Una leggiera pressione fatta sulla detta asticciola, è bastata per segnare il punto sul muro (*piede del gnomone*).

2°. L'altezza dello gnomone (distanza del centro del foro dal *piede*), venne determinata nel seguente modo. Premesso che il cilindretto, del quale abbiamo fatto parola sopra, è sezionato lungo il suo asse in modo da lasciare scoperte la metà dell'asticciola per un tratto di circa 15^{mm} in corrispondenza del foro gnomonico, si sono fatte due intaccature, sull'asticciola stessa, per mezzo di una piccolissima lima piatta, a taglio finissimo, mantenuta per tutta la sua estensione bene aderente successivamente alle due faccie del disco.

Per mezzo di un compasso a verga si presero, con tutta precisione, le distanze dalla estremità acuminata dell'asticciola a ciascuna delle due intaccature e se ne ricavò il valore in millimetri riportando le dette distanze su di una riga d'ottone, di un metro di lunghezza, divisa in centimetri e con divisioni a scala ticonica, in modo da permettere di valutare il decimo di millimetro. Dalla semisomma dei due valori trovati risultò l'altezza dello gnomone eguale a $288^{m},6$.

Osservazione. — I resultati delle due precedenti operazioni sono della massima importanza e quindi debbono essere determinati colla maggiore precisione possibile.

3°. Il piede dello gnomone si assunse come origine di un sistema di assi coordinati l'uno verticale, che si tracciò col sussidio del filo a piombo. (¹) e l'altro orizzontale di cui si individuarono due punti per mezzo della nota costruzione del tracciamento della perpendicolare ad una retta data (la verticale) in un punto assegnato (il *piede del gnomone*).

II. — Osservazioni
per la determinazione della declinazione del quadro.

4. Per queste osservazioni non si deve far altro che segnare sul quadro, a vari istanti di una stessa giornata e colla maggiore precisione possibile, i centri dei cerchietti luminosi, immagini solari del foro gnomonico. Per maggiore precisione si è preparato un dischetto di ottone, di sottilissimo spessore, con un foro centrale di poco più di 1^{mm}, e si è applicato esattamente, con della cera, lungo il bordo tagliente del foro gnomonico. Questo dischetto potrebbe anche es-

(¹) Per evitare che il corpo del piombino impedisca al filo di essere aderente al muro, si può togliere l'intonaco per una striscia orizzontale larga pochi centimetri, al disotto del quadro, affinchè possa trovarvi posto il rigonfiamento del piombino stesso.

Ad inviduare la verticale potrebbe anche bastare l'ombra solare del filo proiettata sul quadro, ma in tal caso bisogna essere sicuri che il quadro stesso sia perfettamente verticale e non presenti delle ondulazioni, sieno pure leggiere.

Il filo a piombo, poi, invece che alla mano, può essere raccomandato ad un regolo poggiante su due chiodi al disopra del quadro e deve poter scorrere facilmente su di esso in modo da individuare una verticale in un punto qualunque del quadro.

sere ritagliato da un cartoncino sottile, ma, in ogni caso, l'applicazione non sarà mai fatta sulla faccia anteriore o posteriore del disco chè altrimenti l'altezza dello gnomone verrebbe ad aumentare o a diminuire dello spessore del disco stesso.

Notati coll'orologio gli istanti corrispondenti alle diverse osservazioni e condotte, per mezzo del piombino, le verticali per diversi punti segnati, potremo subito ricavare, col sussidio del compasso a verga e colla riga a scala ticonica, le lunghezze delle coordinate x (contate lungo l'orizzontale) ed y (contate sulla verticale), corrispondenti ai vari punti.

Dopo ciò si potrebbe passar subito al calcolo della *declinazione* del muro; ma prima saranno utili le seguenti avvertenze.

1ª. Invece di limitare le osservazioni al numero strettamente necessario, sono stati segnati i punti ad intervalli di 7 od 8 minuti; i quali punti possono servire al tracciamento dell'iperbole di declinazione corrispondente al giorno della osservazione. S'intende che questa operazione non è punto necessaria, ma può essere utile per controllare l'andamento delle due *iperbole dei segni*, che comprendono quella ottenuta sperimentalmente, e che vengono dedotte per mezzo del calcolo, come vedremo a suo tempo (n. 15 e seg.) basandoci sugli elementi numerici fondamentali dell'orologio solare.

2ª. Gli istanti delle osservazioni precedenti, anzichè indipendenti fra di loro, sono stati presi a coppie in modo che i due di una stessa coppia differissero per un eguale intervallo di tempo dall'istante del *mezzogiorno vero rispetto al quadro.* [1] È facile, senza bisogno di orologio, determinare quante coppie si vogliono di tali istanti. Infatti, possiamo intanto, anche da una superficiale osservazione del modo secondo il quale resta illuminato il quadro fino dalle prime ore del mattino, riconoscere subito quale posizione avrà, presso a poco, la linea del *mezzogiorno vero del quadro.*

Segnati allora tre o quattro punti dell'immagine solare del piccolo foro gnomonico, nelle ore che precedono il passaggio per la substilare, si descriveranno, col centro nel *piede del gnomone*, delle circonferenze concentriche passanti pei detti punti e si segneranno nelle ore posteriori al passaggio per la substilare, i punti di quelle immagini nel momento in cui tornano a cadere sulle circonferenze predette.

La conoscenza di queste coppie di punti, oltre essere utili sotto l'aspetto analitico, come fra poco vedremo, può servire ad individuare graficamente la substilare, che, come è noto, deve essere bi-

---

[1] Chiamo con questo nome l'istante che segna la metà dell'intervallo di tempo durante il quale rimane illuminato il quadro in uno stesso giorno, indipendentemente, s'intende, dagli ostacoli terrestri che possono impedire questa illuminazione. Tale istante si identifica col mezzog. vero del luogo terrestre di cui l'orizzonte è parallelo al piano del quadro.

secante di tutti gli archi di circonferenze determinati dalle diverse coppie di punti corrispondenti. (1)

Se le osservazioni e le operazioni grafiche sono state bene eseguite, le bisecanti anzidette debbono coincidere, sensibilmente, con una unica retta che è appunto la substilare; ma poichè la declinazione del Sole varia durante una stessa giornata, questa coincidenza non può essere, almeno teoricamente parlando, perfetta; infatti all'atto pratico si è trovato una piccolissima divergenza fra le dette bisecanti, la quale non poteva dipendere che dalla causa ora accennata.

3°. Per quanto, una volta conosciuta la declinazione del quadro, si possa facilmente determinare la posizione della linea meridiana, tuttavia è utile di segnare direttamente questa linea (specialmente quando si offrono alcune circostanze favorevoli) pel fatto che essa può servire, o almeno concorrere con altre osservazioni, ad una più precisa determinazione della declinazione del muro. Elemento indispensabile per questo tracciamento è la conoscenza dell'istante del mezzogiorno vero.

Accenneremo ora alle operazioni fatte per la determinazione di questo istante e pel tracciamento della meridiana.

a) Si determinò dapprima la *differenza di longitudine, Villa Palmieri-Parigi*, nel modo seguente:

Diff. di long. Osservatorio Astr. d'Arcetri-Parigi . .	$8^\circ\ 55'\ 06''$ (2)
» » » Villa Palmieri-Arcetri	$1\ \ 26$ (3)
» » » Villa Palmieri-Parigi	$8^\circ\ 56'\ 32''$

Gli ultimi due valori, tradotti in tempo, dànno

$$1'26'' \equiv 5^s,73 \qquad \text{e} \qquad 8^\circ\,56'\,32'' \equiv 35^m\,46^s,67 \equiv 0^h,5963.$$

b) Determinazione dell'*istante* (espresso in tempo medio dell'Europa centrale) *del mezzog. vero a Villa Palmieri*, il 15 gennaio 1910 (giorno dell'osservazione).

Ora in t. m. di Parigi nell'istante del mezz. vero.	$12^h\ 09^m\ 44^s\ 23$ (4)
Correz. per la diff. di long. Villa Palmieri-Parigi.	$-\ 52$ (5)
Ora media locale a m. v. di Villa Palmieri . . .	$12^h\ 09^m\ 43^s\ 71$
Correz. per la riduz. all'ora media dell'Eur. Centr.	$14^m\ 52^s\ 97$ (6)
Istante in t. m. E. C. del m. v. a Villa Palmieri .	$12^h\ 24^m\ 36^s\ 68$

(1) Questo procedimento per tracciare la substilare, è identico a quello notissimo che si usa per determinare la meridiana su di un piano orizzontale.

(2) Dalla *Connaissance des temps*, 1910.

(3) Dalla carta dei *Dintorni di Firenze*, con procedimento analogo a quello tenuto per la determinazione della latitudine.

(4) Vedi nota (2).

(5) Questa correzione è data da $0^s,871 \times 0,5963$, in cui $0^s,871$ è la variazione oraria in *asc. retta* del Sole, fornita dalla *Connaissance des temps*.

(6) Questa correzione si è ottenuta da quella relativa ad Arcetri, che è di $14^m 58^s,70$ (V. *Elem. Astron. pel Calendario dell'anno 1910* calcolati dal dott. B. Viaro. Pubblicaz. del R. Osserv. astr. di Arcetri), diminuita della differenza di longitudine Villa Palmieri-Arcetri ($5^s,73$).

c) Per una precisa indicazione di questo istante, si è fatto uso di un buon cronometro Longines (con lancetta cronografica) del quale potè essere determinato lo *stato* con sufficiente precisione, perchè dal ponte, innalzato per la costruzione dell'orologio solare, si vedeva il lampo del cannone che si spara, dal Forte S. Giorgio, per la segnalazione del mezz. medio dell'E. C. a Firenze, e perchè dall'Osservatorio astronomico di Arcetri veniva gentilmente comunicato telefonicamente (subito dopo lo sparo) la eventuale correzione da apportarsi alla detta segnalazione.

La correzione del cronometro nell'istante del mezzog. medio dell'E. C. risultò determinata come appresso:

Istante in cui si è lasciata libera la lancetta del cronografo	$11^h\ 55^m\ 00^s\ 00$
Istante segnato dal cronografo quando si è *udito il colpo* [1]	$7^m\ 44^s\ 20$
Correzione pel tempo di propagazione del suono [2] .	$-\ 13^s\ 35$
Errore nello sparo del cannone [3]	$00^s\ 00$
Istante segnato dal cronometro al m. m. E. C. . .	$12^h\ 02^m\ 30^s\ 85$
Correzione del cronometro	$-\ 2^m\ 30^s\ 85$

Per la determinazione dell'ora segnata dal nostro cronometro nel momento del passaggio del Sole al meridiano, si fecero le seguenti riduzioni:

Ora dell'E. C. a mezzog. vero di Villa Palmieri . .	$12^h\ 24^m\ 36^s\ 68$
Correzione del cronometro	$2^m\ 30^s\ 85$
Correzione per l'andamento del cronometro [1]. . .	03
Ora che deve segnare il cronometro al m. v. . . .	$12^h\ 27^m\ 07^s\ 56$

Dopo questa determinazione si aspettò l'istante in cui l'orologio indicava l'ora precedentemente trovata, per segnare sul muro, colla punta di un lapis, il centro del cerchietto luminoso.

d) Dal punto ora segnato si condusse, per mezzo del filo a piombo, la verticale (*meridiana*) di cui il prolungamento determina sulla substilare, un punto che è il *centro orario*.

---

[1] Una bassa caligine impedì di scorgere il lampo del cannone. In previsione di questo nei giorni precedenti, di tempo più chiaro, fu determinato colla osservazione diretta il tempo impiegato dal suono a percorrere la distanza, Forte S. Giorgio - Villa Palmieri e i resultati concordarono abbastanza bene col valore di $13^s,35$ dedotto dalla divisione di 4540^m (distanza fra i due luoghi ricavata dalla carta dei *Dintorni di Firenze*), per 340^m, ossia per la velocità del suono nel caso di aria calma come era appunto nel giorno delle osservazioni.

[2] Comunicazione avuta dall'Osserv. d'Arcetri.

[3] Sapendo che il cronometro accelera 2^s al giorno, si è ottenuta questa correzione dal prodotto $2^s \times 0,017$ in cui il secondo fattore non è altro che l'intervallo di tempo $24^m 36^s,65$ (fra il mezzog. medio e quello vero) ridotto in parti decimali di giorno. Per queste riduzioni si ricorre alle apposite tavole, per es. a quelle che si trovano in fondo alla *Connaissance*.

È quasi superfluo l'osservare che questa correzione è data qui per presentare in modo completo l'esatta determinazione di un istante, perchè pel caso nostro non può avere alcuna influenza sensibile sul resultato finale.

Questo punto, pel quale passano tutte le linee orarie, rappresenta anche l'intersezione del quadro colla direzione dell'asse del mondo condotto pel centro del foro gnomonico.

Quando si volesse seguire il metodo grafico, si avrebbero ora tutti gli elementi sufficienti pel tracciamento completo dell'orologio solare, ma non si raggiungerebbe così quella precisione che può essere conseguita coi procedimenti di calcolo che continueremo a spiegare.

III. — Calcoli relativi alla determinazione della declinazione del quadro.

5. La conoscenza delle coordinate x ed y, corrispondenti alle varie posizioni del centro del cerchietto luminoso, è sufficiente per

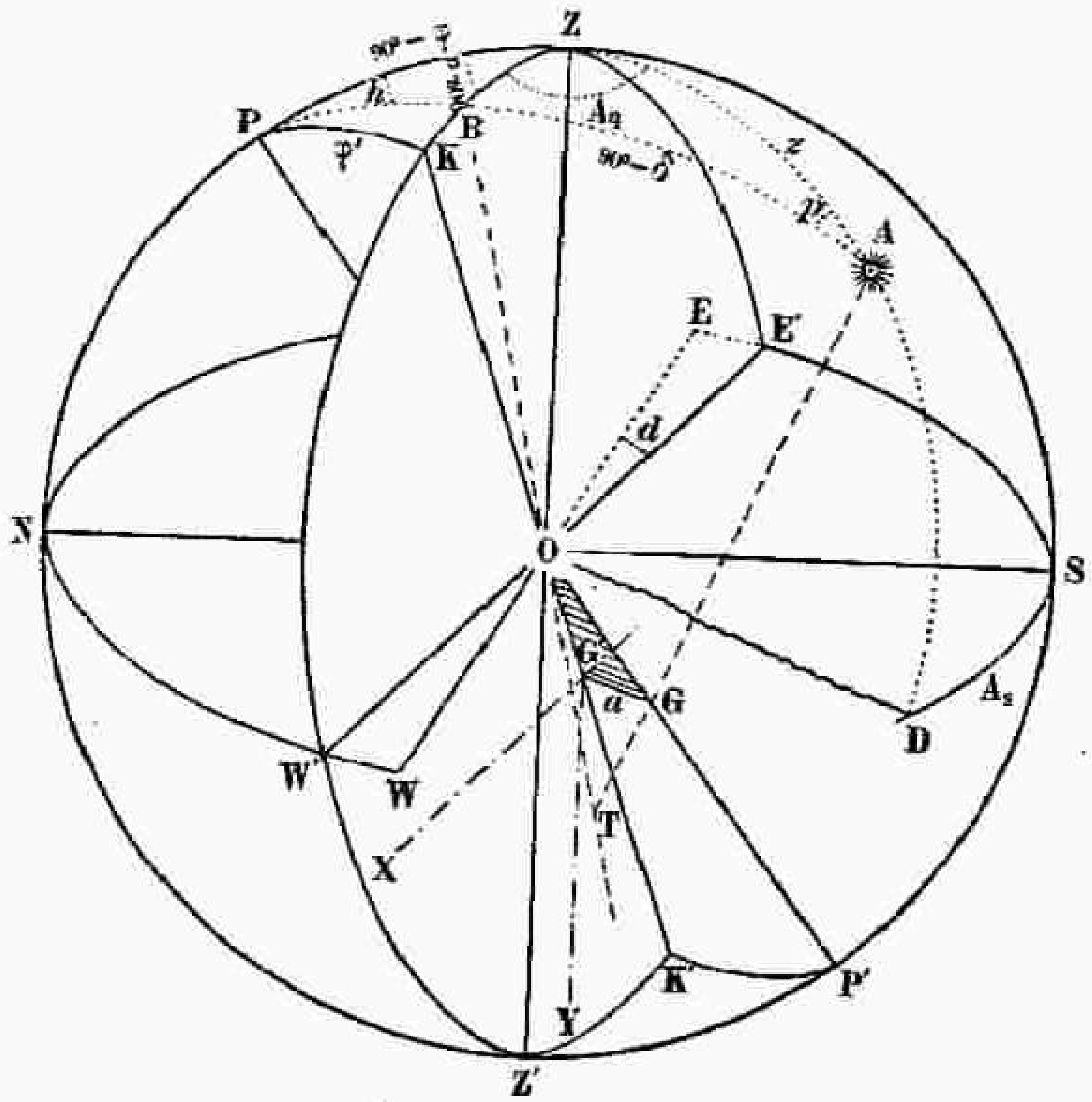


Fig. 2.

determinare la declinazione d del quadro seguendo il metodo che ora esporremo.

Sia (fig. 2), SWNE l'orizzonte; SZNZ' il meridiano; ZW'Z'E' il piano del quadro che, come apparisce dalla figura stessa, presenta la declinazione d verso West; PP' l'asse del mondo; $GG' = a$, l'altezza e G' il *piede del gnomone* pel quale passano i due assi X ed Y a cui si riferiscono le posizioni dei vari punti del quadro.

Sia ZPA il *triangolo di posizione* relativo ad una delle osservazioni per la determinazione della declinazione del quadro e quindi

AGT la direzione del raggio solare che passando pel foro gnomonico determina il cerchietto luminoso, le coordinate del centro T del quale sono x e y.

Dalla figura si rileva facilmente che

$$d = S\widehat{Z}W' - 90^0 = \{ S\widehat{Z}D + D\widehat{Z}W' \} - 90^0 = \{ A_s + A_q \} - 90^0 \quad (1)$$

avendo indicato con A_s l'azimut del Sole e con A_q l'angolo che il verticale del Sole fa col quadro.

Dalle note formule di trigonometria sferica si ha intanto che

$$\cot \tfrac{1}{2} A_s = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} \{(z+\varphi)+\delta\} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \{(z+\varphi)-\delta\}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \{(z-\varphi)+\delta\} \cos \frac{1}{2} \{(z-\varphi)-\delta\}}} \quad (2)$$

nella quale solamente φ (latitudine del luogo) è conosciuta, mentre δ e z, che sono rispettivamente la declinazione e la distanza zenitale

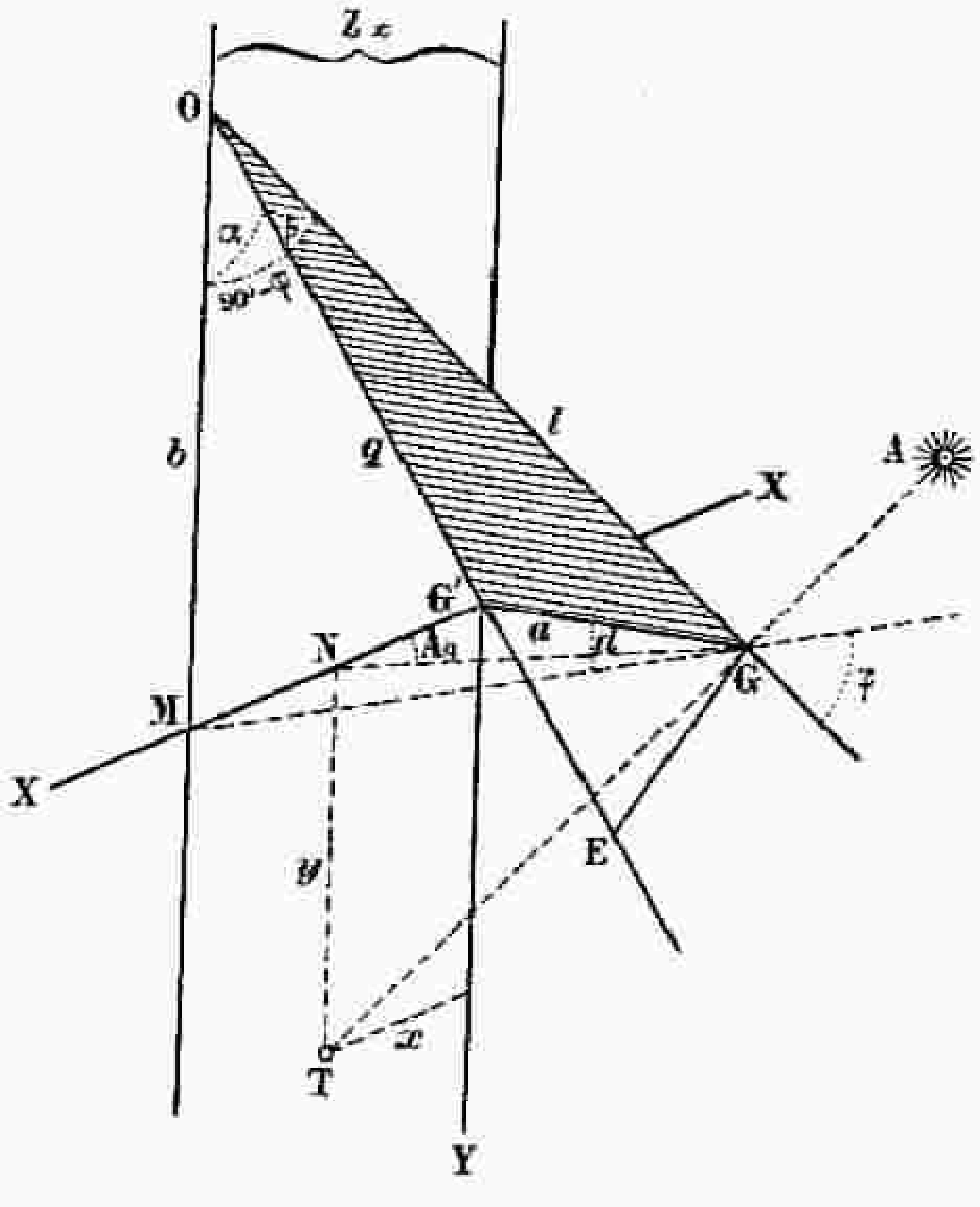


Fig. 3.

del Sole nel momento dell'osservazione, potranno dedursi, la prima dalle effemeridi astronomiche con opportune correzioni, e la seconda dalla conoscenza delle coordinate x e y come fra poco diremo.

Per determinare A_q si osservi la figura 3 la quale, insieme ad altre linee che considereremo in seguito, contiene, sufficientemente ingrandita, la parte della figura 2 che si riferisce al raggio solare AGT e alle coordinate x e y del punto T.

È facile ora vedere che l'angolo A_q (fig. 2) ha la stessa misura dell'angolo piano GNG' (fig. 3) il quale può ricavarsi dal triangolo rettangolo GG'N (di cui sono noti i cateti $GG' = a$ e $G'N$ coordinata x del punto T misurato sul muro) mediante la relazione:

$$\operatorname{tg} A_q = \operatorname{tg} GNG' = \frac{a}{x}. \tag{3}$$

La distanza zenitale z si ottiene dal triangolo FNT, rettangolo in N, per mezzo della formula:

$$\operatorname{tg} z = \frac{NG}{y} = \frac{a}{y \operatorname{sen} A_q}. \tag{4}$$

Per il calcolo di δ, corrispondente all'istante dell'osservazione, si è prima ricavato dalla *Connaissance des temps*, pel giorno 16 gennaio, il δ al mezzog. medio di Parigi e si è trovato il valore

$$-21^{\circ}\, 03'\, 08'', 1\,;$$

si è ricavato inoltre quello della variazione oraria ($28'', 05$), indi si è fatta la correzione corrispondente all'intervallo di tempo che corre dal momento dell'osservazione al mezzog. medio di Parigi.

Nella tabella seguente sono riportate le ore delle osservazioni, la loro riduzione all'ora media di Parigi, la correzione da apportarsi alla declinazione δ, ed i valori x ed y delle coordinate misurate sul muro.

Istanti delle osservazioni in...		Differenza dal mezzog. med. di Parigi	Declinazione		Coordinate	
t. m. dell'E. C.	t. m. di Parigi		Correzione	Val. corretto	x	y
$t_0 = 10^h\ 6^m$	$9^h\ 15^m$	$-2^h\ 45^m \equiv -2^h\ 75^m$	$-1'\ 17'',1$	$-21^{\circ} 04' 25,2$	$-279^{mm},9$	$125^{mm},8$
$t_1 = 11^h\ 6^m$	$10^h\ 15^m$	$-1^h\ 45^m \equiv -1^h\ 75^m$	$-\ 49'',1$	$-21^{\circ} 03' 57,2$	$-165^{mm},0$	$137^{mm},7$
$t_2 = 12^h\ 24^m,(37^s)$	$11^h\ 34^m$	$-0^h\ 26^m \equiv -0^h\ 43^m$	$-\ 12'',3$	$-21^{\circ} 03' 20,4$	$-50^{mm},4$	$135^{mm},7$
$t_3 = 14^h\ 17^m$	$13^h\ 36^m$	$+1^h\ 36^m \equiv +1^h\ 60^m$	$+\ 44'',9$	$-21^{\circ} 02' 23,2$	$+92^{mm},0$	$110^{mm},7$
$t_5 = 15^h\ 36^m$	$14^h\ 45^m$	$+2^h\ 45^m \equiv +2^h\ 75^m$	$+1'\ 17'',1$	$-21^{\circ} 01' 51,0$	$+200^{mm},0$	$73^{mm},5$

6. Ed ora siamo in grado di effettuare i calcoli relativi alla ricerca della declinazione d del quadro, e per questo determineremo successivamente i valori forniti dalle relazioni (3), (4), (2), (1), assumendo per δ, x ed y i valori δ_0, x_0, y_0 che nella tabella precedente corrispondono a t_0, e ricordando che $a = 288^{mm},6$. Il calcolo può essere disposto come segue:

$$\begin{aligned}
\log a &= 2,46030 \\
\operatorname{colg} x_0 &= \underline{7,55300} \\
\lg \operatorname{tg} A_q &= 0,01330 \\
180 - A_q &= 45^{\circ}\, 53'\, 00'' \\
A_q &= 134^{\circ}\, 07'\, 00''
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\lg a &= 2,46030 \\
\operatorname{colg} y_0 &= 7,90032 \\
\operatorname{colg} \operatorname{sen} A_q &= \underline{0,14392} \\
\lg \operatorname{tg} z_0 &= 0,50454 \\
z_0 &= 72^{\circ}\, 37'\, 20''
\end{aligned}$$

$z_0 =$	$72^\circ 37' 20''$	$z_0 =$	$72^\circ 37' 40''$
$\varphi =$	$45\ 47\ 46$	$\varphi =$	$43\ 47\ 46$
$z_0 + \varphi =$	$116\ 25\ 06$	$z_0 - \varphi =$	$28\ 49\ 54$
$\delta_0 = -$	$21\ \ 4\ 25$	$\delta_0 = -$	$21\ \ 4\ 25$
$(z_0 + \varphi + \delta_0) =$	$95\ 20\ 41$	$(z_0 - \varphi + \delta_0) =$	$7\ 45\ 29$
$\frac{1}{2}(z_0 + \varphi + \delta_0) =$	$47\ 40\ 20$	$\frac{1}{2}(z_0 - \varphi + \delta_0) =$	$3\ 52\ 45$
$(z_0 + \varphi - \delta_0) =$	$137\ 29\ 31$	$(z_0 - \varphi - \delta_0) =$	$49\ 54\ 19$
$\frac{1}{2}(z_0 + \varphi - \delta_0) =$	$68\ 44\ 45$	$\frac{1}{2}(z_0 - \varphi - \delta_0) =$	$24\ 57\ 09$

$\lg \cot \frac{1}{2}(z_0 + \varphi + \delta_0) =$	$9{,}82825$	$\frac{1}{2} A_s =$	$17^\circ 21' 40''$
$\lg \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z_0 + \varphi - \delta_0) =$	$9{,}96941$	$A_s =$	$34\ 43\ 20$
$\operatorname{colg} \cos \frac{1}{2}(z_0 - \varphi - \delta_0) =$	$0{,}04256$	$A_q =$	$134\ 07\ 00$
$\operatorname{colg} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(z_0 - \varphi + \delta_0) =$	$1{,}16972$	$A_s + A_q =$	$99\ 23\ 40$
$\lg \cot^2 \frac{1}{2} A_s =$	$1{,}00994$	$-$	$90\ 00\ 00$
$\lg \cot \frac{1}{2} A_s =$	$0{,}50497$	$d =$	$9\ 23\ 40$

N. B. — Nell'uso delle tavole trigonometriche si è sempre fatto l'arrotondamento alle decine di secondi.

In modo analogo si trovano i valori di d per i valori di δ, x ed y corrispondenti a t_1, t_3, t_4.

Non si calcola collo stesso procedimento il d, che può dedursi dai valori di δ_2, x_2, y_2 corrispondenti a t_2, per la ragione seguente. L'osservazione nell'istante t_2, è quella dal passaggio del Sole al meridiano, pel quale si ha

$$z_2 - \varphi + \delta_2 = 0\,,$$

e quindi dalla (2) risulterà

$$\cot \tfrac{1}{2} A_s = \infty$$

ossia $A_s = 0$, ciò che si deduce anche a priori. Ma dalla (3) si ricava, essendo x negativo,

$$A_q = 180^\circ - \mathrm{GNG}'$$

e dalla (1)

$$d = 90^\circ - \mathrm{GNG}'$$

ossia, poichè nel caso attuale N si identifica con M (fig. 3), si conclude che

$$d = 90^\circ - \mathrm{GMG}' = \mathrm{MGG}' = \frac{a}{x_2}\,.$$

In conclusione si può dire che dalla sola (3) o, ciò che è lo stesso, dalla precedente, si può subito avere la declinazione del quadro quando si faccia l'osservazione nell'istante del mezzogiorno vero e si misuri la sola ascissa x_2.

Eseguiti i calcoli, in conformità di quanto precede, per le altre quattro osservazioni, diamo qui appresso i valori trovati per d, in corrispondenza delle ore di osservazione, insieme alla media di questi valori e agli scostamenti di ciascun resultato da questa media.

Ora dell'osservazione t. m. dell'E. C.	Valore di d	Scostamento dal valor medio
$10^h\ 6^m$	$9^{\circ}23'40''$	$-28'24''$
$11^h\ 6^m$	9 10 10	-41 54
$12^h\ 24^m,(37^s)$.	9 54 20	$+\ 2$ 16
$14^h\ 17^m$	10 41 10	$+49$ 06
$15^h\ 36^m$	10 11 00	$+18$ 56
Valore medio	$9^{\circ}52'04''$	

Questo valore medio di d è quello che è stato adottato in tutti i calcoli successivi.

Non vogliamo però tralasciare di fare alcune osservazioni. Le ultime quattro determinazioni si riferiscono ad istanti che sono due a due ad eguale intervallo di tempo dall'ora corrispondente alla substilare. (¹)

Della prima osservazione manca la coniugata perchè questa non avrebbe potuto effettuarsi che in condizioni troppo sfavorevoli.

Il valore di d, dedotto dall'osservazione meridiana, l'abbiamo introdotto nel calcolo della media come tutti gli altri, ma veramente sarebbe stato più giusto attribuire ad esso un coefficiente maggiore dell'unità, perchè tutto fa ritenere che il d da essa fornito sia assai più attendibile degli altri. Tuttavia differendo la nostra media di pochissimo dal valore corrispondente all'osservazione meridiana, abbiamo preferito conservare il coefficiente uno a questo valore, subitochè non sarebbe stato agevole valutarne il grado di attendibilità.

Le differenze, piuttosto sentite, che presentano i d corrispondenti alle varie osservazioni, sono da attribuirsi, anzitutto, alla natura delle osservazioni stesse le quali, per quanto accurate, sono tuttavia di carattere sempre troppo grossolano per poter pretendere una buona concordanza nei risultati.

Per avere un'idea del come possono manifestarsi le divergenze, facciamo un breve esame degli errori da cui possono essere affetti gli elementi fondamentali φ e δ e quelli di osservazione a, x, y, sui quali tutti si basa il calcolo di d.

I valori di φ e δ possono ritenersi conosciuti con precisione più che sufficiente per il genere di osservazioni in cui debbono essere adoperati.

Non così può dirsi di a e più specialmente di x ed y le quali ultime possono risultare affetto da errori tali da produrre differenze molto sensibili nei risultati. Infatti, gli errori nella valutazione di a possono provenire solamente dal difetto di perpendicolarità, rispetto al muro, dell'asticciola metallica (n. 3, 1°) e dalla misura della porzione utile dell'asticciola stessa.

(¹) Basta infatti osservare che l'ora della substilare è (v. n. 10), $12^h\ 56^m\ 26^s$ di tempo medio locale, e quindi $12^h\ 56^m\ 26^s + 24^m\ 37^s = 13^h\ 21^m\ 03^s$ di t. m. dell'E. C.

Ora la prima causa di errori è trascurabile, perchè il difetto di perpendicolarità non sarà mai così grande da produrre una differenza apprezzabile nell'altezza a dello gnomone; la seconda è pure da ritenersi molto piccola subitochè i risultati di ripetute misure hanno condotto allo stesso valore per la detta altezza.

La valutazione di x ed y, invece, è soggetta a molteplici cause di errore dipendenti:

1°, dalla non esatta perpendicolarità dell'asticciola suddetta che può far variare, in modo abbastanza sensibile, i valori di x ed y;

2°, dalla non perfetta orizzontalità dell'uno e verticalità dell'altro asse coordinato;

3°, dal non essere il quadro perfettamente piano;

4°, dall'errore di apprezzamento del centro del cerchietto luminoso;

5°, dall'errore commesso nella misura della lunghezza delle coordinate;

6°, dal fenomeno di rifrazione atmosferica. (¹)

Si deve inoltre osservare che l'errore commesso negli elementi fondamentali ed in quelli di osservazione, ha influenza più o meno grande anche la scelta dei momenti in cui si effettuano le osservazioni.

Dopo quanto precede si presenta in modo naturale lo studio delle due questioni:

1°, determinare l'influenza che sul valore di d ha l'errore commesso in uno dei dati di osservazione;

2°, determinare gl'istanti più propizi per le osservazioni, affinchè gli errori ivi commessi influiscano nel minor modo possibile sulla valutazione di d.

7. Per risolvere tali quistioni è necessario ricorrere ad alcune formule differenziali che ora esporremo.

Partendo dalle relazioni generali di trigonometria sferica della forma

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \mathrm{A}\,,$$

differenziando nella supposizione che tutte le lettere sieno altrettante variabili, effettuando poi alcune trasformazioni per mezzo di altre formule, cioè di quelle della forma

$$\cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos \mathrm{C} = \operatorname{sen} c \cos \mathrm{A},$$

e facendo infine le opportune riduzioni, si giunge alla espressione differenziale

$$da = \cos \mathrm{C}\, db + \cos \mathrm{B}\, dc + \operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} c\,.\, d\mathrm{A}$$

da cui:

$$d\mathrm{A} = \frac{da}{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} c} - \frac{\cos \mathrm{C}}{\operatorname{sen} \mathrm{B} \operatorname{sen} c}\, db - \frac{\mathrm{A}}{\operatorname{tg} \mathrm{B} \operatorname{sen} c}\, dc.$$

(¹) L'effetto della rifrazione, come è noto, è tanto più sentito sull'angolo orario quanto più il Sole è lontano dalla posizione meridiana.

Ora, se nel nostro triangolo di posizione, che apparisce nella figura 2, poniamo A, B, C rispettivamente nei vertici Z, P, A, avremo, sostituendo gli elementi di questo triangolo nella formula precedente,

$$dA_s = \frac{1}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} z}\, d\delta - \frac{\cos t}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} z}\, d\varphi + \frac{1}{\operatorname{tg} p \operatorname{sen} z}\, dz. \qquad (5)$$

Differenziando la (3) col riguardare come variabili tanto la x quanto la a avremo

$$\frac{1}{\cos^2 A_q}\, dA_q = \frac{1}{x^2}(x da - a dx)$$

da cui

$$dAq = \frac{1}{x^2}(x da - a dx)\frac{x^2}{a^2 + x^2} = \frac{x da - a dx}{a^2 + x^2}. \qquad (6)$$

Differenziando infine le (1) e tenendo poi conto delle (5) e (6) abbiamo:

$$dd = dA_s + dA_q = \frac{1}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} z}\, d\delta - \frac{\cos t}{\operatorname{sen} p \operatorname{sen} z}\, d\varphi +$$
$$+ \frac{1}{\operatorname{tg} p \operatorname{sen} z}\, dz - \frac{x da - a dx}{a^2 + x^2} \qquad (7)$$

la quale può rappresentare, approssimativamente, l'errore da cui risulterà affetto il valore della declinazione del quadro in funzione degli errori commessi nella determinazione della latitudine del luogo, della distanza zenitale, della declinazione del Sole nel momento dell'osservazione e della coordinata x. Supponendo determinata la declinazione del Sole e la latitudine con precisione tale da poterne ritenere trascurabili gli errori, la relazione differenziale precedente può ridursi a

$$dd = \frac{1}{\operatorname{tg} p \operatorname{sen} z}\, dz + \frac{a dx}{x^2 + a^2} - \frac{x da}{x^2 + a^2} \qquad (8)$$

la quale mostra che le osservazioni meridiane possono condurre ad errori rilevanti nella determinazione di d, perchè, essendo, in tal caso, l'angolo parallattico p molto prossimo a zero, un errore, anche piccolo, in z, fa acquistare un valore molto grande al termine

$$\frac{1}{\operatorname{tg} p \operatorname{sen} z}\, dz.$$

Infatti, applicate le formule (1), (2), (3), (4) alla determinazione di d, secondo il modello di calcolo già adottato, si troverebbe

$$d = 2^\circ 56' 20'',$$

valore questo notevolmente differente da quello già determinato.

Dal secondo termine della formula precedente apparisce che uno stesso errore commesso nella valutazione di x, fa sentire maggiormente la sua influenza nelle osservazioni molto prossime all'ora corrispondente alla substilare; in tale ora in cui si ha $x=0$, l'errore raggiunge il valore massimo espresso, in valore assoluto, da $\frac{dx}{a}$. Per $dx = 1^{mm}$, l'errore che si riscontrerebbe nella declinazione del quadro sarebbe di

$$\frac{1}{288,6} = 12' \text{ circa};$$

la formula stessa mostra poi che dx e dd variano in senso contrario.

Il momento più propizio per l'osservazione sarebbe quello in cui il Sole passa al 1° verticale, perchè allora p raggiunge il valore massimo e anche un errore commesso nella valutazione di x ha pure minore influenza che nelle ore successive.

È anche preferibile che le osservazioni vengano fatte in giorni vicini al solstizio estivo, perchè oltre potere allora profittare delle osservazioni dei *passaggi al 1° verticale*, si ha anche la circostanza favorevole che essendo le ombre più lunghe, e quindi più rapido lo spostamento delle loro estremità, le coordinate x ed y, possono essere valutate con maggiore precisione. Ma a noi non fu consentito di poter rimandare le osservazioni a questa epoca più propizia.

§ 3. — Determinazione del centro dell'orologio.

8. Questo centro, come è già stato accennato, trovasi sulla linea meridiana e coincide colla traccia dell'asse del mondo sul piano del quadro.

La meridiana è già stata tracciata come linea verticale corrispondente all'ascissa di $50^{mm},3$ e, in conformità di questo valore, è stata determinata la declinazione del quadro in $9^{\circ}\,54'\,20''$; ma poichè quest'ultimo venne poi ridotto a $9^{\circ}\,52'$, così per ristabilire l'accordo fra i dati, è necessario prendere

$$x = 288,6 \ \mathrm{tg}\, 9^{\circ}\,52' = 50^{mm},212$$

che differisce dal precedente di $0^{mm},098$.

Invece però di spostare la meridiana (di una quantità piccolissima del resto) si è preferito spostare l'origine delle coordinate, ritenendo la posizione della meridiana determinata con tutta la precisione possibile.

La posizione del centro O può essere ricavata (fig. 3) o per mezzo di $b = \mathrm{OM}$ (proiezione del *Polo-stilo* [1] $\mathrm{OG} = l$, sulla meridiana) o per mezzo di $\mathrm{OG}' = q$, proiezione dello stesso l sulla substilare. Ora

$$l = \frac{a}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{a}{\cos d \, \cos \varphi} = \frac{288{,}6}{\cos 9^\circ 52' 04'' \cos 43^\circ 47' 46''} \tag{9}$$

$$b = l \operatorname{sen} \varphi \tag{10}$$

$$q = a \cot \beta \tag{11}$$

eseguendo i calcoli si trova:

$$\begin{aligned} \lg \cos 9^\circ 52' 04'' &= 9{,}9935248 \\ \lg \cos 43^\circ 47' 46'' &= \underline{9{,}8584131} \\ \lg \operatorname{sen} \beta &= 9{,}8519379 \\ \beta &= 45^\circ 19' 32'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 288{,}6 &= 2{,}4602963 \\ \mathrm{C}^\circ \lg \operatorname{sen} 45^\circ 19' 32'' &= \underline{0{,}1480621} \\ \lg l &= 2{,}6083584 \\ l &= 405^{\mathrm{mm}}\,843 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg l &= 2{,}6083584 \\ \lg \operatorname{sen} 43^\circ 47' 46'' &= \underline{9{,}8401652} \\ \lg b &= 2{,}4485236 \\ b &= 280^{\mathrm{mm}}\,882 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lg 288{,}6 &= 2{,}4602963 \\ \lg \cot 45^\circ 19' 32'' &= \underline{9{,}9950646} \\ \lg q &= 2{,}4553609 \\ q &= 285^{\mathrm{mm}}\,339 \end{aligned}$$

Questi due valori determinano, controllandosi a vicenda, la posizione del centro O dell'orologio.

§ 4. — Ore di illuminazione del quadro.

9. Per potere limitare il calcolo delle linee orarie a quelle strettamente necessarie, dovremo trovare, per le diverse epoche dell'anno, le ore di illuminazione del quadro. Questa ricerca può suddividersi in tre:

1°, determinazione dell'intervallo di tempo che per ognuna delle epoche prescelte, il Sole rimane al disopra dell'orizzonte locale;

2°, degli intervalli di tempo precedentemente determinati, trovare le parti durante le quali il quadro rimane illuminato;

3°, di queste ultime parti ricavare le porzioni di tempo nelle quali la detta illuminazione non rimane impedita da ostacoli terrestri vicini (edifizi) o lontani (monti o colline).

Di quest'ultima ricerca, per altro, non ci occuperemo affatto.

Naturalmente sarebbe troppo lungo estendere le precedenti ricerche a tutti i giorni dell'anno; basterà limitarci a considerare le dodici epoche corrispondenti all'ingresso del Sole nei diversi segni zodiacali, le quali coincidono, approssimativamente, col 21 di ogni mese. Queste determinazioni si fondano sulla conoscenza della lati-

---

[1] Chiamiamo così lo stilo che ha la direzione dell'asse del mondo. Gli antichi lo distinguevano colla sola denominazione di *polos* e chiamarono *gnomone* lo stilo in direzione perpendicolare al piano del quadro.

tudine del luogo e su quella della declinazione del Sole, la quale ultima si ricava dalla formula

$$\operatorname{sen} \delta = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \varepsilon ,$$

ove ε è l'inclinazione dell'eclittica (23° 27') e L la longitudine del Sole, che alle epoche dei suddetti ingressi, ha rispettivamente i valori di 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, ... 300°. Il calcolo, semplicissimo, può essere disposto così:

per L =	0 180	± 30 ± 150	± 60 ± 120	± 90
lg sen L =	— ∞	9,69897	9,93753	0
lg sen ε =	9,59983	9,59983	9,59983	9,59983
lg sen δ =	— ∞	9,29880	9,53746	9,59983
δ =	0°	± 11° 29'	± 20° 10'	± 23° 27'

Le epoche corrispondenti a questi valori della declinazione sono rispettivamente,

21 Marzo (Ariete) 21 Sett. (Bilancia)	21 Aprile (Toro) 21 Agosto (Vergine) 21 Ottobre (Scorpione) 21 Febbr. (Pesci)	21 Maggio (Gemelli) 21 Luglio (Leone) 21 Nov. (Sagittario) 21 Genn. (Acquario)	21 Giugno (Cancro) 21 Dic. (Capricorno)

10. Premesso ciò, la prima delle ricerche sopra enumerate si effettua cercando, in corrispondenza dei precedenti valori della declinazione, il valore del semiarco diurno α che è dato dalla relazione

$$\cos \alpha = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi,$$

la quale si deduce facilmente dal triangolo di posizione ZPA (fig. 2) nella supposizione che diventi

$$ZA = 90^{\circ}.$$

In modo analogo si effettua la seconda delle ricerche colla formula:

$$\cos \alpha' = - \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} (- \varphi') = \operatorname{tg} \delta \operatorname{tg} \varphi',$$

essendo α' e φ' rispettivamente il semiarco diurno e la latitudine relativi all'orizzonte terrestre parallelo al piano del quadro. La latitudine di questo orizzonte è rappresentata dall'altezza che ha su di esso il polo P' (fig. 2), ossia dall'arco $K'P' = -KP = -\varphi'$, il quale valore di φ', si ottiene dal triangolo PZK mediante la formula

$$\operatorname{sen} \varphi' = \cos d \cos \varphi$$

da cui

$$\lg \operatorname{sen} \varphi' = \lg \cos 9^\circ\, 52'\, 04'' + \lg \cos 43^\circ\, 46'\, 47'' = \left\{ \begin{array}{l} 9.99353 \\ \underline{9.85841} \\ 9.85194 \end{array} \right.$$

e quindi

$$\varphi' = 45^\circ\, 20 \, .$$

Pel calcolo delle due serie dei semi archi diurni abbiamo dunque le due formule

$$\left. \begin{array}{ll} \lg \cos (180 - \alpha) & = \lg \operatorname{tg} \delta + 9{,}98174 \\ \lg \cos \alpha' & = \lg \operatorname{tg} \delta + 0{,}00493 \end{array} \right\} \qquad (12)$$

e il calcolo può disporsi nel modo seguente:

$\delta =$	0°	$\pm\, 11^\circ\, 29'$	$\pm\, 20^\circ\, 10'$	$\pm\, 23^\circ\, 27'$
$\lg \operatorname{tg} \delta =$	∞	9,30782	9,56498	9,63727
$\lg \cos \alpha =$	0	9,28956	9,54672	9,61901
$\lg \cos \alpha' =$	0	9,31275	9,56991	9,64220
$\alpha^0_{-\delta} =$	90°	$78^\circ\, 46'$	$69^\circ\, 23'$	$65^\circ\, 26'$
$\alpha^t_{-\delta} =$	6^h	$5^h\, 15^m$	$4^h\, 33^m$	$4^h\, 22^m$
$\alpha^0_{\delta} =$	90°	$101^\circ\, 14'$	$110^\circ\, 37'$	$114^\circ\, 34'$
$\alpha^t_{-\delta} =$	6^h	$6^h\, 45^m$	$7^h\, 22^m$	$7^h\, 38^m$
$\alpha'^0_{-\delta} =$	90°	$78^\circ\, 9'$	$68^\circ\, 12'$	$63^\circ\, 59'$
$\alpha'^t_{-\delta} =$	6^h	$5^h\, 13^m$	$4^h\, 33^m$	$4^h\, 16^m$
$\alpha'^0_{-\delta} =$	90°	$101^\circ\, 51'$	$111^\circ\, 48'$	$116^\circ\, 01'$
$\alpha'^t_{-\delta} =$	6^h	$6^h\, 47^m$	$7^h\, 27^m$	$7^h\, 44^m$

Da questi valori è facile dedurre l'ora del sorgere e del tramontare del Sole per le epoche considerate tanto sull'orizzonte di Firenze (Villa Palmieri) quanto sul piano del quadro. Ma per quest'ultimo è da osservare che il mezzogiorno vero è rappresentato dall'ora corrispondente alla substilare, per cui bisognerà prima determinare quest'ora ciò che si ottiene traducendo in tempo l'angolo ZPK che è dato dalla relazione

$$\cot ZPK = \cot d \operatorname{sen} \varphi , \qquad (13)$$

ricavata dal triangolo rettangolo ZKP.

Eseguendo i calcoli si trova:

$$\begin{array}{ll} \log \cot d = \lg \cot 9^\circ\, 52'\, 04'' & = 0{,}7595045 \\ \lg \operatorname{sen} \varphi \;= \lg \operatorname{sen} 43^\circ\, 47'\, 46'' & = \underline{9{,}8401740} \\ \lg \cot ZPK & = 0{,}5996785 \end{array}$$

$$ZPK = 14^\circ\, 6'\, 43'' \equiv 0^h\, 56^m\, 26^s .$$

Il computo delle ore del sorgere e del tramontare del Sole sul piano dell'orologio si fa adunque col togliere ed aggiungere rispettivamente l'arco semidiurno (espresso in tempo) da $12^h 56^m$ (arrotondato ai minuti).

Ed ora possiamo dare il quadro relativo al sorgere e tramontare del Sole sui due orizzonti al 21 d'ogni mese.

Giorno 21 dei mesi di	Ora del sorgere rispetto		Ora del tramonto rispetto		Giorno 21 dei mesi di
	al quadro	all'orizzonte	al quadro	all'orizzonte	
Marzo e Sett.	$6^h 56^m$	$6^h 00^m$	$6^h 56^m$	$6^h 00^m$	Marzo e Sett.
Aprile e Agosto	$7^h 43^m$	$5^h 15^m$	$6^h 09^m$	$5^h 45^m$	Febbraio e Ott.
Maggio e Luglio	$8^h 24^m$	$4^h 38^m$	$5^h 29^m$	$7^h 22^m$	Gennaio e Nov.
Giugno	$8^h 40^m$	$4^h 22^m$	$5^h 12_m$	$7^h 38^m$	Dicembre
	Ora del tramonto		Ora del sorgere		

Per l'uso di questa tavola è da osservare che leggendo i mesi nella prima colonna a sinistra o a destra, le ore delle varie colonne hanno rispettivamente la qualifica notata in alto o in basso.

Possiamo ora facilmente compilare la tabella seguente relativa alla illuminazione del quadro nelle epoche prescelte.

Illuminazione	Giugno	Luglio Maggio	Agosto Aprile	Settembre Marzo	Ottobre Febbraio	Novembre Gennaio	Decembre
dalle	$8^h, 40^m$	$8^h, 23^m$	$7^h, 43^m$	$6^h, 56^m$	$6^h, 45^m$	$7^h, 22^m$	$7^h, 38^m$
alle	$17^h, 12^m$	$17^h, 29^m$	$18^h, 09^m$	$18^h, 00^m$	$17^h, 15^m$	$16^h, 38^m$	$16^h, 22^m$

Il quadro non può quindi essere illuminato, durante l'anno, prima delle $6^h 45^m$ nè dopo le $18^h 09^m$. È quindi inutile calcolare le linee orarie che precedono e che seguono rispettivamente quella delle 7 e quella delle 18.

§ 5. — Determinazione delle linee orarie.

11. Questa determinazione si fa cercando l'angolo di direzione delle diverse linee orarie rispetto alla substilare. A tale scopo si consideri (fig. 2) il triangolo rettangolo BKP, dal quale si ricava che il detto angolo, misurato dal lato KB, viene dato dalla relazione:

$$\operatorname{tg} KB = \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{tg} (KPZ - h) = \operatorname{sen} 45^\circ 19' 10'' \operatorname{tg} (14^\circ 6' 30'' - h) \quad (14)$$

da cui

$$\lg \operatorname{tg} KA = 9{,}85196 + \lg \operatorname{tg} (14^\circ 6' 30'' - h)$$

in cui h assume i valori angolari a cominciare da quello corrispondente all'ora 7^a (-75°) fino all'ora 18^a ($+90^\circ$) variando dal primo al secondo limite di mezz'ora in mezz'ora ossia di $7^\circ 30'$ per volta.

Ecco qui appresso riportata l'intera tabella del calcolo.

Ore	$14^\circ 6' 30'' - h$		$\widehat{KB}$		$\Delta = e \operatorname{tg} KB$	
	Valore (2)	lg tg (3)	lg tg (4)	Valore (5)	logaritmo (6)	Valore (7)
(1)						
7	89°06′30″	1,80789	1,65985	88°44′50″	4,42124	2637,8mm
7 ½	81 36 30	0,83115	0,68311	78 16 50	3,44450	2782,9
8	74 06 30	0,54561	0,39757	68 10 50	3,15896	1442,0
8 ½	66 36 30	0,36395	0,21591	58 41 20	2,97730	940,09
9	59 06 30	0,22309	0,07505	49 55 30	2,83644	686,18
9 ½	51 36 30	0,10108	9,95304	41 54 30	2,71443	518,12
10	44 06 30	9,98648	9,83844	34 34 50	2,59988	397,95
10 ½	36 36 30	9,87093	9,72289	27 50 50	2,48428	304,99
11	29 06 30	9,74569	9,59765	21 36 10	2,35904	228,58
11 ½	21 36 30	9,59780	9,44976	15 43 50	2,21115	162,61
12	14 06 30	9.40026	9,25222	10 08 10	2,01361	103,18
12 ½	6 36 30	9,06390	8,91586	4 42 30	1,67725	47,561
13	— 0 53 30	8,19211	8,05407	— 0 39 00	0,81546	6,5382
13 ½	— 8 23 30	9,16885	9,02081	— 5 59 20	1,78220	60,562
14	— 15 53 30	9,45439	9,30635	— 11 26 40	2,06774	116,88
14 ½	— 23 23 30	9,63605	9,48801	— 17 06 00	2,24940	177,58
15	— 30 53 30	9,77691	9,62887	— 23 02 50	2,39026	245,62
15 ½	— 38 23 30	9,89892	9,75088	— 29 24 00	2,51227	325,29
16	— 45 53 30	0,01352	9,86548	— 36 15 50	2,62687	423,52
16 ½	— 53 23 30	0,12907	9,98103	— 43 44 50	2,74242	552,61
17	— 60 53 30	0,25431	0,10627	— 51 56 30	2,86766	737,33
17 ½	— 68 23 30	0.40220	0,25416	— 60 53 00	3,01555	1036,5
18	— 75 53 30	0,59974	0,45170	— 70 32 10	3,21309	1633,4

12. I numeri delle ultime due colonne hanno bisogno di spiegazione. Le posizioni delle linee orarie, stabilite per mezzo dei valori angolari, non potrebbero risultare molto precise; si ricorre perciò a quest'altro metodo.

Si traccia la linea equinoziale la quale, come è noto, taglia ortogonalmente la substilare in un punto E (fig. 2), tale che la sua distanza e dal centro O dell'orologio, è ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto OG è la lunghezza l del Polo-stilo; avremo quindi

$$e = \frac{l}{\cos PK},$$

essendo PK (fig. 3) l'arco che misura la latitudine φ' dell'orizzonte terrestre parallelo al quadro.

Eseguendo il calcolo si trova

$$\begin{array}{ll} \log 288{,}6 & = 0{,}15303 \\ c^0 \lg \cos 45^0\,19'\,32'' & = 0{,}60836 \\ \log e & = \overline{2{,}76139} \end{array} \qquad e = 577^{mm}{,}28.$$

Rispetto all'equinoziale tutte le linee orarie risultano oblique per cui se ne potrà determinare la posizione calcolando la distanza Δ del piede di ognuna di esse dal piede **E** della perpendicolare. Tali distanze saranno perciò date dalla formula

$$\Delta = e \operatorname{tg} KP.$$

Aggiungendo, adunque, a tutti i numeri della colonna (4), il valore costante

$$\log e = 2{,}76139,$$

otterremo i numeri della colonna (6) e quindi quelli della colonna (7) che rappresentano le distanze cercate. A controllo dei calcoli, e per maggiore precisione nel tracciamento delle linee orarie, si calcolarono anche le porzioni λ di linee orarie comprese fra il centro dell'orologio e la linea equinoziale (lunghezze d'ombre equinoziali). Non daremo ora qui queste lunghezze perchè esse trovano il loro posto più naturale nella tavola n. 16 che fornisce gli elementi pel tracciamento delle *iperbole dei segni* delle quali ci occuperemo fra poco; tali lunghezze sono quelle fornite dalla colonna media (corrispondente a $\delta = 0$) della tavola predetta.

13. Ritornando ora alla tavola precedente è da osservare che per le prime quattro linee orarie e per le ultime tre, i piedi corrispondenti sulla linea equinoziale cadono troppo lontani da quello della substilare per potere essere agevolmente segnati. Per rimediare a questo inconveniente è stata condotta alla distanza $e' = 330^{mm}$, la parallela alla linea equinoziale per cui le distanze Δ e le lunghezze λ si ridurranno rispettivamente a

$$\Delta' = \Delta \frac{e - e'}{e} = \Delta \frac{247{,}28}{577{,}28} \quad \text{e} \quad \lambda' = \lambda \frac{e - e'}{e} = \lambda \frac{247{,}28}{577{,}28}$$

da cui

$$\lg \Delta' = \lg \Delta + 9{,}63180; \qquad \lg \lambda' = \lg \lambda + 9{,}63180.$$

Aggiungendo, dunque, 9,63180 tanto ai logaritmi di Δ dati dalla tavola precedente, quanto ai $\log \lambda$ dati, per δ_0, dalla tav. (n. 16) delle lunghezze d'ombra, e passando poi dai logaritmi ai numeri si ricavano i valori

Ore	lg Δ'	Δ'	lg λ'	λ'
7	4,05304	1129,9	4,05354	11312
7 ½	3,07630	1192,1	3,08537	1217,2
8	2,79076	617,68	2,82263	664,71
8 ½	2,60910	406,54	2,67742	575,80
17	2,49946	315,84	2,60327	401,12
17 ½	2,64735	443,97	2,70599	508,15
18	2,84489	699,63	2,87040	741,99

L'inconveniente sopra lamentato rimane ancora, almeno per la distanza corrispondente all'ora 7ª; ma si potrebbe eliminare prendendo la retta ausiliaria, parallela all'equinoziale, convenientemente vicina al centro dell'orologio in modo che la distanza e la lunghezza della linea oraria possano cadere entro i limiti del disegno.

È anche da avvertire che la determinazione delle linee orarie riesce tanto meno precisa quanto più la retta di riferimento è vicina al centro orario, e la divergenza si rende, naturalmente, più sensibile nelle parti della linea oraria che più sono lontane dal centro orario.

È per questa ragione che si è creduto opportuno, per le ore vicine alla substilare (dalla 9ª alla 16ª) di prendere anche una linea di riferimento al disotto della equinoziale, ad una distanza di 350^{mm}, per la quale si sono fatte le identiche determinazioni a quelle della tabella precedente e che per brevità faremo a meno di riportare.

In questo modo le linee orarie più importanti vengono ad avere molteplici controlli.

14. Da quanto precede risulta che la determinazione delle linee orarie è stata fatta con riferimento alla linea equinoziale o, per compenso, a qualche altra linea ad essa parallela.

Abbiamo seguito questo procedimento perchè molti elementi necessari a tali determinazioni vengono forniti da altre ricerche; ma veramente non è forse questo il metodo preferibile, perchè l'equinoziale, eccettuato il caso di un orologio *verticale diretto* (quadro giacente sul 1° verticale) resultando più o meno obliqua rispetto alla meridiana, non si presta sempre bene per la determinazione delle linee orarie non molto lontane dalla meridiana.

Un altro metodo, che è stato pure da noi adoperato a conferma dell'esattezza delle prime determinazioni, ma pel quale non staremo a riportare qui i risultati dei calcoli, consiste nel determinare i punti d'intersezione delle linee orarie coi lati del rettangolo che limitano il quadro.

A tale scopo si misurano esattamente le distanze dei due lati verticali e quelle orizzontali dal piede del gnomone, e così verremo a conoscere le distanze del centro orario dei quattro lati del rettangolo. D'altra parte la colonna (5) della tav. del n. 11, dà subito il mezzo di ricavare i valori degli angoli che le linee orarie formano colla meridiana e conseguentemente quelli formati coi quattro lati del rettangolo; dopo ciò potremo anche facilmente determinare la intersezione delle linee orarie con tali dati o, più precisamente, le distanze di questi punti d'intersezione dall'uno o dall'altro estremo di quel lato su cui si trovano.

Per ogni linea oraria si faranno i calcoli necessari a determinare i punti d'intersezione con due dei lati del rettangolo e non coi loro prolungamenti e così la precisione di ogni linea oraria resterà verificata dal fatto che i due punti determinati ed il centro orario debbono trovarsi in linea retta.

§ 6. — Determinazione delle iperbole dei segni.

15. Le estremità delle ombre dello stilo descrivono, durante una stessa giornata, delle coniche che, alle nostre latitudini, sono sempre delle iperbole. Fino da tempi antichi sono state segnate queste curve in corrispondenza dei giorni in cui il Sole entra nei vari segni zodiacali. È per questa ragione che si sogliono distinguere colla denominazione di iperbole dei segni. Il loro tracciamento si effettua determinando, per una stessa giornata, le lunghezze delle varie linee orarie cercando il valore di OT (fig. 2) come lato del triangolo piano OTG nel quale OG è la lunghezza l del Polo-stilo, TOG l'angolo della linea oraria col Polo-stilo, e che è misurato dall'arco PB del triangolo sferico rettangolo KPB; infine l'angolo OGT, che è misurato dall'arco PA, è la distanza polare del Sole $(90 - \delta)$; avremo perciò:

$$\mathrm{OT} = \frac{l \cos \delta}{\cos(\delta + \mathrm{PB})}$$

essendo

$$\cot \mathrm{PB} = \frac{\cos(\mathrm{ZPK} - h)}{\operatorname{tg} \varphi'}. \tag{16}$$

La determinazione delle lunghezze d'ombra si farà cercando prima, in corrispondenza delle varie linee orarie, i valori angolari di PB; poi, col sussidio di questi valori, si calcoleranno quelli di OT.

Per la prima ricerca si ha

$$\begin{aligned} \lg \cot \mathrm{PB} &= \lg \cos(\mathrm{ZPK} - h) + \mathrm{C}^{\circ} \lg \operatorname{tg} \varphi' = \\ &= \lg \cos \{ 14^{\circ} 6' 30'' - h \} + 9{,}99503, \end{aligned}$$

ove ad h si debbono dare, al solito, tutti i valori, di $7^{\circ} 30'$ in $7^{\circ} 30'$, compresi fra -75° e $+90^{\circ}$.

Nella tavola che segue sono riportati tutti i calcoli relativi a queste determinazioni alle quali si è aggiunto, per uniformità e per rendere completa la tavola stessa, anche il valore di PB corrispondente all'ora segnata dalla substilare, il quale valore, che è lo stesso φ', ci sarà utile per la determinazione dei vertici delle *iperbole dei segni*.

Ore	$14^\circ 6' 30'' - h$		PB	
	Valore	lg cos	lg cot	Valore
7	89°06' 30''	8,19206	8,18709	89°07' 10''
7 ½	81 36 30	9,16417	9,15920	81 47 20
8	74 06 30	9,43791	9,43294	74 50 20
8 ½	66 36 30	9.59881	9,59384	68 34 10
9	59 06 30	9,71047	9,70550	63 05 20
9 ½	51 36 30	9,79312	9,78815	38 27 00
10	44 06 30	9,85614	9,85117	54 37 50
10 ½	36 36 30	9.90417	9,89960	51 33 50
11	29 06 30	9,94136	9,93639	49 10 50
11 ½	21 36 30	9,96835	9.96338	47 24 50
12	14 06 30	9,98670	9,98173	46 12 20
12 ½	6 36 30	9,99710	9,99213	45 31 10
substilare	. . . . . .	. . . . .	. . . . .	45 19 40
13	0 53 30	9,99995	9,99498	45 19 50
13 ½	8 23 30	9,99533	9,99036	45 38 10
14	15 53 30	9.98308	9,97811	46 26 30
14 ½	23 23 30	9,96275	9,95778	47 46 50
15	30 53 30	9,93356	9,92859	49 41 20
15 ½	38 23 30	9,89420	9,88923	52 13 40
16	45 53 30	9,84262	9,83765	55 28 10
16 ½	13 23 30	9,77550	9,77053	59 28 40
17	60 53 30	9,68705	9,68208	64 19 00
17 ½	68 23 30	9,56615	9,56118	69 59 40
18	75 53 30	9,38696	9,38199	76 27 00

16. Pel calcolo delle lunghezze d'ombra abbiamo già stabilito la formula (16) la quale dà

$$\lg OT = \lg l + \lg \cos \delta + C^0 \lg \cos (\delta + PB) \qquad (17)$$

in cui

$$\lg l = 2{,}60836 ;$$

δ assume i valori già determinati per la declinazione del Sole nel momento dell'ingresso nei vari segni zodiacali; PB prende tutti i valori dati dalla tavola precedente in corrispondenza di ogni ora.

Giorno 21 di.	Giugno ♋	Luglio ♌ Maggio ♊	Agosto ♍ Aprile ♉	Sett. ♎ Marzo ♈	Ottobr. ♏ Febbr. ♓	Nov. ♐ Genn. ♒	Dicem. ♑
δ	$+ 23^\circ 27'$	$+ 20^\circ 10'$	$+ 11^\circ 29'$	0°	$- 11^\circ 29'$	$- 20^\circ 10'$	$- 23^\circ 27'$
$\lg \cos \delta + \lg l$	2,57092	2,58088	2,59958	2,60836	2,59958	2,58088	2,57092
ore							
7	—	—	—	89° 07′ 10″ 8,18662 4,42174 2640,8	77° 38′ 10″ 9,33066 3,26892 1857,5	68° 57′ 10″ 9,55532 3,02556 1060,6	65° 40′ 10″ 9,61494 2,95598 903,61
7 ½	—	—	—	81° 47′ 20″ 9,15479 3,45357 2841,6	72° 18′ 20″ 9,48279 3,11679 1308,6	61° 37′ 20″ 9,67695 2,90393 801,55	58° 20′ 20″ 9,72007 2,85085 709,34
8	—	—	86° 19′ 20″ 8,80717 3,79241 6200,4	74° 50′ 20″ 9,41753 3,19083 1551,8	63° 21′ 20″ 9,65172 2,94784 886,83	54° 40′ 20″ 9,76212 2,81876 658,81	51° 23′ 20″ 9,79521 2,77571 596,64
8 ½	—	88° 44′ 10″ 8,34355 4,23733 17272	81° 03′ 10″ 9,19180 3,40878 2563,2	63° 34′ 10″ 9,56274 3,04562 1110,8	57° 05′ 10″ 9,73510 2,86478 131,95	48° 24′ 10″ 9,82210 2,75878 273,83	45° 07′ 10″ 9,84858 2,72234 527,64
. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
12 ½	68° 58′ 10″ 9,55493 3,01604 1087,7	65° 41′ 10″ 9,61462 2,96626 925,26	57° 00′ 10″ 9,73608 2,86350 730,30	45° 31′ 10″ 9,84551 2,76285 579,23	34° 02′ 10″ 9,91839 2,68119 479,94	25° 21′ 10″ 9,95602 2,62486 421,56	22° 04′ 10″ 9,96695 2,60397 401,76
substilare	68° 46′ 40″ 9,55869 3,01223 1028,6	65° 20′ 40″ 9,61782 2,96306 918,46	36° 48′ 40″ 9,73831 2,86127 726,56	45° 19′ 40″ 9,24699 2,76137 577,26	33° 50′ 40″ 9,91937 2,68021 478,86	25° 09′ 40″ 9,95670 2,62418 420,90	21° 52′ 40″ 9,96754 2,60338 401,22
13	68° 56′ 50″ 9,55537 3,01565 1036,7	65° 29′ 50″ 9,61777 2,96310 918,57	56° 48′ 50″ 9,73827 2,86131 727,62	45° 19′ 50″ 9,84696 2,76140 577,30	33° 50′ 50″ 9,91935 2,68023 478,88	25° 09′ 50″ 9,95669 2,62419 420,91	21° 52′ 50″ 9,96753 2,60339 401,23
. . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
16 ½	82° 55′ 40″ 9,09033 3,48059 3024,1	79° 38′ 40″ 9,25468 3,32620 2119,4	70° 57′ 40″ 9,51350 3,08608 1219,2	59° 28′ 40″ 9,70575 2,90261 799,12	47° 59′ 40″ 9,82556 2,77402 594,32	39° 18′ 40″ 9,88858 2,69230 492,38	36° 01′ 40″ 9,90790 2,66302 460,28
17	87° 46′ 00″ 8,59072 3,98020 9554,3	84° 29′ 00″ 8,98288 3,59800 3962,8	75° 48′ 00″ 9,40442 3,19516 1567,3	64° 19′ 00″ 9,63689 2,97147 936,42	52° 50′ 00″ 9,78113 2,81845 658,34	44° 09′ 00″ 9,85575 2,72513 531,04	—
17 ½	—	—	81° 28′ 40″ 9,17083 3,42875 2683,8	69° 59′ 40″ 9,53417 3,07419 1186,3	58° 30′ 40″ 9,71795 2,88163 761,43	—	—
18	—	—	87° 56′ 00″ 8,55705 4,04253 1102,9	76° 27′ 00″ 9,36976 3,23860 1732,2	—	—	—

La tavola che precede contiene il calcolo per la determinazione delle lunghezze d'ombra; essa non ha bisogno di spiegazioni per quanto si riferisce alle intestazioni e al modo di ricavare la lunghezza d'ombra per un'ora qualunque di una delle epoche anzidette. Pel modo come è stato eseguito il calcolo crediamo però utile avvertire che le quaderne di numeri corrispondenti ad una stessa graffa, hanno il seguente significato:

il 1°, è il valore di $\delta + PB$ con PB arrotondato alle decine di secondi;

il 2°, è il log cos del valore precedente;

il 3°, è la differenza fra il logaritmo precedente e il valore che si trova in testa alla colonna corrispondente;

il 4°, è il valore di OT.

Della tavola calcolata non sono riportate che le sole parti estreme e quella media, le quali possono bastare a dare un'idea generale della disposizione e della estensione della tavola stessa.

I valori delle lunghezze d'ombra corrispondenti alla substilare, hanno speciale interesse perchè servono a determinare i vertici delle iperbole, come abbiamo accennato al n. 15.

Non vogliamo tralasciare di osservare che tutti i valori di una medesima colonna si riferiscono ad uno stesso ramo d'iperbole; che i due rami che corrispondono a valori eguali ma di segno contrario di δ, appartengono ad una stessa iperbole; che in corrispondenza di $\delta = 0$ si trovano i valori che determinano, per punti, la linea equinoziale già costruita; che i valori trovati per le lunghezze della substilare, forniscono i vertici delle tre iperbole; che le semisomme di queste lunghezze, corrispondenti ad una medesima iperbola, possono servire a determinare i centri delle iperbole medesime.

I valori della colonna $\delta = 0$ e quelli in corrispondenza della substilare, dividono tutta la tavola in quattro parti ognuna delle quali dà tre sistemi di valori che determinano, per punti, tre mezzi rami delle tre iperbole suddette.

Basterebbe quindi limitarci:

1°, a calcolare una di queste quattro parti (facendo, s'intende, la determinazione di tutti i valori della colonna $\delta = 0$ e di quelli relativi alla riga della substilare, che servono rispettivamente per i controlli già accennati al n. 12 e per la determinazione dei vertici dell'iperbole):

2°, a disegnare il mezzo ramo di iperbole fornito da questi valori;

3°, a riportare questo disegno, in modo conveniente nelle altre tre posizioni sul quadro servendo, a questo scopo, la conoscenza dell'asse trasverso dell'iperbole (substilare) e i vertici determinati in precedenza.

Non ostante il risparmio di fatica che si conseguirebbe con questa limitazione, si ritenne opportuno, tuttavia, di calcolare la tavola interamente per ottenere, colla ripetizione del disegno, *ex novo*, pei quattro mezzi rami di ciascuna iperbole, un controllo all'esattezza dei valori calcolati nella tavola.

17. A meglio precisare l'andamento delle iperbole dei segni, specialmente nei tratti che si estendono a maggior distanza dal vertice, è anche utile il tracciamento dei respettivi asintoti i quali possono considerarsi come le linee sulle quali il foro gnomonico si proietta a distanza infinita nel giorno in cui il Sole entra nel segno zodiacale al quale corrisponde l'iperbole considerata. Questa circostanza porta a concludere che dovendo essere, per la (16),

$$\mathrm{OT} = \infty = \frac{l \cos \delta}{\cos(\delta + \mathrm{PB})},$$

sarà

$$\mathrm{PB} = 90^\circ - \delta .$$

A questo risultato, del resto, si perviene subito osservando che la linea oraria asintotica corrisponde all'istante in cui il Sole sorge o tramonta rispetto al piano del quadro nel giorno anzidetto.

È poi chiaro che per la determinazione delle linee orarie asintotiche, basterà trovare, al solito, l'angolo ω che esse formano colla substilare, ciò che si otterrà più facilmente, invece che dalla formula (14), dalla rivoluzione del triangolo PKB (fig. 2) quando si prenda $\mathrm{PB} = 90^\circ - \delta$, per mezzo della formula

$$\cos \mathrm{PB} = \cos \mathrm{KB} \cos \mathrm{PK}$$

da cui

$$\cos \mathrm{KB} = \frac{\cos \mathrm{PB}}{\cos \mathrm{PK}}$$

ovvero

$$\cos \omega = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos \varphi'} = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\cos 45^\circ\, 19'\, 40''}$$

e quindi

$$\lg \cos \omega = \lg \operatorname{sen} \delta - 9{,}84694$$

ove δ prende i valori

$$\pm 11^\circ\, 29' ; \qquad \pm 20^\circ\, 11' ; \qquad \pm 23^\circ\, 27' .$$

Ma per quanto abbiamo detto al principio del n. 12, l'effettivo tracciamento delle linee orarie asintotiche si farà colla solita determinazione delle distanze Δ e per avere gli asintoti non dovremo far altro che tracciare le rette parallele a queste linee orarie, pei centri delle iperbole respettive.

La tavola che segue contiene tutti i calcoli relativi alla determinazione dei valori delle ω e delle Δ.

δ =	$\pm 11^\circ 29'$	$\pm 20^\circ 10'$	$\pm 23^\circ 27'$
$\lg \operatorname{sen} \delta$ =	9,29903	9,53751	9,59983
$\lg \cos \omega$ =	9,45209	9,69057	9,75289
ω =	$\pm 73^\circ 39'$	$\pm 60^\circ 38'$	$\pm 55^\circ 31'$
$\operatorname{tg} \omega$ =	0,53259	0,24972	0,16287
Calcolo della distanza c del centro delle iperbole dalla linea equinoziale	726,56	918,46	1028,60
	478,86	420,91	401,22
	1205,42	1339,37	1429,82
	602,71	669,68	714,91
	− 577,26	− 577,26	− 577,26
	25,45	92,42	137,65
$\lg c$ =	1,40569	1,96577	2,13877
$\lg \operatorname{tg} \omega + \lg c$ =	1,93828	2,21549	2,30164
Δ =	86,752	164,25	200,28

Il procedimento di questo calcolo non ha bisogno di spiegazioni; diremo solamente che la posizione del centro o meglio la distanza c relativa a ciascuna iperbole, viene determinata come semisomma delle distanze dalla linea equinoziale dei due vertici della iperbole considerata, le quali distanze sono fornite dai valori corrispondenti alla riga della substilare nella tavola del n. 16.

§ 7. — Il disegno dell'orologio sulla carta.

18. Determinati tutti gli elementi numerici necessari alla completa costruzione dell'orologio solare, procediamo ora a questa costruzione, non però subito sulla vera e propria superficie del quadro, ove il disegno non potrebbe essere eseguito con tutta la precisione desiderabile a causa delle granulosità del muro, ma sì bene su di un gran foglio di carta capace di contenere, oltre le linee dell'orologio, anche tutte quelle altre che sono necessarie alla sua costruzione, ma che non debbono essere riportate sul quadro.

Ecco come si procede per questa costruzione.

In posizione conveniente del foglio, e parallelamente a due dei lati del rettangolo che lo limitano, si conduce una retta che si assume come meridiana.

Condotta la perpendicolare XX (fig. 3) a questa linea nel punto M, si prenderà su di essa $MG' = x = 50^{mm},21$ (n. 8) e si prenderà pure, sulla meridiana, $MO = b = 280^{mm},88$ (n. 8) determinando in tal modo il centro O dell'orologio; la congiungente O con G' e il suo prolungamento, ci darà la substilare. L'esattezza del triangolo OMG' resta controllata da $OG' = q = 255^{mm},34$ (n. 8).

Per quanto non necessari, si tracceranno anche gli assi delle x e delle y per avere una maggior copia di linee di riferimento nel trasportare il disegno sul quadro come fra poco diremo.

Sulla substilare si prende, a partire da O, un segmento eguale a $577^{mm},26$ (valore dato dalla tav. del n. 16 in corrispondenza della colonna intestata $\delta = 0$ e dell'ora segnata dalla substilare) e con ciò resta determinato il punto E della equinoziale e quindi la linea equinoziale stessa che, come è noto, è perpendicolare alla substilare nel punto ora determinato.

Sulla equinoziale, a partire da E, si riportano poi i valori di Δ dati dalla colonna 7 della tavola del n. 11; le congiungenti i punti trovati col centro O dell'orologio, ci faranno conoscere le varie linee orarie, l'esattezza delle quali resta poi controllata col riscontrare che le lunghezze delle porzioni di esse comprese fra O e l'equinoziale, sono precisamente eguali ai valori forniti dalla colonna $\delta = 0$ nella tavola del n. 16.

Per le linee orarie che non potrebbero essere agevolmente costruite nel modo precedente, si ricorre ad uno di quei compensi ai quali abbiamo accennato ai numeri 13 e 14.

Trovate le linee orarie si costruiscono, per punti, le iperbole dei segni riportando, su dette linee a partire dal centro orario O, le lunghezze d'ombra fornite dalla tavola del n. 16.

Quelle di queste lunghezze che apparivano troppo grandi, e che sarebbe stato malagevole di misurare e riportare nella loro intera grandezza, sono state sostituite dalle porzioni di esse contate a partire dalla linea equinoziale.

A tale scopo, coi valori dati dalla tavola predetta, si è formata un'altra tabella nella quale tutti i valori di una stessa linea sono stati diminuiti dei valori corrispondenti segnati nella colonna $\delta = 0$.

Prima di disegnare le diverse iperbole sono stati tracciati i corrispondenti asintoti, col metodo indicato al n. 17, i quali concorrono, insieme ai punti già trovati, a precisare meglio l'andamento dei rami delle diverse curve.

Dopo ciò su delle striscie di carta lucida di grandezza tale da poter comprendere un mezzo asintoto insieme ai punti della relativa parte di curva, si sono tracciati a mano i tre differenti mezzi rami di iperbole, e ognuno di questi disegni è stato poi successivamente e convenientemente riportato sulle parti rimanenti di una medesima iperbole per constatare se i punti che individuano queste parti, cadano o no sul disegno. Con questo mezzo si può correggere qualche piccola imperfezione del disegno ed anche rilevare qualche eventuale errore di calcolo che potesse essere stato commesso nella determinazione di uno o più punti. È per questa ragione che, per quanto non necessario, si è voluto calcolare e determinare ognuna delle quattro serie di punti che servono a stabilire l'andamento dei quattro mezzi rami di una stessa iperbole, come già è stato osservato alla fine del n. 16.

Disegnato così l'orologio, non rimaneva che aggiungervi le usuali iscrizioni ed i simboli destinati a distinguere le varie linee. A questo scopo si è adottata la numerazione romana per le ore intere, tralasciando quella delle mezz'ore, e ponendo i numeri, per quanto fosse possibile, vicini alla parte perimetrale del rettangolo che racchiude il quadrante.

Le iperbole sono state notate coi corrispondenti *segni zodiacali*, ricordando che ogni ramo comporta due *segni* i quali sono stati pure disposti lungo la parte perimetrale del rettangolo. in modo da succedersi secondo l'ordine naturale, a cominciare dalla parte a sinistra della linea equinoziale e procedendo nel senso contrario a quello del movimento delle lancette degli orologi. Inoltre si è posta in basso, a sinistra, intercalandola fra le linee orarie, l'indicazione della *declinazione del quadro*, ed in alto, ai due lati, le indicazioni della *longitudine* e della *latitudine*.

Per queste due ultime iscrizioni è stato necessario sopprimere le linee orarie delle 7 e $7\frac{1}{2}$ e delle $17\frac{1}{2}$ e 18 le quali, del resto, non servono che per pochi mesi e, d'altra parte, per la loro distanza dalla linea meridiana, hanno assai minor grado di precisione, per quanto concerne le indicazioni orarie, a causa del fenomeno di rifrazione atmosferica, per cui avrebbero potuto, senz'altro, tralasciarsi.

Infine nella parte mediana superiore dell'orologio, si è posto un motto latino per seguire l'uso praticato dalla maggior parte dei costruttori che dagli orologi solari sapevano trarre ispirazioni a moniti, pensieri ed esortazioni.

§ 8. — Il disegno dell'orologio sul muro.

19. Ricorderemo che sul muro vennero già disegnate, durante le osservazioni, alcune linee, e cioè la meridiana, la substilare (e quindi il centro dell'orologio), l'orizzontale passante per il piede dello gnomone (asse delle x) e la verticale passante per lo stesso centro (asse delle y). Queste linee ci servirono di guida per il riporto del disegno dalla carta sul muro, riporto che vènne effettuato nel modo seguente: Disteso il foglio sul quadro, si curò anzitutto che le due meridiane venissero in perfetta coincidenza e così pure i due assi delle x; poi, tenuto conto del leggerissimo spostamento già fatto subire all'asse delle y (n. 8), si osservò se anche fra questi due assi esisteva la conveniente corrispondenza, come pure fra le due substilari.

Mano a mano che veniva riscontrata o ristabilita la coincidenza delle linee della carta con quelle del quadro, si ebbe cura di fissare il foglio con spilli (preventivamente scapocchiati con una pinzetta a taglio) sulla superficie del quadro. Vennero pure confitti spilli in modo da individuare con precisione le varie linee orarie e le iperbole dei segni. Staccato poi il foglio dal muro senza togliere gli spilli, si passò al tracciamento in lapis di tutte le linee dell'orologio servendosi, a tal uopo, della riga e di sagome in cartone, delle diverse iperbole dei segni, le quali sagome restavano guidate, nel loro andamento, dalla posizione degli spilli già confitti nel muro.

Compiuto il disegno ne vennero graffiate nel muro tutte le linee [1] con una punta d'acciaio, fino alla profondità di circa 3^{mm} e per una larghezza di due, servendosi sempre, anche per tale operazione, della riga, delle sagome e della guida degli spilli.

Questo graffito venne fatto con linea continua per tutto il disegno, eccettuate le linee delle mezz'ore che sono state interrotte in prossimità della linea equinoziale e delle iperpole dei segni.

20. A questo punto cominciarono le operazioni di dipintura dell'orologio solare. Al piano del quadro fu data una doppia mano di

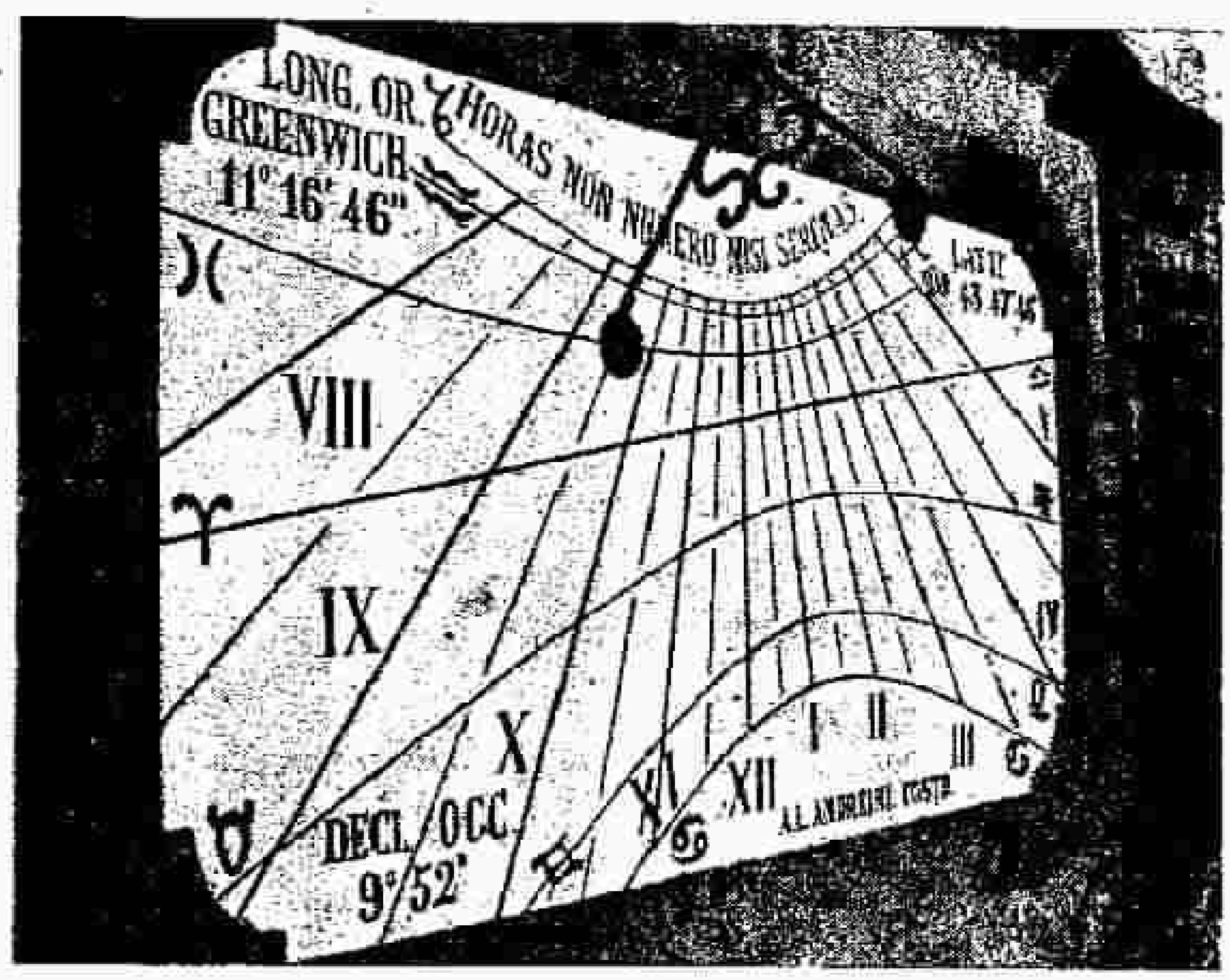


Fig. 4.

vernice bianca, seccata la quale, fu nuovamente disegnato l'orologio con doppie linee a lapis in maniera che quelle delle ore e l'equinoziale risultassero di 6^{mm} di larghezza, e le linee delle mezz'ore e quelle delle iperbole dei segni solamente di quattro. Queste grossezze furono stabilite in seguito a ripetute prove per mezzo di linee di varia larghezza disegnate su carta ed osservate dal basso. È poi

---

[1] Questo graffito si è fatto allo scopo di serbare traccia più duratura del disegno nel caso che, coll'andar del tempo, la tinta delle linee dovesse in tutto o in parte sparire.

sottinteso che per le esatte indicazioni orarie si devono considerare gli istanti in cui il centro dell'immagine del foro gnomonico si trova sulle linee ideali che bipartiscono quelle del disegno nel senso della loro lunghezza, perchè sono appunto queste linee ideali che corrispondono alle posizioni degli spilli.

Tolti poi tutti gli spilli si dipinsero a vernice nera le diverse linee facendo uso, pel tracciamento delle iperbole, di apposite sagome in legno ricavate da quelle in cartone.

Nel tracciamento delle varie parti dell'orologio si è cercato di imitare, per quanto fosse possibile, il tipo dei vecchi quadranti solari, ed è appunto per questa ragione che si è tralasciata la *curva del mezzogiorno medio* che è di invenzione relativamente recente. [1]

A questa omissione, del resto, si è supplito colla compilazione di una tavola a parte la quale, per i vari giorni dell'anno, dà i minuti che si debbono aggiungere o togliere all'ora segnata dall'orologio solare, per ottenere la corrispondente ora media del fuso dell'Europa centrale.

Dopo tutte queste operazioni l'orologio solare prese la forma quale apparisce nella figura 4.

In fine per far perdere al quadrante solare l'aspetto di opera moderna, vennero convenientemente ed artisticamente *invecchiati* tanto lo stile gnomonico col proprio sostegno, quanto le parti in disegno in modo che il tutto risultasse in buona armonia colla decorazione esterna dei muri della Villa.

A. L. ANDREINI.

SULLE EQUAZIONI DI CONDIZIONE DELLE RETI CREMONIANE DI CURVE PIANE

1. In una Nota pubblicata nel 1897 negli Atti del R. Istituto Veneto ho risolto il problema che si propone di cercare tutte le soluzioni generali e soddisfacenti il problema geometrico delle equazioni di condizione delle reti cremoniane di curve piane. La Commissione chiamata a riferire alla R. Accademia dei Lincei sul concorso ai premi ministeriali per le scienze matematiche per il 1898 (Atti Acc. Lincei, 1899) giudicò la trattazione di detto lavoro oscura ed involuta, e tale perciò da " lasciare dubbioso il lettore dell'esattezza dei risultati che sarebbero per sè importanti ". Per questo ho pensato di ripresentare i risultati ottenuti in codesta Nota, modificando so-

[1] L'adozione del tempo medio, accettata per la prima volta a Ginevra nel 1780 andò poi successivamente diffondendosi a Berlino (1810), in Inghilterra (1815), a Parigi (1816) ed in Italia (1852-69).

stanzialmente l'esposizione, in modo da togliere quei dubbi cui è stato accennato sopra, ed approfittando di quest'occasione per entrare in qualche dettaglio che valga a mettere in maggior luce la portata delle formole trovate. Lavori su quest'argomento pubblicati posteriormente alla Nota citata sono: MONTESANO, *Su le reti omaloidiche di curve piane* (Rend. R. Acc. delle Scienze di Napoli, 1905); LARICE (Atti Ist. Veneto, 1909). (1)

Scrivendo le equazioni delle quali intendiamo occuparci come segue:

$$\Sigma r x_r = 3n - 3, \quad \Sigma r^2 x_r = n^2 - 1$$

assumeremo come incognite le r, le x_r ed anche la n. Ciò viene consigliato dal fatto che le poche soluzioni generali trovate dal Cremona e da altri che si sono occupati dell'argomento, sono date in generale sotto particolari ipotesi rispetto ad n, cioè per es. sotto l'ipotesi che n sia pari o impari, che diviso per 3 dia per resto 0, 1, 2, che sia il prodotto di due fattori diversi da 1, ecc.

2. Prendiamo una rete cremoniana $[C_q]$ di ordine q, per la quale sia:

$$x_{m_1} = a_1, \quad x_{m_2} = a_2, \ldots, \quad x_{m_i} = a_i, \ldots, \quad x_{m_s} = a_s$$

cioè che abbia a_1 punti base di multiplicità m_1, a_2 di multiplicità m_2, ecc., ed applichiamo ad essa una trasformazione isologica di ordine r, prendendo il punto multiplo in posizione generica, e facendo cadere b_1 dei punti semplici fra gli a_1 di multiplicità m_1, b_2 fra gli a_2 di multiplicità m_2, ecc., ed i rimanenti in posizione generica; otterremo allora una rete di ordine

$$rq - b_1 m_1 - b_2 m_2 \ldots - b_i m_i \ldots - b_s m_s,$$

ordine che indicheremo con q', ed avente i seguenti punti fondamentali:

$$\begin{array}{ccc}
\text{numero} & \text{multiplicità} & \\
1 & q' - q & \\
2r - 2 - b_1 - b_2 \ldots - b_i \ldots - b_s & q & \\
b_1 & q - m_1 & \\
a_1 - b_1 & m_1 & \\
b_2 & q - m_2 & \\
a_2 - b_2 & m_2 & \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & (\alpha) \\
b_i & q - m_i & \\
a_i - b_i & m_i & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
b_s & q - m_s & \\
a_s - b_s & m_s &
\end{array}$$

(1) Qualche mese dopo che il manoscritto di questa Nota era stato spedito alla Direzione del *Periodico* sono comparsi due altri lavori del prof. MONTESANO sullo stesso argomento, cioè: 1°. *I gruppi cremoniani di numeri* (Atti R. Acc. Napoli, 1911). 2°. *Su le curve omologhe di una corrispondenza birazionale piana* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, 1911).

Affinchè la soluzione (α) soddisfi al problema geometrico è necessario e sufficiente che le b siano scelte in modo da non superare ciascuna la corrispondente a, e in guisa che la loro somma non superi $2r-2$, e inoltre che sia $q'-q \geqslant 0$, cioè

$$(r-1)\,q \geqslant b_1 m_1 + b_2 m_2 + \ldots + b_s m_s\,.$$

Ora siccome è

$$\Sigma\, b_h m_h \leqslant \Sigma\, a_h m_h = 3q-3$$

ne segue che l'ultima condizione è intanto soddisfatta sempre per $r \geqslant 4$. Per $r=3$ si ha $2r-2=4$, quindi la somma delle b non può superare 4, e siccome la somma degli ordini di 5 punti fondamentali (e perciò anche di 4) non può superare $2q$, così la nostra condizione è soddisfatta anche per $r=3$; analogamente dicasi per $r=2$. Dunque le b non devono soddisfare che alle condizioni

$$b_h \leqslant a_h\,,\quad \Sigma\, b_h \leqslant 2r-2.$$

Per $r=1$ devono essere tutte le b eguali a 0, e si ottiene di nuovo la $[C_q]$ da cui si è partiti.

3. Applichiamo ancora alla rete $[C_q]$ una trasformazione isologica con le stesse ipotesi precedenti, ma prendendo il punto fondamentale multiplo in uno degli a_i punti di multiplicità m_i per la rete data. Otteniamo allora, ponendo b_i+1 in luogo di b_i, una rete di ordine

$$r\,(q-m_i) - b_1 m_1 - b_2 m_2 \ldots - b_i m_i \ldots - b_s m_s$$

ordine che indicheremo con q_1, i cui fondamentali sono

$$\begin{array}{ccc}
\text{numero} & \text{multiplicità} & \\
1 & q_1-(q-m_i) & \\
2r-2-b_1-b_2\ldots-b_i\ldots-b_s & q-m_i & \\
b_1 & q-m_i-m_1 & \\
a_1-b_1 & m_1 & \\
b_2 & q-m_i-m_2 & \\
a_2-b_2 & m_2 & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & (\beta)\\
b_i+1 & q-m_i-m_i & \\
a_i-2-b_i & m_i & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \\
b_s & q-m_i-m_s & \\
a_s-b_s & m_s &
\end{array}$$

dove la variabilità di b_i incomincia da -1 (giacchè quella di b_i+1 incomincia da 0) valore accettabile anche se è $a_i-2=-1$.

4. Applichiamo il risultato (α) al caso in cui la rete $[C_q]$ sia quella formata dalle rette del piano.

Essendo in questo caso

$$q=1,\quad a_1=a_2=\ldots=a_s=0,$$

dovranno essere tutte le b uguali a 0, cosicchè posto $r=n_1$, otterremo una rete di ordine n_1, i cui punti fondamentali sono

$$1 \text{ di multiplicità } n_1-1 \qquad \text{e} \qquad 2n_1-2 \text{ semplici} \tag{I}$$

che è la rete di *De Jonquières*.

5. Prendiamo come rete $[C_q]$ questa che abbiamo ottenuta; allora è

$$q=n_1,\quad m_1=n_1-1,\quad m_2=1,\quad a_1=1,\quad a_2=2n_1-2.$$

Porremo poi $r=n_2$, $b_2=l_1^{(1)}$. Allora facendo $b_1=0$ (b_1 non può avere che uno dei valori 0, 1, essendo $a_1=1$), avremo, applicando la (α), una rete di ordine $n_2n_1-l_1^{(1)}$, ordine che indicheremo con $[n_2]$, i cui punti fondamentali sono

numero	multiplicità	
1	$[n_2]-n_1$	
$2n_2-2-l_1^{(1)}$	n_1	(II)
$l_1^{(1)}+1$	n_1-1	
$2n_1-2-l_1^{(1)}$	1	

dove $l_1^{(1)}$ può variare da 0 al minore dei due numeri

$$2n_1-2,\quad 2n_2-2.$$

Se invece di $b_1=0$ si pone $b_1=1$, e si applica ancora la (α), avendo cura di porre n_2+1, $l_1^{(1)}+1$ in luogo di n_2, $l_1^{(1)}$, otteniamo una soluzione che coincide con la precedente, con la sola differenza che, incominciando la variabilità di $l_1^{(1)}+1$ da 0, quella di $l_1^{(1)}$ incomincierà da -1.

Applichiamo ora alla (I) la (β) facendo $m_1=m_2=1$. Ponendo n_1+1 in luogo di n_1, avremo allora

$$m_1=n_1,\quad a_2=2n_1,\quad q-m_1=n_1.$$

Ciò posto, per $b_1=0$ si ottiene una soluzione che coincide con la precedente. Se poi si pone $b_1=1$, basterà mettere n_2+1, $l_1^{(1)}+1$ in luogo di n_2, $l_1^{(1)}$ (per cui sarà $r=n_2+1$), $b_2=l_1^{(1)}+1$ e si avrà ancora una soluzione coincidente con quella già ottenuta.

Applichiamo infine alla (I) la (β) ponendo $m_1=m_1=n_1-1$. Allora affinchè a_1-2-b_1 non sia negativo, essendo $a_1-2=-1$, deve essere $b_1=-1$, cioè $b_1=-1$. Si ha così una rete di ordine $n_2+n_1-1-l_1^{(1)}$, i cui punti fondamentali sono uno di multiplicità

$$n_2+n_1-l_1^{(1)}-2 \qquad \text{e} \qquad 2(n_2+n_1-l_1^{(1)}-1)-2$$

semplici, soluzione che si ha dalla (I) ponendovi $n_2+n_1-l_1^{(1)}-1$ in luogo di n_1.

Possiamo concludere che dalla rete (I) *si ricava, applicando le* (α) *e* (β), *una sola soluzione generale nuova, cioè la* (II), *nella quale si* *faccia incominciare la variabilità di* n_1, n_2 *da* 2 *e quella di* $l_1^{(1)}$ *da* -1. Il valore massimo che può avere $l_1^{(1)}$ è, come s'è detto, il più piccolo dei numeri $2n_1-2$, $2n_2-2$; per $n_1=2$ le soluzioni che si hanno dalla (II) per $l_1^{(1)}=1$, 2 coincidono con quelle che si hanno per

$$l_1^{(1)}=-1,\ 0,$$

qualora si ponga n_2+1 in luogo di n_2; analogamente dicasi per $n_2=2$. Ne segue che per $n_1=2$ o $n_2=2$ basta far variare $l_1^{(1)}$ da -1 a 0.

Quando nella (II) si ponga $l_1^{(1)}=0$, essa coincide con la soluzione generale data da De Jonquières per il caso di un ordine n che sia il prodotto di due fattori n_1, n_2 diversi da 1. Facendo $n_1=2$ o $n_2=2$ ed $l_1^{(1)}=-1, 0$; e poi una volta $n_1=3$ e un'altra $n_2=3$ ed $l_1^{(1)}=0, 1, 2, 3, 4$; e poi $n_1=4$ o $n_2=4$ ed $l_1^{(1)}=-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, si ottengono le soluzioni generali, diverse dalla nostra (I), date dal Cremona.

Fissati per n_2, n_1 due determinati valori, si vede subito che la soluzione coniugata di quella data per questi valori dalla (II) si ha scambiando fra loro i valori stessi; essa è cioè data da una rete di ordine $[n_2]$, i cui punti fondamentali sono 1 di multiplicità $[n_2]-n_2$, $2n_1-2-l_1^{(1)}$ di multiplicità n_2, $l_1^{(1)}+1$ di multiplicità n_2-1 e $2n_2-2-l_1^{(1)}$ semplici. La (II) fornirà allora una soluzione autoconiugata ogni volta che sia $n_2=n_1$; abbiamo così una rete di ordine $n_1^2-l_1^{(1)}$, i cui punti fondamentali sono uno di multiplicità $(n_1-1)n_1-l_1^{(1)}$, $2n_1-2-l_1^{(1)}$ di multiplicità n_1, $l_1^{(1)}+1$ di multiplicità n_1-1, $2n_1-2-l_1^{(1)}$ semplici. In particolare per $l_1^{(1)}=2n_1-2$, si ha (ponendo nei risultati n_1+1 in luogo di n_1) una rete di ordine n_1^2+1 i cui punti fondamentali sono uno di multiplicità $n_1(n_1-1)$ e $2n_1+1$ di multiplicità n_1.

Possiamo anche stabilire una regola per ottenere dalla (II) le soluzioni che possano da essa aversi per un valore assegnato n dell'ordine. Poniamo perciò $n_2n_1-l_1^{(1)}=n$, donde $n_2n_1=n+l_1^{(1)}$. Dunque bisognerà intanto prendere $l_1^{(1)}$ in modo che $n+l_1^{(1)}$ non sia un numero primo, dovendo essere n_2, n_1 maggiori di 1; dopo di che si dovrà prendere due numeri n_2, n_1 il cui prodotto sia eguale ad $n+l_1^{(1)}$, così avremo

$$n_2=\frac{n+l_1^{(1)}}{n_1}$$

e allora dalle

$$2n_1-2\geqslant l_1^{(1)},\quad 2n_2-2\geqslant l_1^{(1)}$$

si ricava subito

$$\frac{l_1^{(1)}+2}{2}\leqslant n_1\leqslant\frac{2(n+l_1^{(1)})}{l_1^{(1)}+2}$$

la quale limitazione per poter sussistere esige che sia

$$\frac{l_1^{(1)}+2}{2}\leqslant\frac{2(n+l_1^{(1)})}{l_1^{(1)}+2}$$

dalla quale, assieme alla $l_1^{(1)} \geqslant -1$, si ricava $-1 \leqslant l_1^{(1)} \leqslant 2\sqrt{n-1}$. Avremo così la regola: Si aggiunga ad n un intero $l_1^{(1)}$ compreso fra -1 e $2\sqrt{n-1}$ (gli estremi inclusi); se il numero così ottenuto ha un divisore n_1 diverso da 1 e da $n+l_1^{(1)}$ compreso fra $\frac{l_1^{(1)}+2}{2}$ e $\frac{2(n+l_1^{(1)})}{l_1^{(1)}+2}$ (gli estremi inclusi), si avrà una rete di ordine n, i cui punti fondamentali sono

numero	multiplicità
1	$n-n_1$
$\frac{2(n+l_1^{(1)})}{n_1}-2-l_1^{(1)}$	n_1
$l_1^{(1)}+1$	n_1-1
$2n_1-2-l_1^{(1)}$	1

Così per $n=14$ avremo che $l_1^{(1)}$ dev'esser compreso fra -1 e $\sqrt{52}$, cioè fra -1 e 7. Applicando allora la regola precedente, avremo, per $l_1^{(1)}=-1$, $n+l_1^{(1)}=13$, che va scartato perchè numero primo. Per $l_1^{(1)}=0$ sarà $n+l_1^{(1)}=14$. L'intervallo indicato nella seconda parte della regola è (1, 14), nel quale sono compresi i divisori 2, 7, diversi da 1 e 14, di 14, quindi entrambi accettabili. Allora per $n_1=2$ si ha una rete (di ordine 14) per la quale è $x_{12}=1$, $x_2=12$, $x_1=3$, e per $n_1=7$ la rete coniugata con $x_7=3$, $x_6=1$, $x_1=12$. Per $l_1^{(1)}=1$ si ha $n+l_1^{(1)}=15$, i cui divisori 3, 5 sono nell'intervallo $(\frac{3}{2}, 10)$ indicato nella regola. Si hanno così due reti coniugate con

$$x_{11}=1,\quad x_3=7,\quad x_2=2,\quad x_1=3;\qquad x_9=1,\quad x_5=3,\quad x_4=2,\quad x_1=7.$$

Per $l_1^{(1)}=2$ il solito intervallo è (2, 8), nel quale sono compresi i divisori 2, 4, 8 di $n+l_1^{(1)}=16$. Però, come si è notato più sopra, essendo $l_1^{(1)}=2$, va escluso il valore $n_1=2$ ed anche $n_1=8$, per il quale è $n_2=2$. Dopo ciò per $n_1=4$ si ha una rete autoconiugata per la quale si ha $x_{10}=1$, $x_4=4$, $x_3=3$, $x_1=4$. Così continuando, per $l_1^{(1)}=4$ può prendersi $n_1=3$ e $n_1=6$, e si hanno così due reti coniugate con $x_{11}=1$, $x_3=6$, $x_2=5$; $x_8=1$, $x_5=5$, $x_1=6$. Per $l_1^{(1)}=6$ si può prendere $n_1=4$, $n_1=5$, e risultano così due reti coniugate con $x_{10}=1$, $x_4=2$, $x_3=7$; $x_9=1$, $x_4=7$, $x_1=2$. Abbiamo così ottenuto tutte le reti di ordine 14 forniteci dalla nostra soluzione generale (II).

6. Prendiamo ora come rete $[C_q]$ quella data dalla soluzione (II). Avremo:

$$q=[n_2];\quad m_1=[n_2]-n_1,\quad m_2=n_1,\quad m_3=n_1-1,\quad m_4=1;$$
$$a_1=1,\quad a_2=2n_2-2-l_1^{(1)},\quad a_3=l_1^{(1)}+1,\quad a_4=2n_1-2-l_1^{(1)}.$$

Poniamo inoltre

$$b_2=l_2^{(1)},\quad b_3=l_2^{(2)},\quad b_4=l_2^{(3)}.$$

Avremo allora, posto $b_1=0$, ed applicando la (α), una rete di ordine

$$n_2[n_2]-l_2^{(1)}n_1-l_2^{(2)}(n_1-1)-l_2^{(3)},$$

ordine che indicheremo con $[n_3]$, coi seguenti punti fondamentali:

$$\begin{array}{cc} \text{numero} & \text{multiplicità} \\ 1 & [n_3]-[n_2] \\ 2n_3-2-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-l_2^{(3)} & [n_2] \\ l_2^{(1)}+1 & [n_2]-n_1 \\ 2n_2-2-l_1^{(1)}-l_2^{(1)} & n_1 \\ l_2^{(2)} & [n_2]-n_1+1 \\ l_1^{(1)}+1-l_2^{(2)} & n_1-1 \\ l_2^{(3)} & [n_2]-1 \\ 2n_1-2-l_1^{(1)}-l_2^{(3)} & 1 \end{array} \qquad \text{(III)}$$

Se invece di $b_1=0$ si pone $b_1=1$, e si applica alla (II) la (α), avendo cura di porre n_3+1, $l_2^{(1)}+1$ in luogo di n_3, $l_2^{(1)}$, si ottiene una soluzione che coincide con la precedente, con la sola differenza che incominciando la variabilità di $l_2^{(1)}+1$ da 0, quella di $l_2^{(1)}$ incomincia da -1.

Passiamo ora ad applicare alla (II) la (β). Facciamo in primo luogo $m_1=m_2=n_1$, e poniamo $b_1=0$. Mettendo n_2+1 in luogo di n_2, avremo

$$m_1=(n_2+1)\,n_1-l_1^{(1)}-n_1=[n_2],$$
$$a_2=2\,(n_2+1)-2-l_1^{(1)}=2n_2-l_1^{(1)},$$
$$q-m_1=(n_2+1)\,n_1-l_1^{(1)}-n_1=[n_2].$$

Ciò posto, e mantenendo le notazioni fissate sopra, otteniamo ancora una soluzione che coincide con quella ottenuta prima.

Se poi si pone $b_1=1$ invece di $b_1=0$, allora basterà mettere, oltre che n_2+1 in luogo di n_2, anche n_3+1 ed $l_2^{(1)}+1$ in luogo di n_3, $l_2^{(1)}$, e si avrà ancora una soluzione che coincide con la già ottenuta.

In secondo luogo facciamo $m_1=m_3=n_1-1$. Metteremo inoltre n_2+1, $l_1^{(1)}+1$ invece di n_2, $l_1^{(1)}$, cosicchè sarà

$$a_2=2\,(n_2+1)-2-(l_1^{(1)}+1)=2n_2-1-l_1^{(1)},$$
$$a_3=l_1^{(1)}+2,\quad a_4=2n_1-2-(l_1^{(1)}+1)=2n_1-3-l_1^{(1)},$$
$$m_1=(n_2+1)n_1-(l_1^{(1)}+1)-n_1=n_2n_1-l_1^{(1)}-1=[n_2]-1,\quad q-m_1=[n_2].$$

Ciò posto, mantenendo le altre notazioni fissate sopra e facendo $b_1=0$, otterremo una soluzione che si ricava dalla (III) ponendo in questa $l_2^{(1)}-1$, $l_2^{(2)}+1$, $l_2^{(3)}+1$ in luogo di $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$.

Se invece di $b_1=0$ poniamo $b_1=1$, allora mantenendo quanto si è detto per ottenere la soluzione precedente, e ponendo n_3+1, $l_2^{(3)}+1$ in luogo di n_3, $l_2^{(3)}$, otteniamo di nuovo la soluzione precedente.

In terzo luogo facciamo $m_1=m_4=1$. Metteremo inoltre $l_1^{(1)}-1$ in luogo di $l_1^{(1)}$, dopo di che si avrà $q-m_1=[n_2]$. Sarà inoltre

$$a_2=2n_2-1-l_1^{(1)},\quad a_3=l_1^{(1)},\quad a_4=2n_1-1-l_1^{(1)},$$
$$m_1=n_2n_1-(l_1^{(1)}-1)-n_1=[n_2]-n_1+1.$$

Allora applicando le (β) e facendo $b_1=0$, si ha una soluzione che coincide con l'ultima ottenuta sopra.

Se invece di $b_1=0$ poniamo $b_1=1$, allora mettendo n_3+1, $l_2^{(1)}+1$, $l_2^{(3)}-1$ in luogo di n_3, $l_2^{(1)}$, $l_2^{(3)}$, e mantenendo quanto si è detto per ottenere la soluzione precedente, si ottiene una soluzione che coincide con la (III).

Infine facciamo $m_i=m_1=[n_2]-n_1$, per cui sarà $q-m_i=n_1$. Essendo poi $a_i=1$, affinchè a_i-2-b_i non sia negativo, dev'essere $b_i=-1$, cioè $b_1=-1$. Allora applicando al solito la (β), si ottiene una rete di ordine

$$(n_3+n_2-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-1)\,n_1-(l_1^{(1)}+l_2^{(3)}-l_2^{(2)}),$$

che indicheremo con $[n_3]'$, avente per punti fondamentali uno di multiplicità $[n_2]'-n_1$,

$$2\,(n_3+n_2-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-1)-2-(l_1^{(1)}+l_2^{(3)}-l_2^{(2)})$$

di multiplicità n_1,

$$l_1^{(1)}+l_2^{(3)}-l_2^{(2)}+1$$

di multiplicità n_1-1,

$$2n_1-2-(l_1^{(1)}+l_2^{(3)}-l_2^{(2)})$$

semplici, soluzione che si ottiene dalla (II) (n. 5), ponendovi

$$n_3+n_2-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-1$$

in luogo di n_2 ed $l_1^{(1)}+l_2^{(3)}-l_2^{(2)}$ in luogo di $l_1^{(1)}$.

Possiamo concludere che dalla rete (II) (n. 5) *si ricava, applicando la* (α) *e la* (β), *una sola soluzione generale nuova, cioè la* (III), *nella quale si faccia incominciare la variabilità di* n_1, n_2, n_3 *da 2, quella di* $\mathrm{l}_1^{(1)}$, $\mathrm{l}_2^{(1)}$ *da* -1, *e quella delle altre* l *da* 0.

In particolare ponendo tutte le l eguali a 0, abbiamo una rete di ordine $n_3n_2n_1$, avente per fondamentali un punto di multiplicità $(n_3-1)n_2n_1$, $2n_3-2$ di multiplicità n_2n_1, uno di multiplicità $(n_2-1)n_1$, $2n_2-2$ di multiplicità n_1, uno di multiplicità n_1-1 e $2n_1-2$ semplici.

Presi, riferendoci alla (III), dei valori arbitrari per n_1, n_2, n_3, per la scelta delle l potremo procedere così: Si fissi anzitutto $l_1^{(1)}$ non inferiore a -1 e in modo da non superare il minore dei numeri $2n_1-2$, $2n_2-1$ (se è $l_1^{(1)}=2n_2-1$, sarà $2n_2-2-l_1^{(1)}=-1$, e allora dovrà prendersi $l_2^{(1)}=-1$); poi si fissi $l_2^{(1)}$ non inferiore a -1 e in modo da non superare il minore dei numeri

$$2n_2-2-l_1^{(1)},\quad 2n_3-2;$$

indi si prenda $l_2^{(2)}$ non inferiore a 0 e in maniera da non superare il minore dei numeri

$$l_1^{(1)}+1,\quad 2n_3-2-l_2^{(1)};$$

in fine si prenda $l_2^{(3)}$ non inferiore a 0 e in guisa da non superare il minore dei numeri

$$2n_1 - 2 - l_1^{(1)}, \quad 2n_3 - 2 - l_2^{(1)} - l_2^{(2)}.$$

Quando si faccia $n_1 = 2$ o $n_2 = 2$, basterà attribuire ad $l_1^{(1)}$ i soli valori -1 e 0, giacchè per $l_1^{(1)} = 1$, 2 si hanno dalla (II) soluzioni coincidenti con quelle che si hanno per $l_1^{(1)} = -1$, 0, sostituendo n_2 con $n_2 + 1$ nel caso di $n_1 = 2$, ed n_1 con $n_1 + 1$ nel caso di $n_2 = 2$, e perciò lo stesso accadrà per le soluzioni, da esse dedotte, fornite dalla (III), e ciò si può facilmente verificare.

Quando si faccia

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = -1, \quad l_2^{(1)} = 0, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 2,$$

si ha dalla (III) una rete di ordine $4n_2$, i cui punti fondamentali sono 2 di multiplicità $2n_2$, 2 di multiplicità $2n_2 - 1$, $2n_2 - 1$ doppi, 1 semplice; e facendo

$$n_3 = n_2 = 2, \quad l_1^{(1)} = 0, \quad l_2^{(1)} = 0, \quad l_2^{(2)} = 1, \quad l_2^{(3)} = 1,$$

si ha una rete di ordine $4n_2 - 2$ avente per fondamentali 2 punti di multiplicità $2n_2 - 1$, 2 di multiplicità $2n_2 - 2$, $2n_2 - 2$ doppi, 1 semplice. Queste due soluzioni insieme equivalgono alla seconda di quelle date dalla sig.$^{\text{na}}$ Larice, (¹) (la quale alla sua volta coincide con quella data dal Ruffini (²) a pag. 511, s_4), allorchè si faccia in questa $\nu = 1$. La soluzione che si ha dalla anzidetta del Ruffini per $\nu = 0$, e che non è altro che quella che il Ruffini stesso dà alla fine della pag. 511, è la seconda di quelle date dalla sig.$^{\text{na}}$ Larice, e con essa coincide l'insieme di quelle che si hanno dalla nostra (III), ponendo una volta

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = -1, \quad l_3^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 3,$$

e un'altra volta

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = 0, \quad l_2^{(1)} = -1, \quad l_2^{(2)} = 1, \quad l_2^{(3)} = 2.$$

Facendo $n_3 = n_1 = 2$, $l_1^{(1)} = l_2^{(1)} = 1$, $l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0$, si ottiene la seconda delle soluzioni date dal Ruffini a pag. 512, s_6, mentre la terza di codeste soluzioni si ha per

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = 0, \quad l_2^{(1)} = -1, \quad l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0,$$

e la sua coniugata per

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = -1, \quad l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0.$$

(¹) *Periodico di matematica*, anno XXIV, fasc. V, 1909.
(²) *Mem. Acc.*, Bologna, 1877.

Con l'ultima soluzione della pag. 512 del Ruffini coincide l'insieme delle due che si hanno ponendo nella (III) una volta

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 1$$

e un'altra volta

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = 1, \quad l_2^{(1)} = 0, \quad l_3^{(2)} = 1, \quad l_2^{(3)} = 0.$$

Infine si ha la prima delle soluzioni date dal Ruffini a pag. 513, facendo

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0,$$

mentre si ha la seconda di detta pagina e la sua coniugata, facendo rispettivamente

$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = 1, \quad l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0;$$
$$n_3 = n_1 = 2, \quad l_1^{(1)} = 0, \quad l_2^{(1)} = 1, \quad l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0.$$

Per i primi valori di qualcuna delle n accade che qualche soluzione dedotta dalla (III) coincide con una soluzione dedotta dalla (II). Così per $n_2 = n_3 = 2$, n_1 qualunque,

$$l_1^{(1)} = 0, \quad l_2^{(1)} = 1, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 1,$$

si ha dalla (III) una rete di ordine $3n_1 - 1$, i cui punti fondamentali sono 1 di multiplicità $2n_1 - 1$, 3 di multiplicità n_1, 2 di multiplicità $n_1 - 1$ e $2n_1 - 3$ semplici, e la stessa si ha dalla (II) per $n_2 = 3$, $l_1^{(1)} = 1$, n_1 qualunque. Parimenti dalla (III) per $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, n_1 qualunque,

$$l_1^{(1)} = -1, \quad l_2^{(1)} = 3, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 1$$

si ha una rete di ordine $3n_1 + 2$ i cui punti fondamentali sono 1 di multiplicità $2n_1$, 5 di multiplicità $n_1 + 1$, $2n_1 - 2$ semplici, e la medesima soluzione si ha dalla (II) per $n_2 = 3$, $l_1^{(1)} = 4$ e ponendo $n_1 + 2$ in luogo di n_1.

Avviene pure che per i primi valori delle n si ottengano dalla (III) soluzioni che coincidono con quelle dedotte dalla medesima per altri valori. Così per $n_2 = 2$, $l_1^{(1)} = 0$ la (III) ci dà una rete di ordine

$$2n_1n_3 - l_2^{(1)}\, n_1 - l_2^{(2)}\, (n_1 - 1) - l_2^{(3)},$$

i cui punti base sono 1 di multiplicità

$$2n_1 (n_3 - 1) - l_2^{(1)}\, n_1 - l_2^{(2)} (n_1 - 1) - l_2^{(3)}, \quad 2n_3 - 2 - l_2^{(1)} - l_2^{(2)} - l_2^{(3)}$$

di multiplicità $2n_1$, 3 di multiplicità n_1, $l_2^{(2)}$ di multiplicità $n_1 + 1$, $1 - l_2^{(3)}$ di multiplicità $n_1 - 1$, $l_2^{(3)}$ di multiplicità $2n_1 - 1$, $2n_1 - 2 - l_2^{(3)}$ semplici. La stessa soluzione si ottiene ponendo $n_3 + 1$, $l_2^{(1)} + 2$ in luogo di n_3, $l_2^{(1)}$. Ne segue che per $n_2 = 2$, $l_1^{(1)} = 0$ basta prendere per $l_2^{(1)}$ i soli valori -1, 0.

Parimenti per $n_2 = 2$, $l_2^{(1)} = -1$, $l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0$; n_1, n_2, $l_1^{(1)}$ qualunque, si ha una soluzione che coincide con quella che si ottiene ponendo $n_2 + 1$ in luogo di n_2 ed $l_2^{(1)} = 1$ invece di $l_2^{(1)} = -1$. Così pure per

$$n_3 = 2, \qquad l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0\,;$$

n_1, n_2, $l_1^{(1)}$ qualunque, risulta una soluzione che coincide con quella che si ha ponendo $n_2 + 1$ in luogo di n_2 ed $l_2^{(1)} = 2$ invece di $l_2^{(1)} = 0$. Ne segue che anche per $n_3 = 2$, quando si faccia $l_2^{(2)} = l_2^{(3)} = 0$, basta far prendere ad $l_2^{(1)}$ i soli valori -1, 0.

Per $n_3 = 2$, $l_2^{(1)} = l_2^{(2)} = 0$, $l_2^{(3)} = 2$, n_1, n_2, $l_1^{(1)}$ qualunque, si ottiene dalla (III) una rete di ordine $2(n_2 n_1 - l_1^{(1)} - 1)$ (forma a cui può ridursi in più modi un numero pari qualunque), i cui punti fondamentali sono 1 di multiplicità $n_2 n_1 - l_1^{(1)} - 2$, 1 di multiplicità $(n_2 - 1) n_1 - l_1^{(1)}$, $2n_1 - 2 - l_1^{(1)}$ di multiplicità n_1, $l_1^{(1)} + 1$ di multiplicità $n_1 - 1$, 2 di multiplicità $n_2 n_1 - l_1^{(1)} - 1$, $2n_1 - 4 - l_1^{(1)}$ semplici. La stessa rete si ottiene per $n_3 = 2$, $l_2^{(1)} = 0$, $l_2^{(2)} = 2$, $l_2^{(3)} = 0$, e ponendo $n_2 + 1$, $l_1^{(1)} + 2$ in luogo di n_2, $l_1^{(1)}$.

Fissati per n_1, n_2, n_3 e per le l dei determinati valori, si vede subito che la soluzione coniugata di quella data dalla (III) per questi valori si ha tenendo fermo il valore di n_2 e scambiando fra loro quelli di n_1, n_3, tenendo inoltre fermi i valori di $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$ e scambiando fra loro quelli di $l_1^{(1)}$ ed $l_2^{(1)} + l_2^{(2)}$, cioè la soluzione coniugata in discorso è data da una rete di ordine $n_1 [n_2]_1 - l_1^{(1)} n_3 + l_2^{(2)} - l_2^{(3)}$ (dove si è posto $[n_2]_1 = n_2 n_3 - l_2^{(1)} - l_2^{(2)}$), il quale ordine non è altro che $[n_3]$, e avente i seguenti punti fondamentali

$$\begin{array}{cc}
\text{numero} & \text{multiplicità} \\
1 & [n_3] - [n_2]_1 \\
2n_1 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(3)} & [n_2]_1 \\
l_1^{(1)} + 1 - l_2^{(2)} & [n_2]_1 - n_3 \\
2n_2 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(1)} & n_3 \\
l_2^{(2)} & [n_2]_1 - n_3 + 1 \\
l_2^{(1)} + 1 & n_3 - 1 \\
l_2^{(3)} & [n_2]_1 - 1 \\
2n_2 - 2 - l_2^{(1)} - l_2^{(2)} - l_2^{(3)} & 1
\end{array} \qquad \text{(III')}$$

Ne viene che la (III) fornirà una soluzione autoconiugata quando sia $n_3 = n_1$, $l_1^{(1)} = l_2^{(1)} + l_2^{(2)}$.

7. La soluzione (III) si ricava dalla (II) nel seguente modo. Si fissa un numero $n_3 \geqslant 2$ e tre altri (cioè tanti quanti sono i gruppi di punti fondamentali della rete (II) meno uno) numeri $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$ nel modo indicato al n. 6. Si forma l'ordine della rete (III) moltiplicando per n_3 quello della (II) e sottraendo dal prodotto le multiplicità dei punti base della (II), escluso il primo (cioè n_1, $n_1 - 1$, 1) moltiplicate rispettivamente per $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$. I punti fondamentali della (III) sono in primo luogo uno avente per multiplicità la differenza fra l'ordine $[n_3]$ della rete stessa e quello $[n_2]$ della (II), poi un certo numero di punti di multiplicità eguale all'ordine della

rete (II), numero che si ottiene sottraendo dal doppio, diminuito di 2, di n_2 i tre altri numeri $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$. Per avere il numero e la multiplicità degli altri gruppi di punti fondamentali si procederà così. Il numero di ciascuno dei tre gruppi, diversi dal primo, di punti base della rete (II) si diminuisca rispettivamente di uno dei numeri $l_2^{(1)}$, $l_2^{(2)}$, $l_2^{(3)}$, ed a ciascuno dei punti fondamentali che si tolgono così nella (II) se ne sostituisca uno la cui multiplicità sia la differenza fra quella del punto soppresso e l'ordine della rete (II); tutti gli altri punti della (II) passano nella (III). Così diremo: Nella (III) anzichè $2n_2 - 2 - l_1^{(1)}$ punti fondamentali di multiplicità n_1 che compariscono nella (II) ve ne saranno $2n_2 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(1)}$. Sostituiremo poi nella (II) per passare alla (III), agli $l_2^{(1)}$ punti n_1-pli così soppressi altrettanti di multiplicità $[n_2] - n_1$, cosicchè in (III) avremo $l_2^{(1)} + 1$ punti base di multiplicità $[n_2] - n_1$ ($l_2^{(1)}$ sono quelli che si sostituiscono agli n_1-pli soppressi ed uno è quello già esistente in (II)). Parimenti nella (III) anzichè $l_1^{(1)} + 1$ punti base $(n_1 - 1)$-pli che compariscono nella (II), ve ne saranno $l_1^{(1)} + 1 - l_2^{(2)}$, ed in luogo degli $l_2^{(2)}$ punti $(n_1 - 1)$-pli soppressi ne compariranno altrettanti di multiplicità $[n_2] - (n_1 - 1)$. Infine nella (III) invece di $2n_1 - 2 - l_1^{(1)}$ punti base semplici che vi sono nella (II), se ne troveranno $2n_1 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(3)}$, ed in luogo degli $l_2^{(3)}$ soppressi compariranno altrettanti punti di multiplicità $[n_2] - 1$.

Applicando il procedimento anzidetto alla (III), otterremo una rete di ordine

$$n_4[n_3] - l_3^{(1)}[n_3] - l_3^{(2)}([n_2] - n_1) - l_3^{(3)} n_1 - l_3^{(4)}([n_2] - n_1 + 1) - \\ - l_3^{(5)}(n_1 - 1) - l_3^{(6)}([n_2] - 1) - l_3^{(7)}$$

ordine che indicheremo con $[n_4]$, e i cui punti fondamentali sono

$$\begin{array}{cc}
\text{numero} & \text{multiplicità} \\
1 & [n_4] - [n_3] \\
2n_4 - 2 - l_3^{(1)} - l_3^{(2)} - l_3^{(3)} - l_3^{(4)} - l_3^{(5)} - l_3^{(6)} - l_3^{(7)} & [n_3] \\
l_3^{(1)} + 1 & [n_3] - [n_2] \\
2n_3 - 2 - l_2^{(1)} - l_2^{(2)} - l_2^{(3)} - l_3^{(1)} & [n_2] \\
l_3^{(2)} & [n_3] - [n_2] + n_1 \\
l_2^{(1)} + 1 - l_3^{(2)} & [n_2] - n_1 \\
l_3^{(3)} & [n_3] - n_1 \\
2n_2 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(1)} - l_3^{(3)} & n_1 \\
l_3^{(4)} & [n_3] - [n_2] + n_1 - 1 \\
l_2^{(2)} - l_3^{(4)} & [n_2] - n_1 + 1 \\
l_3^{(5)} & [n_3] - n_1 + 1 \\
l_1^{(1)} + 1 - l_2^{(2)} - l_3^{(5)} & n_1 - 1 \\
l_3^{(6)} & [n_3] - [n_2] + 1 \\
l_2^{(3)} - l_3^{(6)} & [n_2] - 1 \\
l_3^{(7)} & [n_3] - 1 \\
2n_1 - 2 - l_1^{(1)} - l_2^{(3)} - l_3^{(7)} & 1
\end{array} \qquad \text{(IV)}$$

Applicando alla (III) il procedimento e la discussione applicata alla (II) (n. 6) si ottiene appunto la (IV) ora scritta. Quanto alla scelta delle $l_3^{(1)}, \dots, l_3^{(7)}$ (il valore di ciascuna delle quali incomincia da 0, tranne quello della $l_3^{(1)}$ che incomincia da -1, il quale è accettabile anche per $2n_3-2-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-l_2^{(3)}=-1$) si procederà analogamente a quanto si è indicato per la scelta delle l_2. Si fisserà cioè $l_3^{(1)}$ in modo da non superare il minore dei numeri

$$2n_4-2, \quad 2n_3-1-l_2^{(1)}-l_2^{(2)}-l_2^{(3)};$$

poi si prenderà $l_3^{(2)}$ in modo da non superare il minore dei numeri

$$2n_4-2-l_3^{(1)}, \quad l_2^{(1)}+1;$$

indi si prenderà $l_3^{(3)}$ in guisa da non superare il minore dei numeri

$$2n_4-2-l_3^{(1)}-l_3^{(2)}, \quad 2n_2-2-l_1^{(1)}-l_2^{(1)},$$

e così di seguito. In particolare prendendo tutte le l eguali a 0, e le n eguali a 2, si ha una rete di ordine 16 avente

$$x_8=3, \quad x_4=3, \quad x_2=3, \quad x_1=3,$$

soluzione che si generalizza, ottenendo una rete di ordine 2^k e avente per fondamentali 3 punti di multiplicità 2^i

$$i=k-1, \quad k-2, \dots, 1, 0.$$

Ed ora è evidente come si possano formare tutte le successive soluzioni generali che si ottengono con l'applicazione delle (α), (β). Ed è pure evidente che partendo dalla rete delle rette del piano e considerando le reti che possono dedursi da essa con una trasformazione quadratica, e poi quelle dedotte dalle reti così ottenute pure con una trasformazione quadratica, e poi quelle trasformate (sempre per trasformazione quadratica) delle nuove reti ottenute (prendendo ogni volta la rete trasformatrice in posizione generica e nelle possibili posizioni speciali), e così via, tutte queste reti che man mano si ottengono sono contenute nelle nostre (I), (II), (III), e così via, sicchè le formole da noi trovate forniscono tutte le possibili reti cremoniane.

8. Termineremo col far vedere come dalle nostre soluzioni generali (I)-(IV) si possano avere tutte le reti di ordine 14 ottenute dalla sig.na Larice nella Nota citata al principio della presente. Intanto dalla (I) per $n_1=14$ abbiamo una rete con $x_{13}=1$, $x_1=26$. Altre 9 reti di ordine 14 abbiamo ottenuto dalla (II) al n. 5.

Altre 30 ne otteniamo dalla (III) per i seguenti valori delle l e delle n.

n_1	n_2	$l_1^{(1)}$	n_3	$l_2^{(1)}$	$l_2^{(2)}$	$l_2^{(3)}$	n_1	n_2	$l_1^{(1)}$	n_3	$l_2^{(1)}$	$l_2^{(2)}$	$l_2^{(3)}$
2	3	−1	2	0	0	0	3	3	2	3	1	1	2
3	2	−1	2	0	0	0	3	3	2	3	1	2	0
3	3	2	2	0	0	0	2	3	0	3	2	0	0
2	2	−1	3	0	0	1	2	2	−1	4	2	0	2
2	4	0	2	0	0	2	3	2	0	4	2	1	2
4	2	0	2	0	0	2	3	3	1	3	2	2	0
3	3	1	2	0	0	2	2	2	−1	4	3	0	0
4	3	4	2	0	0	2	2	3	−1	3	3	0	1
2	2	0	4	0	0	2	2	3	0	4	4	0	2
3	2	0	3	0	0	4	2	3	3	3	0	2	0
2	4	0	2	1	0	0	2	2	−1	3	−1	0	3
2	2	0	4	1	0	0	3	2	−1	2	−1	0	3
3	3	0	2	1	0	1	3	3	4	3	−1	2	0
3	4	3	2	1	0	1	3	3	2	3	0	3	1
2	3	0	3	1	0	2	3	4	4	3	2	2	0

Altre 8 soluzioni si ottengono dalla nostra (IV) per i seguenti valori delle n e delle l (tralasciamo $l_3^{(6)}$, $l_3^{(7)}$ che sono nel caso nostro sempre eguali a 0).

n_1	n_2	$l_1^{(1)}$	n_3	$l_2^{(1)}$	$l_2^{(2)}$	$l_2^{(3)}$	n_4	$l_3^{(1)}$	$l_3^{(2)}$	$l_3^{(3)}$	$l_3^{(4)}$	$l_3^{(5)}$
2	2	0	2	0	0	0	2	−1	1	2	0	0
2	2	−1	2	0	0	2	2	−1	1	2	0	0
2	2	0	3	1	1	2	2	−1	1	1	0	0
2	2	0	3	1	1	2	3	−1	0	1	1	2
2	2	0	3	1	1	2	2	0	0	0	0	0
2	2	−1	3	3	0	2	3	−1	4	0	0	0
2	2	−1	3	2	0	3	3	−1	3	1	0	1
3	3	4	3	−1	5	0	3	−1	0	0	5	0

Oltre alle 48 reti di ordine 14 date dalla sig.[na] Larice e qui ricavate dalle nostre (I)-(IV), ne esiste qualche altra. Cosi dalla (III) per:

$$n_1 = n_2 = n_3 = 3, \quad l_1^{(1)} = l_2^{(1)} = 2, \quad l_2^{(2)} = 0, \quad l_2^{(3)} = 1$$

si ha una rete autoconiugata di ordine 14 con

$$x_7 = 2, \quad x_6 = 1, \quad x_4 = 3, \quad x_2 = 3, \quad x_1 = 1.$$

Dalla (III) stessa per

$$n_1 = n_2 = n_3 = 3, \quad l_1^{(1)} = 3, \quad l_2^{(1)} = -1, \quad l_2^{(2)} = 3, \quad l_2^{(3)} = 1$$

si ottiene un'altra rete di ordine 14 con

$$x_8 = 1, \quad x_6 = 1, \quad x_5 = 1, \quad x_4 = 3, \quad x_3 = 2, \quad x_2 = 1,$$

che è la coniugata della penultima delle 30 ottenute dalla (III). Dalla (IV) per

$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2, \quad l_2^{(1)} = -1, \quad l_2^{(3)} = 2, \quad l_3^{(1)} = -1, \quad l_3^{(3)} = 3$$

e tutte le altre l uguali a 0, si ottiene un'altra rete di ordine 14 con

$$x_6 = 4\,, \qquad x_4 = 2\,, \qquad x_3 = 2\,, \qquad x_1 = 1\,,$$

che è la coniugata della quarta delle 8 che abbiamo ottenuto sopra dalla (IV).

F. Palatini.

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo: *Intorno alle soluzioni dell'equazione* $x^n + y^n = z^n$, del prof. L. Carlini, pubblicato nel Fascicolo II, a

pag. 85	linea 1	*invece di:*	Conseguenze	*si legga:*	Consegue
„ 86	„ 4	„ „	Σ_u	„ „	$\sum_1^n u$
„ 86	„ 30	„ „	$u^3 + \sum_1^n i$	„ „	$u^3 + \sum_1^9 i$
„ 87	sopprimere « nelle (10).				

BIBLIOGRAFIA.

Modestino del Giudice. — *Lezioni di aritmetica razionale e algebra elementare* ad uso dei Ginnasi superiori e degli Itituti tecnici. F. Marcolli, Roma-Milano, 1911.

Un libro di scienza che imprenda a trattare il graduale e logico svolgimento di un qualsiasi programma scolastico è da considerarsi sotto il duplice aspetto scientifico e didattico, e il suo avvicinamento più o meno grande alla irraggiungibile perfezione ideale dipende tutto dalla perizia dell'Autore nello sviluppare l'armonico accordo fra questi due aspetti.

Ora, se si esamina con attenzione e senza preconcetti la recente pubblicazione del prof. del Giudice, si resta subito convinti che non si è alla presenza di uno dei soliti libri che ogni anno ci grandinano addosso, spesso mancanti di qualsiasi scopo scientifico e didattico, non valenti neppure la carta sulla quale sono stampati e che sono lanciati dai loro compilatori nella lizza, colla sola preoccupazione di *arrivare presto,* perchè l'arrivare presto vuol dire spesso (chi sa per quali ragioni) riuscire a insinuarsi nella scuola, conquistare una posizione, imporsi (poco importa se *per fas et nefas!*).

Il trattato del prof. del Giudice appartiene a tutt'altra specie; è un libro eccellentemente pensato, bene scritto e coordinato armonicamente nelle sue parti. Qualcuno potrà forse ritenerlo più difficile degli altri; ma le cose alla fin fine sono quel che sono, e non è tanto agevole mutarle, e l'apparente facilità di alcuni libri è qualche volta tutta a scapito dell'esattezza e del rigore. Certo quello del prof. del Giudice è un libro che non è fatto per i così detti *corsi accelerati,* e probabilmente non sarà accolto con soverchio entusiasmo da quegli Istituti privati che (a giudicare almeno dalle loro rosee statistiche) sembra abbiano avuto dalla Divina Provvidenza la facoltà e l'incarico di cambiare le teste.

Ma fortunatamente gli scolari delle scuole regolari nulla sanno di corsi accelerati, e per di più sono assistiti da Professori che, nella gran maggioranza, conoscono a fondo la Scuola e le sue esigenze, e ad essa consacrano tutto il tesoro del loro sapere e della loro pazienza. È quindi certo che un libro, sia pur giudicato difficile da qualcuno, diverrà nelle loro mani il più facile dei libri, purchè abbia un solido fondamento logico e scientifico.

L'Autore, mosso dal nobile intento di *suscitare in chi legge lo spirito riflessivo e critico, sicchè il ragionamento tenda a divenire un processo sempre più cosciente e non automatico e mnemonico,* comincia molto opportunamente coll'esporre in misura sobria e (adeguatamente allo scopo) completa le nozioni fondamentali della logica, di questa benedetta logica contro la quale (tanto per fare onore al detto che l'uomo è ragionevole) vanno a cozzare in punti di capitale importanza, è più spesso che non si creda, parecchi scrittori, non esclusi nemmeno alcuni che (incredibile a dirsi!) vanno per la maggiore.

Nel I capitolo l'Autore tratta dell'oggetto e del simbolismo dell'aritmetica, e nel II del procedimento d'induzione che in seguito Egli applica sistematicamente ogni qualvolta si presenta l'occasione, e svolge l'intera teoria dei numeri interi secondo l'ordine degli altri capitoli: III la somma, IV il prodotto, V la successione dei multipli di un numero, VI potenze di un numero, VII la successione delle potenze di un numero, VIII la differenza, IX quoziente di due numeri, X divisione approssimata, XI numeri congrui rispetto ad un dato numero, XII numerazione, XIII tecnica delle operazioni aritmetiche, XIV allineamenti che rappresentano in un dato sistema di numerazione, numeri congrui rispetto a moduli aventi date relazioni con la base del sistema, XV massimo divisore di un gruppo di numeri, XVI alcuni teoremi relativi ai gruppi di numeri primi fra loro, XVII minimo multiplo di un gruppo di numeri, XVIII composizione di un numero come prodotto di potenze di numeri semplici, XIX costruzione del gruppo dei divisori di un numero non semplice e di un gruppo di numeri non primi fra loro, XX sulla successione dei numeri semplici.

Numeri frazionari.

In questa non breve esposizione tutto è ben ordinato, gli enunciati dei teoremi sono espressi con molta precisione e le dimostrazioni condotte sempre con chiarezza e alla stregua della logica più stretta. Qualcuno degli incontentabili (che non mancano mai) potrà forse osservare che i teoremi che si espongono nei vari capitoli sono un po' troppo numerosi, tanto che lo scolaro finisce per stancarsi soverchiamente.

Ma tale osservazione ha tutta l'aria d'un cavillo, tanto più che parecchi di questi teoremi, sopratutto in un primo studio, possono benissimo essere lasciati, senza che soffra minimamente la compagine del libro; tali sono ad esempio quelli che si riferiscono alle proprietà delle eguaglianze e delle diseguaglianze combinate fra loro e parecchi altri.

Stando allora così le cose, è meglio che questi teoremi vi siano tutti, perchè ciò concorre a rendere più completa l'opera. C'è poi da aspettare che un altro punto del libro possa urtare la suscettibilità di qualcuno di quelli che aborriscono dalle novità, ed è la parte svolta nei capitoli XII, XIII, XIV. Premettiamo subito che, dal punto di vista scientifico, non c'è nulla a obbiettare; anzi questa parte è assai pregevole per la sua generalità. In quanto al punto di vista didattico, una volta che uno ritenga troppo arduo entrare in argomento, ha due mezzi per togliersi d'imbarazzo: o lasciare questi capitoli (l'Autore, giustamente persuaso di quanto si va ora esponendo, ha fatto stampare i capitoli XIII e XIV in carattere più minuto), o adattarli al caso che la base del sistema di numerazione sia *10*, ciò che non porta alcuna fatica.

La teoria dei numeri frazionari è tutta condensata in una quarantina di pagine, il che, per quanto sia da considerare come un pregio, può benissimo mettere in orgasmo qualcuno abituato a vedere trattato questo argomento più alla distesa. Ma l'Autore non se ne deve preoccupare più che tanto, avendo posto tutto il possibile interesse a introdurre con chiarezza, precisione e logica il concetto di frazione elementare, e i concetti di somma, differenza, prodotto e quoziente dei nuovi numeri, i quali (dal punto di vista scientifico) offrono non piccole difficoltà. Il resto è di gran lunga più agevole, riducendosi in gran parte a estendere ai numeri frazionari le proprietà già dimostrate pei numeri interi.

Le frazioni decimali infine sono qui generalizzate e sostituite con frazioni il cui denominatore è una potenza della base del sistema di numerazione, che è lasciata completamente generica.

Questo libro del prof. DEL GIUDICE riunisce in sè tali doti di contenuto e di forma, che saprà indubbiamente farsi apprezzare dai colleghi; e mentre si attende la pubblicazione della 2ª Parte che tratta dell'Algebra, l'Autore accetti questo augurio che, quale amico sincero, faccio per la sua bella opera: *Che essa abbia la fortuna che merita!*

G. PIRONDINI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 Dicembre 1911

INTRODUZIONE AD UN NUOVO METODO DI GEOMETRIA DESCRITTIVA

Il prof. B. MAYOR di Losanna nel suo libro: *Statique graphique des systèmes de l'espace* (Lausanne, Rouge & C.ie, 1910) stabilisce un sistema di rappresentazione delle forze sopra un piano, dal quale poi ricava la rappresentazione di tutti gli elementi dello spazio: *retta, punto, piano.*

La teoria di MAYOR, spogliata del concetto estraneo di forza, liberata dalle formule algebriche e dagli sviluppi analitici, appare come una nuova geometria descrittiva che può gareggiare per semplicità ed eleganza col metodo di MONGE e con quella della proiezione centrale: e, sotto certi aspetti, è ad essi preferibile, specialmente in tutte le quistioni nelle quali giova far risaltare il principio di dualità.

In questo lavoro mi sono proposto di ricostruire la teoria di MAYOR in forma geometrica, e di ridurla molto facile e piana, affinchè possa entrare nel dominio della pratica.

Spero di aver raggiunto lo scopo prefissomi, poichè per intendere questo lavoro basta conoscere oltre i primi elementi della geometria proiettiva la brevissima nota: *Teoria elementare del complesso lineare* da me pubblicata nel *Periodico di matematica*, anno XVI, 1901, pag. 273-278.

Mi sono limitato per ora a risolvere i problemi fondamentali relativi a punti, rette e piani, riserbandomi di dare in seguito altre applicazioni più importanti.

CAPITOLO I.

Rappresentazione degli elementi dello spazio sopra un piano qualunque per mezzo di un complesso lineare.

1. Consideriamo un complesso lineare non speciale Γ ed un piano π. Sia S il polo del piano π, rispetto a Γ, e σ il piano polare del punto all'infinito della direzione perpendicolare a π.

La retta $s = \pi\sigma$ è la polare della retta r perpendicolare in S a π.

Chiameremo:

piano fondamentale o quadro il piano π;

punto fondamentale il punto S;

retta fondamentale la retta s.

Ci proponiamo di rappresentare sul quadro π tutti gli elementi dello spazio per mezzo del complesso Γ.

2. Rappresentazione del punto e del piano. — Consideriamo un punto A ed il suo piano polare α, e sia A′ la proiezione ortogonale di A sul quadro π, a' la traccia di α su π.

È facile vedere che la retta SA′ ed il punto sa' si appartengono. Infatti il piano polare del punto sa' passa per r (retta polare di s) e perciò è perpendicolare in S a π; e passa anche per A (polo di α) e quindi per la sua proiezione A′.

Dunque un punto A (o un piano α) dato ad arbitrio nello spazio determina nel modo suddetto una coppia di elementi A′, a' in π tali che la retta SA′ appartiene al punto sa'.

Inversamente una coppia di elementi (A′, a'), tali che la retta SA′ ed il punto sa' si appartengano, individuano un punto A e un piano α. Infatti la retta a_1 polare di a' passa per S (polo di π) e appartiene al piano polare di (sa') cioè al piano perpendicolare a π per i punti S e (sa'). Questa retta a_1 incontra dunque la perpendicolare a π in A′, in un punto A che ha per piano polare Aa'.

Se per brevità di linguaggio conveniamo di chiamare *antiproiezione di un piano su* π la proiezione del suo polo, e *antitraccia di un punto* la traccia del suo piano polare possiamo enunciare le seguenti proposizioni.

Un punto A è perfettamente rappresentato dalla sua proiezione A′ e dalla sua antitraccia a'.	*Un piano* α *è perfettamente rappresentato dalla sua traccia* a' *e dalla sua antiproiezione* A′.

Affinchè una coppia (A′, a') *possa rappresentare un punto* A *e un* piano α *è necessario e sufficiente che il punto* sa' *e la retta* SA′ *si appartengano.*

Così gli ∞^3 punti (o piani) dello spazio corrispondono biunivocamente alle ∞^3 coppie che verificano la condizione suddetta.

Indicheremo un punto A col simbolo (A′, a') ed il suo piano polare α col simbolo (a', A′).

3. Rappresentazione della retta. — Consideriamo ora una retta u e la sua polare v. Siano u', v' le proiezioni ortogonali di u, v sul quadro π e U′, V′ le loro tracce. Conveniamo di chiamare *antiproiezione* e *antitraccia di una retta* la proiezione e la traccia della sua polare. Così v', V′ sono l'antiproiezione e l'antitraccia di u.

La retta u può esser considerata come sostegno di una punteggiata, i punti della quale hanno per proiezioni i punti della u' e per antitracce le rette per V'; oppure come asse di un fascio di piani le tracce dei quali passano per U' e gli antipoli appartengono a v'.

È chiaro che, data la retta u, è perfettamente determinata la coppia (u', V') come pure la coppia (v', U').

Viceversa, data la coppia (u', V'), resta perfettamente determinata la retta u come intersezione del piano perpendicolare al quadro per u' col piano polare di V'.

Possiamo dunque rappresentare indifferentemente la retta u, come la v, coi simboli (u', V'), (v', U'). Per fissare le idee rappresenteremo sempre la u col simbolo (u', V') e la v col simbolo (v', u'). Riassumendo:

Una retta è perfettamente rappresentata dalla sua proiezione e dalla sua antitraccia sul quadro.

Le ∞^4 rette dello spazio corrispondono biunivocamente alle ∞^4 coppie (u', V').

4. Teorema. — *Se* (u', V'), (v', U') *sono due rette reciproche:*

1) U' *appartiene ad* u' *e* V' *a* v';

2) *il punto comune alle* u', v' *appartiene alla retta fondamentale* s;

3) *la retta congiungente i punti* U', V' *passa pel punto fondamentale* S.

1°. La proposizione 1) è evidente.

2°. I piani perpendicolari a π condotti per le rette u', v' si tagliano secondo una retta, perpendicolare a π che incontra le rette, polari, u, v e perciò appartiene al complesso. Essa incontra la r (all'infinito), e perciò deve incontrare la sua polare s. Ne segue che u', v', s sono rette concorrenti in un punto.

3°. La retta U'V', incontrando le rette polari u, v, appartiene al complesso, ed incontrando s deve incontrare la sua polare r, cioè deve passare per S.

5. Teorema. — *Affinchè una retta* u *appartenga al complesso* Γ *è necessario e sufficiente che gli elementi* u', V' *si appartengano.*

Infatti se V' appartiene ad u', il suo piano polare taglia il piano perpendicolare a π per u', secondo una retta per V'; dunque u, v s'incontrano in V'. Siccome una retta che incontra la sua polare deve coincidere con essa, così u, v coincidono in una retta del complesso Γ.

Inversamente, se la retta u appartiene al complesso Γ, essa coincide con la sua polare v', e perciò u', V' si appartengono.

Così le ∞^3 rette del complesso Γ corrispondono biunivocamente alle ∞^3 coppie (u', V') i cui elementi si appartengono.

6. Teorema. — *Se la proiezione* u' *di una retta passa per il punto fondamentale* S, *la sua antitraccia* V' *appartiene alla retta fondamentale* s; e viceversa.

Infatti se u' passa per S, la retta u incontra la r, e perciò la sua retta polare v deve incontrare la retta s, polare di r in un punto V' che è l'antitraccia di u.

Inversamente se V', antitraccia di u, appartiene ad s, la retta v incontra la s in V' e quindi la u, polare di V, deve incontrare la r, polare di s, e perciò u' deve passare per S.

7. Da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti discendono facilmente le condizioni di appartenenza degli elementi, punto, retta, piano, la condizione d'incidenza di due rette, ecc.

Teoremi:

1°. *Affinchè una retta* $u \equiv (u', V')$ *ed un punto* $A \equiv (A', a')$ *si appartengano, è necessario e sufficiente che le proiezioni della retta e del punto* (u' e A'), *si appartengano, e le loro antitracce,* V' *e* a' *pure si appartengano.*

Affinchè una retta $u \equiv (u', V')$ *ed un piano* $\alpha \equiv (a', A')$ *si appartengano è necessario e sufficiente che le tracce della retta e del piano,* (U' e a'), *si appartengano, e le loro antiproiezioni,* v' *e* A' *pure si appartengano.*

2°. *Affinchè un punto* $A \equiv (A', a')$ *ed un piano* $\beta \equiv (b', B')$ *si appartengano è necessario e sufficiente che la congiungente i punti* A', B' *e la intersezione delle rette* a', b' *si appartengano.*

Infatti, se il punto A appartiene al piano β, il polo B di β appartiene al piano α, polare di A; e perciò la retta AB coincide con la αβ e appartiene al complesso. Ne segue (§ 5) che la retta A'B' ed il punto $a'b'$ si appartengono.

Inversamente se la retta A'B' ed il punto $a'b'$ si appartengono, le rette AB e αβ appartengono al complesso e coincidono; quindi A appartiene a β.

3°. *Affinchè due rette* $u_1 \equiv (u'_1, V'_1)$ *e* $u_2 \equiv (u'_2, V'_2)$ *siano incidenti è necessario e sufficiente che il punto d'incontro della retta* $V'_1V'_2$ *colla retta fondamentale* s *e la retta che congiunge il punto* $u'_1 u'_2$ *col punto fondamentale* S *si appartengano.*

Affinchè le due rette u_1, u_2 siano incidenti è necessario e sufficiente che esista un punto A, appartenente ad ambedue, il quale abbia (Teor. I) per proiezione il punto $u'_1 u'_2$ e per antitraccia la retta $V'_1V'_2$; e perciò (§ 2) è necessario e sufficiente che la retta congiungente i punti S e $u'_1 u'_2$ e il punto d'incontro delle rette s e $V'_1V'_2$ si appartengano.

8. Le condizioni trovate nel § precedente permettono di risolvere con facilità i problemi fondamentali relativi a punti, rette e piani.

Problemi:

1°. *Rappresentare la retta comune a due punti o a due piani.*

Siano $A \equiv (A', a')$, $B \equiv (B', b')$ due punti (fig. 1). La retta $u \equiv AB$ ha per proiezione $u' \equiv A'B'$ e per antitraccia $V' \equiv a'b'$. La traccia di u è il punto comune alle rette u' e SV' (§ 4) e l'antiproiezione di u è la retta che passa per V' e per su'.

Così la retta AB è rappresentata da (u', V') e la sua polare, cioè l'intersezione dei piani $\alpha \equiv (a', A')$, $\beta \equiv (b', B')$, polari di A e B è rappresentata da (v', U').

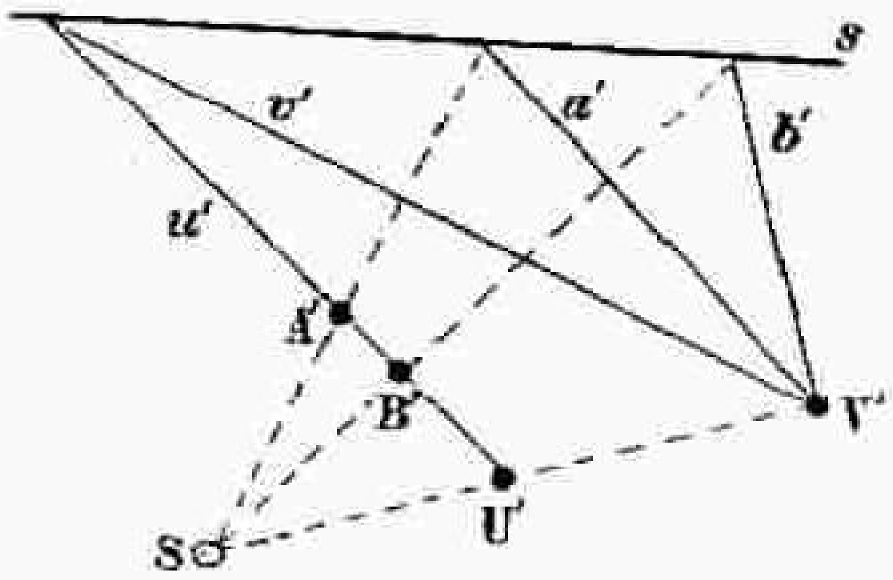


Fig. 1.

2°. *Rappresentare il piano individuato da tre punti non in linea retta.*

Rappresentare il punto individuato da tre piani non passanti per una retta.

Siano dati tre punti $A \equiv (A', a')$, $B \equiv (B', b')$, $C \equiv (C', c')$ non in linea retta (fig. 2).

Colla costruzione del problema precedente possiamo determinare:

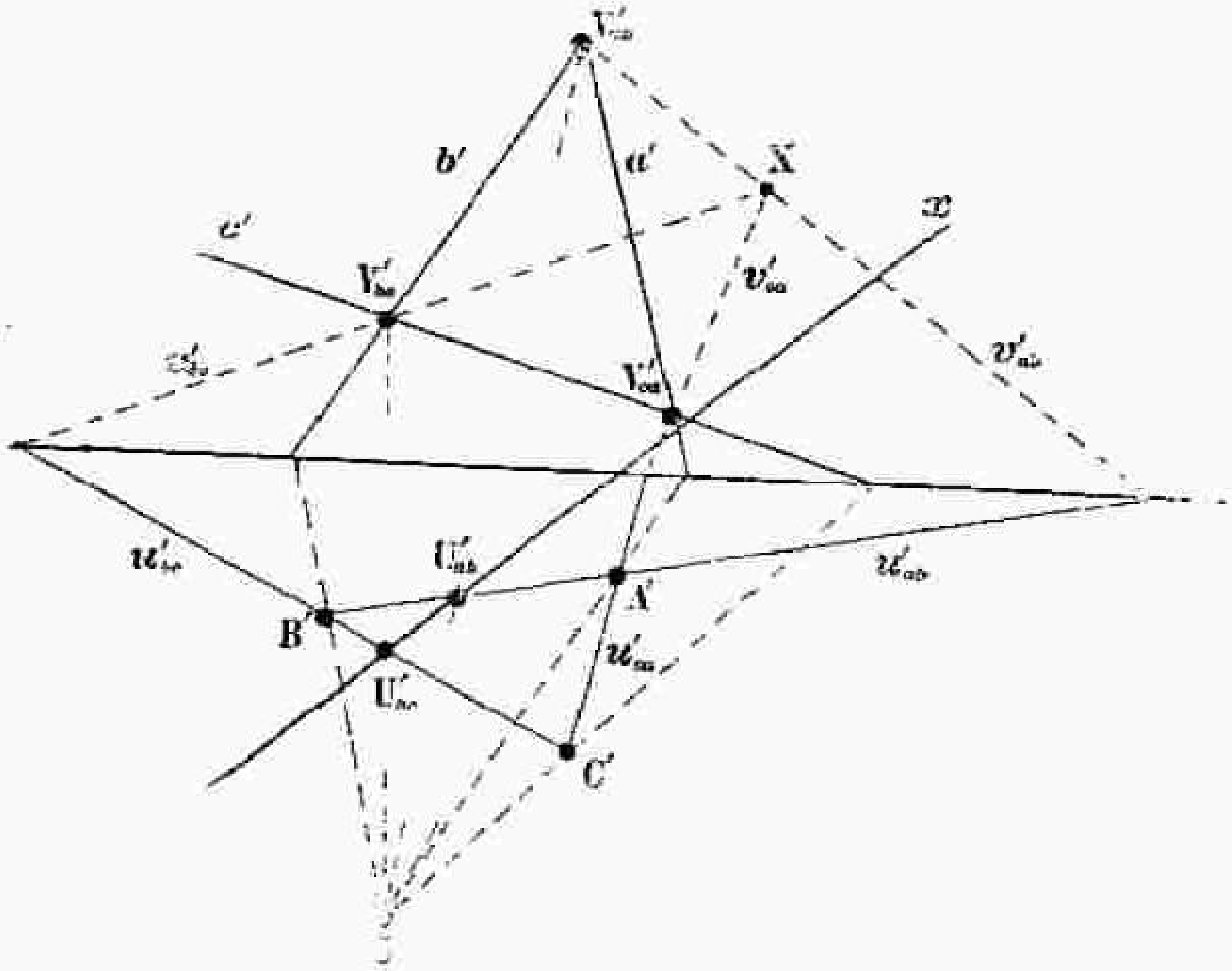


Fig. 2.

1°, le tracce U'_{bc}, U'_{ca}, U'_{ab} delle rette BC, CA, AB; esse sono sopra una retta x' che è la traccia del piano ABC;

2°, le antiproiezioni v'_{bc}, v'_{ca}, v'_{ab} delle rette medesime; esse devono passare per un punto X' antiproiezione del piano ABC.

Il piano ABC è dunque rappresentato da (x', X').

Similmente il punto comune ai tre piani $\alpha \equiv (a', A')$, $\beta \equiv (b', B')$, $\gamma \equiv (c', C')$ è rappresentata da (X', x').

3°. *Rappresentare il piano individuato da un punto e da una retta.*

Rappresentare il punto individuato da un piano e da una retta.

Si riduce facilmente al precedente.

CAPITOLO II.

Rappresentazione degli elementi dello spazio sopra un piano perpendicolare all'asse del complesso fondamentale.

9. La rappresentazione stabilita nei §§ precedenti diventa assai più semplice e più atta alle pratiche applicazioni, quando si prenda per quadro un piano π perpendicolare all'asse del complesso fondamentale Γ.

Studieremo perciò con maggiore ampiezza questo caso particolare.

Poichè ogni piano perpendicolare all'asse ha per polo il punto d'incontro con l'asse stesso, *il punto fondamentale* S *è il punto d'incontro del quadro con l'asse* r *del complesso, e la retta fondamentale* s (polare di r) *è la retta impropria di* π.

Per questo fatto, che s diventa la retta impropria del quadro, le proprietà dimostrate nel capitolo precedente vengono così semplificate.

1°. *Un punto* A *è rappresentato dalla sua proiezione* A' *e dalla sua antitraccia* a', *che deve essere parallela a* SA'.

Un piano α *è rappresentato dalla sua traccia* a' *e dalla sua antiproiezione* A', *che appartiene alla parallela per* S *ad* a'.

Così gli ∞^3 punti (o piani) dello spazio corrispondono biunivocamente alle ∞^3 coppie (A', a') tali che a' sia parallela ad SA' (§ 2).

2°. *Una retta è rappresentata dalla sua proiezione* u' *e dalla sua antitraccia* V'.

Così le ∞^4 rette dello spazio corrispondono biunivocamente alle ∞^4 coppie (u', V'), (§ 3).

3°. *Se* $u = (u', V')$, $v \equiv (v'\ V')$ *sono due rette polari:*

a) U' *appartiene a* u' *e* V' *a* v';

b) u', v' *sono parallele*;

c) U' V', S *sono in linea retta* (§ 4).

4°. *Affinchè una retta* $u \equiv (u', V')$ *appartenga al complesso fondamentale* Γ *è necessario e sufficiente che gli elementi* u', V' *si appartengano* (§ 5).

5°. *Se la proiezione* u′ *di una retta* u *passa per il punto fondamentale* S, *la sua antitraccia* V′ *è all'infinito, e viceversa* (§ 6).

6°. Le condizioni di appartenenza degli elementi: punti, retta, piano, contenute nei teoremi 1° e 2° del § 7 restano inalterate; la condizione d'incidenza di due rette (§ 7, Teor. 3°) si riduce alla seguente:

Affinchè due rette $u_1 \equiv (u'_1, V'_1)$, $u_2 \equiv (u'_2, V'_2)$ *siano incidenti è necessario e sufficiente che la retta congiungente del punto* S *col punto* $u'_1 u'_2$ *sia parallela alla* $V'_1 V'_2$.

Condizioni di parallelismo.

10. Teorema 1°. — *Affinchè due piani sieno paralleli è necessario e sufficiente che le loro antiproiezioni coincidano.*

Se due piani $\alpha \equiv (a', A')$, $\beta \equiv (b', B')$ sono paralleli, i loro poli A, B appartengono ad un diametro del complesso, parallelo all'asse, e quindi perpendicolare al quadro; e A′, B′ coincidono.

Inversamente, se le antiproiezioni A′, B′ coincidono, i punti A, B appartengono ad un diametro del complesso e quindi α, β sono paralleli. È sottinteso che le traccie a', b' sono parallele fra loro e alla SA′.

Teorema 2°. — *Affinchè due rette* $u_1 \equiv (u'_1, V'_1)$, $u_2 \equiv (u'_2, V'_2)$ *siano parallele è necessario e sufficiente che le loro antiproiezioni coincidano.*

Infatti se u_1, u_2 sono parallele, ossia concorrono in un punto all'infinito, le loro polari v_1, v_2 appartengono ad un piano parallelo all'asse e che passa per quel punto all'infinito, quindi le antiproiezioni v'_1, v'_2 coincidono in una retta parallela alle rette u'_1, u'_2.

Inversamente se v'_1, v'_2 coincidono, le rette v_1, v_2 appartengono ad un piano parallelo all'asse del complesso e le loro polari u_1, u_2 passano per il polo di questo piano che è un punto all'infinito del medesimo. Dunque u_1, u_2 sono parallele, e u'_1, u'_2 sono parallele a $v'_1 \equiv v'_2$.

Teorema 3°. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè un piano* $\alpha \equiv (a', A')$ *ed una retta* $u \equiv (u', V')$ *siano paralleli è che le antiproiezioni* A′, v' *si appartengano.*

Imaginando di condurre per u il piano β parallelo ad α, questo teorema si deduce immediatamente dal primo.

11. Prima di procedere oltre occorre ricordare una proprietà caratteristica del complesso lineare.

Se r è l'asse del complesso, A un punto alla distanza d da r, φ l'angolo che il piano α polare di A (il quale passa per la perpendicolare condotta da A ad r) fa col piano Ar, sussiste l'equazione

$$d \,.\, \tan\varphi = R, \tag{1}$$

dove R è una costante.

Se chiamiamo invece ψ l'angolo (complementare di φ) che il piano α fa col quadro, l'equazione (1) diventa

$$R \,.\, \tan \psi = d. \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) sono della massima importanza, nella rappresentazione che stiamo studiando, per passare rapidamente dalla figura obiettiva alla sua rappresentazione e viceversa. Occorre pertanto stabilire esattamente la regola per riconoscere il segno dell'angolo φ o ψ.

A tal uopo (fig. 3) disegniamo il circolo di centro S e raggio R, che chiameremo *circolo fondamentale*, e supponiamo che un osservatore si collochi in S al disopra del quadro, avendo alla destra la proiezione A′ di un punto dato A ($SA' = d$) e sia SB il raggio del circolo fondamentale, perpendicolare a SA′, che l'osservatore vede innanzi a sè. Facciamo rotare il triangolo A′SB di un angolo retto al disopra del quadro, attorno ad SB, in guisa che prenda una posizione A_1SB. Il piano che passa per BA_1 e per la tangente in B al circolo fondamentale è parallelo al piano α polare di A.

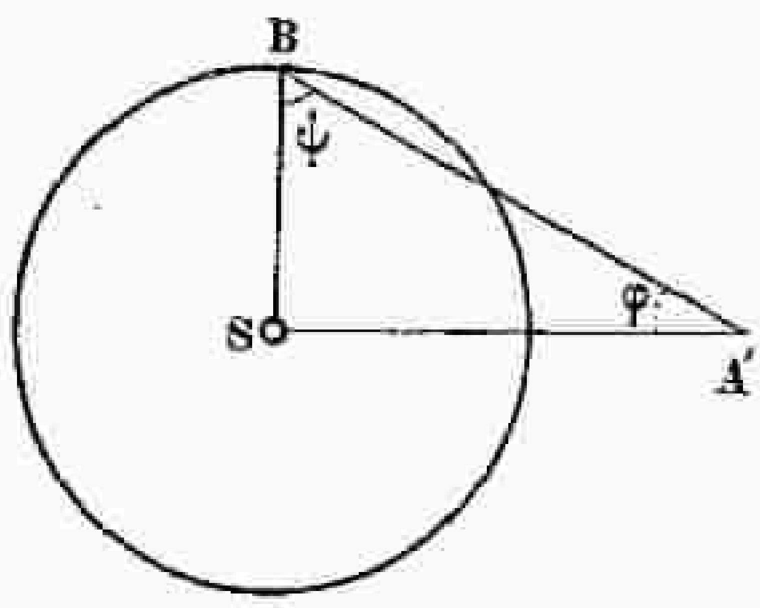


Fig. 3.

Infatti, posto $SA'B = \varphi$, $SBA' = \psi$, dal triangolo SBA′ si trova che gli angoli φ, ψ verificano le relazioni (1), (2).

12. Teorema. — *Affinchè due rette siano egualmente inclinate sul quadro è necessario e sufficiente che le loro antiproiezioni siano equidistanti dal punto fondamentale.*

Siano u_1, u_2 due rette egualmente inclinate sul quadro, e si considerino due rette u_3, u_4 ad esse parallele rispettivamente ed appartenenti al complesso, e la retta w_1 perpendicolare alla u_3 e all'asse r e ad esse incidente, w_2 perpendicolare alla u_4 e ad r e ad esse incidente. Poichè u_3, u_4, w_1, w_2 sono rette del complesso, i punti $P_1 = u_3w_1$, $P_2 = u_4w_2$ hanno per piani polari i piani $\pi_1 = u_3w_1$, $\pi_2 = u_4w_2$, che sono egualmente inclinati sul quadro; e perciò (per la formola (2) del § precedente, i punti P_1, P_2 sono equidistanti dall'asse, e le proiezioni u'_3, u'_4 di u_3, u_4 sono equidistanti da S.

Le antiproiezioni di u_1, u_2 coincidono con quelle di u_3, u_4 (§ 10, Teor. 2°) ossia sono le u'_3, u'_4 perchè le rette u_3, u_4, appartenendo al complesso, sono polari di se stesse.

Inversamente, se le proiezioni v'_1, v'_2 di due rette u_1, u_2 sono equidistanti da S, e sono P'_1, P'_2 le proiezioni di S su v'_1, v'_2 i piani polari di due punti P_1, P_2 aventi per proiezioni P'_1, P'_2 sono egualmente inclinati sul quadro per la formula (1) del § 11, e sono pure egualmente inclinate sul quadro le rette u_3, u_4 appartenenti al complesso che stanno in questi piani ed hanno per proiezioni v'_1, v'_2. Le rette u_1, u_2, avendo le stesse antiproiezioni delle u_3, u_4, sono ad esse parallele (§ 10, Teor. 2°) e perciò sono egualmente inclinate sul quadro.

Corollari. — 1°. *Tutte le rette che fanno un dato angolo col quadro hanno per antiproiezioni le tangenti di un circolo di centro* S.

È opportuno osservare che data l'antiproiezione v' di una retta (fig. 4) si trova subito l'angolo ψ che essa fa col piano. Tale angolo infatti è eguale a quello che il piano polare di P' (proiezione di S su v') fa col quadro e questo si determina con la costruzione del § 11.

2°. *Il circolo fondamentale è l'inviluppo delle antiproiezioni delle rette inclinate di 45° sul quadro.*

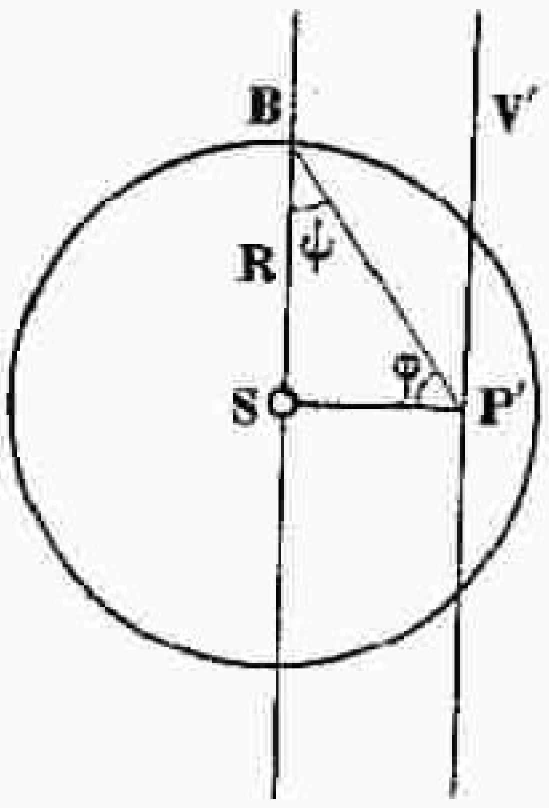


Fig. 4.

Condizioni di perpendicolarità.

13. Teorema. — *Affinchè una retta ed un piano siano perpendicolari è necessario e sufficiente che l'antiproiezione della retta sia antipolare dell'antiproiezione del piano rispetto al circolo fondamentale.*

Sia data una direzione di rette u, definita dalla antiproiezione v' (fig. 5) e consideriamo il piano α per S perpendicolare alla u; esso risulta anche perpendicolare al piano per v' parallelo all'asse, e perciò la sua traccia è la perpendicolare $a' = SV'$ condotta da S a v'. Poichè SV', essendo perpendicolare all'asse, appartiene al complesso, il polo A' di α si trova su a'.

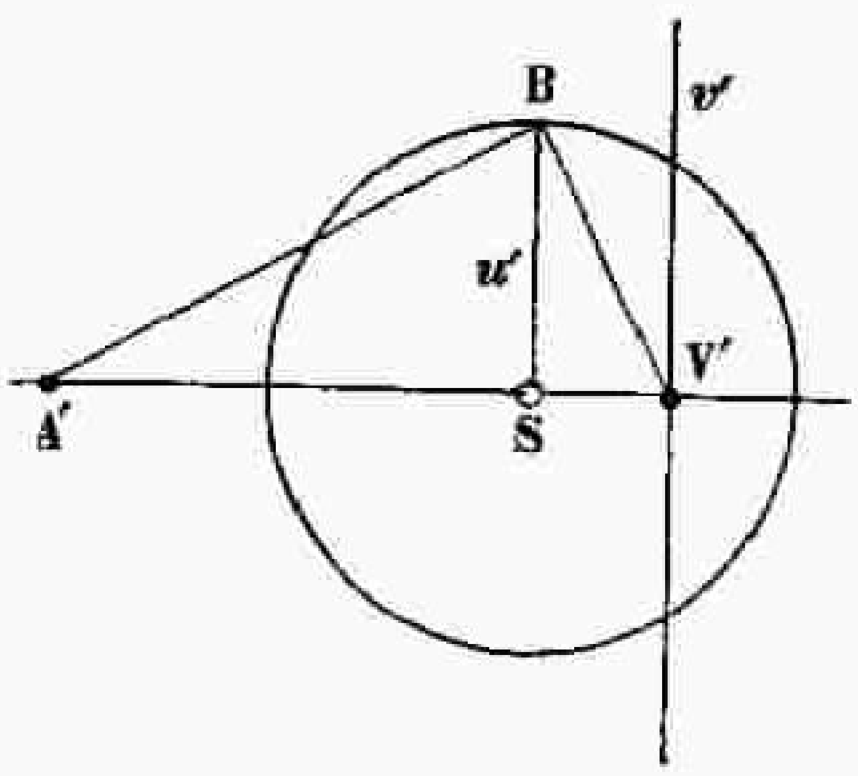


Fig. 5.

Ricordando le costruzioni per trovare gli angoli di una retta e di un piano col quadro (§ 11, 12), e pensando che gli angoli di u e di α col quadro devono essere complementari, apparisce manifesto che, se indichiamo con B uno dei punti d'incontro della parallela per S a v' col circolo fondamentale, l'angolo V'BA' deve essere retto. Dunque A' è l'antipolo di v' rispetto al circolo fondamentale.

Inversamente sia v' l'antiproiezione di tutte le rette parallele ad una direzione u; il suo antipolo A' rispetto al circolo fondamentale è l'antiproiezione di tutti i piani paralleli a un piano α.

Se consideriamo fra le rette u quella che passa per S ed ha per proiezione $u' \equiv SB$ e fra i piani α quello che, passando per S, ha per traccia $a' = SA'$, è chiaro che la detta retta $u \equiv (u', V')$, giacendo in un piano perpendicolare ad a', è perpendicolare alla a'

stessa, e fa con la retta intersezione del suo piano proiettante con α un angolo eguale a $A'BV'$, cioè retto.

Dunque u, essendo perpendicolare a due rette non parallele del piano α, è perpendicolare ad esso.

Corollari. — 1°. *Affinchè due rette sieno perpendicolari è necessario e sufficiente che le loro antiproiezioni siano rette anticoniugate rispetto al circolo fondamentale.*

Infatti, perchè due rette u_1, u_2 siano perpendicolari è necessario e sufficiente che ciascuna di esse sia situata in un piano perpendicolare all'altra, e quindi che la sua antiproiezione passi per l'antipolo, rispetto al circolo fondamentale della antiproiezione dell'altra. In altre parole è necessario e sufficiente che le due antiproiezioni siano rette coniugate rispetto al circolo fondamentale.

2°. *Affinchè due piani siano perpendicolari è necessario e sufficiente che le loro antiproiezioni siano punti coniugati rispetto al circolo fondamentale.*

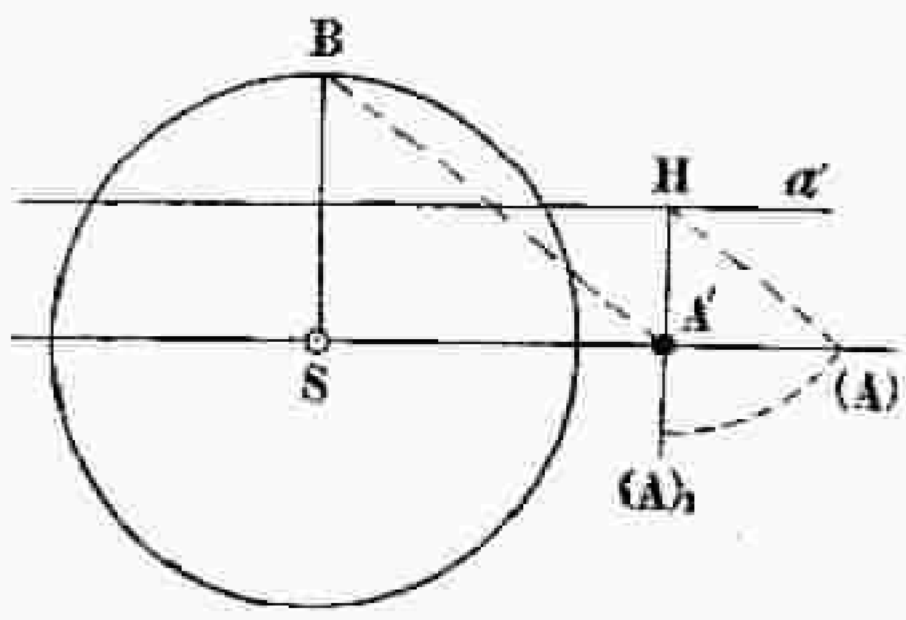


Fig. 6.

Dimostrazione simile alla precedente.

Ribaltamenti.

14. Sia dato un piano $\alpha \equiv (a', A')$ (fig. 6). Costruito nel modo indicato nel § 11 l'angolo $\psi \equiv \widehat{SBA'}$, che il piano fa col quadro, si conduca per A' la perpendicolare ad a', che incontri questa in H e per H si tracci la parallela a BA' che incontri in (A) la SA'. È chiaro che il triangolo $A'H(A)$ è il ribaltamento sul quadro del triangolo $A'HA$ (A essendo il polo di α) attorno ad HA' e che il polo A si trova sopra o sotto il quadro, secondo che a' è dalla stessa parte di B o da parte opposta rispetto ad SA'.

Preso poi sulla semiretta HA' un segmento $H(A)_1 = H(A)$, il punto $(A)_1$ è il ribaltamento sul quadro del polo A di α, quando questo roti attorno alla sua traccia.

Se in α è disegnata una figura F qualunque, il ribaltamento di essa è una figura (G) omologica affine di F, essendo a' l'asse di omologia e A', $(A)_1$ due punti omologhi.

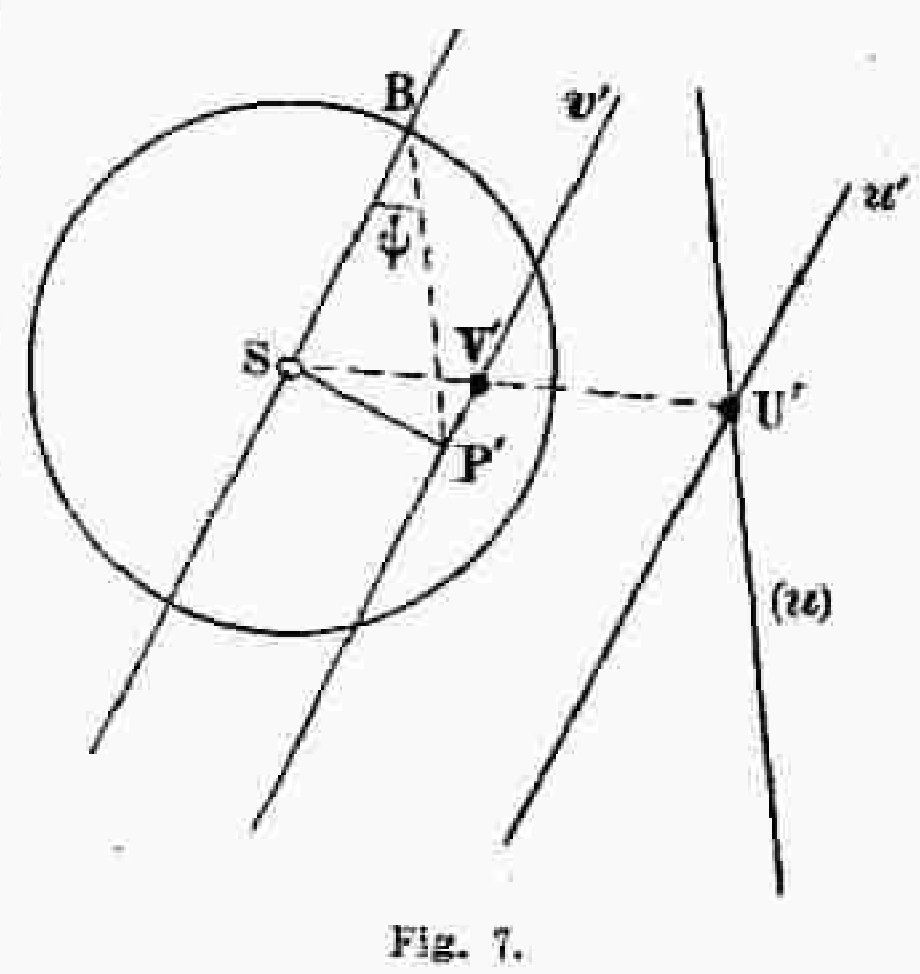


Fig. 7.

15. Sia data (fig. 7) una retta $u \equiv (u', V')$ e consideriamo anche la sua polare $v \equiv (v', U')$.

Costruito il triangolo rettangolo SP′B che ha per cateti la distanza SP′ di S da r' e il raggio SB del circolo fondamentale, l'angolo $\phi \equiv \widehat{SBP'}$ è l'angolo che la retta u fa col quadro (§ 12); se dunque conduciamo per U′ la (u) parallela alla BP′, essa (o la sua simmetrica rispetto a u') è il ribaltamento della u sul quadro, quando il suo piano proiettante sia fatto rotare attorno alla proiezione u'.

16. Alcuni problemi elementari. — Le proprietà fin qui dimostrate forniscono il modo di risolvere tutti i problemi geometrici relativi a punti, rette e piani, come apparirà dai seguenti esempi, nei quali ci occupiamo delle questioni più ovvie ed elementari, che sono necessarie a risolvere tutte le altre più complicate che possono presentarsi.

PROBLEMA 1°. — *Completare la rappresentazione di una figura F data in un piano conosciuto $\alpha \equiv (a', A')$, conoscendone la proiezione sul quadro (oppure le antitracce).*

Indicando con B, C, D ... u_1, u_2, u_3 ... i punti e le rette del piano α, dobbiamo trovare le loro antitracce b', c', d' ... V'_1, V'_2, V'_3 ..., supponendo note le proiezioni B′, C′, D′ ... u'_1, u'_2, u'_3 .... Osserviamo anzitutto che la figura formata dalle proiezioni e quella formata dalle antitracce si corrispondono in una reciprocità.

Infatti al piano punteggiato (o rigato) α corrisponde proiettivamente la stella di piani (o di rette) di centro A formata dagli elementi polari, rispetto al complesso di quelli di α. Segando questa stella col quadro si ottiene la figura delle antitracce, la quale dunque corrisponde reciprocamente alla figura delle proiezioni.

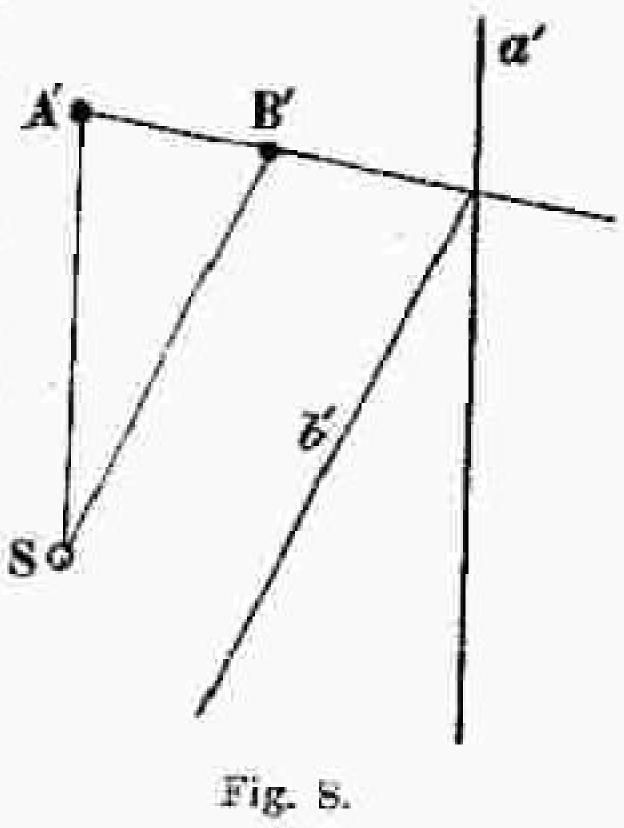


Fig. 8.

La costruzione si eseguisce del resto facilmente. Infatti (fig. 8) data la proiezione B′ di un punto B di α, la sua antitraccia deve passare per il punto comune alle rette a' e A′B′ ed essere parallela ad SB′. Inversamente, se fosse dato b' antitraccia di un punto B di α si troverebbe la proiezione B′, come incontro della retta che passa per i punti A′ e $a'b'$ con la parallela per S a b'.

Si vede da ciò che la reciprocità fra proiezioni e antitracce degli elementi di α è così individuata.

Facciamo corrispondere prospettivamente i fasci A′, S alle punteggiate che hanno per sostegni a' e la retta impropria rispettivamente.

Evidentemente al raggio A′S considerato come appartenente all'uno o all'altro dei due fasci corrisponde lo stesso punto, cioè il punto improprio di a', nelle due punteggiate; e le due proiettività subordinate suddette individuano la reciprocità nel piano.

17. Problemi:

1°. *Rappresentare la retta comune a due punti o a due piani* (fig. 9).

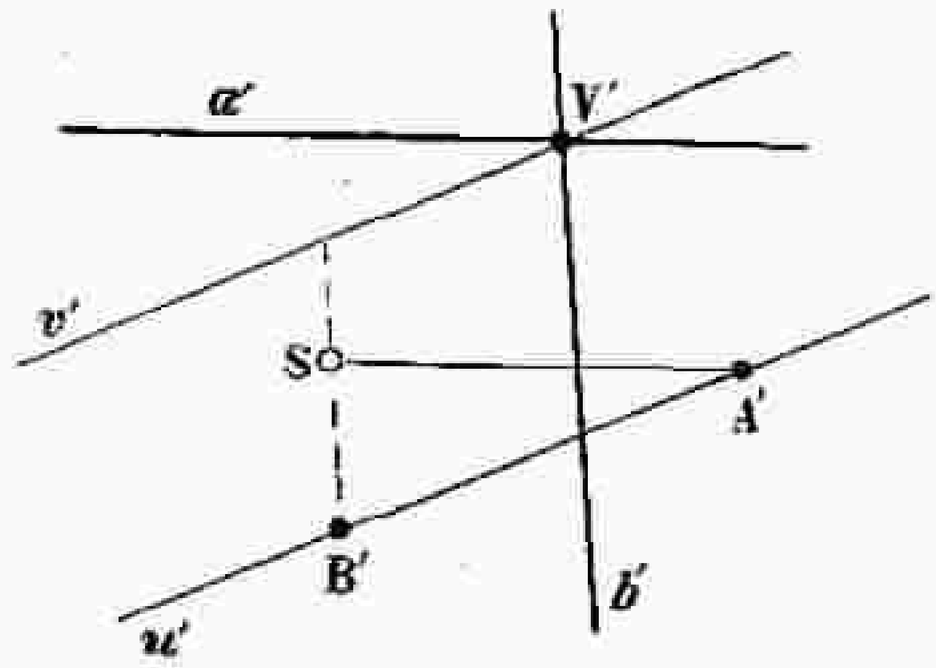


Fig. 9.

2°. *Rappresentare il piano individuato da tre punti non in linea retta* (fig. 10).

Rappresentare il punto individuato da tre piani non passanti per una retta.

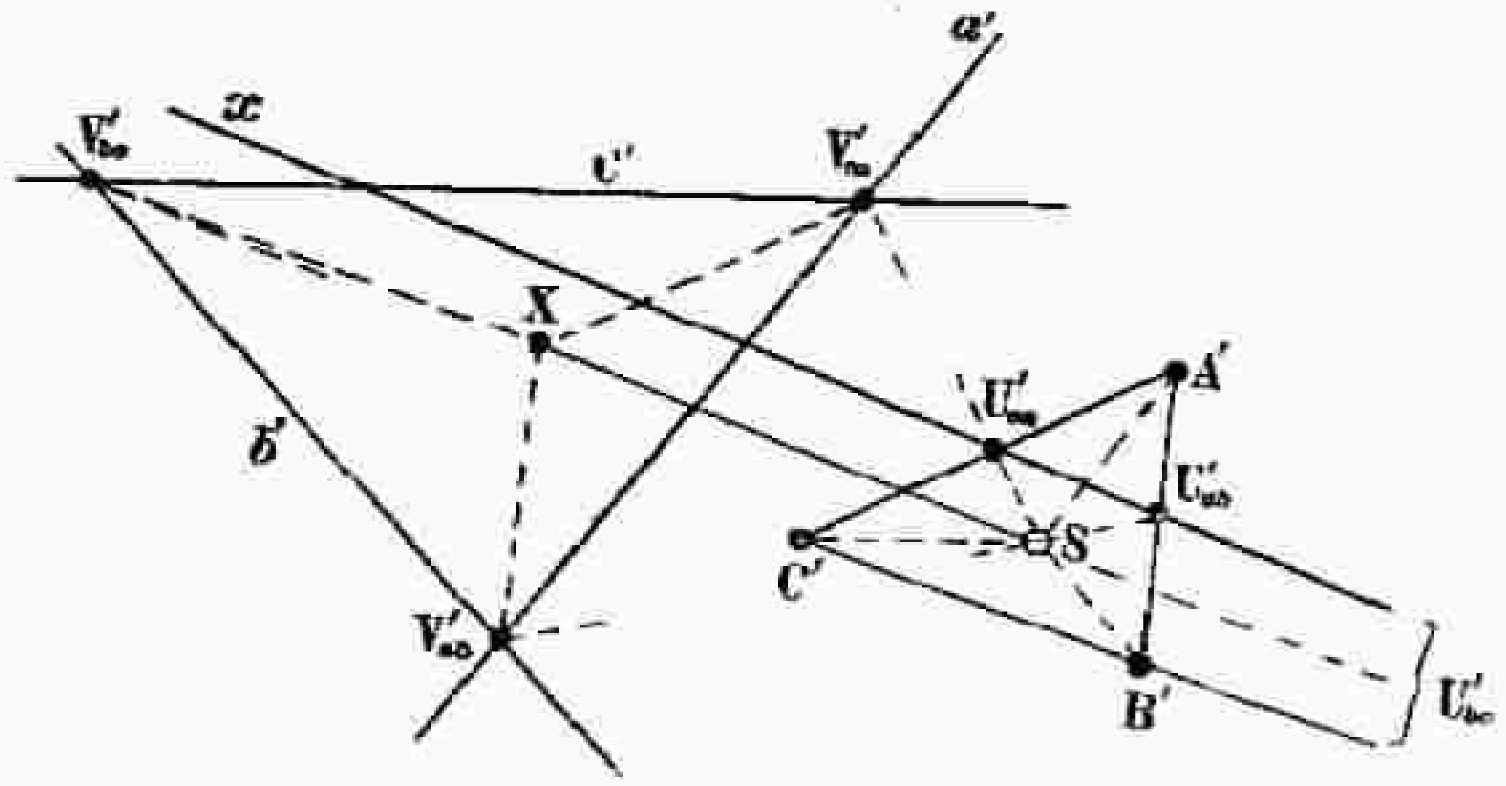


Fig. 10.

3°. *Rappresentare il piano individuato da un punto e da una retta.*

Rappresentare il punto individuato da un piano e da una retta.

Questi problemi si risolvono come nel caso generale (§ 8) supponendo solo che la retta s diventi la retta impropria.

18. Problema 1°. — *Per un punto* $A \equiv (A', a')$ *condurre il piano parallelo ad un piano* $\beta \equiv (b'B')$.

L'antiproiezione del piano cercato è B' (§ 10, Teor. 1°); la sua traccia b'_1 (fig. 11) dovendo essere parallela a b' e passare per il punto comune alle rette A'B' e a' (§ 7, Teor. 2°) è perfettamente determinata.

Problema 2°. — *Per un punto* $A \equiv (A', a')$ *condurre un piano parallelo a due rette* $u_1 \equiv (u'_1, V'_1)$, $u_2 \equiv (u'_2, V'_2)$.

L'antiproiezione del piano cercato β (fig. 12) deve appartenere alle antiproiezioni v'_1, v'_2 delle rette date (§ 10, Teor. 3°), ossia è il punto ad esse comune $B' = v'_1 v'_2$. La sua traccia è la parallela a SB′ condotta per il punto comune alle rette a' e A′B′ (§ 7, Teor. 2°).

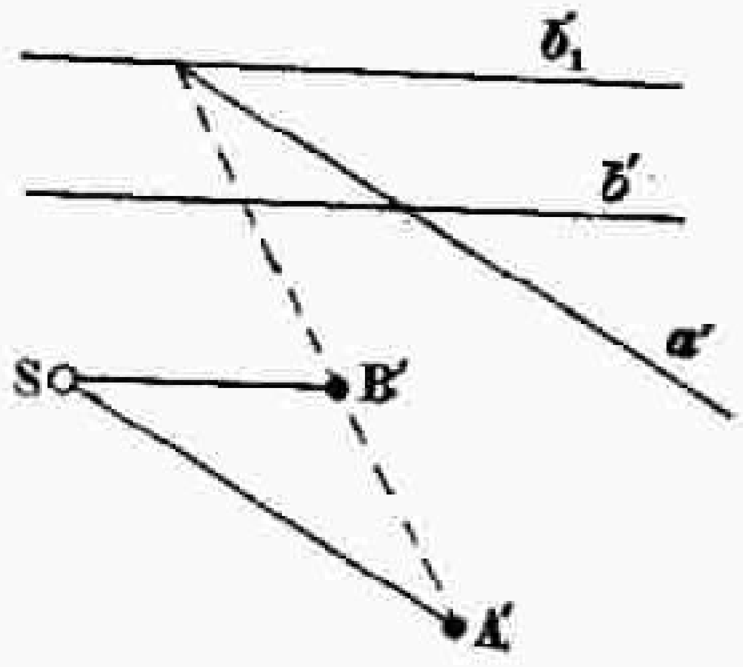


Fig. 11.

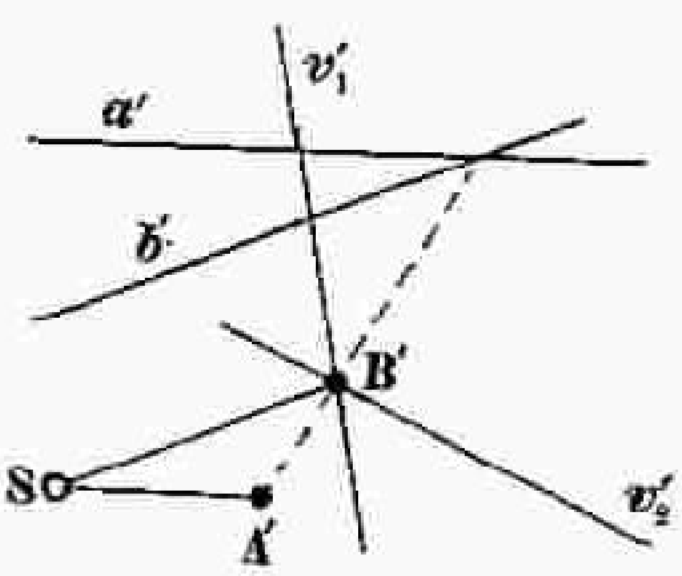


Fig. 12.

Problema 3°. — *Per un punto* A ≡ (A′, a′) *condurre la parallela ad una retta* u ≡ (u′, V′).

L'antiproiezione v' (fig. 13) della retta richiesta coincide con quella della u (§ 10, Teor. 2°); la sua proiezione è la parallela u'_1 alle rette u', v' condotta per A′; la sua antitraccia è il punto $V'_1 \equiv a'v'$, e la sua traccia è il punto d'incontro U'_1 della retta SV′ con la u'_1.

Problema 4°. — *Per un punto* A ≡ (A′, a′) *condurre la retta parallela a due piani* β ≡ (b′, B′), γ ≡ (c′, C′).

Questo problema si può ridurre al precedente cercando prima la retta comune ai due piani β, γ; oppure si può risolvere direttamente come segue:

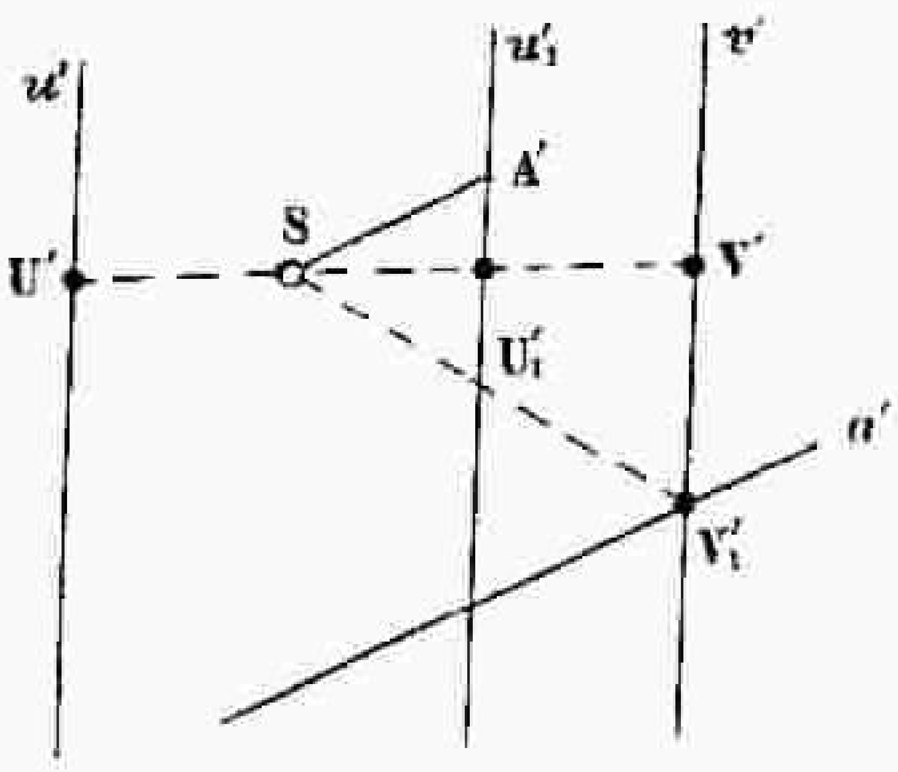


Fig. 13.

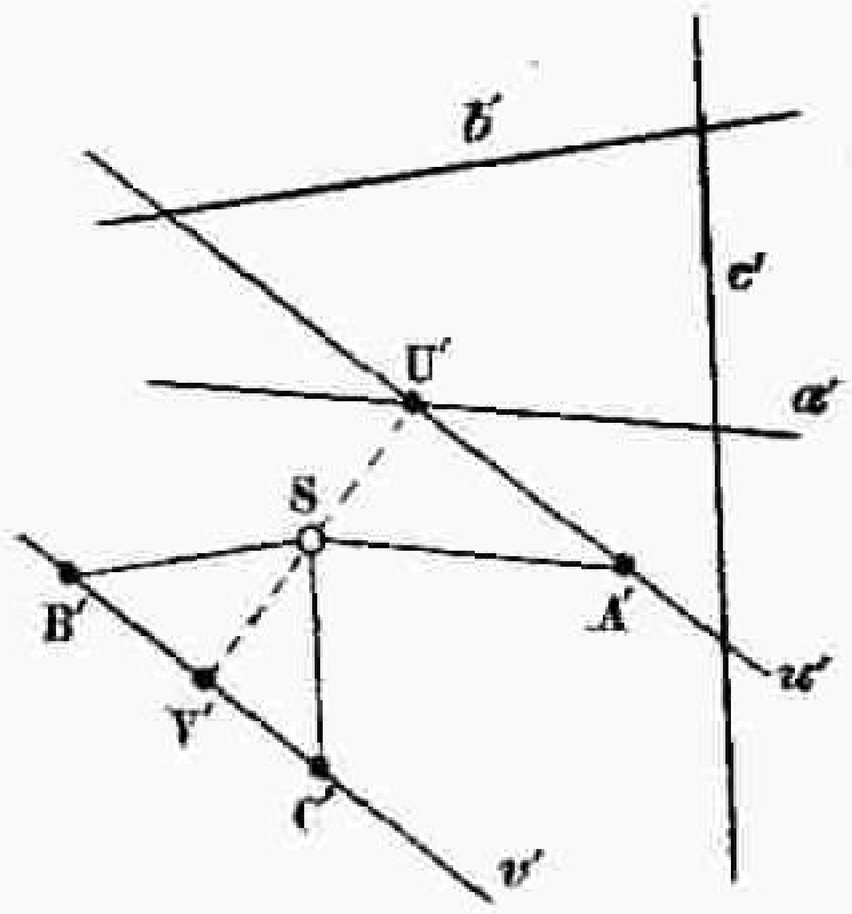


Fig. 14.

L'antiproiezione della retta cercata è (fig. 14) la retta $v' = B'C'$ (§ 10, Teor. 3°): la sua proiezione è la parallela a v' per A′, la sua traccia è il punto $U' = u'a'$, la sua antitraccia è il punto d'incontro delle due rette v' e SU′.

19. Problema 1°. — *Per un punto* A ≡ (A′, a′) *condurre il piano perpendicolare ad una retta* u ≡ (u′, V′).

Si costruisca (fig. 15) l'antipolo B' della antiproiezione v' di u rispetto al circolo fondamentale; esso è l'antiproiezione del piano cercato (§ 13, Teor.). La traccia a' è la parallela ad SA' condotta per il punto comune alle rette a' e A'B' (§ 7, Teor. 2°).

PROBLEMA 2°. — *Per un punto* A ≡ (A', a') *condurre la retta perpendicolare ad un piano* β ≡ (b', B').

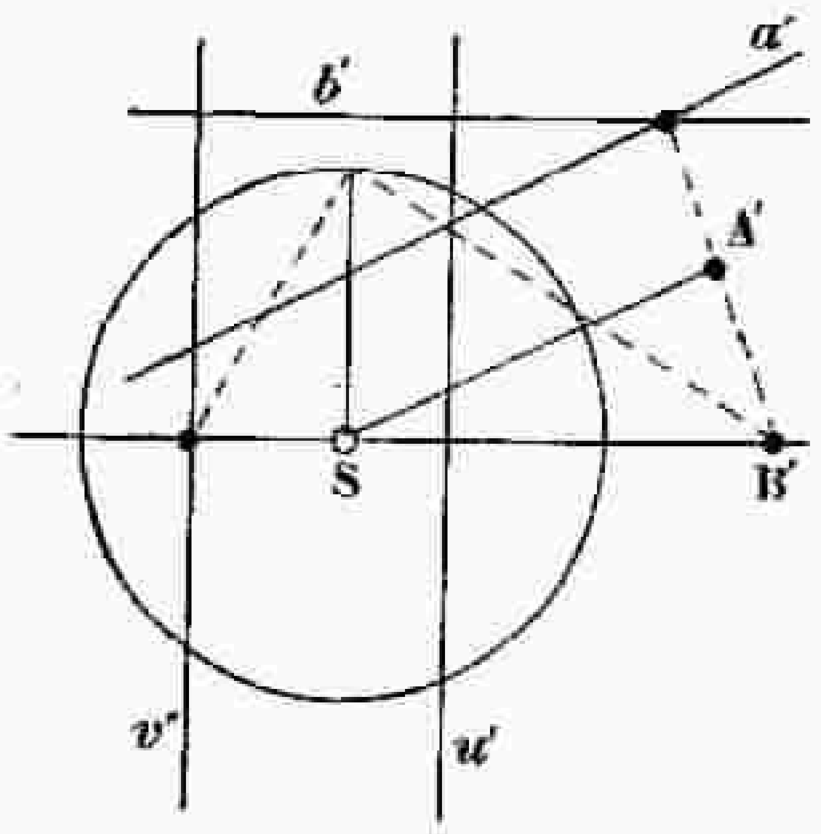


Fig. 15.

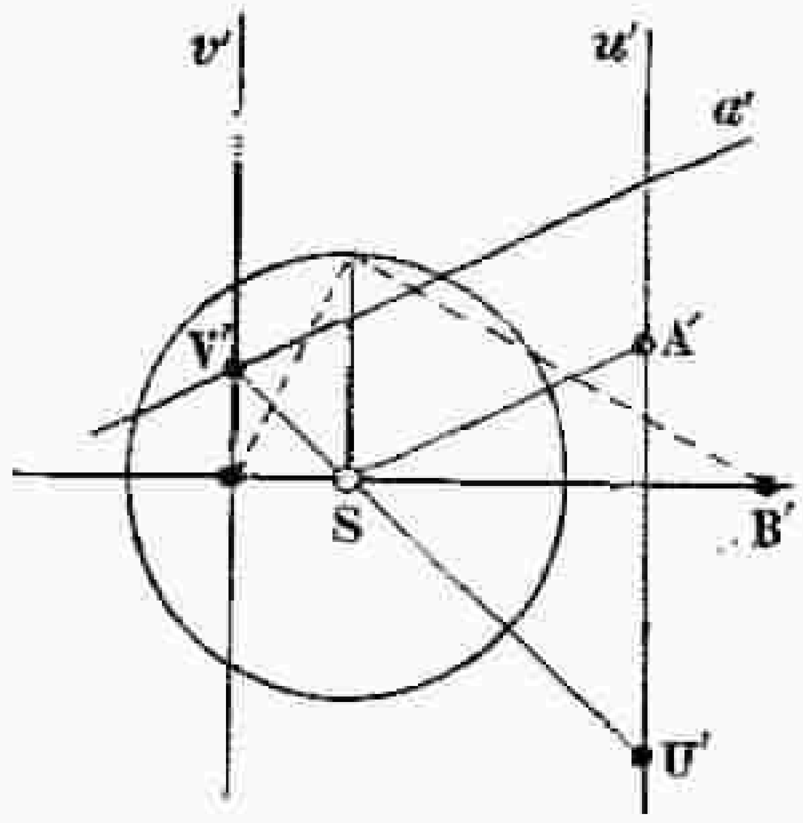


Fig. 16.

Si costruisca (fig. 16) la retta v' antipolare di B' rispetto al circolo fondamentale; essa è l'antiproiezione della retta cercata (§ 13, Teor.); e il punto V' comune alle rette v', a' è l'antitraccia della retta medesima. La sua proiezione u' è la parallela per A' a v'.

20. PROBLEMA 1°. — *Trovare l'angolo di due rette* $u_1 \equiv (u'_1, V'_1)$, $u_2 \equiv (u'_2, V'_2)$.

Il punto A' (fig. 17) comune alle antiproiezioni v'_1, v'_2 delle due rette date è l'antiproiezione di un piano α parallelo alle due rette medesime (§ 10, Teor. 3°), e perciò v'_1, v'_2 si possono riguardare come proiezioni e antiproiezioni di due rette (appartenenti al complesso) situate in questo piano α e passanti per il suo polo A.

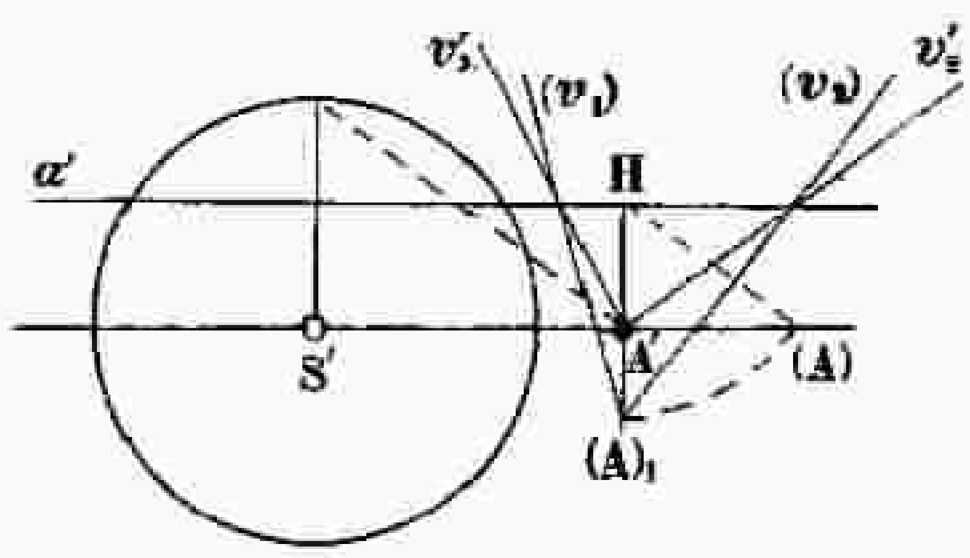


Fig. 17.

Scelta una retta a' parallela ad SA' come traccia di α, si faccia il ribaltamento di α sul quadro (§ 14). Ottenuto il ribaltamento (A_1) di A, si trovano i ribaltamenti (v_1), (v_2) delle due rette, e quindi il loro angolo.

PROBLEMA 2°. — *Trovare l'angolo di due piani* α ≡ (a', A') β ≡ (b', B').

Questo problema può ridursi al precedente cercando le antipolari rispetto al circolo fondamentale delle antiproiezioni A', B' dei piani dati. Esse sono le antiproiezioni di due rette perpendicolari ai due piani dati (§ 13, Teor.), ed i loro angoli (che possono essere costruiti nel modo sopra indicato) sono rispettivamente ugnali agli angoli dei due piani.

Il problema può anche essere risolto direttamente così:

La retta $v' = A'B'$ (fig. 18) è l'antiproiezione della retta comune ai due piani α, β e il suo antipolo C' rispetto al circolo fondamentale è l'antiproiezione dei piani perpendicolari a questa intersezione. Perciò le rette $v'_1 = A'C'$, $v'_2 = B'C'$ sono le antiproiezioni delle rette intersezioni dei piani α, β con un piano γ perpendicolare alla loro intersezione. Presa ad arbitrio una retta c' parallela ad $S'C'$, basta ribaltare il piano $\gamma \equiv (c', C')$ attorno a c' sul quadro (§ 14) per avere l'angolo sezione normale del diedro formato dai due piani α, β.

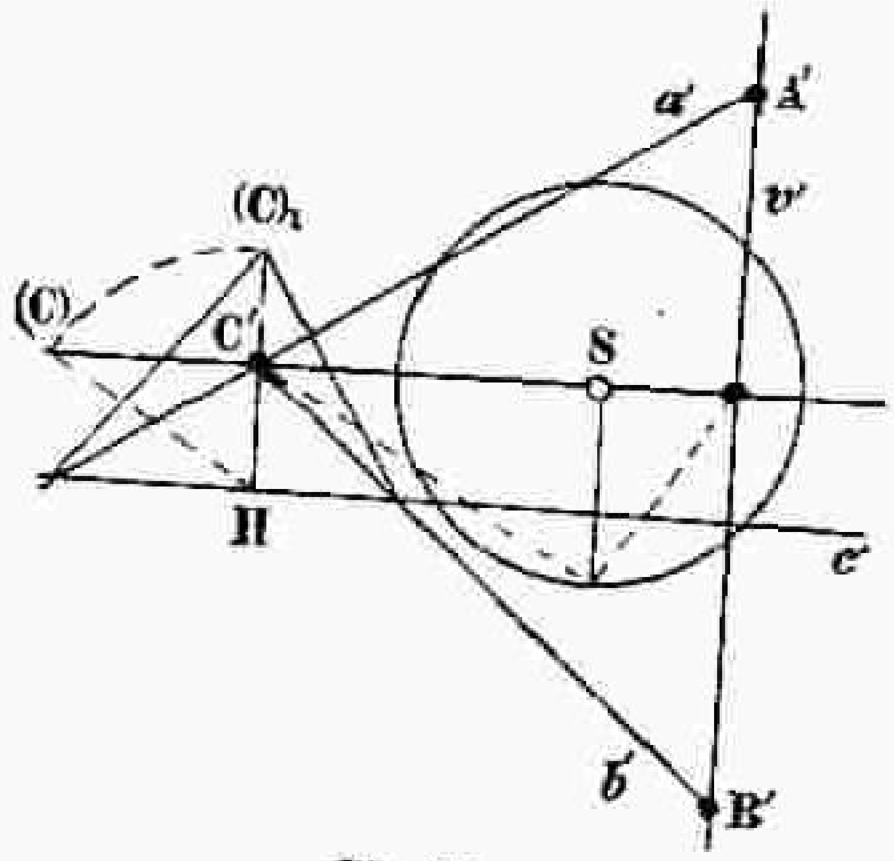


Fig. 18.

Cambiamento del sistema di rappresentazione.

21. Proponiamoci ora di passare dalla rappresentazione studiata fin qui alle altre conosciute. Basterà limitarci a confrontare la nostra rappresentazione con quella di Monge nel caso in cui il quadro coincide col primo piano di proiezione, essendo conosciuti i metodi per variare, nella proiezione di Monge, i piani di proiezione e per passare dalla proiezione di Monge alla proiezione centrale.

Punto. — Tracciata (fig. 19) la linea di terra x ed il circolo fondamentale, sia dato un punto $A \equiv (A', a')$ per mezzo della sua proie-

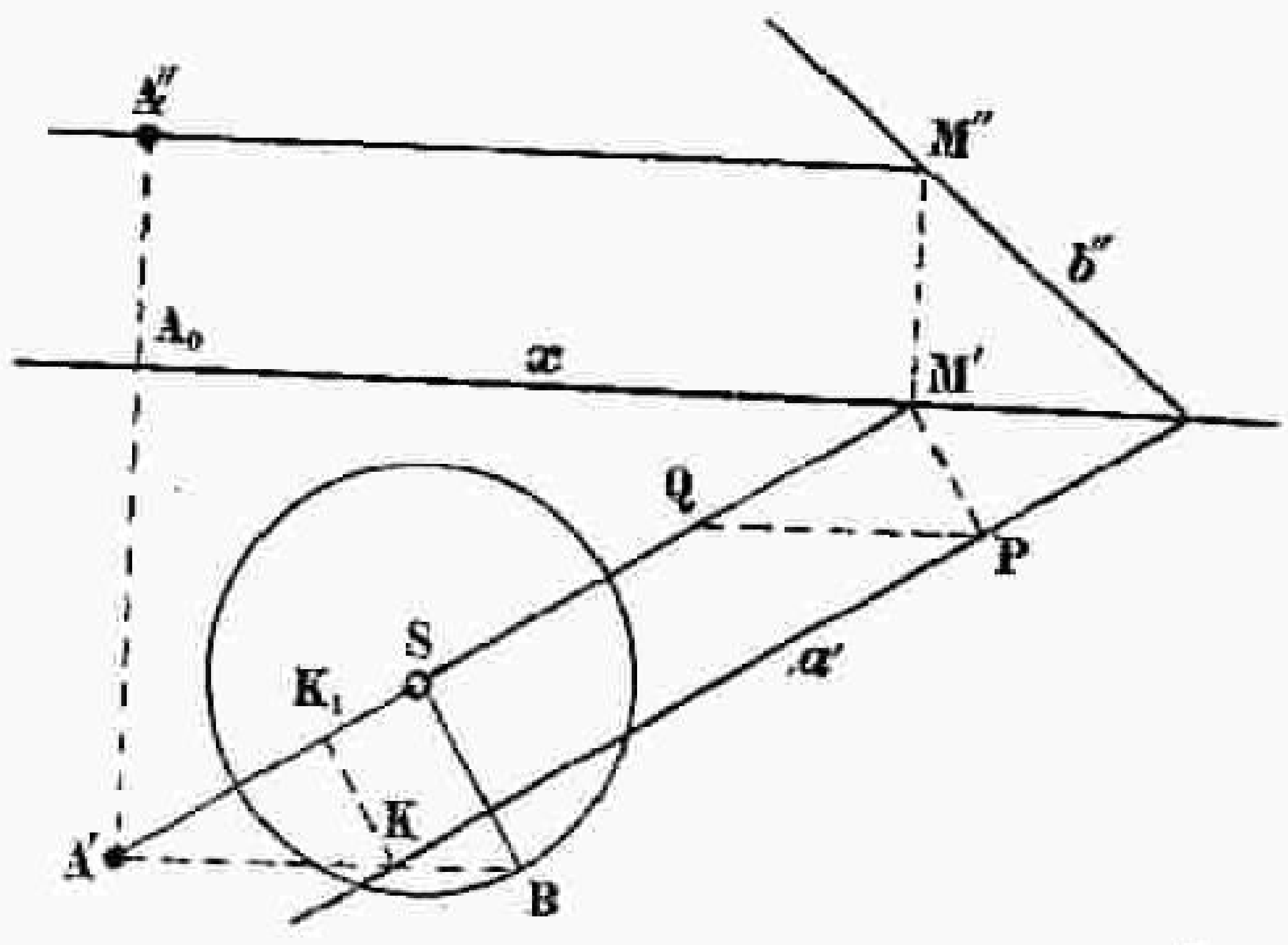


Fig. 19.

zione A' e della sua antitraccia a'. Condotto il raggio SB del circolo fondamentale perpendicolare ad SA', colla regola dei segni data nel § 11, si conduca per K, punto comune alle rette a' e $A'B$, la perpendicolare a SA'. Il segmento K_1A' è l'altezza del punto A sul quadro, come apparisce dalla costruzione del § 14. Inoltre sappiamo che A è sopra o sotto il quadro secondo che a', B sono dalla stessa parte o da parti opposte della retta SA'. Se dunque conduciamo per A' la perpendicolare alla linea di terra x, e dal punto d'incontro A_0 di essa con x prendiamo sulla medesima il segmento $A_0A'' = K_1A'$, il punto A nel sistema di Monge è rappresentato dalla coppia di punti A', A''.

Inversamente, date le due proiezioni A', A'' del punto A, si costruisca il triangolo rettangolo SBA' che ha per cateti il segmento SA' ed il raggio SB del circolo fondamentale, tenuto conto della solita regola dei segni, e su A'S si prenda $A'K_1 = A''A_0$.

Condotta per K_1 la K_1K perpendicolare ad A'S, che incontri in K la A'B', si conduca per K la a' parallela ad SA; essa è l'antitraccia del punto A.

Piano. — Dato un piano $\alpha \equiv (a', A')$ per mezzo della sua traccia a' e della sua antiproiezione A' (fig. 19), determiniamo, nel modo sopra indicato, la proiezione A'' del polo A di α. Cerchiamo poi la seconda traccia M'' della parallela alla retta a' condotta per A. La retta b''

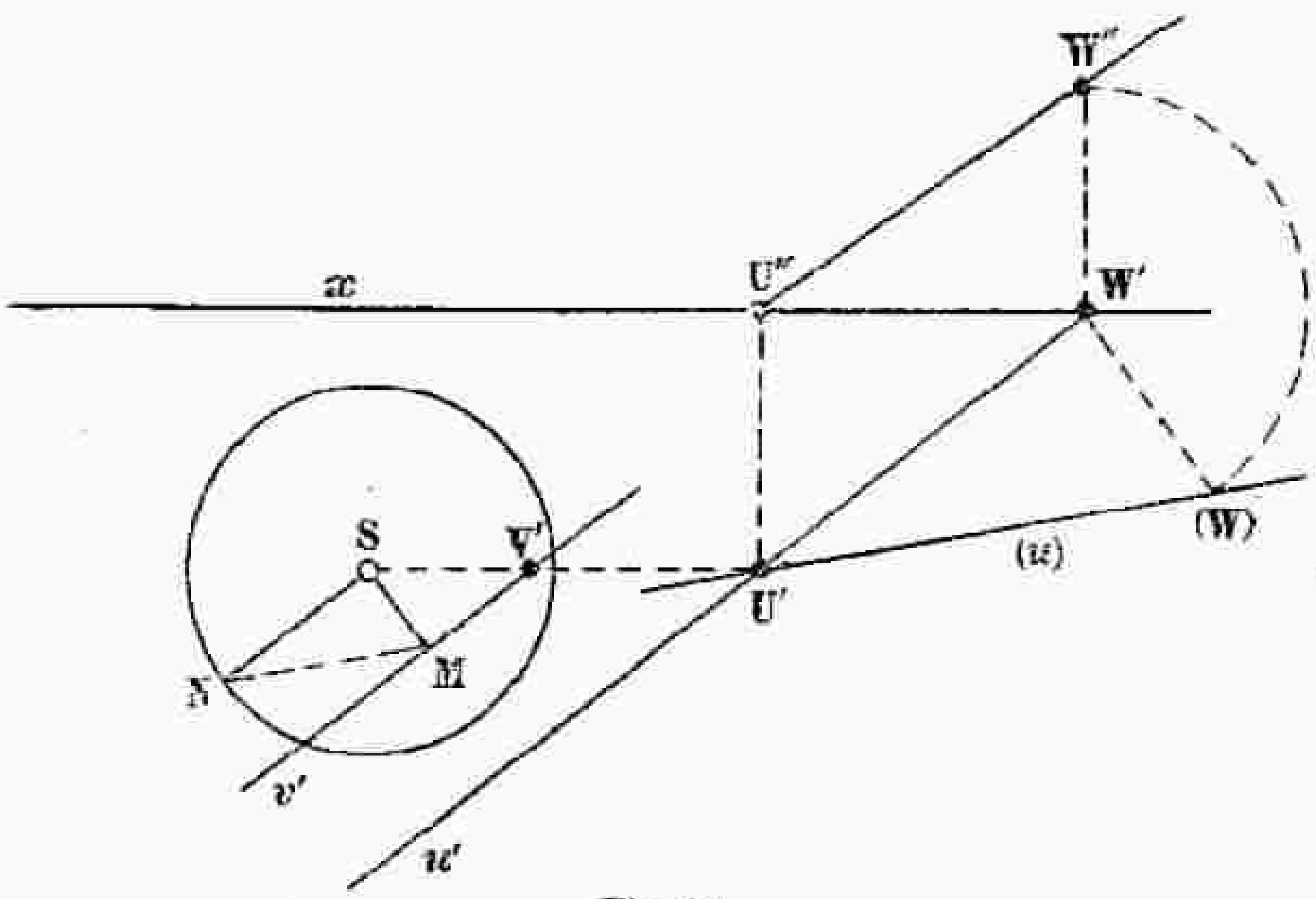


Fig. 20.

che congiunge M'' col punto $a'x$ è evidentemente la seconda traccia del piano α.

Inversamente, se è dato un piano α per mezzo delle sue traccie a', b'', si conduca per S la parallela ad a' che incontri in M' la x e per M' la perpendicolare ad x che incontri in M'' la b''. Se si costruisce un triangolo M'QP rettangolo avente per un cateto M'P la distanza fra le rette a', SM' e per altro cateto $QM' = M'M''$, è facile vedere che l'angolo $\psi \equiv \widehat{QPM'}$ è l'angolo del dato piano col primo piano di proiezione; ed allora l'antipolo A' di α (per la formula (2) del § 11) si trova conducendo la parallela a PQ' per l'estremo B di un raggio del circolo fondamentale perpendicolare ad a'. Il punto d'incontro di questa retta con SM' è l'antipolo A' di α.

Retta. — Sia data (fig. 20) una retta $u' \equiv (u', V')$. Col metodo del § 15 cerchiamo il suo ribaltamento quando (u), il piano proiettante si fa rotare attorno alla proiezione u'. Condotta per U′ la perpendicolare alla linea di terra x, che la incontri in U″, abbiamo intanto la prima traccia (U′, U″) della retta u. Per il punto W′, incontro di u' con x conduciamo le perpendicolari alla u' e alla x. La prima incontri (u) in (W); sulla seconda si prenda $W'W'' = W'(W)$; è chiaro che W′W″ è la seconda traccia, e quindi $u'' = U''W''$ è la seconda proiezione di u.

Inversamente, data una retta u per mezzo delle sue proiezioni u', u'', si trovi il suo ribaltamento (u) quando il piano proiettante rota attorno ad u'. Costruito il triangolo rettangolo SNM che ha per cateto SN il raggio del circolo fondamentale ed ha l'angolo adiacente eguale a quello delle rette u', (u), si trova la distanza della antiproiezione v' da S (§ 15).

G. Lazzeri.

SULLA DIVISIONE DEL CIRCOLO

In questa Nota dimostro in modo semplice e diretto che, come fu rilevato da Gauss e dimostrato da Abel, è p il valore della quantità della quale occorre la radice quadrata per la divisione del circolo in p parti ugnali, provo la stessa verità mediante calcolo diretto del discriminante di $\frac{x^n-1}{x-1}$; e per confermarla con esempi dò la scomposizione di $\frac{x^p-1}{x-1}$ in due fattori pei valori primi di p da 3 a 19. Mi occupo poi particolarmente della divisione del circolo in 17 parti uguali e pervengo ad un procedimento di costruzione relativamente semplice, quantunque necessariamente affine ad altri, del poligono regolare di 17 lati; esso è della massima convenienza pratica perchè dà subito il circolo diviso in cinque archi dei quali quattro sono uguali fra loro e quadrupli del rimanente.

La radice quadrata necessaria per la divisione del circolo. — Se p è un numero primo, per dividere il circolo in p parti uguali basta divider prima l'intera circonferenza in $p-1$ parti uguali e dividere poi in altrettante parti uguali un arco, che dopo si può costruire, come fu dimostrato da Gauss; e devesi inoltre estrarre la radice quadrata da una sola quantità, che è il numero p come fu rilevato da Gauss e dimostrato poi da Abel. (¹) Noi daremo ora una dimostrazione, che può venir preferita a quella di Abel.

(¹) Gauss, *Werke, Disquisitiones arithmeticae*, Band I. pag. 454, in fine dell'art. 360. — Abel, *Oeuvres, I*, Christiania. MDCCCLXXXI. pag. 506 oppure Serret, *Algèbre Supérieure*, II, pag. 562.

Se α, β sono radici primitive delle equazioni

$$x^p - 1 = 0\,, \quad x^{p-1} - 1 = 0$$

ed r è radice primitiva del numero primo p ossia sono incongrui, rispetto al modulo p, $1, r, r^2, \ldots r^{p-2}$ ed

$$r^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}\,,$$

allora, se sia $\pm a$ la quantità dalla quale devesi estrarre la radice quadrata per la divisione del circolo in p parti uguali,

$$a = (\alpha + \beta\alpha^r + \beta^2\alpha^{r^2} + \ldots + \beta^{p-2}\alpha^{r^{p-2}})\,(\alpha + \beta^{-1}\alpha^r + \beta^{-2}\alpha^{r^2} + \ldots + \beta^{-p+2}\alpha^{r^{p-2}}).$$

Eseguendo il prodotto nel secondo membro ed ordinando secondo le potenze di β, tenendo presente che $\beta^{p-1} = 1$, si vede che

$$\begin{aligned} a = {} & \alpha^2 + \alpha^{2r} + \alpha^{2r^2} + \ldots + \alpha^{2r^{p-2}} \\ & + \beta\,(\alpha^{r+1} + \alpha^{r(r+1)} + \alpha^{r^2(r+1)} + \ldots + \alpha^{r^{p-2}(r+1)}) \\ & + \beta^2\,(\alpha^{r^2+1} + \alpha^{r(r^2+1)} + \alpha^{r^2(r^2+1)} + \ldots + \alpha^{r^{p-2}(r^2+1)}) \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \beta^{p-2}\,(\alpha^{r^{p-2}+1} + \alpha^{r(r^{p-2}+1)} + \alpha^{r^2(r^{p-2}+1)} + \ldots + \alpha^{r^{p-2}(r^{p-2}+1)})\,. \end{aligned}$$

Siccome r è radice primitiva del numero p, si ha che

$$r^k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

quando e solo quando

$$k = \frac{p-1}{2}\,, \qquad \text{se} \qquad k < p\,,$$

epperò gli esponenti

$$r^k + 1\,, \quad r\,(r^k + 1), \quad r^2\,(r^k + 1)\,, \ldots, \quad r^{p-2}\,(r^k + 1)$$

divisi per p dànno, in un certo ordine, i resti

$$1, 2, 3, \ldots, p-1 \qquad \text{se} \qquad k \neq \frac{p-1}{2}$$

e son tutti divisibili per p se $k = \dfrac{p-1}{2}$. Adunque, essendo α una radice primitiva dell'equazione $x^p - 1 = 0$ per cui

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots + \alpha^{p-1} = 0$$

ed

$$\alpha^p = 1\,,$$

si ha che

$$a = -\left(1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{\frac{p-3}{2}} + \beta^{\frac{p+1}{2}} + \ldots + \beta^{p-2}\right) + (p-1)\,\beta^{\frac{p-1}{2}}$$

e siccome β è radice primitiva dell'equazione

$$x^{p-1} - 1 = 0$$

onde

$$1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{p-2} = 0 \;\text{ e }\; \beta^{\frac{p-1}{2}} = -1,$$

si riconosce che, come era da dimostrare,

$$a = p\beta^{\frac{p-1}{2}} = -p.$$

Bastava osservare che per la risoluzione d'un'equazione, ed anzi per il calcolo d'una funzione razionale a due valori delle radici, occorre la radice quadrata del discriminante per poter affermare immediatamente che l'unica radice quadrata necessaria per la divisione del circolo in p parti uguali è certamente quella del discriminante dell'equazione $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, come ora mostreremo semplicemente.

Il discriminante di $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ si calcola con facilità e prontamente deducendolo da quello di $x^n - 1$. (¹) Si ottiene con facilità anche direttamente nel seguente modo. Se

$$f(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = (n-1)\, x^{n-2} + (n-2)\, x^{n-3} + \ldots + 2x + 1$$

e ρ è una radice primitiva dell'equazione $x^n - 1 = 0$, il discriminante di $f(x)$

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \prod_{k=1}^{k=n-1} f'(\rho^k) =$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Pi\, (1 + 2\rho^k + 3\rho^{2k} + \ldots + (n-1)\, \rho^{(n-2)k})$$

ossia:

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Pi\, \frac{(n-1)\,\rho^{nk} - n\rho^{(n-1)k} + 1}{(\rho^k - 1)^2}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \Pi\, \frac{n\,(1 - \rho^{(n-1)k})}{(1 - \rho^k)^2}$$

$$= (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} . n^{n-1}\, \Pi\, \frac{1 + \rho^k + \rho^{2k} + \ldots + \rho^{(n-2)k}}{1 - \rho^k}.$$

Ora

$$1 + \rho^k + \rho^{2k} + \ldots + \rho^{(n-1)k} = f(\rho^k) = 0$$

$$\Pi\,(1 - \rho^k) = (1 - \rho)\,(1 - \rho^2) \ldots (1 - \rho^{n-1}) = f(1) = n,$$

epperò

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} . n^{n-2} . \Pi\,(-\rho^{(n-1)k})$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} . n^{n-2} . \rho^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

ossia, perchè $\rho^n = 1$ e quando n è pari $\rho^{\frac{n}{2}} = -1$,

$$D(f(x)) = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} . n^{n-2}.$$

(¹) V. L. Bianchi, *Lez. sulla teoria dei gruppi di sostituz. e sulle equaz. algebriche.* Pisa, Spoerri, libraio editore. 1900, pag. 224.

Ne segue che

$$\sqrt{\mathrm{D}(f(x))}=\begin{cases}-1)^{\frac{n-1}{4}}\, n^{\frac{n-3}{2}}\sqrt{n}, & \text{se } n \text{ è dispari}\\ -1)^{\frac{n+2}{4}}\,.\,n^{\frac{n}{2}-1}, & \text{se } n \text{ è pari.}\end{cases}$$

Si posson vedere confermati questi risultati nei seguenti esempi relativi al caso più importante di n numero primo.

Le equazioni binomie $x^n \pm 1 = 0$ sono reciproche e, come tali, si possono ridurre ad equazioni di minor grado; ma non vogliamo valerci ora di questa loro proprietà, vogliamo solo ottenere la scomposizione in due fattori di stesso grado di $\frac{x^p-1}{x-1}$ per i più piccoli valori primi di p. Se

$$\begin{aligned}\frac{x^p-1}{x-1} &= (x^m+c_1x^{m-1}+\ldots+c_{m-1}\,x+c_m)\,(x^m+d_1a^{m-1}+\ldots+d_{m-1}x+d_m)\\ &= ((x-\rho)\,(x-\rho^{g^2})\ldots(x-\rho^{g^{p-3}}))\;((x-\rho^{g})\,(x-\rho^{g^3})\ldots(x-\rho^{g^{p-2}})),\end{aligned}$$

i coefficienti corrispondenti c_r, d_r si ottengono immediatamente come radici d'equazioni del 2º grado a coefficienti razionali, che si calcolano con molta facilità tenendo presenti le espressioni del coefficiente c_r mediante le radici $\rho, \rho^{g^2}, \ldots, \rho^{g^{p-3}}$ e di d_r mediante le altre radici oppure si osserva che d_r si ottiene da c_r ponendovi ρ^g in luogo di ρ. Se per radici primitive, per valori di g, relative ai moduli 5, 7, 11, 13, 17, 19 si considerano 2, 3, 2, 2, 3, 2, si trova con calcolo molto facile che:

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1=\left(x+\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\right).$$

$$x^4+x^3+x^2+x+1=\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,x+1\right)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,x+1\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{x^7-1}{x-1} &= x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=\\ &=\left(x^3+\frac{1+\sqrt{-7}}{2}\,x^2+\frac{-1+\sqrt{-7}}{2}\,x-1\right)\times\\ &\times\left(x^3+\frac{1-\sqrt{-7}}{2}\,x^2+\frac{-1-\sqrt{-7}}{2}\,x-1\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{x^{11}-1}{x-1} &= x^{10}+x^9+\ldots+x^2+x+1=\\ &=\left(x^5+\frac{1+\sqrt{-11}}{2}\,x^4-x^3+x^2+\frac{-1+\sqrt{-11}}{2}\,x-1\right)\\ &\times\left(x^5+\frac{1-\sqrt{-11}}{2}\,x^4-x^3+x^2+\frac{-1-\sqrt{-11}}{2}\,x-1\right).\end{aligned}$$

$$\frac{x^{13}-1}{x-1}=x^{12}+x^{11}+\ldots+x^2+x+1=$$
$$=\left(x^6+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x^5+2x^4+\frac{-1+\sqrt{13}}{2}x^3+2x^2+\frac{1+\sqrt{13}}{2}x+1\right)\times$$
$$\times\left(x^6+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x^5+2x^4+\frac{-1-\sqrt{13}}{2}x^3+2x^2+\frac{1-\sqrt{13}}{2}x+1\right).$$

$$\frac{x^{17}-1}{x-1}=x^{16}+x^{15}+\ldots+x^2+x+1=$$
$$=\left(x^8+\frac{1+\sqrt{17}}{2}x^7+\frac{5+\sqrt{17}}{2}x^6+\frac{7+\sqrt{17}}{2}x^5+(2+\sqrt{17})x^4+\right.$$
$$\left.+\frac{7+\sqrt{17}}{2}x^3+\frac{5+\sqrt{17}}{2}x^2+\frac{1+\sqrt{17}}{2}x+1\right)\times$$
$$\times\left(x^8+\frac{1-\sqrt{17}}{2}x^7+\frac{5-\sqrt{17}}{2}x^6+\frac{7-\sqrt{17}}{2}x^5+(2-\sqrt{17})x^4+\right.$$
$$\left.+\frac{7-\sqrt{17}}{2}x^3+\frac{5-\sqrt{17}}{2}x^2+\frac{1-\sqrt{17}}{2}x+1\right).$$

$$\frac{x^{19}-1}{x-1}=x^{18}+x^{17}+\ldots+x^2+x+1=$$
$$=\left(x^9+\frac{1+\sqrt{-19}}{2}x^8-2x^7+\frac{3-\sqrt{-19}}{2}x^6+\frac{5+\sqrt{-19}}{2}x^5+\right.$$
$$\left.+\frac{-5+\sqrt{-19}}{2}x^4+\frac{-3-\sqrt{-19}}{2}x^3+2x^2+\frac{-1+\sqrt{-19}}{2}x-1\right)\times$$
$$\times\left(x^9+\frac{1-\sqrt{-19}}{2}x^8-2x^7+\frac{3+\sqrt{-19}}{2}x^6+\frac{5-\sqrt{-19}}{2}x^5+\right.$$
$$\left.+\frac{-5-\sqrt{-19}}{2}x^4+\frac{-3+\sqrt{-19}}{2}x^3+2x^2+\frac{-1-\sqrt{-19}}{2}x-1\right).$$

Si potrebbe ora procedere con metodo analogo e con la stessa facilità alla decomposizione di ciascun fattore, di grado superiore al primo, in due fattori d'ugual grado e continuare, occorrendo, fino alla completa decomposizione in fattori di primo grado.

Poligono regolare di 17 lati. — I due fattori della decomposizione precedente di $(x^{17}-1):(x-1)$ sono a radici reciproche per cui saremmo ancora in tempo ad approfittare di questa proprietà per la loro riduzione. Noi però preferiamo riprendere da principio l'equazione della divisione del circolo in diciassette parti uguali, che vogliamo trattare in modo particolare per abbassarla a metà grado, dopo d'averle tolta la radice 1, in base appunto alla sua proprietà d'esser reciproca, riducendoci così ad aver subito da fare con una equazione dell'ottavo grado a coefficienti razionali, la qual cosa non si può ottenere mediante semplice scomposizione in fattori. [1]

---

[1] V. GAUSS, *Disquisitiones arithmeticae*, Band I, pag. 417, art. 341, prima dimostrazione data.

Consideriamo dunque l'equazione $f(y)=0$ dove

$$f(y)=\frac{y^{17}-1}{y-1}=y^{16}+y^{15}+\ldots+y^2+y+1\,.$$

Dividendo per y^8 s'ottiene l'equazione $\varphi(x)=0$ dove

$$x=y+\frac{1}{y}$$

e

$$\varphi(x)=x^8+x^7-7x^6-6x^5+15x^4+10x^3-10x^2-4x+1\,.$$

Le radici di quest'equazione sono

$$2\cos\frac{2\pi}{17},\qquad 2\cos\frac{4\pi}{17},\ldots,\ 2\cos\frac{16\,\pi}{17},$$

ossia

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{17}\qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ 8).$$

L'equazione $\varphi(x)=0$ è abeliana, perchè $\cos m\alpha$ s'esprime razionalmente per mezzo di $\cos\alpha$. Essendo 3 radice primitiva del modulo primo 17, le radici dell'equazione $f(y)=0$ sono

$$\rho,\quad \rho^3,\quad \rho^{3^2},\ldots,\ \rho^{3^{15}},$$

se ρ è una sua radice qualunque, per es. se

$$\rho=\cos\frac{2\pi}{17}+i\ \mathrm{sen}\ \frac{2\pi}{17}.$$

Si ha così che

$$2\cos k\,\frac{2\pi}{17}=\rho^k+\rho^{17-k}\,.$$

Per la scomposizione di $\varphi(x)$ in due fattori, in modo conveniente, si può ora prestabilire che le radici del primo fattore siano

$$2\cos a,\qquad 2\cos 8a,\qquad 2\cos 4a,\qquad 2\cos 2a$$

e quelle del secondo siano

$$2\cos 3a,\qquad 2\cos 7a,\qquad 2\cos 5a,\qquad 2\cos 6a$$

dove $a=\frac{2\pi}{17}$. Per l'ulteriore scomposizione in due fattori del primo di questi due si può ora prestabilire, come è conveniente, che le radici del primo dei due fattori della nuova decomposizione siano

$$2\cos a\qquad \text{e}\qquad 2\cos 4a,$$

epperò quelli dell'altro siano

$$2\cos 8a\qquad \text{e}\qquad 2\cos 2a\,.$$

I coefficienti corrispondenti dei due fattori, per ciascuna decomposizione, si ottengono facilmente come radici d'equazione di 2° grado se se ne calcolino somma e prodotto mediante le loro espressioni per mezzo di ρ. Si trova così che

$$\varphi(x) = x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 =$$
$$= \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}}{4}\, x + \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}{4}\right) \times$$
$$\times \left(x^2 + \frac{1 - \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}}{4}\, x + \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}{4}\right) \times$$
$$\times \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{17} - \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}{4}\, x + \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}}{4}\right) \times$$
$$\times \left(x^2 + \frac{1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}{4}\, x + \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}}{4}\right).$$

Le radici dei due ultimi fattori sono

$$2\cos 3a \quad \text{e} \quad 2\cos 5a, \qquad 2\cos 7a \quad \text{e} \quad 2\cos 6a.$$

Occupiamoci ora dell'equazione

$$x^2 + \frac{1 - \sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})}}{4}\, x + \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}{4} = 0.$$

Le sue radici, come fu già detto, sono

$$2\cos\frac{2\pi}{17} \qquad \text{e} \qquad 2\cos\frac{8\pi}{17}.$$

Essa può pur scriversi nel seguente modo

$$x^2 - (\sqrt{m^2+1} + m)\, x + (\sqrt{n^2+1} - n) = 0$$

dove

$$m = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{4}, \qquad n = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4}.$$

Si può pur scrivere così

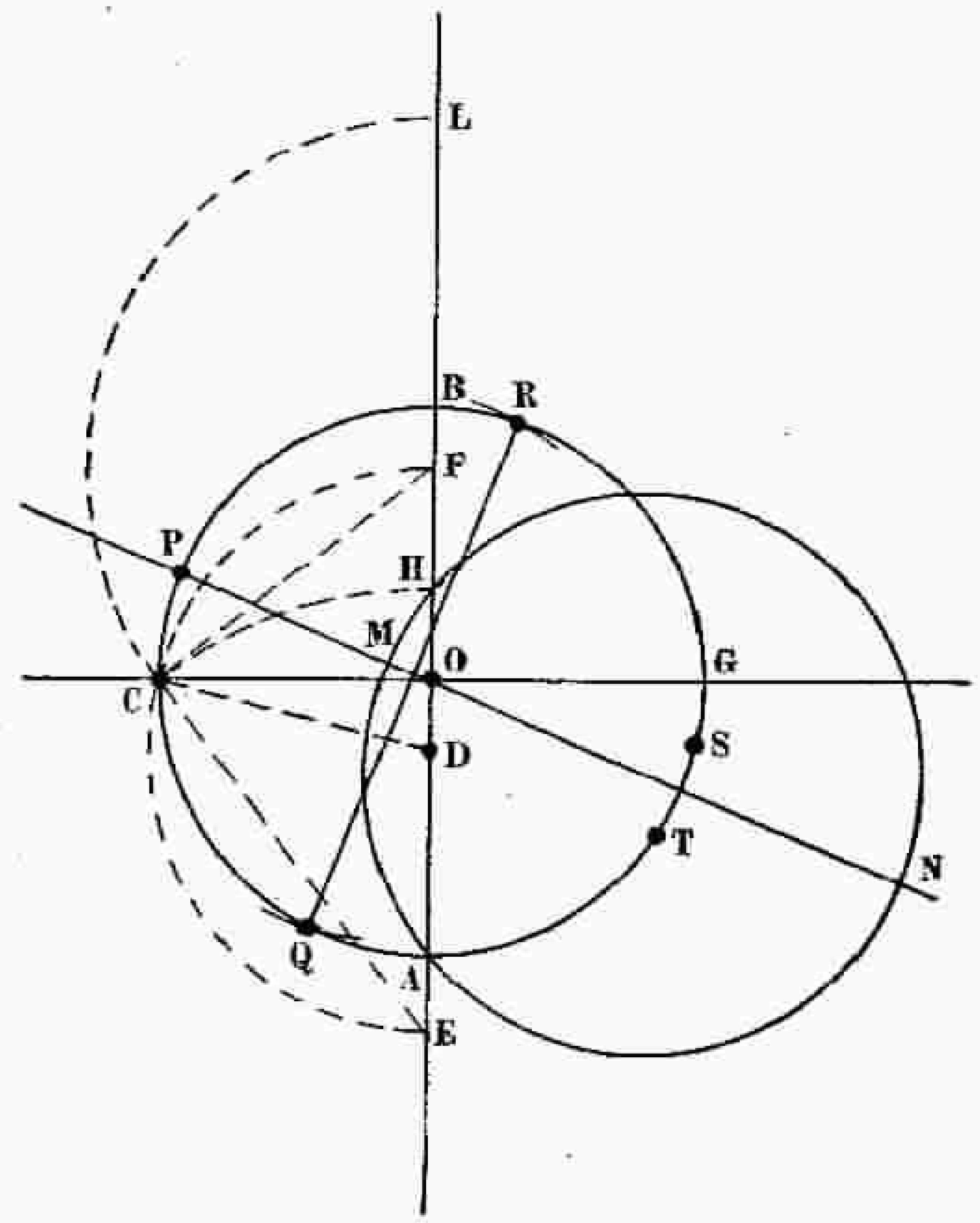
$$x(a - x) = b$$

dove

$$a = \sqrt{m^2+1} + m, \qquad b = \sqrt{n^2+1} - n.$$

Se ne deduce quindi la molto semplice *costruzione del poligono regolare di 17 lati*.

In un cerchio di centro O si conducano due diametri perpendicolari fra loro, AB e CG: si divida il raggio OA in quattro parti uguali ed una sia OD; descrivasi il circolo di centro D e raggio DC e siano E e F i punti dove esso taglia il prolungamento del raggio OA ed OB: sia L il punto dove il circolo di centro F e raggio FC taglia il prolungamento del raggio OB e sia H il punto dove il circolo di centro E e raggio EC taglia OB. Si descriva il circolo che passa per A ed H ed ha raggio uguale alla metà di OL; sia MN il suo diametro passante per O e supponiamo che il centro sia su ON dalla parte di G rispetto alla retta AB; sia P il punto dove il prolungamento di OM taglia il circolo di centro O e raggio OA e siano



Q ed R i punti dove questo stesso circolo è tagliato dal circolo ad esso uguale di centro M.

Si prendano gli archi RS e QT uguali all'arco PR e si avrà che

$$\widehat{QP} = \widehat{PR} = \widehat{BS} = \widehat{TQ} = 4\,\widehat{ST}$$

per cui l'arco $\widehat{ST}$ è la diciassettesima parte della circonferenza e la sua corda è lato del poligono regolare di 17 lati inscritto al primo circolo.

Se si prende il raggio OA per unità, si ha infatti che

$$DC = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$OF = DC - OD = m, \qquad OE = DC + OD = n,$$

$$OL = CF + OF = \sqrt{m^2 + 1} + m = a,$$

$$OH = CE - OE = \sqrt{n^2 + 1} - n = b.$$

Si ha inoltre che

$$OM \,.\, ON = OH \,.\, OA \,.$$

Siccome $OA = 1$ ed $MN = OL$, sono dunque OM ed ON, e precisamente le loro misure con OA, le due radici dell'equazione

$$x(a - x) = b$$

per cui

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = 2\cos\frac{8\pi}{17}, \qquad \frac{\overline{ON}}{\overline{OA}} = 2\cos\frac{2\pi}{17}.$$

La RQ è perpendicolare ad OM nel suo punto di mezzo perchè

$$\overline{OR} = MR = OQ = MQ = OA$$

epperò

$$\widehat{PR} = \widehat{PQ} = \text{arc cos}\,\frac{1}{2}\,\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \frac{8\pi}{17} = 4\,.\,\frac{2\pi}{17}.$$

F. Giudice.

SUL COMPORTAMENTO D'UN SISTEMA ∞^1 DI LINEE D'UNA SUPERFICIE
rispetto ad alcune operazioni eseguite su di esso (¹)

1. Diciamo F una superficie la cui rappresentazione analitica in coordinate cartesiane ortogonali, fatta, o mediante una sola equazione tra le coordinate, oppure parametricamente, richieda solo la considerazione di funzioni (*reali* di variabili *reali*) finite e continue insieme con tutte le derivate che occorrono. È noto allora che, in ogni punto semplice P della superficie esiste *un* piano tangente π; è noto pure che si dà il nome di involuzione delle tangenti coniugate, in P, all'involuzione I che ha per rette unite le tangenti principali u, v di F uscenti da P. L'involuzione I è ellittica, iperbolica o degenere secondochè il punto P è ellittico, iperbolico o parabolico; e se, per ogni posizione di P, l'involuzione I è degenere, la superficie F è sviluppabile sul piano.

La conoscenza dell'involuzione I permette di definire le linee asintotiche e le linee di curvatura di F: le prime hanno, in ogni loro punto, come tangente, una tangente principale di F: le altre toccano, in ogni loro punto P, le rette principali m, m' della relativa involuzione I.

(¹) Le semplicissime osservazioni sviluppate nel presente lavoro mi furono suggerite dal ch.^{mo} dott. Sannia; esse son svolte con metodo sintetico, per quanto le proprietà a cui giungo si possano pure stabilire con procedimenti analitici.

Infine, detti ρ_1, ρ_2 i raggi principali di curvatura in P, il raggio di curvatura di quella sezione normale, la cui tangente in P forma con m l'angolo ω, è fornito dalla formola di Eulero:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2\omega}{\rho_1} + \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\rho_2};$$

ed è uguale pure al quadrato del corrispondente semidiametro dell'indicatrice di Dupin, la cui equazione (nel piano π, riferita ad m, m' come assi) è

$$\frac{x^2}{\rho_1} + \frac{y^2}{\rho_2} = \pm 1 .$$

2. Premesso questo, se è dato su F un sistema semplicemente infinito, Ω, di linee (*reali*), possiamo costruirne il sistema coniugato Ω' ed il sistema ortogonale Ω_1; essi son tali che, in ogni punto comune ad una linea di Ω ed una di Ω' (od Ω_1), le tangenti a queste linee sono coniugate (od ortogonali).

Dai sistemi Ω', Ω_1, dedotti da Ω mediante le due seguenti operazioni:

costruzione del sistema coniugato (operazione a)
" " " ortogonale (" b)

possiamo, con lo stesso procedimento, dedurre altri sistemi, ai quali saranno sempre applicabili le due operazioni suddette; e così via. Quand'è che, con una successione finita di tali operazioni, si ritorna al sistema primitivo Ω?

Intanto è chiaro che, detto A un sistema di asintotiche, e C un sistema di linee di curvatura, si ha:

$$A = aA = a(aA) = \ldots; \qquad C = b(bC) = a(bC) \ldots .$$

Più in generale, qualunque sia il sistema Ω, è certamente:

$$a(a\Omega) = \Omega; \qquad b(b\Omega) = \Omega;$$

per cui una successione di operazioni a, b, nella quale due operazioni consecutive sono identiche produce lo stesso effetto della successione ottenuta sopprimendo quelle due operazioni. Dimodochè, il solo caso che interessa è quello in cui le operazioni a, b vengono eseguite alternativamente, e quindi formano un insieme che rientra in uno dei tipi seguenti:

$$ba \ldots baba = (ba)^n, \qquad a \ldots baba = a(ba)^n$$
$$ab \ldots abab = (ab)^n, \qquad b \ldots abab = b(ab)^n$$

(l'ordine in cui intenderemo eseguite le operazioni è quello da destra a sinistra).

3. Può darsi anzitutto che la superficie F (supposta non sviluppabile) sia tale che ogni sistema Ω, tracciato su di essa, ritorni in se stesso quando gli si applichi un'operazione del tipo anzidetto. Se questo avviene, e diciamo J l'involuzione di angoli retti nel fascio $P\pi$, allora, comunque si prenda in questo fascio una retta r, sempre si deve avere una delle quattro relazioni seguenti:

$$\begin{aligned} JI\ldots JIJIr &= (JI)^n r = r, \\ I\ldots JIJIr &= I(JI)^n r = r, \\ IJ\ldots IJIJr &= (IJ)^n r = r, \\ J\ldots IJIJr &= J(IJ)^n r = r; \end{aligned} \qquad (1)$$

delle quali la 3ª si può sopprimere perchè identica alla 1ª, (lo si verifica moltiplicando la 1ª, a sinistra, per $(IJ)^n$, e ricordando che $I^2 = J^2 = 1$). L'essere le (1) identiche rispetto ad r significa che sono identiche, rispettivamente le proiettività:

$$(JI)^n, \qquad I(JI)^n, \qquad J(IJ)^n.$$

La prima di esse è una potenza della proiettività JI.

Ora, se $J \neq I$, la JI e tutte le sue potenze hanno per raggi uniti le rette principali m, m' di I, le quali, costituendo una coppia di J, son necessariamente reali. In tal caso JI non può essere ciclica di ordine > 2, per cui si deve avere:

$$JIJI = 1,$$

ossia

$$JI = IJ;$$

il che dice che le involuzioni I, J sono permutabili, e quindi che i loro raggi uniti formano un gruppo armonico. Ne segue che le tangenti principali in P sono reali e perpendicolari; l'indicatrice di Dupin è costituita, in ogni punto, da una coppia di iperboli equilatere coniugate, onde F è una superficie ad area minima.

Se invece $I = J$, allora IJ è l'identità, e quindi è ciclica di quell'ordine che si vuole. In quest'altro caso F è una sfera. Viceversa, un qualsiasi sistema di linee tracciato su di una sfera, od un elassoide, ritorna in sè dopo $2n$, o dopo $4n$, (n è un intero positivo qualsiasi), operazioni a, b, eseguite alternativamente, e qualunque sia quella con cui s'incominci.

Supponiamo in secondo luogo che si abbia:

$$I(JI)^n = 1.$$

Se $n = 2n'$, segue:

$$I(JI)^{n'} = (IJ)^{n'} \qquad \text{ossia:} \qquad (IJ)^{n'} I = (IJ)^{n'}$$

e quindi $I = 1$. Se invece $n = 2n' + 1$, si ha, dopo opportune trasformazioni:

$$(IJ)^{n'} I \,.\, J = (IJ)^{n'} I$$

da cui $J = 1$. Il 2º risultato è assurdo, il 1º esige che F sia un piano (caso che intenderemo escluso).

Identici risultati si hanno esaminando, in modo analogo, la:

$$\mathrm{J}\,(\mathrm{IJ})^n = 1.$$

Potremo dunque concludere: *La sfera e le superficie ad area minima sono le sole superficie sulle quali un qualunque sistema di linee ritorni in sè quando gli si applichi una serie di operazioni* a, b; *nei due casi occorrono rispettivamente* $2n$ *e* $4n$ *di tali operazioni, eseguite alternativamente, ed incominciando con una qualunque di esse.*

4. Escludiamo le superficie anzidette supponendo $\mathrm{I} \neq \mathrm{J}$ ed $\mathrm{IJ} \neq \mathrm{JI}$; esisteranno allora su F solo dei sistemi speciali dotati della proprietà voluta. Se Ω è un tal sistema, ed r la tangente ad una sua linea nel punto generico P, si dovranno avere di nuovo le (1).

La 1ª e la 3ª di queste sono verificate dai raggi uniti di $(\mathrm{JI})^n$, proiettività che non è certo identica per nessun valore di n; questi raggi uniti sono le rette m, m', onde Ω è, in questo caso, uno dei due sistemi di linee di curvatura. E viceversa, è chiaro che entrambi questi sistemi si comportano, rispetto alle operazioni a, b, come se F fosse una sfera.

In secondo luogo si abbia la 2ª delle (1). Se $n = 2n' + 1$, segue:

$$(\mathrm{IJ})^{2n'+1}\,\mathrm{I}r = r\,;$$

da cui:

$$(\mathrm{IJ})^{n'}\,\mathrm{I}r = (\mathrm{JI})^{n'+1} r = \mathrm{J}\,.\,(\mathrm{IJ})^{n'}\mathrm{I}r.$$

Posto allora:

$$(\mathrm{IJ})^{n'}\,\mathrm{I}r = r'\,;$$

si avrà:

$$\mathrm{J}r' = r', \qquad \text{ed:} \qquad r = \mathrm{I}(\mathrm{JI})^{n'} r'$$

per cui r sarà la retta trasformata, mediante $\mathrm{I}(\mathrm{JI})^{n'}$, di una retta isotropa. Non essendo r reale, questo caso è da escludere. Se invece $n = 2n'$, scriviamo la 2ª delle (1) sotto la forma:

$$(\mathrm{IJ})^{2n'}\,\mathrm{I}r = r\,;$$

ossia:

$$(\mathrm{JI})^{n'} r = (\mathrm{IJ})^{n'}\,\mathrm{I}r = \mathrm{I}(\mathrm{JI})^{n'} r.$$

Posto quindi:

$$(\mathrm{JI})^{n'} r = r',$$

segue:

$$\mathrm{I}r' = r', \qquad \text{ed:} \qquad r = (\mathrm{IJ})^{n'} r'.$$

La retta r sarà dunque la trasformata, mediante $(\mathrm{IJ})^{n'}$, di un raggio unito di I; il che esige che I sia iperbolica.

Resta ad esaminare la 4ª delle (1), la quale si può scrivere:

$$(\mathrm{IJ})^n r = \mathrm{J}r,$$

od anche:

$$\mathrm{I}(\mathrm{JI})^{n-1}\,.\,\mathrm{J}r = \mathrm{J}r.$$

Posto quindi:

$$\mathrm{J}r = r'',$$

si vede che r'' verifica la 2ª delle (1). Dovremo dunque supporre:

$$n-1=2n',$$

ed allora si avrà:

$$r''=\mathrm{J}r=(\mathrm{IJ})^{n'}r'$$

e quindi:

$$r=\mathrm{J}(\mathrm{IJ})^{n'}r'.$$

Ne viene che r è la trasformata, mediante $\mathrm{J}(\mathrm{IJ})^{n'}$, di uno dei raggi uniti di I (supposti nuovamente reali).

Raccogliendo i risultati ottenuti, potremo concludere:

I sistemi di linee (tracciati su una superficie F, *non sviluppabile, e che non sia nè una sfera nè un elassoide) che sono mutati in sè da operazioni del tipo* (1) *sono:*

1° *per le superficie a punti ellittici i due sistemi di linee di curvatura;*

2° *per le superficie a punti iperbolici i due sistemi precedenti; più i sistemi* S, T *delle traiettorie ortogonali delle asintotiche, e tutti quelli che se ne deducono con operazioni* a, b.

È poi evidente che sulle superficie ad area minima, i sistemi S, T coincidono con quelli delle asintotiche, mentre quelli delle linee di curvatura conservano la loro proprietà, espressa da: $(ab)^n\,\mathrm{C}=\mathrm{C}$.

5. Riprendiamo in esame la proiettività JI, supposta non identica nè involutoria; essa ha come raggi uniti m, m'. Di più, detta r la normale ad u in P, essa contiene la coppia u, r; onde la sua caratteristica sarà:

$$(mm'ur)=-\operatorname{tg}^2\widehat{mu}.$$

Supposto, il che è lecito, $\widehat{mu}<45°$, si avrà:

$$\operatorname{tg}^2\widehat{mu}<1.$$

Quindi, applicando alla retta r la proiettività $(\mathrm{JI})^n$, e facendo poi tendere n all'infinito, le rette successivamente ottenute si avvicinano indefinitamente alla retta m', compiendo intorno a questa oscillazioni di ampiezza decrescente.

Invece, la retta $\mathrm{I}(\mathrm{JI})^n r$, quando n tende all'infinito, tenderà alla retta m, oscillando intorno ad essa. Dunque:

I sistemi di linee dedotti da uno qualunque dei sistemi S, T, *con operazioni* a, b *formano una classe, la cui classe derivata è costituita dai due sistemi di linee di curvatura.*

Si può calcolare facilmente il raggio di curvatura, in P, della sezione normale ivi tangente ad una delle rette $(\mathrm{JI})^n r$, $\mathrm{I}(\mathrm{JI})^n r$. Perciò basta ricordare che, per i raggi di curvatura ρ, ρ' di due sezioni normali coniugate si ha:

$$\rho+\rho'=\rho_1+\rho_2;$$

mentre per quelli, ρ', ρ'', di due sezioni normali perpendicolari si ha:

$$\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''}=\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}.$$

(La 1ª di queste formole esprime la costanza della somma dei quadrati di due semidiametri coniugati dall'indicatrice di Dupin; la 2ª è una conseguenza immediata della formola di Eulero). Eliminando ρ' tra le due formole precedenti, si trova la relazione:

$$(\rho_1+\rho_2)\,.\,\rho\rho''-\rho_1\rho_2\,.\,\rho-[(\rho_1+\rho_2)^2-\rho_1\rho_2]\,\rho''+\rho_1\rho_2\,(\rho_1+\rho_2)=0,$$

la quale lega tra loro i raggi di curvatura ρ, ρ'' di due sezioni normali che toccano (in P) due rette omologhe in Π.

Per applicare le formole precedenti al caso che interessa, si partirà dal valore del raggio di curvatura della sezione normale di tangente r, che è:

$$\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2};$$

(naturalmente, dev'essere, ad es., $\rho_2<0$, ma $|\rho_2|\neq\rho_1$).

6. Resta a supporre che F sia una sviluppabile ($u\equiv v\equiv m$); allora, se Ω è un sistema di linee tracciato su F, e diverso dal sistema A delle asintotiche, si ha sempre:

$$a\Omega=\mathrm{A}; \qquad ab\Omega=\mathrm{A}.$$

Invece:

$$a\mathrm{A}=\text{indeterminato}; \qquad b\mathrm{A}=\mathrm{C},$$

dove C è il sistema di linee di curvatura, diverso da A.

Ne segue: *Sopra una sviluppabile, se* $\Omega\neq\mathrm{A},\mathrm{C}$, *non esiste alcuna operazione* (1) *che muti* Ω *in sè stesso; mentre invece:*

$$(ba)^n\,\mathrm{C}=\mathrm{C}; \qquad (ab)^n\,\mathrm{A}=\mathrm{A}.$$

Non sono applicabili le operazioni $(ab)^n$, $(ba)^n$ a C ed A rispettivamente.

EUGENIO G. TOGLIATTI.

SOPRA UNA SPECIALE CLASSE DI EQUAZIONI DI TERZO GRADO

Sia

$$f(x)=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0 \tag{1}$$

un'equazione qualunque di terzo grado, e indichiamo con K il campo dei suoi coefficienti.

Supposto che la (1) sia già irreduttile, nella presente nota ci proponiamo di trovare la condizione cui debbono soddisfare i coefficienti della (1) affinchè il suo gruppo di Galois sia quello di terz'ordine (*Gruppo ciclico di terz'ordine*). Infine troveremo una classe speciale di equazioni che soddisfa a tale condizione.

I.

Formiamo, al modo solito, la risolvente di Galois della (1):

$$\begin{aligned} F(y) = & (y - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3)(y - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_1)(y - a_1x_3 - a_2x_1 - a_3x_2) \times \\ & \times (y - a_1x_1 - a_2x_3 - a_3x_2)(y - a_1x_2 - a_2x_1 - a_3x_3)(y - a_1x_3 - a_1x_2 - a_3x_1). \quad (2) \end{aligned}$$

Poichè la (1) è irreduttibile, il suo gruppo di Galois non può che essere quello totale di ordine $\underline{3} = 6$, ovvero quello alternante, di ordine 3. Le tre sostituzioni di questo gruppo sono:

$$I, \quad (x_1x_2x_3), \quad (x_1x_3x_2);$$

dunque, se il gruppo della (1) è quello del terz'ordine, i tre primi fattori del 2º membro della (2) debbono formare un polinomio a coefficienti razionali in K: altrettanto avverrà del prodotto dei rimanenti tre.

Chiamando $f_1(y)$ il prodotto di quei primi tre fattori, si ha

$$\begin{aligned} f_1(y) = & y^3 - (a_1 + a_2 + a_3)(x_1 + x_2 + x_3)y^3 + \\ & + \{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \\ & + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1) + \\ & + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1)\}\, y - \\ & - \{(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3)x_1x_2x_3 + a_1a_2a_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + \\ & + 3a_1a_2a_3x_1x_2x_3 + (a_1^2a_2 + a_1a_3^2 + a_2^2a_3)(x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2) + \\ & + (a_1^2a_3 + a_1a_2^2 + a_2a_3^2)(x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2)\}. \end{aligned}$$

Le a_1, a_2, a_3 sono delle quantità arbitrarie soddisfacenti solo alla condizione che i sei fattori della (2) siano fra loro distinti, esse si possono sempre immaginare scelte in K, ovvero addirittura nell'ordinario campo di razionalità. Dunque il polinomio che precede ha i suoi coefficienti tutti razionali in K, tranne l'ultimo, il quale lo diventa solo se, posta

$$A = a_1^2a_2 + a_1a_3^2 + a_2^2a_3, \qquad B = (a_1^2a_3 + a_1a_2^2 + a_2a_3^2),$$

la quantità

$$A \,.\, (x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2) + B \,.\, (x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \qquad (3)$$

è razionale in K.

Analogamente, sviluppando il prodotto dei rimanenti fattori, si ricava che la quantità

$$B \,.\, (x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2) + A \,.\, (x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2) \qquad (4)$$

è, parimenti, razionale in K.

Se le espressioni (3) e (4) assumono valori razionali in K, tali saranno anche i valori della loro somma e della loro differenza; e viceversa, se lo sono i valori della loro somma e differenza, lo saranno anche quelli di (3) e (4).

Poichè A e B sono razionali, sommando si ha

$$(A+B)\,[x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_3+x_1)+x_3^2(x_1+x_2)],$$

quantità sempre razionale in K, poichè la espressione in parentesi quadra è simmetrica nelle radici della (1).

Sottraendo si ha

$$(A+B)\,[x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)],$$

dunque dev'essere razionale il valore dell'espressione

$$x_1^2(x_2-x_3)+x_2^2(x_3-x_1)+x_3^2(x_1-x_2)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\Delta.$$

Se assumiamo come discriminante dell'equazione di terzo grado (1) l'espressione

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{1}{4\,.\,27}\,I^2$$

dove p e q sono i coefficienti dell'equazione trasformata della (1) quando su essa si esegua la trasformazione $x=y-\frac{p_1}{3}$, allora si ha

$$-I^2=\Delta^2.$$

È facile convincersi che, se Δ è razionale e la (1) è irreduttibile, il gruppo di Galois della (1) stessa è quello di terz'ordine. Dunque:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione di terzo grado, irreduttibile nel campo K *dei suoi coefficienti, abbia per suo gruppo di Galois, nello stesso campo* K, *il gruppo ciclico di terz'ordine* (gruppo alternante) *è che il suo discriminante, col segno cambiato e moltiplicato per il fattore* 4 . 27, *sia un quadrato esatto, nel campo* K.

II.

Ora, del discriminante di un'equazione qualunque son note varie espressioni; a noi preme di fissarne una: e poichè ci importa anche di fissarne il segno rispetto a Δ^2, ragioneremo soltanto per l'equazione di terzo grado.

È noto che si ha

$$-\mathrm{I}^2=\Delta^2=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} 3 & -p_1 & p_1^2-2p_2 \\ 2p_1 & -2p_2 & p_1p_2-3p_3 \\ p_2 & -3p_3 & p_1p_3 \end{vmatrix}=$$

$$=-\mathrm{R}=-\begin{vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 & 0 \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 & p_3 \\ 3 & 2p_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

Se nell'ultimo determinante si cambia di segno alle prime due linee e si sommano, rispettivamente, colla 3^a e colla 4^a, si ha:

$$\mathrm{R}=(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & p_1 & 0 & -p_3 & 0 \\ 0 & 2 & p_1 & 0 & -p_3 \\ 3 & 2p_1 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2p_1 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2p_1 & p_2 \end{vmatrix}$$

questo determinante è il risultante delle due funzioni:

$$xf'(x)-f(x)=2x^3+p_1x^2-p_3, \quad f'(x)=3x^2+2p_1x+p_2.$$

Dunque, se chiamiamo α, β, γ le tre radici della prima di queste due espressioni, ossia poniamo

$$xf'(x)-f(x)=2x^3+p_1x^2-p_3=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$$

sappiamo che si ha

$$\mathrm{R}\,[xf'(x)-f(x)\,f'(x)]=(-1)^{3.2}f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma).$$

Perciò

$$\Delta^2=-f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma).$$

La condizione di poco fa si cambia quindi in quest'altra:

Perchè il gruppo di Galois di un'equazione di terzo grado $f(x)=0$, *irreduttibile nel campo* K *dei suoi coefficienti, sia, in questo stesso campo, quello alternante* (gruppo ciclico di terz'ordine) *è necessario e sufficiente che, dette* α, β, γ *le tre radici di*

$$xf'(x)-f(x)=0,$$

l'espressione numerica

$$-f'(\alpha)f'(\beta)f'(\gamma) \qquad \text{(I)}$$

sia quadrato esatto di una quantità appartenente a K.

III.

Ciò posto, indicheremo qui uno dei mezzi atti a soddisfare tale condizione, che considereremo nella forma (I).

Perchè l'espressione (I) sia quadrato esatto nel campo K, basterebbe che i suoi tre fattori appartenessero tutti e tre a K, che due di essi fossero eguali fra loro e che il terzo fosse, per es., eguale a $-m^2$, dove m è contenuto in K.

Per le prime due parti, basta scegliere α, β e γ tutti e tre in K, con $\beta=\gamma$. Intanto notiamo che, dalla identità

$$xf'(x)-f(x)=2x^3+p_1x^2-p_3=2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

si ha

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0.$$

E ponendo $\beta=\gamma$:

$$2\alpha\beta+\beta^2=0,$$

quindi

$$\alpha=-\frac{\beta}{2}. \qquad \text{(II)}$$

Perciò bisogna porre

$$2x^3+p_1x^2-p_3=2\left(x+\frac{\beta}{2}\right)(x-\beta)^2=2\left(x^3-\frac{3}{2}\beta x^2+\frac{1}{2}\beta^3\right),$$

onde si ricava

$$p_1=-3\beta;\qquad p_3=-\beta^3. \qquad \text{(III)}$$

Rimane arbitrario p_2 su cui bisogna operare in modo che risulti

$$f'(\alpha)=-m^2. \qquad 5)$$

Rimanendo ad $f(x)$ il significato 1), poniamo

$$\varphi(x)=f(x)-[m^2+f'(\alpha)]x; \qquad 1)'$$

allora si ottiene

$$\varphi'(\alpha)=f'(\alpha)-[m^2+f'(\alpha)]=-m^2. \qquad 5)'$$

Dunque basta modificare il coefficiente p_2 della x in $f(x)$ nel modo indicato dalla 1)' per soddisfare alla 5), o meglio alla 5)'. Le altre condizioni, per la 1)', sono già soddisfatte, ed infatti si ha

$$x\varphi'(x)-\varphi(x)=xf'(x)-f(x)=2\left(x+\frac{\beta}{2}\right)(x-\beta)^2,$$

e poi, infine:

$$-\varphi'(\alpha)\,\varphi'(\beta)\,\varphi'(\gamma)=m^2[\varphi'(\beta)]^2.$$

Tenendo presenti la (II), la (III) e che

$$f'(\alpha)=f'\left(-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{15}{4}\beta^2+p_2,$$

si ha

$$\varphi(x)=f(x)-\left[m^2+f'\left(-\frac{\beta}{2}\right)\right]x=x^3-3\beta x^2-\left(m^2+\frac{15}{4}\beta^2\right)x-\beta^3=0.$$

Siamo dunque venuti a trovare *una classe di equazioni di terzo grado, la cui forma è*

$$4x^3-12\beta x^2-(4m^2+15\beta^2)x-4\beta^3=0$$

tali che il loro gruppo di Galois, nel campo definito dai coefficienti, è quello di terz'ordine; a meno che non siano reduttibili.

Per es., posto $\beta=2$ ed $m=1$; si ha l'equazione

$$x^3-6x^2-16x-8=0,$$

la quale non è risoluta da nessuno dei valori 1, —1, 2, —2, 4, —4, 8, —8 che dividono il termine noto, e perciò è irriduttibile nel campo ordinario di razionalità. Il suo gruppo di Galois è quello di terz'ordine, nello stesso campo.

SALVATORE CHERUBINO.

ANALISI DEI TEOREMI

1. L'affinità esistente fra *teorema* e *problema* suggerisce d'introdurre anche nel campo dimostrativo alcune norme che rivestano il carattere della massima generalità.

A tale uopo giova anzitutto tenere presente che nel teorema, contrariamente a quanto avviene nel problema, l'enunciato segue (o seguir dovrebbe) la dimostrazione; quindi la tesi esiste sempre e non subisce alterazioni per la dimostrazione.

Da ciò deriva che nel teorema nessuna opposizione può esistere fra soggetto, ipotesi e tesi, e che l'ipotesi non può essere insufficiente per la tesi. Restano così esclusi i teoremi *impossibili*, ed i teoremi *indeterminati*.

In ciò che segue, per non porre limitazioni di sorta alcuna con restrittive definizioni del *teorema*, intenderemo attribuire a tale vocabolo il significato generico di *proposizione ipotetica*, purchè *possibile* e *determinata*.

2. Le proprietà del *soggetto* che lo definiscono, e quelle che rappresentano l'*ipotesi* e la *tesi* possono essere costituite da più parti, che diremo rispettivamente *elementi* del soggetto, dell'ipotesi e della tesi; cosicchè ad un problema con più incognite farà riscontro un teorema con più elementi della tesi.

Ad evitare inutili ripetizioni, il soggetto, l'ipotesi e la tesi, anche a due a due considerate, non dovranno avere elementi comuni; ed inoltre, ad eliminare parimenti il superfluo, in ciascuna parte del teorema isolatamente considerata, non dovranno figurare elementi derivabili da altri della medesima per mezzo di proposizioni, che si debbano ritenere *necessariamente* note ed in precedenza acquisite.

3. Da un teorema, scambiando nel loro ufficio logico l'ipotesi con la tesi e lasciando immutato il soggetto, si ottiene un teorema, valido o no, che dicesi *inverso* (o meglio *converso*) rispetto al primo *diretto*. Se pur l'inverso è valido, il diretto e l'inverso si dicono fra loro *reciproci*, o l'un dell'altro reciproco.

Può un teorema essere reciproco di se stesso, e lo diremo *autoreciproco*. In un teorema autoreciproco l'ipotesi risulta *uguale* alla tesi: in esso infatti si afferma, rispetto al soggetto, che, se alcuni elementi godono di una determinata proprietà, altrettanto avviene di altrettanti elementi distinti dai primi e nelle stesse condizioni dei primi.

Esempio:

In due triangoli rettangoli di uguale ipotenusa, se un cateto di uno è maggiore di un cateto dell'altro, il secondo cateto di questo è maggiore del secondo cateto del primo.

4. A proposito di teoremi reciproci è opportuno fare alcune considerazioni.

Premettiamo che, quantunque per maggiore semplicità facendo astrazione dal soggetto S, si possa dare al teorema anche la forma:

Se è I *è* T

tuttavia, quando si vogliano considerare teoremi inversi e teoremi reciproci, non solo è opportuno tener conto del soggetto, ma è necessario, se le parti del teorema risultano di più elementi, tenere esattamente disgiunti gli elementi del soggetto da quelli dell'ipotesi.

Quando due teoremi l'uno dall'altro inversi sono veri ambedue, si suol dire [1] che *la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia verificata la proprietà* T *(o la* I*) è che sia verificata la proprietà* I *(o la* T*)*; ma giova però osservare quanto segue:

Supposto che in due teoremi inversi P e P′ l'ipotesi sia necessaria e sufficiente, spostando un elemento dall'ipotesi al soggetto, si ottengono due teoremi inversi P_1 e P'_1 entrambi veri; ma in uno di essi l'ipotesi è più che sufficiente e quindi non totalmente necessaria. Al contrario dagli stessi teoremi P e P′, spostando un elemento dal soggetto all'ipotesi, si ottengono due teoremi inversi P_2 e P'_2, ma uno di essi ha l'ipotesi insufficiente e quindi non è valido. Può servire a chiarimento il seguente quadro schematico:

	Soggetto	Ipotesi	Tesi
P P′	A, B ... C, D A, B ... C, D	$a, b \ldots c, d$ $\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$	$\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$ $a, b \ldots c, d$
P_1 P'_1	A, B ... C, D, a A, B ... C, D, a	$b, c \ldots d$ $\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$	$\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$ $b \ldots c, d$
P_2 P'_2	A, B ... C A, B ... C	D, $a, b \ldots c, d$ $\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$	$\alpha, \beta \ldots \gamma, \delta$ D, $a, b \ldots c, d$

[1] LAZZERI e BASSANI, *Elementi di Geometria.*

Esempio:

P. — *Due triangoli aventi un lato parallelo e nella stessa direzione, se hanno anche gli altri due lati paralleli, sono simili.*

P_1. — *Due triangoli aventi due lati paralleli e nella stessa direzione, se hanno anche il terzo lato parallelo, sono simili.*

P_2. — *Due triangoli, se hanno i lati paralleli e nella stessa direzione, sono simili.*

P'. — *Due triangoli aventi un lato parallelo e nella stessa direzione, se sono simili, hanno anche gli altri due lati paralleli.*

P'_1. — *Due triangoli aventi due lati paralleli e nella stessa direzione, se sono simili, hanno anche il terzo lato parallelo.*

P'_2. — *Due triangoli, se sono simili,* **hanno** *i lati paralleli e nella stessa direzione.*

Dunque *affinchè due teoremi inversi possano essere ritenuti reciproci, nel senso che l'ipotesi sia necessaria e sufficiente, si richiede che siano veri entrambi e che, spostando anche un solo elemento dal soggetto all'ipotesi, un d'essi risulti impossibile.*

Solo allora si potrà concludere che l'ipotesi è necessaria e sufficiente per la tesi, e diremo più semplicemente che l'ipotesi è *equivalente* alla tesi. Se l'ipotesi non è equivalente alla tesi, non potendo essere *suvvalente* rispetto alla tesi, perchè il teorema sarebbe impossibile, non potrà essere che *prevalente.*

Due teoremi reciproci esprimono del pari, rispetto al comune soggetto, che fra l'ipotesi e la tesi esiste relazione di equivalenza e sono associate.

5. Si suole anche dire che due teoremi sono *reciproci* quando ciascuno è conseguenza dell'altro. (1) E tale definizione può estendersi anche ad un gruppo di più teoremi a due a due legati da una simile relazione; ma siffatte proposizioni meglio son dette *equivalenti,* e si distinguono in *relativamente equivalenti* ed in *assolutamente equivalenti,* secondo che ciascuna dall'altra si ottiene col sussidio o no di supposte condizioni. (2) Valgano ad esempio le proposizioni sostituibili al V postulato di Euclide.

6. Se un teorema *semplice:*

Rispetto ad S *se è* I *allora è* T

ammette il reciproco, i due teoremi dànno luogo insieme al teorema *doppio:*

Rispetto ad S *se è* I *allora è* T: *e viceversa.*

Se un soggetto gode di *n* proprietà fra loro equivalenti, si ha in generale il teorema *multiplo:*

---

(1) De Paolis, *Elementi di Geometria.*
(2) Bonola, *Geometria non-euclidea.*

Rispetto ad S *se è* P_h *delle* $P_1P_2P_3 \ldots P_n$ *allora è* P_k *delle medesime.*

Può anche avvenire che in un teorema siano equivalenti il soggetto (o meglio le proprietà che lo definiscono), l'ipotesi e la tesi, ed in generale che un ente definito da una qualunque di n proprietà possa fungere da soggetto in un teorema nel quale sono ipotesi e tesi due altre qualunque delle medesime. Si ha in tal caso il teorema *ipermultiplo*:

Rispetto al soggetto definito da P_1 *delle* $P_1P_2P_3 \ldots P_n$ *se è* P_h *allora è* P_k *delle medesime.*

Esempio:

Una retta definita da una qualunque delle seguenti proprietà:
Essere perpendicolare ad una corda di un cerchio,
Dimezzare la corda,
Dimezzare l'arco che sottende la corda,
Passare per il centro, ecc.
se gode di un'altra qualunque di tali proprietà, gode pure di una terza qualunque delle medesime.

È evidente che se n è l'ordine di multiplicità o d'ipermultiplicità di un teorema, questo si può scomporre rispettivamente in $D_{n,2}$ ed in $D_{n,3}$ teoremi semplici, o, ciò che è lo stesso, in $\frac{1}{2} D_{n,2}$ ed in $\frac{1}{2} D_{n,3}$ teoremi doppi; non valgono quindi per tali teoremi norme speciali, ed essi non presentano speciale interesse nell'argomento che ci occupa.

7. Dicemmo in principio di dover escludere la possibilità di teoremi indeterminati; e, nel campo dei teoremi determinati, prendemmo in considerazione teoremi *a tesi unica*. Nasce però spontanea la ricerca se possano esistere o meno teoremi *con più tesi* analoghi ai problemi *con più soluzioni*; o, in altri termini, se esistano teoremi di *grado* superiore al primo.

Fatta astrazione dai teoremi, che dicemmo multipli ed ipermultipli, nei quali le proprietà del soggetto sono fra loro equivalenti, nulla si oppone a che un soggetto, rispetto ad una determinata ipotesi, possa godere di proprietà fra loro indipendenti e vicendevolmente escludentisi. Si avrà così il teorema di n^{simo} grado:

Rispetto ad S *se è* I *allora è* t_1 *o* t_2 *o* $t_3 \ldots$ *o* t_n,

in cui le *tesi parziali* $t_1t_2t_3 \ldots t_n$ costituiscono un'unica tesi T equivalente all'ipotesi; e mentre sarà possibile giungere ad I separatamente da ciascuna delle t, che è sufficiente ma non necessaria, non sarà del pari possibile pervenire da I ad una sola delle t, senza porre una limitazione che le altre escluda, lasciando però immutata l'ipotesi.

Esempio di teorema di secondo grado:

Due triangoli, se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo opposto ad uno di essi, hanno gli altri elementi ordinatamente uguali, o quali si riscontrano in due triangoli ottenuti congiungendo il vertice di un triangolo isoscele con un punto della base; e viceversa.

8. Siamo d'avviso che sarebbe utile far capo a tale definizione di teorema, da escludere quelle proposizioni ipotetiche in cui l'ipotesi non è equivalente alla tesi, o, quanto meno, ritenere *perfetto* od *imperfetto* un teorema, secondo che ammette o no il reciproco.

In tale ordine di idee si potrà per ogni teorema imperfetto indagare la causa dell'*imperfezione*, per mezzo di una *discussione* od *analisi* del teorema. E, per quanto siamo venuti esponendo, l'imperfezione di un teorema può avere origine da tre cause distinte:

Prima. — Nell'enunciato non sono esattamente disgiunti gli elementi del soggetto da quelli dell'ipotesi.

Seconda. — Il teorema è di grado superiore al primo.

Terza. — L'ipotesi è per se stessa prevalente rispetto alla tesi. Ciò si riscontra necessariamente quando si considera di un teorema un caso speciale ottenuto aggiungendo qualche nuovo elemento all'ipotesi e lasciando invariato il soggetto e la tesi. Ed ogni *corollario* così ottenuto è quindi imperfetto.

Per rilevare ed eliminare la prima causa d'imperfezione non si ha che a spostare nei modi possibili gli elementi dell'ipotesi aggregandoli al soggetto.

Esempio:

Due parallelogrammi, se hanno uguale una base e l'altezza corrispondente, sono equivalenti.

Due parallelogrammi di ugual base, se hanno uguale l'altezza corrispondente, sono equivalenti; e viceversa.

Quando un tale processo riesca infruttuoso, dovrà ritenersi asseverata la seconda o la terza causa d'imperfezione. Però un accurato esame della dimostrazione potrà condurre talvolta a più opportuna forma del teorema.

Esempio:

Essendo due frazioni equivalenti, se la prima è irriducibile, la seconda ha i termini equimultipli dei termini della prima.

Essendo due frazioni equivalenti, se la prima è irriducibile, la seconda ha i termini equimultipli dei termini della prima, ed il coefficiente di multiplicità è il M. C. D. dei termini della seconda; e viceversa.

9. Come applicazione delle cose dette prenderemo in esame, nell'ambito dei suesposti concetti, i ben noti criteri di uguaglianza, di similitudine e di equivalenza dei triangoli.

E, per avere un punto di riferimento, li riportiamo intanto nella dizione seguente: [1]

I. *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due lati e l'angolo compreso, essi sono uguali, avendo rispettivamente uguali anche i rimanenti lati e gli angoli opposti ai lati uguali.*

---

[1] Enriques e Amaldi, *Elementi di Geometria.*

II. *Se due triangoli hanno rispettivamente uguali due angoli e il lato comune, i due triangoli sono uguali; cioè sono uguali i rimanenti angoli e i lati opposti agli angoli uguali.*

III. *Se due triangoli hanno uguali rispettivamente i tre lati, essi sono uguali; cioè hanno uguali anche gli angoli opposti ai lati uguali.*

IV. *Se due triangoli hanno uguali un lato, l'angolo opposto ed un angolo adiacente ad esso, i due triangoli sono uguali; cioè hanno uguali il terzo angolo e i lati opposti agli angoli uguali.*

V. *Se due triangoli hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo opposto al primo lato, essi sono uguali, purchè l'angolo opposto al secondo lato sia in entrambi i triangoli o acuto o retto o ottuso.*

VI. *Se due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali, i lati che comprendono angoli uguali sono proporzionali.*

VII. *Se due triangoli hanno un angolo uguale ad un angolo e un lato del primo angolo sta ad un lato del secondo come l'altro lato del primo sta all'altro lato del secondo, i due triangoli hanno gli angoli ordinatamente uguali.*

VIII. *Se in due triangoli ad ogni lato dell'uno si può far corrispondere un lato dell'altro, in modo che le coppie di lati corrispondenti siano proporzionali, i due triangoli hanno uguali ordinatamente gli angoli.*

IX. *Triangoli di ugual base e di uguale altezza sono equivalenti.*

X. *Triangoli equivalenti ed aventi basi uguali hanno altezze uguali.*

Per ciò che si riferisce alla forma notiamo quanto segue:

Nei teoremi I, II, III, IV, V si potrà accennare all'uguaglianza dei triangoli come conseguenza del teorema e della definizione, ma non come tesi, chè diversamente la tesi comprenderebbe l'ipotesi.

Nei teoremi VI, VII, VIII è superfluo considerare l'uguaglianza di tutti e tre gli angoli, poichè la teoria dei triangoli simili segue necessariamente la teoria delle parallele e la conseguente nozione relativa alla somma degli angoli di un triangolo. Oltre a ciò è forse opportuno porre in rilievo che nei triangoli simili, come si hanno due sole relazioni indipendenti di proporzionalità fra i lati, si hanno pure due sole relazioni indipendenti di uguaglianza fra gli angoli.

Nel teorema VII l'ipotesi e la tesi hanno inoltre un elemento comune.

Per ciò che si riferisce alla reciprocità notiamo che, mentre sono reciproci i teoremi I e II, VI e VIII, IX e X, sono gli altri imperfetti.

L'imperfezione del III deriva dal fatto che in esso l'ipotesi è per se stessa prevalente alla tesi; ed invero per affermare l'uguaglianza fra gli angoli di due triangoli, non è necessaria l'uguaglianza dei lati, ma semplicemente la loro proporzionalità; il teorema in parola è corollario del teorema VIII.

I teoremi IV e V non sono inversi, e tanto meno reciproci, poichè la limitazione posta all'ipotesi del V non figura nella tesi del IV;

come già si vide, fan parte di un doppio teorema di secondo grado; e di questo sussisterebbe pure l'analogo relativo alla similitudine.

Nel teorema VII, emendata la forma, la tesi rimane costituita dalla sola uguaglianza di un angolo, ed è suvvalente all'ipotesi. Completando invece la tesi con tutto ciò di cui l'ipotesi è suscettibile, vale a dire con una seconda relazione di proporzionalità fra i lati, è tolta ogni imperfezione al teorema, che diviene reciproco di se stesso.

A proposito dei teoremi VII e VIII non si può ritenere che essi siano ambedue inversi del VI, sol perchè hanno uguali le tesi. (¹) Pensiamo che un teorema non possa mai in più modi invertirsi; e, nel caso particolare considerato, emerge chiaramente che la tesi del VI non è l'ipotesi del VII.

Nei teoremi IX e X infine, che pur sono reciproci, è opportuno rendere più manifesta l'inversione e la reciprocità, separando nettamente il soggetto dall'ipotesi.

10. In base alle fatte considerazioni potremo enunciare i teoremi predetti nel modo seguente:

A) *Due triangoli, se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo compreso, hanno pure ordinatamente uguali gli altri elementi; e viceversa.*

B) *Due triangoli, se hanno ordinatamente uguali due lati e l'angolo opposto ad uno determinato di questi, hanno gli altri elementi ordinatamente uguali, o quali si riscontrano in due triangoli ottenuti congiungendo il vertice di un triangolo isoscele con un punto della base; e viceversa.*

C) *Due triangoli, se hanno i lati tali da soddisfare a due distinte proporzioni, hanno pure due angoli ordinatamente uguali; e viceversa.*

Corollario. — *Due triangoli, se hanno i lati ordinatamente uguali, hanno pure gli angoli ordinatamente uguali.*

D) *Due triangoli, se hanno due lati tali da soddisfare ad una proporzione, ed hanno uguale l'angolo compreso, hanno pure uguale un altro angolo, ed inoltre i lati che lo comprendono sono tali da soddisfare ad una proporzione; il teorema è autoreciproco.*

E) *Due triangoli di base (o altezza) uguale, se hanno uguale l'altezza (o la base) corrispondente, sono equivalenti; e viceversa.*

Diego Fellini.

(¹) Enriques e Amaldi, *op. cit.*

ESTENSIONE DELLA FORMULA DI GEOMETRIA PIANA $4RS = abc$

all'n-edro dello spazio lineare con $n-1$ dimensioni

La dimostrazione della relazione $4RS = abc$ può ottenersi, sia ricorrendo al noto teorema che dice che il rettangolo di due lati di un triangolo equivale al rettangolo del diametro del cerchio circoscritto e dell'altezza relativa al terzo lato, sia ricorrendo alla teoria delle antiparallele. Quest'ultima dimostrazione — che fu già estesa al tetraedro dal sig. STAUDT nel *Giornale di Crelle* — si presta all'estensione della formula medesima all'*n-edro* di S_{n-1} ed io credo opportuno di presentarla ai lettori di questo pregevole *Periodico* esponendola senz'altro pel caso generale.

Dato in S_{n-1} l'n-edro $A_1A_2 \dots A_n$, si consideri l'ipersfera ad esso circoscritta e si chiamino O il suo centro ed R il suo raggio. Condotti nei vertici $A_1A_2 \dots A_n$ gli iperpiani tangenti $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$, essi individueranno colle loro mutue intersezioni un nuovo n-edro che chiameremo $B_1B_2 \dots B_n$, indicando in generale con B_i il punto comune agli iperpiani $\beta_1\beta_2 \dots \beta_{i-1}\beta_{i+1} \dots \beta_n$.

Ogni iperpiano parallelo a uno degli iperpiani $\beta_1\beta_2 \dots \beta_n$, e che taglia tutti gli spigoli che escono dal corrispondente punto di contatto, produce nell'n-edro dato una sezione che diremo *sezione antiparallela* rispetto all'angoloide determinato dagli spigoli medesimi. Riferendoci al vertice A_n e chiamando $P_{n1}P_{n2} \dots P_{n,n-1}$ i vertici dell'$(n-1)$-edro sezione che sono situati rispettivamente sugli spigoli $A_nA_1, A_nA_2 \dots A_nA_{n-1}$, se per A_n, A_i, A_k (i, k disuguali e minori di n) conduciamo un S_2, esso segherà l'ipersfera circoscritta secondo una circonferenza e l'iperpiano tangente β_n secondo l'S_1 tangente ad essa in A_n e lo spigolo $P_{ni}P_{nk}$ della sezione contenuto in tale S_2 risulterà parallelo a detto S_1 e quindi antiparallelo ad A_iA_k; i quattro punti A_i, A_k, P_{ni}, P_{nk} giaceranno sopra la medesima circonferenza e i punti $A_1A_2 \dots A_{n-1}P_{n1}P_{n2} \dots P_{n,n-1}$ apparterranno a un'ipersfera. Indicando allora con p_n la potenza di A_n rispetto a questa ipersfera, potremo scrivere le uguaglianze:

$$p_n = A_nA_1 \,.\, A_nP_{n1} = A_nA_2 \,.\, A_nP_{n2} = \dots = A_nA_{n-1} \,.\, A_nP_{n,n-1}, \quad (1)$$

e i punti A_i, P_{ni} si corrisponderanno in una inversione di polo A_n e di costante p_n.

Se conduciamo per A_n una retta che passi per O e diciamo D, D' i punti ove essa incontra l'S_{n-2} della sezione antiparallela e l'ipersfera rispettivamente e teniamo presente che questo S_1 risulta normale in D al detto S_{n-2}, è facile vedere che anche D e D' si corrispondono in questa inversione e che si ha:

$$p_n = AD \,.\, AD' = 2R \,.\, AD. \tag{2}$$

Si ha poi, per note formule:

$$\begin{aligned} P_{ni}P_{nk} &= p_n \,.\, \frac{A_iA_k}{A_nA_i \,.\, A_nA_k} \\ &= p_n \,.\, \frac{A_iA_k \,.\, \pi_{ik}A_nA_s}{\pi A_nA_s}, \end{aligned} \tag{3}$$

dove con πA_nA_s indichiamo il prodotto delle misure degli spigoli uscenti da A_n nessuno escluso, mentre con $\pi_{ik}A_nA_s$ indichiamo il prodotto delle misure dei medesimi spigoli eccettuati A_nA_i e A_nA_k.

Segue allora:

$$\frac{P_{ni}P_{nk}}{A_iA_k \,.\, \pi_{ik}A_nA_s} = \frac{p_n}{\pi A_nA_s} \tag{4}$$

per i e k disuguali ed inferiori ad n.

Immaginiamo ora costruito l'$(n-1)$-edro i cui spigoli sono misurati da:

$$A_iA_k \,.\, \pi_{ik}A_nA_s$$

e sia T la sua misura. L'$(n-1)$-edro $P_{n1}P_{n2}\ldots P_{n,n-1}$ è, per le (4), simile al precedente e se con P indichiamo la sua misura, avremo, essendo noto il rapporto di due lati omologhi:

$$P : T = \left(\frac{p_n}{\pi A_nA_s}\right)^{n-2}. \tag{5}$$

Chiamiamo ora V la misura dell'n-edro dato e V' quella dell'n-edro $A_nP_{n1}P_{n2}\ldots P_{n,n-1}$: avremo, ricordando che la misura di un n-edro è data, a meno di un fattore di proporzionalità, dal prodotto della misura degli spigoli uscenti da un vertice per il seno dell'angoloide da essi determinato e tenendo presente le (1):

$$V' = V \,.\, \frac{A_nP_{n1} \,.\, A_nP_{n2}\ldots A_nP_{n,n-1}}{\pi A_nA_s} = \frac{p_n^{\,n-1}}{\overline{\pi A_nA_s}^{\,2}} \,.\, V. \tag{6}$$

Siccome poi è:

$$V' = \frac{1}{n-1} \,.\, P \,.\, A_nD$$

e per le (5) e (2):

$$V' = \frac{1}{n-1} \,.\, T \,.\left(\frac{p_n}{\pi A_nA_s}\right)^{n-1} .\, AD = \frac{1}{2R(n-1)} \,.\, T \,.\, \frac{p_n^{\,n-1}}{\overline{\pi A_nA_s}^{\,n-2}}, \tag{7}$$

segue subito dal confronto delle (6), (7):

$$2 \,.\, (n-1) \,.\, R \,.\, V \,.\, \overline{\pi A_nA_s}^{\,n-4} = T. \tag{8}$$

che è la formula che ci proponevamo appunto di trovare.

Osservazione. — Facendo $n=4$, e *soltanto in questo caso*, cioè per l'S_3, avviene che del simbolo $\pi A_n A_s$ non rimane traccia nella formula (8). Per $n=3$ si ritrova la nota formula di geometria piana, come è naturale; per T si deve allora porre A_1A_2.

Si noti ancora che dall'ultima formula (8) si deduce che il prodotto di T per la potenza $(n-4)$ -esima del seno dell'angoloide di vertice A_n è indipendente dalla scelta del vertice di riferimento e rimane quindi costante una volta fissata la posizione degli n punti $A_1A_2 \ldots A_n$.

Enrico Piccioli.

QUISTIONI PROPOSTE

796. Il cubo della distanza di un punto dal fuoco di una parabola è eguale ad 8 volte il prodotto dei tre raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali condotte dallo stesso punto.

797. Il prodotto dei cubi delle distanze di un punto dai fuochi di una ellisse è in un rapporto costante col prodotto dei quattro raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali condotte da quel punto.

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Modestino del Giudice. — *Lezioni di aritmetica razionale e algebra elementare* ad uso degli Istituti Tecnici e dei Licei. Vol. II: Teoria dei numeri relativi. Sistemi di equazioni lineari. — Tip. Elzev. Francesco Marcolli e C., Roma e Milano, 1912.

Questa II Parte dell'opera del professore Del Giudice che ora vede la luce, è la naturale continuazione della I Parte, non solo per l'ordine naturale della materia che viene trattando, ma anche (ciò che specialmente importa) perchè vi si riscontra il medesimo criterio di svolgimento, i medesimi pregi, lo stesso rigore logico ed eminentemente deduttivo. Laonde nulla c'è di quanto si disse nella prima parte che non si possa ripetere per la seconda.

Volendo entrare in qualche maggiore particolarità, è bene notare che nell'introduzione dei numeri negativi, l'Autore ricorre molto opportunamente a quei problemi pratici che mostrano l'assoluta necessità di tale introduzione, abbandonando però tale metodo nella trattazione teorica dei numeri relativi, fatta con rigore ed evidenza al pari di un qualsiasi capitolo dell'aritmetica ordinaria.

Nel calcolo letterale sviluppa le ordinarie trasformazioni che costituiscono le operazioni fondamentali algebriche; e dopo aver trattato ampiamente delle equazioni lineari a un'incognita e dei sistemi di equazioni lineari, svolge con molto rigore e dottrina la divisibilità nel campo delle funzioni intere, il massimo comun divisore e il minimo multiplo di un insieme di funzioni intere.

Nei trattati ordinari non si trovano questi ultimi argomenti, tutto limitandosi ad alcuni casi speciali.

L'Autore ha creduto bene di esporre queste parti delle teorie algebriche, ma a dir vero le ha messe in carattere più minuto, quasi ad indicare che questi capitoli sono più specialmente dedicati a quegli studiosi che vogliono personalmente estendere il corredo delle loro cognizioni matematiche. In un primo studio si possono benissimo lasciare, contentandosi di alcuni casi particolari; non se n'avrà alcun danno, specialmente se si ha l'avvertenza di considerare quei casi che più spesso capitano nella pratica.

Lo stesso può dirsi della ricerca delle radici razionali di un'equazione a coefficienti razionali; è un interessante argomento che può incitare allo studio qualcuno dei più intelligenti e volenterosi scolari che desiderano penetrare vieppiù nell'astruso cammino.

Il libro porta altresì un'estesa raccolta di ottimi esercizi, relativi alle varie teorie sviluppate.

La buona accoglienza da parte dei Colleghi, di questo ottimo trattato, svolto con criteri scientifici ed eminentemente moderni, credo e spero che non possa mancare.

G. Pirondini.

Giuseppe Bernardi, *Tavole contenenti i doppi, i quadrati, i tripli dei quadrati ed i cubi dei numeri interi da 1 a 1000*, ad uso degli Istituti medi e superiori d'istruzione, specialmente tecnici, nautici, militari e professionali. (Bologna, Libr. Beltrami, 1911. — L. 1,50).

Queste tavole dànno naturalmente anche senza calcolo, esattamente od a meno di una unità, le radici quadrate degl'interi da 1 a 1 milione e le radici cubiche degl'interi da 1 ad 1 bilione.

Inoltre mediante l'applicazione molto facile di poche regole assai semplici esposte chiaramente con parecchi convenienti esempi nella Introduzione e basate sopra alcune note identità e due notevoli Teoremi sull'estrazione abbreviata delle radici quadrata e cubica dai numeri interi, esposti nella stessa Introduzione con le relative dimostrazioni dell'Autore e già pubblicati con queste ambidue nel *Periodico di Matematica* ed il secondo di essi anche nel *Giornale di Matematiche*, le Tavole suddette dànno con un calcolo brevissimo esattamente i quadrati dei numeri interi compresi fra 1000 e 1 bilione ed i cubi degl'interi compresi fra 1000 ed 1 milione, ed esattamente od a meno di una unità le radici quadrate degl'interi compresi fra 1 milione e 10 bilioni e fra 250 bilioni e 1 trilione e le radici cubiche degl'interi compresi fra 1 bilione ed 1 quattrilione.

Queste tavole sono certamente utili e comode per chi deve fare frequenti calcoli numerici.

Annuaire pour l'an 1912, publié par le Bureau des longitudes. — Paris, Gauthier-Villars.

Questa eccellente raccolta fondata nel 1796 (Anno V della repubblica francese) contiene quest'anno, oltre le consuete notizie relative al calendario e i dati astronomici, dei quadri relativi alla fisica e alla chimica, e due interessanti articoli: *La temperatura media in Francia* di BIGOURDAN e *Nozioni sul metodo dei minimi quadrati* di HALT.

Abbiamo parlato troppe volte di questa interessante raccolta, perchè occorra ripetere che questo interessante volumetto è prezioso non solo per il tecnico, il fisico, il matematico, ma per tutte le persone colte che nelle 750 pagine di cui esso si compone troveranno la lista delle costanti usuali, ed una grandissima quantità di tabelle e dati numerici che possono occorrer in moltissimi casi della vita.

ERRATA-CORRIGE. — Nella Nota: *Di una proprietà dei numeri primi* del prof. U. CONCINA, pubblicato nel Fascicolo II, a *pag.* 82, *linea* 15, *invece di*: la somma dei, *si legga*: la somma delle potenze n^a dei.

NECROLOGIO

Il giorno 25 Marzo si spengeva dopo brevissima malattia in Pisa nella stessa camera ove aveva visto la luce 71 anni fa

ANTONIO PACINOTTI

il grande elettrotecnico, che coll'invenzione dell'*anello elettromagnetico* dischiuse la via alle innumerevoli applicazioni pratiche della elettricità. Crediamo di non poter commemorare l'illustre estinto meglio che pubblicando le nobili ed elevate parole che il Professore **G. A. Maggi**, preside della facoltà di scienze della R. Università di Pisa pronunziò nell'atrio dell'Università stessa sul feretro del grande.

Ad Antonio Pacinotti l'estremo saluto della Facoltà di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, di cui, per un trentennio, fu insigne vanto! Pur triste compito, che mi reca la vicenda dell'ufficio di Preside della Facoltà! Sorte ben diversa toccò al mio egregio predecessore. Quella di rappresentare la Facoltà nostra alla Festa Giubilare, di cui queste dotte mura ancora conservano l'eco. E tanto più ce ne commove il ricordo, davanti alla salma dell'Uomo, a cui gli Scienziati d'ogni contrada, i Colleghi, i Pubblici Poteri, il Popolo, tributando le più solenni onoranze, vi congiungevano il caldo augurio che si conservasse per lunghi anni, ad incremento della Scienza e ad onore del Paese!

Un Uomo il cui nome si è imposto al mondo, quasi con ripugnanza di chi lo portava, per modestia grande come il merito, non ha bisogno che se ne ritessa particolareggiata storia, in questo momento, in cui tutti ci opprime il cordoglio: e questo cordoglio è misura, per se stesso, della perdita che abbiamo fatto.

L'energia elettro-magnetica, la quale, raccolta da energia meccanica che per secoli andò dispersa nelle solitudini alpine, si rifà energia meccanica, dove più ferve l'umanità umana, è il sangue di quella vita industriale e sociale che forma una delle principali meraviglie del nostro secolo. Di questa circolazione vitale la macchina dinamo-elettrica è il cuore. E quando ho nominato la macchina dinamo-elettrica, ho, con essa, nominato per tutti, dallo scienziato all'operaio, Antonio Pacinotti. Lui, che, assistente del padre suo, pure onorata memoria del nostro Ateneo, in seguito a studi, intrapresi fin dal 1861, non terminati che nel 1864, nel piccolo laboratorio di Fisica Tecnologica, annesso alla casa di via S. Maria, che ne raccolse il primo respiro or fa settant'un anno, e l'ultimo, la notte dello scorso lunedì, inventò e analizzò, con pieno discernimento del principio e riconoscimento del duplice effetto, la " macchina ad elettro-calamita trasversale ", l' " anello di Pacinotti ". Questa invenzione memorabile conferiva alla macchina magneto-elettrica l'agilità necessaria per diventare organo veramente efficace, per le molteplici applicazioni, a cui fin d'allora si rivelava riserbata. Questo non sfuggì all'inventore. Ne fa fede la cura ch'egli ripetutamente pose di esporre il suo modello e di distribuire la Memoria del nostro " Nuovo Cimento " — la " Memorietta ", come egli amava chiamarla — e spiegarla a chi da quel modello poteva ricavare una macchina effettiva. Altri raccolse il vantaggio, non solo, ma anche, per parecchio tempo, esclusivamente la fama. Che cosa mancò per questo ad Antonio Pacinotti? Mi si lasci piuttosto dire che cosa egli mostrò, con questo, di possedere di più del comune degli uomini!

Spirito di scienziato, egli traeva già troppa compiacenza dalla soluzione di un brillante problema di Fisica, per cercarne altrove e altrimenti. Così, quando il Jamin presenta, nel 1871, all'Accademia delle Scienze di Parigi, la Nota di Gramme sulla macchina magneto-elettrica producente corrente continua, è al Jamin, per far presente i propri titoli alla priorità di quell'invenzione, ch'egli scrive una sobria e riguardosa lettera, di cui il Jamin comunica all'Accademia le conclusioni. E il discorso si esauriva nella sfera degli scienziati.

Ma più ancora. Di semplici costumi, schivo del piacere mondano, contento di una modica agiatezza, era insensibile alle attrattive della ricchezza, che sono bensì stimolo d'operosità, ma di una operosità che non bene si congiunge colle aspirazioni serene della pura Scienza, e non di rado interferisce con esse.

Se non che, diffondendosi i benefici del trovato, era troppo giusto che se ne ricercasse l'ideatore. Parigi, che aveva ammirato i prodigi della macchina, chiamata di Gramme, colla illuminazione elettrica della sua maggior piazza, conferiva ad Antonio Pacinotti, nell'occasione dell'Esposizione d'Elettricità, tenutasi nell'Autunno del 1881, un raro Diploma d'Onore, che solennemente gli riconosceva la priorità dell'invenzione dell'anello elettro-magnetico. E cercarono, non cercati, il Pacinotti, i maggiori onori che possano far la compiacenza di un Uomo di merito, gareggiandovi le Società Scientifiche, i Poteri Pubblici, il Voto Cittadino, fino a quelli che abbiamo veduto tributargli nel recente Giubileo.

Un anno dopo il suo maggior trionfo, nel 1882, Egli passava dall'Università di Cagliari alla nostra, succedendo al padre, nella stessa cattedra di Fisica Tecnologica — successione, ch'Egli reputava il miglior compenso dell'onore, che, coll'opera sua, aveva reso all'Italia. — E noi, che abbiamo avuto la particolar fortuna di averlo a collega, ed ora proviamo particolar rammarico della sua dipartita, noi abbiamo potuto conoscere ed apprezzare un lato, non altrettanto celebre, ma non meno bello dello spirito di Antonio Pacinotti: la sua estrema modestia, la sua serena semplicità, le sue virtù domestiche, il suo scrupolo nell'adempimento dei doveri d'insegnante — per cui ci basti ricordare, con commozione, quello che ci raccontava il nostro Collega Queirolo, accorso al letto del morente, che, due ore prima della morte, gli si raccomandava di rimetterlo in grado di presiedere i suoi esami del giorno appresso. Pregi codesti che facevano del nostro grand'Uomo, parimente, mi si permetta l'espressione, un gran caro Uomo!

Corrono giorni, in cui, pur affermando più che mai il culto della Scienza, le si contende però un tempo e una parte, reclamati dall'attività pratica, tanto da sorgerne qualcosa come un conflitto fra l'indirizzo scientifico e l'indirizzo pratico dell'insegnamento. Stia il nome di Antonio Pacinotti, come a gloria d'Italia, anche ad eloquente esempio di un purissimo amore del Sapere, donde la Pratica ha tratto il vantaggio più cospicuo e più luminoso!

G. A. MAGGI.

Il 3 Dicembre 1911 moriva quasi improvvisamente di *angina pectoris* a La Coruña D. **JUAN JACOBO DURAN LORIGA**, uno degl'insegnanti di matematiche più noti ed apprezzati della Spagna. Nato a La Coruña il 17 Giugno 1854, fu nominato tenente di artiglieria a 19 anni e raggiunse in quest'arma il grado di comandante; lasciò poi il servizio militare per l'insegnamento della matematica, alla quale si sentiva particolarmente attratto. Collaborò a parecchi giornali, fra i quali anche i nostri.

EMILIO LEMOINE nato a Quimper nel 1840 è morto il 21 Febbraio scorso. Egli è il creatore della *geometrografia* e della *geometria del triangolo*, e uno dei fondatori dell'*Intermediaire des mathématiciens* (1894), È pure a lui che si deve, per la massima parte, l'istituzione dei Congressi internazionali di matematica.

A Santo Stefano di Magra, ove era nato l'11 Marzo 1847, è morto, il 15 Marzo scorso, **CESARE ARZELÀ**, professore di calcolo infinitesimale nella R. Università di Bologna, ben noto ai cultori della matematica per le sue numerose e importanti pubblicazioni scientifiche sulla teoria delle funzioni ed anche per alcuni suoi fortunatissimi libri scolastici.

Di lui parleremo più lungamente nel prossimo numero.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 Aprile 1912

INTEGRALI ALGEBRICI DI FUNZIONI ALGEBRICHE

dalle formole di Abel alla regola di Liouville

---

1. Mi occuperò dell'integrale $\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{R}}$, dove P indica una funzione razionale di x, R un polinomio intiero in x di grado r, n un numero intiero $\geqslant 2$. (Se R contiene fattori multipli, supporremo che il grado di ciascuno di essi sia $\leqslant n-1$).

Voglio trovare la riduzione di questo integrale mediante funzioni algebriche ed un numero limitato di trascendenti e le condizioni perchè si possa esprimere algebricamente, generalizzando le formole o i teoremi trovati da Abel nel caso particolare di $n=2$, $r=4$, (1) e deducendo poi la regola di Liouville.

Occorre anzitutto ricordare che Abel ha dimostrato (2) che se l'$\int y dx$, dove y è funzione algebrica di x, è esprimibile algebricamente, il suo valore è uguale ad una funzione razionale di x e di y.

Osservo che P si può decomporre nella somma di termini del tipo Ax^m, $\frac{A}{(x-a)}$, e quindi l'$\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{R}}$ è decomponibile nella somma di più integrali del tipo

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt[n]{R}}, \qquad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt[n]{R}}.$$

2. Riduzione dell'integrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt[n]{R}}$.

Per trovare la riduzione più generale di cui sono suscettibili gli integrali di questo tipo, si deve trovare la funzione algebrica più generale. il cui differenziale si possa decomporre in termini del tipo $\frac{Ax^m dx}{\sqrt[n]{R}}$, e, dopo d'aver integrato il differenziale così decomposto, si

---

(1) Abel, *Oeuvres complètes*, tome II, pag. 87 e segg.

(2) Abel, *op. cit.*, tome I, pag. 545, oppure *Journal de Crelle*, Bd. 4, 1820. Abel ha dimostrato un teorema più generale nel caso che l'integrale si possa esprimere con funzioni algebriche, logaritmiche ed ellittiche. per il caso particolare da noi considerato serve la dimostrazione data da Liouville, *Journal de l'École polytechnique*, cahier 22.

otterrà la relazione algebrica *più generale* fra gli integrali del tipo $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt[n]{R}}$.

La funzione cercata non contiene altri radicali oltre $\sqrt[n]{R}$, e deve essere una funzione razionale rispetto a $\sqrt[n]{R}$ e x (per il teorema di Abel ricordato al n. 1), indicando con $f\left(x, \sqrt[n]{R}\right)$ questa funzione potremo scrivere:

$$f\left(x, \sqrt[n]{R}\right) = Q_1 \sqrt[n]{R^{n-1}} + Q_2 \sqrt[n]{R^{n-2}} + \ldots + Q_{n-1} \sqrt[n]{R} + Q_n$$

dove $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ indica funzioni razionali di x.

(Se la $f\left(x, \sqrt[n]{R}\right)$ contenesse una parte frazionaria rispetto a $\sqrt[n]{R}$, di questa si potrà sempre supporre di far diventare razionale il denominatore.)

Si può subito vedere che le funzioni $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ devono essere intiere, oppure, se frazionarie, contenere solo fattori fratti del tipo $\frac{1}{(x-a)^m}$, dove $x - a$ è fattore di R e $m + 1 \leqslant$ al grado di $x - a$ in R.

Perciò supponendo che Q_{n-k} contenga un fattore fratto $\frac{1}{(x-a)^m}$ (ricordando che in questo caso Q_{n-k} è scomponibile nella somma di una parte intiera e di termini $\frac{\alpha_1}{(x-a)^m} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots$) si ha:

$$d\,\frac{\sqrt[n]{R}}{(x-a)^m} = \left\{ -m\,\frac{\sqrt[n]{R^{k+1}}}{(x-a)^{m+1}} + \frac{k\sqrt[n]{R^k}\,\frac{dR}{dx}}{n\sqrt[n]{R^{n-1}}\,(x-a)^m} \right\} \frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

ed il coefficiente di $\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$ è fratto, a meno che sia $x - a$ fattore di R, e perchè sia razionale deve poi essere *in ogni caso* $k = n - 1$, e in questa ipotesi diventa anche intiero, se $x - a$ è fattore di R.

Quindi perchè il differenziale di $f\left(x, \sqrt[n]{R}\right)$ sia decomponibile in termini del tipo $\frac{Ax^m}{\sqrt[n]{R}}$, potendo evidentemente tralasciare Q_n, deve essere:

$$f\left(x, \sqrt[n]{R}\right) = Q\sqrt[n]{R^{-1}}$$

dove Q è un polinomio intiero in x, quando R non ha fattori multipli, e in caso contrario Q è frazionario e contiene nel suo denominatore fattori di R.

a) R *non contenga fattori multipli.*

Poniamo:

$$Q = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \ldots + f_q x^q.$$

Si otterrà:

$$d\left(Q\sqrt[n]{R^{n-1}}\right) = S\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

essendo

$$S = R\frac{dQ}{dx} + \frac{n-1}{n} Q \frac{dR}{dx}.$$

Posto

$$S = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \ldots + \varphi_s x^s$$
$$R = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r$$

si ha:

$$(a) \qquad \varphi_p = \alpha_0 (p+1) f_{p+1} + \alpha_1\left(p+1-\frac{1}{n}\right) f_p$$
$$+ \alpha_2\left(p+1-\frac{2}{n}\right) f_{p-1} + \ldots + \alpha_r\left(p+1-\frac{r}{n}\right) f_{p-r+1}$$

ed è pure:

$$s = q + r - 1, \quad q = s - r + 1$$

Dalla uguaglianza:

$$d\left(Q\sqrt[n]{R^{n-1}}\right) = S\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

si ha:

$$Q\sqrt[n]{R^{n-1}} = \int S\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

e quindi:

$$(b) \qquad \sqrt[n]{R^{n-1}}(f_0 + f_1 x + \ldots + f_{s-r+1}x^{s-r+1}) =$$
$$= \varphi_0 \int\frac{dx}{\sqrt[n]{R}} + \varphi_1 \int\frac{x dx}{\sqrt[n]{R}} + \ldots + \varphi_s \int\frac{x^s d_x}{\sqrt[n]{R}}.$$

E dovendo essere $s \geqslant r-1$ ne segue che è impossibile trovare una relazione fra gli $r-1$ integrali

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}, \int\frac{x dx}{\sqrt[n]{R}}, \ldots, \int\frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}}$$

e quindi *questi integrali sono irriducibili fra loro con funzioni algebriche.*

Se $s \geqslant r-1$, si può sempre ridurre $\int\frac{x^s dx}{\sqrt[n]{R}}$ ad integrali dello stesso tipo dove s è minore, e quindi i soli integrali irriducibili sono i precedenti (si deve sempre supporre $r \geqslant 2$).

Dunque: *Questi* r -1 *integrali sono le sole funzioni trascendenti contenute in* $\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}$, *quando* P *è un polinomio intiero.* [1]

Per ridurre $\int \frac{x^s dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}$ quando $s \geqslant r-1$ basta porre nella (b) $\varphi_s = -1$, $\varphi_{s-1} = \varphi_{s-2} = \ldots = \varphi_{r-1} = 0$, e si ottiene:

$$\int \frac{x^s dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}} = \varphi_0 \int \frac{dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}} + \ldots$$
$$+ \ldots \varphi_{r-2} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}} - \sqrt[n]{\mathrm{R}^{n-1}}\,(f_0 + f_1 x + \ldots + f_{s-r+1} x^{s-r+1}). \tag{c}$$

Per determinare i coefficienti $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{r-2}, f_0, f_1, \ldots, f_{s-r+1}$, basta porre nella ($a$) successivamente $p=0, p=1, \ldots, p=s$, ricordando che è $\varphi_s = -1$, $\varphi_{s-1} = \varphi_{s-2} = \ldots = \varphi_{r-1} = 0$, si avranno le seguenti $s+1$ equazioni:

$$(d)\quad \begin{cases} \varphi_0 = \alpha_0 f_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\alpha_1 f_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{r-2} = (r-1)\alpha_0 f_{r-1} + \left(r-1-\frac{1}{n}\right)\alpha_1 f_{r-2} + \ldots + \left(r-1-\frac{r-1}{n}\right)\alpha_{r-1} f_0. \end{cases}$$

$$(e)\quad \begin{cases} 0 = r\alpha_0 f_r + \left(r - \frac{1}{n}\right)\alpha_1 f_{r-1} + \ldots + \left(r - \frac{r}{n}\right)\alpha_r f_0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -1 = \left(s+1-\frac{r}{n}\right)\alpha_r f_{s-r+1}. \end{cases}$$

Mediante le ultime $s-r+2$ equazioni (e) si ottengono $f_0, f_1, f_2 \ldots f_{s-r+1}$ e dalle prime (d) si hanno poi $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_{r-2}$.

Se si vuole esprimere $\int \frac{\mathrm{P}dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}$ senz'altro in funzione degli $r-1$ trascendenti

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}},\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}, \ldots, \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{\mathrm{R}}}$$

basta porre nei primi membri delle (e) $\varphi_s, \varphi_s, \ldots, \varphi_{r-1}$ col segno mutato da quello che hanno in P e nei primi membri delle (d) togliere da $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-2}$ rispettivamente i valori che si hanno in P; e quindi come prima si otterranno $f_0, f_1, \ldots, f_{s-r+1}$ dalle (e) e poi le $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-2}$ dalle (d).

---

[1] Per $n=2$, v. JOURDAN, *Cours d'Analyse*, vol. II.

Se quindi si vuol ridurre questo numero $r-1$ di trascendenti si dovranno porre uguali a 0 alcune delle $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-2}$, e così:

Se si vuole che l'integrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{R}}$ (dove P è un polinomio intiero in x di grado $\geqslant r-1$) si possa esprimere algebricamente si dovrà porre:

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{r-2} = 0$$

ponendo così $r-1$ equazioni fra gli $r+1$ coefficienti di R, di cui $r-1$ si potranno esprimere mediante i 2 rimanenti. (¹)

b) R *contenga fattori multipli.*

I fattori multipli di R siano però di grado $\leqslant n-1$; per quanto abbiamo detto in principio del n. 2, poniamo:

$$Q = \frac{f_0 + f_1 x + \ldots + f_q x^q}{\Pi (x - a_i)^{m_i}},$$

dove con a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ indico gli zeri multipli di R e con $m_i + 1$ rispettivi ordini di moltiplicità.

Come prima:

$$d\left(Q\sqrt[n]{{}^{n-a}}\right) = \left(R\frac{dQ}{dx} + \frac{n-1}{dx} Q \frac{dR}{dx}\right)\frac{dx}{\sqrt{R}} = \int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

$$S = \varphi_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_s x_r$$

$$s = r + q - \Sigma m_i - 1,\ q = s - r + \Sigma m_i + 1 \geqslant 0$$

quindi

$$s \geqslant r - \Sigma m_i - 1.$$

Si potranno ottenere le formole analoghe alle (a), (b), (c), (d), (e) del caso precedente; sarebbero però malagevoli da calcolarsi in generale.

Si avrà quindi il seguente importante:

TEOREMA. — *Quando* P *è intiero l'integrale* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{R}}$ *contiene solo gli* $r - \Sigma m_i - 1$ *trascendenti*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}},\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt[n]{R}}, \ldots, \int \frac{x^{r-\Sigma m_i - 2}}{\sqrt[n]{R}}$$

(dove $\Sigma m_i \leqslant r - 2$ *è il grado del m. c. d. di* R *e* $\frac{dR}{dx}$*).*

E quindi: se si vuole esprimere $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{R}}$ *algebricamente è necessario e sufficiente che siano soddisfatte* $r - \Sigma m_i - 1$ *equazioni* $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = \varphi_{r-\Sigma m_i - 2} = 0$.

(¹) $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[n]{R}}$ non si può esprimere algebricamente, quando il grado di P è $< r-1$. Cfr. LIOUVILLE, *Journal de l'École polytech.*, cahier 23.

Cioè vi saranno $r - \Sigma m_i - 1$ *condizioni fra i coefficienti di* R, *fra i quali ve ne sono già* Σm_i *per le radici multiple.*

3. Riduzione dell'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[m]{R}}$. *a*) Quando R non contiene fattori multipli.

Per quanto si è visto al n. 2 bisognerà porre in questo caso:

$$Q = \frac{\psi_1}{x-a} + \frac{\psi_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}$$

e come prima:

$$d\left(Q\sqrt[n]{R^{n-1}}\right) = \left(R\frac{dQ}{dx} + \frac{n-1}{n}Q\frac{dR}{dx}\right)\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}\ S = \frac{dx}{\sqrt[n]{R}}.$$

Quindi, posto:

$$R = \alpha'_0 + \alpha'_1(x-a) + \ldots + \alpha'_r(x-a)^r$$

$$S = \varphi'_0 + \varphi'_1(x-a) + \ldots + \varphi'_{r-2}(x-a)^{r-2} + \frac{\chi_1}{x-a} + \ldots + \frac{\chi_m}{(x-a)^m}$$

si ottiene

$$(f) \qquad \chi_p = -\alpha'_0(p-1)\psi_{p-1} - \alpha'_1\left(p-1+\frac{1}{n}\right)\psi_p - \ldots$$
$$\ldots - \alpha'_r\left(p-1+\frac{r}{n}\right)\psi_{p+r-1}.$$

$$(g)\ \begin{cases} \varphi'_0 = \left(2\frac{n-1}{n}-1\right)\alpha'_2\psi_1 + \left(3\frac{n-1}{n}-2\right)\alpha'_3\psi_2 + \ldots + \left(r\frac{n-1}{n}-r+1\right)\alpha'_r\psi_{r-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi'_{r-2} = \left(r\frac{n-1}{n}-1\right)\alpha'_r\psi_1. \end{cases}$$

Facendo poi

$$\varphi'_0 + \varphi'_1(x-a) + \ldots + \varphi'_{r-2}(x-a)^{r-2} = \varphi_0 + \varphi_1 x + \ldots + \varphi_{r-2}x^{r-2}$$

si otterranno

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_{r-2}.$$

Prendendo l'integrale di ciascun membro dell'equazione:

$$d\left(Q\sqrt[n]{R^{n-1}}\right) = S\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}$$

otterremo:

$$(h)\ \begin{cases} \left(\frac{\psi_1}{x-a} + \frac{\psi_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}\right)\sqrt[n]{R^{n-1}} = \varphi_0\int\frac{dx}{\sqrt[n]{R}} + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + \varphi_{r-2}\int\frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}} \\ +\chi_1\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}} + \chi_2\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt[n]{R}} + \ldots + \chi_m\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt[n]{R}}. \end{cases}$$

Dopo aver osservato che la formola vale solo per $m \geqslant 2$ $(r \geqslant 2)$, si può porre $\chi_m = -1$, $\chi_2 = \ldots = \chi_{m-1} = 0$, si avrà:

$$(i) \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt[n]{R}} = \varphi_0 \int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}} + \ldots + \varphi_{r-2} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}} + \chi_1 \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}} - \sqrt[n]{R^{n-1}} \left(\frac{\psi_1}{x-a} + \ldots + \frac{\psi_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} \right).$$

E dalle (f) ponendo in esse $p=1, p=2, \ldots, p=m$, si avranno $\chi_1, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{m-1}$, e quindi dalle (g) le $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{r-2}$.

Dunque:

L'integrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt[n]{R}}$ *si esprime mediante gli* r *trascendenti:*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt[n]{R}}, \ldots, \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}}, \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}},$$

se si vuole quindi esprimere quest'integrale algebricamente basterà porre $\chi_1 = \varphi_0 = \varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_{r-2} = 0$ *ottenendo* r *equazioni fra gli* $r+1$ *coefficienti* $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$.

Osservazione. — Il ragionamento precedente è illusorio quando $\alpha'_0 = 0$, poichè allora le equazioni che si possono ottenere dalla (f) per calcolare $\psi_{m-1}, \psi_{m-2}, \ldots$ non hanno più significato preciso.

Essendo in questo caso $\chi_m = 0$, sostituendo ad m, $m+1$ dalla (h) e dalla (i) si ha

$$(i') \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt[n]{R}} = \varphi_0 \int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}} + \varphi_1 \int \frac{xdx}{\sqrt[n]{R}} + \ldots + \varphi_{r-2} \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}} - \sqrt[n]{R^{n-1}} \left(\frac{\psi_1}{x-a} + \ldots + \frac{\psi_m}{(x-a)^m} \right).$$

Ed essendo

$$\alpha'_0 = \alpha_0 + \alpha_1 a + \ldots + \alpha_r a^r = 0$$

$x - a$ è fattore di R.

Perciò:

Tutte le volte che $x-a$ *è fattore di* R *l'integrale* $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}}$ *si può esprimere mediante gli* $r-1$ *trascendenti* $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt[n]{R}} \ldots \int \frac{x^{r-2}dx}{\sqrt[n]{R}}$, *in qualunque altro caso ciò è impossibile* [1] (perchè nella (h) dev'essere $m > 1$).

---

[1] Cfr. Liouville, l. c. Quando P e Q sono primi fra loro e Q e T non hanno fattori comuni nè multipli è impossibile esprimere algebricamente $\int \frac{P}{Q\sqrt[n]{T}}$, a meno che Q si riduca ad una costante.

Se ora vogliamo esprimere effettivamente $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}}$ essendo $x-a$ fattore di R, mediante questi $r-1$ trascendenti ponendo $\chi_1=-1$, avremo dalla (f) e dalle (g):

$$\psi_1=\frac{n}{R'(a)},\ \varphi'_0=(n-2)\frac{R''(a)}{2!R'(a)},\ldots,\varphi'_{r-2}=\frac{(r-1)(n-r)}{r!R'(a)}R^{(r)}(a)$$

dove $R'(a)$, $R''(a)$, … $R^{(r)}(a)$ indicano le r successive derivate di R, in cui poi si pone $x=a$.

Può ancora essere vantaggioso osservare che si può trovare una relazione algebrica fra gli integrali del tipo $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}}$ quando $x-a$ è fattore di R. (V. Abel, *l. c.*, per $n=2$, $r=4$).

b) Quando R *contiene fattori multipli.*

Analogamente a quanto si è fatto al n. 2, *b*, porremo:

$$Q=\frac{1}{\Pi(x-a_i)^{m_i}}\left(\frac{\psi_1}{x-a}+\frac{\psi_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{\psi_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}\right)=\frac{Q_1}{\pi(x-a)^{m_i}}$$

$$S=R\frac{dQ}{dx}+\frac{n-1}{n}Q\frac{dR}{dx}$$

$$S=[\alpha'_0+\ldots+\alpha'_r(x-a)^r]\times\left\{\frac{1}{\Pi(x-a_i)^{m_i}}\frac{dQ_1}{dx}-Q_1\frac{\Sigma m_i(x-a_2)(x-a_3)\ldots}{\Pi(x-a_i)^{m_i+1}}\right\}$$
$$+[\alpha'_1+\ldots+r\alpha'_r(x-a)^{r-1}]\frac{Q_1}{\Pi(x-a_i)^{m_i}}$$

$$S=\varphi'_0+\varphi'_1(x-a)+\ldots\varphi'_{r-\Sigma m_i-2}+\frac{\chi_1}{x-a}+\ldots+\frac{\chi_m}{(x-a)^m}.$$

Si otterranno quindi dalle equazioni analoghe alla (f) e alle (g), da cui, essendo $m\geqslant 2$, posto $\chi_m=-1$, $\chi_2=\chi_3=\ldots=\chi_{m-1}=0$, si avrà:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt[n]{R}}=\varphi_0\int\frac{dx}{\sqrt[n]{R}}+\ldots+\varphi_{r-\Sigma m_i-2}\int\frac{x^{r-\Sigma m_i-2}}{\sqrt[n]{R}}+\chi_2\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}}$$
$$-\sqrt[n]{R^{n-1}}\left(\frac{\psi_1}{x-a}+\ldots+\frac{\psi_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}\right)\frac{1}{\Pi(x-a_i)^{m_i}}.$$

Dunque:

L'integrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt[n]{R}}$ $(m\geqslant 2)$ *si esprime mediante* $r-\Sigma_{m_i}$ *trascendenti:*

$$\int\frac{dx}{\sqrt[n]{R}},\ \int\frac{xdx}{\sqrt[n]{R}},\ldots,\int\frac{x^{r-\Sigma m_i-2}dx}{\sqrt[n]{R}},\ \int\frac{dx}{(x-a)\sqrt[n]{R}}.$$

Osservazione. — Se $x-a$ è fattore di R sarà zero χ_m ed il ragionamento precedente è illusorio; con un procedimento analogo