Ora consideriamo un punto M di G_1; poichè esso trovasi nel primo dei due casi già distinti, tracciando la $\varkappa(O, OM)$ deve esistere un punto del tratto $\overline{MB}$ non interno ad essa. Se tutti i punti del tratto $\overline{MB}$ non interni alla detta circonferenza, fossero sulla circonferenza, nessun punto del tratto AM potrebbe essere esterno alla circonferenza medesima, perchè M è di G_1: quindi M sarebbe un punto di distanza massima. Supponiamo dunque che esista un punto Y del tratto $\overline{MB}$ esterno alla $\varkappa(O, OM)$.

Descriviamo una circonferenza di centro O e tale che rispetto ad essa M sia interno e Y' esterno, e sia M_0 il primo punto d'incontro del tratto MB con essa. È evidente che M_0 è, come M, nel primo dei due casi detti, e quindi è ancora di G_1. Poichè M_0 segue M, si ha che nel gruppo G_1 non esiste un ultimo punto.

Ne viene [5] che esiste il primo punto del gruppo G_2. Se esso è H, dimostreremo che H è un punto di distanza massima.

Intanto, tutti i punti che seguono H sono interni alla $\varkappa(O, OH)$; infatti, poichè H è di G_2, esiste una circonferenza di centro O e passante per un punto P del tratto AH rispetto alla quale tutti i punti che seguono H sono interni; e questa non può essere di raggio $OP > OH$, perchè prendendo l'ultimo punto d'incontro H' del tratto AH di l con la $\varkappa(O, OP)$ anche H' apparterrebbe a G_2, mentre H è il primo dei punti di G_2.

Così, ogni punto del tratto AH o è sulla $\varkappa(O, OH)$ o è l'interno ad essa; infatti abbiamo visto or ora che non può esistere un punto P di AH per il quale sia $OP > OH$.

Dunque nessun punto della linea l è esterno alla circonferenza $\varkappa(O, H)$; perciò H è un punto di distanza massima.

Analogamente si dimostra l'esistenza di un punto di distanza minima; basta ripetere il ragionamento precedente scambiando *interno* e *esterno*, *maggiore* e *minore*.

18. Sostituendo la considerazione delle circonferenze di centro O con quella di striscie aventi per bisettrice una data retta, o di superfici sferiche aventi per centro un dato punto, o di strati aventi per piano bisettore un determinato piano, o di superfici cilindriche di rotazione aventi per asse una determinata retta, si dimostra che:

IV. *La distanza dei punti di una linea piana limitata o chiusa da una data retta del piano, e la distanza dei punti di una linea gobba limitata o chiusa da un dato punto, piano, retta dello spazio, ha un massimo e un minimo* [1].

---

[1] Abbiamo già osservato al n. 3 che ogni punto di una linea è un punto limite dell'insieme dei punti della linea stessa, ossia è un punto dell'insieme derivato. Se poi la linea è limitata o chiusa, segue dai teor. III e IV che un punto non appartenente alla linea non è mai un punto limite dell'insieme, e quindi che l'insieme, contenendo in sè tutti i suoi punti limite, è *chiuso*. Combinando le due proprietà si ha che l'insieme dei punti di una linea limitata o chiusa coincide coll'insieme derivato, e quindi è *perfetto* nel senso di Cantor (V. nota al n. 12).

La minima distanza di un punto O dai punti di una linea l sarà indicata con $\delta(O, l)$.

19. Conseguenze dei teoremi dimostrati:

1) *Se la distanza di un punto O dai punti di una linea l limitata o chiusa può essere minore di un segmento dato ad arbitrio, il punto O appartiene alla linea l.*

2) *Se considerando un punto O di una linea l limitata o chiusa, e prescindendo dai punti di un tratto SOT di l comprendente O, si trova che la distanza O da uno dei punti rimanenti della linea può essere minore di un segmento dato ad arbitrio, il punto O è un nodo della linea.*

3) *Data una linea l limitata o chiusa e una retta qualunque del piano, si possono considerare due rette parallele alla data e tali che la linea sia totalmente contenuta nella striscia di piano da esse determinata, avendo però punti comuni coll'una e l'altra retta.*

Ciascuna delle due rette si dirà una *retta sfiorante* della linea l, e i punti che hanno comuni con la linea *punti di sfioramento.*

20. Passiamo a considerare il caso di due linee limitate o chiuse.

V. *La distanza fra due punti appartenenti rispettivamente a due linee limitate o chiuse l ed l' ha un massimo e un minimo.*

Consideriamo un punto O dello spazio, non appartenente ad l, e ad ogni punto M di l facciamo corrispondere un punto M″ del raggio (sempre determinato) OM prendendo OM″ uguale alla massima distanza fra il punto M e i punti della linea l'. L'insieme l'' dei punti M″ è in corrispondenza univoca coll'insieme dei punti della linea l; ora mostreremo che la corrispondenza è continua, ossia che, considerando un punto M e il suo corrispondente M″, si può prendere un tratto PQ di l comprendente M in modo che i punti di l'' corrispondenti a quelli di PQ siano contenuti in un intorno sferico di M″ dato ad arbitrio.

Descriviamo una sfera di centro M e di raggio arbitrario ε, e siano P, Q i primi punti d'incontro di l con la superficie sferica, a partire da M in un senso o nell'altro. I punti di l'' corrispondenti a quelli del tratto PQ di l si troveranno dentro il cono circoscritto da O alla sfera. Inoltre, sia N un punto del tratto PQ di l e siano M′ ed N′ due punti di l' dai quali M ed N rispettivamente abbiano la distanza massima. Essendo $MN \leqslant \varepsilon$, si ha anche:

$$\begin{aligned} NN' &< MN' + \varepsilon \\ &< MM' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Così pure:

$$MM' < NN' + \varepsilon,$$

e quindi:

$$MM' - \varepsilon < NN' < MM' + \varepsilon.$$

Questo dimostra che, descrivendo due superfici sferiche di centro O e di raggio $OM'' - \varepsilon$ e $OM'' + \varepsilon$, il punto N'' corrispondente ad N è compreso fra esse.

Dunque i punti di l'' corrispondenti ai punti del tratto PQ di l appartengono al solido compreso fra la superficie conica e le due superfici sferiche già dette; solido che, purchè ε sia sufficientemente piccolo, può entrare in qualunque sfera di centro M'', data a piacere. Questo prova che la corrispondenza fra l'' e l è continua.

Per il teorema I [12] si può concludere che l'' è una linea.

La massima distanza di O dai punti di l'' è anche il massimo della distanza fra i punti di l e quelli di l'.

Analogamente si dimostra la esistenza del minimo.

La minima distanza fra i punti di due linee l ed l' sarà indicata con $\delta(l, l')$.

21. In particolare si ha: *La distanza fra due punti di una linea limitata o chiusa ha un minimo*; e da questo segue che *una linea limitata o chiusa non è mai una figura indefinita* (1).

Sia l una *linea indefinita*, e quindi non limitata nè chiusa; si fissi un senso su essa, e si considerino i due tratti $\overleftarrow{A}$ e $\overrightarrow{A}$ nei quali è divisa da un suo punto A. Può darsi che uno solo di questi tratti sia indefinito o che lo siano ambedue; se uno di questi casi si verifica rispetto al punto A lo stesso caso si verifica rispetto ad ogni altro punto B di l.

Se tanto $\overleftarrow{A}$ che $\overrightarrow{A}$ sono indefiniti, si dice che l è *indefinita in ambedue i sensi*; se solo $\overleftarrow{A}$ è indefinito si dice che l è *indefinita nel senso* $\overleftarrow{A}$.

È manifesto che i concetti di linea limitata e illimitata, e linea indefinita e non indefinita, sono del tutto distinti.

Gruppo dei punti comuni a due linee limitate.

22. I punti d'intersezione di una linea l con un'altra linea l' (ammesso che ce ne siano) costituiscono su l un insieme di punti, che è ordinato per l'ordinamento stesso di l. È facile costruire esempi di linee per le quali l'insieme suddetto è costituito d'infiniti punti ed è illimitato in un senso o in ambedue (2); nel caso però che tanto l che l' siano limitate o chiuse, l'insieme, come ora dimostreremo, è sempre limitato in ambedue i sensi, ossia esiste in esso un primo e un ultimo punto.

Se l è chiusa si considererà come limitata con gli estremi coincidenti in un suo punto.

---

(1) Una figura è indefinita quando esistono in essa due punti la distanza dei quali sia maggiore di un segmento fissato ad arbitrio.

(2) Su un arco di circonferenza consideriamo una successione di punti, così ordinati, A, B, $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ che abbia per limite un punto C; le spezzate di infiniti lati $AA_1A_2 \ldots A_n \ldots$ e $BB_1 B_2 \ldots B_n \ldots$ presentano un gruppo infinito e illimitato di punti comuni.

VI. *L'insieme dei punti d'intersezione di due linee limitate* l *ed* l', *considerato su una qualunque delle due linee, è un insieme ordinato limitato in ambedue i sensi.*

Fissiamo un senso su l, e indichiamo con J l'insieme dei punti d'intersezione di l con l', ammesso che ce ne siano, considerati sulla linea l.

Poichè l è limitata, J è compreso in un tratto minimo MN di l [11], e i punti M ed N appartengono ad J. Se, infatti, M non appartenesse ad J, ossia non fosse, oltre che su l, anche su l', si potrebbe considerare un intorno sferico di M di raggio minore di δ(M, l'); e in quel tratto MM' di MN che apparterrebbe a questo intorno sferico non sarebbero contenuti punti di J. L'insieme J si troverebbe dunque tutto nel tratto M'N, contro l'ipotesi che MN sia il tratto minimo che lo contiene. Analoga considerazione per N.

Veduto che M ed N appartengono all'insieme J si ha che essi sono il primo e l'ultimo punto dell'insieme.

23. *L'insieme dei punti d'intersezione di una retta* r *con una linea* l *limitata o chiusa è un insieme ordinato limitato in ambedue i sensi.*

Infatti, si consideri un punto O di r, e due punti A, B di r che abbiano da O distanza maggiore della massima distanza di O dai punti di l. I punti d'intersezione di r con l sono tutti nel segmento AB, che è una linea limitata, e quindi si può applicare il teorema VI.

Linee formate con punti di un'altra linea.

24. Una linea è un insieme ordinato di punti che soddisfa a certe condizioni; si può domandare se esistono altri ordinamenti dei medesimi punti coi quali l'insieme soddisfi ancora a quelle condizioni, e conservi quindi il carattere di linea. Per il caso di linee limitate o chiuse e prive di nodi si risponde alla domanda con le proposizioni che seguono.

VII. *Una linea* l' *priva di nodi, formata di punti di una linea* l *limitata o chiusa e priva di nodi, coincide con* l *o con un tratto di* l.

La coincidenza non s'intende ristretta ai punti, ma si estende anche agli ordinamenti.

Un punto di l' è anche un punto di l; indicheremo due punti coincidenti di l e l' con la stessa lettera, segnandola con un apice quando indica un punto di l'.

Supponiamo per primo caso che la linea l sia limitata (non chiusa). Prendiamo due punti A' e B' di l', e consideriamo su l' il senso A'B' (1) e su l il senso AB; ci proponiamo intanto di dimostrare che il tratto A'B' di l' coincide col tratto AB di l.

---

(1) Non si può escludere a priori che l' sia chiusa; in tal caso si considererà l' come limitata con estremi coincidenti in un punto diverso da A' e B'.

Sia C′ un punto di A′B′; se esso non appartiene ad AB, apparterrà o al tratto $\overleftarrow{A}$ o al tratto $\overrightarrow{B}$ di l; supponiamo per esempio che si verifichi il primo caso, e consideriamo l'insieme J di quei punti X′ del tratto C′B′ tali che il tratto C′X′ sia tutto di punti del tratto $\overleftarrow{A}$ di l; il punto C′ appartiene ad J, e B′ non gli appartiene. Sia C′H il tratto minimo di C′B′ nel quale è contenuto l'insieme J [11].

Se X′ è un punto di J, i punti del tratto C′B′ compresi fra X′ e il primo punto nel quale il tratto X′B′ incontra la superficie sferica (¹)

$$\sigma(X', \varepsilon) \qquad \text{con} \qquad \varepsilon < \delta(X', \overrightarrow{A})$$

sono manifestamente tutti di J; quindi in J non esiste un ultimo punto, e H′ non appartiene perciò ad J. Si hanno però punti di J vicini ad H′ quanto si vuole; questo è assurdo perchè i punti di J sono nel tratto $\overleftarrow{A}$, che è limitato, e H′ non appartiene ad esso [19].

È dunque inammissibile che un punto C′ del tratto A′B′ di l' non appartenga al tratto AB di l.

Se D′ è un altro punto di A′B′, secondo che esso appartiene al tratto A′C′ o a C′B′, anche D appartiene ad AC o a CB; onde si vede che non solo i punti di A′B′ appartengono ad AB, ma anche sono ordinati ugualmente tanto considerati in A′B′ che in AB.

Ora vediamo se il tratto A′B′ esaurisce il tratto AB. Prendiamo M di AB; se esso non appartenesse ad A′B′, si potrebbero considerare i primi punti nei quali i tratti MA ed MB incontrano il tratto A′B′ [22]; quei due punti sarebbero successivi su l', mentre in una linea non esistono punti successivi [4]. Ecco dunque dimostrato che i tratti AB di l e A′B′ di l' coincidono.

Il tratto $\overleftarrow{A'}$ di l' può essere limitato o illimitato; nel primo caso esso coincide, come si è visto, con un tratto RA di l. Nel secondo caso, i punti di $\overleftarrow{A'}$ costituiscono su $\overleftarrow{A}$ un insieme, ed essendo $\overleftarrow{A}$ limitato esiste un tratto minimo RA che lo contiene; evidentemente, il tratto $\overleftarrow{A'}$ di l' coincide col tratto $\overline{R}A$ di l.

Analogamente, il tratto $\overrightarrow{B'}$ di l' coincide o con un tratto BS di l o con un tratto $B\overline{S}$. E così è dimostrato che l'intera linea l' coincide col tratto RS o $\overline{R}S$ o $R\overline{S}$ o $\overline{RS}$ di l.

25. Come secondo caso consideriamo quello di una linea l chiusa. Presi A′ e B′ di l', si consideri il tratto A′B′ che essi determinano in l' (o uno dei tratti A′B′ se anche l' è chiusa) e supponendo, come si può, che il tratto A′B′ non esaurisca l', si prenda un punto K′ di l' che non appartenga al tratto A′B′ considerato.

(¹) Per brevità, indicheremo con $\sigma(A, \varepsilon)$ la superficie sferica di centro A e raggio ε.

Riguardando l come limitata con gli estremi coincidenti nel punto $\mathrm{K} \equiv \mathrm{K}'$ si dimostrerà come nel caso precedente che il tratto A'B' di l' coincide col tratto AB di l.

A questo punto, se anche l' è chiusa si ha che l'altro tratto A'B' di l' coincide con l'altro tratto AB di l, e quindi che l e l' coincidono; se poi l' è aperta, si consideri divisa in due tratti, $\overleftarrow{\mathrm{M}}'$ e $\overrightarrow{\mathrm{M}}'$, che non avranno altri punti comuni che M', e si riguardi l come limitata con gli estremi coincidenti nel punto $\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}'$. Il tratto $\overleftarrow{\mathrm{M}}'$ sarà contenuto in un tratto minimo MR di l e il tratto $\overrightarrow{\mathrm{M}}'$ in un tratto minimo MS, ed è evidente che il tratto $\overleftarrow{\mathrm{M}}'$ coincide con MR o con MR, e il tratto $\overrightarrow{\mathrm{M}}'$ coincide con MS o con $\mathrm{M}\overline{\mathrm{S}}$; di modo che l' coincide con un tratto RMS o $\overline{\mathrm{R}}\mathrm{MS}$ o $\mathrm{RM}\overline{\mathrm{S}}$ o $\overline{\mathrm{R}}\mathrm{M}\overline{\mathrm{S}}$ di l.

26. Dal teorema VII segue che: 1) *Una linea* l' *priva di nodi, formata di tutti i punti di una linea* l *limitata o chiusa e priva di nodi, coincide necessariamente con* l. Ciò significa che l e l' non coincidono soltanto per i punti che le formano, ma anche per gli ordinamenti.

2) Questo risultato si può porre sotto la forma seguente:

VIII. *Coi punti di una linea limitata o chiusa e priva di nodi non si può formare un'altra linea priva di nodi in modo che l'ordinamento proprio di questa differisca dall'ordinamento proprio di quella.*

3) Poichè un tratto di una linea priva di nodi, aperta o chiusa, non può essere una linea chiusa, si ha: *Se una linea* l' *chiusa e priva di nodi è formata di punti di una linea* l *limitata o chiusa e priva di nodi,* l' *coincide con* l.

Anche l è perciò necessariamente chiusa.

27. Si possono costruire esempi di insieme di punti in corrispondenza univoca e continua coll'insieme dei punti di un segmento, e perciò linee [12], ai quali appartengono tutti i punti di un quadrato, o di un cubo, ecc. (1)

Si hanno così delle linee singolari, tali che in ogni punto di esse si può considerare un intorno circolare o sferico, i punti del quale appartengono tutti alle linee medesime. Noi possiamo mostrare che tali linee non possono essere limitate o chiuse e prive di nodi.

IX. *Entro qualunque intorno circolare di un punto di una linea* l, *limitata o chiusa e priva di nodi, si trovano punti non appartenenti alla linea* l.

Supponiamo infatti che tutti i punti di un intorno circolare c di un punto di l appartengano ad l. Descriviamo una circonferenza c'

(1) Tali sono gli insieme costruiti da PEANO e da HILBERT, dei quali si tratta ampiamente in SCHOENFLIES, opera cit., I (Leipzig, 1900) p. 115 e segg., II p. 216 e segg.

interna a c; essa è una linea priva di nodi costituita di punti di l, e chiusa; dovrebbe quindi, essendo l limitata o chiusa e priva di nodi, coincidere con l [26, 3)], mentre questo non avviene.

Spezzate inscritte in una linea.

28. Su una linea l fissiamo un senso, e consideriamo poi, nel senso fissato, una successione qualunque di punti della linea. I segmenti che hanno per estremi due punti successivi formano una linea spezzata [10] che si dice *inscritta* nella linea l.

Una spezzata inscritta può avere così un numero finito come un numero infinito di lati.

X. *In ogni linea limitata* l *si può inscrivere una spezzata di un numero finito di lati che abbia per estremi gli estremi di* l *e i lati minori di un segmento* ε *fissato ad arbitrio.*

Siano A e B gli estremi di l, che possono anche coincidere; prendendo $\varepsilon' < \varepsilon$, descriviamo le superfici sferiche

$$\sigma(A_0, \varepsilon'),\ \sigma(A_1, \varepsilon'), \ldots, \sigma(A_i, \varepsilon'), \ldots,$$

intendendo che A_0 coincida con A e A_i sia il primo punto d'intersezione del tratto $A_{i-1}B$ di l con la

$$\sigma(A_{i-1}, \varepsilon').$$

Consideriamo un numero finito n di queste superfici sferiche; ogni punto del tratto A_0A_n è interno a una di esse. Diremo di *aver raggiunto*, con n superfici sferiche, tutti i punti del tratto A_0A_n. Ora vogliamo dimostrare che B si può raggiungere con un numero finito di superfici sferiche.

Supponiamo che ciò non sia, e poniamo in un gruppo G_1 i punti di l raggiungibili con un numero finito di superfici sferiche, e in un gruppo G_2 gli altri.

L'estremo A è in G_1 e B in G_2; ogni punto di G_1 precede ogni punto di G_2.

A ogni punto di G_1 ne seguono altri di G_1; infatti, se un punto X si raggiunge con n superfici sferiche, con $n+1$ superfici sferiche si raggiungono altri punti che seguono X. Così, ogni punto di G_2 è preceduto da altri punti di G_2; infatti, se Y è un punto di G_2, si descriva la

$$\sigma\left(Y, \frac{\varepsilon'}{2}\right),$$

e sia Y' il primo punto nel quale essa è incontrata dal tratto YA; Y' precede Y, e non può essere di G_1 perchè se con un numero finito n di superfici sferiche si potesse raggiungere Y', con la $(n+1)^a$, che avrebbe il centro in un punto del tratto Y'Y, si raggiungerebbe Y.

Dunque in G_1 non esiste un ultimo punto e in G_2 non esiste un primo punto; poichè G_1 e G_2 esauriscono l, l'assurdo è manifesto [5].

Dimostrato che l'estremo B si raggiunge con un numero finito m di superfici sferiche, si ha la linea spezzata inscritta

$$AA_1A_2 \ldots A_{m-1}B$$

che ha m lati, tutti minori od uguali a ε', e quindi minori di ε [1].

29. Dalla dimostrazione fatta risulta, più particolarmente, che: *Una linea limitata (o chiusa) si può dividere in un numero finito di tratti ciascuno dei quali sia contenibile entro una superficie sferica di raggio uguale a un segmento dato qualunque.*

Corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea e quelli di un tratto rettilineo.

30. Scopo del presente paragrafo è mostrare come si possa stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea l e quelli di un tratto rettilineo s, in modo che a un senso di s corrisponda un senso di l.

Osserveremo poi che una tale corrispondenza è continua [33]; perciò la proprietà che stiamo per dimostrare è l'inversa di quella enunciata nel teorema I [12].

Se un punto della linea l è un nodo, ad esso corrisponderanno tanti punti distinti del tratto rettilineo s quanti sono i modi nei quali la linea l è divisa da quel punto in due tratti [9].

Considerando da prima una linea limitata, che può essere anche chiusa, dimostriamo che:

XI. *Si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea* l *limitata (o chiusa) e quelli di un segmento* s, *in modo che a un senso fissato di* l *corrisponda un senso fissato di* s.

Consideriamo una successione di segmenti

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i, \ldots$$

indefinitamente decrescente; indi, essendo A e B gli estremi di l, descriviamo le superfici sferiche

$$\sigma(A_0, m_1), \ldots, \sigma(A_i, m_1), \ldots, \sigma(A_{\mu_1}, m_1)$$

---

(1) Se l è un segmento rettilineo, il teorema dimostrato si riduce in ultima analisi alla proprietà espressa nel *postulato d'Archimede*; è noto del resto che essa è una conseguenza del postulato della continuità di Dedekind (V. p. es. Stolz, *Zur Geometrie der Alten, inbesonder über ein Axiom des Archimedes*, *Math. Ann.* XXII, 1883).

Su una linea limitata si può considerare, per quanto abbiamo veduto, una successione di un numero finito di punti che ha per estremi due punti qualunque della linea e tale che la distanza fra due punti successivi sia minore di un segmento ε dato a piacere. È questa appunto la proprietà che caratterizza un insieme *connesso* nel senso di Cantor. E poichè una linea limitata è anche un insieme *perfetto* (V. nota al n. 18), questo insieme essendo perfetto e connesso è un *continuo* nel senso di Cantor.

intendendo che A_0 coincida con A, che A_i sia il primo punto d'intersezione del tratto $A_{i-1}B$ con la $\sigma(A_{i-1}, m_1)$, e che tutto il tratto $A_{\mu_1}B$ appartenga alla sfera $\sigma(A_{\mu_1}, m_1)$. Sappiamo [28] che questo ultimo fatto si presenta necessariamente.

La linea l viene divisa nei $\mu_1 + 1$ tratti

$$A_0A_1,\ A_1A_2, \dots, A_{\mu_1-1}A_{\mu_1},\ A_{\mu_1}B.$$

Dividiamo il segmento s in $\mu_1 + 1$ tratti uguali fra loro, e siano essi

$$A'_0A'_1,\ A'_1A'_2, \dots, A'_{\mu_1-1}A'_{\mu_1},\ A'_{\mu_1}B';$$

e facciamo corrispondere ai punti

$$A_0,\ A_1,\ A_2, \dots, A_{\mu_1},\ B$$

di l, i punti

$$A'_0,\ A'_1,\ A'_2, \dots, A'_{\mu_1},\ B'$$

di s.

Ora consideriamo uno dei tratti A_iA_{i+1} di l, e procediamo per esso come abbiamo proceduto per l'intera $l \equiv AB$, prendendo, invece di m_1, il termine m_2 della successione. Descriviamo dunque le superfici sferiche

$$\sigma(A_{i,0}, m_2), \dots, \sigma(A_{i,k}, m_2), \dots, \sigma(A_{i,\mu_2}, m_2),$$

e consideriamo i punti

$$A_{i,0} \equiv A_i,\ A_{i,1},\ A_{i,2}, \dots, A_{i,\mu_2},\ A_{i+1},$$

i quali dividono il tratto A_iA_{i+1} in $\mu_2 + 1$ tratti. Dividiamo il tratto $A'_iA'_{i+1}$ di s in $\mu_2 + 1$ tratti uguali fra loro mediante i punti

$$A'_{i,0} \equiv A'_i,\ A'_{i,1},\ A'_{i,2}, \dots, A'_{i,\mu_2},\ A'_{i+1},$$

che faremo corrispondere ai punti $A_{i,k}$ del tratto A_iA_{i+1}.

Questo faremo per tutti i tratti del tipo A_iA_{i+1}, nonchè per il tratto $A_{\mu_1}B$. Se quest'ultimo tratto appartenesse tutto alla sfera $\sigma(A_{\mu_1}, m_2)$, si scarti il termine m_2 della successione, e si consideri invece m_3. È certo che esiste un termine m_r della successione, per il quale il tratto $A_{\mu_1}B$ non appartiene tutto alla sfera $\sigma(A_{\mu_1}, m_r)$.

Con questa intesa, ciascuno dei $\mu_1 + 1$ tratti nei quali già era diviso s rimane diviso in almeno due parti uguali.

Procediamo coi nuovi tratti di l e di s ancora nello stesso modo, considerando il termine m_3 della successione; e così via. Otteniamo i punti del tipo $A_{i,k,r,t,\dots}$ di l, ai quali facciamo corrispondere i punti del tipo $A'_{i,k,r,t,\dots}$ di s. Considerando i punti $A_{i,k,r,\dots}$ ordinati secondo il senso AB di l, i punti corrispondenti $A'_{i,k,r,\dots}$ sono ordinati secondo il senso A'B' di s.

In ogni tratto HK di l si hanno punti del tipo $A_{i,k,r,\dots}$; e infatti, se ciò non fosse, qualunque sia il termine m_z della successione esisterebbe una superficie sferica di raggio m_z alla quale il tratto HK sarebbe tutto interno; questo è assurdo, potendosi supporre

$$m_z < \frac{1}{2} \delta (\mathrm{H}, \mathrm{K}).$$

In ogni tratto H'K' di s si hanno punti del tipo $A'_{i,k,r,\ldots}$ Infatti, due punti successivi del tipo A'_i hanno fra loro una distanza $\leqslant \frac{1}{2} s$; due del tipo $A'_{i,k}$ hanno una distanza $\leqslant \frac{1}{4} s$; e così di seguito, la distanza fra due punti successivi diventa via via minore di

$$\frac{1}{2^3} s, \frac{1}{2^4} s, \ldots, \frac{1}{2^n} s, \ldots$$

Questa distanza diventa perciò minore anche di H'K'.

Sia ora X un punto di l, che non sia del tipo $A_{i,k,r,\ldots}$; esso determina una divisione dei punti di questo tipo in due gruppi separati, ai quali corrispondono due gruppi separati di punti del tipo $A'_{i,k,r,\ldots}$ su s; esiste un elemento di separazione X' di questi due gruppi, che è unico per le osservazioni fatte. Al punto X di l faremo corrispondere il punto X' di s.

In questo modo, a ogni punto X di l corrisponde un unico punto X' di s, e ad ogni punto Y' di s corrisponde un unico punto Y di l. Al senso AB di l corrisponde il senso A'B' di s.

31. Passiamo a considerare il caso di una linea illimitata (anche indefinita) in un sol senso o in ambedue i sensi.

XII. *Si può stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea* l *illimitata in un sol senso o in ambedue e i punti di un segmento* s *nel quale si sopprima un estremo o ambedue, tale che ad un senso fissato di* l *corrisponda un senso di* s.

Se la linea l è illimitata in ambedue i sensi, la possiamo dividere, mediante un punto, in due tratti illimitati in un sol senso; limitiamoci dunque a considerare il caso di una linea l limitata in un senso e illimitata nell'altro.

Sia A l'estremo esistente della linea l; consideriamo una successione indefinitamente decrescente di segmenti

$$m_1, m_2, m_3, \ldots, m_i, \ldots,$$

e descriviamo le superfici sferiche

$$\sigma(A_0, m_1), \sigma(A_1, m_1), \ldots, \sigma(A_i, m_1), \ldots \qquad (1)$$

intendendo che A_0 sia lo stesso A, e A_i sia il primo punto d'intersezione del tratto $\overrightarrow{A_{i-1}}$ di l con la $\sigma(A_{i-1}, m_1)$.

Possono darsi due casi: che la successione (1) sia indefinita, o che non lo sia. In questo secondo caso, sia $\sigma(A_{\mu_1}, m_1)$ la superficie sferica tale che tutto il tratto $\overrightarrow{A_{\mu_1}}$ di l appartenga al solido da essa limitato.

Partendo da A_{μ_1}, e prendendo il termine m_2 della successione, ripetiamo la stessa considerazione col tratto $\overrightarrow{A_{\mu_1}}$ di l, descrivendo le superfici sferiche.

$$\sigma(A_{\mu_1}, m_2),\ \sigma(A_{\mu_1+1}, m_2), \dots,\ \sigma(A_{\mu_1+i}, m_2), \dots \tag{2}$$

ove A_{μ_1+i} è il primo punto d'intersezione del tratto $\overrightarrow{A_{\mu_1+i-1}}$ con la $\sigma(A_{\mu_1+i}, m_2)$. Se tutto il tratto $\overrightarrow{A_{\mu_1}}$ appartenesse alla sfera $\sigma(A_{\mu_1}, m_2)$, si scarterebbe il termine m_2 della successione e si considererebbe subito m_3.

Ammesso che la successione (2) non sia indefinita, sia $\sigma(A_{\mu_2}, m_2)$ la superficie sferica tale che tutto il tratto $\overrightarrow{A_{\mu_2}}$ di l appartenga al solido da essa limitato. Così seguitiamo; giunti al termine m_k, e considerata la sfera $\sigma(A_{\mu_k}, m_k)$ alla quale appartiene tutto il tratto $\overrightarrow{A_{\mu_k}}$, può darsi che la successione che poi si deve considerare

$$\sigma(A_{\mu_k}, m_{k+1}), \dots,\ \sigma(A_{\mu_k+i}, m_{k+1}), \dots \tag{3}$$

sia indefinita. In tal caso la nostra costruzione finisce col termine m_{k+1}.

Procedendo come si è detto, otteniamo su l i punti ordinati:

$$A_0,\ A_{\mu_1},\ A_{\mu_2}, \dots, A_{\mu_i}, \dots; \tag{4}$$

se per nessun punto A_{μ_k} avviene che la successione (3) sia indefinita, la successione (4) è indefinita; altrimenti termina con un punto A_{μ_k}, al quale però noi faremo seguire i punti

$$A_{\mu_k+1},\ A_{\mu_k+2}, \dots, A_{\mu_k+i}, \dots$$

definiti dalla successione (3); di modo che avremo in ogni caso una successione indefinita di punti; o

$$A_0,\ A_{\mu_1},\ A_{\mu_2}, \dots, A_{\mu_k},\ A_{\mu_{k+1}}, \dots \tag{5}$$

oppure

$$A_0,\ A_{\mu_1},\ A_{\mu_2}, \dots, A_{\mu_k},\ A_{\mu_k+1}, \dots, A_{\mu_k+i}, \dots \tag{6}$$

In ciascuno di questi due casi, ogni altro punto X di l è compreso fra due termini della successione. Infatti, nel primo dei due casi, se X seguisse tutti i punti della successione (5), lo stesso avverrebbe di un altro punto X_1 che segua X su l, onde X e X_1 apparterrebbero a tutte le sfere $\sigma(A_{\mu_i}, m_i)$; questo non può darsi perchè da un certo valore di i in poi si ha

$$m_i < \frac{1}{2}\,\delta(X, X_1).$$

Nel secondo dei due casi poi, se X seguisse tutti i punti della successione (6) avremmo che non tutti i punti del tratto limitato $A_{\mu_k}X$ di l si potrebbero raggiungere con la successione (3), e questo è assurdo come vedemmo al n. 28.

Indichiamo l'una o l'altra indifferentemente delle due successioni (5) e (6) con

$$A, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots;$$

ogni punto di l o coincide con uno dei termini di questa successione o è compreso fra due termini successivi.

Ora sul dato segmento $s \equiv A'B'$ prendiamo una successione di punti, ordinati nel senso $A'B'$:

$$A', M'_1, M'_2, \ldots, M'_i, \ldots,$$

la quale abbia per limite l'estremo B'. Indi stabiliamo una corrispondenza biunivoca, a norma del teorema XI, fra i punti dei tratti

$$AM_1, M_1M_2, \ldots, M_iM_{i-1}, \ldots$$

di l, e quelli dei tratti

$$A'M'_1, M'_1M'_2, \ldots, M'_iM'_{i+1}, \ldots$$

di s. Avremo una corrispondenza biunivoca fra i punti di l e quelli di s, escluso l'estremo B', per la quale al senso $\vec{A}$ di l corrisponde il senso $A'B'$ di s.

32. La corrispondenza che abbiamo ottenuto fra i punti di una linea e quelli di un tratto rettilineo può ottenersi anche fra i punti di due linee, purchè siano ambedue limitate o ambedue illimitate, in un sol senso o nei due sensi. Basta infatti riferirle ambedue a uno stesso tratto rettilineo.

In particolare, *è sempre possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra i punti di una linea chiusa e quelli di una circonferenza, per la quale ad un senso fissato sulla linea corrisponda un senso fissato sulla circonferenza.*

33. *Una corrispondenza biunivoca fra i punti di due linee* l *ed* l', *per la quale un senso di* l *corrisponde a un senso di* l', *è una corrispondenza continua.*

Infatti, siano X e X' due punti corrispondenti di l e l'; dato un intorno sferico ad arbitrio di X', si consideri quel tratto M'N' di l', comprendente X', che è contenuto nell'intorno sferico dato. Ad esso corrisponde un tratto MN di l, comprendente X; ai punti di l contenuti nel tratto MN corrispondono punti di l' contenuti nell'intorno fissato, e questo prova appunto che la corrispondenza è continua.

Rappresentazione analitica di una linea.

34. Data una linea l, si stabilisca una corrispondenza biunivoca e continua [33] fra i punti di l e quelli di un segmento $s \equiv A'B'$, nel quale si astragga da un estremo o da ambedue se l è illimitata; indi si facciano corrispondere i punti di s ai valori di una variabile t, che assuma negli estremi A' e B' i valori a e b. Avremo una corrispondenza biunivoca fra i punti della linea l e i valori della variabile t nell'intervallo $a \ldots b$, oppure $\overline{a} \ldots b$, oppure $a \ldots \overline{b}$, oppure $\overline{a} \ldots \overline{b}$.

Se ai punti di l facciamo corrispondere la loro distanza d da un piano fissato, per ogni valore di t si ha un valore di d, ma non sempre inversamente; la corrispondenza fra i valori di t e quelli di d non è sempre biunivoca, ma è ancora continua; si ha cioè

$$d = f(t),$$

dove f è il simbolo di una funzione finita e continua nell'intervallo $a \ldots b$ (estremi compresi o no).

Indicando in particolare con x, y, z le coordinate di un punto di l rispetto a tre assi cartesiani ortogonali, si ha

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

con f_1, f_2, f_3 simboli di funzioni finite e continue nell'intervallo $a \ldots b$ (estremi compresi o no).

Questa è la rappresentazione analitica possibile per ogni linea.

Inversamente, l'insieme dei punti le coordinate dei quali sono funzioni finite e continue di una variabile in un intervallo limitato o illimitato è una linea [13,3)]. Si ha dunque:

XIII. *Ogni linea si può rappresentare in infiniti modi come l'insieme dei punti le coordinate dei quali sono funzioni finite e continue di una variabile in un intervallo, limitato o illimitato in un senso o in ambedue secondo che la linea è limitata o illimitata in un senso o in ambedue.*

Inversamente, ogni insieme di punti così rappresentato è una linea.

P. Benedetti.

(Continua)

DUE METODI GENERALI PER LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI

dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica.

(Continuazione — Vedi fascicoli I e II)

IV. — Combinazioni e numeri figurati. (1)

15. Il numero delle combinazioni semplici di z elementi ad i ad i si rappresenta col simbolo $C_{z,i}$ e, per il loro stesso significato, z ed i sono necessariamente numeri interi e non possono intendersi che con un segno solo, il segno $+$.

Non è possibile formare una combinazione semplice che contenga un numero d'elementi che sia maggiore di z, ed è chiaro che il numero delle combinazioni semplici che contengono un solo elemento è z ed il numero di quelle che contengono tutti gli elementi è 1; perciò:

$$C_{z,i}=0\,, \quad \text{per} \quad i>z\,,$$
$$C_{z,1}=z\,,$$
$$C_{z,z}=1\,,$$

e si può convenire

$$C_{0,i}=0\,, \quad \text{per} \quad i>0\,,$$
$$C_{0,0}=1\,.$$

Considerando uno qualunque degli elementi, le combinazioni che non lo contengono si distinguono da quelle che lo contengono: il numero delle prime è $C_{z-1,i}$ ed il numero delle seconde è uguale a quello di $C_{z-1,i-1}$; perciò si ha sempre la relazione ricorrente

$$C_{z,i}=C_{z-1,i}+C_{z-1,i-1}\,.$$

Da questa, per $i=1$, si ricava

$$C_{z,1}=C_{z-1,1}+C_{z-1,0}\,,$$

---

(1) La materia di quest'articolo è raccolta da alcuni studi e ricerche sulle *classi aritmetiche*. Il problema *principale* dell'espressione del termine generale della potenza d'una progressione aritmetica ed il problema *secondario* della somma delle potenze simili dei termini, non sono in sostanza che problemi di combinazione. Per rendere ciò chiaro quanto più sia possibile, per gli svolgimenti ulteriori e per le applicazioni dei due metodi generali ai numeri figurati ed in particolar modo ai numeri naturali, si reputa utile ed opportuno (pur tralasciando definizioni e considerazioni generali sulla classificazione aritmetica) di stabilire le leggi di quelle classi che occorrono e dimostrare, al loro posto, alcune delle formule che saranno richiamate. Nello stesso tempo s'introdurrà qualche simbolo necessario e verrà dimostrata o semplicemente accennata, per logica connessione, qualche proposizione che potrà interessare il lettore ed essere argomento o punto di partenza per altro articolo.

cioè

$$z = z - 1 + C_{z-1,0}$$

e quindi

$$C_{z-1,0} = 1.$$

Cosicchè

$$C_{0,0} = C_{1,0} = \ldots = C_{z,0} = 1,$$
$$C_{0,0} = C_{1,1} = \ldots = C_{z,z} = 1.$$

Lasciando sottinteso (come sempre per le classi aritmetiche) che z ed i sono numeri interi, si può stabilire la *limitazione*, la *determinazione* e la *definizione* della *legge* dei numeri delle combinazioni semplici, che è legge d'una *2-classe aritmetica*, cioè:

$$\begin{array}{ll} z \geqslant 0; \quad i \geqslant 0; & \text{lm.,} \\ \left.\begin{array}{l} C_{0,i} = 0, \quad \text{per} \quad i > 0; \\ C_{z,0} = 1; \end{array}\right\} & \text{dt.,} \\ C_{z,i} = C_{z-1,i} + C_{z-1,i-1}; & \text{df.} \end{array} \qquad (27)$$

I termini $C_{0,i}$ e $C_{z,0}$, per tutt'i valori di i e di z, sono direttamente assegnati con la determinazione e formano il *sistema degli assi*; per determinarli non si applica la definizione, sia essa compatibile o no; tutti gli altri termini si costruiscono successivamente con la definizione, e quindi, per questa legge, con la somma di due termini assegnati o già costruiti.

Si deduce facilmente che per un valore fissato di $i > 0$, solamente i termini $C_{0,i}, \ldots, C_{i-1,i}$ hanno il valore zero, e tutti gli altri termini

$$C_{i,i}, \ldots, C_{z,i}, \ldots$$

che formano la successione dei numeri figurati d'ordine i, in senso stretto, sono numeri interi e positivi; e per un valore fissato di z, solamente i termini

$$C_{z,0}, \ldots, C_{z,z}$$

che formano la successione dei coefficienti binomiali relativi alla potenza d'esponente z, sono numeri interi e positivi, e tutti gli altri termini $C_{z,z+1}, C_{z,z+2}, \ldots$ hanno il valore zero. La successione dei termini dell'asse $C_{z,0} = 1$, cioè

$$C_{0,0}, \ldots, C_{z,0}, \ldots,$$

forma i numeri figurati d'ordine zero.

16. La legge (27), per $i > 0$, comporta un'espressione diretta del termine generale della 2-classe, data dalla formula

$$C_{z,i} = \frac{z(z-1)\ldots(z-i+1)}{1.2\ldots i}. \qquad (28)$$

Infatti, essa è vera per $i=1$, perchè

$$C_{z,1}=\frac{z}{1}=z\,,$$

ed è vera per $z=0,\ldots,i-1$, perchè le espressioni

$$C_{0,i}=\frac{(0)(-1)\ldots(-i+1)}{1.2\ldots i}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{i-1,i}=\frac{(i-1)(i-2)\ldots(0)}{1.2\ldots i}=0$$

si annullano tutte, perchè hanno il fattore zero nel numeratore, ed è vera per $z=i$, perchè

$$C_{i,i}=\frac{i(i-1)\ldots 1}{1.2\ldots i}=1\,,$$

e questi risultati sono uguali a quelli che possono dedursi dalla legge e che sono stati ottenuti direttamente; consentendo quindi che essa sia vera per $z-1$, si ha

$$\begin{aligned}C_{z,i}&=C_{z-1,i}+C_{z-1,i-1}\\&=\frac{(z-1)\ldots(z-i)}{1\ldots i}+\frac{(z-1)\ldots(z-i+1)}{1\ldots(i-1)}\\&=\frac{(z-1)\ldots(z-i+1)}{1\ldots(i-1)}\cdot\left(\frac{z-i}{i}+1\right)\\&=\frac{(z-1)\ldots(z-i+1)}{1\ldots(i-1)}\cdot\frac{z}{i}\\&=\frac{z(z-1)\ldots(z-i+1)}{1.2\ldots i}\,,\end{aligned}$$

che è precisamente la formula (28).

17. Per $z\geqslant i$, si ha la formula

$$C_{z,i}=C_{z,z-i}\,. \tag{29}$$

Infatti, essa è vera per $i=0$, perchè

$$C_{z,0}=C_{z,z}=1\,,$$

e per $z=i$, perchè

$$C_{i,i}=C_{i,0}=1\,,$$

e per $z>i$, perchè

$$\begin{aligned}C_{z,i}&=\frac{z\ldots(z-i+1)}{1\ldots i}\\&=\frac{z\ldots(z-i+1)}{1\ldots i}\cdot\frac{(z-i)\ldots(i+1)}{(i+1)\ldots(z-i)}\\&=\frac{z\ldots(i+1)}{1\ldots(z-i)}\\&=C_{z,z-i}\,.\end{aligned}$$

E da essa si ottiene

$$
\begin{aligned}
C_{z,i} &= \frac{z \ldots (i+1)}{1 \ldots (z-i)} \\
&= \frac{z \ldots (i+1)}{1 \ldots (z-i)} \cdot \frac{i \ldots 1}{1 \ldots i} \qquad (30)\\
&= \frac{z!}{(z-i)!\, i!};
\end{aligned}
$$

e siccome il numero delle disposizioni semplici di z elementi ad i ad i è

$$D_{z,i} = z(z-1)\ldots(z-i+1)$$

ed il numero delle permutazioni semplici di i elementi è

$$P_i = 1.2\ldots i = i!,$$

così

$$C_{z,i} = \frac{D_{z,i}}{P_i} = \frac{P_z}{P_{z-i}\,.\,P_i}. \qquad (31)$$

Consentendo che quest'ultima formula valga anche per $i=0$, ed essendo $C_{z,0}=1$, si può convenire

$$
\begin{aligned}
P_0 &= 0! = 1,\\
D_{z,0} &= 1.
\end{aligned}
$$

18. Dalle formule (30) e (31) si ha

$$
\begin{aligned}
C_{z,0} &= \frac{z!}{0!\,z!} = \frac{D_{z,0}}{0!},\\
C_{z,i} &= \frac{z!}{i!\,(z-i)!} = \frac{D_{z,i}}{i!};
\end{aligned}
$$

e così pure

$$C_{z,i}\,.\,C_{z-i,k} = \frac{z!}{i!\,(z-i)!}\cdot\frac{z-i!}{k!\,(z-i-k)!} = \frac{z!}{i!\,k!\,(z-i-k)!} = \frac{Dz,i+k}{i!\,k!}.$$

È chiaro che questi risultati si possono stabilire in generale e verificare in modo del tutto analogo; ponendo quindi

$$1 \leqslant k_1, \ldots, k_i \leqslant z$$

e

$$k_1 + \ldots + k_i = z$$

si avrà, per $y \geqslant z$,

$$C_{y,k_1}\,.\,C_{y-k_1,k_2}\ldots C_{y-k_1-\ldots-k_{i-1},k_i} = \frac{y!}{k_1!\ldots k_i!\,(y-z)!} = \frac{D_{y,z}}{k_1!\ldots k_i!}; \qquad (32)$$

e siccome il primo membro è un prodotto di numeri interi, così si conchiude che $D_{y,z}$ è sempre divisibile pel prodotto dei fattoriali di i numeri, interi e positivi, tali che la loro somma sia z.

19. L'espressione $\frac{z \ldots (z-i+1)}{1 \ldots i}$ si rappresenta col simbolo $\binom{z}{i}$, e se essa comporta il valore zero di z e non di i, per cui non può riferirsi ai termini dell'asse $C_{z,0}$, si può però consentire al simbolo il valore zero di i e porre

$$C_{z,0} = \binom{z}{0} = 1;$$

con ciò, per $z = 0, 1, 2, \ldots$ ed $i = 0, 1, 2, \ldots$, il simbolo $\binom{z}{i}$ rappresenta tutt' i termini della 2-classe aritmetica dei numeri delle combinazioni semplici, e quindi, implicitamente, i coefficienti binomiali per z costante ed $i = 0, \ldots, z$, ed i numeri figurati, in senso stretto, per i costante e $z = i, i+1, i+2, \ldots$.

20. Dalla definizione della legge (27) si può iniziare un duplice procedimento per differenze, cioè

$$C_{z,i} - C_{z-1,i} = \Delta C_{z-1,i} = C_{z-1,i-1},$$

da cui, continuando, si ottiene

$$\Delta^i C_{z-i,i} = C_{z-i,0} = 1, \tag{33}$$

e

$$C_{z,i} - C_{z-1,i-1} = \Delta C_{z-1,i-1} = C_{z-1,i},$$

da cui, continuando, si ottiene

$$\Delta^{z-i} C_{i,2i-z} = C_{i,i} = 1. \tag{34}$$

Volendo conservare il significato combinatorio della 2-classe, la formula (33) vale per $z \geqslant i$ e la formula (34) per $2i \geqslant z \geqslant i$; siccome però, per le stesse formule, si ottengono progressioni aritmetiche, sia considerando le linee (i costante), sia considerando le diagonali ascendenti ($z - i$ costante), così, se si tralascia il significato combinatorio ed anche il simbolo, si può estendere la limitazione della legge (27), o per una sola variabile o per tutt'e due.

21. La formula (28) si può scrivere

$$C_{z,i} = \frac{1}{i!} [z(z-1) \ldots (z-i+1)],$$

e sviluppando

$$C_{z,i} = \frac{1}{i!} [z^i - \ldots + (-1)^{i-1} (i-1)!\, z],$$

e quindi, per la (1),

$$\Delta^i C_{z,i} = i! \frac{1}{i!} = 1;$$

e da questo risultato che coincide con la (33) e che è indipendente non solo da z ma anche da i, si ricava, per $i = 0$, confermando la determinazione della (27),

$$C_{z,0} = \binom{z}{0} = 1.$$

E se si pone

$$\binom{-z}{i} = \frac{(-z)(-z-1)\dots(-z-i+1)}{1 . 2 \dots i},$$

si ha pure, sviluppando,

$$\binom{-z}{i} = \frac{1}{i!}[(-z)^i - \dots + (-1)^{i-1}(i-1)!(-z)],$$

e

$$\Delta^i \binom{-z}{i} = i! \frac{1}{i!} = 1 .$$

Cosicchè, per $n = \pm z$, si ha

$$\binom{n}{i} = \frac{n \dots (n-i+1)}{1 \dots i}$$
$$= \frac{1}{i!}[n^i - \dots + (-1)^{i-1}(i-1)!\, n], \tag{35}$$

e

$$\Delta^i \binom{n}{i} = 1 .$$

Applicando al simbolo $\binom{n}{i}$ lo stesso procedimento per differenze con cui si ottenne la (33) e potendo considerare le differenze d'ordine $> i$ e quindi tutte nulle, si ha in generale, per $m = 0, 1, 2, \dots$, la formula

$$\Delta^m \binom{n}{i} = \binom{n}{i-m} . \tag{36}$$

Il simbolo $\binom{n}{i}$ rappresenta i numeri figurati d'ordine i come progressioni aritmetiche ed ha la seguente legge:

$$\left.\begin{array}{ll} n \gtrless 0 ; \quad i \geqslant 0 ; & \text{lm.,} \\ \left.\begin{array}{l} \binom{0}{i} = 0, \quad \text{per} \quad i > 0 ; \\ \binom{n}{0} = 1 ; \end{array}\right\} & \text{dt.,} \\ \binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} ; & \text{df.,} \end{array}\right. \tag{37}$$

la quale differisce da quella delle combinazioni semplici, solamente nella limitazione.

22. Dalle espressioni

$$\binom{n}{i} = \frac{n \dots (n-i+1)}{1 \dots i} \qquad \text{e} \qquad \binom{n-1}{i} = \frac{(n-1)\dots(n-i)}{1 \dots i},$$

si ricava l'identità

$$(n-i)\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i},$$

che vale, naturalmente, per tutt'i valori stabiliti di n e di i, ed in particolare per $n=i$; si può quindi scrivere

$$\binom{n}{i}=\frac{n}{n-i}\binom{n-1}{i}, \quad \text{per} \quad n \neq i, \tag{38}$$

avvertendo che per $n=i$, occorre risalire all'identità.

Dalle espressioni di $\binom{n}{i}$ e $\binom{n}{i-1}$, si ricava

$$\binom{n}{i}=\frac{n-i+1}{i}\binom{n}{i-1}, \quad \text{per} \quad i>0; \tag{39}$$

e dalle espressioni di $\binom{n}{i}$ e $\binom{n-1}{i-1}$, si ricava

$$\binom{n}{i}=\frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1}, \quad \text{per} \quad i>0. \tag{40}$$

Le tre relazioni (38), (39) e (40) vincolano due termini contigui della 2-classe aritmetica dei numeri figurati.

23. Come partendo da $C_{z,0}=1$, si può estendere il simbolo $\binom{z}{0}$ ai valori negativi di z, così partendo da $C_{i,i}=1$, si può estendere il simbolo $\binom{i}{i}$ ai valori negativi di i.

In tal modo i tre termini

$$\binom{-1}{0}, \quad \binom{0}{0}, \quad \binom{-1}{-1}$$

hanno il valore 1 e possono considerarsi come termini iniziali pel completo sviluppo della 2-classe dei numeri figurati.

Scegliendo come variabili x e y, la legge di questa 2-classe può stabilirsi sotto due forme diverse e caratteristiche, e l'una deducibile dall'altra.

24. Si ha la prima forma:

$$\begin{aligned} & x \gtrless 0; \quad y \gtrless 0; && \text{lm.,} \\ & \binom{y}{y}=1; && \text{dt.,} \\ & \binom{y+x}{y}=\frac{x+y}{x}\binom{y+x-1}{y}; && \text{df.} \end{aligned} \tag{41}$$

La 2-classe viene considerata come la successione delle 1-classi individuate dai singoli valori di y; la determinazione assegna tutti i primi termini delle 1-classi e che corrispondono al valore zero di x; il sistema degli assi è formato dalla sola 1-classe $\binom{\pm y}{\pm y}=1$; la variabile principale della 2-classe è y, e per $y=0$ dalla definizione si ricava:

$$\binom{x}{0}=\frac{x}{x}\binom{x-1}{0}=\binom{x-1}{0},$$

qualunque sia x, e quindi anche per $x=0$, e si deduce, per la determinazione,

$$\binom{x}{0}=\binom{0}{0}=1.$$

Da questa legge il termine generale si ottiene sotto forma ricorrente, perchè, ad es., per $+x$ e $+y$ si ha

$$\binom{y}{y}=1$$
$$\binom{y+1}{y}=\frac{1+y}{1}\binom{y}{y}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\binom{y+x}{y}=\frac{x+y}{x}\binom{y+x-1}{y},$$

e moltiplicando e riducendo,

$$\binom{y+x}{y}=1\times\frac{1+y}{1}\times\ldots\times\frac{x+y}{x},$$

cioè, il prodotto del primo termine per tutt'i rapporti precedenti fra un termine e l'altro.

Non è inutile osservare che la definizione di questa legge coincide con la relazione (38).

25. Si ha la seconda forma:

$$x\gtreqless 0;\quad y\gtreqless 0; \qquad \text{Im.},$$
$$\left.\begin{array}{l}\binom{y}{y}=1;\\ \binom{x}{0}=1;\end{array}\right\} \qquad \text{dt.}, \qquad (42)$$
$$\binom{y+x}{y}=\binom{y+x-1}{y}+\binom{y+x-1}{y-1}; \quad \text{df.}$$

Per $x=0$ e $y=0$, i tre termini che sarebbero vincolati dalla definizione, sono già assegnati; essa sarebbe *in difetto*, se la si volesse applicare; il sistema degli assi è formato dalle due 1-classi $\binom{y}{y}$ e $\binom{x}{0}$, *di nome diverso*, che rappresentano le due successioni delle differenze costanti delle progressioni aritmetiche, secondo x e secondo y; escluso il termine $\binom{0}{0}$, tutti gli altri sono vincolati dalla definizione e si deduce che sono nulli quelli per cui è, contemporaneamente, $x<0$ e $y<0$.

26. Il simbolo $\binom{y+x}{y}$ può rappresentare e rappresenta tutt'i termini, e l'intera 2-classe può figurarsi con lo schema:

$$\begin{array}{c}
\binom{y-x}{y}, \ldots, \binom{y}{y}, \ldots, \binom{y+x}{y} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{-x}{0}, \ldots, \binom{0}{0}, \ldots, \binom{+x}{0} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{-y-x}{-y}, \ldots, \binom{-y}{-y}, \ldots, \binom{-y+x}{-y}.
\end{array} \tag{43}$$

27. Le estensioni precedenti, ai valori negativi di x e di y, possono giustificarsi, separatamente, anche con la duplice espressione di $\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$; perchè si ha

$$\binom{x+y}{x} = \frac{(1+y)\ldots(x+y)}{1 \quad \ldots \quad x} = \frac{1}{x!} y^x + \ldots$$

e

$$\binom{y+x}{y} = \frac{(1+x)\ldots(y+x)}{1 \quad \ldots \quad y} = \frac{1}{y!} x^y + \ldots,$$

e perciò

$$\Delta^x \binom{x+y}{x} = x! \frac{1}{x!} = 1$$

e

$$\Delta^y \binom{y+x}{y} = y! \frac{1}{y!} = 1.$$

Risultano, di conseguenza, pienamente determinati i valori zero della 2-classe, sia per $-x$ che per $-y$; perchè $\binom{x+y}{x}$ si annulla solamente per $y=-1, \ldots, -x$, e $\binom{y+x}{y}$ si annulla solamente per $x=-1, \ldots, -y$.

La 2-classe è simmetrica nelle due variabili, e se gli assi si dispongono diagonalmente, si ottiene uno specchio di numeri che può considerarsi come la estensione completa, in tutt'i sensi, del triangolo di Tartaglia, cioè:

$$\begin{array}{c}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\ldots\ 0\quad 0\quad 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\quad 0\quad 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\quad 0\quad 1\quad 3\quad 3\quad 1\quad 0\quad 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 2\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\ \ldots \\
\ldots\ 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\ \ldots \\
\ldots -1\quad 1\quad -1\quad 1\quad 1\quad -1\quad 1\quad -1\ \ldots \\
\ldots -4\quad 3\quad -2\quad 1\quad 0\quad 1\quad -2\quad 3\quad -4\ \ldots \\
\ldots\ 6\quad -3\quad 1\quad 0\quad 0\quad 1\quad -3\quad 6\ \ldots \\
\ldots\ 10\quad -4\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1\quad -4\quad 10\ \ldots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (^1)
\end{array} \tag{44}$$

28. Siccome da questa 2-classe si ottengono progressioni aritmetiche, sia per $+x$ che per $+y$, così occorre considerare *due* triangoli delle diagonali.

Questi due triangoli, riferiti per $+x$ al primo termine $y=-x$, e per $+y$ al primo termine $x=-y$, sono uguali ed hanno la forma più semplice che sia possibile, cioè:

$$\begin{array}{llll}
1 & & & \\
0 & 1 & & \\
0 & 0 & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array} \tag{45}$$

Essi, come tutte le differenze delle progressioni aritmetiche di questa 2-classe, fanno parte di essa (mentre ciò generalmente non succede); per conseguenza coincidono, rovesciando, col triangolo delle differenze del primo termine:

$$\begin{array}{llll}
0 & 0 \ldots 0 & 1 \\
0 & 0 \ldots 1 & \\
\cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \\
0 & 1 & \\
1. & &
\end{array} \tag{46}$$

29. È chiaro che questi numeri figurati sono a *due* indici e che si possono rappresentare col simbolo $N_{x,y}$.

La proprietà che il prodotto di z numeri consecutivi è divisibile per $z!$ (e che può anche dimostrarsi con considerazioni puramente aritmetiche) può esprimersi dicendo che il prodotto di z consecutivi numeri figurati d'ordine 1 è divisibile pel prodotto dei primi z numeri

(1) Cfr. Lucas, *Théorie des nombres*, p. 22, Ex. III; dove questa estensione (*du triangle de Pascal*) sembra vanamente cercata.

figurati dello *stesso* ordine, ed i quoti formano i numeri figurati d'ordine z. Questa proprietà è generale; assumendo come primo termine $\binom{y}{y}$, si ha: il prodotto di z consecutivi numeri figurati d'ordine y è divisibile pel prodotto dei primi z numeri figurati dello *stesso* ordine, ed i quoti formano i numeri figurati a *tre* indici d'ordine zy e che si possono rappresentare col simbolo $N_{x,y,z}$.

Si ottiene in tal modo una 3-classe aritmetica, estendibile ai valori negativi di x, di y e di z, e simmetrica nelle tre variabili; e come $N_{x,y}$ è di 2! maniere diverse un quoziente intero, così $N_{x,y,z}$ è un quoziente intero di 3! maniere diverse.

Se si considera la 3-classe come la successione delle 2-classi individuate dai singoli valori di z, si ha la legge:

$$x \gtrless 0; \quad y \gtrless 0; \quad z \gtrless 0; \qquad \text{lm.,}$$

$$\left.\begin{array}{l} N_{0,y,z} = 1; \\ N_{x,0,z} = 1; \end{array}\right\} \qquad \text{dt.,} \qquad (47)$$

$$N_{x,y,z} = \frac{\binom{x+y+z-1}{z}}{\binom{x+z-1}{z} + \binom{y+z-1}{z}} (N_{x-1,y,z} + N_{x,y-1,z}); \qquad \text{df.,}$$

la quale può considerarsi come una generalizzazione delle leggi (41) e (42).

Il sistema degli assi è formato da tutt'i termini delle due 2-classi $N_{0,y,z}$ e $N_{x,0,z}$, i cui valori, per tutt'i valori di x, y e z, sono direttamente assegnati con la determinazione; tutti gli altri termini si costruiscono successivamente con la definizione.

Per $x=0$ e $y=0$, il coefficiente è

$$\frac{1 \, . \binom{z-1}{z}}{2 \, . \binom{z-1}{z}} = \frac{1}{2},$$

ed i tre termini che sarebbero vincolati dalla definizione, sono *già* assegnati; tuttavia, si potrebbe dire che la definizione può applicarsi a tutt'i termini della 3-classe. Per $z = 0, 1, \ldots$, la prima 2-classe è

$$N_{x,y,0} = 1$$

e la seconda

$$N_{x,y,1} = \binom{x+y}{x}.$$

Per $+z$, si ottengono progressioni aritmetiche d'ordine zy per x variabile e $+y$ costante, e d'ordine zx per y variabile e $+x$ costante.

La differenza costante, d'ordine zy, ha l'espressione

$$\Delta^{zy}\,\mathrm{N}_{x,y,z}=\prod_{0}^{z-1}{}_i\,\frac{\dbinom{(z-i)\,(y-i)}{(z-1-i)\,(y-1-i)}}{\dbinom{(z-1-i)+(y-1-i)}{z-1-i}}$$

$$=\frac{(zy)!\,(z-1)!!}{(y!)^z\,.\,(y+1)^{z-1}\dots(y+z-1)^1}\,, \qquad (48)$$

essendo

$$(z-1)!!=0!\,1!\dots(z-1)!\,;$$

infatti,

$$\mathrm{N}_{x,y,z}=\frac{\prod_{0}^{z-1}{}_i\dbinom{y+x+i}{y}}{\prod_{0}^{z-1}{}_i\dbinom{y+i}{y}}\,,$$

e sviluppando e semplificando, il numeratore sarà

$$\left(\frac{1}{y!}\right)^z.\,(x^{zy}+\dots)$$

ed il denominatore

$$\frac{1}{(z-1)!!}(y+1)^{z-1}\dots(y+z-1)^1.$$

30. Il numero delle combinazioni con ripetizione di z elementi ad i ad i si rappresenta col simbolo $\mathrm{C}'_{z,i}$, e z ed i sono necessariamente numeri interi e positivi.

Per $i>0$, non è possibile formare una combinazione con ripetizione che contenga *zero* elementi, ed è chiaro che per $i=1$, il numero delle combinazioni con ripetizione di z elementi è z, perchè la *ripetizione* non può aver luogo; perciò

$$\mathrm{C}'_{0,i}=0\,,\quad \text{per}\quad i>0\,,$$
$$\mathrm{C}'_{z,1}=z\,.$$

Considerando uno qualunque degli elementi, le combinazioni con ripetizione che non lo contengono, si distinguono da quelle che lo contengono: il numero delle prime è $\mathrm{C}'_{z-1,i}$ ed il numero delle seconde è uguale a quello di $\mathrm{C}'_{z,i-1}$; perciò si ha sempre la relazione ricorrente

$$\mathrm{C}'_{z,i}=\mathrm{C}'_{z-1,i}+\mathrm{C}'_{z,i-1}\,.$$

Da questa, per $i=1$, si ricava

$$\mathrm{C}'_{z,1}=\mathrm{C}'_{z-1,1}+\mathrm{C}'_{z,0}\,,$$

cioè

$$z=z-1+\mathrm{C}'_{z,0}$$

e quindi

$$C'_{z,0}=1\,,$$

e si può convenire

$$C'_{0,0}=1\,.$$

Perciò la legge delle combinazioni con ripetizione è la seguente:

$$\begin{array}{lll} z\geqslant 0; \quad i\geqslant 0; & & \text{lm.,} \\ \left.\begin{array}{l} C'_{0,i}=0\,, \quad \text{per} \quad i>0; \\ C'_{z,0}=1; \end{array}\right\} & & \text{dt.,} \\ C'_{z,i}=C'_{z-1,i}+C'_{z,i-1}; & & \text{df.,} \end{array} \tag{49}$$

e differisce da quella delle combinazioni semplici, solamente nella definizione.

31. Fra i termini generali delle due 2-classi delle combinazioni, semplici e con ripetizione, esiste la relazione

$$C'_{z,i}=C_{z+i-1,i}\,. \tag{50}$$

Infatti, essa è vera per $i=0$, perchè

$$C'_{z,0}=C_{z-1,0}=1\,,$$

e per $z=0$, perchè

$$C'_{0,i}=C_{i-1,i}=0\,, \quad \text{per} \quad i>0\,,$$

ed è anche vera per $i=1$, perchè

$$C'_{z,1}=C_{z,1}=z\,,$$

e per $z=1$, perchè, essendo per la definizione della legge

$$C'_{1,i}=C'_{0,i}+C'_{1,i-1}$$

e per la determinazione

$$C'_{0,i}=0\,, \quad \text{per} \quad i>0\,,$$

e

$$C'_{1,0}=1\,,$$

si ha, induttivamente,

$$C'_{1,i}=1\,,$$

e poi

$$C'_{1,i}=C_{i,i}=1\,;$$

consentendo quindi che essa sia vera per $i-1$, si ha

$$\begin{aligned} C'_{0,i}&=0 \\ C'_{1,i}&=C'_{0,i}+C'_{1,i-1} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ C'_{z,i}&=C'_{z-1,i}+C'_{z,i-1}\,, \end{aligned}$$

e sommando e riducendo

$$\begin{aligned} C'_{z,i}&=C'_{1,i-1}+\ldots+C'_{z,i-1} \\ &=C_{i-1,i-1}+\ldots+C_{z+i-2,i-1} \\ &=C_{z+i-1,i}\,, \end{aligned}$$

che è precisamente la formula (50).

Per mezzo di essa si può verificare la formula

$$C'_{z,i} = C'_{i+1,z-1}, \tag{51}$$

che vale per $z = 0, 1, 2, \ldots$ ed $i = 0, 1, 2, \ldots$; e da questa, ponendo $z = i = 0$, si ricava

$$C'_{0,0} = C'_{1,-1} = 1,$$

cioè

$$C_{-1,0} = C_{-1,-1} = 1,$$

cioè

$$\binom{-1}{0} = \binom{-1}{-1} = 1;$$

cosicchè l'estensione del simbolo $\binom{z}{i}$ ai valori negativi di z e di i, si può considerare come una conseguenza delle due leggi (27) e (49).

32. Le disposizioni semplici di y elementi ad x ad x si possono ottenere formando le combinazioni semplici di y elementi ad x ad x e permutando, in tutt'i modi possibili, gli elementi d'ogni combinazione; cosicchè si esprimono come somme di permutazioni:

$$D_{y,x} \equiv \Sigma\, P_x.$$

Analogamente, le disposizioni con ripetizione di y elementi ad x ad x, il cui numero è y^x, si possono ottenere formando le combinazioni con ripetizione di y elementi ad x ad x e permutando, in tutt'i modi possibili, gli elementi d'ogni combinazione; cosicchè si esprimono come somme di permutazioni:

$$D'_{y,x} = y^x \equiv \Sigma\, P'_x. \tag{52}$$

Ma P_x ha sempre lo stesso valore, $x!$, perchè gli elementi d'una qualunque combinazione semplice sono sempre fra loro diversi, e quindi si può moltiplicare il valore costante P_x pel numero delle combinazioni semplici ed ottenere la formula (31):

$$D_{y,x} = C_{y,x} \,.\, P_x;$$

invece, P'_x non ha sempre lo stesso valore, perchè gli elementi d'una combinazione con ripetizione non sono sempre, nè tutti, fra loro diversi; occorre quindi aggruppare le permutazioni con ripetizione secondo i vari valori, moltiplicare ogni gruppo pel numero delle combinazioni con ripetizione ad esso relativo e sommare i prodotti; con ciò, la (52) si scrive

$$y^x \equiv \Sigma\, C'_{y,x} \,.\, P'_x. \tag{53}$$

33. Se si hanno y elementi e si formano *ordinatamente* tutte le permutazioni semplici di essi e si dispongono per linea e per colonna, in modo che, se

$$r = 1, \ldots, y,$$

tutti gli elementi di posto r-esimo di ciascuna delle $y!$ permutazioni si trovino nella r-esima colonna, si vede bene che ogni elemento è contenuto una volta in ogni linea ed un numero uguale di volte nella r-esima colonna, cioè $1!(y-1)!$ volte, ed in generale ogni complesso di r elementi è contenuto una volta in ogni linea ed un numero uguale di volte in un complesso qualsivoglia di r colonne, cioè $r!(y-r)!$ volte; dappoichè ogni permutazione semplice degli r elementi sarà ripetuta in tante linee quante sono le permutazioni semplici degli $y-r$ elementi che rimangono.

E siccome r degli y elementi si possono scegliere in $C_{y,r}$ modi diversi, così questo numero è uguale al quoto del numero delle permutazioni semplici di y elementi pel numero uguale di volte che il complesso di r colonne contiene il complesso di r elementi; quindi

$$C_{y,r}=\frac{y!}{r!(y-r)!}.$$

E siccome per le disposizioni semplici occorre tener conto delle permutazioni semplici degli $y-r$ elementi che rimangono e non di quelle degli r elementi, così

$$D_{y,r}=\frac{y!}{(y-r)!}.$$

Or le considerazioni sul complesso di r elementi e di r colonne e la conseguente espressione $r!(y-r)!$, valgono qualunque siano gli r elementi, anche uguali fra loro, e qualunque siano gli $y-r$ elementi che rimangono, anche uguali fra loro purchè diversi dai primi; cosicchè l'espressione di $D_{y,r}$ coincide con quella delle permutazioni con ripetizione di y elementi di cui solamente $y-r$ sono uguali fra loro, e l'espressione di $C_{y,r}$ coincide con quella delle permutazioni con ripetizione di y elementi, di cui r sono uguali fra loro ed $y-r$ sono pure uguali fra loro, ma diversi dai primi.

Si vede quindi che le disposizioni e le combinazioni semplici si possono ricavare dalle permutazioni semplici.

34. Due combinazioni con ripetizione di y elementi ad x ad x possono essere *simili* o *dissimili*: sono simili se hanno lo stesso numero di elementi diversi e se non variano i singoli numeri delle ripetizioni, sono dissimili se queste condizioni non si verificano tutt'e due.

Così, ad esempio, sono simili

$$aaacc, \qquad aaddd,$$

perchè hanno lo stesso numero, 2, di elementi diversi e perchè non variano i singoli numeri, 2 e 3, delle ripetizioni; e sono dissimili

$$aaacc, \qquad aaaac,$$

perchè, pure avendo lo stesso numero, 2, di elementi diversi, variano i singoli numeri delle ripetizioni, 3 e 2 nella prima e 4 e 1 nella seconda.

Si vede subito che, se si fissa un valore di x, il più piccolo possibile valore di y è uguale al numero degli elementi diversi, e la somma dei singoli numeri delle ripetizioni è sempre uguale ad x.

Il numero delle permutazioni degli elementi di ciascuna delle combinazioni con ripetizione simili, *non varia* ed è indipendente da y, perchè ha sempre la stessa espressione. E se

$$h_1, \ldots, h_z$$

sono i singoli numeri delle ripetizioni, e si fissano le limitazioni

$$1 \leqslant z \leqslant x,$$
$$1 \leqslant h_1, \ldots, h_z \leqslant x,$$
$$h_1 + \ldots + h_z = x,$$

essendo

$$x = 1, 2, 3, \ldots,$$

la forma più generale della detta espressione è

$$P'_x = \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!}. \tag{54}$$

Con ciò, la (53) si scrive

$$y^x \equiv \Sigma\, C'_{y,x} \cdot \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!}. \tag{55}$$

35. Le combinazioni con ripetizione si possono aggruppare in modo da comprendere in un solo gruppo tutte quelle che sono simili fra loro, e si può sempre stabilire il numero di quelle che sono comprese in un gruppo qualsivoglia.

Siano, ad esempio, 3 gli elementi diversi e si scelgano dagli y i 3 elementi

$$a, \quad b, \quad c.$$

Se i singoli numeri delle ripetizioni sono fra loro disuguali, è chiaro che si ottengono tutte le combinazioni con ripetizione simili, e ciascuna una volta sola, formando le disposizioni semplici di y elementi a 3 a 3, e poi considerando, in ogni disposizione, il primo elemento come se fosse ripetuto α volte, il secondo β volte e il terzo γ volte, se

$$\alpha \mp \beta \mp \gamma$$

sono i singoli numeri delle ripetizioni.

Così, pel più piccolo possibile valore di y, cioè per $y = 3$, dalle 3! disposizioni semplici

$$\begin{array}{c} abc \\ acb \\ bac \\ bca \\ cab \\ cba, \end{array}$$

se si conviene che gl'indici servano per *contare* le ripetizioni e non per *distinguere* gli elementi, si ricavano le 3! combinazioni con ripetizione simili

$$\begin{gathered}
a_1 \dots a_\alpha\, b_1 \dots b_\beta\, c_1 \dots c_\gamma \\
a_1 \dots a_\alpha\, c_1 \dots c_\beta\, b_1 \dots b_\gamma \\
b_1 \dots b_\alpha\, a_1 \dots a_\beta\, c_1 \dots c_\gamma \\
b_1 \dots b_\alpha\, c_1 \dots c_\beta\, a_1 \dots a_\gamma \\
c_1 \dots c_\alpha\, a_1 \dots a_\beta\, b_1 \dots b_\gamma \\
c_1 \dots c_\alpha\, b_1 \dots b_\beta\, a_1 \dots a_\gamma\,,
\end{gathered}$$

e ciò si verificherà, separatamente, per ogni 3 degli y elementi, e quindi $C_{y,3}$ volte; per conseguenza, il numero delle combinazioni con ripetizione simili, comprese in tal gruppo, sarà

$$\frac{D_{x.3}}{1!\,1!\,1!}.$$

Perchè poi possa esistere un tal gruppo, è necessario che il più piccolo possibile valore di x sia 6, perchè

$$\begin{gathered}
\alpha, \beta, \gamma \geqslant 1\,, \\
\alpha \neq \beta \neq \gamma\,, \\
\alpha + \beta + \gamma = x\,,
\end{gathered}$$

e quindi

$$x \geqslant 1 + 2 + 3 = \binom{4}{2} = 6\,.$$

Ma se 2 dei 3 elementi sono ripetuti un ugual numero di volte, come ad esempio se $\alpha = \beta$, allora la prima combinazione sarà *uguale*, non *simile*, alla terza, la seconda alla quinta e la quarta alla sesta; cosicchè ogni combinazione sarà ripetuta 2! volte, cioè tante volte quante sono le permutazioni del numero degli elementi diversi che sono ripetuti un ugual numero di volte; per conseguenza, il numero delle combinazioni con ripetizione simili, comprese in tal gruppo, sarà

$$\frac{D_{x.3}}{1!\,2!}.$$

E se i 3 elementi sono ripetuti un ugual numero di volte, come ad esempio se $\alpha = \beta = \gamma$, allora le 3! combinazioni sono fra loro uguali, non simili, e formano perciò una sola combinazione ripetuta 3! volte, cioè tante volte quante sono le permutazioni del numero degli elementi diversi che sono ripetuti un ugual numero di volte; per conseguenza, il numero delle combinazioni con ripetizione simili, comprese in tal gruppo, sarà

$$\frac{D_{x.3}}{3!}.$$

Come si vede, questo numero è indipendente da x; così, ad esempio, sia $z = 4$ e si scelgano dagli y i 4 elementi

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,$$

e se ne abbiano le 3 combinazioni con ripetizione

$$\begin{gathered} abbcddd\,, \\ abbbcdddd\,, \\ aabbbccdddd\,; \end{gathered}$$

sebbene nella prima x abbia il valore 7, nella seconda 10 e nella terza 11, purtuttavia il numero delle combinazioni con ripetizione simili, comprese in quel gruppo che contiene una di esse, è sempre

$$\frac{D_{y,4}}{1!\,1!\,2!},$$

perchè vi sono sempre soltanto 2 elementi diversi che sono ripetuti un ugual numero di volte.

Dopo tali esempi, riesce più facile vedere che per potere stabilire l'espressione generale del numero delle combinazioni con ripetizione simili di y elementi ad x ad x, comprese in un gruppo qualsivoglia, occorre solamente conoscere:

1° il numero degli elementi diversi,

2° i numeri degli elementi diversi che sono ripetuti un ugual numero di volte.

Perciò, se gli elementi diversi sono z e se

$$h_1\,, \ldots, h_z$$

sono i singoli numeri delle ripetizioni, sia

$$\begin{array}{lcl} h_1 & = \ldots = h_{k_1} & = l_1 \\ h_{k_1+1} & = \ldots = h_{k_1+k_2} & = l_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ h_{k_1+\ldots+k_{i-1}+1} & = \ldots = h_{k_1+\ldots+k_i} & = l_i\,, \end{array}$$

sia

$$\begin{gathered} l_1 \neq \ldots \neq l_i \\ k_1 . l_1 + \ldots + k_i . l_i = x \\ k_1 + \ldots + k_i = z \end{gathered}$$

e sia

$$\begin{gathered} 1 \leqslant l_1\,, \ldots, l_i \leqslant x \\ 1 \leqslant k_1\,, \ldots, k_i \leqslant z\,, \end{gathered}$$

allora, l'espressione generale del numero delle combinazioni con ripetizione simili di y elementi ad x ad x, comprese in tal gruppo, sarà

$$\frac{D_{y,z}}{k_1! \ldots k_i!},$$

e coinciderà con la formula (32).

Infatti, si otterranno tutte le combinazioni con ripetizione simili, e ciascuna una volta sola, formando le disposizioni semplici di y elementi a z a z, e poi considerando, in ogni disposizione,

i primi k_1 elementi come se fossero ripetuti l_1 volte ciascuno,
i secondi k_2 elementi come se fossero ripetuti l_2 volte ciascuno,
. . . .
gli i-esimi k_i elementi come se fossero ripetuti l_i volte ciascuno.

Con ciò, la (55) si scrive

$$D'_{y,x} = y^x = \Sigma \frac{D_{y,z}}{k_1!\ldots k_i!} \cdot \frac{x!}{h_1!\ldots h_z!}, \tag{56}$$

che fa riscontro alla (31); ed è chiaro, per la (50), che

$$C'_{y,x} = \Sigma \frac{D_{y,z}}{k_1!\ldots k_i!} = C_{y+x-1,x}. \tag{57}$$

36. Dalla (56) si ricava

$$y^x = \Sigma \frac{x!}{h_1!\ldots h_z!\, k_1!\ldots k_i!} \cdot D_{y,z} \tag{58}$$

e si può facilmente vedere che

$$\frac{x!}{h_1!\ldots h_z!\, k_1!\ldots k_i!}$$

è sempre un numero intero.

Infatti

$$\frac{x!}{h_1!\ldots h_z!} = \frac{1\ldots h_1 (h_1+1)\ldots(h_1+h_2)\ldots(h_1+\ldots+h_{z-1}+1)\ldots(h_1+\ldots+h_z)}{1\ldots h_1 \quad 1 \quad \ldots \quad h_2 \quad \ldots \quad 1 \quad \ldots \quad h_z}$$
$$= \binom{h_1}{h_1}\binom{h_1+h_2}{h_2}\ldots\binom{h_1+\ldots+h_z}{h_z}$$
$$= \binom{h_1-1}{h_1-1}\frac{h_1}{h_1}\cdot\binom{h_1+h_2-1}{h_2-1}\frac{h_1+h_2}{h_2}\ldots\binom{h_1+\ldots+h_z-1}{h_z-1}\frac{h_1+\ldots+h_z}{h_z}$$

per la formula (40), e quindi

$$\frac{x!}{h_1!\ldots h_z!} = \text{Intero} \times \frac{h_1}{h_1}\cdot\frac{h_1+h_2}{h_2}\ldots\frac{h_1+\ldots+h_z}{h_z};$$

e siccome si può ottenere una simile espressione, qualunque sia l'ordine con cui si considerano le h, così si hanno $z!$ espressioni distinte, essendo sempre il primo membro un numero intero; da ciò, si deduce che per una h qualsivoglia, vi è in

$$\frac{x!}{h_1!\ldots h_z!},$$

considerata come espressione frazionaria o prodotto di fattori frazionari, un fattore frazionario che ha per denominatore la h prescelta e per numeratore la somma o di 1, o di 2, ..., o di z h distinte, di cui *una sola* è la h proscelta, e perciò se k delle h sono uguali fra loro, il primo membro sarà divisibile per

$$\frac{h}{h}\cdot\frac{2h}{h}\cdots\frac{kh}{h}, \qquad \text{cioè per} \qquad 1.2\ldots k = k!,$$

e ciò succederà per qualunque k.

37. Per la limitazione del numero i, occorre considerare che essendo

$$x = 1, 2, 3, \ldots, \qquad \text{se si pone} \qquad m = 2, 3, 4, \ldots,$$

sarà sempre

$$\binom{m}{2} \leq x \leq \binom{m+1}{2} - 1.$$

Il più piccolo valore di i è certamente 1, e si avrà quando tutti gli elementi diversi saranno ripetuti un ugual numero di volte; fissato, perciò, un valore di x, il valore 1 di i si avrà tante volte quanti sono i divisori di x, e ciascuna volta con riferimento a quei valori di z che dividono x.

Il più grande valore di i è $m-1$; invero, esso si avrà *certamente* quando tutti gli elementi saranno ripetuti un numero disuguale di volte e siccome la somma dei singoli numeri delle ripetizioni è sempre uguale ad x, questo più grande valore di i non può essere $> m-1$; perchè, per la limitazione di x, i singoli numeri delle ripetizioni, se disuguali, possono essere

$$1 + 2 + \ldots + (m-1) = \binom{m}{2}$$

$$2 + 3 + \ldots + m \qquad = \binom{m+1}{2} - 1,$$

e per conseguenza

$$1 \leq i \leq m-1.$$

È da osservare che l'affermazione che il più grande valore di i si avrà certamente quando tutti gli elementi saranno ripetuti un numero disuguale di volte, non deve intendersi in senso esclusivo; dappoichè lo *stesso* più grande valore di i si può avere anche se taluni elementi sono ripetuti un numero uguale di volte; così, ad esempio, se $x = 9$, sarà $m - 1 = 3$, e questo valore è dato certamente dai singoli numeri delle ripetizioni

$$2 + 3 + 4 = 9,$$

ma può anche essere dato da

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 9;$$

si vede però che in questo caso *cresce* il valore di z.

38. Se dopo di avere aggruppato le combinazioni con ripetizione in modo da comprendere in un solo gruppo tutte quelle simili fra loro, si sceglie da ciascun gruppo una qualsivoglia combinazione, si ottiene sempre una successione di combinazioni dissimili, le quali alla loro volta si possono aggruppare secondo il numero degli elementi diversi; ed è chiaro che qualunque sia la combinazione scelta, non varia nè il numero dei termini della successione, nè il numero dei termini dei singoli gruppi formati secondo il numero degli elementi diversi.

Fra questi aggruppamenti delle combinazioni con ripetizione dissimili e le partizioni del numero x, esiste una corrispondenza assoluta, in modo che ad ogni combinazione corrisponde una partizione e viceversa; ciò si spiega col fatto che il problema è sostanzialmente lo stesso, perchè il numero degli elementi in ogni combinazione è sempre x, siano essi uguali o disuguali, ed è perciò sempre x la somma dei singoli numeri delle ripetizioni; e quindi, scegliendo questi singoli numeri come elementi (addendi), ogni successione di essi è una partizione di x, ed il numero degli elementi in una partizione è lo stesso numero degli elementi diversi in una combinazione, cioè z; perciò all'aggruppamento delle combinazioni con ripetizione dissimili secondo il numero degli elementi diversi, corrisponde l'aggruppamento delle partizioni di x secondo il numero degli elementi (addendi).

Così, ad esempio, per $x=5$ e $y \geqslant 5$, nel qual caso si ha la successione completa delle partizioni, se gli elementi sono

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e, \ldots,$$

si ottiene la seguente corrispondenza:

	Combinazioni dissimili	Partizioni di 5	
$z=1$	*aaaaa*	5	
$z=2$	*aaaab*	1 4	
	aaabb	2 3	(59)
$z=3$	*aaabc*	1 1 3	
	aabbc	1 2 2	
$z=4$	*aabcd*	1 1 1 2	
$z=5$	*abcde*	1 1 1 1 1	

Il numero dei gruppi delle combinazioni con ripetizioni simili, cioè il numero dei termini della successione delle combinazioni dissimili, il numero dei gruppi di queste secondo il numero degli elementi diversi ed il numero dei termini di ciascuno di questi gruppi, si ottengono per mezzo della teoria della partizione dei numeri. [1]

---

[1] La partizione dei numeri con applicazioni alla moltiplicazione dei polinomi, alle serie ricorrenti ed alle funzioni simmetriche, sarà l'argomento d'un altro articolo. L'importanza di essa nell'aritmetica *intera* si rende intuitiva, osservando che ogni numero intero e positivo è somma o prodotto di altri numeri interi e positivi, cioè: $|N| \equiv \Sigma$ o $|N| \equiv \Pi$.

Rappresentando, in generale, col simbolo $p_{x,z}$ il numero delle partizioni di x in z elementi (addendi), i numeri richiesti sono dati dalla formula

$$p_{x,1} + \ldots + p_{x,x} = p_{x+z,z}. \tag{60}$$

E siccome

$$p_{x,z} = 0, \quad \text{per} \quad z > x,$$

ed il più piccolo possibile valore di y è uguale al numero degli elementi diversi, cioè $= z$, così per

$$y < x$$

sarà

$$z = 1, \ldots, y,$$

ed il sommatorio della (58) avrà $p_{x,z}$ valori per ogni valore di z e $p_{x+y,y}$ in tutto; e per

$$y \geqq x$$

sarà

$$z = 1, \ldots, x$$

e lo stesso sommatorio avrà $p_{x,z}$ valori per ogni valore di z e P_x in tutto, perchè

$$p_{x,1} + \ldots + p_{x,x} = P_x,$$

rappresentando con P_x il numero delle partizioni di x.

39. Formando la somma dei valori del sommatorio per ogni valore di z, si ha la formula

$$\Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z! \, k_1! \ldots k_1!} = \frac{\Delta^z 0^x}{z!}. \tag{61}$$

Infatti, dalla formula (9) che si deduce dalla (5), si ricava

$$y^x = \binom{y}{0} \Delta^0 0^x + \ldots + \binom{y}{x} \Delta^x 0^x,$$

e per $x > 0$

$$\begin{aligned} y^x &= \binom{y}{1} \Delta' 0^x + \ldots + \binom{y}{x} \Delta^x 0^x \\ &= y \cdot \frac{\Delta' 0^x}{1!} + \ldots + y(y-1)\ldots(y-x+1) \frac{\Delta^x 0^x}{x!} \\ &= \frac{\Delta' 0^x}{1!} \cdot D_{y,1} + \ldots + \frac{\Delta^x 0^x}{x!} D_{y,x} \end{aligned}$$

e quindi

$$y^x = \sum_1^x{}_z \frac{\Delta^z 0^x}{z!} \cdot D_{y,z},$$

ed è chiaro che la (58) si può scrivere

$$y^x = \sum_1^x{}_z \left(\Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z! \, k_1! \ldots k_1!} \right) \cdot D_{y,z},$$

e, confrontando, si ha la (61).

40. Se si pone

$$S_x = 1^x + \ldots + y^x$$

e si rappresenta con B_x il corrispondente numero di Bernouilli, si possono, perciò, fissare le tre espressioni dirette

$$y^x = \sum_1^x{}_z D_{y,z} \,.\, \Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!\, k_1! \ldots k_1!}, \qquad (62)$$

$$S_x = \sum_1^x{}_z \frac{D_{1+y,\,1-z}}{1+z} \,.\, \Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!\, k_1! \ldots k_1!}, \qquad (63)$$

$$B_x = \sum_1^x{}_z \frac{(-1)^z z!}{1+z} \,.\, \Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!\, k_1! \ldots k_1!}; \qquad (64)$$

la (63) si ottiene dalla (15) e dalla (61), e la (64) dalla (61) e dalla nota espressione dei numeri di Bernouilli in funzione delle differenze di 0^x.

41. Dalla nota relazione

$$\Delta^i 0^z = i\,(\Delta^i 0^{z-1} + \Delta^{i-1} 0^{z-1}),$$

che si può dedurre sia dalla (23) che dalla (24) per $x = 1$, si ricava, sostituendo x a z e z ad i,

$$\Delta^z 0^x = z \,.\, \Delta^z 0^{x-1} + z \,.\, \Delta^{z-1} 0^{x-1},$$

da cui

$$\frac{\Delta^z 0^x}{z!} = z \,.\, \frac{\Delta^z 0^{x-1}}{z!} + \frac{\Delta^{z-1} 0^{x-1}}{(z-1)!}. \qquad (65)$$

Per conseguenza, i numeri che si ottengono dall'espressione

$$\Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!\, k_1! \ldots k_1!}$$

al variare di x e di z, si possono calcolare per via ricorrente con la (65) e si ottiene lo specchio

$$\begin{array}{llllll} x=1 & 1 & & & & \\ x=2 & 1 & 1 & & & \\ x=3 & 1 & 3 & 1 & & \\ x=4 & 1 & 7 & 6 & 1 & \\ x=5 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \qquad (66)$$

Ma su questi numeri che fanno parte d'una notevole 2-classe aritmetica, necessaria a conoscersi per gli svolgimenti dei due metodi, occorrerà ritornare di proposito.

(Continua)

VITO MELFI MOLÈ.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 777

777. *Sopra una qualsiasi retta passante pel centro* O *di un cerchio dato, si prendano due punti* C *ed* F *equidistanti da* O; *per uno di essi passa una corda variabile* AB. *Determinare la posizione di* AB *allorchè la somma dei lati del triangolo* ABC *è massima.*

A. Andri.

Risoluzione del prof. U. Stanghellini.

Poniamo:

$$AC = x, \qquad BC = y, \qquad CO = OF = a, \qquad OA = OB = r.$$

Per un noto teorema sulla mediana di un triangolo abbiamo:

$$AF = \sqrt{2(a^2 + r^2) - x^2}, \qquad BF = \sqrt{2(a^2 + r^2) - y^2},$$

quindi per la risoluzione dovrà essere massima l'espressione:

$$x + y + \sqrt{2(a^2 + r^2) - x^2} + \sqrt{2(a^2 + r^2) - y^2}. \tag{1}$$

Applicando la regola *Fermat-Monforte* abbiamo che i valori della x e della y che rendono massima la (1) sono le radici delle equazioni:

$$x_1 - x_2 + \sqrt{2(a^2 + r^2) - x_1^2} - \sqrt{2(a^2 + r^2) - x_2^2} = 0,$$
$$y_1 - y_2 + \sqrt{2(a^2 + r^2) - y_1^2} - \sqrt{2(a^2 + r^2) - y_2^2} = 0,$$

quando si sia eliminato rispettivamente il fattor comune $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ e quando si sia posto $x_1 = x_2 = x$, $x_1 = y_2 = y$. Risulta chiaro che le due equazioni hanno le stesse radici, onde basta risolvere la prima.

Eliminiamo i radicali, poi il fattor comune $x_1 - x_2$ e infine poniamo

$$x_1 = x_2 = x,$$

si ottengono così le soluzioni:

$$x = \pm \sqrt{a^2 + r^2}.$$

E medesimamente:

$$y = \pm \sqrt{a^2 + r^2}.$$

Il segno meno si può tralasciare, perchè privo di significato per il problema.

Il lato $AB = AF + FB$ sarà quindi uguale a:

$$2\sqrt{a^2 + r^2},$$

vale a dire non esiste nessun triangolo avente perimetro massimo perchè questo è uguale al lato AB contato due volte, ossia la corda AB è un diametro e il segmento a è zero.

BIBLIOGRAFIA

R. Bettazzi. — *I problemi d'Aritmetica pratica.* Libretto per gl'insegnanti delle Scuole elementari e per gli allievi delle Scuole normali. 2ª edizione con aggiunte e modificazioni. Bologna, Paolo Cuppini, 1910. (¹)

" Gli allievi delle scuole elementari e delle scuole secondarie sogliono trovare
" difficoltà nel risolvere i problemi d'aritmetica pratica; e questa difficoltà con-
" siste non già nel non sapere *eseguire* le operazioni, ma nel non *saper giudicare*
" *quali operazioni siano necessarie, e con quali numeri*, o nel non saper *interpre-*
" *tare* giustamente i risultati. Ora, sebbene non si possa negare che l'ingegno
" sveglio, la speciale attitudine e la lunga pratica siano i più sicuri coefficienti
" per saper risolvere i problemi, tuttavia una delle cause di questa difficoltà deve
" ricercarsi nel fatto che in generale non si suol dare ai giovanetti una guida
" con cui regolarsi in questa risoluzione. Non si pretende già di dire con questo
" che si dovrebbero insegnar loro effettivamente delle vere regole *sistematiche* da
" seguire per poter arrivare a risolvere qualunque questione d'aritmetica; ma che
" nell'esercitarli, nel dar loro consigli, nell'insegnar loro quali errori devono
" scansare è necessario che il Maestro segua un procedimento razionale e dia
" norme sufficienti, procurando che nulla sia trascurato di ciò che possa aiutare
" nella risoluzione dei problemi. — Il presente scritto si propone di indicare quali
" considerazioni devono aver presenti gl'insegnanti per comunicarle nei debiti mo-
" menti ai loro giovani alunni. Esso cerca di rispondere alla seguente domanda:
" *In qual caso è necessaria la tale o la tal'altra operazione?* "

Così si esprime il ch.^{mo} A. per indicare lo scopo che si prefigge. L'operetta è rivolta agli insegnanti delle scuole elementari e agli allievi delle scuole normali, ma dei preziosi consigli di cui è ricca può far tesoro anche chi deve insegnar l'aritmetica nelle scuole medie inferiori. — Eccone brevemente il contenuto.

Premesse alcune considerazioni d'indole generale sullo scopo che si propongono le operazioni dell'aritmetica, l'A., con ordine e con chiarezza, fa una minuta analisi delle *varie forme* di problemi pratici che richiedono soltanto una delle operazioni indecomponibili in altre più semplici (addizione e sottrazione con numeri quali si vogliono, moltiplicazione e divisione di numeri qualunque per numeri interi); poi considera i casi più notevoli di combinazioni di due o più operazioni semplici (moltiplicazione e divisione per un numero frazionario) fermandosi specialmente sui problemi di *riduzione all'unità*, sui vari modi per risolverli, e sulle cautele che si devono avere per giudicare se due grandezze variabili sono proporzionali. — L'A. passa poi alla *risoluzione dei problemi in generale*. Dopo aver detto che regole sicure possono esser date soltanto per speciali categorie di problemi, quali la regola del tre, la regola d'interesse, di sconto, di miscuglio, di

(¹) Di questo volumetto stampato per la prima volta nel 1900 dalla ditta di G. B. Paravia io parlai favorevolmente nel *Bollettino di Matematiche e di scienze fisiche e naturali* (a. I, n. 9; pag. 139 e seg.). Recentemente esso è stato ristampato, con modificazioni e aggiunte, nel *Bollettino* S. C., e ne fu fatta in seguito una 2ª edizione.

ripartizione, ecc., Egli si occupa di quelli per i quali non possono esser date regole generali, e per questi indica le norme che, secondo i casi, vanno seguite per procedere con sicurezza nelle risoluzioni, accompagnandole con pratiche osservazioni di metodo, e con avvertenze utilissime nell'intento di premunire contro gli errori e le inesattezze che spesso si commettono.

Il libretto termina con alcuni *esempi di risoluzione di problemi* che, per i *ragionamenti* completi posti dall'A., costituiscono ottimi *modelli* per gli alunni delle nostre scuole.

L'operetta, scritta in forma piana, accessibile a tutti, dovrebbe essere studiata attentamente da quanti hanno azione diretta nell'insegnamento elementare, e specialmente da tutti gli allievi delle scuole normali.

C. Ciamberlini.

Sebastiano Catania. — *Trattato di Aritmetica ed Algebra* ad uso degl'Istituti tecnici, conforme ai vigenti programmi con numerosi esercizi con le risposte. Terza edizione migliorata e corretta. Catania, Niccolò Giannotta. — L. 4,50.

Questo libro contiene naturalmente il programma d'Aritmetica razionale ad uso del Ginnasio Superiore, e per questo mi riferisco a quanto dissi in apposita recensione. (1) Mi occuperò soltanto dell'Algebra.

I numeri razionali relativi sono introdotti, seguendo il Peano, come operazioni che stanno per aggiungere e sottrarre da un numero assoluto conveniente, un numero assoluto. Due numeri relativi x e y son detti eguali quando sia $u+x=u+y$, essendo u un numero assoluto conveniente, e dopo di aver dimostrato che se questa eguaglianza è vera per u, lo è eziandio per qualsivoglia altro numero assoluto conveniente. Ne seguono le solite leggi.

In modo simile son definiti la somma e il prodotto; la differenza e il quoziente son definiti col concetto di operazione inversa. La potenza (con esponente intero e positivo) è definita come pei numeri assoluti, cioè per induzione. L'analogia esistente nelle definizioni ora dette, rende la teoria piuttosto semplice, oltre che rigorosa.

La divisione dei polinomi è preceduta da un paragrafo sulla identità di essi, in modo che essa è esente dalle solite obbiezioni. Ben fatta la regola di Ruffini con i soliti casi particolari.

Nel capitolo sulla decomposizione in fattori sono enunciate e dimostrate le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un polinomio intero in x sia divisibile per $x-k$, di cui più tardi l'A. si serve per la ricerca delle radici d'un'equazione generale a coefficienti interi.

Il capitolo sulle frazioni algebriche è quasi scomparso, perchè esso non ha ragione di essere dopo la dimostrazione del teorema: $\frac{x}{y}=\frac{xz}{yz}$.

Il concetto di equazione è introdotto come una condizione cui deve soddisfare l'incognita, della quale si conosce il campo di variabilità. Insomma si distinguono in modo preciso le eguaglianze in identità ed equazioni. Questo capitolo è veramente importante, sebbene (secondo me) l'A. ecceda un po'; per es. dice che $a\times b=b\times a$ non è un'identità se non si aggiunge che a e b sono due numeri relativi. Ciò è vero, ma certe cose sono evidentemente sottintese! I noti teoremi

(1) *Periodico di Matematica*. Anno XXV, fasc. VI, pag. 237.

circa la equivalenza delle equazioni, sono giustamente soppressi, perchè ad una equazione si possono applicare tutte le proposizioni relative alle eguaglianze. Seguono ottime osservazioni circa all'equivalenza o meno delle due equazioni $\frac{A}{B} = C$ e $A = BC$.

Premesse definizioni e operazioni sulle classi, si definisce (seguendo Peano) il numero irrazionale come il limite superiore di una classe di razionali effettiva-mente esistente e non avente limite superiore razionale. supposto s'intende che la data classe sia tale che esistano razionali maggiori di tutti gli elementi di essa. La somma e il prodotto di numeri reali son definiti mediante classi, la dif-ferenza mercè il concetto di operazione inversa, e il quoziente come prodotto di un numero reale per l'inverso di un altro, mentre sarebbe stato preferibile darne una definizione analoga a quella della differenza, e quindi all'altra data pei nu-meri razionali. La potenza ad esponente intero e positivo è definita al solito per induzione. L'equazione esponenziale è trattata bene, soltanto avrei desiderato la costruzione dei numeri m ed n nel n. 14 di pag. 380, perchè non mi sembra a proposito l'applicazione della P. 27 nella riga 2 di pag. 381, essendo m ed n variabili. Ad ogni modo la teoria dei numeri reali complessivamente è svolta bene, ma sarebbe stato preferibile che l'A. avesse indicato quali sono le propo-sizioni necessarie e sufficienti, perchè, a dire il vero, mi sembra didatticamente un poco lunga.

Premessa l'esposizione sulle nozioni più indispensabili della teoria dei vettori, i numeri immaginari sono introdotti come operatori per la classe dei vettori me-desimi, rispondendo così, l'A., a un voto a suo tempo emesso dall'Associazione *Mathesis*. L'argomento, dal punto di vista del rigore e della semplicità non lascia nulla a desiderare. Però, secondo me, l'A. avrebbe fatto meglio a sostituire questa teoria dei vettori con quella perfettamente analitica e veramente ottima, che pone come Appendice in fine al libro, s'intende però alquanto semplificata.

La formula risolutiva dell'equazione quadratica, vien data dopo di aver cal-colato, in modo assai semplice, la somma e la differenza (oltre del prodotto) delle radici dell'equazione. Seguono le equazioni biquadratiche e le irrazionali. Relati-vamente a queste osserviamo che l'A. volta per volta esprime qual'è la classe nella quale si cerca, se esiste, l'incognita. Notevole è la discussione dell'equa-zione $\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} = 0$, e quella dell'equazione $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C} = 0$. Segue un complemento piuttosto esteso della teoria delle equazioni quadratiche, di quelle la risoluzione delle quali può farsi dipendere da queste, e di sistemi di equazioni di grado superiore al primo. Ben fatta è la teoria dei logaritmi, e quella delle progressioni con le relative applicazioni all'interesse e alle annualità. Il libro è dotato inoltre di numerosi esercizi con le risposte, e alcuni con avviamento.

Concludendo, il libro in esame mi sembra che eccella fra la maggior parte del genere, non soltanto per la quantità assai grande di materia svolta, ma spe-cialmente per rigore di ragionamento e modernità di vedute. E merita ampia lode il Catania per aver diffuso, superando difficoltà non lievi, i metodi vera-mente classici del Peano, dandoci un libro dotato di tanta serietà d'indirizzo.

G. Marletta.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 Gennaio 1911

SUL MOVIMENTO DI UNA PARTICELLA PIANA

non soggetta a variazioni di curvatura

---

1. La signora Cornelia Fabri in una sua memoria " Sui moti vorticosi nei fluidi perfetti " (*Annali della Scuola Normale di Pisa*, 1895) studia le deformazioni subìte da un mezzo continuo a tre dimensioni, quando ai suoi punti si attribuiscano spostamenti dati da funzioni omogenee di qualunque grado n delle coordinate estendendo e completando così le ricerche di Helmhotz, Rowland e Boggio-Lera. In quella memoria la Fabri procede a due diverse decomposizioni delle formule che dànno gli spostamenti, secondo che n è dispari oppure pari e trova che lo spostamento totale consta di tre parti, di cui la prima ammette un potenziale, la seconda per il caso di n dispari può considerarsi come una rotazione e per n pari una flessione, spostamenti che avvengono rispettivamente in piani perpendicolari e passanti per una retta detta asse di rotazione o di flessione, secondo che si tratta del primo o del rimanente movimento. Per ciò che si riferisce alla 3ª parte, determina un movimento assai complicato non rappresentabile con vettori.

Uno studio analogo intendo fare in questa breve nota per una particella piana soggetta a spostamenti che non la incurvino; si presenta notevole qui il fatto che con un'unica decomposizione si perviene all'analisi dei movimenti sia per il caso di n dispari come per quello di n pari e di più gli spostamenti che si riscontrano sono tutti rappresentabili con vettori.

2. Preso un punto O per origine di due assi x e y in una superficie piana e non incurvabile chiamo particella attigua ad O (centro della particella) l'insieme di tutti i punti pei quali le componenti di spostamento δx, δy siano espresse mediante le funzioni continue:

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= A_1 + (\beta_{10}x + \beta_{01}y) + (\beta_{20}x^2 + \beta_{02}y^2 + 2\beta_{11}xy) + \dots \\ &\qquad \dots + \left(\beta_{n0}x^n + \beta_{0n}y^n + \sum_{r=1}^{n-1} n\beta_{n-r,r}x^{n-r}y^r\right) \\ \delta y &= A_2 + (C_{10}x + C_{01}y) + (C_{20}x^2 + C_{02}x^2 + 2C_{11}xy) + \dots \\ &\qquad \dots + \left(C_{n0}x^n + C_{0n}y^n + \sum_{r=1}^{n-1} nC_{n-r,r}x^{n-r}y^r\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

arrestate sino ai gruppi omogenei di un grado qualunque n: in quanto alla quantità A, β, C indipendenti dalle coordinate, saranno da ritenersi costanti per tutti i punti della particella che si considera.

Volendo il significato meccanico delle (1) osservo prima di tutto che le A_1, A_2 dànno gli spostamenti del centro O sicchè le

$$\begin{cases} \delta x = A_1 \\ \delta y = A_2 \end{cases}$$

determinano una traslazione comune a tutti i punti.

In quanto ai movimenti determinati dai termini rimanenti delle (1) basterà considerare evidentemente quello più generale

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= \beta_{n0} x^n + \beta_{0n} y^n + \sum_{r=1}^{n-1} n\beta_{n-r,r} x^{n-r} y^r \\ \delta y &= C_{n0} x^n + C_{0n} y^n + \sum_{r=1}^{n-1} n C_{n-r,r} x^{n-r} y^r \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Per analizzare queste ultime decompongo le β e le C mediante le posizioni:

$$\begin{aligned} \beta_{0n} &= \gamma_n + \varepsilon_n & C_{n0} &= \gamma_1 - \varepsilon_1 \\ n\beta_{n-r,r} &= (n-r+1)\,\gamma_r + \varepsilon_r & nC_{n-r,r} &= (r+1)\,\gamma_{r+1} - \varepsilon_{r+1} \end{aligned}$$
$$r = 1.2\ldots n-1$$

allora si può considerare il movimento (2) come risultante dei due seguenti:

$$\left.\begin{aligned} \delta u_1 &= \beta_{n0} x^n + \gamma_n y^n + \sum_{r=1}^{n-1} (n-r+1)\,\gamma_r x^{n-r} y^r \\ \delta v_1 &= \gamma_1 x^n + C_{0n} y^n + \sum_{r=1}^{n-1} (r+1)\,\gamma_{r+1} x^{n-r} y^r \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta u_2 &= \varepsilon_n y^n + \sum_{r=1}^{n-1} \varepsilon_r x^{n-r} y^r \\ \delta v_2 &= -\varepsilon_1 x^n - \sum_{r=1}^{n-1} \varepsilon_{r+1} x^{n-r} y^r \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Le (3) definiscono uno spostamento a potenziale rappresentato dalla funzione

$$\Omega = \frac{1}{n+1}\left\{\beta_{n0} x^{n+1} + (n+1)\,\gamma_n x y^n + (n+1)\sum_{r=1}^{n-1} \gamma_r x^{n-r+1} y^r + C_{0n} y^{n+1}\right\}$$

giacchè

$$\frac{\delta\Omega}{\delta x} = \beta_{n0} x^n + \gamma_n y^n + \sum_{r=1}^{n-1} (n-r+1)\,\gamma_r x^{n-r} y^r$$
$$\frac{\delta\Omega}{\delta y} = n\gamma_n x y^{n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} r\gamma_r x^{n-r+1} y^{r-1} + C_{0n} y^n$$

le quali, come si vede facilmente coincidono colle (3).

Le curve potenziali sono curve piane di ordine $n+1$: per ogni punto in particella ne passa una e precisamente quella determinata dal valore c della equazione $\Omega = c$ quando in Ω si sostituiscono le coordinate del punto: in particolare la curva passante per l'origine si riduce ad $n+1$ rette. Indicando con N la normale si ha

$$\cos Nx = \frac{\delta u_1}{\sqrt{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2}} \qquad \cos Ny = \frac{\delta v_1}{\sqrt{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2}}.$$

Quindi se si considera come direzione positiva della normale quella diretta verso la curva successiva (corrispondente all'incremento positivo δc dato alla costante c) si ha che lo spostamento coincide in direzione e verso con questa normale: in quanto alla grandezza poi è inversamente proporzionale alla distanza dN di due curve prossime al punto. Infatti per una formula sulle derivate di direzione:

$$\frac{\delta\Omega}{\delta n} = \frac{\delta\Omega}{\delta x}\cos(Nx) + \frac{\delta\Omega}{\delta y}\cos(Ny) + \frac{\delta\Omega}{\delta z}\cos(Nz) =$$
$$= \frac{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2}{\sqrt{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2}} = \sqrt{(\delta u_1)^2 + (\delta v_1)^2}.$$

3. Tratto ora il movimento definito dalle (4) e lo considero come risultante dei seguenti n movimenti parziali.

I. $$\left.\begin{array}{l} \delta u_2^{(n)} = \varepsilon_n y^n \\ \delta v_2^{(n)} = -\varepsilon_n x y^{n-1} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

in cui (per $n > 1$) restano fissi i punti coincidenti con l'asse x, mentre gli altri punti si spostano normalmente al raggio vettore. Infatti si ha: $\delta u_2^{(n)} x + \delta v_2^{(n)} y = 0$. Questo movimento avviene nel piano del raggio vettore e dell'asse x, cioè nel piano della particella come era da prevedersi e con intensità $\varepsilon_n y^{n-1}\sqrt{x^2+y^2}$: lo denomineremo flessione di grado $n-1$ per analogia alle flessioni considerate dal Boggio-Lera [1] e dalla Fabri: esso è rappresentabile con un vettore normale al raggio e proporzionale in grandezza alla distanza dell'origine ed alla potenza $(n-1)^a$ della distanza dall'asse x: il parametro ε_n cioè lo spostamento del punto che dista di un'unità dall'origine e dall'asse x (di flessione) darà l'unità di misura.

II. $$\left.\begin{array}{l} \delta u_2^{(1)} = \varepsilon_1 x^{n-1} y \\ \delta v_2^{(1)} = -\varepsilon_1 x^n \end{array}\right\} \qquad (6)$$

spostamento della stessa natura del precedente, quando si consideri l'asse y in luogo della x. Lo spostamento ha per intensità

$$\varepsilon_1 x^{n-1}\sqrt{x^2+y^2}$$

---

[1] Cinematica dei mezzi continui (*Annali della Scuola Normale di Pisa*, 1886).

e la ε_1 darà lo spostamento unitario. Questi due ora considerati (5) e (6) essendo entrambi normali al raggio vettore dànno per risultante un movimento che ha la stessa linea d'azione e un'intensità uguale alla somma algebrica delle intensità dei componenti.

Di più si può osservare che per $n=1$ essi coincidono in un unico movimento proporzionale alla sola distanza dell'origine, con altre parole le flessioni di grado zero non sono altro che rotazioni intorno al centro.

III. Rimangono altri $n-2$ spostamenti di questo tipo:

$$\left.\begin{aligned}\delta u_2^{(r)} &= \varepsilon_r x^{n-r} y^r \\ \delta v_2^{(r)} &= -\varepsilon_r x^{n-r+1} y^{r-1}\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$
$$r = 2 \,.\, 3 \ldots n-1 \,.$$

In tutti questi restano fissi i punti di entrambi gli assi, lo spostamento è normale al raggio e la sua grandezza è $\varepsilon_r x^{n-r} y^{r-1} \sqrt{x^2+y^2}$ cioè proporzionale alla distanza dall'origine, alla potenza $(n-r)^a$ della distanza dall'asse y ed alla potenza $(r-1)^a$ della distanza dall'asse x.

Questi spostamenti sono più generali dei precedenti: basta infatti considerare nelle (7) i casi esclusi di $r=1$, $r=n$ per trovare rispettivamente le (6) e le (5) e questa generalità la si riscontra anche nella interpretazione cinematica. Si può perciò dare a tali spostamenti il nome di flessioni miste rispetto agli assi x e y in quanto chè essi godono rispetto a tali assi di proprietà analoghe a quelle degli spostamenti precedenti per il solo asse x o per il solo asse y: geometricamente poi sono rappresentabili con vettori normali al raggio e gli $n-2$ parametri ε_r $(r=2 \,.\, 3 \ldots ; n-1)$ dànno gli spostamenti del punto distante di uno da entrambi gli assi e dall'origine.

4. Come caso particolare per $n=1$ si ha il movimento di una particella quando le sue componenti sono funzioni lineari delle coordinate.

Allora si ha prima di tutto uno spostamento potenziale in cui la curva è la conica:

$$\Omega = \frac{1}{2}\,(\beta_{10} x^2 + C_{01} y^2 + 2\gamma_1 yx)$$

e a questo movimento si possono attribuire tutte le proprietà già viste per il caso generale. Però si può dare con la considerazione degli assi di questa conica, un'altra interpretazione di questo movimento e precisamente concepirlo come composto di due dilatazioni (o contrazioni) perpendicolari fra loro.

Le direzioni di queste dilatazioni sono quelle degli assi della conica

$$\beta_{10} x^2 + 2\gamma_1 yx + C_{01} y^2 = \varepsilon$$

(dove ε indica una costante infinitesima) poichè scegliendo come linee coordinate gli assi della conica, l'equazione precedente assume la forma:

$$\beta'_{10}x_1^2 + C'_{01}y_1^2 = \varepsilon' \tag{8}$$

ove i nuovi coefficienti sono legati ai primi mediante le relazioni (invarianti sulle coniche)

$$\beta_{10} + C_{01} = \beta'_{10} + C'_{01} \quad \beta_{10}C_{01} - \gamma_1^2 = \beta'_{10}C'_{01} \quad \varepsilon(\beta_{10}C_{01} - \gamma_1^2) = \varepsilon'\beta'_{10}C'_{01}\,.$$

Le due ultime ci dànno subito $\varepsilon = \varepsilon'$ e le prime due risolte rispetto alle $\beta'_{10}C'_{01}$ dànno

$$2\beta'_{10}=\beta_{10}+C_{01}+\sqrt{(\beta_{10}-C_{01})^2+4\gamma_1^2} \quad 2C'_{01}=\beta_{10}+C_{01}-\sqrt{(\beta_{10}-C_{01})^2+4\gamma_1^2}\,. \tag{9}$$

Mediante la (8) la $\Omega(xy)$ si trasforma in una nuova funzione

$$\Omega_1(x_1y_1) = \frac{1}{2}(\beta'_{10}x_1^2 + C'_{01}y_1^2)$$

e le nuove componenti dello spostamento sono date da:

$$\beta_{x'} = \frac{\delta\Omega_1}{\delta x_1} = \beta'_{10}x_1 \qquad \beta_{y'} = \frac{\delta\Omega_1}{\delta y_1} = C'_{01}y_1$$

ove le β'_{10}, C'_{01} legate alle β_{10}, γ_1, C_{01} dalle relazioni (9) rappresenteranno l'allungamento (o accorciamento) unitario nelle direzioni x_1y_1.

Oltre a questo si ha un movimento di rotazione (o flessione di grado zero) intorno all'origine delle coordinate dato dalle

$$\begin{aligned} A'_1 &= \varepsilon_1 y \\ B'_1 &= -\varepsilon_1 x \end{aligned}$$

come era da prevedersi per l'osservazione precedente relativamente ai movimenti I e II. In quanto agli altri movimenti dati dalle III, qui essendo $n = 1$ non possono comparire. Questi risultati così ottenuti si accordano con quelli del Daniele [1] quando le particelle superficiali da lui studiate si suppongano piane e non incurvabili.

Per il caso di $n = 2$ si trovano dei risultati accordantisi con quelli della mia Nota " Sulle deformazioni di 2° ordine di una superficie flessibile ed estendibile " *Rendiconti Istituto Lombardo*, 1909.

Si ha infatti una deformazione potenziale data dalla

$$\Omega = \frac{1}{3}(\beta_{20}x^3 + 3\gamma_2 xy^2 + 3\gamma_1 xy^2 + C_{02}y^3)\,.$$

Due movimenti dati dalle

$$\begin{cases} A'_2 = \varepsilon_1 y^2 \\ B'_2 = -\varepsilon_2 xy \end{cases} \qquad \begin{cases} A''_2 = \varepsilon_1 xy \\ B''_2 = -\varepsilon_1 x^2 \end{cases}$$

---

(1) " Sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed estendibili " *Accademia delle Scienze di Torino*, 1900.

rappresentanti due flessioni di primo grado aventi per assi rispettivamente l'asse x e l'asse y. Nel caso di una superficie generale poi vi è uno spostamento dei punti in particella parallelo all'asse del triedro ortogonale costituito dalle due tangenti alle linee curvilinee u e v e dalla normale w in ogni punto della superficie e inoltre vi è uno spostamento dei punti in direzione normale alla superficie, movimenti che certamente vengono a sparire nel caso presente in cui la particella è soggetta a spostamenti che non ne alterano la curvatura.

5. Dopo di ciò volendo procedere all'Analisi Cinematica della nostra particella, quando nelle espressioni delle componenti di spostamento si considerino i termini sino a quelli di un certo grado n si può osservare quanto segue: il punto O centro di essa non subisce che un unico movimento cioè la traslazione di componenti A_1 e A_2. I punti sugli assi x e y oltre a questa subiscono una rotazione intorno al centro ed n spostamenti potenziali rappresentati da curve piane di $2^o, 3^o, .., (n+1)^o$ ordine dei quali il primo si riduce a due dilatazioni parallelamente agli assi di una conica. Tutti gli altri punti, hanno oltre ai movimenti precedenti, $n-1$ flessioni con asse l'asse x ed $n-1$ flessioni con asse la y distinte in gradi: proporzionali alla distanza dall'origine ed alle potenze delle distanze dagli assi x e y di esponenti $1, 2, 3, \ldots n-1$ rispettivamente per le flessioni di $1^o, 2^o, 3^o, \ldots (n-1)^o$ grado: per ultimo dalla considerazione dei termini di 3^o ordine sino a quelli di ordine n si deducono flessioni miste rispetto agli assi in numero complessivamente di $\binom{n-1}{2}$ così distribuite, una pei termini di 3^o ordine, due per quelli di 4^o ordine, ... $n-2$ per quelli di ordine n.

GIUSEPPE USAI.

SUI TEOREMI DEL VALOR MEDIO DI BONNET E DI DU BOIS REYMOND

In una Nota, (¹) pubblicata recentemente nel *Giornale di Matematiche* di Battaglini, ho dato la dimostrazione del Teorema del valor medio di Bonnet, sotto condizioni diverse da quelle che prima si conoscevano.

Nella prima parte di questo lavoro, che ha colla suddetta nota molti punti di contatto, mi propongo di assegnare delle nuove con-

(¹) VERGERIO, *Sul Teorema del valor medio di Bonnet*. Vol. XLVIII (1° della serie 3ª).

dizioni non solo per la validità del Teorema del Bonnet, ma anche per quello della media di Du Bois Reymond, il che prima d'ora non m'era riuscito.

Nella seconda parte, stabilisco delle condizioni per la validità di due uguaglianze asintotiche, relative ai suddetti Teoremi, che possono, in molti casi, tornare di qualche utilità, date le larghe condizioni sotto cui sono valide.

I. — 1. Premetto il seguente:

Teorema. — *Se* f(x) *è una funzione finita, positiva e concava in* $\overline{ab}$ $(a<b)$ *e* $\varphi(x)$ *è una funzione positiva finita e simmetrica, cioè tale da essere:*

$$\varphi(a+\xi)=\varphi(b-\xi) \qquad \left(0\leqslant\xi\leqslant\frac{b-a}{2}\right)$$

si ha la relazione:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b\varphi(x)\,dx\leqslant\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\,. \tag{A}$$

Per dimostrare il Teorema, basterà far vedere che per la $f(x)$ ha luogo la seguente relazione:

$$f(a)+f(b)\leqslant\ (a+\xi)+f(b-\xi) \qquad \left(0\leqslant\xi\leqslant\frac{b-a}{2}\right). \tag{1}$$

A tale scopo, divido l'intervallo $\overline{ab}$ in $2n$ parti eguali di ampiezza h. Se $a+sh$ è un punto di divisione appartenente all'intervallo $\left(a,\ \frac{a+b}{2}\right)$, per la nota proprietà delle funzioni concave, (¹) sarà:

$$\begin{gathered}
f(a+sh+h)+f(a+sh+h)\leqslant 2f(a+sh)\\
f(a+sh)+f(a+sh+2n)\leqslant 2f(a+sh+h)\\
f(a+sh+h)+f(a+sh+3h)\leqslant 2f(a+sh+2h)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f(a+nh-3h)+f(a+nh-h)\leqslant 2f(a+nh-2h)\\
f(a+nh-2h)+f(a+nh)\leqslant 2f(a+nh-h)\,.
\end{gathered}$$

Sommando membro a membro tutte queste disuguaglianze, si ha:

$$f(a+sh-h)+f(a+nh)\leqslant f(a+sh)+f(a+nh-h)\,. \tag{2}$$

In modo affatto analogo, se $b-sh$ è un punto di divisione appartenente all'intervallo $\left(\frac{a+b}{2},\ b\right)$, s'avrebbe:

$$f(b-sh+h)+f(a+nh)\leqslant f(b-sh)+f(b-nh+h)\,. \tag{3}$$

(¹) V. per es.: Jensen, *Acta Math.*, 1905.

Addiziono la (2) colla (3):

$$f(a+sh-h)+f(b-sh+h)+2f(a+nh)\leqslant f(a+sh)+$$
$$+f(b-sh)+f(a+nh-h)+f(b-nh+h)\leqslant$$
$$\leqslant f(a+sh)+f(b-sh)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

E poichè $a+nh=\frac{a+b}{2}$, avrò infine:

$$f(a+sh-h)+f(b-sh+h)\leqslant f(a+sh)+f(b-sh).$$

Da questa disuguaglianza si deduce subito la (1) e da questa, in modo affatto elementare la (A).

2. Ciò premesso, sia $f(x)$ una funzione finita, continua, concava in a, b e di segno costante, per es. positivo, m ed M siano i suoi valori minimo e massimo, L il massimo modulo del rapporto incrementale, che supporremo sempre finito, e si abbia inoltre $f(b)=$ M.

Sia $\varphi(x)$ un'altra funzione finita, positiva, continua e simmetrica in $\overline{ab}$ e tale che il suo valore minimo sia maggiore d'un $\sigma>0$.

Considero la funzione:

$$\psi(x)=f(x)+cx+\alpha$$

dove C è una costante fissa maggiore di L ed α un parametro, che può assumere qualunque valore finito, consentito dalla

$$\alpha\geqslant -m-ca. \tag{4}$$

Essendo $\psi(x)$ positiva e crescente in ab, posso applicare il Teorema del Bonnet; ottengo:

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx=\psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx \tag{5}$$

dove ξ è funzione continua e decrescente di α; per dimostrarlo, basta ripetere il ragionamento fatto al n. 2 della Nota citata in principio.

Ponendo:

$$\Lambda=\int_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad \mathrm{I}=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$
$$\lambda_\xi=\int_a^\xi \varphi(x)\,dx, \qquad i=\int_a^b x\varphi(x)\,dx$$

la (5) assume la forma:

$$\mathrm{I}=f(b)(\Lambda-\lambda_\xi)-ci+cb(\Lambda-\lambda_\xi)-\alpha\lambda_\xi.$$

Voglio ora provare l'esistenza d'un valore particolare di α tale da rendere

$$ci=cb(\Lambda-\lambda_\xi)-\alpha\lambda_\xi \tag{6}$$

il che ci autorizzerebbe intanto a concludere, che il Teorema del Bonnet è valido, sotto le condizioni poste.

Ripetendo il ragionamento tenuto al n. 2 della Nota citata, si dimostrerebbe che il secondo membro della (6) è una funzione continua e decrescente di α; basterà quindi dimostrare che la quantità ci è compresa tra i valori minimo e massimo, assunti dal secondo membro della (6), quando α varia entro il campo di variabilità definito dalla (4).

Se quindi ξ_0 è il punto corrispondente al valore $\alpha_0 = -m - ca$, affinchè il nostro assunto possa essere dimostrato, dovrà essere:

$$ci \leqslant cb\,(\Lambda - \lambda_{\xi_0}) + (m + ca)\,\lambda_{\xi_0}. \tag{7}$$

Per dimostrare che questa relazione sussiste, riprendo l'integrale del primo membro della (5) ed osservo che, essendo per ipotesi $f(x)$ funzione concava, dovrà essere tale anche la $\psi(x)$ e quindi pel Teorema del n. 1 sarà:

$$\int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx \geqslant \frac{\psi(a) + \psi(b)}{2}\,\Lambda$$

e quindi per la (5):

$$\psi(b)\,(\Lambda - \lambda_\xi) \geqslant \frac{\psi(a) + \psi(b)}{2}\,\Lambda$$

cioè:

$$\{\psi(b) - \psi(a)\}\,\Lambda \geqslant \psi(b)\,(2\lambda_\xi)\,.$$

I quattro fattori di questa diseguaglianza sono tutti positivi; di più si ha:

$$\psi(b) - \psi(a) \leqslant \psi(b)$$

quindi dovrà necessariamente essere $\Lambda \geqslant 2\lambda_\xi$ ed anche:

$$\Lambda \geqslant 2\lambda_{\xi_0}\,. \tag{8}$$

La (8) combinata colla seguente relazione, che si potrebbe dimostrare con tutta facilità:

$$i = \frac{a + b}{2}\,\Lambda \tag{9}$$

ci dà la (7).

Infatti moltiplicando ambedue i membri della (9) per c ed aggiungendo al secondo membro la quantità $m\lambda_{\xi_0}$, si ottiene:

$$ci \leqslant cb\,\Lambda - c\,(b - a)\,\frac{\Lambda}{2} + m\lambda_{\xi_0}$$

da cui per la (8):

$$ci \leqslant cb\,(\Lambda - \lambda_{\xi_0}) + (m + ca)\,\lambda_{\xi_0}$$

che è appunto la (7).

Rimarrebbe ora a dimostrarsi che il secondo membro della (7), per un valore abbastanza grande di α, diviene maggiore di ci; per la dimostrazione basta riportarci alla mia Nota citata.

Arriviamo così alla seguente uguaglianza, che esprime il Teorema del Bonnet:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx. \qquad \text{(B)}$$

3. Lasciamo ora cadere l'ipotesi che $f(x)$ sia di segno costante in a, b, pur tenendo ferme le altre condizioni poste per essa, e consideriamo la funzione $f_1(x) = f(x) - m$.

Evidentemente la $f_1(x)$ soddisfa a tutte le condizioni poste precedentemente per la $f(x)$; ad essa sarà quindi applicabile la formula (B); avremo:

$$\int_a^b [f(x) - m]\,\varphi(x)\,dx = [f(b) - m]\int_\eta^b \varphi(x)\,dx$$

da cui:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = m\int_a^\eta \varphi(x)\,dx + f(b)\int_\eta^b \varphi(x)\,dx \qquad \text{(C)}$$

relazione, che è molto simile a quella di Du Bois Reymond; anzi coincide con essa se $f(a) = m$.

La validità delle (B) e (C) venne dimostrata nel caso che $\varphi(x)$ sia sempre positiva; è ovvio del resto ch'esse sono valide anche nel caso che $\varphi(x)$ sia sempre negativa, purchè i suoi valori assoluti abbiano un minimo maggiore d'un $\sigma > 0$.

4. Operando analogamente sulla funzione:

$$\psi_1(x) = f(x) - cx + \beta$$

si arriverebbe alle altre due uguaglianze:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi_1} \varphi(x)\,dx \qquad \text{(B')}$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{\eta_1} \varphi(x)\,dx + m\int_{\eta_1}^b \varphi(x)\,dx \qquad \text{(C')}$$

che sono valide sotto le identiche condizioni sotto cui lo sono le (B), (C) con questa sola differenza: che la $f(x)$ dovrà raggiungere nel punto a il massimo dei suoi valori assoluti.

Se poi fosse $f(b) = m$, la (C') altro non esprimerebbe se non il secondo Teorema della media.

II. — Poniamo ora per la $f(x)$ delle condizioni molto più larghe di quelle poste poc'anzi; e propriamente supponiamo ch'essa sia sempre finita in $\overline{ab}$ assieme al suo rapporto incrementale, oppure, se tale condizione circa detto rapporto non fosse verificata, ammetteremo ch'essa sia, nel detto intervallo, a variazione limitata, restando, per l'altra funzione $\varphi(x)$, ferme le condizioni precedentemente poste per essa, tranne quella di essere simmetrica e continua.

Sotto queste ipotesi, si sa che la $f(x)$ può esprimersi mediante la differenza di due funzioni positive e mai decrescenti $f_1(x)$, $f_2(x)$, cioè può scriversi:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

od anche, se c è un parametro arbitrario:

$$f(x) = (f_1(x) + c) - (f_2(x) + c) = \psi_1(x) - \psi_2(x)$$

essendo

$$\psi_1(x) = f_1(x) + c\,; \qquad \psi_2(x) = f_2(x) + c\,.$$

Poichè le $\psi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sono sempre positive e mai decrescenti, pel Teorema del Bonnet, sarà:

$$\begin{cases} \int_a^b \psi_1(x)\,\varphi(x)\,dx = \psi_1(b-0) \int_\xi^b \varphi(x)\,dx \\ \int_a^b \psi_2(x)\,\varphi(x)\,dx = \psi_2(b-0) \int_\eta^b \varphi(x)\,dx \end{cases} \tag{1}$$

dove ξ ed η sono funzioni continue e decrescenti di c; per vederlo, basterebbe ripetere il ragionamento fatto al n. 2 della mia Nota più volte citata.

Usando la solita notazione abbreviata, e ponendo inoltre:

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^b f_1(x)\,\varphi(x)\,dx\,; \qquad \mathrm{I}_2 = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

le (1) prendono questa forma:

$$\begin{cases} \mathrm{I}_1 = f_1(b-0)(\Lambda - \lambda_\xi) - c\lambda_\xi \\ \mathrm{I}_2 = f_2(b-0)(\Lambda - \lambda_\eta) - c\lambda_\eta). \end{cases} \tag{2}$$

Sottraendo tra di loro le (2) e notando che

$$\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2 = \mathrm{I} \qquad f_1(b-0) - f_2(b-0) = f(b-0)$$

si ottiene:

$$\mathrm{I} = f(b-0)(\Lambda - \lambda_\xi) + \psi_2(b-0)(\lambda_\eta - \lambda_\xi)\,. \tag{3}$$

Voglio ora dimostrare che, dando a c un conveniente valore, si potrà fare in modo che sia:

$$\psi_2(b-0)(\lambda_\eta - \lambda_\xi) = \varepsilon$$

dove ε è una quantità piccola a piacere.

Osservo infatti che, avendosi dalle (2)

$$c = \frac{f_1(b-0)(\Lambda - \lambda_\xi) - \mathrm{I}_1}{\lambda_\xi}$$

$$c = \frac{f_2(b-0)(\Lambda - \lambda_\eta) - \mathrm{I}_2}{\lambda_\eta}$$

dove i numeratori dei secondi membri delle precedenti uguaglianze sono sempre finiti, qualunque sia c, le quantità λ_ξ e λ_η, al crescere indefinito di c dovranno tendere allo zero e quindi ξ e η dovranno tendere con continuità ad a essendo funzioni continue e decrescenti di c. Si potrà quindi assumere per c un valore abbastanza grande, ma finito e tale che la differenza $|\xi - \eta|$ sia piccola a piacere e che quindi anche l'integrale $(\lambda_\eta - \lambda_\xi)$ esteso all'intervallo $\overline{\xi, \eta}$, sia numericamente minore d'un $\sigma > 0$ arbitrario.

Assumendo quindi per c un valore siffatto, si avrà:

$$\lambda_\eta - \lambda_\xi = \omega < \sigma$$

e ponendo

$$\psi_2 (b - 0)\, \omega = \varepsilon$$

la (3) ci darà:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(b-0) \int_\xi^b \varphi(x)\, dx + \varepsilon$$

con ε piccolo a piacere.

E poichè la funzione $\{f(x) - f(a+0)\}$ soddisfa alle condizioni poste per le $f(x)$, applicando ad essa la formula precedente s'avrà l'altra relazione:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(a+0) \int_a^{\xi'} \varphi(x)\, dx) + f(b-0) \int_{\xi'}^b \varphi(x)\, dx + \varepsilon$$

che esprime il secondo teorema della media a meno d'una costante ε piccola a piacere.

Noterò da ultimo che la $f(x)$ potendosi, sotto le condizioni poste, porre sotto la forma della differenza di due funzioni positive non mai crescenti, (¹) si può nello stesso modo e con tutta facilità dimostrare l'altra eguaglianza:

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(a+0) \int_a^\eta \varphi(x)\, dx + \rho$$

con ρ piccolo a piacere.

(¹) Il fatto è evidente se $f(x)$ ha il rapporto incrementale sempre finito; nel caso poi che fosse a variazione limitata, si può leggere la nota alla pag. 747 del mio lavoro: *Sulla Serie di Fourier* (" Rend. del R. Istituto Lombardo ", vol. XLIII, pagg. 738-759).

A. Vergerio.

DAI COEFFICIENTI POLINOMIALI

alla generalizzazione di alcune formole di analisi combinatoria

---

I.

1. Essendo

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} x^k$$

il noto sviluppo (composto di $n+1$ termini) della potenza del binomio, sono pure note le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{I}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \tag{II}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{III}$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} + \ldots + \binom{k-1}{k-1} \tag{IV}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \tag{V}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots = 2^{n-1} \tag{VI}$$

le quali, oltrechè costituire proprietà intrinseche di essi coefficienti, esprimono pure (per il fatto di potere ogni coefficiente essere indicato col simbolo combinatorio) proprietà dell'analisi combinatoria.

I vari coefficienti delle successive potenze si possono ottenere mediante il *Triangolo di Pascal*:

Potenze	Coefficienti
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
. . .	. . . .

Ciò premesso dimostreremo che le predette proprietà, riguardanti tanto i coefficienti quanto i simboli combinatori, si possono dedurre da proprietà analoghe ben più generali che discendono dallo sviluppo della potenza del polinomio ordinato.

2. Osserviamo, intanto, che lo sviluppo ordinato della potenza

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)^n$$

(dove m ed n sono interi e positivi), contiene $mn + 1$ termini.

Poniamo allora:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)^n = P_0^{(n)} + P_1^{(n)} x + \ldots + P_{mn}^{(n)} x^{mn} \quad (1)$$

dove i $P_k^{(n)}$ (non contenenti la x) sono coefficienti da determinarsi.

Per ciò ottenere uguagliamo le derivate prime, rispetto alla variabile x, dei due membri della (1). Si avrà:

$$n(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)^{n-1} (a_1 + 2a_2 x + \ldots + m a_m x^{m-1}) =$$
$$= P_1^{(n)} + 2P_2^{(n)} x + \ldots + mn P_{mn}^{(n)} x^{mn-1}$$

e moltiplicando i due membri per

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

e sostituendo nel primo membro mediante la (1):

$$n(P_0^{(n)} + P_1^{(n)} x + \ldots + P_{mn}^{(n)} x^{mn})(a_1 + 2a_2 x + \ldots + m a_m x^{m-1}) =$$
$$= (a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)(P_1^{(n)} + 2P_2^{(n)} x + \ldots + mn P_{mn}^{(n)} x^{mn-1}).$$

Dovendo l'uguaglianza sussistere identicamente, saranno uguali nei due membri di essa i coefficienti delle stesse potenze di x; si otterranno quindi le relazioni:

$$a_0 P_1^{(n)} = n a_1 P_0^{(n)}$$
$$2a_0 P_2^{(n)} + a_1 P_1^{(n)} = n a_1 P_1^{(n)} + 2n a_2 P_0^{(n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(m+1) a_0 P_{m+1}^{(n)} + m a_1 P_m^{(n)} + \ldots + a_m P_1^{(n)} =$$
$$= n a_1 P_m^{(n)} + 2n a_2 P_{m-1}^{(n)} + \ldots + mn a_m P_1^{(n)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dalle quali si deducono le formole ricorrenti:

$$P_1^{(n)} = \frac{n a_1 P_0^{(n)}}{a_0}$$
$$P_2^{(n)} = \frac{(n-1) a_1 P_1^{(n)} + 2n a_2 P_0^{(n)}}{2a_0} \quad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_{m+1}^{(n)} = \frac{(n-m) a_1 P_m^{(n)} + (2n-m+1) a_2 P_{m+1}^{(n)} + \ldots + (mn-1) a_m P_1^{(n)}}{(m+1) a_0}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

essendo note direttamente le altre due:

$$P_0^{(n)} = a_0^n; \qquad P_{mn}^{(n)} = a_m^n.$$

Il coefficiente generale (di x^k) è quindi:

$$P_k^{(n)} = \frac{(n-k+1)a_1 P_{k-1}^{(n)} + (2n-k+2)a_2 P_{k-2}^{(n)} + \ldots + (mn-k+m)a_m P_{k-m}^{(n)}}{ka_0} \quad (3)$$

che dà un coefficiente qualunque in funzione degli m precedenti.

Se si risolve la (3) rispetto a $P_{k-m}^{(n)}$ e si cambia quindi k in $k+m$, si ha:

$$P_k^{(n)} = \\ = \frac{[k-(m-1)n+1]a_{m-1} P_{k+1}^{(n)} + [k-(m-2)n+2]a_{m-2} P_{k+2}^{(n)} + \ldots + (k+m)a_0 P_{k+m}^{(n)}}{(mn-k)\, a_m} \quad (4)$$

la quale dà un coefficiente qualunque in funzione degli m seguenti.

Perchè le (3) e (4) non perdano della loro generalità per qualunque valore di k (purchè sia $0 < k \leqslant mn$ nella prima e $0 \leqslant k < mn$ nell'altra) converremo, anche pei teoremi che seguiranno, che i termini figuranti al numeratore si annullino quando, per speciali valori di k, l'indice di $P^{(n)}$ diventi negativo nella (3) e maggiore di mn nella (4).

Con questa convenzione le (3) e (4) hanno significato anche quando k assume rispettivamente gli $m-1$ valori:

$$m-1, \quad m-2, \ldots, 1$$

e

$$mn-m+1, \quad mn-m+2, \ldots, \quad mn-1$$

per i quali $P_k^{(n)}$ si otterrà in funzione degli $m-1$, $m-2, \ldots, 1$ coefficienti precedenti o seguenti.

Inoltre $P_k^{(n)}$ si annulla, perchè effettivamente non esistente nello sviluppo, anche quando per speciali valori di m, n e k risulta:

$$mn < k. \qquad (\alpha)$$

Il valore di $P_k^{(n)}$ si può ottenere dalle relazioni ricorrenti (2) mediante successive sostituzioni, od anche direttamente (formando le (2), previa la sostituzione $P_0^{(n)} = a_0^n$, un sistema di mn equazioni lineari ad altrettante incognite) per determinante. [1]

3. Nel caso particolare in cui è

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 1$$

la (3) diventa:

$$P_k^{(n)} = \frac{(n-k+1)P_{k-1}^{(n)} + (2n-k+2)P_{k-2}^{(n)} + \ldots + (mn-k+m)P_{k-m}^{(n)}}{k} \quad (5)$$

---

[1] Per $x=1$ la (1) viene così a darci una nuova espressione della potenza del polinomio non ordinato.

dove $P_k^{(n)}$ (in valore assoluto) dicesi *coefficiente polinomiale* di x^k (di posto $k+1$) nello sviluppo della potenza ennesima.

Determinato così il coefficiente polinomiale $P_k^{(n)}$, passiamo ora a stabilirne le proprietà, mediante teoremi che faremo numericamente corrispondere a quelli riguardanti il binomio ed esposti al n. 1.

Teorema I. — *I coefficienti estremi ed equidistanti dagli estremi sono eguali.* [1]

Dimostrazione. — Essendo

$$(1+x+\ldots+x^m)^n = P_0^{(n)} + P_1^{(n)}x + \ldots + P_{mn}^{(n)}x^{mn} \tag{6}$$

si ha, cambiando x in $\frac{1}{x}$ e moltiplicando i due membri della nuova eguaglianza per x^{mn}:

$$(x^m + x^{m-1} + \ldots + 1)^n = P_0^{(n)}x^{mn} + P_1^{(n)}x^{mn-1} + \ldots + P_{mn}. \tag{7}$$

Poichè i primi membri delle (6) e (7) sono identicamente eguali, dovranno esserlo anche i secondi; epperò si avrà necessariamente l'eguaglianza tra i coefficienti delle stesse potenze di x, ossia:

$$P_k^{(n)} = P_{mn-k}^{(n)}.$$

Questo teorema si può anche dimostrare nel modo seguente:

Dalla (4), cambiando k in $nm-k$ ed eguagliando ad 1 le a, si ha:

$$P_{mn-k}^{(n)} =$$

$$= \frac{(n-k+1)P_{mn-k+1}^{(n)} + (2n-k+2)P_{mn-k+2}^{(n)} + \ldots + (mn-k+m)P_{mn-k+m}^{(n)}}{k}$$

---

[1] In generale, il prodotto di due polinomi interi ordinati e simmetrici rispetto ai coefficienti (e dimostrata per due la proprietà vale evidentemente per un numero qualunque di polinomi), è un polinomio (ordinato) simmetrico rispetto ai suoi coefficienti.

Infatti, essendo:

$$(b_0x^m + b_1x^{m-1}y + \ldots + b_0y^m)(c_0x^n + c_1x^{n-1}y + \ldots + c_0y^n) = A_0x^{m+n} + A_1x^{m+n-1}y + \ldots + A_{m+n}y^{m+n}$$

si deduce, collo scambio di x in y:

$$(b_0y^m + b_1y^{m-1}x + \ldots + b_0x^m)(c_0y^n + c_1y^{n-1}x + \ldots + c_0x^n) = A_0y^{m+n} + A_1y^{m+n-1}x + \ldots + A_{m+n}x^{m+n}$$

e per l'identità dei primi membri, si dovrà avere nei secondi:

$$A_k = A_{m+n-k}.$$

Si noti che la simmetria tra i coefficienti dei polinomi fattori è condizione *sufficiente* ma non *necessaria* perchè il polinomio prodotto sia simmetrico rispetto ai coefficienti. Infatti, se si ha ad es.:

$$(\alpha_0x^p + \alpha_1x^{p-1}y + \ldots + \alpha_py^p)(\alpha_px^p + \alpha_{p-1}x^{p-1}y + \ldots + \alpha_0y^p) = C_0x^{2p} + C_1x^{2p-1}y + \ldots + C_{2p}y^{2p}$$

dallo scambio di x con y si ottiene:

$$(\alpha_0y^p + \alpha_1y^{p-1}x + \ldots + \alpha_px^p)(\alpha_py^p + \alpha_{p-1}y^{p-1}x + \ldots + \alpha_0x^p) = C_0y^{2p} + C_1y^{2p-1}x + \ldots + C_{2p}x^{2p}$$

dalle quali si deduce:

$$C_k = C_{2p-k}.$$

che confrontata colla (5) dimostra, coll'applicazione del metodo di induzione matematica, l'anzidetta proprietà.

TEOREMA II. — *Si ha la relazione, che mettiamo solo in simboli perchè meglio definita che con parole:*

$$P_k^{(n)} = \frac{n-k+1}{k} P_{k-1}^{(n)} + \frac{2n-k+2}{k} P_{k-2}^{(n)} + \ldots + \frac{mn-k+m}{k} P_{k-m}^{(n)} .$$

Basta infatti applicare alla (5) la proprietà distributiva della divisione.

TEOREMA III. — *Il coefficiente di* x^k, *nello sviluppo della potenza* $(n+1)^{esima}$, *è uguale alla somma degli* $m+1$ *coefficienti nello sviluppo ennesimo, da quello appartenente ad* x^k *a quello di* x^{k-m}.

Dimostrazione. — Infatti è:

$$(1+x+\ldots+x^m)^{n+1} = P_0^{(n+1)} + P_1^{(n+1)} x + \ldots + P_{m(n+1)}^{(n+1)} x^{m(n+1)}$$

ma è pure

$$\begin{aligned}(1+x+\ldots+x^m)^{n+1} &= (1+x+\ldots+x^m)^n (1+x+\ldots+x^m) = \\ &= (P_0^{(n)} + P_1^{(n)} x + \ldots + P_{mn}^{(n)} x^{mn})(1+x+\ldots+x^m) = \\ &= P_0^{(n)} + (P_1^{(n)} + P_0^{(n)}) x + \ldots\end{aligned}$$

epperò:

$$P_k^{(n+1)} = P_k^{(n)} + P_{k-1}^{(n)} + \ldots + P_{k-m}^{(n)} .$$

TEOREMA IV. — *Il coefficiente di* x^k, *nello sviluppo della* $(n+1)^{esima}$ *potenza, è uguale alla somma dei coefficienti di*

$$x^{k-1}, \quad x^{k-2}, \ldots, \quad x^{k-m},$$

negli sviluppi di tutte le potenze inferiori (da n *a* 0).

Dimostrazione. — Applicando successivamente il teorema precedente a tutti i valori di n fino allo 0, si ottengono le uguaglianze:

$$\begin{gathered}P_k^{(n+1)} = P_k^{(n)} + P_{k-1}^{(n)} + \ldots + P_{k-m}^{(n)} \\ P_k^{(n)} = P_k^{(n-1)} + P_{k-1}^{(n-1)} + \ldots + P_{k-m}^{(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_k^{(0)} = P_k^{(0)}\end{gathered}$$

che sommate a membro a membro, e sottratti poscia gli addendi comuni, dànno:

$$\begin{aligned}P_k^{(n+1)} = (P_{k-1}^{(n)} + P_{k-1}^{(n-1)} + \ldots + P_{k-1}^{(0)}) + (P_{k-2}^{(n)} + P_{k-2}^{(n-1)} + \ldots + P_{k-2}^{(0)}) + \ldots \\ \ldots + (P_{k-m}^{(n)} + P_{k-m}^{(n-1)} + \ldots + P_{k-m}^{(0)}) .\end{aligned}$$

TEOREMA V. — *La somma di tutti i coefficienti è uguale ad*

$$(m+1)^n .$$

Dimostrazione. — Infatti, per $x = 1$, la (6) diventa:

$$P_0^{(n)} + P_1^{(n)} + \ldots + P_{mn}^{(n)} = (m+1)^n .$$

TEOREMA VI. — *La somma dei coefficienti di posto dispari (indice pari) è uguale a quella dei coefficienti di posto pari, od alla somma degli stessi aumentata di un'unità, secondo che* m *è dispari o pari.*

Dimostrazione. — Fatto, nella (6), $x = -1$, si ottiene:

$$[1 - 1 + 1 - \ldots + (-1)^m]^n = P_0^{(n)} - P_1^{(n)} + \ldots + (-1)^m P_{mn}^{(n)}$$

dalla quale si trae, tenendo pure conto del teorema precedente:

$$P_0^{(n)} + P_2^{(n)} + \ldots = P_1^{(n)} + P_3^{(n)} + \ldots = \frac{(m+1)^n}{2} \quad \text{(per } m \text{ dispari)}$$

$$P_0^{(n)} + P_2^{(n)} + \ldots = 1 + P_1^{(n)} + P_3^{(n)} + \ldots = \frac{(m+1)^n + 1}{2} \quad \text{(per } m \text{ pari).}$$

Dai sei teoremi precedenti, per $m = 1$, si deducono in particolare le proprietà citate al n. 1 dei coefficienti binomiali, indipendentemente per altro da ogni significato combinatorio.

In questo solo caso speciale l'espressione di $P_k^{(n)}$ si può ricavare, oltre che nei modi preesposti, dalle uguaglianze, dedotte immediatamente dalle (2):

$$P_1^{(n)} = \frac{n}{1}$$

$$P_2^{(n)} = \frac{(n-1)\,P_1^{(n)}}{2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$P_k^{(n)} = \frac{(n-k+1)\,P_{k-1}^{(n)}}{k} .$$

Infatti, moltiplicando a membro a membro e sopprimendo i fattori comuni, si deduce:

$$P_k^{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 . 2 . 3 \ldots k} = \binom{n}{k} .$$

4. Per la generalizzazione del Triangolo di Pascal, si procede nel modo seguente:

Per $m = 2$ si ha il quadro:

Potenze	Coefficienti						
0	1						
1	1	1	1				
2	1	2	3	2	1		
3	1	3	6	7	6	3	1
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

dove l'elemento p^{esimo} della q^{esima} orizzontale è uguale alla somma dei 3 elementi p^{esimo}, $(p-1)^{esimo}$ e $(p-2)^{esimo}$ della $(q-1)^{esima}$ orizzontale.

Per $m=3$ si ha il quadro

Potenze	Coefficienti									
0	1									
1	1	1	1	1						
2	1	2	3	4	3	2	1			
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1
. . .	. . .									

dove l'elemento p^{esimo} della q^{esima} orizzontale è uguale alla somma dei 4 elementi dal p^{esimo} al $(p-3)^{esimo}$ della $(q-1)^{esima}$ orizzontale.

E così di seguito in modo analogo.

Simbolicamente si avrà, in generale:

$$\begin{array}{l}
P_0^{(0)} \\
P_0^{(1)} \quad P_1^{(1)} \ldots P_m^{(1)} \\
P_0^{(2)} \quad P_1^{(2)} \ldots P_m^{(2)} \quad P_{m+1}^{(2)} \ldots P_{2m}^{(2)} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_0^{(n)} \quad P_1^{(n)} \ldots P_m^{(n)} \quad P_{m+1}^{(n)} \ldots P_{2m}^{(n)} \quad P_{2m+1}^{(n)} \ldots P_{nm}^{(n)}.
\end{array}$$

Volendo, ad es., conoscere i coefficienti di

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$$

si formerà il quadro:

Potenze	Coefficienti																
0	1																
1	1	1	1	1	1												
2	1	2	3	4	5	4	3	2	1								
3	1	3	6	10	15	18	19	18	15	10	6	3	1				
4	1	4	10	20	35	52	68	80	85	80	68	52	35	20	10	4	1

epperò

$$\begin{aligned}
&(1+x+x^2+x^3+x^4)^4 = \\
&= 1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+52x^5+68x^6+80x^7+85x^8+ \\
&\quad +80x^9+68x^{10}+52x^{11}+35x^{12}+20x^{13}+10x^{14}+4x^{15}+x^{16}.
\end{aligned}$$

N. B. — Per le varie specie di triangoli numerici che s'ottengono per $m = 1, 2, \ldots$, useremo la denominazione: *Triangolo del 2°, del 3°, ..., dell'* $(m+1)^{esimo}$ *ordine*, essendo quindi del 2° ordine quello di Pascal.

II.

5. Dimostrate le proprietà di $P_k^{(n)}$, come coefficiente, vediamo ora per altra via come si possa trasformarlo in simbolo combinatorio. Consideriamo il prodotto

$$(a_{10} + a_{11} x + \ldots + a_{1m} x^m)(a_{20} + a_{21} x + \ldots + a_{2m} x^m) \ldots$$
$$\ldots (a_{n0} + a_{n1} x + \ldots + a_{nm} x^m). \quad (8)$$

Il termine generale dello sviluppo, ordinato secondo le potenze crescenti di x, sarà rappresentato da

$$x^k \Sigma a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}, \quad (9)$$

dove la sommatoria va estesa a tutte le soluzioni intere non negative dell'equazione

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k \quad (10)$$

con la condizione

$$i_j \leqslant m \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \quad (11)$$

Se facciamo

$$a_{1i_j} = a_{2i_j} = \ldots = a_{ni_j}$$

la (8) diventa

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m)^n$$

e la (9), potendo alcuni dei numeri i essere uguali tra loro, prenderà la forma

$$x^k \Sigma a_m^{p_m} a_{m-1}^{p_{m-1}} \ldots a_0^{p_0} \quad (12)$$

dove la sommatoria ha sempre lo stesso significato, ed è inoltre

$$\left.\begin{array}{l} p_m + p_{m-1} + \ldots + p_0 = n \\ \text{ed} \\ m p_m + (m-1) p_{m-1} + \ldots + 2p_2 + p_1 = k \\ \text{indicando con} \\ m, m, \ldots, m, m-1, m-1, \ldots, m-1, \ldots, 1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0 \\ 1 \;\; 2 \ldots p_m;\;\; 1 \;\;\; 2 \;\; \ldots p_{m-1}; \ldots \;\; 1 \;\; 2 \ldots p_1; 1 \;\; 2 \ldots p_0 \end{array}\right\} \quad (13)$$

una qualunque soluzione della (10).

Per ottenere tutte le soluzioni della (10) si può:

a) formare tutte le ripartizioni di k in n parti intere non maggiori di m (mettendo tanti zero, dove e quanti ne occorrono, perchè gli elementi di ciascuna ripartizione riescano in numero di n);

b) effettuare sopra ciascuna ripartizione tutte le permutazioni lineari possibili.

Con questo precedimento si può sviluppare la (12) mediante due operazioni distinte successive, ed allora il coefficiente P_k di x^k

sarà rappresentato da

$$P_k^{(n)} = \Sigma\,\Sigma a_m^{p_m}\, a_{m-1}^{p_{m-1}} \dots a_0^{p_0} \tag{14}$$

intendendo il sommatorio esterno esteso a tutte le partizioni di k in n parti intere non maggiori di m e non negative, ed il sommatorio interno a tutte le permutazioni lineari degli elementi contenuti in ciascuna ripartizione.

Ma tutti i termini compresi nel secondo sommatorio, per ogni valore del primo, vengono allora a differire tra loro solo per la posizione rispettiva degli n fattori a in ciascuno di essi, epperò, per la proprietà commutativa, essi termini saranno tutti eguali; quindi la (14) prenderà la forma

$$P_k^{(n)} = \sum \frac{n!}{p_m!\; p_{m-1}! \dots p_0!}\, a_m^{p_m}\, a_{m-1}^{p_{m-1}} \dots a_0^{p_0} \tag{15}$$

nella quale, dovendo ciascuno dei numeri p_j dipendere dai numeri p con indice maggiore, sarà sempre:

$$p_0 = n - \sum_{h=1}^{h=m} p_h\,;$$

inoltre, potendo alcuni p_j essere nulli, s'intende adottata la convenzione $0! = 1$, affinchè la (15) non perda significato per l'annullarsi di alcuni fattori al denominatore della frazione.

6. Nel caso particolare in cui sia

$$a_0 = a_1 = \dots = a_m = 1$$

la (15) diventa:

$$P_k^{(n)} = \sum \frac{n!}{p_m!\; p_{m-1}! \dots p_0!} \tag{16}$$

la quale, sotto altra forma, fornisce il valore già determinato per il coefficiente polinomiale $P_k^{(n)}$.

E poichè, con semplici trasformazioni, si può dare alla frazione del secondo membro della (16) la forma combinatoria

$$\binom{n}{p_m}\binom{n-p_m}{p_{m-1}}\binom{n-[p_m+p_{m-1}]}{p_{m-2}}\dots$$
$$\dots\binom{n-[p_m+p_{m-1}+\dots+p_3]}{p_2}\binom{n-[p_m+p_{m-1}+\dots+p_2]}{p_1}$$

si ottiene, colle note convenzioni

$$\binom{r}{0} = 1 \qquad \text{ed} \qquad \binom{r}{s} = 0 \qquad \text{per} \qquad r < s,$$

la notevole relazione:

$$P_k^{(n)} = \sum^{R_m^{(k)}} \binom{n}{p_m}\binom{n-p_m}{p_{m-1}}\dots\binom{n-\sum\limits_{h=2}^{h=m} p_h}{p_1} \tag{17}$$

dove il simbolo $R_m^{(k)}$ indica il numero delle ripartizioni di k in n parti intere non negative e non maggiori di m, al quale numero è esteso il sommatorio.

Esempio. — Facendo nella (17) $m=4$, $k=7$, poichè le ripartizioni del 7 in n parti sono

4 3	4 2 1	4 1 1 1	
3 3 1	3 2 2	3 2 1 1	3 1 1 1 1
2 2 2 1	2 2 1 1 1	2 1 1 1 1 1	
1 1 1 1 1 1 1			

e precisamente in numero di 11, si avrà, sviluppando il sommatorio:

$$\begin{aligned}
P_7^{(n)} = {} & \binom{n}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{0} + \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{1} + \\
& + \binom{n}{1}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{3} + \binom{n}{0}\binom{n-0}{2}\binom{n-2}{0}\binom{n-2}{1} + \\
& + \binom{n}{0}\binom{n-0}{1}\binom{n-1}{2}\binom{n-3}{0} + \binom{n}{0}\binom{n-0}{1}\binom{n-1}{1}\binom{n-2}{2} + \\
& + \binom{n}{0}\binom{n-0}{1}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{4} + \binom{n}{0}\binom{n-0}{0}\binom{n-0}{3}\binom{n-3}{1} + \\
& + \binom{n}{0}\binom{n-0}{0}\binom{n-0}{2}\binom{n-2}{3} + \binom{n}{0}\binom{n-0}{0}\binom{n-0}{1}\binom{n-1}{5} + \\
& + \binom{n}{0}\binom{n-0}{0}\binom{n-0}{0}\binom{n-0}{7};
\end{aligned}$$

e per $n=4$, tenendo conto delle convenzioni su citate, della relazione $\binom{r}{r}=1$, ed escludendo le ripartizioni contenenti più di 4 elementi (che del resto vengono senz'altro eliminate in forza del significato del simbolo combinatorio):

$$\begin{aligned}
P_7^{(4)} = {} & \binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}\binom{2}{1} + \\
& + \binom{4}{1}\binom{3}{2} + \binom{4}{1}\binom{3}{1} + \binom{4}{3} = 80
\end{aligned}$$

risultato che coincide con quello dell'esempio del n. 4.

Si ha dunque che, in corrispondenza ai teoremi dimostrati per i coefficienti polinomiali, colla semplice sostituzione del simbolo (17) a $P_k^{(n)}$ (ferme restando le convenzioni e notazioni precedentemente fatte e tenendo presenti le (10), (11) e (13)), ne sussistono altrettanti per la detta espressione (17).

Da essi, per $m=1$, si deducono nuovamente le sei formole del n. 1.

III.

7. Generalizzate le sei proprietà dei coefficienti binomiali, tanto come coefficienti quanto come simboli combinatori, passiamo a generalizzare un'altra formola importante dell'analisi combinatoria, e precisamente la:

$$\binom{p+q}{k} = \binom{p}{k}\binom{q}{0} + \binom{p}{k-1}\binom{q}{1} + \ldots + \binom{p}{0}\binom{q}{k} \qquad \text{(VII)}$$

dalla quale, in particolare per $p = q = k = n$ e per la (I) del n. 1, si deduce:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 \qquad \text{(VIII)}$$

che dà la somma dei quadrati dei coefficienti binomiali.

Teorema VII. — *Si ha la relazione*:

$$\mathrm{P}_k^{(r+s)} = \mathrm{P}_k^{(r)}\,\mathrm{P}_0^{(s)} + \mathrm{P}_{k-1}^{(r)}\,\mathrm{P}_1^{(s)} + \ldots + \mathrm{P}_0^{(r)}\,\mathrm{P}_k^{(s)}. \qquad (18)$$

Dimostrazione. — Dall'identità:

$$(1 + x + \ldots + x^m)^{r+s} = (1 + x + \ldots + x^m)^r\,(1 + x + \ldots + x^m)^s$$

che può mettersi sotto la forma

$$\mathrm{P}_0^{(r+s)} + \ldots + \mathrm{P}_{m(r+s)}^{(r+s)}\,x^{m(r+s)} = (\mathrm{P}_0^{(r)} + \ldots + \mathrm{P}_{mr}^{(r)}\,x^{mr})\,(\mathrm{P}_0^{(s)} + \ldots + \mathrm{P}_{ms}^{(s)}\,x^{ms})$$

si ottiene, sviluppando ed eguagliando nei due membri i coefficienti di x^k, la (18), potendo nel secondo membro essere nulli alcuni dei primi e degli ultimi termini, in dipendenza dei particolari valori di k.

Corollario. — Se nella relazione testè stabilita facciamo $r = n$ ed $s = 1$, per la (α) si annullano nel secondo membro tutti i termini, dopo i primi $m + 1$, ottenendo così, come caso particolare, l'eguaglianza del Teorema III.

Teorema VIII. — *La somma dei quadrati dei coefficienti polinomiali, nello sviluppo della potenza* $\mathrm{n}^{\text{esima}}$, *è uguale al coefficiente di* x^{mn} *nello sviluppo della potenza* $(2\mathrm{n})^{\text{esima}}$.

Dimostrazione. — Infatti, per $r = s = n$ e $k = mn$ e ricordando il Teorema I, l'eguaglianza del teorema precedente diventa:

$$\mathrm{P}_{mn}^{(2n)} = (\mathrm{P}_0^{(n)})^2 + (\mathrm{P}_1^{(n)})^2 + \ldots + (\mathrm{P}_{mn}^{(n)})^2. \qquad (19)$$

Sostituendo la (17) nelle (18) e (19) si ha la generalizzazione cercata delle formole VII e VIII.

8. In una nota pubblicata in questo Periodico, (1) il professor G. Mignosi diede una generalizzazione della VII colla seguente:

$$\binom{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{k} = \sum \binom{u_1}{i_1}\binom{u_2}{i_2}\ldots\binom{u_n}{i_n} \qquad (20)$$

(1) " Generalizzazione di una formula di analisi combinatoria ". Anno XXIV, fasc. IV, pag. 178.

dove il sommatorio va esteso a tutte le soluzioni intere non negative dell'equazione (10).

Ma un'altra generalizzazione della VII è data anche dalla (18); ci proponiamo di generalizzare ulteriormente la VII in modo da dedurne, come casi particolari, tanto la (18) che la (20).

Dall' identità

$$(1+x+\ldots+x^m)^{u_1}(1+x+\ldots+x^m)^{u_2}\ldots(1+x+\ldots+x^m)^{u_n}=$$
$$=(1+x+\ldots+x^m)^{u_1+u_2+\ldots+u_n}$$

che può mettersi sotto la forma

$$(P_0^{(u_1)}+\ldots+P_{mu_1}^{(u_1)}x^{mu_1})\ldots(P_0^{(u_n)}+\ldots+P_{mu_n}^{(u_n)}x^{mu_n})=P^{(u_1+\ldots+u_n)}+\ldots$$
$$\ldots+P_{m(u_1+\ldots+u_n)}^{(u_1+\ldots+u_n)}x^{m(u_1+\ldots+u_n)}$$

si ha, sviluppando, ed applicando il principio d'identità delle funzioni intere:

$$P_k^{(u_1+u_2+\ldots+u_n)}=\Sigma P_{i_1}^{(u_1)}P_{i_2}^{(u_2)}\ldots P_{i_n}^{(u_n)} \tag{21}$$

essendo il sommatorio esteso a tutte le soluzioni intere non negative della (10).

Mettendo la (21) sotto forma combinatoria, e ricordando ancora le (10), (11) e (13), si avrà la notevole relazione cercata:

$$\sum^{R_k}\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n}{p_m}\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n-p_m}{p_{m-1}}\ldots$$
$$\ldots\binom{u_1+u_2+\ldots+u_n-\sum_2^m p_h}{p_1}= \tag{22}$$
$$=\sum\prod_{\nu=1}^{\nu=n}\sum^{R_{i_\nu}}\binom{u_\nu}{p_m}\binom{u_\nu-p_m}{p_{m-1}}\ldots\binom{u_\nu-\sum_2^m p_h}{p_1}$$

dove il sommatorio del primo membro ed i sommatori interni del secondo sono estesi al numero delle ripartizioni di k in i_ν parti intere, e il sommatorio esterno ha lo stesso significato di quello della (21).

Dalla (22), per $m=1$ si trae la (20) e per $\nu=2$ si trae la (18) dopo la sostituzione in essa della (17).

L'importanza della (22) sta nel fatto che essa riassume e comprende tutte le formole di analisi combinatoria citate e dimostrate nel presente lavoro.

9. Supponendo

$$u_1\leqslant u_2\leqslant\ldots\leqslant u_n$$

il sommatorio della (21) è, di fatto, esteso a tutte le soluzioni della (10) solo per i valori di k uguali o minori di mu_1; ma per quanto s'è detto sui valori speciali che annullano il simbolo $P_k^{(n)}$ e quindi quello combinatorio corrispondente, e non occorrendo a noi di conoscere il numero dei termini aventi significato, (1) diventa superflua ogni restrizione in proposito.

Osserviamo piuttosto:

a) Che essendo la (10) effettivamente sottoposta alla condizione

$$i_j \leqslant mu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

il numero delle soluzioni di essa sarà eguale a quello dell'altra

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = m\,(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) - k\,, \text{ (2)}$$

epperò il sommatorio della (21) ha la stessa estensione tanto per P_k quanto per

$$P_{m\,(u_1+\ldots+u_n)-k}\,.$$

b) Che l'equazione (10) con la condizione (11) avrà, per la (13), tante soluzioni quante ne ha l'altra:

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + mx_m = k$$

essendo

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant n\,.$$

c) Che per $k \leqslant m$, la (10) non è più soggetta alla condizione (11); e poichè allora il numero delle sue soluzioni è dato da

$$C'_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}$$

si ha la relazione:

$$\binom{n+k-1}{k} = \sum^{R_m^{(k)}} \binom{n}{p_m} \binom{n-p_m}{p_{m-1}} \cdots \binom{n - \sum_2^m p_h}{p_1}$$

dalla quale, tenendo conto di tutte le proprietà dei simboli dei due membri, se ne possono dedurre moltissime altre.

IV.

10. Come esempio ed a schiarimento di quanto si è precedentemente esposto, esporremo le espressioni di $P_k^{(n)}$ per il caso più semplice che dopo quello del binomio, è costituito dal trinomio e si ottiene per $m = 2$.

---

(1) Il numero dei termini con significato è il coefficiente di x^k nello sviluppo del prodotto

$$(1 + x + \ldots + x^{mu_1})\,(1 + x + \ldots + x^{mu_2}) \ldots (1 + x + \ldots + x^{mu_n})$$

il cui valore è stato determinato dal prof. Mignosi nella Nota " Problema sulla partizione dei numeri ". (Cfr. *Periodico*, vol. XVIII, settembre-ottobre 1902).

(2) Per la dimostrazione cfr. Nota su citata.

Dalla (5) si ha allora:

$$(1+x+x^2)^n = P_0^{(n)} + P_1^{(n)} x + \ldots + P_{2n}^{(n)} x^{2n}$$

ed i valori di $P_k^{(n)}$ sono:

a) in forma ricorrente:

$$\begin{cases} P_k^{(n)} = \dfrac{(n-k+1)\,P_{k-1}^{(n)} + (2n-k+2)\,P_{k-2}^{(n)}}{k} \\[2ex] P_k^{(n)} = \dfrac{(k-n+1)\,P_{k+1}^{(n)} + (k+2)\,P_{k+2}^{(n)}}{2n-k} \end{cases}$$

b) in forma combinatoria:

$$P_k^{(n)} = \sum^{R_2^{(k)}} \binom{n}{p_2}\binom{n-p_2}{p_1} \tag{23}$$

dove il sommatorio va esteso al numero $R_2^{(k)}$ delle ripartizioni di k in n parti intere non negative e non maggiori di 2, essendo

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & p_2; & 1 & 2 & \ldots & p_1; & 1 & 2 & \ldots & p_0 \\ 2, & 2, & \ldots, & 2, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{matrix}$$

una qualunque soluzione dell'equazione

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_n = k$$

con la condizione

$$i_j \leqslant 2 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

La (23) è quindi sottoposta alle due condizioni

$$\begin{cases} p_2 + p_1 + p_0 = n \\ 2p_2 + p_1 = k \end{cases}$$

e si scorge facilmente che è pure

$$R_2^{(k)} = E\left(\frac{k}{2}\right) + 1$$

dove col simbolo $E\left(\dfrac{k}{2}\right)$ si è indicata la parte intera del quoziente $\dfrac{k}{2}$.

La (23) può quindi anche essere svolta nel modo seguente:

$$\sum^{R_2^{(k)}} \binom{n}{p_2}\binom{n-p_2}{p_1} =$$

$$= \begin{cases} \dbinom{n}{t}\dbinom{n-t}{0} + \dbinom{n}{t-1}\dbinom{n-t+1}{2} + \ldots + \dbinom{n}{0}\dbinom{n-0}{2t} & \text{per } k = 2t \\[2ex] \dbinom{n}{t}\dbinom{n-t}{1} + \dbinom{n}{t-1}\dbinom{n-t+1}{3} + \ldots + \dbinom{n}{0}\dbinom{n-0}{2t+1} & \text{per } k = 2t+1. \end{cases}$$

c) per determinante:

$$P_k^{(n)} = \frac{n}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 1 \\ -(n-1) & 2 & 0 & 0\ldots & 0 & 2 \\ -(2n-1) & -(n-2) & 3 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -(2n-2) & -(n-3) & 4\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & -[n-(k-1)] & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

d) in forma polinomiale:

$$k!\,P_k^{(n)} = n(n-1)\ldots(n-k+1) + k(k-1)\,n(n-1)\ldots(n-k+2) + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{2!}\,n(n-1)\ldots(n-k+3) + \ldots$$

ossia

$$P_k^{(n)} = \binom{n}{k} + \frac{\sum \frac{k(k-1)\ldots(k-2r+1)}{r!}\,n(n-1)\ldots(n-k+r+1)}{k!} \quad (25)$$

dove, per i particolari valori di k, il sommatorio va esteso a tutti i valori di r da 1 fino a quello che annulla un dato termine, epperò tutti i seguenti, della successione. [1]

In particolare:

$$P_0^{(n)} = 1$$

$$P_1^{(n)} = n$$

$$P_2^{(n)} = \frac{n(n+1)}{2!}$$

$$P_3^{(n)} = \frac{n(n-1)(n+4)}{3!}$$

$$P_4^{(n)} = \frac{n(n-1)(n^2+7n-6)}{4!}$$

$$P_5^{(n)} = \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)(n+12)}{5!}$$

. . . .

[1] La (25) è stata dedotta dalla (24) mediante l'applicazione di un metodo nuovo e semplice per lo sviluppo rapido dei determinanti di sistemi ricorrenti, metodo che esporremo in un prossimo lavoro.

FABIO FERRARI.

IL CONCETTO GEOMETRICO DI LINEA

(Continuazione — Vedi fascicolo precedente).

CAPITOLO II.

Divisione del piano per mezzo di una linea chiusa.

Spartizione dei punti interni ad una striscia mediante una linea. [1]

35. Considerando in un piano due rette parallele x, y, e una retta r che seghi x ed y, i punti interni alla striscia xy si possono dividere in due regioni, ponendo in una di esse quelli che si trovano da una parte della retta r, e nell'altra quelli che si trovano dall'altra parte; queste sono le due *regioni nelle quali la retta* r (o anche, il segmento di r che appartiene alla striscia xy) *divide la regione interna alla striscia* xy.

Se consideriamo poi due segmenti s ed s' ciascuno dei quali abbia un estremo su x e uno su y, e i due segmenti non s'incontrano, o al più hanno un estremo comune, i punti di s' sono in una delle regioni determinate da s nella striscia xy, ed s è in una delle due regioni determinate da s'. I punti comuni alle due regioni suddette costituiscono la *regione dei punti interni alla striscia* xy *compresi fra* s *ed* s'. E poichè s ed s', coi segmenti di x e y compresi fra i loro estremi, dànno origine a un trapezio o ad un triangolo, diremo questa regione *interna al trapezio o triangolo.*

La regione determinata in xy da s e non contenente s', e quella determinata da s' e non contenente s, rimangono inalterate: quindi i punti interni alla striscia xy vengono divisi in tre regioni. I punti di s ed s' sono esclusi da ciascuna di esse.

36. *Una linea spezzata* l, *di un numero finito di lati e priva di nodi, che congiunge due punti appartenenti ai lati di una striscia di piano ed ha tutti gli altri vertici interni ad essa, determina nella regione dei punti interni alla striscia due regioni tali che:*

1° *ogni punto interno alla striscia e non appartenente alla linea* l *appartiene o all'una o all'altra di tali regioni;*

2° *ogni linea interna alla striscia che congiunge due punti non appartenenti alla medesima regione incontra necessariamente la linea* l.

[1] È per noi noto il carattere fondamentale, comunque stabilito, della divisione del piano in due regioni per mezzo di una retta: due punti del piano, e non della retta, appartengono alla stessa regione o a regioni diverse secondo che il segmento che li unisce incontra o no la retta.

Siano x ed y i lati della striscia, ed ABC...KL la data linea l. Per i vertici B, C,..., K conduciamo le parallele ad x, e siano esse, nell'ordine di successione da x verso y: a_1, a_2, a_3, ...

La regione interna alla striscia $a_n a_{n+1}$ è divisa da segmenti che uniscono un punto di a_n con un punto di a_{n+1}, e che appartengono ai lati della linea l, in regioni delle quali due sono indefinite e le altre sono interne a trapezi o triangoli; è facile persuadersi che i segmenti che *attraversano* la striscia $a_n a_{n+1}$ sono in numero dispari, e che quindi le regioni nelle quali dividono la striscia sono in numero pari.

Fissato un senso su x, e corrispondentemente sulle parallele ad x, verrà fissato un ordine di successione di queste regioni; porremo in una regione R_1 le regioni che hanno numero d'ordine dispari, e in una regione R_2 quelle che hanno numero d'ordine pari. Quindi delle due regioni indefinite l'una apparterrà ad R_1 e l'altra ad R_2. Alle regioni R_1 e R_2 aggiungeremo anche i punti delle basi dei singoli trapezi o triangoli, escludendo però da ciascuna di esse i punti delle rette x ed y e i punti di l.

Occorre però levare il dubbio che un punto appartenente a una delle rette a_i debba essere considerato in regioni diverse secondo

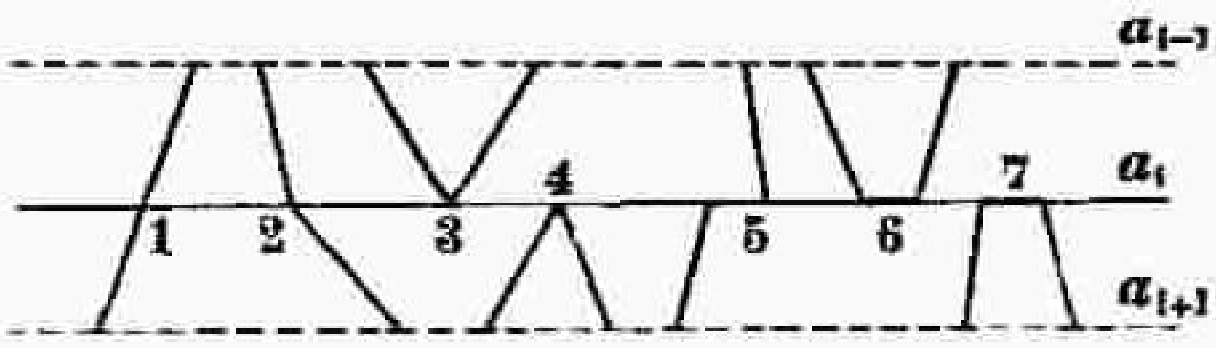

Fig. 1.

che si considera appartenente alla striscia $a_{i-1}a_i$ o alla striscia $a_i a_{i+1}$. Per questo basta osservare che i punti nei quali la retta a_i incontra la linea l si trovano necessariamente in una delle condizioni rappresentate nei casi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 della figura 1. Quindi i tratti di a_i che non fanno parte di l sono sempre basi di due trapezi o triangoli dei quali i punti interni fanno parte della stessa regione R_1 o R_2.

Dalla definizione delle regioni R_1, R_2 segue che esse esauriscono l'insieme dei punti interni alla striscia xy e non appartenenti ad l, e segue inoltre che con centro in un punto qualunque di una di esse si può descrivere un cerchio la superficie del quale appartenga tutta alla medesima regione; quindi per il teorema II [14; 16] si ha che ogni linea che congiunga un punto di R_1 con un punto di R_2 e sia interna alla striscia xy incontra necessariamente la linea l.

37. Da quanto abbiamo detto segue che tracciando, con gli estremi su x e y, due segmenti fra i quali sia compresa la linea l, e considerando le tre regioni nelle quali essi dividono la regione interna alla striscia xy, in quella compresa fra i due segmenti si trovano punti di R_1 e di R_2, e le due regioni indefinite appartengono l'una tutta ad R_1 e l'altra tutta ad R_2.

38. Il teorema dimostrato ha solo un' importanza lemmatica. Più generalmente, dimostreremo che:

XIV. *Una linea* l, *priva di nodi, che congiunge due punti appartenenti ai lati di una striscia di piano ed ha tutti gli altri suoi punti interni alla striscia medesima, divide la regione dei punti interni alla striscia in due regioni* R_1 *e* R_2 *tali che:*

1° *ogni punto interno alla striscia e non appartenente ad* l *appartiene o a* R_1 *o a* R_2;

2° *ogni linea interna alla striscia che congiunga un punto di* R_1 *con un punto di* R_2 *incontra necessariamente* l.

3° *due punti della medesima regione si possono congiungere con una linea interna alla striscia e che non incontra* l.

Poniamo una limitazione relativamente alla linea l, la quale però, come vedremo [51], è solo momentanea, e d'altra parte non vieta

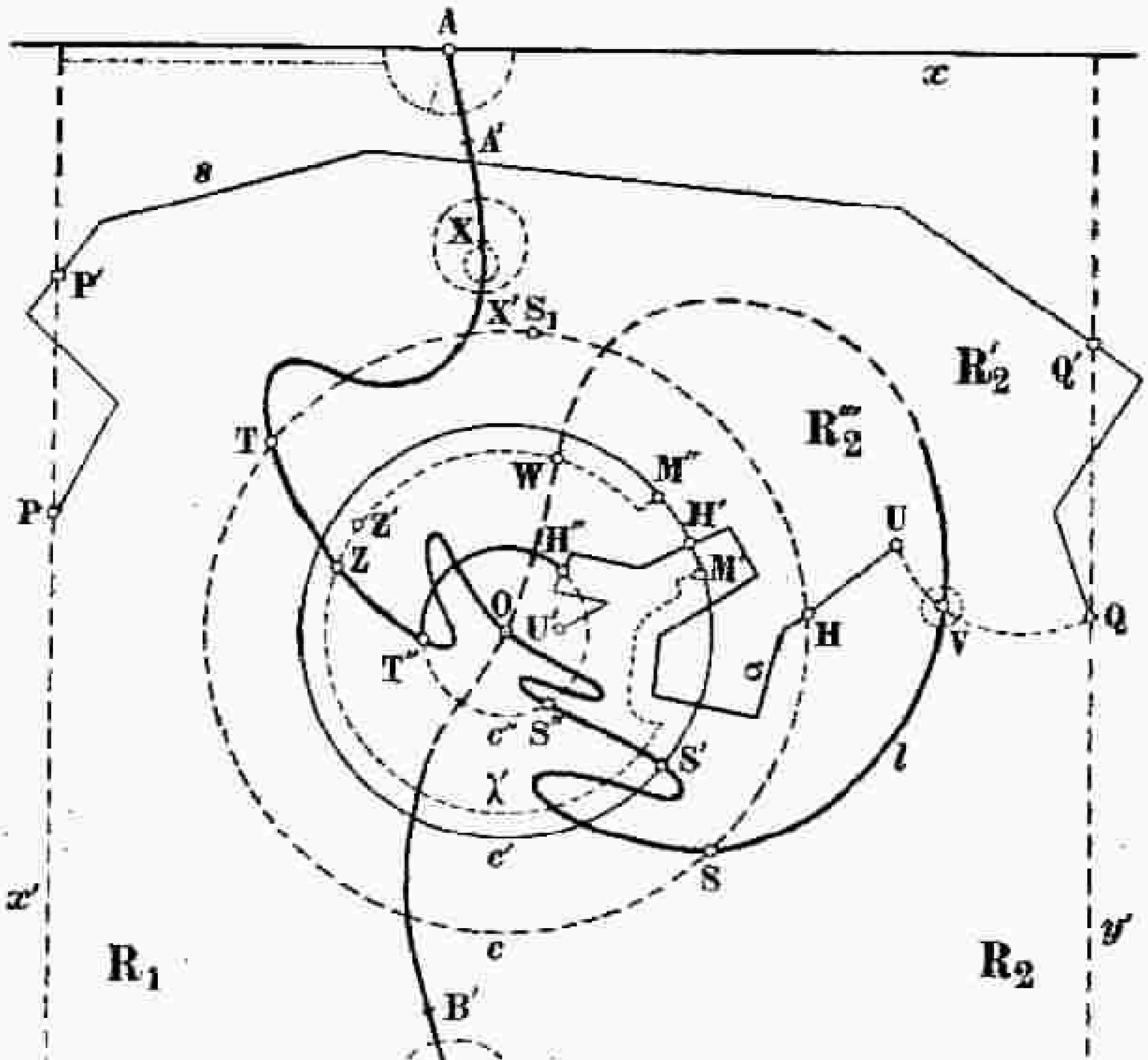

Fig. 2.

alcune applicazioni immediate del teorema: che la linea l abbia due tratti, adiacenti ai suoi estremi A e B, rettilinei.

Tracciamo due segmenti x', y', compresi fra i lati della striscia xy e perpendicolari ad essi, e tali che la linea l sia interna alla striscia $x'y'$; su x' e y' prendiamo due punti P e Q (fig. 2). Poniamo poi *in una regione* R_1 *tutti i punti interni ad* xy *che si possono congiun-*

gere a P *con linee spezzate di un numero finito di lati interne alla striscia* xy *e che non incontrano* l; in una regione R_2 tutti gli altri punti interni ad xy, eccettuati quelli di l.

Si noti che esistono certamente punti di R_2; uno di essi è, per esempio, il punto Q. Infatti, consideriamo una spezzata qualunque s di un numero finito di lati che unisca P con Q e sia interna alla striscia xy; e, nel senso PQ, sia P′ l'ultimo punto nel quale s incontra x', e Q′ il primo punto nel quale il tratto P′Q di s incontra y'. Il tratto P′Q′ di s si trova, rispetto alla striscia $x'y'$, nelle condizioni della linea spezzata considerata nel teorema del n. 36, e i punti A e B si trovano in regioni diverse rispetto a tale linea [37]. Ne segue che l incontra necessariamente il tratto P′Q′ di s, ossia s incontra l; perciò Q non appartiene ad R_1, e quindi è di R_2.

Ora, se H è un punto qualunque di R_1 e si descrive un cerchio $\varkappa(H, \rho)$ con

$$\rho < \delta(H, l), \qquad \rho < \delta(H, x), \qquad \rho < \delta(H, y),$$

la sua superficie è tutta in R_1; infatti, poichè si può congiungere P con H con una spezzata contenuta tutta in R_1; aggiungendo ad essa il segmento HH′ si ottiene una spezzata che congiunge, sempre soddisfacendo alle medesime condizioni, il punto P con qualunque punto H′ del cerchio $\varkappa(H, \rho)$.

Analogamente, se H è un punto R_2, si può considerare un intorno circolare di H tutto di R_2. Dunque le regioni R_1 e R_2 soddisfano alle condizioni del teorema II [14, 16], e ne segue che ogni linea interna alla striscia xy che congiunge un punto di R_1 con un punto di R_2 incontra necessariamente l.

Sono così dimostrati i n. 1 e 2 del teorema XIV. Pe poter dimostrare in modo generale il n. 3 ci è necessario premettere varie considerazioni.

39. Consideriamo una linea λ aperta e priva di nodi, formata di un numero finito di segmenti e di archi di circonferenza; siano i suoi vertici A, B, C, . . . , H.

Essendo ε un segmento minore della minima distanza di ciascun vertice da quei segmenti o archi della linea ai quali il vertice stesso non appartiene, descriviamo, con centro in ciascuno dei punti A, B, . . . , H, delle circonferenze di raggio ρ uguale per tutte, con

$$\rho < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Indi, a partire dal tratto AB e proseguendo successivamente, mediante segmenti ed archi tangenti alle circonferenze descritte (gli archi devono essere concentrici agli archi della linea λ) tracciamo una linea chiusa nel modo sufficientemente indicato dalla figura 3.

A tale linea appartengono una semicirconferenza di centro A e una semicirconferenza di centro H; prendendo due punti M′ ed M″, uno sull'una e uno sull'altra semicirconferenza, la linea chiusa viene divisa in due linee limitate λ' e λ'' con estremi in M′ e M″.

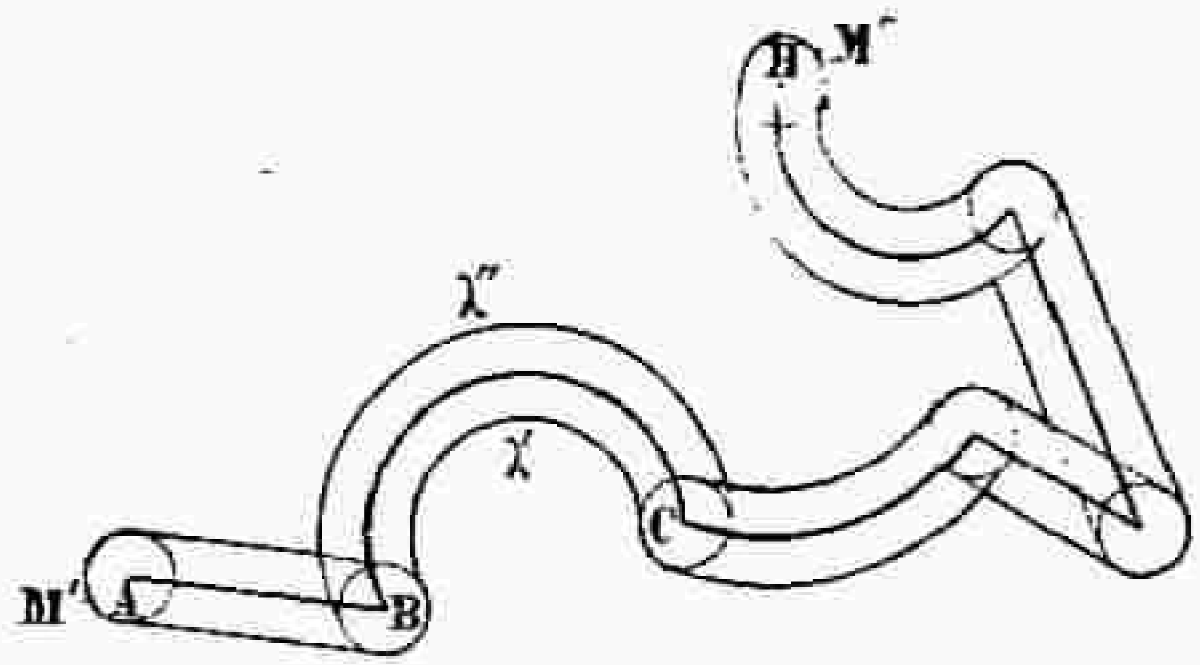

Fig. 3.

Ciascuna delle due linee λ' e λ'' si dirà *linea parallela alla data linea* λ, *condotta alla distanza* ρ *da* λ.

Le linee λ' e λ'' non hanno nodi, e sono formate da un numero finito di segmenti e archi di circonferenza. Notisi che si ha:

$$\delta(\lambda, \lambda') = \rho, \qquad \delta(\lambda, \lambda'') = \rho,$$

e che anzi, di più, se X è un punto qualunque di λ' o di λ'', è $\delta(X, \lambda) = \rho$.

40. *Se due linee* $l \equiv AB$ *ed* $l' \equiv A'B'$ *hanno gli estremi su una circonferenza* c, *e gli altri punti interni a* c, *e le due coppie di punti* AB, A′B′, *considerate su* c, *si separano,* l *e* l' *hanno necessariamente almeno un punto comune.*

Conduciamo una retta d per il centro della circonferenza c, in modo che rispetto ad essa gli estremi A e B di l si trovino da parte opposta; conduciamo poi due rette x, y parallele a d e a distanza da essa maggiore del raggio di c, in modo che c sia compresa nella striscia xy. Sia A nella striscia dx, e B nella striscia dy.

Siano AA_0 e BB_0 i segmenti perpendicolari a x e y rispettivamente, esterni quindi, eccezion fatta per i punti A e B, alla circonferenza c.

La linea A_0AlBB_0 si trova, rispetto alla striscia xy, nelle condizioni volute dal teorema XIV [38], del quale sono state dimostrate le prime due parti; possiamo quindi concludere che essa determina nell'interno della striscia xy una spartizione dei punti in due regioni tali che ogni linea la quale congiunga un punto dell'una con un punto dell'altra e sia interna a xy incontra la linea considerata.

Le due parti della retta d che sono esterne a c appartengono una all'una e una all'altra di queste due regioni; ne segue che dei due archi AB di c, astraendo dagli estremi A e B, uno è in una regione e l'altro nell'altra.

Allora è chiaro che la linea l', la quale ha gli estremi uno sull'uno e uno sull'altro arco AB, incontra la linea A_0AlBB_0; e non potendo incontrare i segmenti A_0A e BB_0 che sono esterni a c, incontra l.

41. La osservazione fatta ci servirà per un'altra, di molto maggiore importanza.

Si abbia una linea limitata e priva di nodi $\sigma \equiv HH''$, *della quale l'estremo* H *sia esterno e l'estremo* H'' *interno ad una circonferenza* c. *Se* H' *è il primo punto d'intersezione, nel senso* H''H, *di* σ *con* c, *supponiamo:*

1) *che in* H' *la linea* σ *attraversi* c, *ossia che si possa considerare un tratto di* H'H *adiacente al* H' *ed esterno a* c;

2) *che il tratto* H'H *di* σ *sia una spezzata di un numero finito di lati.*

Considerando c come una linea limitata con gli estremi coincidenti in H', fissiamo su c un senso; prendiamo poi due archi di c, H'M' nel senso diretto e H'M'' nell'inverso, che non contengano altri punti di σ all'infuori di H'. Questo è possibile perchè dalla condizione 2) segue che σ ha solo un numero finito di punti di intersezione con c.

Quello che a noi preme dimostrare è che M' ed M'' *si possono congiungere con una linea che ha tutti gli altri suoi punti interni a* c *e che non incontra* σ.

Se oltre i punti del tratto H''H' esistono altri punti di σ interni a c, sia ζ uno di essi. Siano ε e ε' i primi punti nei quali i tratti ζH', ζH incontrano c. Potremo avere vari tratti di σ del tipo $\varepsilon\varepsilon'$, sempre però in numero finito; essi esauriscono quello che di σ è interno a c, oltre H''H'.

Se $\varepsilon_i\varepsilon'_i$, $\varepsilon_j\varepsilon'_j$ sono due tali tratti di σ, le due coppie di punti $\varepsilon_i\varepsilon'_i$, $\varepsilon_j\varepsilon'_j$, considerate su c, non si possono separare, perchè i tratti $\varepsilon_i\varepsilon'_i$, $\varepsilon_j\varepsilon'_j$ di σ si incontrerebbero [40], mentre σ non ha nodi. Ne segue che le coppie $\varepsilon_i\varepsilon'_i$, $\varepsilon_j\varepsilon'_j$ sono *successive* su c, o una di esse è compresa fra i due punti dell'altra. Noi trascureremo quelle coppie del tipo $\varepsilon\varepsilon'$ che sono contenute nell'arco di c determinato dai due punti di una coppia del medesimo tipo; di modo che le coppie che considereremo saranno, su c, successive. Siano esse, nel senso fissato di c:

$$\varepsilon_1\varepsilon'_1,\ \varepsilon_2\varepsilon'_2, \ldots,\ \varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu .$$

La prima condizione posta in principio ci assicura che nè ε_1 nè ε'_ν può coincidere con H'; invece, due punti ε'_i ed ε_{i+1} possono anche coincidere.

Se due punti X ed Y appartengono tanto a c che a σ, indicheremo con (XY) l'arco di c da essi determinato, e con $\{XY\}$ invece il tratto di σ. Ciò posto, consideriamo la linea λ formata dei tratti successivi

$$(M'\varepsilon_1),\quad \{\varepsilon_1\varepsilon'_1\},\quad (\varepsilon'_1\varepsilon_2),\quad \{\varepsilon_2\varepsilon'_2\},\ \ldots,\ \{\varepsilon_\nu\varepsilon'_\nu\},\quad (\varepsilon'_\nu M'').$$

Essa congiunge M' con M'', appartiene tutta alla superficie di c, non ha nodi e non incontra il tratto H''H' di σ.

La linea λ è costituita di un numero finito di segmenti e di archi di cerchio. Tracciamo ora una linea λ' parallela ad essa [39]. Per questo descriviamo intanto due circonferenze

$$\varkappa(M', \rho) \quad e \quad \varkappa(M'', \rho) \quad \text{con} \quad \rho < \delta(\lambda, H''H'),$$

prendendo inoltre ρ piccolo tanto da soddisfare alle condizioni poste al n. 39, e siano μ' e μ'' i punti nei quali esse incontrano gli archi H'M' e H'M'' rispettivamente. Prendiamo per estremi di λ' i punti μ' e μ'', e l'arco della circonferenza $\varkappa(M', \rho)$ appartenente a λ' si prenda interno a c.

La linea $\lambda' \equiv \mu'\mu''$ ha solo gli estremi su c, e tutti gli altri suoi punti sono interni a c. Infatti se così non fosse, il suo primo punto d'intersezione con c (dopo μ') non sarebbe μ'', e non potrebbe trovarsi in uno degli archi $(\varepsilon'_i\varepsilon_{i-1})$, ai quali λ' è parallela; perciò dovrebbe trovarsi in uno degli archi $(\varepsilon_i\varepsilon'_i)$. In tal caso λ' incontrerebbe [40] il tratto $\{\varepsilon_i\varepsilon'_i\}$, e ciò non può ammettersi perchè λ' è parallela a questo tratto.

Inoltre, la linea $\lambda' \equiv \mu'\mu''$ non incontra σ. Infatti, non incontra il tratto H''H' perchè λ' si è descritta a una distanza da λ minore di $\delta(\lambda, H''H')$; non incontra i tratti $\{\varepsilon_i\varepsilon'_i\}$ considerati perchè è ad essi parallela; non incontra neanche i tratti di σ del tipo $\varepsilon\varepsilon'$ che abbiamo trascurato, perchè dovrebbe incontrare anche uno dei tratti del medesimo tipo fra quelli considerati [40]. D'altra parte, H''H' e i tratti del tipo $\varepsilon\varepsilon'$ esauriscono quanto di σ è interno a c.

Se dunque ai tratti di λ' adiacenti agli estremi e che sono archi delle circonferenze $\varkappa(M', \rho)$ e $\varkappa(M'', \rho)$ sostituiremo due raggi delle medesime circonferenze, otterremo una linea pienamente soddisfacente alle condizioni poste, giacchè essa congiungerà M' con M'', avrà tutti i suoi punti (eccettuati gli estremi) interni a c, e non incontrerà σ.

42. Riprendiamo la dimostrazione del teorema XIV [38] per provare come due punti di una stessa delle due regioni R_1 o R_2 si possano congiungere con una linea interna alla striscia xy e che non incontra l, e quindi tutta appartenente alla regione stessa. Che questo avvenga per due punti di R_1 è manifesto, perchè ambedue possono congiungersi con P con spezzate soddisfacenti alle dette condizioni; vediamo ora se avviene lo stesso per due punti di R_2.

Consideriamo i punti ai quali si può pervenire partendo da Q con linee spezzate di un numero finito di lati interne a xy e che non incontrano l. Poichè Q è di R_2, anche ciascuno di tali punti è di R_2, ed appartiene quindi ad una regione R'_2 contenuta in R_2; esprimeremo ciò scrivendo:

$$R'_2 < R_2. \text{ (1)}$$

Ora, possono darsi due casi: o R'_2 esaurisce R_2, ed allora il teorema è senz'altro dimostrato, oppure R'_2 non esaurisce R_2. In questo secondo caso, indichiamo con R''_2 la regione dei punti di R_2 che non appartengono a R'_2; di modo che si abbia:

$$R_2 = R'_2 + R''_2.$$

Se U è un punto di R''_2, sia R'''_2 la regione dei punti ai quali U può congiungersi con spezzate di un numero finito di lati interne a xy e che non incontrano l; può darsi che R'''_2 esaurisca R''_2, ma non è necessario. Osserviamo che esistono punti di l tali che in qualunque loro intorno circolare siano contenuti punti di R'''_2; infatti, si congiunga il punto U con P o con Q per mezzo di una linea, la quale incontrerà certamente l, e sia V il primo dei punti d'incontro. Tutto il tratto $\overline{UV}$ è in R'''_2. Qualunque circonferenza con centro in V contiene un tratto del tratto $\overline{UV}$, e quindi contiene punti di R'''_2; V è dunque uno dei punti dei quali parlavamo. Tali punti saranno chiamati brevemente *punti* V; essi sono dunque *quei punti tali che in ogni loro intorno circolare sono contenuti punti della regione* R'''_2.

Distribuiamo i punti di l in due gruppi G_1 e G_2, ponendo in G_1 un punto X se nel tratto AX di l non sono contenuti punti V, e in G_2 un punto Y se nel tratto AY sono contenuti punti V; ogni punto di l è in G_1 o in G_2, e i punti di G_1 precedono quelli di G_2. Per vedere poi che esistono sempre punti di G_1 e di G_2, approfittiamo della condizione posta che due tratti AA' e B'B di l siano rettilinei; con centro in A descriviamo un semicerchio nella striscia xy, con raggio minore di δ(A, A'B'); il tratto di l appartenente ad esso è rettilineo, ed è facile persuadersi che ogni punto, non di l, appartenente al semicerchio può congiungersi con P o con Q con una linea interna ad xy che non incontra l. Ciò mostra che ogni punto del semicerchio è di R_1 o di R'_2, e mai di R'''_2; che quindi in quel tratto di l che appartiene al semicerchio non si trovano punti V, e che tutti i punti di quel tratto sono del gruppo G_1. Analogamente si vede che in un certo tratto di l adiacente a B e compreso in B'B non si trovano punti V, e che quindi i punti di quel tratto appartengono a G_2.

(1) Questa relazione non esclude che R'_2 possa coincidere con R_2.

Nel gruppo G_1 non esiste un ultimo punto. Infatti, se X è di G_1, X non è un punto V, e quindi con centro in X si può descrivere una circonferenza entro la quale non si trovino punti di R'''_2; se X′ è il primo punto d'incontro del tratto $\overline{XB}$ con tale circonferenza, con centro in ogni punto del tratto $\overline{XX'}$ si può descrivere una circonferenza interna a quella già descritta, e non contenente perciò punti di R'''_2; questo dimostra che nel tratto $\overline{XX'}$ non esistono punti V, e che quindi anche tutti i punti di $\overline{XX'}$ sono di G_1. Dunque X, che è un punto qualunque di G_1, non è l'ultimo.

Se in G_1 non esiste l'ultimo punto, esiste il primo punto di G_2 [5]; sia esso O. È evidente che O è un punto V, anzi è il primo dei punti V nel senso AB di l.

Descriviamo una circonferenza

$$c \equiv \varkappa(O, \rho) \qquad \text{con} \qquad \rho < \delta(O, U),$$

e sia S il primo punto d'intersezione del tratto OB di l con c; fissato poi un segmento ε qualunque, si descriva una circonferenza

$$' \equiv \varkappa(O, \rho') \qquad \text{con} \qquad \rho' < \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho' < \rho,$$

e sia S′ il primo punto d'intersezione del tratto OS con c'; infine, descriviamo la circonferenza

$$c'' \equiv \varkappa(O, \rho'') \qquad \text{con} \qquad \rho'' < \delta(O, S'S),$$

e sia S″ l'ultimo punto d'intersezione del tratto OS con c''. Il punto S″ è nel tratto OS′, e il tratto $\overline{S''S}$ di l ha tutti i suoi punti interni all'anello circolare cc''.

Consideriamo anche il primo punto d'intersezione T del tratto OA di l con c e l'ultima intersezione T″ di OT con c''; di modo che anche il tratto $\overline{T''T}$ sarà interno all'anello circolare cc''.

Finalmente, prendendo un punto U′ di R'''_2 interno a c'', si consideri una spezzata σ di un numero finito di lati e priva di nodi che congiunga U con U′ e appartenga interamente a R'''_2; e sia H la sua prima intersezione (nel senso U′U) con c, H″ la ultima intersezione del tratto U″H con c'', e H′ la prima intersezione del tratto H″H con c'. Anche il tratto $\overline{H''H}$ di σ avrà tutti i suoi punti interni all'anello circolare cc''.

Consideriamo la linea L costituita:

del tratto HH″ di σ;
dell'arco H″T″ di c'' nel quale non è S″;
del tratto T″T di l.

Questa linea congiunge H con T ed ha tutti i suoi punti, eccettuati gli estremi, interni a c.

Poniamo in una regione Σ i punti interni a c e non di L ai quali si può giungere da S con linee interne a c e che non incontrano L, e in una regione Σ' i punti interni a c e non di L nè di Σ. È certo che esistono punti della regione Σ'; infatti, se S_1 è un punto di quello dei due archi HT di c che non contiene S, ogni linea che congiunga S con S_1 e sia del resto interna a c incontra necessariamente L perchè le coppie SS_1, HT si separano [40]; onde i punti interni a c che hanno da S_1 distanza $< \delta(S_1, L)$ sono, senza dubbio, di Σ'.

Per il modo stesso nel quale si sono costruite le regioni Σ e Σ', si ha che ogni linea che congiunge un punto di Σ con un punto di Σ' ed è interna a c incontra necessariamente L. Notisi poi che tutti i punti del tratto $S''S$ di l sono in Σ, in quanto che $S''S$ non incontra L, non incontrando nè HH'', nè l'arco $H''T''$ nè $T''T$.

Osserviamo che si può applicare al cerchio c' e alla spezzata HH'' il lemma dimostrato al n. 41. La condizione posta che in H' la linea *attraversi* c' si può supporre soddisfatta, giacchè in caso contrario si potrebbe modificare convenientemente σ, tenendo conto del fatto che esiste un intorno circolare di H' appartenente interamente a R'''_2.

Applicando il detto lemma si ha che due punti M' ed M'' di c' sufficientemente vicini ad H' e da parte opposta rispetto ad esso possono congiungersi con una linea λ' tutta interna a c' (eccettuati gli estremi) che non incontri il tratto HH'' di σ; e poichè il tratto OS'' di l non incontra c' e $H'H$, possiamo supporre che λ' sia condotta a distanza sufficientemente piccola dalla linea λ considerata nella dimostrazione del n. 41 (la quale λ è costituita di archi di c' e tratti di $H'H$) da non incontrare neppure OS''. Nello stesso modo potremo evitare che λ' incontri l'arco $H''T''$ facente parte di L.

Prenderemo i punti M' e M'' di c', che sono estremi di λ', in un intorno circolare di H' appartenente ad R'''_2, e così vicini ad H' che per essi si possano tracciare due linee parallele alla spezzata $H'H$ le quali non incontrino neppure il rimanente tratto di L. Queste due parallele incontreranno c in due punti, uno dei quali apparterrà all'arco HST e l'altro all'arco HS_1T; (1) una delle parallele sarà dunque contenuta in Σ e l'altra in Σ', e perciò i punti M' ed M'' apparterranno uno a Σ e l'altro a Σ'. Sia M' quello di Σ ed M'' quello di Σ'.

La linea λ' presenta dunque questi caratteri:

1) ha gli estremi M' ed M'' in R'''_2;

2) il suo estremo M' è in Σ e il suo estremo M'' in Σ';

3) non incontra i tratti HH'' e $H''T''$ della linea L che determina le regioni Σ e Σ';

4) ha tutti i suoi punti, eccettuati gli estremi, interni a c';

5) non incontra il tratto OS'' di l.

(1) Si noti che, potendosi considerare un intorno circolare di H o di H' appartenente tutto ad R'''_2, è lecito anche supporre che H ed H' non siano vertici di σ, e che i lati di σ ai quali appartengono siano perpendicolari a c e c' rispettivamente.

Per le proprietà 2) e 4) essa incontra L; per la proprietà 3) incontra il tratto T″T di l.

Consideriamo il senso M″M′ di λ', e prendiamo il primo punto Z nel quale λ' incontra il tratto OT, che comprende T″T. Poichè M″ è in Σ', tutto il tratto $\overline{\text{M''Z}}$ di λ' è in Σ'. Per il fatto che O è, nel senso AB, il primo punto di l che in ogni suo intorno circolare contenga punti di R'''_2, si può considerare un intorno di Z che non contenga punti di R'''_2; sia Z′ un punto del tratto M″Z di λ', che appartenga a questo intorno.

Il punto Z non è di l e non è di R'''_2, mentre M″ è di R'''_2, quindi il tratto M″Z di λ' incontra necessariamente l in un punto W. Tale punto non è sul tratto S″S perchè il tratto $\overline{\text{S''S}}$ è in Σ mentre W è in Σ'; non è sul tratto OS″ per la proprietà 5) di λ'; non è sul tratto OT perchè il primo punto d'intersezione di $\lambda' \equiv$ M″M′ con OT è Z. Dunque W non appartiene al tratto TOS di l.

Per la proprietà 4) di λ' si ha poi:

$$\delta(O, W) < \rho' < \varepsilon .$$

Ciò significa che, dato un segmento qualunque ε, esiste un punto W di l, non appartenente al tratto TOS, che ha da O distanza minore di ε. La distanza di O dai punti di l è dunque piccola a piacere anche escludendo il tratto TOS. Si deve perciò ammettere [19] che O appartenga anche ai tratti rimanenti di l, ossia che l abbia un nodo in O. Avendo escluso questo, l'assurdo è manifesto.

L'assurdo proviene dall'ipotesi che la regione R'_2 non esaurisca la regione R_2; il teorema XIV è dunque pienamente dimostrato.

48. Vogliamo dimostrare ora come la linea l sia *limite* comune alle due regioni R_1 ed R_2 da essa determinate nella striscia xy; ossia come ogni punto di l sia un punto limite di ciascuna delle due regioni.

XV. *Mantenendo le ipotesi e le notazioni del teorema XIV, si ha che entro qualunque circonferenza descritta con centro in un punto di* l *si trovano punti di ambedue le regioni* R_1 *ed* R_2.

Supponiamo che esista un punto V di l tale che si possa descrivere con centro in esso una circonferenza entro la quale non si trovino punti di R_2. Consideriamo quel tratto del tratto AV di l, adiacente all'estremo V, che è tutto interno alla detta circonferenza; è manifesto che ogni punto di questo tratto ha anch'esso la proprietà del punto V, cioè che si può considerare un intorno circolare di esso nel quale non si trovino punti di R_2.

Distribuiamo i punti del tratto AV di l in due gruppi G_1 e G_2, ponendo in G_2 quei punti X di questo tratto tali che tutti i punti del tratto XV abbiano la proprietà stessa del punto V, e in G_1 gli altri.

Esistono punti di G_1, giacchè i punti del tratto rettilineo AA′ di l non hanno, come già osservammo [42], la proprietà del punto V, e sono quindi in G_1; così esistono punti di G_2 per l'osservazione fatta poco sopra, dalla quale risulta anche che ogni punto di G_2 è preceduto da altri punti di G_2, e che quindi non esiste il primo punto di G_2.

Esiste dunque [5] l'ultimo punto di G_1, nel senso AB; sia esso O. Poichè il punto O non è in G_2, ma i punti del tratto $\overline{OV}$ sono di G_2, si ha che O non ha la proprietà del punto V, ossia entro ogni circonferenza di centro O si trovano punti di R_2.

Si ha inoltre che entro ogni circonferenza di centro O si trovano punti di R_1; infatti, se in un intorno circolare di O non esistessero punti di R_1, lo stesso fatto si verificherebbe per i punti di un tratto di l seguente ad O, e allora in un certo intorno di uno di questi punti (che sono in G_2) non si avrebbero nè punti di R_1 nè punti di R_2, e questo è assurdo [27].

Dunque in qualunque intorno circolare di O si trovano punti di R_1 e punti di R_2.

Descriviamo una circonferenza

$$c \equiv \varkappa(O, \rho) \qquad \text{con} \qquad \rho < \delta(O, VB),$$

e consideriamo il primo punto d'intersezione S del tratto OA di l con c; indi descriviamo un'altra circonferenza

$$c' \equiv \varkappa(O, \rho') \qquad \text{con} \qquad \rho' < \delta(O, SA),$$

e sia S' il primo punto d'incontro del tratto OS con c'. I punti di l interni a c' potranno appartenere soltanto ai tratti OS e OV. Descriviamo infine una terza circonferenza

$$c'' \equiv \varkappa(O, \rho'') \qquad \text{con} \qquad \rho'' < \delta(O, S'S),$$

e sia S'' l'ultimo punto d'intersezione del tratto OS con c''. Il tratto S''S contiene S' ed appartiene interamente all'anello circolare cc''.

Entro c'' consideriamo, come si può, un punto U_1 di R_1 e un punto U_2 di R_2, e congiungiamo U_1 con P e U_2 con Q mediante due spezzate prive di nodi e di un numero finito di lati, σ_1 e σ_2, che non incontrino l. Sia H'' l'ultimo punto d'incontro di $\sigma_2 \equiv U_2Q$ con c'', e H' il primo punto d'incontro del tratto H''Q con c'. Così per $\sigma_1 \equiv U_1P$ consideriamo l'ultimo punto d'intersezione T'' con c''.

Possiamo fare un ragionamento analogo a quello del n. 42; e appunto per questa analogia procederemo con una certa rapidità.

Consideriamo la linea L costituita:

del tratto QH'' di σ_2;
dell'arco H''T'' di c'' nel quale non è S'';
del tratto T''P di σ_1.

Questa linea congiunge Q con P, e possiamo supporre che sia tutta interna (eccettuati gli estremi) alla striscia $x'y'$, giacchè i punti P e Q si possono spostare comunque sui segmenti x' e y'.

La linea L determina nella striscia $y'x'$ due regioni Σ_1 e Σ_2, cogli stessi caratteri delle R_1 e R_2; sia Σ_1 quella nella quale si trova B, Σ_2 quella nella quale si trova A. Se prendiamo M′ e M″ su c', da parte opposta rispetto ad H′ e in un intorno di H′ sufficientemente piccolo, M′ e M″ sono in regioni opposte rispetto ad L; sia M′ in Σ_1 e M″ in Σ_2.

Applicando il lemma dimostrato al n. 41 abbiamo che M′ e M″ si possono congiungere mediante una linea λ' che sia tutta interna a c' (eccettuati gli estremi) e che non incontri il tratto QH″T″ di L. Potremo anche fare in modo che non incontri il tratto OS″ di l, il quale non ha punti comuni con σ_2 ed è tutto interno a c'.

Poichè M′ è in Σ_1 e M″ e in Σ_2, la linea λ' deve incontrare L, e l'incontro può avvenire solo in un punto del tratto T″P di σ_1. Sia Z la prima intersezione di λ' col tratto T″P. Tutto il tratto M′Z di λ' è in Σ_1.

Il punto Z, essendo di σ_1, è in R_1, ed M′, se è in un intorno sufficientemente piccolo di H′, è in R_2; quindi il tratto M′Z di λ' incontra necessariamente l. Se W è la prima intersezione, il punto W non può trovarsi sul tratto AS che è tutto esterno a c'; non sul tratto SS″ che è interamente in Σ_2; non sul tratto S″O, che non incontra λ'; non sul tratto VB, che è esterno a c. Quindi W appartiene al tratto OV di l.

Poichè il tratto M′W di λ' è in R_2, si ha che in qualunque intorno circolare di W sono contenuti punti di R_2; ma il punto W, essendo nel tratto OV, è di quelli che hanno la proprietà del punto V, e quindi con centro in esso si può descrivere una circonferenza entro la quale non si trovino punti di R_2; la contradizione è manifesta, e con questa l'assurdità dell'ipotesi dalla quale siamo partiti.

Spartizione dei punti del piano per mezzo di una linea chiusa.

44. Il teorema che dimostreremo si riduce in ultima analisi al teorema di JORDAN, (1) per il quale " ogni linea chiusa divide il piano in due regioni ". Notisi però che JORDAN fonda il concetto di linea sulla rappresentazione analitica, e la sua dimostrazione apparisce come una estensione a linee qualunque di proprietà supposte note per le linee poligonali. (2)

XVI. *Una linea piana* L, *chiusa e priva di nodi, divide il piano in due regioni* I *ed* E, *l'una definita e l'altra indefinita, tali che:*

1° *ogni punto del piano non appartenente ad* L *appartiene a* I *o ad* E;

2° *in ogni intorno circolare di un punto di* L *si trovano punti di* I *e punti di* E;

(1) JORDAN, *op. cit.*, I, pag. 90 e segg.

(2) Le proprietà delle linee poligonali e parti di piano da esse limitate delle quali si deve ammettere la conoscenza per la dimostrazione di JORDAN, non sono poche nè semplici, e manca un'esposizione sistematica di essa.

3° *ogni linea del piano che congiunge un punto di* I *con un punto di* E *incontra necessariamente* L;

4° *due punti della regione* E *si possono congiungere con una linea del piano che non incontri* L. [1]

Sul piano della linea L si considerino due rette parallele x_0, y_0 che sfiorino la linea [19], di modo che la linea stessa sia tutta contenuta nella striscia x_0y_0. La retta x_0 ha almeno un punto A′ in comune con L, e y_0 almeno un punto B′. Si prendano due segmenti A′A e B′B esterni (ad eccezione di A′ e B′) alla striscia x_0y_0, e per A e B si traccino le parallele x ed y a x_0 e y_0. I punti di L e dei segmenti AA′ e BB′ (eccettuati A e B) saranno interni alla striscia xy.

I punti A′ e B′ dividono L in due linee aperte limitate e prive di nodi l ed l'. Immaginando aggiunti a ciascuna di esse i segmenti AA′ e B′B, avremo due linee

$$\lambda \equiv AA'lB'B\,, \qquad \lambda' \equiv AA'l'B'B\,,$$

che si trovano evidentemente nelle condizioni del teorema XIV [38].

Prendiamo le rette x' e y', delle quali si fa uso nella dimostrazione di quel teorema, in modo che fra esse sia compresa tanto λ che λ'; siano R_1 ed R_2 le due regioni determinate da λ nella striscia xy, R'_1 e R'_2 quelle determinate da λ'. E precisamente, R_1 ed R'_1 siano quelle nelle quali si trova il punto P di x', R_2 ed R'_2 siano quelle nelle quali si trova il punto Q di y'.

Poichè un punto X di $\overline{l'}$ [2] non appartiene a λ, esso deve trovarsi in una delle regioni R_1, R_2; sia per esempio in R_2. Allora tutta la linea $\overline{l'}$ sarà in R_2. Ne segue che ogni punto di R_1 è anche di R'_1:

$$R_1 < R'_1\,.$$

E infatti, se T è un punto di R_1, esso può congiungersi a P con una linea che sta tutta in questa regione, e che non incontrando λ non incontra neppure i segmenti AA′ e B′B; questa linea non incontra neppure λ', perchè dovrebbe incontrare $\overline{l'}$ che è in R_2; dunque T è anche in R'_1.

Se ogni punto di R_1 è in R'_1, necessariamente ogni punto di R'_2 è in R_2; quindi si ha:

$$R'_2 < R_2\,.$$

I punti di $\overline{l}$ devono trovarsi o in R'_1 o in R'_2; ma se fossero in R'_2 sarebbero in R_2, e perciò si deve ammettere che siano in R'_1.

Poichè i punti di λ che non sono anche di λ' si trovano, rispetto a λ', in quella regione nella quale si trova P, e i punti di λ' che non sono anche di λ si trovano, rispetto a λ, in quella regione

---

(1) Questo teorema si completa col XVI*bis* [50].

(2) Indichiamo con $\overline{l}$ ed $\overline{l'}$ le linee che si ottengono da l e l' astraendo dagli estremi A′ e B′.

nella quale si trova Q, diremo che λ si trova, rispetto a λ', *dalla parte di* P, e λ' si trova, rispetto a λ, dalla parte di Q.

In un intorno circolare di un punto di $\overline{l}$ tutto contenuto in R'_1 si trovano punti R_1 e di R_2 [43]; esistono quindi effettivamente punti comuni a R'_1 e R_2. Essi costituiscono una regione $(R'_1 R_2)$ che sarà indicata con I o con I (L) e che sarà chiamata *regione interna alla linea* L.

$$I(L) \equiv (R'_1 R_2).$$

Tutti gli altri punti del piano, eccettuati quelli di L, costituiscono un'altra regione che sarà indicata con E o con E (L) e sarà chiamata *regione esterna alla linea* L. Di modo che, indicando con P l'insieme dei punti del piano, si avrà:

$$P \equiv I(L) + L + E(L).$$

La regione E è costituita: dai punti di R_1 e di R'_2; dai punti dei tratti $\overline{AA'}$ e $\overline{B'B}$; dai punti del semipiano limitato da x nel quale non si trova y, e da quelli del semipiano limitato da y nel quale non si trova x.

La regione E è indefinita, mentre la regione I non è indefinita, essendo compresa fra le rette x, y, x', y'.

Per il modo di formazione delle regioni I ed E, entro qualunque circonferenza descritta con centro in un punto di L si trovano punti di I e punti di E [43]; e questa è una proprietà caratteristica dei punti di L, giacchè se un punto è di I o di E, si può descrivere con centro in esso un cerchio la superficie del quale appartenga tutta alla medesima regione I od E. Segue da ciò che ogni linea del piano che congiunge un punto di I con un punto di E incontra necessariamente la linea L [14].

Invece due punti di E possono congiungersi con una linea che non incontri L; basta osservare che da P a Q si può andare seguendo le rette x', x, y', e che ogni punto di E può congiungersi a P o a Q con una linea che non incontri L. Così il teorema è completamente dimostrato.

45. Per la regione I abbiamo dato la espressione

$$I \equiv (R'_1 R_2),$$

ma se ne possono trovare facilmente due altre, alle quali sarà utile talvolta ricorrere.

I punti di R'_1 sono parte in R_1, parte su $\overline{l}$, parte in R_2 e quindi in $(R'_1 R_2)$; ed inversamente, un punto o di R_1, o di $\overline{l}$, o di $(R'_1 R_2)$ è certamente in R'_1. Si ha dunque:

$$R'_1 \equiv R_1 + \overline{l} + (R'_1 R_2), \quad \text{dalla quale:} \quad I \equiv (R'_1 R_2) \equiv R'_1 - R_1 - \overline{l}.$$

Analogamente si ottiene:

$$I \equiv (R_2 R'_1) \equiv R_2 - R'_2 - \overline{l}.$$

46. Abbiamo ottenuto le regioni I ed E con un certo procedimento, ma esse sono indipendenti dal procedimento adottato. Infatti, supponiamo che esista, rispetto alla medesima linea L, un'altra divisione del piano in due regioni I′ ed E′, che presenti i caratteri enunciati nel teorema XVI. Descriviamo una circonferenza alla quale L sia interna, e prendiamo un punto M esterno ad essa, e quindi necessariamente di E ed E′; ogni altro punto di E si può congiungere ad M con una linea che non incontra L, e quindi è anche in E′; inversamente, ogni punto di E′ è anche di E. Si ha dunque $E \equiv E'$, e quindi anche $I \equiv I'$.

47. Al n. 35 definimmo, convenzionalmente, la *regione interna a un trapezio o triangolo*, e più volte si è parlato di *regione interna rispetto a una circonferenza*. Ora è manifesto [46] che tali regioni coincidono con quelle che, per le rispettive linee chiuse, si possono costruire secondo il n. 44.

P. Benedetti.

(Continua)

PICCOLE NOTE

Su alcuni quadrati e cubi notevoli.

1. Il sig. E. N. Barisien, in un breve articolo intitolato “Un problema di aritmetica„ e pubblicato nel fascicolo Dicembre 1909 del *Supplemento*, si è occupato dei numeri (naturali) i cui *quadrati* si ottengono preponendo loro alcune cifre, come ad es. il numero 9376 il cui quadrato è 87909376.

Proponiamoci di completare lo studio di tali numeri interessanti, che chiameremo *numeri* Q.

2. È facile vedere che nessun numero Q può terminare colla cifra **1**.

Infatti, se N fosse un tale numero, si avrebbe $N = 10^h A + 1$, con $h \geqslant 1$ ed A non divisibile per 10; inoltre si avrebbe

$$N^2 = (10^h A + 1)^2 = 10^{2h} A^2 + 2 \cdot 10^h A + 1 = 10^{h+k} B + 10^h A + 1, \quad \text{con} \quad k \geqslant 1.$$

Si dedurrebbe di qui

$$10^h A^2 + A = 10^k B ,$$

il che è assurdo, non essendo A divisibile per 10.

Com'è ben noto, vi sono due e due soli numeri Q di una sola cifra: il 5 ($5^2 = 25$) e il 6 ($6^2 = 36$).

Siccome il quadrato di qualsiasi numero termina colla stessa cifra con cui termina il quadrato della sua ultima cifra, così da quanto precede è manifesto che i numeri Q terminano tutti o colla cifra 5 o colla cifra 6.

3. Qualunque sia il numero $n\,(>1)$ non vi possono essere due numeri Q di n cifre terminanti con 5.

Infatti, se vi fossero due tali numeri N_1 ed $N_2 < N_1$, si avrebbe

$$N_1^2 = 10^n A + N_1 , \qquad N_2^2 = 10^n B + N_2 , \qquad \text{con} \qquad A > B .$$

Sottraendo si avrebbe di qui

$$N_1^2 - N_2^2 = (N_1 + N_2)(N_1 - N_2) = 10^n (A - B) + (N_1 - N_2);$$

donde

$$(N_1 + N_2 - 1)(N_1 - N_2) = 10^n (A - B).$$

Ma tale relazione è impossibile, giacchè, terminando N_1 ed N_2 con 5, $N_1 + N_2 - 1$ dovrebbe terminare con 9 e sarebbe primo con 10, per cui $N_1 - N_2$ dovrebbe essere divisibile per 10^n, il che è assurdo.

Analogamente si prova che non vi possono essere due numeri Q d'egual numero di cifre e terminanti con 6.

4. Dati due numeri Q terminanti con 5, uno N_1 di h cifre ed uno N_2 di $h+k$ cifre, il numero N_1 è formato dalle ultime h cifre del numero N_2.

Infatti per ipotesi si ha

$$N_1^2 = 10^h A + N_1, \qquad N_2^2 = 10^{h+k} B + N_2;$$

donde, sottraendo, si ha

$$N_2^2 - N_1^2 = (N_2 + N_1)(N_2 - N_1) = 10^h (10^k B - A) + (N_2 - N_1)$$

e quindi

$$(N_2 + N_1 - 1)(N_2 - N_1) = 10^h (10^k B - A).$$

Terminando tanto N_1 quanto N_2 con 5, $N_2 + N_1 - 1$ è primo con 10; $N_2 - N_1$ dovrà dunque essere divisibile per 10^h; c. d. d.

Un teorema del tutto analogo vale e si può analogamente dimostrare pei numeri Q terminanti con 6.

5. Se N_1 è un numero Q di n cifre terminante con 5, è un numero Q anche il numero $N_2 = 10^n + 1 - N_1$ (che termina invece con 6).

Infatti per ipotesi si ha $N_1^2 = 10^n A + N_1$. Sia $N_2^2 = 10^n B + M$. Per le posizioni fatte si ha

$$N_1^2 - N_2^2 = (N_1 + N_2)(N_1 - N_2) = (10^n + 1)(N_1 - N_2) = 10^n (A - B) + (N_1 - M),$$

donde

$$10^n (N_1 - N_2) - N_2 = 10^n (A - B) - M.$$

Essendo tanto N_2 quanto M minori di 10^n, scende necessariamente di qui

$$N_2 = M; \qquad \text{c. d. d.}$$

6. Indichiamo con R_n il numero Q di n cifre terminante con 5; sia c_n la sua prima cifra, P_n il numero che deve preporsi ad R_n per averne il quadrato.

Ad es., essendo

$$625^2 = 390625, \quad \text{si ha} \quad R_3 = 625, \quad c_3 = 6, \quad P_3 = 390.$$

Dati per un certo numero h i valori R_h, c_h, P_h, proponiamoci di trovare i valori R_{h+1}, c_{h+1}, P_{h+1}.

Dal n. 4 abbiamo

$$R_{h+1} = 10^h c_{h+1} + R_h.$$

Essendo

$$R^2_{h+1} = 10^{h+1} P_{h+1} + R_{h+1} = 10^{h+1} P_{h+1} + 10^h c_{h+1} + R_h$$

ed $R_h^2 = 10^h P_h + R_h$, avremo, per sottrazione,

$$R^2_{h+1} - R_h^2 = (R_{h+1} + R_h)(R_{h+1} - R_h) = 10^{h+1} P_{h+1} + 10^h c_{h+1} - 10^h P_h;$$

donde

$$(R_{h+1} + R_h) 10^h c_{h+1} = 10^{h+1} P_{h+1} + 10^h c_{h+1} - 10^h P_h$$

e quindi

$$(R_{h+1} + R_h) c_{h+1} = 10 P_{h+1} + c_{h+1} - P_h.$$

Essendo R_h ed R_{h+1} multipli di 5, il primo membro di tale eguaglianza è divisibile per 10; dovrà quindi esserlo anche il secondo e c_{h+1} dovrà coincidere coll'ultima cifra di P_h.

Trovato così c_{h+1}, per avere il numero R_{h+1} basta preporre la cifra c_{h+1} al numero R_h.

In quanto a P_{h+1}, da ciò che precede si ha:

$$10\,P_{h+1} = (R_{h+1} + R_h)\,c_{h+1} + P_h - c_{h+1}$$

e quindi

$$P_{h+1} = \frac{R_{h+1} + R_h}{10}\,c_{h+1} + \frac{P_h - c_{h+1}}{10};$$

dove giova osservare che $\frac{P_h - c_{h+1}}{10}$ coincide con ciò che resta del numero P_h levandogli l'ultima cifra, coincide cioè colle decine di P_h.

7. Siamo ora in grado di determinare tutti i numeri Q inferiori ad un numero qualsiasi, ad es. al numero 10^{14}.

Cominciamo da quelli che terminano con 5, cioè dai numeri $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{13}, R_{14}$.

Anzitutto, essendo $5^2 = 25$ e $25^2 = 625$, abbiamo senz'altro

$$R_1 = c_1 = 5, \qquad P_1 = 2, \qquad c_2 = 2, \qquad R_2 = 25, \qquad P_2 = 6.$$

Applicando i risultati del n. 6, si ha di qui successivamente:

$$c_3 = 6, \qquad R_3 = 625, \qquad P_3 = \frac{625 + 25}{10} \,.\, 6 + 0 = 65 \,.\, 6 = 390;$$

$$c_4 = 0, \quad R_4 = 0625, \quad P_4 = 39;$$

$$c_5 = 9, \quad R_5 = 90625, \quad P_5 = \frac{90625 + 0625}{10} \,.\, 9 + 3 = 9125 \,.\, 9 + 3 = 82125 + 3 = 82128;$$

$$c_6 = 8, \qquad R_6 = 890635, \qquad P_6 = \left|\begin{array}{r} 890625 \\ +\ \ 90625 \\ \hline 98125 \times 8 = 785000 \\ +\ \ \ \ 8212 \\ \hline 793212 \end{array}\right| = 793212;$$

$$c_7 = 2, \qquad R_7 = 2890625, \ldots\ldots$$

e così via, finchè si arriva ai numeri $R_{10} = 8\,212\,890\,625$ e $P_{10} = 6\,745\,157\,241$ trovati dal Barisien:

$$c_{11} = 1, \qquad R_{11} = 18\,212\,890\,625,$$

$$P_{11} = \left|\begin{array}{r} 18212890625 \\ +\ \ 8212890625 \\ \hline 2642578125 \times 1 = 2642578125 \\ +\ \ 674515724 \\ \hline 3317093849 \end{array}\right| = 3\,317\,093\,849;$$

$$c_{12} = 9, \qquad R_{12} = 918\,212\,890\,625,$$

$$P_{12} = \left|\begin{array}{r} 918212890625 \\ +\ \ 18212890625 \\ \hline 93642578125 \times 9 = 842783203125 \\ +\ \ 331709384 \\ \hline 843114912509 \end{array}\right| = 843\,114\,912\,509;$$

$$c_{13} = 9, \qquad R_{13} = 9\,918\,212\,890\,625,$$

$$P_{13} = \left|\begin{array}{r} 9918212890625 \\ +\ \ 918212890625 \\ \hline 1083642578125 \times 9 = 9752783203125 \\ +\ \ 84311491250 \\ \hline 9837094694375 \end{array}\right| = 9\,837\,094\,694\,375;$$

$$c_{14} = 5, \qquad R_{14} = 59\,918\,212\,890\,625.$$

Dal n. 5 si ha che è un numero Q anche il numero

$$100\,000\,000\,000\,001 - 59\,918\,212\,890\,625 = 40\,081\,787\,109\,376 .$$

È questo il più grande dei numeri Q minori di 10^{15} e terminanti con 6. Gli altri (n. 4) si ottengono da esso sopprimendovi quante si vogliano cifre da sinistra verso destra.

* * *

8. Assieme ai numeri precedentemente studiati è interessante considerare quelli i cui *cubi* si ottengono preponendo loro alcune cifre, come, ad es., il numero 624 il cui cubo è 243220624.

Tali numeri noi li chiameremo *numeri C*.

Siccome il cubo di *ogni* numero termina colla stessa cifra con cui termina il cubo della sua ultima cifra, così si vede ovviamente che l'ultima cifra dei numeri C è necessariamente o 1, o 4, o 5, o 6, o 9.

9. Qualunque sia il numero n (>1) v'è un solo numero C di n cifre terminante con 4.

Infatti, se vi fossero due tali numeri N_1 ed $N_2 < N_1$, si avrebbe

$$N_1{}^3 = 10^n A + N_1 \quad \text{ed} \quad N_2{}^3 = 10^n B + N_2 , \quad \text{con} \quad A > B .$$

Sottraendo, si avrebbe di qui

$$N_1{}^3 - N_2{}^3 = (N_1 - N_2)(N_1{}^2 + N_1 . N_2 + N_2{}^2) = 10^n (A - B) + (N_1 - N_2);$$
$$(N_1 - N_2)(N_1{}^2 + N_1 . N_2 + N_2{}^2 - 1) = 10^n (A - B) .$$

Ma tale relazione è impossibile, giacchè, terminando N_1 ed N_2 con 4, $N_1{}^2 + N_1 . N_2 + N_2{}^2 - 1$ dovrebbe terminare con 7 e sarebbe primo con 10, per cui $N_1 - N_2$ dovrebbe essere divisibile per 10^n il che è assurdo.

Analogamente si prova che v'è un solo numero C di n cifre terminante con 6.

10. Dati due numeri di n cifre terminanti con 1 [oppure con 5, oppure con 9] e la cui differenza sia $5 . 10^{n-1}$, se uno d'essi è un numero C, lo è anche l'altro.

Sia infatti

$$N_1 = 10H + u \quad (u = 1, 5, 9) \quad \text{ed} \quad N_2 = N_1 + 5 . 10^{n-1};$$

sia inoltre

$$N_1{}^3 = 10^n A + R, \qquad N_2{}^3 = 10^n B + S ,$$

con R ed S minori di 10^n. Si avrà

$$N_2{}^3 - N_1{}^3 = 5 . 10^{n-1} . (N_2{}^2 + N_2 . N_1 + N_1{}^2) = 10^n (B - A) + (S - R);$$

donde si vede che $S - R$ deve essere divisibile per $5 . 10^{n-1}$.

Essendo $N_2{}^2 + N_2 . N_1 + N_1{}^2$ dispari, non può essere $S - R = 0$; d'altra parte, essendo S ed R minori di 10^n, deve essere $S - R < 10^n$; scende di qui che $S - R = 5 . 10^{n-1}$, ossia che $S = R + 5 . 10^{n-1}$.

Se N_1 è un numero C, si ha

$$R = N_1, \qquad S = N_1 + 5 . 10^{n-1} = N_2$$

e quindi è un numero C anche N_2; viceversa, se N_2 è un numero C, si ha

$$S = N_2 , \qquad R = S - 5 . 10^{n-1} = N_2 - 5 . 10^{n-1} = N_1$$

ed è quindi un numero C anche N_1; c. d. d.

Dal n. 9 risulta senz'altro che il teorema ora dimostrato non può estendersi ai numeri C terminanti con 4 o con 6.

11. Se N è un numero C, è un numero C anche qualunque numero M che si ottenga da N sopprimendo in esse quantesivogliano cifre da sinistra verso destra.

Infatti, se M ha h cifre ed N ne ha $h+k$, si avrà

$$N = 10^h A + M \quad \text{ed} \quad N^3 = 10^{h+k} B + N = 10^{h+k} B + 10^h A + M .$$

Posto $M^3 = 10^h C + R$, con $R < 10^h$, avremo allora

$$N^3 - M^3 = 10^h A (N^2 + NM + M^2) = 10^{h+k} B + 10^h A - 10^h C + M - R .$$

La differenza $M - R$ deve dunque essere divisibile per 10^h; ed, essendo tanto M quanto R minori di 10^h, se ne conclude che deve essere $M = R$; c. d. d.

12. Ogni numero Q è anche un numero C.

Infatti, se $N^2 = 10^n A + N$, moltiplicando per N si ha

$$N^3 = 10^n AN + N^2 = 10^n AN + 10^n A + N = 10^n A (N+1) + N .$$

Inoltre è un numero C anche ogni numero Q diminuito di 1.

$$\begin{aligned}(N-1)^3 &= N^3 - 3N^2 + 3N - 1 = 10^n A (N+1) + N - 3 . 10^n A - 3N + 3N - 1 = \\ &= 10^n A (N+1) - 3 . 10^n A + N - 1 = 10^n A (N-2) + (N-1) .\end{aligned}$$

13. Indicando ancora con N un numero Q di n cifre, se il numero $2N-1$ ha pure n cifre, esso è un numero C.

Infatti, ricordando quanto sopra, si ha

$$\begin{aligned}(2N-1)^3 &= 8N^3 - 12N^2 + 6N - 1 = 8 . 10^n A (N+1) + 8N - 12 . 10^n A - 12 . N + 6N - 1 = \\ &= 8 . 10^n A (N+1) - 12 . 10^n A + 2N - 1 = 10^n . 4A (2N-1) + (2N-1) .\end{aligned}$$

Per poter concludere da tale relazione che $2N-1$ è un numero C, le cifre del numero $2N-1$ devono essere soltanto n.

Se le sue cifre sono invece $n+1$ (di più non possono essere), la prima è manifestamente un 1; ed è facile provare che è un numero C il numero di n cifre $2N-1-10^n$ che si ottiene da $2N-1$ sopprimendo quest'1 iniziale.

Infatti si ha ovviamente:

$$\begin{aligned}(2N-1-10^n)^3 &= \text{mult. di } 10^n + (2N-1)^3 = \text{mult. di } 10^n + (2N-1) = \\ &= \text{mult. di } 10^n + (2N-1-10^n) ; \qquad \text{c. d. d.}\end{aligned}$$

14. Dal n. 7 e dal n. 12 risulta tosto: che i numeri

59 918 212 890 625 e 40 081 787 109 376

sono dei numeri C; e che lo sono anche i numeri

59 918 212 890 624 e 40 081 787 109 375.

Dal n. 13 si vede poi che lo sono anche i numeri

19 836 425 781 249 e 80 163 574 218 751.

Dal n. 11 si ha che sono numeri C anche i numeri che si ottengono da uno qualunque di questi sei numeri sopprimendo in essi quantesivogliano cifre da sinistra verso destra.

Dal n. 10 si ha infine che sono numeri C anche i numeri che si ottengono da un qualsiasi numero C terminante con 1, con 5 o con 9 sostituendo la sua prima cifra a sinistra con quella che ne differisce di 5. Così, ad es., sono numeri C i numeri:

40 625, 59 375, 6 249, 718 751, ...

PAOLO CATTANEO.

IV CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

NAPOLI — 15-21 Decembre 1910

La mattina del 15 ad ore 9,30 nell'Aula Magna dell'Università ebbe luogo la solenne inaugurazione del Congresso. Parlarono il rettore prof. Del Pezzo, che dette il benvenuto ai congressisti, quindi il prof. Pascal, il sindaco marchese Del Carretto, il prof. Leonardo Bianchi che portò il saluto del Ministro della Pubblica Istruzione, ed infine il presidente dell'Associazione prof. sen. Ciamician dette lettura del discorso inaugurale: „ La cooperazione delle Scienze „.

La Sezione I (*Matematica, Astronomia, Geodesia*) e la Sezione II (*Ingegneria, Meccanica applicata, Elettrotecnica*), riunite, tennero seduta i giorni 16, 17 e 20 sotto la presidenza del prof. Marcolongo, il 19 sotto quella del prof. Masoni, ed in esse furono svolte le seguenti comunicazioni.

Nella seduta del 16: Tumarello — „ Tipi generali di sistemi omaloidici di superficie privi di linee fondamentali „.

Silberstein — „ Sopra un mezzo di correggere nel calcolo della media aritmetica i valori sospetti dell'incognita „.

Nella seduta del 17: Vallauri — „ L'isteresi del ferro nei cicli asimmetrici di magnetizzazione alternativa „.

Bompiani — „ Contributo alla geometria proiettiva differenziale degl'iperspazi „.

Cozzolino — „ Delle fonti dell'arte architettonica e della sua estetica „ ed „ Esposizione grafica di uno stile architettonico napoletano e saggi in altri stili „.

Nella seduta del 19: De Mora — „ Su di alcune osservazioni sul metodo del Müller-Breslau pel calcolo delle travature reticolari nello spazio „.

Vacca — „ Sulla storia delle matematiche nell'Estremo Oriente e sui contributi ad essa apportati da T. Hajashi e V. Mikami „.

Lombardi — „ Comportamento del ferro in campi magnetici continui ed alternativi „.

Nella seduta del 20: Luiggi — „ La pozzolana ed il cemento armato nelle opere marittime „.

Ruffolo — „ Sulla distesa delle condutture elettriche nei paesi sismici „.

Andreoli — „ Su un nuovo simbolo dell'algebra della logica „.

Amodeo — „ Le riforme universitarie in rapporto del progresso delle scienze „.

Verde — „ Sopra un giroscopio a cannocchiale per la misura delle altezze degli astri „.

Il giorno 20 ad ore 14 ebbe luogo l'assemblea generale della Società nella quale fu proclamata Roma sede del congresso del 1911 e fu comunicato il risultato delle votazioni alle cariche sociali effettuatesi nella mattinata, con 107 votanti, che è il seguente:

Presidenti di sezione: Classe A - Lombardi, Piutti, Somigliana. — *Classe B* - Grassi, Valenti. — *Classe C* - Bodio, Caetano.

Comitato scientifico: Cocchia, Gaglio, Peratoner, Pirelli.

Amministratore - Stringher. — *Economo-Cassiere* - Folgheraiter, Oddone.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 13 Febbraio 1911

DUE METODI GENERALI PER LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI

dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica.

(Continuazione — Vedi fascicoli I, II e III)

---

42. Se gli x elementi delle combinazioni con ripetizione di y elementi ad x ad x, si possono moltiplicare e si moltiplicano fra di loro, allora i singoli numeri delle ripetizioni sono gli esponenti degli elementi diversi ed ogni gruppo delle combinazioni con ripetizione simili è una funzione simmetrica.

Così, ad esempio, se si ha il polinomio

$$a_1 + \ldots + a_y = \Sigma(a_1)$$

di y termini che si considerano indipendenti l'uno dall'altro, la potenza d'esponente x sarà

$$(\Sigma(a_1))^x = \Sigma \frac{x!}{h_1! \ldots h_z!} \cdot \Sigma(a_1^{h_1} \ldots a_z^{h_z}). \tag{67}$$

Quest'espressione si deduce dalla legge generale di moltiplicazione dei polinomi, ma si può anche stabilire direttamente.

Disponendo gli x polinomi ugnali per linea e per colonna, ogni termine della potenza sarà un prodotto di x fattori, scelti sempre uno per linea, dappoichè non è possibile che in un qualsivoglia termine della potenza si trovino, come fattori, due termini della stessa linea, cioè dello stesso polinomio.

Il numero dei termini della potenza è dato dal numero delle disposizioni con ripetizione di y elementi (che sono i termini del polinomio di base) ad x ad x (che è il numero dei polinomi ugnali che si moltiplicano, cioè l'esponente della potenza); esso è quindi y^x.

Questi y^x termini si possono aggruppare in vari modi; si scelga quello delle funzioni simmetriche, si riuniscano cioè in un sol gruppo tutti quei termini della potenza che sono simmetrici, che hanno, cioè, lo stesso numero di fattori distinti e la stessa successione di esponenti, e che, per conseguenza, si trovano ripetuti lo stesso numero di volte.

Sarà allora chiaro che uno qualsivoglia di questi gruppi formerà la funzione simmetrica

$$\Sigma(a_1^{h_1} \ldots a_z^{h_z})$$

che conterrà

$$\frac{D_{y,z}}{k_1! \ldots k_l!}$$

termini, ciascuno dei quali sarà ripetuto un numero di volte espresso da

$$\frac{x!}{h_1! \ldots h_z!}$$

che si assumerà come *coefficiente* della funzione.

D'altronde, il numero dei gruppi e quindi dei coefficienti è dato dalle partizioni di x, e sarà $p_{x,z}$ per ogni valore di z (da 1 ad y o da 1 ad x, secondo che $y < x$ o $y \geqslant x$) e $p_{x-y,y}$ o P_x per tutt'i valori di z.

È poi evidente che se

$$a_1 = \ldots = a_y = 1,$$

la (67) sarà identica alla (56).

43. Le proprietà dei numeri figurati sono innumerevoli, e nulla v'ha di più facile che ottenerne delle nuove: esse possono sempre considerarsi come una conseguenza, sia immediatamente sia mediatamente, della loro legge, o che si assuma la (27) per

$$z, i \geqslant 0,$$

o la (37) per

$$n \gtreqless 0, \quad i \geqslant 0,$$

o la (41) o la (42) per

$$x \gtreqless 0, \quad y \gtreqless 0,$$

e ciò succede in generale per tutte le n-classi aritmetiche; le stesse proprietà possono ritenersi sia inerenti alla funzione intera, (35),

$$f(n, i) = \frac{1}{i!}[n^i - \ldots + (-1)^{i-1}(i-1)!\, n],$$

sia al simbolo

$$\binom{x+y}{x} = \frac{1+y}{1} \cdots \frac{x+y}{x} = \frac{1+x}{1} \cdots \frac{y+x}{y}.$$

Per alcune proprietà si ha un metodo diretto di dimostrazione, sostituendo i fattoriali secondo la (30); così, ad esempio, si trasformano in identità le seguenti:

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$$

$$\binom{x+y}{x} = \binom{x+y-1}{x-1} + \binom{x+y-1}{y-1}, \quad \text{relazione (B)},$$

$$\binom{z}{x+y}\binom{x+y}{y} = \binom{z}{x}\binom{z-x}{y}, \quad \text{relazione (C)},$$

$$\binom{z}{y}\binom{z-y}{x-1} = \binom{z-x+1}{y}\binom{z}{x-1},$$

$$\binom{x}{y+z}\binom{y+z}{z}\binom{y}{z} = \binom{x}{y-z}\binom{x-y+z}{2z}\binom{2z}{z},$$

. . . .

Se in tutte le formule sinora ottenute per le progressioni aritmetiche, si pone, per $x \geqslant 0$,

$$u_0 = \binom{0}{x}$$

od anche

$$u_0 = \binom{x+y}{x},$$

si ottengono proprietà dei numeri figurati.

E se ne ottengono dalle leggi delle combinazioni, dal calcolo delle differenze finite, dalla partizione dei numeri, dalle serie ricorrenti, dalle funzioni simmetriche, dalla teoria delle forme, e così via.

44. Per rendere più spedite alcune dimostrazioni ulteriori, occorre stabilire alcune proprietà dei numeri figurati, che, forse, non sono note.

Si ha:

$$\binom{x}{x}\binom{z+y}{z} + \ldots + \binom{x+y}{x}\binom{z}{z} = \binom{x+y+z+1}{y}, \qquad (68)$$

che vale per

$$x,\ y,\ z \geqslant 0.$$

Infatti, essa è vera per $x = 0$, perchè se ne ricava

$$\binom{z+y}{z} + \ldots + \binom{z}{z} = \binom{y+z+1}{z+1} = \binom{y+z+1}{y};$$

se $x = 1$, si formi lo schema

$$\begin{array}{r}
\binom{z+y}{z} + \binom{z+y-1}{z} + \ldots + \binom{z+1}{z} + \binom{z}{z} \\
\binom{z+y-1}{z} + \ldots + \binom{z+1}{z} + \binom{z}{z} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\binom{z+1}{z} + \binom{z}{z} \\
\binom{z}{z},
\end{array}$$

ed essendo evidente che si deve avere ugual risultato, sia sommando per verticali sia sommando per orizzontali, si possono uguagliare queste due somme e si avrà

$$\begin{aligned}
1 . \binom{z+y}{z} + 2 . \binom{z+y-1}{z} + \ldots + y . \binom{z+1}{z} + (y+1)\binom{z}{z} = \\
= \binom{z+1}{z+1} + \binom{z+2}{z+1} + \ldots + \binom{z+y}{z+1} + \binom{z+y+1}{z+1} = \\
= \binom{z+y+2}{z+2} = \binom{z+y+2}{y},
\end{aligned}$$

che è lo stesso risultato che si ricava dalla (68) per $x=1$; si consenta quindi che essa sia vera per $x-1$ e, perciò, si abbia

$$\binom{x-1}{x-1}\binom{z+y}{z}+\ldots+\binom{x-1+y}{x-1}\binom{z}{z}=\binom{x+y+z}{y};$$

attribuendo ad y i valori decrescenti

$$y, \ldots, y-i, \ldots, 0,$$

si formi lo schema

$$\begin{array}{r}\binom{x-1}{x-1}\binom{z+y}{z}+\ldots+\binom{x-1+i}{x-1}\binom{z+y-i}{z}+\ldots+\binom{x-1+y}{x-1}\binom{z}{z}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \binom{x-1}{x-1}\binom{z+y-i}{z}+\ldots+\binom{x-1+y-i}{x-1}\binom{z}{z}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \binom{x-1}{x-1}\binom{z}{z},\end{array}$$

e, sommando per verticali e per orizzontali, si uguaglino le due somme ed allora si avrà

$$\binom{x}{x}\binom{z+y}{z}+\ldots+\binom{x+i}{x}\binom{z+y-i}{z}+\ldots+\binom{x+y}{x}\binom{z}{z}=$$
$$=\binom{x+z}{x+z}+\ldots+\binom{x+y+z-i}{x+z}+\ldots+\binom{x+y+z}{x+z}=$$
$$=\binom{x+y+z+1}{x+z+1}=\binom{x+y+z+1}{y},$$

che è precisamente la formula (68).

Si ha:

$$\sum_0^x{}_i(-1)^i\binom{i+x-r-t}{x-r}\binom{zx-i-x+r+t}{r}\binom{x}{t}=(-1)^r\binom{x}{r}. \quad (69)$$

Infatti, per la (10),

$$\binom{zx-i-x+r+t}{r}=\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\binom{i+x-r-t+h}{h}$$

e quindi

$$(-1)^r\binom{x}{r}=\sum_0^x{}_i(-1)^i\binom{i+x-r-t}{x-r}\binom{x}{t}\cdot\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\binom{i+x-r-t+h}{h}=$$
$$=\left[\binom{zx+1}{r}\binom{i+x-r}{x-r}\binom{i+x-r}{0}\binom{x}{0}-\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^x\binom{zx+1}{r}\binom{i-r}{x-r}\binom{i-r}{0}\binom{x}{x}\right]-$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\pm$$

$$+(-1)^r\left[\binom{zx+1}{0}\binom{i+x-r}{x-r}\binom{i+x}{r}\binom{x}{0}-\dots\right.$$

$$\left.\dots+(-1)^x\binom{zx+1}{0}\binom{i-r}{x-r}\binom{i}{r}\binom{x}{x}\right]=$$

$$=\binom{zx+1}{r}\cdot\sum_0^x{}_t(-1)^t\binom{i+x-r-t}{x-r}\binom{i+x-r-t}{0}\binom{x}{t}-$$

$$-\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\pm$$

$$+(-1)^r\binom{zx+1}{0}\cdot\sum_0^x{}_t(-1)^t\binom{i+x-r-t}{x-r}\binom{i+x-t}{r}\binom{x}{t}=$$

$$=\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\cdot\sum_0^x{}_t(-1)^t\binom{i+x-r-t}{x-r}\binom{i+x-r-t+h}{h}\binom{x}{t},$$

e per la relazione (C)

$$(-1)^r\binom{x}{r}=\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\cdot\sum_0^x{}_t(-1)^t\binom{x-r+h}{x-r}\binom{i+x-r-t+h}{x-r+h}\binom{x}{t}$$

$$=\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\binom{x-r+h}{x-r}\cdot\sum_0^x{}_t(-1)^t\binom{i+x-r-t+h}{x-r+h}\binom{x}{t},$$

e per la (6), r potendo variare solamente da 0 ad x,

$$(-1)^r\binom{x}{r}=\sum_0^r{}_h(-1)^h\binom{zx+1}{r-h}\binom{x-r+h}{x-r}\binom{i-r+h}{i},$$

ed è chiaro che il terzo fattore del sommatorio si annulla sempre, salvo per $r=h$, e perciò si riduce al solo ultimo termine, e si ha l'identità

$$(-1)^r\binom{x}{r}=(-1)^r\binom{zx+1}{0}\binom{x}{x-r}\binom{i}{i}.$$

Si ha

$$\binom{i+r}{x}\binom{x+1}{0}-\dots+(-1)^r\binom{i}{x}\binom{x+1}{r}=\binom{i}{x-r}\binom{x-r}{0}-\dots+(-1)^r\binom{i}{x}\binom{x}{r}=$$

$$=(-1)^r\binom{i}{x-r}\binom{i-1-x+r}{r}=\binom{i}{x-r}\binom{x-i}{r}. \qquad (70)$$

Infatti, essendo

$$(-1)^r\binom{-1}{r}=\binom{r}{r},$$

sarà pure

$$(-1)^r\binom{i-1-x+r}{r}=\binom{x-i}{r},$$

perchè termini *equidistanti*; inoltre, per la relazione (C),

$$\binom{i}{x-r}\binom{x-r}{0}-\dots+(-1)^r\binom{i}{x}\binom{x}{r}=$$

$$=\binom{i}{x-r}\cdot\left[\binom{i-x+r}{0}-\dots+(-1)^r\binom{i-x+r}{r}\right]$$

$$=(-1)^r\binom{i}{x-r}\binom{i-1-x+r}{r},$$

per la (8) e la (36); inoltre, per la (5) e la (36),

$$\binom{i+h}{x} = \binom{h}{0} \cdot \Delta^0 \binom{i}{x} + \ldots + \binom{h}{h} \Delta^h \binom{i}{x}$$
$$= \binom{h}{0}\binom{i}{x} + \ldots + \binom{h}{h}\binom{i}{x-h},$$

e quindi

$$\binom{i+r}{x}\binom{x+1}{0} - \ldots + (-1)^r \binom{i}{x}\binom{x+1}{r} =$$
$$= \sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{i+h}{x}\binom{x+1}{r-h} =$$
$$= \sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{x+1}{r-h} \cdot \left[\binom{h}{0}\binom{i}{x} + \ldots + \binom{h}{h}\binom{i}{x-h}\right]$$
$$= (-1)^r \binom{x+1}{r}\binom{0}{0}\binom{i}{x} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot +$$
$$+ (-1)^{r-h}\binom{x+1}{r-h}\binom{h}{0}\binom{i}{x} + \ldots + (-1)^{r-h}\binom{x+1}{r-h}\binom{h}{h}\binom{i}{x-h} +$$
$$+ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot +$$
$$+ (-1)^0 \binom{x+1}{0}\binom{r}{0}\binom{i}{x} + \ldots + (-1)^0 \binom{x+1}{0}\binom{r}{h}\binom{i}{x-h} + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^0 \binom{x+1}{0}\binom{r}{r}\binom{i}{x-r},$$

e sommando verticalmente

$$\sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{i+h}{x}\binom{x+1}{r-h} =$$
$$= \sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{i}{x-h} \cdot \left[\binom{h}{h}\binom{x+1}{r-h} - \ldots + (-1)^{r-h}\binom{r}{h}\binom{x+1}{0}\right]$$
$$= \sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{i}{x-h} \cdot \left[\binom{h}{0}\Delta^0\binom{x+1}{r-h} - \ldots + (-1)^{r-h}\binom{h+r-h}{r-h}\Delta^{r-h}\binom{x+1}{r-h}\right]$$
$$= \sum_0^r {}_h (-1)^{r-h} \binom{i}{x-h}\binom{x-h}{r-h},$$

per la (10).

. . . .

45. Si rappresentino con $N_{x,y}$ i numeri figurati della legge (42) e con $\binom{z+x}{z}$ i numeri figurati d'ordine z, $(z \geqslant 0)$; si ponga

$$N^{(z)}_{x,y} = N_{x,y} + \binom{z+x}{z}$$

e si costruisca la 2-classe aritmetica $N^{(z)}_{x,y}$.

Essa avrà la seguente legge:

$$x \gtrless 0; \qquad y \gtrless 0; \qquad \text{lm.,}$$

$$\left.\begin{array}{l} N^{(z)}_{0,y} = 1 + 1; \\ N^{(z)}_{x,0} = \binom{x+z}{x} + 1; \end{array}\right\} \quad \text{dt.,} \qquad (71)$$

$$N^{(z)}_{x,y} = N^{(z)}_{x,y-1} + N^{(z)}_{x-1,y} - \binom{x+z-1}{x-1}; \quad \text{df.}$$

Infatti,

$$N_{x,y} = N_{x,y-1} + N_{x-1,y}$$
$$N_{x,y} + N_{x,z} = N_{x,y-1} + N_{x,z} + N_{x-1,y}$$
$$N^{(z)}_{x,y} = N^{(z)}_{x,y-1} + N_{x-1,y},$$

ma

$$N_{x-1,y} = N^{(z)}_{x-1,y} - N_{x-1,z}$$
$$= N^{(z)}_{x-1,y} - \binom{x+z-1}{x-1},$$

perciò, sostituendo, si ha la definizione della (71); la determinazione è evidente.

Generalizzando:

$$x \gtrless 0; \qquad y \gtrless 0; \qquad \text{lm.,}$$

$$\left.\begin{array}{l} N^{(z_1+\ldots+z_n)}_{0,y} = n + 1; \\ N^{(z_1+\ldots+z_n)}_{x,0} = \binom{x+z_1}{x} + \ldots + \binom{x+z_n}{x} + 1; \end{array}\right\} \quad \text{dt.,} \qquad (72)$$

$$N^{(z_1+\ldots+z_n)}_{x,y} = N^{(z_1+\ldots+z_n)}_{x,y-1} + N^{(z_1+\ldots+z_n)}_{x-1,y} -$$
$$- \left[\binom{x+z_1-1}{x-1} + \ldots + \binom{x+z_n-1}{x-1}\right]; \quad \text{df.}$$

46. Se invece si pone

$$N^{(z)}_{x,y} = N_{x,y} \times \binom{z+x}{z},$$

s ha la legge:

$$x \gtrless 0; \qquad y \gtrless 0; \qquad \text{lm.,}$$

$$\left.\begin{array}{l} N^{(z)}_{0,y} = 1; \\ N^{(z)}_{x,0} = \binom{x+z}{x}; \end{array}\right\} \quad \text{dt.,} \qquad (73)$$

$$N^{(z)}_{x,y} = N^{(z)}_{x,y-1} + \frac{x+z}{x} N^{(z)}_{x-1,y}; \quad \text{df.}$$

Infatti,

$$N_{x,y} = N_{x,y-1} + N_{x-1,y}$$
$$N_{x,y} \times N_{x,z} = N_{x,y-1} \times N_{x,z} + N_{x-1,y} \times N_{x,z}$$
$$N^{(z)}_{x,y} = N^{(z)}_{x,y-1} + N_{x-1,y} \times N_{x,z},$$

ma

$$\mathrm{N}_{x-1,y}\times\mathrm{N}_{x,z}=\binom{x+y-1}{x-1}\binom{x+z}{x}=$$
$$=\binom{x+y-1}{x-1}\binom{x+z-1}{x-1}\frac{x+z}{x}=\frac{x+z}{x}\,\mathrm{N}^{(z)}_{x-1,y};$$

perciò, sostituendo, si ha la definizione della (73); la determinazione è evidente.

Generalizzando:

$$x\gtrless 0;\qquad y\gtrless 0;\qquad \text{lm.,}$$
$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{N}^{(z_1\ldots z_n)}_{0,y}=1;\\&\mathrm{N}^{(z_1\ldots z_n)}_{x,0}=\binom{x+z_1}{x}\cdots\binom{x+z_n}{x};\end{aligned}\right\}\qquad\text{dt.,}\qquad(74)$$
$$\mathrm{N}^{(z_1\ldots z_n)}_{x,y}=\mathrm{N}^{(z_1\ldots z_n)}_{x,y-1}+\frac{x+z_1}{x}\cdots\frac{x+z_n}{x}\,\mathrm{N}^{(z_1\ldots z_n)}_{x-1,y};\quad\text{df.}$$

V. — Triangolo delle differenze.

47. Date tre quantità qualsivogliano

$$a,\quad b,\quad c,$$

le tre uguaglianze

$$\begin{aligned}a+b&=c\\c-a&=b\\c-b&=a\end{aligned}$$

sono tali che se ne esiste una esistono tutt'e tre, perchè ciascuna comprende implicitamente le altre due. Per valori particolari dei tre termini, la prima che rappresenta la più semplice delle addizioni, coincide con la definizione della legge delle combinazioni semplici; per valori qualsivogliano, quella che si sceglie delle altre due, e che rappresenta la più semplice delle sottrazioni, coincide con la definizione della legge delle differenze finite.

I due termini a e b si possono rappresentare l'uno in funzione dell'altro per mezzo del segno d'operazione Δ; però è necessario fissare il *senso* di quest'operazione, il quale deve ritenersi implicito nel segno Δ. Invero, se si pone, per definizione,

$$\Delta a=b=c-a,$$

sarà una conseguenza il porre

$$\Delta^{-1}b=a,$$

e se si pone, per definizione,

$$\Delta b=a=c-b,$$

sarà una conseguenza il porre

$$\Delta^{-1} a = b;$$

e si vede bene che il senso dell'operazione Δa è *diverso* di quello dell'operazione Δb, e se si ponessero le due definizioni, le quattro espressioni di c

$$\begin{array}{cc} a + \Delta a, & b + \Delta b, \\ b + \Delta^{-1} b, & a + \Delta^{-1} a, \end{array}$$

si potrebbero bensì uguagliare sia verticalmente che orizzontalmente, ma non lo si potrebbero diagonalmente, perchè Δa e $\Delta^{-1} a$ sono in generale disuguali e così pure Δb e $\Delta^{-1} b$. Da questo risultato assurdo si conchiude che le due definizioni non possono coesistere.

Delle due differenze che si possono scrivere

$$\Delta^0 c - \Delta^0 a = \Delta^1 a$$
$$\Delta^0 c - \Delta^0 b = \Delta^1 b,$$

è quindi da fissare solamente la prima o solamente la seconda, secondo che siano da ritenere dello *stesso ordine* i due termini c ed a, ovvero i due termini c e b. I due termini che si ritengono dello stesso ordine ed il terzo, rappresentato per mezzo del segno d'operazione Δ e quindi d'un ordine che è maggiore dell'altro di un'unità, vincolati così come sono dalle tre uguaglianze, formano un triangolo elementare delle differenze, cioè un triangolo d'ordine *uno*.

Se è dato uno solo dei tre termini, in particolare Δ^1, è chiaro che uno degli altri due si può scegliere ad arbitrio ed il terzo sarà determinato in modo unico.

Supponendo che due termini rappresentino in generale due differenze dello stesso qualsivoglia ordine y, la loro differenza si potrà sempre rappresentare per mezzo del segno d'operazione Δ e sarà d'ordine $y + 1$; così, se

$$c = \Delta^y p$$
$$a = \Delta^y q,$$

si ha

$$c - a = \Delta^y p - \Delta^y q = \Delta(\Delta^y q) = \Delta^{y+1} q.$$

Dalla definizione

$$\Delta^1 a = b$$
$$\Delta^{-1} b = a,$$

si ha

$$\Delta^1 \Delta^{-1} = \Delta^{-1} \Delta^1 = \Delta^0;$$

e da questa e dal risultato precedente

$$\Delta \Delta^y = \Delta^{y+1}$$

che si può assumere come definizione per qualsivoglia valore intero di y, si ha, induttivamente,

$$\Delta^y \Delta^z = \Delta^z \Delta^y = \Delta^{y+z},$$

ed in generale, per

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \gtrless 0,$$

qualunque sia la permutazione delle α che si scelga fra le $n!$ possibili,

$$\Delta^{\alpha_1} \ldots \Delta^{\alpha_n} = \Delta^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}. \tag{75}$$

48. I tre termini d'un triangolo elementare si possono rappresentare in funzione d'un solo, perchè ammessa la definizione

$$\Delta^1 a = b,$$

si ha

$$a = \Delta^0 a$$
$$c = \Delta^0 a + \Delta^1 a.$$

In tal modo dei tre termini si esprime come *somma* solamente il termine c; ma è opportuno potere esprimere come somma ciascuno dei due termini b e c.

Si ponga perciò, per definizione,

$$\sigma_0 = \Delta^0 a$$
$$\sigma_1 = \Delta^1 a - \Delta^0 a,$$

e si avrà

$$b = \sigma_0 + \sigma_1$$
$$c = 2\sigma_0 + \sigma_1.$$

Con ciò il triangolo elementare avrà la doppia forma:

$$\begin{array}{cc} \Delta^0 a, \ \Delta^0 a + \Delta^1 a, & \sigma_0, \ 2\sigma_0 + \sigma_1, \\ \Delta^1 a, & \sigma_0 + \sigma_1, \end{array} \tag{76}$$

e la somma dei due termini dello stesso ordine col segno d'operazione Δ sarà

$$a + c = 2\Delta^0 a + \Delta^1 a,$$

e col segno d'operazione σ

$$a + c = 3\sigma_0 + \sigma_1.$$

L'ulteriore svolgimento di queste due relazioni conduce a stabilire i due metodi generali per la somma delle potenze simili dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica, e si vedrà in seguito come può giustificarsi l'affermazione che sono solamente due e solamente questi.

49. Il modo più semplice e più generale di rappresentare, senza individuarla, una qualsivoglia successione di quantità, d'un numero finito od infinito di termini, è certamente quello di assumere come simbolo di essi, il numero d'ordine con cui si possono contraddistinguere e quindi fissare invariabilmente, dopo di aver contraddistinto col numero d'ordine *zero* un qualsivoglia termine, scegliendolo come *primo*; e se si conviene che la variabile x possa assumere tutti e solamente i valori, essenzialmente interi, della serie naturale dei numeri d'ordine (successione (A))

$$-\infty \qquad \ldots, -1, 0, +1, \ldots \qquad +\infty,$$

un valore di x individua, nella successione, quel termine che contraddistingue, e la totalità dei valori che si possono attribuire ad x rappresenta, senza individuarla, quella qualsivoglia successione.

Occorre però distinguere due casi: i termini della successione possono essere vincolati da una legge, necessariamente di primo grado, e possono essere o considerarsi come del tutto indipendenti l'uno dall'altro; nel primo caso la successione si rappresenta col simbolo

$$[x]$$

che è quello d'una qualsivoglia 1-classe aritmetica, e nel secondo col simbolo

$$(x).$$

Il calcolo delle differenze finite si applica al secondo simbolo e quindi, implicitamente, anche al primo.

50. Se per tutt'i valori di x, da $-\infty$ a $+\infty$, si pone, per definizione,

$$\Delta^1(x) = \Delta^0(x+1) - \Delta^0(x),$$

le due successioni Δ^0 e Δ^1 sono tali che se è data la prima, la seconda è appieno determinata, e se invece è data la seconda, per determinare la prima è necessario e sufficiente assegnarne un qualsivoglia termine; dappoichè ogni triangolo elementare è formato di due termini della prima successione e di uno della seconda; e per la stessa ragione, se i valori di x sono in numero finito, il numero dei termini della seconda successione è minore di un'unità del numero dei termini della prima.

In generale, se per tutt'i valori di x, da $-\infty$ a $+\infty$, e per $y \geqslant 0$, si pone, per definizione,

$$\Delta^{y+1}(x) = \Delta^y(x+1) - \Delta^y(x),$$

le $y+2$ successioni $\Delta^0, \ldots, \Delta^{y+1}$ sono tali che di due qualsivogliano consecutive, se è data quella d'ordine minore, l'altra è appieno determinata, e se invece è data questa, per determinare quella, è necessario e sufficiente assegnarne un qualsivoglia termine.

Occorre osservare che talvolta quel qualsivoglia termine che è necessario e sufficiente assegnare, si deve scegliere fra quelli d'una successione prestabilita, e talvolta invece la scelta può essere del tutto arbitraria; anche in questo caso viene a costruirsi una successione che ha per differenza la successione data.

La definizione posta si può ammettere anche per $y < 0$, e si può quindi considerare in tutta la sua generalità il simbolo $\Delta^y(x)$, avvertendo che il segno Δ^y si riferisce *sempre* alla successione (x) e che si può scegliere come *prima* successione quella che corrisponde ad un qualsivoglia valore di y; talvolta però può essere opportuno scegliere come tale quella che corrisponde ad $y = 0$.

Se i valori di x della prima successione sono in numero finito, al diminuire dell'ordine delle successioni il numero dei termini cresce di un'unità per volta, ed al crescere dello stesso ordine diminuisce di un'unità per volta e quindi si arriverà ad un'ultima successione che è formata di un solo termine.

51. Si possono dopo ciò considerare tre tipi distinti di 2-classi aritmetiche delle differenze finite e se ne possono stabilire le leggi.

Prima legge:

$$\left.\begin{array}{r} x \neq \pm\infty;\quad y \neq +\infty; \\ x = x_0, \ldots, x_y;\quad y \geqslant 0; \end{array}\right\} \quad \text{lm.,}$$
$$\Delta^0(x_0) = (x_0);\ \ldots;\ \Delta^0(x_y) = (x_y); \quad \text{dt.,} \tag{77}$$
$$\Delta^y(x) = \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^{y-1}(x); \quad \text{df.}$$

I valori della variabile x, in numero finito, sono consecutivi nel campo di variabilità della serie naturale dei numeri d'ordine, e la variabile y ha tanti valori quanti sono quelli della x. La determinazione è data dalla successione d'un numero finito di termini $(x_0), \ldots, (x_y)$ che si sceglie come prima. Tutt'i termini delle altre successioni, fino all'ultima che è formata del solo termine $\Delta^y(x_0)$ in cui y ha il massimo valore, si costruiscono con la definizione. La 2-classe è limitata in tutt'i sensi e consta di $\binom{y+2}{2}$ termini, non essendo possibile costruirne alcun altro; essa forma il triangolo d'ordine y delle differenze del termine $\Delta^0(x_0)$.

Seconda legge:

$$x \gtrless 0;\quad y \geqslant 0; \quad \text{lm.,}$$
$$\Delta^0(x) = (x); \quad \text{dt.,} \tag{78}$$
$$\Delta^y(x) = \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^{y-1}(x); \quad \text{df.}$$

La determinazione è data dalla successione (x) d'un numero infinito di termini; la definizione è quella stessa della prima legge. Se la variabile x può estendersi all'infinito solamente da una parte del campo di variabilità, occorre restringerne la limitazione. Questa legge comprende la prima.

Se per un valore fissato di y, i valori della successione $\Delta^y(x)$ sono uguali di s in s, in modo che essa abbia s valori distinti, allora (x) è per definizione una progressione aritmetica d'ordine y ed a periodo costante di s termini; e se $s = 1$, si ha l'ordinaria progressione aritmetica d'ordine y, nel qual caso è sempre

$$\Delta^{y+1}(x) = \Delta^{y+2}(x) = \ldots = 0\,.$$

Terza legge:

$$x \gtrless 0;\quad y \gtrless 0; \quad \text{lm.,}$$
$$\left.\begin{array}{r} \Delta^0(x) = (x); \\ \Delta^{-1}(x_1) = a_1;\ \ldots;\ \Delta^{-y}(x_y) = a_y; \end{array}\right\} \quad \text{dt.,} \tag{79}$$
$$\Delta^y(x) = \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^{y-1}(x); \quad \text{df.}$$