La Geometria moderna, è questo un titolo che dobbiamo rivendicarle, ha portato, dalla fine del XVIII secolo, largo contributo al rinnovarsi dell'intera Scienza matematica, offrendo nuova e feconda via alle ricerche, e dimostrandoci soprattutto, con successi clamorosi, che i metodi generali non sono tutto nella Scienza, e che, anche nell'argomento più semplice, una mente ingegnosa ed inventiva può trovare molto da fare. Le dimostrazioni geometriche di Huyghens, di Newton e di Clairaut erano dimenticate e neglette. Le idee geniali introdotte da Desargues e Pascal erano rimaste senza sviluppo e sembravano cadute sopra un terreno sterile. Carnot, col suo *Essai sur les trasversales* o colla *Géométrie de position*, Monge specialmente, colla creazione della Geometria descrittiva e colle sue belle teorie sulla generazione delle superficie sono venuti a rinsaldare una catena che sembrava spezzata. Grazie a loro, le concezioni degli inventori della Geometria analitica, Descartes e Fermat, hanno riconquistato presso il Calcolo infinitesimale di Leibniz e di Newton il posto che era stato loro lasciato perdere e che non avrebbero mai dovuto cessar d'occupare. Colla sua Geometria, diceva Lagrange, parlando di Monge, quel diavolo d'uomo si renderà immortale. E, infatti, non solo la Geometria descrittiva ha permesso di coordinare e perfezionare i procedimenti impiegati in tutte le arti, " in cui la precisione della forma sia condizione di successo ed eccellenza pel lavoro ed i suoi prodotti "; ma è sembrata come la traduzione grafica di una Geometria generale e puramente razionale, di cui numerose ed importanti ricerche hanno dimostrata la felice fecondità. Accanto alla *Geometria descrittiva* non dobbiamo d'altronde dimenticare di porre quell'altro capolavoro che si chiama *Applicazione dell' Analisi alla Geometria*; nè dobbiamo obliare che siamo debitori a Monge della nozione delle linee di curvatura e dell'elegante integrazione dell'equazione differenziale di quelle linee pel caso dell'ellissoide, che Lagrange, dicesi, gl'invidiava. Bisogna insistere su questo carattere dell'insieme dell'opera di Monge. Il rinnovatore della Geometria moderna ci ha dimostrato, sino dal principio (i suoi successori l'hanno forse dimenticato) che l'unione della Geometria coll'Analisi è utile e feconda, che tale unione è forse una condizione di successo per l'una e per l'altra.

II.

Alla scuola di Monge, si formarono numerosi geometri: Hachette, Brianchon, Chappuis, Binet, Lancret, Dupin, Malus, Gaultier de Tours, Poncelet, Chasles ecc. Fra essi Poncelet occupò il primo posto. Trascurando tutto ciò che nei lavori di Monge si riferisce all'analisi di Descartes o riguarda la Geometria infinitesimale, si dedicò esclusivamente a sviluppare i germi contenuti nelle ricerche puramente geometriche del suo illustre precursore. Fatto prigioniero dai Russi nel 1813 al passaggio del Dnieper ed internato a Saratoff, Poncelet impiegò gli ozi concessigli dalla sua prigionia nella dimostrazione dei principi che ha sviluppati nel *Traité des propriétés projectives des figures*, pubblicato nel 1822, e nelle grandi Memorie sulle polari reciproche e sulle mediane armoniche, che risalgono circa all'epoca stessa. È quindi nata a Saratoff, possiamo dirlo, la Geometria moderna. Riannodando la catena interrotta dopo Pascal e Desargues, Poncelet introdusse contemporaneamente l'omologia e le polari reciproche, ponendo così in evidenza, fino dal principio, le idee feconde su cui la Scienza si è evoluta per 50 anni.

Presentati in opposizione alla Geometria analitica, i metodi di Poncelet non vennero accettati favorevolmente dagli analisti francesi. Ma la loro importanza e novità eran tali ch'essi non tardarono a suscitare, da più parti, le più profonde ricerche. Poncelet era stato il solo che avesse scoperto i principi; molti geometri, invece, comparvero quasi contemporaneamente per studiarli su tutti i lati e dedurne i resultati essenziali che vi erano contenuti.

A quell'epoca, Gergonne dirigeva con gran successo una Raccolta periodica che è oggi di un valore inestimabile per la storia della Geometria. Il giornale *Annales de Mathématiques*, pubblicato a Nîmes dal 1810 al 1831, è stato per oltre quindici anni il solo del mondo intero destinato esclusivamente alle ricerche matematiche. Gergonne, il quale ci ha lasciato in molte cose un modello eccellente del direttore di giornali scientifici, aveva i difetti delle sue qualità; collaborava, spesso loro malgrado, cogli autori delle Memorie che gli venivano inviate, rimaneggiava le parti da essi redatte e faceva a volte dir loro più o meno di quello che avrebbero voluto. Comunque fosse, fu colpito profondamente dall'originalità e dall'importanza delle scoperte di Poncelet. Si conoscevano già in Geometria alcuni semplici metodi di trasformazione delle figure; l'omologia era anche stata adoperata nel piano, ma senza estenderla allo spazio come fece Poncelet, nè sopratutto senza conoscerne la potenza e la fecondità. Tutte queste trasformazioni erano d'altronde *puntuali*, facevano cioè corrispondere un punto ad un punto. Introducendo le polari reciproche, Poncelet faceva opera d'inventore al massimo grado; poichè dava il primo esempio di una trasformazione in cui ad un punto corrispondeva altra cosa che un punto. Ogni metodo di trasformazione permette di moltiplicare il numero dei teoremi, ma quello delle polari reciproche offriva il vantaggio di far corrispondere una proposizione ad un'altra di aspetto affatto differente. Era questo un fatto essenzialmente nuovo. Per metterlo in evidenza, Gergonne inventò il sistema, che ha avuto in seguito tanto successo, delle Memorie scritte in doppia colonna, con in vista le proposizioni correlative; ed ebbe l'idea di sostituire le dimostrazioni di Poncelet, che esigevano l'aiuto di una curva e di una superficie del second'ordine, col famoso *principio di dualità*, il cui significato, un po' vago dapprima, venne sufficientemente chiarito dalle discussioni stabilitesi in proposito su Gergonne, Poncelet, e Plücker.

Bobilier, Chasles, Steiner, Lamé, Sturm e molti altri che non ricordo, erano contemporaneamente a Plücker e Poncelet, assidui collaboratori del periodico *Annales de Mathématiques*. Gergonne, divenuto rettore dell'Accademia di Montpellier, dovette nel 1831 interrompere le pubblicazioni del suo giornale. Ma il successo che aveva ottenuto, la passione per le ricerche che aveva contribuito a sviluppare avevano cominciato a dare il loro frutto. Quételet aveva allora fondata in Belgio la *Correspondence mathématique et physique*. Crelle, sino dal 1826, pubblicava a Berlino le prime pagine del suo celebre giornale, su cui comparivano Memorie di Abel, Jacobi, Steiner. Numerose Opere separate stavano pure per uscire, nelle quali dovevano venire magistralmente esposti e sviluppati i principî della Geometria moderna.

Nel 1827 comparve primo il *Calcul barycentrique* di Möbius, opera veramente originale, notevole per la profondità dei concetti, la limpidezza ed il rigore delle dimostrazioni; poi nel 1828 le *Analytisch-geometrische Entwickelungen* di Plücker, la cui seconda parte fu pubblicata nel 1831 e cui fece presto seguito il *System der analytischen Geometrie* dello stesso autore, stampata a Berlino nel 1835. Nel 1832, Steiner pubblicava a Berlino la sua grandiosa opera: *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit der geometrischen Gestalten von einander*, e, l'anno dopo, le *Geometrische Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises*, in cui trovavasi confermata coi più eleganti esempî una proposizione di Poncelet circa l'uso di un solo circolo per le costruzioni geometriche. Finalmente, nel 1830, Chasles mandava all'Accademia di Bruxelles, che aveva, con felice inspirazione, aperto un concorso per uno studio dei principî della Geometria moderna, il suo celebre *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, seguìto dall'opera *Mémoire sur deux principes généraux de la Science: la dualité et l'homographie*, che fu pubblicata solo nel 1837.

Ci mancherebbe il tempo per apprezzare degnamente questi bei lavori ed occuparci qui di ciascuno di essi. A che del resto potrebbe condurci tale studio, tranne ad una nuova verifica delle leggi generali dello sviluppo della Scienza. Allorchè i tempi sono maturi, allorquando i principî fondamentali sono stati riconosciuti ed enunciati niente arresta il cammino delle idee; le stesse scoperte, o scoperte quasi equivalenti, si producono quasi contemporaneamente, e nei luoghi i più diversi. Senza entrare in una discussione di tal genere che potrebbe d'altronde sembrare inutile o divenire irritante, importa peraltro che si faccia risaltare una differenza fondamentale tra le tendenze dei grandi geometri che, verso il 1830, sorsero a dare alla geometria un impulso ignorato fino allora.

III.

Quelli che, come Chasles e Steiner, consacrarono l'intera lor vita alle ricerche di Geometria pura, opposero ciò che chiamavano *sintesi* all'*analisi* e, adottando nell'insieme, se non nel dettaglio, le tendenze di Poncelet, si proposero di fondare una dottrina indipendente, rivale dell'analisi di Descartes.

Poncelet non aveva potuto contentarsi delle insufficienti risorse fornite dal metodo delle proiezioni; per raggiungere gli imaginari, aveva dovuto inventare quel famoso *principio di continuità* che ha dato origine a sì lunghe discussioni tra lui e Cauchy. Enunciato convenientemente, tale principio è eccellente e può rendere grandi servigi. Poncelet gli faceva torto ricusando di presentarlo quale semplice conseguenza dell'Analisi; e Cauchy, d'altra parte, non voleva riconoscere che le sue proprie obiezioni, applicabili certo ad alcune figure trascendenti, restavano senza forza nelle applicazioni fatte dall'autore del *Traité des propriétés projectives*. Qualunque opinione ci si formi su tale discussione, essa dimostrò almeno nel modo più evidente che il sistema geometrico di Poncelet riposava su base analitica, e sappiamo del resto, dalla pubblicazione inopportuna dei quaderni di Saratoff, che coll'aiuto dell'analisi di Descartes sono stati stabiliti i principî che formano la base del *Traité des propriétés projectives*.

Meno antico di Poncelet, che abbandonò d'altronde la Geometria per la Meccanica, in cui i suoi lavori hanno avuta un'influenza preponderante, Chasles, pel quale venne nel 1847 creata una cattedra di *Geometria superiore* alla Facoltà di Scienze di Parigi, si sforzò di costituire una dottrina geometrica completamente indipendente ed autonoma. Egli l'ha esposta in due opere di grande importanza, il *Traité de Géométrie*, che data dal 1882, ed il *Traité des sections coniques*, purtroppo incompiuto, e di cui uscì solo la prima parte nel 1865.

Nella prefazione al primo di questi lavori vengono indicati ben nettamente i tre punti fondamentali che permettono alla nuova dottrina di partecipare ai vantaggi dell'analisi e sembrano segnarle un progresso nella cultura della scienza. Essi sono:

1°. L'introduzione del principio dei segni, che semplifica al tempo stesso gli enunciati e le dimostrazioni, e dà all'analisi delle trasversali di Carnot tutta l'estensione di cui è suscettibile.

2°. L'introduzione degli imaginari, che supplisce al principio di continuità e fornisce dimostrazioni generali quanto quelle della geometria analitica.

3°. La dimostrazione contemporanea delle proposizioni correlative, cioè corrispondentisi in virtù del principio di dualità.

Chasles studia bensì nella sua Opera l'omografia e la correlazione; ma scarta sistematicamente nella propria esposizione l'uso delle trasformazioni delle figure, che, pensa, non possono rimpiazzare delle dimostrazioni dirette poichè mascherano l'origine e la vera natura delle proprietà ottenute per loro mezzo. C'è del vero in questo giudizio, ma il progresso stesso della scienza ci permette di trovarlo troppo severo. Se avviene spesso che adoperate senza accortezza, le trasformazioni moltiplichino inutilmente il numero de' teoremi, bisogna non disconoscere che ci aiutano spesso anche a meglio conoscere la natura delle proposizioni stesse cui sono state applicate. Non è l'uso della proiezione di Poncelet che ha condotto alla distinzione sì feconda tra le proprietà proiettive e quelle metriche, che ci ha fatto pure conoscere la grande importanza di quel rapporto anarmonico, la cui proprietà essenziale trovasi già in Pappo e la cui parte fondamentale non ha cominciato a comparire dopo quindici secoli che nelle ricerche della geometria moderna?

L'introduzione del principio dei segni non era nuova quanto la credeva Chasles allorchè scriveva il suo *Traité de Géométrie supérieure.* Già Möbius, nel suo *Calcul barycentrique,* aveva esaudito un *desideratum* di Carnot, ed adoperato i segni nel modo più ampio e più preciso, definendo per la prima volta il segno di un segmento ed anche quello di un'area. È in seguito riuscito ed estendere l'uso dei segni a lunghezze che non sono portate sulla stessa retta e ad angoli non formati intorno allo stesso punto. Grassmann d'altronde, la cui mente ha tanta analogia con quella di Möbius, aveva necessariamente dovuto impiegare il principio dei segni nelle definizioni che servono di base al suo metodo tanto originale di studio delle proprietà dell'estensione.

Il secondo carattere assegnato da Chasles al suo sistema di geometria, è l'uso degl'imaginari. Qui il suo metodo era veramente nuovo ed ha saputo illustrarlo con esempi di un grande interesse. Si ammireranno sempre le belle teorie che ci ha lasciate sulle superficie omofocali di secondo grado, in cui tutte le proprietà note ed altre nuove, tanto variate quanto eleganti, derivano dal principio generale di essere inscritte nella stessa sviluppabile circoscritta al circolo all'infinito. Ma Chasles ha introdotto gl'imaginari solo per le loro funzioni simmetriche e non avrebbe potuto, per conseguenza, definire il rapporto anarmonico di quattro elementi allorchè questi cessano di essere reali in tutto od in parte. Se Chasles avesse potuto stabilire la nozione del rapporto anarmonico d'elementi imaginari, una formula che dà nella *Géométrie supérieure* (p. 118 della nuova edizione) gli avrebbe immediatamente fornita quella bella definizione dell'angolo come logaritmo di un rapporto anarmonico che ha permesso a Laguerre, nostro compianto collega, di risolvere compiutamente il problema, per tanto tempo studiato, della trasformazione delle relazioni contenenti contemporaneamente angoli e segmenti nell'omografia e nella correlazione.

Al pari di Chasles, Steiner, il grande e profondo geometra, ha seguìta la strada della geometria pura; ma ha trascurato di darci un'esposizione completa de' metodi sui quali si basa. Si può tuttavia caratterizzarli, dicendo che si fondano sull'introduzione di quelle forme geometriche elementari, che Desargues aveva già considerate, sullo sviluppo ch'egli ha saputo dare alla teoria delle polari di Bobillier, e finalmente sulla costruzione delle curve e superficie di gradi superiori, mediante fasci o reti di curve o di superficie d'ordini inferiori. In mancanza di ricerche recenti, l'Analisi basterebbe a dimostrare che il campo così abbracciato ha la medesima estensione di quello in cui ci introduce senza sforzo l'analisi di Descartes.

IV.

Mentre Chasles, Steiner, e dopo, come vedremo, von Staudt, si attaccavano a costituire una dottrina rivale dell'Analisi, ed elevavano in certo modo altare contro altare, Gergonne, Bobillier, Sturm, Plücker specialmente, perfezionavano la geometria di Descartes e costituivano un sistema analitico in certo qual modo adeguato alle scoperte dei geometri. Dobbiamo a Bobillier ed a Plücker il metodo detto *delle n tazioni abbreviate*. Bobillier gli ha consacrate alcune pagine assolut'mente nuove negli ultimi volumi di *Annales* di Gergonne. Plücker ha cominciato a svolgerlo nella sua prima Opera, presto seguìta da una serie di lavori ove sono stabilite in modo perfettamente cosciente le basi della geometria analitica moderna. Dobbiamo a lui le coordinate tangenziali, le coordinate trilineari, adoperate con equazioni omogenee, e finalmente l'uso delle forme canoniche, la cui validità si riconosce col metodo, sì ingannatore a volte ma sì fecondo, detto dell'*enumerazione delle costanti*. Tutti questi felici acquisti dovevano infondere nuovo sangue all'analisi di Descartes, e metterla in condizioni di dare tutto il loro significato ai concetti di cui la geometria detta *sintetica* non aveva potuto rendersi padrona del tutto. Plücker, al quale è certo equo aggiungere Bobillier, rapito da morte prematura, deve essere considerato come il vero iniziatore di quei metodi della moderna Analisi in cui l'uso delle coordinate omogenee permette di trattare contemporaneamente, e senza per così dire che il lettore se ne accorga, al tempo stesso che una figura, tutte quelle che se ne deducono con l'omografia e la correlazione.

V.

Da questo momento si inizia un periodo brillante per le ricerche geometriche d'ogni genere. Gli analisti interpetrano tutti i loro risultati e si preoccupano di tradurli con costruzioni. I geometri si attaccano a scoprire in ogni quistione qualche principio generale, per lo più non dimostrabile senza l'aiuto dell'analisi, per farne uscire senza sforzo una quantità di conseguenze particolari, fortemente collegate le une alle altre ed al principio da cui derivano. Otto Hesse, brillante discepolo di Jacobi, sviluppa in modo ammirevole quel metodo delle coordinate omogenee, cui Plücker non aveva forse saputo dare tutto il suo valore. Boole scopre nelle polari di Bobillier la prima nozione del covariante; la teoria delle forme viene creata dai lavori di Cayley, Sylvester, Hermite, Brioschi. Più tardi, Aronhold, Clebsch e Gordan ed altri geometri ancor viventi gli forniscono le sue notazioni definitive, stabiliscono il teorema fondamentale relativo alla limitazione del numero delle forme covarianti e terminano così di dargli tutta la sua ampiezza.

La teoria delle superficie del second'ordine, edificata specialmente dalla scuola di Monge, si arricchì di tante proprietà eleganti, stabilite specialmente da O. Hesse, che deve in seguito trovare in Paolo Serret un degno emulo e continuatore.

Le proprietà delle polari delle curve algebriche sono sviluppate da Plücker e specialmente da Steiner. Lo studio già antico delle curve del terz'ordine viene ringiovanito ed arricchito da una quantità di nuovi elementi. Steiner, studia pel primo, le tangenti doppie delle curve del quart'ordine mediante la Geometria, e Hesse, dopo di lui, applica i metodi dell'algebra a questa bella quistione, come a quella dei punti d'inflessione delle curve del terz'ordine.

La nozione di *classe* introdotta da Gergonne, lo studio di un paradosso in parte delucidato da Poncelet e relativo ai gradi respettivi delle due curve polari reciproche l'una all'altra, dànno origine alle ricerche di Plücker relative alle singolarità dette *ordinarie* delle curve piane algebriche. Le celebri formule cui Plücker è così condotto sono in seguito estese da Cayley ed altri geometri alle curve gobbe algebriche. Le singolarità d'ordine superiore sono alla loro volta abbordate dai geometri; contrariamente ad una opinione allora molto estesa, Halphen dimostra che ciascuna di queste singolarità non può venir considerata come equivalente ad un certo gruppo di singolarità ordinarie e le sue ricerche chiudono per qualche tempo questa difficile ed importante questione.

L'Analisi e la Geometria, Steiner, Cayley, Salmon, Cremona si incontrano nello studio delle superficie del terz'ordine; e in conformità alle previsioni di Steiner, questa teoria diviene semplice e facile quanto quella delle superficie del second'ordine.

Le superficie rigate algebriche, tanto importanti per le applicazioni, sono studiate da Chasles, da Cayley la cui traccia ed influenza si ritrovano in tutte le ricerche matematiche, da Cremona, Salmon, La Gournerie; lo saranno in seguito da Plücker in un lavoro sul quale dovremo tornare.

Lo studio della superficie generale del quart'ordine sembra ancora troppo difficile; ma quello delle superficie speciali di quest'ordine con punti multipli o linee multiple è cominciato, con Plücker per la superficie delle onde, con Steiner, Kummer, Cayley, Moutard, Laguerre, Cremona e molti altri ricercatori. Quanto alla teoria delle curve gobbe algebriche, arricchita nelle sue parti elementari, essa riceve finalmente, dai lavori d'Halphen e di Nöther che è qui impossibile di separare, i più notevoli aumenti. Una nuova teoria di grande avvenire nasce dai lavori di Chasles, di Clebsch e di Cremona; essa riguarda lo studio di tutte le curve algebriche che possono venire tracciate sopra una superficie determinata.

L'omografia e la correlazione, questi due metodi di trasformazione che sono stati la lontana origine di tutte le precedenti ricerche, ne ricevono alla lor volta un aumento inatteso: esse non sono le sole che facciano corrispondere un solo elemento ad un solo elemento, come avrebbe potuto dimostrarlo una trasformazione particolare brevemente segnalata da Poncelet nel *Traité des propriétés projectives*. Plücker definisce la *trasformazione per raggi vettori reciproci o inversione* di cui Sir W. Thomson e Liouville non tardano a dimostrare tutta l'importanza, tanto per la Fisica matematica quanto per la Geometria. Un contemporaneo di Möbius e di Plücker, Magnus, crede aver trovata la trasformazione più generale che faccia corrispondere un punto ad un punto, ma le ricerche di Cremona ci insegnano che la trasformazione di Magnus non è che il primo termine di una serie di trasformazioni birazionali che il grande geometra italiano ci insegna a determinare metodicamente, almeno quanto alle figure della Geometria piana. Le trasformazioni di Cremona serberanno lungamente un grande interesse, sebbene ulteriori ricerche ci abbiano appreso che si riportano sempre ad una serie di applicazioni successive della trasformazione di Magnus.

VI.

Tutti i lavori che abbiamo enumerati, altri su cui torneremo in seguito, hanno la loro origine e, in certo modo, il loro primo motore nella concezione della Geometria moderna; ma è giunto il momento di indicare rapidamente un'altra fonte di grandi progressi per gli studi di Geometria. La teoria delle funzioni ellittiche di Legendre, troppo negletta dai geometri francesi, è sviluppata ed accresciuta da Abel ed Jacobi. Con questi grandi geometri, presto seguìti da Riemann e Weierstrass, la teoria delle funzioni abeliane che, in seguito, l'Algebra cercherà di seguire colle sue sole risorse, reca alla Geometria delle curve e delle superficie un contributo la cui importanza non cesserà di aumentare.

Jacobi aveva già adoperata l'analisi delle funzioni ellittiche nella dimostrazione dei celebri teoremi di Poncelet sui poligoni inscritti e circoscritti, inaugurando così un capitolo che si è quindi arricchito di molti eleganti risultati; aveva altresì ottenuto, con metodi riferentisi alla Geometria, l'integrazione delle equazioni abeliane.

Ma Clebsch, fu il primo, a dimostrare in una lunga serie di lavori tutta l'importanza delle nozioni di genere di una curva, dovuta ad Abel e Riemann, sviluppando una quantità di risultati e di soluzioni eleganti che l'uso degli integrali abeliani sembrava, tanto era semplice, collegare al loro vero punto di partenza. Lo studio dei punti d'inflessione delle curve di terz'ordine, quello delle tangenti doppie delle curve del quart'ordine e, generalmente, la teoria dell'osculazione sulla quale antichi e moderni si erano tanto spesso esercitati, furono collegati al bel problema della divisione delle funzioni ellittiche e delle funzioni abeliane.

In una delle sue Memorie, Clebsch aveva studiate le curve *razionali* o di genere zero; questo lo condusse, sul finire della troppo breve sua vita, a considerare ciò che può anche chiamarsi le superficie *razionali*, quelle che possono venire semplicemente rappresentate sopra un piano. Era quello un vasto campo di ricerche, già aperto da Chasles pei casi elementari, ed in cui Clebsch venne seguìto da Cremona ed altri scienziati. Fu in quell'occasione che Cremona, generalizzando le proprie ricerche di Geometria piana, fece conoscere non più la totalità delle trasformazioni birazionali dello spazio, ma alcune delle più interessanti tra queste trasformazioni. L'estensione della nozione di genere alle superficie algebriche è già principiata: già lavori di gran valore hanno dimostrato che la teoria degl'integrali semplici o multipli di differenziali algebrici troverà, nello studio delle superficie come in quello delle curve, un esteso campo di importanti applicazioni; ma non è al relatore della Geometria che conviene insistere su questo argomento.

VII.

Mentre si costituivano così i metodi misti di cui abbiamo indicate le applicazioni principali, i geometri puri non restavano inoperosi. Poinsot, il creatore della teoria delle coppie, sviluppava, con metodo puramente geometrico, " quello diceva, in cui non si perde di vista, mai, lo scopo della ricerca „ la teoria della rotazione di un corpo solido che le ricerche di d'Alembert, di Eulero e di Lagrange sembravano avere esaurita; Chasles recava un prezioso contributo alla Cinematica coi suoi bei teoremi sullo spostamento di un corpo solido, che sono poi stati estesi con altri metodi eleganti al caso in cui il moto abbia differenti gradi di libertà. Faceva conoscere le sue belle proposizioni sull'attrazione in generale, che non sfigurano accanto a quelle di Green e di Gauss. Chasles e Steiner si incontravano nello studio degli ellissoidi e dimostravano così ancora una volta che la Geometria ha il suo posto assegnato tra le più alte quistioni di calcolo integrale.

Steiner non sdegnava di occuparsi contemporaneamente delle parti elementari della Geometria. Le sue ricerche sui contatti dei circoli e delle coniche, sui problemi isoperimetrici, sulle superficie parallele, sul centro di gravità di curvatura destavano l'ammirazione generale colla loro semplicità e profondità.

Chasles introduceva il suo principio di corrispondenza tra due oggetti variabili, che è stato sorgente di tante applicazioni; ma l'analisi riprendeva qui il suo posto per studiare il principio nella sua stessa essenza, precisarlo e generalizzarlo. Lo stesso accadde per ciò che riguardava la famosa teoria delle *caratteristiche* e le tante ricerche di De Jonquières, di Chasles, di Cremona e d'altri, che dovevano fornir le basi di un nuovo ramo di Scienza, la *Geometria enumerativa*. Per molti anni, il celebre postulato di Chasles fu ammesso senza alcuna obiezione; una quantità di geometri credè averlo ammesso in modo irrefutabile. Ma, come disse a quell'epoca Zeuthen, è molto difficile riconoscere se, in tal genere di dimostrazioni, non sussista sempre qualche punto debole che il loro autore non ha scorto; e infatti, Halphen, dopo infruttuosi tentativi, aveva coronato definitivamente tutte le sue ricerche indicando nettamente in quali casi il postulato di Chasles possa venire ammesso ed in quali debba venir respinto.

VIII.

Sono questi i lavori principali che hanno rimessa in onore la sintesi geometrica e le hanno assicurato, nel secolo scorso, il posto che le spetta nella ricerca matematica. Numerosi ed illustri lavoratori hanno contribuito a questo grande movimento geometrico, ma bisogna riconoscere che ne furono capi e conduttori Chasles e Steiner. Fu tale lo splendore irradiato dalle loro meravigliose scoperte ch'esse ricacciarono nell'ombra, momentaneamente almeno, le pubblicazioni di altri modesti geometri, forse meno preoccupati di trovare applicazioni brillanti, atte a far amare la Geometria, che di costituire questa stessa scienza sopra una base assolutamente solida. I loro lavori hanno forse ricevuta una più tarda ricompensa, ma l'influenza loro aumenta ogni giorno; seguiterà certo ad aumentare. Passarli sotto silenzio sarebbe indubbiamente trascurare uno dei principali fattori che avranno la loro parte nelle ricerche future. Alludiamo qui specialmente a v. Staudt. I suoi lavori geometrici sono stati esposti in due interessantissime Opere: la *Geometrie der Lage*, comparsa nel 1847 e le *Beiträge zur Geometrie der Lage*, pubblicate nel 1856, cioè quattro anni dopo la Geometria superiore.

Chasles, l'abbiamo veduto, erasi preoccupato di costituire un corpo di dottrina indipendente dall'analisi di Descartes e non vi era completamente riuscito. Abbiamo già indicato una delle critiche che possono venir mosse a questo sistema: gli elementi imaginari non vi sono definiti che colle loro funzioni simmetriche, cosa che li esclude naturalmente da innumerevoli ricerche. D'altronde, l'uso costante del rapporto anarmonico, delle trasversali e della involuzione, che esige frequenti trasformazioni analitiche, dà alla *Geometria superiore* un carattere quasi esclusivamente metrico che la scosta notevolmente dai metodi di Poncelet. Tornando a questi metodi, v. Staudt si dedicò a costituire una geometria libera di ogni relazione metrica e basata esclusivamente sui rapporti di situazione. Con quest'intendimento fu concepito il suo primo lavoro, la *Geometrie der Lage* del 1847. L'autore vi prende per punto di partenza le proprietà armoniche del quadrilatero completo e quelle dei triangoli omologici, dimostrate solo per mezzo di considerazioni di geometria a tre dimensioni, analoghe a quelle di cui la Scuola di Monge si è tanto spesso servita.

In questa prima parte dell'opera sua, v. Staudt ha completamente negletti gli elementi imaginari. Solo nelle *Beiträge*, il suo secondo Lavoro, egli è riuscito, con una originalissima estensione del metodo di Chasles, a definire geometricamente un elemento imaginario isolato ed a distinguerlo dal suo coniugato. Quest'estensione, benchè rigorosa, è penosa ed astrattissima. Si può in sostanza definirla così: due punti imaginari coniugati possono venir sempre considerati come i punti doppi di un'involuzione sopra una retta reale, e come si passa da un'imaginario al suo coniugato col cambiamento di i in $-i$, così si distingueranno i due punti imaginari facendo corrispondere a ciascheduno uno dei due sensi che possono venire attribuiti alla retta. Vi è in ciò qualcosa di un po' artificiale.

Lo sviluppo della teoria inalzata su tali basi è necessariamente complicato. Con metodi assolutamente proiettivi, v. Staudt stabilì tutto un metodo di calcolo dei rapporti anarmonici degli elementi imaginari i più generali. Come qualunque geometria, la geometria proiettiva adopera la nozione dell'ordine e l'ordine genera il numero: non sarebbe quindi da stupirci che v. Staudt abbia potuto costituire il suo metodo di calcolo; ma bisogna ammirare l'ingegnosità che ha dovuto spiegare per riuscirvi. Malgrado gli sforzi dei distinti geometri che hanno cercato di semplificarne l'esposizione, temiamo che questa parte della geometria di v. Staudt, nè più nè meno della geometria d'altronde sì interessante del profondo pensatore Grassmann, non possa prevalere contro i metodi analitici che hanno oggi conquistato il favore quasi universale. La vita è corta, i geometri conoscono ed anche praticano il principio della minima azione. Malgrado questi timori che non debbono scoraggire alcuno, ci sembra che, sotto la prima forma datale da v. Staudt, la geometria proiettiva debba divenire la compagna necessaria della geometria descrittiva, che sia chiamata a rinnovare tale geometria nella sua essenza, i suoi andamenti e le sue applicazioni. Questo è già stato compreso in molti paesi, e specialmente in Italia ove il grande geometra Cremona non aveva sdegnato scrivere, per le scuole, un trattato elementare di geometria proiettiva.

IX.

Nei precedenti articoli, abbiamo tentato seguire e fare apparire nettamente le più lontane conseguenze dei metodi di Monge e di Poncelet. Creando le coordinate tangenziali e le coordinate omogenee, era sembrato che Plücker avesse esaurito tutto ciò che il metodo delle proiezioni e quello delle polari reciproche potevano fornire all'analisi. Gli rimaneva, sul finire della sua vita, da tornare sulle sue prime ricerche per dar loro un'estensione che doveva allargare in proporzioni inattese il dominio della geometria.

Preceduta da innumerevoli ricerche sui sistemi di rette, dovute a Poinsot, Möbius, Chasles, Dupin, Malus, Hamilton, Kummer, Transon e soprattutto a Cayley, che è stato il primo ad introdurre la nozione delle coordinate della retta, ricerche di cui si trova l'origine, sia nella statica e nella cinematica, sia nell'ottica geometrica, la geometria della linea retta di Plücker verrà sempre considerata come parte dell'opera sua in cui si trovano le idee più nuove ed interessanti. Che Plücker sia stato il primo a costituire uno studio metodico della retta, è già cosa importante, ma questo è niente in confronto di ciò che ha scoperto. Si dice a volte che il principio di dualità mette in evidenza il fatto che il piano, come il punto può venir considerato come un elemento dello spazio.

Ciò è vero; ma, aggiungendo al piano ed al punto, la retta come elemento possibile dello spazio Plücker è stato portato a riconoscere che qualsiasi curva, qualsiasi superficie può pure venir considerata come elemento dello spazio, ed è nata così una nuova geometria che ha già inspirato gran numero di lavori che ne susciterà più ancora in avvenire. Una bella scoperta, di cui parleremo più oltre, ha già collegata la geometria delle sfere a quella delle rette e permesso d'introdurre la nozione delle coordinate di una sfera. La teoria dei sistemi di circoli è già cominciata, si svilupperà indubitatamente quando si vorrà studiare la rappresentazione, che dobbiamo a Laguerre, di un punto imaginario nello spazio mediante un circolo orientato.

Ma prima d'esporre lo sviluppo di queste nuove idee che hanno vivificato i metodi infinitesimali di Monge, dobbiamo tornare indietro per riprendere la storia dei rami della geometria che abbiamo negletti fino ad ora.

X.

Tra i lavori della scuola di Monge, ci siamo finora limitati a considerare quelli che si collegano alla geometria *finita*, ma alcuni discepoli di Monge si dedicarono specialmente a sviluppare le nuove nozioni di geometria infinitesimale recate dal loro maestro sulle curve a doppia curvatura, sulle linee di curvatura, sulla generazione delle superficie, nozioni esposte almeno in parte, nell'*Application de l'Analyse à la Géométrie*. Tra questi dobbiamo citare Lancret, autore di bei lavori sulle curve gobbe e specialmente Carlo Dupin, il solo forse che abbia seguite tutte le vie aperte da Monge.

Tra gli altri lavori, dobbiamo a Dupin due opere che Monge avrebbe firmate senza esitare; i *Développements de Géométrie pure* comparsi nel 1813, e le *Applications de Géométrie et de Mécanique* datate dal 1822. È là che trovasi quella nozione dell'*indicatrice* che doveva rinnovare dopo Eulero e Meunier, tutta la teoria della curvatura, quella delle tangenti coniugate, delle linee asintotiche che hanno preso un posto sì importante nelle recenti ricerche. Non potremmo dimenticare la determinazione della superficie di cui tutte le linee di curvatura sono circoli, nè specialmente la Memoria sui sistemi tripli di superficie ortogonali in cui si trova, contemporaneamente alla scoperta del sistema triplo formato di superficie di secondo grado, il celebre teorema cui rimarrà unito il nome di Dupin.

Sotto l'influenza di questi lavori e del rinascimento dei metodi sintetici, la geometria degl'infinitamente piccoli riprendeva in tutte le ricerche il posto che Lagrange aveva voluto togliergli per sempre. Cosa singolare, i metodi geometrici così restaurati, dovevano ricevere il maggiore impulso in seguito alla pubblicazione di una Memoria che, dapprincipio almeno, sembra collegarsi alla più pura analisi; vogliamo parlare del celebre scritto di Gauss: *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, presentato nel 1827 alla Società di Gottinga, e la cui comparsa segna, si può dire, una data decisiva nella storia della Geometria infinitesimale.

Da questo punto, il metodo infinitesimale prese in Francia uno slancio fino allora ignorato. Frenet, Bertrand, Molins, J. A. Serret, Bouquet, Puiseux, Ossian Bonnet, Paul Serret svilupparono la teoria delle curve gobbe. Liouville, Chasles, Minding si unirono ad essi per seguitare lo studio metodico della Memoria di Gauss. L'integrazione fatta da Jacobi dell'equazione differenziale delle linee geodetiche dell'ellissoide suscitò gran numero di ricerche. Contemporaneamente, i problemi studiati nell'*Application de l'analyse* di Monge, furono ampiamente svolte. La determinazione di tutte le superficie con linee curve, piane o sferiche completò, nel miglior modo, alcuni dei risultati parziali già ottenuti da Monge.

A questo punto, uno dei più penetranti geometri, secondo Jacobi, Gabriele Lamé, il quale, come Carlo Sturm aveva cominciato dalla Geometria pura ed aveva già recato a tale scienza i più interessanti contributi con una piccola opera pubblicata nel 1817 e con alcune Memorie inserite negli *Annales* di Gergonne, utilizzava i resultati ottenuti da Dupin e Binet sul sistema di superficie omofocali del secondo grado e, elevandosi alla nozione di coordinate curvilinee dello spazio, diventava il creatore di tutta una nuova teoria destinata a ricevere in Fisica Matematica le applicazioni più varie.

XI.

Qui pure, in questo ramo infinitesimale della Geometria, si ritrovano le due tendenze che abbiamo indicate a proposito della Geometria delle quantità finite. Alcuni, tra i quali bisogna porre J. Bertrand ed O. Bonnet, vogliono costituire un metodo autonomo che riposi direttamente sull'uso degl'infinitamente piccoli. Il grande *Traité de Calcul différentiel*, di Bertrand, contiene varî capitoli sulla teoria delle curve e delle superficie che sono, in certo modo, l'illustrazione di tale concetto. Altri seguono le solite vie analitiche, attaccandosi solo a ben riconoscere e mettere in evidenza gli elementi che debbono figurare in prima linea. Così fa Lamé, introducendo la sua teoria sui *parametri differenziali*. Così fa Beltrami estendendo molto ingegnosamente l'uso di questi invarianti differenziali al caso di due variabili indipendenti, cioè allo studio delle superficie.

Sembra che adesso si ritorni ad un metodo misto di cui si trova l'origine nei lavori di Ribaucour, sotto il nome di *perimorfia*. Si conservano gli assi rettangolari della geometria analitica, sia rendendoli mobili e ricollegandoli nel modo che sembra più comodo al sistema che vuolsi studiare. Scompare così la maggior parte delle obiezioni indirizzate al metodo delle coordinate. Si riuniscono i vantaggi di ciò che dicesi a volte geometria *intrinseca* a quelli risultanti dall'uso dell'analisi regolare. Tale analisi del resto non viene affatto abbandonata; le complicazioni di calcolo che produce quasi sempre nelle sue applicazioni allo studio delle superficie e delle coordinate rettilinee, spariscono generalmente se si adoperano le nozioni sugl'invarianti ed i covarianti delle forme quadratiche di differenziali, che dobbiamo alle ricerche di Lipschitz e di Christoffel, inspirate dagli studi di Riemann sulla geometria non euclidea.

XII.

I resultati di tanti lavori non si sono fatti aspettare. La nozione della curvatura geodetica, che Gauss possedeva già, ma senza averla pubblicata, è stata data da Bonnet e Liouville; la teoria delle superficie i cui raggi di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, inaugurata in Germania con due proposizioni che non sfigurerebbero nella memoria di Gauss, è stata arricchita da Ribaucour, Halphen, S. Lie ed altri, di moltissime proposizioni.

Di queste proposizioni, alcune riguardano le superficie considerate in modo generale, altre si applicano ai casi particolari in cui la relazione tra i raggi di curvatura prende una forma specialmente semplice: alle superficie minime, per esempio, ed anche alle superficie a curvatura costante, positiva o negativa.

Le superficie minime sono state argomento di lavori che ne rendono lo studio il più attraente capitolo della geometria infinitesimale. L'integrazione della loro equazione alle derivate parziali costituisce una delle più belle scoperte di Monge; ma, a causa dell'imperfezione della teoria degl'imaginari, il grande geometra non aveva potuto ricavare dalle sue formule alcun modo di generazione di queste superficie, nè alcuna superficie particolare. Non torneremo qui sulla storia dettagliata che abbiamo presentato nelle nostre *Leçons sur la théorie des surfaces*, ma conviene ricordare le ricerche fondamentali di Bonnet che ci hanno dato, in particolare, la nozione delle *superficie associate ad una superficie data*, le formole di Weierstrass che stabiliscono uno stretto legame tra le superficie minime e le funzioni di una variabile complessa, le ricerche di Lie dalle quali è stato stabilito che le formule stesse di Monge possono oggi servir di base ad uno studio fruttifero delle superficie minime. Cercando di determinare le superficie minime di classi o di gradi più piccoli, siamo stati condotti alla nozione delle superficie minime doppie, la quale deriva dall'*Analysis situs*.

Tre problemi di diversa importanza sono stati studiati in questa teoria.

Il primo, relativo alla determinazione delle superficie minime inscritte secondo un contorno dato ad una sviluppabile ugualmente data, è stato risolto con formule celebri che hanno condotto ad un gran numero di proposizioni. Per esempio, ogni retta tracciata sopra una tale superficie è un'asse di simmetria.

Il secondo, posto da S. Lie, riguarda la determinazione di tutte le superficie minime algebriche inscritte in una sviluppabile algebrica, senza che la curva di contatto sia data. Questo pure è stato interamente spiegato.

Il terzo ed il più difficile è quello che i fisici risolvono sperimentalmente, immergendo un contorno chiuso in una soluzione di glicerina. Esso riguarda la determinazione della superficie minima passante per un contorno dato.

La risoluzione di tal problema supera evidentemente le risorse della Geometria. Grazie alle risorse della più alta Analisi, è stato risoluto per alcuni contorni particolari nella Memoria celebre di Riemann e nelle profonde ricerche che hanno seguita ed accompagnata quella Memoria. Quanto al contorno più generale, ne è stato brillantemente cominciato lo studio; i nostri successori lo continueranno.

Dopo le superficie minime, le superficie a curvatura costante dovevano attirare l'attenzione dei geometri. Un'osservazione ingegnosa di Bonnet collega una coll'altra le superficie di cui una curvatura o l'altra, curvatura media o curvatura totale, è costante. Bour aveva annunciato che l'equazione a derivate parziali delle superficie a curvatura costante potevano essere completamente integrate. Questo risultato non ha potuto essere ritrovato; sembra anche più che dubbio, se ci riportiamo ad una ricerca in cui S. Lie ha inutilmente cercato d'applicare un metodo generale d'integrazione delle equazioni a derivate parziali all'equazione particolare delle superficie a curvatura costante. Ma, se è impossibile determinare in termini finiti tutte queste superficie, se ne sono almeno potute ottenere alcune, caratterizzate da proprietà speciali, come quella di avere le linee di curvatura piane e sferiche; ed è stato dimostrato, adoperando un metodo riuscito in molti altri problemi, che si può far derivare da qualunque superficie a curvatura costante un'infinità di altre superficie della stessa natura, mediante operazioni nettamente definite che esigono solo quadrature.

La teoria delle deformazioni delle superficie nel senso di Gauss è pure stata molto arricchita. Dobbiamo a Minding ed a Bour lo studio particolareggiato di quella speciale deformazione delle superficie rigate che lascia rettilinee le generatrici. Se non si è potuto, come si è detto, determinare le superficie applicabili sulla sfera, ci si è dedicati con maggior successo ad altre superficie di secondo grado e, particolarmente, al paraboloide di rivoluzione. Lo studio sistematico della deformazione delle superficie generali di secondo grado è già principiato; è tale da dar presto i più importanti risultati.

La teoria della deformazione infinitamente piccola forma oggi uno dei capitoli più completi della Geometria. È la prima applicazione un po' estesa di un metodo generale che sembra abbia grande avvenire.

Dato un sistema d'equazioni differenziali o alle derivate parziali, sufficiente a determinare un certo numero d'incognite, conviene associargli un sistema di equazioni che abbiamo chiamato *sistema ausiliare* e che determina i sistemi di soluzioni infinitamente vicini ad un sistema dato qualunque di soluzioni. Il sistema ausiliare essendo necessariamente lineare, il suo uso in tutte le ricerche fornisce lumi preziosi sulla proprietà del sistema proposto e sulla possibilità di ottenerne l'integrazione.

La teoria delle linee di curvatura e delle linee asintotiche è stata notevolmente estesa. Non solo si sono potute determinare queste due serie di linee per superficie particolari come le superficie tetraedrali di Lamé; ma anche, sviluppando i risultati di Moutard circa una classe particolare di equazioni lineari alle derivate parziali del second'ordine, si è potuto generalizzare tutto quanto era stato ottenuto per le superficie a linee di curvature piane o sferiche, determinando completamente tutte le classi di superficie per le quali può risolversi il problema della *rappresentazione sferica*. Si è altresì risoluto il problema correlativo per le linee asintotiche, facendo conoscere tutte le superficie di cui può determinarsi in termini finiti la deformazione infinitamente piccola. È questo un vasto campo di ricerche appena cominciato ad esplorare.

Lo studio infinitesimale delle congruenze rettilinee, già da lungo tempo cominciato da Dupin, Bertrand, Hamilton, Kummer, è venuto a mescolarsi a tutte queste ricerche. Ribaucour, che vi ha preso parte preponderante, ha studiato classi particolari di congruenze rettilinee e, specialmente, le congruenze dette *isotrope*, che entrano nel miglior modo nello studio delle superficie minime.

I sistemi tripli ortogonali, di cui Lamé erasi servito in Fisica matematica, sono divenuti oggetto di ricerche sistematiche. Cayley ha formato per primo l'equazione alle derivate parziali del terz'ordine da cui erasi fatta dipendere la soluzione generale di quel problema. Il sistema delle superficie omofocali del secondo grado è stato generalizzato e ha dato origine a quella teoria delle *ciclidi* generali nella quale si possono adoperare contemporaneamente le risorse della Geometria metrica, della Geometria proiettiva e della Geometria infinitesimale. Sono stati fatti conoscere molti altri sistemi ortogonali. È bene segnalare tra questi i sistemi *ciclici* di Ribaucour, pei quali una delle tre famiglie ammette dei circoli per traiettorie ortogonali, ed i sistemi più generali pei quali queste traiettorie ortogonali sono semplicemente curve piane. L'uso sistematico degli imaginari, che bisogna guardar bene di escludere dalla Geometria, ha permesso di collegare tutte queste determinazioni allo studio della deformazione finita d'una superficie speciale.

Tra i metodi che hanno permesso di stabilire tutti questi risultati, conviene notare l'uso sistematico delle equazioni lineari alle derivate parziali di second'ordine e dei sistemi formati da tali equazioni. Le più recenti ricerche dimostrano che tale uso è destinato a rinnovare la maggior parte delle teorie.

La Geometria infinitesimale non poteva trascurare lo studio dei due problemi fondamentali che le venivano proposti dal calcolo delle variazioni.

Il problema del cammino più breve sopra una superficie è stato argomento degli studi magistrali di Jacobi e di Ossian Bonnet. Si è continuato lo studio delle linee geodetiche, si è imparato a determinarle per nuove superficie. La teoria degli insiemi è sorta a permettere di seguire queste linee nel loro corso sopra una superficie data. La risoluzione di un problema relativo alla rappresentazione di due superficie una sopra l'altra ha molto accresciuto l'interesse delle scoperte di Jacobi e di Liouville circa una classe particolare di superficie di cui si sanno determinare le linee geodetiche. I resultati riguardanti questo caso particolare hanno condotto all'esame di una nuova quistione: ricercare tutti i problemi di calcolo delle variazioni la cui soluzione è fornita dalle curve soddisfacenti una equazione differenziale data.

Finalmente, i metodi di Jacobi sono stati estesi allo spazio a tre dimensioni ed applicati alla soluzione di una questione che presentava le più grandi difficoltà: lo studio delle proprietà di minimo appartenenti alla superficie minima che passa per un contorno dato.

G. Darboux.

(Continua)

SUL NUMERO DELLE RETTE DI UN S_n

soddisfacenti ad un prodotto di condizioni caratteristiche indipendenti tali da formare una condizione di multiplicità $2(n-1)$

1. Del problema indicato nel titolo di questa Nota è stata già data una risoluzione dal sig. H. Schubert. (1) Qui troveremo una formola alquanto più semplice di quella dello Schubert, e tale da permettere di rilevare certe particolarità che sfuggono a quella.

Indicando con (α_1, α'_1) una condizione caratteristica relativa alle rette di un S_n cioè la condizione di stare in uno spazio $[\alpha'_1]$ di di-

(1) Mitteilungen der Hamb. Gesellschaft der Wissenschaften, 3, 1892.

mensione α'_i e di essere incidente ad uno spazio $[\alpha_i]$ contenuto in $[\alpha'_i]$, si ha [1]

$$(\alpha_1, \alpha'_1)(\alpha_2, \alpha'_2) = \sum_{k_1=0}^{k_1=e_1} (\alpha_1 + \alpha_2 + 1 - n + k_1;\ \ \alpha'_1 + \alpha'_2 - n - k_1)\ ^{(2)}$$

essendo

$$e_1 = \min(\alpha'_1 - \alpha_1 - 1,\ \alpha'_2 - \alpha_2 - 1).$$

Applicando questa formola, e facendo la posizione

$$\mathop{\mathrm{M}}_{i=1}^{i=a} \sum_{x_i=d_i}^{x_i=e_i} = \sum_{x_1=d_1}^{x_1=e_1} \sum_{x_2=d_2}^{x_2=e_2} \cdots \sum_{x_a=d_a}^{x_a=e_a} \tag{1}$$

che abbiamo scelto in forma alquanto più generale di quello che sia necessario al momento, perchè così ci occorrerà in seguito, otteniamo

$$\prod_{i=1}^{i=r} (\alpha_i, \alpha'_i) = \mathop{\mathrm{M}}_{i=1}^{i=r-1} \sum_{k_i=0}^{k_i=e_i} [\alpha_1 + \ldots + \alpha_r - (r-1)(n-1) + k_1 + \ldots$$
$$\ldots + k_{r-1},\ \alpha'_1 + \ldots + \alpha'_r - (r-1)\,n - k_1 - \ldots - k_{r-1}] \tag{2}$$

essendo

$$e_i = \min(\alpha'_{i+1} - \alpha_{i+1} - 1,\ \alpha'_1 - \alpha_1 + \ldots + \alpha'_i - \alpha_i - i - 2k_1 - \ldots - 2k_{i-1}) \tag{3}$$

dove è da porre $k_0 = 0$.

Supponiamo di avere $r+1$ condizioni indipendenti

$$(\alpha_i, \alpha'_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, r+1$$

formanti una condizione possibile di multiplicità $2(n-1)$, per cui dovrà essere [3]

$$\alpha_1 + \alpha'_1 + \ldots + \alpha_{r+1} + \alpha'_{r+1} = r(2n-1) + 1. \tag{4}$$

Allora posto

$$d_i = \alpha'_i - \alpha_i, \quad e = \tfrac{1}{2}\Sigma\, d_i + \tfrac{1}{2}(r+1) - 2,$$
$$s = [e]_{r-1}, \quad s_i = [e - d_i]_{r-1}, \quad s_{ik} = [e - d_i - d_k]_{r-1}, \ldots\ ^{(4)}$$

l'espressione del numero cercato data dallo Schubert è [5]

$$s - (s_1 + s_2 + \ldots + s_{r+1}) + (s_{12} + s_{13} + \ldots$$
$$\ldots + s_{r,r+1}) - (s_{123} + \ldots) + (-1)^{r+1} s_{12\ldots(r+1)}. \tag{S}$$

2. Sviluppato il prodotto delle prime r condizioni (sempre nell'ipotesi che le condizioni date siano $r+1$ e ne formino una di multiplicità $2n-2$) mediante la (2), dimostreremo che delle condizioni con-

---

(1) SCHUBERT, *Math. Ann.*, vol. 26. — Cfr. anche PALATINI-GIAMBELLI, *Prodotto di due condizioni* ecc. "Atti Acc. Torino", 1901.

(2) Il simbolo $(\alpha_1, \alpha'_1)(\alpha_2, \alpha'_2)$ esprime la condizione cui deve soddisfare una retta che debba contemporaneamente soddisfare alle (α_1, α'_1), (α_2, α'_2).

(3) Una condizione (α_0, α_1) in S_n è di multiplicità $2n - 1 - \alpha_0 - \alpha_1$.

(4) Qui i simboli della forma $[n]_k$ stanno per $\binom{n}{k}$.

(5) L'espressione alla quale si giungerà in questo scritto trovasi alla fine del n.° 6 ed è indicata con (S').

tenute nella somma che forma il secondo membro una sola (che in generale comparirà più volte nella somma) ve n'è di compatibile con la $(\alpha_{r+1}, \alpha'_{r+1})$ e precisamente quella per la quale è

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r+\alpha'_{r+1}-(r-1)(n-1)+k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}=n \quad (\alpha)$$

dalla quale si ha

$$k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}=r(n-1)+1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_r-\alpha'_{r+1}. \quad (5)$$

Per intender questo, si pensi che, affinchè due condizioni (a_0, a_1), (b_0, b_1) siano compatibili, (¹) è necessario e sufficiente che sia $a_0+b_1 \geqslant n$; $b_0+b_1 \geqslant n$; che se poi le due condizioni insieme ne formano una di multiplicità $2(n-1)$, sarà per la (4), $a_0+a_1+b_0+b_1=2n$, per cui non può essere che $a_0+b_1=n$, $b_0+a_1=n$, delle quali, riferendoci al nostro caso [in cui è $a_0=\alpha_1+\ldots+\alpha_r-(r-1)(n-1)+k_1+\ldots$ $\ldots+k_{r-1}$, $a_1=\alpha'_1+\ldots+\alpha'_r-(r-1)n-k_1-\ldots-k_{r-1}$, $b_0=\alpha_{r+1}$, $b_1=\alpha'_{r+1}$], la prima è la (α), mentre la seconda è conseguenza di questa e della (4). Si vede ancora che nelle ipotesi ora fatte una sola retta soddisfa alla condizione $(a_0, a_1)(b_0, b_1)$, cioè quella determinata dal punto d'incontro di $[a_0]$, $[b_1]$ con quello comune a $[b_0]$, $[a_1]$. Dunque il prodotto della $(\alpha_{r+1}, \alpha'_{r+1})$ con quella tal condizione anzidetta ch'è con essa compatibile è uguale ad 1, e perciò il cercato numero di rette è uguale al numero di volte che quella tal condizione comparisce nel secondo membro della (2), cioè al numero delle soluzioni intere del seguente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}=r(n-1)+1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_r-\alpha'_{r+1} \\ 0 \leqslant k_i \leqslant c_i \qquad i=1,\,2,\ldots,r-1 \end{array}\right\} (6)$$

avendo c_i il significato espresso dalla (3).

In particolare quando le condizioni sono 3, quindi $r=2$, si ha il sistema

$$\left.\begin{array}{c} k_1=2n-1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha'_3 \\ 0 \leqslant k_1 \leqslant \min(\alpha'_1-\alpha_1-1,\ \alpha'_2-\alpha_2-1) \end{array}\right\}$$

il quale ha una ed una sola soluzione se è $\alpha_1+\alpha_2+\alpha'_3 \leqslant 2n-1$ e inoltre $\alpha'_1-\alpha_1-1 \geqslant 2n-1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha'_3$, $\alpha'_2-\alpha_2-1 \geqslant 2n-1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha'_3$, cioè $\alpha'_1+\alpha_2+\alpha'_3 \geqslant 2n$, $\alpha_1+\alpha'_2+\alpha'_3 \geqslant 2n$, e nessuna in caso contrario. Dunque rette che soddisfano in $[n]$ a tre delle nostre condizioni formanti una condizione di multiplicità $2(n-1)$ ve n'ha una sola o nessuna. *In tutto ciò che segue si ammetterà che le condizioni date siano più di tre.*

3. Incominciamo ad occuparci del sistema

$$\left.\begin{array}{l} k_1+k_2=m \\ 0 \leqslant k_1 \leqslant a_1 \\ 0 \leqslant k_2 \leqslant \min(a_2,\ a'_2-2k_1) \end{array}\right\}$$

(¹) Cfr. PALATINI-GIAMBELLI, l. c.

dove m, a_1, a_2, a'_2 siano numeri interi positivi dati ad arbitrio. Intanto dovrà essere $0 \leqslant k_1 \leqslant \min(m, a_1)$; di più la terza delle relazioni date esige $k_1 \leqslant \frac{a'_2}{2}$. Dopo ciò avendosi $k_2 = m - k_1$, dovrà essere $m - k_1 \leqslant a_2$, $m - k_1 \leqslant a'_2 - 2k_1$, donde $k_1 \geqslant m - a_2$ (*ponendo* $m - a_2 = 0$ *quando sia* $m - a_2 < 0$) e $k_1 \leqslant a'_2 - m$, la quale dimostra, dovendo essere $k_1 \geqslant 0$, che condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni è $a'_2 \geqslant m$. Dunque il minimo valore di k_1 tale da fornire soluzioni del sistema è $m - a_2$ ed il massimo è il più piccolo dei numeri $m, a_1, a'_2 - m, \frac{a'_2}{2}$, il quale ultimo però va tralasciato perchè esso non può essere contemporaneamente minore di ciascuno dei numeri m, $a'_2 - m$. Concludendo il numero delle soluzioni intere del sistema preso in esame è dato da

$$t_0 + 1 - (m - a_2)$$

essendo

$$t_0 = \min(m, a_1, a'_2 - m)$$

ed $m - a_2 = 0$, quando risulti $m - a_2 < 0$. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni è, oltre alla già trovata $m \leqslant a'_2$, che sia $t_0 \geqslant m - a_2$ (che resta certo soddisfatta per $m \leqslant a_2$) la quale si scinde nella $m \geqslant m - a_2$, che rimane soddisfatta da sè e nelle $a_1 \geqslant m - a_2$, $a'_2 - m \geqslant m - a_2$, ossia $m \leqslant a_1 + a_2$, $m \leqslant \frac{a_2 + a'_2}{2}$.

Passiamo al sistema

$$\left.\begin{array}{l} k_1 + k_2 + k_3 = m \\ 0 \leqslant k_1 \leqslant a_1 \\ 0 \leqslant k_2 \leqslant (a_2, \ a'_2 - 2k_1) \\ 0 \leqslant k_3 \leqslant (a_3, \ a'_3 - 2k_1 - 2k_2) \end{array}\right\}$$

Per ottenere una soluzione bisogna anzitutto prendere

$$k_1 + k_2 \leqslant \min\left(m, \ a_1 + a_2, \frac{a'_3}{2}\right).$$

Dopo ciò bisogna porre $k_3 = m - k_1 - k_2$, il che esige $m - k_1 - k_2 \leqslant a_3$, $m - k_1 - k_2 \leqslant a'_3 - 2k_1 - 2k_2$, cioè $k_1 + k_2 \geqslant m - a_3$ (*ponendo* $m - a_3 = 0$ *quando* è $m - a_3 < 0$), e $k_1 + k_2 \leqslant a'_3 - m$, dalla quale risulta che condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni è $m \leqslant a'_3$. Dunque per ora il minimo valore di cui è suscettibile $k_1 + k_2$ affine di fornire soluzioni è $m - a_3$ ed il massimo è il più piccolo dei numeri $m, a_1 + a_2, a'_3 - m, \frac{a'_3}{2}$, il quale ultimo è da tralasciare non potendo essere contemporaneamente minore di m e $a'_3 - m$.

Fissato un valore m_1 fra questi due limiti, occorrerà fissare k_1, k_2 in modo da essere

$$\left.\begin{array}{l} k_1 + k_2 = m_1 \\ 0 \leqslant k_1 \leqslant a_1 \\ 0 \leqslant k_2 \leqslant (a_2, a'_2 - 2k_1) \end{array}\right\}$$

Per l'esistenza di soluzioni di questo sistema, che è della forma del primo di cui ci siamo occupati, è necessario e sufficiente che sia $m_1 \leqslant a_1 + a_3$, ciò che avviene se si tiene conto dei limiti fra i quali va scelto m_1, ed inoltre

$$m_1 \leqslant a'_3, \quad m_1 \leqslant \frac{a_2 + a'_2}{2},$$

al che si provvederà assumendo come limite superiore di $k_1 + k_2$ il minore dei cinque numeri

$$m, \quad a_1 + a_3, \quad a'_3 - m, \quad a'_2, \quad \frac{a_2 + a'_2}{2}$$

anzichè solo dei tre fissati prima. Dopo ciò abbiamo che l'ultimo sistema scritto ammette soluzioni per qualsiasi valore di m_1 scelto fra i limiti entro i quali può variare $k_1 + k_2$ ed il numero di queste è dato, per uno determinato di tali valori, da

$$t_0 + 1 - (m_1 - a_2)$$

essendo

$$t_0 = \min (m_1,\ a_1,\ a'_2 - m_1)$$

ed $m_1 - a_2 = 0$ quando risulti $m_1 - a_2 < 0$; perciò le soluzioni del sistema proposto sono in numero di

$$\sum_{m_1 = m - a_3}^{m_1 = t_1} [t_0 + 1 - (m_1 - a_2)]$$

essendo

$$t_1 = \min \left(m, a_1 + a_2, a'_3 - m, a'_2, \frac{a_2 + a'_2}{2}\right)$$

$$t_0 = \min (m_1,\ a_1,\ a'_2 - m_1)$$

ponendo

$$m_1 - a_2 = 0,\ m_1 - a_3 = 0 \quad \text{quando sia} \quad m_1 - a_2 < 0,\ m - a_3 < 0.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni, sono, oltre alla già trovata $m \leqslant a'_3$, quelle date da $m - a_3 \leqslant t_1$, quindi in tutto esse sono

$$m \leqslant a_1 + a_2 + a_3, \quad m \leqslant a'_3, \quad m \leqslant a_3 + a'_2, \quad m \leqslant \frac{a_3 + a'_3}{2}, \quad m \leqslant a_3 + \frac{a_2 + a'_2}{2}$$

Dopo ciò è ovvio il procedimento per trovare il numero delle soluzioni intere dei sistemi analoghi ai due fin qui considerati e contenenti 4, 5 ... variabili, e si giunge facilmente a concludere che il numero delle soluzioni intere del sistema

$$\left.\begin{array}{c} k_1 + k_2 + \ldots + k_{r-1} = m \\ 0 \leqslant k_1 \leqslant a_1 \\ 0 \leqslant k_i \leqslant \min (a_i,\ a'_i - 2k_1 - 2k_2 - \ldots - 2k_{i-1}) \quad i = 2, 3, \ldots r-1 \end{array}\right\} (7)$$

è dato da [tenendo conto della posizione (1)]

$$\left.\begin{array}{l}
\displaystyle\mathop{\mathrm{M}}_{h=1}^{h=r-3}\ \sum_{m_{r-2-h}=m_{r-1-h}-a_{r-h}}^{m_{r-2-h}=t_{r-2-h}} [t_0+1-(m_1-a_2)] \\
\text{essendo} \\
t_{r-2-h}=\min\Big(m_{r-1-h},\ a_1+a_2+\ldots+a_{r-1-h},\ a'_{r-h}-m_{r-1-h}; \\
\quad a'_{r-1-h},\ a_{r-1-h}+a_{r-2-h}+\ldots+a_{r-1-j-h}+a'_{r-2-j-h}; \\
\quad \dfrac{a_{r-1-h}+a'_{r-1-h}}{2},\ a_{r-1-h}+\ldots \\
\quad \ldots+a_{r-1-j-h}+\dfrac{a_{r-2-j-h}+a'_{r-2-j-h}}{2}\Big) \\
\quad j=0,1,2,\ldots,r-4-h
\end{array}\right\} \tag{8}$$

dove dovrà porsi $m_{r-2}=m$ e $m_{r-1-h}-a_{r-h}=0$, $m_1-a_2=0$ allorchè queste due differenze risultino negative. Per $h=r-2$ si otterrà l'espressione di t_0. Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni è che m non superi alcuno dei numeri

$$\left.\begin{array}{l}
a_1+\ldots+a_{r-1};\ a'_{r-1},\ a_{r-1}+\ldots+a_{r-1-l}+a'_{r-2-l}; \\
\dfrac{a_{r-1}+a'_{r-1}}{2},\ a_{r-1}+\ldots+a_{r-1-l}+\dfrac{a_{r-2-l}+a'_{r-2-l}}{2}
\end{array}\right\}\ l=0,1,\ldots,r-4.$$

4. Riferendoci al sistema (6) supponiamo che le condizioni siano disposte in modo da essere

$$\alpha'_1-\alpha_1 \geqslant \alpha'_2-\alpha_2 \geqslant \alpha'_3-\alpha_3\ldots;$$

cosicchè, siccome confrontando col sistema (7) si ha

$$a_1=\alpha'_2-\alpha_2-1,\ a_2=\alpha'_3-\alpha_3-1,\ a_3=\alpha'_4-\alpha_4-1,\ldots;$$
$$a'_2=\alpha'_1-\alpha_1+\alpha'_2-\alpha_2-2,$$
$$a'_3=\alpha'_1-\alpha_1+\alpha'_2-\alpha_2+\alpha'_3-\alpha_3-3,\ldots$$

posto

$$a'_1=\alpha'_1-\alpha_1-1,$$

si avrà in questo caso

$$a'_1\geqslant a_1\geqslant a_2\ldots \quad \text{e} \quad a'_2=a_1+a'_1,\quad a'_3=a_2+a'_2=a'_1+a_1+a_2,$$
$$a'_4=a_3+a'_3=a'_1+a_1+a_2+a_3,\ldots$$

Da queste relazioni si ricava allora facilmente che è

$$a_1+a_2+\ldots+a_{r-1-h}$$

il più piccolo dei numeri

$$a_1+\ldots+a_{r-1-h},\quad a'_{r-1-h},\quad a_{r-1-h}+\ldots+a_{r-1-j-h}+a'_{r-2-j-h}$$

e che è

$$\frac{a_{r-1-h}+a'_{r-1-h}}{2}$$

il minore dei numeri

$$\frac{a_{r-1-h}+a'_{r-1-h}}{2},\quad a_{r-1-h}+\ldots+a_{r-1-j-h}+\frac{a_{r-2-j-h}+a'_{r-2-j-h}}{2}$$

e siccome è

$$\frac{a_{r-1-h}+a'_{r-1-h}}{2}=\frac{a'_{r-h}}{2},$$

che certo non è contemporaneamente inferiore a ciascuno dei numeri m_{r-1-h}, $a'_{r-h}-m_{r-1-h}$, e poichè si ha $a_1+\ldots+a_{r-1-h}=a'_{r-h}-a'_1$, così potremo dire che il numero delle soluzioni del sistema (6) è dato dalla (8), essendo

$$t_{r-2-h}=\min(m_{r-1-h},\ a'_{r-h}-a'_1,\ a'_{r-h}-m_{r-1-h})$$

ponendo

$$m_{r-2}=m=r(n-1)+1-\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_r-\alpha'_{r+1}.$$

Le stesse considerazioni fatte ora per determinare l'espressione di t_{r-2-h} nel nostro caso servono a provare che in questo le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni si riducono alle

$$m\leqslant a_1+a_2+\ldots+a_{r-1},\quad m\leqslant\frac{a_{r-1}+a'_{r-1}}{2}=\frac{a'_r}{2}.$$

La seconda di queste, sostituendo ad m e ad a'_r le loro espressioni, e tenendo conto della (4) si riduce alla $1\leqslant\alpha'_{r+1}-\alpha_{r-1}$ che è certo soddisfatta, per cui rimane soltanto la prima, la quale, sostituendo alla m ed alle a le loro espressioni, si riduce alla

$$\alpha_1+\alpha'_2+\alpha'_3+\ldots+\alpha'_{r+1}\geqslant rn. \tag{9}$$

Vi sarebbe da aggiungere la condizione $m\geqslant 0$, cioè

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r+\alpha'_{r+1}\leqslant r(n-1)+1;$$

ma questa è conseguenza di precedenti relazioni. Difatti sottraendo la (9) dalla (4) si ha

$$\alpha'_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r+1}\leqslant r(n-1)+1$$

e sommando con questa la $(\alpha'_{r+1}-\alpha_{r+1})-(\alpha'_1-\alpha_1)\leqslant 0$, che ha luogo per aver posto $\alpha'_1-\alpha_1\geqslant\alpha'_{r+1}-\alpha_{r+1}$, si ottiene appunto la relazione anzidetta.

5. Poniamo ora $\alpha'_1=\alpha'_2=\ldots=\alpha'_{r+1}=n$; allora conservando le ipotesi precedenti, sarà $\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_3\ldots$ e la (4) diviene

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{r+1}=(r-1)(n-1) \tag{β}$$

e la (9) rimane senz'altro soddisfatta. Siccome poi ciascuna delle α non può superare $n-1$, così la somma di $r+1-h$ di esse è minore o eguale a $(r+1-h)(n-1)$ e perciò confrontando con la (β)

risulta che la somma di h delle α è maggiore o eguale ad $(h-2)(n-1)$. Abbiamo poi

$$m_{r-2}=m=\alpha_{r+1}$$
$$t_{r-3}=\min[\alpha_{r+1},\ \alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1),\ \alpha_r]$$
$$t_{r-4}=\min[m_{r-3},\ \alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1),\ \alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3}]$$
$$t_{r-5}=\min[m_{r-4},\ \alpha_1+\alpha_{r-2}+\cdots+\alpha_{r+1}-3(n-1),\ \alpha_{r-2}+\cdots+\alpha_{r-1}-2(n-1)-m_{r-4}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nell'espressione di t_{r-3} non è mai $\alpha_{r+1}<\alpha_r$, quindi il minore dei tre numeri sarà sempre uno degli ultimi due.

I. Poniamo $\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)\leqslant\alpha_r$, cioè

$$\alpha_1+\alpha_{r+1}\leqslant n-1. \tag{β_1}$$

Allora è $t_{r-3}=\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)$, e perciò [si tenga presente la (8)] questo è il massimo valore di m_{r-3}, il cui minimo è $m_{r-2}-\alpha_{r-1}=\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)$. [Si noti che questa differenza è positiva, perchè dalla (β) si ha $\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)=(r-3)(n-1)-\alpha_2-\alpha_3-\ldots-\alpha_{r-2}+(n-1-\alpha_1-\alpha_{r-1})=(n-1-\alpha_2)+\ldots+(n-1-\alpha_{r-2})+(n-1-\alpha_1-\alpha_{r-1})$, i termini della qual somma sono tutti positivi; l'ultimo in virtù della (β_1) e della $\alpha_{r-1}\leqslant\alpha_{r+1}$]. Dei tre numeri allora che compariscono nell'espressione di t_{r-4} non è mai il primo il minore, perchè la differenza del minimo valore di m_{r-3} sul secondo di detti numeri è $n-1-\alpha_1-\alpha_{r-1}$, che non è negativa per la (β_1) e la $\alpha_{r-1}\leqslant\alpha_{r+1}$; il minimo valore poi del terzo di quei numeri è $\alpha_{r+1}-\alpha_1$, la cui differenza sul secondo è $2(n-1)-(\alpha_1+\alpha_r)-(\alpha_1+\alpha_{r+1})$ che non è negativa in virtù della (β_1) e della $\alpha_r\leqslant\alpha_{r+1}$; dunque il minore di quei tre numeri è sempre il secondo, per cui è $t_{r-4}=\alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1)$, e così continuando si trova che per ciascuna t è sempre il secondo il minore dei tre numeri che compariscono nella sua espressione. In questo caso la (8) diviene

$$\mathop{\mathrm{M}}_{h=1}^{h=r-3}\ \sum_{m_{r-2-h}=m_{r-1-h}-(n-\alpha_{r+1-h}-1)}^{m_{r-2-h}=\alpha_1+\alpha_{r+1-h}+\cdots+\alpha_{r+1}-h(n-1)}[\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{r+1}-(r-3)(n-1)+1-m_1]. \tag{10}$$

Eseguendo i calcoli quivi espressi si ottiene per risultato $[\alpha_1+r-2]_{r-2}$. Abbiamo dunque: *Se le rette di uno spazio* [n] *soggette ad essere incidenti a* r + 1 *dati spazi indipendenti sono in numero finito, e se la somma delle dimensioni minima e massima di tali spazi non supera* n − 1, *il numero di codeste rette dipende soltanto dal numero degli spazi dati e dalla minima delle loro dimensioni*. In particolare per $\alpha_1=0$ la (β_1) è sempre soddisfatta ed il nostro numero si riduce ad 1, quindi: Se le rette di una stella che sono soggette ad essere incidenti a dati spazi sono in numero finito, tale numero è sempre eguale ad 1.

In particolare se è $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_{r+1} = n - s$ la (β_1) diviene $\alpha_1 \leqslant s - 1$, cioè, per la (4), $rs - n - r + 1 \leqslant s - 1$, ossia

$$(r-1)(s-1) \leqslant n - 1.$$

In tal caso deve anche essere $\alpha_1 \leqslant n - s$, cioè α_1 è la minima delle dimensioni $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}$. Difatti se fosse $n - s < \alpha_1$, da questa e dalla $\alpha_1 \leqslant s - 1$ si avrebbe $n < 2s - 1$ e da questa con la $(r-1)(s-1) \leqslant n - 1$ verrebbe $(r-1)(s-1) < 2s - 2$ e infine $r \leqslant 2$, perciò nelle ipotesi fatte può essere $n - s < \alpha_1$ solo nel caso che le $r + 1$ condizioni date siano al più 3, ciò che abbiamo escluso. Si ha dunque che se le condizioni date sono tali da formarne una di multiplicità $2(n-1)$, e se è $\alpha_1 \leqslant s - 1$, sarà

$$(\alpha_1, n)(n - s, n)^r = [\alpha_1 + r - 2]_{r-2},$$

il secondo membro della quale, posto $\alpha_1 = s - 1 - k$, $s \leqslant k \leqslant s - 1$, può scriversi $[s + r - k - 3]_{r-2}$. Ora osservando che in tal caso dalla (4) si deduce $n = (r-1)(s-1) + 1 + k$ e che la (S) diviene

$$[s(r-1) + k]_{r-1} - \{[r + s - k - 3]_{r-1} + r[s(r-2) + k]_{r-1}\} + \\ + [r]_2 [s(r-3) + k]_{r-1} - [r]_3 [s(r-4) + k]_{r-1} + \ldots,$$

e confrontando questo risultato col precedente, si può stabilire la seguente eguaglianza

$$[s(r-1) + k]_{r-1} - r[s(r-2) + k]_{r-1} + \\ + [r]_3 [s(r-3) + k]_{r-1} - \ldots = [s + r - k - 2]_{r-1}$$

per $0 \leqslant k \leqslant s - 1$; ossia, posto $s(r-1) + k = m$,

$$[m]_{r-1} - r[m - s]_{r-1} + [r]_2 [m - 2s]_{r-1} - \ldots = [r(s+1) - m - 2]_{r-1}$$

per $s(r-1) \leqslant m \leqslant sr - 1$, badando però che la condizione espressa dalla seconda parte di questa limitazione non è necessaria, giacchè se è $m > sr - 1$ l'eguaglianza posta vale egualmente dovendosi in tal caso i due membri annullare; così per $m = rs$ si ottiene

$$[rs]_{r-1} - r[(r-1)s]_{r-1} + [r]_2 [(r-2)s]_{r-1} - \ldots = 0,$$

cosicchè rimane come sola condizione per la validità dell'anzidetta eguaglianza la $s(r-1) \leqslant m$.

II. Tolta ora la condizione (β_1) e posto invece

$$\alpha_1 + \alpha_{r-1} \geqslant n - 1 \qquad (\gamma_1)$$

sarà $t_{r-3} = \alpha_r$ che è il massimo valore di m_{r-3}, il cui minimo è ancora $\alpha_r + \alpha_{r+1} - (n-1)$, che è positivo per la (γ_1) con la $\alpha_1 \leqslant \alpha_r$.

Allora per $m_{r-3} = \alpha_r + \alpha_{r+1} - (n-1)$ i valori dei tre termini dell'espressione di t_{r-4} sono

$$\underset{\text{valore minimo del 1° termine}}{\alpha_r + \alpha_{r-1} - (n-1)}, \quad \alpha_1 + \alpha_{r-1} + \alpha_r + \alpha_{r+1} - 2(n-1), \quad \underset{\text{valore massimo del 3° termine}}{\alpha_{r-1}}$$

per $m_{r-3}=\alpha_r$ i valori di detti termini sono

$$\underset{\text{valore massimo del 1° termine}}{\alpha_r,} \qquad \alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1), \quad \underset{\text{valore minimo del 3° termine}}{\alpha_{r-1}+\alpha_{r+1}-(n-1).}$$

Allora 1° se è

$$\alpha_1+\alpha_r \leqslant n-1 \tag{γ_3}$$

ragionando come in I si trova che anche in questo caso per ciascuna t è sempre il secondo il minore dei tre numeri che compariscono nella sua espressione, e allora la (8) si trasforma nella (10) con la sola differenza che il limite superiore della prima Σ a sinistra è α_r anzichè $\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)$, e allora si trova in questo caso il nostro numero espresso sotto la forma

$$[\alpha_1+r-2]_{r-2}-[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})]_{r-2} \tag{11}$$

espressione valida sotto le condizioni (γ_1), (γ_3). Ma siccome per $\alpha_1+\alpha_{r+1}\leqslant n-1$ la (11) diviene la espressione $[\alpha_1+r-2]_{r-2}$ già trovata sotto questa ipotesi, così si conclude che la (11) esprime il nostro numero sotto la sola condizione (γ_3).

2°. Tenendo sempre ferma la (γ_1), si tolga ora la (γ_2), cosicchè sarà

$$\alpha_1+\alpha_r \geqslant n-1. \tag{δ_1}$$

Allora posto

$$\alpha_1+\alpha_{r-1}\leqslant n-1 \tag{δ_2}$$

$$\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}\leqslant 2(n-1) \tag{δ_3}$$

si ha che per $m_{r-3}=\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)$ il secondo dei tre termini che entrano nell'espressione di t_{r-4} è il minimo, ed esso si conserva sempre minore del primo col crescere di m_{r-3}; inoltre codesto secondo termine si conserva minore del terzo soltanto finchè è

$$\alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1)\leqslant\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3},$$

ossia $m_{r-3}\leqslant n-1-\alpha_1$.

Dunque finchè m_{r-3} varia da $\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)$ ad $n-1-\alpha_1$ è

$$t_{r-4}=\alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1),$$

e finchè m_{r-3} varia da $n-\alpha_1$ ad α_r è

$$t_{r-4}=\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3}.$$

Dopo ciò si trova che in ogni caso per ciascuna delle successive t è il secondo dei tre termini che entrano nella sua espressione sempre il minimo. Allora la (8) si scinde nella somma di due termini, dei quali il primo differisce dalla (10) soltanto per avere per limite superiore della prima Σ a sinistra $n-1-\alpha_1$ invece di

$$\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1),$$

ed il secondo differisce dalla (10) soltanto per avere per limiti della prima Σ a sinistra $n-\alpha_1$, α_r invece di

$$\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1),\ \alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1),$$

e per avere per limite superiore della seconda Σ a sinistra

$$\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3}$$

invece di

$$\alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1).$$

Dopo ciò eseguendo i calcoli, si trova facilmente che sotto le condizioni (δ_1), (δ_2), (δ_3) il nostro numero è espresso da

$$\begin{aligned}&[\alpha_1+r-2]_{r-3}-\\&-\{[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r-1})]_{r-3}+[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_r)]_{r-3}\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Siccome però per

$$\alpha_1+\alpha_r\leqslant n-1$$

la (12) si trasforma nella (11) già trovata sotto questa ipotesi, così si conclude che sole condizioni per la validità della medesima sono le (δ_2), (δ_3).

3°. Tenendo ferma la (δ_2) poniamo invece della (δ_3) la

$$\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}\geqslant 2(n-1). \tag{ε}$$

Allora si trova che il minimo dei tre termini che entrano nell'espressione di t_{r-4} è sempre il terzo, per cui

$$t_{r-4}=\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3},$$

mentre per ciascuna delle successive t è ancora sempre il secondo il minimo dei tre termini che entrano nella sua espressione, cosicchè in questo caso la (8) si trasforma nella (10) con la sola differenza che i limiti superiori della prima e della seconda Σ a sinistra sono

$$\alpha_r \quad \text{ed} \quad \alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1)-m_{r-3}$$

anzichè

$$\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}-(n-1),\ \alpha_1+\alpha_{r-1}+\alpha_r+\alpha_{r+1}-2(n-1),$$

ed eseguendo i calcoli, si trova così che sotto le condizioni (δ_2), (ε) il nostro numero è espresso da

$$\begin{aligned}&[\alpha_1+r-2]_{r-3}-\\&-\{[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r-1})]_{r-3}++[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_r)]_{r-3}\}+\\&+[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})-(n-\alpha_r)]_{r-3}.\end{aligned} \tag{13}$$

Però siccome per

$$\alpha_1+\alpha_r+\alpha_{r+1}\leqslant 2(n-1)$$

la (13) si trasforma nella (12), ch'è stata trovata appunto sotto questa ipotesi, così concluderemo che sola condizione affinchè il nostro numero sia espresso dalla (13) è la (δ_2).

Dalle (11) e (13) risulta che *per* $\alpha_1+\alpha_r\leqslant n-1$ *il numero cercato dipende solo da* α_1, α_{r+1} *e per* $\alpha_1+\alpha_{r-1}\leqslant n-1$ *esso dipende solo da* α_1, α_r, α_{r+1}.

6. Così continuando si arriva alla espressione valida in ogni caso $(r > 2)$

$$\begin{aligned}
&[\alpha_1+r-2]_{r-2}-\{[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})]_{r-2}+\ldots+[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_2)]_{r-2}\}+\\
&\quad+\{[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})-(n-\alpha_r)]_{r-2}+\ldots\\
&\quad\ldots+[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_3)-(n-\alpha_2)]_{r-2}\}-\ldots\\
&\ldots+(-1)^{r-1}\{[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})-(n-\alpha_r)-\ldots-(n-\alpha_3)]_{r-2}+\\
&\quad+[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r-1})-\ldots-(n-\alpha_4)-(n-\alpha_2)]_{r-2}+\ldots\}+\\
&\quad+(-1)^r[\alpha_1+r-2-(n-\alpha_{r+1})-(n-\alpha_r)-\ldots-(n-\alpha_2)]_{r-2}
\end{aligned}$$

dove gli ultimi due termini, quelli preceduti da $(-1)^{r-1}$ e $(-1)^r$, sono sempre nulli in virtù della (3).

Volendo poi considerare il caso in cui $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{r+1}$ siano qualunque anzichè tutte eguali ad n, basterà porre nell'espressione precedente $\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_{r+1}-rn$ al posto di n e $\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_{i-1}+\alpha_i+\alpha'_{i+1}+\ldots+\alpha'_{r+1}-rn$ al posto di α_i $(i=1,2,\ldots,r+1)$ giacchè il prodotto $(\alpha_1, \alpha'_1)(\alpha_2, \alpha'_2)\ldots(\alpha_{r+1}, \alpha'_{r+1})$ esprime che la retta devesi trovare nello spazio di dimensione $\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{r+1}-rn$ comune agli spazi $[\alpha'_1], \ldots, [\alpha'_{r+1}]$ e tagliarvi gli spazi di dimensione $\alpha'_1+\ldots+\alpha'_{i-1}+\alpha_i+\alpha'_{i+1}+\ldots+\alpha'_{r+1}-rn$ in cui esso incontra i dati $[\alpha_i]$. Fatta questa sostituzione, e messa in luogo di rn la sua espressione ricavata dalla (4) risulta facilmente quanto segue. Si ponga

$$\delta_i=\alpha'_{i+1}-\alpha_{i+1}\,(i=1,2,\ldots,r),\quad \varepsilon=e-(\alpha'_1-\alpha_1),$$

avendo e l'identico significato che nella (S),

$$\sigma=[\varepsilon]_{r-2},\quad \sigma_i=[\varepsilon-\delta_i]_{r-2},\quad \sigma_{ik}=[\varepsilon-\delta_i-\delta_k]_{r-2}\ldots$$

Allora il numero cercato è dato dalla

$$\sigma-(\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_r)+(\sigma_{12}+\sigma_{13}+\ldots+\sigma_{r-1,r})-\ldots+(-1)^r\sigma_{12\ldots r} \qquad (S')$$

Il numero dei termini di questa espressione è la metà di quello dei termini della (S), *cioè* 2^r *anzichè* 2^{r+1}, *l'indice comune a tutti i fattori binomiali è di un'unità inferiore a quello della* (S), *e infine nella* (S') *si parte con una base che è di* $\alpha'_1-\alpha_1$ *unità minore di quella con la quale si parte nella* (S).

Per es. volendo calcolare $(9,20)(11,20)^2(13,20)(17,20)^3$ si ha con la (S) e con la (S') rispettivamente

$$\begin{aligned}
&\binom{24}{5}-\left[\binom{13}{5}+2\binom{15}{5}+\binom{17}{5}+3\binom{21}{5}\right]+\\
&\quad+\left[2\binom{6}{5}+3\binom{10}{5}+2\binom{8}{5}+6\binom{12}{5}+3\binom{14}{5}+3\binom{18}{5}\right]-\\
&\quad-\left[3\binom{7}{5}+6\binom{5}{5}+6\binom{9}{5}+3\binom{11}{5}+\binom{15}{5}\right]+\\
&\quad+\left[2\binom{6}{5}+\binom{8}{5}\right]=42504-74528+37342-5214+68=172.
\end{aligned}$$

$$\binom{13}{4}-\left[3\binom{10}{4}+\binom{6}{4}+2\binom{4}{4}\right]+3\binom{7}{4}-\binom{4}{4}=715-647+105-1=172.$$

Applicando (S), (S') a casi particolari possono ottenersi eguaglianze relative all'analisi combinatoria come s'è visto al n.° 5. Così, per es. applicandole al calcolo di $(n-3, n)^{n-1}$ e ponendo $n=k+2$ si ha per $k>1$

$$[2k]_{k-1}-[k+1][2k-3]_{k-1}+[k+1]_2[2k-6]_{k-1}-\ldots$$
$$\ldots=[2k-3]_{k-2}-k[2k-6]_{k-2}+[k]_2[2k-9]_{k-2}-\ldots$$

dalla quale con qualche riduzione si ricava

$$k\binom{k}{0}\binom{2k-2}{k-3}-(k-2)\binom{k}{1}\binom{2k-5}{k-3}+(k-4)\binom{k}{2}\binom{2k-8}{k-3}-$$
$$-(k-6)\binom{k}{3}\binom{2k-11}{k-3}+\ldots=0.$$

F. Palatini.

PICCOLE NOTE

Sul concetto di probabilità. — Due recenti pubblicazioni (¹) sulla *probabilità composta* mi hanno mosso a dire poche parole sul calcolo delle probabilità in generale, non per dir cose nuove, ma per ripetere la comune affermazione dei più competenti di questo speciale calcolo; e precisamente per dire anch'io che qualsiasi questione di probabilità si riduce a saper valutare giustamente i casi favorevoli ed i possibili. Quando i casi sono equipossibili, la cosa è generalmente molto facile riducendosi ad una semplice enumerazione dei casi: quando invece i casi non siano equipossibili convien stabilire con criterio logico la probabilità di ciascuno.

Diremo *peso d'un caso o sua probabilità* il limite, secondo *criterio logico presuntivo*, del rapporto del numero delle volte che si verifica esso caso al numero delle prove col crescere di questo numero indefinitamente, supposto che questo limite esista, perchè, se non esistesse, non si potrebbe neppur parlare di probabilità.

Giova osservare che il numero delle prove si può supporre multiplo d'un qualsiasi numero k. Indichiamo infatti con n il numero delle prove, artificiali o spontanee, con q ed r il quoziente ed il resto della divisione di n per k per cui

$$n=qk+r \qquad r<k.$$

Supponiamo che, secondo il criterio logico presuntivo, il caso considerato si verifichi m volte nelle qk prove ed s nelle r; m ed s potranno anche essere assegnabili, a meno di differenze aventi rapporti infinitesimi, ad n. Si ha che

$$\frac{m+s}{n}=\frac{m+s}{qk+r}=\frac{m}{qk}\frac{1+\frac{s}{m}}{1+\frac{r}{qk}}.$$

(¹) U. Scarpis, "Intorno ad un principio relativo alla probabilità composta ". *Periodico di Matematica*, Livorno, 1909, pag. 279. — U. Broggi, " Il teorema della probabilità composta e la definizione descrittiva di probabilità ". *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, 1909, pag. 245.

Facendo crescere indefinitamente n, quindi anche q ed m, si riconosce così che la probabilità del caso considerato

$$\lim \frac{m+s}{n} = \lim \frac{m}{qk}.$$

Se per criterio logico presuntivo il caso considerato deve avvenire precisamente m volte in un numero finito p di prove, la probabilità d'esso caso

$$\lim_{k=\infty} \frac{mk}{pk} = \frac{m}{p}.$$

Se i pesi dei casi possibili, ridotti a comun denominatore, siano

$$\frac{m_1}{n}, \frac{m_2}{n}, \dots, \frac{m_r}{n},$$

vuol dire che, per criterio logico presuntivo, in n prove avverrebbe m_1 volte il primo caso, m_2 volte il secondo, ecc., m_r volte il caso r^{mo} od ultimo. Necessariamente quindi

$$m_1 + m_2 + \dots + m_r = n,$$

per cui

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_r}{n} = 1$$

adunque: *la somma dei pesi di tutti i casi possibili è 1.*

Se un evento aspettato in una prova consiste nell'essere fra prefissati casi quello, che ha luogo, *la probabilità dell'evento è uguale alla somma delle probabilità dei casi favorevoli.* Supponiamo infatti che s'aspetti uno dei casi designati come $1^o, 2^o, \dots, k^{mo}$. Per criterio logico presuntivo l'atteso evento avviene $m_1 + + m_2 + \dots + m_k$ volte in n prove, verificandosi quando e solo quando avviene uno dei primi k casi: per ciò la sua probabilità

$$\frac{m_1 + m_2 + \dots + m_k}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} + \dots + \frac{m_k}{n}.$$

Così nell'esempio del sig. U. Scarpis, avendosi due urne contenenti una 8 palle bianche con 12 nere e l'altra 6 bianche con 11 nere, si domanda la probabilità d'estrarre una palla bianca quando ponendo a caso una mano in una delle due urne se ne estragga una palla.

Convien supporre di fare 680, cioè $2 \times 20 \times 17$, prove, perchè sono due le urne e contengono 20 palle l'una e 17 l'altra. Per criterio logico presuntivo porremo la mano 340, cioè 20×17, volte in ciascun'urna ed estrarremo 17 volte ognuna delle 20 palle della prima urna, 20 volte ognuna delle 17 della seconda, per cui ciascuna delle 20 palle della prima urna ha il peso $\frac{17}{680}$, ossia $\frac{1}{40}$, e ciascuna delle 17 della seconda ha il peso $\frac{20}{680}$, ossia $\frac{1}{34}$. La probabilità che la palla estratta sia bianca è somma dei pesi delle 8 palle bianche della prima urna e delle 6 palle bianche della seconda urna; tal probabilità adunque

$$\frac{1}{40} \times 8 + \frac{1}{34} \times 6 = \frac{32}{85}.$$

Conseguentemente la probabilità d'estrarre palla nera

$$1 - \frac{32}{85} = \frac{53}{85}.$$

F. Giudice.

Determinazione del centro di un arco di cerchio di cui si conosce la lunghezza e la freccia. — Nell'*Intermédiaire des Mathématiciens* dell'ottobre decorso si legge la risposta dell'Escott alla quistione promossa dal prof. Alasia sulla determinazione del centro di un arco di cerchio, e quindi del raggio, quando è data la corda e la lunghezza. Il problema è l'inverso di quello della rettificazione che trattarono vari autori: Escott, Tannery, Brocard, Lamaire, Pellet, Delahaye, S. de la Campa, Hoffbauer sull'indicato periodico negli anni 1899-900-01-08. Ora parmi che possa tornare non disutile render nota la seguente costruzione grafica con la quale si determina il raggio in funzione della freccia e della lunghezza, costruzione che può riuscire vantaggiosa in alcune pratiche applicazioni d'officina, come ad esempio quando trattasi di piegare una data lamiera secondo una freccia prestabilita.

Indicando con $2s$ la lunghezza dell'arco, con r il raggio, e con f la freccia, si ha lo sviluppo:

$$f = \frac{s^2}{2 \cdot r} - \frac{s^4}{24 \cdot r^3} + \dots ;$$

arrestandosi al 1° termine moltiplicato per un fattore correttivo minore dell'unità:

$$\frac{s}{\sqrt{S^2 + f^2}} \qquad \text{si ha ancora:} \qquad r = \frac{s^3}{2 \cdot f \sqrt{s^2 + f^2}},$$

valore approssimato sul quale si basa la costruzione.

Sia HM la freccia ed MA (perpendicolare ad HM) il semi-arco rettificato. Con centro in H e raggio HA descrivasi l'arco AT sino all'incontro della HT parallela alla MA. Da A conducasi la AO facente con la MT un angolo uguale ad OMT. Il punto d'intersezione O sarà il centro richiesto.

Felice Verde.

TEOREMI DIRETTI, CONTRARI, RECIPROCI

1. *Si enuncia un teorema quando si afferma che un ente matematico* S *(soggetto), se gode della proprietà* I *(ipotesi), gode pure della proprietà non primitiva* T *(tesi).*

Le tre parti dell'enunciato di un teorema devono soddisfare alle condizioni seguenti:

a) Il soggetto, l'ipotesi e la tesi, a due a due considerate, non devono avere alcun elemento comune.

b) La tesi, ferma restando ogni proprietà del soggetto, deve essere conseguenza di tutta e sola l'ipotesi.

La condizione *a* mira ad evitare ripetizioni inutili ed ingombranti; l'essere o meno soddisfatta la condizione *a* risulta dall'ispezione dell'enunciato. Così, ad esempio, in luogo di dire:

Tre segmenti, se sono tali che ciascuno sia minore della somma degli altri due, ciascuno è maggiore della differenza fra gli altri due.

Osservando che di tre segmenti due (i minori) godono sempre della proprietà enunciata nell'ipotesi, ed uno (il maggiore) gode sempre della proprietà enunciata nella tesi, mentre i due minori si trovano necessariamente rispetto alla tesi in condizioni identiche, si dirà:

Tre segmenti, se sono tali che il maggiore sia minore della somma degli altri due, sono pur tali che uno dei minori (e quindi anche l'altro) è maggiore della differenza fra gli altri due.

La condizione *b* costituisce il fondamento del teorema; l'essere o meno soddisfatta la condizione *b* risulta dalla dimostrazione.

La forma schematica di ogni teorema è:

Rispetto ad S *se è* I *allora è* T.

È pure indicata la forma seguente:

Se è I *allora è* T

la quale ha il pregio della semplicità; ma, per ciò che segue, giova far capo alla precedente.

Si enuncia un corollario di un teorema (ed in generale di una proposizione), quando si considera un caso particolare del teorema (o della proposizione).

Si suole anche dire che il corollario è facile ed immediata conseguenza di proposizioni precedenti; ma, poichè il facile ed il difficile sono relativi, è forse preferibile il concetto suesposto.

Si enuncia uno scolio quando si riassume e si collega ciò che è detto in due o più teoremi (o proposizioni).

Il corollario e lo scolio derivano quindi rispettivamente per *analisi* e per *sintesi* da proposizioni precedenti.

Del teorema *diretto*:

Rispetto ad S *se è* I *allora è* T

si dicono rispettivamente *contrario, reciproco, contrario del reciproco* o *reciproco del contrario* i teoremi seguenti:

Rispetto ad S *se non è* I *allora non è* T;
Rispetto ad S *se è* T *allora è* I;
Rispetto ad S *se non è* T *allora non è* I.

2. *Di ogni teorema esiste il teorema contrario.*

Infatti, se del teorema:

Rispetto ad S *se è* I *allora è* T

non esistesse il teorema contrario:

Rispetto ad S *se non è* I *allora non è* T

si avrebbe di questo il teorema *contradditorio*:

Rispetto ad S *se non è* I *allora è* T

e quindi:

Rispetto ad S *se è* I *o se non è* I *allora è* T

o, ciò che è lo stesso:

Rispetto ad S *è* T.

Ma tale proposizione, che non è un teorema, è in opposizione al teorema diretto, poichè la tesi non sarebbe una conseguenza dell'ipotesi, bensì una proprietà del soggetto, e ciò contro il supposto.

Di ogni teorema esiste il teorema reciproco.

Infatti, poichè di ogni teorema diretto esiste il teorema contrario, si deve ritenere che, fatte rispetto ad I tutte le ipotesi possibili (esistenza o meno di I), queste conducono a conclusioni che si escludono a vicenda (esistenza o meno di T), ed allora, per il teorema di HAUBER (seconda legge delle inverse) esiste il teorema reciproco.

Di ogni teorema esiste il teorema contrario del reciproco.

Infatti, scambiando fra loro il teorema diretto ed il teorema reciproco, il contrario del teor. diretto diviene il contrario del reciproco.

Posti quattro teoremi tali che di uno considerato come diretto gli altri siano rispettivamente il contrario, il reciproco ed il contrario del reciproco, l'esistenza di uno qualunque porta seco l'esistenza di tutti.

È immediata conseguenza delle precedenti proposizioni.

3. Comunemente si dice che, dimostrato un teorema, il reciproco non è sempre vero, e ciò perchè la tesi conviene talvolta ad un maggior numero di casi di quelli contemplati nell'ipotesi. Possono infatti sussistere insieme due (o più) teoremi come i seguenti:

Rispetto ad S *se è* I_1 *allora è* T:

Rispetto ad S *se è* I_2 *allora è* T

purchè le ipotesi I_1 ed I_2 non siano contraddittorie; ciò però non toglie che possano esistere dell'uno e dell'altro i teoremi reciproci.

A confermare che di un teorema non sempre esiste il reciproco, per solito si portano degli esempi (ed uno solo basterebbe); ma tali esempi, quando si ponga mente a tenere distinte le tre parti dell'enunciato, perdono ogni loro efficacia. Come qui sotto rilevasi, i citati esempi non hanno ovvero hanno il teorema reciproco secondo che si dà ai medesimi la dizione consueta (di sinistra) o quella riformata (di destra).

Se un numero divide i due addendi di una somma divide anche la somma.	*Una somma di due addendi, dei quali uno è divisibile per un numero, se anche l'altro è divisibile per lo stesso numero, è divisibile per quel numero.*
Due angoli aventi i lati rispettivamente paralleli e nella stessa direzione sono uguali.	*Due angoli che hanno due lati paralleli e nella stessa direzione, se hanno anche gli altri due lati paralleli e nella stessa direzione, sono uguali.*
Due rette perpendicolari ad una terza sono parallele.	*Due rette delle quali una è perpendicolare ad una terza, se anche l'altra è perpendicolare alla terza, sono parallele.*

Due angoli retti sono eguali. | *Due angoli dei quali uno è retto, se pure l'altro è retto, sono uguali.*

E non è a dire che nei teoremi a destra sia affermato alcunchè di diverso da quanto è affermato nei teoremi a sinistra.

Può avvenire che una proposizione non ammetta la reciproca per il fatto che tale proposizione non sia un teorema; così, ad esempio, la proposizione:

Due numeri primi sono primi fra loro

non ammette la proposizione reciproca; ma essa non è che un corollario di una definizione, e precisamente della definizione di *numeri primi fra loro.*

Può avvenire che due teoremi reciproci non appariscano tali perchè non enunciati opportunamente; si confrontino, ad esempio, fra loro i seguenti due teoremi a sinistra, e fra loro i corrispondenti riformati a destra:

Due angoli opposti al vertice sono uguali.	*Due angoli che hanno il vertice comune, e sono situati da bande opposte di una retta, e hanno un lato sulla retta, ma non sono consecutivi, se hanno pure gli altri due lati per diritto, sono uguali.*
Se due raggi uscenti da uno stesso punto di una retta, cadono da bande opposte di questa, e fanno con essa due angoli uguali che non siano consecutivi, i due angoli sono opposti al vertice.	*Due angoli che hanno il vertice comune, e sono situati da bande opposte di una retta, e hanno un lato sulla retta, ma non sono consecutivi, se sono uguali, hanno pure gli altri due lati per diritto.*

4. Non tenendo conto dei teoremi contrari da ritenersi sempre dimostrati, due teoremi reciproci potranno essere riuniti in uno solo, che avrà la forma seguente:

Rispetto ad S *se è* C_1 *allora è* C_2 *e reciprocamente.*

E questa forma non è che un caso particolare della forma più generale:

Rispetto ad S *se è* C_1 *allora è* C_2 *è* $C_3 \ldots$ *è* C_n *e reciprocamente.*

Un simile teorema potrà essere chiamato *multiplo* e si dirà *doppio* il precedente, il quale risulta da due teoremi *semplici* reciproci.

È da notare però che dalla dimostrazione diretta e reciproca di un teorema multiplo risulta l'equivalenza delle n condizioni o proprietà che vi figurano, e per fare di ciò opportuno cenno nell'enunciato, si potrà dire:

Rispetto ad S *se è* C_1 *allora è* C_2 *è* $C_3 \ldots$ *è* C_n *e reciprocamente; e quindi se è* C_h *allora è* C_k.

Si ha, ad esempio, il teorema:

Un quadrilatero, se gode della prima delle seguenti proprietà, gode di *ciascuna delle altre, e reciprocamente; e quindi da una qualunque di esse un'altra qualunque deriva:*

1. *Avere i lati opposti paralleli.*
2. *Avere due lati opposti paralleli ed uguali.*
3. *Avere due lati opposti paralleli e due angoli opposti uguali.*
4. *Essere diviso da una diagonale in due triangoli direttamente uguali.*
5. *Avere i lati opposti uguali.*
6. *Avere gli angoli opposti uguali.*
7. *Avere le diagonali che si dimezzano.*
8. *Avere per vertici i punti di mezzo dei lati di un quadrilatero.*
9. *Avere le bisettrici degli angoli interni disposte in modo da originare un rettangolo.*

In un teorema multiplo con n condizioni sono contenuti $\binom{n}{2}$ teoremi semplici diretti, altrettanti reciproci, altrettanti contrari dei diretti, altrettanti contrari dei reciproci. Così nell'esempio precedente si hanno in tutto $4\binom{9}{2}$ ossia 144 teoremi semplici, mentre sono 8 i teoremi diretti che esigono dimostrazione, ed altrettanti i reciproci di questi.

5. Abbiamo dimostrato che di ogni teorema esiste il reciproco, purchè l'ipotesi non sia nè *esuberante* nè *insufficiente* rispetto alla tesi; e quando si consideri che fra problema e teorema esiste tale relazione da potersi considerare un teorema null'altro che un problema risolto, risulta logico che al problema *determinato* (con dati cioè nè esuberanti nè insufficienti) corrisponda nel teorema l'ipotesi *sufficiente.*

D'altra parte la tesi non è una semplice emanazione dell'ipotesi, ma è l'ipotesi stessa posta sotto altra forma; non è quindi fuori di luogo che anche in tale trasformazione, come in tutte le altre trasformazioni dell'analisi algebrica e della geometria sussista reciprocità ed equivalenza.

È pure da tener presente che se per la reciprocità fra ipotesi e tesi non si richiede che l'ipotesi sia oltrechè sufficiente anche *necessaria*, con ciò non s'intende che necessaria non sia; ed anzi necessaria lo è come risulta dalla prima proposizione dimostrata, ma però da tale necessarietà si può fare astrazione.

6. Abbiamo dimostrato che di ogni teorema esiste il reciproco, e riteniamo che ciò debba costituire un *canone di metodo razionale*; ma ci siamo pure affrettati a porre in evidenza la necessità che nell'enunciato di un teorema siano ben distinte le tre parti che lo costituiscono, e che specialmente esista una netta demarcazione fra il soggetto e l'ipotesi. È solo in tale ordine di idee che fra ipotesi e tesi si verifica la *legge riflessiva.* Ne consegue che per affermare relativamente ad un determinato teorema l'esistenza del teorema reciproco, bisogna anzitutto dimostrare *esatta* la locuzione del teorema diretto.

Si elimina però ogni dubbio in proposito e si raggiunge ugualmente lo scopo prefisso, dimostrando oltre il teorema diretto anche il teorema reciproco. E nella seconda dimostrazione sarà di guida la prima, in modo da rifare in senso inverso il cammino percorso; ciò anzi potrà costituire un criterio per giudicare dell'esattezza dell'enunciato.

Concludendo diremo che, pur trattandosi soltanto di una questione di metodo, sarà logico bandire il teorema *semplice* per far luogo unicamente e *sempre* alla forma veramente *tassativa* del *doppio* teorema. Sarà logico infine, sapendo che di ogni teorema semplice *enunciato bene* sussiste il reciproco, dare l'ostracismo all'ingiustificata, indeterminata ed incerta limitazione che vien posta al principio di ogni ramo della matematica razionale sull'esistenza del teorema reciproco, limitazione che sa di pregiudizio.

DIEGO FELLINI.

UNA PROPRIETÀ DELLE RIDOTTE DELLE FRAZIONI CONTINUE LIMITATE
e sua applicazione alle equazioni indeterminate

Data la frazione $\frac{a}{b}$, si divida a per b e siano q_1 ed r_1 il quoziente ed il resto; si divida poi b per r_1, e così via, e siano in generale q_k ed r_k il k-esimo quoziente ed il k-esimo resto ottenuti colle divisioni successive.

È noto allora che si ha:

$$\frac{a}{b} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \ddots}} \tag{1}$$

dove q_1 potrebbe essere anche zero.

Per i resti sussistono evidentemente le relazioni:

$$r_1 + bq_1 = a; \qquad r_2 + r_1q_2 = b; \qquad r_3 + r_2q_3 = r_1; \ldots \tag{2}$$

ed in generale:

$$r_{k+1} + r_kq_{k+1} = r_{k-1}.$$

Indicando con P_t e Q_t il numeratore ed il denominatore della t-esima ridotta della (1), si può dimostrare che:

$$aQ_t - bP_t = (-1)^{t-1} r_t.$$

Infatti, essendo

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{q_1}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{q_1q_2 + 1}{q_2},$$

si ha, tenendo presenti le (2):

$$r_1 = a - bq_1 = aQ_1 - bP_1,$$
$$r_2 = b - r_1 q_2 = b - (a - bq_1) q_2 = b(q_1 q_2 + 1) - aq_2 = bP_2 - aQ_2,$$

e perciò $-r_2 = aQ_2 - bP_2$.

Suppongasi ora che sia:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^{k-2} r_{k-1} &= aQ_{k-1} - bP_{k-1}\\ (-1)^{k-1} r_k &= aQ_k - bP_k;\end{aligned}\right\}; \qquad (3)$$

siccome si ha dalle (2)

$$r_{k+1} = r_{k-1} - r_k q_{k+1},$$

sarà per le (3):

$$(-1)^k r_{k+1} = (-1)^{k-2} r_{k-1} + (-1)^{k-1} r_k q_{k+1} = (aQ_{k-1} - bP_{k-1}) +$$
$$+ (aQ_{k-1} - bP_k) q_{k+1} = a(Q_k q_{k+1} + Q_{k-1}) - b(P_k q_{k+1} + P_{k-1}) = aQ_{k+1} - bP_{k+1}.$$

Ma le (3) sono vere per $k = 2$, dunque si ha in generale:

$$(-1)^{t-1} r_t = aQ_t - bP_t. \qquad \text{c. d. d.} \qquad (4)$$

Si consideri ora l'equazione indeterminata

$$ax + by = c. \qquad (5)$$

Supponendo ad es. $a > b$, si sviluppi in frazione continua la frazione $\frac{a}{b}$. (¹)

Se nel fare le divisioni successive ci accorgiamo che un resto r_k è divisore del termine noto c, (²) si può trovare subito una soluzione intera della (5).

Infatti, indicando con P_k e Q_k i termini della k-esima ridotta, si ha per la (4):

$$aQ_k - bP_k = \pm r_k,$$

dove il segno di r_k è quello di $(-1)^{k-1}$.

Moltiplicando ambo i membri di questa per $\frac{c}{r_k} = c'$ (numero intero), si ha:

$$aQ_k c' - bP_k c' = \pm c,$$

ovvero:

$$a(\pm Q_k c') + b(\mp P_k c') = c$$

e quindi si ha la soluzione:

$$x = \pm Q_k c' \quad , \quad y = \mp P_k c'. \text{ (³)}$$

I termini P_k e Q_k della k-esima ridotta, i quali moltiplicati per c' dànno in valore la suddetta soluzione, si possono facilmente trovare nel modo seguente: Si scrivano in linea orizzontale i k quozienti in-

(¹) Se fosse $b > a$ si svilupperebbe la frazione $\frac{b}{a}$.

(²) Nel peggiore dei casi si otterrà sempre un resto uguale ad 1, che perciò è divisore di c.

(³) Come si vede, il metodo di LAGRANGE non è che un caso particolare di questo.

completi $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{k-1}, q_k$ e di seguito a q_k si scriva l'unità. Indi sopra a q_{k-1} si scriva la quantità $N_{k-1} = q_{k-1} \cdot q_k + 1$, poi sopra a q_{k-2} la quantità $N_{k-2} = q_{k-2} \cdot N_{k-1} + q_k$, sopra a q_{k-3} la quantità

$$N_{k-3} = q_{k-3} N_{k-2} + N_{k-1},$$

e così si continui scrivendo sopra ad ogni quoziente incompleto q_t la quantità $N_t = q_t N_{t-1} + N_{t-2}$.

Dico allora che: *le quantità* N_1 *e* N_2 *sono il numeratore* P_k *ed il denominatore* Q_k *della* k-*esima ridotta.*

Infatti se invece di prendere i primi k quozienti incompleti si prendono i primi $k+1$, allora le quantità N si modificano in modo che i termini contenenti il fattore q_k prendono, invece di questo, il fattore $q_k q_{k+1} + 1$, e i termini non contenenti il fattore q_k vengono moltiplicati per q_{k+1}.

Ma se supponiamo che N_1 ed N_2 rappresentavano prima i termini della k-esima ridotta, ora, così modificati, è noto che rappresentano quelli della ridotta $(k+1)$-esima. Intanto si può subito vedere che il teorema è vero per $k=2$, dunque è vero in generale.

M. Morale.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 772, 773 E 774

772. *Dimostrare l'identità:*

$$\frac{\sum\limits_{r=1}^{r=n-1} \sum\limits_{s=0}^{s=r} \binom{r-s}{p}\binom{n-p}{s} \cdot \frac{r-s}{r}}{\sum\limits_{r=1}^{r=n-1} \sum\limits_{s=0}^{s=r} \binom{q}{r-s}\binom{n-q}{s} \cdot \frac{r-s}{r}} = \frac{p}{q}$$

essendo p, q *due interi e positivi qualsiasi ed* $n = p + q$. U. Scarpis.

Risoluzione del prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Moltiplicando l'identità

$$p(1+x)^{p-1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \nu \binom{p}{\nu} \cdot x^{\nu-1},$$

che si ottiene per derivazione dall'equazione

$$(1+x)^p = \sum_{\nu=0}^{\nu=p} \binom{p}{\nu} x^\nu,$$

per l'altra

$$(1+x)^{n-p} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-p} \binom{n-p}{\mu} \cdot x^\mu,$$

otteniamo la seguente formola:

$$f(x) = p(1+x)^{n-1} = \sum_{\mu=0}^{\mu=n-p} \sum_{\nu=1}^{\nu=p} \nu \binom{p}{\nu}\binom{n-p}{\mu} \cdot x^{\nu+\mu-1}.$$

La somma:

$$\sum_{s=0}^{s=r} \binom{p}{r-s}\binom{n-p}{s} \cdot (r-s)$$

è eguale al coefficiente di x^{r-1} nel polinomio precedente.

Ma nell'altra espressione del polinomio precedente $p(1+x)^{n-1}$ il coefficiente del x^{r-1} è

$$p\binom{n-1}{r-1},$$

quindi

$$\sum_{s=0}^{s=r} \binom{p}{r-s}\binom{n-p}{s} \cdot \frac{r-s}{r} = \frac{p}{r}\binom{n-1}{r-1},$$

e dunque

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{p}{r-s}\binom{n-p}{s} \cdot \frac{r-s}{r} = p \cdot \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{1}{r}\binom{n-1}{r-1}. \tag{1}$$

Analogamente si può ottenere che

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=r} \binom{q}{r-s}\binom{n-q}{s} \cdot \frac{r-s}{r} = q \cdot \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{1}{r} \cdot \frac{n-1}{r-1} \dots \tag{2}$$

Se dividiamo la (1) per la (2), il quoziente sarà $\frac{p}{q}$, poichè la somma comune

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{1}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

è diversa da zero.

c. d. d.

Altra risoluzione del sig. **A. Andri**, R. S. Navale Superiore di *Genova*.

773. *Risolvere l'equazione:*

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \dots 1 \\ 1 & x & 1 \dots 1 \\ 1 & 1 & x \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots x \end{vmatrix} = 0.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. U. Fornari, I. T. di Varese.

Risolviamo l'equazione più generale

$$D = \begin{vmatrix} x & a & a \dots a \\ a & x & a \dots a \\ a & a & x \dots a \\ \dots & \dots & \dots \\ a & a & a \dots x \end{vmatrix} = 0.$$

Sottraendo l'ultima verticale a destra da ciascuna delle rimanenti il determinante si trasforma così:

$$D = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & a \\ 0 & x-a & 0 & a \\ 0 & 0 & x-a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a-x & a-x & a-x & x \end{vmatrix}$$

e raccogliendo a fattor comune $(x-a)^{n-1}$, si ha:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & a \\ 0 & 1 & 0 \dots & a \\ 0 & 0 & 1 \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 \dots & x \end{vmatrix} (x-a)^{n-1}.$$

In quest'ultimo determinante aggiungiamo all'ultima orizzontale le precedenti, ed avremo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & a \\ 0 & 1 & 0 \dots & a \\ 0 & 0 & 1 \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & x+(n-1)a \end{vmatrix} (x-a)^{n-1},$$

ovvero

$$D = (x-a)^{n-1}[x+(n-1)a],$$

e l'equazione proposta si scinde nelle due

$$(x-a)^{n-1} = 0, \qquad x+(n-1)a = 0.$$

Si avramo perciò $n-1$ soluzioni $x=a$ e la soluzione $x=a(1-n)$.

Per $a=1$ si cade nell'equazione proposta.

Altre risoluzioni dei signori: prof. **A. L. Csada** di *Máramarossziget* (Ungheria): prof. **D. Gambioli**, R. S. T. "Aldo Manuzio", di *Roma*; **G. Danieli**, R. S. M. di Commercio di *Milano* e **A. Andri**, R. S. Navale Superiore di *Genova*.

774. *Sia M un punto qualunque di un'ellisse di centro O. Il circolo che ha per diametro la corda OM, incontra l'ellisse in altri tre punti P, Q, R. Da M si possono condurre tre normali all'ellisse in altri tre punti M_1, M_2, M_3. Essendo P', Q', R', M'_1, M'_2, M'_3 le proiezioni di P, Q, R, M_1, M_2, M_3 sull'asse maggiore, dimostrare che*

$$\frac{M_1M'_1 \times M_2M'_2 \times M_3M'_3}{PP' \times QQ' \times RR'} = \text{costante},$$

e che i triangoli PQR ed $M_1M_2M_3$ hanno lo stesso baricentro.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Sieno u, v le coordinate cartesiane del punto M dell'ellisse data:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \qquad (1)$$

L'equazione del circolo che ha per diametro la corda OM è

$$x^2 = y^2 - ux - vy = 0. \qquad (2)$$

Eliminando y oppure x dall'equazioni (1) e (2), si ottiene rispettivamente

$$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0 \qquad (3)$$

$$B_0y^4 + B_1y^3 + B_2y^2 + B_3y + B_4 = 0 \qquad (4)$$

dove

$$A_0 = (a^2 - b^2)^2, \qquad B_0 = (a^2 - b^2)^2$$
$$A_1 = -2a^2(a^2 - b^2)\,u; \qquad B_1 = 2b^2(a^2 - b^2)\,v,$$
$$\vdots$$
$$B_4 = a^2b^4(a^2 - u^2) = a^4b^2v^2.$$

La u e la v sono rispettivamente radici dell'equazione (3) e delle (4), quindi, indicando le altre radici con x', x'', x''', si ha

$$x' + x'' + x''' + u = -\frac{A_1}{A_0} = \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\cdot u,$$

da cui si ricava che, la x, coordinata del baricentro del triangolo PQR, è

$$x_b = \frac{x' + x'' + x'''}{3} = \frac{u}{3}\cdot\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Analogamente si può ottenere dall'equazione (4) la y, coordinata del baricentro del triangolo PQR; si ha

$$y_b = \frac{y' + y'' + y'''}{3} = -\frac{v}{3}\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}.$$

Dalla (4) si ha

$$y'y''y'''\,v = \frac{B_4}{B_0} = \frac{a^4b^2}{(a^2 - b^2)}\,v^2$$

dunque

$$y'y''y''' = PP' \times QQ' \times RR' = \frac{a^4b^2}{(a^2 - b^2)^2}\cdot v^2. \tag{a}$$

L'equazione

$$a^2y\,(u - x) - b^2x\,(v - y) = 0 \tag{5}$$

esprime che la normale nel punto x, y dell'ellisse passa per il punto M.

Eliminando y, o x, dall'equazioni (5) e (1) si ottengono due equazioni biquadratiche con questi coefficienti:

$$A_0 = (a^2 - b^2), \qquad B_0 = (a^2 - b^2)^2$$
$$A_1 = -2a^2(a^2 - b^2)\,.\,u; \qquad B_1 = 2\,(a^2 - b^2)\,b^2\,v,$$
$$\vdots$$
$$B_4 = -b^6v^2.$$

Essendo $x = u$, $y = v$ rispettivamente radici di queste equazioni, si può dimostrare in modo simile al precedente che le coordinate del baricentro del triangolo $M_1M_2M_3$ sono

$$\xi_b = \frac{u}{3}\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = x_b,$$
$$\eta_b = -\frac{v}{3}\,\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = y_b,$$

ed

$$y'y''y''' = M_1M_1' \times M_2M'_2 \times M_3M_3' = -\frac{b^6}{(a^2 - b^2)^2}\cdot v. \tag{b}$$

Dividendo l'equazione (b) per la (a), si ha

$$\frac{M_1M'_1 \times M_2M'_2 \times M_3M'_3}{PP' \times QQ' \times RR'} = -\frac{b^4}{a^4} = \text{costante}. \qquad \text{(q. e. d.)}$$

QUISTIONI PROPOSTE

776. Il luogo dei punti tali che la somma delle seste potenze delle distanze dai quattro vertici di un quadrato sia costante, si compone di tre circoli, due dei quali sono sempre imaginari. Trovare la condizione perchè il terzo circolo sia reale. E. N. Barisien.

777. Sopra una qualsiasi retta passante pel centro O di un cerchio dato, si prendano due punti C ed F equidistanti da O; per uno di essi passa una corda variabile AB. Determinare la posizione di AB allorchè la somma dei lati del triangolo ABC è massima.

A. Andri.

BIBLIOGRAFIA

André. — *Des notations mathématiques.* Enumeration, choix et usage. Paris, Gautier-Villars, 1909.

" In ogni scritto moderno sulle matematiche, ogni pagina, per così dire, astrazion fatta dalle figure e altre illustrazioni necessarie, ci presenta scritture di due specie: da una parte un testo del tutto analogo a un testo letterario: dall'altra, un insieme di lettere, di cifre, di segni, di simboli, cioè un insieme di caratteri idrografici speciali. La prima di queste parti potrebbe chiamarsi il *discorso*, la seconda si chiama ordinariamente l'*algoritmo* della quistione. I vari elementi costituenti questo algoritmo noi distinguiamo colla locuzione generale di notazioni matematiche ".

" Come l'indica il suo titolo, quest'opera è consacrata allo studio di queste notazioni. Questo studio, in ciò simile all'algebra, è ad un tempo una scienza ed un'arte: una scienza, poichè essa ci fa conoscere le notazioni usate, la loro forma, il loro significato, la loro origine, la loro storia; un'arte, poichè essa ci dà delle regole sicure per bene scegliere e bene impiegarle ".

Con queste parole l'A. inizia il suo libro e ne delinea gl'intenti e lo scopo. A prima vista si resta meravigliati che un tale argomento possa dare origine ad un volume di 500 pagine diviso in 1166 paragrafi; ma scorrendo il libro e vedendo come nel libro in parola sian minutamente esposti e distinti tutti i vari segni matematici, cominciando dalle cifre per scrivere i numeri, dai segni di operazioni fino ai segni particolari alla geometria piana, alla geometria analitica, alle matematiche applicate ecc., la meraviglia sparisce.

L'opera, com'è detto nel titolo, si divide in tre parti: la prima è per così dire l'inventario dettagliato di quasi tutti i segni in uso: nella seconda sono stabilite delle norme per riconoscere se certi segni sono o no bene scelti, e discussi minutamente quei casi nei quali uno stesso ente può essere rappresentato con segni; la terza stabilisce le norme per fare buon uso dei segni una volta scelti.

Troviamo strano che in un'opera di questo genere non siano stati affatto considerati i segni nuovi adottati per la logica matematica dal Peano e dai suoi discepoli.

K.

BOJKO. — *Neue Tafel der Viertelquadrate* aller natürlichen Zahlen von 1 bis 20000 zur Bildung aller möchlichen Produkte in Bereiche 1×1 bis 10000×10000. Speidel, Zürich, 1910.

Esistono già molte tavole (cominciando dalla *Tabula tetragonica* dell'astronomo Magini pubblicata nel 1592) che dànno i quadrati dei numeri naturali o meglio le quarte parti dei medesimi. Per mezzo della identità

$$ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$$

si può trovare il prodotto di due numeri facendo delle semplici somme e sottrazioni con una rapidità quasi uguale a quella che si può ottenere facendo uso delle tavole logaritmiche.

Le tavole dell'ing. BOJKO si distinguono dalle altre per una ingegnosa disposizione speciale che gli ha permesso di condensare in 20 pagine, stampate con caratteri nitidissimi e abbastanza grossi i quarti dei quadrati dei numeri da 1 a 20000. Esse sono precedute da una introduzione nella quale son date alcune notizie storiche sull'argomento, ed esposte le regole per l'uso delle tavole stesse.

K.

FABRY. — *Problèmes et exercices des mathématiques générales*. Paris, Hermann, 1910. — L. 10.

Il prof. FABRY dell'Università di Montpellier ha raccolto in un bel volume di oltre 400 pagine 739 problemi di matematiche generali, e più precisamente 236 di algebra, 241 di geometria analitica, 173 di calcolo, 90 di meccanica.

Gli enunciati sono raccolti nella prima parte del volume, e sono tutti scelti e ordinati razionalmente, in modo che il lettore vi trovi applicazioni per tutte le varie parti della matematica. Le risoluzioni, raccolte nella seconda parte del volume sono chiare e semplici.

Il libro riuscirà indubbiamente prezioso per tutti quei giovani studenti che desiderano acquistare l'abitudine a risolvere problemi, abitudine indispensabile per penetrar bene nello spirito delle teorie matematiche e rendere simpatico ed attraente lo studio delle medesime.

K.

GAMBIOLI. — *Aritmetica elementare* per le scuole medie inferiori con numerosi esercizi di calcolo orale e scritto. 2ª edizione. Roma, Società editrice " Dante Alighieri ".

L'insegnamento dell'aritmetica secondo il testo e le istruzioni degli attuali programmi delle nostre scuole deve gradatamente passare, dalla scuola elementare alla media superiore, da una esposizione prettamente empirica e sperimentale ad una esposizione puramente razionale.

Questo passaggio, d'altronde, dovrebbe esser fatto di successive gradazioni, mentre nella scuola elementare l'insegnamento non può in alcun modo, senza tradire il suo fine, emanciparsi anche in minima parte da un contenuto sensibile.

È dunque la scuola media inferiore che deve preparare e rendere possibile il gran salto. Il compito dell'insegnante di matematica di questa scuola è perciò estremamente delicato e difficile: la sua opera esige da lui pazienza, sapienza e prudenza.

Egli deve, senza mai abbandonare la sicura guida di un contenuto obbiettivo, fissare, ribadire ed estendere le cognizioni dell'alunno e per via di confronti e di svariate esemplificazioni condurlo prima a concepire i risultati indipendentemente dai fatti da cui sono stati dedotti e poi finalmente a intravedere la possibilità ed a sentire il bisogno di procedimenti generali di dimostrazione e quasi a costruire queste da sè stesse nei casi più semplici.

Un primo passo decisivo nella difficile via è la scelta del libro di testo.

L'aritmetica elementare per le scuole medie inferiori del chiarissimo collega prof. Gambioli è informata ai criteri precedentemente esposti, ed è opera di lunga meditazione, di lunga ed oculata esperienza.

La forma semplice e chiara della esposizione in un linguaggio tecnicamente rigoroso, i moltissimi esercizi sapientemente disposti in ordine di difficoltà, rendono questo libro perfettamente adeguato al suo fine.

M. DEL GIUDICE.

MARTINI-ZUCCAGNI. — *Aritmetica pratica e nozioni di Geometria*, pel Ginnasio inferiore, vol. I, per la 1ª classe. Livorno, Giusti, 1910.

Come per le Scuole Complementari e Tecniche, così pei Ginnasi, da qualche tempo è invalso l'uso di dividere il testo di Matematica in tanti volumi quanti sono gli anni di corso, comprendendo in ognuno di essi tutto il programma della classe cui sono destinati.

L'A., noto per molte altre pubblicazioni scolastiche, ha pur voluto seguire questa via nei due volumi testè usciti: l'uno ad uso della 1ª classe del Ginnasio inferiore; l'altro, della 1ª classe del Ginnasio superiore. Mi occupo intanto del primo, premettendo che ottimo mi appare il criterio generale seguito in questa forma di trattazione: dare, cioè, unità di sviluppo e di metodo alle varie parti della disciplina affidata ad uno stesso insegnante.

Le norme generali che sono state di guida all'A. nel compilare il volumetto sono queste: ridurre il tutto alla massima semplicità, evitando ogni disquisizione teorica e i troppo lunghi ragionamenti; dare definizioni tali che corrispondano perfettamente a quelle che si dànno poi nella trattazione razionale che si fa nel Ginnasio superiore. E senza dubbio sono entrambi lodevoli.

Ma veniamo a considerare brevemente il contenuto del libro, cominciando dall'aritmetica. La parte più difficile nelle aritmetiche pratiche è sempre, secondo me, l'inizio, cioè l'introduzione del concetto di numero in forma intuitiva, perchè si deve nel tempo stesso evitare ogni errore di esposizione, e non è facile. L'A. se la cava brevemente e abbastanza bene; passa quindi alla numerazione, alle operazioni sui numeri interi, alla divisibilità, ai numeri primi, alla ricerca del m. c. d. e del m. c. m. di due o più numeri.

L'esposizione è chiara e semplice e l'A., senza fare riferimento alle nozioni che gli alunni devono già avere acquistate nelle Scuole Elementari, cioè senza lasciar lacune nella trattazione come fanno alcuni autori, di esse nozioni si serve per dare alla trattazione una forma spigliata ed armonica.

Qua e là ho però notate alcune forme non chiare o leggermente errate e qualche lieve lacuna che non tolgono peraltro pregio al libro e che forse può sembrar pedanteria rilevare. Pur, per dirne alcuna, osservo che, ad es., il primo capitolo è intitolato *numeri naturali* e poi nel capitolo stesso non è detto che questa denominazione equivale a quella di *numeri interi*.

A pag. 21 trovo: *La somma di più numeri non cambia, se si permuta in un modo qualunque l'ordine dei termini.* Ora pare a me che l'ordine non si permuti, ma si permutino gli addendi. Osservazione analoga si potrebbe fare a pag. 43 per la proprietà commutativa del prodotto di più fattori.

Anche la parte geometrica è condotta con sobrietà e precisione. I concetti fondamentali di spazio, superficie, linea, punto sono introdotti in forma intuitiva, con chiarezza e brevità, evitando le grossolanità in cui cadono molti autori. L'angolo è bene introdotto come parte di un fascio di raggi, definendo il fascio come l'insieme di tutti i raggi di un piano che hanno per estremo comune un punto del piano stesso. Trovo però sulle linee curve (pag. 129) una proposizione che andrebbe proprio corretta: *Una linea si dice curva se tre qualunque dei suoi punti non sono in linea retta....* Queste imperfezioni, ed altre che si potrebbero notare, non tolgono del resto valore alcuno al libro nel quale si trova inoltre un'eccellente raccolta di esercizi proposti.

Col desiderio di vedere presto compiuta l'opera coi volumetti per la 2ª e per la 3ª classe, non posso che augurarle larga diffusione. L. TENCA.

MARTINI-ZUCCAGNI. — *Aritmetica razionale ed elementi di geometria euclidea*, pel Ginnasio superiore, vol. I, per la 4ª classe. Livorno, Giusti, 1910.

La norma generale seguita dall'A. nella compilazione di questo libro è quella di ridurre tanto l'aritmetica quanto la geometria razionale al puro necessario, conservando le stesse definizioni date nel corso di aritmetica e di geometria pratica per il Ginnasio inferiore, in modo che l'insegnamento razionale si trovi in perfetto accordo con quello pratico e l'uno serva di compimento all'altro.

Premesse alcune brevi nozioni di logica, l'A. passa alla considerazione dei gruppi di oggetti ed al confronto della loro pluralità; quindi all'introduzione dei numeri naturali e alla teoria delle varie operazioni aritmetiche; da ultimo tratta della divisibilità, del m. c. d., del m. c. m. e dei numeri primi. A me non è sembrato di trovare forme nuove di esposizione e di trattazione: ma ad ogni modo l'A. rivela grande abilità didattica, e, se non si attiene sempre ad una forma rigorosamente scientifica, riesce però sempre ad essere facilmente compreso dagli alunni.

Per la parte geometrica l'A. dice di avere preferito il metodo di Hilbert a quelli di Pasch e di Veronese perchè *crede si presti meglio nella scuola, soddisfacendo perfettamente al rigore scientifico, poichè con esso, nella trattazione dei fondamenti della geometria è escluso nel modo più assoluto ogni concetto di movimento ed è tolto di mezzo il sistema non scientifico e non didattico della sovrapposizione delle figure.* Nella sua scelta è confortato dall'opinione di molti colleghi, come, ad esempio, da Alfredo Guarducci di Prato che ne trattò nel suo articolo " Della conseguenza e del movimento „ nei *Collectanea* dell'Enriques. Avrebbe ad ogni modo fatto bene a specificare meglio le ragioni della sua preferenza perchè quelle da lui addotte valgono egualmente per i tre metodi. Al metodo scelto l'A. si è mantenuto fedele nella ben condotta trattazione. Si notano però alcune leggiere mende le quali ben si comprende come sieno potute sfuggire in una prima edizione. Piuttosto mi è sembrato che qualche parte di postulato sia eccessiva.

Il sovrabbondare dei postulati non toglie certamente rigore alla trattazione ed è anzi buona norma il farlo alcune volte per evitare lunghe e pesanti dimostrazioni di proprietà che già per se stesse si appalesano evidenti all'intuizione matematica degli alunni; ma mi è sembrato che qualche postulato abbia qui proprio parti delle quali si poteva fare a meno.

Ad ogni modo il libro è buono e non possiamo che augurarci di vederlo presto compiuto.

L. Tenca.

SULLA BARA DEL PROF. ALFREDO CAPELLI (1)

A voi giovani, che qui circondate commossi con le lagrime negli occhi la spoglia esanime e disfatta dell'uomo, che avete ascoltato riverenti fino a poche ore prima della sua fine immatura, io che fino a 5 anni fa sono stato, per 13 anni, suo affezionato coadiutore, ricorderò fugacemente la brillante carriera di lui, e del suo ingegno la messe degli allori mietuta nella così breve sua vita.

Egli è nato nel 1855 a Milano il 5 agosto, onde non aveva compiuto il suo 55° anno. Laureatosi nel 1877 a Roma, poi nominato assistente a Pavia, poi inviato per perfezionamento all'estero, e nominato per concorso professore straordinario di Algebra Complementare a Palermo nel 1881, egli aveva 28 anni appena di carriera professionale; dei quali 23 anni li ha esercitati a Napoli, ove egli venne nel 1886 per concorso nominato ordinario di quella cattedra che ha fino all'altro ieri coperta con tanto lustro, insegnando inoltre dal 1894 Analisi superiore, e negli ultimi tre anni Matematiche superiori.

E tutti questi anni egli li ha spesi passando dal tavolo del suo studio alla cattedra, e dalla cattedra a casa, per la linea più breve, camminando sempre assorto nei suoi pensieri, non guardando la gente

(1) Stava già per pubblicarsi il presente fascicolo, quando col più vivo dispiacere abbiamo appreso la notizia che l'illustre prof. **Alfredo Capelli** della R. Università di Napoli è morto il 28 Gennaio alle ore 4 ant. per un attacco di *angina pectoris*. Volendo pubblicare in fretta un cenno necrologico sia pur breve dell'illustre estinto, ne abbiamo pregato il prof. F. Amodeo di Storia delle Matematiche di quella Università, ed egli cortesemente ci ha inviato le seguenti parole lette da lui sulla bara dell'uomo di cui si rimpiange da tutti la perdita immatura. (N. d. R.)

che gli passava d'accanto, quasi non volesse dare occasione ai soggetti delle sue ricerche di sfuggire alla tanaglia del suo forte pensiero.

E di questo pensiero egli ha incise orme incancellabili nella Scienza e nell'Insegnamento.

La sua opera magistrale *Istituzioni di analisi algebrica*, di cui aveva appena terminato di correggere la 4ª edizione, mostra, a chi conosce il piccolo volume di lezioni litografate che usava nel 1887, quali cure egli aveva pel suo corso di lezioni, e come egli lo abbia condotto alla sua attuale grandiosità attraverso a progressivi ampliamenti e perfezioni.

Le memorie sue scientifiche su soggetti svariati: *Integrazione delle equazioni alle derivate parziali di Laplace, Potenze fattoriali, Operazioni polari, Operazioni invariantive fra due o più serie di variabili, Funzioni abeliane, Risolubilità e riduttibilità delle equazioni algebriche, Genesi combinatoria dell'aritmetica, Determinanti, Gruppi di sostituzioni, Irrazionali algebrici*, ecc., inseriti per la maggior parte negli Atti e rendiconti dell'*Acc. delle Scienze di Napoli*, nei Rendiconti dell'*Acc. dei Lincei* e nel *Giornale di matematiche* e negli Atti dei Congressi matematici a cui assiduamente partecipava, mostrano quanto egli abbia contribuito al progresso della branca della Scienza che aveva prescelto per oggetto dei suoi studi.

Due volte, nel 1882 e nel 1897, la *Società italiana delle scienze*, detta dei 40, decretava a lui la medaglia d'oro per la importanza della sua produzione scientifica.

Egli ha rivolte le sue cure affettuose a due altre istituzioni: al *Giornale di Matematiche*, che si pubblica a Napoli, di cui egli assunse la direzione nel 1894, intestandolo *Giornale di Battaglini* in onore del suo fondatore e riconducendolo nuovamente a vita rigogliosa e proficua ai giovani scienziati; ed il *Seminario Matematico*, che può ben dirsi la più prediletta delle sue opere, e pel quale ha da parecchi anni spese cure paterne per crearlo, farlo approvare dalla Facoltà e dal Consiglio superiore, e per dargli pratica esecuzione e quella degna sede che tutti voi potete constatare.

Giovedì ultimo, nella seduta di Facoltà, egli tenne un lungo affettuoso discorso sul suo Seminario matematico, riepilogando tutte le difficoltà attraverso cui era passato, gli ostacoli che si eran dovuti superare per attuarlo, e raccomandava, quasi facesse la sua dichiarazione testamentaria, di non attentare alla costituzione datagli, perchè vedeva in quello il mezzo più adatto per spronare i giovani allo studio ed alle ricerche e renderli degni della laurea cui aspirano.

È da otto anni che egli è stato marito e padre affettuoso e lascia un amore di bambina ed una donna adorata.

E noi, cari giovani, partecipiamo al pianto di questi due esseri inconsolabili, che vedono d'un tratto distrutto il loro dolce nido, e onoriamo il grande uomo col proseguire le sue orme scientifiche e far fruttificare le robuste piante da lui fatte crescere nel giardino della Scienza.

Addio, **Alfredo Capelli**, te fortunato che non muori nella Scienza, la tua spoglia si scompone e ritorna nella vita sotto altra forma, ma il tuo pensiero matematico è con noi e vivrà in eterno; e ad esso io riverente m'inchino.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 14 Febbraio 1910

STUDIO SULLO SVILUPPO DEI METODI GEOMETRICI

(Continuazione e fine, v. fascicolo precedente)

XIII.

Fra gli inventori che hanno contribuito allo sviluppo della Geometria infinitesimale, Sophus Lie si distingue per molte capitali scoperte che lo pongono in prima linea. Egli non era di coloro che lasciano scorgere fino dall'infanzia le attitudini più caratteristiche e, al momento di lasciare l'Università di Cristiania nel 1865, esitava ancora tra la Filologia e le Matematiche. Furono i lavori di Plücker che gli dettero per la prima volta piena coscienza della sua vera vocazione. Pubblicò nel 1869 un primo lavoro sull'interpretazione degli imaginari in Geometria e, dal 1870, fu in possesso delle idee direttrici di tutta la sua carriera.

Ebbi a quell'epoca il piacere di vederlo spesso, d'intrattenermi con lui a Parigi, ove era venuto col suo amico F. Klein. Un corso del signor Sylow seguìto da Lie gli aveva rivelata tutta l'importanza della teoria delle sostituzioni; i due amici studiavano quella teoria nel grande Trattato di C. Jordan; avevano piena coscienza della parte importante che era chiamata a rappresentare in tanti rami delle Scienze matematiche, cui non era ancora stata applicata. Hanno avuto entrambi la fortuna di contribuire coi loro lavori ad imprimere agli studi matematici l'indirizzo che era loro sembrato migliore.

Nel 1870 Sophus Lie presentava all'Accademia delle Scienze di Parigi una scoperta interessantissima. Non vi è niente che somigli meno ad una sfera che una linea retta, eppure Lie aveva imaginato una singolare trasformazione che faceva corrispondere una sfera ad una retta e permetteva, quindi, di collegare ogni proposizione relativa a rette ad una proposizione relativa a sfere e *viceversa*. In questo metodo di trasformazione così curioso, ogni proprietà relativa alle linee di curvatura d'una superficie fornisce una proposizione relativa alle linee asintotiche della superficie trasformata. Il nome di Lie resterà unito a queste relazioni sì nascoste che collegano una all'altra la linea retta e la sfera, questi due elementi essenziali e fondamentali della ricerca geometrica. Le ha sviluppate in una Memoria piene d'idee nuove, che comparve nel 1872.

I lavori che fecero seguito a questo brillante esordire di Lie confermarono pienamente le speranze ch'egli aveva suscitate. Il concetto di Plücker relativo alla generazione dello spazio con linee rette, con curve e superficie arbitrariamente scelte, apre alla teoria delle forme algebriche un campo che non è ancora stato esplorato, che Clebsch ha appena cominciato a riconoscere e delimitare. Ma, dal lato della Geometria infinitesimale, questo concetto è stato messo pienamente in valore da Sophus Lie. Il grande geometra norvegiano ha saputo prima trovarvi la nozione delle congruenze e dei complessi delle curve, eppoi quella delle *trasformazioni di contatto* di cui aveva trovato, pel caso del piano, il primo germe in Plücker. Lo studio di queste trasformazioni l'ha condotto a perfezionare, contemporaneamente al sig. Mayer, i metodi d'integrazione che Jacobi aveva istituiti per le equazioni alle derivate parziali del prim'ordine; ma getta specialmente fulgida luce sulle parti più difficili e più oscure delle teorie relative alle equazioni alle derivate parziali d'ordine superiore. Essa ha permesso, specialmente a Lie, d'indicare tutti i casi ne' quali il metodo delle caratteristiche di Monge è pienamente applicabile alle equazioni del second'ordine e due variabili indipendenti.

Continuando lo studio di queste trasformazioni speciali, Lie fu portato a costruire progressivamente la sua magistrale teoria dei gruppi continui di trasformazioni ed a mettere in evidenza la parte sì importante che la nozione di gruppo ha in Geometria. Tra gli elementi essenziali delle sue ricerche, conviene segnalare le trasformazioni infinitesimali la cui idea spetta esclusivamente a lui.

Tre grandi Opere pubblicate sotto la sua direzione da valenti e devoti collaboratori contengono la parte essenziale de' suoi lavori e le loro applicazioni alla teoria dell'integrazione, a quella delle unità complesse ed alla Geometria non euclidea.

XIV.

Eccomi giunto per via indiretta a quella Geometria non euclidea, lo studio della quale occupa nelle ricerche dei geometri un posto che aumenta ogni giorno. Se fossi il solo ad intrattenervi di Geometria, proverei piacere nel ricordarvi tutto quanto è stato fatto su questo argomento da Euclide, od almeno da Legendre in poi, sino ai giorni nostri. Considerata successivamente dai maggiori geometri del secolo scorso, la quistione si è progressivamente estesa. È stata aperta col celebre *postulatum* relativo alle parallele; viene chiusa coll'insieme degli assiomi geometrici.

Gli " Elementi " d'Euclide, che hanno resistito all'opera di tanti secoli, avranno almeno l'onore di provocare, prima di finire, una lunga sequela di lavori mirabilmente collegati i quali contribuiranno, nel modo più efficace, al progresso delle Matematiche, mentre forniranno ai filosofi i punti di partenza i più esatti ed i più solidi per lo studio dell'origine e della formazione delle nostre cognizioni. Sono anticipatamente sicuro che il mio distinto collaboratore non dimenticherà, tra i problemi dell'epoca attuale, questo, che è forse il più importante, e di cui si è occupato con tanto successo, e lascio a lui la cura di svolgerlo con tutta l'ampiezza che certo merita.

Ho parlato degli elementi della Geometria. Essi hanno ricevuto in questi ultimi cent'anni accrescimenti che non bisogna dimenticare. La teoria dei poliedri si è aumentata delle belle scoperte di Poinsot sui poliedri stellati e di quelle di Möbius sopra i poliedri ad una sola faccia. I metodi di trasformazione hanno estesa l'esposizione. Si può oggi dire che il primo Libro contiene la teoria della traslazione e della simmetria, che il secondo equivale alla teoria della rotazione e dello spostamento, che il terzo è fondato sull'omotetia e l'inversione.

Ma bisogna pur riconoscere che è per merito dell'Analisi che gli " Elementi " si sono arricchiti delle più belle proposizioni. Dobbiamo alla più alta Analisi l'iscrizione de' poligoni regolari di 17 lati e dei poligoni analoghi. A lei dobbiamo le discussioni tanto lungamente cercate dell'impossibilità della quadratura del circolo, dell'impossibilità di certe costruzioni geometriche, mediante la riga ed il compasso. A lei dobbiamo finalmente le prime dimostrazioni rigorose delle proprietà di massimo e minimo della sfera. Spetterà alla Geometria d'intervenire su questo terreno ove l'Analisi l'ha preceduta.

Quali saranno gli elementi della Geometria durante il secolo testè principiato? Vi sarà un solo libro elementare di Geometria? Sarà forse l'America, colle sue scuole sciolte da ogni programma e da ogni tradizione, che ci darà le migliori soluzioni di questa importante e difficile quistione. V. Staudt è stato qualche volta detto l'*Euclide del XIX secolo*; preferirei dirlo l'*Euclide della Geometria proiettiva*; ma questa Geometria, per interessante che possa essere, è chiamata a fornire l'unica base dei futuri elementi?

XV.

È giunto il momento di terminare questa troppo lunga esposizione e vi sono peraltro innumerevoli ricerche interessanti che sono stato per così dire costretto a trascurare. Avrei voluto intrattenervi su quelle Geometrie ad un numero qualunque di dimensioni la cui nozione risale ai primi tempi dell'Algebra, ma il cui studio sistematico non è stato principiato che 60 anni or sono da Cayley e da Cauchy. Tale genere di ricerche ha trovato favore nel vostro paese, e non ho bisogno di ricordare che il nostro illustre presidente, dopo essersi mostrato degno continuatore di Laplace e di Le. Verrier, in uno spazio ch'egli con noi considera come dotato di 3 dimensioni, non ha sdegnato pubblicare nell'*American Journal*, considerazioni di vivo interesse sulle geometrie ad *n* dimensioni. Una sola obiezione poteva esser fatta agli studi di tal genere ed era già stata formulata da Poisson: l'assenza di ogni base reale, di ogni *substratum* che permetta di presentare, sotto aspetti visibili ed in certo modo palpabili, i resultati ottenuti. L'estensione dei metodi della Geometria descrittiva, e specialmente l'uso dei concetti di Plücher sopra la generazione dello spazio, contribuiranno a togliere molto del suo valore a tale obiezione.

Avrei voluto parlarvi anche del metodo delle equipollenze, di cui troviamo il germe nelle opere postume di Gauss, dei quaternioni di Hamilton, de' metodi di Grassmann e in generale dei sistemi d'unità complesse, dell'*Analysis situs*, così intimamente collegata alla teoria delle funzioni, della Geometria, detta *cinematica*, della teoria degli abbachi, della *Geometrografia*, delle applicazioni della Geometria alla Filosofia naturale od alle Arti. Ma temerei, estendendomi oltre misura, che qualche analista, come ce ne sono un tempo stati, non accusasse la Geometria di voler tutto accaparrare.

La mia ammirazione per l'Analisi, divenuta ai nostri tempi sì feconda e sì potente, non mi permetterebbe di concepire tal pensiero. Ma, se qualche rimprovero di tal genere potesse venire oggi formulato, non alla Geometria, ma all'Analisi converrebbe, credo, rivolgerlo. Il cerchio in cui gli studi matematici sembravano stretti sul principio del XIX secolo è stato spezzato da ogni lato. Gli antichi problemi ci si presentano sotto nuova forma, dei nuovi se ne pongono, il cui studio occupa legioni di lavoratori. Il numero di coloro che coltivano la Geometria pura è divenuto straordinariamente ristretto. Esiste in ciò un pericolo contro cui è necessario premunirsi. Non dimentichiamo che, se l'Analisi ha acquistato mezzi d'investigazione che le mancavano prima, essa li deve principalmente ai concetti introdotti dai Geometri. Non bisogna che la Geometria resti in certo qual modo sepolta sotto il proprio trionfo. È alla sua scuola che abbiamo appreso, e che i nostri posteri impareranno, a non fidarsi mai ciecamente dei metodi troppo generali, a considerare le questioni in loro stesse ed a trovare, nelle condizioni speciali ad ogni problema, sia una via diretta verso una soluzione facile, sia il mezzo d'applicare in modo appropriato i procedimenti generali che ogni scienza deve riunire. Come dice Chasles in principio dell'*Aperçu historique*: " Le dottrine della Geometria pura offrono spesso, ed in molte questioni, quella via semplice e naturale che, penetrando sino all'origine delle verità, mette a nudo la misteriosa catena che le unisce tra di loro e le fa conoscere individualmente nel modo più chiaro e più completo ".

Coltiviamo quindi la Geometria, che ha i suoi propri vantaggi, senza volere, su tutti i punti, uguagliarla alla sua rivale. Del resto, se fossimo tentati di trascurarla, essa non tarderebbe a trovare nelle applicazioni delle Matematiche, come ha già fatto una prima volta, i modi per rinascere e svilupparsi di nuovo. È simile al gigante Anteo che riacquistava le forze toccando terra.

G. Darboux.

QUOZIENTI E RADICI DI POLINOMI

(Contributo al calcolo letterale)

1. Le regole comunemente usate per calcolare il quoziente di due polinomi e la radice n^a di un polinomio, possono recare imbarazzo, specialmente ai novizi, quando la lettera ordinatrice ha per coefficienti delle espressioni letterali polinomie. Ci proponiamo di trovare altre regole che non presentino questo inconveniente.

2. Definizione. — Consideriamo due monomi interi ridotti e dissimili. Se in uno dei monomi, o in ciascuno di essi, non si trovano tutte le lettere contenute nell'altro, introduciamovi le lettere mancanti coll'esponente zero, per modo che i due monomi vengano a contenere le medesime lettere; e, fissato a piacimento per le lettere un ordine di successione, per es. l'ordine alfabetico, disponiamole nei monomi secondo l'ordine stabilito. Fatte queste operazioni i monomi siano

$$M = K\, a^{\alpha}\, b^{\beta}\, c^{\gamma} \ldots \qquad \text{e} \qquad M' = K'\, a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'} \ldots$$

Confrontiamo ora gli esponenti α e α', poi β e β', poi γ e γ', e così via fino a incontrare due esponenti corrispondenti λ e λ' che siano diversi tra loro; ciò che dovrà necessariamente accadere per la supposta dissimiglianza dei monomi dati. Allora se $\lambda > \lambda'$ diremo che M è *superiore* a M' e che M' è *inferiore* a M; e, viceversa, se $\lambda < \lambda'$ diremo M *inferiore* a M' e M' *superiore* a M.

Così, dati i monomi

$$M = 5\, a^4 b^3 c^2 f^5 \qquad \text{e} \qquad M' = c^3 d^4 a^4 b^3 e,$$

se l'ordine di successione che si fissa per le lettere è quello alfabetico, scrivendo

$$M = 5\, a^4 b^3 c^2 d^0 e^0 f^5, \qquad M' = a^4 b^3 c^3 d^4 e f^0,$$

si riconosce che la prima lettera che ha esponente diverso nei due monomi è c, e che questa lettera ha in M′ un esponente maggiore. Diremo pertanto che M′ è superiore a M, oppure che M è inferiore a M′. Se invece si considerano le lettere nell'ordine $abf\ldots$, si trova M superiore a M′; dunque la relazione di superiorità tra due monomi è dipendente dall'ordine di successione fissato per le lettere che essi contengono.

In ciò che segue, quando dovremo considerare più di due monomi, supporremo sempre che la superiorità si riferisca a uno stesso ordine di successione delle lettere dei medesimi.

3. Teorema. — *Dati tre monomi* M, M′, M″, *se è*

$$\mathrm{M}\ \textit{sup. a}\ \mathrm{M}' \quad e \quad \mathrm{M}'\ \textit{sup. a}\ \mathrm{M}'',$$

sarà pure

$$\mathrm{M}\ \textit{sup. a}\ \mathrm{M}''.$$

Dimostrazione. — Siano

$$\begin{array}{lll} \alpha, \beta, \ldots \lambda \ldots & \text{gli esponenti di} & \mathrm{M} \\ \alpha', \beta', \ldots \lambda' \ldots & \quad " & \mathrm{M}' \\ \alpha'', \beta'', \ldots \lambda'' \ldots & \quad " & \mathrm{M}''; \end{array}$$

e sia $\lambda, \lambda', \lambda''$ la prima terna di esponenti corrispondenti non tutti eguali tra loro.

Avremo

$$\lambda \geqq \lambda' \quad \text{e} \quad \lambda' \geqq \lambda'',$$

con almeno una disuguaglianza; e perciò in ogni caso $\lambda > \lambda''$. D'altra parte tutti gli esponenti di M che precedono λ sono uguali ai corrispondenti di M″ che precedono λ''; dunque M è superiore a M″.

4. Teorema. — *Dati i monomi* M, M′, M″, *se è*

$$\mathrm{M}\ \textit{sup. a}\ \mathrm{M}',$$

sarà pure

$$\mathrm{MM}''\ \textit{sup. a}\ \mathrm{M'M''}.$$

Dimostrazione. — Se

$$\begin{array}{lll} \alpha, \beta, \ldots \lambda \ldots & \text{sono gli esponenti di} & \mathrm{M} \\ \alpha', \beta', \ldots \lambda' \ldots & \quad " & \mathrm{M}' \\ \alpha'', \beta'', \ldots \lambda'' \ldots & \quad " & \mathrm{M}'', \end{array}$$

saranno

$$\begin{array}{ll} \alpha+\alpha'', \beta+\beta'', \ldots \lambda+\lambda'' \ldots & \text{gli esponenti di } \mathrm{MM}'' \\ \alpha'+\alpha'', \beta'+\beta'', \ldots \lambda'+\lambda'' \ldots & \quad " \quad \mathrm{M'M''}. \end{array}$$

Poniamo ora che λ e λ' siano i primi esponenti diversi in M e M′; saranno allora $\lambda+\lambda''$ e $\lambda'+\lambda''$ i primi esponenti diversi in MM″ e in M′M″; ma per ipotesi è $\lambda > \lambda'$, dunque sarà $\lambda+\lambda'' > \lambda'+\lambda''$, e perciò MM″ superiore a M′M″.

5. TEOREMA. — *Dati i monomi* M, M′, M″, *se è*

$$M \textit{ sup. a } M',$$

e i quozienti $\frac{M}{M''}$ *e* $\frac{M'}{M''}$ *sono monomi interi, sarà pure*

$$\frac{M}{M''} \textit{ sup. a } \frac{M'}{M''}.$$

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, se fosse

$$\frac{M}{M''} \text{ simile o inferiore a } \frac{M'}{M''},$$

sarebbe anche (n. 4)

$$\frac{M}{M''} M'' \text{ simile o inferiore a } \frac{M'}{M''} M'';$$

cioè

$$M \text{ simile o inferiore a } M',$$

contrariamente all'ipotesi.

6. TEOREMA. — *Dati i monomi* M, M′ *e* N, N′, *se è*

$$M \textit{ sup. a } M' \quad \textit{e} \quad N \textit{ sup. a } N',$$

sarà pure

$$MN \textit{ sup. a } M'N'.$$

DIMOSTRAZIONE. — Infatti per il n. 4 si ha

$$MN \text{ sup. a } M'N \quad \text{e} \quad M'N \text{ sup. a } M'N';$$

quindi, per il n. 3,

$$MN \text{ sup. a } M'N'.$$

Generalizzando, si trova con facilità che
Quando è

$$\begin{array}{l} M \textit{ sup. a } M' \\ N \textit{ sup. a } N' \\ P \textit{ sup. a } P' \\ \textit{ecc.,} \end{array}$$

è anche

$$MNP\ldots \textit{ sup. a } M'N'P'\ldots$$

E in particolare
Se n *è un intero positivo, da*

$$M \textit{ sup. a } M' \quad \textit{segue} \quad M^n \textit{ sup. a } M'^n.$$

7. DEFINIZIONE. — Per significare che in una successione di monomi ciascuno dei termini è superiore (inferiore) a quello che lo precede, diremo brevemente che i monomi sono *in ordine ascendente* (*discendente*) *di superiorità.*

8. Teorema. — *Una successione di monomi in ordine discendente di superiorità, e nella quale comparisce un numero limitato di lettere, non può continuare senza fine.*

Dimostrazione. — Per le successioni che contengono una lettera sola il teorema sussiste, perchè se il primo termine, prescindendo dal coefficiente, è a^α, i soli termini che possono seguirlo sono

$$a^{\alpha-1},\ a^{\alpha-2} \ldots\ a^1,\ a^0.$$

D'altra parte, ammesso che il teorema valga per le successioni che non contengono più di n lettere, è facile provare ch'esso deve valere anche per quelle che ne contengono $n+1$. Consideriamo infatti una successione S con $n+1$ lettere $a, b, c \ldots$; e sia α l'esponente di a nel primo termine, vale a dire il massimo esponente di a in tutta la successione. Al primo termine di questa potranno seguirne altri contenenti anch'essi la a coll'esponente α; ma il numero dei termini con a^α non potrà mai essere illimitato, perchè, se ciò fosse, sopprimendo in essi il fattore a^α risulterebbe una successione illimitata di monomi in ordine discendente di superiorità (n. 5) e con sole n lettere $bc \ldots$; il che per ipotesi non può avvenire. Ai termini con a^α potranno succederne altri contenenti a con uno stesso esponente $\alpha' < \alpha$, poi altri contenenti a con uno stesso esponente $\alpha'' < \alpha'$, e così via; ma ciascuna di queste successioni parziali, per la ragione anzidetta, comprenderà un numero finito di termini; e il numero delle successioni stesse sarà limitato, perchè è limitata la successione decrescente $\alpha\ \alpha'\ \alpha'' \ldots$. Per conseguenza anche la S non potrà continuare senza fine.

9. Una successione di monomi in ordine ascendente di superiorità può essere illimitata. Tale è ad es. la successione

$$a^2b^1 \ldots,\ a^2b^2 \ldots,\ a^2b^3 \ldots, \ldots,\ a^2b^n \ldots, \ldots$$

Teorema. — *In una successione illimitata di monomi in ordine ascendente di superiorità, e che comprende un numero limitato di lettere, può sempre trovarsi un termine nel quale uno degli esponenti supera ogni intero positivo dato, arbitrariamente grande.*

Dimostrazione. — Sia ω l'intero dato grande a piacere.

Se nella successione comparisce una sola lettera a, il teorema sussiste, perchè gli esponenti di questa lettera devono formare una successione di interi sempre crescente.

Supponiamo che il teorema abbia luogo per le successioni che non comprendono più di n lettere, e consideriamo una successione S con $n+1$ lettere $a, b, c \ldots$ Se in nessuno dei termini di S l'esponente di a supera ω, questo esponente avrà in S un valore massimo $\mu \leqq \omega$, e tutti i monomi di S da un certo punto in poi conterranno a coll'esponente μ. Soppresso il fattore a^{μ} in tutti questi termini, risulterà una successione di monomi in ordine ascendente di superiorità (n. 5) e con sole n lettere $bc\ldots$; nella quale per ipotesi deve trovarsi un esponente maggiore di ω. Dunque questo fatto si verifica pure nella successione S che abbiamo considerato.

10. Teorema. — *In ogni polinomio ridotto vi è un termine superiore (inferiore) a ciascuno dei rimanenti.*

Dimostrazione. — Supporremo che il polinomio dato P contenga soltanto quattro lettere a, b, c, d. Ciò renderà più semplice il discorso, senza togliere nulla alla sua generalità.

Fra i termini di P troviamo quelli che contengono a col massimo esponente. Se un solo termine ha questa proprietà, esso sarà superiore a ogni altro termine di P; se vi sono più termini contenenti a coll'esponente massimo, raccogliamoli in una classe che diremo la classe (1).

Fra i termini di (1) troviamo quelli che contengono b col massimo esponente. Se un solo termine ha questa proprietà, esso sarà superiore a ogni altro termine di (1), e per conseguenza a ogni altro termine di P (n. 3); se invece vi sono più termini in (1) contenenti b coll'esponente massimo, raccogliamoli in una classe che diremo la classe (2).

Fra i termini di (2) troviamo quelli che contengono c col massimo esponente. Se un solo termine ha questa proprietà, esso sarà superiore a ogni altro termine di (2), e per conseguenza a ogni altro termine di (1) e a ogni altro termine di P (n. 3). Se al contrario vi sono più termini in (2) contenenti c coll'esponente massimo, raccogliamoli in una classe che diremo la classe (3).

I termini di (3), contenendo a, b e c col medesimo esponente ed essendo dissimili, dovranno contenere d con esponente diverso. Vi sarà dunque in (3) un solo termine che contiene d coll'esponente massimo; e questo termine sarà superiore a ogni altro termine di (3) di (2) di (1) e di P (n. 3).

In modo analogo, considerando successivamente i termini che contengono $a, b, c\ldots$ coll'esponente minimo, si può dimostrare che vi è in P un termine inferiore a tutti gli altri.

11. Definizione. — Diremo *termine superiore* (*inferiore*) di un polinomio ridotto quel termine di esso che è superiore (inferiore) a ognuno dei rimanenti.

La ricerca del termine superiore e inferiore di un polimonio può farsi col processo medesimo che ci ha servito a dimostrarne l'esistenza. Questo processo è praticamente molto più agevole e rapido di quanto a primo aspetto possa parere.

Esempi. — 1°. Trovare il termine superiore del polinomio

$$5a^3 + d^3 - \underline{\underline{\underline{a^4b^2cd}}} - 2a^8cd^6 + \underline{\underline{\underline{\underline{3a^4b^2cd^5}}}} + \underline{\underline{7a^4b^2d^3}}$$
$$- b^9c^7 - \underline{4a^4bc^5} + \underline{5a^4c^8} - c^8d^9.$$

I termini della classe (1) sono quelli sottosegnati almeno una volta,
" (2) " due volte,
" (3) " tre volte,
il termine superiore è quello sottosegnato quattro volte.

2°. Trovare il termine inferiore del polinomio

$$3a^2bd - \underline{\underline{\underline{6acd^2}}} + \underline{4ac^3} + a^8c^4 - \underline{\underline{ac^3d^4}} + 2a^2bcd - 7a^8.$$

I termini sottosegnati almeno una volta formano la classe (1), cioè contengono a coll'esponente minimo; i termini sottosegnati almeno due volte formano la classe (2), cioè sono quelli di (1) che contengono b coll'esponente minimo; il termine sottosegnato tre volte è il solo in (2) che contenga c coll'esponente minimo, ed è perciò il termine inferiore del polinomio.

12. Teorema. — *La moltiplicazione di un monomio per un polinomio dà un polinomio il cui termine superiore (inferiore) è il prodotto del monomio per il termine superiore (inferiore) del polinomio dato.*

La moltiplicazione di due polinomi dà un polinomio il cui termine superiore (inferiore) è il prodotto dei loro termini superiori (inferiori).

Dimostrazione. — La prima parte del teorema è una conseguenza immediata del n. 4.

Per dimostrare la seconda parte sia

s il term. sup. e x un altro term. qualsiasi del polin. P
s' " " x' " " " P';

allora per il n. 4 il monomio ss' è superiore a sx' e a $s'x$, e per il n. 6 lo stesso monomio è superiore a xx'; cioè ss' è superiore a ogni altro termine dello sviluppo di PP' prima della riduzione dei termini simili. Analogamente, se t e t' sono i termini inferiori di P e P', il monomio tt' è inferiore a tutti gli altri termini dello sviluppo di PP' prima della riduzione dei termini simili. Eseguendo questa riduzione, i monomi ss' e tt' non potranno dunque associarsi con nessun altro; e perciò lo sviluppo ridotto comprenderà almeno questi due monomi, che saranno rispettivamente il termine superiore e l'inferiore di esso.

Questo teorema si estende facilmente al prodotto di un numero qualunque di polinomi; e come caso speciale del teorema così esteso si ha che

*L'*n^a^* potenza di un polinomio* (n *int. e pos.*) *è un polinomio che ha* *per termine superiore (inferiore) l'n^a potenza del termine superiore (inferiore) del polinomio dato.*

13. Le cose precedenti portano a stabilire delle regole per la divisione dei polinomi e per estrarne la radice n^a, che non richiedono l'ordinamento secondo le potenze di una lettera. Tali regole sono analoghe alle consuete, anzi coincidono con queste quando nei polinomi comparisce una lettera sola; ma se i polinomi contengono più lettere, le nuove regole sono da preferire, perchè con esse si evitano i coefficienti letterali polinomi che possono presentarsi nell'applicazione delle regole comuni.

Come ora vedremo, per avere le nuove regole basta seguire la via che conduce alle antiche, sostituendo al concetto di termine di più alto e di più basso grado quello di termine superiore e inferiore.

14. Siano A e B due polinomi ridotti, e il quoziente di A per B sia un'espressione intera che supporremo ridotta e diremo Q.

Se Q è un monomio, segue dal n. 12 ch'esso dovrà risultare tanto dalla divisione del termine superiore di A per il superiore di B, quanto dalla divisione dei due termini inferiori.

Se Q è un polinomio, segue dallo stesso n. 12 che dividendo il termine superiore (inferiore) di A per il superiore (inferiore) di B, risulta il termine superiore (inferiore) di Q. Si ha modo così di determinare intanto due termini di Q. D'altra parte, conoscendo un termine o alcuni termini di Q, è facile determinarne uno o due dei nuovi. E infatti se C rappresenta l'insieme dei termini noti e X l'insieme dei termini che restano a trovare, si ha

$$A = B(C + X), \qquad X = \frac{A - BC}{B}.$$

L'espressione $A - BC$ non può essere monomia (n. 12), ed ha perciò un termine superiore e uno inferiore: dividendo rispettivamente questi due termini per il termine superiore e inferiore di B, o si ottengono due risultati eguali, e in tal caso ciascuno d'essi rappresenta da solo tutta la parte incognita X del quoziente Q; o si hanno due risultati diversi, e questi sono allora due termini di X, vale a dire due nuovi termini del quoziente stesso.

Così i termini di Q possono essere successivamente determinati a uno o anche a due per volta, secondo che in ciascuna determinazione si fa uso dei soli termini superiori o inferiori, o degli uni e degli altri a un tempo.

Diamo un esempio di divisione eseguita determinando un solo termine per volta mediante i termini superiori. Abbiamo sottosegnato questi termini nel dividendo, nel divisore e nei resti, perchè ciò agevola l'operazione.

$$
\begin{array}{l|l}
a^3+b^3+c^3-3abc & a+b+c \\
\cline{2-2}
-a^3 \qquad\qquad -a^2b-a^2c & a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\cline{1-1}
\quad b^3+c^3-3abc-a^2b-a^2c & \\
\qquad\qquad +abc+a^2b \qquad +ab^2 & \\
\cline{1-1}
\quad b^3+c^3-2abc \qquad -a^2c+ab^2 & \\
\qquad\qquad +abc \qquad +a^2c \qquad +ac^2 & \\
\cline{1-1}
\quad b^3+c^3-abc \qquad\qquad +ab^2+ac^2 & \\
\quad -b^3 \qquad\qquad\qquad -ab^2 \qquad -b^2c & \\
\cline{1-1}
\qquad c^3-abc \qquad\qquad +ac^2-b^2c & \\
\qquad\quad +abc \qquad\qquad\qquad +b^2c+bc^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad c^3 \qquad\qquad\qquad +ac^2 \qquad +bc^2 & \\
\qquad -c^3 \qquad\qquad\qquad -ac^2 \qquad -bc^2 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

15. È da notare che quando si trova un termine di Q per mezzo dei termini superiori (inferiori), risulta sempre il termine superiore (inferiore) tra quelli che prima erano sconosciuti. Perciò, in qualunque modo si faccia il calcolo di Q, o usando i soli termini superiori o i soli inferiori, o talvolta gli uni e talvolta gli altri, o contemporaneamente gli uni e gli altri, ecc., è chiaro che i termini di Q ottenuti mediante i termini superiori sono in ordine discendente di superiorità; e quelli ottenuti mediante i termini inferiori sono in ordine di superiorità ascendente.

16. È da osservare inoltre che il massimo (minimo) esponente che una qualunque delle lettere ha nel quoziente di due polinomi, è la differenza tra i massimi (minimi) esponenti che questa lettera ha nel dividendo e nel divisore.

E infatti, se si considera ad es. la lettera c, e si fissa l'ordine delle lettere in modo che la c preceda tutte le altre, i termini superiori di A, B, Q conterranno c coll'esponente massimo che questa lettera ha in ognuna delle tre espressioni; e, d'altra parte, l'esponente di c nel termine superiore di Q sarà la differenza tra gli esponenti di c nei termini superiori di A e B (n. 12).

Dimostrazione analoga per gli esponenti minimi.

17. Supponiamo ora che il polinomio A non sia divisibile per il polinomio B, ma che il termine superiore (inferiore) di A sia divisibile per quello di B: allora il su esposto processo di divisione potrà essere iniziato e indi proseguito finchè si presentino dei resti il cui termine superiore (inferiore) sia divisibile per il termine superiore (inferiore) di B. Ma in nessun caso potrà presentarsi un resto nullo;

perchè allora i termini successivamente determinati formerebbero un polinomio che moltiplicato per B darebbe A, contro l'ipotesi.

18. Anche quando il dividendo non è divisibile per il divisore, se il processo di divisione viene applicato usando i soli termini superiori, i quozienti monomi che ne risultano sono in ordine discendente di superiorità.

Per dimostrarlo basta provare che si succedono in tal modo i termini superiori del dividendo e dei resti successivi (n. 5). Ora, se A rappresenta il dividendo o uno qualunque dei resti, e x è il quoziente del termine superiore di A per quello del divisore B, il resto successivo ad A sarà $A - Bx$. Ma il termine superiore di A coincide con quello di Bx (n. 12); quindi in $A - Bx$ questi due termini si elidono, e il termine superiore fra i rimasti dopo la riduzione è necessariamente inferiore a quello di A.

Segue da ciò che quando si applica il processo di divisione mediante i soli termini superiori, e il dividendo non è divisibile per il divisore, a un certo punto dell'operazione deve presentarsi un resto il cui termine superiore non è divisibile per quello del divisore. Perchè se ciò non avvenisse, l'operazione potrebbe essere continuata senza fine; e allora ne risulterebbe una successione illimitata di monomi in ordine discendente di superiorità, che nel n. 8 fu dimostrata impossibile.

Questa impossibilità di continuare il calcolo vale a riconoscere che il quoziente cercato non è un'espressione intera.

19. Restando sempre in questa ipotesi, supponiamo che il processo di divisione venga applicato per mezzo dei soli termini inferiori. Allora, ragionando come nel numero precedente, è facile provare che i quozienti monomi successivamente determinati sono in ordine ascendente di superiorità; ma non si può analogamente concluderne che l'operazione debba a un certo punto essere interrotta dal presentarsi di un resto il cui termine inferiore non sia divisibile per il termine inferiore del divisore, perchè una successione di monomi in ordine ascendente di superiorità può essere illimitata (n. 9). Nè a tale conclusione si può giungere per alcun'altra via, perchè in realtà il processo può arrestarsi o non arrestarsi mai, a seconda dei casi. Così, ad es., la divisione

$$\begin{array}{llll|l}
6a^3 & -\,8a^2c & +\,\underline{5bc^2} & -\,abc & 3a^2 - \underline{bc} \\ \cline{5-5}
 & +\,15a^2c & -\,5bc^2 & & -5c + a \\ \cline{1-4}
6a^3 & +\,7a^2c & & -\,\underline{abc} & \\
-\,3a^3 & & & +\,abc & \\ \cline{1-4}
3a^3 & +\,\underline{7a^2c} & & &
\end{array}$$

non può essere continuata oltre il punto ove noi l'abbiamo condotta; mentre la divisione

$$
\begin{array}{l|l}
5a^3b^3 + 2a - 4b & \ 6b^2 - 2b - 3ab + a \\
\qquad - 2a + 4b - 12b^2 + 6ab & \ \overline{2 + 6b + 18b^2 + \ldots} \\
\hline
5a^3b^3 \qquad\qquad - 12b^2 + 6ab & \\
\qquad\qquad + 12b^2 - 6ab - 36b^3 + 18ab^2 & \\
\hline
5a^3b^3 \qquad\qquad\qquad - 36b^3 + 18ab^2 & \\
\qquad\qquad\qquad + 36b^3 - 18ab^2 - 108b^4 + 54ab^3 & \\
\hline
5a^3b^3 \qquad\qquad\qquad\qquad - 108b^4 + 54ab^3 &
\end{array}
$$

ecc.

può essere continuata indefinitamente, com'è manifesto.

Quando dunque la divisione si fa per mezzo dei soli termini inferiori, l'inesistenza del quoziente intero non viene sempre annunziata dall'impossibilità di continuare l'operazione. Però, in mancanza di questo o di altro sicuro indizio, potrà sempre valere il fatto che, proseguendo abbastanza nel calcolo, si deve pervenire a un termine in cui l'esponente di una lettera supera l'esponente massimo che essa avrebbe potuto avere nel quoziente intero dei due polinomi (n. 9); il quale esponente massimo può essere preventivamente determinato per mezzo del n. 16.

20. Da ultimo considereremo brevemente il caso della divisione eseguita mediante i termini superiori e inferiori a un tempo. Allora, quando l'inesistenza del quoziente intero non si manifesti prima colla necessità di arrestarsi nel calcolo, o in qualche altra guisa, essa potrà sempre essere riconosciuta da ciò che a un certo punto dell'operazione i quozienti monomi ricavati coi termini superiori cesseranno di succedersi in ordine discendente di superiorità (n. 8 e 15).

21. Passeremo ora all'estrazione di radice, limitando però le nostre ricerche ai soli polinomi con coefficienti reali.

Sia A un polinomio ridotto avente per radice un altro polinomio che supporremo pure ridotto e indicheremo con R.

Se s è il termine superiore di A e t il suo termine inferiore, segue dal n. 12 che il termine superiore e l'inferiore di R devono essere radici n^{me} di s e di t rispettivamente. Ora, quando n è dispari, il calcolo di $\sqrt[n]{s}$ conduce a un solo monomio, e così pure il calcolo di $\sqrt[n]{t}$; per modo che si possono determinare subito il termine superiore e l'inferiore di R. Ma quando n è pari, calcolando $\sqrt[n]{s}$, si hanno due monomi contrari, uno dei quali sarà termine superiore di R, e l'altro del polinomio contrario $-$R, che è pure radice n^{ma} di A. E similmente, calcolando $\sqrt[n]{t}$, si ottengono due monomi contrari, uno dei quali sarà termine inferiore di R e l'altro di $-$R. Siccome però, considerata una delle $\sqrt[n]{s}$, non ci è noto quale delle due $\sqrt[n]{t}$ si trovi insieme a essa in R o in $-$R, questi calcoli non valgono a determinare compiutamente il termine superiore e l'inferiore in ognuna di tali radici, ma soltanto o l'uno o l'altro di essi.

D'altra parte, conoscendo un termine o più termini di R, tra i quali però si trovi il termine superiore o l'inferiore di questa, è facile ottenere un altro termine della medesima. Supponiamo infatti che sia C l'insieme dei termini noti e X quello dei termini che restano a trovare, sicchè $R = C + X$; e supponiamo inoltre che C comprenda il termine superiore c di R, e che sia x il termine superiore di X. Avremo

$$A = (C + X)^n = C^n + nC^{n-1}X + \binom{n}{2} C^{n-2}X^2 + \ldots + X^n;$$

e quindi

$$A - C^n = nC^{n-1}X + \binom{n}{2} C^{n-2}X^2 + \ldots + X^n.$$

È facile riconoscere (n. 12) che i termini superiori delle parti del secondo membro sono rispettivamente

$$nc^{n-1}x, \qquad \binom{n}{2} c^{n-2}x^2, \ldots\ x^n;$$

e che, essendo c superiore a x, il primo di questi monomi è superiore a ciascuno dei rimanenti, ed è perciò il termine superiore di tutto il secondo membro (n. 4 e 3). Se pertanto si trova il termine superiore r di $A - C^n$, si avrà

$$r = nc^{n-1}x;$$

e quindi

$$x = \frac{r}{nc^{n-1}}.$$

Si può ottenere così un altro termine della radice che è il superiore tra quelli non conosciuti.

Nello stesso modo si trova che se r e c sono i termini inferiori di $A - C^n$ e di R, la formola precedente dà un nuovo termine di R, che è l'inferiore tra quelli non ancora determinati.

Per tutto ciò, quando n è dispari, si possono determinare successivamente tutti i termini di R a uno o anche a due per volta, secondo che in ciascuna determinazione si fa uso dei soli termini superiori o inferiori, o degli uni e degli altri a un tempo. E quando n è pari, si possono calcolare successivamente tutti i termini di R o di $-$R; ma uno solo per volta, o mediante i soli termini superiori, o mediante i soli inferiori.

Diamo qui un esempio di estrazione di radice quadrata eseguita per mezzo dei termini superiori. Il termine superiore del radicando è sottosegnato due volte, e i termini superiori dei resti e della radice sono sottosegnati una volta sola. È pure sottosegnato

$$
\begin{array}{l}
4a^2c - 2ab^2 - 2ac^2 + 4a^4c^2 + a^2c^4 + 1 + 4a^2b + 3a^2b^2c^2 + \underline{\underline{4a^4b^2}} + a^2b^4 + 2abc - 4a^3c^3 - 2a^2bc^3 - \\
\qquad\qquad - 4a^4c^2 \\
\hline
4a^2c - 2ab^2 - 2ac^2 \qquad + a^2c^4 + 1 + 4a^2b + 3a^2b^2c^2 \qquad + a^2b^4 + 2abc - 4a^3c^3 - 2a^2bc^3 - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^2b^4 \\
\hline
4a^2c - 2ab^2 - 2ac^2 \qquad + a^2c^4 + 1 + 4a^2b + 3a^2b^2c^2 \qquad + 2abc - 4a^3c^3 - 2a^2bc^3 - \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^2b^2c^2 \qquad\qquad\qquad\qquad + \\
\hline
4a^2c - 2ab^2 - 2ac^2 \qquad + a^2c^4 + 1 + 4a^2b + 2a^2b^2c^2 \qquad + 2abc - 4a^3c^3 - 2a^2bc^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - a^2c^4 \qquad\qquad - 2a^2b^2c^2 \qquad\qquad + 4a^3c^3 + 2a^2bc^3 \\
\hline
4a^2c - 2ab^2 - 2ac^2 \qquad + 1 + \underline{4a^2b} \qquad + 2abc \\
-4a^2c + 2ab^2 + 2ac^2 \qquad - 1 - 4a^2b \qquad - 2abc \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

22. Qui, analogamente a quanto fu detto nei n. 15 e 16, è da osservare che

1°. In qualunque modo si applichi il su esposto procedimento, i termini di R ottenuti per mezzo dei termini superiori sono in ordine discendente di superiorità; e quelli ottenuti per mezzo dei termini inferiori sono in ordine di superiorità ascendente.

2°. L'esponente massimo (minimo) che una qualunque delle lettere ha nella radice n^a di un polinomio è $\frac{1}{n}$ dell'esponente massimo (minimo) che questa lettera ha nel radicando.

Quest'ultima proprietà si dimostra imitando il ragionamento del n. 16.

23. Passiamo ora a studiare il caso di un polinomio che non abbia radice n^a intera. Tale studio ci condurrà a delle conclusioni del tutto analoghe a quelle che furono esposte nei n. 17, 18, 19 e 20 relativamente alla divisione.

Se il polinomio A non è potenza n^a di un altro polinomio, ma il termine superiore (inferiore) di A è potenza n^a di un monomio s, il processo d'estrazione di radice potrà essere iniziato e indi proseguito finchè si presentino dei resti il cui termine superiore (inferiore) sia divisibile per ns^{n-1}. Ma è evidente che a un resto nullo non si potrà mai pervenire.

24. Il presentarsi di una divisione impossibile, che arresta il calcolo e annunzia l'inesistenza di una radice intera, è un fatto che il doppio del termine superiore della radice, che serve da divisore fisso nella determinazione di tutti i termini di questa dal secondo in poi. Il calcolo dei resti successivi vi è abbreviato nella maniera ordinaria.

$$
\begin{array}{r|l}
-2a^2b^3c+\underline{8a^4bc}-4a^3b^3 & \underline{2a^2b}+2a^2c-ab^3+abc-ac^2+1 \\ \cline{2-2}
-8a^4bc & \underline{4a^2b}+2a^2c \\ \hline
-2a^2b^3c \qquad -\underline{4a^3b^3} & \quad +2a^2c \\ \cline{2-2}
+4a^3b^3+4a^3b^2c & 4a^2b+4a^2c-ab^2 \\ \hline
-2a^2b^3c \qquad +\underline{4a^3b^2c} & \qquad -ab^2 \\ \cline{2-2}
-2a^2b^3c \qquad -4a^3b^2c-4a^3bc^2 & 4a^2b+4a^2c-2ab^2+abc \\ \hline
-\underline{4a^3bc^2} & \qquad +abc \\ \cline{2-2}
+4a^3bc^2 & 4a^2b+4a^2c-2ab^2+2abc-ac^2 \\ \hline
 & \qquad -ac^2 \\ \cline{2-2}
 & 4a^2b+4a^2c-2ab^2+2abc-2ac^2+1 \\
 & \qquad +1
\end{array}
$$

accade sempre quando si fa uso dei soli termini superiori; perchè allora i monomi che risultano sono in ordine discendente di superiorità, essendo tali i termini superiori del radicando e dei resti successivi.

È evidente infatti che il termine superiore del primo resto $A - s^n$ è inferiore a quello di A. Inoltre se, giunti a un resto qualunque $A - C^n$, si calcola un nuovo termine x dividendo il termine superiore di $A - C^n$ per ns^{n-1}, il resto successivo verrà dato da

$$A - (C + x)^n,$$

cioè da

$$(A - C^n) - \left[nC^{n-1}x + \binom{n}{2} C^{n-2}x^2 + \ldots + x^n\right].$$

Ma il termine superiore di $A - C^n$ coincide con quello dell'espressione entro grandi parentesi, che è $ns^{n-1}x$; quindi nella riduzione di $A - (C + x)^n$ questi due termini si distruggono, e il termine superiore fra i rimanenti è inferiore a quello di $A - C^n$.

25. Se l'estrazione di radice viene eseguita coi soli termini inferiori, si prova similmente che i monomi risultanti sono in ordine ascendente di superiorità. E può avvenire che a un certo punto sia impossibile proseguire nel calcolo, come ha luogo per

$$\sqrt[3]{a^2b - 12ab^2 - a^6 + 8b^3};$$

oppure che l'operazione continui senza fine, come accade per

$$\sqrt{1 + 4a^2b^2 - 4a^2bc}.$$

Nel secondo caso l'inesistenza di una radice intera, se non si manifesta prima in qualche altro modo, verrà sempre annunziata dal presentarsi di un termine in cui l'esponente di una lettera supera il valor massimo che questo esponente potrebbe avere nella radice (n. 9); il quale valor massimo può essere preventivamente calcolato per mezzo del n. 22, 2°.

26. Supponiamo finalmente che l'estrazione di radice venga eseguita mediante i termini superiori e inferiori a un tempo. In tal caso sulla inesistenza di una radice intera possono identicamente ripetersi le cose dette nel n. 20 sulla inesistenza del quoziente intero.

G. Nonni.

SUI NUMERI COMPLESSI AD n UNITÀ

Nella presente nota si svolge sommariamente la teoria dei numeri complessi ad n unità, definiti in modo perfettamente analitico, e precisamente come determinati operatori su sistemi ordinati di n numeri reali. Definito il prodotto di più numeri complessi, e dedottene alcune conseguenze, come p. es. la possibile esistenza dei divisori di zero (di Weierstrass), non si procede oltre, perchè nulla vi sarebbe da mutare a quanto si può dire sui numeri complessi definiti come di solito. [1]

1. Chiameremo *sistema* (senz'altro) una successione ordinata di n numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, e scriveremo: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Alle volte ci serviremo della posizione $(\alpha) \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Due sistemi $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ si diranno *eguali*, quando è $\alpha_r = \beta_r$, per $r = 1, 2, \dots, n$. Se sono nulli tutti gli n valori di un sistema, questo si chiamerà *sistema nullo*, e s'indicherà con (0). Inoltre, chiameremo *somma* dei sistemi (α) e (β), il sistema $(\alpha + \beta) \equiv (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots \alpha_n + \beta_n)$. La *somma* di $h > 2$ sistemi, si definisce come per i numeri reali.

2. Fissiamo un sistema ad arbitrio e non nullo, p. es. $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$; lo chiameremo *fondamentale*. Conveniamo, inoltre, di *non* indicare alcun numero reale, con le lettere $i_1, i_2, \dots, i_n$. Il simbolo mi_r, che dunque fin ora non ha alcun significato, ci rappresenterà l'*operatore* definito dalla seguente eguaglianza, ove (β) è un sistema qualunque:

$$mi_r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (m\beta_{r1}, m\beta_{r2}, \dots, m\beta_{rn}).$$

[1] Per un'esposizione della teoria dei numeri complessi, vedi p. es. M. Cipolla, *Teoria dei numeri complessi ad N unità*. "Periodico di Matematica", a. XX.

indicando con $\beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rn}$ una determinata permutazione dei numeri reali $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, alcuni dei quali mutati di segno. Sia la permutazione che i numeri di (β) da mutare di segno, sono assegnati soltanto e in modo preciso dall'indice r della lettera i_r; in modo, inoltre, che per $(\beta) = (\alpha)$, sia il determinante

$$\Delta(\beta) \equiv \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} \ldots \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} \ldots \beta_{n2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \beta_{1n} & \beta_{2n} \ldots \beta_{nn} \end{vmatrix} \text{ diverso da zero.}$$

Per brevità porremo $1i_r = i_r$, e $-1i_r = -i_r$.

Gli operatori mi_r si chiameranno *numeri* ad una (sola) unità; in particolare l'operatore i_r sarà chiamato *unità* d'indice r. Abbiamo così n unità. (¹)

3. Posto

$$(m_1i_1 + m_2i_2 + \ldots + m_ni_n)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) =$$
$$= m_1i_1(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) + m_2i_2(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) + \ldots + m_ni_n(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), \quad (1)$$

avremo:

$$\begin{aligned}(m_1i_1 + m_2i_2 + \ldots + m_ni_n)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) &= (m_1\beta_{11}, m_1\beta_{12}, \ldots, m_1\beta_{1n}) + \\ &+ (m_2\beta_{21}, m_2\beta_{22}, \ldots, m_2\beta_{2n}) + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (m_n\beta_{n1}, m_n\beta_{n2}, \ldots, m_n\beta_{nn}) = \\ = (\Sigma m_r\beta_{r1}, \Sigma m_r\beta_{r2}, \ldots, \Sigma m_r\beta_{rn}).\end{aligned}$$

L'operatore $m_1i_1 + m_2i_2 + \ldots + m_ni_n$ si chiamerà *numero complesso* alle n unità $i_1, i_2, \ldots, i_n$, e sarà indicato brevemente con Σm_ri_r. La (1) dunque si può scrivere:

$$(\Sigma m_ri_r)(\beta) = \Sigma[m_ri_r(\beta)]. \text{ (²)}$$

Per $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$, si ha il numero complesso $\Sigma 0 i_r$, che sarà chiamato *zero* e indicato con 0; esso soddisfa all'eguaglianza: $(\Sigma 0i_r)(\beta) = (0)$, ove (0) è il sistema nullo, e (β) un sistema quale si voglia.

È chiaro che si può scrivere:

$$(\Sigma m_ri_r)(\beta) + (\Sigma m_ri_r)(\gamma) + \ldots = (\Sigma m_ri_r)(\beta + \gamma + \ldots).$$

Inoltre è facilissimo dimostrare che se alcuni dei numeri $m_1, m_2, \ldots, m_n$, sono nulli, allora sarà $(\Sigma m_ri_r)(\beta) = \Sigma[\overline{m_ri_r}(\beta)]$, indicando con $\Sigma[\overline{m_ri_r}(\beta)]$ il secondo membro della (1) dopo aver soppressi i sim-

(¹) Più in generale, potrebbero $\beta_{r1}, \beta_{r2}, \ldots, \beta_{rn}$ indicare determinate funzioni reali e monodrome dei numeri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. In tale ipotesi si potrebbe seguire una via analoga a quella che faremo.

(²) Se è $(\Sigma m_ri_r)(\beta) = (\gamma)$, diremo, alle volte, che il sistema (γ) si è ottenuto *applicando* al sistema (β) il numero complesso Σm_ri_r.

boli $m_r i_r (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ con $m_r = 0$. L'operatore $\Sigma \overline{m_r i_r}$, definito in modo analogo all'altro $\Sigma m_r i_r$, ove l'indice r si estende soltanto ad $n' \leqslant n$ dei simboli $m_1 i_1, m_2 i_2, \ldots, m_n i_n$, si chiama *numero complesso* ad n' unità. Esso dunque è definito dall'eguaglianza: (¹)

$$(\Sigma \overline{m_r i_r})(\beta) = \Sigma [\overline{m_r i_r}(\beta)].$$

4. Indicando, come si disse (n. 2), con (α) il sistema fondamentale, supponiamo che sia

$$(\Sigma m_r i_r)(\alpha) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n).$$

Allora avremo le seguenti n relazioni:

$$\begin{cases} m_1 \alpha_{11} + m_2 \alpha_{21} + \ldots + m_n \alpha_{n1} = \beta_1 \\ m_1 \alpha_{12} + m_2 \alpha_{22} + \ldots + m_n \alpha_{n2} = \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m_1 \alpha_{1n} + m_2 \alpha_{2n} + \ldots + m_n \alpha_{nn} = \beta_n \end{cases}$$

le quali possono essere considerate come n equazioni lineari alle n incognite $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Esse formano un sistema di equazioni il cui determinante è $\Delta(\alpha)$, che (n. 2) è diverso da zero.

Ne segue che i numeri $m_1, m_2, \ldots, m_n$, sono perfettamente individuati dagli altri $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. Affinchè, dunque, sia nullo il sistema (β), è necessario e sufficiente che sia $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$.

Se, in particolare, è $\Delta(\gamma)$ diverso da zero, non soltanto per $(\gamma) = (\alpha)$, ma anche per (γ) sistema *qualsiasi*, (²) purchè diverso dal sistema nullo, allora applicando ad un sistema non nullo e ai sistemi che si ottengono, successivamente numeri complessi diversi da zero, si otterranno sempre sistemi non nulli.

5. Indicando con $\Sigma \overline{a_r i_r}$ e $\Sigma \overline{b_r i_r}$ due numeri complessi rispettivamente ad $h \leqslant n$ e $k \leqslant n$ unità, si abbia

$$(\Sigma \overline{a_r i_r})(\alpha) = (\Sigma \overline{b_r i_r})(\alpha),$$

essendo (α) il sistema fondamentale.

Per quanto si osservò alla fine del n. 3, avremo

$$\Sigma (a_r i_r)(\alpha) = (\Sigma b_r i_r)(\alpha), \tag{2}$$

indicando con $\Sigma a_r i_r$ e $\Sigma b_r i_r$ i numeri complessi ad n unità ottenuti sostituendo in $\Sigma \overline{a_r i_r}$ e $\Sigma \overline{b_r i_r}$ con $0 i_s$ ogni i_s che manchi.

I numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono (n. 4) perfettamente individuati in virtù della (2), una volta dati i numeri $b_1, b_2, \ldots, b_n$; ed è, evidentemente, $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Viceversa è chiaro che da queste eguaglianze si deduce la (2).

(¹) I numeri complessi che qui si considerano, hanno solo le prime proprietà comuni con quelli considerati nel *Formulario* (t. V, pag. 144); le operazioni i_r sono nuove.

(²) In tale ipotesi dunque n è certamente un numero *pari*.

Se, in particolare, è $\Delta(\gamma)$ diverso da zero *qualunque* sia il sistema (γ), purchè non nullo, allora dall'eguaglianza

$$(\Sigma a_r i_r)(\beta) = (\Sigma b_r i_r)(\beta)$$

si deduce: $(\Sigma a_r i_r)(\gamma) = (\Sigma b_r i_r)(\gamma)$; e viceversa. In questa medesima ipotesi, è chiaro che il simile si può dire per i numeri complessi $\Sigma \overline{a_r i_r}$ e $\Sigma \overline{b_r i_r}$.

Due numeri complessi $\Sigma \overline{a_r i_r}$ e $\Sigma \overline{b_r i_r}$ si diranno *eguali*, e si scriverà $\Sigma \overline{a_r i_r} = \Sigma \overline{b_r i_r}$, quando sia $(\Sigma \overline{a_r i_r})(\alpha) = (\Sigma \overline{b_r i_r})(\alpha)$, essendo, al solito, (α) il sistema fondamentale.

Osserviamo che evidentemente è $\Sigma \overline{a_r i_r} = \Sigma a_r i_r$, indicando col secondo membro il numero complesso ad n unità, ottenuto sostituendo in $\Sigma \overline{a_r i_r}$ con $0 i_s$ ogni i_s che manchi. Dunque d'ora in poi considereremo soltanto numeri complessi ad n unità.

Si noti che se è $\Sigma a_r i_r = \Sigma b_r i_r$, sarà $a_r = b_r$, per $r = 1, 2, \ldots, n$.

Evidentemente l'*eguaglianza* dei numeri complessi, gode delle note tre leggi: riflessiva, simmetrica e transitiva.

Siccome è $(\Sigma 0 i_r)(\alpha) = 0$, segue che condizione necessaria e sufficiente affinchè sia $\Sigma a_r i_r = 0$, è che sia $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Osserviamo infine che le n unità $i_1, i_2, \ldots, i_n$, sono linearmente indipendenti.

6. Esempi nei quali è $\Delta(\gamma)$ diverso da zero qualunque siano i valori di $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, purchè non tutti nulli, sono i due seguenti. In ciascuno di questi, due numeri saranno eguali, dunque (n. 5), quando applicati ad uno stesso sistema non nullo *arbitrario*, lo trasformano in uno stesso sistema.

a) Pongasi

$$i_1(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \quad \text{e} \quad i_2(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_2, \alpha_1).$$

Si ha:

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Facendo $i_1 = 1$, e $i_2 = i$, si ottengono, come vedremo, gli ordinari numeri complessi. (1)

b) Pongasi:

$$\begin{aligned}
i_1(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) &= (\ \ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4) \\
i_2(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) &= (-\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_4 \ -\alpha_3) \\
i_3(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) &= (-\alpha_3 \ -\alpha_4 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2) \\
i_4(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4) &= (-\alpha_4 \quad \alpha_3 \ -\alpha_2 \quad \alpha_1).
\end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_4 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_4 & -\alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)^2.$$

(1) Una rigorosa *Teoria elementare analitica dei numeri immaginari* scrisse S. CATANIA, nel volume IV, serie III di questo "Periodico".

Ponendo $i_1 = 1$, $i_4 = i_1$, $i_3 = i_2$ e $i_3 = i_3$, si ottengono, come vedremo, i quaternioni di Hamilton.

7. *Se è*

$$(\Sigma a_r i_r)(\alpha) + (\Sigma b_r i_r)(\alpha) = (\Sigma c_r i_r)(\alpha), \tag{3}$$

sarà $c_r = a_r + b_r$, con $r = 1, 2, \ldots, n$; *e viceversa.*

Infatti si ha (n. 3 e 1):

$$\begin{aligned}(\Sigma a_r i_r)(\alpha) + (\Sigma b_r i_r)(\alpha) &= \\ &= (\Sigma a_r \alpha_{r1} + \Sigma b_r \alpha_{r1},\ \Sigma a_r \alpha_{r2} + \Sigma b_r \alpha_{r2}, \ldots, \Sigma a_r \alpha_{rn} + \Sigma b_r \alpha_{rn}) = \\ &= (\Sigma (a_r + b_r)\alpha_{r1},\ \Sigma (a_r + b_r)\alpha_{r2}, \ldots, \Sigma (a_r + b_r)\alpha_{rn});\end{aligned}$$

ne segue per la (3):

$$\begin{aligned}(\Sigma (a_r + b_r)\alpha_{r1},\ \Sigma (a_r + b_r)\alpha_{r2}, \ldots, \Sigma (a_r + b_r)\alpha_{rn}) &= \\ &= (\Sigma c_r \alpha_{r1},\ \Sigma c_r \alpha_{r2}, \ldots, \Sigma c_r \alpha_{rn});\end{aligned}$$

e di conseguenza (n. 5):

$$\begin{cases}(a_1 + b_1)\alpha_{11} + (a_2 + b_2)\alpha_{21} + \ldots + (a_n + b_n)\alpha_{n1} = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{21} + \ldots + c_n\alpha_{n1} \\ (a_1 + b_1)\alpha_{12} + (a_2 + b_2)\alpha_{22} + \ldots + (a_n + b_n)\alpha_{n2} = c_1\alpha_{12} + c_2\alpha_{22} + \ldots + c_n\alpha_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_1 + b_1)\alpha_{1n} + (a_2 + b_2)\alpha_{2n} + \ldots + (a_n + b_n)\alpha_{nn} = c_1\alpha_{1n} + c_2\alpha_{2n} + \ldots + c_n\alpha_{nn},\end{cases}$$

cioè abbiamo un sistema di n equazioni lineari alle n incognite $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Il determinante di questo sistema è $\Delta(\alpha)$, che è (n. 2) diverso da zero, onde avremo $c_r = a_r + b_r$, con $r = 1, 2, \ldots, n$. È poi evidente che da queste n eguaglianze segue la (3).

Il numero complesso $\Sigma c_r i_r$ che soddisfa alla (3), si chiama *somma* dei due numeri complessi $\Sigma a_r i_r$ e $\Sigma b_r i_r$, e si scriverà:

$$\Sigma a_r i_r + \Sigma b_r i_r = \Sigma c_r i_r.$$

È chiaro che dalla (3) segue, in virtù di quanto ora si è dimostrato, quest'altra eguaglianza:

$$(\Sigma a_r i_r)(\beta) + (\Sigma b_r i_r)(\beta) = (\Sigma c_r i_r)(\beta). \tag{3'}$$

Dalla (3') si deduce la (3), se è $\Delta(\beta)$ diverso da zero. In particolare, dunque, se è $\Delta(\alpha)$ diverso da zero qualunque siano i valori di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, purchè non tutti nulli, si può dire che sarà $\Sigma c_r i_r = \Sigma a_r i_r + \Sigma b_r i_r$, quando è

$$(\Sigma c_r i_r)(\delta) = (\Sigma a_r i_r)(\delta) + (\Sigma b_r i_r)(\delta),$$

indicando con (δ) un sistema completamente arbitrario, ma non nullo.

Definendo come per i numeri reali, la *somma* di $h > 2$ numeri complessi, è chiaro che in ogni caso la somma è *uniforme, commutativa* e *associativa*. Inoltre evidentemente dalla $\Sigma a_r i_r = \Sigma b_r i_r$, si deduce $(\Sigma a_r i_r) + (\Sigma m_r i_r) = (\Sigma b_r i_r) + (\Sigma m_r i_r)$.

8. Da quanto si disse nel numero precedente, risulta che dati due numeri complessi $\Sigma a_r i_r$ e $\Sigma b_r i_r$, esiste uno ed un sol numero complesso $\Sigma d_r i_r$, tale che si abbia $\Sigma a_r i_r = \Sigma b_r i_r + \Sigma d_r i_r$. Questo numero

$\Sigma d_r i_r$ si chiama *differenza* dei due numeri complessi $\Sigma a_r i_r$ e $\Sigma b_r i_r$ (nell'ordine scritto), e si scrive:

$$\Sigma d_r i_r = \Sigma a_r i_r - \Sigma b_r i_r .$$

Evidentemente si ha: $d_r = a_r - b_r$, con $r = 1, 2, \ldots, n$.

9. Sia

$$i_s i_r (\alpha) = (x_1 i_1 + x_2 i_2 + \ldots + x_n i_n)(\alpha), \tag{4}$$

ove si è posto

$$i_s i_r (\alpha) = i_s [i_r (\alpha)] = i_s (\alpha_{r1}, \alpha_{r2}, \ldots, \alpha_{rn}) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha_n).$$

Avremo dunque, in virtù della (4):

$$\begin{cases} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{21} + \ldots + x_n\alpha_{n1} = \alpha'_1 \\ x_1\alpha_{12} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_n\alpha_{n2} = \alpha'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1\alpha_{1n} + x_2\alpha_{2n} + \ldots + x_n\alpha_{nn} = \alpha'_n \end{cases}$$

cioè un sistema di n equazioni lineari alle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ma il determinante di questo è $\Delta(\alpha)$ che è (n. 2) diverso da zero, dunque per le $x_1, x_2, \ldots, x_n$ esisterà uno ed un sol sistema di valori, tali da soddisfare la (4). Il numero complesso che soddisfa alla (4), sarà chiamato *prodotto* delle unità i_s e i_r (nell'ordine scritto), e si indicherà con i_{sr}; scriveremo $i_{sr} = i_s i_r$.

In generale il numero complesso i_{sr} non è eguale, a prescindere dal segno, ad alcuna delle n unità $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Ciò però avviene in particolare, p. es. per i numeri complessi del n. 6: e precisamente per i numeri di a) è [1]: $i_1^2 = i_1$, $i_2^2 = -i_1$, $i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_2$, e quindi questi numeri, come si disse (n. 6), coincidono con gli ordinari numeri complessi.

Per i numeri di b) si ha:

$$i_1^2 = i_1, \quad i_2^2 = i_3^2 = i_4^2 = -i_1, \quad i_2 i_3 = -i_3 i_2 = -i_4, \quad i_3 i_4 = -i_4 i_3 = -i_2,$$
$$i_4 i_2 = -i_2 i_4 = -i_3:$$

questi numeri dunque coincidono (n. 6) coi quaternioni di HAMILTON.

Un altro sistema di numeri complessi, tali che il prodotto di due unità, è eguale, a prescindere dal segno, ad un'altra unità, è quello *definito* come segue:

$$\begin{array}{llrrrrrrrrl}
i_1 & (\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7\alpha_8) = (& \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 &) \\
i_2 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_8 & -\alpha_7 &) \\
i_3 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_7 & -\alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 &) \\
i_4 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_8 & \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_5 &) \\
i_5 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 &) \\
i_6 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_8 & -\alpha_7 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_4 & -\alpha_3 &) \\
i_7 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_7 & -\alpha_8 & \alpha_5 & \alpha_6 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 &) \\
i_8 & (\qquad\quad " \qquad\quad) = (& -\alpha_8 & \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_5 & -\alpha_4 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 &).
\end{array}$$

---

[1] Si pone: $i_1^2 = i_1 i_1$, $i_2^2 = i_2 i_2$, ecc.

Si ha:

$$i_1^2 = i_5^2 = i_1, \qquad i_2^2 = i_3^2 = i_4^2 = i_6^2 = i_7^2 = i_8^2 = -i_1.$$

Inoltre:

$$\begin{array}{lll}
-i_2 i_3 = i_3 i_2 = i_4 & & \\
i_2 i_4 = -i_4 i_2 = i_3 & -i_3 i_4 = i_4 i_3 = i_2 & \\
i_2 i_5 = i_5 i_2 = i_6 & i_3 i_5 = i_5 i_3 = i_7 & i_4 i_5 = i_5 i_4 = i_8 \\
i_2 i_6 = i_6 i_2 = -i_5 & i_3 i_6 = -i_6 i_3 = i_8 & -i_4 i_6 = i_6 i_4 = i_7 \\
-i_2 i_7 = i_7 i_2 = i_8 & i_3 i_7 = i_7 i_3 = -i_5 & i_4 i_7 = -i_7 i_4 = i_6 \\
i_2 i_8 = -i_8 i_2 = i_7 & -i_3 i_8 = i_8 i_3 = i_6 & i_4 i_8 = i_8 i_4 = -i_5 \\
i_5 i_6 = i_6 i_5 = i_2 & & \\
i_5 i_7 = i_7 i_5 = i_3 & -i_6 i_7 = i_7 i_6 = i_4 & \\
i_5 i_8 = i_8 i_5 = i_4 & i_6 i_8 = -i_8 i_6 = i_3 & -i_7 i_8 = i_8 i_7 = i_2 .
\end{array}$$

10. Pongasi

$$(\Sigma a_r i_r)(\Sigma b_r i_r)(\alpha) = (\Sigma a_r i_r)[\Sigma(b_r i_r)(\alpha)] = (\Sigma a_r i_r)(\Sigma b_r \alpha_{r1}, \Sigma b_r \alpha_{r2}, \ldots, \Sigma b_r \alpha_{rn}).$$

Abbiamo:

$$(\Sigma b_r i_r)(\alpha) = b_1 i_1(\alpha) + b_2 i_2(\alpha) + \ldots + b_n i_n(\alpha),$$

e per un'osservazione fatta nel n. 3, si ha:

$$\begin{aligned}
(\Sigma a_r i_r)(\Sigma b_r i_r)(\alpha) &= (\Sigma a_r i_r)[b_1 i_1(\alpha)] + (\Sigma a_r i_r)[b_2 i_2(\alpha)] + \ldots + (\Sigma a_r i_r)[b_n i_n(\alpha)] = \\
&= a_1 i_1 [b_1 i_1(\alpha)] + a_2 i_2 [b_1 i_1(\alpha)] + \ldots + a_n i_n [b_1 i_1(\alpha)] + \\
&+ a_1 i_1 [b_2 i_2(\alpha)] + a_2 i_2 [b_2 i_2(\alpha)] + \ldots + a_n i_n [b_2 i_2(\alpha)] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ a_1 i_1 [b_n i_n(\alpha)] + a_2 i_2 [b_n i_n(\alpha)] + \ldots + a_n i_n [b_n i_n(\alpha)] = \\
&= a_1 b_1 i_1 [i_1(\alpha)] + a_2 b_1 i_2 [i_1(\alpha)] + \ldots + a_n b_1 i_n [i_1(\alpha)] + \\
&+ a_1 b_2 i_1 [i_2(\alpha)] + a_2 b_2 i_2 [i_2(\alpha)] + \ldots + a_n b_2 i_n [i_2(\alpha)] + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ a_1 b_n i_1 [i_n(\alpha)] + a_2 b_n i_2 [i_n(\alpha)] + \ldots + a_n b_n i_n [i_n(\alpha)].
\end{aligned}$$

Dunque:

$$\begin{aligned}
(\Sigma a_r i_r)(\Sigma b_r i_r)(\alpha) &= a_1 b_1 i_{11}(\alpha) + a_2 b_1 i_{21}(\alpha) + \ldots + a_n b_1 i_{n1}(\alpha) + \\
&+ a_1 b_2 i_{12}(\alpha) + a_2 b_2 i_{22}(\alpha) + \ldots + a_n b_2 i_{n2}(\alpha) + \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
&+ a_1 b_n i_{1n}(\alpha) + a_2 b_n i_{2n}(\alpha) + \ldots + a_n b_n i_{nn}(\alpha).
\end{aligned}$$

Ed ora, dicendo *prodotto* di due numeri complessi $\Sigma a_r i_r$ e $\Sigma b_r i_r$ (nell'ordine scritto), un terzo numero complesso $\Sigma p_r i_r$ tale che sia $(\Sigma a_r i_r)(\Sigma b_r i_r)(\alpha) = (\Sigma p_r i_r)(\alpha)$, possiamo concludere che il prodotto di due numeri complessi esiste sempre, è unico, e si ottiene applicando [1] il noto algoritmo dei numeri reali, coll'avvertenza di sostituire nel risultato, in tal modo ottenuto, il numero complesso i_{rs} al simbolo $i_r i_s$.

11. Il *prodotto* di $h > 2$ numeri complessi, si definisce, come pei numeri reali.

---

[1] Tenendo conto dell'*ordine* dei fattori.

Si noti che se è $\Delta(\beta)$ diverso da zero *qualunque* siano i valori (non tutti nulli) di $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, allora (n. 4) condizione necessaria e sufficiente per l'annullamento di un prodotto è che sia nullo uno (almeno) dei fattori. Così dunque avviene, p. es., per i numeri complessi ordinari, e pei quaternioni. Ma se l'ipotesi ora detta non è verificata, se cioè può essere $\Delta(\beta) = 0$, per valori particolari (non tutti nulli) di $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, allora un prodotto può essere nullo senza che tale sia alcuno dei fattori.

Consideriamo, p. es., i numeri complessi le unità dei quali siano definiti come segue:

$$\begin{aligned} i_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (-\alpha_1, \quad \alpha_3, \quad \alpha_2) \\ i_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\quad \alpha_3, -\alpha_2, \quad \alpha_1) \\ i_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= (\quad \alpha_2, \quad \alpha_1, -\alpha_3). \end{aligned}$$

Si ha:

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & -\alpha_3 \end{vmatrix} = \alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Facendo, p. es., $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, cioè prendendo $(2, 1, 1)$ come sistema fondamentale, abbiamo:

$$(-3i_1 + i_2 - i_3)(2, 1, 1) = (6, -6, 0),$$

e poi:

$$(i_1 + i_2 - i_3)(6, -6, 0) = (0, 0, 0).$$

Ne segue:

$$(i_1 + i_2 - i_3)(-3i_1 + i_2 - i_3)(2, 1, 1) = (0, 0, 0),$$

cioè

$$(i_1 + i_2 - i_3)(-3i_1 + i_2 - i_3) = 0. \tag{5}$$

Si ha:

$$\begin{array}{lll} i_1 i_2 = \frac{1}{2} i_1 - \frac{1}{2} i_2 + \frac{1}{2} i_3 & i_1 i_3 = \frac{1}{2} i_1 + \frac{1}{2} i_2 - \frac{1}{2} i_3 & i_2 i_3 = -i_3 \\ i_2 i_1 = -i_1 - \frac{2}{3} i_2 - \frac{1}{3} i_3 & i_3 i_1 = -i_1 - \frac{1}{3} i_2 - \frac{2}{3} i_3 & i_3 i_2 = -i_2 \end{array}$$

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = i_2 + i_3.$$

Ne segue che la (5) si può (n. 10) anche dimostrare, applicando il solito algoritmo dei numeri reali (tenendo però conto dell'ordine dei fattori), e poscia sostituendo ai prodotti i_{rs}, i loro valori dati dalle relazioni ora scritte.

12. Il prodotto dei numeri complessi mentre *non* gode, in generale, delle proprietà *commutativa* e *associativa*, gode della proprietà *distributiva*. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} [\Sigma a_r i_r + \Sigma b_r i_r](\Sigma c_s i_s) &= [\Sigma (a_r + b_r) i_r](\Sigma c_s i_s) = \\ = \sum_{r,s} (a_r + b_r) c_s i_{rs} &= \sum_{r,s} (a_r c_s + b_r c_s) i_{rs} = \sum_{r,s} a_r c_s i_{rs} + \sum_{r,s} b_r c_s i_{rs} = \\ &= (\Sigma a_r i_r)(\Sigma c_s i_s) + (\Sigma b_r i_r)(\Sigma c_s i_s). \end{aligned}$$

Similmente si dimostra essere:

$$(\Sigma c_s i_s)[(\Sigma a_r i_r) + (\Sigma b_r i_r)] = (\Sigma c_s i_s)(\Sigma a_r i_r) + (\Sigma c_s i_s)(\Sigma b_r i_r).$$

13. Ed ora ci sembra superfluo parlare del *quoziente* (*anteriore* o *posteriore*), della *radice* h^{esima}, ecc., di numeri complessi, perchè nulla si dovrebbe mutare alle solite trattazioni. Ci limitiamo di concludere osservando, soltanto, che se è $\Delta(\beta)$ diverso da zero qualunque siano i valori $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, volendo che il prodotto di due numeri complessi, sia indipendente dal particolare sistema fondamentale che si considera, è necessario (e sufficiente) che i_{rs} sia eguale a $\pm i_t$, per qualsivoglia sistema fondamentale. Così è, per i numeri complessi ordinari e pei quaternioni.

G. Marletta.

SULLA DIVISIONE DI UN ANGOLO IN UN NUMERO QUALUNQUE DI PARTI EGUALI

In questa nota io mi propongo di far conoscere alcuni strumenti mediante i quali si può dividere un angolo in un numero arbitrario di parti eguali.

Descrivo anche uno strumento, che ho chiamato *ipociclografo*, mediante il quale si possono costruire le ipocicloidi e le ipocicloidi al-

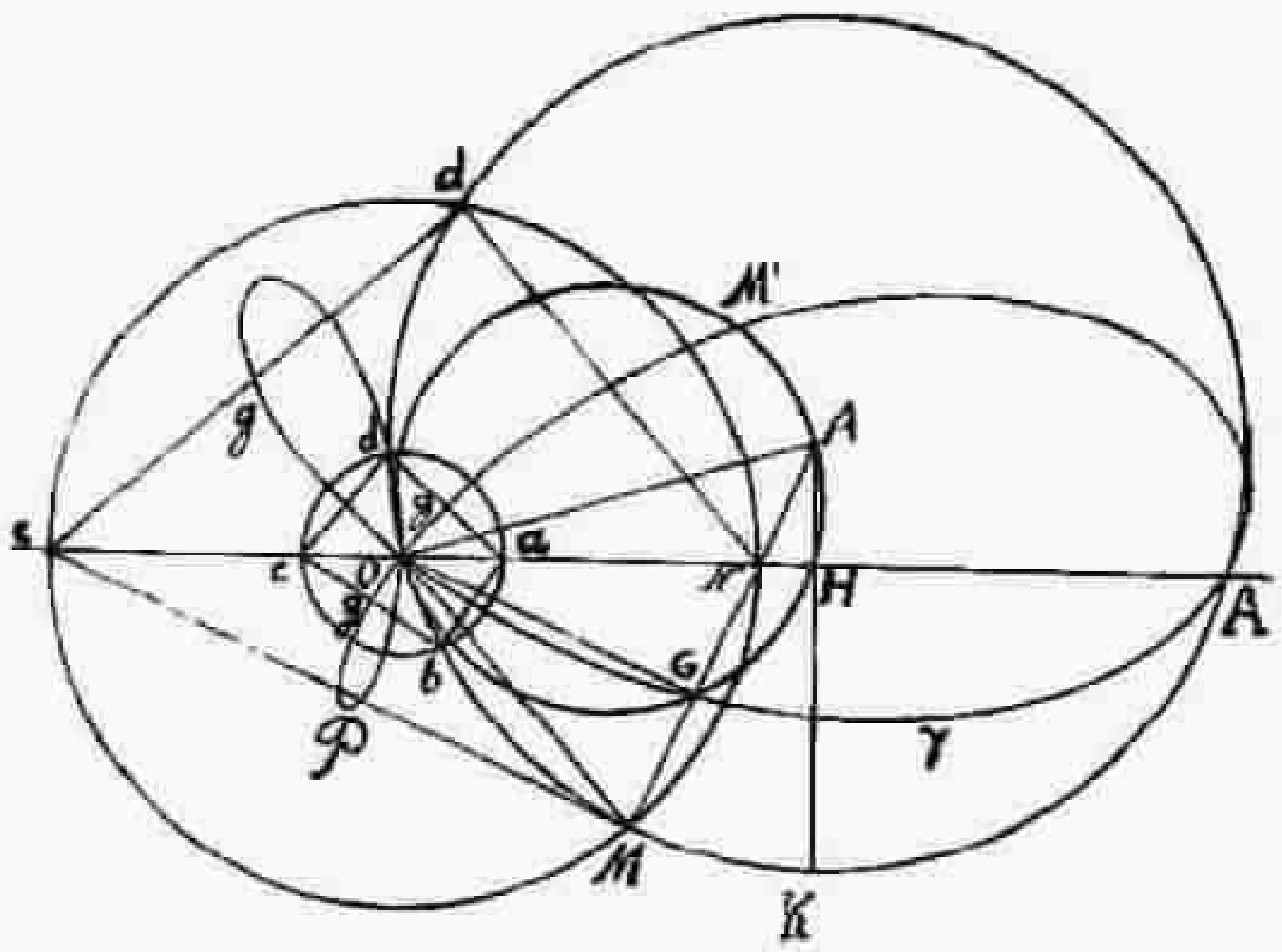


Fig. 1.

lungate od accorciate: queste curve, quando sono algebriche, possono servire utilmente per la suddetta divisione; perciò me ne sono qui occupato, indicando una maniera di servirsene per la divisione degli angoli; anzi ho, per questa ragione, chiamate queste curve *curve settrici*.

1. Se OAH è un angolo qualunque (fig. 1) e col centro A sia descritta una circonferenza a tagliare i suoi lati in O e K e se MON è un triangolo isoscele col vertice in O, con un vertice sull'arco OK, con la base passante per A e con il lato ON perpendicolare ad AK, sarà l'angolo MAK eguale alla terza parte dell'angolo dato.

Infatti dalla figura risulta che sono equiangoli i triangoli AOM ed OMN, da cui segue, che angolo MON = OAM.

Ma se G è il punto medio di MN, MAK = GON, consegue perciò, MAK = $\frac{1}{3}$ OAK.

Se ora col centro in O si descrivono degli archi *ab* compresi fra l'arco OK e la perpendicolare OH, il luogo dei punti medi delle corde *ab* sarà una curva γ, che potrà essere costruita.

Tale curva contiene il punto G il quale deve pure stare sulla circonferenza di diametro AO.

2. La curva luogo dei punti G la possiamo chiamare *trisettrice.*

Una costruzione per punti di questa curva, deriva subito dalla sua definizione, ed è la seguente (fig. 1).

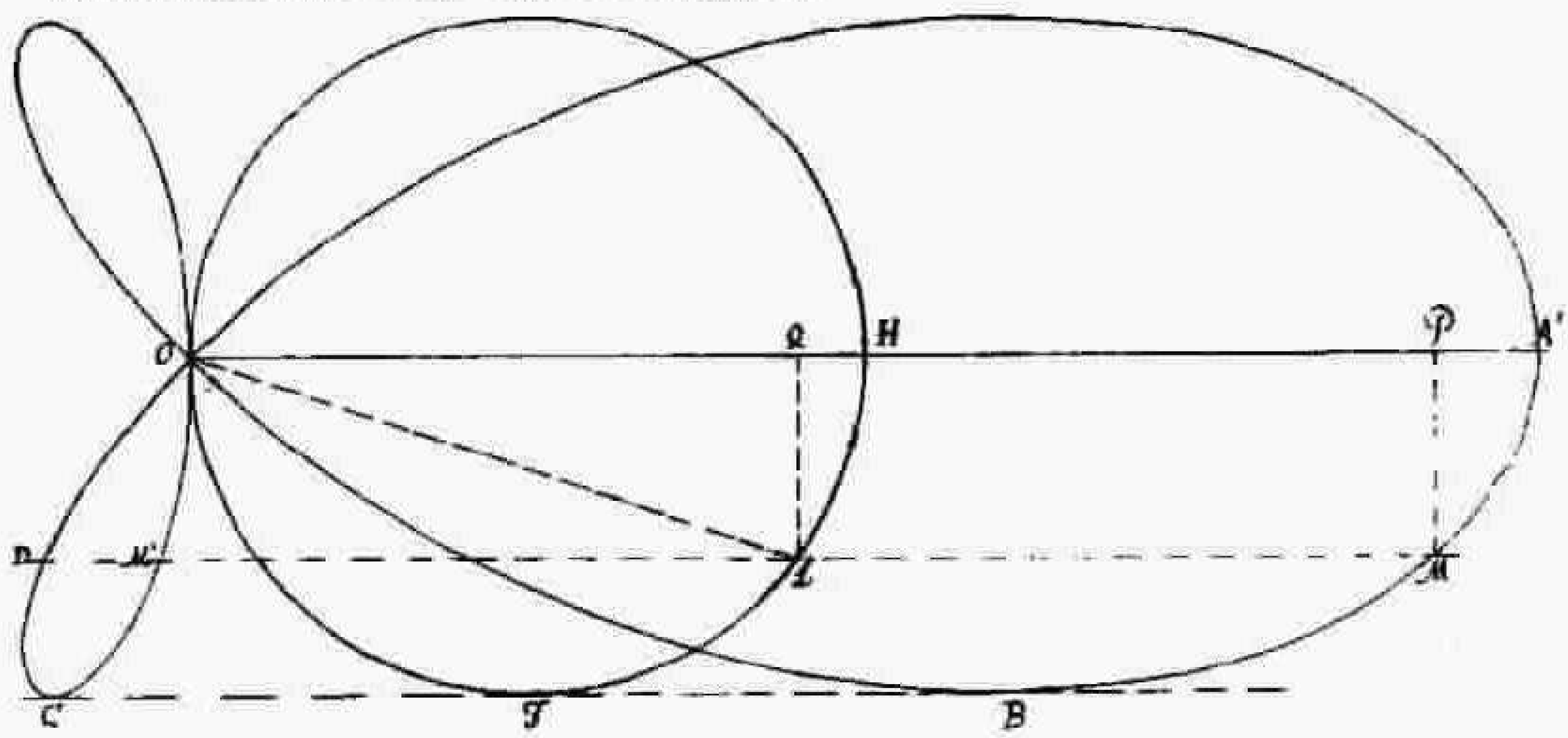


Fig. 2.

Col centro nell'estremo O di una corda OHA' del circolo OMK, si descrivono le circonferenze $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ e si dividono i sistemi di corde *ab*, *bc*, *cd*, *da*; *a'b'*, *b'c'*, *c'd'*, *d'a'*; . . .; per metà. I punti di divisione risultanti determinano la curva in discussione OGγA'M'POQO.

3. Il Bellavitis, cui io comunicai nel 1877 questi miei risultati, dedusse una costruzione della curva più semplice (fig. 2).

Parallelamente al diametro OH di un circolo OILH, si tiri la retta M'LM, e su di essa si prenda LM = LO ed anche dall'altra parte LM' = LO; la curva sarà AMBODC . . . , che ha un punto triplo in O e tre tangenti doppie CIB, ecc.

Si chiami $2u$ l'ampiezza dell'arco circolare OIL e si supponga il raggio del circolo considerato eguale ad $\frac{1}{4}$. Sarà

$$OQ = \tfrac{1}{4}\,(1 - \cos 2u)$$
$$OL = LM = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} u$$
$$QL = PM = \frac{\operatorname{sen} 2u}{4}\,.$$

Quindi l'ascissa

$$x = OP = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}^2 u + \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, u$$

e l'ordinata

$$y = PM = \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\, u\,.\cos u.$$

Dalle quali eliminando u si trova

$$(x^2 + y^2)^2 = x(x^2 - y^2).$$

Di qui si vede, che la curva del 4° ordine, è inoltre bitangente alla retta all'infinito nei due punti (immaginari) ciclici.

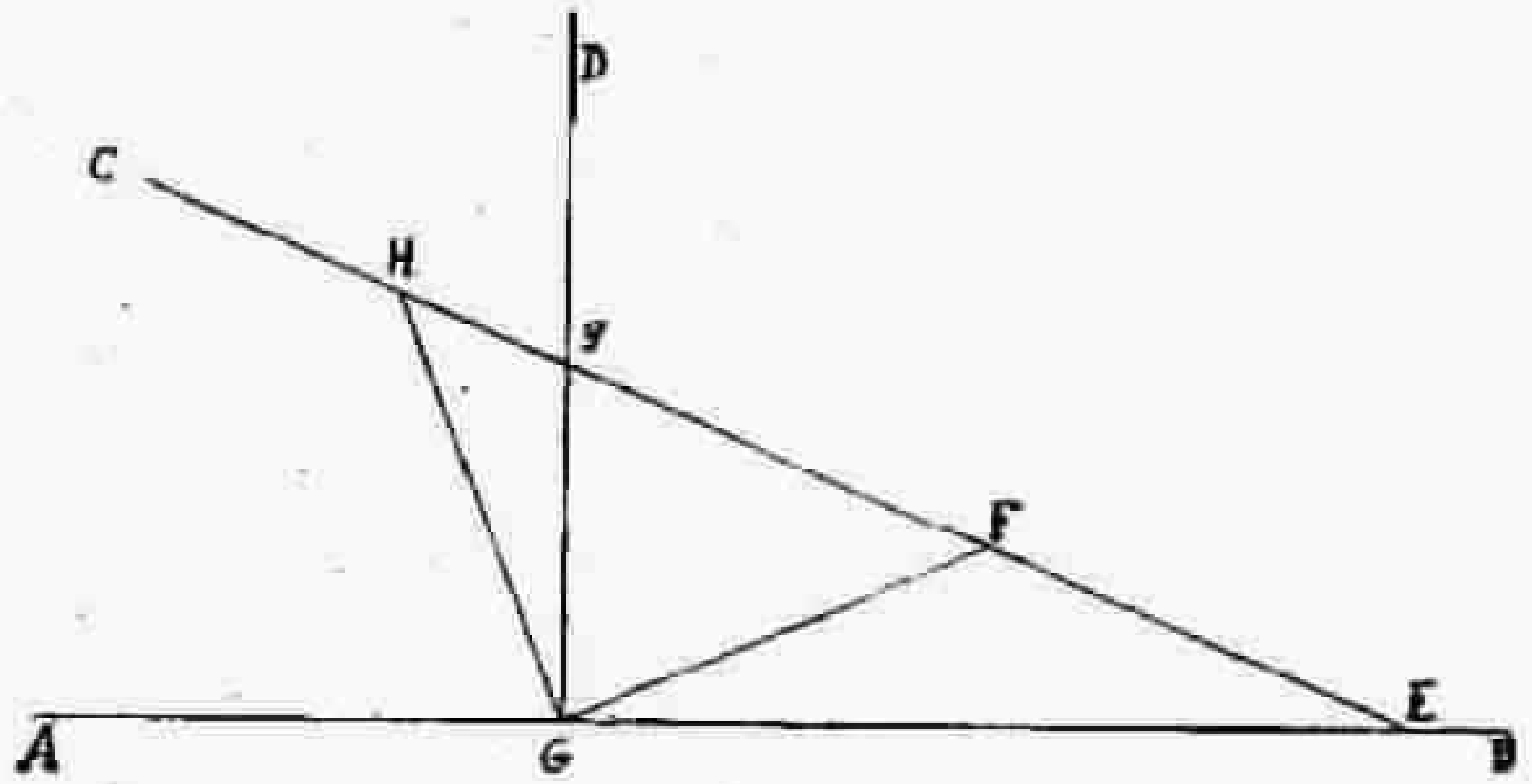


Fig. 3.

4. Costruita la suddetta curva, la trisezione grafica dell'angolo è immediata.

Un'altra maniera di costruire la terza parte di un angolo consiste nell'adoperare una riga nel seguente modo:

Sia dato l'angolo AGH (fig. 3).

Si prolunghi il lato AG verso B e da G si alzi la perpendicolare GD.

Sulla riga EC si prenda EI = 2GH.

Si ponga la riga col suo punto E sopra la GB e col suo punto I sulla GD e si muova tenendo costantemente il punto E sulla GB ed il punto I sulla perpendicolare GD finchè la riga venga a passare per il punto H; si tiri la retta EIH.

Dico che l'angolo GEH = $\frac{1}{3}$ AGH.

Infatti unendo F, punto medio di EI, con G, si formano due triangoli isosceli GFE ed FGH e dalla figura risulta:

$$AGH = GHE + GEH, \qquad \text{ma} \qquad GHE = 2GEH,$$

dunque

$$AGH = 3GEH.$$

5. Si può allo stesso scopo, ed in base alle medesime considerazioni, costruire uno strumento, che possiamo chiamare *compasso trisettore*.

Sieno AE, EC due semirette uscenti dal punto E (fig. 3).

Da E prendasi ad arbitrio il segmento EF sulla retta EC.

Da F come centro e con raggio $=$ EF s'intersechi la retta EA in G e fatto centro in quest'ultimo punto, con la medesima apertura di compasso, si intersechi nuovamente la EC nel punto H.

Si uniscano FG ad HG.

Come si è dimostrato al n. 4, qualunque sia l'angolo AGH, si avrà sempre:

$$AEH = \frac{1}{3} AGH.$$

Ciò posto si può costruire il compasso trisettore nel modo seguente:

Si prendano due asticelle AE, CE e si imperniino a cerniera nel punto E.

A queste si congiungano altre due asticelle GF e GH fra loro eguali ed eguali alla arbitraria EF.

L'estremo F dell'asticella FG è fermo sull'asta CE in modo, che la FG può rotare intorno al punto F, mentre gli estremi G delle due asticelle GF e GH uniti, possono scorrere lungo la AE e l'estremo H della GH può scorrere invece lungo la CE; per cui i triangoli EFG, FGH possono assumere qualunque forma, restando costante la lunghezza dei lati EF, FG nel primo ed FG e GH nel secondo, mentre varia continuamente il terzo lato EG ed FH.

Ponendo FEG $= \delta$ ed AGH $= \alpha$, dalla figura risulta $\alpha = 3\delta$ e quindi chiudendo lo strumento, ossia sovrapponendo le due aste AE, CE si ha:

$$EH = EF + FG + GH = 3EF.$$

Da questa posizione in cui l'angolo $\alpha = 0$, si può far variare quanto si vuole l'angolo α, il cui massimo valore, per altro non può sorpassare i 135°, onde non alterare la semplicità dell'ingegno.

Dato dunque un angolo qualunque α si ha direttamente in FEG la sua terza parte cioè: $\frac{\alpha}{3}$.

Si può costruire un altro modello dello stesso compasso facendo gli estremi G delle asticelle GF e GH fissi al punto G della AE ed il punto E di EC può scorrere sulla AE.

Affinchè gli angoli FEG ed AGH risultino visibili, occorre che le rispettive cerniere siano imperniate fuori centro.

Come si può avere il compasso trisettore, collo stesso principio si possono costruire compassi per la divisione dell'angolo in 2, 4, 5, 6, 7..., parti uguali, limitatamente però ad ampiezze decrescenti dell'angolo dato AGH' oppure CHG in ragione del crescente valore del divisore, come risulta dalla figura 4 in cui si ha

$$EF = FI = IK = \ldots = TH = HG = GH' = \ldots = r.$$

L'angolo AGH' per i divisori $n = 3, 5, 7, \ldots$ dispari
e " CHG " $n = 2, 4, 6, \ldots$ pari.

Come pel divisore $n=3$, il massimo valore dell'angolo dato può essere di 135°, così per $n=2$ si ha 180°; per $n=4$ si giunge a 120° ecc. ciò che si può dedurre da $a=90^\circ \frac{n}{n-1}$ essendo a il massimo angolo che si può dividere per ogni singolo divisore n.

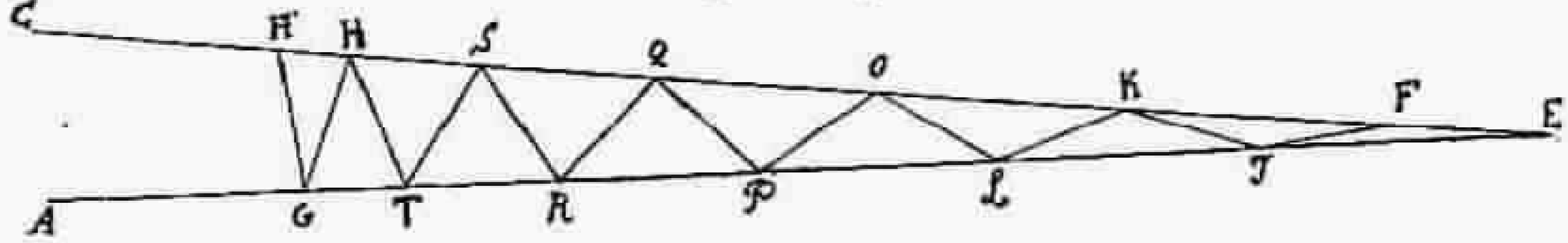


Fig. 4.

Per ogni divisore n lo strumento è formato da tanti segmenti $EF\ldots=r$ quante unità sono contenute in n; da ciò segue che la lunghezza del compasso è eguale ad nr.

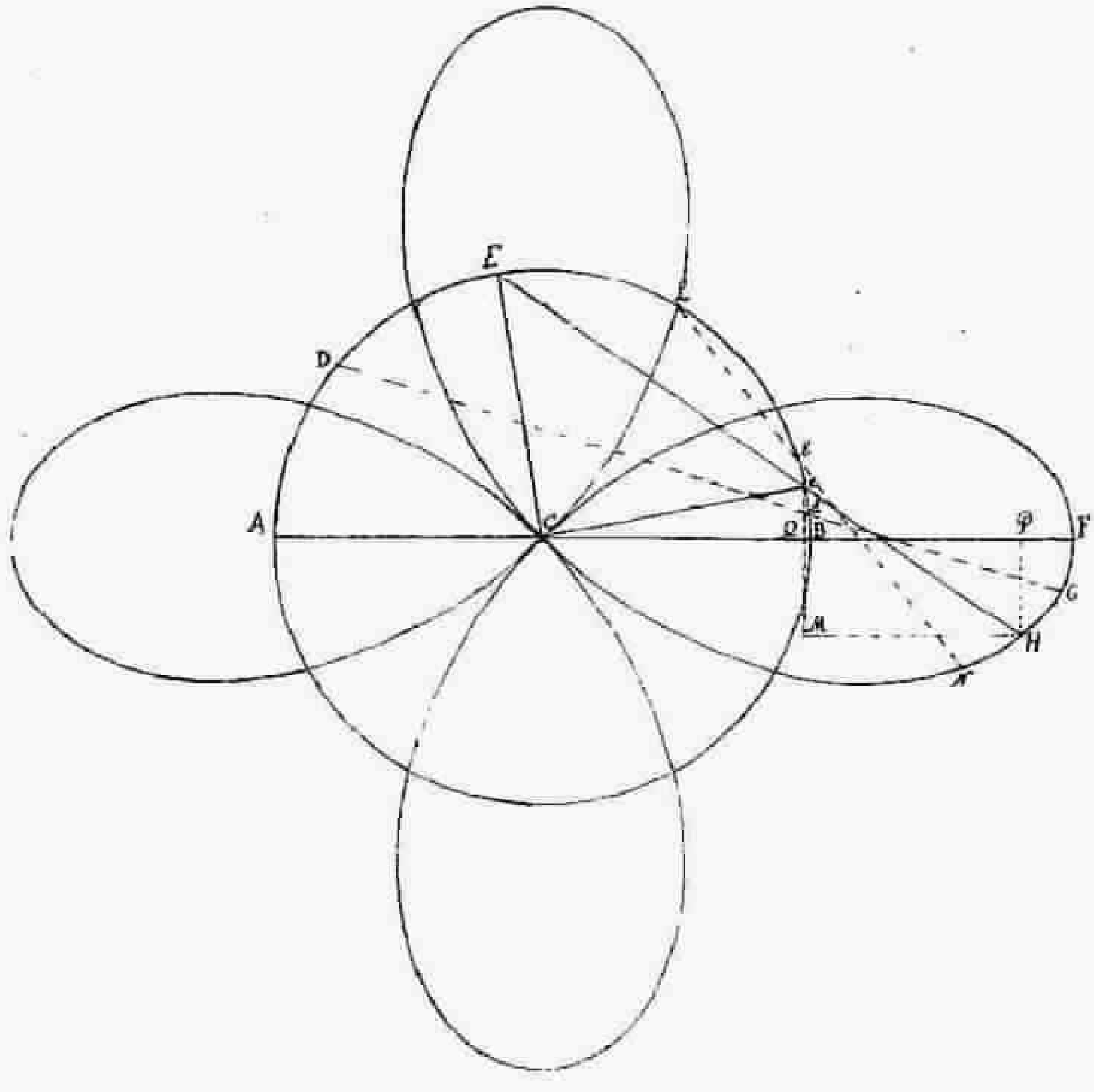


Fig. 5.

6. Le curve, che chiamerò *settrici*, si descrivono per punti nel modo che segue:

Dall'estremo A del diametro AB di un circolo di centro C (fig. 5), si prendano successivamente gli archi AD, DE, EL $\ldots=a$, e dall'estremo B si prendano, in senso inverso, gli archi $Bd, de, el, \ldots = \frac{a}{n}$, essendo n il numero in cui si vuol dividere un angolo dato

$$a = \mathrm{ACD} = \mathrm{DCE} = \mathrm{ECL} = \ldots, \text{ ecc.}$$

Si tirino le rette Dd, Ee, $Ll \ldots$ e dai punti B, d, e, $l \ldots$, si prendano su di esse le lunghezze BF, dG, eH, lN $\ldots = \rho$.

Al decrescere indefinito di a si ottiene una curva chiusa passante per i punti FGHN.... Questa curva, se $r = \rho$, passa più volte pel centro C, se invece $\rho \gtrless r$, a tale singolarità vengono a sostituirsi un certo numero, variabile con n, di punti doppi, diversi da C.

7. Sia la curva FGHC ottenuta come abbiamo detto al n. precedente (fig. 5).

Si unisca Ce, si abbassi eQM perpendicolare ad ABF; da H si abbassi la normale HP e si conduca la HM parallela ad AF.

Fatto $\mathrm{AE} = a$, $\mathrm{BC}e = \frac{a}{n}$ si avrà:

$$\text{angolo } \mathrm{MH}e = \frac{a - \frac{a}{n}}{2} = a\frac{n-1}{2n}$$

$$\mathrm{MH} = \mathrm{QP}; \quad \mathrm{PH} = \mathrm{QM} = e\mathrm{M} - e\mathrm{Q}: \quad \mathrm{C}e = r, \ e\mathrm{H} = \rho$$

$$x = \mathrm{CQ} + \mathrm{QP} \quad \text{ed} \quad y = \mathrm{PH};$$

perciò le equazioni parametriche della nostra curva sono:

$$x = r \,.\, \cos\frac{a}{n} + \rho\cos a\frac{n-1}{2n}$$

$$y = -r\,\mathrm{sen}\frac{a}{n} + \rho\,\mathrm{sen}\, a\frac{n-1}{2n}.$$

Le nostre curve *settrici* sono quindi *ipocicloidi* eventualmente allungate od accorciate.

Si badi che, a prescindere dall'uso cui noi vogliamo fare servire queste curve, il numero n può essere un *numero reale arbitrario*. Se esso è razionale, la relativa curva risulta algebrica (e chiusa), altrimenti si ha una curva trascendente (ed aperta).

8. Fatto $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \infty$ si ha:

per $n = 1$ il circolo di centro B,

per $n = 2$ la curva avendo origine in F, si sviluppa al disopra di AF; ha un punto triplo in C quando $\rho = r$. Se $\rho > r$ si avranno tre punti doppi attorno al centro C; con $\rho < r$ si hanno pure tre punti doppi, finchè si riducono a tre cuspidi; quindi si ottiene una curva convessa e finalmente, quando ρ assume il valore 0, la curva si confonde colla circonferenza primitiva,

per $n = 3$: se $\rho = r$ la curva si cambia nell'asse delle x (trisezione dell'angolo).

Con $\rho \gtreqless r$ si hanno delle ellissi.

Per $n=4$, la curva avendo origine in F, si sviluppa al disotto di AF, come avviene per tutte le curve in cui $n>3$; ha un punto quintuplo in C sempre quando $\rho=r$. Costruita la curva con $\rho=\frac{r}{2}$, la figura prende la forma di una stella di mare (pentagono intrecciato).

Per $n=5$ la curva si comporta come per $n=2$ formando punto triplo al centro o tre punti doppi attorno a C secondo il valore di ρ.

Per $n=6$, punto multiplo $=7$ quando $\rho=r$. Se $\rho \gtreqless r$ si formano sette punti doppi principali ed altri sette punti doppi. L'insieme ha l'aspetto di un poligono intrecciato.

Per $n=$	7,	$\rho=r$	il punto C	ha la moltiplicità	4
„	8	„	„	„	9
„	9	„	„	„	5
„	10	„	„	„	11
„	11	„	„	„	6, ecc.

In generale, poichè le due equazioni

$$\cos\frac{a}{n}+\cos a\,\frac{n-1}{2n}=0$$

$$-\operatorname{sen}\frac{a}{n}+\operatorname{sen} a\,\frac{n-1}{2n}=0$$

ammettono esclusivamente le soluzioni comuni:

$$a=\frac{2n}{n+1}\pi+\frac{2kn}{a+1}2\pi,$$

con k intero arbitrario, si deduce la seguente legge (sempre nella ipotesi $r=\rho$):

Per n uguale ad un numero intero dispari, il punto C è multiplo secondo il numero $\frac{n+1}{2}$.

Per n uguale ad un numero intero pari, il punto C è multiplo secondo il numero $n+1$.

9. La prima applicazione delle curve settrici, la cui idea a me nacque da quella dello strumento per la divisione di un angolo in un numero qualunque di parti eguali, è naturalmente per la costruzione dello stesso, che chiameremo *gonisettore* (fig. 6). Questo apparecchio può essere costruito nel modo seguente:

Un'asticella AC porta di sopra un semicerchio ADB e di sotto un'appendice, che diremo *piastra*, sulla quale vanno disegnate le curve settrici, che serviranno alla divisione di un angolo dato in n parti eguali, in cui $n=5, 7, 11, 13, 17\ldots$ numeri primi, quanti la pratica richiede, come si è detto al n. 6.

La piastra può anche contenere tutte quelle altre curve volute dalla pratica applicazione dell'ingegno, come per es. $n=\frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ ecc. numeri frazionari ed altri che fossero reputati utili.

Per rendere evidenti le diverse curve, le loro origini sono distinte una dall'altra, assumendo nel descriverle un raggio ρ particolare per ciascuna.

Sicchè se per tracciare la curva in cui $n=\frac{7}{2}$ si prende $\rho=100$ mm., per $n=\frac{9}{2}$ si assumerà $\rho=102$ mm., per $n=5$ sarà $\rho=104$ mm. per $n=\frac{11}{2}$ avremo $\rho=106$ mm., ... per $n=7$ dovrà farsi $\rho=110$ mm. e così di seguito, come è accennato nella figura.

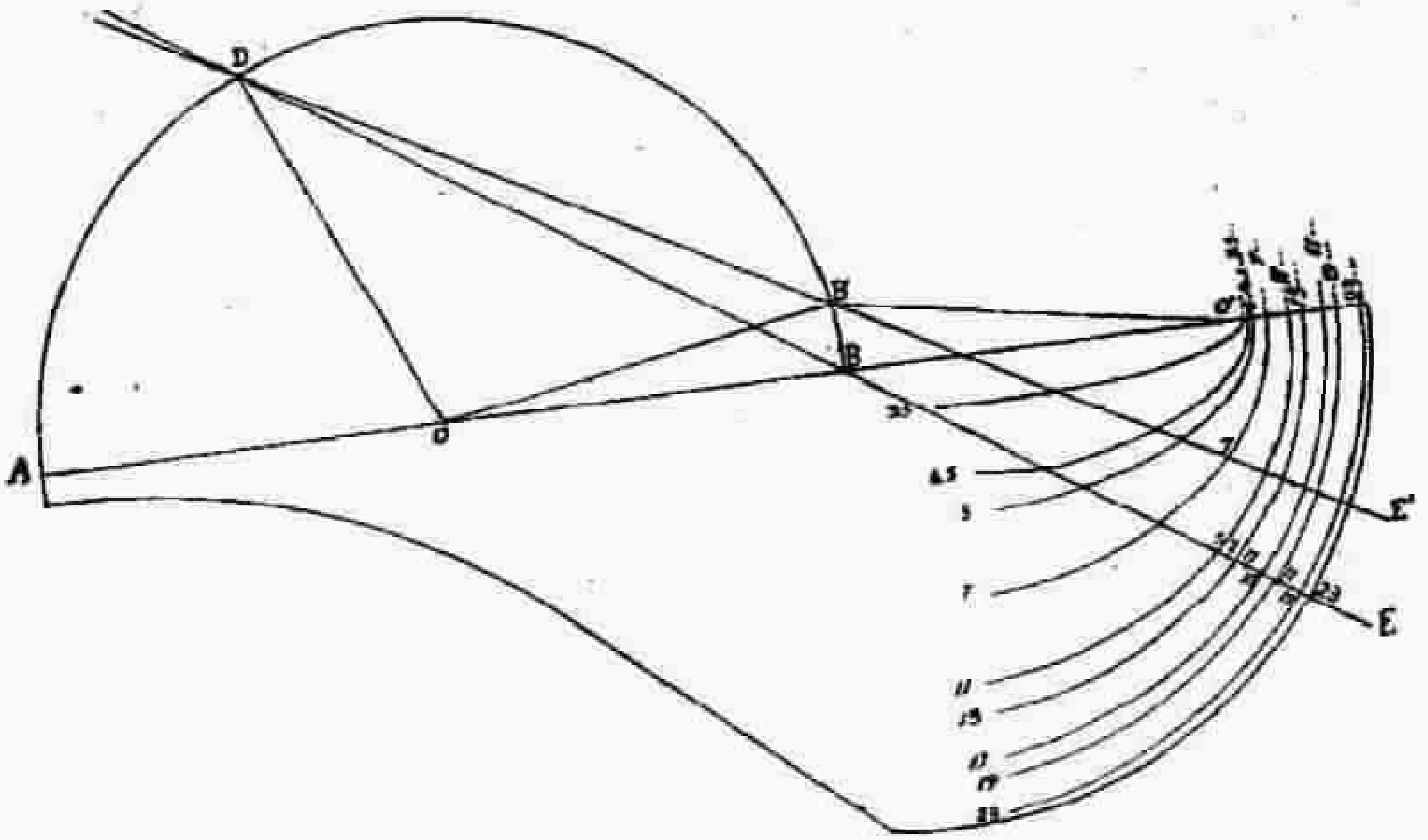


Fig. 6.

Nella piastra del *gonisettore* e nell'alidada della fig. 5 si sono segnate soltanto le seguenti curve:

$n=3{,}5$	$\rho=$ 90 mm.
„ 4,5	„ 91
„ 5	„ 92
„ 7	„ 95
„ 11	„ 100
„ 13	„ 103
„ 17	„ 108
„ 19	„ 111
„ 23	„ 115.

Attorno al centro O può rotare un'asticella OD in modo che il punto D può percorrere la semicirconferenza ADB.

Finalmente l'alidada DE è così disposta, che il suo punto B può scorrere lungo il semicerchio BDA, conservando costante la distanza BE e nel punto D può scorrere in su od in giù secondo il movimento del raggio OD.

Nella figura sono segnate due posizioni di questa *alidada*, cioè la primitiva DBE, colla quale resta fissato l'angolo AOD, che si tratterà poi di dividere in quel dato numero di parti, che si vorrà; e poi la posizione DB'E' la quale è determinata dalle seguenti condizioni:

1°. Deve passare per D; 2° il punto B deve sempre trovarsi sul semicerchio in B'; 3° la lunghezza B'E' dev'essere eguale a ρ ossia a B3,5, B4,5, B5, B7, B11 ... ecc.

Pertanto la BE è graduata conformemente alla BC da cui hanno origine le curve.

Per fissare poi la posizione del punto B', bisogna conoscere il numero delle parti in cui si vuol dividere l'angolo AOD.

Sia per esempio $n=7$; allora facendo scorrere l'alidada lungo il punto D, faremo in modo che il punto E7 della alidada cada sulla curva segnata 7, e resterà in tal modo determinata la posizione dei punti E' e B', unica posizione possibile di questo angolo.

Lo stesso dicasi per altri angoli ed altri divisori.

Per quanto si è detto, dunque, l'arco BB' è la settima parte dell'arco AD, cioè:

$$\mathrm{BOB'}=\frac{\mathrm{AOD}}{7}\,.$$

Per far uso dello strumento suppongasi questo disposto colla sua alidada a 0°; allora anche il raggio OD si confonderà col raggio OA.

Sia dato sulla carta un angolo AOD da dividere in n parti eguali.

Si mette l'ingegno in modo, che il centro O coincida col vertice O dell'angolo dato, ed il diametro AB, colla sua parte OA coincida col lato OA dell'angolo dato.

Si apra quindi il raggio OD fino a farlo coincidere con l'altro lato dell'angolo dato, che si vuol dividere e si fermi coll'apposita vite il punto D sul semicerchio ADB.

Si muova l'alidada DB finchè il suo punto E $\frac{a}{n}$ cada sulla curva $\frac{a}{n}$ segnata sulla piastra.

Supponiamo che questa curva sia $\frac{a}{7}$ e perciò segnata sulla piastra col numero 7 ai suoi estremi, onde il punto E7 rappresenta la posizione della estremità E dell'alidada colla curva 7⁀7 e l'alidada ha preso quindi la posizione di E'B'D, determinando l'arco BB' e per la proprietà della curva si ha:

$$\text{arco BB'}=\frac{\text{arco AD}}{7},$$

oppure

$$\text{angolo } BOB' = \frac{\text{angolo } AOD}{7},$$

che si può ottenere aggiungendo all'apparecchio un'appendice $B'O' = OB'$ ed il punto O' deve costantemente trovarsi sul prolungamento di AB, mentre il punto B' si trova nel punto B' dell'arco BDA e nel punto B' dell'alidada; dalla figura risulta $BO'B' = \frac{AOD}{7}$.

Se si volesse la divisione di AOD per 2, allora dalla posizione DB dell'alidada si avrebbe $ABD = \frac{AOD}{2}$.

Per avere la divisione dell'angolo AOD per 3, basta far coincidere l'alidada con $B'O'$.

10. La precisione del *gonisettore* dipende principalmente dalla esat-

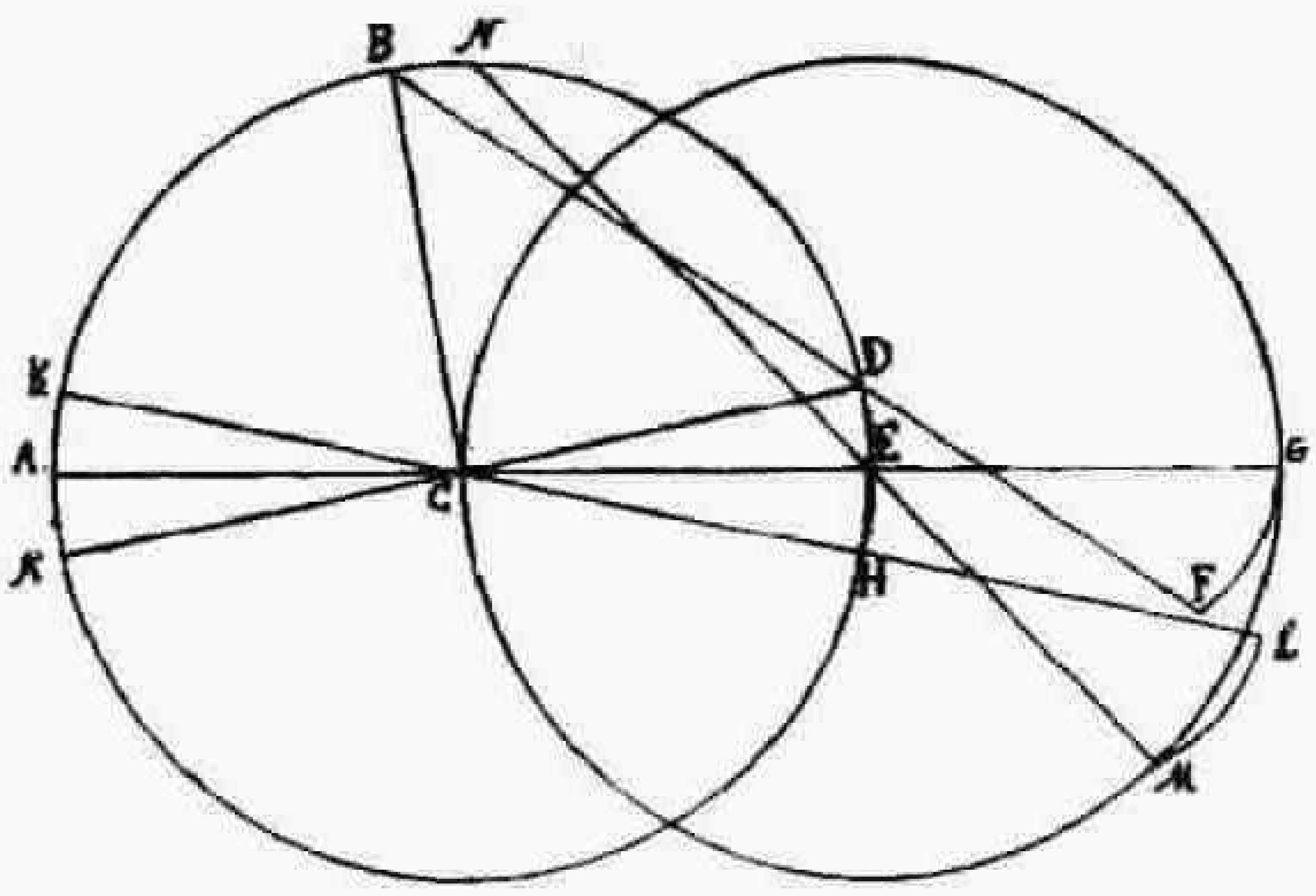


Fig. 7.

tezza delle curve settrici descritte sulla piastra. Ma colla descrizione per punti delle stesse sulla piastra medesima, che naturalmente deve essere metallica, è difficile ottenere una esattezza sufficiente.

Si possono descrivere le curve settrici sulla piastra con moto continuo servendosi d'uno strumento fondato sul seguente principio:

Siano due circoli AE, CG col raggio comune CE (fig. 7) e sia arco $AB = a$ ed arco $ED = \frac{a}{n}$.

Sul prolungamento di BD si prenda $DF = \rho$.

F è un punto della curva, che ha origine in G; GF è il primo tratto della curva (n. 6).

Supponiamo che il circolo AE girando attorno al suo centro C descriva l'arco $EH = \frac{a}{n}$ e perciò la retta dei centri prende la posizione di KL; e, che il circolo CG girando attorno al suo centro E, descriva l'arco $GM = a\frac{n+1}{2n}$; allora la linea AG prende la posizione di NM, ed LM sarà il primo tratto di curva $= GF$.

Infatti angolo $A'DB = AEN$ e raggio $DF = EM$.

Se dunque i centri C ed E restano fissi ed i rispettivi circoli girano nello stesso senso con moto uniforme, percorrendo in tempi eguali, il primo archi $EH = \frac{a}{n}$ ed il secondo archi $GM = a$, e si immagini, che il punto G lasci la traccia del suo cammino sul piano, che passa pel circolo AE, si avrà in quella traccia un tratto continuo LM... della curva settrice.

Quando n è razionale, i circoli C ed E percorrendo nello stesso tempo: il primo un arco $= \frac{360K}{n}$ ed il secondo un arco $= 360K$, la curva si chiude appena, che $\frac{K}{n}$ diviene un numero intero.

Sè per esempio vogliamo descrivere la curva in cui $n = 7$, bisogna che mentre nel circolo E il punto G dovrà percorrere 2520^0, nello stesso tempo il circolo C dovrà girare 360^0 (fig. 5).

II. Con questo principio ho inventato un ingegno per la descrizione cinematica delle curve in questione sulla piastra del gonisettore, nella quale occorre soltanto descrivere una lunghezza limitata, mentre la descrizione intera delle curve potrà avere eventuali applicazioni, fra cui la divisione della circonferenza in un numero qualsivoglia di parti eguali, ecc.

Ho costruito in legno l'ora citato ingegno (ipociclografo).

I risultati ottenuti sono tali da potere *a priori* stabilire, che questa macchina, se costruita in metallo con ruote dentate di precisione, darà risultati esatti.

L'ipociclografo è principalmente formato di due ruote situate in piani paralleli, a distanza sufficiente per poter stare il congegno della punta incidente o lapis o tiralinee all'estremo variabile del raggio vettore (ρ), portato dalla ruota superiore E, mentre la ruota inferiore C conduce nel suo moto la piastra del gonisettore oppure una tavoletta da disegno.

Il movimento è trasmesso da due ruote motrici (che stanno nel rapporto voluto dal valore di n) per mezzo di fili.

Le ruote E e C possono girare singolarmente in senso contrario.

Catania, febbraio 1910.

EMILIO TEDALDI
perito catastale.

I NUMERI RAZIONALI SECONDO BERTRAND RUSSELL

La bella lezione sui razionali, detta dal sig. PADOA al II congresso della " Mathesis ", e poi dallo stesso autore ricostruita per iscritto, (1) si può dire informata, in qualche punto essenziale, a idee chiaramente espresse da BERTRAND RUSSELL nell'opera magistrale *The principles of Mathematics* [Cambridge, University Press, 1903]. (2)

Data la definizione di *proporzionalità* per le coppie di numeri (interi), di cui il secondo non è mai nullo, il PADOA in fondo viene a definire — *nominalmente* — la frazione a/b come la classe di tutte le coppie (classi ordinate) proporzionali alla coppia " a, b ". L'ente a/b è dunque concepito come una *classe di classi*, secondo l'espressione del RUSSELL.

È appunto questa la via seguita dall'autore inglese per definire formalmente il numero cardinale (finito o transfinito); il qual numero — secondo una concezione che appartiene pure al FREGE, ma alla quale il RUSSELL è arrivato indipendentemente, ispirandosi ai lavori del PEANO — sarebbe appunto *la classe di tutte le classi equivalenti a una classe data*. In generale, è questo il procedimento per trasformare in definizioni formali o nominali, che dir si vogliano, le cosiddette *definizioni per astrazione*; le quali, come osserva il RUSSELL, hanno il grave difetto di pretenderla a definizioni *creatrici*, non assicurando nè dell'esistenza nè dell'unicità dell'oggetto definito. Codesta trasformazione, d'altra parte, è resa possibile, nel campo *matematico puro*, per mezzo del *calcolo delle relazioni*, che costituisce il capitolo più originale e più importante della logica russelliana. (3)

Non intendiamo esporne qui i principii: ci basti accennare a uno dei teoremi più importanti (*principio d'astrazione*), che si enuncia così: *ogni relazione transitiva e simmetrica (quindi riflessiva) si può sempre considerare come il prodotto relativo d'una relazione biunivoca e della sua inversa*. Per es., la relazione $\sim$ (*equivalenza*) tra insiemi o classi (CANTOR) è una relazione transitiva e simmetrica (*egualiforme*, secondo

---

(1) PADOA. *Introduzione alla teoria delle frazioni* [*Bollettino della " Mathesis "*, dicembre 1909, pp. 66-81].

(2) Quest'opera, poco nota e punto discussa in Italia, è stata commentata e illustrata in Francia dal COUTURAT con un'altra opera: *Les principes des mathématiques* [Paris, Alcan, 1905]. Le idee, spesso ardite, del RUSSELL hanno poi suscitato una vivacissima polemica tra il COUTURAT e il POINCARÉ [vedi *Revue de Méthaphysique et de Morale*, 1905-06]. Il POINCARÉ ha di recente riunito i suoi articoli polemici in *Science et Méthode* [Paris, Flammarion], pp. 152-214.

Alcune vedute generali del RUSSELL ho esposto in uno scritto dal titolo *Logica e Matematica*, che apparirà nella *Rivista di Filosofia*.

(3) Vedi, oltre l'opera citata, B. RUSSELL, *Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries* [*Revue de mathématiques*, Turin, t. VII, 1900-01].

si esprime il PADOA): or se consideriamo la relazione R che una classe qualunque c del campo della $\sim$ ha con la *totalità* Γ delle classi equivalenti a c, la R è una relazione (*many-one*), il cui *prodotto relativo* con la propria inversa $\bar{R}$ è appunto la $\sim$. [Ciò vuol dire, come si sa, che il *prodotto logico* delle due proposizioni " x ha la relazione R con Γ „, " Γ ha la relazione $\bar{R}$ con y „ equivale all'affermazione " x ha la relazione $\sim$ con y „]. Ora il termine unico *classe di tutte le classi equivalenti a* c — cui hanno la stessa relazione R tutte le classi equivalenti a c — può dar luogo precisamente alla definizione *formale* del numero cardinale della classe c. (1)

Similmente la relazione " è proporzionale „ tra coppie di numeri, può essere ricondotta a una relazione univoca (ma non reciproca) che ciascuna di queste coppie ha con il loro insieme; e quindi il rapporto $^a/_b$ si può definire formalmente come l'insieme di tutte le coppie proporzionali ad " a, b „. Nè si capisce perchè il PADOA voglia poi, quasi tornando indietro, interpretare codesta definizione come una definizione per astrazione, in cui, cioè, l'ente $^a/_b$ si presenti quale *astrazione* della coppia " a, b „ rispetto alla relazione *egualiforme* " è proporzionale a „. (2)

Altro punto notevole della lezione del sig. PADOA è quello in cui egli avverte come non siano punto da confondere i numeri naturali 0, 1, 2 . . . con le frazioni $^0/_1$, $^1/_1$, $^2/_1$ . . . Egli osserva: " la teoria dei " numeri *naturali* viene a trovarsi **formalmente inclusa** in quella delle " *frazioni*, pur rimanendone **concettualmente disgiunta** „. Or questa veduta si deve anzitutto al RUSSELL, che in parecchi passi dell'opera citata ha chiaramente rilevato l'errore consistente nel confondere le varie classi di grandezze numeriche.

A p. 270, per es., egli dice: " When mathematicians have effected " a generalization of number they are apt to be unduly modest about " it — they think that the difference between the generalized and " the original notions is less that it really is. We have already seen " that the finite cardinals are not to be identified with the positive " integers, nor yet with the ratios of the natural numbers to 1, both " of wich express relations, wich the natural numbers do not. (3) In " like manner there is a real number associated with every rational " number, but distinct from it. A real number, so I shall contend, is " nothing but a certain class of rational numbers. Thus the class of " rationals less than $^1/_2$ is a real number, associated with, but ob" viously not identical with, the rational number $^1/_2$. **This theory is**

(1) Osserva il RUSSELL che non si è lontani dal senso comune quando s'identifica il numero 2 con l'idea di *coppia*, il numero 3 con l'idea di *trio*, ecc.

(2) Cfr. p. 74, nota 2ª, del lavoro citato.

(3) È ovvio, per es., e perfettamente conforme al senso comune, che l'espressione *tre metri* ha due significati distinti, secondochè s'intenda: *tre oggetti chiamati metri* (numero cardinale 3) ovvero: *lunghezza che sta al metro nel rapporto* $^3/_1$ (numero razionale $^3/_1$).

" not, so far as I know, explicitly advocated by any author, though Peano " suggests it, and Cantor comes very near to it ".

Il CIPOLLA, di recente, ha rigorosamente precisato il senso da attribuire alla frase " estendere un campo numerico ": [1] dire, per es., che la classe R dei rapporti è un'*estensione* della classe N degl'interi non significa già che R contenga N, ma che R contiene una classe *isomorfa*, non identica a N, ossia che R è una classe di grandezze numeriche *superiore* a N. Così la classe R' dei numeri razionali relativi è superiore alla classe R, in quanto contiene una sottoclasse isomorfa a R. Così ancora i numeri reali assoluti (relativi) costituiscono una classe di grandezze numeriche superiore a R (R'). E movendo appunto da questo concetto del RUSSELL, il CIPOLLA ha fondato la teoria dei numeri reali, con un rigore logico non raggiunto dagli altri metodi.

Il RUSSELL, anzichè stabilire la teoria dei rapporti in modo analogo a quello tenuto per i numeri cardinali e in particolare per gli interi *finiti*, preferisce considerare i rapporti come *relazioni* tra gl'interi stessi. Quest'ultima teoria è accennata in poche righe [pp. 149-50] dell'opera citata, e qui intendiamo darne qualche sviluppo, più che altro per contribuire a diffondere le idee dell'autore. [2]

I.

1. Per trattare dei rapporti secondo RUSSELL, è indispensabile un cenno sul calcolo delle relazioni. Bastano, peraltro, poche nozioni logiche abbastanza semplici, che possono essere introdotte senza difficoltà in un insegnamento di 2° grado. [3]

Qui ci limitiamo, s'intende, al puro necessario. Con i simboli D*f* e P*p* si rappresentano i termini *definizione, proposizione primitiva.*

1. (Pp.) La relazione è un'idea primitiva.

2. (Df.) Essendo x e y due enti (individui) qualunque, " xRy " si legge: " x ha con y la relazione R ". Si suol dire che x è un *antecedente* e y un *conseguente* di R; l'insieme di tutti gli antecedenti e conseguenti della R si chiama il *campo* di R.

3. (Pp.) Ogni relazione R ammette un'*unica* relazione *inversa*, che indicheremo con $\bar{R}$. Ciò vuol dire che qualunque sieno x e y, dalla proposizione " xRy " si deduce l'altra " $y\bar{R}x$ " (e viceversa). Per es., la relazione tra numeri espressa dal segno $>$ ha per inversa la relazione $<$; la relazione " è padre " ha per inversa la relazione " è figlio ", ecc.

---

(1) MICHELE CIPOLLA, *I numeri reali* [*Periodico di Matematica*, anno XXV, fasc. III, 1909].

(2) Notiamo che l'A. distingue tra *rapporti (numeri razionali)* e *frazioni*. Queste ultime si riferiscono alle grandezze *estensive*, per le quali ha luogo l'assioma della *divisibilità indefinita*; rappresentano essenzialmente relazioni tra *tutto* e *parte* o tra due *tutti*, e son quindi suscettive anco di valori *irrazionali*.

(3) Nozioni simili sono introdotte nella pregevolissima *Geometria elementare* del DE FRANCHIS (Sandron, 1900), pp. 7-11. Là si parla di *operazione* tra classi di elementi geometrici, cioè in fondo di una particolare relazione, cui quell'operazione (*trasformazione, movimento*) dà luogo.

4. (Pp.) Dati due individui x e y, tra essi esiste una relazione che non esiste per nessun'altra coppia d'individui. [Ciò significa — dal punto di vista della *comprensione* dal quale si pone il RUSSELL — che l'insieme di *tutte* le relazioni esistenti tra x e y non esiste tra qualunque altra coppia d'individui. È, come lo chiama il COUTURAT, il *principio degl'indiscernibili* applicato alle relazioni.]

5. (Df.) Due relazioni R_1, R_2 sono *eguali* quando, qualunque sieno x e y, dalla " xR_1y " si deduce " xR_2y ", e reciprocamente; ossia quando " xR_1y " $=$ " xR_2y ".

6. (Df.) Date due relazioni R_1 e R_2, chiameremo *prodotto relativo* di esse, e lo indicheremo con $R_1{}^*R_2$, la relazione che esiste tra x e z quando si abbia contemporaneamente " xR_1y ", " yR_2z ".

Così la relazione " zio " è il prodotto relativo delle due relazioni *padre* e *fratello*. Si noti che tale prodotto non è in generale commutativo: per es. la relazione *padre del fratello* non coincide con la relazione *fratello del padre*.

7. (Pp.) Il prodotto relativo di due relazioni è una relazione.

8. (Df.) Una relazione è *simmetrica* quando è uguale alla sua inversa. Tali sono le relazioni *eguale*, *è fratello*, ecc. In caso contrario, la relazione si dice *asimmetrica*; esempi: $>$, *è padre*, ecc.

9. (Df.) Una relazione R è *transitiva* quando il suo prodotto relativo con se stessa (*quadrato relativo*) è uguale alla stessa R. Sono transitive le relazioni $>$, $<$, *è multiplo*, ecc.

10. (Df.) Diremo che una relazione R è *univoca* (*many-one*), quando dal contemporaneo avverarsi delle proposizioni xRy, xRz segue necessariamente $y \equiv z$. La chiameremo *reciproca* (*one-many*), quando la sua inversa $\overline{R}$ è univoca; *biunivoca* (*one-one*), quando è univoca e reciproca.

II.

1. Se a, b, c sono numeri tali che

$$ab = c\,, \tag{1}$$

tra i numeri a e c esiste una *relazione* ben determinata, che si suole anche esprimere dicendo: a *è summultiplo secondo* b *di* c; e tra c e a esiste la relazione (inversa), espressa anche dalla frase: c *è multiplo secondo* b *di* a.

Poichè queste due relazioni sono perfettamente determinate quando è dato il numero b, noi le indicheremo per ora con i simboli B e $\overline{B}$. Talchè porremo:

$$aBc\,. = .\, ab = c. \qquad \text{Df.} \tag{2}$$

E conseguentemente (I, **3**):

$$c\overline{B}a\,. = .\, ab = c. \tag{3}$$

Le proposizioni (1), (2), (3) esprimono in fondo lo stesso fatto.

Notiamo che gli antecedenti della relazione B sono tutti i numeri $0, 1, 2 \ldots$; i conseguenti sono tutti i multipli di b, cioè $0, b, 2b \ldots$; e reciprocamente per la relazione inversa $\overline{\mathrm{B}}$.

Poichè la moltiplicazione è un'operazione uniforme, è facile vedere che la relazione B è biunivoca. Bisogna, però, eccettuare il caso in cui è $b=0$, giacchè allora la B fa corrispondere a ogni numero lo 0 (relazione reciproca). Questo caso sarà, però, escluso per altre considerazioni (n. 9).

Notiamo ancora che la relazione B è asimmetrica, eccetto il caso in cui è $b=1$, nel quale B si confonde con $\overline{\mathrm{B}}$.

2. Siano ancora a' e b' due numeri tali che

$$a'b' = c. \tag{4}$$

Potremo scrivere, per la (3):

$$c\overline{\mathrm{B}}'a'. \tag{α}$$

Da (2) e (α) segue che tra i numeri a e a' passa una relazione, che è il prodotto relativo [I; **6**, **7**] delle due relazioni B e $\overline{\mathrm{B}}'$. Da (2) e (α) segue dunque la proposizione:

$$a\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'a'. \tag{β}$$

Reciprocamente, è facile vedere che dalla (β) segue:

$$ab = a'b' = c.$$

Infatti, se la (β) ha luogo, ciò vuol dire, per la Df. **6**, che esiste un numero x tale che contemporaneamente si avverino le due proposizioni

$$a\mathrm{B}x, \qquad x\overline{\mathrm{B}}'a'.$$

E per le (2), (3), dovrà essere a un tempo:

$$ab = x, \qquad a'b' = x;$$

cioè $ab = a'b'$. c. d. d.

Possiamo dunque scrivere la proposizione:

$$a\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'a'. = .\, ab = a'b'. \tag{5}$$

3. La relazione $\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'$ è perfettamente determinata dai numeri b e b'. Inoltre, è ovvio che se $b'=1$, le due relazioni $\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'$ e B sono eguali (Df. **5**); se invece è $b=1$, la relazione $\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'$ coincide con la $\overline{\mathrm{B}}'$.

Al simbolo $\mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}'$ sostituiremo quello più espressivo $^{b'}/_{b}$, che leggeremo b' **su** b; e chiameremo *rapporto* la particolare relazione tra numeri (*summultiplo secondo* b *di multiplo secondo* b'), che esso rappresenta. Il numero b' si chiama *primo termine, antecedente* (o *numeratore*) del rapporto; il numero b, *secondo termine, conseguente* (o *denominatore*).

Porremo dunque:

$$^{b'}/_{b} = \mathrm{B}^*\overline{\mathrm{B}}' \qquad \text{Df.} \tag{6}$$

E per conseguenza:

$$^{1}/_{b} = \mathrm{B}, \qquad ^{b'}/_{1} = \overline{\mathrm{B}}'. \tag{7}$$

E la (5) si potrà scrivere:

$$a\,({}^{b'}/_{b})\,a'. = .\,ab = a'b'. \tag{8}$$

4. Qualunque sieno i numeri x e x', dalla proposizione

$$x\,({}^{b'}/_{b})\,x' \tag{α}$$

segue l'altra

$$x'\,({}^{b}/_{b'})\,x\,; \tag{β}$$

e reciprocamente.

Infatti dalla (α), per la (8), segue: $xb = x'b'$, ovvero $x'b' = xb$; e da quest'ultima, sempre per la (8), segue (β). Similmente, si vede che dalla (β) segue la (α). Abbiamo quindi:

$$x\,({}^{b'}/_{b})\,x' = x'\,({}^{b}/_{b'})\,x. \tag{9}$$

Cioè: *i due rapporti* ${}^{b'}/_{b}$ *e* ${}^{b}/_{b'}$ *rappresentano relazioni inverse.*

5. Dimostriamo il seguente teorema:

Se m *è un numero non nullo,* ${}^{a}/_{b}$ *e* ${}^{am}/_{bm}$ *rappresentano rapporti eguali, cioè*

$${}^{a}/_{b} = {}^{am}/_{bm}. \tag{10}$$

Infatti, qualunque sieno i numeri x e y, dalla proposizione

$$x\,({}^{a}/_{b})\,y \tag{α}$$

segue, in virtù della (8):

$$xb = ya. \tag{β}$$

E dalla (β), per $m \neq 0$, segue:

$$x\,(bm) = y\,(am), \tag{γ}$$

Ma la (γ) dà luogo appunto alla proposizione:

$$x\,({}^{am}/_{bm})\,y.$$

Dunque dalla (α) segue la (γ); reciprocamente, si vede subito che dalla (γ) segue la (α); epperò:

$$x\,({}^{a}/_{b})\,y = x\,({}^{am}/_{bm})\,y.$$

E per la Df. **5** [I], ${}^{a}/_{b}$ e ${}^{am}/_{bm}$ sono relazioni eguali. c. d. d.

6. In virtù della (10), potremo sempre trasformare un rapporto ${}^{a}/_{b}$ in altro eguale avente i termini primi tra loro (*rapporto irreduttibile*). E potremo anco ridurre due rapporti ad avere egual conseguente. Si dimostra ancora, immediatamente, il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sussista la proposizione

$$x\,({}^{a}/_{b})\,y\,,$$

dove ${}^{a}/_{b}$ *è un rapporto irreduttibile, è che* x *e* y *sieno equimultipli di* a *e* b. E da esso il corollario:

Se ${}^{a}/_{b}$ *è irreduttibile, dalla*

$$x\,({}^{a'}/_{b'})\,y$$

segue

$${}^{a'}/_{b'} = {}^{x}/_{y}\,.$$

7. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè i rapporti* ${}^{a}/_{b}$ *e* ${}^{c}/_{d}$ *sieno eguali, è che si abbia* $ad = bc$.

Infatti, se ${}^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$, qualunque sieno x e y, abbiamo:

$$x\,({}^{a}/_{b})\,y = x\,({}^{c}/_{d})\,y\,;$$

e quindi, per la (8) del n. 3, hanno luogo a un tempo le eguaglianze

$$xb = ya\,, \qquad xd = yc\,;$$

dalle quali subito

$$ad = bc\,.$$

Dunque la condizione è necessaria.

Dalla $ad = bc$, segue poi la proposizione

$$c\,({}^{a}/_{b})\,d\,. \qquad (\alpha)$$

Ora se ${}^{a}/_{b}$ è irreduttibile, dalla (α) segue senz'altro ${}^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$ [n. 6].

Se no, sia ${}^{a'}/_{b'}$ il rapporto irreduttibile eguale ad ${}^{a}/_{b}$. Dalla (α) segue

$$c\,({}^{a'}/_{b'})\,d\,; \qquad (\beta)$$

e quindi ${}^{a'}/_{b'} = {}^{c}/_{d}$; ma è ${}^{a'}/_{b'} = {}^{a}/_{b}$; dunque ${}^{a}/_{b} = {}^{c}/_{d}$. c. d. d.

8. Seguono ancora facilmente, dalle proposizioni precedenti, queste altre:

1°. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè tra due numeri passi la relazione* ${}^{a}/_{b}$ *è che essi siano risp. equimultipli o equisummultipli di* a *e* b.

2°. *La relazione* ${}^{a}/_{b}$ *è biunivoca. Fanno eccezione la relazione* ${}^{a}/_{0}$, *che ha luogo tra qualunque numero e lo zero, e la relazione* ${}^{0}/_{0}$ *che può aver luogo tra due numeri qualunque.*

3°. *La relazione* ${}^{a}/_{b}$ *è asimmetrica, salvo il caso in cui* $a = b$.

4°. *La relazione* ${}^{a}/_{a} = {}^{1}/_{1}$ *ha luogo tra numeri eguali.* Ecc. [1]

9. A questo punto si può osservare che il rapporto ${}^{m}/_{1}$ rappresenta la relazione che passa tra due numeri a e b il cui quoto è m.

Tra i rapporti

$${}^{0}/_{1}\,, \quad {}^{1}/_{1}\,, \quad {}^{2}/_{1}\,, \ldots \qquad (\alpha)$$

e i numeri

$$0\,, \quad 1\,, \quad 2\,, \ldots \qquad (\beta)$$

c'è dunque questa notevole analogia: gli elementi della classe (α) rappresentano i rapporti tra numeri i cui quoti sono i corrispondenti elementi della classe (β). In altri termini, alla proposizione:

$$a\,({}^{m}/_{1})\,b\,,$$

---

[1] Sarebbe pure immediato il dimostrare che: ${}^{ac}/_{bd} = {}^{a}/_{b} \times {}^{c}/_{d}$.

che implica l'eguaglianza

$$a/b = m/1, \tag{γ}$$

potremo sostituire l'eguaglianza

$$a : b = m, \tag{δ}$$

e reciprocamente.

Affinchè sia più stretta l'analogia tra i rapporti e i quoti potremo:

1° *convenire* che nel rapporto a/b il secondo termine b sia sempre diverso da 0, dimodochè (γ) e (δ) saranno sempre sostituibili l'una all'altra;

2° *definire*, tra i rapporti, le operazioni fondamentali $+, \times$, ecc. in modo che un'operazione eseguita su elementi della classe (α) e l'operazione omonima su gli elementi corrispondenti della classe (β) abbiano risultati corrispondenti.

In tal modo la classe dei rapporti viene a contenere una sottoclasse (α) *isomorfa* alla classe (β) degl'interi.

Non intendiamo qui esporre il modo col quale questo calcolo dei rapporti può essere stabilito: cosa che il PADOA fa magistralmente ed elegantemente. Notiamo, col RUSSELL, che la teoria qui accennata dei rapporti si ricollega facilmente alla teoria *operatoria* [MÈRAY, PEANO].

Senonchè la teoria — diciamo così — *relativista* è suscettiva del massimo rigore logico (come lo proverebbe un uso più largo, che qui non si sia fatto, del calcolo delle relazioni e del simbolismo logico); nè ha luogo, per essa teoria, l'obbiezione che il PADOA muove al criterio d'eguaglianza adottato nella teoria operatoria. Nella teoria del RUSSELL, l'eguaglianza tra rapporti non è che l'eguaglianza logica tra relazioni: a/b e c/d sono *eguali* solo in quanto rappresentano la *stessa* relazione tra numeri.

Le teoria *relativista* è inoltre più vicina alle applicazioni, e comporta — ci sembra — una trattazione didattica semplicissima.

Il RUSSELL, insomma, definisce formalmente il rapporto per mezzo dell'idea primitiva *relazione* (*costante logica*), mentre il PADOA lo definisce per mezzo dell'idea primitiva *classe*.[1] La definizione del PADOA, per altro, si può dire più conforme al modo con cui il RUSSELL definisce il numero intero (classe di classi) e il numero reale (classe di razionali o *segmento*). È *scientificamente* preferibile dal punto di vista dell'uniformità.

[1] Notiamo però che per il RUSSELL la *classe* è una nozione derivata dalle due costanti logiche *tale che* è *funzione proposizionale*.

CORRADINO MINEO.

PICCOLE NOTE

Alcuni teoremi sulle coniche dimostrati mediante la considerazione dei punti ciclici. — Teorema 1°. — *Se fra le diverse coppie di una involuzione in un fascio vi sono le rette isotrope, l'involuzione è l'eguaglianza inversa.*

Si considerino i raggi doppi di questa involuzione. Essi sono reali inquantochè questa involuzione ha nelle rette isotrope una coppia di elementi immaginari ed è noto che è sempre iperbolica quell'involuzione che contiene una coppia di elementi immaginari. Ora è manifesto che due raggi reali coniugati armonicamente alle rette isotrope sono fra loro perpendicolari. D'altra parte l'involuzione che ha come raggi doppi due raggi fra loro perpendicolari è l'eguaglianza inversa.

Teorema 2°. — *Data una conica ed un punto esterno ad essa, gli angoli compresi fra i vettori focali del punto e le tangenti alla conica passanti per quel punto hanno le medesime bisettrici.*

I fuochi reali ed immaginari di una conica a centro e i punti ciclici del piano costituiscono le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero circoscritto alla conica.

Proiettando da un punto P esterno alla conica:

1° la coppia di fuochi reali; 2° la coppia dei punti ciclici e tracciando da esso le tangenti alla conica si ottengono coppie di una medesima involuzione. Questa involuzione è l'uguaglianza inversa poichè fra le diverse coppie di raggi vi figurano le rette isotrope.

Nel caso che la conica sia una parabola si giunge ad una analoga conclusione facendo uso di un caso particolare del teorema di Desargues-Sturm.

Teorema 3°. — *Proiettando dal centro di una iperbole equilatera le coppie di punti che una secante la conica determina su di essa e sulle direttrici, si ottengono due angoli aventi le medesime bisettrici.*

Si ponga mente alla figura polare di quella considerata nel precedente teorema.

Le direttrici reali ed immaginarie e le polari dei punti ciclici costituiscono le coppie di lati opposti di un quadrangolo iscritto nella conica.

Seghiamo questo quadrangolo con una retta che incontri la conica (che supponiamo sia l'iperbole equilatera) in due punti reali (anche coincidenti).

Pel teorema Desargues-Sturm saranno coppie di una medesima involuzione:

1°. La coppia di punti reali determinata su questa retta dall'iperbole.

2°. La coppia di punti reali appartenenti a questa retta ed alle direttrici reali.

3°. La coppia di punti immaginari che questa retta ha in comune con le polari dei punti ciclici.

Si proietti questa involuzione dal centro della conica e si osservi che i raggi proiettanti la terza coppia di punti sono le polari dei punti ciclici. Queste polari, coincidendo nell'iperbole equilatera con le rette isotrope, l'involuzione proiettata dal centro è l'uguaglianza inversa.

Teorema 4°. — *Proiettando da un fuoco reale di una conica le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero circoscritto ad essa, l'involuzione che ne risulta è l'eguaglianza inversa.*

Le tre coppie di raggi che dal fuoco proiettano i vertici opposti del quadrilatero e le tangenti immaginarie condotte dal fuoco alla conica (coincidenti colle rette isotrope) appartengono ad una medesima involuzione la quale è l'uguaglianza inversa.

Teorema 5°. — *L'involuzione ottenuta segando con una direttrice i lati opposti di un quadrangolo inscritto in una coppia è proiettata dal fuoco corrispondente a quella direttrice secondo un'eguaglianza inversa nel fascio.*

Invero per il teorema di Desargues-Sturm saranno in involuzione le coppie di punti reali che i lati opposti del quadrangolo determinano sulla direttrice e i punti immaginari in cui questa è secata dalla conica. Si proietti dal fuoco corrispondente questa involuzione, e si osservi che, essendo fuoco e direttrice rispettivamente polo e polare i raggi proiettanti quei due punti immaginari risulteranno tangenti alla conica e cioè coincidenti con le rette isotrope. L'involuzione è dunque l'uguaglianza inversa.

Teorema 6°. — *Le tangenti condotte da una parabola ad un punto della sua direttrice sono fra loro perpendicolari.*

In una parabola il fuoco al finito e i punti ciclici sono i tre vertici di un triangolo immaginario circoscritto alla conica.

Un punto qualunque della direttrice è coniugato al fuoco; se da esso (teorema di Staudt) si proiettano i punti ciclici ne risultano due rette isotrope coniugate armonicamente alle tangenti condotte alla conica da quel punto. Queste tangenti saranno dunque perpendicolari tra loro.

M. Barberis.

UNA DOMANDA.

A pag. 15 dell'opera *Sur le Magnétisme terrestre et la Géodesie expéditive* di Antonio d'Arbadie (Le Caire, Impr. Barbier, 1887) si legge:

" ... une expérience mémorable, faite par de savants italiens, et où l'on a " echangé les instruments aussi bien que les observateurs, a montré que l'usage " de la division décimale du cercle économise à peu près le tiers du temps con- " sacré, soit aux observations soit aux calculs ".

Essendoci sorta la curiosità di avere in proposito maggiori particolari, nè potendoci rivolgere all'autore (morto da varî anni), ci siamo rivolti a varî cultori di Geodesia e di Topografia, ma nessuno sapeva di quell'esperimento.

Ripetiamo quindi qui la nostra domanda, nella speranza che qualche lettore possa essere più fortunato di noi.

G. P.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 775.

775. *Si considerino due circoli* c, c' *variabili aventi i loro centri sull'asse maggiore di un'ellisse, e bitangenti alla medesima, tali che la distanza delle loro corde di contatto sia costante. Dimostrare che le tangenti condotte da un punto di contatto di* c *con l'ellisse, al circolo* c' *sono eguali a quelle condotte a* c *dai punti di contatto di* c' *coll'ellisse, e che questa lunghezza comune è costante.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Sia $A(x, y)$ un punto di contatto del circolo c con l'ellisse data:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \tag{1}$$

ed $A'(x', y')$ uno del circolo c'. Indichiamo con R ed s la lunghezza della normale e della sunnormale nel punto A, R' ed s' quella nel punto A'.

L'equazioni dei circoli c e c' sono:

$$H(\xi, \eta) \equiv [\xi - (x + s)]^2 + \eta^2 - R^2 = 0 \tag{c}$$
$$H'(\xi, \eta) \equiv [\xi - (x' + s')]^2 + \eta^2 - R'^2 = 0. \tag{c'}$$

Il quadrato della tangente condotta dal punto A' al circolo c è

$$F^2 = H(x', y'),$$

ovvero, osservando che

$$R^2 = y^2 + s^2, \qquad F^2 = (x' - x)^2 - 2s(x' - x) + y'^2 - y^2.$$

Sostituendo il valore y, y' ed $s = y\dfrac{dy}{dx}$ all'equazione (1) dell'ellisse, abbiamo

$$F^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}(x' - x)^2. \tag{2}$$

Similmente si può ottenere dall'equazione (c') che il quadrato della tangente condotta dal punto A al circolo c' è

$$F'^2 = \frac{(a^2 - b^2)}{a^2}(x' - x)^2. \tag{3}$$

Dalla (2) e (3) segue che la lunghezza della F e della F' sono eguali e nel caso di $x' - x =$ costante hanno la stessa lunghezza comune costante.

Altra risoluzione del prof. **U. Fornari**, I. T. di *Varese*.

BIBLIOGRAFIA

GIOVANNI DE MAURO. — *Trattato di Algebra* ad uso dei Licei e degli Istituti tecnici, compilato secondo i vigenti programmi, con prefazione del prof. F. RAPISARDI. Catania, C. Battiato, 1909. — L. 3,50.

Se di questo libro si volesse fare un'analisi minuta, molto ci sarebbe da dire e, pur troppo, poco di bene. La trattazione, che pur vorrebbe essere rigorosa, lascia invece molto a desiderare; basta osservare che di parecchi teoremi non è data la dimostrazione; di alcuni altri sono date dimostrazioni che non hanno nessun valore logico. Inoltre molti concetti non sono introdotti nè con precisione, nè con chiarezza; alcune parti del libro sono confuse e gli errori di dettaglio sono frequenti e spesso assolutamente grossolani. Evitando perciò di venire a speciali considerazioni, me ne permetto una soltanto di carattere generale.

L'A. nella prefazione dei suoi ELEMENTI DI ARITMETICA dice incidentalmente che il suo TRATTATO DI ALGEBRA *ha avuto benevola accoglienza pel metodo semplice,* *ma rigorosamente scientifico con cui fu scritto.* Lasciando stare quel *rigorosamente scientifico* che suona quasi ironia, senza porre in dubbio la sincerità delle parole su riferite, amo credere contengano qualche esagerazione, perchè la benevola accoglienza ricevuta dal libro del dott. De Mauro starebbe a significare un fatto ben grave: e cioè che l'opera assidua di coscienziosi insegnanti e fin de' più illustri nostri matematici per migliorare e rinnovare l'insegnamento della nostra scienza nelle scuole secondarie non ha sortito nessun effetto benefico, anzi, quasi avesse promossa una reazione, ci ha fatti regredire invece di progredire!

Perchè indubbiamente questo nuovo trattato d'algebra segna un regresso sugli altri più comunemente usati nei nostri Licei.

Io non credo che tutti i metodi moderni si possano introdurre con efficacia nelle scuole secondarie, specialmente nella loro integrità; ma d'altra parte penso che essi, pel loro alto valore scientifico, non possano a meno di esercitare una benefica azione sui metodi tradizionali, nel senso che se questi vogliano continuare a vivere debbono migliorarsi e trar profitto della critica che vien mossa alle loro parti più deboli. E ciò non mi pare davvero che abbia fatto l'A.!

Di più, nei Licei l'insegnamento della matematica deve avere carattere più specialmente formativo e questo carattere manca in modo assoluto al libro di cui ci occupiamo.

L'A. non accetterà certamente per buoni questi miei apprezzamenti, ma ad ogni modo, se spera che il suo libro si diffonda, sarà bene che lo riveda con attenzione per liberarlo dagli errori di espressione, di concetto, di ragionamento che vi sono troppo frequenti.

L. Tenca.

Giovanni De Mauro. — *Elementi di Aritmetica pratica* ad uso delle Scuole tecniche, Ginnasio inferiore e corsi complementari. G. B. Paravia e C. (Catania, tip. A. Morosoli), 1910. — L. 2.

La lettura di questo libro ha lasciato in me un'impressione sfavorevole, non perchè sia privo di pregi, ma perchè questi sono menomati dall'esposizione spesse volte poco precisa, alcune volte del tutto errata.

Per citare alcune inesattezze di varia natura, dirò, ad es., che vi si trovano scritture come le seguenti, ormai da tutti biasimate:

Ettol. $148 + 345 + 265 = 758$ (pag. 47).
$84{,}50 \times 5 =$ *grammi* $422{,}50$ (pag. 173).
L. $69{,}45 =$ *Kg.* $6{,}495$ (pag. 173).
m. $3{,}50 \times$ *m.* $2{,}75 =$ *m.*^{2} $9{,}6250$ (pag. 176).
m. $5 \times$ *m.* $3 \times$ *m.* $9 =$ *m.*^{3} 135 (pag. 176).
m.^{2} $9{,}6250 :$ *m.* $3{,}50 =$ *m.* $2{,}75$ (pag. 176).

Di più sono frequenti le equivalenze fra parole che non si equivalgono; ad es.:
grandezza o quantità (pag. 1).
peso specifico o densità (pag. 168).
taglio o piede (pag. 172).

Inoltre alcune definizioni non hanno nè valore logico, nè valore psicologico.

Per queste ed altre imperfezioni didattiche che si trovano nel libro, crederei opportuno che l'A. lo rivedesse attentamente; così com'è non mi sembra consigliabile.

L. Tenca.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 Aprile 1910

UNA PICCOLA TAVOLA DI VALORI NATURALI

§ 1. — Avendo aggiunta la piccola tavola, qui annessa, alla terza edizione del nostro *Trattato elementare di Trigonometria* (in corso di stampa), crediamo opportuno esporre qui alcune considerazioni sul suo uso, che non potrebbero esser poste nel trattato stesso.

Tali considerazioni si riferiscono alla interpolazione semplice e ci sembrano importanti, perchè mostrano come potrebbe, a parer nostro, esser trattata questa delicata questione anche per ogni altra tavola logaritmo-trigonometrica (*).

§ 2. — Rammentiamo, prima di tutto, che la interpolazione semplice dà luogo a due errori ben distinti: uno è dovuto all'ammettere il principio delle parti proporzionali, l'altro è dovuto all'applicare il principio stesso servendosi di valori, necessariamente *arrotondati*, dati dalla tavola che si considera.

Indicando con γ il primo di questi errori e, più particolarmente, con γ_d e con γ_i l'errore stesso secondochè esso si riferisce alla ricerca diretta e alla ricerca inversa, si ha (§ 5, V. N. (**))

$$\gamma_d = -10^n \frac{\delta x}{\Delta x}\left(1 - \frac{\delta x}{\Delta x}\right)\frac{\overline{\Delta x}^2}{2} f''(x_0 + \theta\Delta x), \tag{1}$$

$$\gamma_i = -\frac{(\Delta x)}{10^n[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]}\gamma_d ; \tag{2}$$

dove, intendo che n sia il numero delle cifre decimali date dalla tavola che si considera, si è moltiplicato il secondo membro della (1) per 10^n affinchè la cifra delle unità di γ_d sia l'ultima delle cifre decimali accennate, e dove si è indicato con (Δx) il passo della varia-

(*) È una ricerca che, in gran parte, abbiamo già fatta e pubblicata in varie riprese. Abbiamo poi applicati i risultati raggiunti a uno studio comparativo fra le tavole logaritmo-trigonometriche più note, e questo studio sta per essere pubblicato, assieme a un corrispondente progetto di nuove tavole.

(**) Indichiamo in questo modo i §§ della nostra nota: *Sull'uso e sulle tavole dei valori naturali*, " Periodico di Matematica ", 1906. Avvertiamo però che abbiamo trovato opportuno cambiare il significato di alcuni dei simboli usati in quella nota e nelle altre, che avremo occasione di citare.

bile espresso in ampiezza (anzichè in misura circolare, come Δx) affinchè γ_i risulti pure espresso in ampiezza. In seguito si indicheranno con g_a e con g_i i massimi valori assoluti di γ_a e di γ_i, con G_a e con G_i i limiti superiori che, caso per caso, si troveranno per ciascuno di questi massimi.

Indicando con λ il secondo degli errori accennati e attribuendo a λ_a, λ_i, l_a, l_i, L_a, L_i significati analoghi a quelli attribuiti a γ_a, γ_i g_a, g_i, G_a, G_i, ..., si ha

$$L_a = 1 \qquad (3), \qquad\qquad L_i = \frac{(\Delta x)}{\Delta_T\, y}, \qquad (4)$$

dove le unità sono le stesse di quelle dei corrispondenti simboli ora accennati, e dove $\Delta_T\, y$ indica la differenza tavolare (espressa in valore assoluto e considerando in essa, come cifra delle unità, l'ultima delle cifre decimali date dalla tavola), che si ricava dai due valori *arrotondati* di $f(x_0 + \Delta x)$ e di $f(x_0)$, e non dai valori esatti. Si noti che il valore indicato per L_i è un limite superiore inabbassabile (*) e che quello indicato per L_a è un *massimo* per λ_a e non un *limite superiore* (**) (per cui L_a non differisce da l_a).

OSSERVAZIONE. — Se, invece della differenza tavolare arrotondata $\Delta_T\, y$, si usa una differenza meno errata, l'errore λ_a può aumentare anzichè diminuire (***); altrettanto può accadere per l'errore λ_i, se si impiccolisce il passo tavolare (Δx) (§ 6, Oss. II, V. N.). Di questi due apparenti paradossi è facile trovare la ragione.

§ 3. — Quando $f(x)$ sia una delle tre funzioni trigonometriche seno, tangente e secante, si è visto (§§ 9, 10, 11, V. N.) che:

per il seno si ha

$$10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \operatorname{sen} x_0 < g_a < 10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \operatorname{sen} (x_0 + \Delta x). \qquad (5)$$

$$\frac{\Delta x\,(\Delta x)}{8} \tan x_0 < g_i < \frac{\Delta x\,(\Delta x)}{8} \tan (x_0 + \Delta x); \qquad (6)$$

per la tangente si ha

$$10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{4} \frac{\tan x_0}{\cos^2 x_0} < g_a < 10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{4} \frac{\tan (x_0 + \Delta x)}{\cos^2 (x_0 + \Delta x)}, \qquad (7)$$

(*) *Sopra uno degli errori prodotti dalla interpolazione semplice.* " Periodico di Matematica ", 1902.

(**) *Sulla ricerca del logaritmo seno e del logaritmo tangente degli archi piccoli.* " La Corrispondenza ", 1901.

(***) V. l'oss. al § 3 della nota ora citata: *Sopra uno degli errori ....*

$$\frac{\overline{\Delta x}^2 (\Delta x)}{4} \frac{\tan x_0 \cos (x_0 + \Delta x)}{\operatorname{sen} \Delta x \cos x_0} < g_i < \frac{\overline{\Delta x}^2 (\Delta x)}{4} \frac{\tan (x_0 + \Delta x) \cos x_0}{\operatorname{sen} \Delta x \cos (x_0 + \Delta x)}; \quad (8)$$

per la secante si ha

$$10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^3 x_0} < g_d < 10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{8} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 (x_0 + \Delta x)}{\cos^3 (x_0 + \Delta x)}, \quad (9)$$

$$\frac{\Delta x (\Delta x)}{8} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^2 x_0 \tan (x_0 + \Delta x)} < g_i < \frac{\Delta x (\Delta x)}{8} \frac{1 + \operatorname{sen}^2 (x_0 + \Delta x)}{\cos^2 (x_0 + \Delta x) \tan x_0}. \quad (10)$$

Dall'esame dei limiti G_d e G_i, così trovati, si è poi dedotto quanto segue.

Per il seno, G_d cresce sempre al crescere di x_0 da $0°$ a $90° - (\Delta x)$ ed ha per massimo $10^n \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}$; G_i pure cresce sempre al crescere di x_0 e tende all'infinito per x_0 tendente a $90° - (\Delta x)$.

Per la tangente, G_d cresce sempre al crescere di x_0 e tende all'infinito per x_0 tendente a $90° - (\Delta x)$; altrettanto accade per G_i.

Per la secante, G_d cresce sempre al crescere di x_0 e tende all'infinito per x_0 tendente a $90° - (\Delta x)$; G_i invece tende all'infinito tanto per x_0 tendente a $0°$ quanto per x_0 tendente a $90° - (\Delta x)$, ed ha il suo minimo per un valore di x_0 che è compreso fra $\frac{1}{2} \text{ar} \cos \frac{1}{3} - (\Delta x)$ e $45° - \frac{1}{2} (\Delta x)$, e che si trova facilmente per tentativi (§ 11, V. N.).

Osservazione. — Il calcolo numerico dei limiti indicati delle (7), (8), (9) e (10) può essere molto semplificato trasformando opportunamente i limiti stessi colle formule di bisezione e colle formule di prostaferesi.

§ 4. — Si ammette che si possa applicare il principio delle parti proporzionali nella ricerca diretta quando il valore assoluto di γ_d non supera una mezza unità; il limite dell'errore complessivo che si commette nella ricerca diretta sarà quindi dato da

$$L_d + G_d < 1{,}5.$$

In quanto alla ricerca inversa, siccome G_i e L_i variano ambedue al variare di x_0, occorre esaminare accuratamente come vari la somma $G_i + L_i$, e vedere in quali intervalli questa somma si possa ritenere trascurabile. Si noti che questa ricerca deve essere limitata agli intervalli nei quali $\Delta_T y$ è almeno uguale a 2, perchè fuori di questi l'interpolazione non occorre, e l'errore γ_i, solo per effetto dell'arrotondamento del valore dato, può allora essere eguale a $\frac{1}{2} (\Delta x)$, quando $\Delta_T y$ è uguale all'unità, e può essere uguale a (Δx) e anche maggiore di (Δx), quando $\Delta_T y$ è uguale a zero.

§ **5.** — Applichiamo ora quanto precede alla piccola tavola in discorso, nella quale

$$(\Delta x) = 60' \qquad \text{ed} \qquad n = 3 .$$

Nella ricerca diretta di seno, essendo

$$\Delta x = 0{,}0174532925 \ldots ,$$

dalla (5), per $x_0 = 89°$, si ha $G_d < 0{,}039$; se ne deduce che

nella ricerca diretta di seno *l'interpolazione è lecita sempre.*

Nella ricerca inversa di seno, scorrendo la tavola, si vede che l'interpolazione occorre solo per x minore di 86° e che per

$$\begin{array}{lcccc} x < 57° & \text{si ha} & 10 \leqslant \Delta_T y \leqslant 18, & \text{da cui} & 3',333 \leqslant L_i \leqslant 6',000, \\ 57° < x < 71° & \text{"} & 5 < \Delta_T y < 10 & \text{"} & 6',000 < L_i < 12',000, \\ 71° < x < 79° & \text{"} & 3 < \Delta_T y \leqslant 5 & \text{"} & 12',000 \leqslant L_i < 20',000, \\ 79° < x < 86° & \text{"} & \Delta_T y \leqslant 3 & \text{"} & 20',000 \leqslant L_i \leqslant 30',000; \end{array}$$

ma dalla (6) si ha corrispondentemente

$$\begin{array}{lcl} 0',002 < G_i < 0',202, & \text{onde} & 3',335 < L_i + G_i < 6',202, \\ 0',209 < G_i < 0',381 & \text{"} & 6',209 < L_i + G_i < 12',381, \\ 0',402 < G_i < 0',674 & \text{"} & 12',402 < L_i + G_i < 20',674, \\ 0',741 < G_i < 1',873 & \text{"} & 20',741 < L_i + G_i < 31',873. \end{array}$$

Confrontando però i limiti successivamente trovati per G_i con i corrispondenti limiti di L_i, si vede che G_i si può ritenere trascurabile rispetto a L_i, onde si conclude che

nella ricerca inversa di seno *l'errore prodotto dalla interpolazione si può ritenere dato da* L_i *soltanto, e quindi per* x *minore di* 57°, *per* x *compreso fra* 57° *e* 71°, *per* x *maggiore di* 71° *questo errore si può ritenere rispettivamente minore di* 6′, *di* 12′ *e di* 30′ *(ossia di* 1, 2, 5 *decimi di grado).*

Osservazione I. — Per x minore di 6° la somma $L_i + G_i$ è minore di 3′,554, risultato che ci sarà utile in seguito.

Osservazione II. — Affinchè non sorga il dubbio che i limiti da noi indicati siano troppo elevati e che quindi, tentando altre vie, le precedenti conclusioni possano essere cambiate, si osservi, per es., che, dato sen $x = 0{,}9944914$, da una tavola in cui $n = 7$ e $(\Delta x) = 1'$ risulta $x > 83°59'$, mentre che dalla nostra tavoletta risulta $x = 83°30'$; l'errore effettivo è dunque maggiore di 29′.

E anche per le limitazioni (5) e (9) si possono trovare esempi che dimostrino essere anch'esse molto ristrette. Così, per le due seguenti ricerche (una diretta e l'altra inversa)

$$y = \text{sen}\, 89^\circ 30' \qquad \text{e} \qquad \text{sen}\, x = 0{,}8338858\,,$$

da una tavola in cui $n = 7$ e $(\Delta x) = 1'$ si ha

$$y = 0{,}9999619\,, \qquad \text{e} \qquad x = 56^\circ 30'\,,$$

mentre che da una tavola in cui, pure essendo $n = 7$, sia invece $(\Delta x) = 1^\circ$, colla interpolazione si ha

$$y = 0{,}9999239 \qquad \text{e} \qquad x = 56^\circ 30', 197\ldots.$$

Supposto $n = 3$, gli errori corrispondenti γ_d e γ_i (anche tenendo conto degli errori λ_d e λ_i) sono dunque (in valore assoluto)

$$0{,}03\ldots. \qquad \text{e} \qquad 0',197\ldots.$$

e le limitazioni accennate danno appunto in questi due casi

$$0{,}03 < g_d < 0{,}04 \qquad \text{e} \qquad 0',194 < g_i < 0',202.$$

§ 6. — Nella ricerca diretta di tangente, per $x_0 = 58^\circ$ e per $x_0 = 59^\circ$, dalla (7), si ha rispettivamente $G_d < 0{,}478$ e $G_d > 0{,}527$; se ne deduce che

nella ricerca diretta di tangente *l'interpolazione è lecita solo per* x *minore di* 59°.

Nella ricerca inversa di tangente, seguendo il procedimento seguìto nella ricerca inversa di seno, si vede che per

$$\begin{array}{rlrl}
x < 23^\circ & \text{si ha}\quad 17 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 20, & \text{da cui} & 3',000 \leqslant L_i < 3',530\,,\\
23^\circ < x < 28^\circ & \quad\text{»}\quad 21 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 22 & \text{»} & 2',727 < L_i < 2',858\,,\\
28^\circ < x < 40^\circ & \quad\text{»}\quad 22 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 29 & \text{»} & 2',068 < L_i < 2',728\,,\\
40^\circ < x < 65^\circ & \quad\text{»}\quad 30 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 95 & \text{»} & 0',631 < L_i \leqslant 2',000\,,\\
65^\circ < x < 82^\circ & \quad\text{»}\quad 101 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 801 & \text{»} & 0',074 < L_i < 0',595\,,\\
82^\circ < x < 84^\circ & \quad\text{»}\quad 1029 \leqslant \Delta_T\, y \leqslant 1370 & \text{»} & 0',043 < L_i < 0',058\,;
\end{array}$$

ma dalla (8) si ha corrispondentemente

$$\begin{array}{lcl}
0',004 < G_i < 0',112\,, & \text{onde} & 3',004 < L_i + G_i < 3',642\,,\\
0',117 < G_i < 0',141 & \text{»} & 2',844 < L_i + G_i < 2',999\,,\\
0',146 < G_i < 0',223 & \text{»} & 2',214 < L_i + G_i < 2',951\,,\\
0',231 < G_i < 0',583 & \text{»} & 0',862 < L_i + G_i < 2',583\,,\\
0',613 < G_i < 2',094 & \text{»} & 0',687 < L_i + G_i < 2',689\,,\\
2',435 < G_i < 2',905 & \text{»} & 2',478 < L_i + G_i < 2',963.
\end{array}$$

Di qui risulta che per x minore di 84° la somma $L_1 + G_1$ (pure restando certamente maggiore di 0',687) è generalmente minore di 3', onde si può concludere che

nella ricerca inversa di tangente, *quando* x *non risulti maggiore di* 84°, *l'errore prodotto dalla interpolazione si può ritenere minore di* 3' *(ossia di 5 centesimi di grado).*

Osservazione I. — Per x minore di 6°, la somma $L_1 + G_1$ è minore di 3',557 e G_1 è trascurabile rispetto ad L_1; risultato che ci sarà utile in seguito.

Osservazione II. — Per x compreso fra 84° e 85°, G_1 è maggiore di 3',590, quindi per x maggiore di 84° la somma $L_1 + G_1$ è certamente maggiore di 3'; altro risultato che ci sarà utile in seguito.

Osservazione III. — Da una tavola in cui $n = 7$ e $(\Delta x) = 1'$ si ha

$$\tan 58°30' = 1{,}6318517 \qquad \text{e} \qquad \tan 59°30' = 1{,}6676631\,,$$

mentre da una tavola, in cui, pure essendo $n = 7$, sia invece $(\Delta x) = 1°$, si ricava colla interpolazione

$$\tan 58°30' = 1{,}6323070 \qquad \text{e} \qquad \tan 59°30' = 2{,}6981652\,;$$

il valore assoluto dell'errore γ_a è dunque, rispettivamente

$$0{,}455\ldots \qquad \text{e} \qquad 0{,}502\ldots.$$

Analogamente a quanto si è detto nella Oss. II al § precedente, si può dunque dir qui che qualunque altra via si possa seguire nella ricerca di un limite per γ_a, la conclusione a cui siamo giunti non potrà essere cambiata mai. Osservazioni come queste si potrebbero fare anche in seguito.

§ **7.** — Nella ricerca diretta di secante, per $x_0 = 58°$ e per $x_0 = 59°$ dalla (9) si ha rispettivamente $G_a < 0{,}484$ e $G_a > 0{,}532$; se ne deduce che (come per la tangente)

nella ricerca diretta di secante *l'interpolazione è lecita solo per* x *minore di* 59°.

Per la ricerca inversa di secante si comincia dall'osservare che l'interpolazione occorre solo per x maggiore di 4°, poscia dopo pochi tentativi (§ 11, V. N.) si trova che il minimo di G_1 si ha per $x_0 = 35°$ e che questo minimo è uguale a 0',383... Dopo di ciò, seguendo il solito procedimento si vede che per

$x < 10^\circ$ si ha	$2 \leqslant \Delta_T y \leqslant 3$,	da cui $20',000 \leqslant L_1 \leqslant 30',000$,
$10^\circ < x < 16^\circ$	$3 \leqslant \Delta_T y \leqslant 5$	$12',000 \leqslant L_1 \leqslant 20',000$,
$16^\circ < x < 27^\circ$	$5 \leqslant \Delta_T y \leqslant 10$	$6',000 \leqslant L_1 \leqslant 12',000$,
$27^\circ < x < 40^\circ$	$10 \leqslant \Delta_T y \leqslant 18$	$3',333 < L_1 \leqslant 6',000$,
$40^\circ < x < 45^\circ$	$20 \leqslant \Delta_T y \leqslant 24$	$2',500 \leqslant L_1 \leqslant 3',000$,
$45^\circ < x < 66^\circ$	$26 \leqslant \Delta_T y \leqslant 93$	$0',645 < L_1 < 2',308$,
$66^\circ < x < 82^\circ$	$100 \leqslant \Delta_T y \leqslant 793$	$0',075 < L_1 \leqslant 0',600$,
$82^\circ < x < 84^\circ$	$1021 \leqslant \Delta_T y \leqslant 1361$	$0',044 < L_1 < 0',059$;

ma dalla (10) si ha corrispondentemente

$0',877 < G_1 < 1',901$,	onde	$20',877 < L_1 + G_1 < 31',901$,
$0',542 < G_1 < 0',799$		$12',542 < L_1 + G_1 < 20',799$,
$0',407 < G_1 < 0',542$		$6',407 < L_1 + G_1 < 12',542$,
$0',383 < G_1 < 0',390$		$3',716 < L_1 + G_1 < 6',390$,
$0',391 < G_1 < 0',407$		$2',891 < L_1 + G_1 < 3',407$,
$0',411 < G_1 < 0',677$		$1',056 < L_1 + G_1 < 2',985$,
$0',735 < G_1 < 2',121$		$2',810 < L_1 + G_1 < 2',721$,
$2',457 < G_1 < 2',926$		$2',501 < L_1 + G_1 < 2',985$.

Di qui risulta che per x compreso fra 40° e 84° la somma $L_1 + G_1$ (pure restando maggiore di $0',810$) è generalmente minore di $3'$; confrontando poscia i limiti successivamente trovati per G_1 quando x è minore di 40° con i corrispondenti limiti di L_1, si vede che fin a 40° (ossia fin dove la $\Delta_T y$ è al più eguale a 18, come per il seno) G_1 si può ritenere trascurabile rispetto ad L_1; onde si conclude che

nella ricerca inversa di secante *l'errore prodotto dalla interpolazione si può ritenere minore di 3' (ossia di 5 centesimi di grado) per* x *compreso fra 40° e 84°; per* x *minore di 40° l'errore stesso si può ritenere dato da* L_1 *soltanto, e quindi per* x *minore di 16°, per* x *compreso fra 16° e 27°, per* x *compreso fra 27° e 40°, questo errore si può ritenere rispettivamente minore di 30' di 12' e di 6' (ossia di 5, 2, 1 decimi di grado).*

Osservazione I. — Analogamente a quanto si è osservato nel precedente §, si osservi ora che per x compreso fra 84° e 85° si ha $G_1 = 3',609\ldots$ quindi se x è maggiore di 84° anche per la secante la somma $L_1 + G_1$ risulta maggiore di $3'$.

Osservazione II. — Il valore di G_0 per la secante è maggiore del valore di G_0 per tangente, perchè la diseguaglianza

$$\frac{\overline{\Delta x}^2}{4}\,\frac{\tan(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)} < \frac{\overline{\Delta x}^2}{8}\,\frac{1+\tan^2(x_0+\Delta x)}{\cos^2(x_0+\Delta x)}$$

equivale all'altra

$$[1 - \text{sen}\ (x_0 + \Delta x)]^2 > 0\,;$$

ne viene che, quando, nella ricerca diretta, l'interpolazione è lecita per la secante, a *fortiori* è lecita per la tangente.

§ 8. — Si è visto che nella ricerca diretta di tangente e di secante l'interpolazione non è lecita se x è maggiore di 59°.

Si supponga ora che l'arco dato non sia esatto, ma che sia affetto da un errore α, del quale, al solito, si indicherà con a un limite superiore inabbassabile, o il massimo: questo errore produrrà nella corrispondente tangente e nella corrispondente secante un errore ε, del quale un limite superiore inabbassabile, o il massimo, e (riferito alla solita unità) sarà dato da

$$e = 10^n \frac{a}{(\Delta x)} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]\,, \tag{11}$$

dove a s'intende espresso in ampiezza e riferito alla stessa unità cui è riferito (Δx).

Ciò posto, se si conviene che γ_a possa ritenersi trascurabile quando, in valore assoluto, risulta minore di e, la condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga, dalla (2) e dalla (11) risulta immediatamente essere

$$\gamma_i < a\,.$$

Venendo al nostro caso particolare e ricordando i limiti trovati per G_i nel § 6 e nella rispettiva oss. II, nel § 7 e nella rispettiva oss. I, si può quindi concludere che,

se si suppone che l'arco dato sia approssimato a 3' (che, cioè, sia arrotondato al decimo di grado) l'interpolazione nella ricerca diretta di tangente e di secante si può ammettere fino a 84°.

Osservazione I. — La precedente convenzione può portare nella tangente e nella secante un errore, che, essendo 1370 la massima differenza tavolare per l'intervallo considerato, ha per limite superiore $\frac{3}{60} 1371 = 68{,}56\ldots$. Ma, per giudicar dell'effetto che questo errore può portare in un semplice calcolo trigonometrico, è molto utile osservare in proposito che il corrispondente errore relativo è assai minore di questo limite. Infatti per la tangente questo error relativo è certo minore di

$$\frac{10^3}{20} \times \frac{\tan(x_0 + \Delta x) - \tan x_0}{\tan x_0} = \frac{10^3}{20}\left(\frac{\tan(x_0 + \Delta x)}{\tan x_0} - 1\right);$$

ma nell'intervallo che si considera, il rapporto che comparisce al secondo membro cresce al crescere di x_0, quindi basta porre $x = 83^\circ$ per concludere che l'error relativo in discorso è sempre minore di 8,5. Alla stessa conclusione si giunge considerando la secante.

Di questa osservazione devono, certo, aver tenuto conto quelli che, stampando delle tavole di valori naturali, nei valori di tangente e di secante di archi vicini a 90° diminuirono il numero delle cifre decimali (il che, a dir il vero, porta anche una notevole facilitazione tipografica).

Osservazione II. — Nell'intervallo nel quale, per la ricerca diretta di $\tan x$ e di $\sec x$, non si ammette che si possa fare l'interpolazione, potrebbe credersi opportuno calcolare invece $\tan(90^\circ - x)$, e $\sec(90^\circ - x)$, chè l'interpolazione allora è lecita, e poi fare le inverse dei valori così ricavati, che sarebbero precisamente $\operatorname{ctn}(90^\circ - x) = \tan x$ e $\csc(90^\circ - x) = \sec x$. Questo artifizio però non è lecito, perchè può portare ad errori assai sensibili.

Infatti, supposto che il valore di $\tan(90^\circ - x)$, così calcolato, risulti affetto da un errore δ, che (in valore assoluto) abbia per limite superiore inabbassabile d, il valore ottenuto per $\tan x$ risulta corrispondentemente affetto da un errore che ha per limite superiore inabbassabile

$$\frac{d}{[\tan(90^\circ - x_0) - d]^2}; \tag{12}$$

e basta supporre $x_0 = 83^\circ$ e $d = 0{,}0005$ (che, per $n = 3$, è il limite inabbassabile dell'errore di arrotondamento), perchè il valore della (12) superi 33 unità dell'ultimo ordine.

Così, volendosi $\tan 87^\circ 30'$, si avrebbe prima (dalla tavoletta in esame, applicando l'interpolazione)

$$\tan(90^\circ - 87^\circ 30') = \tan 2^\circ 30' = 0{,}044,$$

da cui

$$\tan 87^\circ 30' = 1 : 0{,}044 = 22{,}727\,;$$

mentre che da una tavola in cui $n = 7$ e $(\Delta x) = 1'$ si ha

$$\tan 87^\circ 30' = 22{,}903\ldots$$

l'errore è dunque certamente maggiore di 176.

Osservazione III. — Per gli intervalli nei quali l'interpolazione (nella ricerca diretta) non è lecita (da 59° in poi, se si vuole che risulti $G_a < 0{,}5$, da 84° in poi, se si ammette la convenzione fatta in questo §) occorre dunque una tavola in cui (Δx) sia minore di 1°. Si noti però che G_a al tendere di x_0 a $90^\circ - (\Delta x)$, tanto per la tangente quanto per la secante, tende sempre all'infinito, qualunque sia (Δx), e che quindi per (Δx) minore di 1° l'interpolazione potrà essere spinta oltre i limiti indicati, ma che sempre si arriverà a un altro limite oltre il quale l'interpolazione stessa non sarà più permessa. Per gli intervalli indicati, se l'uso della tangente o della secante è inevitabile, e se nel calcolo che si sta facendo questo inconveniente si presenta eccezionalmente, anzichè ricorrere a speciali artifizi (come nei logaritmi-trigonometrici) sarà quindi meglio dedurre questa tangente e questa secante dal rispettivo logaritmo.

Osservazione IV. — Per avere la tangente di un arco prossimo a 90°, il Cagnoli (*) propone la formula

$$\tan(x_0+\delta x)=\tan x_0+\frac{\operatorname{sen}\delta x}{\operatorname{sen}[90^\circ-x_0]\operatorname{sen}[(90^\circ-x)-\delta x]},$$

colla quale si evita l'errore dovuto alla applicazione del principio delle parti proporzionali (perchè tale errore, tanto nel calcolo di $\operatorname{sen}\delta x$ quanto in quello di $\operatorname{sen}[(90^\circ-x_0)-\delta x]$ è certamente trascurabile).

Ma l'illustre autore non ha pensato che il denominatore della frazione, che comparisce nel secondo membro, è molto piccolo e che quindi anche il solo errore λ_a di $\operatorname{sen}\delta x$ può portare in $\tan(x_0+\delta x)$ un errore sensibilissimo (**).

Così, volendosi $\tan 86°57'$, col procedimento proposto si trova 18,662, mentre invece da una tavola con $n=6$ e $\Delta x=1'$ si ha 18,767754; l'errore è dunque maggiore di 105.

§ **9.** — L'artifizio indicato nella oss. II al § prec., contrariamente a quanto avviene per la ricerca diretta, può invece essere applicato alla ricerca inversa.

Infatti, supposto che il valore dato di $\tan x$ sia affetto da un errore δ', il quale, in valore assoluto abbia per limite superiore inabbassabile d', il valore di $1:\tan x=\tan(90^\circ-x)$ risulterà affetto da un errore avente per limite superiore inabbassabile

$$\frac{d'}{[\tan x_0-d']^2},$$

per cui, facendo la ricerca inversa su $\tan(90^\circ-x)$, l'errore da cui risulterà affetto $90^\circ-x$, e quindi (in valore assoluto) x, avrà per limite superiore inabbassabile

$$\frac{d'}{[\tan x_0-d']^2}\times\frac{(\Delta x)}{\operatorname{ctn} x_0-\operatorname{ctn}(x_0+\Delta x)}.$$

(*) *Trigonometria piana e sferica.* Bologna, 1806, pag. 67.

(**) Un errore dello stesso genere è quello in cui è caduto l'Hoüel quando, per avere L sen x e L tan x di un arco piccolo x, ha proposto di calcolare prima sen x e tan x (con una tavola di valori naturali) e poi di ricavare i logaritmi di questi valori da una tavola di logaritmi dei numeri (v. § 31 della nostra nota, già citata, *Sulla ricerca del logaritmo seno ....*)

Ora, attribuendo a d' il valore 0,0005 (che per $n=3$ è il limite inabbassabile dell'errore di arrotondamento) e supponendo che a questo artifizio si ricorra solo per x maggiore di 84°, il limite precedente è certamente minore di 0',02; e alla stessa conclusione si arriva nel caso della secante (quando x si ricavi da sen $(90° - x) = 1 : \sec x$); dunque:

nella ricerca inversa di tangente *e di* secante, *se l'arco risulta maggiore di 84°, si possono calcolare prima le inverse dei valori dati e poi eseguire le corrispondenti ricerche su queste inverse.*

Osservazione I. — L'errore introdotto nell'arco dall'artifizio precedente è trascurabile rispetto all'errore dovuto alla interpolazione a cui si ricorre, giacchè il primo ha per limite 0',02, mentre il secondo ha per limite 3',557 se si tratti di una tangente (§ 6, oss. I), ha per limite 3',554 se si tratta di una secante (§ 5, oss. I).

Osservazione II. — Esaminando le limitazioni dei §§ 5, 6 e 7, si vede che G_1 verrebbe assai diminuito applicando l'artifizio precedente anche fra 40° e 84°, ma che così facendo non si raggiungerebbe una maggior approssimazione, perchè il vantaggio che si otterrebbe nella diminuzione di G_1 si perderebbe nell'accrescimenro di L_1.

Osservazione III. — Essendo, generalmente, il valore di $\tan x$, o di $\sec x$, sul quale si fa la ricerca inversa, il risultato di un calcolo, il limite d' si dovrebbe ritenere maggiore di quello dovuto al solo arrotondamento; ma anche supponendolo di 2 o 3 unità del terzo ordine, le conclusioni precedenti non sarebbero affatto alterate.

§ **10**. — Da tutte le considerazioni fatte sin qui, per l'uso della tavoletta annessa, risultano le seguenti norme.

Nella ricerca diretta, l'interpolazione è sempre lecita per il seno, mentre è lecita solo fino a 59° (ossia fino al segno *) per la tangente e per la secante; se però si ammette trascurabile l'errore prodotto nella tangente e nella secante da un errore di 3' nell'arco (che è l'errore dovuto all'arrotondamento al decimo di grado dell'arco stesso), l'interpolazione è lecita fino a 84° (ossia fin dove son segnate le differenze tavolari (*)).

Nella ricerca inversa l'interpolazione è lecita fin dove son segnate le differenze tavolari, avvertendo però che il corrispondente errore complessivo

per la tangente si può ritenere sempre minore di 3' (ossia di 5 centesimi di grado);

(*) Nelle tavole logaritmo-trigonometriche si danno, generalmente, le differenze tavolari anche dove l'interpolazione può portare errori sensibilissimi. Così, applicando l'interpolazione alla tavola di 1'' in 1'' del Bruhns (e l'autore stesso ne dà degli esempi nella introduzione) si ha L sen 50'',5 con 212 unità di errore.

per la secante si può ritenere minore di 3', se x risulta maggiore di 40° (ossia se la differenza tavolare è maggiore di 18), mentre che per x minore di 40° si può ritenere solo minore del quoziente di (Δx) per $\Delta_T y$;

per il seno (per il quale la differenza tavolare non è mai maggiore di 18) si può sempre ritenere solo minore del quoziente ora accennato.

Per l'intervallo in cui le differenze tavolari non sono segnate, si passi da $\tan x$ e da $\sec x$ alle rispettive inverse $\tan(90^{\circ} - x)$ e $\operatorname{sen}(90^{\circ} - x)$ e si eseguisca la ricerca su questi valori: gli errori corrispondenti si potranno ritenere uguali a quelli cui dà luogo l'interpolazione a cui si ricorre (§ 9, oss. I).

§ 11. — Resta a stabilire una norma per arrestare opportunamente il calcolo della parte proporzionale nella ricerca inversa, affinchè l'approssimazione raggiunta non sia illusoria (*).

Per ciò, dal riassunto fatto nel § prec. e dalle limitazioni trovate per $L_1 + G_1$ nei §§ 5, 6 e 7 risulta subito che

se l'arco è espresso in gradi e parti decimali di grado, esso deve essere limitato ai decimi di grado nel caso in cui la differenza tavolare a cui si ricorre è di una cifra sola, ai centesimi di grado in ogni altro caso.

Quando invece l'arco sia espresso in gradi e parti sessagesimali di grado (ed è questo il caso più comune), esso dovrebbe, corrispondentemente ai casi ora considerati, essere limitato alla cifra delle decine e alla cifra delle unità del numero dei primi, ma, per evitare insolite e imbarazzanti notazioni (**), è preferibile scrivere sempre il numero dei primi completo; dunque

se l'arco è espresso in gradi e parti sessagesimali di grado, esso deve essere limitato ai primi, sempre.

(*) La mancanza di queste norme produce nei calcoli mancanza di uniformità e, quel ch'è peggio, incertezza di criteri, i quali, anche per uno stesso autore, sono spesso contradittori. — V. in proposito il § 56 della nostra nota: *Sulle operazioni fra numeri decimali approssimati.* "Periodico di Matematica", 1904.

(**) V., p. es., BALTZER, *Die Elemente der Matematik*, pagg. 53 e 54 della V Edizione.

G. PESCI.

Valori naturali delle funzioni trigonometriche.

	sen	d	cos	d	tan	d	ctn	d	sec	d	csc	d	
0°	0,000		1,000		0,000		∞		1,000		∞		**90°**
		17		0		17				0			
1	0,017		1,000		0,017		57,290		1,000		57,299		**89**
		18		1		18				1			
2	0,035		0,999		0,035		28,636		1,001		28,654		**88**
		17		0		17				0			
3	0,052		0,999		0,052		19,081		1,001		19,107		**87**
		18		1		18				1			
4	0,070		0,998		0,070		14,301		1,002		14,336		**86**
		17		2		17				2			
5	0,087		0,996		0,087		11,430		1,004		11,474		**85**
		18		1		18				2			
6	0,105		0,995		0,105		9,514		1,006		9,567		**84**
		17		2		18		1370		2		1361	
7	0,122		0,993		0,123		8,144		1,008		8,206		**83**
		17		3		18		1029		2		1021	
8	0,139		0,990		0,141		7,115		1,010		7,185		**82**
		17		2		17		801		2		793	
9	0,156		0,988		0,158		6,314		1,012		6,392		**81**
		18		3		18		643		3		633	
10	0,174		0,985		0,176		5,671		1,015		5,759		**80**
		17		3		18		526		4		518	
11	0,191		0,982		0,194		5,145		1,019		5,241		**79**
		17		4		19		440		3		431	
12	0,208		0,978		0,213		4,705		1,022		4,810		**78**
		17		4		18		374		4		365	
13	0,225		0,974		0,231		4,331		1,026		4,445		**77**
		17		4		18		320		5		311	
14	0,242		0,970		0,249		4,011		1,031		4,134		**76**
		17		4		19		279		4		270	
15	0,259		0,966		0,268		3,732		1,035		3,864		**75**
		17		5		19		245		5		236	
16	0,276		0,961		0,287		3,487		1,040		3,628		**74**
		16		5		19		218		6		208	
17	0,292		0,956		0,306		3,271		1,046		3,420		**73**
		17		5		19		193		5		184	
18	0,309		0,951		0,325		3,078		1,051		3,236		**72**
		17		5		19		174		7		164	
19	0,326		0,946		0,344		2,904		1,058		3,072		**71**
		16		6		20		157		6		148	
20	0,342		0,940		0,364		2,747		1,064		2,924		**70**
		16		6		20		142		7		134	
21	0,358		0,934		0,384		2,605		1,071		2,790		**69**
		17		7		20		130		8		121	
22	0,375		0,927		0,404		2,475		1,079		2,669		**68**
		16		6		20		119		7		110	
23	0,391		0,921		0,424		2,356		1,086		2,559		**67**
		16		7		21		110		9		100	
24	0,407		0,914		0,445		2,246		1,095		2,459		**66**
		16		8		21		101		8		93	
25	0,423		0,906		0,466		2,145		1,103		2,366		**65**
		15		7		22		95		10		85	
26	0,438		0,899		0,488		2,050		1,113		2,281		**64**
		16		8		22		87		9		78	
27	0,454		0,891		0,510		1,963		1,122		2,203		**63**
		15		8		22		82		11		73	
28	0,469		0,883		0,532		1,881		1,133		2,130		**62**
		16		8		22		77		10		67	
29	0,485		0,875		0,554		1,804		1,143		2,063		**61**
		15		9		23		72		12		63	
30	0,500		0,866		0,577		1,732		1,155		2,000		**60**
		15		9		24		68		12		58	
31	0,515		0,857		0,601		1,664 *		1,167		1,942 *		**59**
		15		9		24		64		12		55	
32	0,530		0,848		0,625		1,600		1,179		1,887		**58**
		15		9		24		60		13		51	
33	0,545		0,839		0,649		1,540		1,192		1,836		**57**
		14		10		26		57		14		48	
34	0,559		0,829		0,675		1,483		1,206		1,788		**56**
		15		10		25		55		15		45	
35	0,574		0,819		0,700		1,428		1,221		1,743		**55**
		14		10		27		52		15		42	
36	0,588		0,809		0,727		1,376		1,236		1,701		**54**
		14		10		27		49		16		39	
37	0,602		0,799		0,754		1,327		1,252		1,662		**53**
		14		11		27		47		17		38	
38	0,616		0,788		0,781		1,280		1,269		1,624		**52**
		13		11		29		45		18		35	
39	0,629		0,777		0,810		1,235		1,287		1,589		**51**
		14		11		29		43		18		33	
40	0,643		0,766		0,839		1,192		1,305		1,556		**50**
		13		11		30		42		20		32	
41	0,656		0,755		0,869		1,150		1,325		1,524		**49**
		13		12		31		39		21		30	
42	0,669		0,743		0,900		1,111		1,346		1,494		**48**
		13		12		33		39		21		28	
43	0,682		0,731		0,933		1,072		1,367		1,466		**47**
		13		12		33		36		23		26	
44	0,695		0,719		0,966		1,036		1,390		1,440		**46**
		12		12		34		36		24		26	
45	0,707		0,707		1,000		1,000		1.414		1.414		**45**
	cos	d	sen	d	ctn	d	tan	d	csc	d	sec	d	

Si ammetta che l'interpolazione sia lecita solo fin dove son segnate le differenze tavolari; nella ricerca inversa però, quando le differenze tavolari non sono segnate, si può calcolare prima $1 : \tan x = \tan(90^\circ - x)$ e $1 : \sec x = \text{sen}(90^\circ - x)$ e poi fare la ricerca di $90^\circ - x$ sui quozienti così ottenuti.

Se l'arco è espresso in gradi e parti centesimali di grado, si arresti il calcolo della parte proporzionale (nella ricerca inversa) ai decimi di grado nel caso in cui la differenza tavolare risulti di una cifra sola, ai centesimi di grado in ogni altro caso; se invece l'arco è espresso in gradi e parti sessagesimali di grado, si arresti il calcolo stesso al numero dei primi, sempre.

SULLE FUNZIONI SFERICHE

Com'è noto, Legendre chiamò funzione sferica il coefficiente della potenza di α nello sviluppo della funzione:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

dove α, x sono reali minori di 1.

Indicando con X_n il coefficiente di α^n, esso sarà, per definizione, la funzione sferica n-esima e la sua espressione sarà:

$$X_n=\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}x^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-...\right]$$

quindi:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}X_n\,\alpha^n. \tag{1}$$

Essendo le funzioni sferiche molto interessanti in parecchie quistioni di Analisi e di Fisica matematica ed avendo, specialmente, numerose applicazioni nella teoria dell'Attrazione ed in quella delle perturbazioni dei pianeti, potrebbe riuscire utile far vedere come tali importanti funzioni si possono ottenere con procedimenti assai più semplici di quelli sinora usati.

Derivando l'espressione (1) rispetto ad x ed α, ed indicando con X'_n la derivata di X_n rispetto ad x, si ha

$$\alpha\,(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}X'_n\,\alpha^n \tag{2}$$

$$(x-\alpha)\,(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}n\,X_n\,\alpha^{n-1}. \tag{3}$$

Moltiplicando la (2) per $x-\alpha$ e la (3) per α e sottraendo la seconda dalla prima, si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(x-\alpha)\,X'_n-n\,X_n]\,\alpha^n=0$$

ovvero:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[x\,X'_n-\alpha\,X'_n-n\,X_n]\,\alpha^n=0$$

ossia:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[x\,X'_n-X'_{n-1}-n\,X_n]\,\alpha^n=0$$

Siccome x^n, per ipotesi, non può essere nullo, debbono essere nulli i coefficienti e si avrà:

$$x X'_n - X'_{n-1} - n X_n = 0. \qquad (a)$$

Derivando questa rispetto ad x, si ha:

$$x X''_n + X'_n - X''_{n-1} - n X'_n = 0. \qquad (4)$$

Ora sappiamo che le funzioni sferiche soddisfano all'equazione differenziale:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2) X'_n] + n(n+1) X_n = 0$$

e da qui si ha:

$$(1-x^2)\frac{dX'_n}{dx} - 2x X'_n + n(n+1) X_n) = 0$$

ovvero:

$$(1-x^2) X''_n - 2x X'_n + n(n+1) X_n = 0 \qquad (5)$$

e, cambiando n in $n-1$:

$$(1-x^2) X''_{n-1} - 2x X'_{n-1} + n(n-1) X_{n-1} = 0. \qquad (6)$$

Dalle (5) (6), si ha:

$$X''_n = \frac{2x X'_n - n(n+1) X_n}{1-x^2}$$

$$X''_{n-1} = \frac{2x X'_{n-1} - n(n-1) X_{n-1}}{1-x^2}.$$

Sostituendo queste derivate seconde nella (4) abbiamo:

$$\frac{2x^2 X'_n - n(n+1) x X_n}{1-x^2} + X'_n - \frac{2x X'_{n-1} - n(n-1) X_{n-1}}{1-x^2} - n X'_n = 0$$

ovvero:

$$X'_n [2x^2 + (1-x^2) - n(1-x^2)] - \\ 2x X'_{n-1} - n(n+1) x X_n + n(n-1) X_{n-1} = 0$$

ossia:

$$X'_n [2x^2 - (1-x^2)(n-1)] - \\ 2x X'_{n-1} - n(n+1) x X_n + n(n-) X_{n-1} = 0.$$

Sostituendo in questa equazione per $n X_n$ il valore dato dalla (a), abbiamo:

$$X'_n [2x - (1-x^2)(x-1)] - \\ 2x X'_{n-1} - x(n+1)[x X'_n - X'_{n-1}] + n(n-1) X_{n-1} = 0$$

cioè:

$$X'_n[2x^2-(1-x^2)(n-1)-x^2(n+1)]+$$
$$X'_{n+1}[x(n+1)-2x]+n(n-1)X_{n-1}=0$$

semplificando:

$$X'_n(1-n)+X'_{n-1}(n-1)x+n(n-1)X_{n-1}=0$$

ovvero:

$$X'_n(n-1)=X'_{n-1}(n-1)x+n(n-1)X_{n-1}=0$$

ossia:

$$X'_n=nX_{n-1}+xX'_{n-1}. \qquad (b)$$

Moltiplico, ora, questa per x e metto al posto di xX'_n l'espressione: $X'_{n-1}+nX_n$ data dalla (a) e si ottiene:

$$X'_{n-1}+nX_n=nxX_{n-1}+x^2X'_{n-1}$$

da cui, ottengo, finalmente:

$$nX_n-nxX_{n-1}+(1-x^2)X'_{n-1}=0. \qquad (c)$$

Relazione molto utile per ottenere successivamente tutte le funzioni sferiche X_n. Di più questa relazione e la (b) offrono una certa semplicità per dedurre tutte le proprietà delle funzioni sferiche.

Vediamo come si possa ricavare la nota relazione:

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0$$

mediante la quale la X_n si esprime in funzione di due X adiacenti.

Cambiando nella (c) n in $n+1$:

$$(n+1)X_{n+1}-(n+1)xX_n+(1-x^2)X'_n=0$$

mettiamo al posto di X'_n la (b):

$$(n+1)X_{n+1}-(n+1)xX_n+n(1-x^2)X_{n-1}+x(1-x^2)X'_{n-1}=0. \qquad (h)$$

Ora la (c) dà:

$$-(1-x^2)X'_{n-1}=nX_n-nxX_{n-1}$$

e, moltiplicando per x:

$$-(1-x^2)xX'_{n-1}=nxX_n-nx^2X_{n-1},$$

ovvero:

$$(1-x^2)xX'_{n-1}+nxX_n-nx^2X_{n-1}=0$$

e, sommando questa colla precedente (h), si ottiene:

$$(n+1)X_{n+1}-(1-x^2)xX'_{n-1}-(n+1)xX_n+n(1-x^2)X_{n-1}+$$
$$+x(1-x^2)X'_{n-1}-nxX_n+nx^2X_{n-1}=0$$

ossia:

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)x+nX_{n-1}=0.$$

Vediamo come si possa ricavare anche la relazione nota:

$$X'_{n+1} - X'_{n-1} - (2n+1) X_n = 0.$$

Cambiando nella (b) n in $n+1$:

$$X'_{n+1} = (n+1) X_n + x X'_n$$

mettendo in quest'ultima relazione al posto di X'_n la (b), otteniamo:

$$X'_{n+1} = (n+1) X_n + x [n X_{n-1} + x X'_{n-1}]$$

ovvero:

$$X'_{n-1} = n X_n + X_n + nx X_{n-1} + x^2 X'_{n-1}$$

sottraendo da questa relazione la (c) e riducendo, abbiamo:

$$X'_{n+1} - X'_{n-1} - (2n+1) X_n = 0.$$

Ernesto Izzo.

FRAZIONI, RELAZIONI ED ASTRAZIONI

Sono lieto che la mia *Introduzione alla teoria delle frazioni* [1] abbia offerto occasione al prof. Corradino Mineo [2] di richiamare l'attenzione degli studiosi italiani su *The principles of Matematics* del Russell [3] e gli son grato dell'esatto raffronto tra le due definizioni, del Russell e mia, di numero *razionale*, perchè chiunque del Russell conosceva soltanto quella più nota di numero *cardinale* poteva esser tratto a ritenere che analoghe definizioni egli avesse dato per le altre specie di numeri, cosicchè io non avessi fatto altro che adottare una definizione del Russell; mentre invece — interrompendo non felicemente l'uniformità di metodo — il Russell ha tratto i concetti di numero *razionale* e di numero *relativo* dalla sua teoria delle *relazioni*. [4]

Ora, a proposito di questa teoria, mi si conceda di ricordare che sin dal 1906, per confutare un'asserzione del Poincaré, [5] ho *definito* il concetto di *relazione* [6] assunto quale *primitivo* dal Russell ed ho dimostrato tutte le proposizioni date da lui quali *primitive*, fra cui quelle trascritte con tale indicazione dal prof. Mineo; il che anzi agevola l'adozione della teoria *relativista* dei numeri *razionali*, accennata dal Russell e più ampiamente svolta dal prof. Mineo, a chi la ritenesse didatticamente preferibile alla mia.

(1) " Bollettino della *Mathesis* ", n. 7-9, Padova, 1909.
(2) *I numeri razionali secondo Bertrand Russell*, " Periodico di Matem. ", fasc. V, Livorno, 1910.
(3) Cambridge, 1903.
(4) *Sur la théorie des relations*, " Revue de Mathématiques ", t. VII, n. 2, Turin, 1901.
(5) In *Les mathématiques et la logique*, " Revue de Métaph. ed de Morale ", n. 6, Paris, 1905.
(6) *Che cos'è una relazione?* Acc. reale delle scienze di Torino, 1905-906.

Mi si consenta anche di chiarire che l'apparente derivazione generica delle mie idee da quelle del Russell è conseguenza necessaria della conformità sua e mia nel modo di considerare talune questioni logiche, perchè il volontario abbandono delle consuete *definizioni per astrazione* (mai usate da me in alcuno dei numerosi scritti anteriori a quelli ricordati del Russell), per cui soltanto la teoria dei numeri cardinali del Russell si differenzia da quella di G. Cantor, deriva dalla persuasione che *avendo definito l'eguaglianza in generale, non sia più lecito stabilire per definizione il significato di alcuna eguaglianza particolare*; persuasione espressa precisamente con queste parole nel cap. IV delle mie *Note di Logica matematica*, (1) anteriori al primo lavoro citato del Russell (nel quale dichiara di averle lette e di adottare anzi un simbolo da me ivi proposto).

Infine, per chiarire il dubbio espresso dal prof. Mineo a proposito di una noticina alla mia *Introduzione* ecc., che può esser riuscita oscura anche ad altri, ecco la mia *definizione esplicita* cui alludevo (2) e che è indipendente dal *principio di astrazione* del Russell:

Se K è una *classe* in cui R è una *relazione egualiforme* e se a è un individuo arbitrario di K, allora

" astrazione di a rispetto ad R "

significa " l'insieme di tutti e soli quei K che stanno nella relazione R con a ".

Queste chiose non mirano a togliere pregio allo scritto del professore Mineo, cui sono grato dei giudizi benevoli a mio riguardo.

ALESSANDRO PADOA.

SULLA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI

dei primi n numeri naturali

1. Data la somma

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = S_p$$

è noto che S_p è funzione di grado $p+1$ di n e priva del termine indipendente da n.

Posto allora:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = A_1 n^{p+1} + A_2 n^p + \ldots + A_{p+1} n \qquad (1)$$

(1) " Rivista di Matematica ", t. VI, Torino, 1899.

(2) *Dell'astrazione matematica* in *Questioni filosofiche*, Bologna-Modena, 1908; ivi accenno appunto agli scritti del Russell e del Couturat.

dove le A_k sono coefficienti indeterminati, passiamo alla determinazione dei coefficienti stessi.

Aggiungendo la quantità $(n+1)^p$ ai due membri della (1) si otterrà:

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p + (n+1)^p = \\ A_1 n^{p+1} + A_2 n^p + \ldots + A_{p+1} n + (n+1)^p \quad (2)$$

e cambiando, sempre nella (1), n in $n+1$, si avrà ancora:

$$1^p + 2^p + \ldots + (n+1)^p = \\ = A_1 (n+1)^{p+1} + A_2 (n+1)^p + \ldots + A_{p+1} (n+1). \quad (3)$$

Le (2) e (3) dànno quindi l'uguaglianza:

$$A_1 n^{p+1} + A_2 n^p + \ldots + A_{p+1} n + (n+1)^p = \\ = A_1 (n+1)^{p+1} + A_2 (n+1)^p + \ldots + A_{p+1} (n+1)$$

la quale, sviluppati ed ordinati i due membri secondo le potenze decrescenti di n, prenderà la forma:

$$\begin{gathered} A_1 n^{p+1} + \left[A_2 + \binom{p}{0}\right] n^p + \left[A_3 + \binom{p}{1}\right] n^{p-1} + \ldots \\ \ldots + \left[A_{p+1} + \binom{p}{p-1}\right] n + \binom{p}{p} = A_1 \binom{p+1}{0} n^{p+1} + \\ + \left[A_1 \binom{p+1}{1} + A_2 \binom{p}{0}\right] n^p + \left[A_1 \binom{p+1}{2} + A_2 \binom{p}{1} + A_3 \binom{p-1}{0}\right] n^{p-1} + \ldots \\ \ldots + \left[A_1 \binom{p+1}{p} + A_2 \binom{p}{p-1} + \ldots + A_{p+1} \binom{1}{0}\right] n + \quad (4) \\ + \left[A_1 \binom{p+1}{p+1} + A_2 \binom{p}{p} + \ldots + A_{p+1} \binom{1}{1}\right]. \end{gathered}$$

Dovendo la (4) sussistere identicamente, per qualsiasi valore di n, bisognerà uguagliare, nei due membri di essa, i coefficienti delle stesse potenze di n.

Si avranno quindi, previo scambio di membri e sottrazione dei termini comuni nei membri di ciascuna di esse, le seguenti relazioni in forma ricorrente:

$$\begin{aligned} & A_1 \binom{p+1}{1} = \binom{p}{0} \\ & A_1 \binom{p+1}{2} + A_2 \binom{p}{1} = \binom{p}{1} \\ & A_1 \binom{p+1}{3} + A_2 \binom{p}{2} + A_3 \binom{p-1}{1} = \binom{p}{2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (5) \\ & A_1 \binom{p+1}{p} + A_2 \binom{p}{p-1} + \ldots + A_p \binom{2}{1} = \binom{p}{p-1} \\ & A_1 \binom{p+1}{p+1} + A_2 \binom{p}{p} + \ldots + A_{p+1} \binom{1}{1} = \binom{p}{p}. \end{aligned}$$

2. Le (5) permettono di calcolare le A_k mediante successive sostituzioni; ma poichè conosciamo la forma generale della (5), data da

$$A_1\binom{p+1}{k}+A_2\binom{p}{k-1}+\ldots+A_k\binom{p-k+2}{1}=\binom{p}{k-1}$$

si ha pure direttamente:

$$A_k=\frac{1}{(p+1)p\ldots(p-k+2)}\begin{vmatrix}\binom{p+1}{1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \binom{p}{0}\\ \binom{p+1}{2} & \binom{p}{1} & 0 & \ldots & 0 & 0 & \binom{p}{1}\\ \binom{p+1}{3} & \binom{p}{2} & \binom{p-1}{1} & \ldots & 0 & 0 & \binom{p}{2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \binom{p+1}{k-2} & \binom{p}{k-3} & \binom{p-1}{k-4} & \ldots & \binom{p-k+4}{1} & 0 & \binom{p}{k-3}\\ \binom{p+1}{k-1} & \binom{p}{k-2} & \binom{p-1}{k-3} & \ldots & \binom{p-k+4}{2} & \binom{p-k+3}{1} & \binom{p}{k-2}\\ \binom{p+1}{k} & \binom{p}{k-1} & \binom{p-1}{k-2} & \ldots & \binom{p-k+4}{3} & \binom{p-k+3}{2} & \binom{p}{k-1}\end{vmatrix} \quad (6)$$

epperò:

$$1^p+2^p+\ldots+n^p=\sum_{k=1}^{k=p+1}\frac{1}{(p+1)p\ldots(p-k+2)}\begin{vmatrix}\binom{p+1}{1} & 0 & \ldots & 0 & \binom{p}{0}\\ \binom{p+1}{2} & \binom{p}{1} & \ldots & 0 & \binom{p}{1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \binom{p+1}{k-1} & \binom{p}{k-2} & \ldots & \binom{p-k+3}{2} & \binom{p}{k-2}\\ \binom{p+1}{k} & \binom{p}{k-1} & \ldots & \binom{p-k+3}{2} & \binom{p}{k-1}\end{vmatrix} n^{p-k+2} \quad (7)$$

che è appunto la relazione che volevamo stabilire.

Dalla (6), facendo successivamente $k=1,2,3,\ldots$, si ricava:

$$A_1=\frac{1}{p+1}\left|\binom{p}{0}\right|=\frac{1}{p+1}$$

$$A_2=\frac{1}{(p+1)\,p}\begin{vmatrix}\binom{p+1}{1} & \binom{p}{0}\\ \binom{p+1}{2} & \binom{p}{1}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$A_3=\frac{1}{(p+1)\,p\,(p-1)}\begin{vmatrix}\binom{p+1}{1} & 0 & \binom{p}{0}\\ \binom{p+1}{2} & \binom{p}{1} & \binom{p}{1}\\ \binom{p+1}{3} & \binom{p}{2} & \binom{p}{2}\end{vmatrix}=\frac{p}{12}$$

. . . .

La (7) offre il vantaggio di far conoscere direttamente S_p indipendentemente dai valori inferiori di p.

Così, ad es., per $p=7$ si ha subito:

$$1^7+2^7+\ldots+n^7=\sum_{k=1}^{k=8}\frac{1}{8.7\ldots(9-k)}\begin{vmatrix}\binom{8}{1} & 0 & \ldots & 0 & \binom{7}{0}\\ \binom{8}{2} & \binom{7}{1} & \ldots & 0 & \binom{7}{1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \binom{8}{k-1} & \binom{7}{k-2} & \ldots & \binom{10-k}{1} & \binom{7}{k-2}\\ \binom{8}{k} & \binom{7}{k-1} & \ldots & \binom{10-k}{2} & \binom{7}{k-1}\end{vmatrix}n^{9-k}=$$

$$=\frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2=\frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24}.$$

3. Al determinante (6) è applicabile una notevole semplificazione. Sviluppandone infatti la matrice secondo gli elementi della prima orizzontale si ha:

$$A_k=\frac{1}{(p+1)p\ldots(p-k+2)}\left[\binom{p+1}{1}\Delta_1+(-1)^{k+1}\binom{p}{0}\Delta_k\right]$$

dove con Δ_1 e Δ_k si sono indicati rispettivamente i complementi del primo e l'ultimo elemento della stessa orizzontale.

Ma $\Delta_1=0$, avendo eguali rispettivamente gli elementi della prima e dell'ultima verticale, quindi:

$$A_k=\frac{(-1)^{k+1}}{(p+1)p\ldots(p-k+2)}\begin{vmatrix}\binom{p+1}{2} & \binom{p}{1} & \ldots & 0 & 0\\ \binom{p+1}{3} & \binom{p}{2} & \ldots & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \binom{p+1}{k-1} & \binom{p}{k-2} & \ldots & \binom{p-k+4}{2} & \binom{p-k+3}{1}\\ \binom{p+1}{k} & \binom{p}{k-1} & \ldots & \binom{p-k+4}{3} & \binom{p-k+3}{2}\end{vmatrix}$$

la quale uguaglianza, evidentemente, ha però significato solo per $k\geqslant 3$.

Fabio Ferrari.

UN BREVE CENNO SUGLI INSIEMI

Col nome di *insieme* intenderemo un gruppo di un numero finito od infinito di elementi qualsiansi.

La teoria degli insiemi e della loro cosidetta *potenza* è di data relativamente recente ed è uno degli argomenti più attraenti, anche dal lato filosofico, che possa presentare la matematica pura. [1]

Si dice che due insiemi hanno la stessa *potenza* quando fra i loro elementi si possa stabilire una corrispondenza univoca e reciproca.

Per esempio l'insieme infinito di numeri interi ha la stessa potenza di quello costituito dai numeri pari, poichè è evidente che ad ogni intero K si può far corrispondere il numero pari 2K e viceversa. Così pure l'insieme dei numeri interi ha la stessa potenza dell'insieme dei seguenti numeri

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & . & . & . & . & . & . & . \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

disposti in un quadrato di dimensioni infinite; ciò si comprende subito disponendo gli elementi del quadro nell'ordine seguente:

$$a_{11}\,;\quad a_{21}\ a_{12}\,;\quad a_{31}\ a_{22}\ a_{23}\,;\quad a_{41}\ a_{32}\ a_{23}\ a_{14}\,;\ .\ .\ .\ .\ .$$

in cui si vede come ad ogni elemento ci si possa far corrispondere un numero intero.

Ora siccome una frazione $\frac{r}{s}$ si può indicare col simbolo a_{rs} ne dedurremo che l'insieme di tutti i numeri razionali ha la stessa potenza dell'insieme di tutti i numeri interi. Tutti gli insiemi di infiniti elementi aventi questa potenza diconsi *numerabili*, poichè i loro elementi, potendoli far corrispondere alla serie dei numeri interi si possono numerare. Questi insiemi godono quindi della proprietà di avere per ogni loro elemento, uno che lo precede ed un altro che lo segue. Da quanto precede si scorge anche che un insieme numerabile resta tale anche se in esso si sopprime un insieme infinito numera-

[1] Per non citare altro, il lettore che voglia fare uno studio su questo argomento, legga il volume *Leçons sur la théorie des fonctions* di Emile Borel. Paris, Gautier-Villars.

bile di elementi; basterebbe infatti dai numeri razionali sopprimere i numeri frazionari per avere l'insieme numerabile degli interi.

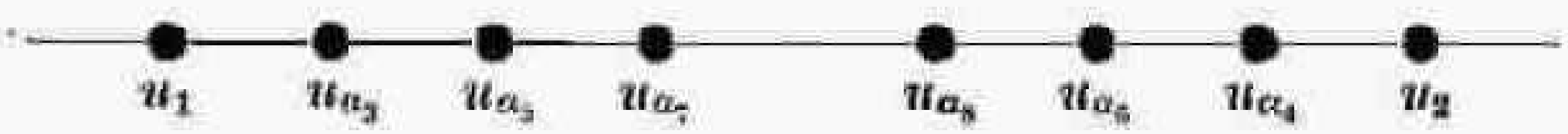
Vi sono però degli insiemi che evidentemente non possono essere numerabili: tale è infatti l'insieme di tutti i punti situati ad esempio sopra un segmento di linea retta.

Ci basti far vedere che l'insieme dei numeri reali compresi ad es. fra 0 ed 1 non può essere numerabile e quindi posto in corrispondenza univoca con gli elementi della successione:

$$u_1 \; u_2 \; u_3 \ldots u_n \ldots \tag{1}$$

in cui gli u sono tutti compresi fra 0 ed 1.

Ed invero dato il segmento $0-1$



in cui, supposto $u_1 < u_2$, ed u_{α_3} il primo u di (1) compreso fra u_1 ed u_2, u_{α_4} il primo u di (1) compreso fra u_{α_3} ed u_2 (si noti che sarà $\alpha_4 > \alpha_3$) ed in generale $u_{\alpha_{n+2}}$ il primo u di (1) compreso fra u_{α_n} ed $u_{\alpha_{n-1}}$, è chiaro che gli indici α debbono andar crescendo oltre ogni limite e che i numeri delle due successioni

$$u_1 \;\; u_{\alpha_3} \;\; u_{\alpha_5} \;\; u_{\alpha_7} \ldots ; \qquad u_2 \;\; u_{\alpha_4} \;\; u_{\alpha_6} \;\; u_{\alpha_8} \ldots$$

debbono, gli uni, andar sempre crescendo, e gli altri, sempre diminuendo, tendendo a due limiti v e w $(v \leqslant w)$.

Dico che v non appartiene all'insieme numerabile.

Se infatti fosse

$$v = u_k$$

noi potremmo sempre prendere n tale che sia $\alpha_n > k$ e dovrebbe essere u_k compreso fra u_{α_n} ed $u_{\alpha_{n+1}}$, cosa impossibile.

L'insieme dei punti di un segmento non è dunque numerabile.

Potremo ora dimostrare che l'insieme infinito C' che si ottiene da C sopprimendo da esso un insieme numerabile N di elementi, ha la stessa potenza di C.

Avremo infatti

$$C = N + C'$$

e potremo analogamente scrivere:

$$C' = N' + C'' \tag{1}$$

essendo N' un insieme numerabile contenuto in C'.

Facendo

$$N + N' = N''$$

avremo:

$$C = N'' + C'' \qquad (2)$$

ed essendo N'' un insieme numerabile si deduce dalla (1) e dalla (2) che C e C' hanno la stessa potenza.

Si vede quindi che dato un insieme infinito qualunque, si può in esso trascurare un'infinità numerabile di elementi senza che l'insieme perda la sua potenza. Gli insiemi numerabili stanno quindi agli altri insiemi come un infinito di 1° ordine sta a quelli di ordine superiore.

Un insieme come quello già citato, formato da tutti i punti di un segmento, dicesi avere la potenza del *continuo* e si può con tutta facilità vedere che i punti di qualsiasi altro segmento formano un insieme avente la stessa potenza. Basta infatti, per accertarsi, unire un'estremità di un segmento con un'estremità dell'altro e fare altrettanto colle altre due estremità, conducendo poi dal punto d'incontro delle due congiungenti delle trasversali che seghino i due segmenti dati, e verificare che realmente si può stabilire una corrispondenza univoca fra i loro punti. Altrettanto può farsi fra i punti di un segmento e quelli di una retta e questa, essendo evidentemente composta di una infinità numerabile di segmenti, si può dire che un'infinità numerabile di insiemi aventi la potenza del continuo costituisce un insieme che ha pure la potenza del continuo.

Ne deriva subito che l'insieme dei numeri reali compresi fra due limiti dati, od anche l'insieme di tutti i numeri reali, ha la potenza del continuo e per quanto si è precedentemente notato tale potenza non resterebbe alterata anche se da quell'insieme si sopprimesse l'insieme numerabile dei numeri razionali. Il che è quanto dire che i numeri razionali pure essendo infiniti rappresentano ciò nondimeno una parte infinitamente piccola dei numeri reali.

Dato dunque, a caso, un punto sopra una punteggiata, è infinitamente probabile che esso corrisponda ad un numero irrazionale, o, ciò che è lo stesso, date a caso due grandezze omogenee qualunque, è infinitamente probabile che esse siano incommensurabili.

Teoricamente si potrebbe quindi asserire, con una infinita probabilità di non sbagliare, che, ad es., non vi è un uomo, in tutto il mondo, che sia alto metri 1,70.

Vi sono degli insiemi che hanno una potenza maggiore ancora di quella del *continuo*. Tralasciando ora di parlare di essi, vogliamo solo far osservare che parrebbero tali quegli insiemi che sono costituiti da una infinità, avente la potenza del continuo, di insiemi, ciascuno dei quali ha pure la potenza del continuo. G. Cantor ha però dimostrato che ciò non è, ma che tali insiemi hanno anch'essi la potenza del continuo.

Ed infatti un insieme di quelli citati è evidentemente dato dai punti interni ad un quadrato, che, per fissare le idee, supporremo quello i cui lati, riferiti ai due assi cartesiani x ed y, hanno rispettivamente per equazioni:

$$x=0; \quad x=1; \quad y=0; \quad y=1.$$

È facile constatare che l'insieme dei punti di questo quadrato ha la stessa potenza dell'insieme formato dai punti del segmento che va da zero ad uno. Il che per quanto si è già detto, equivale a far vedere che l'insieme dei punti del quadrato aventi le loro coordinate irrazionali ha la stessa potenza dell'insieme degli irrazionali compresi fra 0 ed 1.

Infatti essendo z un numero compreso fra 0 ed 1, riducendolo in frazione continua avremo:

$$z=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\ldots}}}}$$

essendo le α degli interi diversi da zero.

Se ora poniamo ad es.

$$x=\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_5+\ldots}}}\;; \qquad y=\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_4+\cfrac{1}{\alpha_6+\ldots}}}$$

è chiaro che determinato z sono pure determinati x ed y e viceversa. È evidente che se in luogo di due sole variabili x ed y ne avessimo un numero finito qualunque il teorema sussisterebbe sempre e si potrebbe anche dimostrare che sarebbe pure vero per un insieme infinito numerabile di variabili.

Potremmo quindi, in particolare, asserire, che l'insieme dei punti compresi in un cubo, od in uno spazio qualunque, od in qualunque iperspazio, ha la potenza del continuo, e che quindi si potrebbe stabilire una corrispondenza univoca fra i suoi punti e quelli di un segmento comunque piccolo.

Adrasto Calegari.

SU TALUNE SUCCESSIONI DI NUMERI INTERI
e sul loro uso nell'analisi indeterminata di secondo grado

1. Una successione Z di numeri interi, illimitata nei due sensi opposti,

$$\ldots z_{-2},\ z_{-1},\ z_0,\ z_1,\ z_2, \ldots$$

ove risulti costantemente

$$z_{n+1} = z_n + z_{n-1},$$

gode di svariatissime proprietà, fra le quali, per lo scopo che si vuol raggiungere in questa Nota, giova ricordare solo le seguenti:

Se si moltiplicano tutti i termini di una successione Z per un numero intero qualunque, e in particolare se si cambiano di segno tutti i termini, si ottiene ancora una successione Z.

Se due termini consecutivi di una successione Z hanno un divisor comune d, tutti i termini hanno lo stesso divisore; e dividendo tutti i termini per d si ha una successione Z.

Una successione Z nella quale i valori assoluti di due termini consecutivi sono numeri primi tra loro si dirà *irriducibile*; e si dirà *riducibile* nel caso contrario.

Se due successioni Z si addizionano o si sottraggono termine a termine, si ottiene ancora una successione Z. In particolare se z_n è il termine generico di una successione Z, e p, q, r sono numeri interi, l'espressione

$$pz_n + qz_{n+r}$$

descrive, al variare di n, una successione Z.

2. Si può rilevare facilmente che in ogni successione Z (escludendo dalle nostre considerazioni il caso in cui tutti i termini siano nulli) si distingue un'*ala destra* formata di tutti termini aventi lo stesso segno, e di un'*ala sinistra* formata di termini con segno alternato. Si dirà *termine centrale* di una successione Z il primo termine che abbia lo stesso segno del termine successivo; e ad esso si farà sempre corrispondere l'indice *zero*, indicandolo cioè con z_0. Esso rappresenta nello stesso tempo l'ultimo elemento dell'ala sinistra e il primo elemento dell'ala destra.

L'ala destra di una successione Z è pertanto formata di termini aventi tutti lo stesso segno, che si supporrà sempre positivo, cambiando di segno, se occorre, tutti i termini della successione: pertanto non si riterranno distinte due successioni Z, quando l'una si ottiene dall'altra col solo cambiamento di segno.

Ne segue che tutti i termini d'indice pari di ogni successione Z saranno positivi; invece i termini d'indice dispari avranno lo stesso segno dell'indice, potendosi, tutt'al più, presentare un'unica eccezione per il termine d'indice -1, che può essere nullo.

3. Una successione Z è individuata da due suoi termini consecutivi qualunque; per esempio dal termine centrale z_0 e dal successivo z_1; e scegliendo sempre questi due termini, la successione s'indicherà brevemente col simbolo $[z_0, z_1]$.

Se si inverte completamente l'ordine dei termini di una successione $Z \equiv [z_0, z_1]$, cambiando il segno a tutti i termini d'indice dispari, si ottiene una nuova successione $Z \equiv [z_0, -z_{-1}]$, che si dirà *associata* alla precedente.

Le uniche successioni irriducibili che coincidono colle loro associate sono le due successioni $[1, 1]$ e $[2, 1]$, per le quali il termine generale, quando occorrerà ricordarlo in questa Nota, verrà indicato rispettivamente con u_n e con v_n. L'ala destra della prima successione è la ben nota successione di Fibonacci, il cui termine generale è

$$u_n = \sum_{r=0}^{n'} \binom{n-r}{r}$$

ove n' è il maggior numero intero contenuto in $\frac{n}{2}$.

4. Hanno speciale importanza, nella teoria delle successioni Z, i due termini z_{-1} e z_1 che comprendono il termine centrale, e che si potranno chiamare i *termini pericentrici* della successione: il valore assoluto di ciascuno di essi è minore del valore assoluto di ciascuno dei due termini che lo comprendono, o tutt'al più è ugnale ad uno di essi; e nessun altro termine della successione gode di tale proprietà.

Indicando con z' il valore assoluto di z_{-1}, che può anche essere nullo, sarà

$$z_0 = z' + z_1. \tag{1}$$

Ponendo poi

$$z_0^2 + z'z_1 = k, \tag{2}$$

si dimostra facilmente la formula

$$z_n^2 - z_{n-1}\, z_{n+1} = (-1)^n k \tag{3}$$

per qualunque valore di n. Al numero k, essenzialmente positivo, daremo il nome di *modulo* della successione.

Da tale formula si deduce che un termine d'indice dispari di una successione Z di modulo k non può essere nello stesso tempo termine d'indice dispari di un'altra successione di modulo k: e difatti se b è un termine d'indice dispari di una successione Z di modulo k, il termine a che lo precede e il termine c che lo segue saranno d'indice pari, epperò positivi; e risulteranno perfettamente determinati dalle relazioni

$$b^2 - ac = -k, \qquad a + b = c.$$

Risulta poi dalle precedenti formule (1) e (2) che i valori assoluti z' e z_1 dei due termini pericentrici sono legati dalla relazione

$$z'^2 + 2z'z_1 + z_1^2 = k.$$

Ed, inversamente, ogni volta che due numeri interi non negativi sono soluzioni della equazione

$$x^2 + 3xy + y^2 = k, \tag{4}$$

ove è k un numero intero positivo, esistono le due successioni, fra loro associate, di modulo k, $[x + y, y]$ e $[x + y, x]$; e queste due successioni saranno distinte se i due valori di x e y saranno disuguali e maggiori entrambi di zero.

5. È facile costruire tutte le successioni Z distinte (qualora esistano) le quali abbiano per modulo un dato numero k. A tal fine osserviamo che dalle relazioni (1) e (2) si deduce per il termine centrale z_0 la limitazione

$$\sqrt{k} \geqq z_0 \geqq \sqrt{\frac{4k}{5}}.$$

Se quindi λ è il maggior numero intiero contenuto in $\sqrt{k}$ e $\lambda - \mu$ è il minor numero intero non inferiore a $\sqrt{\frac{4k}{5}}$, basterà attribuire a z_0 successivamente i valori λ, $\lambda - 1, \ldots \lambda - \mu$; e per ciascuno di tali valori vedere se è possibile scomporre z_0 nella somma di due numeri interi non negativi, z' e z_1, tali che risulti $z'z_1 = k - z_0^2$ (questa ricerca, seguendo opportune norme, si compie con molta speditezza): ed ogni volta che tale scomposizione è possibile, se z' e z_1 risultano disuguali e positivi, si hanno le due successioni Z di modulo k, fra loro associate, $[z_0, z_1]$ e $[z_0, z']$; mentre se uno dei due numeri, per es. z', è nullo, oppure se risulta $z' = z_1$, si ha l'unica successione $[z_0, z_1]$.

Ne segue in particolare che esiste una sola successione Z di modulo 1, ed è la successione [1, 1] già ricordata; ed esiste una sola successione di modulo 5, cioè la [2, 1].

6. Si vogliono ora stabilire le condizioni affinchè un dato numero k, che non sia nè l'unità nè il 5, possa essere il modulo di qualche successione Z, e nello stesso tempo si vuol determinare il numero delle successioni Z che abbiano appunto il modulo k: e tale ricerca si può limitare, come facilmente si scorge, alle sole successioni irriducibili.

È intanto evidente che il numero delle successioni Z irriducibili di modulo k coincide col numero delle coppie di numeri interi (x, y) positivi e primi tra loro, soluzioni della equazione (4); ossia coincide col numero delle *rappresentazioni proprie* e positive del numero $2k$ mediante la forma quadratica $2x^2 + 6xy + 2y^2$, che si suole indicare col simbolo (2, 3, 2).

Ma affinchè il numero $2k$ sia rappresentabile propriamente mediante la forma $(2, 3, 2)$ di determinante 5, è necessario anzitutto che sia risolubile la congruenza

$$\omega^2 \equiv 5 \qquad (\text{mod. } 2k), \tag{5}$$

e che quindi k sia un numero dispari i cui fattori primi siano tutti della forma $10n \pm 1$, eccettuato, tutt'al più, uno solo uguale a 5: oppure sia il doppio di siffatto numero dispari. Però quest'ultima ipotesi va esclusa senz'altro, perchè risulta evidente che l'equazione (4) non ha soluzioni intere quando k è il doppio di un numero dispari.

7. Inversamente, se k è un numero dispari della forma suaccennata, esistono sempre rappresentazioni proprie positive del numero $2k$ mediante la forma $(2, 3, 2)$, e quindi esistono successioni Z irriducibili di modulo k.

Ed infatti la congruenza (5), per un tal valore di k, è risolubile; e se ω_0 è una sua radice, ponendo

$$\omega_0 = 5 + 2kl,$$

la forma quadratica $(2k, \omega_0, l)$, di determinante 5, è equivalente [1] alla forma $(2, 3, 2)$; epperò esistono infinite sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ che trasformano la $(2, 3, 2)$ nella $(2k, \omega_0, l)$: e si sa che il 1° e il 3° elemento di ciascuna di queste sostituzioni dànno una rappresentazione propria del numero $2k$ mediante la forma $(2, 3, 2)$, essendo appunto

$$2\alpha^2 + 6\alpha\gamma + 2\gamma^2 = 2k. \tag{6}$$

Risulta poi da questa relazione che, dovendo essere $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, non può essere $\alpha = 0$ nè $\gamma = 0$, avendo escluso dalle nostre considerazioni il caso $k = 1$.

Resta ora a dimostrare che fra le suddette sostituzioni ne esiste una ed una sola nella quale α e γ sono positivi.

Se $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ è una sostituzione qualunque che trasforma la $(2, 3, 2)$ nella $(2k, \omega_0, l)$, ogni altra sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix}$ che compia la trasformazione medesima, si otterrà componendo una sostituzione $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \rho \end{pmatrix}$,

[1] Ciò dipende da un teorema che facilmente si potrebbe dimostrare: "Se una forma quadratica di determinante $4h + 1$, ove h è dispari, ha il 1° coefficiente doppio di un numero dispari, qualunque altra forma ad essa equivalente ha pure il 1° coefficiente doppio di un numero dispari". E siccome tutte le forme di determinante 5 si distribuiscono in due sole classi, ad una delle quali appartengono le forme ridotte $(2, 1, -2)$ e $(-2, 1, 2)$, e all'altra le ridotte $(1, 2, -1)$ e $(-1, 2, 1)$, ne segue che due forme qualunque di determinante 5 saranno equivalenti se in ciascuna di esse oppure in nessuna di esse il 1° coefficiente sia il doppio di un numero dispari; e non saranno equivalenti quando soltanto per una delle due forme avviene che il 1° coefficiente sia il doppio di un numero dispari.

che trasformi la (2, 3, 2) in se stessa, colla $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$; e ne risulta in particolare

$$\alpha_1 = \alpha\lambda + \gamma\mu$$
$$\gamma_1 = \alpha\nu + \gamma\rho.$$

I coefficienti λ, μ, ν, ρ sono definiti, come risulta dalla teoria generale delle forme quadratiche, dalle relazioni

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(t - 3u), \qquad \mu = -u$$
$$\nu = u \qquad , \qquad \rho = \tfrac{1}{2}(t + 3u).$$

ove t ed u sono due soluzioni qualunque, positive o negative, della equazione di Pell relativa alla forma (2, 3, 2):

$$t^2 - 5u^2 = 4.$$

Tali valori di t e u si trovano quindi rispettivamente, a meno del segno, fra i termini delle due serie $[v_0, v_1]$ e $[u_0, u_1]$, menzionate al § 3; e precisamente è

$$t = \pm\, v_{2n}, \qquad u = u_{2n-1},$$

mentre n varia da $-\infty$ a $+\infty$. Quindi se nelle formule che definiscono λ, μ, ν, ρ, si pone $t = v_{2n}$ ed $u = u_{2n-1}$, oppure $t = -v_{2n}$ ed $u = u_{2n-1}$, e si tien conto delle identità

$$\tfrac{1}{2}(3u_{2n-1} + v_{2n}) = u_{2n+1}$$
$$\tfrac{1}{2}(3u_{2n-1} - v_{2n}) = u_{2n-3},$$

e poi si sostituiscono i risultati nelle precedenti espressioni di α_1 e γ_1, si ha

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -\alpha u_{2n-3} - \gamma u_{2n-1} \\ \gamma_1 &= \alpha u_{2n-1} + \gamma u_{2n+1} \\ &\text{oppure} \\ \alpha_1 &= -\alpha u_{2n+1} - \gamma u_{2n-1} \\ \gamma_1 &= \alpha u_{2n-1} + \gamma u_{2n-3} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ora se nella sostituzione considerata $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ α e γ hanno lo stesso segno, si scorge che per $n = 0$ le formule (7) dànno una coppia di valori positivi, cioè

$$\alpha_1 = \alpha \qquad \text{e} \qquad \gamma_1 = \gamma,$$

oppure

$$\alpha_1 = -\alpha \qquad \text{e} \qquad \gamma_1 = -\gamma;$$

mentre, per qualunque altro valore di n, uno almeno dei due valori α_1 e γ_1 è negativo.

Se poi α e γ hanno segno contrario, supponiamo che sia $\alpha > 0$ e $\gamma < 0$, il che non altera la generalità delle nostre considerazioni. Essendo $k > 0$, dalle (6) si deduce

$$\alpha^2 + 3\alpha\gamma + \gamma^2 > 0,$$

donde

$$-\frac{\gamma}{\alpha} < \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

oppure

$$-\frac{\alpha}{\gamma} < \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Supponiamo che si verifichi la 1ª di queste 2 disuguaglianze (se invece si verificasse la 2ª si procederebbe nello stesso modo). Siccome nella successione di Fibonacci il valore del rapporto

$$u_{2n-1} : u_{2n-1}$$

cresce continuamente mentre n varia da 0 ad ∞, e per $n = 0$ esso è 0, mentre il suo limite per $n = \infty$ è $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, ne segue che esisterà un valore unico e determinato di n, per il quale risulti

$$\frac{u_{2n-3}}{u_{2n-1}} < -\frac{\gamma}{\alpha} < \frac{u_{2n-1}}{u_{2n+1}},$$

non potendo $-\dfrac{\gamma}{\alpha}$ essere uguale a nessun rapporto $u_{2i-1} : u_{2i-1}$, perchè se ne dedurrebbe $\alpha = u_{2i+1}$, $\gamma = -u_{2i-1}$, donde $k = \alpha^2 + 3\alpha\gamma + \gamma^2 = 1$, contrariamente all'ipotesi fatta sul numero k. Per questo valore dell'indice n, e per questo soltanto, le formule (7), e precisamente il 1° gruppo di esse, dànno per α_1 e γ_1 due valori positivi.

8. Da quanto precede risulta che ad ognuna delle radici incongrue della congruenza (5) corrisponde una ed una sola rappresentazione propria positiva del numero $2k$ mediante la forma (2, 3, 2), e corrispondentemente una ed una sola successione Z irriducibile di modulo k; e facilmente si potrebbe dimostrare che a due radici opposte, ω_0 e $-\omega_0$, della stessa congruenza corrispondono due successioni Z associate. E siccome le radici incongrue della (5) sono 2^μ, essendo μ il numero dei differenti fattori primi di k della forma $10n \pm 1$, si conclude che esistono 2^μ successioni Z irriducibili di modulo k.

Riassumendo:

„ **Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero dato k sia modulo di qualche successione Z irriducibile è che tutti i fattori primi di k siano della forma $10n \pm 1$, tranne, al più, uno solo uguale al 5; e se i fattori primi differenti della forma $10n \pm 1$ sono in numero di μ, le successioni Z irriducibili di modulo k sono 2^μ** ".

Un siffatto numero k lo chiameremo, per brevità, modulo in senso stretto.

9. Se poi, avendo un numero qualunque k, si volesse ricercare la condizione di esistenza di qualche successione Z, anche riducibile, di cui k sia il modulo, si troverebbe che per tale esistenza è necessario e sufficiente che le potenze massime del 2 e dei fattori primi della forma $10n \pm 3$, eventualmente contenuti in k, siano tutte di grado pari. Ed in tal caso il numero complessivo delle successioni Z, riducibili e irriducibili, di modulo k, sarà dato da

$$(\pi_1+1)(\pi_2+1)(\pi_3+1)\ldots(\pi_\mu+1).$$

avendo indicato con $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_\mu$, gli esponenti dei differenti fattori primi di k della forma $10n \pm 1$.

Un numero k così fatto si potrà chiamare, per brevità, modulo in senso lato.

10. Osservando ora le formule (7), nelle quali potremo supporre α e γ positivi, vediamo facilmente che i valori di $-\gamma_1$ e di γ_1, dati dal 1° gruppo di esse, rappresentano rispettivamente il termine d'indice $2n-1$ e il termine d'indice $2n+1$ della successione $[\alpha+\gamma, \gamma]$; e quelli dati dal 2° gruppo di dette formule rappresentano rispettivamente i termini d'indice $2n+1$ e d'indice $2n-1$ della successione $[\alpha+\gamma, \alpha]$; e scambiando nelle stesse formule (7) α con γ, si vedrebbe similmente che i valori di $-\alpha_1$ e di γ_1 rappresentano rispettivamente il termine d'indice $2n-1$ e il termine d'indice $2n+1$ della successione $[\alpha+\gamma, \alpha]$, oppure i termini d'indici $2n+1$ e $2n-1$ della successione $[\alpha+\gamma, \gamma]$, le quali successioni sono di modulo k.

E se per comodità cambiamo di segno il coefficiente medio della forma (2, 3, 2), allo scopo di poter considerare i valori di α_1 anzichè quelli di $-\alpha_1$, potremo dire che ad ogni coppia di radici ω_0 e $-\omega_0$ della congruenza (5) corrispondono due diverse successioni Z di modulo k, fra loro associate, e tali che due loro termini consecutivi qualunque d'indice dispari, considerati nel loro ordine naturale e in ordine contrario, formano sempre una rappresentazione propria del numero $2k$ mediante la forma $(2, -3, 2)$, cioè una soluzione intera e propria della equazione

$$x^2 - 3xy + y^2 = k. \tag{8}$$

Dunque tutte le soluzioni proprie di questa equazione sono fornite nel modo testè indicato dalle 2^μ successioni Z irriducibili di modulo k; e se si volessero poi ricercare le soluzioni improprie della stessa equazione, cioè quelle soluzioni intere in cui i valori assoluti di x e y non siano primi tra loro, si troverebbe ch'esse sono fornite nello stesso modo dalle successioni Z riducibili di modulo k.

In tal guisa è completamente risoluta l'equazione (8) e conseguentemente la (4).

Se poi si considerasse l'equazione

$$x^2 - 3xy + y^2 = -k,$$

tutte le sue soluzioni intere positive sarebbero date dalle coppie di termini consecutivi d'indice pari delle stesse successioni Z di modulo k.

E considerando infine l'equazione

$$x^2 \pm xy - y^2 = \pm k,$$

si vede facilmente che tutte le soluzioni di questa sono le coppie di termini consecutivi di tutte le successioni Z di modulo k, considerando i due termini di ogni coppia nel loro ordine naturale o in ordine contrario a seconda che il termine medio del 1° membro della equazione ha il segno $+$ o il segno $-$.

11. Possiamo ora risolvere senza difficoltà e completamente l'equazione

$$a\xi^2 - b\xi\eta + c\eta^2 = k \tag{9}$$

ove a, b, c siano numeri interi qualunque, legati dalla relazione

$$b^2 - 4ac = 5, \tag{10}$$

dalla quale si deduce che a e c, dovendo ammettere il residuo quadratico 5, sono moduli in senso stretto (§ 8), ed in particolare sono dispari; inoltre uno almeno di essi, per esempio a, potrà supporsi in valore assoluto maggiore dell'unità, altrimenti la (9) sarebbe una delle equazioni già risolute nel § precedente. E quindi risulta dalla (10) stessa che a e c avranno lo stesso segno, che potremo supporre positivo; come pure supporremo positivi, per ora, i numeri b e k.

La risoluzione completa della (9) coincide colla ricerca di tutte le rappresentazioni del numero $2k$ mediante la forma quadratica $(2a, -b, 2c)$, la quale, per essere a e c numeri dispari, è equivalente (§ 7, nota) alla forma $(2, -3, 2)$. Affinchè pertanto la (9) ammetta soluzioni è necessario e sufficiente che k sia modulo in senso lato; se poi si vuole che quelle soluzioni siano proprie, dovrà k essere modulo in senso stretto.

Ora, analogamente a quanto si fece al § 7, si può affermare che fra le infinite sostituzioni che trasformano le $(2, 3, 2)$ nella $(2a, b, 2c)$, ne esiste una ed una sola, $\begin{pmatrix}\alpha\beta\\ \gamma\delta\end{pmatrix}$, in cui il 1° e 3° elemento siano positivi; e conseguentemente, dovendo risultare

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$
$$2\alpha\beta + 3(\alpha\delta + \beta\gamma) + 2\gamma\delta = b > 0,$$

anche il 2° e il 4° elemento saranno positivi, potendo tutt'al più essere $\beta = 0$ se sia $c = 1$. Ne segue che fra le infinite sostituzioni che trasformano la $(2a, -b, 2c)$ nella $(2, -3, 2)$, ne esiste una ed una sola, $\binom{\delta\beta}{\gamma\alpha}$, nella quale tutti e quattro gli elementi siano positivi, tranne, tutt'al più, il 2° elemento, cioè β, che sarà nullo quando sia $c=1$.

Quindi fra le soluzioni (ξ, η) della (9) e le soluzioni (x, y) della (8) sussisteranno le relazioni

$$\xi = \delta x + \beta y$$
$$\eta = \gamma x + \alpha y.$$

Ma ricordando (§ 10) che i valori di x, y, oppure di y, x, sono due termini consecutivi qualunque d'indice dispari di una qualsivoglia successione Z di modulo k, potremo porre

$$x = z_{2n-1}, \qquad y = z_{2n+1},$$

oppure

$$x = z_{2n+1}, \qquad y = z_{2n-1};$$

e corrispondentemente le precedenti formule si scriveranno

$$\xi = \delta z_{2n-1} + \beta z_{2n+1}$$
$$\eta = \gamma z_{2n-1} + \alpha z_{2n+1}$$

oppure

$$\xi' = \delta z_{2n+1} + \beta z_{2n-1}$$
$$\eta' = \gamma z_{2n+1} + \alpha z_{2n-1}.$$

Ora si sa (§ 1) che l'espressione

$$\delta z_{i-1} + \beta z_{i+1}$$

descrive, al variare dell'indice i, una nuova successione Z; e, corrispondentemente al valore $i=0$, si ha il termine

$$\delta z_{-1} + \beta z_1,$$

che è certamente un termine pericentrico della nuova successione (§ 4), giacchè, come facilmente si verifica, il suo valore assoluto è minore del valore assoluto di ciascuno dei due termini che lo comprendono, o tutt'al più uguale ad uno di essi: e questa nuova successione ha per modulo ck, come si può subito constatare considerando tre termini consecutivi qualunque ed applicando la formula (3).

Ne segue che i valori di ξ rappresentano i termini d'indice dispari di una successione Z di modulo ck; e analogamente i valori di η rappresentano i termini d'indice dispari di un'altra successione Z di modulo ak: tali due successioni si corrispondono termine a termine, in guisa che ad un termine pericentrico dell'una corrisponda un termine pericentrico dell'altra; il che però non porta di conseguenza che anche gli altri due termini pericentrici si corrispondano e quindi si corrispondano i termini centrali delle due successioni: anzi si potrebbe dimostrare che i due termini centrali non si corrispondono o si corrispondono a seconda che si verifichi o no la relazione

$$\frac{\alpha}{\gamma} > -\frac{z_{-1}}{z_1} \geqq \frac{\beta}{\delta}.$$

In queste due successioni ogni coppia di termini corrispondenti d'indice dispari rappresenta una soluzione della (9).

Le medesime considerazioni valgono anche per i valori di ξ' e η'.

12. Da quanto precede possiamo ricavare facilmente la seguente regola semplicissima per la risoluzione completa della equazione (9), nella quale i numeri a, b, c, k sono positivi e il determinante è uguale a 5.

" Si costruiscono (§ 5) tutte le successioni Z_a di modulo ak e tutte le successioni Z_c di modulo ck. Poi si considera un termine pericentrico qualunque di una successione Z_a, e lo si sostituisce ad η nella equazione (9), la quale poi, risoluta rispetto a ξ, avrà due radici ξ_1 e ξ_2. Se nessuna di queste due radici risulta intera, la successione Z_a considerata non è *utile* per la ricerca delle soluzioni intere della (9). Se uno solo dei due valori ξ_1 e ξ_2 è intero, esso sarà uguale ad un termine d'indice dispari [1] di una successione Z_c e di una sola (§ 4); e facendo allora corrispondere le due successioni termine a termine in guisa appunto che i due termini suddetti si corrispondano, tutte le coppie di termini corrispondenti d'indice dispari rappresentano altrettante soluzioni della equazione (9); e precisamente i valori di ξ saranno forniti dalla successione Z_c e i valori di η dalla Z_a. Se infine tutti e due i valori ξ_1 e ξ_2 sono interi (necessariamente distinti, per essere $5y^2 + 4kc > 0$), essi saranno termini d'indice dispari in due diverse successioni Z_c, o magari in una stessa successione Z_c, la quale in tal caso dovrà essere considerata due volte: e così facendo corrispondere termine a termine ciascuna di queste due successioni Z_c alla stessa successione Z_a, in guisa che si corrispondano i due termini considerati che rappresentano già una soluzione intera della (9), avremo due coppie di successioni i cui termini corrispondenti d'indice dispari sono sempre soluzioni della equazione medesima. Ripetendo questo procedimento per ciascuna delle successioni Z_a, si otterranno tutte quante le soluzioni intere della equazione (9), anche avendo riguardo ai segni; ed ognuna di esse si otterrà una volta sola „.

Si può osservare che una regola analoga si sarebbe potuta stabilire partendo dalle successioni Z_c anzichè dalle Z_a, e seguendo un procedimento simmetrico al precedente: anzi, per raggiungere in pratica la massima sollecitudine, è bene partire dalle successioni Z_a oppure dalle successioni Z_c a seconda che le prime siano in numero minore o maggiore delle seconde.

---

[1] Anzi risulta dal § 11 che questo termine o sarà uno dei due termini pericentrici della Z_c, oppure sarà il termine d'indice ± 3.

13. Note in tal guisa tutte le soluzioni intere della equazione (9), sol che si cambi il segno, per es., di η in ciascuna di esse, si dedurranno tutte le soluzioni intere (che saranno esse pure uguali a due a due e di segno contrario) della equazione

$$a\xi^2 + b\xi\eta + c\eta^2 = k\,, \tag{11}$$

ove a, b, c, k sono gli stessi numeri che figuravano nella equazione (9). Nello stesso tempo resta anche risoluto il problema di " trovare tutte le soluzioni positive (e quindi anche tutte le soluzioni negative) della equazione (11) ". Ed infatti tali soluzioni della (11) derivano cambiando il segno di η in quelle soluzioni della (9) nelle quali i valori di ξ e η hanno segno contrario: e d'altra parte questa circostanza si presenta per la equazione (9) ogni volta e soltanto allora che, applicando la regola esposta al § 12 alla risoluzione della equazione medesima, si trova una coppia di successioni Z_a e Z_c nelle quali i termini centrali non si corrispondano, e quindi ad un solo termine pericentrico dell'una corrisponda un termine pericentrico dell'altra: tali due termini avranno segno contrario, a meno che uno di essi non sia nullo, e sodisferanno alla equazione (9).

Volendo infine risolvere l'equazione

$$a\xi^2 - b\xi\eta + c\eta^2 = -\mathrm{K},$$

troveremmo che tutte le sue soluzioni intere sono date dai termini corrispondenti d'indice pari delle diverse coppie di successioni ottenute applicando la regola del § 12 alla risoluzione della equazione (9). Però, essendo i termini d'indice pari di ogni successione Z, quale noi la consideriamo (§ 2), sempre positivi, si ottengono così tutte le soluzioni positive, e ciascuna di esse si ottiene due volte.

14. Coll'avere così risoluto elementarmente e nel modo più completo ogni equazione $ax^2 + bxy + cy = k$ di discriminante 5, indipendentemente da calcoli di sviluppi di irrazionali quadratici in frazioni continue periodiche, è apparso l'uso elegante che si può fare delle successioni Z nell'analisi indeterminata di 2° grado.

Ma la teoria di tali successioni si presta mirabilmente altresì per la risoluzione di una più vasta categoria di equazioni di secondo grado, aventi il discriminante della forma $5m^2$: tale questione più generale si riconnette ad altre notevoli proprietà delle successioni Z, delle quali in questa Nota non ho fatto parola.

Carlo Ruggeri.

TRASFORMAZIONE SIMMETRICA
delle coordinate curvilinee sulla sfera unitaria

Studieremo la più generale trasformazione simmetrica delle coordinate curvilinee in virtù della quale la sfera unitaria avrà per corrispondente elemento lineare

$$ds^2 = \frac{4\, dx\, dy}{(1+xy)^2}.$$

A tal uopo, chiamando (u, v) un sistema di coordinate curvilinee tali che la u sia la longitudine e la v la colatitudine sferica, si ha che l'elemento lineare sferico verrà espresso, in questo sistema, da:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2.$$

In questo caso particolare si ha $E = 1$, $F = 0$ e $G = \operatorname{sen}^2 u$. Dovendo il trasformato di ds^2, per una sostituzione

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v),$$

ridursi alla forma

$$ds^2 = 2F_1\, dx\, dy \tag{1}$$

bisogna che le funzioni x ed y siano integrali dell'equazioni

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 x = 0\\ \Delta_1 y = 0\end{array}\right\}; \tag{2}$$

essendo $\Delta_1 x\, \Delta_1 y - \nabla^2 (xy) \ddagger 0$.

Il sistema (2) dà luogo all'altro equivalente:

$$\operatorname{sen}^2 u \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = 0$$

$$\operatorname{sen}^2 u \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

da cui si deduce che *le funzioni* x, y, *in virtù delle quali l'elemento lineare della sfera unitaria è esprimibile sotto forma* (1), *sono due integrali dell'equazione differenziale alle derivate parziali*

$$\operatorname{sen}^2 u \left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 = 0, \tag{3}$$

nella quale sono comprese le equazioni precedenti.

Osserviamo che la (3) si scinde nelle equazioni

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{i}{\operatorname{sen} u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0 \\ \frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{i}{\operatorname{sen} u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0\,, \end{aligned}\right\} ; \qquad (3')$$

ogni soluzione di una di esse sarà una soluzione della equazione (3).

Passiamo quindi alla integrazione delle equazioni (3'). Dalla teoria generale dell'equazioni alle derivate parziali del tipo delle (3') si sa che il loro integrale generale sarà noto allorquando si conoscono due integrali di ciascuno dei sistemi ausiliari, che nel nostro caso sono:

$$\frac{du}{1}=\frac{\operatorname{sen} u\, dv}{-i}=\frac{d\theta}{0} \qquad (3_1)$$

$$\frac{du}{1}=\frac{\operatorname{sen} u\, dv}{i}=\frac{d\theta}{0}\,. \qquad (3_2)$$

Dal sistema (3_1) si cavano le due equazioni differenziali

$$d\theta=0$$
$$du=i \operatorname{sen} u\, dv,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned} d\theta=0 \\ \frac{du}{i \operatorname{sen} u}=dv \end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Similmente dalla (3_2) si ha il sistema:

$$\left.\begin{aligned} d\theta=0 \\ \frac{i\, du}{\operatorname{sen} u}=dv \end{aligned}\right\}. \qquad (5)$$

Integrando le (4) e le (5) si hanno rispettivamente i due sistemi d'integrali:

$$\left.\begin{aligned} \theta=a \\ \log \operatorname{tag}\frac{u}{2}=iv+b \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} i \log \operatorname{tag}\frac{u}{2}=v+c \\ \theta=d \end{aligned}\right\},$$

ai quali si può dare la forma:

$$\left.\begin{aligned} \theta=a \\ \log \operatorname{tag}\frac{u}{2}-iv=b \end{aligned}\right\}, \quad (6) \qquad \left.\begin{aligned} \theta=d \\ \log \operatorname{tag}\frac{u}{2}+iv=c \end{aligned}\right\}, \quad (7)$$

dove a, b, c, d sono delle costanti d'integrazione.

Dagli integrali trovati (6) e (7) si passa agli integrali generali delle equazioni (3') ponendo rispettivamente:

$$\log \operatorname{tag}\frac{u}{2}-iv=\Phi(\theta), \qquad (\sigma)$$

per la prima equazione delle (3'), e per la seconda ponendo

$$\log \operatorname{tag} \frac{u}{2} + iv = \Psi(\theta); \qquad (\mu)$$

dove Φ e Ψ sono due funzioni arbitrarie della variabile θ. Di qui risulta che, avendo chiamato θ la variabile x ed y, che le antiche coordinate curvilinee (u, v) sono legate alle nuove (x, y) dalla sostituzione:

$$\left.\begin{aligned} \log \tan \frac{u}{2} - iv &= \Phi(x) \\ \log \tan \frac{u}{2} + iv &= \Psi(y) \end{aligned}\right\}, \qquad (\alpha)$$

la quale è la più generale sostituzione delle coordinate curvilinee scelte su una sfera unitaria che dà al relativo elemento lineare la forma (1), *e che rende*

$$F_1 = \frac{2}{(1+xy)^2}.$$

Se nelle (α) poniamo Φ e Ψ eguale alla funzione log, avremo una particolare sostituzione, la quale gode delle proprietà enunciate per le (α) ed è di uso frequentissimo in varie quistioni di geometria differenziali. Per tale posizione si ha:

$$\log x - \log \operatorname{tag} \frac{u}{2} = -iv$$

$$\log y - \log \operatorname{tag} \frac{u}{2} = iv,$$

da cui si ricava:

$$x = \operatorname{tag} \frac{u}{2} e^{-iv} \qquad (8)$$

$$y = \operatorname{tag} \frac{u}{2} \cdot e^{iv}. \qquad (9)$$

Agevolmente si scorge che per una tale sostituzione il quadrato dell'elemento lineare della sfera unitaria piglia la forma caratteristica:

$$ds^2 = \frac{4dxdy}{(1+xy)^2}.$$

Infatti. Calcoliamoci $\operatorname{sen}^2 u$, du, dv in funzione delle nuove variabili x, y, e dei nuovi differenziali dx, dy, e sostituiamo i valori che si ottengono nella

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u\, dv^2.$$

Per procedere alla sopradetta determinazione, osserviamo che quadrando la (9) e dividendo la (9) per la (8) si ottiene

$$y^2 = \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} e^{2iv} \tag{10}$$

$$\frac{y}{x} = e^{2iv}; \tag{11}$$

dalle quali si ha, dividendo la prima per la seconda,

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \frac{u}{2}}{\cos^2 \frac{u}{2}} = yx = \operatorname{tag}^2 \frac{u}{2}. \tag{12}$$

Facilmente da quest'ultima si ha che

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2} &= \frac{xy}{1+xy} \\ \cos^2 \frac{u}{2} &= \frac{1}{1+xy} \end{aligned}\right\}; \tag{13}$$

dalle quali, tenendo presente che

$$\operatorname{sen}^2 u = 4 \cos^2 \frac{u}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2},$$

risulta

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{4xy}{(1+xy)^2}. \tag{14}$$

Per determinare du, dv non bisogna che differenziare le (8), (9), ottenendosi:

$$dx = \frac{e^{-iv}}{2\cos^2 \frac{u}{2}} du - ie^{-iv} \operatorname{tag} \frac{u}{2} . dv$$

$$dy = \frac{e^{iv}}{2\cos^2 \frac{u}{2}} du + ie^{iv} \operatorname{tag} \frac{u}{2} . dv,$$

da cui, risolvendo rispetto a du, dv il sistema, si ricava:

$$du = \cos^2 \frac{u}{2} (e^{iv}\, dx + e^{-iv}\, dy)$$

$$dv = \frac{dy - e^{2iv}\, dx}{2i \operatorname{tag} \frac{u}{2} . e^{iv}}.$$

Tenendo presenti le relazioni (11), (12) e (13), le precedenti si possono scrivere sotto la forma

$$\left.\begin{aligned} du &= \frac{1}{1+xy}\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy\right) \\ dv &= \frac{1}{2iy}\left(dy - \frac{y}{x}\,dx\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Ciò trovato, sostituendo nel quadrato dell'elemento lineare sferico:

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{sen}^2 u \, dv^2,$$

in luogo dei valori sen u, du, dv, quelli dati dalle (14) e (15), avremo che nelle nuove coordinate x, y, il quadrato del nostro elemento verrà espresso dalla forma caratteristica

$$ds^2 = \frac{4dxdy}{(1+xy)^2},$$

come si voleva dimostrare. D. Rossetti.

UN'APPLICAZIONE DELLA FORMULA DI STEWART
all' n-edro dell' S_{n-1} lineare

In questo articolo espongo l'estensione allo spazio lineare con $n-1$ dimensioni della risoluzione di un problema che — pel caso del triangolo — fu proposto nel 1874 al *Concorso accademico di Caen*. La risoluzione di tale problema può leggersi nel bellissimo lavoro del sig. prof. Clemente Thiry intitolato *Applications remarquables du théorème de Stewart* ecc., alla pagina 47.

Il problema si può enunciare così:

Dato in uno spazio lineare con $n-1$ *dimensioni un* n*-edro* $A_1A_2\ldots A_n$ *trovare sopra* A_1A_2 *un punto* P_{12} *tale che i due* n*-edri* $A_1P_{12}A_3A_4\ldots A_n$, $A_2P_{12}A_3A_4\ldots A_n$ *abbiano uguali le ipersfere inscritte.*

Si ponga

$$A_1A_2 = c \qquad \text{e} \qquad A_1P_{12} = y \qquad \text{con che} \qquad P_{12}A_2 = c - y$$

e si chiami x la misura dell'n-edro $P_{12}A_3A_4\ldots A_n$.

La formula:

$$(r+s)^2 \cdot p^2_{12} = r^2 \cdot a_1^2 + s^2 \cdot a^2_2 + 2rsa_1a_2 \cos(a_1a_2),$$

— la quale costituisce il teorema di Stewart esteso all'n-edro $A_1A_2\ldots A_n$ di S_{n-1} e dove a_i indica, in generale, la misura dell'$(n-1)$-edro $A_1A_2\ldots A_{i-1}A_{i+1}\ldots A_n$, p_{12} la misura di $P_{12}A_3A_4\ldots A_n$, (a_1a_2) la misura del diedro formato dagli iperpiani che contengono le facce a_1, a_2 e P_{12} il punto che divide A_1A_2 nel rapporto $r:s$ — applicata al caso nostro dà:

$$c^2 . x^2 = a_1^2 . y^2 + a_2^2 . (c-y)^2 + 2y . (c-y) . a_1a_2 \cos(a_1a_2),$$

relazione che si può anche porre sotto la forma:

$$c^2 . (x^2 - a_2^2) = [a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)] . y^2 + \\ + 2cy . [a_1a_2 \cos(a_1a_2) - a_2^2]. \qquad \text{(I)}$$

D'altra parte, se ricordiamo che la misura di un n-edro è data, a meno di un coefficiente numerico, dalla somma delle misure delle facce moltiplicata per quella del raggio della ipersfera inscritta, per soddisfare alla condizione richiesta nell'enunciato del problema dovremo scrivere che le misure dei due n-edri $A_1P_{12}A_3\ldots A_n$, $P_{12}A_2A_3\ldots A_n$ stanno fra loro come le somme delle misure delle loro facce. Ora questi due n-edri possono considerarsi come aventi la medesima altezza e per basi rispettivamente A_1P_{12} e A_2P_{12}; inoltre due facce del primo hanno per misura a_2 e x e due del secondo a_1 e x. Per le altre si osservi che le misure di due di esse come $A_1PA_3\ldots A_{n-1}$, $A_2PA_3\ldots A_{n-1}$ — e quel che si dice per queste due si intenda ripetuto per le rimanenti coppie — vengono determinate dalle due condizioni:

1ª di avere per somma a_n,

2ª di essere nel rapporto $y:(c-y)$;

cosicchè si avrà per la misura della prima faccia $\frac{a_n}{c} . y$ e per quella della seconda $\frac{a_n}{c}(c-y)$.

Posto ciò, la somma delle facce del primo n-edro sarà espressa da:

$$a_2 + x + \frac{a_3 + a_4 + \ldots a_n}{c} . y$$

e quella delle facce del secondo da

$$a_1 + x + \frac{a_3 + a_4 + \ldots a_n}{c} . (c-y).$$

e la relazione che esprimerà che i suddetti n-edri hanno uguali le ipersfere inscritte sarà la seguente:

$$\frac{y}{c-y} = \frac{a_2 + x + \frac{a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{c} . y}{a_1 + x + \frac{a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{c}(c-y)}.$$

Di qui si ricava:

$$\frac{y}{c} = \frac{a_2 + x + \frac{a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{c} . y}{a_1 + a_2 + 2x + a_3 + a_4 + \ldots + a_n};$$

togliendo al numeratore e al denominatore del secondo membro rispettivamente le espressioni:

$$\frac{y}{c}(a_3 + a_4 + \ldots + a_n), \qquad a_3 + a_4 + \ldots + a_n,$$

si trova:

$$\frac{y}{c} = \frac{x + a_2}{2x + a_1 + a_2},$$

da cui

$$y = \frac{c(a_2 + x)}{2x + a_1 + a_2}. \tag{II}$$

Ponendo questo valore di y nella (I) e levando il fattore comune $c_2(a_2 + x)$, si troverà:

$$x - a_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)}{(2x + a_1 + a_2)^2}(a_2 + x) + 2\frac{a_1a_2 \cos(a_1a_2) - a_2^2}{2x + a_1 + a_2}$$

da cui facendo sparire i denominatori e ponendo in evidenza il fattore $2x + a_1 + a_2$:

$$(2x + a_1 + a_2)\{(2x + a_1 + a_2)(x - a_2) - 2[a_1a_2 \cos(a_1a_2) - a_2^2]\} = \\ = (a_2 + x).\{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)\}$$

e con successive trasformazioni:

$$(2x + a_1 + a_2)\{(2x - a_1 - a_2)(x + a_1) + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos a_1a_2)\} = \\ = (a_2 + x).\{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)\};$$

$$(2x+a_1+a_2).(2x-a_1-a_2)(x+a_1)+[a_1^2+a_2^2-2a_1a_2 \cos(a_1a_2)].(x+a_1)=0.$$

$$(2x + a_1 + a_2)(2x - a_1 - a_2) + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) = 0;$$

$$4x^2 - (a_1 + a_2)^2 + a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) = 0;$$

e infine, dopo qualche semplificazione:

$$x = \operatorname{sen}\frac{(a_1a_2)}{2}.\sqrt{a_1a_2}. \tag{III}$$

Allora la (II) dà:

$$y = \frac{c(a_2 + \operatorname{sen}\frac{(a_1a_2)}{2}.\sqrt{a_1a_2})}{2.\operatorname{sen}\frac{(a_1a_2)}{2}.\sqrt{a_1a_2} + a_1 + a_2}$$

e la legge di divisione dello spigolo A_1A_2 viene espressa da

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = (a_2 + \operatorname{sen}\frac{(a_1a_2)}{2}.\sqrt{a_1a_2}) : (a_1 + \operatorname{sen}\frac{(a_1a_2)}{2}.\sqrt{a_1a_2}).$$

OSSERVAZIONE I. — Prendiamo la formula che dà la misura della sezione bisettrice uscente dal diedro (a_1a_2). Avremo

$$\beta_{12} = \frac{2.a_1a_2}{a_1 + a_2}\cos\frac{(a_1a_2)}{2}. \tag{IV}$$

Dividendo membro a membro questa e la (III) troveremo, indicando con x_{12} la misura della sezione di cui sopra, riferita al diedro $(a_1 a_2)$:

$$\frac{x_{12}}{\beta_{12}} = \operatorname{tg}\frac{(a_1 a_2)}{2} \cdot \frac{\frac{a_1 + a_2}{2}}{\sqrt{a_1 a_2}}. \qquad \text{(V)}$$

Questa formula, nel caso che il diedro $(a_1 a_2)$ sia retto, ci dice che il rapporto delle due sezioni è uguale al rapporto fra la media aritmetica e la media geometrica delle facce adiacenti.

Osservazione II. — La (V) e la:

$$\frac{s_{12}}{m_{12}} = \frac{2 a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad \text{(VI)}$$

dove s_{12} rappresenta la misura della simediana uscente da $(a_1 a_2)$ ci forniscono una relazione fra m_{12}, β_{12}, s_{12} e x_{12}. Dalla (VI) segue:

$$\frac{s_{12} + m_{12}}{S_{12}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{2 a_1 a_2}.$$

La (V) quadrandola, dà:

$$\frac{x^2_{12}}{\beta^2_{12}} = \operatorname{tg}^2\frac{(a_1 a_2)}{2} \cdot \frac{(a_1 + a_2)^2}{4 a_1 a_2}.$$

Dividendo quest'ultime membro a membro si trova:

$$2 \cdot \frac{x^2_{12}}{\beta^2_{12}} = \operatorname{tg}^2\frac{(a_1 a_2)}{2} \cdot \left(1 + \frac{m_{12}}{s_{12}}\right)$$

che è appunto quella cercata.

Osservazione III. — Se nella formula:

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(a_1 a_2) & \ldots\ldots & \cos(a_1 a_n) \\ \cos(a_2 a_1) & -1 & \ldots\ldots & \cos(a_2 a_n) \\ " & " & \ldots\ldots & " \\ " & " & \ldots\ldots & " \\ \cos(a_n a_1) & \cos(a_n a_2) & \ldots\ldots & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

che lega i coseni dei diedri di un n-edro, esprimiamo i coseni stessi mediante le x per mezzo della relazione (III), otteniamo una relazione fra le sezioni x relative a tutti i diedri dell'n-edro e le facce dell'n-edro stesso: questa relazione è *razionale* nelle *une* e nelle *altre*. (1)

(1) Vedasi in proposito la mia nota *Fondamenti per la geometria dell'n-edro in uno spazio lineare con* n − 1 *dimensioni.* " Periodico di Matematica „ vol. XXI, fasc. II, 1905.

Enrico Piccioli.

QUISTIONI PROPOSTE

778. Si considerino tutte le coniche concentriche che passano per un punto dato e delle quali l'asse ha una lunghezza data.

Trovare: 1° l'inviluppo di queste coniche; 2° il luogo dei loro vertici; 3° il luogo dei loro fuochi.

779. Un segmento costante AB scorre sulla direttrice di una parabola. Se A', B' sono i punti d'incontro di questa con le parallele all'asse condotte per i punti A, B, dimostrare che l'area del segmento parabolico avente per corda A'B' è costante.

780. Risolvere l'equazione

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & 0 \\ 0 & x & a & b & 0 \\ 0 & 0 & x & a & b \\ 2x & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x & a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

E. N. Barisien.

781. Trovare il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati sono rispettivamente tangenti a due curve, rappresentate in coordinate plückeriane dalle equazioni

$$F(u, v) = 0 \qquad f(u, v) = 0.$$

Caso in cui una curva o ambedue le curve suddette sono circoli.

K.

Della quistione **775** giunse in ritardo un'altra risoluzione del sig. **Andri** di *Genova*.

BIBLIOGRAFIA

Elementi di Geometria intuitiva, ad uso delle Scuole Tecniche, del sen. prof. G. Veronese, con la collaborazione del prof. P. Gazzaniga. Padova, Drucker, 1909. — L. 2.

L'indirizzo sperimentale per l'insegnamento della Matematica nella scuola media inferiore, che in questi ultimi anni ebbe fra i più fervidi sostenitori il compianto amico VAILATI, ha guadagnato un larghissimo terreno. E così, dove in tempi non molto lontani anche nella Scuola Tecnica si cercava di esporre le nozioni geometriche in una forma rasentante la *logico-deduttiva*, oggi invece, e principalmente per opera dei nuovi docenti, si tende a presentare al giovinetto uno schema delle proprietà elementari dello spazio attraverso una serie di opportune e preordinate esperienze. Inquantochè si pensa, e certo con ragione, che nella mente dell'adolescente rimanga più facilmente impressa una verità controllata o facilmente controllabile con semplici esperimenti, di una verità appresa mediante l'uso del solo ragionamento.

A favore del nuovo indirizzo potrebbe anche addursi il vivo interesse che prova il fanciullo nel ripetere l'esperienza descritta dal suo insegnante, ed in pari tempo la minor fatica con cui egli apprende le cognizioni più nuove e difficili. Nè si voglia dar troppa importanza al *valore formativo* che può avere nel ciclo inferiore dell'insegnamento medio l'uso del ragionamento deduttivo: l'ordinamento logico delle cognizioni matematiche darà frutti più copiosi e maturi nel corso medio superiore, ove sarà accompagnato e sorretto da un analogo processo nelle altre discipline!

Allo svolgersi dell'accennata tendenza verso il metodo sperimentale hanno cooperato da un lato le esigenze didattiche, che si manifestano giornalmente nella scuola, dall'altro le idee propugnate da alcuni dei nostri più autorevoli geometri, fra i quali si presenta in primissima linea il prof. G. VERONESE. Questi, infatti, fin nel 1891, nella prefazione ai suoi *Fondamenti di Geometria a più dimensioni ecc.*, sosteneva l'origine sperimentale della geometria e nel 1901 scriveva le *Nozioni elementari di Geometria ad uso dei Ginnasi inferiori*, informando totalmente a criteri sperimentali l'esposizione delle prime proprietà delle figure geometriche. Successivamente (1907), e sempre nello stesso indirizzo, pubblicò le *Nozioni di Geometria intuitiva* ora largamente diffuse nelle Scuole Complementari, e di recente (1909) gli *Elementi di Geometria intuitiva*. In quest'ultima pubblicazione, dedicata come le due precedenti alla scuola secondaria inferiore, è un po' allargato il campo delle figure e proprietà prese a studiare, e insieme ad un largo uso di metodi sperimentali, suggeriti per la costruzione delle figure e per la verificazione delle loro proprietà, si incontra qualche breve e facile ragionamento, atto ad iniziare l'alunno nell'uso sistematico di quel procedimento deduttivo che dovrà poi utilizzare largamente nel ciclo successivo dei suoi studi.

Per chi conosce le idee del VERONESE intorno alla Geometria elementare, esposte nei citati *Fondamenti*, e portate nell'insegnamento secondario superiore dagli *Elementi di Geometria ad uso dei Ginnasi, Licei ed Istituti tecnici* (1° biennio), riesce superfluo qualsiasi cenno sulla direttiva scientifica del nuovo libretto, mentre per gli altri non basterebbero certo le poche parole consentite ad una semplice recensione. Mi restringerò pertanto a rilevare il carattere fondamentale del libro. Proponendosi l'illustre A. di mantenersi strettamente nel dominio dell'esperienza doveva, come ha fatto, fissare la sua attenzione sulle figure e proprietà geometriche corrispondenti ad oggetti direttamente osservabili, e quindi escludere sistematicamente l'uso di rette, piani e spazio illimitati, cui non corrispondono imagini fisiche concrete. Nel libro si parla adunque di segmenti, porzioni di piano, di regioni di spazio e si danno per essi le proprietà più elementari, pur ammettendo, conformemente all'esperienza, di poter prolungare i segmenti, estendere le porzioni di piano, ecc. Ai concetti astratti di retta, piano, spazio illimitati l'A. dedica una breve appendice, ove rileva che la loro natura non è totalmente empirica, come non lo è quella della proposizione affermante l'esistenza, in ogni segmento, di un punto interno distinto dagli estremi. Alla loro formazione sarà principale incentivo l'osservazione diretta, ma insieme ad essa interviene un processo, legato alla nostra struttura mentale, il quale è appunto ciò che ci spinge ad attribuire a regioni che non possiamo raggiungere nè direttamente, nè coi nostri strumenti, le proprietà controllate nel campo ristretto delle nostre esperienze. Ed è perciò che l'A. ritiene giustamente, " che non sia permesso, senza alcuna giustificazione, di estendere le nozioni tutte da oggetti che si possono direttamente osservare alla retta, al piano, e allo spazio illimitati che nessuno ha mai osservati nè potrà mai osservare ".

Rileverò, in fine, che tanto l'ordinamento delle proprietà delle figure, quanto l'introduzione dei concetti geometrici fondamentali (ad es. quelli di parallele, d'uguaglianza) mettono in evidenza che l'A., con questi *Elementi di Geometria intuitiva*, ha avuto anche lo scopo di scrivere un libretto che serva di preparazione allo studio razionale della geometria secondo la direttiva scientifica dei suoi *Elementi* ad uso degli Istituti tecnici. Infatti, le proposizioni fondamentali di questi ultimi non sono che la formulazione logica di quelle che, gradatamente e con metodo sperimentale, vengono svolte negli *Elementi di Geometria intuitiva.*

R. Bonola.

S. Catania. — *Aritmetica razionale* pei Ginnasi superiori. Terza edizione completamente rifatta, corredata di molti esercizi con avviamento. Catania, N. Giannotta, 1910.

In questa terza edizione l'A., pur seguendo, come nelle precedenti, le classiche opere del Peano, ha portato al suo libro notevoli miglioramenti.

Si ammettono *due* idee primitive, cioè *numero* e *il successivo di* un numero, e le quattro proposizioni primitive del Pieri:

1ª. *Esiste almeno un numero.*

2ª. *Il successivo di un numero è un numero.*

3ª. *Due numeri, nessun dei quali sia successivo d'un numero, sono sempre eguali fra loro.*

4ª. *In qualsivoglia classe esistente di numeri esiste almeno un numero che non è il successivo di alcun numero della classe.*

Dopo alcune proposizioni vien dimostrato il principio d'induzione, del quale si fa uso costante nella teoria delle operazioni dirette. Si ottiene in tal modo un complesso di dimostrazioni tutte analoghe e quindi facili ad essere rammentate, e qualche volta improvvisate, dagli studenti.

Il m e il D son trattati in modo originale e semplice; notevole è la dimostrazione del teorema:

$$a, b, m, n \,\varepsilon\, N_1 \,.\, D\,(a, b) = 1 \,.\, \supset .\, D\,(a^m, b^n) = 1\,,$$

importante per i Ginnasi, essendo riserbata alla 3ª classe liceale buona parte della teoria dei numeri primi. Questa è svolta, complessivamente, come di solito; e a proposito noto, come dissi altra volta, che uno dei pregi dell'opera in esame, è di non mutare ciò che, essendo rigoroso e semplice, da tempo si trova consacrato in tutti i libri del genere.