(la quale in $z = \frac{\pi}{6}$ assume uno qualunque degli infiniti valori 0, $\pm \pi$, $\pm 2\pi, \ldots$) prendendo precisamente

$$\frac{1}{2i} \log 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 0,$$

e si indica con K la curvatura costante dello spazio, (¹) si ha [(R)]

$$P_z = \frac{1}{2i K^{\frac{3}{2}}} \int_z^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \operatorname{sen} z dz. \tag{1}$$

Se il piano complesso $[z]$ viene tagliato lungo l'asse reale eccettuando il tratto finito fra $z = 0$ e $z = \pi$, la funzione $\frac{1}{2i} \log 2 \operatorname{sen} z$ diviene monodroma, ed io ho dimostrato [(E)] che in tale ipotesi, se con ε si indica ± 1 secondochè z cade nel semipiano complesso positivo o nel negativo, sussiste il seguente sviluppo in serie:

$$P_z = \frac{\varepsilon}{4K^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi^2}{12} - \sum_1^{\infty}{}_n \frac{e^{2n\varepsilon i z}}{n^2} \right\}. \ (^1) \tag{2}$$

(¹) Un concetto elementare della curvatura risulta dalle seguenti considerazioni: Una linea piana L tutta a distanza finita, sciolta, chiusa e bilatera divide il piano in due regioni, una ed una sola delle quali (l'*interna*) ha la proprietà che ogni retta che passa per uno dei suoi punti attraversa L due o più volte. Ad una retta mobile che inviluppi L si dia per direzione positiva quella del verso in cui essa descrive L e si chiami *ampiezza angolare di* L la somma algebrica delle ampiezze degli angoli descritti successivamente dalla direzione positiva dell'inviluppante prendendole positive o negative secondochè gli angoli stessi sono descritti procedendo verso l'interno o verso l'esterno di L e intendendo che l'unità di misura delle ampiezze angolari sia $= \frac{\text{angolo piatto}}{\pi}$. Allora si dimostra [(R)] che l'ampiezza angolare di L è sempre positiva e che inoltre, detta a tale ampiezza, si ha $a \lesseqgtr 2\pi$ secondochè vale la geometria ellittica, la parabolica o l'iperbolica. Di più si prova che l'area A racchiusa da L nell'ipotesi non euclidea è proporzionale a $2\pi - a$; sicchè, se K è un numero fisso reale positivo, nullo o negativo secondochè vale la geometria ellittica, parabolica o iperbolica e del resto arbitrario, si potrà prendere $A = \frac{2\pi - a}{K}$. Tale K dicesi *la curvatura* dello spazio; se poi la quantità $2\pi - a$ si chiama *l'ampiezza estensiva* di A, si potrà dire che: *la curvatura è l'ampiezza estensiva dell'area piana che si è presa per unità di misura.* Nell'ipotesi ellittica sia $q = \text{quot}\,(K, 2\pi)$, $r = \text{rest}\,(K, 2\pi)$; allora sarà: Unità di area $= q$ volte l'intero piano + parte propria o nulla dell'intero piano di ampiezza estensiva r; infatti [(R)]: $2\pi =$ ampiezza estensiva dell'intero piano, quando il piano è, come deve supporsi (vedi G. FANO, *Lezioni di geometria non euclidea*, pag. 203, Roma, 1898. Litografia di L. Cippitelli, Via Croce Bianca, n. 10), una superficie unilatera.

Fissata a piacere l'unità di area (cioè K) restano determinate poi l'unità di lunghezza e di volume dalla condizione che un quadrato e un cubo infinitesimo siano misurati dalla seconda e dalla terza potenza del lato rispettivamente. Se L, A, V sono le misure di una lunghezza, di un'area e di un volume (rispettivamente) e si pone $\cdot L = LK^{\frac{1}{2}}$, $\cdot A = AK$, $\cdot V = VK^{\frac{3}{2}}$, le $\cdot L$, $\cdot A$, $\cdot V$ (che ho chiamato in (R) *ampiezza estensiva* di L, A, V) sono quantità immaginarie o reali di segno determinato come $K^{\frac{1}{2}}$, K, $K^{\frac{3}{2}}$ rispettivamente, indipendenti da K, note le quali e dato K, si ha $L = \frac{\cdot L}{K^{\frac{1}{2}}}$, $A = \frac{\cdot A}{K}$, $V = \frac{\cdot V}{K^{\frac{3}{2}}}$. La quantità mod. $\frac{1}{\sqrt{K}}$ si dice *il raggio di curvatura* dello spazio.

Per distinguere in (2) la parte reale dall'immaginaria si ponga $z = x + \varepsilon i y$ essendo x ed y reali ed inoltre $y \geq 0$; allora facendo:

$$
\begin{aligned}
R_{x,y} &= \frac{1}{4}\left\{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - y^2 - \frac{\pi^2}{12} - \sum_1^\infty{}_n \frac{e^{-2ny}\cos 2nx}{n^3}\right\}, \\
I_{x,y} &= \frac{1}{4}\left\{y(2x-\pi) - \sum_1^\infty{}_n \frac{e^{-2ny}\,\mathrm{sen}\, 2nx}{n^2}\right\},
\end{aligned} \tag{3}
$$

dalla (2) risulta:

$$
P_z = \frac{1}{K^{\frac{3}{2}}}\{\varepsilon R_{x,y} + i I_{x,y}\}. \tag{4}
$$

Se $\overline{z} = x - \varepsilon i y$, si avrà da (4):

$$
P_z - P_{\overline{z}} = \frac{2\varepsilon}{K^{\frac{3}{2}}} R_{x,y}, \tag{5}
$$

e quindi nel caso ellittico ($K > 0$) sarà

$$
P_z - P_{\overline{z}} = \text{quantità reale}. \tag{6}
$$

Inoltre io ho dimostrato in (E) che, se

$$
0 \leqslant x \leqslant \pi,
$$

si ha identicamente

$$
R_{x,0} = 0,
$$

e allora la (4) prende la forma data da Lobatschewski (per $K = -1$)

$$
P_x = \frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}} \sum_1^\infty{}_n \frac{\mathrm{sen}\, 2nx}{n^2} \qquad (0 \leqslant x \leqslant \pi). \tag{7}
$$

Infine sono da registrare le seguenti proprietà della funzione P_z:

$$
P_{z+m\pi} = P_z + \frac{\varepsilon}{K^{\frac{3}{2}}}\left\{\frac{m\pi}{2}\left(z-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{m^2\pi^2}{4}\right\} \quad (m \text{ intero}) \ [(\mathrm{E})], \tag{8}
$$

---

(1) È noto che $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ (Cesàro, *Analisi algebrica*, pag. 481); da questa si ottiene $\frac{\pi^2}{12} = 2\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right)$ la quale sottratta dalla precedente dà:

$$
\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots.
$$

In (E) ho scritta la (2) lasciando al posto di $\frac{\pi^2}{12}$ quest'ultima serie che prima si presenta nel calcolo.

$$P_z + P_{-z} = \frac{\varepsilon \pi z}{2K^{\frac{3}{2}}} \quad [(V), (E)], \tag{9}$$

$$P_z = - P_{\pi - z} \quad [(V)], \tag{10}$$

$$P_{\frac{\pi}{2} - z} = - P_{\frac{\pi}{2} + z} \quad [(V)], \tag{11}$$

$$P_{2z} = 2 \left\{ P_z - P_{\frac{\pi}{2} - z} \right\} \quad [(V), (R)], \tag{12}$$

$$P_0 = 0, \quad P_{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad P_\pi = 0 \quad [(V), (R)], \tag{13}$$

sulle quali è da notare che quando z è reale il segno ε che compare in (8) e (9) rimane arbitrario.

Osservazione. — Le formule (3) ... (13) permettono non solo di effettuare il calcolo numerico di una tavola dei valori reali e complessi di P_z, ma di restringerne l'estensione alla semistriscia del piano complesso $[z]$ compresa fra le rette $x=0$ ed $x=\frac{\pi}{2}$ per la quale $y \geqq 0$. Clausen nel G. di Crelle del 1832 diede una tavola (da me riprodotta in (R) a pag. 44) dei valori di P_z (per $K=-1$) con tre decimali pei valori reali di z fra 0° e 90° di cinque in cinque gradi. Io spero di estendere presto questa tavola anche a valori complessi di z a mezzo delle formule precedenti, che ho preparate appunto con questo intento. (¹)

Volume del tetraedro asintotico in funzione dei diedri. — Siano α, β, γ i diedri del triedro asintotico nel tetraedro asintotico di volume T e siano α', β', γ' i diedri ad essi rispettivamente opposti. Avremo intanto $\alpha+\beta+\gamma=\pi$; posto poi

$$2\varepsilon_1 = \alpha + \beta' + \gamma' - \pi, \quad 2\varepsilon_2 = \alpha' + \beta + \gamma' - \pi, \quad 2\varepsilon_3 = \alpha' + \beta' + \gamma - \pi \tag{14}$$

$$\begin{gathered} L_0 = P_\alpha + P_\beta + P_\gamma, \qquad L_1 = - P_{\varepsilon_1} - P_{\alpha - \varepsilon_1} + P_{\beta' - \varepsilon_1} + P_{\gamma' - \varepsilon_1}, \\ L_2 = - P_{\varepsilon_2} + P_{\alpha' - \varepsilon_2} - P_{\beta - \varepsilon_2} + P_{\gamma' - \varepsilon_2}, \; L_3 = - P_{\varepsilon_3} + P_{\alpha' - \varepsilon_3} + P_{\beta' - \varepsilon_3} - P_{\gamma - \varepsilon'}, \end{gathered} \tag{15}$$

risulta [(V) ed (R)]:

$$T = L_0 + L_1 + L_2 + L_3. \tag{16}$$

Ponendo a zero una, due o tutte tre le ε la (16) dà corrispondentemente il volume del tetraedro due, tre, quattro volte asintotico. Se il tetraedro asintotico è anche normale di diedri laterali α, α', e medio $\frac{\pi}{2} - \alpha$, la (16) a mezzo della (12) prende la forma

$$T = \frac{1}{2} \left\{ P_{\alpha' + \alpha} - P_{\alpha' - \alpha} + 2P_{\frac{\pi}{2} - \alpha} \right\}, \tag{17}$$

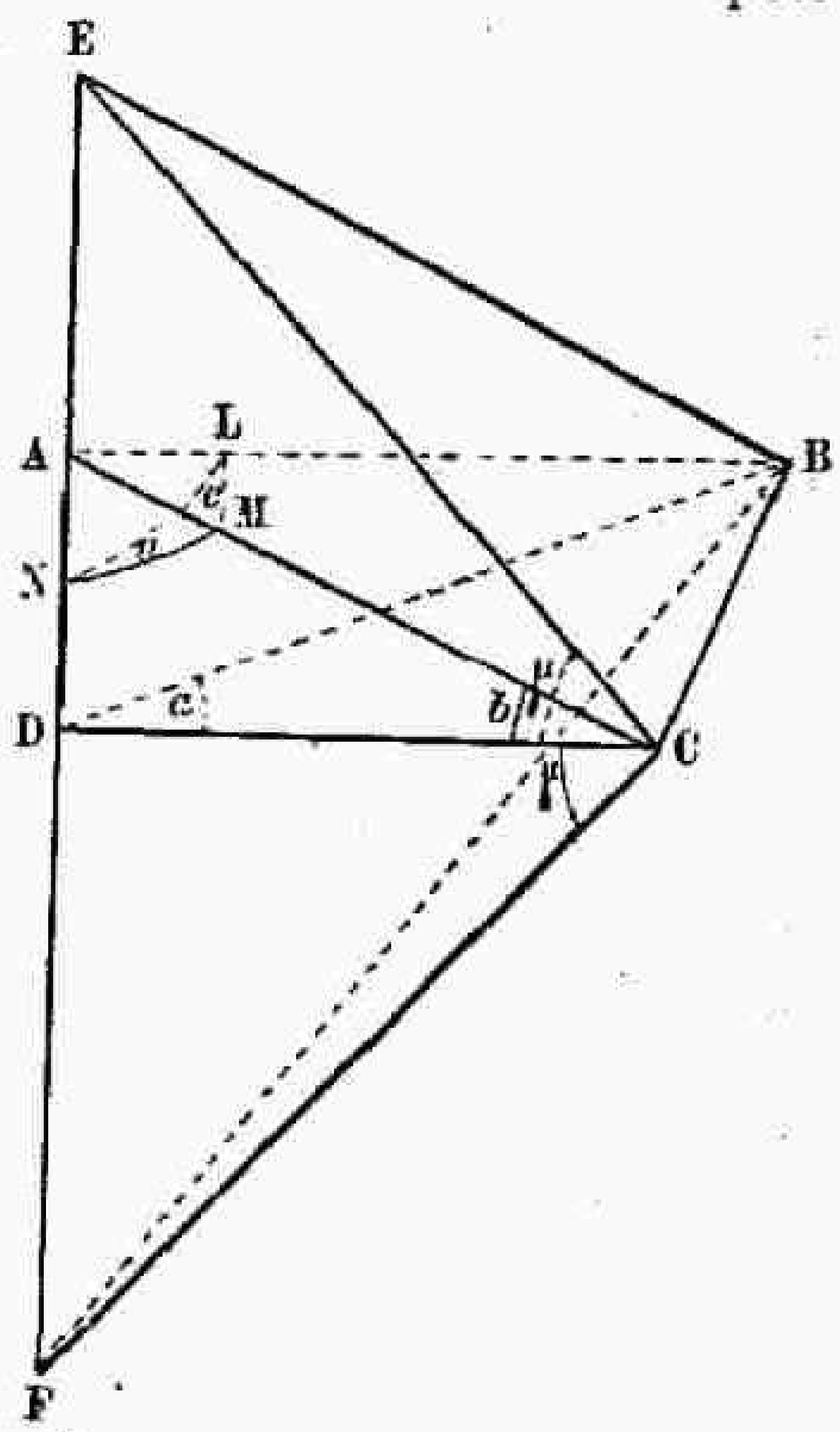
che rappresenta (come ho mostrato in (V)) l'integrale:

$$T = \frac{1}{4iK^{\frac{3}{2}}} \int_{\alpha'}^{\frac{\pi}{2}} \log \frac{\operatorname{sen}(\varphi + \alpha)}{\operatorname{sen}(\varphi - \alpha)} \, d\varphi \tag{18}$$

(¹) In questi calcoli mi sarebbe utilissimo un compagno col quale accordarmi per ben prepararli, eseguirli e riscontrarli. Quel volenteroso che fosse a ciò disposto mi scriva al seguente indirizzo: Prof. Giuseppe Sforza — R. Istituto Tecnico — Reggio Emilia.

dato da Lobatschewski (per $K = -1$). Quando $\alpha' = \alpha$ il tetraedro diventa l'elementare di diedro laterale α: ed effettivamente la (17) per (12) si converte nella $T = P_\alpha$. È da notare infine che le (16) e (17) sono valide anche se tutti o parte dei vertici del tetraedro corrispondente sono immaginari. (¹)

Osservazione. — Siccome qualunque poliedro è un aggregato di tetraedri positivi o negativi aventi un vertice in un medesimo polo arbitrario (reale o complesso), così la (16) in particolare permette senza nuove integrazioni di calcolare il volume di qualunque poliedro in funzione dei diedri collocando il polo predetto sull'assoluto. Ma anche nel caso semplicissimo del tetraedro il calcolo formale così condotto dà in generale risultati complicati o dissimmetrici; tuttavia nel caso che il tetraedro sia normale, deviando alquanto dalle indicazioni lasciate in proposito da Lobatschewski, si può trovare un risultato pienamente soddisfacente per semplicità e simmetria. *Oggetto appunto di questa Nota è di dare la formula pel volume del tetraedro normale in funzione dei diedri* (§ 2°); tale formula è poi fondamentale nel calcolo dei volumi poliedrici non euclidei quando si voglia applicare il metodo di Lobatschewski, che consiste nel considerare ogni piramide n-latera come un aggregato dei $2n$ tetraedri normali positivi, nulli o negativi determinati dalla perpendicolare calata dal vertice sulla base e dalle perpendicolari calate dal piede di quella sui lati della base.



Qualche formula tetraedrometrica. — Se i vertici del tetraedro generale sono numerati 0, 1, 2, 3, si indichi con $s_{hj}\ (= s_{jh})$ lo spigolo che unisce i vertici h, j e con $\sigma_{hj}\ (= \sigma_{jh})$ il diedro opposto ad s_{hj}; pongasi poi

$$\pi_{hj} = \pi_{jh} = \begin{cases} 1 & (\text{se } h = j) \\ -\cos\sigma_{hj} & (\text{se } h \neq j) \end{cases} \quad (h, j = 0, 1, 2, 3);$$

e inoltre si faccia

$$\nabla = \begin{vmatrix} \pi_{00} \dots \pi_{03} \\ \dots\dots \\ \pi_{30} \dots \pi_{33} \end{vmatrix}, \qquad \nabla_{hj} = \frac{\partial \nabla}{\partial \pi_{hj}};$$

(¹) Sebbene Lobatschewski conoscesse il tetraedro elementare e le formule (1) e (2) che ne dànno il volume, egli non conosceva nè la (16) nè la (17), che credo non siano state date da altri prima di me.

allora sarà [(V) ed (R)]

$$\cos {}'s_{hj} = \frac{\nabla_{hj}}{\sqrt{\nabla_{hh}\,\nabla_{jj}}} \tag{19}$$

ove sia ${}'s_{hj} = s_{hj}\sqrt{K}$ e dove il radicale (che è sempre reale) sia preso positivo. Inoltre si ha:

$$\nabla \lesseqgtr 0 \text{ rispettivamente nel caso } \begin{cases} \text{iperbolico,} \\ \text{parabolico,} \\ \text{ellittico.} \end{cases} \tag{20}$$

Formula di Richmond-Dannmayer. — Se $K \gtrless 0$, il volume V di un tetraedro non asintotico variabile può essere considerato come funzione dei diedri; allora poi il differenziale totale dV è dato da:

$$dV = \frac{1}{2K}\{s_{23}d\sigma_{01} + s_{13}d\sigma_{02} + s_{12}d\sigma_{03} + s_{01}d\sigma_{23} + s_{02}d\sigma_{13} + s_{03}d\sigma_{12}\}, [(V),(R)].\text{(}^1\text{)} \tag{21}$$

II. — Tetraedro normale.

Passo ora a dimostrare la formula fondamentale finora inedita che esprime (certamente nel modo più semplice) il volume del tetraedro normale in funzione dei diedri (v. più avanti formula (29)).

Numerando 0, 1, 2, 3 i vertici (vedi figura a pag. 149) A, B, C, D del nostro tetraedro normale, coi diedri laterali a, b in AD, BC rispettivamente e il diedro medio c in AB sarà:

$$\sigma_{01} = \sigma_{02} = \sigma_{13} = \frac{\pi}{2}, \ \sigma_{12} = a, \ \sigma_{03} = b, \ \sigma_{23} = c. \tag{22}$$

Lemma 1°. — Si ha nell'ipotesi (22):

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b}{\cos^2 c} \lesseqgtr 1 \qquad \text{secondochè} \qquad K \lesseqgtr 0. \tag{23}$$

Infatti risulta

$$\nabla = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos b \\ 0 & 1 & -\cos a & 0 \\ 0 & -\cos a & 1 & -\cos c \\ -\cos b & 0 & -\cos c & 1 \end{vmatrix} = -\cos^2 c + \operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b, \tag{24}$$

la quale per la (20) dà la (23).

---

(1) La (21) fu pubblicata come mia in (V) perchè allora non sapevo che era stata trovata un quattro anni prima dal Richmond pel caso ellittico e adattata poco appresso dal Dannmayer anche al caso iperbolico. La (21) si può con opportuni artifizi utilizzare anche pel tetraedro asintotico (pel quale cade in difetto); anzi da essa ho ricavato in (R) per integrazione la (16). Però io conoscevo la (16) da ben cinque anni avendola dapprima ricavata per via geometrica; non ho mai pubblicata la dimostrazione geometrica di (16) perchè troppo lunga. Una formula simile alla (21) sussiste pei poliedri, come ho enunciato in (V) e dimostrato in (R).

LEMMA 2°. — Se $K \leqslant 0$ si ha $c < \frac{\pi}{2}$.

Si projetti dal punto A il triangolo BCD sopra una sfera di centro A (vedi figura a pag. 149); il triangolo sferico risultante LMN sarà rettangolo in M e inoltre avrà LN < quadrante, perchè, essendo $B\widehat{A}D$ un angolo obliquo del triangolo rettilineo rettangolo BAD, nell'ipotesi non ellittica deve essere $B\widehat{A}D < \frac{\pi}{2}$. Ne segue che gli angoli L, N, cioè c ed a, sono della stessa specie; ora nel triangolo rettilineo rettangolo BDC l'angolo $B\widehat{D}C$, cioè a, è acuto, dunque c è acuto.

LEMMA 3°. — Si può determinare l'argomento μ reale o complesso in modo che sia:

$$\operatorname{sen}\mu = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos c}, \tag{25}$$

ed inoltre

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{quando } K<0 \ldots\ldots & \text{sia } 0<\mu<\frac{\pi}{2}, \\
\text{quando } K=0 \ldots\ldots & \text{"} \quad \mu=\frac{\pi}{2}, \\
\text{quando } K>0 \begin{cases} c<\frac{\pi}{2} \ldots & \text{"} \quad \mu=\frac{\pi}{2}-\varepsilon i\nu \text{ (con } \nu>0 \text{ ed } \varepsilon=\pm 1), \\ c=\frac{\pi}{2} \text{ (lsir. binorm.)} & \text{"} \quad \mu=\infty, \\ c>\frac{\pi}{2} \ldots & \text{"} \quad \mu=-\frac{\pi}{2}-\varepsilon i\nu \text{ (con } \nu>0 \text{ ed } \varepsilon=\pm 1). \end{cases}
\end{array}\right\} \tag{26}$$

DIMOSTRAZIONE. — Per $K \leqq 0$ la cosa risulta subito dai due primi lemmi. Sia poi $K>0$; allora se $c<\frac{\pi}{2}$ il secondo membro di (25) è positivo e maggiore di 1 (lemma 1°), sicchè ponendo $\mu=\frac{\pi}{2}-\varepsilon i\nu$ si ha $\operatorname{sen}\mu=\cos\varepsilon i\nu>1$, onde si può prendere $\nu>0$ ed $\varepsilon=\pm 1$ a piacere; se invece $c=\frac{\pi}{2}$ il secondo membro di (25) diviene infinito, onde $\mu=\infty$; se infine $c>\frac{\pi}{2}$ il secondo membro di (25) è negativo e in valore assoluto maggiore di 1 (lemma 1°), onde si può prendere $-\mu=\frac{\pi}{2}+\varepsilon i\nu$ con $\nu>0$ ed $\varepsilon=\pm 1$ a piacere.

LEMMA 4°. — Nell'ipotesi $K<0$ μ è l'angolo di parallelismo relativo alla distanza $s_{23}=CD$.

Infatti se μ è un tale angolo deve aversi come si sa (e come del resto si ricava subito colla regola di Napier dal triangolo rettangolo asintotico FCD della figura a pag. 149 ove F si suppone all'infinito)

$$\operatorname{sen}\mu = \frac{1}{\cos {}^{\cdot}s_{23}}.$$

Ora da (24) risulta

$$\nabla_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\cos a & -\cos c \end{vmatrix} = \cos c,$$

$$\nabla_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\cos b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos b & 0 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}^2 b, \qquad \nabla_{33} = \operatorname{sen}^2 a;$$

mentre per le (21) si ha

$$\cos s_{23} = \frac{\nabla_{23}}{\sqrt{\nabla_{22}\nabla_{33}}} = \frac{\cos c}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b};$$

la quale combinata colla (27) dà appunto la (25); e siccome da (26) risulta $\mu < \frac{\pi}{2}$, così il μ dato da (25) e (26) è lo stesso di quello qui considerato.

Osservazione. — Se il tetraedro normale è asintotico si ha $c = \frac{\pi}{2} - a$ ovvero $c = \frac{\pi}{2} - b$; epperò per la (25) μ coincide con b ovvero con a.

Noi diremo μ *l'angolo di asintoticità del tetraedro normale*, anche nel caso $K \gtreqless 0$.

Formula fondamentale. — Se con $V\binom{a, b}{c}$ si indica il volume del tetraedro normale di diedri laterali a, b e medio c e con μ l'angolo di asintoticità, ponendo:

$$\mu' = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right),\ \ a' = \frac{\pi}{2} - a,\ \ b' = \frac{\pi}{2} - b,\ \ p' = \frac{1}{2}(a' + b' + c), \tag{28}$$

per $K \gtreqless 0$ e $c \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ si avrà:

$$V\binom{a, b}{c} = \frac{1}{2}\{P_{p'-\mu'} - P_{p'+\mu'}\} - \frac{1}{2}\{P_{p'-a'-\mu'} - P_{p'-a'+\mu'}\} -$$
$$- \frac{1}{2}\{P_{p'-b'-\mu'} - P_{p'-b'+\mu'}\} + \frac{1}{2}\{P_{p'-c-\mu'} - P_{p'-c+\mu'}\}, \tag{29}$$

ove nel caso $K > 0$ si può sempre scegliere il segno ε della parte immaginaria di μ in modo che $V\binom{a, b}{c}$ riesca positivo; invece per $c = \frac{\pi}{2}$ (e quindi $K > 0$), cioè nel caso del tetraedro binormale, si avrà:

$$V\begin{pmatrix} a, b \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \frac{ab}{2K^{\frac{3}{2}}}. \tag{30}$$

Naturalmente per $K = 0$ la funzione $V\binom{a, b}{c}$ è indeterminata.

DIMOSTRAZIONE. - 1° *Caso* ($K < 0$). — Siano E e F i punti all'infinito di DA, AD nel tetraedro normale ABCD (vedi figura a pag. 149) di cui sopra. Allora risulta manifesto che

$$DABC = EDBC - EABC, \tag{31}$$

$$DABC = FABC - FDBC. \tag{32}$$

Ma si ha pure chiaramente

$$EDBC = FDBC,$$

onde da (31) e (32) per semisomma otteniamo

$$DABC = \frac{1}{2}\{FABC - EABC\}.\ (^1) \tag{33}$$

Dalla figura risulta poi

$$D\widehat{C}F = D\widehat{C}E = \mu. \tag{34}$$

Per procedere al calcolo dei volumi FABC, EABC in base alla (16) riteniamo la stessa notazione usata in (16) e soltanto distinguiamo con un trattino sovrapposto alle lettere gli elementi di EABC.

Porremo dunque per FABC:

α in AF, β in BF, γ in CF, α' in BC, β' in AC, γ' in AB;

e per EABC:

$\overline{\alpha}$ in AE, $\overline{\beta}$ in BE, $\overline{\gamma}$ in CE, $\overline{\alpha'}$ in BC, $\overline{\beta'}$ in AC, $\overline{\gamma'}$ in AB.

Allora avremo chiaramente per le (22) e (34):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = a,\ \beta = \dfrac{\pi}{2} - a,\ \gamma = \dfrac{\pi}{2},\ \alpha' = \mu + b,\ \beta' = \dfrac{\pi}{2},\ \gamma' = c, \\ \overline{\alpha} = a,\ \overline{\beta} = \dfrac{\pi}{2} - a,\ \overline{\gamma} = \dfrac{\pi}{2},\ \overline{\alpha'} = \mu - b,\ \overline{\beta'} = \dfrac{\pi}{2},\ \overline{\gamma'} = \pi - c. \end{array}\right\} \tag{35}$$

Da queste abbiamo intanto:

$$\alpha = \overline{\alpha}, \qquad \beta = \overline{\beta}, \qquad \gamma = \overline{\gamma},$$

onde per la (15) $L_0 = \overline{L}_0$, cioè:

$$L_0 - \overline{L}_0 = 0. \tag{36}$$

(1) Lobatschewski ha considerato DABC come dato dalla (31) nella quale EDBC è, come si vede asintotico normale, mentre EABC è asintotico non normale. Egli poi considerava EABC come un aggregato di tre tetraedri asintotici normali (due positivi e uno negativo) ottenuti calando da E la perpendicolare sul piano ABC (la quale cade sul prolungamento di CA) e dal piede di questa la perpendicolare sul prolungamento di BA; e in tal modo riduceva DABC a un aggregato di quattro tetraedri asintotici normali, due positivi e due negativi, calcolabili a mezzo di integrali della forma (18) (cfr. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, 1905, pag. 158). Si potrebbe rendere praticamente attuabile il metodo di Lobatschewski sostituendo l'integrale (18) col suo sviluppo (17) o meglio calcolando direttamente EABC a mezzo della (16); ma in ogni caso si giungerebbe ad un'espressione mancante della debita simmetria in a e b. Partendo invece dalla (33) si giunge a mezzo della (16) alla (29) che è simmetrica in a e b.

Di più da (35) abbiamo per le (14):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{\pi}{4}, \quad \alpha - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(a-c) + \frac{\pi}{4},$$

$$\beta' - \varepsilon_1 = -\frac{1}{2}(a+c) + \frac{3\pi}{4}, \quad \gamma' - \varepsilon_1 = -\frac{1}{2}(a-c) + \frac{\pi}{4},$$

$$\overline{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(a-c) + \frac{\pi}{4}, \quad \overline{\alpha} - \overline{\varepsilon}_1 = \frac{1}{2}(a+c) - \frac{\pi}{4},$$

$$\overline{\beta}' - \overline{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{2}(a-c) + \frac{\pi}{4}, \quad \overline{\gamma}' - \overline{\varepsilon}_1 = -\frac{1}{2}(a+c) + \frac{3\pi}{4};$$

e queste ci dànno

$$\varepsilon_1 = \overline{\alpha} - \overline{\varepsilon}_1, \quad \alpha - \varepsilon_1 = \overline{\varepsilon}_1, \quad \beta' - \varepsilon_1 = \overline{\gamma}' - \overline{\varepsilon}_1, \quad \gamma' - \varepsilon_1 = \overline{\beta}' - \overline{\varepsilon}_1;$$

dalle quali si trae:

$$L_1 = -P_{\varepsilon_1} - P_{\alpha-\varepsilon_1} + P_{\beta'-\varepsilon_1} + P_{\gamma'-\varepsilon_1} =$$
$$= -P_{\overline{\alpha}-\overline{\varepsilon}_1} - P_{\overline{\varepsilon}_1} + P_{\overline{\gamma}'-\overline{\varepsilon}_1} + P_{\overline{\beta}'-\overline{\varepsilon}_1} = \overline{L}_1,$$

cioè

$$L_1 - \overline{L}_1 = 0. \tag{37}$$

Da (35) si ha ancora:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\mu + b), \qquad \alpha' - \varepsilon_3 = \frac{1}{2}(\mu + b),$$

$$\beta' - \varepsilon_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mu + b), \quad \gamma - \varepsilon_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mu + b),$$

$$\overline{\varepsilon}_3 = \frac{1}{2}(\mu - b), \quad \overline{\alpha}' - \overline{\varepsilon}_3 = \frac{1}{2}(\mu - b),$$

$$\overline{\beta}' - \overline{\varepsilon}_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mu - b), \quad \overline{\gamma} - \overline{\varepsilon}_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(\mu - b),$$

$$\varepsilon_3 = \alpha' - \varepsilon_3, \qquad \beta' - \varepsilon_3 = \gamma - \varepsilon_3,$$
$$\overline{\varepsilon}_3 = \overline{\alpha}' - \overline{\varepsilon}_3, \qquad \overline{\beta}' - \overline{\varepsilon}_3 = \overline{\gamma} - \overline{\varepsilon}_3;$$

perciò

$$L_3 = -P_{\varepsilon_3} + P_{\alpha'-\varepsilon_3} + P_{\beta'-\varepsilon_3} - P_{\gamma-\varepsilon_3} = 0,$$
$$\overline{L}_3 = -P_{\overline{\varepsilon}_3} + P_{\overline{\alpha}'-\overline{\varepsilon}_3} + P_{\overline{\beta}'-\overline{\varepsilon}_3} - P_{\overline{\gamma}-\overline{\varepsilon}} = 0;$$

e quindi anche

$$L_3 - \overline{L}_3 = 0. \tag{38}$$

D'altronde la (33) per la (16) si scrive:

$$V\binom{a,\,b}{c} = \frac{1}{2}\{L_0 - \overline{L}_0\} + \frac{1}{2}\{L_1 - \overline{L}_1\} + \frac{1}{2}\{L_2 - \overline{L}_2\} + \frac{1}{2}\{L_3 - \overline{L}_3\};$$

dunque per le (36), (37), (38) rimarrà

$$V\binom{a,\,b}{c} = \frac{1}{2}\{L_2 - \overline{L}_2\}. \tag{39}$$

Ora da (35), tenendo conto delle posizioni (28), si ottiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= p' - b' - \mu', & \alpha' - \varepsilon_2 &= \pi - (p' + \mu'), \\ \beta - \varepsilon_2 &= p' - c + \mu', & \gamma' - \varepsilon_2 &= p' - a' + \mu', \\ \overline{\varepsilon}_2 &= p' - c - \mu', & \overline{\alpha}' - \overline{\varepsilon}_2 &= p' - a' - \mu', \\ \overline{\beta} - \overline{\varepsilon}_2 &= p' - b' + \mu', & \overline{\gamma}' - \overline{\varepsilon}_2 &= \pi - (p' - \mu'); \end{aligned}$$

le quali ci dànno

$$\begin{aligned} L_2 &= -P_{p'-b'-\mu'} + P_{\pi-(p'+\mu')} - P_{p'-c+\mu'} + P_{p'-a'+\mu'}, \\ \overline{L}_2 &= -P_{p'-c-\mu'} + P_{p'-a'-\mu'} - P_{p'-b'+\mu'} + P_{\pi-(p'-\mu')}. \end{aligned}$$

E poichè da (10) risulta

$$P_{\pi-(p'+\mu')} = -P_{p'+\mu'}, \qquad P_{\pi-(p'-\mu')} = -P_{p'-\mu},$$

così resterà

$$\begin{aligned} L_2 &= -P_{p'+\mu'} + P_{p'-a'+\mu'} - P_{p'-b'-\mu'} - P_{p'-c+\mu'}, \\ \overline{L}_2 &= -P_{p'-\mu'} + P_{p'-a'-\mu'} - P_{p'-b'+\mu'} - P_{p'-c-\mu'}, \end{aligned}$$

colle quali la (39) assume appunto la forma (29).

2° *Caso* $\left(K > 0, c \gtreqless \frac{\pi}{2}\right)$. Comincerò dal dimostrare che per una conveniente scelta del segno ε in $\mu\left(= \pm \frac{\pi}{2} - \varepsilon i \nu\right)$ nell'ipotesi (29) $V\binom{a,b}{c}$ riesce positivo, quando si escluda che $V\binom{a,b}{c}$ sia nullo.

Sia $c < \frac{\pi}{2}$; allora $\mu = \frac{\pi}{2} - \varepsilon i \nu$ e quindi $\mu' = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \varepsilon i \frac{\nu}{2} = \varepsilon i \frac{\nu}{2}$; perciò, detto z uno qualunque degli argomenti:

$$p' - \mu', \quad p' - a' - \mu', \quad p' - b' - \mu', \quad p' - c - \mu', \tag{40}$$

e $\overline{z}$ il suo complesso coniugato, sarà poi $\overline{z}$ rispettivamente il 1°, 2°, 3°, 4° degli argomenti

$$p' + \mu', \quad p' - a' + \mu', \quad p' - b' + \mu', \quad p' - c + \mu'. \tag{41}$$

Allora $V\binom{a,b}{c}$ è un aggregato di espressioni della forma $\pm\frac{1}{2}\left\{P_z - P_{\overline{z}}\right\}$, cioè di espressioni che per la (6) sono reali, dunque $V\binom{a,b}{c}$ è reale. Cangiando poi ε in $-\varepsilon$ le z si scambiano colle $\overline{z}$, epperò $V\binom{a,b}{c}$ cangia segno; dunque si può sempre scegliere ε in modo che $V\binom{a,b}{c}$ riesca positivo.

Sia poi $c > \frac{\pi}{2}$; allora $\mu = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon i\nu$ e quindi $\mu' = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \varepsilon i \frac{\nu}{2} = \frac{\pi}{2} + \varepsilon i \frac{\nu}{2}$; sicchè la differenza fra la parte reale di uno qualunque degli argomenti (41) e quella del corrispondente in (40) è π, vale a dire $V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}$ è un aggregato di termini della forma $\pm \frac{1}{2}\{P_z - P_{\bar{z}+\pi}\}$. Ora il segno della parte immaginaria di $\bar{z}$ è ε, dunque da (8) facendovi $m=1$ e cangiandovi z in $\bar{z}$ si ha:

$$P_{\bar{z}+\pi} = P_{\bar{z}} + \frac{\varepsilon\pi\bar{z}}{2K^{\frac{3}{2}}},$$

da cui

$$\frac{1}{2}\{P_z - P_{\bar{z}+\pi}\} = \frac{1}{2}\{P_z - P_{\bar{z}}\} - \frac{\varepsilon\pi\bar{z}}{4K^{\frac{3}{2}}};$$

sicchè da (29) risulta per la (5)

$$V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix} = \text{quantità reale} -$$

$$-\frac{\varepsilon\pi}{4K^{\frac{3}{2}}}\left\{\left(p' - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{i\nu}{2}\right) - \left(p' - a' - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{i\nu}{2}\right) - \left(p' - b' - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{i\nu}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(p' - c - \frac{\pi}{2} + \varepsilon\frac{i\nu}{2}\right)\right\} = \text{quantità reale} - \frac{\varepsilon\pi(a' + b' - c)}{4K^{\frac{3}{2}}} = \text{quant. reale}.$$

Se si cangia ε in $-\varepsilon$ anche qui $V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}$ cangia segno, dunque si può sempre scegliere ε in modo che $V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}$ riesca positivo.

Ritenuto ora che $V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}$ abbia il significato di *volume del tetraedro normale di diedri laterali* a, b *e di diedro medio* c, possiamo dimostrare che avrà luogo l'uguaglianza (29) anche nel caso $\left(K > 0, c \gtreqless \frac{\pi}{2}\right)$. Ed invero i due membri della (29) sono funzioni analitiche della a, b, c definite nell'ipotesi (22) dalla equazione differenziale (21) di Richmond-Dannmayer; dunque, poichè la loro uguaglianza sussiste per $K < 0$, questa dovrà sussistere anche per quei valori di K e a, b, c che sono compatibili coll'analiticità dei due membri stessi, epperò in particolare anche nel caso $\left(K > 0, c \gtreqless \frac{\pi}{2}\right)$.

3° *Caso* $\left(K > 0,\ c = \frac{\pi}{2}\right)$, *cioè tetraedro binormale.* — In tal caso la (29) cade in difetto perchè μ diviene ∞ (lemma 3°). Intanto se noi facciamo variare soltanto i due diedri laterali (cioè se durante la variazione il tetraedro si mantiene binormale), la (21) ci darà:

$$dV = \frac{1}{2K}\{s_{03}\,da + s_{12}\,db\}.$$

Ma poichè in un tetraedro binormale gli spigoli laterali sono reciproci-assoluti (§ 1°) si conclude che le ampiezze degli spigoli laterali sono uguali a quelle dei diedri opposti, cioè

$$'s_{03} = b\,, \qquad 's_{12} = a\,;$$

dunque:

$$dV = \frac{1}{2K^{\frac{3}{2}}}\,\{bda + adb\} = \frac{1}{2K^{\frac{3}{2}}}\,d\,(ab)\,;$$

e integrando, coll'osservare che V deve annullarsi insieme ad a e b, si ottiene conformemente a (30) (cfr. (R)) ;

$$V\begin{pmatrix} a,\, b \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \frac{ab}{2K^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Osservazione. — Quando $c = \frac{\pi}{2} - a$ il tetraedro normale diventa asintotico; e difatti si ha allora $\mu = b$ e la (29) (come si verifica facilmente) assume la forma (17) in cui si faccia $\alpha = a$, $\alpha' = b$.

Corollario. — Il volume U di una piramide regolare n-latera nella quale il diedro laterale sia $2c$ e il diedro adiacente alla base sia b è della forma

$$U = 2n\,V\begin{pmatrix} \frac{\pi}{n},\, b \\ c \end{pmatrix},$$

avendo $V\begin{pmatrix} a, b \\ c \end{pmatrix}$ il significato (29).

G. Sforza.

ALCUNE OSSERVAZIONI SOPRA UN PROBLEMA di LEONARDO PISANO (Fibonacci)

Prendendo le mosse dal seguente problema: " Determinare un " numero razionale x, tale che $x^2 - 5$ e $x^2 + 5$ risultino due quadrati " perfetti ", il Fibonacci si propone e risolve in generale la questione di " determinare tre numeri razionali x_1, x_2, x_3, tali che i loro qua" drati risultino in progressione aritmetica ". [1]

Noi qui daremo, con un metodo un po' più rapido, la soluzione di questo problema e stabiliremo alcune notevoli proprietà dei numeri x_1, x_2, x_3 e della differenza A della progressione suddetta.

[1] Vedi p. es. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik ecc.*, Leipzig, Teubner, 1874, pag. 346.

I.

1. La risoluzione del problema proposto **equivale alla determinazione** delle soluzioni razionali della equazione

$$x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2.$$

Indicando con A il valore comune dei due membri, alla precedente equazione si può sostituire il sistema:

$$\left.\begin{aligned} x_2^2 - x_1^2 &= \mathrm{A}, \\ x_3^2 - x_1^2 &= 2\mathrm{A}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Supponiamo dapprima che A sia intero e che le soluzioni del sistema debbano esse pure essere intere.

La più generale soluzione razionale della seconda equazione si ottiene ponendo:

$$x_1 = \frac{2\mathrm{A} - \lambda^2}{2\lambda}, \qquad x_3 = \frac{2\mathrm{A} + \lambda^2}{2\lambda}$$

dove λ è un parametro razionale. (¹)

Se si vuole che x_1 e x_3 risultino interi, siccome A è, per ipotesi, intero, dovrà essere λ un numero pari, ed A un numero divisibile per λ.

Posto $\lambda = 2a_2$, sarà $\mathrm{A} = 2a_1a_2$, e quindi:

$$x_1 = a_1 - a_2, \qquad x_3 = a_1 + a_2. \qquad (2)$$

Sostituendo nella prima delle (1), si ha:

$$x_2 = \sqrt{\mathrm{A} + x_1^2} = \sqrt{2a_1a_2 + (a_1 - a_2)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \qquad (3)$$

Perchè x_2 risulti un numero intero, a_1 e a_2 dovranno essere tali che la somma dei loro quadrati risulti un quadrato perfetto.

La forma più generale di tali numeri è, com'è ben noto,

$$a_1 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2, \qquad a_2 = 2\lambda_1\lambda_2,$$

ove s'intenda di designare con λ_1 e λ_2 numeri interi arbitrari.

In virtù delle (2) e (3) abbiamo allora:

$$x_1 = \lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2, \quad x_2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2, \quad x_3 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2, \quad (4)$$

ed essendo $\mathrm{A} = 2a_1a_2$, sarà

$$\mathrm{A} = 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2). \qquad (5)$$

Queste formole costituiscono la soluzione del sistema (1) quale è data da Leonardo Pisano.

(¹) Cfr. mia Nota. " Soluzioni razionali delle equazioni $x^2 \pm y^2 = \mathrm{A}$ ". § 2. — *Periodico di Matematica*, fasc. II, 1907.

2. Riguardo al calcolo dei numeri x_1, x_2, x_3 mediante i parametri λ_1, λ_2 importa fare alcune osservazioni.

Cambiando segno a λ_1 e λ_2 contemporaneamente i numeri x_1, x_2, x_3, A rimangono inalterati, mentre invece, se si cambia segno soltanto a uno dei parametri, il numero x_1 si cambia con x_3, x_2 rimane invariato ed A muta di segno.

Potremo quindi supporre λ_1 e λ_2 entrambi positivi, e convenendo che A sia pure positivo, dovremo prendere

$$\lambda_1 > \lambda_2. \tag{6}$$

Ora si osservi che x_2 è per sua natura sempre positivo, mentre x_3 è positivo in virtù dell'ipotesi (6).

Il numero x_1 può essere invece negativo e ciò accade, come si verifica subito, quando $\lambda_1 < (1+\sqrt{2})\lambda_2$. Siccome a noi interessa il valore assoluto di x_1, così come valori di x_1, x_2, x_3 corrispondenti al numero

$$A = 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)(\gamma_1-\lambda_2)$$

prenderemo

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= |\lambda_1^2-\lambda_2^2-2\lambda_1\lambda_2|, \\ x_2 &= \lambda_1^2+\lambda_2^2, \\ x_3 &= \lambda_1^2-\lambda_2^2+2\lambda_1\lambda_2, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

e con ciò si avrà, in virtù della (6),

$$|x_1| < x_2 < x_3.$$

Per una determinazione sistematica di terne di numeri x_1, x_2, x_3 soddisfacenti all'equazione $x_2^2-x_1^2=x_3^2-x_2^2$ potremo usufruire delle (7) ponendo per λ_1 successivamente i valori 2, 3, 4,... ed associando ad ognuno di essi i valori di λ_2 rispettivamente minori.

Giova però tener presente, che per non ritrovare terne di numeri equivalenti ad altre già trovate (nel senso che i nuovi numeri risultino proporzionali ad altri ottenuti precedentemente) basta attribuire ai parametri λ_1, λ_2 coppie di valori primi fra loro non entrambi dispari.

Che λ_1, λ_2 debbano essere primi fra loro risulta ovviamente dalle (7), poichè, se λ_1, λ_2 hanno come massimo divisore comune μ, i numeri x_1, x_2, x_3 risultano tutti tre divisibili per μ^2 e quindi sono proporzionali ai numeri $\frac{x_1}{\mu^2}$, $\frac{x_2}{\mu^2}$, $\frac{x_3}{\mu^2}$, che sono interi essi pure e corrispondono ai parametri interi primi fra loro $\frac{\lambda_1}{\mu}$, $\frac{\lambda_2}{\mu}$.

Se λ_1 e λ_2 sono primi fra loro e dispari entrambi, x_1, x_2, x_3 risultano numeri pari, e i numeri interi $\frac{x_1}{2}$, $\frac{x_2}{2}$, $\frac{x_3}{2}$ si ottengono, com'è facile verificare, coi parametri $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ e $\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$ che sono pure primi fra loro e di parità diversa.

Per seguire e verificare con esempi le successive considerazioni che andremo facendo, non crediamo inutile calcolare una serie di soluzioni dell'equazione $x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2$ dando per ciascuna il valore del numero A.

λ_1	λ_2	x_1	x_2	x_3	A
2	1	1	5	7	24
3	2	7	13	17	$120 = 24 . 5$
4	1	7	17	23	$240 = 24 . 2 . 5$
4	3	17	25	31	$336 = 24 . 2 . 7$
5	2	1	29	41	$840 = 24 . 5 . 7$
5	4	31	41	49	$720 = 24 . 2 . 3 . 5$
6	1	23	37	47	$840 = 24 . 5 . 7$
6	5	49	61	71	$1320 = 24 . 5 . 11$
7	2	17	53	73	$2520 = 24 . 3 . 5 . 7$
7	4	23	65	89	$3696 = 24 . 2 . 7 . 11$
7	6	71	85	97	$2184 = 24 . 7 . 13$
8	1	47	65	79	$2016 = 24 . 2^2 . 3 . 7$
8	3	7	73	103	$2580 = 24 . 2^2 . 5 . 11$
8	5	41	89	119	$6240 = 24 . 2^2 . 5 . 13$
8	7	97	113	127	$3360 = 24 . 2^2 . 5 . 7$
9	2	41	85	113	$5544 = 24 . 3 . 7 . 11$
9	4	7	97	137	$9360 = 24 . 2 . 3 . 5 . 13$
9	8	127	145	161	$4896 = 24 . 2^2 . 3 . 17$
10	1	79	101	119	$3960 = 24 . 3 . 5 . 11$
10	3	31	109	151	$9920 = 24 . 5 . 7 . 13$
10	7	89	149	191	$14280 = 24 . 5 . 7 . 17$
10	9	161	181	199	$6840 = 24 . 3 . 5 . 19$

3. Chiameremo *numero di Fibonacci* ogni numero che possa mettersi sotto la forma

$$4\lambda_1\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_2)$$

ove λ_1 e λ_2 sono numeri interi arbitrari distinti, non necessariamente, come s'è ammesso finora, di parità diversa o primi fra loro.

Riservandoci di esporre in seguito (Cap. III) uno studio più accurato di tali numeri ci sembra però opportuno enunciare fin d'ora una proprietà, che è stata di proposito messa in evidenza nella tabella precedente.

Vogliamo alludere al

Teorema. — *Ogni numero di Fibonacci è multiplo di 24.*

Sia $A = 4\lambda_1\lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_2) (\lambda_1 - \lambda_2)$. Il numero $\frac{A}{4}$ è divibile per 2 perchè uno almeno dei tre numeri λ_1, λ_2, $\lambda_1 + \lambda_2$ è pari, quindi A è multiplo di 8. Se ora diciamo m il M. C. D. di λ_1, λ_2 e poniamo $\lambda_1 = m\lambda'_1$, $\lambda_2 = m\lambda'_2$, possiamo scrivere

$$A = 4m^4\lambda'_1\lambda'_2 (\lambda'_1 + \lambda'_2) (\lambda'_1 - \lambda'_2).$$

I numeri λ'_1, λ'_2 sono primi fra loro e quindi, o entrambi dispari o di parità diversa. Se uno di essi risulta multiplo di tre, il teorema è senz'altro verificato; nel caso opposto essi hanno una delle forme $6n+1$, $6n+2$, $6n+4$, $6n+5$, e perciò la loro somma oppure la loro differenza è necessariamente un multiplo di 3.

Il teorema è dunque provato.

4. Togliamo ora la restrizione, finora imposta, che x_1, x_2, x_3, A debbano essere numeri interi.

Fonderemo le nostre osservazioni sul fatto ovvio che, quando x_1, x_2, x_3 risultano moltiplicati per uno stesso fattore, il numero A risulta moltiplicato per il quadrato di quel fattore.

Supponiamo dapprima A intero.

Se esso è della forma (5), esiste almeno una soluzione intera del sistema (1), ma possono anche esistere soluzioni fratte. Precisamente, se ρ è un tale numero intero, per cui $\rho^2 A$ risulti ancora un numero della forma (5), da ogni soluzione intera del sistema

$$x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2 = \rho^2 A$$

formata di numeri primi fra loro, si avrà una soluzione fratta dividendo i tre numeri trovati per ρ.

Si noti che con ciò le tre frazioni risultanti ammetteranno come minimo comune denominatore il numero ρ.

Es. $A = 840 = 2^3 . 3 . 5 . 7 = 4 . 5 . 2 (5+2)(5-2)$.

Questo numero è della forma (5) e precisamente corrisponde a $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$. Perciò dalle (7) si ha

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 29, \qquad x_3 = 41.$$

Prendendo $\rho = 2$, risulta $4 . 840 = 4 . 8 . 7 (8+7)(8-7)$ quindi applicando le (7) per $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 7$, si ha

$$x_1 = 97, \qquad x_2 = 113, \qquad x_3 = 127.$$

Dividendo questi numeri per 2, i tre numeri

$$\frac{97}{2}, \quad \frac{113}{2}, \quad \frac{127}{2}$$

sono tali che i loro quadrati risultano in progressione aritmetica con differenza 840.

Può accadere che il numero dato A non sia della forma (5), ma che risulti tale il prodotto $\rho^2 A$, ove ρ è un numero intero scelto opportunemente.

In tal caso, come prima, si determinano tre numeri x_1, x_2, x_3, tali che $x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_1^2 = \rho^2 A$ e si dividono per ρ. I numeri che si ottengono corrisponderanno al numero dato.

Es. $A = 5$.

Questo numero non è della forma richiesta, ma moltiplicandolo per il quadrato di 12, si ha

$$12^2 . 5 = 2^4 . 3^2 . 5 = 4 . 5 . 4 (5 + 4)(5 - 4).$$

I numeri x_1, x_2, x_3 corrispondenti si ottengono dalle (7) ponendo $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 4$ e sono

$$x_1 = 31 , \qquad x_2 = 41 , \qquad x_3 = 49,$$

e perciò i tre numeri

$$\frac{31}{12}, \quad \frac{41}{12}, \quad \frac{49}{12}$$

sono tali che i loro quadrati risultano in progressione aritmetica con differenza 5.

Supponiamo ora $A = \frac{a}{b}$ (con $b > 1$).

Per ogni numero ρ, tale che $ab\rho^2$ risulti un numero della forma (5), si ha una terna di numeri x_1, x_2, x_3 soddisfacenti alle condizioni $x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2 = A$. Essi si determinano nel solito modo, cioè trovando tre numeri interi corrispondentemente al numero $ab\rho^2$ e dividendoli per $b\rho$.

Es. I. — $A = \frac{15}{8}$.

Poichè $15 . 8 = 4 . 3 . 2 (3 + 2)(3 - 2)$, così per $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ le (7) forniscono

$$x_1 = 7 , \qquad x_2 = 13 , \qquad x_3 = 17 ,$$

e perciò i tre numeri che soddisfano sono

$$\frac{7}{8}, \quad \frac{13}{8}, \quad \frac{17}{8}.$$

II. — $A = \frac{3}{7}$.

Il numero $3 . 7$ non è della forma (5), ma il prodotto $2^4 . 3 . 7$ soddisfa invece a questa condizione perchè si ha

$$2^4 . 3 . 7 = 4 . 4 . 3 (4 + 3)(4 - 3).$$

Quindi, siccome dalle (7), per $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$, si ha

$$x_1 = 17 , \qquad x_2 = 25 , \qquad x_3 = 31 ,$$

così i tre numeri che rispondono al problema saranno

$$\frac{17}{28}, \quad \frac{25}{28}, \quad \frac{31}{28}.$$

Osservazione. — Dato un numero razionale A, ad ogni soluzione razionale del sistema

$$x_2^2 - x_1^2 = x_3^2 - x_2^2 = A$$

corrisponde una soluzione razionale del sistema

$$y_2^2 - y_1^2 = y_3^2 - y_2^2 = \frac{1}{A}$$

legata alla precedente dalle formole

$$y_1 = \frac{x_1}{A}, \quad y_2 = \frac{x_2}{A}, \quad y_3 = \frac{x_3}{A}.$$

In altre parole: A due numeri razionali inversi corrisponde lo stesso numero di terne di numeri x_1, x_2, x_3 tali che i loro quadrati risultano in progressione aritmetica con differenza uguale ai due numeri inversi dati.

II.

5. Può essere interessante saper riconoscere a priori, almeno nei casi più semplici, se un dato numero sia o no un numero di Fibonacci corrispondente a una coppia di parametri λ_1, λ_2 primi fra loro non entrambi dispari.

Noi cercheremo di fare questo riconoscimento dalla decomposizione del numero in fattori primi.

Poichè il numero deve contenere i fattori primi 2 e 3, cominciamo col domandarci di trovare tutti i numeri di Fibonacci formati coi soli fattori primi 2, 3. Dimostreremo che

Il solo numero di Fibonacci che sia formato soltanto coi fattori primi 2, 3 è 24.

Sia $A = 2^{m+2}3^n$, e proponiamoci di determinare m ed n in modo che l'equazione

$$4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 2^{m+2}3^n,$$

o l'equivalente

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 2^m 3^n, \tag{8}$$

sia soddisfatta per valori interi di λ_1, λ_2 primi fra loro non entrambi dispari.

Poichè il primo membro della (8) dev'essere divisibile solo per i fattori primi 2 e 3, si vede che i soli modi con cui si può tentare di soddisfare alla (8) corrispondono alle posizioni:

a)	$\lambda_1 = 2^p$	$\lambda_2 = 3^q$,
b)	$\lambda_1 = 2^p 3^q$	$\lambda_2 = 1$,
c)	$\lambda_1 = 3^q$	$\lambda_2 = 2^p$.

Intanto, essendo $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_1 - \lambda_2$ entrambi dispari, il prodotto $\lambda_1\lambda_2$ deve contenere la potenza 2^m, e quindi si ha intanto

$$p = m.$$

Siccome poi, per la (8), il prodotto $(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)$ dev'essere uguale a 3^{n-q}, uno almeno dei due fattori $\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1-\lambda_2$ dev'essere divisibile per 3, e ciò non può accadere, com'è ovvio, se q non è zero.

Ora siccome è $p=m>0$, la posizione $c)$ darebbe $\lambda_1<\lambda_2$ e quindi risulterebbe $A<0$, contro l'ipotesi.

Non restano dunque che le posizioni $a)$ e $b)$ le quali forniscono entrambe

$$\lambda_1=2^m, \qquad \lambda_2=1.$$

Dalla (8) allora si deduce

$$(2^m+1)(2^m-1)=3^n,$$

e quindi

$$\begin{cases} 2^m+1=3^{n'}, \\ 2^m-1=3^{n''}, \\ n'+n''=n, \ (n'>n''). \end{cases}$$

Dalle due prime si ricava

$$2=3^{n'}-3^{n''}=3^{n''}(3^{n'-n''}-1),$$

e quindi

$$n''=0 \qquad n'=1.$$

Si ha dunque

$$m=1, \qquad n=1,$$

ossia

$$A=2^3 \,.\, 3.$$

Il nostro asserto è con ciò dimostrato.

6. Supponiamo ora che, tenendo fisse le altre condizioni, il numero A debba risultare dal prodotto di tre potenze di tre fattori primi distinti, di cui due sono necessariamente il 2 e il 3.

La discussione di questo caso si potrà fare con notevole semplicità quando avremo dimostrato il seguente

Lemma. — *Fra le infinite soluzioni dell'equazione* $2^x-3^y=1$ *sono intere e positive soltanto le* $x=1$, $y=0$ *ed* $x=2$, $y=1$; *e delle soluzioni dell'equazione* $3^x-2^y=1$ *sono intere e positive soltanto le* $x=1$, $y=1$ *ed* $x=2$, $y=3$. [1]

Supponiamo dapprima x un numero intero dispari.

La prima delle nostre equazioni si può scrivere:

$$(3-1)^x-3^y=1.$$

E per valori interi positivi di y si ha quindi

$$\text{mult. di } 3-1=1,$$

il che è manifestamente assurdo.

La seconda equazione si può scrivere:

$$(4-1)^x-2^y=1.$$

[1] La dimostrazione qui riportata m'è stata gentilmente suggerita dal carissimo amico Professore Paolo Cattaneo.

Per valori interi positivi di y (che si possono supporre senz'altro maggiori di 3), si avrebbe

$$\text{mult. di } 4-1=1,$$

che è assurda.

Supponiamo ora x un numero intero positivo pari, che indicheremo con 2ξ.

L'equazione $2^x - 3^y = 1$ si potrà scrivere:

$$4^\xi - 3^y = 1,$$

o anche

$$(4-1)(1+4+\ldots+4^{\xi-2}+4^{\xi-1}) = 3^y,$$
$$1+4+\ldots+4^{\xi-2}+4^{\xi-1} = 3^{y-1}.$$

Poichè 4^m è, qualunque sia m, uguale ad un multiplo di 3 aumentato di 1, il primo membro della precedente uguaglianza sarà uguale ad un multiplo di 3 aumentato di ξ. Perchè essa possa sussistere, ξ dovrà essere un multiplo di 3. Indicandolo con $3h$, alla precedente uguaglianza possiamo dare la forma

$$(1+4+4^2)(1+4^3+4^6+\ldots+4^{3h-3}) = 3^{y-1}.$$

Ma il fattore $1+4+4^2$ è divisibile per 7, quindi l'uguaglianza è assurda.

Considerando ora la seconda equazione, scriviamola sotto la forma:

$$9^\xi - 2^y = 1$$

od anche

$$(9-1)(1+9+9^2+\ldots+9^{\xi-2}+9^{\xi-1}) = 2^y,$$

e, dato che y si può supporre maggiore di 3,

$$1+9+9^2+\ldots+9^{\xi-2}+9^{\xi-1} = 2^{y-3}.$$

Perchè il primo membro sia un numero pari come il secondo, dev'essere pari il numero degli addendi, cioè $\xi = 2h$.

Allora si può scrivere:

$$(1+9)(1+9^2+9^3+\ldots+9^{2h-2}) = 2^{y-3}$$

e ciò è assurdo, perchè il primo membro, contenendo il fattore $1+9$ è divisibile per 5, il che non accade del secondo.

Le sole soluzioni intere positive delle nostre equazioni sono dunque quelle numerate nel teorema enunciato.

7. Tornando ora all'ipotesi relativa alla forma del numero A, enunciata in principio del precedente paragrafo, porremo

$$A = 2^{m+2}\,2^n p^q \qquad (p > 3)$$

e si tratterà di determinare gli esponenti m, n, q; e il numero primo p in modo che l'equazione

$$\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2) = 2^m 3^n p^q \tag{9}$$

sia soddisfatta da due numeri interi λ_1 e λ_2, $(\lambda_1 > \lambda_2)$ primi fra loro non entrambi dispari.

Dimostreremo che:

I numeri di Fibonacci formati dal prodotto di potenze di tre soli fattori primi distinti sono sei, e precisamente:

$$120 = 2^3 . 3 . 5, \qquad 240 = 2^4 , 3 . 5, \qquad 336 = 2^4 . 3 . 7,$$
$$720 = 2^4 . 3^2 . 5, \qquad 2016 = 2^5 . 3^2 . 7, \qquad 4896 = 2^5 . 3^2 . 17.$$

Tenendo presente che i numeri λ_1, λ_2, in virtù della (9), devono contenere i soli fattori primi $2, 3, p$, che $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 - \lambda_2$ sono numeri dispari (perchè λ_1 e λ_2 sono di parità diversa) divisibili anch'essi solo per 3 e per p, e che il prodotto $(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2)$ è necessariamente maggiore di 1, si viene alla conclusione che le sole ipotesi possibili, relative ai valori da darsi a λ_1 e λ_2, per soddisfare alla (9), sono contenute nelle posizioni seguenti:

a)	$\lambda_1 = 2^m,$	$\lambda_2 = 1;$
b)	$\lambda_1 = 2^m,$	$\lambda_2 = 3^n;$
c)	$\lambda_1 = 2^m,$	$\lambda_2 = p^q;$
d)	$\lambda_1 = 2^m 3^n,$	$\lambda_2 = 1;$
e)	$\lambda_1 = 2^m p^q,$	$\lambda_2 = 1;$
f)	$\lambda_1 = 3^n,$	$\lambda_2 = 2^m;$
g)	$\lambda_1 = p^q,$	$\lambda_2 = 2^m.$

a) Sostituendo nelle (9) $\lambda_1 = 2^m$, $\lambda_2 = 1$, si ha:

$$(2^m + 1)(2^m - 1) = 3^n p^q,$$

e quindi dev'essere manifestamente:

$$\left.\begin{aligned} 2^m + 1 &= 3^{n'} p^{q'}, \\ 2^m - 1 &= 3^{n''} p^{q''}, \\ n' + n'' &= n, \\ q' + q'' &= q. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dalle prime due si ottiene:

$$3^{n'} p^{q'} - 3^{n''} p^{q''} = 2. \tag{11}$$

Se $n' \geqq n''$ e $q' \geqq q''$ (i segni di uguaglianza non possono però coesistere) si può scrivere:

$$3^{n''} p^{q''} (3^{n'-n''} p^{q'-q''} - 1) = 2,$$

ed essendo p un numero dispari, questa uguaglianza si scinderà nelle due:

$$3^{n''} p^{q''} = 1, \qquad 3^{n'-n''} p^{q'-q''} - 1 = 2,$$

che equivalgono in virtù delle ultime due delle (10) alle:

$$n'' = q'' = 0, \qquad 3^n p^q = 3.$$

Deve dunque essere o $q = 0$, ovvero $p = 1$, il che è contrario all'ipotesi fatta relativamente alla forma del numero A.

Se $n' > n''$ e $q' < q''$, la (11) può scriversi:

$$3^{n''} p^{q'} (3^{n'-n''} - p^{q''-q'}) = 2.$$

Come prima si ricava $n'' = q' = 0$, e quindi dalla prima delle (10), poichè $n' = n$, si ha:

$$3^n - 2^m = 1.$$

Per il lemma del paragrafo precedente, i soli valori interi di m ed n, che soddisfano a questa equazione, sono:

$$n = 1, \quad m = 1;$$
$$n = 2, \quad m = 3.$$

La seconda delle (10) ci mostra che la prima coppia non è accettabile, perchè dovrebbe essere o $q = 0$ o $p = 1$.

La stessa equazione, per $n = 2$, $m = 3$, fornisce invece:

$$p = 7, \quad q = 1.$$

Abbiamo dunque il numero

$$A = 2^6 . 3^2 . 7,$$

che corrisponde ai parametri

$$\lambda_1 = 8, \ \lambda_2 = 1.$$

Se $n' < n''$ e $q' > q''$, si conclude, con un ragionamento perfettamente analogo, che

$$m = 2, \quad n = 1, \quad p = 5, \quad q = 1,$$

e che perciò

$$A = 2^4 . 3 . 5$$

corrispondentemente a

$$\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 1.$$

Non potendo essere contemporaneamente $n' < n''$, $q' < q''$ la discussione dell'ipotesi a) è esaurita.

b) Se nella (9) si pone $\lambda_1 = 2^m$, $\lambda_2 = 3^n$, si ricava

$$\left.\begin{array}{l} 2^m + 3^n = p^{q'}, \\ 2^m - 3^n = p^{q''}, \\ q' + q'' = p, \ (q' > q''). \end{array}\right\} \qquad (12)$$

Dalle due prime si ha

$$2^{m+1} = p^{q'} + p^{q''} = p^{q''} (p^{q'-q''} + 1),$$

e quindi

$$q'' = 0.$$

Allora la seconda delle (12) diventa

$$2^m - 3^n = 1,$$

e questa fornisce (oltre alla soluzione $m = 1$, $n = 0$ inaccettabile):

$$m = 2, \quad n = 1,$$

e quindi per la prima delle (12)

$$p = 7, \qquad q = 1.$$

Abbiamo dunque il numero

$$A = 2^4 . 3 . 7$$

dato da

$$\lambda_1 = 4, \qquad \lambda_2 = 3.$$

c) Posto nella (9) $\lambda_1 = 2^m$, $\lambda_2 = p^q$, si ha:

$$\left. \begin{array}{l} 2^m + p^q = 3^{n'}, \\ 2^m - p^q = 3^{n''}, \\ n' + n'' = n \; (n' > n''). \end{array} \right\} \qquad (13)$$

Come nel caso precedente, si conclude che dev'essere $n'' = 0$ e quindi $n' = n$ e che perciò, come risulta sommando le due prime equazioni:

$$2^{m+1} - 3^n = 1.$$

L'unica soluzione intera $m = 1$, $n = 1$, non escludibile a priori, sostituita in una delle due prime equazioni (13) da $p^q = 1$ il che è contro l'ipotesi fatta sul numero A.

d), *e*) Queste ipotesi, come si vede in modo analogo al precedente, non conducono a un numero A della forma richiesta.

f) Sia

$$\lambda_1 = 3, \qquad \lambda_2 = 2^m.$$

Dalla (9) si ricava che dev'essere

$$\left. \begin{array}{l} 3^n + 2^m = p^{q'}, \\ 3^n - 2^m = p^{q''}, \\ q' + q'' = q, \; (q' > q''). \end{array} \right\} \qquad (14)$$

Come al solito

$$q'' = 0 \qquad \text{e quindi} \qquad q' = q.$$

Ma allora dalla seconda equazione, che diventa:

$$3^n - 2^m = 1$$

si ricava

$$m = 1, \qquad n = 1,$$
$$m = 3, \qquad n = 2.$$

Alla prima coppia di valori per m ed n corrisponde

$$p = 5, \qquad q = 1$$

e alla seconda

$$p = 17, \qquad q = 1.$$

Abbiamo dunque in tal caso due numeri:

$$A = 2^3 . 3 . 5$$

per $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$,

$$A = 2^5 . 3^2 . 17$$

per $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 8$.

g) Sia $\lambda_1 = p^q$, $\lambda_2 = 2^m$. Sostituendo nella (9) si conclude col solito ragionamento che

$$m=2, \quad n=2, \quad p=5, \quad q=1,$$

e quindi

$$A = 2^4 . 3^2 . 5$$

corrispondentemente a

$$\lambda_1 = 5, \ \lambda_2 = 4.$$

III.

8. In questo paragrafo ci limiteremo ad enunciare alcune proprietà dei numeri x_1, x_2, x_3 poichè riserveremo ad una nota successiva, che speriamo pubblicare fra breve, lo studio completo.

Notiamo intanto che tutti tre questi numeri (quando λ_1 e λ_2 sono di parità diversa) sono dispari.

Del numero x_2 si sono studiate le proprietà in altra nota. [1] Ricorderemo soltanto, che essendo esso uguale alla somma dei quadrati di due numeri interi λ_1, λ_2 primi fra loro non entrambi dispari, sarà uguale al prodotto di potenze di fattori primi della forma $4p+1$. In quella nota è pure indicato come si determinino λ_1, λ_2 noto x_2.

Per quanto riguarda i numeri x_1, x_3, siccome essi sono rappresentabili mediante forme quadratiche, il cui determinante è uguale a 2, saranno prodotti di potenze di fattori primi della forma

$$8p \pm 1. \text{ [2]}$$

Anche qui bisogna però mantenere le condizioni relative a λ_1 e λ_2.

Dato che x_3 sia della forma voluta, se esso è primo, si può determinare una sola coppia di numeri λ_1, λ_2 tali che risulti

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = x_3; \tag{15}$$

nel caso opposto se ν è il numero di fattori primi distinti che compongono x_3, esistono $2^{\nu-1}$ coppie di numeri λ_1, λ_2 (al solito essendo $\lambda_1 > \lambda_2$) soddisfacenti alla equazione soprascritta.

Quando x_1 è un numero della forma voluta, esistono infinite coppie di numeri λ_1, λ_2 tali che risulti

$$| \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 | = x_1. \tag{16}$$

Infatti si osservi che la forma $|\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2|$ si trasforma in sè stessa mediante la trasformazione

$$\lambda_1 = 2\mu_1 + \mu_2 , \qquad \lambda_2 = \mu_1$$

e che perciò alle due coppie (μ_1, μ_2), $(2\mu_1 + \mu_2, \mu_1)$ corrisponde lo stesso valore di x_1. Questa trasformazione di parametri si può ripetere indefinitamente e perciò il nostro asserto è provato.

---

(1) Numeri interi che si possono decomporre ecc. *Periodico di Matematica*, fasc. 1, 1907.
(2) Wertheim, *Elemente der Zahlentheorie*, 1887, pagg. 271, 272; 151; 189.

Poichè ogni numero x_3 è anche numero x_1 e viceversa, quando si sappia determinare una coppia di numeri λ_1, λ_2 soddisfacenti all'equazione (15) e si conosca il modo di passare dalla forma

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2$$

alla forma

$$|\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2|,$$

sarà risoluto anche il problema di determinare una coppia λ_1, λ_2 soddisfacente all'equazione (16).

È facile verificare che il numero x_1 corrispondente alle due coppie di parametri $(2\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1)(\lambda_1 + 2\lambda_2, \lambda_2)$ è lo stesso numero x_3 corrispondente alla coppia (λ_1, λ_2).

Abbiamo poi visto più sopra come si ottengano altre coppie di parametri per lo stesso numero x_1.

Quanto al modo di determinare tutte le coppie (λ_1, λ_2) corrispondenti a un numero x_3 ci riserviamo di esporlo nella nota che seguirà a questo lavoro.

Sarà facile verificare tutto quanto è asserito in questo paragrafo nella tabella data al paragrafo 2.

9. Una proprietà dei numeri di Fibonacci è enunciata nel seguente:

Teorema. — *Se A è un numero di Fibonacci è pure dello stesso tipo ogni altro numero che si ottenga da A moltiplicandolo per un fattore qualsiasi ρ^4 o per una potenza pari di 2.*

Infatti, se

$$A = 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2),$$

si ha pure

$$\rho^4 A = 4 \,.\, \rho\lambda_1 \,.\, \rho\lambda_2 (\rho\lambda_1 + \rho\lambda_2)(\rho\lambda_1 - \rho\lambda_2),$$

da cui risulta che il numero $\rho^4 A$ è il numero di Fibonacci corrispondente ai parametri $\rho\lambda_1$, $\rho\lambda_2$.

Per dimostrare la seconda parte del teorema, si osservi che il numero 2^2A si può ottenere dal numero A sostituendo a λ_1 e λ_2 rispettivamente $\lambda_1 + \lambda_2$ e $\lambda_1 - \lambda_2$. Infatti

$$4(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2) \,.\, 2\lambda_1 \,.\, 2\lambda_2 = 4 \,.\, 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Ripetendo m volte una trasformazione analoga si conclude che è pure di Fibonacci il numero $2^{2m}A$. c. d. d.

La proposizione reciproca non è vera. Si possono cioè trovare dei numeri di Fibonacci tali che conservando in essi il fattore 24 e astraendo poi da tutti o parte dei fattori del tipo citato nel teorema i numeri che si ottengono non sono più del Fibonacci.

La verificazione si può fare sopra un esempio.

G. Bisconcini.

OSSERVAZIONE SOPRA UNA "NOTA" DI G. BATTAGLINI
relativa alla composizione di forze concorrenti

Fra le tante dimostrazioni della legge di composizione di due forze concorrenti ve n'è una molto elegante di BATTAGLINI (1), nella quale è ottenuto lo scopo stabilendo che la *componente* di una forza F, in una direzione r, è data da $F.\cos(\widehat{Fr})$. Il ragionamento di BATTAGLINI, oltre che su ipotesi meccaniche, è fondato sul teorema relativo alla somma degli angoli di un triangolo dell'ordinaria geometria. E poichè il risultato $F.\cos(\widehat{Fr})$ è notoriamente indipendente dall'ipotesi euclidea, fui indotto ad esaminare se quest'ipotesi fosse indispensabile per il procedimento di BATTAGLINI. Avendo constatato non solo che è superflua ma che la via più semplice per ottenere la *relazione funzionale*, da cui l'Autore fa dipendere la soluzione del problema è strettamente aritmetica, mi permetto di accennare la modificazione da introdurre nel procedimento di BATTAGLINI, per renderlo indipendente dal *V postulato* euclideo.

Tre forze x, y, z in equilibrio intorno ad un punto O giacciono in un piano, sicchè gli angoli $\alpha = \widehat{yz}$, $\beta = \widehat{zx}$, $\gamma = \widehat{xy}$ sono legati dalla relazione $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$. Se r è una retta arbitraria per O, le componenti di x, y, z nella direzione r sono date da:

$$x.\varphi(\widehat{xr}), \qquad y.\varphi(\widehat{yr}), \qquad z.\varphi(\widehat{zr}),$$

ove con $\varphi(\omega)$ s'indica una conveniente funzione dell'angolo ω. Allora la condizione d'equilibrio delle tre forze si esprime con la relazione:

$$x.\varphi(\widehat{xr}) + y.\varphi(\widehat{yr}) + z.\varphi(\widehat{zr}) = 0. \tag{1}$$

Facendo coincidere r successivamente con x, y, z ed osservando che $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(-\omega) = \varphi(\omega)$, dalla (1) si ricavano le tre equazioni seguenti:

$$\left.\begin{array}{rrrr} x & + y.\varphi(\gamma) & + z.\varphi(\beta) & = 0 \\ x.\varphi(\gamma) & + y & + z.\varphi(\alpha) & = 0 \\ x.\varphi(\beta) & + y.\varphi(\alpha) & + z & = 0 \end{array}\right\}. \tag{2}$$

Fin qui BATTAGLINI. Risolvendo le (2) rispetto a $\varphi(\alpha)$, $\varphi(\beta)$, $\varphi(\gamma)$, si ottiene:

$$\varphi(\alpha) = \frac{2x^2 - S}{2yz}, \qquad \varphi(\beta) = \frac{2y^2 - S}{2zx}, \qquad \varphi(\gamma) = \frac{3z^2 - S}{2xy},$$

in cui è: $S = x^2 + y^2 + z^2$.

(1) *Nota sul parallelogrammo delle forze*, per G. BATTAGLINI. "Giornale di Matem.", vol. I, p. 365-6 [1863].

Introducendo con l'Autore la funzione $\psi(\omega)$, legata alla $\varphi(\omega)$ dalla relazione:

$$\varphi^2(\omega) + \psi^2(\omega) = 1,$$

e ponendo:

$$16\Delta^2 = 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - S^2, \qquad (3)$$

si ha:

$$\psi(\alpha) = \frac{4\Delta}{2yz}, \qquad \psi(\beta) = \frac{4\Delta}{2zx}, \qquad \psi(\gamma) = \frac{4\Delta}{2xy}.$$

Se poi s'indica con $\Theta(\omega)$ la funzione $\varphi(\omega) + i\psi(\omega)$, il prodotto $\Theta(\alpha).\Theta(\beta).\Theta(\gamma)$ si esprime con la frazione:

$$\frac{(2x^2 - S + i4\Delta).(2y^2 - S + i4\Delta).(2z^2 - S + i4\Delta)}{8x^2y^2z^2},$$

il numeratore della quale ha la forma $A + iB$, in cui:

$$A = 8x^2y^2z^2 + S.[S^2 + 16\Delta^2 - 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)]$$
$$B = 4\Delta[4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - S^2 - 16\Delta^2].$$

Ma in forza della (3) l'espressione $4(x^2y^2 + x^2z^2 + z^2x^2) - S^2 - 16\Delta^2$ è nulla, sicchè:

$$A = 8x^2y^2z^2, \qquad B = 0,$$

e quindi:

$$\Theta(\alpha).\Theta(\beta).\Theta(\gamma) = 1.$$

Questa è l'equazione funzionale a cui giunge BATTAGLINI, giovandosi di un triangolo ausiliario, coi lati uguali ad x, y, z, ed in cui la somma degli angoli è supposta uguale a due retti.

La forma della funzione $\Theta(\omega)$ si ottiene con procedimenti analitici molto semplici, quali, ad esempio, gli stessi usati dal nostro Autore.

R. BONOLA.

LE EQUAZIONI BIRECIPROCHE

DEFINIZIONE. — *Diremo equazione bireciproca quella equazione reciproca la cui trasformata, ponendo* $t = x + \frac{1}{x}$, *è anche reciproca; supponendo che la equazione primitiva non ammetta le radici* $+1$ *e* -1.

Lo studio di queste equazioni fu già proposta dal signor Pruhet fin dal 1866 (*Nouv. Ann. de Math.*, vol. XXIV, pag. 385) ed una risposta fu data dal signor Giard (loc. cit., vol. XXV, pag. 126) come vien riportata nel mio lavoro " La formola di Waring e sue notevoli applicazioni ". Ma il metodo che si segue ivi, mentre è molto laborioso, non lascia scorgere per nulla la forma che le equazioni in questione hanno; non solo, ma porta a risultati che vorrebbero essere distinti, mentre sono sostanzialmente gli stessi. Il sig. prof. Pellet (*Nouv. Ann. de Math.*, 1881, pag. 380) per il primo ha dato un teorema sulla forma di queste equazioni, e per quel che io mi sappia è rimasto senza dimostrazione. Detto teorema a me pare debba essere modificato, se pure errori tipografici non ne hanno alterata la dizione notevolmente. Pertanto in questa nota è studiata la forma che deve avere una equazione bireciproca; ed il metodo tenuto per tale ricerca, oltre che semplicissimo, mi pare il più naturale, e può senza alcuna difficoltà applicarsi per stabilire la forma delle equazioni pluri-reciproche.

Una equazione bireciproca è di grado 4k *oppure* 4k + 2.

Infatti dalla definizione resulta che la equazione bireciproca deve essere di grado $2n$; ora se $n=2k$, la equazione è di grado $4k$, se $n=2k+1$ la equazione è di grado $4k+2$.

I. Supponiamo che l'equazione

$$f(x)=0 \tag{I}$$

sia bireciproca di grado $4k$; allora potrà scriversi

$$x^{2k}.\varphi\left(x+\frac{1}{x}\right)=0,$$

ossia, colla posizione $t=x+\frac{1}{x}$,

$$x^{2k}\varphi(t)=0. \tag{II}$$

Ora la $\varphi(t)=0$ è reciproca del 1° o del 2° tipo. Supponiamo che sia reciproca del 1° tipo, ed allora la (II) potrà scriversi

$$x^{2k}t^k\varphi\left(t+\frac{1}{t}\right)=0,$$

ossia

$$x^{2k}\left(x+\frac{1}{x}\right)^k\varphi\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)=0,$$

od anche

$$x^k(x^2+1)^k\varphi\left(\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+x}\right)=0,$$

e possiamo concludere: *Se la* $\varphi(t)=0$ *è reciproca del* 1° *tipo e di grado pari, la bireciproca* $f(x)=0$ *ha la forma:*

$$(x^4+3x^2+1)^k+A_1(x^4+3x^2+1)^{k-1}(x^3+x)\ldots$$
$$\ldots+A_{k-1}(x^4+3x^2+1)(x^3+x)^{k-1}+A_k(x^3+x)^k=0.$$

Esempio. — È bireciproca la equazione

$$(x^4+3x^2+1)^2+A_1(x^4+3x^2+1)(x^3+x)+A_2(x^3+x)^2=0.$$

Svolgendo ed ordinando, questa si riduce all'altra

$$x^8 + A_1x^7 + (A_2 + 6)x^6 + 4A_1x^5 + (11 + 2A_2)x^4 + \\ 4A_1x^3 + (A_2 + 6)x^2 + A_1x + 1 = 0.$$

Osservazione. — Ponendo in questa equazione una volta $A_2 - 6$ in luogo di A_2 ed un'altra volta -2 pure in luogo di A_2 si hanno le due equazioni bireciproche.

$$x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + 4A_1x^5 + (2A_1 - 1)x^4 + 4A_1x_3 + A_2x^2 + A_1x + 1 = 0,$$
$$x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 4A_1x^5 + 7x^4 + 4A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0,$$

e queste due equazioni vengono riportate nel citato lavoro del signor Giard come tipi distinti di equazioni bireciproche dell'8° grado, mentre evidentemente provengono dall'unico scritto sopra.

Ripigliamo ora la (II), e supponiamo che la $\varphi(t) = 0$ sia reciproca del 2° tipo, ed allora quella potrà scriversi

$$x^{2k}(t+1)(t-1)t^{k-1}\psi\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0,$$

ossia

$$x^{2k}\left(x + \frac{1}{x} + 1\right)\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^{k-1}\psi\left[\frac{x^4 + 3x^2 + 1}{x^3 + x}\right] = 0,$$

e riducendo possiamo concludere: *Se la* $\varphi(t) = 0$ *è reciproca del 2° tipo e di grado pari, la bireciproca* $f(x) = 0$ *ha la forma:*

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)[(x^4 + 3x^2 + 1)^{k-1} + \\ + A_1(x^4 + 3x^2 + 1)^{k-2}(x^3 + x) + \ldots + A_{k-1}(x^3 + x)^{k-1}] = 0.$$

Esempio. — La equazione bireciproca di 8° grado, se la $\varphi(t) = 0$ è reciproca del 2° tipo, è

$$x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 2A_1x^5 + 5x^4 + 2A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0,$$

ed ammette le radici $\dfrac{\pm 1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

2. Supponiamo ora che la equazione (I) sia bireciproca di grado $4k + 2$, allora potrà scriversi

$$x^{2k+1}\varphi\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0,$$

ossia

$$x^{2k+1}\varphi(t) = 0. \qquad \text{(III)}$$

Ora la $\varphi(t) = 0$ è reciproca di grado dispari e del 1° o del 2° tipo. Supponiamo che sia reciproca del 1° tipo, allora si avrà

$$x^{2k+1}(1 + t)\psi(t) = 0,$$

ed anche

$$x^{2k+1}(1 + t)t^k\chi\left(t + \frac{1}{t}\right),$$

ossia

$$x^{2k+1}\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{t}\chi\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}\right)=0,$$

e riducendo possiamo concludere: *Se la* $\varphi(\mathrm{t})=0$ *è reciproca del 1° tipo e di grado dispari, la bireciproca* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *ha la forma:*

$$(x^2+x+1)\left[(x^4+3x^2+1)^k+A_1(x^4+3x^2+1)^{k-1}(x^3+x)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+A_k(x^3+x)^k\right]=0.$$

Esempio. — La bireciproca di 6° grado del tipo ora studiato è

$$x^6+(A_1+1)\,x^5+(A_2+4)\,x^4+(2A_1+3)\,x^3+$$
$$+(A_1+4)\,x^2+(A_1+1)\,x+1=0.$$

Se in questa si scambia A_1 in A_1-1 si ha l'altra

$$x^6+A_1x^5+(A_1+3)\,x^4+(2A_1+1)\,x^3+(A_1+3)\,x^2+A_1x+1=0,$$

che è stata pure trovata dal sig. Giard.

Ripigliamo ora la (III) e supponiamo che la $\varphi(t)=0$ sia reciproca e del 2° tipo, allora si avrà

$$x^{2k+1}(t-1)\,\psi(t)=0,$$

ed anche

$$x^{2k+1}(t-1)\,t^k\chi\left(t+\frac{1}{t}\right)=0,$$

ossia

$$x^{2k+1}\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{k}\chi\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}\right)=0,$$

e riducendo possiamo concludere: *Se la* $\varphi(t)=0$ *è reciproca del 2° tipo e di grado dispari, la bireciproca* $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ *ha la forma:*

$$(x^2-x+1)\left[(x^4+3x^2+1)^k+A_1(x^4+3x^2+1)^{k-1}(x^3+x)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+A_k(x^3+x)^k\right]=0.$$

Da tutto quello che precede risulta senz'altro dimostrato il seguente teorema generale:

Tutte le equazioni bireciproche sono comprese nella equazione

$$(x^2+x+1)^i(x^2-x+1)^j\,F(x^4+3x^2+1,\ x^3+x)=0$$

in cui la $F(\mathrm{x}+3\mathrm{x}^2+1,\ \mathrm{x}^3+\mathrm{x})$ *è una funzione intera ed omogenea di* $\mathrm{x}^4+3\mathrm{x}^2+1,\ \mathrm{x}^3+\mathrm{x}$ *ed* i *e* j *sono o zero od 1 separatamente o contemporaneamente.*

G. Candido.

ESTENSIONE DI UN TEOREMA DEL PROF. CESÀRO

intorno alle proprietà fondamentali dei multipli e divisori

Teorema. — *Se indichiamo con* x *tutti i numeri interi e positivi per i quali il quoziente di* m *per* x *è un numero dispari cioè:*

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{x}\right) = k + 1,$$

essendo m *intero e positivo, si ha:*

$$\Sigma\, \varphi(x) = \left(\frac{m}{2}\right)^2 \text{ per } m \text{ pari (1)}$$

$$\Sigma\, \varphi(x) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \text{ per } m \text{ dispari.}$$

Dimostrazione. — Indichiamo con y i numeri interi positivi per i quali $\mathrm{E}\left(\frac{m-2}{y}\right) = 2k' + 1$, e cerchiamo la relazione che passa fra i numeri x e i numeri y. Se dividiamo $m-2$ per quei divisori di m e $m-1$ che dànno un quoziente pari, quando dividiamo per essi m ed $m-1$, otterremo un quoziente dispari: quindi le x comprendono tutte le y meno i divisori che dànno quoziente pari di m e $m-1$. Inoltre le x contengono i divisori che dànno quoziente dispari di m e $m-1$ per i quali dividendo $m-2$ abbiamo quoziente pari. I divisori di m e $m-1$ che dànno quoziente dispari noi li potremo ottenere togliendo da tutti i divisori di m e $m-1$ quelli che dànno quoziente pari.

Dunque le x contengono tutte le y più tutti i divisori di m e $m-1$ meno due volte i divisori di m e $m-1$ che dànno un quoziente pari.

Indichiamo con α e β i divisori di m e $m-1$ e con γ e δ i divisori di m e $m-1$, che dànno quoziente pari. Osserviamo che, se m è pari, $m-1$ è dispari e viceversa, e poichè un numero dispari non ha divisori che diano quoziente pari, nel primo caso in cui $m-1$ è dispari le δ saranno nulle, nel secondo caso saranno nulle le γ.

Ma i divisori di un numero pari n, che ci dànno quoziente pari, sono tutti i divisori di $\frac{n}{2}$, quindi i numeri γ e δ sono i divisori di $\frac{m}{2}$ e $\frac{m-1}{2}$ rispettivamente.

(1) In questo primo caso il teorema è stato dimostrato dal Cesàro. Vedi *Teoria dei numeri*, di U. Scarpis, cap. I, § 8, Manuali Hoepli.

Per un teorema noto nella teoria dei numeri sappiamo, che se indichiamo con ε i divisori di n,

$$\Sigma\,\varphi(\varepsilon) = n$$

quindi

$$\Sigma\,\varphi(\alpha) = m, \qquad \Sigma\,\varphi(\beta) = m - 1,$$

$$\Sigma\,\varphi(\gamma) = \frac{m}{2}, \qquad \Sigma\,\varphi(\delta) = \frac{m-1}{2},$$

e quindi

$$\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m + m - 1 - 2\,\frac{m}{2} \text{ per } m \text{ pari}$$

$$\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m + m - 1 - 2\,\frac{m-1}{2} \text{ per } m \text{ dispari.}$$

Semplificando:

$$\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m - 1 \text{ per } m \text{ pari}$$

$$\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m \text{ per } m \text{ dispari.}$$

Se cambiamo m in $m-2$, abbiamo rispettivamente le eguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m - 1\\
&\Sigma\,\varphi(y) = \Sigma\,\varphi(z) + m - 3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Sigma\,\varphi(v) = \Sigma\,\varphi(w) + 3\\
&\Sigma\,\varphi(w) = 1
\end{aligned}$$

per m pari;

$$\begin{aligned}
&\Sigma\,\varphi(x) = \Sigma\,\varphi(y) + m\\
&\Sigma\,\varphi(y) = \Sigma\,\varphi(z) + m - 2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Sigma\,\varphi(v) = \Sigma\,\varphi(w) + 3\\
&\Sigma\,\varphi(w) = 1
\end{aligned}$$

per m dispari,

poichè le ω in ambo i casi sono interi positivi che soddisfano alle:

$$\mathrm{E}\left(\frac{2}{w}\right) = 2k + 1 \text{ primo caso}$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{w}\right) = 2k + 1 \text{ secondo caso}$$

e w ha nel primo caso il solo valore 2 e nel secondo il solo valore 1 perciò $\Sigma\varphi(w) = 1$ sempre.

Sommando membro a membro le serie e riducendo, si ha

$$\Sigma\,\varphi(x) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (m-1) = \left(\frac{m}{2}\right)^2 \text{ per } m \text{ pari}$$

$$\Sigma\,\varphi(x) = 1 + 3 + 5 + \ldots + m = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 \text{ per } m \text{ dispari c. v. d.}$$

ESEMPIO. — Per m pari $= 10$

$x = 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10$

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)+\varphi(7)+\varphi(8)+\varphi(9)+\varphi(10)=$$
$$=1+2+2+6+4+6+4=25=\left(\frac{10}{2}\right)^2.$$

Per m dispari $= 11$

$x = 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11$

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(6)+\varphi(7)+\varphi(8)+\varphi(9)+\varphi(10)+\varphi(11)=$$
$$=1+1+2+2+6+4+6+4+10=36=\left(\frac{11+1}{2}\right)^2.$$

CESIRA ORLANDI.

GENERALIZZAZIONE DI UNA FORMULA DI ANALISI COMBINATORIA

La nota formula

$$\binom{u}{o}\binom{v}{k}+\binom{u}{1}\binom{v}{k-1}+\ldots+\binom{u}{k-1}\binom{v}{1}+\binom{u}{k}\binom{v}{o}=\binom{u+v}{k},$$

di analisi combinatoria, (¹) da cui come caso particolare si può dedurre quella, che fa conoscere la somma dei quadrati dei coefficienti binomiali, può essere generalizzata nella seguente altra, che non trovo notata in alcuno degli autori che si occupano di tale argomento.

1. Si considerino $u_1+u_2+\ldots+u_n$ elementi, e le loro combinazioni semplici della classe k, e sia $i_1, i_2, \ldots i_n$ una soluzione in numeri interi, positivi o nulli della equazione

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k. \tag{1}$$

Aggregando una delle $\binom{u_1}{i_1}$ combinazioni della classe i_1 di u_1 degli elementi considerati, con una delle $\binom{u_2}{i_2}$ di quelle della classe i_2 di altri u_2 degli elementi dati, ecc. e finalmente con una delle $\binom{u_n}{i_n}$ combinazioni della classe i_n dei rimanenti u_n elementi, si costituisce una combinazione della classe

$$i_1+i_2+\ldots+i_n=k$$

(¹) Cfr. BALTZER-CREMONA, *Aritmetica generale*, p. 124.

degli $u_1+u_2+\ldots+u_n$ elementi dati, ossia una delle combinazioni considerate. Ora nella maniera indicata sono possibili

$$\binom{u_1}{i_1}\cdot\binom{u_2}{i_2}\ldots\binom{u_n}{i_n}$$

aggruppamenti delle dette combinazioni di classi $i_1, i_2, \ldots i_n$, e ciò corrispondentemente ad una soluzione $i_1, i_2, \ldots i_n$ della equazione (1); per tutte le soluzioni si avranno quindi

$$\Sigma\binom{u_1}{i_1}\binom{u_2}{i_2}\ldots\binom{u_n}{i_n}$$

aggruppamenti possibili, essendo il sommatorio esteso a tutte le soluzioni $i_1, i_2, \ldots i_n$ della (1). Inoltre due aggruppamenti diversi dànno luogo a due diverse combinazioni della classe k.

Inversamente: una qualunque delle $\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n}{k}$ combinazioni della classe k degli $u_1+u_2+\ldots+u_n$ elementi considerati può sempre ritenersi composta associando una delle $\binom{u_1}{i_1}$ combinazioni della classe i_1, con una delle $\binom{u_2}{i_2}$ combinazioni della classe i_2 ecc.; ed a combinazioni differenti della classe k corrispondono aggruppamenti differenti. Dunque si avrà

$$\Sigma\binom{u_1}{i_1}\binom{u_2}{i_2}\ldots\binom{u_n}{i_n}=\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n}{k}, \qquad (2)$$

il sommatorio essendo esteso a tutte le soluzioni $i_1, i_2, \ldots i_n$ intere positive, o nulle della equazione (1).

Questa è la formula che si trattava di stabilire.

2. Essa, anzichè col ragionamento precedente di natura combinatoria, può essere ottenuta altresì mediante una dimostrazione del tutto formale.

Basta prender le mosse dalla eguaglianza:

$$(1+x)^{u_1}(1+x)^{u_2}\ldots(1+x)^{u_n}=(1+x)^{u_1+u_2+\ldots+u_n},$$

ovvero, secondo la formula del binomio:

$$\Sigma\binom{u_1}{i_1}x^{i_1}.\Sigma\binom{u_2}{i_2}x^{i_2}\ldots\Sigma\binom{u_n}{i_n}x^{i_n}=\Sigma\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n}{k}x^k,$$

ed applicare il principio d'identità delle funzioni intere.

Infatti, eguagliando nei due membri i coefficienti di x^k, si ottiene di nuovo la (2).

G. Mignosi.

A PROPOSITO DELLA QUISTIONE 726

Aggiungo due osservazioni alla soluzione che io ho dato della quistione 726 proposta nel fasc. IV, anno XXII, pag. 190 e pubblicata nel fasc. V, anno XXIII, 1908 di questo *Periodico*.

1°. Si trova facilmente nello stesso modo la soluzione elementare dell'equazione

$$x = y + [y + \{y + (y + x^2)^2\}^2]^2. \tag{1}$$

Infatti le 12 radici speciali sono le radici dell'equazione

$$\Theta^4 + p_1 \Theta^3 + \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4y) + \frac{1}{2}(p_1^2 + (2y - 1) p_1 + 1) \Theta + \\ + \frac{1}{2} y p_1^2 - y p_1 + 2 + 2y + 2y^2) = 0, \tag{2}$$

dove

$$p_1^3 + p_1 (3 + 4y) - 4 = 0, \tag{3}$$

Mettendo allora $y = -2$, si hanno evidentemente i due casi della divisione del cerchio in diciassette e in quindici parti uguali. L'ultima equazione (3) diviene

$$(p_1 + 1)(p_1^2 - p_1 - 4) = 0,$$

e $p_1 = -1$ ci dà la divisione in 15 parti, e le altre radici in 17 parti.

2°. L'equazione (2) si spezza in due equazioni quadratiche, cioè

$$\Theta^2 - \Theta\left(-\frac{1}{2} p_1 + \sqrt{1 + \frac{1}{3} p_1^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_2 + \sqrt{\frac{1}{4}(1 + p_2)^2 - p_4} = 0,$$

e

$$\Theta^2 - \Theta\left(-\frac{1}{2} p_1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2} p_1^2}\right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p_2 - \sqrt{\frac{1}{4}(1 + p_2^2)^2 - p_4} = 0,$$

dove

$$p_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_1 + 4y), \qquad \text{e} \qquad p_4 = \frac{1}{2}(y p_1^2 - y p_1 + 2 + 2y + 2y^2).$$

Quando l'equazione (3) si spezza, si può sempre risolvere l'equazione (1) colla riga e col compasso.

W. H. YOUNG.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 760, 764 E 765

760. *Un cilindro di rivoluzione C è tagliato da un piano π, secondo una conica Γ, ed A è un vertice di questa conica, situato sull'asse focale.*

Trovare il luogo dei fuochi di tutte le coniche Γ determinate sul cilindro da tutte le posizioni del piano π, quando questo rota attorno alla tangente nel punto A.

I. S. TEODORESCU.

Risoluzione del prof. Alvarez Ude dell'Università di Saragozza.

Indicando con O il centro della sezione retta del cilindro tracciata per A e con O_1 quello della sezione Γ, i semiassi di questa sono O_1A e il raggio del cilindro; i suoi fuochi si troveranno portando sopra O_1A dalle due parti di O_1 i segmenti OF, OF_1 eguali ad O_1O, perchè

$$O_1O = \sqrt{\overline{O_1A}^2 - \overline{OA}^2}$$

è la semidistanza focale.

Il luogo dei fuochi F, F_1 è dunque la strofoide retta che ha per asse OA, per punto doppio O, che passa per A ed ha per asintoto la generatrice simmetrica a quella che passa per A rispetto all'asse del cilindro.

764. *La bisettrice dell'angolo degli assi Ox, Oy incontra in* R *la tangente nel punto* M *di una curva* (C).

Determinare questa curva con la condizione che RM *sia eguale alla lunghezza della normale in* M.

J. Rose.

Risoluzione del prof. Alvarez Ude dell'Università di Saragozza.

Eguagliando le espressioni:

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad \frac{(y-x)\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{1-\frac{dy}{dx}}$$

della normale e del segmento MR, si ottiene con alcune semplificazioni

$$ydy = xdx,$$

equazione che integrata dà

$$y^2 - x^2 = \text{cost},$$

la quale rappresenta un'iperbole equilatera.

È facile verificare ciò anche geometricamente.

765. *Dimostrare "geometricamente":*

1°. *Che la tangente all'ellisse, la quale forma cogli assi angoli di 45°, ha per punto di contatto il vertice del rettangolo inscritto di massimo perimetro.*

2°. *Che la distanza del punto d'incontro di questa tangente con uno degli assi dal centro della curva è uguale all'ipotenusa del triangolo rettangolo che ha per cateti i due semiassi.*

Dedurre un metodo per costruire geometricamente qualunque rettangolo inscritto di perimetro 4p *ed esaminare i diversi casi corrispondenti ai varii valori di* p.

L. Maugeri.

Risoluzione del prof. Alvarez Ude dell'Università di Saragozza.

Se M è un punto della ellisse, P e Q le sue proiezioni sugli assi, il rettangolo inscritto che ha un vertice in M ha per perimetro

$$4p = 4\,(\text{MP} + 4\text{MQ}).$$

Le circonferenze c_1 e c_2 aventi per diametri gli assi AA' e BB' dell'ellisse sono tagliati dalle rette MP, MQ rispettivamente nei punti M_1, M_2, che per una proprietà notissima sono allineati col centro O, e le tangenti ad esse in questi punti M_1, M_2 incontrano gli assi x, y rispettivamente negli stessi punti T, T' nei quali sono incontrati dalla tangente all'ellisse in M.

Ora, se si congiungono con una retta gli estremi A, B' degli assi (scelti di modo che AB' non incontri OM_1 dentro il circolo c_1) e si proiettano i punti A, B' in R, S sulla OM_1, si ha

$$OR = OP = MQ, \qquad OS = OQ = MP,$$

e quindi

$$p = OR + OS = RS.$$

Da questa curiosa proprietà si deduce la costruzione del rettangolo inscritto di perimetro dato $4p$; basta costruire un triangolo rettangolo che abbia AB' per ipotenusa e un cateto eguale a p; il diametro parallelo a questo taglia c_1 e c_2 in due punti M_1, M_2 che determinano M vertice del rettangolo.

Se si fa girare OM_1 da OA fino ad OB il segmento RS, partendo dal valore a, cresce finchè OM_1 è parallelo ad AB', nel qual caso RS = AB' = AB; poi diminuisce sino al valore b, il quale indica che, se $a > p > b$ esiste una soluzione, se $\sqrt{a^2 + b^2} > p > a$ ne esistono due, se $p = \sqrt{a^2 + b^2}$ una, e se $p < b$ oppure $p > \sqrt{a^2 + b^2}$, nessuna.

Quando $p = b$, si ha l'asse BB' come caso limite e quando $p = a$ esiste una soluzione limite AA'.

Nel caso del massimo la eguaglianza dei triangoli OA'B, M_1OT e OT'M_2 dimostra che OT' = OT = AB, come si doveva dimostrare.

QUISTIONI PROPOSTE

766. La tangente in un punto M variabile d'una cissoide retta incontra di nuovo la curva in un punto T. Il luogo del punto di mezzo I del segmento MT è una curva di 5° ordine, che divide l'area compresa fra la cissoide e il suo asintoto in due parti equivalenti.

767. Trovare l'equazione e l'area della curva luogo della proiezione del centro del circolo osculatore di una ellisse sulla retta che congiunge il piano di osculazione con uno dei fuochi.

768. Sopra due rette x, y sono dati rispettivamente due punti A e B. Qual'è l'inviluppo delle rette congiungenti i centri di due circoli tangenti l'uno ad x in A, l'altro in y a B e tangenti fra loro?

Casi particolari in cui:

1° le x, y sono perpendicolari;

2° i punti A, B sono equidistanti dal punto xy.

769. Sia AB una corda di una parabola passante per un punto fisso P, e sia Q il punto d'incontro delle normali alla parabola nei punti A e B, e S la proiezione di Q su AB. Trovare i luoghi di Q e di S.

E.-N. Barisien.

" MATHESIS „ SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA

Il 20 Decembre 1908 nel Gabinetto di Geometria descrittiva della R. Università di Padova fu fatto lo spoglio delle schede per le elezioni del consiglio direttivo pel biennio 1909-10.

Dei soci della categoria A (prof. universitari) votarono 21 su 24; dei soci della categoria B (prof. di scuole secondarie) 126 su 182; della categoria C (prof. di accademie navali, militari ecc.) 3 su 6; e infine della categoria D (aiuti, assistenti, cultori) 8 su 12. In totale 158 su 224, ed il risultato della votazione fu il seguente:

Lazzeri Giulio	(categorie C, D) . .	143
Conti Alberto	(„ B) . .	130
Gazzaniga Paolo	(„ B) . .	129
Severi Francesco	(„ A) . .	129
Dell'Agnola C. A.	(„ B) . .	117

Successivamente fu proceduto alla elezione delle cariche sociali, ed il risultato fu comunicato ai soci colla seguente circolare:

Padova, *15 Gennaio 1909.*

Il Consiglio Direttivo, appena costituitosi a norma dell'art. 6 dello Statuto Sociale, fece pratiche presso il prof. G. Lazzeri affinchè volesse accettare la carica di Presidente; ma egli, a causa delle sue occupazioni, declinò l'onorifica offerta. In seguito a ciò il Consiglio nominò Presidente il prof. F. Severi, e incaricò il prof. P. Gazzaniga delle funzioni di Segretario-cassiere, nominando inoltre (art. 6 dello Statuto) il prof. A. Maroni a Segretario aggiunto.

Avendo tutti e tre dichiarato di accettare, il Consiglio Direttivo restò così costituito:

Presidente: prof. Francesco Severi della R. U. di Padova.

Segretario-cassiere: prof. Paolo Gazzaniga del R. L. di Padova.

Membri:
- prof. Alberto Conti della R. S. N. " Margherita di Savoia „ di Roma.
- prof. Carlo Alberto Dell'Agnola del R. I. T. di Venezia.
- prof. Giulio Lazzeri della R. A. N. di Livorno.

Segretario aggiunto: prof. Arturo Maroni del R. G. di Padova.

***

In questo momento, in cui sta maturando la tanto attesa Riforma della Scuola media, il Consiglio è pienamente consapevole della serietà e della difficoltà del còmpito che gli è stato affidato, e si propone di lavorare colla massima lena e ponderazione per l'avvenire degli studi e della scuola.

Come primo atto la Presidenza si farà un dovere di recare ed illustrare personalmente al Ministro della Pubblica Istruzione gli ordini del giorno del Congresso di Firenze (16-23 Ottobre 1908), nella fiducia che il Governo vorrà prendere in seria considerazione i voti di una Società, che ha come solo programma il miglioramento degli studi, e che può essere perciò di prezioso ausilio ai pubblici poteri nelle questioni tecniche.

La Presidenza avrebbe già adempiuto a questo dovere, se l'immane sciagura che ha colpito il nostro Paese, non avesse richiesto imperiosamente che tutti gli sforzi della nostra vita nazionale si dirigessero a fronteggiare tanto disastro.

***

È noto ai Soci come durante il Congresso internazionale di Matematica tenutosi a Roma nell'Aprile 1908 venisse nominata una Commissione internazionale per studiare l'ordinamento degli studi di Matematica nei diversi paesi, e per riferirne al prossimo Congresso internazionale di Cambridge 1912. Al lavoro che la Commissione italiana dovrà all'uopo compiere, la nostra Società porterà senza dubbio largo contributo. Il Consiglio indirà prossimamente Convegni regionali per discutere in proposito.

***

Un'altra questione assai importante è quella di un Bullettino periodico. Al Congresso di Firenze fu avvertito dalla Commissione che presentò lo Statuto che il Bullettino non poteva essere garantito gratuitamente ai Soci, stante l'esiguità della quota annua (L. 4).

Orbene, il Consiglio, *in linea di esperimento*, ha deliberato di pubblicare un Bullettino bimestrale, che sarà inviato ai Soci senza alcuna sopratassa. Ciò perchè si confida che il numero degli associati andrà rapidamente crescendo. All'uopo raccomandiamo a ciascun socio un'attivissima propaganda tra i Colleghi conoscenti, che già non fanno parte della nostra Società. Un numero notevole di Soci ci assicurerà non soltanto una più solida condizione finanziaria, ma darà alla nostra Associazione molto maggior forza ed autorità nello svolgimento del suo programma.

Con cordiale colleganza

Il Consiglio Direttivo.

COMMISSIONE INTERNAZIONALE DELL'INSEGNAMENTO MATEMATICO

Il 4° Congresso internazionale dei matematici accogliendo una proposta della 4ª sezione (quistioni filosofiche, storiche, didattiche) nella sua quinta ed ultima seduta plenaria (11 Aprile 1908) votò il seguente ordine del giorno:

" Il Congresso, avendo riconosciuto la importanza di un esame " accurato dei programmi e dei metodi d'insegnamento delle mate- " matiche nelle scuole secondarie delle varie nazioni, confida ai pro- " fessori *Klein Greenhill* e *Fehr* l'incarico di costituire un Comitato

" internazionale che studii la quistione e ne riferisca al prossimo " congresso ". [1]

I tre professori si sono adunati nel Settembre 1908 a Colonia e si sono distribuiti le cariche nel seguente modo:

Presidente, F. KLEIN a Gottinga
Vicepresidente, G. GREENHILL a Londra
Segretario generale, H. FEHR a Ginevra.

Essi hanno concretato un *rapporto preliminare*, pubblicato nell'ultimo numero dell'*Enseignement Mathématique*, del quale riassumiamo le principali notizie.

La commissione sarà composta di delegati dei seguenti *paesi partecipanti*:

Austria (2 o 3)	Olanda (1)
Belgio (1)	Portogallo (1)
Danimarca (1)	Romania (1)
Francia (2 o 3)	Russia (2 o 3)
Germania (2 o 3)	Spagna (1)
Grecia (1)	Stati Uniti d'America (2 o 3)
Inghilterra (2 o 3)	Svezia (1)
Italia (2 o 3)	Svizzera (2 o 3)
Norvegia (1)	

sotto la direzione dei tre professori sunnominati, che costituiscano il *Comitato Centrale*. Gli altri paesi potranno farsi rappresentare da un delegato senza diritto di voto.

Le corrispondenze e i rapporti dovranno essere scritti in una delle quattro lingue: francese, inglese, italiana, tedesca.

I delegati dei differenti paesi partecipanti saranno invitati a costituire delle sottocommissioni nazionali, che comprendano rappresentanti di tutti i gradi dell'insegnamento.

Lo scopo generale della commissione è così definito dalla commissione: *Fare un'inchiesta e pubblicare un rapporto generale sulle tendenze dell'insegnamento matematico nei diversi paesi.* Per raggiungere lo scopo essa ha così organizzato i lavori.

I delegati dei *paesi partecipanti*, coll'aiuto delle rispettive sottocommissioni, formuleranno dei rapporti, secondo le norme che più avanti riproduciamo integralmente, avendo cura di farle discutere in riunioni di professori, di società scientifiche, ecc. Tali rapporti stampati dovranno essere rimessi al segretario generale al principio del 1911. Nelle vacanze di Pasqua del 1911 la commis-

(1) V. *Periodico*, Anno XXIII, fasc. VI, pag. 248.

sione si riunirà per uno studio d'insieme e per preparare la relazione finale che dovrà esser presentata al Congresso di Cambridge del 1912.

Ecco ora gli argomenti che la commissione centrale propone allo studio dei delegati e delle sottocommissioni, testualmente riprodotti.

PROSPETTO GENERALE DEI LAVORI

PARTE PRIMA.

Stato attuale dell'organizzazione e dei metodi dell'istruzione matematica.

Capitolo I. - **I varii tipi di scuole.** — In questo primo capitolo verrà data una *succinta esposizione* dei vari istituti d'istruzione pubblica, ove trovasi l'insegnamento matematico, e sarà spiegato lo scopo di ogni scuola. Si terrà conto anche delle scuole femminili.

Gli istituti verranno ripartiti colla seguente classifica:

a) Scuole elementari, inferiori e superiori;

b) Scuole medie e secondarie super. (licei, ginnasi, scuole reali, ecc.)

c) Scuole professionali medie (istituti tecnici, ecc.)

d) Scuole normali pei varii insegnamenti (seminarii dei maestri, " teachers colleges " ecc.)

f) Scuole superiori: Università e scuole politecniche.

Sarà bene unire a quest'esposizione un *quadro schematico* che dia un'idea dell'insieme e faccia risaltare la successione e la corrispondenza esistenti tra i vari stabilimenti, si indicherà pure l'età media degli scolari.

Capitolo II. - **Scopo dell'insegnamento matematico e rami d'insegnamento.** — Questa quistione verrà esaminata pei varî tipi di istituti summenzionati, tenendo conto, se è il caso, delle matematiche applicate, specialmente della meccanica.

Lo scopo dell'insegnamento matematico non solo varia necessariamente da un istituto all'altro, ma ha subìto alcune trasformazioni durante il secolo scorso. Può essere puramente formale, o formale tenendo conto dell'intuizione; può anche contemporaneamente tendere allo sviluppo logico e contemplare il lato utile, oppure contemplare unicamente la pratica. Si può d'altronde avere principalmente in mira la cultura della memoria o cercare invece di sviluppare le facoltà matematiche.

Quali sono i *rami matematici* insegnati nei varî tipi di scuola? Si indicherà il tempo che viene loro dedicato e l'estensione del programma. In quale misura si tiene conto dei legami tra questi rami, e, se ne è il caso, dei legami colle matematiche applicate (compresa la meccanica) e la fisica?

CAPITOLO III. - **Gli esami.** — È incontestabile che il sistema degli esami influisce grandemente sul metodo d'insegnamento. Si indicherà quindi sommariamente ciò che caratterizza gli esami in ogni categoria di scuole, e specialissimamente quelli che portano ai " certificati di maturità „ ai " baccalaureati „ ecc., e gli esami dei candidati all'insegnamento.

CAPITOLO IV. - **I metodi d'insegnamento.** — Quali sono i metodi seguìti nei vari istituti, dall'insegnamento d'iniziazione fino agli studî superiori? Materiale d'insegnamento; modelli matematici. Uso dei manuali, libri di testo, raccolte d'esercizî. — Esercizî teorici, problemi presi dalle scienze applicate. — Lavori pratici.

CAPITOLO V. - **Preparazione dei candidati all'insegnamento.** — Qui pure si esamineranno i varî tipi d'istituti e si indicheranno le garanzie che esige l'autorità scolastica: *a*) quanto alla preparazione teorica; *b*) quanto alla preparazione professionale.

PARTE SECONDA.

Le tendenze moderne dell'insegnamento matematico.

CAPITOLO I. - **Le idee moderne concernenti l'organizzazione scolastica.** — Riforme allo studio — Nuovi tipi di scuole — La quistione di coeducazione dei due sessi.

CAPITOLO II. - **Le tendenze moderne concernenti lo scopo dell'insegnamento e i varî rami degli studi.** — Scopo dell'insegnamento — Nuovi rami o capitoli nuovi da sostituire a oggetti di studi inutili nel seguito o d'interesse secondarissimo, ma conservati per pura tradizione o per abitudine.

Dati i progressi delle matematiche e delle loro applicazioni, il comitato propone di esaminare di nuovo con cura quali sono i rami di questa scienza che sono più in grado di contribuire alla cultura generale. Fra i soggetti che attualmente richiamano un posto nei programmi elementari si può menzionare, da una parte, il calcolo differenziale e integrale, la geometria analitica, certe nozioni di geometria descrittiva e proiettiva e uno studio della fisica dal punto di vista matematico.

D'altra parte si propone d'introdurre nuovi soggetti, d'un genere più speciale, o nuove nozioni fondamentali (come le nozioni di funzioni, di gruppi, d'insieme). Sarebbe utile che l'inchiesta esaminasse in quale misura si può tener conto di queste domande, e che stabilisse qual'è il minimo necessario di elementi di geometria euclidea, di geometria descrittiva e proiettiva, d'algebra, di calcolo differenziale e integrale, di trigonometria e di geometria analitica, formanti la base degli studi ulteriori.

La stessa quistione si pone per gl'istituti professionali. Quali sono i rami utili alle diverse carriere?

Capitolo III. - **Gli esami.** — Progetti allo studio concernenti la trasformazione del sistema di esame o la loro soppressione completa.

Capitolo IV. - **I metodi d'insegnamento.** — Le idee moderne relative ai metodi nei diversi gradi dell'insegnamento e nei vari tipi di scuole — I legami fra le varie parti delle matematiche — I rapporti fra le matematiche e le altre scienze — Esercizi e applicazioni pratiche; modelli e strumenti — L'uso dei manuali.

1°. **Alcune osservazioni su questo capitolo.** — Dall'epoca di Pestalozzi, le considerazioni psicologiche hanno avuto una parte importante nella educazione primaria, e, da una generazione, esse si rendono egualmente utili, in una certa misura, nella elaborazione dei programmi degli istituti secondari. Ci sarebbe da esaminare quali sono i risultati della psicologia nell'insegnamento delle matematiche, e fino a qual punto sono utili nella riforma di questo insegnamento. Converrebbe esaminare in particolare gli effetti di un insegnamento d'iniziazione e la necessità di far precedere lo studio teorico delle matematiche da un insegnamento intuitivo.

In qual momento invece le considerazioni puramente logiche devono prendere un posto preponderante per esempio nello studio della geometria elementare o del calcolo differenziale e integrale?

2°. **Le applicazioni pratiche.** — Molte scuole hanno consacrato lunghe discussioni alla parte che si deve attribuire alle considerazioni d'ordine pratico e sperimentale.

a) Nell'insegnamento elementare, si può, per esempio, menzionare il piegamento della carta, il lavoro all'aria aperta, l'uso di semplici istrumenti di misura, la geometria d'osservazione, ecc.; il calcolo pratico e approssimativo (grado d'approssimazione, logaritmi a un numero variato di decimali, uso del regolo calcolatore, ecc.); la quistione generale dei grafici in algebra, il maggior uso della quarta a quadretti;

b) In questi ultimi anni si è trattato dei laboratori matematici. Che cosa è stato fatto in questo senso, e quali sono stati i risultati?

Modelli matematici fatti dagli allievi. L'ufficio delle collezioni dei modelli.

Quali sono i mezzi che permetterebbero di accordare un posto maggiore alle matematiche nell'insegnamento popolare (estensione universitaria)? Posto delle matematiche applicate nei musei — Ricreazioni matematiche.

Vi sarebbe in tutto ciò un insieme di mezzi naturali per reagire contro i pregiudizi che esistono contro le matematiche.

3°. **Legami fra le diverse parti delle matematiche.** — Sarebbe utile esaminare in qual misura si possono far sparire i limiti convenzionali che esistono fra certi soggetti delle matematiche pure, come l'algebra e la geometria; l'algebra e il calcolo differenziale e integrale, la geometria di Euclide e la geometria analitica, e la geometria e la trigonometria. Non solo occorre esaminare la possibilità di questa riforma, ma si dovrà anche tener conto degli inconvenienti che ne potrebbero risultare, il che è pure importantissimo.

Sarebbe utile d'altra parte conoscere i risultati delle trasformazioni seguenti che sono state proposte o esaminate di nuovo in questi ultimi anni.

a) Il posto della geometria dimostrativa rispetto all'algebra.

b) La fusione della geometria piana e della geometria solida.

c) L'unione più intima del calcolo differenziale e del calcolo integrale o l'introduzione di questo prima dell'altro.

4°. **I rapporti fra le matematiche e le altre scienze.** — Nello stesso ordine d'idee sarebbe egualmente utile di esaminare i punti di contatto che esistono fra le matematiche e le altre scienze: così i rapporti:

1) col disegno (geometrico, tecnico, artistico);
2) colle scienze applicate;
3) colle altre scienze (Fisica, Chimica, Biologia, Geografia, ecc.);
4) colla Filosofia;
5) coi problemi della vita giornaliera.

Questi punti di contatto sono importanti per ciò che riguarda l'educazione pratica.

Non basterebbe studiare semplicemente le possibilità e i desiderata generali, occorre ancora tener conto di ciò che si fa attualmente con successo e dei pericoli possibili. Per esempio, coloro che reclamano una stretta relazione fra la matematica e la fisica dovranno stabilire esattamente quali sono le nozioni di geometria, che sono d'una applicazione diretta alla fisica, e citare i problemi di fisica elementare che esigono le equazioni lineari simultanee, le equazioni di secondo grado a una e più incognite, le equazioni irrazionali, e le progressioni.

5°. **Le considerazioni storiche.** — È stato domandato che sia accordato un più largo posto allo svilpppo storico delle matematiche. In qual misura è ciò possibile e desiderabile?

Capitolo V. - **La preparazione degl'insegnanti.** — Quali sono le condizioni a cui deve soddisfare una preparazione razionale dei candidati all'insegnamento? Come organizzare i corsi teorici e la preparazione pratica?

I progressi dell'insegnamento dipendono direttamente dalla preparazione degl'insegnanti. È questa una quistione di fondamentale importanza. Gli studî e le esigenze variano necessariamente da un paese all'altro, dipendono molto dal numero dei candidati e dalle facilitazioni di cui si dispone in fatto d'istruzione. Il Comitato crede quindi utile informarsi delle riforme e dei progetti di riforma, che si compiono attualmente allo scopo di ottenere una preparazione di insegnanti conforme alle condizioni moderne, e ciò non solo pel personale delle scuole elementari e secondarie, ma anche per l'università.

Tale inchiesta potrà specialmente farsi sopra:

a) il compito matematico richiesto ai candidati;

b) la loro iniziazione alle ricerche scientifiche;

c) il miglior metodo avente lo scopo di presentar loro la pedagogia teorica e pratica (considerata come scienza d'educazione);

d) la questione del sesso dell'insegnante nei vari anni scolastici;

e) questioni concernenti per esempio il tempo da dedicare alla storia delle matematiche, la storia dell'insegnamento matematico, il lato ricreativo delle matematiche, e la letteratura generale relativa all'istruzione matematica.

Osservazione generale. — In tutti questi capitoli si farà risultare *in modo conciso*, da un lato, ciò che caratterizza le riforme proposte, dall'altro, quali sono i pericoli da evitarsi e quali le obiezioni e gli argomenti fatti valere da coloro che si oppongono alle progettate trasformazioni. Ecco alcune questioni fondamentali che dovranno venir discusse:

1°. Il desiderio di rendere attraente l'istruzione può diminuirne il carattere serio, risultato che sarebbe disastroso tanto dal punto di vista della scienza quanto da quello del valore pratico delle matematiche.

2°. Una malintesa psicologia potrebbe condurre ad utilizzarne in modo esagerato le basi logiche delle matematiche, e ne risulterebbe per l'allievo una continua incertezza.

3°. Il fatto di trascurare il lato astratto, che sembra necessario per imprimere indelebilmente nella mente le verità matematiche.

4°. Il fatto di non rendersi conto che un ramo come la geometria, quale viene attualmente concepita, conduce a risultati di un genere differente da quelli forniti dall'algebra, e che una fusione dei due potrebbe avere come conseguenza la perdita di qualche principale vantaggio di ognuno di questi rami. Lo stesso per altri argomenti.

Altri pericoli si presentano pure, ed il Comitato crede necessario esaminarli tutti accuratamente, onde non siano intraprese riforme tranne che atte a condurre a veri progressi.

Il Comitato centrale:

F. Klein - *Presidente* - 3 Wilhelm-Weberstr. Göttingen (Germania).
Sir George Greenhill - *Vicepresidente* - 1 Staple Inn. Londra, W. C. (Inghilterra).
H. Fehr - *Segretario generale* - 72, Florissant Genève (Svizzera).

Ottobre 1908.

BIBLIOGRAFIA

Svante Arrhenius, *Il divenire dei mondi*, traduzione del dott. A. Levi; un vol. in-8 di pag. 208 con 60 figure. — L. 5.

Benchè tratti argomenti e metodi di ricerca del tutto diversi da quelli che sono abituali ai lettori del *Periodico*, credo tuttavia opportuno segnalare alla loro attenzione una recentissima pubblicazione che deve certamente riuscire assai interessante ad ogni persona colta. Alludo all'opera *Il divenire dei mondi* dell'illustre scienziato svedese Arrhenius, pubblicata ora in lingua italiana, con ogni cura tipografica, dalla Società Editrice Libraria di Milano, che la fece espressamente tradurre da un giovane valente, il dott. Augusto Levi dell'Università di Padova.

Per far comprendere l'importanza di tale lavoro basti dire che esso fu pubblicato per la prima volta in lingua svedese l'anno scorso e che ora, oltre alla presente traduzione italiana, ne ha una in tedesco ed una in inglese; della traduzione tedesca venne anzi già fatta la 2ª edizione.

La lettura del nostro libro è altamente suggestiva, e, quand'anche l'arditezza delle ipotesi in esso formulate non ci consenta talvolta di condividere le opinioni dell'Autore, s'impone pur sempre alla nostra ammirazione la sua fantasia creatrice, nutrita di solido e vario alimento scientifico [1].

Nel cap. I l'A. parla dei terremoti e dei fenomeni vulcanici. Nel cap. II egli considera i corpi celesti, in particolare la Terra, come residenza di esseri viventi. Nel cap. V si occupa della polvere solare nell'atmosfera terrestre, delle luci polari, delle variazioni del magnetismo terrestre.

I capitoli più interessanti ed originali sono però gli altri 5, i cui titoli sono: III. radiazione e costituzione del Sole; IV. la pressione di radiazione; VI. fine del Sole, origine delle nebule; VII. stadio di nebula e di Sole; VIII. la propagazione della vita nell'universo. Per far meglio conoscere il contenuto di tali Capitoli, credo opportuno cedere senz'altro la parola all'A., trascrivendo alcuni frammenti della bella prefazione da lui posta al suo lavoro.

« Il problema dell'evoluzione dell'universo ha sempre destato un particolare « interessamento nell'umanità pensante, ed esso avrà sempre, senza dubbio, il « primo posto fra tutte le questioni che non hanno un'utilità pratica diretta. Le « varie soluzioni date a questo problema forniscono un'immagine fedele del pen- « siero scientifico delle varie epoche; ed io spero che le considerazioni da me « svolte corrispondano al grandioso sviluppo della fisica e della chimica, che ca- « ratterizza la fine del secolo XIX e l'inizio del XX.

« Avanti la scoperta dell'indistruttibilità dell'energia le ricerche cosmogoniche « si occupavano unicamente del modo con cui la materia potè disporsi per origi- « nare i corpi celesti attuali; notevoli fra tutte, in questo campo, le concezioni « di Herschel, di Laplace e di Kant. In tutti i tentativi rivolti a spiegare la forma- « zione del mondo nella sua totalità v'è però una contraddizione. Per ciò io cercai « di mostrare soltanto come possano formarsi delle nebule da dei soli e viceversa « dei soli da delle nebule; e supposi che questo cambiamento reciproco si sia « svolto sempre da sè, proprio come ora.

« La scoperta dell'indistruttibilità dell'energia aumenta la difficoltà dei pro- « blemi cosmogonici. Le ipotesi di Majer e di Helmoltz, sul modo con cui il Sole « ripara alle sue perdite di calore, dovettero essere abbandonate come insufficienti « e furono sostituite da un'altra che si fonda sopra le condizioni chimiche dell'in- « terno del Sole, in accordo colla seconda legge della termodinamica.

« Una difficoltà ancora maggiore parve provenisse da questo, che la teoria « della continua *degradazione* dell'energia conduce alla conclusione che il mondo « si avvicina sempre più alla condizione designata da Clausius come *morte del* « *calore*, in cui ogni energia si troverà distribuita uniformemente in tutto l'uni- « verso sotto forma di movimento delle minime particelle materiali. Da tale dif- « ficoltà trovai una via d'uscita in questo modo: l'energia viene *degradata* nei « soli ed *elevata* nelle nebule.

« Infine un'altra questione cosmogonica divenne in questi ultimi tempi di « grande attualità. Finora si credeva comunemente che la vita potesse aver ori- « gine dalla materia inorganica mediante un processo detto di *generazione spon-* « *tanea*. Ma, come già avvenne per la generazione spontanea dell'energia, così è « verosimile che l'esperienza ci conduca all'ipotesi che anche la generazione « spontanea della vita è assolutamente impossibile. Per comprendere la possibilità « della presenza di vita sopra i pianeti, bisogna allora ricorrere alla teoria della

---

(1) In tali termini si esprime un nostro eminente scienziato, il prof. De Marchi dell'Università di Padova, in un suo notevole articolo, pubblicato recentemente nella *Rivista di Scienza* (Bologna, Zanichelli).

" *panspermia* (1), a cui diedi una forma corrispondente allo sviluppo attuale della " scienza, combinandola colla teoria della *pressione di radiazione* (2).

" Nella trattazione dei problemi cosmogonici fu mio principio direttivo l'idea " che l'universo, nella sua essenza, sia sempre stato com'è ora. Materia, energia " e vita hanno cambiato soltanto di forma e di posto nello spazio. "

P. C.

A. Bassi. — *Esercizi e problemi di algebra complementare* ad uso del 2° biennio degl'Istituti tecnici. Vol. I, per la 3a classe. Presso l'autore a Mondovì. — L. 1.20.

Al notevole lavoro " Risoluzione dei triangoli piani „ un altro ne aggiunge l'attività intelligente del prof. Alfredo Bassi, non meno utile del primo, ed è una raccolta di esercizii e problemi, in parte risoluti, in parte proposti, destinata principalmente ai giovani del secondo biennio d'Istituto tecnico. È pubblicata la prima parte " Inidentità, inequazioni e forme indeterminate „, e fra breve sarà pubblicata la seconda. Questa prima parte è divisa in due libri, uno relativo alle inidentità e inequazioni, l'altro alle forme indeterminate. Ogni libro è diviso in capitoli, e ogni capitolo comincia con opportuni richiami delle proprietà che alla materia del capitolo si riferiscono. Così sono richiamate le proprietà relative alle inidentità, alle inequazioni e ai limiti. Seguono per ogni capitolo varî esercizi risoluti, da prima semplici, poi sempre più difficili, e il capitolo si chiude con un grandissimo numero di questioni a risolvere, tutte con le risposte, molte con avviamento.

Gli esercizi risoluti sono sempre elegantemente risoluti, i propositi sempre bene scelti e ordinati, e molti di essi sono vere e proprie quistioni di studio, e il giovane è sicuro di trovare nel libro qualche lume per qualunque quistione che sugli argomenti trattati gli potrà venire proposta a risolvere. Talchè il libro potrà con piena coscienza essere additato ai giovani come modello di precisione e come fonte di ricchezza nei suoi studi.

Qualche osservazione di poco conto può essere fatta.

Forse sarebbe stato opportuno insieme con gli altri richiami fare quelli d'inidentità, d'inequazione e di limite. I due capitoli " Semplificazione d'inidentità „ e " Verifica d'inidentità „ forse sarebbe stato più opportuno riunirli in uno solo, con il secondo titolo. Negli esercizi proposti sulle inidentità qualche volta sono poste delle condizioni come $a > b > c > 0$, e si vuole solo dire che a, b, c sono numeri reali positivi a due a due non eguali. Nell'esercizio $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ le condizioni $a \gtreqless b$, $a \geqslant 0$ possono lasciare qualche dubbio. A proposito delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ non sarebbe stato fuori di luogo dare il concetto *formale* di derivata d'un polinomio intero in x, $f(x)$. Risulta in modo assai semplice che se $f(x)$ è divisibile per $x - k$, e se nel quoto della divisione si pone $x = k$, si ha $f'(k)$.

S. Catania.

(1) Secondo tale teoria, dei germi vitali vagano negli spazi dell'universo e, incontrando un pianeta, spargono la vita sulla sua superficie, tostochè siano realizzate le condizioni necessarie all'esistenza degli organismi (cfr. pag. 181).

(2) Tale teoria, ideata da Eulero nel 1746, afferma che le onde luminose esercitano una pressione sopra i corpi su cui cadono. La sua esattezza fu provata: teoricamente dal Maxwell nel 1873; sperimentalmente dal russo Lebedeff e dagli americani Nichols ed Hull nel 1900 e nel 1901 (cfr. pag. 82).

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 12 Febbraio 1909

LA TRIGONOMETRIA DALLA TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI

In questo lavoro, che sotto l'aspetto scientifico non contiene novità, si intende fare vedere come certi concetti analitici, stabiliti in modo preciso, relativamente ai numeri complessi, possano applicarsi con successo ad una trattazione analitica della teoria delle funzioni circolari.

Non voglio concludere che nelle scuole secondarie dove la Trigonometria si insegna, possano essere accolte le idee contenute in questo articolo, perchè l'ordinamento attuale delle dette scuole, ad eccezione forse della Sezione Fisico-matematica degli Istituti tecnici, non lo consente; ma certe teorie, da principio troppo astratte e difficili, col tempo si son venute semplificando, e di esse si è avvantaggiata la scuola.

Nel § 1, date alcune definizioni, ho accennato ad alcune proprietà della parte reale di un numero complesso. Nel § 2 è introdotto il *prodotto scalare* di due complessi.

Nei §§ 3, 4 sono introdotte le funzioni *coseno* e *seno* di due numeri complessi: per la definizione del *seno* sono stati divisi i numeri complessi in due classi rispetto ad un complesso dato.

In seguito sono introdotti, ancora analiticamente, i concetti di angolo e di triangolo e dedotte le principali proprietà inerenti a questi enti.

In fine è accennato come, fatta la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, i concetti di angolo e triangolo introdotti analiticamente coincidono con quelli introdotti geometricamente.

§ I. — Proprietà dei numeri complessi.

Supporremo che si conoscano il significato di numero complesso introdotto analiticamente e le proprietà inerenti a questo ente. (¹)

Se $u = a + ib$ è un complesso, porremo:

$$\text{real}\, u = a.$$

È facile vedere che se $u = u'$ sarà $\text{real}\, u = \text{real}\, u'$.

(¹) Per una teoria analitica dei numeri complessi cfr. il *Formulario* e la nota del prof. CATANIA pubblicata nel *Periodico di Matematica*, 1906-1907. Secondo il *Formulario*, *numero complesso* non ha il significato che qui si attribuisce a queste parole. Il Peano usa la denominazione di numero immaginario. Qui si è preferito seguire la denominazione più comune.

In tutto quanto diremo in seguito supporremo che i numeri complessi che consideriamo non sieno nulli, quando anche questa ipotesi non sia necessaria in molte proposizioni come nella 1, 2, 3 del presente §.

È facile vedere che se $u, v, w \ldots$ sono complessi, $m, \rho, r \ldots$ reali ed $u', v', w' \ldots$ complessi coniugati di $u, v, w, \ldots$, si ha:

$$\text{real}\,(u \times v') = \text{real}\,(u' \times v). \tag{1}$$

$$\text{real}\,(mu) = m \text{ real } u. \tag{2}$$

$$\text{real}\,(u + v + w + \ldots) = \text{real } u + \text{real } v + \text{real } w + \ldots, \tag{3}$$

sempre che gli addendi sieno in numero finito.

$$-1 \leqslant \text{real } u / \text{mod } u \leqslant 1. \tag{4}$$

$$\text{real}\,(\rho u \times rv) = \rho r \text{ real}\,(u \times v). \tag{5}$$

§ II. — Prodotto scalare di numeri complessi.

1. Se u e v sono complessi chiameremo loro *prodotto scalare*, e lo indicheremo con $|u \times v|$, la parte reale del prodotto $u \times v'$; cioè porremo:

$$|u \times v| = \text{real}\,(u \times v'). \qquad \text{Def.}$$

2. Dalla P. 1, § 1 e dalla Def. precedente risulta:

$$|u \times v| = |v \times u|. \qquad \text{Comm.} \times$$

3. Dalla Def. discende che il prodotto scalare è una quantità reale determinata ed unica.

4. Se u, v, w sono complessi, e con $|(u+v) \times w|$ indichiamo il prodotto scalare del complesso $u + v$ per il complesso w si ha:

$$|(u+v) \times w| = |u \times w| + |v \times w|. \quad \text{Distrib.}\,(\times, +)$$

Infatti, se $u = a + ib$, $v = c + id$, $w = e + if$ si ha:

$$|(u+v) \times w| = \text{real}\,[(u+v) \times w'] = (a+c)\,e + (b+d)\,f \tag{1}$$

$$|u \times w| = \text{real}\,(u \times w) = ae + bf \tag{2}$$

$$|v \times w| = \text{real}\,(v \times w') = ce + df \tag{3}$$

da (1), (2) e (3) si deduce la P.

5. Posto $|u^2| = |u \times u|$ sarà:

$$|u^2| = \text{numero reale positivo} = (\text{mod } u)^2 = \text{mod}^2 u.$$

6. $|iu \times u| = 0$.

Infatti per Def.

$$\begin{aligned} |iu \times u| &= \text{real}\,(iu \times u') \\ &= \text{real}\,(ia - b)\,(a - ib) \\ &= ab - ab = 0. \end{aligned}$$

7. Se r è numero reale si ha:

$$|(ru)\times v| = r\,|u\times v|.$$

Invero,

$$\begin{aligned}|(ru)\times v| &= \text{real}\,[(ru)\times v'] && \text{Def.}\ \times\\ &= \text{real}\,[r\,(u\times v')]\\ &= r\ \text{real}\,(u\times v') && \text{P. 2, § 1}\\ &= r\,|u\times v|. && \text{Def.}\ \times\end{aligned}$$

In particolare per $r=-1$ si ha:

$$|-u\times v| = -\,|u\times v|.$$

8. Se u, v, w sono complessi diversi da zero si ha:

$$|(u+v)^2| = |u^2| + |v^2| + 2\,|u\times v|.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}|(u+v)^2| &= \text{real}\,\{(u+v)\times(u+v)'\} && \text{Def.}\ \times\\ &= \text{real}\,\{u\times u' + v\times v' + u\times v' + u'\times v\}\\ &= \text{real}\,(u\times u') + \text{real}(v\times v') + \text{real}(u\times v') + \text{real}(u'\times v) && \text{P. 3, § 1}\\ &= |u^2| + |v^2| + 2\,|u\times v|. && \text{Def.}\ \times,\ \text{P. 2, § 1}\end{aligned}$$

9. In modo analogo si dimostra la seguente P.

$$|(u+v+w)^2| = |u^2| + |v^2| + |w^2| + 2\,|u\times v| + 2\,|v\times w| + 2\,|w+u|.$$

§ III. — Coseno.

Chiameremo coseno di due complessi u e v, e lo indicheremo con $\cos(u, v)$ il prodotto scalare dei quozienti di essi per i rispettivi moduli; cioè porremo:

1. $$\cos(u,v) = |u/\text{mod}\,u \times v/\text{mod}\,v|.$$

Dalle PP. 2, 7 del § precedente si trae:

2. $$\cos(u,v) = \cos(v,u).$$

3. $$\cos(u,-v) = -\cos(u,v).$$

4. $$\cos(-u,-v) = \cos(u,v).$$

5. Dalla P. 4, § 1, tenendo conto che il prodotto di due frazioni proprie è una frazione propria e dalla Def. cos. si deduce:

$$-1 \leqslant \cos(u,v) \leqslant 1.$$

6. $$\cos(u,v) = 1.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\cos(u,w) &= |u/\text{mod}\,u\times w/\text{mod}\,w| && \text{Def. cos.}\\ &= |u\times u|\,/\text{mod}^2 u\\ &= |u^2|\,/\text{mod}^2 u = 1. && \text{P. 5, § 2}\end{aligned}$$

6·1. $$\cos(u,-u) = -1.$$

Questa P. si deduce osservando che $\cos(u, -u) = -\cos(u, u)$.

7. Se ρ ed r sono numeri reali e dello stesso segno sarà:

$$\cos(\rho u, \rho v) = \cos(u, v).$$

Invero:

$$\begin{aligned}\cos(ru, \rho v) &= |ru / \text{mod}\, ru \times \rho v / \text{mod}\, \rho v| \\ &= |ru \times \rho u| / \text{mod}\, r.\, \text{mod}\, \rho.\, \text{mod}\, u.\, \text{mod}\, r \\ &= r\rho\, |u \times v| / \text{mod}\, r.\, \text{mod}\, \rho.\, \text{mod}\, u.\, \text{mod}\, r \quad \text{P. 5, § 1} \\ &= |u \times v| / \text{mod}\, u.\, \text{mod}\, v \quad \text{Tes.} \\ &= \cos(u, v).\end{aligned}$$

7·1. In particolare, se ρ ed r sono reali positivi:

$$\cos(\rho u, v) = \cos(u, v).$$
$$\cos(u, rv) = \cos(u, v).$$
$$\cos(\rho u, u) = 1.$$

Se ρ è reale negativo sarà:

$$\cos(\rho u, v) = -1.$$

7·2. La condizione necessaria perchè sia $\cos(u, v) = -1$ è $v = \rho u$ essendo ρ reale positivo.

Infatti posto $u = a + ib$, $v = c + id$ deve essere per ipotesi:

$$(ac + bd) / (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (c^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} = 1$$

dalla quale si deduce che $ac + bd$ deve essere > 0.

Quadrando la precedente e semplificando si ha:

$$ad - bc = 0,$$

la quale, insieme alla $ac + bd > 0$, ci dà:

$$c = \rho u,\ d = \rho b$$

essendo ρ un numero reale positivo; cioè $v = \rho u$.

8. Dalla Def. cos. si deduce:

$$|u \times v| = \text{mod}\, u\, .\, \text{mod}\, v\, .\, \cos(u, v).$$

9. Se con $u + v$ indichiamo la somma dei complessi u e v si ha, supposto $u + v$ diverso da zero e da $2u$:

$$\text{mod}\,(n + v) = \text{mod}\, u\, .\, \cos(u, u + v) + \text{mod}\, v\, .\, \cos(u + v, v).$$

Infatti:

$$\text{mod}\, u\, .\, \cos(u, u + v) = |u \times (u + v)| / \text{mod}\,(u + v),$$
$$\text{mod}\, v\, .\, \cos(u + v, v) = |(u + v) \times v) / \text{mod}\,(u + v),$$

dalle quali sommando:

$$\begin{aligned}&\text{mod}\, u\, .\, \cos(u, u + v) + \text{mod}\, v\, .\, \cos(u + v, v) = \\ &\quad = (|u \times (u + v)| + |v\, (u + v)|) / \text{mod}\,(u + v) \\ &\quad = |u^2 + v^2 + 2uv| / \text{mod}\,(u + v) \quad \text{P. 4, § 2; P. 3, § 1} \\ &\quad = |(u + v)^2| / \text{mod}\,(u + v) \\ &\quad = \text{mod}^2\,(u + v)\, \text{mod}\,(u + v) \quad \text{P. 5, § 2} \\ &\quad = \text{mod}\,(u + v).\end{aligned}$$

10. Se $\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v$ sarà; sempre nella ipotesi del numero precedente:

$$\cos(u, u+v) = \cos(u+v, v).$$

Invero

$$\begin{aligned}\cos(u, u+v) &= |u \times (u+v)| / \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v) \\ &= \{|u^2| + |u \times v|\} / \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v) \\ &= \{\mathrm{mod}^2 u + |u+v|\} / \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v) \quad \text{P. 5, § 2.} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\cos(u+v, v) = \{\mathrm{mod}^2 v + |u \times v|\} / \mathrm{mod}\, v \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v). \quad (2)$$

Dalle (1), (2) e dall'ipotesi si deduce la tesi.

11. Viceversa, supposto sempre $u+v$ diverso da $2\rho u$ e diverso da zero, se $\cos(u, u+v) = \cos(u+v, v)$ sarà $\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v$.

Invero dall'ipotesi e dalle relazioni (1) (2) della P. 10 si deduce:

$$\begin{aligned}&\{\mathrm{mod}^2 u + |u \times v|\} / \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v) = \\ &\qquad = \{\mathrm{mod}^2 v + |u \times v|\} / \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\,(u+v)\end{aligned}$$

od anche:

$$\{|u \times v| / \mathrm{mod}\, u\, \mathrm{mod}\, v - 1\} \{\mathrm{mod}\, u - \mathrm{mod}\, v\} = 0;$$

ovvero:

$$\{\cos(u, v) - 1\} \{\mathrm{mod}\, u - \mathrm{mod}\, v\} = 0.$$

Per la P. 7·2 e per l'ipotesi ammessa $\cos(u, v) \neq 1$ e quindi:

$$\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v.$$

12. Se $\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v$, dalla P. 9 si deduce:

$$\mathrm{mod}\,(u+v) = 2\, \mathrm{mod}\, u \,.\, \cos(u, u+v).$$

13. Dalla P. 8, § 2 e dalla P. 8 si deduce:

$$\mathrm{mod}^2(u+v) = \mathrm{mod}^2 u + \mathrm{mod}^2 v + 2\, \mathrm{mod}\, u \,.\, \mathrm{mod}\, v \,.\, \cos(u, v).$$

14. Dati i complessi u, v, w con $v \neq pu$ con p reale negativo è sempre possibile determinare due numeri ρ ed r tali che:

$$w = \rho u + rv. \quad (1)$$

Posto come al solito $u = a + ib$, $v = c + id$, $w = e + if$, perchè sia verificata la (1) deve aversi:

$$e + if = \rho(a + ib) + r(c + id),$$

cioè:

$$\begin{aligned}a\rho + cr &= e \\ b\rho + dr &= f\end{aligned}$$

e quindi basta scegliere:

$$\rho = (ed - cf) \mid (ad - cb), \qquad r = (af - eb) \mid (ad - cb). \quad (2)$$

L'ipotesi $v \neq pu$ è necessaria per evitare che ρ ed r sieno infiniti.

15. Dati tre complessi qualunque, purchè due di essi non sieno opposti, è sempre possibile trovare due numeri reali positivi ρ ed r tali che un complesso od il suo contrario sia uguale alla somma degli altri due moltiplicati rispettivamente per ρ ed r.

Questa P. è la precedente se i numeri ρ ed r ricavati dalle (2) sono positivi. Se nelle (2) è $\rho < 0$ e $r > 0$ poniamo $\rho = -\rho'$ con ρ' positivo, sicchè avremo:

$$v = \frac{1}{r} w + \frac{\rho'}{r} u .$$

Se finalmente, $\rho < 0$, $r < 0$ posto $\rho = -\rho'$ ed $r = -r'$ avremo:

$$-w = \rho' u + r' v.$$

16. Osservazione. — Dato il complesso u, tutti i complessi v possono dividersi in due classi rispetto ad u. In una classe, che chiameremo *classe α rispetto ad* u, porremo il complesso iu ed i complessi v per i quali è possibile trovare due numeri ρ ed r positivi reali e tali che:

$$v = \rho u + r(iu) \qquad \text{o} \qquad v = \rho iu + r(-u).$$

Nell'altra classe, *classe β rispetto ad u*, porremo il complesso $-iu$, ed i complessi v per i quali è possibile determinare ρ ed r reali positivi e tali che per essi è:

$$-v = \rho u + r(iu), \qquad -v = \rho iu + r(-u).$$

I complessi u e $-u$ li considereremo come comuni alle due classi.

16·1. Un complesso qualunque v appartiene alla classe α od alla classe β rispetto ad un complesso dato u.

Infatti fra v, u ed iu dovrà verificarsi (P. 15) una delle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} v &= \rho u + r(iu) \\ v &= -\rho u + r(iu) \\ v &= \rho u - r(iu) \\ v &= -\rho u - riu \end{aligned}$$

con ρ ed r reali positivi.

Se v è legato ad u da una delle prime due relazioni, v appartiene alla classe α; se invece è legato ad u da una delle seconde due relazioni, v appartiene alla classe β.

17. Se v appartiene alla classe α (oppure β) rispetto ad u; u apparterrà alla classe β (oppure α) rispetto a v.

Infatti se v è un α sarà:

$$v = \rho u + r(iu) \qquad \text{oppure} \qquad v = -\rho u + riu$$

con ρ ed r reali positivi.

Nel primo caso, moltiplicando primo e secondo membro per $(\rho - ri)$ si ha:

$$v(\rho - ri) = (\rho^2 + r^2)\, u:$$

cioè

$$u = \frac{\rho}{\rho^2 + r^2} v - \frac{r}{\rho^2 + r^2}(iv).$$

La quale ci dice che u è un β rispetto a v.

Nel secondo caso, moltiplicando per $-\rho - ri$ si ha:

$$u = -\frac{\rho}{\rho^2 + r^2} v - \frac{r}{\rho^2 + r^2}(iv),$$

e quindi u appartiene alla classe β rispetto a v.

17·1. Possiamo osservare ancora che se v appartiene ad α (oppure a β) rispetto ad u, $-v$ apparterrà a β (od α), rispetto ad u. Se v appartiene ad α (od a β) rispetto ad u, $-v$ apparterrà ad α (od a β) rispetto a $-u$.

Per la dimostrazione basta riferirsi alla definizione delle classi α e β.

18. Dato un complesso u ed un numero reale n, compreso fra 1 e -1, esistono due complessi tali che, detto v uno di essi è:

$$\cos(u, v) = n.$$

Poniamo per brevità $u = 1$ e $v = x + iy$ (ciò che nulla toglie alla generalità della questione). Perchè v soddisfi l'eguaglianza precedente dovrà aversi:

$$x / \sqrt{x^2 + y^2} = n.$$

Questa relazione ci dice che il segno di x deve essere lo stesso di quello di n.

L'equazione precedente dà:

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{n}{\sqrt{1 - n^2}},$$

e poichè $1 - n^2 > 0$, vi sono due complessi v_1, v_2 che risolvono la questione.

L'ipotesi $n = 1$ si tratta a parte e si ha $y = 0$ ed $x = 1$.

Nel caso generale se è $n > 0$ si può scrivere, a meno di un fattore positivo:

$$v_1 = \sqrt{1 - n^2} = ni, \quad v_2 = \sqrt{1 - n^2} - ni;$$

Se è $n < 0$ si ha invece

$$v_1 = -\sqrt{1 - n_2} + ni, \quad v_2 = -\sqrt{1 - n_2} - ni.$$

Osservazione. — Questo risultato ci mostra (vedasi osservazione precedente) che se v_1 appartiene alla classe α, v_2 appartiene alla classe β, o viceversa.

Possiamo osservare che essendo $v_1 + v_2 = \pm 2\sqrt{1 - n^2}$ si può scrivere:

$$v_1 + v_2 = \rho u,$$

essendo ρ un numero reale.

19. Se v appartiene alla classe α rispetto al complesso iu sarà

$$\cos(u, v) < 0.$$

Supponiamo per brevità $u=1$ e $v=x+iy$ sarà:

$$\cos(u, v) = x / \sqrt{x^2+y^2}.$$

Poichè v appartiene alla classe α rispetto a iu deve aversi:

$$v = \rho(iu) + r(-u) \qquad \text{oppure} \qquad v = \rho(-u) + r(-iu)$$

ed essendo $u=1$

$$x+y = \rho i - r \qquad \text{oppure} \qquad x+iy = -\rho - ri$$

e quindi in ogni caso $x<0$ cioè:

$$\cos(u, v) = x / \sqrt{x^2+y^2} < 0.$$

Analogamente si dimostrerà che se v appartiene alla classe β rispetto ad iu sarà

$$\cos(u, v) > 0.$$

20. Dato il complesso u diciamo che v appartiene al *primo quadrante* se essendo ρ ed r reali positivi, è

$$v = \rho u + r(iu).$$

Se $v = \rho(iu) + r(-u)$, diremo che v appartiene al *secondo quadrante*;

se $v = \rho(-u) + r(-iu)$, diremo che v appartiene al *terzo quadrante*, e finalmente se $v = r(-iu) + \rho(u)$ diremo che v appartiene al *quarto quadrante*.

21. La P. 19 può, dopo quanto si è detto, enunciarsi:

$$\cos(u, v) \gtrless 0$$

secondo che v appartiene al primo e al quarto quadrante od al secondo e terzo.

§ IV. — Seno.

1. Se u e v sono complessi non nulli porremo:

$$\operatorname{sen}(u, v) = \pm \operatorname{mod} \cos(iu, v),$$

prendendo il segno + od il segno — secondo che v appartiene alla classe α od alla classe β rispetto ad u.

1·1. Dalla Def. risulta: $\operatorname{sen}(u, v) \gtrless 0$ secondo che v appartiene al 1° e 2° quadrante o al 3° e 4°.

2. $$\operatorname{sen}(u, u) = 0.$$

Infatti: $\cos(iu, u) = 0$ e quindi la P.

3. $$\operatorname{sen}(u, v) = -\operatorname{sen}(v, u).$$

Osserviamo anzitutto che $\text{mod}\cos(iu, v) = \text{mod}\cos(iv, u)$ e che per la P. 11, § 3 se v appartiene ad α rispetto ad u; u appartiene a β rispetto a v e quindi la tesi.

4.
$$\text{sen}(u, iu) = 1.$$

Infatti:
$$\text{sen}(u, iu) = +\,\text{mod}\cos(iu, iu) = +1.$$

Si è preso il segno $+$ perchè iu è un α rispetto ad u.

5. Se ρ ed r sono reali si ha:
$$\text{mod}\cos(\rho iu, rv) = \text{mod}\cos(iu, v)$$
e per conseguenza:

$\text{sen}(u, v) = \text{sen}(\rho u, rv)$	se $\rho > 0,\ r > 0$	P. 17, § 3
$\text{sen}(u, v) = -\,\text{sen}(\rho u, rv)$	se $\rho < 0,\ r < 0$	»
$\text{sen}(u, v) = \text{sen}(\rho u, rv)$	se $\rho < 0,\ r > 0$	»
$\text{sen}(u, v) = -\,\text{sen}(\rho u, rv)$	se $\rho > 0,\ r < 0$	»

In particolare:
$$\text{sen}(u, v) = -\,\text{sen}(-u, -v).$$
$$\text{sen}(u, v) = \text{sen}(-u, v).$$
$$\text{sen}(u, v) = \text{sen}(-u, v).$$

6.
$$\text{sen}(iu, -u) = 1.$$

Infatti:
$$\begin{aligned} \text{sen}(iu, -u) &= -\,\text{sen}(iu, u) && \text{P. 5} \\ &= -[-\,\text{sen}(u, iu)] && \text{P. 3} \\ &= \text{sen}(u, iu) = 1 && \text{P. 4} \end{aligned}$$

7. Analogamente si possono dimostrare le relazioni:
$$\text{sen}(-u, -iu) = -1, \qquad \text{sen}(-iu, u) = 1.$$

Invero:
$$\begin{aligned} \text{sen}(-u, -iu) &= -\,\text{sen}(u, iu) && \text{P. 5} \\ &= -1 && \text{P. 4} \\ \text{sen}(-iu, u) &= \text{sen}(iu, u) && \text{P. 5} \\ &= -\,\text{sen}(u, iu) && \text{P. 3} \\ &= -1 && \text{P. 4} \end{aligned}$$

8. Essendo il cos di due complessi qualunque compreso fra 1 e -1. (P. 5, § 3) sarà
$$-1 \leqq \text{sen}(u, v) \leqq 1.$$

9. Se poniamo:
$$\text{sen}^2(u, v) = \text{sen}(u, v) \times \text{sen}(u, v)$$
$$\cos^2(u, v) = \cos(u, v) \times \cos(u, v)$$
avremo:
$$\text{sen}^2(u, v) + \cos^2(u, v) = 1.$$

Invero:

$$\begin{aligned}\text{sen}^2(u, v) + \cos^2(u, v) &= \cos^2(iu, v) + \cos^2(u, v)\\ &= [(\text{real}\,(iu, v^1))^2 + (\text{real}\,(u + v^1))^2]/\text{mod}^2 u\,.\,\text{mod}^2 v\\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)/\text{mod}^2 u\,.\,\text{mod}^2 v\\ &= 1.\end{aligned}$$

10. Dato un numero reale n compreso fra 1 e -1 ed un complesso u esistono (P. 18, § 3) due complessi v_1, v_2 tali che

$$\cos(u, v_1) = \cos(u, v_2) = n.$$

Per l'osservazione che si trova nella stessa P. 18, v_1 e v_2 appartengono a classi diverse rispetto ad u e quindi:

$$\text{sen}\,(u, v_1) = -\,\text{sen}\,(u, v_2).$$

11. Da quanto si è detto possiamo concludere che dati due numeri reali n_1, n_2 legati dalla relazione $n_1^2 + n_2^2 = 1$ esiste un solo complesso v tale che

$$\cos(u, v) = n_1$$
$$\text{sen}\,(u, v) = n_2.$$

12. Se con $u + v$ indichiamo la somma dei complessi u e v e se supponiamo $u + v$ diverso da zero e $2u$.

$$\text{mod}\,u\,.\,\text{sen}\,(u, u + v) = \text{mod}\,v\,.\,\text{sen}\,(u + v, v). \qquad (1)$$

Osserviamo anzitutto che se $u + v$ è della classe α (β) rispetto ad u anche v è della classe α (β) rispetto ad $u + v$, quindi i segni dei due membri della (1) sono uguali.

In quanto ai valori assoluti osserviamo che:

$$\begin{aligned}\text{mod}\,u\,.\,\text{sen}\,(u, u + v) &= \text{mod}\,u\,.\,\text{mod}\cos(iu, u + v)\\ &= \text{mod}\,[b\,(a + c) - a\,(a + d)]/\text{mod}\,(u + v). \qquad (2)\end{aligned}$$
$$\text{mod}\,v\,.\,\text{sen}\,(u + v, v) = \text{mod}\,[c\,(a + c) - d\,(b + d)]/\text{mod}\,(u + v). \qquad (3)$$

Dalle (2) e (3) si deduce la P.

13. In particolare, sempre nelle stesse ipotesi, se $\text{mod}\,u = \text{mod}\,v$, si ha:

$$\text{sen}\,(u, u + v) = \text{sen}\,(u + v, v).$$

Viceversa che $\text{sen}\,(u, u + v) = \text{sen}\,(u + v, v)$ sarà

$$\text{mod}\,u = \text{mod}\,v.$$

14. Se $u + v$ si trova nelle condizioni della P. 12 si ha:

$$\cos(u, v) = \cos(u, u + v)\,.\,\cos(u + v, v) - \text{sen}\,(u, u + v)\,.\,\text{sen}\,(u + v, v).$$

Invero dalle P. 9, § 3 e P. 12 si deduce:

$$\begin{aligned}\text{mod}^2(u + v) &= [\text{mod}\,u\,.\cos(u, u + v) + \text{mod}\,v\,.\cos(u + v, v)]^2\\ &\quad + [\text{mod}\,u\,.\,\text{sen}\,(u, u + v) + \text{mod}\,v\,.\,\text{sen}\,(u + v, v)]^2\\ &= \text{mod}^2 + \text{mod}^2 v + 2\,\text{mod}\,u\,.\,\text{mod}\,v \times\\ &\times [\cos(u, u + v)\cos(u + v, v) - \text{sen}\,(u, u + v)\,\text{sen}\,(u + v)] \qquad \text{P. 9}\\ &= |u^2| + |v^2| + 2\,\text{mod}\,u\,.\,\text{mod}\,v\,[\;.\;.\;.\;.\;.\;]; \qquad \text{P. 5, § 2}\end{aligned}$$

d'altra parte:

$$\mathrm{mod}^2(u+v)=|(u+v)^2|=|u_2|+|v^2|+2\,|u\times v| \quad \text{P.P.5,8, § 2}$$

e quindi:

$$|u\times v|=\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,v\,[\cos(u,u+v)\,.\,\cos(u+v,v)- \\ -\mathrm{sen}\,(u,u+v)\ \mathrm{sen}\,(u+v,v)].$$

Operando in quest'ultima con $/\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,v$ si ha la relazione da dimostrare.

15. Sempre che u sia diverso da ρv (ρ reale) si ha:

$$\mathrm{sen}\,(u,v)=\mathrm{sen}\,(u,u+v)\,.\,\cos(u+v,v)+\cos(u,u+v)\ \mathrm{sen}\,(u+v,v).$$

Infatti, posto

$$u=a+ib,\qquad v=c+id$$

sarà:

$$\cos(u,u+v)=\{a\,(a+c)+b\,(b+d)\}\ /\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,(u+v),$$
$$\cos(u+v)=\{c\,(a+c)+d\,(b+d)\}\ /\mathrm{mod}\,v\,.\,\mathrm{mod}\,(u+v),$$
$$\mathrm{sen}\,(u,u+v)=\pm\ \mathrm{mod}\,\{b\,(a+c)-a\,(b+d)\}\ /\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,(u+v),$$
$$\mathrm{sen}\,(u+v,v)=\pm\ \mathrm{mod}\,\{d\,(a+c)-c\,(b+d)\}\ /\mathrm{mod}\,v\,.\,\mathrm{mod}\,(u+v).$$

I valori di $\mathrm{sen}\,(u,u+v)$ e $\mathrm{sen}\,(u+v,v)$ devono prendersi col medesimo segno (vedi osservazione fatta nella P. 12) che è poi quello di $\mathrm{sen}\,(u,v)$.

Inoltre osserviamo che

$$\{b\,(a+c)-a\,(b+d)\}+\{d\,(a+c)-c\,(b+d)\}=0;$$

e quindi

$$b\,(a+c)-a\,(b+d)\qquad \text{e}\qquad d\,(a+c)-c\,(b+d)$$

sono di segno contrario, cioè se $b\,(a+c)-a\,(b+d)\gtrless 0$ sarà in corrispondenza $c\,(b+d)-d\,(a+c)\gtrless 0$ (i segni di diseguaglianza corrispondendosi).

Premesse queste considerazioni si ha:

$$\mathrm{sen}\,(u,u+v)\,.\,\cos(u+v,v)+\cos(u,u+v)\,.\,\mathrm{sen}\,(u+v,v)= \\ =\pm\,\{bc\,(a+c)^2-ad\,(b+d)^2+(a+c)\,(b+d)\,(bd-ac)-ad\,(a+c)^2 \\ +bc\,(b+d)^2-(a+c)\,(b+d)\,(bd-ac)\}\ /\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,v\,.\,\mathrm{mod}^2\,(u+v) \\ =\pm\ \mathrm{mod}\,(bc-ad)\ /\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,v.$$

D'altra parte:

$$\mathrm{sen}\,(u,v)=\pm\ \mathrm{mod}\,(bc-ad)\ /\mathrm{mod}\,u\,.\,\mathrm{mod}\,v$$

e per l'osservazione fatta in principio, riguardante i segni:

$$\mathrm{sen}\,(u,v)=\mathrm{sen}\,(u,u+v)\,.\,\cos(u+v,v)+\cos(u,u+v)\ \mathrm{sen}\,(u+v,v).$$

16. Se nelle formule 15 e 16 poniamo $-u$ al posto di u, $u+v$ al posto di v, essendo $v=(-u)+(u+v)$ la somma dei complessi $-u$, $u+v$, si avrà:

$$\cos(-u, u+v) = \cos(-u, v) \,.\, \cos(v, u+v) - \operatorname{sen}(-u, v) \,.\, \operatorname{sen}(v, u+v).$$
$$\operatorname{sen}(-u, u+v) = \operatorname{sen}(-u, v) \,.\, \cos(v, u+v) + \cos(-u, v) \,.\, \operatorname{sen}(v, u+v).$$

Od anche, essendo:

$$\cos(-u, u+v) = \cos(u, u+v).$$
$$\cos(-u, v) = \cos(u, v).$$
$$\cos(v, u+v) = \cos(u+v, v).$$
$$\operatorname{sen}(-u, v) = \operatorname{sen}(u, v), \text{ ecc.}$$
$$\cos(u, u+v) = \cos(u, v) \,.\, \cos(u+v, v) + \operatorname{sen}(u, v) \,.\, \operatorname{sen}(u+v, v).$$
$$\operatorname{sen}(u, u+v) = \operatorname{sen}(u, v) \,.\, \cos(u+v, v) - \cos(u. v) \,.\, \operatorname{sen}(u+v, v).$$

17. Dato il complesso u e la coppia di complessi t, q è sempre possibile trovare un complesso p tale che:

$$\cos(u, p) = \cos(t, q).$$
$$\operatorname{sen}(u, p) = \operatorname{sen}(t, q).$$

Infatti, supposto $\cos(t, q) = n_1$, $\operatorname{sen}(t, q) = n_2$ esiste, P. 18, § 4, P. 10, un complesso p tale che

$$\cos(u, p) = n_1 = \cos(t, q).$$
$$\cos(u, p) = n_2 = \operatorname{sen}(t, q).$$

§ V. — **Angolo.**

Da quanto si è detto nei §§ precedenti risulta che dati due complessi u e v esistono e sono unici il loro *cos* ed il loro *sen*, i quali sono due numeri reali n_1, n_2 legati dalla relazione $n_1^2 + n_2^2 = 1$. Viceversa dato il complesso u e due numeri reali n_1, n_2 legati dalla relazione $n_1^2 + n_2^2 = 1$ esiste un solo complesso v tale che

$$\cos(u, v) = n_1, \qquad \operatorname{sen}(u, v) = n_2.$$

Inoltre si è visto che le funzioni sen e cos non dipendono dai moduli dei numeri complessi. Possiamo pertanto dire che dati due complessi u, v è inerente ad essi un nuovo ente da cui dipendono il cos ed il sen, che chiameremo *angolo dei due complessi* u *e* v, che indicheremo con $\operatorname{ang}(u, v)$ e che definiremo per astrazione.

Porremo cioè:

1. $\operatorname{ang}(u, u) = 0$

$$\operatorname{ang}(u, v) = \operatorname{ang}(u_1, v_1) \,.=.\, \cos(u, v) = \cos(u_1, v_1),\ \operatorname{sen}(u, v) = \operatorname{sen}(u_1, v_1). \qquad \text{Def. ang.}$$

Si possono verificare le leggi formali dell'eguaglianza e quindi per gli angoli vale il principio della sostituzione.

2. $$\text{ang}\,(u, iu) = \text{ang}\,(iu, -u).$$

Infatti:

$$\cos\,(u, iu) = \cos\,(iu, -u). \tag{1}$$

$$\text{sen}\,(u, iu) = \text{sen}\,(iu, -u). \tag{2}$$

Da (1), (2) e dalla Def. ang. si deduce la tesi.

3. Dalla Def. ang. e dalle P.P. 7, § 3, 5, § 4 risulta:

$$\text{ang}\,(u, v) = \text{ang}\,(\rho u, rv)$$

essendo ρ ed r due numeri reali del medesimo segno.

4. Dato un complesso u e la coppia di complessi (t, q) è sempre possibile trovare un complesso p tale che

$$\text{ang}\,(t, q) = \text{ang}\,(u, p).$$

Infatti per la P. 17, § 4 è possibile determinare p in modo che:

$$\cos\,(t, q) = \cos\,(u, p), \qquad \text{sen}\,(t, q) = \text{sen}\,(u, p).$$

Da questa e dalla Def. ang. risulta la tesi.

5. Osservazione. — Dalla proposizione precedente risulta che dati due angoli si può ad uno di essi sostituirne un altro che abbia un complesso in comune col primo.

Quindi parlando di angoli li supporremo dati in modo che abbiano un complesso in comune.

6. *Somma degli angoli.* — Dati gli angoli:

$$\text{ang}\,(u, v) \qquad \text{ed} \qquad \text{ang}\,(v, w)$$

chiameremo loro somma e la indicheremo con $\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, w)$, l'$\text{ang}\,(u, w)$. Cioè porremo:

$$\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, w) = \text{ang}\,(u, w).$$

7. *Differenza degli angoli.* — La sottrazione si definirà come operazione inversa dell'addizione, cioè dati: $\text{ang}\,(u, w)$ ed $\text{ang}\,(u, v)$ si chiamerà loro differenza e si indicherà con $\text{ang}\,(u, w) - \text{ang}\,(u, v)$, l'$\text{ang}\,(p, q)$ che aggiunto al secondo dà il primo, e si scriverà:

$$\text{ang}\,(u, w) - \text{ang}\,(u, v) = \text{ang}\,(p, q).$$

8. La differenza di due angoli esiste ed è unica.

Infatti, l'$\text{ang}\,(v, w)$ per la Def. è tale che

$$\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, w) = \text{ang}\,(u, w).$$

Che la differenza sia unica lo dimostra il fatto che potendosi scrivere ang $(p, q) =$ ang (u, t) e risultando ang $(u, t) =$ ang (u, w), ne viene che t coinciderà con w, cioè:

$$\text{ang}\,(p, q) = \text{ang}\,(u, w).$$

9. Dalla P. 6 si ha:

$$\begin{aligned}\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, u) &= \text{ang}\,(u, u)\\ &= 0. \qquad \text{P. 1.}\end{aligned}$$

10. Due angoli come i precedenti li diremo di verso opposto.

Se v appartiene alla classe α rispetto ad u, il verso di ang (u, v) lo diremo positivo, e negativo quello di ang (v, u).

11. Conveniamo di scrivere — ang (v, u) al posto di ang (u, v). Cioè poniamo

$$\text{ang}\,(u, v) = -\,\text{ang}\,(v, u).$$

12. A questo punto si può verificare che la somma degli angoli gode della proprietà commutativa e che se u, v, w sono tre complessi qualunque è

$$\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, w) + \text{ang}\,(w, u) = 0.$$

13. *Maggiore e minore.* — Dati gli angoli: ang (u, v) ed ang (u, w) si dirà ang (u, v) maggiore di ang (u, w) e si scriverà

$$\text{ang}\,(u, v) > \text{ang}\,(u, w)$$

se esiste un angolo positivo non nullo ang (p, q) tale che

$$\text{ang}\,(u, v) - \text{ang}\,(u, w) = \text{ang}\,(p, q).$$

Invece di dire che ang (u, v) è maggiore di ang (u, w) si dice anche che ang (u, w) è minore di ang (u, v) e si scrive

$$\text{ang}\,(u, w) < \text{ang}\,(u, v).$$

Da questa Def. risulta che tutti gli angoli negativi sono minori degli angoli positivi.

14. Chiameremo coseno e seno di un angolo rispettivamente il cos ed il sen dei complessi che determinano l'angolo: porremo cioè:

$$\cos \text{ang}\,(u, v) = \cos\,(u, v).$$
$$\text{sen ang}\,(u, v) = \text{sen}\,(u, v).$$

Mediante questa definizione le proposizioni enunciate per i coseni ed i seni delle coppie di complessi, valgono per i coseni ed i seni degli angoli determinati da queste coppie di complessi.

15. Poichè per gli angoli sono stati definiti i concetti di eguaglianza, di somma, di maggiore e minore, così ne viene che gli angoli sono delle grandezze e come tali possono misurarsi.

Assumeremo come angolo unità di misura l'ang (u, iu) che indicheremo con $\frac{\pi}{2}$ e che chiameremo *retto*.

16. $$\text{ang}\,(u, -u) = \pi.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\text{ang}\,(u, -u) &= \text{ang}\,(u, iu) + \text{ang}\,(iu, -u)\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \text{P. 1.}\end{aligned}$$

Due angoli la cui somma è due angoli retti si diranno *supplementari*; *complementari* due angoli la cui somma è un angolo retto.

17. Se v appartiene alla classe α rispetto ad u sarà:

$$\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, -u) = \pi.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\text{ang}\,(u, v) + \text{ang}\,(v, -u) &= \text{ang}\,(u, -u)\\ &= \pi.\end{aligned}$$

17 · 1. Poichè

$$\text{ang}\,(u, iu) = \text{ang}\,(iu, -u) = \text{ang}\,(-u, -iu) = \text{ang}\,(-iu, u)$$

si può concludere che:

$$\text{ang}\,(u, iu) + \text{ang}\,(iu, -u) + \text{ang}\,(-u, iu) + \text{ang}\,(-iu, u) = 2\pi.$$

Ma d'altra parte:

$$\text{ang}\,(u, iu) + \text{ang}\,(iu, -u) + \text{ang}\,(-u, iu) + \text{ang}\,(-iu, u) = \text{ang}\,(u, u).$$

Quindi l'ang (u, u) si può considerare anche come la somma dei quattro angoli retti.

17 · 2. È facile a questo punto dimostrare, servendosi delle PP. 16, 17, 18, § 4, che

$$\cos\,[n2\pi + \text{ang}\,(u, v)] = \cos\,(u, v)$$
$$\text{sen}\,[n2\pi + \text{ang}\,(u, v)] = \text{sen}\,(u, v).$$

Quindi possiamo dedurre che le funzioni seno e coseno sono periodiche ed hanno per periodo 2π.

17 · 3. Un angolo minore di un angolo retto si dirà *acuto*; un angolo maggiore di un angolo retto si dirà *ottuso*.

18. Il seno di un angolo è uguale al coseno dell'angolo complementare.

Osserviamo anzitutto che l'angolo complementare di ang (u, v) è ang (v, iu), perchè la loro somma è ang (u, iu); premesso ciò dimostriamo che

$$\cos\,(u, v) = \text{sen}\,(v, iu).$$

Supponiamo che v appartenga alla classe β rispetto ad iu, sarà:

$$\cos\,(u, v) > 0. \qquad \text{P. 19, § 3}$$

Ma se v appartiene alla classe β rispetto ad iu. iu apparterrà alla classe α rispetto a v (vedi osservazione nella P. 17, § 3) e quindi per la Def. sen:

$$\operatorname{sen}(v, iu) \stackrel{\ast}{>} 0.$$

In questo caso, essendo mod sen $(v, iu) =$ mod cos (u, v), sarà

$$\operatorname{sen}(v, iu) = \cos(u, v).$$

Alla stessa eguaglianza si arriva supponendo che v appartenga alla classe α rispetto ad iu.

19. Due angoli supplementari hanno lo stesso seno mentre i coseni sono uguali in valore assoluto ma di segni contrari.

Infatti osserviamo che

$$\operatorname{ang}(u, v) + \operatorname{ang}(v, -u) = \pi:$$

e che

$$\operatorname{sen}(u, v) = \operatorname{sen}(v, -u)$$
$$\cos(u, v) = -\cos(v, -u)$$

e quindi la P. è dimostrata.

20. *Seno e coseno della somma e differenza di due angoli in funzione dei seni e coseni degli angoli.*

Se u e v sono complessi non nulli ed è $u + v$ la loro somma diversa da zero e da $2\rho u$ risulta:

$$\operatorname{ang}(u, v) = \operatorname{ang}(u, u + v) + \operatorname{ang}(u + v, v)$$

e le formule trovate nelle PP. 16 e 17 del § 4 si possono scrivere; ponendo per brevità $\operatorname{ang}(u, u + v) = a$, $\operatorname{ang}(u + v, v) = b$:

$$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$
$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \cos a \operatorname{sen} b.$$

Mentre le formule della P. 18, § 4 si possono scrivere:

$$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$
$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b - \cos a \operatorname{sen} b.$$

21. Da queste formole se ne possono dedurre altre relative alla moltiplicazione e divisione degli angoli nonchè quelle relative alla trasformazione della somma e della differenza di due delle funzioni sen e cos in prodotto.

§ VI. — **Triangolo.**

Sieno u, v due complessi tali che u sia diverso da ρv essendo ρ un numero reale qualunque. Porremo:

$$\operatorname{ang}(u, u + v) = \mathrm{U}$$
$$\operatorname{ang}(u + v, v) = \mathrm{V}$$
$$\operatorname{ang}(v, -u) = \mathrm{W}.$$

triangolo (u, v, w) = triangolo (U, V, W) = terna dei tre complessi u, v, w che soddisfino la relazione $w = u + v$

lati del triangolo $(u, v, w) = \mathrm{mod}\, u, \mathrm{mod}\, v, \mathrm{mod}\, w$.
angoli del triangolo $(u, v, w) = U, V, W$.
$\mathrm{mod}\, u$, U elementi opposti, ecc....

1. Possiamo anzitutto dimostrare che (1):

$$U + V + W = \pi.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} U + V + W &= \mathrm{ang}\,(u, u + v) + \mathrm{ang}\,(u + v, v) + \mathrm{ang}\,(v, -u) \\ &= \mathrm{ang}\,(u, v) + \mathrm{ang}\,(v, -u) \\ &= \mathrm{ang}\,(u, -u) = \pi. \end{aligned}$$

1·1. Se in un triangolo un angolo è retto gli altri due sono complementari.

1·2. Un triangolo non può avere più di un angolo ottuso nè più di un angolo retto.

2. Se in un triangolo due lati sono uguali sono uguali gli angoli opposti e viceversa. Cioè se:

$$\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v \,.=.\, U = V.$$

Infatti dalle P. 10, 11, § 3 e P. 13, § 4 si ha che se

$$\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v \supset \cos U = \cos V, \mathrm{sen}\, U = \mathrm{sen}\, V.$$

e quindi P. 2, § 5 $U = V$.

Viceversa per $U = V$ per le stesse proposizioni risulta $\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v$.

3. Se un triangolo ha i tre lati uguali ha gli angoli uguali e viceversa, cioè

$$\mathrm{mod}\, u = \mathrm{mod}\, v = \mathrm{mod}\, w \,.=.\, U = V = W.$$

Questa proposizione è una conseguenza immediata della precedente.

4. Un triangolo che ha i lati uguali si dice equilatero; equiangolo se ha i tre angoli eguali.

La P. precedente ci dice che un triangolo equilatero è equiangolo e viceversa.

5. In un triangolo i lati sono proporzionali ai seni degli angoli opposti; cioè:

$$\mathrm{mod}\, u / \mathrm{sen}\, U = \mathrm{mod}\, v / \mathrm{sen}\, V = \mathrm{mod}\, w / \mathrm{sen}\, W.$$

(1) Parrà strano che senza far uso del postulato di Euclide si possa dimostrare questa P.; ma pensando alla definizione che per l'ente triangolo si è data non vi è da meravigliarsi. Facendo in seguito la rappresentazione geometrica perchè l'ente triangolo da noi definito coincida con quello geometrico bisogna ammettere il postulato d'Euclide.

Infatti dalla P. 12, § 4 si deduce:

$$\text{mod } u / \text{sen U} = \text{mod } v / \text{sen V}. \tag{1}$$

Dalla stessa proposizione, ponendo $-u$ al posto di u, $u+v$ al posto di v e $(u+v)-u$ al posto di $u+v$ otteniamo:

$$\text{mod}(-u) \,.\, \text{sen}(v, -u) = \text{mod}(u+v) \,.\, \text{sen}(u, u+v)$$

e quindi

$$\text{sen W} / \text{mod } w = \text{sen V} / \text{mod } v. \tag{2}$$

La (1) e la (2) dimostrano la tesi.

6. Dalla P. 9, § 3 si deduce:

$$\text{mod } w = \text{mod } u \,.\, \cos \text{V} + \text{mod } v \,.\, \cos \text{U}.$$

Relazione che lega i tre lati di un triangolo con i coseni di due angoli.

Nella precedente ponendo $-u$ al posto di u, $u+v$ al posto di v e $(u+v)-u$ al posto di $u+v$ si ha:

$$\text{mod } v = \text{mod } u \,.\, \cos \text{W} + \text{mod } w \,.\, \cos \text{U}.$$

Ed analogamente con sostituzioni convenienti:

$$\text{mod } u = \text{mod } w \,.\, \cos \text{V}.$$

7. Dalla P. 13, § 3 si deduce:

$$\text{mod}^2 w = \text{mod}^2 u + \text{mod}^2 v + 2 \,\text{mod } u \,.\, \text{mod } v \,.\, \cos \text{W}. \tag{1}$$

Relazione che lega i tre lati di un triangolo con un angolo.

In particolare se il triangolo è rettangolo, cioè se $\cos \text{W} = 0$ si ha:

$$\text{mod}^2 w = \text{mod}^2 u + \text{mod}^2 v$$

con procedimento analogo a quello seguìto nella P. precedente si possono ricavare altre due formule analoghe alla (1).

8. Le relazioni trovate relative al triangolo sono sufficienti a farcene dedurre molte altre ancora che per brevità omettiamo.

§ VII. — **Interpetrazione geometrica.**

1. Supponiamo a questo punto nota la rappresentazione geometrica dei numeri complessi, assumendo come asse principale il complesso u, che perciò sarà uguale ad 1. È chiaro che i complessi i cui affini cadono nella porzione di piano limitata dai raggi u ed iu appartengono (P. 20, § 3) al primo quadrante, e quelli i cui affini cadono nella porzione di piano limitata dai raggi iu, $-u$ appartengono al 2° quadrante e così via.

Se $v = x + iy$, sarà, essendo $u = 1$

$$\cos(u, v) = x / \text{mod}\, v \qquad \text{sen}(u, v) = y / \text{mod}\, v.$$

Cioè il cos di due complessi è uguale alla misura della proiezione del secondo complesso sul primo, divisa per il modulo del secondo.

2. Chiamando ang raggi (u, v), l'angolo definito geometricamente e determinato dai lati u, v è possibile porre

$$\text{ang}(u, v) = \text{ang raggi}(u, v),$$

essendo u e v due complessi i cui affini cadono sui raggi u e v uscenti dall'origine 0.

Invero:

$$\text{ang raggi}(u, v) = 0\,;$$

inoltre se

$$\text{ang raggi}(u, v) = \text{ang raggi}(u, v') \tag{1}$$

sarà

$$\text{ang}(u, v) = \text{ang}(u, v'). \tag{2}$$

Infatti dall'essere vera la (1) risulta che presi su u e v due punti A e B tali che OA ed OB sieno i moduli dei complessi u e v risulta la proiezione di OA su u divisa per la misura del segmento OA uguale alla proiezione di OB su u divisa per la misura di OB e quindi:

$$\cos(u, v) = \cos(u, v'). \tag{3}$$

Analogamente si deduce che

$$\text{sen}(u, v) = \text{sen}(u, v'). \tag{4}$$

Dalla (3) e dalla (4) si deduce la tesi.

Se è vera la (2) si dimostrerà facilmente che è vera la (1).

2·1. A questo punto possiamo concludere che tutte le formule relative agli angoli di coppie di complessi valgono per gli angoli definiti geometricamente.

3. Se A, B, C sono gli affini dei complessi u, v, w i tre complessi OA, OB, OC insieme agli angoli AOC, COB, BOx', [1] determinano il triangolo analitico u, v, w. Se ammettiamo il postulato di Euclide e consideriamo il triangolo geometrico OCB esso avrà i lati e gli angoli eguali a quelli del triangolo analitico ABC.

Quindi, per il triangolo così definito valgono tutte quante le proprietà enunciate nel § 6 e quelle altre che da esse potrebbero scaturire.

---

[1] x' è la direzione negativa dell'asse principale nella rappresentazione geometrica dei complessi.

C. BIANCA.

SULLE SUPERFICIE MODANATE

Si suole spesso affermare che la traiettoria di una goccia d'acqua (o di un punto materiale) che scorra senza attrito sopra una superficie topografica, è una linea di massima pendenza della superficie.

È facile convincersi che quest'affermazione non è esatta. Sopra una superficie topografica S le *linee idrodinamiche* — traiettorie di punti materiali soggetti alla sola gravità — sono generalmente distinte dalle linee di massima pendenza.

Dicasi infatti A un punto di S, a partire dal quale si abbandoni sulla superficie, senz'impulso, un granello materiale M. Togliendo dal peso di M la componente normale, la quale è equilibrata dalla reazione della superficie, resta sola attiva la componente tangenziale, che risulta normale alla linea di livello l_A per A. Onde nel primo istante, M si muove descrivendo un elemento della linea di massima pendenza uscente da A.

Ma quando M attraversa in B la linea di livello l_B infinitamente prossima ad l_A, la velocità acquistata da M — che ha la direzione della retta AB, tangente in A ad S — si compone colla velocità impressa ad M dall'azione della gravità in quell'istante. Quest'ultima velocità è diretta secondo l'elemento BC della linea di massima pendenza ABC... uscente da B; sicchè il granello M, a partire da B, generalmente deve deviare dalla linea di massima pendenza.

Perchè questa deviazione non si verifichi, occorre e basta che gli elementi AB, BC appartengano ad un medesimo piano verticale. Dunque:

Sopra una superficie topografica le linee idrodinamiche coincidono colle linee di massima pendenza, soltanto quando queste ultime stanno in piani verticali.

In pratica le *linee d'impluvio del terreno* sono però meno differenti dalle linee di massima pendenza, di quanto teoricamente non si preveda. (Intendo parlare, beninteso, dell'andamento generale di tali linee, prescindendo dalle deformazioni locali, inerenti alle diverse resistenze dei terreni.)

L'attrito, i fenomeni di adesione e di pressione, tendono infatti a diminuire in ogni istante la velocità che l'acqua conserva per inerzia. Viene così a ridursi notevolmente l'entità della causa da cui proviene la deviazione dalla linea di massima pendenza. Si aggiunga che a ricondurre il fenomeno verso le condizioni statiche, contribuisce forse anche il fatto che in un corso d'acqua perenne il moto è pressochè stazionario.

M'è capitato di riflettere su tale questioncella[1] preparando le mie lezioni di Geometria Descrittiva.[2] Ne ho tratto occasione per cercare un'esposizione semplice ed elementare delle proprietà delle superficie topografiche modanate, nelle quali appunto si cade quando linee idrodinamiche e di massima pendenza coincidono.

Ed ho creduto opportuno d'esporre ai giovani *alcune* di queste proprietà, perchè, se stimo utile che nel corso di Descrittiva si tenga d'occhio la pratica, [3] cercando che gli scolari apprezzino i mutui legami tra teoria e applicazione, credo anche utilissimo d'intercalare qua e là, quando se ne presenti il destro, nozioni intuitive di geometria infinitesimale. Mi par giovevole che questo genere d'intuizione si sviluppi nel futuro ingegnere.

Ho detto che *le superficie topografiche per cui le linee idrodinamiche e di massima pendenza coincidono, sono modanature.*

Com'è noto con tale denominazione (in francese *moulures*) MONGE indicava le *superficie che hanno le linee di curvatura di un sistema in piani paralleli tra loro.*

Nel caso che poc'anzi consideravo, di una superficie topografica S avente ogni linea l di massima pendenza sopra un piano verticale λ, la orizzontale tangente alla linea di livello, che passa per un punto P di l, è perpendicolare a λ, e quindi la normale ad S in P, giace in λ. Questo piano è perciò normale ad S in tutti i punti di l. Donde segue che la l è una linea di curvatura (le normali ad S ne' suoi punti formando un inviluppo piano) e che le linee di livello, traiettorie ortogonali delle diverse l, son esse pure linee di curvatura della superficie, la quale dunque, secondo la definizione di MONGE, viene ad esser modanata.

Ma proviamo, viceversa, che *se sopra una superficie le linee di curvatura di un sistema stanno in un fascio di piani paralleli, anche le linee di curvatura dell'altro sistema sono piane* (*e situate in piani dovunque normali alla superficie*).

Consideriamo infatti una superficie S soddisfacente all'ipotesi. Per brevità quei piani paralleli li chiameremo orizzontali, sicchè le linee di curvatura date si potranno chiamare linee di livello della S.

Le traiettorie ortogonali della data famiglia, cioè le linee di massima pendenza di S, costituiranno l'altro sistema di linee di curvatura. Indichiamo con l una di queste linee e con A, B due suoi punti successivi. Il piano verticale λ, normale alla superficie in A, passa

---

[1] Del resto l'osservazione non deve essere nuova: ho in mente d'averla già vista in qualche luogo.

[2] A Padova gli studi per gli allievi ingegneri sono stati da poco riformati in virtù della legge sul Magistrato alle acque. Il corso di Proiettiva rimane soltanto per gli studenti di matematiche pure e nel corso di Descrittiva s'intercalano colla massima economia quelle nozioni di Proiettiva che occorrono per lo sviluppo della Descrittiva.

[3] E non sarebbe male che i nostri corsi di Descrittiva fossero decisamente riformati in questo senso. Ci vuol però molta cura e discrezione, perchè non s'ha da eccedere nel verso opposto.

per B. Invero, ciò equivale ad affermare che la retta AB è una retta di massima pendenza del piano tangente alla S in A. D'altra parte le due normali alla S in A e B s'incontrano in un punto P, da che A e B son punti successivi d'una linea di curvatura. Ne deriva che il suddetto piano verticale λ, contiene la retta BP, cioè che è normale ad S anche in B.

Similmente dal fatto che λ è normale ad S in B, si deduce che è normale alla superficie nel punto C successivo a B sulla l; ecc. Si conclude pertanto che la l è situata tutta quanta sul piano verticale λ.

Dico di più che *ogni modanatura si genera mediante una curva piana (indeformabile) il cui piano rotoli, senza strisciare, attorno ad un cilindro verticale.* (1)

Poichè i piani delle linee di massima pendenza d'una superficie topografica modanata, inviluppano un cilindro verticale, basterà evidentemente dimostrare che queste linee sono tra di loro congruenti.

Imagino il piano orizzontale su cui si rappresenta la superficie S. Le linee di massima pendenza vengon rappresentate da rette dovunque normali alle proiezioni delle linee di livello, in tal guisa che queste linee risultano evolventi di una medesima curva γ (inviluppata da quelle rette). Ne deriva che due linee di livello successive, staccano sopra due tangenti a_1, b_1 di γ, segmenti (infinitesimi) uguali, cui corrispondono quindi sopra le curve a, b di massima pendenza, rappresentate da a_1, b_1, elementi eguali e di egual pendenza.

Mediante le coppie di linee di livello successive, le curve a, b risultano così riferite di tal guisa che gli elementi corrispondenti sono eguali ed equinclinati sul quadro: onde le curve stesse risultano congruenti.

Osservazione. — Dal fatto ora stabilito che gli elementi staccati sopra due linee di massima pendenza da due linee di livello successive, sono equinclinati sul quadro, tenendo presente che le inclinazioni di detti elementi non sono altro che le inclinazioni dei piani tangenti ad S, cui essi appartengono, segue che i *piani tangenti ad una superficie topografica modanata lungo una linea di livello, formano un angolo costante col quadro.* (2)

Com'è ben noto la definizione mongiana delle modanature è stata estesa, chiamando *superficie modanate tutte quelle che hanno le linee di curvatura d'un sistema situate in piani dovunque normali alla superficie.*

---

(1) Teorema dato analiticamente da Monge nella celebre *Application de l'Analyse à la Géométrie* (IV éd., Paris, 1809, p. 139 e più particolarmente p. 151). Cfr. pure per es. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale* (2a ed., Pisa, 1902, t. I, p. 176).

(2) Caso particolare di un noto teorema di Joachimsthal. Su questo teorema J. Bertrand (Journal de Liouville, (1), t. 13, 1848, p. 76) poggia una dimostrazione geometrica della genesi di una superficie topografica, che ha qualche analogia con quella esposta nel testo, pur essendone meno semplice.

È facile arrivare sinteticamente alla genesi cinematica di una tal superficie S. (1)

Indico con Γ lo spigolo di regresso della sviluppabile formata dai piani delle linee di curvatura considerate, e chiamo l_1, l_2 due di queste curve successive. Il piano di l_1 conterrà le tangenti successive, a, b di Γ e il piano di l_2 le tangenti successive b, c.

Considero la superficie di rotazione R, che ha per asse b e per linea meridiana l_1. Nei punti di l_1 le normali a R coincidono colle normali ad l_1 e quindi colle normali ad S. Onde in ogni punto di l_1 le S, R hanno lo stesso piano tangente; cioè *le due superficie si toccano lungo tutta la linea* l_1.

Ciò significa che la linea (meridiana) secondo cui R è segata dal piano bc, coincide colla sezione l_2 di S collo stesso piano. Ne segue che la rotazione infinitesima che porta il piano ab in bc, porta la curva l_1 in l_2, e si può quindi enunciare che:

Ogni superficie modanata (generale) si può concepir generata da una curva piana (indeformabile) il cui piano rotoli, senza strisciare, sopra una data sviluppabile.

Si noti che le linee di curvatura considerate sono anche geodetiche sulla S.

F. Severi.

UN TEOREMA

SUGLI ANGOLI CHE SI PROJETTANO ORTOGONALMENTE IN VERA GRANDEZZA

ED ALCUNE SUE CONSEGUENZE

Abbenchè non sembri a prima vista, può un angolo rettilineo eguagliare la sua projezione ortogonale su d'un piano obliquo al suo; giacchè mentr'è ovvio che, se un angolo gira attorno ad una retta del suo piano perpendicolare o parallela alla sua bisettrice, sarà la sua projezione sul piano iniziale rispettivamente massima o minima, è però, come or si mostrerà, non infrequente il caso, indicato dal Teorema che segue, ove sono uguali invece quella projezione e l'angolo obbiettivo dato.

Teorema. — *Se un angolo acuto qualsivoglia* (fig. 1) CAB *gira attorno ad una retta* CB *del suo piano, obliqua alla bisettrice ed ai lati e tale che la projezione ortogonale del vertice cada sul prolungamento*

(1) Per la dimostrazione analitica ved. per es. Bianchi, loc. cit., t. II, p. 264.

di CB, *mentre addipiù la projettante* A*a taglia la circonferenza* ABC [1] *in un secondo punto* A' *distinto da* A: *saranno allora eguali gli angoli* CAB *e quello* CA'B, *che può considerarsi come projezione ortogonale del primo sul suo piano iniziale in seguito ad una conveniente rotazione* [2] *attorno alla suddetta* CB.

Basta, infatti, osservare come quegli angoli sieno entrambi inscritti nello stesso segmento circolare C*m*B.

Ma quell'eguaglianza avverandosi, com'è chiaro, anche pei supplementi di quegli angoli, le conclusioni del Teorema si estendono del pari al caso di un angolo ottuso: qualora, beninteso, il suo conseguente (necessariamente acuto) si trovi nelle già indicate condizioni.

Or se dal centro O di quel cerchio ABC, si guida la parallela T_1OT alla CB, e da B la perpendicolare B*b*, sussisterà, com'è ovvio, per tutti gli angoli inscritti in quello stesso segmento C*m*B, l'eguaglianza con le loro projezioni, fino a che però il vertice A, mobile sull'arco *b*AT, non ne attinga o ne oltrepassi gli estremi *b* e T; essendo evidente come debba, per quelle due posizioni limiti ed oltre di esse, risultarne la corrispondente projezione di ampiezza differente di quella dell'angolo dato: ciò che non si verifica per tutte le posizioni intermedie, ove le projettanti del vertice tagliano invece gli archi *b*AT e TA'B in punti, due a due, simmetrici rispetto alla OT. Lo stesso avviene per quegli angoli, i cui lati, seguitando a passare per gli anzidetti punti B e C, hanno però i vertici contenuti nell'arco cT_1C simmetrico di *b*TB (rispetto alla *mn*), senza però attingerne od oltrepassarne gli estremi.

Ma qualora l'angolo A resti fisso nel suo piano, è ben facile determinare, affinchè si avveri l'eguaglianza con la sua projezione, quali debbano essere le posizioni limiti dell'asse di rotazione, rispetto ai suoi lati: posizioni che evidentemente si ottengono conducendo per B la perpendicolare BA'_1 al lato AB di quell'angolo, e da B la perpendicolare alla tangente in A del considerato cerchio. Mentre è poi ovvio che considerando la bisettrice A*n* dell'angolo A, la B_1C_1 simmetrica di BC rispetto ad essa, sarà un altro asse di rotazione, che riferito alla circonferenza AB_1C_1 (eguale com'è chiaro all'altra circonferenza ABC) consentirà di ottenere altre posizioni di quell'angolo, per le quali sussiste l'eguaglianza con le rispettive projezioni. Lo stesso avviene per la posizione che corrisponde al vertice A*, preso sulla parallela a B_1C_1 da A, e di quelle altre che sul cerchio suddetto analogamente se ne deducono.

Un importante ed immediato corollario consegue da quel Teorema sull'esistenza, cioè, in un diedro acuto qualsivoglia di determinate

---

(1) Intendo con quella dicitura, più laconica ed egualmente chiara, la circonferenza circoscritta a quel triangolo.

(2) Rotazione misurata, com'è chiaro, dall'angolo acuto in *a* del triangolo rettangolo che ha l'ipotenusa ed un cateto rispettivamente eguali ai segmenti A*a* ed *a*A'.

sezioni piane oblique al suo spigolo che risultano eguali alla sua sezione retta. Infatti, considerando (fig. 2) il tetraedro AA'BC, ove lo spigolo AA' è perpendicolare alla faccia A'BC, e questa è tale inoltre che l'altezza pel vertice A' cada sul prolungamento del lato opposto BC in a per es.: se la distanza tra il punto A ed il piano CA'B è quanto (V. fig. 1) il cateto (A) A' del triangolo rettangolo (A) A'a, nel quale gli altri due lati sono rispettivamente quanto le altezze Aa ed A'a dei triangoli ABC e A'BC, ne viene, pel Teorema già citato, l'eguaglianza degli angoli CAB e CA'B; epperò la sezione obliqua CAB del diedro AA' ne dà parimenti la vera grandezza, giacchè uguale alla sua sezione retta CA'B. Un'altra sezione eguale ad essa si ha, com'è chiaro, considerando il piano per BC e pel punto di quello spigolo simmetrico di A rispetto ad A'.

Si noti, infine, che le considerazioni precedenti sul caso dell'angolo ottuso, vanno similmente ripetute per ciò che riguarda le sezioni oblique di un diedro ottuso.

Riferendosi infatti al suo supplemento, necessariamente acuto, è sempre possibile, com'è chiaro, in seguito ad una conveniente scelta della trasversale ai lati della sua sezione retta, di fissare due punti sullo spigolo, in modo che i piani che essi rispettivamente determinano con quella trasversale, diano due sezioni oblique eguali alla sezione retta.

Ne viene quindi che un diedro qualsivoglia, ottuso od acuto che sia, ammette sempre due, e due soltanto, sezioni oblique per certi punti dello spigolo (come avanti determinati) simmetriche rispetto alla sua sezione retta e ad essa eguali.

Ma ecco infine l'applicazione di quel Teorema ad un notevole caso particolare, che consente di semplificare la proiezione ortogonale del dodecaedro regolare convesso, sul piano di una sua faccia, e ne giustifica addipiù un'assai semplice costruzione dell'angolo diedro.

Basta considerare all'uopo (fig. 3) il pentagono regolare OABCD, le sue diagonali, il suo centro ed il cerchio ad esso circoscritto, non che i due assi di simmetria OO'o, DR di quella figura, la trasversale (O)O' parallela a CB, le intersezioni R, R_1 di coppie di lati non consecutivi e le congiungenti infine con essi dell'anzidetto centro O'; giacchè sarà ovvio allora che l'altro pentagono, non regolare, O'A'BCD' possa intendersi come la projezione ortogonale del primo sulla posizione iniziale del suo piano dopo che ha girato dell'angolo α attorno al lato CB. Ed è ben facile inoltre assicurarsi che degli angoli COB ed OAC, aventi il primo la bisettrice perpendicolare e il secondo parallela alla CB, ne saranno le proiezioni CO'B ed O'A'C ordinatamente il doppio e la metà; mentre sarà eguale ad esso la proiezione CA'B dell'altro angolo CAB, il quale trovasi nelle già indicate condizioni rispetto all'asse di rotazione.

Completando, infine, com'è indicato nella tavola, quella figura, facendo cioè sul prolungamento di $OO'n$ il segmento $no = n\mathrm{B}$, ovvero $io = iO'$, o determinando altrimenti quel punto o come intersezione dei lati A'B e D'C del decagono regolare convesso $\mathrm{AA'B}n\ldots$ e descrivendo poscia la circonferenza $O'o$ concentrica alla prima, le sue intersezioni b e d, per es., rispettivamente coi raggi O'B ed O'C, ovvero coi lati opposti AA' e DD' di quel decagono, saranno i vertici di un altro decagono regolare concentrico al primo, e sarà pertanto evidente:

a) L'eguaglianza e la simmetria, rispetto a BC, delle due figure O'A'BCD' e CB*bod*.

b) La regolarità del pentagono convesso O'A'*bo*C, i cui lati e le cui diagonali, quella esclusa che è parallela ad *ob*, tagliano la circonferenza $O'o$ nei vertici del decagono più innanzi mentovato; (1) mentre dal rombo inoltre O'A'*bn* contenuto in quel pentagono, si ha

$\mathrm{A}'a = \frac{1}{2}\, O'n$; *la proiezione cioè di un lato qualsivoglia del decagono regolare convesso sul consecutivo, è quanto la metà del raggio.* (2)

c) Consegue inoltre da quelle costruzioni che il punto n divide in sezione aurea il raggio $O'o$, e che quindi i lati del decagono e del pentagono regolare convessi inscritti nel cerchio maggiore sono rispettivamente quanto il raggio e la diagonale del pentagono inscritto nel cerchio minore. (3)

d) D'onde, com'è facile accorgersi, un metodo semplice e diretto per determinare la proiezione ortogonale del dodecaedro sul piano di una sua faccia, preferibile al risaputo che si fonda sul *preventivo* sviluppo del solido: *sviluppo che è del tutto superfluo per raggiunger quello scopo, essendo sufficiente il disegno di una sola faccia.*

e) Ed è, infine, agevole assicurarsi che l'angolo di rotazione $(O)iO' = \alpha$, di cui avanti, ottenuto come indica il disegno, misura il supplemento del diedro di quel solido. La sua determinazione è peraltro assai facile, se si osserva che nel triangolo rettangolo $(O)O'i$ un cateto è doppio dell'altro, e che quindi il suo vertice (O) cade sulla circonferenza $O'o$ (essendo, infatti nel pentagono regolare convesso l'apotema

$$O'i = \frac{r}{4}(1+\sqrt{5}) \qquad \text{ed} \qquad Oi = (O)\,i = \frac{r}{4}(5+\sqrt{5}),$$

---

(1) Proprietà già altrove enunciata (v. *Un'altra costruzione per la divisione aurea di un segmento* pubblicata nel fasc. III del "Periodico di Matematica„ Livorno, 1908).

(2) Lo stesso risultato (indicando con r il raggio di quel cerchio) si ha dalla $\mathrm{A}'b = \mathrm{A'B}\cos \mathrm{BA}'a$, ponendovi $\mathrm{A'B} = \frac{r}{2}(-1+\sqrt{5})$ e $\cos \mathrm{BA}'a = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; essendo quell'angolo, com'è ovvio, di 36°.

(3) Ed ancora: se i raggi $O'n$ ed $O'o$ di due cerchi concentrici stanno nel rapporto ecc. i lati del triangolo equilatero 123 e del decagono regolare stellato inscritti nel cerchio maggiore tagliano rispettivamente il minore secondo i lati del pentagono e del decagono regolare semplici in esso inscritti (è infatti la 32 perpendicolare al punto di mezzo del raggio $O'o$ ecc.).

sarà, pel Teorema pitagorico, $(O)O' = \frac{r}{2}(1 + \sqrt{5})$ ossia il doppio c. d. d. di $O'i$). Lo stesso risultato, com'è ovvio, si ottiene considerando invece l'altro triangolo rettangolo $(A)A'a$, simile al precedente; giacchè essendo, come già si vide, $A'a = \frac{r}{2}$ ed $a(A) = aA = \frac{r}{2}\sqrt{5}$, ne viene parimenti $(A)A' = r$ ecc.

F. P. Paternò.

UNA OSSERVAZIONE SUL PRINCIPIO DI GAUSS

Il professore Schiaparelli, in una Memoria pubblicata nei *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo* (vol. XL, pag. 752), tornando sopra un argomento già trattato negli stessi *Rendiconti* nell'anno 1868, propone una giustificazione del " principio della media aritmetica ", di cui si fa uso nel calcolo dei risultati di osservazione, giustificazione, la quale è dedotta da alcuni postulati applicabili nel loro complesso ai dati acquisiti mediante esperienze.

In questa mia breve Nota mi propongo di dare una giustificazione intuitiva del principio di Gauss, ponendo a base del mio ragionamento un solo postulato, che, in veste simile compare anche nella citata memoria dello Schiaparelli, e sfruttando quindi, per mezzo di semplici considerazioni geometriche, il concetto di spazio euclideo.

1. Se una grandezza viene ripetutamente misurata, in modo che le varie misure ottenute abbiano lo stesso grado di esattezza, o, come si suol dire, abbiano lo stesso *peso*, si presenta sempre, a esperienze eseguite, il problema di costruire con quelle misure un numero, che rappresenti il valore *vero* della grandezza.

Noi supporremo nel seguito che le misure ottenute direttamente dall'esperienza non sieno affette da errori sistematici di osservazione, o, più in generale, che quelle misure sieno state liberate da tali errori prima di farle servire per il calcolo del valore vero che si cerca.

2. Supponiamo che, allo scopo di misurare una grandezza, si faccia un certo numero di misure di essa, cercando di raggiungere per ciascuna il massimo grado di esattezza consentito dagl' istrumenti che si adoperano. [1]

---

[1] Per es., se per misurare un certo angolo disponiamo di uno strumento che possa dare il valore dell'angolo a meno di un minuto primo, cercheremo di leggere con la massima accuratezza i gradi ed i primi dell'angolo e non ci limiteremo a tener conto dei soli gradi.

Se accade di ottenere sempre lo stesso valore per la misura che si cerca, noi siamo indotti a concludere, che ogni misurazione ha fornito il valore vero della grandezza.

Naturalmente, con tanta maggior sicurezza potremo asserire ciò, quanto maggiore sarà stato il numero delle misure fatte e quanto più accurata la loro determinazione.

Possiamo quindi ammettere, come un postulato, che:

Se i risultati di un numero sufficientemente grande di misure di una grandezza si accordano in un unico valore, questo valore è la vera misura della grandezza.

3. Consideriamo ora uno spazio euclideo S_n a n dimensioni, riferiamone i punti a una ennupla di assi mutuamente perpendicolari con l'origine in un punto O (per fissare le idee, si consideri lo spaziò ordinario a tre dimensioni), e indichiamo genericamente con

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

un punto di questo spazio.

Fatte ora n misurazioni di ugual peso $x_1, x_2, \ldots, x_n$ di una grandezza Ξ, consideriamo tutti i punti P_r dello spazio S_n, i quali hanno per coordinate gli n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pensati ordinati in tutti i modi possibili.

Questi punti saranno tanti quante le permutazioni che si possono fare con gli n numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e cioè $\underline{|n}$, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono tutti distinti, $\frac{\underline{|n}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\ldots}$, se α di essi sono uguali fra loro e distinti dai rimanenti, altri β sono pure uguali fra loro e distinti dagli altri, e così via. In particolare se $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, e indichiamo con x il valore comune di queste misure, i punti P_r coincideranno in uno solo X di coordinate

$$x_1 = x, \ x_2 = x, \ldots, \ x_n = x,$$

situato sulla retta r di equazioni

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n, \qquad (r)$$

($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ essendo coordinate correnti di S_n).

Poichè in tal caso il comune valore delle coordinate del punto X è, per il postulato ammesso, il vero valore della grandezza misurata Ξ, così diremo che il punto X è l'*indice* della grandezza in questione.

Possiamo dunque dire che:

La retta $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n$ di S_n è il luogo degl'indici delle infinite grandezze che si misurano, convenendo, ben inteso, che per ciascuna di esse vengano fatte n *misurazioni, e che, ripetiamolo, le misure che si considerano sieno prive di errori sistematici.*

4. Nell'ipotesi, invece, che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non sieno tutti uguali fra loro, i punti P_r, di cui s'è più sopra parlato, si dispongono nello spazio S_n, in una notevole configurazione, di cui è facile scoprire le proprietà.

1°. Tali punti si trovano tutti sopra il piano π di equazione

$$\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = 0, \qquad (\pi)$$

il quale piano, com'è noto, è normale alla retta r.

Infatti, sia $P_r(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n})$ uno generico dei punti costruiti ($r_1, r_2, \ldots, r_n$ essendo una permutazione qualsiasi degl'indici 1, 2, $\ldots, n$). Poichè $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{r_1} + x_{r_2} + \ldots + x_{r_n}$, quando nell'equazione di π si sostituiscano $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ rispettivamente con $x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n}$, l'equazione rimane soddisfatta.

2°. I punti P_r sono ugualmente distanti dalla retta r.

Infatti la distanza di un punto $P_r(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots, x_{r_n})$ dalla retta r è data dalla distanza fra P_r ed il punto P d'intersezione del piano π con r.

Ora questo punto ha le sue n coordinate uguali a

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n},$$

quindi avremo, trattandosi di uno spazio euclideo:

$$PP_r = \sqrt{\sum_1^n{}_i \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - x_{r_i}\right)^2}. \qquad (1)$$

Poichè il radicando è una funzione simmetrica delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comunque esse si permutino fra loro (cioè qualunque punto si scelga fra i P_r), il valore del secondo membro non varia.

3°. La distanza dei punti P_r da r decresce al crescere del grado di approssimazione delle misure fatte.

Infatti la (1) si può scrivere:

$$PP_r = \frac{1}{n}\sqrt{\left\{\sum_1^n{}_i [(x_1 - x_{r_i}) + (x_2 - x_{r_i}) + \ldots + (x_{r_i-1} - x_{r_i}) + (x_{r_i+1} - x_{r_i}) + \ldots + (x_n - x_{r_i})]^2\right\}},$$

e quindi, sostituendo alle differenze i loro valori assoluti:

$$PP_r < \frac{1}{n}\sqrt{\left\{\sum_1^n{}_i [|x_1 - x_{r_i}| + |x_2 - x_{r_i}| + \ldots + |x_{r_i-1} - x_{r_i}| + |x_{r_i+1} - x_{r_i}| + \ldots + |x_n - x_{r_i}|]^2\right\}}.$$

Se indichiamo con ε il valore assoluto della massima differenza fra due delle misure fatte, possiamo, a più forte ragione, dedurre, dalla precedente disuguaglianza, la seguente

$$PP_r < \frac{1}{n}\sqrt{n\{(n-1)\varepsilon\}^2}, \qquad \text{ossia:} \qquad PP_r < \frac{n-1}{\sqrt{n}}\varepsilon.$$

E poichè il grado di approssimazione delle misure è, in conseguenza del postulato ammesso, tanto più grande quanto più piccolo è ε, il nostro asserto risulta provato.

5. Poichè dunque dalla discussione precedente risulta che i punti P_r si addensano all'intorno della retta r, e poichè sappiamo che l'indice della grandezza misurata si deve trovare su r la nostra *intuizione geometrica* ci suggerisce che il punto richiesto sarà quello della retta r che è più prossimo ai punti P_r e cioè il punto P d'intersezione di r col piano π, punto che, abbiamo già visto, ha tutte le coordinate eguali al numero

$$\xi = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Possiamo quindi ritenere che:

Il vero valore di una grandezza misurata è la media aritmetica calcolata su misure di ugual peso, prive di errori sistematici.

È quasi superfluo avvertire che, se tali errori esistessero nelle quantità $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siccome essi agiscono tutti in uno stesso senso sopra queste misure, si ritroverebbero anche nel numero ξ. Da ciò l'esclusione fatta a priori di errori di questa specie.

G. Bisconcini.

ALCUNE CONSIDERAZIONI DI CALCOLO

utili per le applicazioni alle Scienze sperimentali

I. Sia data la funzione di due variabili

$$z = z(xy), \tag{1}$$

alla quale corrisponde in generale una superficie S.

Se insieme con la (1) noi consideriamo la

$$y = a, \tag{2}$$

alla quale corrisponde il piano parallelo al piano xz, condotto per il punto dell'asse y situato alla distanza a dall'origine, il sistema delle (1) e (2) rappresenta una curva C giacente sulla superficie (1). Questa curva nel piano $y = a$ ha l'equazione

$$z = z(x, a). \tag{3}$$

Se allora consideriamo l'equazione

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=a} = 0, \tag{4}$$

questa servirà ad individuarci sopra la curva (3) gli eventuali punti di massimo e di minimo.

Ma se noi facciamo variare il parametro a avremo una serie di curve situate in piani paralleli, sopra ciascuna delle quali la corrispondente equazione (4) determinerà i punti di massimo e di minimo, se esistono.

Ciascuno di questi punti col muoversi con continuità della curva C descriverà nello spazio una curva, e di queste curve ne avremo tante quanti saranno i punti di massimo e di minimo. Potremo indicare con $L_1, L_2 \ldots L_n$ le prime, con $l_1, l_2 \ldots l_n$ le seconde e *chiamarle rispettivamente curve dei massimi e dei minimi relativi alla variabile x.*

Ora evidentemente il complesso di queste curve L ed l corrisponde al sistema di equazioni

$$\begin{cases} z = z(xy) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

nel quale la seconda, quando si lasci y libera di variare, rappresenta una superficie cilindrica con le generatrici parallele all'asse z. Le curve suddette sono perciò determinate dall'intersezione delle due superficie di equazioni:

$$z = z(xy) \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Per trovare poi il criterio atto a distinguere le curve dei massimi da quelle dei minimi basterà ricordare che sopra ogni curva

$$z = z(x, a)$$

i punti di massimo e di minimo, se esistono, corrispondono rispettivamente ai valori di x che soddisfano alle diseguaglianze

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=a} < 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{y=a} > 0,$$

e perciò lungo ogni curva L dovrà essere soddisfatta la prima diseguaglianza e lungo ogni curva l la seconda, qualunque sia y.

Combinando pertanto le due relazioni

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \lesseqgtr 0$$

si avrà il criterio cercato.

In modo analogo a quello che si tiene per lo studio dei massimi e dei minimi delle funzioni di una variabile si potrà sostituire alla diseguaglianza

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \lesseqgtr 0 \qquad \text{l'altra} \qquad \frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}} \lesseqgtr 0,$$

se appunto la derivata di ordine $2n$ sarà la prima che non si annulla in quei punti nei quali si annulla la derivata prima.

2. L'argomento svolto precedentemente presenta un particolare interesse fra gli altri nel caso delle superficie rigate che hanno le generatrici parallele ad un medesimo piano.

Supponiamo infatti che una superficie rigata, riferita ad un sistema di assi xyz, abbia per direttrice una curva C sul piano xz, la quale sia rappresentata dall'equazione

$$z = \varphi(x) \tag{6}$$

ed abbia le generatrici parallele al piano yz. Tale superficie sarà rappresentata manifestamente da una equazione della forma

$$z = f(x)\, y + \varphi(x), \tag{7}$$

dove $f(x)$ indica un'altra funzione determinata di x. La equazione (7) combinata con l'altra $x = x_0$ determinerà una delle generatrici ed al variare di x con continuità si avranno tutte le successive generatrici della superficie rigata gobba in studio.

Se ora, oltre ad una generatrice corrispondente al valore x, consideriamo la infinitamente vicina corrispondente ad $x + dx$ potremo rappresentarla con la equazione

$$z = f(x + dx)\, y + \varphi(x + dx).$$

Ma se noi ricordiamo che tutte le generatrici sono parallele al piano yz e immaginiamo di condurre per le due rette considerate i piani perpendicolari al piano coordinato yz, questi si incontreranno manifestamente secondo la perpendicolare comune alle due rette, la quale sarà perpendicolare anche al piano yz. Allora i piedi della minima distanza delle due rette sulle rette medesime avranno uguali le coordinate y, z; e queste coordinate saranno anche quelle del punto d'incontro della intersezione dei due piani suddetti col piano yz.

In particolare la coordinata y sarà perciò espressa da

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & \varphi(x) \\ 1 & \varphi(x + dx) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & f(x + dx) \end{vmatrix}} = -\frac{\varphi(x + dx) - \varphi(x)}{f(x + dx) - f(x)}.$$

Al limite quindi, quando la seconda generatrice si avvicina indefinitamente alla prima, sarà

$$y = -\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}.$$

Lasciando variare la coordinata x, la equazione

$$f'(x)\, y + \varphi'(x) = 0,$$

combinata con l'altra

$$z = f(x)\, y + \varphi(x),$$

servirà ad individuare le coordinate (x, y, z) dei piedi delle minime distanze di ogni generatrice dalla infinitamente vicina.

Ma d'altra parte

$$f'(x)\,y + \varphi'(x) = \frac{\partial z}{\partial x},$$

dunque il luogo dei piedi di dette perpendicolari è rappresentato dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} z = z(xy) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

che è il sistema (5) del § **1**.

Ora nella teoria delle superficie rigate gobbe il luogo suddetto dei piedi delle perpendicolari comuni a due generatrici contigue è la *linea di stringimento* (Vedi BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, Spörri, Pisa, 1894, cap. VIII, §§ 114 e 115); dunque nel caso di tali superficie, il *sistema di equazioni* (5) *rappresenta* **la linea di stringimento** ed anche: **la linea di stringimento** *delle superficie rigate del tipo* (7) *è la curva dei massimi o dei minimi* **relativi alla variabile** x.

Per distinguere poi caso per caso se essa è la curva dei massimi o quella dei minimi servirà il criterio stabilito nel § 1.

Se dunque sarà

$$f'(x)\,y + \varphi'(x) = 0$$

e contemporaneamente

$$f''(x)\,y + \varphi''(x) < 0,$$

si tratterà della curva dei massimi; mentre invece, se sarà

$$f'(x)\,y + \varphi'(x) = 0$$

e contemporaneamente

$$f''(x)\,y + \varphi''(x) > 0,$$

si tratterà della curva dei minimi.

Alla derivata seconda si dovrà sostituire quella di ordine $2n$, se questa sarà la prima che non si annullerà.

Sostituendo in ciascheduna delle due diseguaglianze scritte sopra alla y il valore che se ne ricava dalla equazione

$$f'(x)\,y + \varphi'(x) = 0$$

si ha rispettivamente

$$f'(x)\,\varphi''(x) - f''(x)\,\varphi'(x) < 0$$

per il massimo, e

$$f'(x)\,\varphi''(x) - f''(x)\,\varphi'(x) > 0$$

per il minimo.

3. La teoria delle curve inviluppo permette di considerare anche sotto un altro punto di vista il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} z = z(xy) \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Se infatti interpretiamo la prima delle due equazioni nel piano yz, e consideriamo quindi le y e z come le coordinate correnti e la x come un parametro, essa rappresenta una famiglia di curve.

Ora è noto che l'equazione della loro curva inviluppo, se questa esiste, si ottiene eliminando la x fra le equazioni suddette.

Geometricamente la corrispondenza fra le figure nello spazio e quelle nel piano è manifesto essere la seguente.

Ognuna delle curve C' del piano yz, corrispondente ad un valore particolare x_0 di x, è la proiezione ortogonale sul piano stesso della corrispondente curva C dello spazio, ottenuta intersecando la superficie di equazione

$$z = z\,(xy)$$

col piano $x = x_0$. Se ora

$$z = \psi\,(y)$$

è l'equazione che si ottiene dal sistema (5) per mezzo della eliminazione di x, ad essa corrisponderà sul piano yz una curva I' che sarà la proiezione ortogonale sul detto piano della curva I dello spazio rappresentata dal sistema di equazioni (5).

Quando pertanto le curve C' hanno un inviluppo, questo ha per equazione appunto

$$z = \psi\,(y);$$

dunque la curva I', proiezione sul piano yz della curva I, è l'inviluppo delle curve C', proiezioni sul piano yz delle curve C.

Nel caso delle superficie rigate gobbe, quale quello considerato nel precedente § 2, le proiezioni delle generatrici sul piano yz ammettono un inviluppo, eccetto quando una delle funzioni $f\,(x)$ o $\varphi\,(x)$ sia eguale ad una costante; in tal caso dunque *la curva inviluppo di tali proiezioni è la proiezione sul piano yz della linea di stringimento della superficie gobba considerata.*

Sul piano xy invece la proiezione della curva I dello spazio, individuata dal sistema (5), è evidentemente rappresentata dalla equazione:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

interpretata sul piano stesso (cioè combinata con l'altra $z = 0$); e, nel caso delle suindicate superficie rigate gobbe in particolare, è rappresentata dall'equazione

$$f'\,(x)\,y + \varphi'(x) = 0, \tag{8}$$

o, in altre parole, *la* (8) *è l'equazione della proiezione sul piano xy* **della linea di stringimento.**

4. Si può mettere in relazione quanto precede anche con un problema di *Calcolo delle variazioni.*

Si abbia infatti una funzione $z = z(xy)$ della variabile indipendente x e della funzione incognita $y = y(x)$, e si voglia determinare tale funzione in modo da rendere minimo o massimo l'integrale definito:

$$I = \int_{x_0}^{x_1} z(xy)\, dx. \tag{9}$$

In tal caso, come è noto, la funzione y deve essere determinata in modo da soddisfare alla equazione

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

E l'integrale sarà rispettivamente massimo o minimo secondo che sarà soddisfatta una delle due diseguaglianze

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0 \qquad \text{ovvero} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0.$$

Ora ciò che è stato esposto nei paragrafi precedenti ci permette di dare una interpretazione geometrica della questione, facile ad intendersi. Infatti la equazione

$$z = z(xy)$$

individua nello spazio una superficie riferita ai tre assi xyz; quando ad essa si accoppi una determinata equazione

$$y = y(x) \tag{10}$$

la quale nello spazio corrisponde ad un cilindro, con la *direttrice* sul piano xy rappresentata dalla stessa equazione (10), e con le generatrici parallele all'asse z, si verrà a fissare sopra la detta superficie una curva C. Volere che la equazione $y = y(x)$ sia tale che diventi un massimo o un minimo l'integrale (9) corrisponde manifestamente a volere che la curva C sia tale da avere sopra il piano xz una proiezione C' la quale racchiuda, con le ordinate corrispondenti ad $x = x_0$ e ad $x = x_1$ e con l'asse delle ascisse un'area massima o minima. D'altra parte la condizione

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

necessaria perchè questo avvenga, ci dà la cercata equazione

$$y = y(x).$$

Possiamo dire dunque che cercare la forma della funzione y necessaria perchè un integrale definito

$$I = \int_{x_0}^{x_1} z(xy)\, dx$$

sia massimo o minimo corrisponde a cercare sulla superficie di equazione

$$z = z(xy)$$

le curve dei massimi e dei minimi relativi alla coordinata y.

Ed anche che:

Le curve dei massimi e dei minimi relativi alla variabile y giacenti sopra una superficie hanno tali proiezioni sopra il piano xz da racchiudere fra due ordinate determinate l'area massima o minima rispetto a quelle che sarebbero racchiuse dalle proiezioni di tutte le altre possibili curve giacenti sulla superficie.

Quanto qui si è detto per la variabile y vale naturalmente anche per la variabile x, nel senso che allora y dovrebbe considerarsi come variabile indipendente, x come funzione incognita, e la proiezione dovrebbe farsi sopra il piano yz.

E, sempre nel caso delle superficie rigate prese in esame precedentemente, potrà dirsi anche che: la proiezione della linea di stringimento di una superficie rigata gobba sul piano yz è una curva tale da racchiudere fra le ordinate corrispondenti a due dati valori di y l'area massima o minima in confronto di tutte quelle che sarebbero racchiuse dalle proiezioni delle altre possibili curve giacenti sulla superficie.

A. Bartorelli.

SULL'OMOGENEITÀ DELLE FORMOLE DELLA FISICA

Nello studio elementare della fisica si accenna appena ai sistemi di misura ed alle dimensioni delle grandezze, che via via s'introducono, e le nozioni relative, la cui importanza appare tosto che si approfondisca lo studio della materia, riescono sterili ai discenti.

È noto ancora che, fra le formole che traducono le leggi principali della fisica elementare, poche si prestano, con i consueti mezzi didattici, ad una verificazione sperimentale sufficientemente approssimata, e che s'insegnano molte formole riassumenti leggi che non vengono in alcun modo dimostrate. Ad esempio: la dimostrazione della formola riguardante la forza centrifuga non sempre si fa dipendere dalle nozioni sul moto oscillatorio semplice, e invece si riconduce spesso a verifiche sperimentali ben grossolane; la nota formola di *Newton* per la velocità di propagazione del suono negli aeriformi viene insegnata senza neppure il conforto d'un qualunque esperimento.

Ora a me sembra che, con metodo uniforme, là dove non sia possibile didatticamente dimostrare con rigore sperimentale o teorico la formola che compendia la legge da insegnare e riguarda la dipendenza di una grandezza da altre, sia conveniente stabilire, ricorrendo all'intuizione o ad una esperienza soltanto *qualitativa*, quali siano le grandezze da cui la prima dipende, e poi dettare la formola, facendone constatare l'*omogeneità*. La condizione di omogeneità assicura infatti l'*unicità* della formola che può esprimere il legame incognito delle grandezze considerate, prescindendo da un coefficiente numerico dipendente dal sistema di misura che si sceglie.

Siano $x_1, x_2, \ldots x_n$ *variabili in un certo campo* C, e $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ *parametri tali che i prodotti* $x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots, x_n\mu_n$ *appartengano ancora a* C. *Se si ha*

$$f(x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots x_n\mu_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, \varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n),$$

ove φ *è una funzione nota dei parametri* μ *(che non si annulla mai, nè diventa infinita), la funzione* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ *è individuata, a meno di un fattore costante.*

Infatti, se insieme all'uguaglianza precedente si ha la seguente:

$$F(x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots x_n\mu_n) = F(x_1, x_2, \ldots x_n) \,.\, \varphi(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n),$$

si trae

$$\frac{F(x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots x_n\mu_n)}{f(x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots x_n\mu_n)} = \frac{F(x_1, x_2, \ldots x_n)}{f(x_1, x_2, \ldots x_n)},$$

e, potendosi riguardare $x_1\mu_1, x_2\mu_2, \ldots x_n\mu_n$ come una ennupla qualunque di valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$, risulta la proporzionalità fra F e f, cioè si ha

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = kf(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

ove k è una costante.

Si ricordi ora che nel sistema di misure assolute le unità fondamentali sono quelle di lunghezza, di massa e di tempo. Se L, M, T sono rispettivamente la lunghezza, la massa e il tempo che si prendono come unità di misura, una grandezza fisica qualunque si può porre sotto la forma $G = L^\alpha M^\beta T^\gamma$, α, β, γ si dicono le *dimensioni* di G.

Se poi si passa dalle unità L, M, T, a delle nuove unità, rispetto alle quali le unità precedenti abbiano rispettivamente i rapporti λ, μ, τ, la stessa grandezza è misurata dal numero G', legato a G della relazione

$$G' = G\lambda^\alpha\mu^\beta\tau^\gamma. \text{ [1]} \qquad (1)$$

[1] Per gli esempi che mostrerò, basterà ricordare che per la velocità, l'accelerazione, la forza, il lavoro (e quindi anche la quantità di calore) si ha rispettivamente: $v' = v\lambda\tau^{-1}$, $a' = a\lambda\tau^{-2}$, $F' = F\lambda\mu\tau^{-2}$, $q' = q\lambda^2\mu\tau^{-2}$. Per la densità è $d' = d\mu\lambda^{-3}$ e per l'elasticità d'un gas (rapporto fra una pressione ed una superficie) è $e' = e\mu\lambda^{-1}\tau^{-2}$. Finalmente (nel sistema assoluto di *Gauss*) per la resistenza di un conduttore e per l'intensità d'una corrente si ha rispettivamente: $r' = r\lambda^{-1}\tau$, $i' = i\lambda^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\tau^{-2}$.

Una formola di fisica, esprimendo una legge indipendente, come è ovvio, dalle unità scelte per misurare le grandezze a cui si riferisce, deve essere invariante rispetto ad un qualunque cambiamento di unità, cioè non deve mutare di forma quando per ciascuna delle grandezze che essa contiene si faccia la sostituzione indicata dalla (1), ove α, β, γ sono le dimensioni della grandezza stessa.

Nella scuola si riscontrerà ciò immediatamente sulla nota formola che dà la durata di oscillazione d'un pendolo semplice:

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

La formola rimane inalterata se, passando da una ad altra terna di unità di lunghezza, massa e tempo, si sostituiscono rispettivamente a l, g e t

$$l' = l\lambda, \qquad g' = g\lambda\tau^{-2}, \qquad t' = t\tau.\ (^1)$$

In ciò consiste appunto l'omogeneità delle formole da cui prendemmo le mosse.

Reciprocamente, supponiamo invece di sapere soltanto che la durata d'oscillazione d'un pendolo semplice dipende dalla lunghezza del pendolo e dall'accelerazione della gravità (e ciò viene suggerito dall'intuizione e da facili esperienze qualitative) senza conoscere però la legge che lega la durata alle grandezze dipendenti.

Potremo porre

$$t = f(l, g).$$

Per la condizione d'omogeneità dovrà essere

$$f(l\lambda, g\lambda\tau^{-2}) = f(l, g)\,.\,\tau.$$

Si riconosce subito che a questa relazione soddisfa la funzione $\sqrt{\frac{l}{g}}$, quindi, per la proposizione esposta in principio, la funzione più generale sarà

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Risulterà così dimostrata in certo modo, *a posteriori*, la formola del pendolo.

Così, se si ammette (e può bastare per ciò la verifica più grossolana con le solite esperienze) che la forza centrifuga F dipenda solo dalla massa m del corpo ruotante, dalla sua velocità v e dal raggio r della sua traiettoria, si potrà porre

$$\mathrm{F} = f(m, v, r),$$

e, dovendo essere (¹)

$$f(m\mu, v\lambda\tau^{-1}, r\lambda) = f(m, v, r)\,.\,\lambda\mu\tau^{-2},$$

(¹) Per le sostituzioni che si applicano qui e negli altri esempi si veda la nota a pag. 229.

si riconoscerà che la funzione $\frac{mv^2}{r}$ soddisfa a questa relazione, per modo che si potrà porre

$$F = k\frac{mv^2}{r}.$$

Nello stesso modo, se si ammette (ed anche qui soccorre semplicemente l'intuizione) che la velocità v di propagazione del suono dipenda solo dalla elasticità e del mezzo e dalla sua densità d, posto

$$v = f(e, d),$$

dovendo poi essere, [1]

$$f(e\mu\lambda^{-1}\tau^{-2}, d\mu\lambda^{-3}) = f(e, d)\,\lambda\tau^{-1}$$

e soddisfacendosi a questa con la espressione $\sqrt{\frac{e}{d}}$, si assumerà senz'altro la formola di *Newton*

$$v = k\sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Per la velocità d'efflusso d'un liquido da un vaso si potrà dettare la formola di *Torricelli*

$$v = k\sqrt{2gh},$$

con l'osservazione assai semplice che la velocità d'efflusso dipende solo dall'altezza h della superficie libera del liquido sul foro d'uscita e dalla accelerazione g della gravità, e notando che per la funzione incognita la condizione d'omogeneità è espressa dall'uguaglianza

$$f(h\lambda, g\lambda\tau^{-2}) = f(g, h)\,\lambda\tau^{-1}, \text{ [1]}$$

alla quale soddisfa la funzione rappresentata dalla formola ricordata.

E finalmente, per non continuar molto la serie degli esempi, allontanandoci dalla meccanica, potremo giustificare la formola notevole che esprime la legge di *Joule*, riguardante gli effetti termici della corrente elettrica, mostrando con esperienze semplici che la quantità di calore q prodotta in un conduttore attraversato dalla corrente dipende dall'intensità i di questa, dalla resistenza del conduttore r e dalla durata t del fenomeno.

La funzione incognita $q = f(i, r, t)$ deve soddisfare alla

$$f(i\lambda^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\tau^{-2}, r\lambda^{-1}\tau, t\tau) = f(i, r, t)\,.\,\lambda^2\tau^{-2}\mu,$$

per modo che si constata che q non può avere forma diversa dalla seguente $q = ki^2rt$; in che si legge appunto la formola di *Joule*.

[1] Per le sostituzioni che si applicano qui e negli altri esempi si veda la nota a pag. 229.

A. FINZI.

RISOLUZIONE IN NUMERI INTERI E POSITIVI

delle equazioni $x^2+y^2=2z^2$, $x^2-y^2=2z^2$

---

1. Nel precedente fascicolo di questo *Periodico*, sotto il titolo *Osservazioni su di un problema di Leonardo Pisano*, il dottor G. Bisconcini ha dato una sua risoluzione in numeri interi e positivi, della equazione $x^2+y^2=2z^2$, che egli scrive nella forma $x_2^2-x_1^2=x_3^2-x_2^2$. Ma la sua risoluzione è un po' lunga, anche perchè si basa sopra un suo lavoro precedente, e non è rigorosa, nel senso di poter concludere che le formole trovate rappresentino *tutte* le soluzioni dell'equazione proposta, pel modo con cui si è servito delle note formole risolutive dell'equazione pitagorica $x^2+y^2=z^2$. Perciò credo opportuno di esporre una mia risoluzione, molto più semplice e più completa.

2. La risoluzione in numeri interi e positivi (o anche, razionali), dell'equazione omogenea

$$x^2+y^2=2z^2 \tag{1}$$

si riconduce facilmente, mediante un conveniente fattore di proporzionalità, alla ricerca delle soluzioni formate da tre numeri *interi, positivi, primi fra di loro*. Si può, anzi, dire *primi* fra di loro *a due a due* perchè ogni fattore comune a due dei tre numeri x, y, z, divide anche il terzo in virtù della (1). Non considerando distinte due terne risolventi, che differiscano solo per lo scambio dei primi due elementi, e lasciando a parte la soluzione particolare $(1, 1, 1)$, si può ancora supporre in ogni terna $x>y$. Sia ora (x, y, z) *una qualunque* di *queste* soluzioni: poichè è verificata la (1), ed x, y son primi fra di loro, essi sono entrambi dispari. Allora i numeri p, q, definiti dalle relazioni $p=\frac{x+y}{2}$, $q=\frac{x-y}{2}$, sono interi positivi ed è $p>q$; e poichè si ricava dalle precedenti: $x=p+q$, $y=p-q$, si deduce per assurdo che p e q sono inoltre *primi fra di loro* come lo sono x, y. Sostituendo nella (1) si ha:

$$(p+q)^2+(p-q)^2=2z^2$$

ossia

$$p^2+q^2=z^2. \tag{2}$$

A questo punto, per quanto ci è noto dalla risoluzione dell'equazione Pitagorica, (1) possiamo affermare, che, poichè p e q son *primi fra di loro*, e soddisfano alla (2), esiste *una ed una sola* coppia di nu-

---

(1) Vedasi ad es. il *Supplemento al Periodico di Matematica*, Anno XII, fasc. IV-V.

meri u, v *interi positivi, primi fra loro, non entrambi dispari*, con $u > v$, e *tali* che si verifichi *l'una o l'altra* fra le due seguenti terne di uguaglianze:

$$\text{I.}\ \begin{cases} p = u^2 - v^2 \\ q = 2uv \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} p = 2uv \\ q = u^2 - v^2 \\ z = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Anzi, sapendosi che è $p > q$, possiamo precisare che si avrà il caso del sistema I, ovvero quello del sistema II, secondochè sia $u^2 - v^2 > 2uv$, ovvero $2uv > u^2 - v^2$. Si avranno quindi, *in ogni caso*, per x, y, z le seguenti espressioni in u, v:

$$x = u^2 - v^2 + 2uv, \quad y = |u^2 - v^2 - 2uv|, \quad z = u^2 + v^2. \qquad (3)$$

Viceversa, scelta comunque una coppia (u, v) di numeri *interi positivi, primi fra loro, di parità diversa*, con $u > v$, le formole precedenti dànno una terna (x, y, z) risolvente la (1), di numeri *interi, positivi e primi fra loro*, come è facile verificare. Si ha, infatti, identicamente:

$$(u^2 - v^2 + 2uv)^2 + (u^2 - v^2 - 2uv)^2 = 2\,(u^2 + v^2)^2$$

e basta poi dimostrare che son primi fra loro x e z, il che risulta dal fatto che ogni fattore comune ad x, y, necessariamente dispari perchè tali risultano x, y, dividerebbe i numeri $\frac{x+y}{2}$, $\frac{x-y}{2}$, ossia, in ogni caso, i numeri $(u^2 - v^2)$, $(2uv)$, che invece per le ipotesi relative alla coppia (u, v), sono primi fra loro.

Osserviamo inoltre che a due tali coppie (u, v) distinte, non può corrispondere una medesima terna (x, y, z), poichè si risalirebbe, in ogni caso, all'assurdo di due coppie (u, v), corrispondenti ai numeri $p = \frac{x+y}{2}$, $q = \frac{x-y}{2}$ mediante l'uno o l'altro dei sistemi I e II.

Concludendo: *le formole* (3), *variando i parametri* u, v *nel campo fissato, rappresentano tutte e sole, senza ripetizione, le soluzioni intere e positive della* (1) *formate di numeri primi fra loro, prescindendo dallo scambio dei primi due elementi ed eccettuando la soluzione particolare* (1, 1, 1).

Osservazione. — Per avere *tutte* le soluzioni intere positive (o razionali) basta moltiplicare le espressioni di x, y, z date dalle (3) per un parametro intero positivo qualunque (o razionale qualunque), mantenendo ad u, v il significato di prima.[1] Ma non è da credersi che possa invece bastare di togliere ai numeri u, v le restrizioni di parità, e d'esser primi fra loro. Mediante la sostituzione $u = \frac{r+s}{2}$, $v = \frac{r-s}{2}$ con r, s dispari primi fra loro, il lettore può dimostrare facilmente

[1] Per comprendere le soluzioni formate di tre numeri eguali, basterebbe fare $u = 1$, $v = 0$.

che si avrebbero a questo modo tutte le soluzioni in cui i numeri x, y, z hanno in comune un fattore della forma k^2 ovvero $2k^2$.

3. Con considerazioni del tutto analoghe, o più semplici, di quelle svolte nel numero precedente, il lettore che se ne interessi potrà stabilire risultati perfettamente simili per l'equazione analoga:

$$x^2 - y^2 = 2z^2. \tag{4}$$

Accenno soltanto che, partendo da x, y primi fra loro e dispari, e posto:

$$\begin{cases} p = \dfrac{x+y}{2} \\ q = \dfrac{x-y}{2} \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x = p+q \\ y = p-q \end{cases}$$

si deduce che p e q son primi fra loro e di parità diversa.

Risulta dall'equazione (4):

$$2pq = z^2$$

da cui l'uno o l'altro dei casi seguenti:

$$\text{I.} \begin{cases} p = a^2 \\ q = 2b^2 \\ z = 2ab \end{cases} \qquad \text{II.} \begin{cases} p = 2b^2 \\ q = a^2 \\ z = 2ab \end{cases}$$

e in ogni caso, le *formole risolutive*:

$$x = a^2 + 2b^2, \quad y = |a^2 - 2b^2|, \quad x = 2ab$$

le quali, *per* a, b *interi, positivi, primi fra loro,* a *dispari,* b *pari o dispari, dànno tutte e sole, senza ripetizione, le terne* (x, y, z) *di numeri interi positivi, primi fra loro, risolventi l'equazione* $x^2 - y^2 = 2z^2$.

C. Botto.

DUE NUOVE SOLUZIONI GENERALI

soddisfacenti al problema geometrico delle equazioni di condizione delle trasformazioni Cremoniane

Cremona ha per primo stabilito le condizioni alle quali devono soddisfare le curve di ordine n, nelle trasformazioni geometriche tali, che alle rette di una figura corrispondono nell'altra delle curve razionali di ordine n formanti una rete omaloidica, e che a un punto di una figura corrisponda nell'altra un punto unico ben determinato in generale.

Ricordo che, se indichiamo con $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$, il numero dei punti che sono punti semplici, doppi,... e di multiplicità d'ordine $(n-1)$, che le curve appartenenti ad uno stesso sistema omaloidico possono avere in comune, questi numeri debbono soddisfare alle due equazioni

$$x_1 + 4x_2 + \ldots + (n-1)^2 x_{n-1} = n^2 - 1$$
$$x_1 + 3x_2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} x_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2};$$

e appunto la risoluzione in numeri interi di queste equazioni, limitandosi a certi valori positivi delle indeterminate, conduce a trovare i diversi sistemi omaloidici formati da curve di uno stesso ordine.

Dopo aver considerato diversi casi particolari, Cremona [1] dà le due soluzioni generali

$$x_1 = 2(n-1), \quad x_{n-1} = 1, \qquad x_1 = 3, \quad x_2 = n-2, \quad x_{n-2} = 1;$$

fa poi inoltre conoscere due altre soluzioni generali, una relativa al caso di n qualunque pari ($x_1 = 3$ $x_2 = n-2$ $x_{n-1} = 1$ con la sua coniugata $x_1 = n-2$ $x_{\frac{n}{2}-1} = 1$ $x_{\frac{n}{2}} = 3$), l'altra nel caso di n qualunque dispari ($x_1 = 3$ $x_2 = n-2$ $x_{n-2} = 1$ con la sua coniugata $x_1 = n-2$ $x_{\frac{n-1}{2}} = 3$ $x_{\frac{n+1}{2}} = 1$); infine dà due altre soluzioni per ciascuno dei seguenti valori di n:

$$n \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad (\text{mod. } 3),$$

e quattro soluzioni per ciascuno dei seguenti valori di n:

$$n \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} \quad (\text{mod. } 4).$$

Il de-Jonquières per il caso di un numero qualunque n, scritto sotto la forma $n = kh$, dove k e h sono numeri positivi qualunque, dà la seguente nuova soluzione generale

$$x_1 = 2(h-1) \quad x_{h-1} = 1 \quad x_h = 2(k-1) \quad x_{h(k-1)} = 1$$

con la sua coniugata

$$x_1 = 2(k-1) \quad x_{h-1} = 1 \quad x_k = 2(h-1) \quad x_{k(h-1)} = 1.$$

Io, studiando i vari sistemi omaloidici piani che possono presentarsi, ho trovato due nuovi casi che si lasciano generalizzare, uno per n *dispari*, l'altro per n *pari*. Per n dispari è espresso dalla soluzione seguente

$$x_2 = \frac{n-1}{2} \quad x_{\frac{n-1}{2}} = 4$$

---

[1] " Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane ". *Memorie Acc. di Bologna*, 1863-1864.

soluzione coniugata a se stessa; per n pari è espresso dalla soluzione

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{n}{2} - 1 \qquad x_{\frac{n}{2}-1} = 2 \qquad x_{\frac{n}{2}} = 2,$$

soluzione pure coniugata a se stessa. Queste soluzioni infatti soddisfano alle equazioni stabilite da Cremona, come è facile verificare. Ciascuna di esse soddisfa al problema geometrico, giacchè se prendiamo per ciascuna i cinque punti di multiplicità più elevata essi definiscono una conica che ha con la C^n un numero di punti di intersezione non superiore a $2n$; e ciascuna soluzione definisce una C^n che non si decompone in curve di ordine minore. Queste soluzioni soddisfano al teorema di Nöther. E infine queste soluzioni soddisfano alle condizioni geometriche che si traggono dalla considerazione della Iacobiana; difatti per esempio per n dispari, se le curve C^n di una rete hanno in comune $\frac{n-1}{2}$ punti doppi, $d_1, d_2, \ldots d_{\frac{n-1}{2}}$, e quattro punti $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{pli}}$, p_1, p_2, p_3, p_4, la Iacobiana della rete avrà $\frac{n-1}{2}$ punti quintupli in $d_1, d_2, \ldots d_{\frac{n-1}{2}}$, e quattro punti $\left(\frac{3n-5}{2}\right)^{\text{pli}}$ in p_1, p_2, p_3, p_4,; di essa fanno parte le linee seguenti:

1° le $\frac{n-1}{2}$ coniche

$$p_1\, p_2\, p_3\, p_4 \ \left(d_1,\ d_2 \ldots,\ d_{\frac{n-1}{2}}\right),$$

perchè un punto qualunque m della conica $p_1\, p_2\, p_3\, p_4\ d_1$ è doppio per la curva della conica medesima e della curva

$$p_1^{\frac{n-3}{2}}\ p_2^{\frac{n-3}{2}}\ p_3^{\frac{n-3}{2}}\ p_4^{\frac{n-3}{2}}\ m\ d_1\ d_2^2\ d_3^2 \ldots\ d^2_{\frac{n-1}{2}}$$

di ordine $n-2$:

2° le quattro curve

$$d_1\ d^2 \ldots\ d_{\frac{n-1}{2}}\,(p_1^{n-2},\ p_2^{n-2},\ p_3^{n-2},\ p_4^{n-2})$$

di ordine $\frac{n-1}{2}$, perchè un punto qualunque r della curva

$$d_1\ d_2 \ldots\ d_{\frac{n-1}{2}}\ p_1^{n-2}$$

è doppio per la curva della rete composta dell'anzidetta curva di ordine $\frac{n-1}{2}$ e della curva

$$d_1\ d_2 \ldots\ d_{\frac{n-1}{2}}\ p_1^{\frac{n-3}{2}}\ p_2^{\frac{n+1}{2}}\ p_3^{\frac{n+1}{2}}\ p_4^{\frac{n+1}{2}}\ r.$$

Ines Larice.

BIBLIOGRAFIA

BOUTROUX. — *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, professées au Collège de France, avec une Note de M. Paul Painlevé. — Paris, Gauthier Villars, 1908.

Questo nuovo volume fa parte della collezione di monografie sulla teoria delle funzioni pubblicate sotto la direzione di E. Borel. In essa l'autore tratta soltanto alcuni punti particolari del vasto soggetto, considerando particolarmente equazioni della forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

dove P, Q sono polinomi in x, y, e più specialmente l'equazione

$$\frac{dy}{dx} + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

dove le A sono dei polinomi in x.

L'A. osserva come la teoria delle equazioni differenziali e quella delle funzioni sono strettamente connesse, e che ad ogni evoluzione dell'una deve corrispondere una evoluzione dell'altra. La teoria delle funzioni nell'ultimo ventennio ha subito un assoluto rinnovamento, e la teoria delle equazioni differenziali, malgrado i progressi compiuti, dovuti in gran parte all'opera e all'insegnamento di Painlevé che aprono un vasto campo di ricerche è forse in ritardo in confronto di quella. Cominciare ad esplorare questo campo particolarizzando il problema è lo scopo del libro.

Segue una nota di Painlevé " Sulle equazioni differenziali del 1° ordine di cui l'integrale generale non ha che un numero finito di branche ".

Annuaire pour l'an 1909. Publié par le bureau des Longitudes, avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. — L. 1,50 (fr. 1,88).

È stato pubblicato questo interessantissimo annuario, che è il 113° della collezione, e si compone di 950 pagine. Secondo le nuove disposizioni adottate dal *Bureau* allo scopo di dare maggiore sviluppo alle notizie, questo annuario riferendosi ad un anno di numero dispari, oltre i dati astronomici, contiene i quadri relativi alla Metrologia, alla Nautica, alla Geografia, alla Statistica e alla Meteorologia, mentre i volumi riferentisi ad un'anno di millesimo pari contengono i quadri relativi alla Fisica e alla Chimica e non quelli relativi alla Geografia e alla Statistica.

Interessantissime sono le notizie di BIGOURDAN, *Le stelle variabili* e di LALLEMAND, *Movimenti e deformazioni della crosta terrestre*, che chiudono il volume.

La prima contiene la storia degli studi fatti sulle stelle con splendori variabili, sulla fotometria stellare, e tratta della classificazione delle stelle variabili, delle cause di tale variabilità, dell'osservazione delle stelle variabili e del calcolo dei loro elementi. La seconda dà ampie notizie sugli studi fatti fino ad oggi relativi alle maree della scorza terrestre, dei sollevamenti e abbassamenti secolari del suolo, delle alterazioni lente del geoide terrestre.

K.

WEITZENBÖCH. — *Komplex-Symbolik.* (Collez. Schubert, LVII.) Leipzig, Göschen, 1908.

Questo volume si occupa dello studio analitico dei complessi lineari negli iperspazi, valendosi della rappresentazione simbolica introdotta da Aronhold-Clebsch. Più ampiamente sono trattati i complessi lineari negli spazi a 3, 4 e 5 dimensioni.

Esso si compone di otto capitoli dei quali ecco i titoli:

I. — I complessi nello spazio a 3 dimensioni.
II. — Sistemi di complessi lineari.
III. — I complessi quadratici.
IV. — I complessi nello spazio a quattro dimensioni.
V. — I complessi lineari in R_5.
VI. — I complessi di rette in R_n.
VII. — L'R_5 come spazio di complessi.
VIII. — La geometria analitica.

K.

WIELEITNER. — *Spezielle Ebene Kurven.* (Collezione Schubert, LXVI.) Leipzig, Göschen, 1908.

Questo periodico si è occupato dei due ottimi libri del LORIA e del TEIXEIRA, sulle curve piane speciali, che ebbero origine dal concorso bandito nel 1892 dall'Accademia delle scienze di Madrid.

" Le due opere del Loria e del Teixeira, dice l'autore nella prefazione, sono " nel loro piano affatto diverse. Per il Loria l'importanza storica è la base della " rappresentazione; Teixeira si attiene alla ricerca di un catalogo di curve. Il pre- " sente libretto potrebbe attenersi ad un terzo punto di vista. *Esso si propone di " classificare le curve,* senza preoccuparsi dell'ordine e dell'eventuale trascendenza, " secondo il loro modo di generazione o definizione ".

Nella trattazione ha sviluppato i metodi della geometria cinematica e delle coordinate naturali.

L'indice che riproduciamo darà un'idea della disposizione della materia.

I. CISSOIDI.

§ 1. Concetti e proprietà fondamentali. — § 2. Le podarie delle coniche centrali in generale. — § 3. Le lemniscate di Booth e Bernouilli. — § 3. Quartiche con tre nodi d'inflessione. — § 5. Le spiriche di Perseo. — § 6. Le podarie della parabola. — § 7. Le cubiche razionali non circolari come cissoidi. Quadratura delle curve simmetriche. — § 8. Altri due tipi di cubiche razionali.

II. CONCOIDI.

§ 9. Concoidi ordinarie e gobbe. Concetto fondamentale della geometria cinematica. — § 10. Concoidi della retta. — § 11. Il moto della biella (Scheipschiebers) ed i suoi sottocasi. — § 12. Una famiglia di quartiche razionali con punti doppi all'infinito. — § 13. Concoidi del cerchio. — § 14. Gli ovali di Cartesio. — § 15. Concoidi delle coniche. Curve di prima categoria.

III. Altre curve con semplice generazione cinematica.

§ 16. Astroidi regolari e gobbi. — § 17. Astroidi proiettivi. — § 18. La cardioide e curve analoghe. — § 19. La curva di Steiner. (Ipocicloide con tre cuspidi.) — § 20. Le curve a laccio della manovella.

IV. Rulette, in particolare le curve cicliche.

§ 21. Concetto fondamentale della geometria naturale. — § 22. Trattazione generale delle rulette in coordinate naturali. — § 23. Il cerchio di *de La Hire*. — § 24. Le curve cicloidali. — § 25. Le curve trocoidali. — § 26. Rulette di varie specie.

V. I metodi della trasformazione di coordinate.

§ 27. Passaggio dalle coordinate ortogonali alle naturali e polari. — § 28. Curve W. — § 29. Curve triangolarmente simmetriche. — § 30. Le radiali. — § 31. Arcuide. — § 32. Distribuzione delle curve trascendenti.

K.

Filippo Sibirani. — *Elementi di Algebra* per le Scuole Tecniche e Normali riveduti dal prof. Cesare Arzelà. Firenze, Successori Le Monnier. — L. 1,50.

Nella pletora invadente dei libri di questo genere, è questo forse uno dei pochi veramente buoni e che si possa coscienziosamente consigliare, tanto a chi insegna, quanto a chi studia.

Il disegno e lo svolgimento di questo libro, è tale da non rendere necessario, e da dimostrare anzi inutile, quell'insegnamento astruso e sacrificato, che passa sotto il nome di Aritmetica razionale.

I corsi elementari nei quali si introducono i numeri negativi ed il calcolo letterale, e si insegnano le operazioni su questi nuovi enti, passano sotto il nome pomposo di Algebra: non è invece che Aritmetica e come tale andrebbe insegnata; ed è svolgendo magistralmente tale concetto, che il prof. Sibirani, nei primi due Capitoli del suo libro fa una introduzione adatta.

Nel primo capitolo, introduce i numeri relativi e riesce facilmente, con belli esempi, a dare chiari i concetti di numeri positivi e negativi; indi svolge le quattro operazioni su di essi.

Ancora con assennati esempi, fa sentire la necessità di introdurre in luogo dei numeri, dei simboli nei calcoli, e così, nel suo secondo capitolo introduce e svolge molto logicamente il calcolo letterale: ed in esso, breve e chiaro è anche un cenno sul calcolo dei radicali.

È utile far notare i pregi degli esercizi che sono svolti e proposti nel libro e condotti di pari passo colla materia.

Dopo simili precedenti il terzo capitolo nel quale sono trattate le equazioni ed i problemi di primo grado ad una incognita, non poteva incontrare nel suo svolgimento difficoltà alcuna.

Innanzi tutto il concetto di equazione e di radice sorge chiaro dalle definizioni di identità e di uguaglianza e dagli esempi. Le trasformazioni delle equazioni, che conducono alla risoluzione e l'applicazione delle equazioni, alla risoluzione dei problemi, sono introdotte e svolte chiaramente coll'aiuto di molti esempi: gli esempi ancora dànno chiaro il concetto ed il significato delle soluzioni negative e dei casi in cui o non si hanno soluzioni possibili, o, se ne hanno infinite.

Qualora il prof. Sibirani, dovesse fare del suo libro una ristampa, io, mi permetterei di dargli un consiglio, di semplice origine didattica e dovuto ai nostri vigenti programmi: in qualche punto infatti, il suo libro, è un po' troppo ricco di materia data l'indole del libro stesso.

Così ad esempio, io, toglierei la parte riguardante la modificazione e la divisione di due polinomi ordinati rispetto ad una lettera ed eliminerei inoltre il breve cenno sui radicali; mentre si potrebbe in un quarto capitolo, fare una breve trattazione dei sistemi di equazioni di primo grado.

Sono certo però, che quanti per i loro studi o per l'insegnamento, avranno occasione di consultare questo libro, plaudiranno all'opera dell'esimio prof. Filippo Sibirani.

Adolfo Vacchi.

Dott. Vittorio Murer. — *Introduzione alla Teoria dei Numeri.* Livorno, Giusti, 1909. Un vol. in-32 di pagg. 132. — L. 1.

Questo manualetto dell'ottima collezione Giusti " Biblioteca degli Studenti „ contiene le teorie fondamentali che servono di base alla Teoria dei Numeri. Nei primi capitoli l'Autore svolge con grande lucidità e chiarezza la teoria della divisibilità, del m. c. d., del m. c. m. e dei numeri primi, studiandosi in ogni teorema di esser semplice e sopratutto brevissimo. Per esempio la dimostrazione del teorema " il m. c. m. di due numeri è uguale al loro prodotto, diviso per il loro m. c. d. „ è riuscita chiarissima nella sua estrema concisione.

Parlando dei numeri primi l'Autore, pur mantenendosi breve e preciso, trova modo di ampliare la teoria più di quello che si fa negli ordinari trattati di aritmetica razionale e dà importanti notizie storiche, che certamente hanno il pregio d'invogliare i giovani a studiare con amore questa parte così importante e fondamentale dell'analisi matematica.

Dopo queste teorie l'egregio autore introduce il concetto di congruenza, dimostrandone le proprietà fondamentali con la precisione e la brevità che si riscontrano in tutti i capitoli, e deduce poi da questa teoria i due classici teoremi di Fermat e di Wilson.

Elegante ed originale è il capitolo dedicato alle proprietà dei numeri dipendenti dal sistema di numerazione.

Infine l'Autore applica le teorie svolte all'Analisi indeterminata di 1° grado che tratta con i metodi di Lagrange e di Eulero.

Ogni capitolo è seguito da una raccolta di esercizi scelti con cura e benissimo graduati.

Il nuovo manuale è dunque ben riuscito, sia per la parte pratica come per quella teorica, ed indubbiamente sarà di valido aiuto agli studenti in generale ed un'ottima guida per coloro che si dedicano allo studio delle matematiche pure od applicate.

Aroldo Martini Zuccagni.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 24 Aprile 1909

LA REGOLA DI FERMAT-MONFORTE PER LA RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI

1. La ricerca dei valori massimi e minimi che può assumere una funzione, ed in generale una grandezza variabile, i cui valori dipendono da' valori arbitrarii assegnati ad una o a più variabili indipendenti è stato uno dei problemi che hanno più interessato i matematici; e tanto per risolvere questi problemi, quanto per trovare l'area delle curve piane, e delle superficie, o i volumi dei solidi si pervenne alla invenzione del Calcolo infinitesimale, nella quale branca delle Matematiche questi problemi di massimo e di minimo trovano la loro completa risoluzione esente da ogni critica e da ogni eccezione. Nei limiti delle Matematiche elementari invece per risolvere questa categoria di problemi si sono proposti, e sono in uso nei principali testi che vanno per la maggiore, un certo numero di artifizii e di regole e di ripieghi, ognuno dei quali risolve una speciale serie di problemi, e tutti concorrono a rendere difficile la teoria e complicate le applicazioni, ed alcuni obbligano a fare dimostrazioni delicate quando si ricercano i massimi e minimi di funzioni a più variabili (come per esempio, il *massimo del prodotto di più numeri la cui somma è costante*) se non si vuole cadere in difetto di rigore. (1)

Tutto ciò invece non è necessario, se si ritorna ad uno dei primi metodi che furono inventati, che pel passato è stato dimenticato, mentre non lo meritava affatto, e che è quello che da parecchio tempo io adotto nell'insegnamento che fo nell'Istituto tecnico di Napoli.

Senza risalire ai matematici che hanno risoluto speciali problemi di massimo o di minimo con procedimenti geometrici o con vedute particolari non manifestate, il primo che abbia data una regola generale per la risoluzione di questi problemi è stato PIERRE FERMAT, un matematico dilettante. (2) Egli però dette due regole per risolvere i detti problemi, e di una di esse disse che non gli

(1) Pel problema citato è noto che a rendere rigorosa la ricerca del massimo fondata sulla ipotesi che tutti i numeri meno due siano eguali occorse una dimostrazione, fatta da DARBOUX, che non si suole inserire nei libri elementari (cfr. " Bulletin des Sciences mathem. ", s. II, t. XI, 1881, p. 149-51. *Sur le maximum du produit de plusieurs facteurs positifs dont la somme est constante* ed anche CHAUCHY. *Oeuvres Complètes*, s. II, t. III, p. 375-77, *La moyenne géométrique entre plusieurs nombres A, B, C, D... est toujours inférieur a leur moyenne arithmetique*).

(2) PIERRE FERMAT nacque a Beaumont de Lomagne il 1601 e morì a Castres il 1665. Egli ha trattato questo metodo in un'opera pubblicata dopo la sua morte intitolata *Méthode pour la recherche du Maximum et du Minimum* (cfr. *Oeuvres* de FERMAT, 1891-94, vol. I, p. 133 e vol. II, p. 121).

pareva la migliore [1] e si attenne all'altra, [2] che includeva la considerazione degli infinitesimi. Quella regola che egli scartava veniva presa in considerazione da ANTONIO DE MONFORTE, [3] matematico napoletano anch'egli dilettante, ma presto cadde nuovamente in oblìo. Eppure questo metodo è tale che, senza conoscere il Calcolo infinitesimale, esso permette di risolvere tutti i problemi di massimo e di minimo che possono cadere nell'àmbito dell'insegnamento elementare delle Matematiche, vogliamo intendere quelli che dànno luogo ad equazioni riducibili al 2º grado.

In onore dei due matematici citati noi lo chiamiamo metodo di FERMAT-MONFORTE; osservando però che il suddetto metodo fu applicato a funzioni di più variabili da FERMAT in modo astruso e con ripieghi difficili a seguirsi in generale, il MONFORTE non considerò il problema pel caso di più variabili.

Qui invece mostreremo che la regola di FERMAT-MONFORTE si può estendere anche a problemi di più variabili senza introdurre alcun artifizio o variazione, e sopratutto senza aver bisogno di teoremi complicati, e il tutto seguendo criterii che non debbono essere ripudiati quando si passa allo studio del Calcolo infinitesimale.

Crediamo perciò che la gioventù studiosa ci potrà essere grata di questa esposizione che qualora fosse adottata da tutti nell'insegnamento apporterebbe ad essa una grande facilitazione, diminuzione di fatica, e la possibilità di risolvere i problemi più difficili, che altrimenti resterebbero insoluti da parte sua. [4]

2. È da premettere che si suppone noto che cosa sia una *funzione continua* in un punto a della variabile, o *soltanto a destra* o *soltanto a sinistra* del punto a; che cosa s'intende per *funzione continua in un intervallo* (a, b); che cosa s'intende per *funzione continua di più variabili* per un sistema di valori a, b, c delle sue variabili indipendenti.

Che sia nota la definizione di funzione *crescente*, o *decrescente*, o *costante* a destra di a, o a sinistra di a; e che cosa s'intende per funzione *crescente*, *decrescente* o *costante* in un intervallo (a, b).

3. Ciò posto ricordando che la differenza $f(x \pm h) - f(x)$ si suole indicare con δy e si chiama *incremento della funzione*; e che la differenza $(x \pm h) - x$ (che è uguale a $\pm h$) si indica con δx e si chiama

---

(1) Cfr. *op. cit.*, § 4. Egli ne fa applicazione alla questione del massimo prodotto di due fattori di somma costante, all'altra di trovare il massimo di $x^2 (a - x)$, e ad altre questioni, e propone di risolvere con essa il problema del triangolo che qui risolviamo al n. 16.

(2) Cfr. *op. cit.*, § 1 a 3.

(3) ANTONIO DE MONFORTE dei signori di Laurito (prov. di Salerno) nacque, dicesi, in Basilicata il 1644, morì il 1717 in Napoli (un mio alunno del corso di Storia di Matematica ritiene che potrà dimostrare che il MONFORTE nacque a Laurito); egli pubblicò il metodo da lui usato in un'opera molto rara intitolata *de Problematum determinatione*. Egli l'applica oltre che ai primi due esempi trattati da FERMAT anche al problema di trovare il massimo di $x^3 (a - x)^2$ ed il minimo di $x^3 + (a - x)^3$. Per altri più minuti dettagli su quest'opera si cfr. AMODEO, *Vita Matematica napoletana*, parte I, Napoli, 1905, p. 24 a 30.

(4) Fra non molto saranno pubblicati i nostri *Complementi di Analisi Algebrica elementare* (Pierro, Napoli) nei quali questa teoria avrà il suo completo sviluppo.

incremento della variabile, osserviamo che il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ dell'incremento della funzione all'incremento della variabile ha un particolare interesse per decidere dell'andamento della funzione nell'intorno di x; poichè se la funzione è *crescente* il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ è *positivo* tanto a destra che a sinistra di x; ed egualmente se la funzione è *decrescente* il rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ è *negativo* tanto a destra che a sinistra di x, e se la funzione è costante il rapporto è zero tanto a destra che a sinistra di x.

Allorquando questo rapporto $\frac{\delta y}{\delta x}$ tende a limiti determinati per h tendente a zero, e precisamente tanto per $h=+0$, che per $h=-0$, questi limiti si dicono rispettivamente *prima derivata destra* e *prima derivata sinistra* della funzione nel punto x. Le due derivate possono coincidere, e in tal caso si dice che la funzione ha una *derivata unica* per quel valore di x, e questa si rappresenta con $f'(x)$ o con y'.

Viceversa: *Una funzione è crescente o decrescente alla destra* (*o alla sinistra di* a) *secondo che la sua derivata destra* (*o sinistra*) *è positiva o negativa*. E ciò si può dimostrare in poche parole che crediamo inutile riportare qui per amor di brevità.

4. Si sa inoltre che la definizione di *massimo* e di *minimo* di una funzione è la seguente:

Si dice che la funzione $f(x)$ per $x=a$ passa per un *minimo*, oppure che $f(a)$ *è un minimo* della funzione $f(x)$, quando i valori che $f(x)$ assume nell'intorno di a sono tutti maggiori di a. Ne deriva quindi che la funzione $f(x)$ deve essere decrescente a sinistra e crescente a destra di a.

Si dice che la funzione $f(x)$ per $x=a$ passa per un massimo, oppure che $f(a)$ *è un massimo* della funzione $f(x)$, quando i valori che $f(x)$ assume nell'intorno di a sono tutti minori di $f(a)$. Ne deriva quindi che la funzione deve essere crescente a sinistra e decrescente a destra di a.

E siccome la funzione $f(x)$ cresce o decresce secondo che la derivata $f(x)$ è positiva o negativa, ne risulta che la funzione non può cessare di decrescere per crescere, o di crescere per decrescere senza che $f(x)$ cambi segno, e ciò avviene quando la derivata si annulla o quando essa è discontinua. Cosicchè i valori di x che fanno divenire massima o minima la funzione sono compresi fra quelli che annullano la prima derivata o la rendono discontinua. Se quindi *la funzione è a derivata unica e passa per un massimo o per un minimo, la sua derivata deve essere nulla.*

Di questa proposizione non è vera la reciproca, perchè la derivata può annullarsi per un valore di x che non renda minima o massima la funzione, come si vedrà più innanzi (v. n. 8) per la funzione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

5. A questo punto si potrebbe credere che tutta questa preparazione non faccia che aprire le porte a due battenti alla teoria del Calcolo infinitesimale, ma basta esporre la regola per disingannare ognuno.

Intorno ad un minimo assoluto y_0 della funzione $f(x)$ per $x = a$ ad ogni valore $y > y_0$ della funzione corrispondono due valori x_1, x_2, che fanno assumere il valore y, e questi tendono a diventare eguali ad a quando y tende a diventare eguale ad y_0.

Intorno ad un massimo assoluto y_0 della funzione $f(x)$ ad ogni valore $y < y_0$ corrispondono due valori x_1, x_2 della variabile x, che fanno prendere alla funzione il valore y, e questi pure tendono a diventare eguali ad a quando y tende ad y_0.

Se dunque la funzione è massima o minima per $x = a$, dovrà necessariamente assumere valori eguali per due valori x_1 ed x_2 della variabile nell'intorno di a, e quindi la differenza $f(x_1) - f(x_2)$ deve essere divisibile per $x_1 - x_2$; soppresso questo fattore quante volte è possibile, il quoziente dovrà essere nullo, per l'ipotesi fatta. Se ora si pone in questo quoziente $x_1 = x_2 = x$, risulterà un'equazione in x, le cui radici in generale rappresenteranno i valori della variabile per i quali la funzione risulta massima o minima, e perciò sostituendo ciascuno di questi valori nella data funzione si avrà il massimo o il minimo valore per esso assunto dalla funzione. La regola è dunque la seguente:

Si ponga $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1) - \mathrm{f}(\mathrm{x}_2) = 0$, *e raccolti i termini che hanno fattori comuni si cerchi di sopprimere quante volte è possibile il fattore* $\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2$ *che per solito si presenta. Si ponga dopo* $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}$ *e si risolva l'equazione risultante in* x. *Le radici saranno in generale i valori della variabile per i quali la funzione diventa massima o minima.*

Il primo membro dell'equazione che risulta non è altro che il limite del rapporto

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

per $x_1 = x_2 = a$ e quindi la regola suddetta conduce a trovare ed eguagliare a zero precisamente la *prima derivata della funzione data.*

Anzi si può aggiungere di più, ed osservare che se si applica la regola suddetta alle funzioni semplici

$$x^n, \qquad xy, \qquad \frac{x}{y}, \ldots$$

si ritrovano tale quali le regole di derivazione, e farle addirittura ritrovare, ma non val la pena di fare apprendere tante regole speciali, quando una sola regola basta per tutte.

Si può anche decidere dall'esame della derivata qual'è l'andamento della funzione, e quindi se quel valore trovato è massimo o minimo per la funzione o non lo sia affatto, osservando il segno che la derivata assume a sinistra e a destra del punto in cui la funzione diventa massima o minima. Se p. es. la prima derivata è positiva a destra, negativa a sinistra di a, la funzione è crescente a sinistra decrescente a destra, e passa perciò per un massimo. Resta sempre la possibilità che il valore trovato possa non corrispondere ad un valore massimo o minimo della funzione.

6. Quando una funzione f è dipendente da più variabili $x, y, z, \ldots$, si dice che un fatto qualsiasi avviene intorno al gruppo $a, b, c, \ldots$ di valori di questa variabile (oppure come si suol dire intorno al punto $abc\ldots$) quando si vuole affermare che esiste un numero h piccolissimo tale che per tutti i valori

$$\begin{gathered} a-h \leqslant x \leqslant a+h \\ b-h \leqslant y \leqslant b+h \\ c-h \leqslant z \leqslant z+h \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{gathered}$$

ovvero per

$$|x-a| \leqslant h, \qquad |y-b| \leqslant h, \qquad |z-c| \leqslant h, \ldots$$

il fatto si verifica sempre, eccettuato soltanto (al più) per il gruppo $a, b, c, \ldots$, cioè per $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$.

Si dice che una funzione $f(x, y, z)$ diventa *massima* per il gruppo $a, b, c, \ldots$ delle variabili, se intorno a questo gruppo nessun valore della funzione è maggiore di $f(a, b, c)$, cioè se si abbia sempre

$$f(a, b, c) \geqslant f(x, y, z).$$

Si dice che una funzione $f(x, y, z)$ diventa *minima* per il gruppo a, b, c delle variabili, se intorno a questo gruppo nessun valore della funzione è minore di $f(a, b, c)$, cioè se si ha sempre

$$f(a, b, c) \leqslant f(x, y, z).$$

7. Alle funzioni a più variabili si può estendere la regola di Fermat-Monforte per la ricerca dei valori $abc\ldots$ per i quali esse divengono massime o minime.

Se nella funzione $f(x, y, z)$ diamo a tutte le variabili, eccetto che ad una sola di esse, il valore che esse hanno nel gruppo abc, la funzione

$$f(x, b, c)$$

si potrà considerare come funzione di una sola variabile x, che per $x=a$ diventa massima o minima, e quindi dovrà essere, nell'intorno di abc,

$$f(x_1, b, c) - f(x_2, b, c) = 0$$

ed anche nullo il quoziente che si ottiene da questa equazione con la soppressione del fattore $x_1 - x_2$; ed in questo quoziente posto $x_1 = x_2 = x$, si avrà un'equazione che avrà per radici i valori a che con b e c rappresentano in generale i gruppi per i quali la funzione diviene massima o minima. Analoghe considerazioni si possono fare per la variabile y e per la variabile z, e dalle equazioni

$$f(a, y_1, c) - f(a, y_2, c) = 0, \quad f(a, b, z_1) - f(a, b, z_2) = 0$$

si otterranno, con la soppressione dei fattori $y_1 - y_2$, $z_1 - z_2$ e col porre rispettivamente $y_1 = y_2 = y$, $z_1 = z_2 = z$, delle equazioni a cui debbono soddisfare i valori a, b, c che rendono massima o minima la funzione data.

Quindi risulta la seguente regola:

Nella equazione data si supponga variabile una per volta una sola delle variabili e si applichi ogni volta la regola di Fermat-Monforte; *si avranno tante equazioni quante sono le variabili, che formano un sistema le cui soluzioni rappresentano in generale i gruppi di valori che fanno divenire massima o minima la funzione.*

8. Nel dare degli esempi al fine di mostrare il vantaggio di questa regola, sopra tutte le altre che sono in uso nei libri di testo delle scuole secondarie, tralasceremo quelli che sono troppo facili e troppo noti.

Esempio 1°. — *Il polinomio di 3° grado* $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^3 + \mathrm{bx}^2 + \mathrm{cx} + \mathrm{d}$ *ha in generale un valore massimo ed uno minimo se* $\mathrm{b}^2 - 3\mathrm{ac} > 0$, *e non ha nè massimo nè minimo se* $\mathrm{b}^2 - 3\mathrm{ac} \leqslant 0$.

Infatti, applicando la regola data deve essere

$$(ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d) - (ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) = 0,$$

ovvero

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$,

$$a(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + b(x_1 + x_2) + c = 0$$

e posto $x_1 = x_2 = x$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0,$$

da cui si ha

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}.$$

Supponiamo per fissare le idee che a sia positivo; nel qual caso, se le radici sono reali e distinte, cioè se $b^2 - 3ac > 0$, la prima derivata $3ax^2 + 2bx + c$ è positiva esternamente all'intervallo (α, β) delle radici e negativa internamente; quindi la funzione data è crescente a sinistra di α, decresce nell'intervallo (α, β) e cresce nuovamente a destra di β, perciò la funzione data y assume per α un valore massimo e per β un valore minimo.

Se invece le radici sono complesse $(b^2 - 3ac < 0)$ il trinomio della prima derivata è sempre positivo per qualunque valore della variabile, quindi la funzione è sempre crescente per qualunque valore della variabile e perciò non presenta nè massimo nè minimo.

Se le radici del trinomio divengono eguali $(b^2 - 3ac = 0)$ il trinomio della prima derivata è positivo per qualunque valore della variabile, eccetto che per $-\frac{b}{3a}$, pel quale si annulla, quindi la funzione è crescente a sinistra di $-\frac{b}{3a}$, crescente a dritta di esso, quindi nemmeno in questo caso la curva presenta valori massimi o minimi. In questo caso si dice che la curva *s'inflette* nel punto $-\frac{b}{3a}$, o che quel punto è un suo *flesso.*

9. Esempio 2°. — *Con un cartone rettangolare di lati* a *e* b *formare la scatola di massimo volume.*

Se x è l'altezza della scatola, i lati della base saranno $a - 2x$, $b - 2x$, e quindi il volume di essa è

$$V = x(a - 2x)(b - 2x) = abx - 2(a + b)x^2 + 4x^3.$$

Applicando la regola data deve aversi

$$ab(x_1 - x_2) - 2(a + b)(x_1^2 - x_2^2) + 4(x_1^3 - x_2^3) = 0,$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$ ed eguagliando x_1 ed x_2 ad x, si ha l'equazione

$$12x^2 - 4(a + b)x + ab = 0,$$

da cui

$$x = \frac{1}{6}(a + b) \mp \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 - ab}.$$

Delle due radici, l'una è minore l'altra è maggiore di $\frac{b}{2}$, quindi resta come unica soluzione

$$x = \frac{1}{6}(a + b) + \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

valore compreso fra $\frac{a}{6}$ e $\frac{b}{6}$.

Entrambi questi esempi si dovrebbero trattare con un metodo particolare detto dei *coefficienti indeterminati*, che qui come vedesi si rende inutile.

10. Esempio 3°. — *Scomporre un numero positivo* a *in due parti* x, y *tali che il prodotto* $x^p y^q$ *ove* p *e* q *sono interi positivi, sia massimo.*

Per la regola data deve essere

$$x_1^p(a - x_1)^q - x_2^p(a - x_2)^q = 0;$$

ed aggiungendo e sottraendo il prodotto $x_2^p(a-x_1)^q$, la stessa equazione si muta nell'altra equivalente

$$(x_1^p - x_2^p)(a-x_1)^q - x_2^p[(a-x_2)^q - (a-x_1)^q] = 0,$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2 = (a-x_2)-(a-x_1)$, essa si riduce a

$$(x_1^{p-1} + x_1^{p-2}x_2 + \ldots + x_2^{p-1})(a-x_1)^q -$$
$$- x_2^p[(a-x_2)^{q-1} + (a-x_2)^{q-2}(a-x_1) + \ldots + (a-x_1)^{q-1}] = 0,$$

e posto $x_1 = x_2 = x$ diviene

$$px^{p-1}(a-x)^q - qx^p(a-x)^{q-1} = 0,$$

che si può scrivere

$$x^{p-1}(a-x)^{q-1}[p(a-x) - qx] = 0.$$

Questa derivata si annulla per $\frac{x}{p} = \frac{a-x}{q}$, ovvero per $x = \frac{pa}{p+q}$ e quindi $y = \frac{qa}{p+q}$, passando dal valore positivo al negativo, e quindi il prodotto diviene massimo per questo valore di x. Però la derivata si annulla pure per $x=0$, $a-x=0$, ma per questi valori passa dal valore negativo al positivo, quindi il prodotto è minimo per $x=0$ se p è pari, e per $x=a$ se q è pari.

Questo esempio non si potrebbe trattare così completamente e senza ausilio di altre teorie con i metodi in vigore nelle scuole.

II. *Circoscrivere ad una sfera il cono di minimo volume.*

Se r è il raggio della sfera ed x l'altezza del cono, il volume del cono è dato da

$$V = \frac{\pi r^2}{2}\frac{x^2}{x-2r};$$

quindi si è ridotti a trovare il minimo dell'espressione $\frac{x^2}{x-2r}$.

Applicando la regola di FERMAT-MONFORTE, deve essere

$$\frac{x_1^2}{x_1-2r} - \frac{x_2^2}{x_2-2r} = 0,$$

e liberando da fratti e ponendo $x_1 - x_2$ in vista

$$x_1x_2(x_1-x_2) - 2r(x_1^2 - x_2^2) = 0$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2$ ed eguagliando x_1, x_2 ad x si ha

$$x^2 - 4rx = 0.$$

La derivata si annulla o per $x=0$, e questo è assurdo, oppure per $x=4r$ passando dal valore negativo al positivo e ciò dice appunto che il cono è minimo quando l'altezza è eguale al doppio del diametro della sfera.

12. Per mostrare come sia agevole l'applicazione della regola, anche quando la funzione presenta dei radicali daremo i seguenti esempi, uno tratto da quelli di aree minime che per la teoria di Plateau si hanno colle *lamine liquide pellicolari*, l'altro dall'opera stessa del Fermat, ed un altro dalla rifrazione della luce.

Esempio 5°. — *Dato un prisma retto triangolare regolare* ABCDEF *di altezza* b *e di lato di base* a, *trovare sulla congiungente i centri di gravità delle basi due punti* M, M', *equidistanti dalle basi, che congiunti con i vertici della base più vicina, facciano risultare minima la somma dei triangoli* MAB, ..., M'DE, ... *e dei trapezii che hanno* MM' *per base comune e l'altra base nelle costole laterali del prisma.*

Posto la distanza dei punti M, M' dalle basi eguali ad x, facilmente si trova che la funzione di cui si cerca il minimo è

$$3a\sqrt{x^2+\frac{a^2}{12}}+(b-x)\,a\sqrt{3}$$

e quindi basterà cercare il minimo di

$$\sqrt{12x^2+a}-2x.$$

Applicando la solita regola deve essere

$$\left(\sqrt{12x_1^2+a^2}-\sqrt{12x_2^2+a^2}\right)-2(x_1-x_2)=0.$$

Per fare apparire il fattore x_1-x_2 nella prima parentesi, consideriamola come espressione frazionaria e rendiamone razionale il numeratore, così l'equazione precedente si muta in

$$\frac{12(x_1^2-x_2^2)}{\sqrt{12x_1^2+a^2}+\sqrt{12x_2^2+a^2}}-2(x_1-x_2)=0$$

e quindi soppresso il fattore $2(x_1-x_2)$ e posto $x_1=x_2=x$, risulta

$$\frac{6x}{\sqrt{12x^2+a^2}}-1=0,$$

da cui si ottiene

$$x=\frac{a}{2\sqrt{6}}$$

e siccome $AM=\sqrt{x^2+\frac{a^2}{3}}=\frac{3a}{2\sqrt{6}}$, risulta che M, M' distano dalla base del terzo di quanto distano dai vertici della base.

13. Esempio 6°. — *Sul diametro* AB *di un semicerchio di raggio* r *si prende un punto* C *e si eleva da esso la corda* CD *perpendicolare ad* AB. *Si cerca il massimo della funzione* $y=AC+CD$. (1)

(1) Problema trattato da Fermat (cfr. *op. cit.*).

Se si assume $AC = x$ risulta $y = x + \sqrt{x(2r - x)}$, e quindi per avere il massimo bisogna porre

$$(x_1 - x_2) + \left(\sqrt{x_1(2r - x_1)} - \sqrt{x_2(2r - x_2)}\right) = 0$$

e col medesimo artifizio usato precedentemente questa equazione si muta successivamente in

$$x_1 - x_2 + \frac{2r(x_1 - x_2) - (x_1^2 - x_2^2)}{\sqrt{x_1(2r - x_1)} + \sqrt{x_2(2r - x_2)}} = 0.$$

$$1 + \frac{r - x}{\sqrt{x(2r - x)}} = 0, \qquad \sqrt{x(2r - x)} = x - r \tag{1}$$

$$2x^2 - 4rx + r^2 = 0,$$

$$x = r \mp \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

Di queste radici soltanto la maggiore soddisfa la equazione derivata perchè la minore radice rende il 2° membro della (1) negativo, ed è facile vedere che ad essa corrisponde un massimo della funzione.

14. Esempio. — *Supposto che un raggio di luce debba passare da* A *a* B *attraverso due mezzi omogenei di diversa densità separati dalla retta* A'B' *trovare in qual punto* C *esso deve attraversare la linea* A'B' *affinchè il tempo impiegato sia minimo.*

Poste le distanze AA', BB' di A e B da A'B' eguali rispettivamente ad a e b ed $A'B' = c$, si ha $AC = \sqrt{x^2 + a^2}$, $CB = \sqrt{(c - x)^2 + b^2}$, quindi se u e v sono le velocità della luce nei due mezzi, il tempo impiegato da A a B è

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{u} = \frac{\sqrt{(c - x)^2 + b}}{v}.$$

Applicando la regola suesposta a questa funzione deve essere

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + a^2} - \sqrt{x_2^2 + a^2}}{u} + \frac{\sqrt{(c - x_1)^2 + b^2} - \sqrt{(c - x_2)^2 + b^2}}{v} = 0$$

ovvero

$$\frac{x_1^2 - x_2^2}{a\left(\sqrt{x_1^2 + a^2} + \sqrt{x_2^2 + a^2}\right)} + \frac{(c - x_1)^2 - (c - x_2)^2}{v\left(\sqrt{(c - x_1)^2 + b^2} + \sqrt{(c - x_2)^2 + b^2}\right)} = 0$$

e sopprimendo il fattore $x_1 - x_2 = (c - x_2) - (c - x_1)$ e posto $x_1 = x_2 = x$ risulta

$$\frac{x}{u\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c - x}{v\sqrt{(c - x)^2 + b^2}};$$

e se con i ed r indichiamo gli angoli d'*incidenza* e di *rifrazione* si ha che deve essere

$$\frac{\text{sen}\, i}{u} = \frac{\text{sen}\, v}{v},$$

e siccome questa legge si avvera in fatto, ne risulta che la luce *impiega il minimo tempo per passare da* A *a* B.

15. Passiamo ora a vedere come la regola si applica a funzioni di più variabili. Basteranno pochi esempii per mostrare tutto il vantaggio che si ottiene dall'uso di questa regola.

ESEMPIO 1°. — *Trovare il massimo prodotto di più variabili che hanno la somma costante.*

Supponiamo per brevità che le variabili siano tre, x, y, z e che sia a la loro somma, sarà $z=a-x-y$ e quindi occorre trovare il massimo del prodotto

$$xy(a-x-y).$$

Supposto variabile la x soltanto deve essere

$$x_1y(a-x_1-y)-x_2y(a-x_2-y)=0$$

e sottraendo ed aggiungendo il prodotto $x_1y(a-x_2-y)$ si ha

$$x_1y(a-x_1-y)-x_1y(a-x_2-y)+x_1y(a-x_2-y)-x_2y(a-x_2-y)=0$$

ovvero

$$x_1y(x_2-x_1)+(x_1-x_2)y(a-x_2-y)=0$$

e sopprimendo il fattore $y(x_1-x_2)$ e posto $x_1=x_2=x$ si ha $x=a-x-y$.

Supposto variabile la sola y si ha analogamente $y=a-x-y$, quindi: Il prodotto è massimo quando le variabili sono eguali fra loro.

16. ESEMPIO 2°. — *Trovare la minima somma di più variabili che hanno il prodotto costante.*

Siano analogamente x, y, z le variabili, e p^3 il loro prodotto, sarà $z=\frac{p^3}{xy}$ e quindi occorre trovare il minimo della somma

$$x+y+\frac{p^3}{xy}.$$

Supposto variabile la sola z deve essere

$$x_1-x_2+\frac{p^3}{y}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=0$$

da cui si deduce con la solita regola $\frac{p^3}{yx^2}$, ovvero $\frac{p^3}{xy}=x$.

Analogamente supposta variabile soltanto la y si avrebbe $\frac{p^3}{xy}=y$, e quindi risulta che la somma è minima quando le variabili sono eguali fra loro.

16. Termineremo questa breve esposizione con lo stesso problema che FERMAT propose ai matematici, [1] e che fu risoluto da BONAVENTURA CAVALIERI per via sintetica. [2]

---

(1) Cfr. *op. cit.*
(2) Cfr. *Exercitationes geometricae sex*, p. 504. Bononiae, 1647.

Esempio 3°. — *Trovare nel piano di un triangolo il punto le cui distanze dai vertici del triangolo hanno una somma minima.*

Del triangolo ABC sia c il lato AB, $x_0 y_0$ le coordinate di C rispetto ad AB ed alla perpendicolare elevata in A ad AB, ed xy le coordinate del punto cercato M. La funzione di cui si richiede il minimo è

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y)^2}.$$

Consideriamo variabile la sola x e troviamo che una delle condizioni di massimo è

$$\sqrt{x_1^2+y^2}-\sqrt{x_1^2+y^2}+\sqrt{(x_1-c)^2+y^2}-\sqrt{(x_2-c)^2+y^2}\div$$
$$+\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y-y_0)^2}-\sqrt{(x_2-x_0)^2+(y-y_0)}=0$$

ovvero, per l'applicazione della regola data,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0.$$

Analogamente, considerando come variabile la sola y, si trova che un'altra condizione di massimo è

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}+\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0.$$

Ora indicando con φ, ψ, ω gli angoli che le direzioni AM, BM, CM formano con la direzione positiva dell'asse AX, si ha

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\cos\psi=\frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}, \qquad \operatorname{sen}\psi=\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{y}$$
$$\cos\omega=\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}, \qquad \operatorname{sen}\omega=\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

e quindi le condizioni precedenti si mutano in

$$\cos\varphi+\cos\psi+\cos\omega=0$$
$$\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}\psi+\operatorname{sen}\omega=0$$

ed eliminando ω

$$(\cos\varphi+\cos\psi)^2+(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi)^2=1$$

ovvero successivamente

$$1+2(\cos\varphi\cos\psi+\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi)=0$$
$$1+2\cos(\varphi-\psi)=0$$
$$\cos(\varphi-\psi)=-\tfrac{1}{2}$$
$$\varphi-\psi=120^\circ$$

e quindi occorre che l'angolo AMB sia di 120 gradi.

Analoga condizione si ritroverebbe per gli angoli BMC, CMA se si eliminasse φ o ψ, dunque perchè il punto M soddisfi alla condizione voluta occorre che gli angoli AMB, BMC, CMA siano fra loro eguali e perciò il punto M è intersezione degli archi descritti sulle corde AB, BC, CA capaci di contenere un angolo inscritto di 120°.

Se uno degli angoli del triangolo ABC fosse di 120° o maggiore di tanto, il suo vertice è il punto che soddisfa al problema.

F. Amodeo.

SULLA CARATTERISTICA DEL PRODOTTO DI DUE MATRICI

1. Siano A e B due matrici, che possiamo supporre quadrate e dello stesso ordine n, aggiungendo, ove occorra, delle linee di elementi nulli; sia con ciò:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11}, a_{12}, \ldots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}, a_{n2}, \ldots a_{nn} \end{Bmatrix}, \qquad B = \begin{Bmatrix} b_{11}, b_{12}, \ldots b_{1n} \\ b_{21}, b_{22}, \ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n1}, b_{n2}, \ldots b_{nn} \end{Bmatrix}.$$

Si sa che si può *comporre* la matrice A con la matrice B in quattro modi diversi, secondo che si *moltiplicano* (come suol dirsi) le righe o le colonne di A per le righe o le colonne di B; noi chiameremo *prodotto* di A per B (senz'altra aggiunta), e indicheremo col simbolo AB, la matrice ottenuta moltiplicando le righe di A per le colonne di B, cioè la matrice

$$C = (c_{rs}) \qquad (r, s = 1, 2, \ldots n),$$

dove è

$$c_{rs} = \sum_1^n {}_h a_{rh} b_{hs};$$

chiameremo poi *prodotto per righe* di A per B la matrice ottenuta moltiplicando le righe di A per le righe di B; analogamente negli altri casi. Si noti che, indicando costantemente con M' la matrice *coniugata* o *trasposta* di una matrice M (cioè quella che si ottiene da M scambiando le righe con le colonne), i quattro modi di composizione di A con B sono, con la definizione adottata, indicati dai simboli AB, AB', A'B, A'B'.

Per il prodotto così definito vale, come si verifica immediatamente, la proprietà associativa, ma non, in generale, la proprietà commutativa.

Sorge ora la questione di determinare, mediante alcuni elementi relativi alle matrici A e B, la caratteristica del prodotto AB, la quale è sempre minore o uguale a quella di A ed a quella di B. Nel caso che sia $A = B$, cioè che si tratti del quadrato A^2, la caratteristica di esso (e più generalmente di una qualunque potenza A^n) si esprime molto semplicemente ricorrendo ai divisori elementari [1] della matrice $A - E\omega$, relativi al divisore ω del determinante

$$|A - E\omega| = \begin{vmatrix} a_{11} - \omega, & a_{12}, & \dots a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22} - \omega, & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots a_{nn} - \omega \end{vmatrix} \text{[2]},$$

e ciò può vedersi mediante le considerazioni seguenti.

Ricordiamo anzitutto che due matrici quadrate A, B si dicono *simili* [3] quando esiste una matrice T, con $|T| \neq 0$, tale che si abbia $B = T^{-1}AT$. [4] Si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perchè due matrici A e B siano simili è che le due matrici $A - E\omega$, $B - E\omega$ abbiano i medesimi divisori elementari; [5] inoltre la determinazione della più generale matrice T per la quale si ha $B = T^{-1}AT$ può farsi operando in un determinato campo R di razionalità, che contenga gli elementi di A e quelli di B. [6]

---

(1) Riportiamo qui la definizione di divisori elementari di una matrice. Sia in generale $F = (f_{ik}(\omega))$ $(i, k = 1, 2 \dots n)$ una matrice quadrata di ordine n, i cui elementi siano funzioni razionali intere di una variabile ω. Indichiamo con $D_1(\omega)$ il m. c. d. degli elementi di questa matrice, con $D_2(\omega)$ il m. c. d. dei minori di 2° ordine della matrice medesima, con $D_3(\omega)$ il m. c. d. dei minori di 3° ordine, ecc.; se ϱ è la caratteristica della matrice F, se cioè sono *identicamente nulli rispetto ad* ω tutti i minori di ordine $\varrho + 1$ di F, giungeremo così fino ai polinomi $D_\varrho(\omega)$: se il determinante della F non è identicamente nullo, l'ultimo polinomio $D_n(\omega)$ è questo determinante medesimo. È manifesto ora che ognuno dei polinomi $D_1, D_2, D_3, \dots$ divide il successivo, e potremo quindi considerare l'altra successione di polinomi $E_1 = D_1$, $E_2 = \frac{D_2}{D_1}$, $E_3 = \frac{D_3}{D_2}, \dots E_\varrho = \frac{D_\varrho}{D_{\varrho-1}}$: questi si chiamano appunto i *divisori elementari* (*completi*) della matrice F; si dimostra inoltre che ogni divisore elementare E_i divide il successivo E_{i+1}. Supponiamo che il determinante $D(\omega)$ della F non sia identicamente nullo; si ha allora evidentemente $D(\omega) = E_1 . E_2 \dots E_n$. Si consideri inoltre un determinato campo di razionalità R che contenga tutti i coefficienti dei polinomi f_{ik}, e siano, in questo campo, $P_1 . P_2 \dots P_\nu$ i divisori primi *distinti* del determinante $D(\omega)$; ogni E_i sarà allora decomponibile, nel campo R, nel modo seguente $E_i = P_1^{\alpha_{i1}} . P_2^{\alpha_{i2}} \dots P_\nu^{\alpha_{i\nu}}$, dove alcuni degli α_{i1}, $\alpha_{i2} \dots$ possono anche essere nulli; i polinomi $P_\sigma^{\alpha_{1\sigma}} . P_\sigma^{\alpha_{2\sigma}} \dots P_\sigma^{\alpha_{n\sigma}}$ si dicono *i divisori elementari, nel campo* R, *della matrice* F, *relativi al divisore* P_σ *del determinante* $D(\omega)$ *di* F. Per tutto ciò si veda, ad es., MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*. (Leipzig, Teubner, 1899).

(2) Ricordiamo che con la notazione E si suole indicare la matrice unità di un certo ordine n:

$$E = \begin{Bmatrix} 1, 0, \dots 0 \\ 0, 1, \dots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0, 0, \dots 1 \end{Bmatrix};$$

si chiama inoltre *somma* di due matrici $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ aventi rispettivamente un ugual numero di righe ed un ugual numero di colonne, la matrice della quale ogni elemento s_{ik} è uguale a $a_{ik} + b_{ik}$. Se A è una matrice quadrata, con la notazione $|A|$ si suole intendere il determinante della matrice medesima.

(3) Vedi MUTH, *Op. cit.*, p. 29.

(4) Data una qualunque matrice $T = (t_{ik})$, con $|T| \neq 0$, la T^{-1} è la matrice *reciproca* di T, cioè quella matrice che risulta pienamente definita dalla relazione $TT^{-1} = T^{-1}T = E$. Si ha $T^{-1} = \left(\frac{T_{ki}}{|T|}\right)$ $(k, i = 1, 2, \dots n)$, essendo T_{ki} l'aggiunto di t_{ik} in T. Vedi MUTH, *op. cit.*, p. 26.

(5) Vedi ad es. MUTH, *op. cit.*, p. 152.

(6) Vedi O. NICOLETTI, *Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari* (Annali di matematica pura ed applicata, T. XIV (1908); pp. 265-325), Cap. I

Essendo ora A una qualunque matrice quadrata, si considerino i divisori elementari di $A - E\omega$ in un campo di razionalità R, cui appartenga A; siano $\omega^{\alpha_1}, \omega^{\alpha_2}, \ldots \omega^{\alpha_h}$ quelli relativi al divisore ω, $P_1^{\beta_1}$, $P_2^{\beta_2}, \ldots P_k^{\beta_k}$ (essendo i $P_1, P_2, \ldots P_k$ uguali o distinti) gli altri. La matrice di ordine α_i

$$A_{0,i} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

è tale evidentemente che la $A_{0,i} - E\omega$ ha l'unico divisore elementare ω^{α_i}; analogamente se è $P_j = \omega^{g_j} + a_1\omega^{g_j-1} + \ldots + a_{g_j-1}\omega + a_{g_j}$, per la matrice di ordine $\beta_j g_j$

$$B_{0,j} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots \\ -a_{g_j} & -a_{g_j-1} & -a_{g_j-2} & \ldots & -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1\ldots & 0 & 0\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{g_j} & -a_{g_j-1} & \ldots & -a_1 & 1\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Vmatrix}$$

si ha pure che la $B_{0,j} - E\omega$ ha l'unico divisore elementare $P_j^{\beta_j}$.

Consideriamo allora quella matrice A_0 di ordine $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h + g_1\beta_1 + \ldots + g_k\beta_k$ che si ottiene disponendo successivamente le matrici $A_{0,1}, A_{0,2}, \ldots A_{0,h}, B_{0,1}, B_{0,2}, \ldots B_{0,k}$ lungo la diagonale principale e riempiendo con zeri tutti i posti che rimangono. La A_0 è manifestamente, per il teorema poco fa ricordato, simile ad A, e sarà chiamata la *forma normale* di A nel campo R. [1]

Sia T una matrice (razionalmente determinabile) per la quale sia $A_0 = T^{-1}AT$, cioè, come si dice, che *riduca* A *alla sua forma normale*; si avrà $A_0^\mu = T^{-1}AT \cdot T^{-1}AT \ldots T^{-1}AT = T^{-1}A^\mu T$; ne segue in particolare che la caratteristica di A_0^μ è uguale a quella di A^μ, onde basterà determinare la caratteristica di A_0^μ.

Si osservi perciò che la matrice A_0^μ è formata con le $A_{0,i}^\mu$, $B_{0,j}^\mu$ come la A_0 è formata con le $A_{0,i}$, $B_{0,j}$; si vede allora che la caratteristica di A_0^μ $(\mu = 1, 2, 3 \ldots)$ è uguale alla somma delle caratteristiche di tutte le $A_{0,i}^\mu$, $B_{0,j}^\mu$ $(i = 1, 2 \ldots h; j = 1, 2 \ldots k)$, e poichè ogni $B_{0,j}^\mu$ ha evidentemente la caratteristica $\beta_j g_j$, poichè è $|B_{0,j}^\mu| = |B_{0,j}|^\mu \neq 0$, basterà calcolare la caratteristica $r_i^{(\mu)}$ di ogni matrice $A_{0,i}^\mu$; calcolate queste la caratteristica r di A_0^μ sarà data evidentemente da

$$r_\mu = \beta_1 g_1 + \ldots + \beta_k g_k + r_1^{(\mu)} + \ldots + r_h^{(\mu)}.$$

(1) Vedi O. Nicoletti, *Mem. cit.*, p. 287.

Si ha intanto manifestamente $r_1^{(1)}=\alpha_1-1, r_2^{(1)}=\alpha_2-1 \ldots r_h^{(1)}=\alpha_h-1$, e quindi $r_1=n-h$. Sia ora in generale h_t il numero dei divisori elementari di $A-E\omega$, relativi al divisore ω, con esponente maggiore di t; (¹) se noi supponiamo, per fissare le idee, $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_h$ avremo evidentemente

$$A^2_{0,i}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} (i=1,2\ldots h_1), \quad A^2_{0,h_1+1}=\ldots=A^2_{0,h}=0,$$

e così analogamente

$$A^3_{0,i}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix} (i=1,2\ldots h_2), \quad A^3_{0,h_2+1}=\ldots=A^3_{0,h}=0,$$

ecc... intendendo di indicare col simbolo 0 anche *una matrice nulla* (cioè composta tutta di elementi nulli). Confrontando allora la caratteristica di A_0^2 con quella di A_0 vediamo chiaramente che la prima si ottiene dalla seconda sottraendo h_1; così quella di A_0^3 si ha da quella di A_0^2 sottraendo h_2, e così via; si ha dunque $r_2=n-h-h_1$, $r_3=n-h-h_1-h_2$, ecc. e possiamo enunciare il risultato:

Se A *è una matrice quadrata di ordine* n, *e con* h *indichiamo il numero dei divisori elementari della matrice* $A-E\omega$ *relativi al divisore* ω, *e con* h_t *il numero di questi divisori il cui esponente è maggiore di* t, *la caratteristica di* A^μ *è data da* $n-h-h_1-\ldots-h_{\mu-1}$, *dove intendiamo che sia* $h_0=h$. (²)

Le caratteristiche delle varie potenze di una matrice si esprimono dunque per mezzo di elementi *invarianti* per qualsiasi trasformazione $T^{-1}AT$.

Si osservi in particolare che *la caratteristica del quadrato di una matrice* A, *di caratteristica* r *è* $\leqslant r$, *e* $\geqslant 2r-n$; questa caratteristica è infatti $r-h_1$; ma si ha $h_1 \leqslant h$ ed $h=n-r$; è dunque appunto $r \geqslant r-h_1 \geqslant r-h=r-(n-r)=2r-n$.

2. Venendo ora a considerare il prodotto di due matrici A, B, si capisce che sostituendo ad A, B due matrici rispettivamente simili

---

(¹) Sono questi i così detti *numeri di* PREDELLA; cfr. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pisa, Spoerri, 1907), p. 99.

(²) Cfr. anche SCHLESINGER, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Bd I (Leipzig, Teubner, 1895), pp. 124-7.

$A_1 = T^{-1}AT$, $B_1 = S^{-1}BS$, il prodotto A_1B_1 non avrà più la stessa caratteristica di AB; se infatti S e T sono due matrici diverse non si può, in generale almeno, affermare che AB ed $A_1B_1 = T^{-1}ATS^{-1}BS$ siano simili. Per togliere ogni dubbio, tanto più che la similitudine non è affatto condizione necessaria per l'ugnaglianza della caratteristica, si consideri il caso particolare del *quadrato per righe* di una matrice A, cioè il caso del prodotto AA'.

Sia A_0 la forma normale di A; se in tale matrice sopprimiamo le righe e le colonne nulle, si ottiene una matrice quadrata di ordine $n-h$ il cui determinante è diverso da 0; d'altra parte con tali soppressioni non si altera evidentemente la caratteristica del quadrato per righe; essa è dunque ancora $n-h$. Se quindi la caratteristica del quadrato per righe fosse invariante rispetto alle trasformazioni suddette, sarebbe, per ogni matrice, eguale a quella della matrice stessa; esistono invece, ed è facile costruirne degli esempi, delle matrici (ad elementi complessi) il cui quadrato per righe ha caratteristica minore della matrice; questo avviene, ad es. per la $\begin{pmatrix} 1, & i \\ 1, & i \end{pmatrix}$.

La caratteristica del quadrato per righe di una matrice, e quindi anche quella del prodotto di due matrici, non può dunque esprimersi con elementi invarianti rispetto alle dette trasformazioni.

3. Sia $A = (a_{ik})$ $(i = 1, 2 \dots m;\ k = 1, 2 \dots n)$ una matrice di m righe e di n colonne e $B = (b_{ki})$ una di n righe ed m colonne, e cominciamo col determinare una relazione fra la caratteristica di AB e quella di BA. Si consideri la matrice di ordine $n+m$

$$M = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m1}, & a_{m2}, & \dots & a_{mn} \\ b_{11}, & b_{12}, & \dots & b_{1m} & 0 & 0 & & 0 \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots & b_{2m} & 0 & 0 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots & b_{nm} & 0 & 0 & & 0 \end{Vmatrix},$$

e se ne faccia il quadrato; ponendo

$$AB = C = (c_{ij}),\ \ BA = D = (d_{hk}),\ (i, j = 1, 2 \dots m;\ \ h, k = 1, 2 \dots n),$$

si ottiene

$$M^2 = \begin{Vmatrix} c_{11} \dots c_{1m} & 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ c_{m1} \dots c_{mm} & 0 \dots 0 \\ 0 \dots\dots 0 & d_{11} \dots d_{1n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ 0 \dots\dots 0 & d_{n1} \dots d_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Se ora con c, c' indichiamo le caratteristiche di AB, BA rispettivamente, è manifesto che $c + c'$ è la caratteristica di M^2; d'altra parte, per ciò che sopra è stato detto, la caratteristica di M^2 è uguale a $n + m - h - h_1$, avendo h, h_1 i suddetti significati per la matrice M. Si ha ora evidentemente $n + m - h = r + s$, essendo r la caratteristica di A ed s quella di B; ne segue $h = n + m - r - s$. Se poi con H indichiamo il numero dei divisori elementari *uguali ad* ω della matrice $M - E\omega$, è $h - H = h_1$, ossia $h_1 = n + m - r - s - H$; è quindi

$$n + m - h - h_1 = r + s - n - m + r + s + H = 2r + 2s + H - n - m.$$

Si ha dunque

$$c + c' = 2r + 2s - H - n - m.$$

4. Sia ora A una matrice, come precedentemente, di m righe ed n colonne, e B una di n righe ma di un numero μ qualunque di colonne, e dimostriamo che:

La caratteristica del prodotto AB *non cambia se ad* A, B *sostituiamo due matrici* A_1, B_1 *che abbiano rispettivamente la stessa caratteristica di* A, B, *e tali che le righe di* A_1 *e le colonne di* B_1 *siano combinazioni lineari omogenee rispettivamente delle righe di* A *e delle colonne di* B.

Abbiasi infatti

$$a_{ik}^{(1)} = \sum_1^m{}_t\, x_{it}\, a_{tk} \qquad (i = 1, 2 \ldots p;\ k = 1, 2 \ldots n),$$

$$b_{kj}^{(1)} = \sum_1^\mu{}_\tau\, b_{k\tau}\, y_{\tau j} \qquad (j = 1, 2 \ldots q;\ k = 1, 2 \ldots n),$$

e le due matrici $(a_{ik}^{(1)})$, $(b_{kj}^{(1)})$ abbiano rispettivamente la stessa caratteristica di A (che indicheremo con r) e di B (che indicheremo con s); chiamando X la matrice (x_{it}) di p righe ed n colonne, ed Y la $(y_{\tau j})$ di μ righe e q colonne, le precedenti uguaglianze si scrivono

$$A_1 = XA, \qquad B_1 = BY. \tag{1}$$

Consideriamo ora gli m sistemi di equazioni lineari nelle incognite rispettivamente $\xi_{1,i}, \xi_{2,i} \ldots \xi_{m,i}$.

$$\sum_1^p{}_i\, \xi_{ti}\, a_{ik}^{(1)} = a_{tk} \qquad (k = 1, 2 \ldots n),$$
$$(\text{per } t = 1, 2 \ldots m);$$

poichè la matrice formata con tutte le righe di A e tutte quelle di A_1 ha ancora la caratteristica r, e tale è la caratteristica di A_1, la matrice completa

$$\left\{\begin{matrix} a_{11}^{(1)}, & a_{21}^{(1)}, & \ldots & a_{p1}^{(1)}, & a_{t1} \\ a_{12}^{(1)}, & a_{22}^{(1)}, & \ldots & a_{p2}^{(1)}, & a_{t2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}^{(1)}, & a_{2n}^{(1)}, & \ldots & a_{pn}^{(1)}, & a_{tn} \end{matrix}\right\},$$

di ciascuno di questi sistemi ha la caratteristica r, come la matrice dei coefficienti delle incognite (la quale non è che la trasposta di A_1). Ciascuno di quei sistemi ammette dunque soluzioni, e sia $\xi = (\xi_{ti})$ una matrice di m righe e p colonne, la cui riga t^{esima} sia una soluzione qualunque del t^{esimo} dei sistemi lineari sopra scritti; si ha allora manifestamente:

$$A = \xi\, A_1. \tag{2}$$

In modo del tutto analogo, considerando i μ sistemi

$$\sum_1^q{}_j\, b_{kj}^{(1)}\, \eta_{j\tau} = b_{k\tau}\ (k = 1, 2 \ldots n),$$
$$(\text{per } \tau = 1, 2 \ldots \mu),$$

troviamo una matrice $\eta = (\eta_{j\tau})$ di q righe e μ colonne, tale che si abbia

$$B = B_1 \eta. \tag{2$'$}$$

Ora dalle (1) si deduce

$$A_1B_1 = X\,(AB)\,Y,$$

e dalle (2), (2)$'$

$$AB = \xi\,(A_1B_1)\,\eta;$$

la matrice A_1B_1 ha quindi una caratteristica che non può essere maggiore nè minore di quella di AB, ed è perciò ad essa uguale.

Il numero delle righe di A_1 e quello delle colonne di B_1 sono affatto arbitrari, purchè non minori rispettivamente di r e di s; prendendoli uguali il primo ad m, il secondo a μ, le due matrici A_1, B_1 hanno lo stesso numero di righe e colonne delle primitive; prendendoli invece uguali ad r ed s rispettivamente, abbiamo in particolare che: *la caratteristica del prodotto di due matrici,* A, B (*di carattesistiche* r *ed* s) *non cambia se ad* A (B) *sostituiamo una matrice di* r *righe* (s *colonne*), *combinazioni lineari omogenee delle righe* (*colonne*) *di* A (B), *ed avente la caratteristica* r (s).

Più in particolare ancora *si possono trascurare di* A $m - r$ *righe, e di* B $\mu - s$ *colonne che siano combinazioni lineari omogenee delle rimanenti.*

Notiamo esplicitamente che con la frase: *ridurre una matrice* A *alle sue righe indipendenti,* intenderemo, nei numeri che seguono, di comprendere non solo il caso che le righe che si considerano appartengano effettivamente alla matrice A, ma anche il caso più generale che si voglia considerare una matrice formata come la A_1, ma di r righe; analogamente si dica per le colonne.

5. Il teorema ora dimostrato permette di fare le seguenti immediate osservazioni; esse sono conseguenza, del resto, anche delle note proprietà relative alle *matrici associate* ad una matrice data (*abgeleitete*, secondo Kronecker). (¹)

(¹) Ricordiamo che si chiama k^{esima} *matrice associata* ad una matrice data, la matrice formata coi minori di ordine k della data, ordinata secondo l'ordine naturale delle combinazioni k^{esime} degli indici delle righe e delle colonne. Per le proprietà sopra accennate Vedi O. Nicoletti, *Sulle matrici associate ad una data* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1902).

Premettiamo che dalla definizione stessa di caratteristica di una matrice segue che la condizione necessaria e sufficiente perchè la caratteristica del prodotto di due matrici A, B, di ugual caratteristica r, sia ancora uguale ad r, è che riducendo A alle sue righe indipendenti, B alle sue colonne indipendenti, la somma di tutti i prodotti di due minori corrispondenti di ordine massimo delle due matrici ridotte, sia diversa da 0. Questa somma è infatti uguale al determinante della matrice prodotto delle due matrici ridotte, la quale matrice ha, per il numero precedente, la stessa caratteristica di AB.

a) Sia A una matrice quadrata, e facciamo, in quel che precede $B = A$; di più, essendo n l'ordine, sia $n-1$ la caratteristica di A; indicando con A_{ik} l'aggiunto dell'elemento a_{ik} la condizione ora detta viene espressa da $\sum_1^n{}_k A_{ik} A_{kj} \neq 0$, onde, supponendo $A_{ij} \neq 0$ e tenendo conto dell'identità $A_{ik}A_{kj} = A_{ij}A_{kk}$, si ottiene:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la seconda potenza di una matrice quadrata, di ordine n *e caratteristica* $n-1$, *sia di caratteristica* $n-1$, *è che sia diversa da* 0 *la somma degli aggiunti principali della matrice.*

b) Per il caso $B = A'$ si ottiene invece che la condizione necessaria e sufficiente perchè il *quadrato per righe* di una matrice A di caratteristica r abbia ancora la caratteristica r, è che riducendo la matrice alle sue righe indipendenti, la somma dei quadrati dei minori di ordine r di questa matrice ridotta, sia diversa da 0.

c) Ciò accade in particolare se i rapporti dei detti minori sono reali, e quindi *a fortiori* per una matrice ad elementi reali; dunque: *Il quadrato per righe di una matrice ad elementi reali ha la stessa caratteristica della matrice primitiva.*

6. Osserviamo ancora il seguente caso particolare del teorema del n. 4 perchè ci servirà nel seguito. Siano C e D due matrici, la prima di m righe ed n colonne, la seconda di n righe e μ colonne, *ed una di esse sia di caratteristica n*. Applicando la proprietà sopra osservata, si potrà sostituire a C una matrice quadrata C_1 di ordine n, ed a D una matrice D_1, pure quadrata e di ordine n; dei due determinanti $|C_1|$, $|D_1|$ uno sarà diverso da 0, quello corrispondente alla matrice di caratteristica n; se quindi poniamo $C_1D_1 = P$, questa relazione si potrà risolvere rispetto a quella delle C_1, D_1 su cui non abbiamo fatto alcuna ipotesi, (¹) onde segue che essa e P hanno la stessa caratteristica. Dunque *il prodotto* CD *ha in tal caso per caratteristica la minore delle caratteristiche di* C *e di* D.

7. Siano, come prima, A, B due matrici qualunque, la prima di m righe ed n colonne, la seconda di n righe e μ colonne, e siano r, s le loro caratteristiche. Essendo t il più grande dei due numeri r ed s,

(¹) Se è, ad es., $|C_1| \neq 0$ si ricava $D_1 = C_1^{-1}P$.

sia α una matrice avente per righe t combinazioni lineari omogenee delle righe di A, e di caratteristica r, e β analogamente una matrice di caratteristica s, le cui colonne siano t combinazioni lineari omogenee delle colonne di B; il prodotto $\alpha\beta$ ha la stessa caratteristica di AB. Osservando allora che, per il numero precedente, $\beta\alpha$ ha per caratteristica il più piccolo dei due numeri r ed s, ed applicando le considerazioni del n. 3, possiamo dire che *la caratteristica del prodotto* AB *è uguale a quella del quadrato della matrice ausiliaria.*

$$P = \left\{\begin{matrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_{t1}, & \alpha_{t2}, & \ldots & \alpha_{tn} \\ \beta_{11}, & \ldots & \beta_{1t} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}, & \ldots & \beta_{nt} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\}$$

diminuita del più piccolo dei numeri r, s. Gli α_{hk}, β_{kh} hanno la definizione suddetta; in particolare si può supporre che le due matrici

$$\left\{\begin{matrix} \alpha_{11}, & \alpha_{12}, & \ldots & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{t1}, & \alpha_{t2}, & \ldots & \alpha_{tn} \end{matrix}\right\}, \qquad \left\{\begin{matrix} \beta_{11}, & \ldots & \beta_{1t} \\ \beta_{21}, & \ldots & \beta_{2t} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{n1}, & \ldots & \beta_{nt} \end{matrix}\right\}$$

siano due matrici formate rispettivamente con righe di A e con colonne di B, in modo da lasciare inalterata la caratteristica.

Per la relazione stabilita al n. 3 possiamo anche enunciare la cosa così: *Se* H *è il numero dei divisori elementari uguali ad* ω *della matrice* $P - E\omega$, *la caratteristica di* AB *è data da* $r + s + H - n$.

Ne viene che questo numero H dei divisori elementari uguali ad ω di $P - E\omega$ è $\leqslant n - t$, ossia è $\leqslant n - r$, e $\leqslant n - s$.

Segue inoltre di qui che *la caratteristica del prodotto* AB *è maggiore od uguale ad* $r + s - n$; quando sia $r + s - n \leqslant 0$ questa proprietà diviene illusoria, perchè dà per limite inferiore lo 0. È evidente che il limite inferiore $r + s - n$ (o 0) può essere raggiunto, e ciò allora e solo allora che sia $H = 0$ (o $H = n - r - s$). Per $t = n$ questa osservazione si riduce a quella del n. 6.

8. In ciò che precede è implicitamente incluso che tutte le infinite matrici P, che si possono formare nel modo indicato, sono tali che i loro quadrati hanno la stessa caratteristica; e cioè: siano α, β due matrici qualunque di t righe ed n colonne la prima, di n righe e t colonne la seconda, di caratteristiche rispettivamente r, s, ed uno almeno di questi numeri sia uguale a t; siano poi $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ due matrici dello stesso tipo e caratteristica rispettivamente di α, β, e le cui righe (risp. colonne) siano combinazioni lineari di quelle di α (risp. β); se poniamo, con notazioni di evidente significato,

$$P=\begin{Bmatrix} 0, \alpha \\ \beta, 0 \end{Bmatrix}, \qquad \overline{P}=\begin{Bmatrix} 0, \overline{\alpha} \\ \overline{\beta}, 0 \end{Bmatrix},$$

le due matrici P^2, $\overline{P}^2$ hanno la stessa caratteristica. La dimostrazione risulta dalle cose suddette, e può riassumersi semplicemente osservando che è

$$P^2=\begin{Bmatrix} \alpha\beta, 0 \\ 0, \beta\alpha \end{Bmatrix}, \qquad \overline{P}^2=\begin{Bmatrix} \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, 0 \\ 0, \overline{\alpha}\,\overline{\beta} \end{Bmatrix},$$

mentre, per osservazioni fatte sopra, $\beta\alpha$ e $\overline{\beta}\,\overline{\alpha}$ hanno ambedue la caratteristica t, ed $\alpha\beta$ e $\overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ hanno pure una medesima caratteristica. Più intima relazione fra le due matrici P e $\overline{P}$ non ha luogo in generale.

9. Supponiamo che la matrice

$$\alpha=\begin{Bmatrix} \alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots \alpha_{1n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{t1}, \alpha_{t2}, \ldots \alpha_{tn} \end{Bmatrix}$$

di cui al n. 7 abbia la caratteristica t, e sia ad es.

$$\gamma=\begin{vmatrix} \alpha_{11} \ldots \alpha_{1t} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{t1} \ldots \alpha_{tt} \end{vmatrix} \neq 0;$$

ciascuno dei t sistemi di equazioni lineari

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11}\ x_1+\alpha_{21}\ x_2+\ldots+\alpha_{t1}\ x_t=0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{1\mu}\ x_1+\alpha_{2\mu}\ x_2+\ldots+\alpha_{t\mu}\ x_t=1 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{1t}\ x_1+\alpha_{2t}\ x_2+\ldots+\alpha_{tt}\ x_t=0 \end{array}\right\} \qquad (\mu=1,2,\ldots t),$$

nelle incognite $x_1, x_2, \ldots x_t$, ha allora una ed una sola soluzione $x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}, \ldots x_t^{(\mu)}$. Formiamo ora le seguenti t combinazioni lineari omogenee delle righe della matrice α:

$$\sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu 1}, \ldots \sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu,t}\,, \sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu,t+1}\,, \ldots \sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu,n},$$
$$(\mu=1,2,\ldots.t);$$

si ha evidentemente

$$\sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu\sigma}=\delta_{\mu\sigma}\ \ (\mu,\sigma=1,2,\ldots t),\ \ (\delta_{\mu\sigma}=0 \text{ per } \mu\neq\sigma, \delta_{\mu\mu}=1),$$

$$\sum_1^t{}_\nu\, x_\nu^{(\mu)}\,\alpha_{\nu,t+\varrho}=\frac{\gamma_{\mu\varrho}}{\gamma}\quad (\mu=1,2,\ldots t;\ \varrho=1,2,\ldots n-t),$$

avendo posto:

$$\gamma_{\mu\varrho} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1,\mu-1}, \alpha_{1,t+\varrho}, \alpha_{1,\mu+1} \dots \alpha_{1t} \\ \alpha_{21} \dots \alpha_{2,\mu-1}, \alpha_{2,t+\varrho}, \alpha_{2,\mu+1} \dots \alpha_{2t} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{t1} \dots \alpha_{t,\mu-1}, \alpha_{t,t+\varrho}, \alpha_{t,\mu+1} \dots \alpha_{tt} \end{vmatrix}$$

Se la matrice α ha invece per caratteristica il minore dei numeri r, s, numero che indicheremo con τ, si possono fare t combinazioni lineari omogenee delle sue righe, $t-\tau$ delle quali siano composte di elementi nulli, le altre τ siano formate analogamente a quelle considerate nell'ipotesi precedente. Se poi non fosse, come abbiamo supposto, il primo minore diverso da 0, i determinanti $\gamma_{\mu\varrho}$ sarebbero sostituiti da altri determinanti formati nel medesimo modo con quel minore che sarà diverso da 0. Vediamo dunque che alla matrice α, e così alla β, può sostituirsi, in P, una matrice puramente dipendente dai rapporti dei minori di α (risp. di β) di ordine uguale alla relativa caratteristica.

Ricordiamo ora che l'r^{esima} matrice associata di una matrice di caratteristica r ha la caratteristica 1. [1] Ne segue che se in una matrice qualunque di caratteristica r prendiamo una matrice di r righe (colonne) pure di caratteristica r, o più generalmente formiamo una nuova matrice di caratteristica r ed avente per righe (colonne) r combinazioni lineari omogenee delle righe (colonne) della matrice primitiva, i rapporti dei minori di ordine r di questa seconda matrice sono invarianti rispetto agli infiniti modi in cui tale matrice si può formare; gli chiameremo, per brevità, *i rapporti dei minori di ordine* r *relativi alle righe* (*colonne*) *della matrice primitiva.*

Possiamo dunque dire che *la caratteristica del prodotto di due matrici* A, B, *di caratteristiche rispettivamente* r *ed* s, *dipende solo dai rapporti dei minori di ordine* r *relativi alle righe di* A, *e dai rapporti dei minori di ordine* s *relativi alle colonne di* B.

10. Esaminiamo infine i seguenti casi particolari.

Si ha intanto che: *Se in una matrice quadrata gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono numeri complessi coniugati, e quelli della diagonale principale sono reali, tutte le sue potenze hanno la medesima caratteristica della matrice stessa.* — Sia infatti A una tale matrice ed r la sua caratteristica, e si consideri una matrice A_1 formata da r righe di A, avente la caratteristica r; se $i_1, i_2, \dots i_r$ sono i numeri d'ordine di queste righe, si consideri inoltre quella matrice A_2

---

(1) Ciò si può dimostrare nel modo seguente. Sia $A = (a_{ik})$ una matrice quadrata di caratteristica r, e siano A_1, A_2 due matrici, ciascuna delle quali sia formata con r righe di A, e la prima sia inoltre di caratteristica r; ogni riga di A_2 sarà allora una combinazione lineare omogenea delle righe di A_1, e potremo quindi scrivere, con una certa matrice X, $A_2 = XA_1$. Se $M_1^{(1)}, M_1^{(2)}, \dots$ sono i vari minori di ordine r tratti dalla A_1, e $M_2^{(1)}, M_2^{(2)}, \dots$ rispettivamente i *corrispondenti* tratti dalla A_2, avremo evidentemente $M_2^{(\sigma)} = |X| M_1^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, 3 \dots)$, e ciò dimostra appunto che la r^{esima} matrice associata della A ha caratteristica 1.

di r colonne, formata con le colonne $i_1^{\text{esima}}, i_2^{\text{esima}}, \ldots i_r^{\text{esima}}$ di A. Il determinante del prodotto $A_1 A_2$ è uguale alla somma dei prodotti dei minori *corrispondenti* di ordine r di A_1 e di A_2, e poichè due tali minori sono complessi coniugati, perchè fosse $|A_1 . A_2| = 0$ dovrebbero essere nulli tutti questi minori, il che è contro l'ipotesi. D'altra parte $|A_1 . A_2|$ non è che il minore principale di ordine r di A^2, avente per righe e colonne le $i_1^{\text{esime}}, i_2^{\text{esime}} \ldots i_r^{\text{esime}}$; A^2 ha dunque la caratteristica r. — Per completare la dimostrazione si osservi che anche in A^2 gli elementi simmetrici rispetto alla diagonale principale sono complessi coniugati; $A^4 = (A^2)^2$ ha dunque ancora la caratteristica r, e questa caratteristica ha perciò anche A^3, in quanto che la caratteristica di A^3 deve essere minore od uguale a quella di A^2, maggiore od uguale a quella di A^4. (¹)

Il teorema ora dimostrato vale in particolare per le matrici reali e simmetriche.

La proprietà ora osservata permette di determinare un'altra condizione, però solo sufficiente, perchè date due matrici A, B della stessa caratteristica r, il prodotto AB abbia ancora caratteristica r.

Supponiamo perciò che si possano formare r combinazioni lineari omogenee delle righe di A, la cui matrice abbia la caratteristica r, ed altrettante delle colonne di B, la cui matrice abbia pure la caratteristica r, e tali inoltre che ogni elemento delle prime combinazioni sia il numero complesso coniugato del *corrispondente* elemento delle seconde; la matrice P di cui al n. 6, formata con queste combinazioni, soddisfa allora alla condizione di sopra, onde segue appunto che il prodotto AB ha la caratteristica r.

Si indichi d'altra parte con B_0 la matrice complessa coniugata di B (cioè quella matrice i cui elementi sono i numeri complessi coniugati di quelli di ugual posto in B); se l'ipotesi detta è verificata, esistono allora r combinazioni lineari omogenee indipendenti delle colonne di B_0, le quali sono anche combinazioni lineari omogenee delle righe di A, e vediamo quindi che le colonne di B_0 sono combinazioni lineari (omogenee) delle righe di A, come anche inversamente. Indichiamo allora con A' la matrice trasposta di A, e con (A', B_0) la matrice avente per colonne le colonne di A' seguite da quelle di B_0; la (A', B_0) avrà anch'essa, per quel che ora abbiamo detto, la caratteristica r. Supponiamo viceversa che la (A', B_0) abbia la caratteristica r; le colonne di B_0 sono allora combinazioni lineari delle righe di A, ed esistono quindi effettivamente r colonne di B, costituenti una matrice di caratteristica r, che sono le complesse coniugate di certe r combinazioni lineari omogenee indipendenti dalle righe

(¹) Questo teorema può dimostrarsi anche valendosi del risultato del n. 1, e del fatto che se A è una matrice che gode della proprietà detta nel testo, i divisori elementari di $A - E\omega$ sono tutti lineari (MUTH, *op. cit.*, p. 189). Segue infatti di qui $h_1 = h_2 \ldots = 0$.

di A. È poi manifesto che invece della matrice (A', B_0) può adoperarsi la (A'_0, B). Possiamo dunque dire:

Se due matrici A, B *di ugual caratteristica sono tali che la matrice* (A', B_0) [*o la* (A_0', B)] *abbia pure la medesima caratteristica, tale caratteristica ha anche il prodotto* AB.

Per il caso del *quadrato per righe* $(B = A')$ la matrice da considerarsi è (A', A'_0) ossia $\begin{pmatrix} A \\ A_0 \end{pmatrix}$, cioè la matrice avente per righe le righe di A e quelle di A_0; e se poniamo $a_{hk} = \alpha_{hk} + i\alpha'_{hk}$ con $\alpha_{hk}, \alpha'_{hk}$ reali, vediamo immediatamente che l'ultima matrice ha la stessa caratteristica della $\begin{pmatrix} \alpha_{hk} \\ \alpha'_{hk} \end{pmatrix}$; dunque: *Se una matrice ha la stessa caratteristica della matrice che si ottiene da essa sostituendo ad ogni riga le due righe costituite l'una dalle parti reali, l'altra dai coefficienti dell'imaginario della riga primitiva, il quadrato per righe della prima matrice ha caratteristica uguale a quella della matrice stessa.*

Questo criterio è applicabile alle matrici normali considerate al n. 2.

F. Cecioni.

Forma canonica del postulato di continuità

1. Quando Dedekind ricostruì con eleganza e rigore la teoria dei numeri irrazionali pose anzitutto in rilievo che quando tutti i numeri reali sian ripartiti in due classi in modo che i numeri d'una sian tutti minori di quelli dell'altra, sempre od ha massimo la prima classe, ed allora non ha minimo la seconda, oppure ha minimo la seconda ed allora non ha massimo la prima. [1] Tuttavia il suo celebre postulato [2] riuscì vago dove afferma l'esistenza del numero di sezione, cosicchè esso postulato non fa pensar subito ad un numero non meno preciso d'un qualsiasi numero razionale dato direttamente; ma guida ad assicurarne un'esistenza quasi ideale [3] mediante la possibilità di seguire una successione infinita numerica, che fa tendere la mente verso un numero, che non raggiunge ma intuisce con sufficiente chiarezza e precisione per poterlo accettare senza incertezza. In prova di questa mia affermazione basterà far rilevare che l'espressione

[1] Richard Dedekind, *Stetigkeit und irrationale zahlen*, Braunschweig, 1872, p. 14. III. — V. anche Salvatore Pincherle, *Lezioni d'algebra complementare; Analisi algebrica*, Bologna, 1906, p. 63.

[2] Dedekind, l. c., p. 18 e IV a p. 25.

[3] P. Mansion, *Résumé d'analyse*, Paris, 1887, p. 234. — V. anche S. Pincherle, *Lezioni d'algebra complementare; Teoria delle equazioni*, Bologna, 1909, p. 142 in nota.

passaggio al limite è ancora usata dai matematici con un certo qual senso di mistero.

Io ho cercato di ridurre alla maggior precisione possibile il postulato fondamentale della teoria dei numeri reali, e del continuo.

In questa Nota dò appunto un postulato di continuità, che ritengo preferibile a quelli di DEDEKIND, di CANTOR e di WEIERSTRASS (1) per la sua forma precisa, semplice e intuitiva: sono anzi convinto che non si possa pervenire ad altra forma più conveniente; e qui trova la sua ragione il titolo, che ho dato alla Nota. Dal mio postulato si rileva immediatamente l'*impossibilità*, mai rilevata prima in modo esplicito, *di dividere una retta in due parti identiche*. E se ne deduce facilmente l'*inesistenza di transfiniti nella geometria ordinaria*, cioè il principio detto " postulato di ARCHIMEDE ", da STOLZ, che fu primo a vedere la possibilità di dimostrarlo ed effettivamente lo dimostrò. (2)

Faccio seguire alcune dimostrazioni di note proposizioni d'analisi affine di porre in rilievo praticamente la convenienza della forma da me adottata per il postulato di continuità; e spero si riconosca che esse dimostrazioni hanno un'importanza propria per la loro grande semplicità. E non credo fuor di luogo fermare l'attenzione su quella delle funzioni derivate, che è certamente della massima importanza e non si trova negli usuali trattati d'analisi.

Questa mia Nota non tende a bandire l'espressione di passaggio al limite, tende solo a toglierle il carattere d'*operazione mistica* per darle quello determinato e preciso delle operazioni elementari, cosicchè dagli elementi d'un processo convergente si passi al limite con quella spontaneità e sicurezza con cui dai termini d'un'addizione indicata si passa al totale.

2. SEMIRETTA. — Diremo semiretta l'insieme di tutti i punti d'una retta posti da un lato di un punto della medesima. Una semiretta non ha nè primo nè ultimo punto. Diremo che un punto di retta la divide nelle due semirette da esso separate, le quali con esso forman la retta. Diremo che un punto di retta è *confine* o *colimite* delle due semirette in cui esso divide la retta; diremo pure che è *estremo limite* di ciascuna delle due semirette.

Per dare una semiretta basta darne un punto qualunque e l'estremo limite.

RAGGIO. — Diremo raggio l'insieme d'una semiretta col suo estremo limite, che diremo *estremo* del raggio. Si può considerare l'estremo come primo punto ed allora diremo ch'esso è a sinistra di tutti gli

(1) F. ENRIQUEZ, *Prinzipien der Geometrie*, *Encyklopädie der Math. Wiss.*, III_1, 1897, p. 1-129 e particolarmente p. 7.

(2) O. STOLZ, *Zur Geometrie der Alten, inbesondere über ein axiom des* ARCHIMEDES; *Math. Ann.*, XXII, 1883, p. 504-19 e particolarmente p. 510. — V. anche S. PINCHERLE, *Analisi algebrica*, Bologna, 1906, p. 62 in nota.

altri punti del raggio o che li precede, per cui diremo che questi sono a destra dell'estremo o che si trovan dopo di esso o che lo seguono. Si può pure considerare l'estremo ultimo punto, e allora diremo che esso è a destra di tutti gli altri punti del raggio o che si trova dopo di essi, per cui diremo che questi sono a sinistra dell'estremo o che lo precedono. Un raggio, adunque, od ha il primo ed allora non ha ultimo punto; oppure ha l'ultimo ed allora non ha primo punto. Un raggio s'estende indefinitamente da un sol lato d'un suo punto qualunque; dall'altro lato del punto, se questo non sia l'estremo, non s'estende indefinitamente e da questo lato il raggio è chiuso dall'estremo.

Per dare un raggio basta dare l'estremo ad un altro suo punto.

Segmento. — Dicesi segmento, rettilineo, l'insieme di due punti d'una retta, che si dicono *estremi*, e di tutti i punti della medesima compresi tra questi due. Si possono considerare gli estremi come primo ed ultimo, ed allora ogni altro punto del segmento è a destra del primo punto, detto primo estremo od *origine*, ed è a sinistra dell'ultimo, detto secondo estremo o *termine*.

Per dare un segmento bisogna darne gli estremi.

Tratto. — Diremo tratto ciò che si ottiene da un segmento levando ad esso un estremo, che diremo *estremo limite* del tratto. Un tratto ha così un *estremo* ed un estremo limite; non si estende indefinitamente da nessuno dei due lati d'un suo punto qualunque; da un lato è chiuso dall'estremo e dall'altro lato è aperto. Un tratto od ha il primo, ed allora non ha ultimo punto, od ha l'ultimo ed allora non ha primo punto,: si potrebbe dir tratto *progressivo* nel primo caso e *regressivo* nel secondo.

Per dare un tratto bisogna darne l'estremo e l'estremo limite.

Intervallo. — Diremo intervallo di due punti, che si diranno *estremi limiti*, l'insieme di tutti i punti compresi fra questi due della retta da essi determinata. Un intervallo non ha nè primo nè ultimo punto; è aperto da entrambi i lati di ogni suo punto qualunque. che due punti son separati dal loro intervallo.

Per dare un intervallo bisogna darne gli estremi limiti.

Le proposizioni precedenti vanno considerate come definizioni intuitive: le abbiamo poste solo per essere intesi, essendo unico scopo di questa nota la forma più conveniente del postulato di continuità. Per esse proposizioni, la retta dei due punti A, B consta di questi due punti, del loro intervallo, della semiretta A′,B formata dei punti che B separa da A, e della semiretta AB′ formata dei punti che A separa da B. [1]

3. Retta sezionata. — Se si dividono tutti i punti d'una retta in due classi ponendo in una un punto con tutti quelli posti da un

[1] Giuseppe Peano, *I principii di Geometria logicamente esposti*, Torino, Bocca, 1889, P. I, § 2.

particolar lato, a destra od a sinistra, del medesimo e ponendo nell'altra classe tutti gli altri punti della retta, questa risulta divisa in un raggio, che contiene tutti e soltanto i punti della prima classe, ed una semiretta, che contiene tutti e soltanto i punti della seconda: e, praticamente, qualsiasi segmento si può portare sul raggio in modo che un suo prefissato estremo si sovrapponga all'estremo del raggio.

Uniformandoci a questo risultato d'osservazione ammetteremo il seguente postulato:

Postulato di continuità. — Se tutti i punti d'una retta sono divisi in due classi in modo che quelli d'una siano tutti a sinistra di quelli dell'altra, e quindi quelli della seconda sian tutti a destra di quelli della prima, le due classi costituiscono un raggio ed una semiretta: e sul raggio vi è un punto, che è separato dall'estremo da intervallo uguale a quello di due punti prefissati arbitrariamente.

Segue immediatamente, da questo postulato, che *non si può dividere una retta in due parti identiche*, dal momento che le due parti formanti una retta son necessariamente un raggio ed una semiretta.

4. Teorema dei confini. — *Se sopra una retta ed a destra d'un punto è dato un aggregato di punti, o l'aggregato ha primo punto o vi è ultimo punto tra quelli della retta posti a sinistra d'ogni punto dell'aggregato.*

Poniamo infatti in una prima classe tutti i punti della retta che sono a sinistra d'ogni punto dell'aggregato e poniamo in una seconda classe tutti gli altri punti della retta, cioè quelli dell'aggregato e quelli a destra di qualche punto dell'aggregato. Per il postulato di continuità le due classi costituiscono un raggio ed una semiretta. L'estremo del raggio è primo punto dell'aggregato, se il raggio è costituito dei punti della seconda classe ed è ultimo dei punti della retta posti a sinistra d'ogni punto dell'aggregato se il raggio è costituito dei punti della prima classe.

L'esterno del raggio si dice *confine sinistro* dell'aggregato.

Si dimostra in modo analogo che: *se sopra una retta ed a sinistra d'un punto è dato un aggregato di punti, o l'aggregato ha ultimo punto o v'è primo punto tra quelli posti a destra d'ogni punto dell'aggregato.* Tal punto, od ultimo dell'aggregato o primo dei punti a destra del medesimo, si dice *confine destro* dell'aggregato.

5. Teorema di Stolz, o d'inesistenza di transfiniti. — *Se sono dati due segmenti disuguali, tra i multipli del minore ve ne sono di più grandi del maggiore.* (1)

Siano AB il segmento maggiore e CD il minore. Tanto per intenderci supponiamo B a destra di A. Sul raggio AB d'origine A, procedendo sempre nel verso del raggio cioè da sinistra a destra, si

(1) Questa proposizione vien detta postulato di Archimede; ma lo stesso Archimede, nel suo scritto sulla quadratura della parabola, fa sapere ch'era conosciuta dai suoi predecessori. — V. anche M. Cantor, *Geschichte der Mathematik*, I, p. 209.

portino gli infiniti segmenti AC_1, C_1C_2, C_2C_3, ... tutti uguali a CD. Per la seconda parte del postulato di continuità nessun punto può essere ultimo punto dell'aggregato dei punti C_1, C_2, C_3, ... e neppure può essere primo punto a destra d'ogni punto di quest'aggregato: pel teorema del numero precedente non possono quindi questi punti esser tutti a sinistra nè di B nè d'un qualsiasi punto posto a destra di B, epperò ve ne debbono essere anche a destra di B. Se è C_n uno dei punti a destra di B, si ha che $AC_n > AB$ ossia che

$$n\,\overline{CD} > \overline{AB}\,.$$

Corollario. — *Se sono dati due segmenti disuguali, tra i sottomultipli del maggiore ve ne sono di più piccoli del minore.*

6. Rappresentazione dei numeri reali sulla retta. — Sopra una retta, asse reale, fissiamo un punto O, che diremo *origine*, ed un punto U, che diremo *punto unità*, a destra di O: a questi punti facciamo corrispondere 0 ed 1, che direm loro *affissi* o *coordinate* od *ascisse*. Ad ogni altro punto P a destra di O, ossia del *semiasse positivo*, facciamo corrispondere un numero, che diremo affisso o coordinata od ascissa d'esso punto, attenendoci a questo principio: *l'ascissa del punto* P *è maggiore delle ascisse di tutti i punti posti fra* O *e* P *ed è il numero positivo razionale* $\frac{m}{n}$ *se*

$$\overline{OP} = \frac{m}{n}\,\overline{OU}\,.$$

Per questo principio, conformemente ai canoni aritmetici $n+1>n$ ed

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} > \frac{r}{s}$$

se

$$mq = np, \quad ms > nr.$$

Hanno così ascisse razionali i punti separati dall'origine da intervalli commensurabili coll'intervallo unità, cioè con quello separante il punto unità dall'origine. Gli altri punti, quelli separati dall'origine da intervalli incommensurabili con l'intervallo unità, hanno ascisse irrazionali. Per il precedente corollario del teorema di Stolz due punti qualunque del semiasse positivo son separati da infiniti punti d'ascisse razionali, per cui ogni punto Q è perfettamente determinato dal modo in cui esso separa i punti d'ascisse razionali e la sua ascissa ritiensi quindi determinata rigorosamente dalla proprietà, prestabilita, d'esser maggiore d'ogni ascissa razionale di punto posto fra l'origine ed esso punto Q e di esser minore d'ogni ascissa razionale di punto posto a destra di Q.

Facciamo ora corrispondere ad ogni punto a sinistra di O, ossia del *semiasse negativo*, un numero negativo, che pur diremo affisso o coordinata od ascissa del punto, attenendoci a questo principio: *due* *punti simmetrici rispetto all'origine hanno ascisse contrarie*, cioè dello stesso valore assoluto e di segno diverso.

Resta così stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra i punti di retta, ossia del continuo geometrico, ed i numeri reali: a sinistra e destra per punti della retta corrispondono minore e maggiore per le respettive ascisse o corrispondenti numeri reali. Nelle proposizioni, che daremo in seguito, ci riferiremo indifferentemente a punti di retta od a numeri reali perchè ognuno potrà sempre, con sicurezza e facilità, sostituire concetto aritmetico a concetto geometrico, o viceversa.

Fissiamo intanto l'attenzione su queste due proposizioni equivalenti, che immediatamente ricavansi da quanto fu già detto:

I. *Ogni numero reale è minimo dei numeri reali maggiori d'ogni numero razionale minore d'esso numero ed è massimo dei numeri reali minori d'ogni numero razionale maggiore d'esso numero.*

II. *Se son dati due segmenti, uno qualunque d'essi è minimo dei segmenti maggiori dei minori d'esso commensurabili con l'altro ed è massimo dei segmenti minori dei maggiori d'esso commensurabili con l'altro.*

Rappresentazione dei numeri reali sul circolo. — Si consideri un circolo tangente all'asse reale nell'origine O; al punto I diametralmente opposto ad O si dia ∞ per affisso; e ad ogni altro punto M del circolo si dia per affisso l'ascissa del punto d'intersezione dell'asse reale con la retta IM; sarà quindi *o* l'affisso di O. Resterà così stabilita una corrispondenza biunivoca continua anche tra i numeri reali ed i punti del circolo; su questo è accessibile anche il punto I d'affisso ∞ mentre non è accessibile il corrispondente punto dell'asse reale. Per questa rappresentazione, in quanto riguarda i numeri reali, si potrebbe ammettere convenzionalmente che i punti del circolo sian separati da intervalli proporzionati a quelli separanti i punti corrispondenti dell'asse reale: sul circolo vi sarebbe quindi un punto di discontinuità, il punto I, non potendosi prendere un punto separato da I di dato intervallo, essendo tutti infiniti gli intervalli separanti il punto I dagli altri punti del circolo sul circolo.

Crediamo conveniente ricordare che s'usa considerare ∞ soltanto come limite, cosicchè dicendo che una funzione sia data in un aggregato di punti devesi intendere ch'essa abbia valore unico e finito in ciascun punto dell'aggregato.

7. Confini inferiore e superiore. — Abbiamo detto che, per la corrispondenza biunivoca tra i punti di retta ed i numeri reali, ogni proposizione relativa a numeri reali può enunciarsi in forma geometrica pei punti di retta, e viceversa. Enunciando p. es. in forma aritmetica le proposizioni del numero 4, tenendo presente anche quanto fu detto nel num. 6, si ha che:

Se è dato un aggregato di numeri reali tutti maggiori d'un numero dato, esiste un numero detto *confine inferiore dell'aggregato*, il quale od è minimo numero dell'aggregato od è massimo dei numeri reali minori d'ogni numero dell'aggregato, cioè un numero che è *il massimo dei numeri reali minori d'ogni numero razionale che superi qualche numero dell'aggregato.*

Se è dato un aggregato di numeri reali tutti minori d'un numero dato, esiste un numero detto *confine superiore dell'aggregato*, il quale od è massimo numero dell'aggregato od è minimo dei numeri reali maggiori d'ogni numero dell'aggregato, cioè un numero che è *il minimo dei numeri reali maggiori d'ogni numero razionale, che sia minore di qualche numero dell'aggregato.*

Diremo *passaggio al confine inferiore o superiore* d'un aggregato di numeri reali l'operazione avente per risultato il confine inferiore o superiore dell'aggregato, supposto beninteso che l'aggregato non sia illimitato inferiormente o superiormente.

E diremo *passaggio al colimite od al numero di sezione* d'una coppia di classi limitrofe, o contigue, di numeri reali l'operazione avente per risultato il colimite delle due classi, ossia confine superiore della classe inferiore e confine inferiore della classe superiore.

8. Tendenze a limite. — Si riconosce subito che, se tende a limite la successione infinita di numeri reali

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

ossia se tende a limite la variabile reale a_n coll'aumentare indefinitamente dell'intero positivo n, allora per ogni numero positivo ε prefissato arbitrariamente si può dare un intero positivo m in modo che sian tutti minori di ε i valori assoluti delle differenze tra il termine a_m ed i termini seguenti $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$

Soltanto la dimostrazione della proposizione inversa può riuscire di qualche interesse epperò ce ne occupiamo.

Supponiamo adunque che per ogni numero positivo prefissato arbitrariamente si possa dare un intero positivo m in modo che sian tutti minori di quel numero positivo prefissato i valori assoluti delle differenze

$$a_m - a_{m+1}, \qquad a_m - a_{m+2}, \ldots.$$

Dico che a_n, col crescere indefinitamente di n, tende a limite.

Poniamo in un aggregato tutti i numeri reali minori di tutti i termini della successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

quelli, se ve ne sono, che siano maggiori di a_1 e minori di tutti i termini della successione

$$a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

quelli, se ve ne sono, che sieno maggiori di a_2 e minori di tutti i termini della successione

$$a_3, a_4, a_5, \ldots$$

e così via.

Se i valori assoluti delle differenze

$$a_m - a_{m+1}, \quad a_m - a_{m+2}, \quad a_m - a_{m+3}, \ldots$$

son tutti minori di ω, un numero, che superi di ω i valori assoluti di $a_1, a_2, \ldots, a_m$, è maggiore di tutti i termini della successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

epperò anche di tutti i termini dell'aggregato formato come fu detto: per ciò questo aggregato ha confine superiore; indichiamolo con α.

Per ipotesi, per quanto sia prefissato piccolo un numero positivo ε si può fissare un intero positivo m in modo che sian tutti minori di $\frac{\varepsilon}{2}$ i valori assoluti delle differenze

$$a_m - a_{m+1}, \quad a_m - a_{m+2}, \quad a_m - a_{m+3}, \ldots$$

Abbiamo così che il numero $a_m - \frac{\varepsilon}{2}$ è minore di tutti i termini della successione

$$a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad a_{m+3}, \ldots$$

per cui esso appartiene all'aggregato di cui α è confine superiore cosicchè non può superare α; ed il numero $a_m + \frac{\varepsilon}{2}$ è invece maggiore di tutti i termini della successione

$$a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad a_{m+3}, \ldots$$

per cui esso supera tutti i numeri dell'aggregato di cui α è confine superiore cosicchè non può esser minore di α. Ne segue che son tutti minori di ε i valori assoluti delle differenze

$$\alpha - a_{m+1}, \quad \alpha - a_{m+2}, \quad \alpha - a_{m+3}, \ldots.$$

Resta così dimostrato che, per quanto sia prefissato piccolo un numero positivo ε, si può fissare un intero m abbastanza grande perchè sian tutti minori di ε i valori assoluti delle differenze

$$\alpha - a_{m+1}, \quad \alpha - a_{m+2}, \quad \alpha - a_{m+3}, \ldots$$

ossia resta dimostrato che a_n tende a limite e precisamente che

$$\lim_{n=\infty} a_n = \alpha.$$

Per occuparci della tendenza a limite in modo generale, diremo che un numero p è *assintoticamente minore* di a_n se è minore di qualche numero di cui a_n divenga stabilmente maggiore, cioè se si può dare un numero intero positivo m abbastanza grande perchè i termini della successione

$$a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad a_{m+3}, \ldots$$

sian tutti maggiori di qualche numero maggiore di p; e diremo che q è *assintoticamente maggiore* di a_n se è maggiore di qualche numero di cui a_n divenga stabilmente minore, cioè se si può dare un numero intero positivo m abbastanza grande perchè i termini della successione

$$a_{m+1}, \quad a_{m+2}, \quad a_{m+3}, \ldots$$

sian tutti minori di qualche numero minore di q. Quando la classe dei numeri assintoticamente minori e quella dei numeri assintoticamente maggiori di a_n sian limitrofe, allora diremo che il colimite delle due classi è *assintoticamente uguale* ad a_n, che è il numero assintotico di a_n.

Per considerazioni fatte già, possiamo dire che: Quando esiste *il numero assintotico* di a_n, esso è il minimo dei numeri reali maggiori d'ogni numero razionale minore di qualche numero di cui a_n divenga stabilmente maggiore; ed è il massimo dei numeri reali minori d'ogni numero razionale maggiore di qualche numero di cui a_n divenga stabilmente minore.

Diremo *passaggio al limite di* a_n o della successione

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

l'operazione avente per risultato il numero assintotico di a_n, supposto beninteso ch'esso esista.

9. Teorema del punto limite. — *Se in un* S_n *vi è un* (1) *aggregato di infiniti punti reali e si possono fissare i numeri reali* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *e* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *in modo che, per ogni punto* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *dell'aggregato*

$$a_1 < x_1 < b_1, \quad a_2 < x_2 < b_2, \ldots, a_n < x_n < b_n,$$

allora l'aggregato ha almeno un punto limite in esso S_n.

Dimostrazione. — Poniamo in una prima classe tutti i numeri reali che son minori della prima coordinata x_1 di infiniti punti dell'aggregato e poniamo gli altri in una seconda classe; indichiamo con ξ_1 il colimite delle due classi: comunque sia fissato un numero positivo ε, vi saranno così sempre infiniti punti dell'aggregato di prima coordinata tra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$.

Dividiamo ancora in due classi i numeri reali; qualsiasi numero reale prefissato poniamolo nella prima o nella seconda classe secondo che sia impossibile oppure si possa fissare un numero positivo ε in modo che non vi siano infiniti punti dell'aggregato di seconda coordinata maggiore di quel numero prefissato e di prima coordinata tra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$; indichiamo con ξ_2 il colimite delle due classi: comunque si fissi un numero positivo ε, vi saranno così infiniti punti dell'aggregato di prima e seconda coordinata comprese rispettivamente fra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$ e fra $\xi_2 - \varepsilon$ e $\xi_2 + \varepsilon$.

Dividiamo ancora in due classi tutti i numeri reali; qualsiasi numero reale prefissato poniamolo nella prima o nella seconda classe

(1) E. Pascal, *Repertorio di Matematiche superiori*; II *Geometria*. Milano, 1900, p. 814.

secondo che sia impossibile oppure si possa fissare un numero positivo ε in modo che non vi siano infiniti punti dell'aggregato di terza coordinata maggiore d'esso numero prefissato e di prima e seconda coordinate comprese rispettivamente fra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$ e fra $\xi_2 - \varepsilon$ e $\xi_2 + \varepsilon$; indichiamo con ξ_3 il colimite delle due classi: comunque si fissi un numero positivo ε, vi saranno così infiniti punti dell'aggregato di prima, seconda e terza coordinate comprese rispettivamente fra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$, fra $\xi_2 - \varepsilon$ e $\xi_2 + \varepsilon$ e fra $\xi_3 - \varepsilon$ e $\xi_3 + \varepsilon$.

Proseguendo il ragionamento incominciato, si riconosce l'esistenza d'un punto $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, che è punto limite dell'aggregato ossia tale che, comunque si fissi un numero positivo ε, vi son sempre punti dell'aggregato, ed anzi ve ne sono infiniti, di coordinate rispettivamente comprese tra $\xi_1 - \varepsilon$ e $\xi_1 + \varepsilon$, tra $\xi_2 - \varepsilon$ e $\xi_2 + \varepsilon, \ldots,$ tra $\xi_n - \varepsilon$ e $\xi_n + \varepsilon$.

10. Teorema di Weierstrass. — *I valori d'una funzione continua in una porzione chiusa* [1] *d'un* S_n *formano un aggregato chiuso.*

Sia a un limite dell'aggregato dei valori della funzione $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; per considerar questa come funzione di punto, indichiamo con $f(P)$ il valore che essa ha nel punto P, cosicchè se sono $u_1, u_2, \ldots, u_n$ le coordinate del punto P,

$$f(P) = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Nella porzione di spazio che consideriamo e che indicheremo con T_n prendiamo un punto P_1; e supponiamo che $f(P_1)$ sia diverso da a perchè, se $f(P_1)$ fosse uguale ad a, allora a sarebbe uno dei valori della funzione come è da provare. Siccome a è limite dei valori della funzione e la funzione è continua, è possibile fissare una successione d'infiniti punti $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in modo che $f(P_{m+1})$ sia diverso da a ed il modulo di $f(P_{m+1}) - a$ sia minore della metà di quello di $f(P_m) - a$. Si avrà così che

$$\lim_{n=\infty} f(P_n) = a.$$

Essendo tutti diversi $f(P_1), f(P_2), f(P_3), \ldots,$ sono tutti diversi gli infiniti punti $P_1, P_2, P_3, \ldots,$ per cui l'aggregato di questi punti, contenuti tutti in T_n, ha almeno un punto limite; e tale sia Q: questo punto limite Q apparterrà alla porzione considerata T_n di spazio, perchè la medesima è chiusa per ipotesi. Se a fosse diverso da $f(Q)$ ed il modulo di $a - f(Q)$ fosse α, si potrebbe fissare un intorno sferico σ del punto Q in modo che per ogni punto M di tale intorno appartenente a T_n fosse minore di $\frac{\alpha}{2}$ il modulo di $f(M) - f(Q)$ e conseguentemente fosse maggiore di $\frac{\alpha}{2}$ quello di $a - f(M)$. Ora siccome $f(P_n)$ tende ad a, si può fissare un intero positivo r in modo

[1] V. p. es. G. Vivanti, *Teoria delle funzioni analitiche*; Manuali Hoepli, 312-313, Milano, 1901, pag. 4.

che sia minore di $\frac{\alpha}{2}$ il modulo di $a - f(P_r)$ e sono allora con più ragione minori di $\frac{\alpha}{2}$ i moduli delle differenze

$$a - f(P_{r+1}),\quad a - f(P_{r+2}),\quad a - f(P_{r+3}), \ldots$$

cosicchè cadrebbero fuori dell'intorno σ tutti i punti $P_{r+1}, P_{r+2}, P_{r+3}, \ldots$ la qual cosa è contraria alla supposizione che Q sia punto limite dell'aggregato dei punti $P_1, P_2, P_3, \ldots$. Non è dunque possibile che $f(Q)$ sia diverso da a, per cui

$$f(Q) = a$$

e così è provato che il limite a dell'aggregato dei valori della funzione è pure un valore della funzione.

Corollario. — Il confine superiore dei valori di una funzione continua in un segmento è massimo dei valori della medesima; ed il confine inferiore è minimo dei valori della funzione sul segmento.

11. Teorema di Cantor. — *Se una funzione reale è continua in una porzione chiusa T_n di un S_n, comunque sia dato un numero positivo ε, si può dividere T_n in numero finito di parti in modo che in ciascuna parte l'oscillazione della funzione sia minore di ε.*

Supponiamo infatti che si possa dare un numero positivo ε in modo che riesca impossibile dividere T_n in un numero finito di parti in modo che in ciascuna sia minore di 2ε l'oscillazione della funzione.

Possiamo fissare un numero positivo d in modo che T_n sia tutto racchiudibile in sfera di diametro d, in modo cioè che la relazione

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 < d^2$$

sia soddisfatta da ogni coppia di punti $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ed $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ di T_n. Fissiamo un punto P_1 di T_n. Dividiamo T_n in parti abbastanza piccole perchè ciascuna sia racchiudibile in sfera di diametro $\frac{d}{2}$; in qualcuna sarà maggiore di ε l'oscillazione della funzione: in una di queste prendiamo un punto P_2 diverso da P_1. Dividiamo T_n in parti abbastanza piccole perchè ciascuna parte sia racchiudibile in sfera di diametro $\frac{d}{3}$; in qualcuna sarà maggiore di ε l'oscillazione della funzione: in una di queste prendiamo un punto P_3 diverso da P_1 e da P_2. Continuando così verremo ad avere un aggregato di infiniti punti

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$$

il quale ha almeno un punto limite P in T_n; e l'oscillazione della funzione è maggiore di ε nella sfera di centro P_n e diametro $\frac{d}{n}$, essendo maggiore di ε nella parte corrispondente a P_n, in quella parte cioè in cui è stato preso P_n, la qual parte è appunto contenuta in sfera di diametro $\frac{d}{n}$. Prendiamo un qualsiasi intorno ω di P: internamente ad esso prendiamo un intorno sferico di P e prendiamone poi l'intorno sferico di metà raggio; indichiamo con σ e τ le parti di questi due intorni sferici di P formati di punti di T_n, se non appartengano a T_n interamente. In τ cadono infiniti punti dell'aggregato

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$$

per cui in σ ne cade certamente qualcuno con tutta la corrispondente parte di T_n; l'oscillazione della funzione è quindi maggiore di ε in σ e nel qualsiasi intorno ω del punto P, pur considerando di ω soltanto i punti appartenenti a T_n, se non v'appartengan tutti. La funzione sarebbe dunque discontinua nel punto P, contrariamente all'ipotesi ch'essa sia continua in T_n.

12. Teorema sulle funzioni derivate. — *Una funzione che sia derivata di funzione reale di variabile reale, non può passare da uno ad altro valore senza prendere tutti i valori intermedii.* [1]

Sia $f(x)$ una funzione reale derivabile ed $f'(x)$ sia la sua derivata. Consideriamo due valori reali della variabile; siano a il minore e b il maggiore. Sian differenti $f'(a)$ ed $f'(b)$ e c sia compreso tra $f'(a)$ ed $f'(b)$: dico che $f'(x)$ prende il valore c mentre x cresce da a a b.

Indichiamo infatti con $\varphi(x)\, cx - f(x)$ oppure $f(x) - cx$ secondo che $f'(a)$ è minore oppure è maggiore di $f'(b)$; avremo così che

$$\varphi'(a) > 0 \qquad \text{e} \qquad \varphi'(b) < 0,$$

per cui è maggiore di $\varphi(a)$ e di $\varphi(b)$ il massimo dei valori, che prende $\varphi(x)$ mentre x cresce da a a b, il qual massimo esiste per quanto fu detto al numero 10. Supponiamo che tal massimo valore, che potrebbe anche esser preso più volte, l'abbia $\varphi(x)$ pel valore k, compreso tra a e b, della variabile x. Il rapporto di $\varphi(x) - \varphi(k)$ ad $x - k$ non è mai negativo quando $x < k$ e non è mai positivo quando $x > k$; tendendo per ipotesi ad unico limite esso rapporto quando x tende a k comunque, crescendo o decrescendo, si ha quindi necessariamente che

$$\lim_{x=k} \frac{\varphi(x) - \varphi(k)}{x - k} = 0$$

ossia che

$$\varphi'(k) = 0$$

per cui

$$f'(k) = c.$$

---

[1] Le funzioni derivate soddisfan così una definizione di continuità, che alcuni adottarono; ma che fu abbandonata completamente, essendosi accettata definitivamente una definizione più restrittiva. — V. p. e. M. Duchamel, *Éléments de calcul infinitésimal*, tome premier. Paris, 1884, p. 8.

F. Giudice.

UNA NOTEVOLE PROPRIETÀ DELLA MEDIA ARITMETICA

Dati n numeri qualsiansi, chiameremo primo gruppo derivato quello formato dalle n medie aritmetiche degli n numeri presi ad $n-1$ ad $n-1$. Chiameremo secondo gruppo derivato quello ottenuto eseguendo tale procedimento sul primo gruppo derivato. Derivando nell'identico modo il secondo gruppo derivato, si ottiene un altro gruppo di n numeri che chiameremo terzo gruppo derivato; e così via.

Nella presente nota mi propongo di dimostrare che, continuando indefinitamente con tali derivazioni, i numeri che formano i vari gruppi derivati hanno per limite la media aritmetica degli n numeri dai quali si è partiti.

Siano: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ gli n numeri dati; $a_1^{(r)}, a_2^{(r)}, a_3^{(r)}, \ldots, a_n^{(r)}$ i numeri dell'r^{mo} gruppo derivato.

Posto $s = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, gli n numeri del 1° gruppo derivato sono manifestamente:

$$a_1^{(1)} = \frac{s-a_1}{n-1}, \quad a_2^{(1)} = \frac{s-a_2}{n-1}, \quad a_3^{(1)} = \frac{s-a_3}{n-1}, \ldots, a_n^{(1)} = \frac{s-a_n}{n-1};$$

ossia, come si può indicare più brevemente, sono:

$$a_i^{(1)} = \frac{s-a_i}{n-1} \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, n].$$

Di qui intanto si vede che

$$a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + a_3^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)} = \frac{ns - (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)}{n-1} = \frac{ns-s}{n-1} = s;$$

che cioè, derivando un gruppo di numeri nel modo indicato, la somma dei numeri del gruppo derivato coincide con quella dei numeri del gruppo primitivo. Si deduce da ciò che qualsiasi gruppo derivato da quello che noi consideriamo ha per somma dei suoi numeri il numero s.

Gli n numeri del II gruppo derivato sono dunque:

$$a_i^{(2)} = \frac{1}{n-1} \cdot [(a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \ldots + a_n^{(1)}) - a_i^{(1)}] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \cdot \left[s - \frac{s-a_i}{n-1}\right] = \frac{(n-2)s + a_i}{(n-1)^2};$$

quelli del III gruppo derivato sono:

$$a_i^{(3)}=\frac{1}{n-1}\cdot[(a_1^{(2)}+a_2^{(2)}+\ldots+a_n^{(2)})-a_i^{(2)}]=\frac{1}{n-1}\cdot\left[s-\frac{(n-2)s+a_i}{(n-1)^2}\right]=$$

$$=\frac{[(n-1)^2-(n-2)]\,s-a_i}{(n-1)^3}=\frac{(n^2-3n+3)\,s-a_i}{(n-1)^3}.$$

Si vede di qui che per $r=2$ ed $r=3$ vale la formola:

$$a_i^{(r)}=\frac{(n-1)^r+(-1)^{r-1}}{n\,.\,(n-1)^r}\,.\,s+(-1)^r\frac{a_i}{(n-1)^r}=$$

$$=\frac{s}{n}+(-1)^{r-1}\frac{s}{n\,.\,(n-1)^r}+(-1)^r\frac{a_i}{(n-1)^r}.$$

Ma tale formola, ammessa vera per l'r^{mo} gruppo derivato, è vera anche per l'$(r+1)^{mo}$. Infatti abbiamo:

$$a_i^{(r+1)}=\frac{1}{n-1}\cdot[(a_1^{(r)}+a_2^{(r)}+\ldots+a_n^{(r)})-a_i^{(r)}]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot\left[s-\frac{s}{n}-(-1)^{r-1}\frac{s}{n\,.\,(n-1)^r}-(-1)^r\frac{a_i}{(n-1)^r}\right]=$$

$$=\frac{1}{n-1}\cdot\left[\frac{ns-s}{n}+(-1)^r\frac{s}{n\,.\,(n-1)^r}+(-1)^{r+1}\frac{a_i}{(n-1)^r}\right]=$$

$$=\frac{s}{n}+(-1)^r\frac{s}{n\,.\,(n-1)^{r+1}}+(-1)^{r+1}\frac{a_i}{(n+1)^{r+1}}.$$

Possiamo dunque concludere che la formola

$$a_i^{(r)}=\frac{s}{n}+(-1)^{r-1}\frac{s}{n\,.\,(n-1)^r}+(-1)^r\frac{a_i}{(n-1)^r}$$

vale qualunque sia r.

Facendo crescere r indefinitamente, il II e il III termine del II membro di tale formola convergono manifestamente a zero. Il I membro converge dunque ad $\frac{s}{n}$, come volevamo dimostrare.

In tale risultato il noto principio di Gauss sulla media aritmetica trova una giustificazione che mi sembra interessante e che non credo sia stata ancora avvertita.

Si ammetta, com'è ben ovvio, che, fatte con eguale accuratezza due misurazioni di una stessa grandezza, il suo valore più plausibile sia la media aritmetica dei due valori ottenuti.

Fatte di una stessa grandezza tre misurazioni egualmente accurate, è naturale di considerare come valore più plausibile uno a cui ci si avvicini quando si sostituiscano ai tre valori ottenuti le medie aritmetiche di essi presi a due a due (che, per quanto abbiamo ammesso, sono valori più plausibili), si faccia un'analoga sostituzione sulla terna di numeri così ottenuta e si continui indefinitamente con tali sostituzioni. Si vengono così a considerare i vari gruppi derivati da quello formato coi tre valori considerati inizialmente; e per quanto abbiamo dimostrato possiamo concludere che la loro media aritmetica è il valore più plausibile della grandezza considerata. Il principio di Gauss risulta così giustificato quando le misurazioni fatte sono tre.

In modo del tutto analogo si vede che in generale, se si ammette il principio di Gauss quando sono state fatte $(n-1)$ misurazioni egualmente accurate di una grandezza, è logico ammetterlo anche quando ne sono state fatte n.

Risulta di qui che il principio di Gauss è successivamente giustificato quando le misurazioni fatte sono $4, 5, 6, \ldots$; cioè che esso è da ammettersi sempre quante si siano le misurazioni fatte, purchè eseguite tutte con eguale accuratezza.

P. CATTANEO.

INTORNO AD UN PRINCIPIO
RELATIVO ALLA PROBABILITÀ COMPOSTA

È noto come anche le questioni in apparenza più semplici concernenti il calcolo delle probabilità, si presentino spesso circonfuse di una luce così incerta e dubbiosa, da trarre in inganno, circa la loro giusta valutazione, anche ingegni di primo ordine; tanto che il Bertrand [1] ebbe a dire di uno di questi che " L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, deraisonnait complètement sur le Calcul des probabilités „.

Questo fatto si riscontra con una certa frequenza quando il numero dei casi possibili è infinito, ed a questo riguardo si può ricordare la questione dibattutasi tra il Bertrand ed il Cesàro, a cui presero parte più o meno direttamente Frattini, Giudice, Murer, Rindi e Vivanti. [2]

Però, anche quando il numero dei casi possibili non può essere che finito, può accadere di trovarsi di fronte a certi problemi nei quali l'enumerazione dei casi possibili si presenta così incerta che, ove si vogliano risolvere seguendo la consueta definizione del concetto di probabilità, si è costretti a modificarne l'enunciato sostituendolo con un altro che si ritiene equivalente.

(1) J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*. Preface, page x.

(2) CESARO, *Periodico di Matematica*, anno VI, fascicoli 1°, 2°, 4°, 5°. — MURER, Idem, anno IV, fasc. 6°. — RINDI, Idem, anno V, fasc. 2°. — FRATTINI, Idem, anno V, fasc. 3°. — GIUDICE, Idem, anno V, fasc. 3°. — VIVANTI, *Rivista di matematica* diretta da G. PEANO, anno I, fasc. 4°-5°.

Faremo vedere anzi, in primo luogo, come la difficoltà citata venga ad infirmare la dimostrazione del secondo dei teoremi intorno alla probabilità composta, che alcuni autori dànno come un " principio " o " postulato " che dir si voglia. (1)

In due ben note opere di matematica attuariale, (2) trovasi enunciato e dimostrato il seguente

Teorema. — " Se un avvenimento A si può attribuire a più cause tra loro escludentesi $C_1, C_2, \ldots C_i \ldots$; e p_i è la probabilità che si avveri A quando si presenti la causa C_i mentre q_i è la probabilità che questa entri in azione, la probabilità di A vien data da:

$$p = p_1 \cdot q_1 + p_2 q_2 + \ldots p_i \cdot q_i + \ldots \tag{1}$$

Ecco la dimostrazione riportata dal Gardenghi che nella sostanza è la medesima di quella che si legge nel Poterin du Motel.

" Di tutti i casi in cui la causa C_i può agire, m_i sieno favorevoli all'avvenimento A, e n_i sieno i contrari.

Siccome le cause si escludono a vicenda, ossia l'avvenimento A non può presentarsi sotto l'influenza simultanea di più cause, il numero totale dei casi favorevoli ad A è

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots$$

Quindi detto N il numero dei casi, egualmente possibili, che possono presentarsi quando si attende l'avvenimento A, la probabilità P di questo sarà:

$$P = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_i + \ldots}{N}$$

od anche

$$P = \frac{m_1}{m_1 + n_1} \cdot \frac{m_1 + n_1}{N} + \frac{m_2}{m_2 + n_2} \frac{m_2 + n_2}{N} + \ldots + \frac{m_i}{m_i + n_i} \frac{m_i + n_i}{N} + \ldots$$

Ma $\frac{m_i}{m_i + n_i}$ è la probabilità, la quale indicheremo con p_i, che, qualora C_i agisca, l'avvenimento A abbia luogo; giacchè è il rapporto del numero dei casi favorevoli ad A, al numero totale dei casi in cui C_i è in azione.

Invece $\frac{m_i + n_i}{N}$ è la probabilità, la quale chiameremo q_i, che agisca la causa C_i. Si ha dunque la formula:

$$P = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots + p_i q_i + \ldots$$

(1) Si veda in proposito: Bertrand, *Calcul des probabilités*, chap.° II. § 25-26. — Pincherle, *Lezioni di Analisi algebrica*, Parte II. cap. I.

(2) G. Gardenghi. *Teoria matematica della previdenza*. Parma, 1889. Introduzione, pag. x. — H. Poterin du Motel, *Théorie des assurances sur la vie*. Paris, 1890, chap.° I.

nella quale il prodotto $p_i q_i$ rappresenta la probabilità che A si presenti per fatto della causa C_i „.

Tale dimostrazione, la cui artificiosità contrasta con l'estrema generalità dell'enunciato, a primo aspetto può anche persuadere, ma non è difficile il trovare una serie di casi nei quali il predetto ragionamento va ad urtare contro la difficoltà della determinazione di N, numero dei casi egualmente possibili.

Per provare ciò con semplicità e chiarezza, giova ricorrere ad un esempio, ad un caso particolare tra i meno complicati.

" Sieno due urne C_1, C_2 contenenti la prima p. es. 8 palle bianche e 12 nere, e la seconda 6 bianche e 11 nere: si domanda la probabilità che, mettendo una mano a caso in una delle due urne ed estraendone una palla, questa sia bianca „.

Ripetiamo in quest'occasione il ragionamento testè seguito nella dimostrazione del Teorema.

Sia N il numero dei casi possibili: se interviene la causa C_1, cioè se si mette la mano nella prima urna, i casi favorevoli sono $m_1 = 8$, e se interviene la C_2 risulta $m_2 = 6$ per cui:

$$P = \frac{m_1 + m_2}{N} = \frac{8+6}{N} = \frac{14}{N}.$$

Ma le probabilità q_1, q_2 che agiscano rispettivamente le cause C_1, C_2 sono entrambe eguali ad $\frac{1}{2}$; e siccome, d'altra parte, è manifestamente:

$$p_1 = \frac{m_1}{m_1 + n_1} = \frac{8}{8+12} = \frac{8}{20} \quad p_2 = \frac{m_2}{m_2 + n_2} = \frac{6}{6+11} = \frac{6}{17}$$

risulta secondo la (1)

$$P = \frac{8}{20} \cdot \frac{1}{2} + \frac{6}{17} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{17} = \frac{32}{85}.$$

Dovrebbe quindi aversi:

$$\frac{14}{N} = \frac{32}{85}$$

eguaglianza manifestamente assurda data l'irriducibilità di $\frac{32}{85}$.

L'errore, *a mio modo di vedere*, sembra risiedere nel computo dei casi favorevoli; poichè, se si ammette che complessivamente essi sieno $m_1 + m_2 = 8 + 6 = 14$, i contrari sono allora da ritenersi $n_1 + n_2 = 23$ e ne risulta quindi $N = 37$ e $P = \frac{14}{37}$ precisamente come se le due urne si fondessero in un unico vaso contenente le palle dell'una e dell'altra.

Per convincersi rapidamente come sia assurdo confondere tra loro i due casi, basta considerare un caso eccezionale, limite; cioè, supporre che, delle due urne, l'una contenga un'unica palla bianca, e l'altra un numero qualsiasi di sole palle nere.

In tali ipotesi è palese che la probabilità di estrarre la bianca prendendone una a caso da una delle due urne è espressa dalla frazione $\frac{1}{2}$; mentre invece, riunendo le due urne in una sola, essa diventa $\frac{1}{n+1}$ piccola a piacere col crescere di n.

Se però seguendo in un caso particolare il ragionamento adottato nella dimostrazione del teorema, siamo stati condotti ad una conseguenza insostenibile, anche il risultato $\frac{32}{85}$ che è conseguenza del *principio* espresso dalla (1) di cui niuno dubita, non s'accorda affatto con la consueta definizione di probabilità quale rapporto dei casi favorevoli ai possibili, poichè dovrebbero essere dati da numeri rispettivamente equimultipli di 32 ed 85, e fino a tanto che si insiste nel considerare il problema come è enunciato, non si riesce ad enumerarli in modo che sieno soddisfatte tali condizioni.

La difficoltà però sparisce, quando, al dato enunciato, se ne sostituisca un altro che si presenta in tutto equivalente al primo.

„ Date due urne C_1, C_2 come nell'esempio precedentemente trattato, si domanda la probabilità che, estraendo una palla da ciascun'urna e poi scegliendo a caso una delle due estratte, risulti una palla bianca „.

Le diverse coppie che indifferentemente possono venir estratte sono in numero di:

$$(m_1+n_1)(m_2+n_2)=(8+12)(6+11)=340,$$

e siccome ciascuna coppia dà luogo a due eventi, così il numero dei casi egualmente possibili diventa:

$$N=2 \,.\, 340=680.$$

Poniamo ora che agisca la causa C_1, cioè che si scelga la palla uscita dalla prima urna: il numero dei casi favorevoli diventa allora $m_1(m_2+n_2)=8(6+11)=136$, mentre invece se l'avvenimento si presenta come conseguenza di C_2, il numero dei casi favorevoli è

$$m_2(m_1+n_1)=6(8+12)=120:$$

quindi

$$P=\frac{m_1(m_2+n_2)+m_2(m_1+n_1)}{2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}=\frac{m_1}{m_1+n_1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{m_2}{m^2+n_2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=p_1q_1+p_2q_2=\frac{136+120}{680}=\frac{256}{680}=\frac{35}{85}.$$

Giova osservare che essendo $n_1(m_2+n_2)$ i casi contrari nella prima ipotesi, ed $n_2(m_1+n_1)$ nella seconda risulta:

$$q_1=q_2=\frac{m_1(m_2+n_2)+n_1(m_2+n_2)}{2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}=\frac{m_2(m_1+n_1)+n_2(m_1+n_1)}{2(m_1+n_1)(m_2+n_2)}=\frac{1}{2}.$$

È bastata quindi una semplice trasformazione dell'enunciato del problema per far sì che ad esso si potesse applicare il ragionamento seguìto nella dimostrazione del teorema, e che il numero ottenuto come misura della richiesta probabilità si potesse ancora considerare come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e degli egualmente possibili. (1)

U. SCARPIS.

MODANATURE, LINEE DI LIVELLO, POLIGRIFE, DI MASSIMA PENDENZA, DI DECLIVITÀ MASSIMA E MINIMA, E IDRODINAMICHE

Egregio prof. Giulio Lazzeri

A p. 212 e seg. del fascicolo V del volume sesto, anno 1909 del *Periodico* da Lei meritamente diretto, ho letto un articolo del professore F. Severi intitolato " Sulle superficie modanate ".

L'egregio Professore, dopo aver detto che l'acqua non segue nei monti le linee di massima pendenza, salvo che sulle superfici modanate, scrive, in nota, a p. 213: " Del resto la osservazione non deve esser nuova; ho in mente di averla vista in qualche luogo ".

Questo luogo è indubbiamente il *Bollettino della Società Geografica Italiana* ove, nel numero dell'agosto-settembre 1889, vi è un mio articolo intitolato " Studi di Geologia Topografica e Idraulica ".

Ivi prendo in esame i lavori del Poisson, del Puissant, del Jordan, del Bussinesq e di altri sopra le linee topografiche e su quelle idrodinamiche, cioè quelle che dipendono dalla conformazione del suolo e quelle che segnano la linea che segue l'acqua nello scorrere su di esso. Prima di intraprendere questo studio, avevo chiesto al professere Ulisse Dini di volermi indicare quali sono le superficie che godono della proprietà di avere le linee di massima pendenza giacenti in un piano verticale, cioè di avere linee rette per proiezioni sopra un piano orizzontale.

---

(1) Per quanto concerne la nozione di " casi egualmente possibili " è interessante la nota a pagina 3 dell' " Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées ". Tomo I, volume 4°, fascicolo 1°. (Edition française, Gauthier-Villars, Paris).

Egli mi rispose che queste superfici sono le modanature, le quali sono definite dalle equazioni:

$$\text{(X)} \qquad \begin{cases} x = \int m \,\mathrm{sen}\, \varphi \, du + Z \cos \varphi \\ y = \int m \cos \varphi \, du + Z \,\mathrm{sen}\, \varphi \\ z = z, \end{cases}$$

ove m e φ son funzioni arbitrarie di u, e Z è funzione della sola z.

Fra le varie specie di modanature, giova far particolare menzione di quelle che si ottengono quando nelle (X) si pone $m = 0$.

Allora, quadrando e sommando le due prime delle (X), esse si riducono facilmente alla

$$\text{(XI)} \qquad z = F(x^2 + y^2),$$

equazione che comprende tutte le superfici di rivoluzione intorno a un'asse.

In detta memoria studio quindi le varie curve che conviene considerare sopra una superficie del suolo, rappresentata dall'equazione

$$z = f(xy)$$

e do l'equazioni di queste varie linee, cioè:

1°. L'equazione delle proiezioni sul piano orizzontale delle linee di livello.

2°. L'equazione della proiezione orizzontale del luogo geometrico dei punti di flesso.

3°. L'equazione delle linee *poligrife*, che così chiamo i luoghi geometrici dei punti di curvatura massima e minima (escluso il caso dei flessi) delle linee di livello successive infinitamente vicine.

4°. La nota equazione delle linee di massima pendenza.

5°. La equazione delle linee di declività massima e minima cioè i luoghi geometrici dei punti delle linee di livello ove la pendenza è massima o minima.

Do quindi le relazioni varie di ortogonalità che esistono fra alcune di queste curve. Ricordando poi i lavori del Poisson e del Puissant, do l'equazione della curva idrodinamica, cioè della curva che segue l'acqua cadendo sopra una data superficie; e quindi do l'equazione della proiezione di questa curva sul piano orizzontale.

Nel paragrafo successivo del mio lavoro considero queste curve in relazione a quelle che si manifestano realmente nel terreno, e dimostro, fra altre cose, che, in generale, si confondono linee di valle, linee d'impluvio e linee idrodinamiche, commettendo errori che hanno gravi conseguenze nelle applicazioni. Ma, per queste e per altre considerazioni pratiche, rimando alla mia memoria pubblicata nel *Bollettino della Società Geografica Italiana*.

Credo che essa costituisca un contributo assai utile nello studio pratico del terreno e nei lavori da farsi; ma purtroppo credo che sia

Casi particolari. — Se APB è retto, anche δ è retto; perciò

$$\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}=\cos\frac{\delta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ed i cerchi, oltre ad essere, come sempre, tangenti ad OB e ad OA, hanno i centri nei punti medî di (X, x), (X, y) e di (Y, x), (Y, y).

Se $PA=PB$ il secondo cerchio si riduce al punto O. Il primo cerchio avrà il centro in P ed il raggio PA, ossia è il circolo di centro (xy) che passa pei punti dati A e B.

QUISTIONI PROPOSTE

770. Dato $\log\tan x$, se $\log\tan x_0$ è il valore prossimo in una tavola di passo Δx, dimostrare che assumendo

$$\log\operatorname{sen}x=\log\operatorname{sen}x_0+(\log\tan x-\log\tan x_0)\quad \text{per}\quad \log\tan x<0$$

e

$$\log\operatorname{sen}x=\log\operatorname{sen}x_0\qquad\qquad \text{per}\quad \log\tan x>0,$$

si commette un errore certamente minore di $\Delta x\times 0{,}21715$, dove Δx s'intende espresso in misura circolare. (1)

G. Pesci.

771. Indicando con δ_a, δ_b e δ_c le distanze di un punto P del piano α di un triangolo ABC(abc) rispettivamente dai lati a, b e c, il luogo dei punti di α per i quali si ha

$$\delta_c^2=\delta_a^2+\delta_b^2$$

è una conica γ_2.

Se è $\widehat{C}<\frac{\pi}{2}$, la conica γ_2 è una iperbole.

Se è $\widehat{C}=\frac{\pi}{2}$, la γ_2 è una parabola. (Il fuoco è in C e la direttrice è la retta a cui appartiene il lato c; la parabola taglia i lati a e b nei piedi delle bisettrici interne l_a ed l_b). (2)

Se è $\widehat{C}>\frac{\pi}{2}$, la γ_2 è una ellisse (che si riduce ad un cerchio se il triangolo dato è isoscele ed è $\widehat{C}=\frac{2}{3}\pi$).

Il triangolo ABC è *autoconiugato* rispetto alla γ_2.

G. Cardoso-Laynes.

(1) Questa osservazione, in molti casi pratici, in cui x indica un angolo ausiliario dato per *log tan* e se ne vuole il *log sen*, permette di avere questo *log sen* senza passare per x e senza bisogno di interpolazioni.

(2) Si deduce che "Le distanze d, d_1 e d_2 di un punto di una parabola rispettivamente dalla direttrice e da due rette ortogonali uscenti dal fuoco sono legate dalla relazione $d^2=d_1^2+d_2^2$. Ciò, del resto, si dimostra direttamente con considerazioni elementari. (G. C.-L.).

BIBLIOGRAFIA

Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse.* — Tome I. " Principes fondamentaux. Variables reales ", 1907; Tome II. " Variables complexes. Applications géometriques ", 1908. Paris, Gauthier-Villars.

Quest'opera ha origine dal corso di Analisi svolto dal chiar. prof. Baire nella Università di Digione e raccolto da un suo uditore, il sig. Cousson. Considerando lo straordinario sviluppo dell'analisi nei tempi moderni, per il quale essa tende a scindersi in branche distinte, l'A. ha avuto in mira di raccogliere in un libro di dimensioni relativamente ristrette, le teorie che costituiscono il fondo comune a tutte queste branche speciali, e che sono sufficienti per porre il lettore in condizione d'intraprendere poi senza difficoltà lo studio particolareggiato di una teoria speciale qualsiasi.

Egli ha procurato di conciliare rigore e semplicità, introducendo francamente nell'insegnamento certe idee che sono state acquisite alla scienza nello studio di questioni d'ordine più elevate, come per esempio la nozione di limite superiore ed inferiore di un insieme.

Il primo volume comprende tre capitoli.

I. *Numeri irrazionali, limiti, continuità.* — La teoria dei numeri irrazionali è svolta mediante il concetto di sezione o taglio nel campo dei numeri reali; i concetti di limiti, continuità, ecc. sono svolti analiticamente, ma sono poi mostrati i rapporti intimi fra algebra e geometria, affinchè si possano aiutare a vicenda.

II. *Derivate e integrali delle funzioni di variabili reali.* — La vecchia separazione del calcolo differenziale dall'integrale è abbandonata dal Baire, come prima hanno fatto l'Arzelà, il Vivanti e molti altri, ed in questo capitolo sono svolti i metodi elementari di derivazione ed integrazione.

III. *Applicazioni ed estensioni della nozione d'integrale.* — È destinato allo studio della lunghezza delle curve, aree, volumi, integrali multipli, integrali curvilinei e integrali di superficie.

Il secondo volume si compone di quattro capitoli.

IV. *Funzioni analitiche.* — Introdotto il concetto di numeri complessi e quello di funzione di variabile complessa, l'A. cerca di utilizzare tanto il concetto di integrale di variabile complessa, quanto quello di serie intere.

V. *Equazioni differenziali.* — In questo capitolo sono svolti gli elementi della teoria delle equazioni differenziali e a derivati parziali, esponendo alcuni casi nei quali l'integrazione si può fare.

VI. *Applicazioni geometriche.* — Contiene le più importanti proprietà delle linee e superficie. Un paragrafo è destinato alla geometria intrinseca delle curve, così largamente studiata dal compianto Cesàro.

VII. *Funzioni ellittiche.* — Di questa teoria importantissima ha svolto le proprietà essenziali in modo assai conciso.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 Giugno 1909

GIOVANNI VAILATI

Il 14 maggio nella casa di salute delle Suore di S. Carlo a Roma si spengeva **Giovanni Vailati** in seguito ad una terribile malattia che già da alcuni mesi minava la sua nobile esistenza.

Questa scomparsa violenta e crudele ha suscitato il rimpianto più schietto, il lutto più profondo nel mondo intellettuale italiano, poichè egli matematico e filosofo, storico e critico, aveva esplicato la sua attività straordinaria, la forza del suo ingegno versatile e geniale nei più disparati campi del sapere.

Egli non mancava mai ai congressi o matematici, o storici, o filosofici, e conoscendo perfettamente parecchie lingue, dovunque faceva innumerevoli conoscenze d'italiani e stranieri. Con la semplicità e giovialità del suo carattere, con la squisita bontà e gentilezza dell'anima, che si leggeva sulla sua faccia onesta e leale, egli si guadagnava dovunque l'amicizia sincera di tutti quanti lo conoscevano; ed è quindi naturale che vissuto modesto e forse ignorato dalla folla, tutti i più importanti giornali politici di tutti i partiti abbiano pagato un concorde ed affettuoso tributo di rimpianto e di ammirazione alla sua memoria.

Noi crediamo di non potere meglio onorarlo che riproducendo il discorso pronunziato sulla sua bara dall'illustre Senatore Vito Volterra, in nome della *Società italiana per il progresso delle Scienze*.

Quanti oggi ci troviamo qui, piangendo attorno a questa cara salma, mai potremo scordare lo strazio degli ultimi cinque mesi. Afflitti e trepidanti noi vedemmo **Giovanni Vailati** di giorno in giorno indebolirsi, spegnersi a poco a poco. In questi dolorosi mesi solo qualche raro raggio di speranza brillò. Sperammo che la malattia, per quanto crudele ed implacabile, pure avrebbe concesso al povero amico d'esser trasportato in un tranquillo soggiorno estivo. Mai avremmo creduto, nemmeno negli ultimi giorni, che la catastrofe dovesse precipitare in modo così tragico e repentino.

Giovanni Vailati aveva appena 46 anni; egli era nel fiore della vita, ma ancora più giovane lo facevano apparire la ingenua vivacità dello spirito e la semplicità, dirò così studentesca della vita. La sua mente peraltro era matura ed era pronta a dare, per il bene della cultura universale e della patria, i frutti di tanti anni di studi indefessi e profondi e di tante vaste e differenti cognizioni meravigliosamente unite nel suo spirito in un solo ed organico insieme.

Lo sparire di quest'uomo, così grande nella sua semplicità, centro di tante correnti di pensiero che animano la vita italiana è un lutto crudele per la Patria. Ne è dolorosamente colpita tutta la parte intellettuale del nostro paese, che, per stretti vincoli, o per lontane affinità di pensiero, a lui si collegava.

Egli era un fenomeno singolare, forse unico, nel mondo in cui oggi viviamo. Desiderava nascondersi in una posizione modesta, temeva quanto potesse metterlo in vista, fuggiva con ingenuo spavento qualsiasi occasione potesse spingerlo in alto; e tutto ciò mentre le sue idee si spargevano e divenivano sempre più feconde, mentre l'influenza che andava esercitando intorno a sè colle parole e con gli scritti si allargava in una cerchia sempre più vasta, mentre si faceva sempre più grande l'ammirazione verso di Lui e la sua figura ingigantiva.

In mezzo a tanto agitarsi di misere vanità e a tante sterili lotte, tenaci ed accanite, per la soddisfazione di grandi e piccoli desideri, in mezzo allo scatenarsi di tante passioni, triste spettacolo che ogni giorno ci apparisce innanzi agli occhi, era un dolce sollievo accostarsi a Lui, il subire il fascino dei suoi nobili pensieri puri e disinteressati, alti e sinceri, ed il mirare il suo modesto e sorridente animo sempre aperto, con giovanile entusiasmo, con sereno spirito di tolleranza ad ogni idea moderna e sempre pronto ad accogliere, senza invidia e senza rancore, ogni novità ed ogni critica.

Tale conforto ci è ora tolto per sempre; la fresca e pura fonte di tanti spirituali godimenti è disseccata per sempre.

Conobbi il **Vailati** circa 20 anni fa a Torino. Egli era allora un logico puro. Sebbene abituato da lungo tempo al ragionare serrato dei matematici fui sorpreso dalla finezza meravigliosa ed originale del pensiero del **Vailati**. Ed a Lui io (e tanti altri con me) dobbiamo la rivelazione di tutto un mondo di idee e di forme nuove di pensiero.

Ma la pura logica non rappresenta che il primo periodo della vita scientifica del **Vailati**. Il secondo periodo è quello degli studi di storia delle scienze, quando, chiamato ad impartire un insegnamento storico e critico di meccanica, scrisse le tre mirabili prolusioni ai corsi e presentò all'Accademia di Torino le memorie divenute oggi classiche su Archimede, Erone, Benedetti, che richiamarono sopra di Lui l'attenzione degli scienziati italiani e stranieri.

Entrato poi nelle scuole secondarie, veniva, dopo qualche anno, designato a coprire la cattedra di matematiche dell'Istituto tecnico di Firenze. Colà una viva corrente di pensieri trascinò il **Vailati** in un nuovo campo, egli ci apparisce in mezzo alla schiera dei giovani filosofi del pragmatismo. Ma, chiamato a Roma nella Commissione di riforma della scuola, un quarto periodo si inizia in cui la didattica diviene il fine supremo a cui si consacra il **Vailati**. Il matematico, lo storico, il filosofo allora si fondono ed ogni sforzo di Lui converge al nobile fine di dotare l'Italia di ordinamenti scolastici che rispondano ai nuovi bisogni della vita e della cultura.

Circostanze diverse cambiarono il campo di attività scientifica del **Vailati**, ma il suo pensiero, nei vari tempi e nei vari luoghi, si mantenne sempre originale e rifulse sempre di luce propria. Se il pensiero del **Vailati** si orientò variamente sotto l'azione di influenze esteriori, se esso si adattò ai diversi ambienti in cui ebbe ad esplicarsi, fu per imporre con maggiore efficacia e con maggior successo, nel mondo, l'impronta sua propria e caratteristica.

Giovanni Vailati, povero e caro amico, io ti porgo l'estremo saluto a nome della *Società Italiana per il progresso delle Scienze*, a nome di quella Società di cui tu fosti il rappresentante più schietto e più genuino, giacchè in te si impersonava, meglio che in ogni altro, la sintesi delle conoscenze scientifiche e tu mostravi qual forza diano all'intelletto la visione simultanea delle diverse dottrine e l'armonica fusione delle varie scienze.

V. Volterra.

Per la pubblicazione delle opere complete del Vailati (1891-909).

Vari amici ed ammiratori del compianto Giovanni Vailati si sono persuasi che la pubblicazione integrale degli scritti di Lui, sia il miglior omaggio che si possa rendere alla sua memoria e costituisca insieme una opera di comune utilità.

Molti infatti dei suoi stessi amici e corrispondenti non conoscono che una piccola parte di tali scritti, sparsi come ora sono in riviste e periodici rari la più parte ed esauriti, e non possono quindi rendersi conto della unità fondamentale d'indirizzo e di pensiero che nei campi più disparati informava l'attività scientifica del Vailati.

A tal fine si è compilata, coll'aiuto del prof. senatore Vito Volterra dell'Università di Roma, del prof. Giuseppe Peano dell'Università di Torino, del prof. Gino Loria dell'Università di Genova, del P. Orazio Premoli e di altri egregi collaboratori, una bibliografia, che crediamo pressochè completa, di oltre centosessanta pubblicazioni del Vailati, le quali trattano di

Filosofia generale (teoria della conoscenza; pragmatismo ecc.) — Logica (logica matematica; storia della logica, ecc.) — Storia delle scienze (storia della meccanica; storia della matematica, ecc.) — Storia della filosofia — Economia politica e sociologia — Filologia — Didattica — Scienze psichiche.

Tra questi scritti sono numerose le recensioni; ma esse non costituiscono la parte meno importante nè meno originale della Raccolta, poichè offrirono al Vailati l'occasione di esporre idee nuove e personali.

Tutti gli scritti potranno formare un volume in ottavo di oltre 800 pagine. Esso sarà corredato da una bibliografia scritta dal P. Orazio Premoli, che col Vailati ebbe lunga e intima domestichezza, da una bibliografia ragionata e da un copioso indice analitico.

Ma perchè la pubblicazione abbia luogo, è necessario che le spese di stampa, prevedute dall'Editore in circa L. 3000, siano coperte dalle sottoscrizioni di quelli che desiderano il volume.

Ci rivolgiamo quindi a tutti coloro i quali compiangendo la scomparsa dell'uomo, desiderano conservato durabilmente alla scienza quanto rimane del suo pensiero, perchè aiutino l'opera nostra col loro concorso pecuniario. (1)

L'edizione sarà curata da: Mario Calderoni — Umberto Ricci — Giovanni Vacca.

---

(1) Lettere, notizie e comunicazioni debbono essere indirizzate al prof. Mario Calderoni, Via Solferino 3, Firenze.

Il volume a chi si prenoti fin d'ora, sarà ceduto al prezzo di L. 12 da pagarsi alla consegna. Tosto che la pubblicazione sia avvenuta, la vendita avrà luogo ad un prezzo superiore.