dire dell'editore) potrebbe essere la divisa della *Encyclopédie scientifique (Par le savants pour le savants)*: noi crediamo che, se alcuni argomenti (integrazione grafica, abbachi a scale parallele...) fossero stati trattati anche in modo elementare, si sarebbero forse aiutati e incoraggiati quei lettori, che della matematiche non si occupano specialmente.

Possa questa nuova opera pregevolissima [1] far accrescere il numero dei cultori della *Nomografia*: terminiamo ripetendo questo augurio, perchè aumenta sempre più in noi la convinzione che la *Nomografia*, oltre essere utile ai pratici, possa anche fornire ai teorici nuovi e fecondi argomenti di studio.

G. PESCI.

SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA

Il 1° Febbraio fu inviata a tutti i professori di matematica delle scuole medie e superiori d'Italia la circolare che qui riproduciamo:

" L'associazione *Mathesis* non solo vive da lungo tempo nella più assoluta inerzia, ma nemmeno ha fatto alcun atto positivo verso l'effettuazione dell'idea di trasformarla, annunziato fino dall'ottobre del 1906. Abbiamo perciò perduto ogni fede nella possibilità di vederla risorta e trasformata in maniera conforme alle vedute nostre e di molti nostri Colleghi.

" Non abbiamo però perduta la fede nello spirito d'associazione dei cultori della nostra disciplina nè nell'efficacia di una forte Associazione, che, con un'opera assidua e tenace, di stimolo ai più lenti e d'incoraggiamento ai più solerti, usufruendo di tutte le più preziose

(1) E fra i suoi pregi è notevole anche quello delle numerose citazioni bibliografiche, perchè queste poche volte si trovano nei trattati francesi.

energie ora latenti, studi e risolva le questioni, a cui più strettamente si connette il progresso dell'insegnamento della matematica nelle scuole italiane.

" Noi non dimentichiamo che in un tempo, già relativamente remoto, quando le condizioni morali ed economiche degli insegnanti erano molto più tristi d'adesso, i professori di matematica delle scuole medie furono fra i primi a riunirsi in Associazione con scopi puramente pedagogici, scopi pei quali si adunarono in numerosi convegni regionali e anche in congressi nazionali, a Torino, a Livorno, a Napoli, agitandovi problemi, tutti riflettenti la Scuola e l'insegnamento.

" Un preconcetto, ancora rimasto in taluno, è andato scomparendo nei più, e si è fatta strada l'idea dell'opportunità che non una barriera separi gli insegnanti delle scuole medie da quelli delle scuole superiori, ma gli uni e gli altri si trovino uniti nello studio delle questioni interessanti il progresso della matematica e dell'insegnamento di essa.

" È noto ormai [1] uno schema, di carattere presso che definitivo, delle proposte della Commissione Reale riguardanti l'assetto dello studio della matematica nelle *Nuove scuole medie*; e già un primo esame di tale schema ha dimostrato che non si tratta di semplici trasposizioni di materia, bensì sopratutto di novità di metodi e d'indirizzo. Su queste proposte è necessario che si raccolga la massima attenzione dei competenti e che si apra un largo dibattito d'idee, disciplinato però da una forte Associazione che, autorevole pel numero e per la qualità dei propri soci, sappia ben coordinare e validamente propugnare il resultato delle discussioni.

" Perciò noi rivolgiamo un appello a tutti i cultori della matematica, tanto a coloro che insegnano nelle scuole medie o superiori di qualsiasi grado, quanto a coloro che non appartengono all'insegnamento, affinchè vogliano stringersi in una nuova Associazione che proponiamo chiamare *Società Italiana di Matematica*, salvo ad aggiungervi il sottotitolo di *Mathesis*, quando siasi sciolta quella ancora esistente, di nome se non di fatto.

" E fin d'ora indiciamo un Congresso da tenersi, secondo quanto risulterà dal *Referendum* degli aderenti, o in Roma, durante le vacanze pasquali del prossimo aprile, in giorni da fissarsi, immediatamente susseguenti a quelli, 5-11 aprile, in cui, pure in Roma, sarà tenuto il IV Congresso internazionale matematico, oppure a Firenze, nel settembre di quest'anno, in giorni susseguenti o precedenti a quelli nei quali, pure a Firenze, sarà tenuto il II Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

" Per tale Congresso proponiamo, per ora, due soli temi:

" 1°. *Costituzione della " Società Italiana di Matematica " — Discussione e approvazione dello Statuto.*

" 2°. *Discussione delle proposte della Commissione Reale per la riforma della Scuola media, riguardanti l'insegnamento della matematica nelle nuove Scuole medie.*

---

(1) Cfr. *Bollettino di Matematica* di Bologna, Anno VI, n. 10-11-12.

" Si vedrà in seguito, dipendentemente dalle adesioni raccolte anche fra i professori universitari, se non convenga aggiungere un terzo tema: *Sulla preparazione degli insegnanti di matematica delle Scuole medie*, che ci sembra avere acquistato un vero carattere di attualità e di urgenza, adesso specialmente, dopo l'instituzione degli esami nei concorsi alle cattedre delle Scuole medie.

" Gli aderenti sono pregati di inviare *entro il 29 febbraio* l'unita scheda d'adesione firmata e accompagnata da L. 5 all'indirizzo del prof. Giulio Lazzeri - Livorno, Via dell'Indipendenza, N. 7; e di cancellare in essa le parole *Firenze* (settembre), se preferiscono che il Congresso si faccia a Roma in aprile, o le parole *Roma* (aprile) se preferiscono che il Congresso abbia invece luogo a Firenze in settembre. In tal modo sarà rimessa la scelta dell'epoca e sede del Congresso al voto della maggioranza degli aderenti. Senza altra tassa, gli aderenti potranno partecipare al Congresso e riceverne gli atti.

" Nello stesso tempo, si fa preghiera agli aderenti di far conoscere le loro proposte relative allo Statuto della nuova Società ed al secondo argomento posto all'ordine del giorno del Congresso. Tutte le proposte che perverranno entro il 29 febbraio saranno trasmesse ai relatori che ci riserbiamo di nominare coll'incarico di preparare, in tempo utile, una breve relazione su ciascuno dei temi del Congresso.

" Ed abbiamo terminato, colla lusinga che questo nostro appello non cadrà nel vuoto, e col proposito di fare quanto ci sarà possibile per la fondazione e il buon andamento della nuova Società, fino a che non sia stato provveduto alla direzione di essa, secondo le norme dello Statuto, che sarà per approvare il prossimo Congresso.

Amodeo Federico (R. I. T., *Napoli*). — Bettazzi Rodolfo (R. L. Cavour, *Torino*). — Bonaventura Paolo (R. I. N., *Livorno*). — Candido Giacomo (R. L., *Galatina*). — Castellano Filiberto (R. A. M., *Torino*). — Ceretti Umberto (R. S. T., *Pistoia*). — Chelotti Abigaille (R. S. N., *Livorno*). — Conti Alberto (R. S. N. Morandi-Manzolini, *Bologna*). — Fazzari Gaetano (R. L. Umberto I, *Palermo*). — Gallucci Generoso (R. L. Genovesi, *Napoli*). — Lazzeri Giulio (R. A. N., *Livorno*). — Lucarini Camillo (R. G., *Livorno*). — Nannei Enrico (R. I. T., *Bari*). — Palatini Francesco (R. I. T., *Torino*). — Perna Alfredo (R. I. T., *Napoli*). — Pesci Giuseppe (R. A. N., *Livorno*).

A questo appello hanno risposto fino ad ora 85 professori, i nomi dei quali sono riportati nell'elenco che segue a pag. 239.

Molti di essi insieme alla loro scheda d'adesione hanno inviato lettere esprimenti la più viva simpatia per l'iniziativa della costituzione della nuova società, e i più fervidi voti, perchè questa sorga forte e vitale, perchè, riunendo le molte energie disseminate in ogni parte d'Italia, le faccia convergere ad un solo nobilissimo scopo, quello del miglioramento delle nostre scuole.

Molti altri hanno promesso la loro adesione non appena la società sia definitivamente costituita ed abbia assorbito gli avanzi della vecchia e agonizzante MATHESIS.

Degli 85 aderenti 62 hanno indicato Firenze come sede del proposto congresso, 16 hanno prescelto Roma, 7 non hanno dato alcuna indicazione. Pel voto della grande maggioranza adunque resta stabilito che il congresso per la costituzione della nuova società sarà tenuto a Firenze nel settembre prossimo contemporaneamente a quello della SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE.

Perciò resta prorogato a tutto il 15 agosto prossimo il tempo utile per l'invio della quota d'iscrizione al Congresso; ma si fa viva preghiera a tutti coloro che accettano in massima le idee esposte nella surriferita circolare d'inviare al più presto un cenno d'adesione.

Confidiamo che l'intervallo di circa sei mesi che ci separa dall'epoca del congresso verrà speso da tutti gli aderenti ad assicurarne la riuscita, sia procurando nuove adesioni dei loro amici e conoscenti, sia inviando proposte concrete da discutere nel congresso stesso.

Intanto però, siccome è da ritenersi che molti di essi si troveranno a Roma dal 5 all'11 aprile in occasione del *Congresso internazionale di matematica*, verrà organizzata in quei giorni una riunione preliminare allo scopo di iniziare uno scambio d'idee che, insieme con le proposte mandate da tutti gli altri aderenti, serva di guida ai promotori della costituenda società per stabilire il programma definitivo del congresso e procedere alla nomina di coloro che dovranno riferire sui tre temi posti all'ordine del giorno, cioè:

1°. *Costituzione della Società italiana di matematica. Discussione e approvazione dello Statuto.*

2°. *Discussione delle proposte della commissione reale per la riforma della scuola media, riguardante l'insegnamento della matematica nella nuova scuola media.*

3°. *Preparazione degli insegnanti di matematica delle scuole medie.*

Tutti gli aderenti saranno tenuti informati di quanto verrà successivamente stabilito per mezzo del *Periodico di matematica*, o del *Bollettino di matematica* o per mezzo di appositi avvisi.

Noi confidiamo che attorno al primo importante nucleo di aderenti alla nuova Società vorranno, quanto prima, stringersi tutti i cultori della matematica, i quali sentendo altamente l'importanza civile e morale del loro ufficio nella moderna società, consapevoli dei grandissimi risultati che si possono conseguire con le forti ed estese organizzazioni, vorranno cooperare attivamente al progresso della scienza e della scuola.

IL COMITATO PROMOTORE.

PRIMA NOTA

DI ADERENTI ALLA SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA.

1. **Amaldi** prof. **Italo**, R. Istituto Tecnico — *Torino*.
2. **Amanzio** prof. **Domenico**, R. Istituto Tecnico — *Napoli*.
3. **Amodeo** prof. **Federico**, R. Istituto Tecnico — *Napoli*.
4. **Apreda** prof. **Domenico**, R. Istituto Nautico — *Piano di Sorrento*.
5. **Arzelà** prof. **Cesare**, R. Università — *Bologna*.
6. **Ascoli** prof. **Lelio**, R. Istituto Tecnico — *Livorno*.
7. **Aussant-Carà** prof. **Paolo**, R. Istituto Tecnico — *Livorno*.
8. **Balestra** prof. **Galileo**, R. Istituto Tecnico — *Pesaro*.
9. **Bandini** prof. **Silvio**, R. Scuola Normale femm. — *Padova*.
10. **Barbaro** prof. **Luigi**, R. Scuola Tecnica " Aloysio-Iuvara " — *Messina*.
11. **Berzolari** prof. **Luigi**, R. Università — *Pavia*.
12. **Bettarini** prof. **Giuseppe**, R. Istituto Tecnico — *Venezia*.
13. **Bettazzi** prof. **Rodolfo**, R. Liceo " Cavour " — *Torino*.
14. **Bettini** prof. **Bettino**, Liceo Pareggiato — *Osimo*.
15. **Bisson-Minio** prof. **Ersilia**, R. Scuola Normale femm. — *Belluno*.
16. **Bonadonna** prof. **Pasquale**, R. Scuola Tecnica — *Piazza Armerina*.
17. **Bonaventura** prof. **Paolo**, R. Istituto Nautico — *Livorno*.
18. **Bongini** prof. **Ugo**, R. Scuola Tecnica — *Siena*.
19. **Borio** prof. **Agostino**, R. Liceo — *Aosta*.
20. **Bottari** prof. **Amerigo**, R. Liceo — *Spoleto*.
21. **Bustelli** prof. **A. M.** — *Roma*.
22. **Calò** prof. **Benedetto**, R. Istituto Tecnico — *Napoli*.
23. **Candido** prof. **Giacomo**, R. Liceo — *Galatina*.
24. **Cardoso Laynes** prof. **Giulio**, R. Scuola Tecnica — *Savona*.
25. **Carrone** prof. **Claudio**, R. Liceo — *Siracusa*.
26. **Castellano** prof. **Filiberto**, R. Accademia Militare — *Torino*.
27. **Castelli** prof. **Pietro**, R. Istituto Tecnico — *Ancona*.
28. **Catania** prof. **Sebastiano**, R. Istituto Tecnico — *Catania*.
29. **Cattaneo** prof. **Paolo**, R. Scuola Tecnica — *Lendinara*.
30. **Ceccaroni Guido**, R. Ginnasio " Galilei " — *Firenze*.
31. **Ceretti** prof. **Umberto**, Direttore della R. Scuola Tecnica — *Pistoia*.
32. **Chelotti** prof. **Abiguille**, R. Scuola Normale femm. — *Livorno*.
33. **Ciabò** prof. **Giorgio**, Preside del R. Istituto Tecnico — *Pavia*.
34. **Conti** prof. **Alberto**, R. Scuola Normale " Morandi-Manzolini " — *Bologna*.
35. **Cubaju** prof. **Antonio**, R. Liceo-Ginnasio " Capece " — *Maglie*.
36. **D'Amico** ing. **Gaetano**, R. Istituto Tecnico — *Cagliari*.
37. **Da Porto** prof. **Alcide**, R. Liceo — *Forlì*.
38. **Del Prete** prof. **Oreste**, R. Scuola Tecnica — *Bari*.
39. **Doria** prof. **Giov. Andrea** — *Rocca Maggiore*.
40. **Enriquez** prof. **Federigo**, R. Università — *Bologna*.

41. **Fanti** ing. **Arnaldo**, R. Università — *Pisa.*
42. **Fazzari** prof. **Gaetano**, R. Liceo " Umberto I " — *Palermo.*
43. **Florio** prof. **Salvatore**, R. Scuola Normale femm. " P. Fonseca " — *Napoli.*
44. **Galiano** prof. **Gennaro**, R. Liceo " Genovesi " — *Napoli.*
45. **Gallucci** prof. **Generoso**, R. Liceo " Genovesi " — *Napoli.*
46. **Ghezzi** ing. **Teodosio**, R. Scuola Tecnica — *Lovere.*
47. **Gigli** prof. **Duilio**, R. Liceo — *Sassari.*
48. **Guerra** prof. **Michele**, Direttore R. Scuola Tecnica — *Gaeta.*
49. **Larice** prof. **Ines**, R. Scuola Normale femm. — *Padova.*
50. **Lazzeri** prof. **Giulio**, R. Accademia Navale — *Livorno.*
51. **Lo Vetere Gallo** ing. prof. **Vincenzo**, R. Istituto Tecnico — *Teramo.*
52. **Lucarini** prof. **Camillo**, R. Ginnasio — *Livorno.*
53. **Lugaro** prof. **Enrico**, R. Ginnasio — *Castellamare del Golfo.*
54. **Marasco** prof. **G. B.**, R. Scuola Tecnica — *Pesaro.*
55. **Marcialis** prof. **Efisio**, R. Scuola Normale masch. *Città S. Angelo.*
56. **Marcolongo** prof. **Roberto**, R. Università — *Napoli.*
57. **Marseglia** prof. **Natale**, R. Liceo — *Acireale.*
58. **Martini Zuccagni** prof. **Aroldo** — *Livorno*
59. **Misani** prof. **Massimo**, Preside R. Istituto Tecnico — *Udine.*
60. **Moglia** prof. **Giovanni**, R. Scuola Normale — *Lecce.*
61. **Mola** prof. **Giacomo**, R. Liceo — *Campobasso.*
62. **Mossini** prof. **Dirce**, insegnante nelle RR. Scuole Normali — *Guastalla.*
63. **Nannei** prof. **Enrico**, Preside R. Istituto Tecnico — *Bari.*
64. **Natucci** prof. **Alpinolo**, Scuola Tecnica Pareggiata — *Amelia.*
65. **Nicoletti** prof. **Onorato**, R. Università — *Pisa.*
66. **Palatini** prof. **Francesco**, R. Istituto Tecnico — *Torino.*
67. **Pascal** prof. **Ernesto**, R. Università — *Napoli.*
68. **Pesci** prof. **Giuseppe**, R. Accademia Navale — *Livorno.*
69. **Pincherle** prof. **Salvatore**, R. Università — *Bologna.*
70. **Pizzarello** prof. **Domenico**, R. Liceo — *Reggio Emilia.*
71. **Repetto** prof. **Giuseppe**, R. Scuola Normale femm. — *Sassari.*
72. **Retali** prof. **Virginio**, R. Liceo " Beccaria " — *Milano.*
73. **Rocca** prof. **L.** — *Bologna.*
74. **Rossi** prof. **Camillo**, R. Istituto Tecnico — *Napoli.*
75. **Scarpis** prof. **Umberto**, R. Liceo " Minghetti " — *Bologna.*
76. **Severi** prof. **Francesco**, R. Università — *Padova.*
77. **Sforza** prof. **Giuseppe**, R. Istituto Tecnico — *Reggio Emilia.*
78. **Sicuro** prof. **Adolfo**, R. Scuola Tecnica " Aloysio-Iuvara " — *Messina.*
79. **Soschino** prof. **Carlo**, R. Liceo — *Pesaro.*
80. **Spinelli** ing. **Michele**, R. Scuola Tecnica — *Ruvo di Puglia.*
81. **Tavani** prof. **Modestino**, Ins. nelle RR. Scuole Normali — *Fara S. Martino.*
82. **Tonelli** prof. **Andrea** — *Pontremoli.*
83. **Vailati** prof. **Giovanni**, Ins. nei RR. Istituti Tecnici — *Roma.*
84. **Veneroni** prof. **Emilio**, R. Istituto Tecnico — *Pavia.*
85. **Veronese** senatore prof. **Giuseppe**, R. Università — *Padova.*

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 Marzo 1908

IV CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

SOTTO L'ALTO PATRONATO DI S. M. IL RE

Dal 5 al 12 aprile ha avuto luogo in Roma l'annunziato congresso internazionale dei matematici. Sia per il numero e la qualità degli intervenuti, sia per la quantità ed il valore delle comunicazioni, esso è stato di un'importanza veramente eccezionale.

Presero parte ai lavori del Congresso circa 550 scienziati, accompagnati da circa 180 signore. Tutti i paesi più dotti come la Germania, l'Inghilterra, la Francia, gli Stati Uniti erano largamente rappresentati dai più insigni cultori della scienza, ed anche gli altri paesi come la Russia, la Grecia, la Svizzera, il Belgio, il Giappone erano degnamente rappresentati.

Il Comitato organizzatore, composto del senatore BLASERNA, presidente, del prof. CASTELNUOVO, segretario generale, del prof. REINA, tesoriere, e dei proff. CERRUTI, DI LEGGE, PITTARELLI, TONELLI, VOLTERRA, aveva con una attività e diligenza mirabili, curando i più minuti particolari, tutto predisposto affinchè le accoglienze agli illustri ospiti stranieri fossero degne dei medesimi e della città *caput mundi*. Ed i loro sforzi furono coronati dal più lusinghiero successo, perchè tutti gli scienziati esteri espressero ripetutamente ai colleghi italiani la loro soddisfazione per le accoglienze ricevute, ed infine l'illustre prof. Darboux nell'ultima seduta si fece interprete dei sentimenti di tutti, rivolgendo un caldo ringraziamento a coloro che avevano cooperato alla riuscita del Congresso, cominciando da S. M. il Re e terminando ai giovani studenti che avevano coadiuvato il Comitato organizzatore in luogo di impiegati.

Sede del congresso fu il palazzo della R. Accademia dei Lincei, già Corsini: certamente non si poteva trovare in Roma un locale più adatto sia per la bellezza e comodità degli ambienti, sia per le tradizioni di quella illustre Accademia. Unico inconveniente era l'ubicazione un po' eccentrica e lontana dalle linee tramviarie. Ma anche a togliere questo inconveniente il Comitato aveva provveduto, mettendo a disposizione dei congressisti nelle ore delle sedute un ottimo servizio di omnibus e vetture automobili.

Crediamo far cosa grata ai nostri lettori, pubblicando la cronaca dei lavori compiuti dalle 4 sezioni del congresso, e più particolarmente e con maggiore ampiezza di quelli compiuti dalla quarta sezione, destinata alle questioni filosofiche, storiche e didattiche.

Seduta inaugurale.

Lunedì 6 aprile alle 10 nella Sala degli Orazi e Curiazi del Campidoglio e all'Augusta presenza di S. M. il Re fu solennemente inaugurato il quarto Congresso internazionale dei Matematici.

S. M. il Re fu ricevuto al suo arrivo da S. E. il ministro della P. I., dal Sindaco di Roma, Sig. Ernesto Nathan; dal Senatore Professore P. Blaserna, Presidente, e dagli altri Membri del Comitato organizzatore del Congresso.

Dopo che S. M. e i presenti si furono seduti, il Sindaco così salutò i numerosi intervenuti:

Per chi minutamente indaga, come per chi cerca a grandi tratti ed in sintesi la storia della civiltà, i recenti scavi del Foro Romano dovuti alle geniali intuizioni del Comm. Boni, offrono un singolare interesse. I ricordi della gente italica preromana, popolante i sette colli, costituiscono nei sepolcreti, nelle urne cinerarie una prima stratificazione della geologia civile; a loro vicino si sovrappongono le evidenze di Romolo, che traccia l'Urbe; più in là sono sparse le vestigie della repubblica, sino a quando troneggia, tutto dominando, la colossale statua equestre di Domiziano. Cavallo, cavaliere, crollano e rovinano in mezzo al rovinio di un Impero mondiale sorretto dalla forza delle armi; dalla forza delle armi, spezzato il fascio, distrutto. E all'aquila dalle ali potenti, dagli artigli aguzzi, dal becco adunco, simbolo di quella forza, si sostituisce la croce, simbolo della fede. Allora è la cupola di S. Pietro che domina la città ed il mondo, e la nuova èra di civiltà, accentrando in Roma una seconda volta il verbo della umanità, di là l'irradia, l'espande e lo svolge fra le genti. E la fede si afferma, conquide, impera, sino a quando vecchie passioni la sofisticano, nuovi intuiti ne spezzano l'unità, e la colossale cupola di Michelangelo, come il colossale piedistallo del monumento equestre, rimane ad attestare di un grande potere che fu.

Perchè nell'ansioso affannarsi alla ricerca del vero un nuovo fattore si avanzò, si sovrappose; i bagliori della fede illanguidirono, gli occhi degli uomini si rivolsero ad una nuova stella che s'innalzava nel firmamento, la cui luce serena indicava nuove vie, che le luminosità intermittenti delle fedi dominanti avevano sottratto allo sguardo; e la coscienza di un popolo, dalla scienza illuminata attraverso la breccia di Porta Pia e sulle rovine di due civiltà tramontate, additava all'eterna città una terza missione tra le genti. In nome di quella scienza, di quella nuova, intensa, costante luce, o Signori, voi siete qui raccolti dalle varie parti del mondo; voi fra i più degni cultori dell'umano sapere, inquantochè voi rappresentate nei vostri studi, nelle vostre ricerche, nelle vostre inconfutabili illazioni, la base granitica su cui si erge quel maestoso edificio di sapienza moderna che ha trasformato uomini e cose, assoggettando la natura ai bisogni sociali e creando nuovi vincoli e rapporti nella umana convivenza.

E però a me, umile cultore di discipline economiche (e quanto era più adatto il mio illustre collega Prof. Tonelli!) è grato dare a voi, maestri di scienze esatte, il benvenuto: con riverenza in nome mio, con plauso in nome della città che ho l'onore di rappresentare.

Non solo per la eccelsa somma di cognizioni da voi complessivamente rappresentate, nella quale mi è grato constatare che la terza Italia non sia quantità trascurabile, ma altresì per la più vasta idea dalla vostra riunione adombrata.

Nei tempi passati, quando ancora le sparse membra della patria erano a ricomporsi ad unità, avvenivano convegni di scienziati in questa o in quella città, e gli eletti colà riuniti, nel mentre prendevano ad argomento visibile quel ramo dello scibile che più propriamente a loro competeva, coglievano occasione del felice incontro fra uomini di varie regioni, per cementare, affermare, ordire quella unità che al disopra delle varie evocazioni era in cima ai loro pensieri.

Partivano col cuore rinfrancato da quella fraterna comunione, col pensiero più nitido intorno all'opera comune a loro incombente; le multiformi discipline scientifiche così concorrevano a predisporre, costituire, rafforzare il patrio organismo: era una grande, una bella, una nobile idea che sovrastava ai vari rami della scienza per unirli tutti nella formazione di una coscienza nazionale. Oggi, qui in Roma, Capitale d'Italia, più alti fini aspettano da voi opera e sanzione. Non sono più gli scienziati di un Paese, radunati in una comunità di aspirazioni circoscritte da frontiere; sono gli scienziati del Mondo intero che, nella rappresentanza dei vari popoli, dei vari intelletti, delle varie cognizioni, s'incontrano, si uniscono in nome della scienza per la formazione non più di una coscienza nazionale, ma di una coscienza internazionale. I vostri lavori si rivolgono alla ricerca di un solo vero, sebbene si possa esprimere in molte lingue; e questa mirabile camera di compensazione per scambiare i valori scientifici è una delle armi più potenti per abbattere le frontiere, distruggere le antinomie, calmare gli odi, rinfocolare gli affetti fra le genti. È preludiare a quella fratellanza universale, che la scienza conosce ed intuisce, la politica oggi ignora e sospetta.

In nome di quella idea di pace e di civiltà, in questa storica sala, in presenza della più Alta Rappresentanza della Nazione, qui tra voi, uomini insigni, esempio singolare di scienza e coscienza, Roma a voi tutti delle regioni Italiche, delle regioni Estere, dà col cuore l'augurale saluto.

Dopo il Sindaco, prende la parola il Presidente del Comitato organizzatore del Congresso, Prof. Blaserna:

Sire!

A nome del Comitato Ordinatore di questo Congresso, a nome della R. Accademia dei Lincei, che ne assunse la Direzione, ringrazio V. M. di avere accettato l'Alto Patronato e di avere voluto onorare coll'Augusta Sua presenza questa nostra prima riunione.

V. M. ha voluto così provare, una volta di più, quanto Le stiano a cuore le scienze e le arti del nostro paese, e come il Suo cuore batte all'unisono con quello della nazione in tutte le più nobili e più elevate sue manifestazioni.

Signore e Signori!

Chiunque coltivi una scienza, s'accorge facilmente che due cultori della stessa materia, anche se lontani e appartenenti a nazioni diverse, sono più vicini fra di loro, che altri due cultori di scienze diverse anche se vivono nella stessa città.

Questo concetto ha creato nei secoli scorsi quelle ammirabili corrispondenze fra scienziati stranieri, in cui si comunicavano a vicenda i risultati delle loro indagini. Le comunicazioni erano rare, giornali scientifici internazionali non esistevano, ed erano le corrispondenze private che servivano a colmare la grave lacuna.

Oggidì lo stesso concetto ha creato i Congressi Internazionali di una sola scienza, Congressi che ebbero e hanno un benefico influsso. Ed anche la Matematica ha sentito tale influenza. Il primo Congresso Internazionale di matematica ebbe luogo a Zurigo, poi con periodo regolare di quattro in quattro anni, a Parigi, ed a Heidelberg. A questo ultimo, nel 1904, la R. Accademia dei Lincei, che ho l'onore di presiedere, fece col mezzo del suo distintissimo Socio prof. Volterra, la proposta che il prossimo Congresso di matematica si riunisse a Roma, e tale proposta fu accolta con molto favore.

L'Accademia si costituì in Comitato ordinatore, col mezzo delle sue sezioni di matematica e di meccanica, alle quali aggiunse l'egregio Rettore dell'Università e alcuni distinti professori, nonchè la Presidenza del Circolo matematico di Palermo, che sotto la potente iniziativa del prof. marchese Guccia ha acquistato valore nazionale ed anche internazionale.

L'idea ebbe subito molti fautori: l'onor. Ministro della Pubblica Istruzione volle mettersi alla testa del movimento, ed i suoi colleghi di Agr. Ind. e Comm. e del Tesoro proposero, alla loro volta, che il Congresso fosse non solo di matematica pura, ma anche di matematica applicata. Ecco come nacque questo Congresso.

Oggi stesso ci ritireremo al palazzo dell'Accademia per lavori tranquilli e sereni; ma io devo un caldo ringraziamento all'egregio Sindaco di questa città per la nobile iniziativa da lui presa col voler salutare la grande riunione da questo classico colle, che rispecchia tanta grandezza e tante speranze della nostra patria.

S. E. il Ministro della P. I. pronuncia un discorso che qui riproduciamo in sunto:

Nel nome del Governo porgo a quanti sono qui convenuti, illustri cultori delle scienze matematiche in ogni Nazione civile, il saluto beneaugurante dell'Italia.

Un sentimento di alta idealità scientifica e civile vi ha fatto sospendere le assidue ricerche individuali, per recare il contributo della vostra sapienza ad un còmpito collettivo, che mira all'assunto generale e al progresso speciale delle vostre discipline. Il convegno vostro otterrà nella bella armonia dei risultati, che con energie concordi saprete conseguire, il suo premio adeguato.

Queste rassegne temporanee di comune lavoro rispondono alle più profonde esigenze del sapere moderno. Quanto più apparisce urgente e impellente la necessità della divisione del lavoro scientifico, per cui pare sia sempre inadeguata ogni più fervida attività intellettuale, rivolta a conseguire anche solo una parte e, quasi si direbbe, un frammento di verità; d'altro lato il nostro spirito anela alla conquista unitaria del sapere, e solo nella unità della verità riconosce e sente lo sforzo supremo dell'intelletto umano.

Tale esigenza — prima che da ogni altro gruppo di scienze — è stata avvertita dalle matematiche, così nel conseguire e nel mantenere il proprio ordine rispetto alle altre discipline, come nell'animarle e orientare — con luce perenne di infaticate ricerche — il loro interno progresso.

La matematica è tale scienza che il solo riconoscere il posto che le spetta si accompagna ad un ampio allargarsi dell'orizzonte mentale. Platone, che costruisce la più seducente armonia di idealità che sia mai fiorita nella mente e nel cuore dell'uomo, glorifica la matematica come una divina musica di proporzioni; i Romani, che cementano la più granitica struttura giuridica dell'ordinamento civile, consacrano nelle loro leggi essere l'apprendimento e l'esercizio dell'arte matematica di pubblico interesse e decoro; Dante, che è matematico nella concezione del poema immortale, si paragona nella ricerca di sublimi verità al geometra

. . . . che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova
pensando, quel principio ond'egli indige;

Leonardo, che nel cuore del rinascimento scruta con occhio acuto e con sagacia, che tuttora pare miracolo, le incognite della natura e della vita, dichiara " essere le scienze tanto più vere, quanto più s'informano ai metodi matematici „; Galileo, che

... all'Anglo che tanta ala vi stese
sgombrò primo le vie del firmamento,

considera tutta la natura come un libro i cui caratteri sono scritti con segni geometrici, e la geometria " maestra dell'onesto acquistare l'utile, il dilettevole, il bello, il buono „; Newton, Cartesio che creano la geometria analitica, il calcolo infinitesimale; Emanuele Kant — dalla cui critica demolitrice di fantasmi dogmatici rifiorisce tutta la filosofia moderna — tutti affermano il principio che " una scienza della natura è scienza solo in quanto è matematica „.

Ma in questi nomi — che segnano punti significativi della traiettoria del pensiero umano — non è che un riflesso e una proiezione di ciò che è stato lo sviluppo interno delle scienze matematiche per opera di chi vi dedicò di proposito tutta la vita. Poichè le scienze matematiche presentano di secolo in secolo tale un accrescimento ininterrotto e disciplinato, che nessun altro gruppo di scienze potrebbe vincerle nel paragone. Persino le pause apparenti non sono che un concentramento dinamico delle conquiste future.

Leonardo aveva scritto: dove si grida non è vera scienza, perchè la verità ha un solo termine, il quale essendo pubblicato, il litigio resta in eterno distrutto, e se esso litigio risurge, è bugiarda e confusa scienza e non certezza rinata.

Giova ricordare, per comprendere l'evoluzione della scienza, il pronto fecondarsi dei primi germogli delle matematiche, quali scienze astratte, nella zolla storica della intellettualità greca. Non è senza un profondo significato che un popolo, il quale diede al mondo un'arte che parve il tipo ideale della perfezione, ebbe anche — e pur nella decadenza — un fiorente periodo di ricerche matematiche.

Giova ricordare l'Italia dei Comuni e del rinascimento, coi nomi del Fibonacci, del Tartaglia, del Ferro, del Ferrari e di tanti e tanti altri, che preparò di conserva col maturarsi storico di nuove esigenze spirituali e sociali il rifiorire della scienza. Dopo Fibonacci, già da noi due correnti si manifestano, l'una che si afferma con gli studi di dottrina pura, e l'altra con quelli di studi applicati ai commerci, nei quali l'Italia traeva ragione delle sue rinnovate fortune. E così sorgeva la partita doppia con Luca Paciolo e la sua scuola fiorente di aritmetica commerciale.

Signori,

Facendo l'augurio che il fervore dei vostri lavori doni ad ognuno di voi, a congresso compiuto, il conforto di moltiplicate energie — e son già tanto grandi — da spendere in servigio della missione scientifica che così altamente vi onora, lasciate che io vi esprima il voto, come Ministro degli Studi, che dalle vostre discussioni maturino anche germi preziosi di opportuni suggerimenti a quanti hanno a cuore l'incremento della scuola moderna quale abbiamo debito di offrire, come frutto dei nostri propositi più tenaci e alti, alle giovani generazioni.

L'Italia per tradizione mai interrotta onora i vostri studi. Ormai non v'è persona colta la quale non sappia — lo dirò con nobili parole di Luigi Cremona — che " quand'anche un'esperienza secolare non ci ammonisse che le più astratte teorie matematiche sortono in un tempo più o meno vicino applicazioni prima neppur sospettate; quand'anche non ci stesse innanzi al pensiero la storia di tanti illustri che senza mai desistere dal coltivare la scienza pura furono i più efficaci promotori della presente civiltà; questa scienza è degna che voi l'amiate; tante sono e così sublimi le sue bellezze, ch'essa non può non esercitare su le generose e intatte anime un'alta influenza educativa alla serena e inimitabile poesia della verità ".

Queste belle parole che Luigi Cremona pronunziava nell'Ateneo di Bologna dieci anni prima che Roma fosse nella storia — come già era nel cuore di ogni italiano — Capitale d'Italia, ancora oggi esprimono una così nobile voce di fede, che ben suonano in Roma italiana al cospetto del Re assertore e cultore nobilissimo degli studi e degli ideali moderni, e al cospetto degli scienziati del mondo civile, qui convenuti per il progresso delle loro alte dottrine.

Il Prof. VOLTERRA legge poi il suo discorso: *Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.*

Egli incomincia dal rievocare il periodo del risorgimento italiano e quello che immediatamente lo seguì, nel quale tutti gli studi italiani si rinnovarono. Parla principalmente di Cremona, Betti, Brioschi, Fergola, Battaglini, e fa un confronto fra lo stato delle matematiche nella prima e nella seconda metà del secolo XIX. Esamina poi le diverse scuole matematiche che fiorirono in Italia, incominciando dal parlare del Betti e del Beltrami e degli studi di fisica matematica e meccanica. Passa poi alla teoria delle funzioni, e ricorda i rapporti fra i matematici italiani e stranieri, tra cui Weierstrass, Riemann, Mittag-Leffler, Klein, Poincaré, Picard, Noether e molti altri. Considera poi l'opera del Dini come iniziatore in Italia degli studi sui fondamenti del calcolo; e per ultimo parla delle ricerche geometriche di varia natura di cui s'occuparono i matematici italiani. Finisce ricordando gli studi di Storia delle Matematiche e la grande pubblicazione delle opere di Galileo fatta sotto gli auspici di S. M. il Re, e si augura che gli studi matematici in Italia seguitino nel loro armonico sviluppo.

SEDUTE PLENARIE.

Prima seduta plenaria - Lunedì 6 aprile 1908 (ore 15 - 16,45).

Il Presidente del Comitato organizzatore, aperta la seduta, invita l'Assemblea a nominare il Presidente del Congresso. Per acclamazione viene eletto lo stesso Presidente del Comitato organizzatore, Prof. BLASERNA.

Questi, ringrazia l'Assemblea, propone che la Presidenza venga, insieme a lui, così costituita:

Vice-Presidenti: CERRUTI, D'OVIDIO, FORSYTH, GORDAN, JORDAN, LORENTZ, MERTENS, MITTAG-LEFFLER, NEWCOMB, VASSILIEF, ZEUTHEN.

Segretario Generale: CASTELNUOVO.

Vice-Segretari: FANO, REINA.

Segretari aggiunti: BOREL, BARNES, HADAMARD, HOLGATE, KRAZER, PHRAGMÈN, SCHLESINGER.

Queste proposte sono tutte accettate dall'Assemblea.

Il Segretario Generale comunica che l'Accademia Reale di Scienze, Lettere e Belle Arti del Belgio invia al Congresso i suoi migliori auguri e voti.

Comunica altresì che il Comitato delle Onoranze a TORRICELLI nel salutare i congressisti si augura di averli Ospiti a Faenza, all'epoca della Commemorazione del grande Scienziato.

Presenta infine i libri inviati al Congresso dagli editori Longmans e C.° e Teubner.

Il Prof. SEGRE, anche a nome dei Colleghi NOETHER e POINCARÈ, legge la Relazione sul concorso alla Medaglia Guccia. A questo concorso furono presentate tre Memorie; ma la Commissione, pur tributando loro elogi, ritiene che a nessuna di esse possa venir conferito il premio; e, esaminati invece i lavori che, senza essere stati presentati al concorso, furono tuttavia pubblicati sull'argomento che era oggetto del concorso medesimo e nell'epoca durante la quale tale concorso rimase aperto, viene unanime alla conclusione di assegnare il premio al Prof. FRANCESCO SEVERI per i suoi lavori sulla *Geometria sopra le superficie algebriche.*

Il Prof. SEGRE consegna quindi la Medaglia GUCCIA al Prof. SEVERI.

Il Prof. MITTAG-LEFFLER tiene poi la sua conferenza: *Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe.*

Segue la conferenza del Prof. FORSYTH: *On the present condition of partial differential equations of the second order as regards formal integration.*

Vengono eletti Presidenti per la seduta successiva NEWCOMB e JORDAN.

Seconda seduta plenaria - Martedì 7 aprile (ore 15,30 - 17).

Il Presidente Prof. NEWCOMB apre la seduta e dà la parola al Prof. DARBOUX per la lettura della sua conferenza: *Les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale.*

Dopo questa brillante lettura, il Prof. NEWCOMB cede la presidenza al Prof. JORDAN; e il Prof. von DICK legge la sua conferenza: *Ueber die mathematische Encyklopädie.*

Per la seduta plenaria successiva viene designato come Presidente il Prof. GORDAN.

Terza seduta plenaria - Mercoledì 8 aprile (ore 16 - 17,45).

Presidente: P. GORDAN.
Hanno luogo le seguenti interessantissime letture:

1. NEWCOMB, *La théorie du mouvement de la lune; son histoire et son état actuel.*
2. LORENTZ, *Le partage de l'énergie entre la matière pondérable et l'éther.*

Su proposta del Presidente è designato come Presidente della prossima Seduta plenaria il Prof. MITTAG-LEFFLER.

Quarta seduta plenaria - Venerdì 10 aprile (ore 15,30 - 17,30).

Presidente: MITTAG-LEFFLER. Sono presenti S. E. RAVA, Ministro della P. I. e S. E. LUZZATTI.
Il Prof. POINCARÈ essendo indisposto, la sua conferenza sul tema: *L'avenir des mathématiques* è letta da DARBOUX. Poi PICARD fa la sua lettura: *L'analyse dans ses rapports avec la Physique mathématique.*

Quinta seduta plenaria - Sabato 11 aprile (ore 15,45 - 17).

Presidente: BLASERNA.
Comunica che il Senatore Prof. VERONESE per una lieve indisposizione sopraggiuntagli non può tenere l'annunciata Conferenza sulla *Geometria non-Archimedea*, la quale sarà inserita negli *Atti del Congresso.*
Dà poi lettura di una lettera del Prof. GEORG CANTOR, diretta al Prof. GUCCIA, e contenente saluti e voti pel Congresso. L'Assemblea, dolente che il Prof. CANTOR non abbia potuto venire a Roma, ricambia il cordiale saluto.
L'Assemblea, con vivi applausi, fa proprio l'Ordine del giorno votato questa mattina dalla Sezione IV del Congresso:

" Il Congresso, avendo riconosciuto la importanza di un esame " accurato dei programmi e dei metodi d'insegnamento delle mate- " matiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni, confida ai pro- " fessori KLEIN, GREENHILL e FEHR l'incarico di costituire un Comi- " tato internazionale che studii la questione e ne riferisca al prossimo " Congresso ".

Il Prof. HADAMARD presenta, brevemente illustrandola, la seguente proposta:

" La section III (Mécanique), après un échange de vues dans le- " quel a étée reconnue l'importance d'une *unification des notations* " *vectorielles*, propose au Congrès la nomination d'une *Commission in-* " *ternationale* pour l'étude de cette question.
" Le président de cette section pour la séance du 11 avril propose " au Congrès de prier son Comité d'organisation de vouloir bien con- " stituer cette Commission et lui soumet la liste des noms mis en " avant, à cet égard, dans la séance du 11 avril ".

Anche questa proposta è approvata con vivi applausi.
Il Prof. CONTI presenta la seguente proposta:

" Il Congresso fa voti che all'Ordine del giorno del prossimo Con-
" gresso sia posta la costituzione di un'Associazione internazionale
" dei Matematici ".

La proposta è approvata.
Il Prof. D'OCAGNE fa la seguente proposta:

" Il résulte de l'échange de vues, qui a eu lieu dans la Section III-B,
" qu'il serait hautement désirable de provoquer une entente de plus
" en plus étroite entre ceux qui s'occupent de perfectionner les mé-
" thodes mathématiques et ceux qui ont besoin de les appliquer à
" un objet pratique.
" A cet effet la Section émet le voeu que les mathématiques ap-
" pliquées à la Science de l'Ingénieur fassent, au prochain Congrès,
" l'objet d'une Section spéciale.
" En outre, la Section III-B propose la constitution d'une Com-
" mission internationale chargée de préparer les travaux de cette
" nouvelle Section. La composition de cette Commission internatio-
" nale sera fixée par le bureau du IV^{eme} Congrès ".

Anche questa proposta è accolta a voti unanimi.
Viene presentato il seguente ordine del giorno approvato dalla Sezione IV nella sua seduta del 9 corrente:

" Il IV Congresso internazionale dei matematici in Roma consi-
" dera come questione di massima importanza per le scienze mate-
" matiche pure ed applicate la pubblicazione di tutte le opere di
" Eulero.
" Il Congresso saluta con riconoscenza l'iniziativa presa in pro-
" posito dalla Società dei Naturalisti Svizzeri, e fa voti che la grande
" opera sia eseguita dalla Società stessa colla collaborazione dei ma-
" tematici delle altre Nazioni.
" Il Congresso prega l'Associazione internazionale delle Accademie,
" e specialmente le Accademie di Berlino e di Pietrobugo, delle quali
" Eulero è stato celeberrimo membro, di aiutare l'impresa di cui è
" parola ".

Il Presidente dichiara che, ove quell'ordine del giorno sia approvato, egli porterà la questione alla riunione dell'Associazione internazionale delle Accademie, che si terrà l'anno venturo in Roma.

DARBOUX osserva che la questione fu già discussa in altri Congressi, ed anche nella recente riunione di Vienna dell'Associazione delle Accademie. Il voto troverà perciò probabilmente un terreno già propizio.

Dopo di ciò l'ordine del giorno è approvato a voti unanimi.

Riguardo alla pubblicazione degli *Atti del Congresso*, il Presidente ricorda ch'essa doveva farsi per cura del *Circolo matematico di Palermo* e sotto la direzione del Direttore dei Rendiconti Prof. GUCCIA. Disgraziatamente in seguito ad uno sciopero degli operai tipografi di Palermo, che ha portato per un tempo indeterminato la disorganizzazione della tipografia adibita alle pubblicazioni del Circolo stesso, il Prof. GUCCIA, quale Delegato del Circolo al Congresso, gli ha scritto che questa Società trovasi nell'impossibilità di provvedere alla pubblicazione degli Atti. Il Presidente aggiunge che la detta pubblicazione avrà luogo in ogni modo per cura del Comitato organizzatore del Congresso. E pertanto, dopo la chiusura del Congresso, tutti i manoscritti da inserirsi negli Atti dovranno essere inviati al *Segretario Generale* del Congresso.

Dovendosi ora designare la Sede ed epoca del V Congresso internazionale dei Matematici, il Prof. A. R. FORSYTH, ricordando il desiderio già espresso a Heidelberg dal Prof. GREENHILL, e favorevolmente accolto dall'Assemblea, che tale Congresso avesse a tenersi in Inghilterra, fa formale proposta ch'esso si tenga a *Cambridge* nel 1912; e ciò a nome della *Cambridge Philosophical Society*, che si incaricherà della preparazione del Congresso. Ciò è pure desiderato dalla *London Mathematical Society* e da molti matematici Inglesi, Scozzesi, Irlandesi.

Questa proposta è caldamente appoggiata dal Presidente ed è approvata dall'Assemblea a voti unanimi e con vivi applausi. Dopo di ciò il Prof. FORSYTH soggiunge:

" Ringrazio questo Congresso per l'onore fatto a Cambridge, accet-
" tando l'invito di quella Società filosofica. La riunione avverrà nel-
" l'agosto 1912: vorrete permettere al Comitato esecutivo, che si
" formerà, di stabilire la data esatta entro detto mese. Consentitemi
" intanto, di assicurarvi che faremo tutto quanto starà in noi per
" promuovere gl'interessi scientifici del Congresso ".

Il Prof. MITTAG-LEFFLER pronuncia le seguenti parole:

" Dans ma qualité de mathématicien Suédois et de rédacteur en
" chef des *Acta mathematica*, j'ai l'insigne honneur d'inviter le Con-
" grès International des Mathématiciens à se réunir à Stockholm
" en 1916 ".

" Mon august Souverain, le Roi Gustave, m'a gracieusement confié
" la charge d'exprimer au Congres qu'Il serait prêt à le prendre sous
" Son haut patronage dans le cas que le Congrès se décide à se réunir
" à Stockholm, et qu'Il le saluerait avec plaisir le bienvenu dans sa
" belle capitale ".

" Nous autres mathématiciens Suédois nous nous estimerions heu-
" reux autant qu'honorés, si le Congrès voulait accepter notre invi-
" tation, et nous ferons tout ce qui est en notre pouvoir pour rendre
" le séjour des membres dans notre pays aussi agréable et aussi in-
" structif que possible ".

Il Presidente dichiara che una deliberazione su di ciò non potrà prenderla che il prossimo (V) Congresso; ma che questa proposta verrà testualmente inserita negli Atti del Congresso attuale, e vivamente raccomandata al Congresso futuro.

HADAMARD sottopone al Congresso un suo voto personale:

" Convinto dell'utilità del riavvicinamento tra la Matematica e la
" Fisica; convinto altresì che questo riavvicinamento non sia ancora
" così intimo come sarebbe desiderabile; emette il voto che in avve-
" nire si convochino possibilmente insieme i Congressi internazionali
" di Matematica e di Fisica ".

Con ciò non vuole tuttavia influire sulle deliberazioni già prese. L'Assemblea si associa a questo voto. FORSYTH avverte che a Cambridge il voto sarà, per quanto possibile, attuato.

Il Presidente, dichiarando chiuso il Congresso, porge a tutti i presenti un caldo saluto. Ringrazia gli intervenuti che col loro valore e col loro numero hanno conferita tanta importanza al Congresso, ed è sicuro che questa riunione scientifica lascierà una profonda traccia nella scienza, e contribuirà a rafforzare la solidarietà e la feconda armonia fra i cultori di essa.

Il Prof. DARBOUX è sicuro di interpretare il sentimento di tutti i Congressisti, rivolgendo i più caldi ringraziamenti a tutte le Autorità e alle persone che hanno contribuito a rendere così importante il Congresso che oggi si chiude. Egli prega il Presidente di ringraziare anzitutto S. M. il Re per la nobile prova di interesse alla Scienza che S. M. ha voluto dare intervenendo alla Seduta Inaugurale. La sua gratitudine si rivolge poi a S. E. il Ministro della Pubblica Istruzione, al Sindaco e al Rettore dell'Università per le festose accoglienze che hanno voluto fare ai Congressisti. Ringrazia anticipatamente il Sindaco di Tivoli per la cortese ospitalità che si propone di esercitare domani. Ringrazia infine l'Illustre Presidente, il Segretario Generale, e gli altri componenti l'Ufficio di Presidenza che seppero così bene organizzare il Congresso; nonchè tutti gli impiegati e addetti all'ufficio di Segreteria per la loro costante cortesia e sollecitudine.

L'oratore è calorosamente applaudito.

SEZIONE I. — **Aritmetica, Algebra, Analisi.**

Introduttori: ARZELÀ, CAPELLI, PASCAL, PINCHERLE.
Segretario: AMALDI.
Segretario aggiunto: GALVANI.

Prima seduta - Martedì 7 aprile 1908 (ore 9,15 - 11,15).

Il Prof. ARZELÀ, a nome degli introduttori della Sezione, rivolge agli intervenuti il saluto augurale. Indi, su proposta di lui, la Sezione nomina Segretari AMALDI e GALVANI e Presidente della seduta odierna JORDAN.

Vengono quindi presentate e svolte le seguenti Comunicazioni:

1. GORDAN, *Die Auflösung der allgemeinen Gleichung 6.ten Grades.*
2. ZERMELO, *Ueber die Grundlagen der Arithmetik und Analysis.*
3. BOREL, *Sur les principes de la théorie des ensembles.*
4. RIESZ, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre.*
5. FRIZELL, *Die Mächtigkeit des Kontinuums.*

Seconda seduta - Mercoledì 8 aprile (ore 9,15 - 11,15).

Presidente: JORDAN.

Vengono fatte le seguenti Comunicazioni:

1. KOEBE, *Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip.*
2. BOUTROUX, *Sur l'inversion des fonctions entières.*
3. PETROVICH, *Une classe remarquable de séries entières.*

4. Pincherle, *Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti.*
5. Young, *On some applications of semi-continuous Functions.*

Il Presidente dà quindi la parola al Prof. Marcolongo, il quale commemora con affettuose parole la signorina Dott. Laura Pisati, morta nel fiore degli anni il 30 marzo u. s., mentre si preparava a recare a questo Congresso il suo contributo con la Comunicazione iscritta oggi nell'ordine del giorno: " Saggio di una teoria sintetica delle funzioni di variabile complessa ".

Infine, su proposta del Prof. Jordan, viene acclamato a Presidente per la seduta seguente A. R. Forsyth.

Terza seduta - Giovedì 9 aprile (ore 9,15 - 12).

Presidente: A. B. Forsyth.

Vengono svolte le seguenti comunicazioni:

1. Hadamard, *Sur l'application d'une méthode de Calcul des Variations.*
2. Schlesinger, *Sur quelques problèmes paramétriques de la théorie des équations differentielles linéaires.*

Su questa Comunicazione prende la parola Hadamard.

Schlesinger fa omaggio al Congresso delle sue *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen* (Leipzig, 1908); del che il Presidente lo ringrazia.

3. Rémoundos, *Sur les zéros des intégrales d'une classe d'équations différentielles.*

Hadamard aggiunge su ciò qualche osservazione.

4. Pick, *Ueber die Differentialgleichung der hypergeometrischen Funktion.*
5. Saltykow, *Sur l'existence des intégrales complètes de S. Lie et le perfectionnement de la méthode de Jacobi dans la théorie des équations partielles.*
6. Lalesco, *Sur les solutions analytiques de l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$.
7. Volterra, *Sopra il metodo delle immagini nelle equazioni del tipo iperbolico.*

Sull'argomento ha luogo una discussione fra Hadamard e Volterra.

8. Zervos, *Sur la correspondence entre les théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et d'intégration des systèmes de* Monge.

Su proposta del Presidente, l'Assemblea acclama come Presidente per la seduta successiva il Prof. Mittag-Leffler.

Quarta seduta - Venerdì 10 aprile (ore 9,15 - 12,35).

Presidente: Pascal, essendo assente Mittag-Leffler.

Vengono svolte le seguenti comunicazioni:

1. Moore, *On a form of general analysis, with application to differential and integral equations.*
2. Fredholm, *Les intégrales de Fourier et la théorie des équations intégrales linéaires.*

3. D'Adhemar, *Sur les équations intégrales de* M. M. Fredholm *et* Volterra.
4. Orlando, *Sull' integrazione delle equazioni integrali.*
5. Pascal, *Sulla nuova teoria delle forme differenziali di ordine e grado qualunque.*
6. Sthephanos, *Sur une extension de la théorie des covariants et invariants des formes binaires.*
7. Montessus, *Sur les relations de recurrence à trois termes.*
8. Pucciano, *Contributo alla critica di alcune questioni che si riattaccano all'equazione differenziale di* Laplace.

Per la seduta successiva è acclamato Presidente il Prof. Moore di Chicago.

Quinta seduta - Sabato 11 aprile (ore 9,15 - 12).

Presidente: Moore.
Vengono svolte le seguenti comunicazioni:

1. Capelli, *Sopra i coefficienti degli sviluppi delle funzioni algebriche.*
   Sull'argomento prende la parola il Prof. Pincherle.
2. Nicoletti, *Riduzione a forma canonica di un fascio di forme bilineari o quadratiche.*
3. Fubini, *Sulla teoria dei gruppi discontinui.*
4. Dickson, *On the last theorem of* Fermat.
   Questa comunicazione viene letta dal Presidente.
5. Levi, *Sopra la equazione indeterminata del 3° grado.*

Il Moore affida la presidenza al Prof. Capelli, che invita gli altri Congressisti inscritti all'Ordine del giorno a leggere le loro comunicazioni.

6. Frattini, *La nozione d'indice e l'analisi indeterminata dei polinomi interi.*
7. Severini, *Sulle successioni infinite di funzioni analitiche.*
8. Zarembo, *Sur le principe de* Dirichlet.
9. Boggio, *Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria ed attuariale.*
   Il Presidente comunica e presenta il seguente lavoro:
10. Autonne, *Sur les fonctions homogènes d'une variable hypercomplexe.*

Esaurito così l'Ordine del giorno, il Presidente nel dichiarare chiusi i lavori di questa Sezione, rileva con vivo compiacimento la copia, l'elevatezza, e l'importanza delle comunicazioni qui svolte.

Sezione II. — Geometria.

Introduttori: Bianchi, Segre.
Segretario: De Franchis.
Segretario aggiunto: Amoroso.

Prima seduta - Martedì 7 aprile 1908 (ore 9 - 11).

Il Prof. SEGRE, anche a nome del Prof. BIANCHI, rivolge un saluto ai Congressisti stranieri, e propone l'invio di un telegramma di auguri al Prof. REYE, ciò che è approvato per acclamazione. La Sezione nomina a segretario il Prof. DE FRANCHIS e a segretario aggiunto il Dott. AMOROSO. Su proposta del Prof. SEGRE viene nominato presidente della seduta odierna, per acclamazione, il Prof. ZEUTHEN.

Hanno luogo le comunicazioni seguenti:

1. ANDRADE, *Le théorème d'Ampère-Stockes et le postulatum d'Euclide.*
2. VARICAK, *Beitrag zur nicht-euklidischen analytischen Geometrie.*
3. ZEUTHEN, *Un exemple d'une correspondance sans " Werthigkeit ".*
4. MONTESANO, *Sui complessi bilineari di coniche nello spazio.*

Quest'ultima comunicazione viene letta dal Prof. MARCOLONGO.

Su proposta del Presidente si elegge Presidente per la seduta successiva il prof. DARBOUX.

Seconda seduta - Mercoledì 8 aprile (ore 9 -11).

Presidente: DARBOUX.

Hanno luogo le seguenti comunicazioni:

1. SEVERI, *Di alcuni recenti risultati nella geometria algebrica e di qualche problema ad essa collegato.*
2. BAGNERA, *Sopra le equazioni algebriche* $f(x, z, y) = 0$ *che si possono risolvere con* x, y, z, *funzioni meromorfe quadruplamente periodiche di due parametri.*

A proposito di questa comunicazione, prende la parola il Prof. ENRIQUES, rallegrandosi dei risultati ivi accennati.

3. DE FRANCHIS, *Intorno alle superficie regolari di genere uno che ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti.*
4. BIANCHI, *Sulle trasformazioni di Darboux delle superficie d'area minima.*

Sopra questa comunicazione prende la parola il Prof. DARBOUX, esponendo alcune sue considerazioni ed alcuni suoi risultati.

5. RADOS, *Ueber Wendetangentenebenen der Raumkurven.*

Vengono eletti, per acclamazione, Presidenti per la seduta successiva i Professori NOETHER e D'OVIDIO.

Terza seduta - Giovedì 9 aprile (ore 9 - 11,15).

Presidente: Prof. D'OVIDIO.

Si leggono le seguenti comunicazioni:

1. PANNELLI, *Sopra un carattere delle varietà algebriche a tre dimensioni.*
2. DINGELDEY, *Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach* BRAIKENRIDGE *und* MACLAURIN.

Assume poi la presidenza il Prof. NOETHER, e si leggono le comunicazioni:

3. FINSTERBUSCH, *Ueber Erweiterung eines Schliessungsproblems von J. Steiner und ihre Beziehung zur Gauss'schen Theorie zentrierter Linsensysteme.*
4. GALLUCCI, *Su la configurazione armonica.*
5. BRUCKNER, *Bemerkungen zur Morphologie der aussergewöhnglichen Polyeder erläutert durch die Sechsflache.*
6. BROUWER, *Une théorie des groupes finis et continus indépendante des axiomes de Lie.*

Per acclamazione viene eletto Presidente per la seduta successiva il prof. SCHUR.

Quarta seduta - Venerdì 10 aprile (ore 10 - 11).

Presidente: SCHUR.

Il Prof. SEGRE legge un telegramma di ringraziamento del Professor REYE per gli auguri rivoltigli nella prima seduta. Dopo di che hanno luogo le seguenti comunicazioni:

1. TZITZEIKA, *Sur une nouvelle classe de surfaces.*
2. PFEIFFER, *Du développement des fonctions algébriques de deux variables indépendantes en séries entières des variables réeles.*

SEZIONE III. — *A)* Meccanica, Fisica-matematica, Geodesia.

Introduttori: LEVI-CIVITA, PIZZETTI.
Segretario: GIANFRANCESCHI.
Segretario aggiunto: LEVI.

Prima seduta - Martedì 7 aprile 1908 (ore 9,30 - 11).

L'introduttore Prof. PAOLO PIZZETTI apre la seduta, saluta gli intervenuti, ed invita il Prof. Senatore VITO VOLTERRA ad assumere la presidenza. Sono nominati segretari i Dott. G. GIANFRANCESCHI e E. LEVI.

Vengono svolte le seguenti comunicazioni:

1. G. H. DARWIN, *The rigidity of the Earth.*
2. LAMB, *The flexure of narrow Beams.*
3. G. LAURICELLA, *Sull'equazione* $\Delta^{2n} V = 0$ *e su alcune estensioni delle equazioni dell'elasticità.*

A proposito di quest'ultima comunicazione aggiunge qualche considerazione il Prof. BOGGIO.

Prendono ancora la parola per esporre all'assemblea alcune osservazioni su altro argomento il Prof. LAURICELLA e il Prof. CASAZZA.

Si stabilisce che la seduta successiva sarà presieduta dal Professore G. H. DARWIN.

Seconda seduta - Mercoledì 8 aprile (ore 9,40 - 11,45).

Presidente: QUIQUET.
Viene nominato Segretario aggiunto il Dott. INSOLERA.
Vengono poi lette le seguenti comunicazioni:

1. BOHLMANN, *Ueber die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung.*
2. BOREL, *Sur les applications du Calcul des Probabilités aux sciences biologiques.*
3. MARCH, *Une nouvelle statistique internationale de la population. Observation sur la comparaison et sur la terminologie des statistiques.*
4. DE HELGUERO, *Sulla rappresentazione analitica di alcune statistiche.*
5. LEMBOURG, *L'actuaire, sa fonction et les deux aspects de celle-ci.*
6. GINI, *La regolarità dei fenomeni rari.*
7. DAWSON, *Necessary cautions in dealing with Actuarial Problems.*
8. CASTELLI, *Sull' insegnamento della matematica attuariale e finanziaria nelle scuole professionali inferiori, medie, e superiori.*

Il Presidente ringrazia i convenuti ed esprime l'augurio che nei prossimi Congressi la Sezione attuariale sia conservata, determinando crescente successo.

Terza seduta - Giovedì 9 aprile (ore 10 - 11,45).

Il Prof. LUIGGI, introduttore, rivolge un saluto ai Congressisti italiani e stranieri; e la sezione nomina quindi, su di lui proposta a Presidente il Prof. D'OCAGNE, Delegato del Ministero dei Lavori Pubblici di Francia, e a Segretario l' Ing. PARVOPASSU.

Su invito del Presidente vengono successivamente svolte le seguenti comunicazioni:

1. LUIGGI L., *Considérations sur les rapports entre les sciences mathématiques et l'art de bâtir.*
2. CANEVAZZI S., *La matematica e l'arte del costruttore in Italia.*
3. OCAGNE (D'), *La technique du calcul dans la science de l' ingénieur.*
4. Id. *Sur la rectification approchée des arcs de cercle.*
5. CLAXTON-FIDLER, *On the Applications of Mathematics to the Theory of Construction.*
6. SWAIN, *The teaching and use of Mathematics in the civil Engineering profession.*

Prendono parte alla discussione intorno alle dette comunicazioni i Proff. M. R. MEHMKE, PITTARELLI, C. RUNGE, CANEVAZZI, LUIGGI.

Il Presidente ringrazia i convenuti ed esprime l'augurio che nei Congressi venturi la Sezione Ingegneria si affermi con ognor crescente sviluppo.

SEZIONE IV. — Quistioni filosofiche, storiche, didattiche.

Introduttori: ENRIQUES, LORIA, VAILATI.
Segretario: LAZZERI.
Segretario aggiunto: CONTI.

Prima seduta - Martedì 7 aprile 1908 (ore 9 - 12).

I lavori della Sezione sono inaugurati con un discorso del professore ENRIQUES, sul tema: *Matematica e Filosofia.*

Per acclamazione sono nominati Segretario il prof. Lazzeri Giulio, Vice-Segretario il prof. Conti Alberto, Presidente della seduta ENRIQUES.

Vengono svolte le seguenti comunicazioni.

1. G. HESSENBERG, *Zählen und Anschaung.* (*Numeri ed intuizione.*)

Le teorie fondamentali dei numeri interi sono essenzialmente teorie del tipo ω. Questo è oggetto della logica, ma la costruzione dei suoi elementi risulta dalla intuizione, poichè questi elementi sono logicamente irriducibili. Il caso è perfettamente analogo a quello della geometria, nella quale è oggetto della logica il sistema delle relazioni, ma non gli elementi stessi.

2. BOUTROUX, *Sur la relation de l'Algèbre à l'Analyse mathématique.*

Storicamente l'analisi matematica è un prolungamento dell'algebra. Analisi e algebra sono per Newton, per Eulero, per Lagrange termini sinonimi, la prima distinguendosi dalla seconda in quanto essa implica delle operazioni infinite. Ed è così che una lunga tradizione ci induce a considerare l'analisi come lo studio dell'espressioni algebriche convergenti.

Questa opinione non sembra più sostenibile oggi. L'analisi non è una costruzione; è lo sforzo che noi facciamo per *analizzare* e per *tradurre* nella lingua dell'algebra le leggi matematiche. L'algebra non è più che l'istrumento dell'analisi.

3. ITELSON, *Logik und Mathematik.*

La relazione fra logica e matematica si può solo determinare quando si è data una definizione dell'una e dell'altra. La logica non è, come ordinariamente si definisce, la *scienza del pensiero*; essa è, quando la si consideri attentamente, *la scienza degli oggetti in generale*; la matematica è *la scienza degli oggetti ordinati.*

L'oratore prosegue parlando del calcolo logico, del dualismo delle operazioni, dell'*invariator* e dell'*absorptor.*

4. ITELSON, *Deduction, Induction und Perduction.* (*Deduzione, induzione e perduzione.*)

L'oratore parla dell'ufficio della deduzione e dell'induzione in matematica. La dimostrazione da n a $n+1$ viene molto impropriamente chiamata induzione completa; essa consiste in due ragionamenti, una induzione completa e una deduzione; essa merita perciò un nome speciale. L'oratore propone il termine *perductio (da perducere, continuare).*

Terminata questa comunicazione il signor Dickstein interpella l'oratore, domandando dove la logica prende i suoi postulati, dato che ogni scienza ne deve avere. Il sig. Itelson risponde che quest'ultima quistione appartiene alla teoria della conoscenza.

5. MAX SIMON, *Du continu, point et ligne droite, remarques historiques.*

L'oratore storicamente accenna a Galileo e Leonardo, come a coloro che primi hanno riconosciuto esattamente il problema della continuità;

si volge poi a combattere la aritmetizzazione del continuo fatta da Cantor, accennando che la serie fondamentale di Cantor definisce un segmento aritmetico. L'oratore fa osservare anche nello stesso tempo il suo accordo col sig. VERONESE.

Egli si applica poi ai due assiomi di continuità del HILBERT e fa risaltare che essi per la *geometria*, non dicono proprio nulla.

L'oratore passa quindi a parlare dei punti e delle rette, e conclude dichiarando che non crede possibile formulare con determinate proposizioni il lavoro mentale che abbraccia molti secoli.

6. BERNSTEIN, *Nachweis dass unter allen Beweisen des Pytagoräischen Lehrsatzes der Beweis des An-Nairizi (900 n. Chr) der axiomatisch einfachste ist.* (*La dimostrazione del teorema di Pitagora data da An-Nairisi è quella assiomaticamente più semplice.*)

Se si conta come criterio di semplicità il numero delle applicazioni dell'assioma di congruenza nel piano, si ha il risultato preciso che non esiste una dimostrazione, per addizione, che faccia uso di meno di sei applicazioni. Ne segue, che nel senso fissato, la dimostrazione di An-Nairisi è la più semplice. È questo un esempio del metodo col quale si può fissare il concetto di semplicità di una dimostrazione, esempio che del resto non è l'unico.

7. PASTORE, *La natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella logica matematica.*

Le cose principali esposte in questa comunicazione si riducono in sostanza alla dimostrazione della natura extralogica cioè puramente descrittiva delle leggi indicate. Da tale fatto risulta possibile l'introduzione nella logica matematica di un gruppo di nuove nozioni e operazioni, fra cui è più notevole la introduzione dei multipli e delle potenze, universalmente respinta da Leibnitz fino ai giorni nostri.

Dopo tale comunicazione il prof. ITELSON fa alcune obiezioni sui fondamenti delle idee esposte dal prof. PASTORE e avviene una discussione fra i due professori suddetti.

Il Presidente ENRIQUES propone poi che per la seduta di domani, consacrata principalmente alla storia delle matematiche, sia eletto Presidente il prof. LORIA, e l'assemblea approva per acclamazione tale proposta.

Seconda seduta - Mercoledì 8 aprile (ore 9 - 11,40).

Presidente: LORIA.

Il Presidente, aperta la seduta, legge un discorso sopra: *Le tradizioni matematiche dell'Italia.*

L'oratore dopo aver dato un saluto ai convenuti ed avere ricordati M. Cantor e P. Tannery, si propone dare alla sezione un primo saggio degli studi da lui intrapresi per continuare l'*Histoire des sciences mathématiques en Italie* del LIBRI. Escluso che la storia della matematica italiana debba farsi risalire a Pitagora, Archita e Archimede, l'oratore ne pone le origini nel 1200, quando apparve il *Liber abaci* di LEONARDO PISANO, di cui fa risaltare la grande importanza. Spiega poi perchè il Fibonacci non abbia avuti discepoli immediati col fatto che l'arte nei tre secoli seguenti assorbì le menti migliori, e fa cenno del periodo " umanistico " e del sorgere e fiorire delle università medioevali. Passa poi a dir qualche cosa del periodo aureo dell'algebra italiana, cominciato con Luca Paciuolo e chiuso con Bombelli e Cataldi, notando come la scoperta del " punto di concorso „ fatta da Guidobaldo del Monte inizi un'èra nuova nella prospettiva. Il secolo successivo è il secolo di Galileo Galilei, alla scuola del quale appartengono Cavalieri, Torricelli, Borrelli e Viviani, a cui tanto deve la geometria. L'oratore passa poi a descrivere le opere analitiche dei Manfredi, dei Fognano e dei Riccati e ricorda ancora G. Saccheri e G. Malfatti. Nel secolo in cui questi fiorirono nacque anche G. L. Lagrange, che l'oratore dimostra doversi ascrivere fra i matematici italiani, aggiungendo una parola intorno ad altri di questi, quali il Mozzi, il Mascheroni, il Ruffini, il Fergola, il Lorgna, non senza far notare la schiera di storici aventi per capo il Cossali. Passando al secolo XIX, l'oratore descrive l'accoglienza che ebbe in Italia la Geometria descrittiva, enumerando coloro che la fecero progredire in Italia, ed è così indotto a parlare della scuola geometrica italiana fondata da Luigi Cremona. Che poi l'Italia non sia stata spettatrice passiva allo svilupparsi dell'analisi nel secolo precedente il nostro è dimostrato dalle scuole che fiorirono a Torino, a Pavia, a Pisa. Volgendosi a concludere, l'oratore fa cenno di altri matematici insigni che ebbero patria l'Italia, fa notare che in nessun'epoca i geometri italiani vissero isolati, e che la storia della matematica italiana si svolge senza interruzioni o lacune; onde vi è fondata speranza che continui in avvenire altrettanto fiorente, dal momento che " ciò che fu torna e tornerà ne i secoli „.

Terminati gli applausi che hanno salutato la fine del discorso, il prof. Loria annunzia che la *Rédaction de l'Enseignament mathématique* ha messo a disposizione dei congressisti degli esemplari dei numeri della rivista (Annata corrente) contenenti un documento importante, la traduzione del rapporto Klein-Gutzmer: *Sur la préparation des professeurs à l'enseignement scientifique.* Facendosi interprete dei sentimenti unanimi dei convenuti, il Presidente ringrazia la Redazione dell'interessante e cortese suo omaggio, e augura alla Rivista di proseguire nella sua prospera e feconda vita.

Vengono poi svolte le seguenti comunicazioni:

1. Zeuthen, *Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la Géométrie.*

L'oratore fa osservare che ciascuno dei due gruppi di grandi principi è un sistema logico inseparabile. Per comprendere i principi antichi occorre dunque considerare il loro proprio punto di partenza. Da questo punto di vista l'oratore ha cercato di fare apparire il loro valore logico.

Dopo di ciò il Presidente dà la parola al prof. Krazer per svolgere la seguente mozione:

" I. Il IV Congresso internazionale dei matematici in Roma considera come questione di massima importanza per le scienze matematiche pure ed applicate la pubblicazione di tutte le opere di Eulero.

" II. Il Congresso saluta con riconoscenza l'iniziativa presa in proposito dalla Società dei naturalisti Svizzeri e fa voti che la grande opera sia eseguita dalla società stessa con la collaborazione dei matematici delle altre nazioni.

" III. Il Congresso prega l'Associazione internazionale delle Accademie e specialmente le Accademie di Berlino e di Pietroburgo, delle quali Eulero è stato celeberrimo membro, di aiutare l'impresa di cui è parola „.

Su proposta Pittarelli la mozione Krazer è approvata per acclamazione. Il Presidente dice che questo voto sarà pubblicato in quattro lingue e sottoposto poi all'approvazione del Congresso a sezioni riunite.

Il prof. Amodeo prende occasione del voto fatto per proporre che il Congresso faccia anche voto che l'Italia sciolga un pegno di onore, verso uno dei suoi figli che più grandemente l'onora, pubblicando in un avvenire più o meno prossimo le opere di Bonaventura Cavalieri. L'assemblea approva la proposta.

2. D. E. Smith, *The Ganita-Sāra Sangraha of Mahāvirācārya.*

Il prof. Smith ha visitato recentemente il Giappone, la China e l'India allo scopo di procurarsi dei materiali illustranti la storia della matematica. In questa comunicazione, egli ha riferito sul trattato indiano, del nono secolo, di cui il prof. Rangacharya di Madras sta preparando una traduzione, che potrà esser pronta fra due anni circa. Mahāvirācārya visse a Mysore verso l'850 dell'E. V. Il suo lavoro è principalmente algebrico, ma comprende pure nozioni d'aritmetica e sulla misura. I più interessanti caratteri di questo trattato si riferiscono alla somma di certe parti di una serie, a forme speciali di equazioni non razionali, e a equazioni indeterminate.

La pubblicazione di quest'opera sarà interessante per la storia della matematica per la luce che ne verrà sulle fonti dell'opera di Bhaskara, sulla relazione tra le scuole di Pataliputra e Ujjain e le altre dell'India, e sull'influenza della matematica dei Greci su quella degli Indiani e di questa su quella degli Arabi.

3. Duhem, *Sur la découverte de la loi de la chute des graves.*

Il prof. Duhem, non avendo potuto intervenire all'adunanza, il prof. Peano legge in sua vece questa comunicazione.

Il Duhem richiama l'attenzione sull'opera di Alberto De Saxe: *De Caelo et Mundo* come quella in cui per la prima volta sono enunciate ipotesi definitive sul modo di variare della velocità di caduta dei gravi, e accenna alla possibilità che l'opera suddetta abbia influito sulle idee di Leonardo da Vinci.

4. Giacomelli, *I risultati di alcune ricerche sull'opera meccanica di Galileo.*

Mostrato lo stato delle questioni storiche sulle prime due leggi newtoniane del movimento, che, com'è noto, debbonsi a Galileo, il conferenziere dimostra quale sia stato il procedimento mentale e sperimentale tenuto da Galileo nell'acquisto delle medesime.

Dalla dimostrazione risulterebbe dapprima che Galileo giunse alla proposizione della persistenza del movimento valendosi d'una idea da lui già ammessa *a priori*, in secondo luogo che quelle esperienze sui piani inclinati, dalle quali si crede esser stato guidato alla scoperta della legge di inerzia, furono invece quelle che lo condussero alle scoperte della indipendenza dei movimenti; in terzo ed ultimo luogo che le relazioni fra i due procedimenti furono d'indole puramente esterna, senza che fra i due vi fosse nessun legame intimo ed essenziale.

5. Pittarelli, *Luca Pacioli usurpò per sè stesso qualche libro di Piero De Franceschi?*

Fatto uno studio minuto e comparativo tra il *Libellus Petri pictoris Purgentis de quinque corporibus regolaribus* (codice esistente alla Vaticana, fondo urbinate) coi *Tractatus primus secundus, tertius*, che precedono la *Divina proportione* di LUCA PACIOLI, il conferenziere dimostra che veramente questi fu plagiario.

Dà poi una brevissima notizia del *Libellus*, dalla quale apparisce che Piero de' Franceschi, pittore, conosceva benissimo la geometria di Euclide, e sapeva servirsi dell'algebra del suo tempo per risolvere problemi di geometria.

Dopo brevi osservazioni del prof. FOÀ sulla comunicazione precedente, il presidente propone che la seduta di domani, destinata a questioni didattiche, sia presieduta dal prof. VAILATI. L'assemblea approva per acclamazione.

Il prof. G. DE GALDEANO fa omaggio di varie sue pubblicazioni e il presidente a nome dell'assemblea ringrazia.

Terza seduta - Giovedì 9 aprile (ore 9 - 12).

Presidente: VAILATI.

Il presidente Vailati prega il prof. FEHR di coadiuvarlo nella presidenza. Si svolgono le seguenti comunicazioni:

1. GUTZMER, *Ueber die reformbestrebungen aus dem gebiet des mathematischen unterricht in Deutschland.*

L'autore dà relazione sui lavori della *Unterrichts Kommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Aerzte* indicando, le linee generali del progetto di riforma di questa commissione, che è stata stabilita dopo il congresso di Heidelberg, e che ha ultimamente finito i suoi lavori.

Alla comunicazione del prof. GUTZMER il prof. SIMON (Strasburg) osserva che per quanto riguarda le proposte della commissione per le scuole di secondo grado si può applicare ad esse il detto di Lessing " Das Neue nicht gut, und das Gute nicht Neu ".

Il prof. SUPPANTSCHITSCH osserva al prof. GUTZMER che egli teme che l'insegnamento delle matematiche non sia reso troppo frammentario dalle applicazioni; egli è del parere che si debba sempre insistere sui concetti, e non passare all'applicazione se non dopo essersi assicurati che gli alunni abbiano ben compresi quei concetti.

2. BOREL, *Les mathématiques dans l'enseignement secondaire en France.*

Comincia coll'accennare come l'insegnamento secondario in Francia sia diviso in varie sezioni come risulta dal seguente quadro:

PRIMO CICLO 11-14 anni	SECONDO CICLO 15-17 anni
A	A — latino - greco B — latino - lingue vive C — latino - scienze
B	D — scienze - lingue vive

Nelle sezioni A, B del secondo ciclo l'insegnamento delle matematiche è estremamente ridotto, e perciò l'oratore si ferma solo sulle sezioni C, D del secondo ciclo.

Espone come in queste sezioni siano stati introdotti alcuni concetti che prima erano riservati all'insegnamento superiore, cioè il concetto della derivata, come coefficiente angolare del tangente, e la nozione di movimento, concetti che egli ritiene non siano più difficili ad esser compresi del teorema di Pitagora. Accenna anche alla definizione di *coseno* per mezzo del triangolo rettangolo.

Il prof. Niewenglowski dice che il concetto di derivata è facile quanto il teorema di Pitagora per il prof. Borel, ma non per gli scolari. Le nozioni di calcolo infinitesimale sono difficili, e devono esser date a dosi infinitesimali. Fa constatare che in Francia la scelta di una sezione piuttosto che di un'altra è fatta degli studenti prendendo per criterio la maggior facilità degli esami. Avviene una animata discussione alla quale prendono parte Peano, Marotte, Pittarelli, Zeuthen, Enriques.

3. Godefroy, *The teaching of mathematics in English public Schools for boys.*

Questa comunicazione sull'*Insegnamento delle matematiche nelle scuole maschili inglesi* viene largamente riassunta dal Presidente Vailati in assenza dell'autore.

A questa comunicazione il prof. Gibson fa seguire alcune osservazioni riferentisi allo stato dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie scozzesi in confronto a quello delle scuole dell'Inghilterra esclusivamente considerate dal prof. Godefroy.

4. Smith, *The teaching of secondary Mathematics in the United States.*

Egli dichiara di avere in vista nella sua Comunicazione i seguenti unici scopi: 1° mettere brevemente in rilievo le influenze storiche che hanno contribuito al presente stato degli studi matematici in America; 2° render note le condizioni attuali dell'insegnamento matematico negli Stati Uniti; 3° accennare alle influenze che ora agiscono per dar nuova forma allo insegnamento secondario; 4° considerare alcuni dei nuovi indirizzi; 5° suggerire alcune questioni che una sezione come la presente potrebbe con vantaggio prendere in considerazione in un Congresso Internazionale mediante la formazione di un Comitato che rappresentasse le principali Nazioni interessate.

Quest'ultimo punto dovrebbe esser preso in considerazione da coloro che saranno incaricati di preparare il prossimo Congresso, poichè la probabile influenza stimolatrice di un Comitato internazionale sul miglioramento dell'insegnamento matematico sarà tale da giustificare il tentativo.

5. Suppantschitsch, *L'application des idées modernes à l'enseignement secondaire des mathématiques en Autriche.*

È necessario, a suo avviso, introdurre nell'insegnamento secondario la nozione di funzione e di derivata, stabilendo questa dapprima senza la nozione del limite. Se ne stanno facendo attualmente in Austria delle esperienze che condurranno, senza dubbio ad un riordinamento definitivo.

6. Beke, *Ueber die matematischen unterricht in Ungarn.*

Le riforme ungheresi sono connesse con quelle proposte dalla Commissione tedesca ricordata dal Gutzmer: è stata nominata anche in

Ungheria una Commissione che si occupa delle questioni riguardanti in genere l' insegnamento, e che mira a trasformare l'insegnamento della matematica mediante semplificazioni nei programmi, introduzione d'esercizi grafici; mediante l'introduzione del concetto di funzione e con più intimo contatto colle applicazioni pratiche; mediante la fusione della stereometria colla geometria descrittiva; e finalmente mediante lo sviluppo del senso economico e coll'introduzione dei concetti fondamentali del calcolo differenziale e integrale.

7. VAILATI, *Su alcuni caratteri degli attuali programmi per l' insegnamento della matematica nelle scuole secondarie.*

Secondo gli attuali programmi, nell'insegnamento dell'algebra son troppo ritardati gli esercizi sulla risoluzione delle equazioni; nell'insegnamento della geometria si trascura nel primo stadio di porlo in intima relazione coll'insegnamento del disegno.

Accenna all'utilità di introdurre il concetto di derivata nell'insegnamento secondario superiore.

Prendono parte alla discussione il prof. AMODEO per dichiarare che già molti professori inspirano il loro insegnamento a vedute analoghe a quelle espresse dal prof. Vailati, il quale replica subito che ciò è da attribuirsi non già ai programmi, ma alla libertà che fortunatamente in Italia è concessa agli insegnanti circa lo svolgimento del programma ufficiale.

Il prof. Vailati propone e l'Assemblea approva per acclamazione che la seduta di domani sia presieduta dal prof. ZEUTHEN.

Quarta seduta - Venerdì 10 aprile (ore 9,15 - 12,15).

Presidente: ZEUTHEN.

Si svolgono le seguenti comunicazioni:

1. MARCOLONGO, *Un trattato inedito di meccanica di* VINCENZO DE FILIPPIS, *anteriore alla " Mécanique analytique „ di* LAGRANGE.

Il conf. parla di un matematico calabrese, ministro della Repubblica Partenopea del 1799, e morto vittima della reazione borbonica alla fine del 1799. Il de Filippis aveva preparato un trattato di meccanica che è stato certamente scritto prima della Mécanique di Lagrange e che il conf. ha potuto esaminare tra i manoscritti che ancora si conservano dagli eredi. Rileva alcune cose notevoli di tale trattato e segnala soprattutto il fatto che il de Filippis abbia tentato una dimostrazione generale — per i sistemi rigidi — del principio dei lavori virtuali.

Il prof. LORIA presenta una copia del 4° volume delle *Vorlesungen über Geschichte der Matematik* di Cantor, inviata dall'editore come omaggio al Congresso. Aggiunge che il piano di questo volume fu stabilito nel Congresso di Heidelberg, e l'editore ha voluto con delicato pensiero che la prima copia di questo volume sia presentata al 4° congresso.

Propone l'invio di un telegramma di rallegramento all'illustre storico coll'augurio che possa aggiungere nuovi volumi alla sua opera grandiosa. Il Presidente si associa, e la proposta viene approvata per acclamazione.

Immediatamente il presidente formula il seguente telegramma:

" Prof. CANTOR — Heidelberg. — La Section historique du Congrès des mathématiciens en recevant avec joie le IV volume de vos VORLESUGEN vous adresse ses plus cordiales felicitations et ses voeux les plus sincères. — Président H. G. ZEUTHEN ".

2. FEHR, *Les Mathématiques dans l'enseignement secondaire en Suisse.*

Dopo aver esposto sommariamente l'organizzazione in generale dell'insegnamento secondario superiore in Svizzera, il sig. Fehr mostra il posto che occupano le matematiche, principalmente nelle sezioni classiche e tecniche. È da osservare che nei ginnasi classici si assegnano quattro ore settimanali alle matematiche, e che in esse da lungo tempo si fa posto alla trigonometria piana e sferica, alla geometria analitica e per conseguenza anche alle nozioni sulle funzioni semplici.

3. STEPHANOS, *Les Mathématiques dans l'enseignement secondaire en Grèce.*

Dopo aver tracciato in poche parole lo stato dell'istruzione in Grecia dalla presa di Costantinopoli fino al 1827, epoca della liberazione della Grecia, il sig. STEPHANOS espone ciò che si riferisce ai programmi dell'insegnamento matematico in Grecia, e alla riforma introdotta nel 1907 in occasione della votazione di una nuova legge sui libri didattici.

4. ARCHENHOLD, *Ueber die Bedeutung des mathematischen Unterrichts im Freien in Verbindung mit Reformvoschlägen für den Lehrgang.*

I concetti matematici devono essere dedotti dall'osservazione della realtà; è questo appunto il principio dell'insegnamento. Le differenti specie di angoli devono essere presentate indicando gli alberi, considerando case, crocicchi di strade, ecc. Nessun problema deve esser risoluto senza che ne siano date prove rigorose, ma i concetti che vengono applicati nelle dimostrazioni devono in principio venire acquisiti col riconoscimento di oggetti reali, non modelli. I più semplici apparati di misura devono trovare subito applicazione per rettificare i giudizi degli occhi.

Ritiene che con tal metodo si possa fare in dieci ore quello che altrimenti richiederebbe degli anni.

Il sig. GUBLER di Zurigo osserva in proposito che si deve distinguere in quali studi gli scolari vengono iniziati ai concetti geometrici. Per fanciulli dai 9 ai 10 anni si può operare solamente con oggetti reali; più tardi nelle scuole medie occorre approfondire i concetti; allora entra in giuoco l'astrazione. Non crede che in dieci ore si possa, secondo le idee di Archenhold, esaurire un programma che con altri metodi esigerebbe molti anni.

5. ANDRADE, *Quelques observations psychologiques recueillies dans les enseignements scientifiques d'initiation.*

Prendendo come esempio quattro fatti particolarissimi osservati, l'autore invoca il piano della riforma più urgente dell'insegnamento della geometria, e la riduce a due libri; nel primo i triangoli, il diedro, il triedro; nel secondo la similitudine e la misura dell'estensione.

Egli limita a questo punto la riforma a causa del campo strettissimo dell'insegnamento secondario, che la cultura generale non permette di subordinare alla preparazione alle matematiche speciali e ricorda a questo proposito le profonde verità scritte in proposito dal sig. Marcello Prevost nelle " Lettere a Francesca ", di cui si è potuto dire con ragione che esse dovrebbero esser lette e meditate dagli allievi della scuola normale.

6. Conti, *Sulla iniziazione alle matematiche e sulla preparazione matematica dei maestri in Italia.*

Le riforme tendenti a introdurre nell'insegnamento secondario alcuni concetti matematici finora ritardati, stando ai programmi, fino all'Università, devono essere accompagnate da altre per gli istituti infantili e per le scuole elementari, di guisa che l'insieme delle cognizioni impartite in questo primissimo stadio sia di razionale avviamento allo studio successivo.

Urge dunque rivolgere l'attenzione nella scuola primaria, verso l'*iniziazione*, seguendo i principi in base ai quali il Laisant recentemente redigeva la sua aurea *Initiation mathématique*.

Coll'attuale ordinamento della Scuola Normale, la preparazione matematica dei maestri elementari non è adeguata alla delicatezza ed importanza della missione che è loro affidata, onde è da augurarsi che non si ritardi di più il riordinamento delle scuole Normali imposto dalla Legge 8 luglio 1904.

Il prof. Frattini vorrebbe che le proposte del Conti fossero concretate in un ordine del giorno. Il Conti risponde che ciò non gli pare negli usi di questi Congressi, ma se l'assemblea lo desidera, l'ordine del giorno potrà esser presentato domani.

Il prof. Frattini aggiunge che non può associarsi agli elogi che il Conti fa dei programmi ministeriali e delle annesse istruzioni, perchè negli uni e nelle altre si trovano molti grossi strafalcioni, da lui già denunziati e discussi nel giornale *La scuola educatrice*.

Il prof. Piazza chiede che nell'ordine del giorno promesso per domani sia incluso il voto che nelle scuole pedagogiche annesse all'Università per i maestri elementari sia compresa una cattedra per l'insegnamento delle matematiche.

Il prof. Conti replica che nell'elogio che ha fatto ha inteso di riferirsi alle istruzioni e non ai programmi, e senza entrare nei particolari pei quali conviene col Frattini che sono da lamentarsi tanto pei programmi quanto per le istruzioni dei grossi errori.

7. Garcia de Galdeano Zoel, *Alcune notizie sull'insegnamento matematico in Spagna.*

Egli dice che in Spagna le questioni politiche hanno ritardato il progresso della scienza per un piano completo d'istruzione pubblica. Pertanto l'attuale creazione della società scientifica spagnola, il cui primo atto sarà il Congresso matematico di Saragozza, permetterà che incominci un'epoca di rinascimento scientifico.

Lamenta che l'insegnamento elementare nelle Università spagnole torni a danno dell'insegnamento superiore. Termina accennando ai mezzi pedagogici che, secondo il suo parere, sono i più atti a stabilire un equilibrio fra il progresso della scienza e la potenzialità intellettuale per l'apprendimento della scienza stessa.

Il Presidente propone che la seduta di domani sia presieduta dai signori Picard e Simon; l'assemblea approva per acclamazione.

Quinta seduta - Sabato 11 aprile (ore 9 - 12,30).

Presidenti: PICARD e SIMON.

Il prof. Picard apre la seduta dando anzitutto comunicazione del seguente telegramma:

" Congrès mathématiciens, Section historique — Rome. — Remerciments sincères à vous, chéris collègues; en pensée je suis avec vous. — MAURICE CANTOR ".

Avverte che per esaurire il lunghissimo ordine del giorno ogni oratore non potrà parlare oggi per più di dieci minuti.

Hanno luogo le seguenti comunicazioni:

1. GALLUCCI, *La quistione logica e gnoseologica nei fondamenti della matematica.*

La critica dei principî della matematica appartiene alla matematica ed alla filosofia; donde un doppio punto di vista nella loro trattazione: il punto di vista logico e quello gnoseologico. L'autore esposte sommariamente le conseguenze di tale duplicità di vedute, accenna ad una possibile conclusione che potrebbe condurre ad una rielaborazione della teorica della conoscenza, in cui si tenga conto degli ultimi sviluppi dei principii della scienza.

2. BROGGI, *Sui fondamenti del calcolo delle probabilità.*

Dall'oratore è proposta una definizione descrittiva (di terza specie) del concetto di probabilità, ed è dimostrata la compatibilità del sistema e la irreduttibilità del sistema di proposizioni assunte a definire la probabilità.

3. EMCH, *Der Rechenkünstler Winkler unde seine methoden.*

Una delle personalità più interessanti nel campo dell'arte di calcolare è il grande calcolatore a memoria Giovanni Giacobbe Winkler. Mentre in varie memorie si è molto parlato di simili calcolatori non si trova nulla su Winkler, ed è scopo di questa comunicazione, dare alcune notizie su quest'uomo meraviglioso.

Egli nacque il 23 febbraio 1831 in Wermatswill e morì, povero ed abbandonato, il 25 agosto 1893 all'Ospedale cantonale di Stanz. Winkler risolveva facilmente a memoria ogni problema che richiedesse calcoli numerici anche complicati.

Egli utilizzava anche tutte le regole di calcolo rapido che si possono dedurre dalle formole algebriche. Per es.:

$$604 \times 596 = (600 + 4)\ (600 - 4) = 360000 - 16 = 359984.$$

4. LORIA, *Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques.*

L'oratore, prendendo occasione da un articolo recente del signor Eneström, fa notare come vi siano delle persone che sarebbero disposte a coltivare la storia delle matematiche, ove trovassero chi li guidasse nel non facile cammino; e fa notare, come, essendo difficile l'istituzione di corsi " ad hoc ", il miglior sistema che si presenti sia la compilazione di un " Manuale per le ricerche sulla storia delle matematiche ", opera collettiva il cui piano sarebbe assai opportunamente determinato da un congresso internazionale. Per preparare la relativa discussione l'oratore indica i varii argomenti che, secondo lui, dovrebbero trovar posto nell'opera progettata e termina presentando alla Sezione un suo progetto di *Indice delle materie* che essa dovrebbe contenere.

Il prof. GUBLER sulla comunicazione del sig. Loria fa le seguenti osservazioni:

Si può educare lo spirito della gioventù alla storia della matematica nei modi seguenti: 1° per mezzo di notizie storiche date nell'insegnamento; 2° per mezzo di ritratti di grandi matematici nelle aule scolastiche; 3° per mezzo di un piccolo manuale della storia della matematica con ritratti e notizie biografiche interessanti, scritto in modo speciale per la gioventù.

5. AMODEO, *Appunti su Biagio Pelicani da Parma.*

L'autore riporta un brano di M. Cantor sull'importanza di conoscere il contenuto dell'unico trattato stampato, fino ad ora noto, di Biagio da Parma, contenuto in una rarissima collezione di trattati matematici pubblicata a Venezia nel 1505, e dice che, avendo avuta questa collezione nelle mani, vi ha trovato non un solo, ma due trattati di Biagio da Parma, ed un altro trattato ignoto anch'esso finora di Giovanni de Casali.

Dalla lettura dei due trattati di Biagio da Parma, ha rilevato che il cognome di lui si deve scrivere PELICANI invece di Pelacani, e che in Bologna questi sostenne una disputa sull'*Urto dei corpi duri*, che forma l'argomento del trattato ora trovato.

Riassume il contenuto del trattato intitolato: *Tractatus de latitudinibus formarum Blasii de Parma,* e conchiude che in esso la concezione di *Oresme* sulla latitudine delle forme geometriche piane fu allargata, ingigantita e complicata da BIAGIO PELICANI, deviandola dalla dritta via, che avrebbe dovuto percorrere per arrivare più presto alla concezione della Geometria analitica di DESCARTES, e che in ciò fu subito seguito dai suoi contemporanei, contribuendo a far mettere da banda la semplicità della questione, come era stata concepita da ORESME.

6. Il prof. PITTARELLI presenta poi due lettere inedite di Lagrange all'abate di Caluso esistenti nell'archivio storico del Municipio di Asti.

Il prof. Pittarelli trovò le lettere nell'archivio di Asti, e ora le presenta (fotografate per l'occasione e donate al Congresso dal Municipio di Asti). È lieto di consegnarle nelle mani dei due presidenti odierni, proff. Picard e Simon, l'uno della Francia l'altro della Germania, nazioni che Lagrange, nato e divenuto celebre a Torino, illustrò poi col suo nome per l'ospitalità che n'ebbe.

Chiede che delle due copie una resti alla R. Accademia dei Lincei e l'altra alla facoltà di scienze di Roma.

Termina colla proposta di inviare al Sindaco d'Asti un telegramma di ringraziamento, che viene così formulato:

" Sindaco — Asti

" Questa sezione congresso matematico, udita comunicazione Pittarelli, ringrazia vossignoria bellissimo e graditissimo dono.

Presidenti: PICARD-SIMON ".

7. AMODEO, *Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche.*

Accenna alla difficoltà che si trova nelle ricerche storiche di conoscere chi sia il primo autore di una teoria o di una proposizione, e come nel dubbio la storia viene falsata dando allo sviluppo delle idee un andamento diverso da quello che effettivamente ha avuto. E rileva la necessità di sopprimere questa difficoltà. Accenna alla formazione della storia delle matematiche da MONTUCLA, a CHASLES al LIBRI, al CANTOR; all'importanza che l'opera del Libri ha avuta per le note, all'importanza delle *Collezioni matematiche di Pappo* per le notizie che ha dato sull'opere perdute, e conchiude che occorre ordinare il materiale storico; e ciò si ottiene creando l'*Archivio delle matematiche*.

Spiega il concetto di questo Archivio e dice che esso dovrebbe essere costituito con la formazione di un comitato centrale e di comitati regionali nelle singole Nazioni, e di un comitato centralissimo di tutte le Nazioni; e che alla spesa sopperirebbero gli acquisti che le biblioteche dovrebbero fare in triplice copia di ogni fascicolo dell'archivio.

Termina col proporre il seguente voto:

Il Congresso internazionale dei matematici udita la proposta del prof. AMODEO sulla formazione di un *Archivio delle matematiche* fa voto:

1°. Che in ogni centro scientifico si costituiscano i matematici della regione in comitato per lo spoglio e riassunto di tutte le opere dei matematici a preferenza di quella regione, e tale Comitato s'incarichi della pubblicazione di ciascun riassunto in opuscolo separato in formato identico a quello adottato dalla Enciclopedia matematica, che ora si sta pubblicando, in una delle quattro lingue ammesse nei Congressi, ed in numero di esemplari sufficienti per provvederne tre a ciascuna delle biblioteche dei centri scientifici del mondo.

2°. Che in ogni Nazione si formi un Comitato centrale che raccolga le notizie degli opuscoli stampati e in corso di studio per informarne chiunque aspiri a collaborare, onde non avvenga spreco di energia.

3°. Che un Comitato centrale si assuma il compito di Comitato centralissimo di tutte le Nazioni.

4°. Che le biblioteche di tutti i centri scientifici del mondo assumano l'impegno di acquistare a prezzo determinato i riassunti pubblicati per costituire ciascuna il proprio Archivio delle matematiche.

Il prof. CONTI dice che gli sembra più opportuno che il Congresso *affermi semplicemente la convenienza, in massima, di creare un archivio delle scienze matematiche*, senza entrare affatto nei particolari. Il professore Amodeo accetta la modificazione e il Congresso approva la proposta del prof. Amodeo emendata nel senso proposto dal prof. Conti.

Alle 10.45 il Presidente sospende la seduta.

Alle ore 11 è riaperta la seduta dal Presidente SIMON.

Il prof. CONTI domanda la parola per dichiarare che non ha preparato l'ordine del giorno nel quale, secondo le proposte Frattini e Piazza, avrebbero dovuto esser sintetizzate in particolari voti le idee che egli ha sostenuto nella sua comunicazione; non l'ha preparato perchè, come aveva accennato anche ieri, non gli pare che sia questa la sede per emettere un tal voto, e ove l'Assemblea non insista, egli per suo conto ritiene che sia sufficiente che sia venuta al Congresso la questione che fu oggetto della sua comunicazione e che questa passi agli atti del Congresso stesso.

L'Assemblea consente nel parere espresso dal prof. Conti e passa all'ordine del giorno.

8. De Amicis, *L'equivalenza in planimetria indipendentemente dalle proporzioni e dal circolo.*

Basandosi sostanzialmente soltanto sull'equivalenza dei parallelogrammi, equibasi ed equialti, l'autore stabilisce il teorema " se un " triangolo ha gli angoli uguali a quelli di un secondo triangolo " il rettangolo contenuto da un lato dell'uno e un lato dell'altro è " equivalente al rettangolo dei lati corrispondenti „ indipendentemente dalle proporzioni e dalle proprietà del circolo, con dimostrazione planimetrica e senza servirsi del teorema sui triangoli omotetici.

Su questa comunicazione il prof. Gremigni fa alcune osservazioni.

9. Prouwer, *Le potenze possibili.*

Ricercando come principalmente sia possibile costruire un sistema matematico apparisce come non possano esistere più di tre potenze infinite, cioè la *numerabile*, la *numerabile incompleta*, la *continua.*

10. Delitala, *La tetraedrometria piana nelle scuole secondarie.*

Esaurito così l'ordine del giorno, e nessun'altro chiedendo la parola, il Presidente Simon alle 11 $^3/_4$ con un saluto ed un ringraziamento, ricambiato dal prof. Pittarelli, chiude la seduta, e dichiara finiti i lavori della IV Sezione.

Il prof. Enriques, introduttore, riapre la seduta per domandare all'Assemblea se, pure essendo stati dichiarati chiusi i lavori della Sezione, non creda opportuno occuparsi dell'attuazione della proposta, già in massima approvata dalla Sezione, sulla costituzione di un Comitato internazionale per lo studio delle questioni riguardanti le riforme dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie delle differenti Nazioni.

L'Assemblea consentendolo, è aperta la discussione la quale si fa animatissima.

Si finisce con l'approvazione dell'ordine del giorno seguente proposto dal prof. Castelnuovo:

" La Sezione IV, avendo riconosciuto l'importanza di un esame accurato dei programmi e dei metodi d'insegnamento delle matematiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni, affida ai professori Klein, Greenhill e Fehr, l'incarico di costituire un Comitato internazionale che studi la quistione e ne riferisca al prossimo Congresso „.

La Sezione su tale proposta domanda l'appoggio dell'Assemblea generale.

Alle ore 12.30 i lavori della Sezione IV sono definitivamente chiusi con un saluto del Presidente ricambiato dai proff. Archenhold e Fehr.

Divertimenti.

Non possiamo chiudere questa breve istoria del Congresso senza accennare rapidamente anche ai trattenimenti che il Comitato aveva organizzato per rendere più gradevole ai congressisti e specialmente alle loro signore, il soggiorno in Roma.

Tutti i congressisti ebbero libero ingresso in tutti i monumenti e musei governativi e municipali dal 1° al 12 aprile.

Vari artisti e professori competenti accompagnarono le signore nelle visite ai detti musei e fornirono opportune illustrazioni in diverse lingue, secondo il programma seguente:

Martedì 7	dalle 10 alle 12		— Foro Romano (Ingresso Via delle Grazie).
Mercoledì 8	"	"	— Galleria Borghese.
Giovedì 9	"	"	— Museo delle Terme.
Venerdì 10	"	"	— Vaticano (Convegno alle ore 10 alla Porta degli Svizzeri).
Sabato 11	"	"	— Galleria Corsini.

Domenica sera 5, per gentile invito del Rettore dell'Università di Roma, Prof. Comm. TONELLI, quasi tutti i congressisti già arrivati a Roma e numerosissime signore si riunirono ad amichevole convegno nell'Aula Magna dell'Università.

Il prof. Tonelli con brevi parole porse agli intervenuti un caldo e cordiale saluto.

Mercoledì sera 8, alle ore 22 ebbe luogo un ricevimento nel Museo Capitolino, offerto ai congressisti dal Municipio della città di Roma.

Facevano gli onori di casa, con signorile cortesia, il Sindaco sig. NATHAN, il prof. TONELLI e gli altri Assessori municipali.

Le stupende sale dei musei capitolini, che racchiudono tanti tesori d'arte, splendidamente illuminate da grandi lampade ad arco, facevano un effetto meraviglioso e destarono la più sincera ammirazione nella folla cosmopolita che le animò gaiamente per alcune ore.

Nel pomeriggio del giovedì 9, furono sospesi i lavori del Congresso affinchè tutti i congressisti e loro signore potessero prender parte alla visita al Palatino organizzata da S. E. il Ministro RAVA in loro onore. Il prof. VAGLIERI ed altri illustrarono in varie lingue lo storico colle e le secolari rovine, commentando in particolare le scoperte archeologiche risultate dai più recenti scavi. Alla fine della visita in prossimità dell'uscita dalla parte della Via Sacra, i congressisti trovarono un sontuoso rinfresco.

La sera di venerdì 10, ebbe luogo, in onore dei congressisti, un concerto diretto dall'illustre maestro Mancinelli nell'Anfiteatro *Corea*, di recente inaugurato.

Finalmente domenica 12, terminati i lavori del Congresso, ebbe luogo una gita a Tivoli. Cominciando dalle 8,35 varî treni speciali del tram Roma-Tivoli trasportarono i congressisti e le loro signore agli avanzi della villa di Adriano, ove trovarono un lauto rinfresco offerto dal Municipio di Tivoli. Proseguirono per Tivoli, dove era preparata un'ottima colazione all'aria aperta per oltre 600 persone presso lo *Chalet des Cascades*. Visitarono poi le bellissime *cascate* e la splendida villa d'Este, e tornarono la sera a Roma, dolenti che per la simpatica riunione fosse giunta troppo presto la parola fine, e che dovessero ormai tornare a disperdersi nei vari paesi del mondo.

INTORNO AD ALCUNI PROBLEMI METRICI
che s'incontrano in Geometria descrittiva

Nota di GINO LORIA

In altra non lontana occasione [1] io ebbi a notare come i ribaltamenti costituiscano un artificio certamente prezioso per risolvere i problemi metrici di Geometria descrittiva, ma al quale è consigliabile non fare appello che nei casi in cui non si scorga altra via che conduca allo scopo; e ciò perchè le costruzioni a cui così si giunge non toccano che raramente il grado di loro massima semplicità. Siami lecito confermare oggi siffatta opinione, svolgendo alcune considerazioni che guidano a costruzioni, che credo nuove e che sono di esecuzione estremamente agevole, per alcuni fondamentali problemi metrici, considerazioni dalle quali sembra emergere essere di regola più conveniente il ridurre la ricerca di una distanza alla determinazione della distanza di due piani fra loro paralleli piuttostochè farla dipendere (come di regola si pratica) dalla misurazione della distanza di due punti.

1. Il punto di partenza di tutte le considerazioni seguenti sta nella semplice osservazione seguente: " *Se* τ_1 *e* τ_2 *sono due piani fra loro paralleli e si chiama* δ *la loro distanza,* Δ *la distanza delle loro traccie su un piano qualunque* π *(quadro) e* β *la comune inclinazione di quei piani sopra tale piano, sussisterà la relazione* $\Delta = \dfrac{\delta}{\operatorname{sen} \beta}$ ". La verità di tale proposizione risulta palese notando che, se si taglia il sistema dei tre piani π, τ_1, τ_2 con un piano perpendicolare alle due rette $\pi\tau_1$, $\pi\tau_2$, si ottengono due rette fra loro parallele alla distanza δ ed una trasversale facente con esse l'angolo β e su cui quelle parallele staccano un segmento $= \Delta$.

2. Segue dalla proposizione precedente un metodo per " *determinare la distanza fra due piani paralleli di cui sia nota la rappresentazione (per esempio)* [2] *nel metodo della projezione centrale* "; se infatti [3] (fig. 1) $[t_1, i']$ e $[t_2, i']$ sono i due piani dati, t_1, t_2, i' saranno tre rette fra loro parallele, e mediante un notissimo procedimento (basato sulla considerazione del triangolo rettangolo C_0HK) si determinerà l'incli-

[1] V. la mia nota *Rette bisettrici e piani bisettori* nel Vol. XX (1904) di questo *Periodico*.

[2] Nel presente scritto uso esclusivamente il metodo della projezione centrale; ma al lettore sarà agevole riconoscere come il campo di applicabilità della proposizione esposta nel n. 1 abbracci anche il metodo di Monge ed altri ancora.

[3] Mi sia permesso di rimandare il lettore al I Vol. delle mie *Vorlesungen über darstellenden Geometrie* (Leipzig, 1907) pel significato delle locuzioni e delle notazioni da me adoperate.

nazione β sul quadro dei due piani dati; portando allora sulla retta HK il segmento HL eguale alla distanza Δ fra le rette t_1, t_2 e projettando ortogonalmente L in M su C_0H, la distanza richiesta sarà data dal segmento $LM = \Delta \operatorname{sen} \beta$.

Da questa costruzione si trae un metodo uniforme per risolvere alcune altre questioni metriche, quali le seguenti:

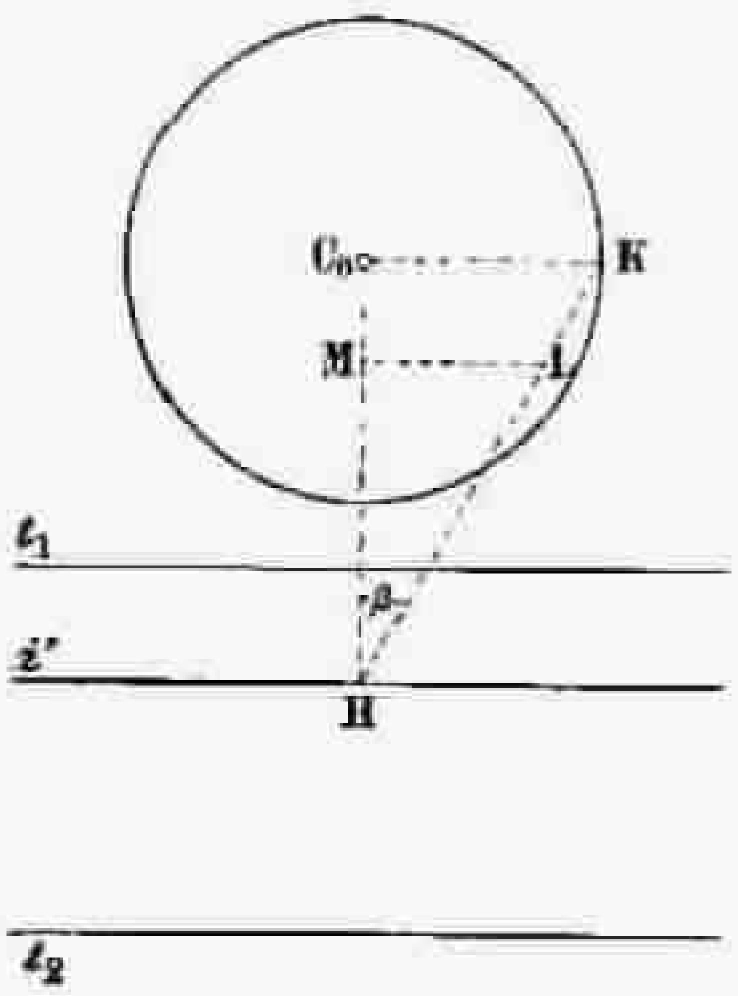


Fig. 1.

a) *Determinare la minima distanza fra due rette sghembe* $r_1 \equiv (T_1, I'_1)$ e $r_2 \equiv (T_2, I'_2)$. La distanza cercata x non è che lo spessore dello strato limitato dai due piani condotti da ciascuna delle rette date parallelamente all'altra; tali piani hanno per comune retta di fuga la retta $i' = I'_1 I'_2$ e per traccie le parallele t_1, t_2 condotte ad essa risp. da T_1 e T_2; onde per ottenere x non si ha che da applicare la costruzione precedente.

b) *Determinare la distanza fra due rette parallele* $r_1 \equiv (T_1, I')$ e $r_2 \equiv (T_2, I')$. La distanza cercata non differisce dallo spessore dello strato limitato dai due piani condotti per le rette date perpendicolarmente al piano τ che esse determinano. Ora tali piani hanno per comune retta di fuga la congiungente di I' con l'antipolo della retta di fuga del piano τ e per traccie le parallele condotte ad essa dai punti T_1 e T_2, onde ecc.

c) *Determinare la distanza di un piano* $[t, i']$ *da una retta ad esso parallela* (T, I') (si suppone quindi che il punto I' cada sulla retta i'). Se pel punto T si conduce la parallela t_1 alla retta t si è ridotti a trovare la distanza dei due piani $[t, i']$ e $[t_1, i']$.

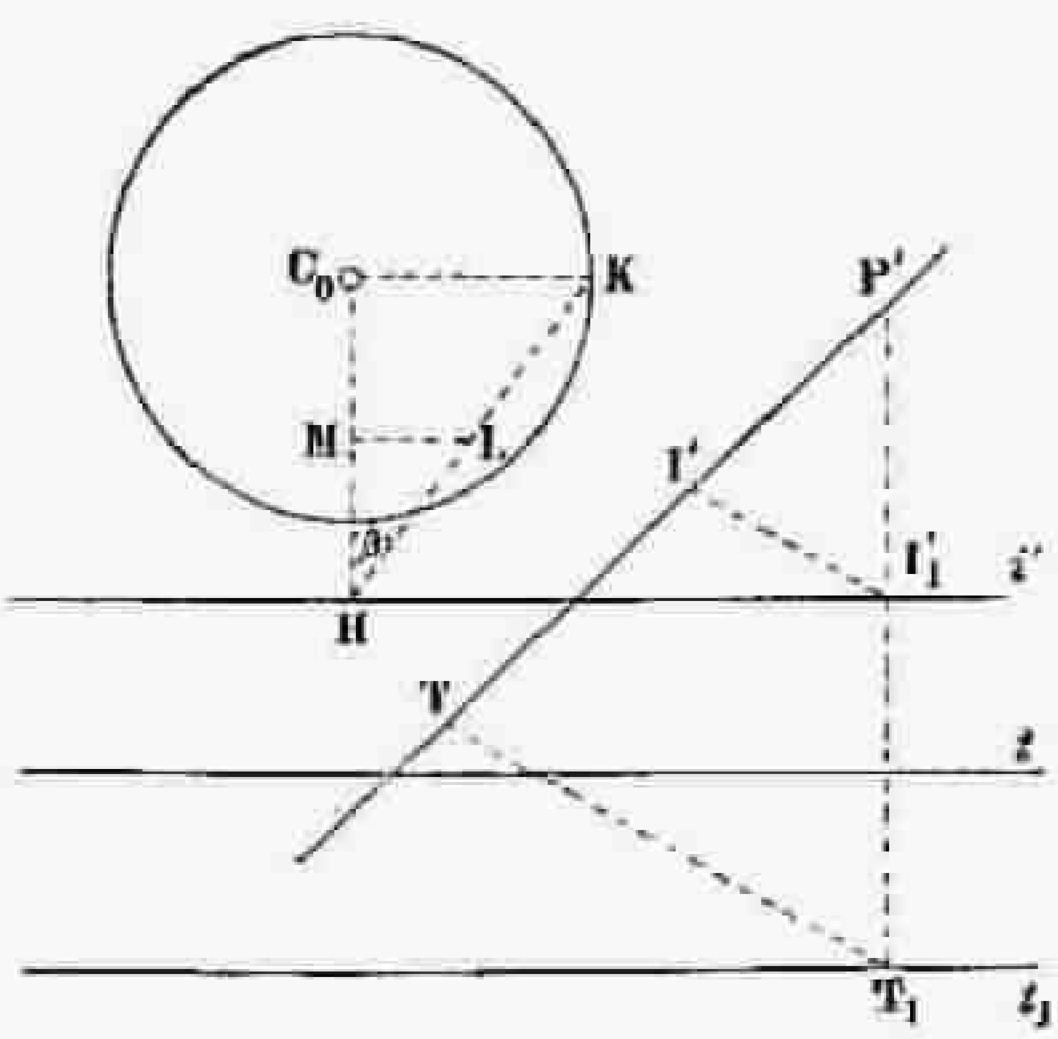


Fig. 2.

3. Applicando ancora la costruzione esposta in principio del numero prec. si giunge ad un procedimento convenientissimo per "*determinare la distanza tra un punto* $P \equiv (TI', P')$ *ed un piano* $\tau \equiv [t, i']$"; si conduca infatti (fig. 2) per P il piano $\tau_1 \equiv [t_1, i']$ parallelo a τ; la distanza fra tale piano ed il dato è la cercata. La semplice ispezione della fig. 2 fa vedere che questo procedimento è assai più semplice di quello che ordinariamente si suggerisce, e che consiste nel condurre da P la normale al dato piano, determinarne il piede Q e trovare la distanza tra i due punti P, Q.

4. La costruzione eseguita nella fig. 1, opportunamente invertita, conduce subito a " *costruire i (due) piani paralleli ad un dato e distanti dallo stesso di una data lunghezza* ". Da ciò si può desumere una nuova procedura per " *determinare i piani bisettori dei diedri formati da due piani* $[t_1, i'_1]$, $[t_2, i'_2]$, *nessuno dei quali sia parallelo al quadro* ". Sia infatti (figura 3) $s \equiv (T, I')$ la retta in cui si tagliano i due dati piani; conduciamo due piani σ_1, σ_2 il primo parallelo a τ_1 alla distanza arbitraria δ, il secondo parallelo a τ_2 e distante da esso ancora di δ; sia r l'intersezione dei piani σ_1, σ_2; le rette r, s sono evidentemente fra loro parallele e determinano uno dei piani richiesti. Per effettuare tale costruzione cominciamo dal determinare le inclinazioni β_1, β_2 sul quadro

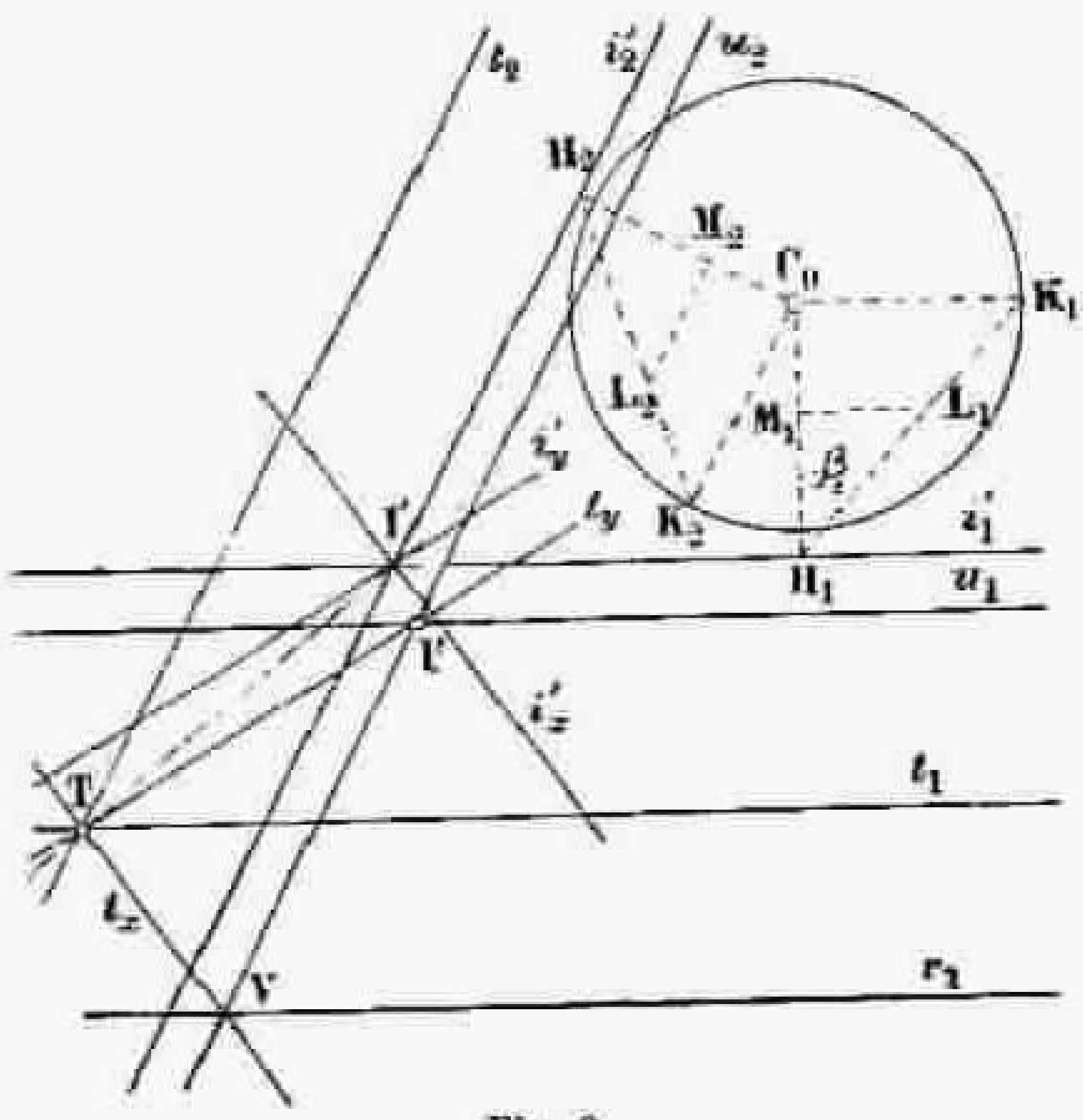


Fig. 3.

dei due dati piani (coll'ajuto dei triangoli $C_0H_1K_1$ e $C_0H_2K_2$); costruiamo poi i triangoli rettangoli $H_1L_1M_1$ e $H_2L_2M_2$ aventi i cateti L_1M_1 e L_2M_2 fra loro eguali $(= \delta)$; pongasi $H_1L_1 = \Delta_1$ e $H_2L_2 = \Delta_2$ e si conducano le rette u_1 e v_1 parallele a t_1 alla distanza Δ_1 e u_2 parallela a t_2 alla distanza Δ_2. Restano così determinati i piani $[u_1, i'_1]$ e $[v_1, i'_1]$ paralleli al primo dei dati piani ed il piano $[u_2, i'_2]$ parallelo al secondo. Chiaminsi U, V i punti u_1u_2 e v_1u_2; le due rette (U, I') e (V, I') determinano con la retta (T, I') due piani $[t_x, i'_x]$ e $[t_y, i'_y]$ che sono evidentemente i due piani richiesti. (¹)

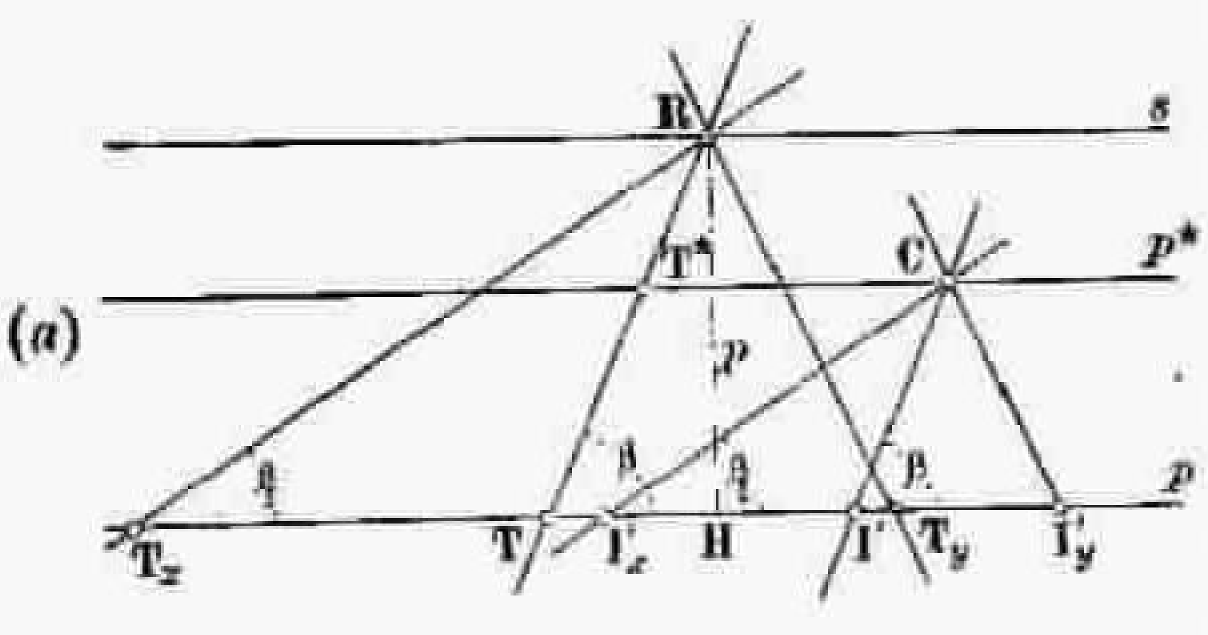


Fig. 4.

5. Per esaurire la questione trattata nel num. prec. dobbiamo esaminare il caso, finora escluso, che uno dei piani dati sia parallelo al quadro. Per trattarlo

(¹) Si noti che nella fig. 3 non furono segnate le rette UI', VI' perchè in realtà non servono.

immaginiamo la figura costituita dal quadro π, dal piano parallelo anteriore π^*, dai piani dati $\tau \equiv [t, i']$ e $\sigma \equiv [\mathrm{TI}', \mathrm{P}']$, nonchè dai piani $\tau_x \equiv [t_x, i'_x]$ e $\tau_y \equiv [t_y, i'_y]$ che bisecano i diedri formati dai dati piani. Siccome i piani τ, τ_x, τ_y passano per una retta τ parallela al quadro così le sei rette $t, i', t_x, i'_x, t_y, i'_y$ sono tutte fra loro parallele. Seghiamo ora tutta questa figura con un piano passante pel centro di projezione e perpendicolare a r; nasce così la fig. 4a o la fig. 4b secondochè il punto P sta o no rispetto al quadro dalla stessa parte

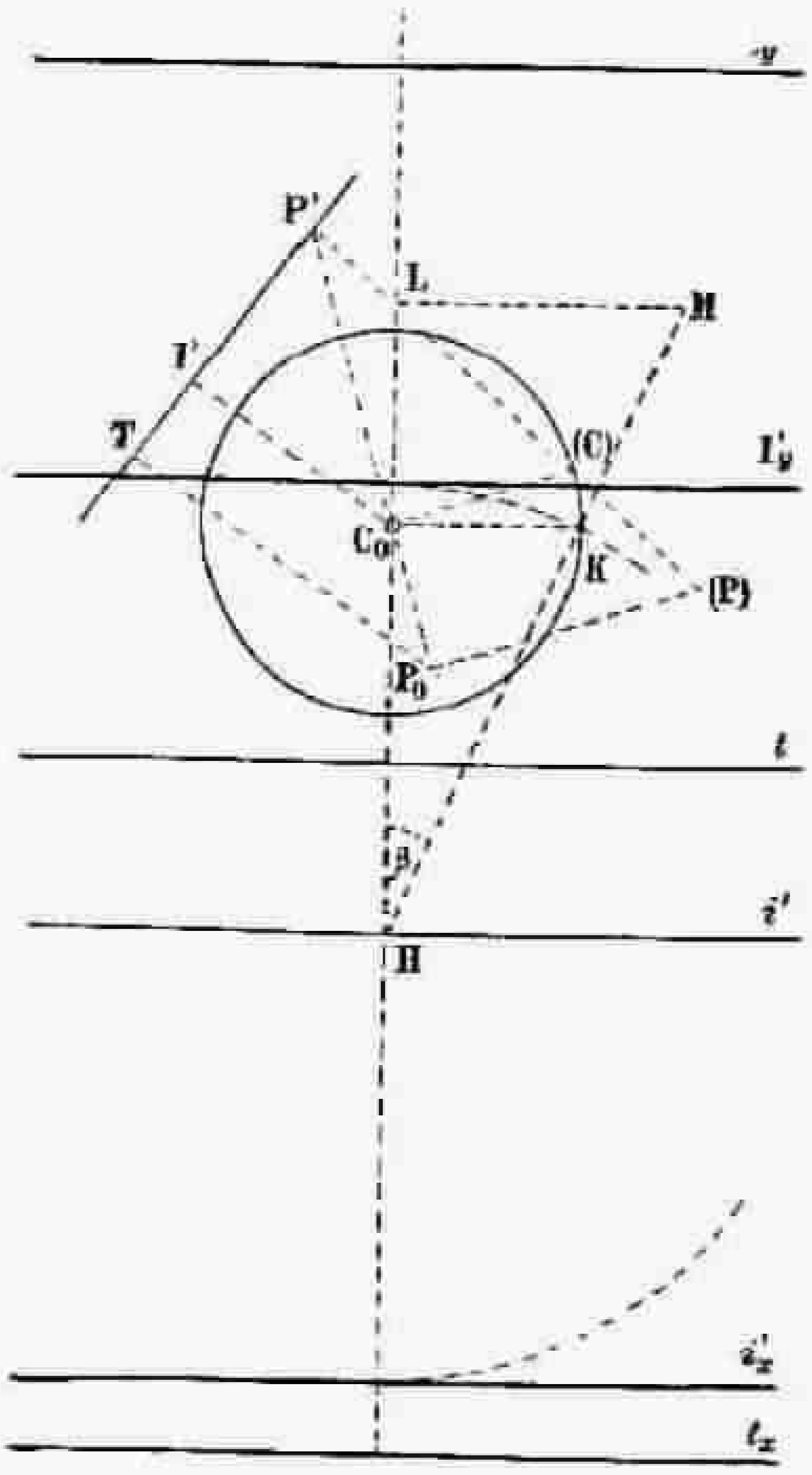


Fig. 5.

da cui trovasi C (cioè a seconda che la quota di P è positiva o negativa); in tali figure si indicarono con le lettere R, T, I', T_x, ..., I'_y le tracce sul piano segante delle rette $r, t, i', t_x, \ldots, i'_y$ e con p, p^*, s quelle dei piani π, π^*, σ. I segmenti $\mathrm{TT}_x, \mathrm{TT}_y, \mathrm{IT}'_x, \mathrm{I}'_y$ misurano allora le larghezze delle omonime striscie di piano. Si chiami poi al solito β l'inclinazione del piano $[t, i']$ sul quadro ed inoltre p la quota del punto P. Allora la semplice ispezione delle figure 4 mostra che:

1°. $\mathrm{IT}'_x = \mathrm{IT}_y = \mathrm{CI} =$ larghezza l del dato piano $[t, i']$;

2°. $\mathrm{TT}_x = \mathrm{TT}_y = \mathrm{TR} = \dfrac{|p|}{\operatorname{sen}\beta}$.

3°. I sensi TT_x, IT_x (oppure TT_y, IT_y) cioè i sensi tt_x, $i'i'_x$ (oppure tt_y, $i'i'_y$) sono concordanti o discordanti secondochè la quota del punto P è positiva o negativa.

Con questi dati nulla di più agevole del determinare gli elementi descrittivi dei cercati piani bisettori. Infatti (fig. 5) si trovi, mediante il triangolo rettangolo $\mathrm{C_0HK}$ l'inclinazione $\beta = \mathrm{C_0HK}$ e la larghezza $l = \mathrm{HK}$ del piano $[t, i']$; il cerchio di centro H e raggio HK taglia la $\mathrm{C_0H}$ in due punti; le parallele condotte da esse a i' saranno i'_x e i'_y. Si determini ora la projezione ortogonale $\mathrm{P_0}$ di P sul quadro e la quota $p = \mathrm{(P)\,P_0}$ dello stesso punto, facendo attenzione al segno di p (nel caso della fig. 5 p è positivo). Si disponga entro l'angolo $\mathrm{C_0HK}$ e normalmente alla retta $\mathrm{C_0H}$ il segmento $\mathrm{LM} = p$. Allora, essendo $\mathrm{HM} = |\,p\,| : \operatorname{sen}\beta$, le due rette parallele a t alla distanza HM saranno t_x, t_y; e si badi che la denominazione di tali rette non è arbitraria ma dev'esser fatta in modo che i sensi tt_x e $i'i'_x$ siano concordanti.

Nel caso particolare in cui il piano σ coincida col quadro questa costruzione si semplifica di molto, perchè la retta t è traccia anche dei due piani cercati; è quindi estremamente facile " *costruire i centri delle sfere che toccano quattro piani dati, uno dei quali coincida col quadro* ".

6. Prima di finire vogliamo aggiungere che l'osservazione esposta nel n. **1** può utilmente invocarsi per risolvere altre questioni più complicate, quale sarebbe la " *rappresentazione in projezione centrale di un poliedro regolare di cui si conosce il piano di una faccia e due vertici consecutivi della stessa* ". Per fissare le idee, si tratti di rappresentare in projezione centrale un dodecaedro regolare e si supponga già nota la rappresentazione dello stesso col metodo di Monge ottenuta supponendo una faccia del poliedro posta sul piano orizzontale. Indichiamo con ABCDE e FGHKL due facce opposte del dodecaedro e con A$\mathcal{A}$, ..., L$\mathcal{L}$ i terzi spigoli dello stesso uscenti risp. da A, ..., L; è noto che i vertici $\mathcal{ABCDE}$ apparterranno ad un piano Σ parallelo a quello σ della faccia ABCDE e distante da questo di una lunghezza eguale al raggio r del cerchio circoscritto al pentagono ABCDE; similmente $\mathcal{FGHKL}$ staranno su un piano T distante dal piano τ della faccia FGHKL della lunghezza r; finalmente i piani Σ, T avranno fra loro una distanza eguale al lato del decagono regolare inscritto nel cerchio di raggio r. Ricordato tutto ciò indichiamo con $[t, i']$ il piano σ e supponiamo dati A' e B'; ribaltando quel piano sul quadro otterremo subito (A) e (B) e quindi potremo completare il pentagono regolare (A) (B) (C) (D) (E); se di più in genere designamo con l'indice 0 le projezioni ortogonali sul piano $[t, i']$ potremo trovare i punti (F_0), ..., (L_0), $(\mathcal{A}_0)$, ..., $(\mathcal{L}_0)$. Riponendo il piano dato dove trovavasi in origine otterremo i punti C', D', E', F'_0, ..., L'_0, $\mathcal{A}'_0$, ..., $\mathcal{L}'_0$.

Applicando poi l'osservazione fatta nel n. 1 e servendosi delle proprietà del dodecaedro dianzi ricordate, potremo ottenere le tracce dei piani Σ, T, τ.

Segnamo ora l'antipolo I' della i', retta di fuga comune ai quattro piani considerati. Allora per trovare, ad es., il vertice F, noi non dobbiamo che determinare l'intersezione del piano τ (di cui già abbiamo la rappresentazione) con la retta passante pel punto F_0 (determinato col mezzo della sua projezione e di un piano che lo contiene) ed avente I' per punto di fuga. Similmente si ottengono tutti gli altri vertici del dodecaedro; ma l'accorto disegnatore non tarderà a riconoscere la possibilità di semplificare le relative costruzioni tenendo conto delle relazioni di parallelismo che intercedono fra parecchie rette connesse al dato poliedro.

RICERCHE SUI SISTEMI LINEARI DI OMOGRAFIE NELLO SPAZIO

(Fasci di omografie generali)

Nota del Dott. ROBERTO BONOLA

In quanto segue, restringendomi allo spazio ordinario, mi propongo di ridimostrare alcune proprietà dei *fasci d'omografie*, contenute in una nota del prof. ENRIQUES, (1) mettendo in rilievo i legami che intercedono fra i fasci d'omografie e i complessi di rette che ad essi si connettono.

1. Siano Ω, Ω' due spazi punteggiati a tre dimensioni, distinti o coincidenti; π_a, π_b due omografie non degeneri fra Ω ed Ω' e $[\pi_a, \pi_b]$ il fascio ch'esse definiscono. L'omografia che si ottiene in Ω' facendo corrispondere fra loro i punti che corrispondono ad uno stesso punto di Ω verrà designata con π_{ab}. I punti uniti di π_{ab} costituiscono in Ω' il 2° *gruppo di punti base del fascio* (cfr. ENRIQUES, l. c.), i punti di Ω che corrispondono ad essi in π_a^{-1} (ovvero in π_b^{-1}) costituiscono il 1° *gruppo di punti base del fascio.* I due gruppi di punti base sono della stessa natura e possono essere formati:

1° da quattro punti (isolati), se π_{ab} è generica;

2° da due punti (isolati) e dai punti d'una retta, se π_{ab} è assiale;

3° dai punti di due rette, se π_{ab} è biassiale;

4° da un punto (isolato) e dai punti d'un piano, se π_{ab} è omologica.

Poichè un'omografia con punti uniti multipli può sempre considerarsi come limite d'un'omografia con punti uniti semplici, potremo supporre che gli elementi di cui si parla nei quattro casi citati siano distinti.

Ogni retta che congiunge due punti base d'uno stesso spazio è una *retta base* del fascio; ogni piano che passa per tre punti base non collineari è un piano base. Allora, ad una retta base di Ω tutte le omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ fanno corrispondere una stessa retta (base) di Ω', subordinando fra le due rette un *fascio di proiettività binarie*; ad un piano base di Ω tutte le omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ fanno corrispondere uno stesso piano di Ω', subordinando fra i due piani un *fascio di proiettività ternarie.*

È chiaro che i punti di Ω *eccezionali* per qualche omografia degenere del fascio $[\pi_a, \pi_b]$ sono punti base del 1° gruppo. Sicchè, ove

(1) " Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazi lineari ad n dimensioni ". Rend. *Accademia dei Lincei*, vol. VI, 2° semestre, pag. 63-70, 1890.

al fascio appartenga un'omografia *degenere di 2ª specie* o di *3ª specie*, il 1° gruppo di punti base conterrà tutti i punti d'una retta o tutti i punti d'un piano.

Viceversa: ogni punto base *isolato* è punto eccezionale per una determinata omografia degenere di prima specie del fascio. Infatti, se O (o_1, o_2, o_3, o_4) è un punto base isolato di Ω, le due omografie:

$$\pi_a\,(y_i = \Sigma_j\, a_{ij}\, x_j)\,, \qquad \pi_b\,(y_i = \Sigma_j\, b_{ij}\, x_j) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

faranno ad esso corrispondere lo stesso punto O′ di Ω'. Sicchè, potremo determinare ρ in modo che le relazioni:

$$\rho\, \Sigma_j\, a_{ij}\, x_j = \Sigma_j\, b_{ij}\, x_j \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

o ciò che fa lo stesso le altre:

$$\Sigma_j\, (\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})\, x_j = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ottenute ponendo $\rho = -\lambda : \mu$, ammettano la soluzione o_1, o_2, o_3, o_4.

Di qui si trae che il valore di $\lambda : \mu$ dev'essere radice dell'equazione di 4° grado

$$|\, \lambda a_{ij} + \mu b_{ij}\, | = 0$$

che caratterizza le omografie degeneri del fascio. Il punto O è adunque eccezionale per un'omografia degenere del fascio; la quale è poi degenere di 1ª specie altrimenti per O passerebbe almeno una retta di punti base, contro l'ipotesi.

In modo analogo si prova che per ogni retta *isolata* di punti base del 1° gruppo esiste nel fascio una omografia degenere di 2ª specie per cui quella retta è eccezionale, ecc.

Segue da ciò che la classificazione dei fasci, basata sulla specie delle omografie degeneri ch'essi contengono, coincide con quella fondata sulla natura dell'omografia π_{ab}.

2. Ad un punto O non base in Ω le omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ fanno corrispondere i punti d'una retta di Ω'; questa retta si dirà *associata* ad O.

Le ∞^1 rette associate ai punti d'una retta o di Ω formano in generale un *1° sistema di generatrici* d'una quadrica Q_o di Ω', che si dirà *associata* ad o. Le generatrici del *2° sistema* di Q_o sono le rette corrispondenti di o nelle varie omografie di $[\pi_a, \pi_b]$. Poichè ai punti in cui o interseca i piani base del 1° gruppo sono associate rette che giacciono sui piani base del 2° gruppo, così la quadrica in discorso è tangente ai piani base del 2° gruppo.

Le ∞^2 rette di Ω' associate ai punti d'un piano generico ω di Ω formano una *congruenza* di 3° ordine e 1ª classe, che si dirà *associata* ad ω. I *piani singolari* della congruenza, che sono i piani corrispondenti ad ω nelle varie omografie di $[\pi_a, \pi_b]$, formano una *sviluppabile di 3ª classe*, alla quale appartengono i 4 piani base del 2° gruppo.

Le ∞^3 rette di Ω' associate ai punti di Ω formano un complesso Γ' di 2° ordine, che ha per punti principali i punti base del 2° gruppo e di cui le precedenti sviluppabili costituiscono le *sviluppabili doppie*. (¹)

Se i punti base del 2° gruppo sono in numero di 4 il complesso Γ è *tetraedrale*.

Assumendo allora i quattro punti base del 1° gruppo come vertici del tetraedro di riferimento in Ω ed i 4 punti base del 2° gruppo come vertici del tetraedro di riferimento in Ω', le equazioni dell'omografia generica di $[\pi_a, \pi_b]$, sono

$$y_i = (\lambda a_i + \mu b_i) x_i . \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Le 4 omografie degeneri del fascio corrispondono ai parametri

$$\rho = \lambda : \mu$$

dati dalle 4 equazioni:

$$\lambda a_i + \mu b_i \equiv 0. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Si verifica facilmente che:

Il birapporto $(\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4)$ dei parametri ρ_i delle quattro omografie degeneri del fascio è uguale all'invariante del complesso tetraedrale Γ'.

3. Per alcune rette o di Ω la quadrica associata si riduce ad una conica: ciò accade quando le corrispondenti di o in due omografie del fascio sono coplanari, ed in particolare quando la retta o sta su uno dei piani base del 1° gruppo. Allora diremo che ad o è *associata una conica*, eventualmente degenere in una coppia di punti.

Passiamo ora a ricercare come siano disposte in Ω le rette cui sono associate coniche di Ω'. Perciò osserviamo che tutte le rette passanti per un punto O di Ω e giacenti in un piano ω hanno per associate ∞^1 quadriche passanti per la retta associata ad O e tangenti ai piani della sviluppabile cubica associata ad ω; in altre parole che: *tutte le quadriche associate alle rette di un fascio formano una schiera.* Siccome poi l'inviluppo comune a tutte le quadriche della schiera è degenere in un fascio ad una sviluppata cubica, così alla schiera appartengono due quadriche degeneri in coniche, e conseguentemente nel fascio di rette passanti per o e giacenti su ω si trovano due rette cui sono associate coniche di Ω'. Da ciò si deduce che:

Le rette di Ω, cui sono associate coniche di Ω', formano un complesso Γ di 2° grado.

A questo complesso appartengono, evidentemente, le rette che passano pei punti base del 1° gruppo. Sicchè, ove questi punti siano in numero di 4 il complesso Γ è tetraedrale.

4. Sia o una retta di Γ: poichè le corrispondenti di o stanno sul piano ω' della conica associata, così tutti i corrispondenti di ω' nelle inverse delle omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ passano per o.

(¹) Cfr. Reye. *Geometrie der Lage.*

E poichè ω' è un piano arbitrario di Ω' potremo affermare che: se si considera il piano come elemento generatore dello spazio, le inverse delle omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ definiscono fra i due spazi di piani Ω' ed Ω un fascio di omografie. Tale fascio verrà costantemente indicato con $[\pi_a, \pi_b]^{-1}$.

Al fascio $[\pi_a, \pi_b]^{-1}$ potremo applicare senz'altro i risultati già ottenuti relativamente al fascio $[\pi_a, \pi_b]$. Sicchè: mediante $[\pi_a, \pi_b]^{-1}$ ad ogni piano di Ω' è associata una retta di Ω, per cui passano tutti i corrispondenti di ω': ad ogni retta di Ω' (asse d'un fascio di piani) è *associata* una quadrica passante per i punti base del 1° gruppo; ad ogni punto O' (centro d'una stella) di Ω' è associata una congruenza rigata di 1° ordine e 3ª classe, che ha per linea singolare una cubica gobba passante per i punti base del 2° gruppo. Questa cubica è poi il luogo dei punti corrispondenti ad O' nelle inverse delle omografie di $[\pi_a, \pi_b]$, ed è una *curva doppia* del complesso Γ.

Alle rette del complesso Γ' sono associate quadriche di Ω specializzate in coni, e se O è il vertice del cono associato alla retta o' di Γ' mediante il fascio $[\pi_a, \pi_b]^{-1}$, viceversa ad O è associata, mediante il fascio $[\pi_a, \pi_b]$, la retta o'. Dualmente, se alla retta o di Γ è associata una conica giacente sopra il piano ω' di Ω' al piano ω' le omografie di $[\pi_a, \pi_b]^{-1}$ associano la retta o.

Infine, nell'ipotesi che al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartengano 4 omografie degeneri di 1ª specie, i due complessi Γ, Γ' sono tetraedrali ed hanno lo stesso invariante.

5. Se al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartiene un'omografia degenere di 2ª specie e due degeneri di 1ª specie, il 1° gruppo di punti base è costituito da due punti isolati A, B e dai punti d'una retta r, cui corrispondono in Ω' due punti base isolati A', B' e i punti base d'una retta r'. Allora ad un punto generico di Ω è associata una retta di Ω' incidente alla retta s' che congiunge A' con B'; ad una retta di Ω è associata una quadrica di Ω' passante per s' e tangente ai piani $A'r'$, $B'r'$; finalmente la sviluppabile cubica che contiene tutti i piani corrispondenti d'un piano di Ω si spezza nel fascio di piani di asse s' ed in un cono quadrico tangente ad un piano per s' e ai due piani $A'r'$ e $B'r'$. Dualmente, le inverse delle omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ ad un piano di Ω' fanno corrispondere piani di Ω passanti per una retta incidente ad r; ad una retta di Ω' le generatrici di una quadrica per r; ad un punto di Ω' i punti d'una cubica degenere nella retta r ed in una conica incidente ad r e passante per i punti A e B.

Prescindendo adunque dalle parti fisse potremo dire che: Se ad un fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartiene un'omografia degenere di 2ª specie ai piani di Ω corrispondono in Ω' piani tangenti ad un cono del 2° ordine; ai punti di Ω' corrispondono in Ω punti di una conica.

Se al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartengono due omografie degeneri di 2ª specie il 1° gruppo di punti base è costituito dai punti di due rette r, s, cui corrispondono due rette r', s' di punti base in Ω'. Allora ad un punto generico di Ω è associata una retta di Ω' incidente ad r', s'; ad ogni retta di Ω è associata una quadrica di Ω' passante per r' ed s'; finalmente la sviluppabile dei piani corrispondenti ad un piano di Ω è degenere nei due fasci di piani r' ed s' ed in un fascio (variabile), con l'asse incidente ad r' ed s'. Dualmente, le inverse delle omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ fanno corrispondere ad un piano di Ω' i piani di un fascio con l'asse incidente ad r ed s; ad una retta di Ω' le generatrici di una quadrica passante per r, s; finalmente ad un punto di Ω' i punti d'una cubica spezzata nelle due rette fisse r, s ed in una retta (variabile) incidente ad r ed s. Prescindendo dalle parti fisse potremo dire che:

Se al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartengono due omografie degeneri di 2^a specie ad un piano di Ω corrispondono in Ω' i piani d'un fascio; ad un punto di Ω' corrispondono in Ω i punti di una retta.

In fine, se al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartiene un'omografia degenere di 3^a specie il 1^o gruppo di punti base è formato da un punto fisso O e dai punti di un piano ω, cui corrispondono in Ω' un punto base isolato O' ed i punti base di un piano ω'. Allora ai punti di Ω sono associate rette passanti per O'; alle rette di Ω sono associate quadriche ridotte a coniche degeneri in due punti, dei quali uno è O' e l'altro giace su ω'; finalmente i piani associati ad un piano di Ω sono tutti i piani per O' ed i piani d'un fascio contenente ω', dualmente, ecc. Prescindendo adunque dalle parti fisse, avremo che:

Se al fascio $[\pi_a, \pi_b]$ appartiene un'omografia degenere di 3^a specie ai piani di Ω corrispondono in Ω' piani d'un fascio; ai punti di Ω' corrispondono in Ω i punti di una retta.

I fasci di omografie cui appartengono due omografie degeneri di 2^a specie, ovvero un'omografia degenere di 3^a specie godono di questa notevole proprietà: le inverse delle loro omografie applicate allo spazio punteggiato Ω' formano esse pure un fascio. Un fascio che goda di siffatta proprietà verrà detto *invertibile*. Sono dunque invertibili i fasci di omografie che non contengono più d'un'omografia degenere di 1^a specie.

I fasci d'omografie che contengono un'omografia degenere di 3^a specie trasformando i punti d'una retta nelle tangenti ad una conica sono *fasci omologici*. (¹)

6. Delle proprietà stabilite nel numero precedente valgono le reciproche, sicchè potremo senz'altro concludere quanto segue:

a) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè le inverse delle omografie d'un fascio* $[\pi_a, \pi_b]$ *trasformino i punti di* Ω' *in punti d'una conica è che al fascio appartenga un'omografia degenere di* 2^a *specie.*

b) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè il fascio* $[\pi_a, \pi_b]$ *sia*

(¹) Cfr. Enriques, l. c.

invertibile è che ad esso non appartenga più d'una omografia degenere di 1ª specie.

c) *La condizione necessaria e sufficiente affinchè un fascio sia omologico e che ad esso appartenga un'omografia degenere di 3ª specie.*

7. Nel caso di due spazi Ω ed Ω' sovrapposti l'ENRIQUES determinò le condizioni necessarie e sufficienti affinchè le omografie d'un fascio formino un gruppo. Ai risultati ch'egli ottenne possiamo pervenire nel modo seguente. Se le omografie di $[\pi_a, \pi_b]$ formano un gruppo nel senso di LIE, al fascio appartiene l'identità: se adunque π_a è un'omografia generica di esso potremo porre $[\pi_a, \pi_b]$ sotto la forma: $[1, \pi_a]$. Inoltre dovendo π_a^2 appartenere al fascio sarà:

$$\pi_a^2 = \lambda + \mu\pi_a .$$

Supponendo che π_a abbia 4 punti uniti distinti, per una conveniente scelta del sistema di coordinate, avremo la seguente rappresentazione analitica di π_a:

$$y_i = a_i x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Allora la (1) si traduce nelle seguenti uguaglianze:

$$a_i^2 = \lambda + \mu a_i , \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

le quali, per essere soddisfatte, richiedono che la caratteristica della matrice:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \end{Vmatrix}$$

sia uguale a 2. Ciò accade in due casi distinti:

1°) quando tre dei coefficienti a_i sono uguali, cioè *quando π_a è omologica*;

2°) quando due sono uguali e gli altri due pure uguali fra loro, cioè *quando π_a è biassiale.*

Allo stesso risultato si perviene anche nell'ipotesi che π_a abbia punti uniti multipli. Ad es., se π_a ha la forma $[(o\,o\,o)o]$ (¹) potremo assumere la seguente rappresentazione analitica:

$$\pi_a \equiv \begin{cases} y_1 = a x_1 + m x_2 \\ y_2 = \qquad a x_2 + n x_3 \\ y_3 = \qquad\qquad a x_3 \\ y_4 = \qquad\qquad\qquad b x_4 . \end{cases}$$

La (1) si traduce allora nelle seguenti uguaglianze:

$$a^2 = \lambda + \mu a ; \qquad b^2 = \lambda + \mu b ;$$
$$2am = \mu m ; \qquad 2an = \mu n ;$$

(1) Cfr. PREDELLA, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni*: " Annali di Matem. „ Serie II. t. XVIII, pag. 153.

dalle quali si trae: $m = n = 0$, ovvero $a = b$. La π_n è adunque omologica, ovvero biassiale.

Concludendo: *I soli fasci le cui omografie formino un gruppo sono i fasci d'omologie concentriche e coplanari ed i fasci d'omografie biassiali con gli assi in comune.*

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 742

742. *Trovare l'equazione dell'inviluppo della retta che congiunge i punti* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *essendo*

$$\begin{cases} x_1 = a \cos^n \varphi, \\ y_1 = b \operatorname{sen}^n \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a' \cos^n \varphi, \\ y_2 = b' \operatorname{sen}^n \varphi, \end{cases}$$

dove φ *è un angolo variabile, e trovare l'ordine della curva.*

E. N. Barisien.

Risoluzione di V. Retali (Milano).

L'equazione della retta

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a\cos^n\varphi & b\operatorname{sen}^n\varphi \\ 1 & a'\cos^n\varphi & b'\operatorname{sen}^n\varphi \end{vmatrix} = 0,$$

ponendo per brevità

$$A = \frac{b - b'}{ab' - a'b}, \qquad B = \frac{a' - a}{ab' - a'b},$$

può scriversi

$$(Ax)\cos^{-n}\varphi + (By)\operatorname{sen}^{-n}\varphi = 1:$$

il suo inviluppo è dunque (V. Salmon-Fiedler, *H. Ebenen Kurven*, pag. 88).

$$(Ax)^{\frac{2}{2+n}} + (By)^{\frac{2}{2+n}} = 1:$$

che rappresenta una curva *triangolare simmetrica* (curva di Lamé, spirale sinusoide, ortogenide) trascendente o algebrica secondochè n è o no irrazionale. Se n è razionale se ne può trovare l'ordine e la classe valendosi di un teorema stabilito da Halphen (*Étude sur les points singuliers* ecc. n. 16) per le curve $r^k = \cos k\theta$, e osservando che nel caso attuale $k = -\frac{2}{2+n}$. Il teorema di Halphen può enunciarsi nel modo seguente: se k è positivo ed eguale alla frazione irriducibile $\frac{q}{s}$, l'ordine della curva è $2qs$ e la sua classe $q(q+s)$; se k è negativo ed eguale alla frazione irriducibile $-\frac{q}{s}$, l'ordine della curva è qs; la sua classe è $q(q-s)$ oppure $2q(s-q)$, secondochè è $q \gtrless s$. Ciò premesso debbono distinguersi sei casi:

1°. se $n = +\frac{\alpha}{\beta}$ e α è dispari: $q = 2\beta$, $s = \alpha + 2\beta$;

l'ordine è $2\beta(\alpha + 2\beta)$,
la classe è $4\alpha\beta$.

2°. $n = +\frac{\alpha}{\beta}$ e α pari: posto $\alpha = 2\alpha'$, $q = \beta$, $s = \beta + \alpha'$;

l'ordine è $\beta(\beta + \alpha') = \frac{\beta}{2}(\alpha + 2\beta)$,

la classe, $2\beta\alpha' = \alpha\beta$.

3°. $n = -\frac{\alpha}{\beta}$, α è dispari e $< 2\beta$: $q = 2\beta$, $s = 2\beta - \alpha$:

l'ordine è $2\beta(2\beta - \alpha)$,

la classe, $2\alpha\beta$.

4°. $n = -\frac{\alpha}{\beta}$, α dispari e $> 2\beta$: $q = 2\beta$, $s = \alpha - 2\beta$;

l'ordine è $4\beta(\alpha - 2\beta)$,

la classe, $2\alpha\beta$.

5°. $n = -\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha = 2\alpha' < 2\beta$: $q = \beta$, $s = \beta - \alpha'$;

l'ordine è $\frac{\beta}{2}(2\beta - \alpha)$,

la classe, $\frac{1}{2}\alpha\beta$.

6°. $n = -\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha = 2\alpha' > 2\beta$: $q = \beta$, $s = \alpha' - \beta$;

l'ordine è $2\beta(\alpha' - \beta) = \beta(\alpha - 2\beta)$,

la classe, $\alpha'\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta$.

Della quistione **738** oltre le due pubblicate, pervenne, quando il fascicolo IV era già allestito, anche una risoluzione analitica del prof. G. [illegible]ola del R. Liceo di Campobasso.

QUISTIONI PROPOSTE

749. Dimostrare che le uniche funzioni continue di una variabile indipendente x, tali che operando in esse la sostituzione

$$x = au + bv,$$

con a e b costanti assegnate, ed u e v nuove variabili, risulti identicamente

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v),$$

sono quelle della forma

$$f(x) = mx,$$

se la somma dei coefficienti a e b è differente dall'unità. E sono invece quelle della forma

$$f(x) = mx + n,$$

quando la detta somma sia uguale all'unità (intendendo che m e n rappresentino, in ogni caso, delle costanti arbitrarie).

M. Chini.

750. Supposto $x < \frac{\pi}{2}$, trovare il valore massimo della funzione:

$$y = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{\operatorname{sen}^2 2x + 4k \cos^2 x}.$$

G. PESCI.

751. Consideriamo due parabole A^2 e B^2 ad assi ortogonali ed aventi lo stesso fuoco, e sieno A e B i loro punti di contatto colla tangente comune m; dimostrare che:

1°. Le due tangenti che possono condursi alle due parabole da un punto arbitrario di m sono perpendicolari fra loro.

2°. I diametri di A^2 e B^2 passanti respettivamente per A e B sono le direttrici di B^2 e A^2.

3°. Le tangenti condotte alle due parabole da un punto qualunque delle loro direttrici formano un fascio armonico.

4°. Ognuna delle due parabole è il luogo dei fuochi delle parabole che hanno m per tangente al vertice e toccano l'altra.

5°. Le parabole A^2 e B^2 sono ognuna inviluppo delle parabole che hanno m per tangente al vertice e i loro fuochi sull'altra.

V. RETALI.

BIBLIOGRAFIA

G. FRATTINI, *Elementi di calcolo letterale* (edit. G. B. Paravia e C., 1908. L. 1.25).

Ottimi sotto tutti gli aspetti sono questi Elementi, recentemente pubblicati dall'esimio prof. Frattini. Vi si scorge ovviamente l'insegnante provetto e geniale. Non più i rancidi ed aridi svolgimenti ai quali eravamo troppo spesso abituati... e che troppo raramente, e troppo a stento, i nostri alunni si abituavano a comprendere! Qui non si considera più il calcolo letterale come un nuovo campo di studi, fantastico, puramente formale; esso invece viene in certo qual modo fuso coll'aritmetica ordinaria, della quale è effettivamente una naturale generalizzazione (così che, se non vi fossero gli scrupoli etimologici, l'una potrebbe chiamarsi *aritmetica numerica*, l'altra *aritmetica letterale*).

Di calcolo letterale si occupano però i soli tre primi Capitoli, nei quali sono esposte in forma semplice e chiara, con applicazioni ed esempi adattissimi, le varie regole numerico-letterali. Gli altri due Capitoli sono dedicati ad argomenti di *algebra* vera e propria; l'A. tratta in essi, con pari perspicuità, la risoluzione dei tipi più semplici di equazioni singole e di sistemi di equazioni. Alla fine del volumetto sono raccolti 64 interessanti esercizi; in cima ai quali, sintesi felice del sano indirizzo pedagogico a cui s'è ispirato l'A., c'è la seguente citazione che giova qui riprodurre:

Gino mio, l'ingegno umano
partorì cose stupende,
quando l'uomo ebbe tra mano
meno libri e più faccende. — (*Giusti*).

PAOLO CATTANEO.

SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA

Il giorno 8 aprile in una sala della R. Accademia dei Lincei, gentilmente concessa, sotto la presidenza del prof. Lazzeri, ebbe luogo l'annunziata adunanza degli aderenti alla nuova società, che si trovavano presenti al IV congresso internazionale di matematica. Intervennero i professori *Amodeo, Arzelà, Baroni, Berzolari, Biasi, Bonola, Borio, Bortolotti, Brusotti, Bustelli, Conti, Crepas, De Amicis, Frattini, Gallucci, Gigli, Gremigni, Lazzeri, Magnani Teresa, Marcolongo, Michel, Pascal, Perna, Pittarelli, Rubini Luisa, Vivanti* ed altri; i professori *Enriques, Fazzari, Severi* e *Vailati* avevano aderito, non potendo assistere all'adunanza perchè impegnati altrove.

In una prossima circolare sarà reso dettagliatamente conto dello scambio d'idee avvenuto in detta adunanza, per predisporre il Congresso di Firenze. Per oggi ci limitiamo ad accennare le cose più notevoli di detta adunanza.

I proff. Lazzeri e Conti espressero la loro compiacenza nel vedere presente all'adunanza il prof. De Amicis, ex Presidente della Società Mathesis, traendone motivo per sperare che di fronte al fatto compiuto della formazione della nuova Società e dell'inscrizione ad essa di un numero già considerevole di cultori della matematica, appartenenti a tutti i gradi dell'insegnamento, i pochissimi rimasti fedeli alla vecchia Mathesis e non ancora aderenti alla nuova Società, non tarderanno a mandare essi pure la loro adesione e a deliberare, senz'altro, lo scioglimento della Mathesis; così la nuova Società potrà assumere come proprio sottotitolo il nome di Mathesis, che tanto bene riassume gli scopi scientifici-didattici, coi quali la nuova Società sorge e per i quali questa nuova Società può considerarsi come una vera e propria continuazione della Mathesis che, rinvigorita da nuove forze, e allargato il proprio campo d'azione, potrà riuscire ancor più efficace che nel passato.

Il prof. De Amicis, dopo aver ricambiato con cordiali parole il saluto rivoltogli, dichiarò che, se ne fosse stato informato in tempo, avrebbe egli pure sottoscritto la nota Circolare inviata da Livorno il 1° febbraio 1908, pertanto egli per suo conto aderì senz'altro alla nuova Società augurando che, ove l'Associazione Mathesis riesca a ricomporsi un Comitato Direttivo, questo precipuamente studi il modo migliore per accordarsi col Comitato promotore della nuova Società.

Infine, su proposta del prof. Lazzeri, si convenne, salvo, per le decisioni definitive, il parere di tutti gli altri membri del Comitato promotore non presenti a tale riunione, di dar mandato:

ai proff. Enriques, Amodeo e Conti per lo studio dello Statuto della costituenda Società;

ai proff. Berzolari, Bonola e Veneroni per lo studio delle proposte della Commissione Reale per l'insegnamento della matematica nelle scuole medie riformate;

ai proff. Pittarelli e Certo per lo studio del Tema: sulla preparazione degli insegnanti di matematica delle Scuole Medie.