non determinano un S_3, quindi su ogni linea coordinata della V_3 vi sono due punti nei quali l'S_3 tangente non è determinato.

Questi due punti sono le intersezioni della linea con la superficie (18), e poichè essa è incontrata in due punti da ogni linea parametrica, ne viene che i punti di questa superficie sono tutti e soli i punti della V_3 nei quali l'S_3 tangente non è determinato.

Applicazione ai complessi di rette.

21. La V^3 rappresentata da

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w)$$

stia sulla quadrica R^2_4 di S_5. Le x_i $(i = 1, 2 \ldots 6)$ soddisferanno l'equazione della quadrica $R(x) = 0$. Nell'S_3 ordinario si avrà in corrispondenza un complesso di rette. Ai tre sistemi ∞^1 di superficie caratteristiche, corrispondono nel complesso tre sistemi ∞^1 di congruenze che diremo ancora caratteristiche. Per ogni retta del complesso ne passa una di ciascun sistema.

Due congruenze d'uno stesso sistema non hanno in generale rette a comune.

Due congruenze di sistema diverso s'intersecano secondo una rigata.

(Diciamo $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$ i tre sistemi caratteristici, indichiamo con P_u, P_v, P_w le congruenze caratteristiche e con (uv), (vw), (wu) le rigate loro intersezioni).

Il fatto che le coppie di punti omologhi di due superficie P d'uno stesso sistema della V_3 sono allineate con un punto fisso, ci dice che quelle ∞^2 coppie hanno per reciproci rispetto alla R^2_4 rispettivamente i punti di ∞^2 S_3 che stanno in un S_4. (È ovvio il significato di rette omologhe di due cong. dello spazio ordinario appartenenti ad un sistema caratteristico del complesso.)

Si ha: *Le ∞^2 coppie di rette omologhe di due congruenze caratteristiche d'uno stesso sistema sono direttrici di ∞^2 congruenze lineari che stanno in un complesso lineare C. Ognuna di tali congruenze ha comune col nostro complesso una rigata.*

Tutte le rigate che così si ottengono costituiscono l'intersezione dei due complessi.

Si hanno tre sistemi ∞^2 di complessi C, corrispondenti, in un certo senso, alle tre superficie F legate alla V_3 (cfr. paragr. 10).

Il punto $\psi'_i(w)$ in cui concorrono gli S_3 tangenti alla V_3 nei punti d'una P_w (cfr. paragr. 13) è reciproco dei punti della P_w stessa, perciò essa sta nell'S_4 polare di $\psi'_i(w)$.

Dunque le superficie caratteristiche delle V_3 stanno in S_4. Segue che le linee parametriche stanno in S_3.

Nello spazio ordinario si ha: *le congruenze caratteristiche del complesso che si considera stanno in complessi lineari, le rigate loro intersezioni stanno in congruenze lineari.*

Pw_1, Pw_2 siano due superficie caratteristiche della V_3 e Γ il cono a tre dimensioni, su cui esse stanno, di vertice $[\psi'_1(w_1)-\psi'_1(w_2)]$.

Per una generatrice g di Γ, vi sono ∞^2 piani che lo segano ancora in una retta.

Dunque vi sono per g ∞^2 piani, ognuno dei quali sega Pw_1 Pw_2 in due coppie di punti omologhi.

Questi piani hanno per reciproci ∞^2 piani π nell'S_3 polare di g. I punti d'intersezione dei piani π con la V^3 stanno sulla linea L secondo cui essa è segata dall'S_3 che li contiene, quindi per ogni punto di L ne escono ∞^1 i quali costituiscono un cono; non possono formare un fascio, poichè i loro reciproci non stanno in un medesimo S_3.

Dunque: fissata una coppia di punti omologhi su Pw_1, Pw_2, ognuna delle ∞^2 coppie rimanenti forma con quella una quaderna di punti che hanno per reciproci i punti di una conica R^2_4. Si hanno ∞^2 di tali coniche che stanno su una quadrica passante per la linea L.

Per un punto di L passano ∞^1 di quelle coniche.

Nello spazio ordinario si ha: *fissata una coppia di rette omologhe di due congruenze caratteristiche, ognuna delle ∞^2 coppie rimanenti forma con esse una quaderna di rette che fanno parte d'una medesima schiera di generatrici d'una quadrica.*

Si hanno ∞^2 di queste quadriche, le quali stanno in una congruenza lineare che ha per direttrici le due rette fissate, ed ha comune col complesso una rigata L *avente quelle direttrici. Per una retta di* L *passano ∞^1 di quelle quadriche.*

Se la V^3 è algebrica e di ordine n, sono algebriche e di ordine n le superficie caratteristiche.

Gli ∞^2 S_3 per g segano Γ in n generatrici, quindi ciascuno contiene n coppie di punti omologhi di Pw_1 e Pw_2.

Fissata una coppia di punti omologhi su due superficie caratteristiche, le altre coppie formano ∞^2 gruppi di $n-1$; ciascun gruppo insieme alla coppia fissa sta in un S_3.

Tre rette per un punto e non in un piano individuano un S_3, quindi tre coppie di punti omologhi determinano un gruppo di n coppie che stanno in S_3.

Nello spazio ordinario, il complesso di rette sarà algebrico e di ordine n e così pure le congruenze caratteristiche.

Fissata una coppia di rette omologhe di due congruenze caratteristiche le altre si ripartiscono in ∞^2 gruppi di $n-1$ coppie. Ogni gruppo insieme alla coppia fissata contiene n coppie di rette omologhe che stanno in una congruenza lineare, ossia si appoggiano a due rette sghembe che in generale non appartengono al complesso.

Tre coppie di rette omologhe di due congruenze caratteristiche determinano un gruppo di n coppie che s'appoggiano a due rette sghembe le quali appartengono ad un complesso C.

Le congruenze caratteristiche del nostro complesso sono congruenze W [1], perchè le $x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \text{cost.}$ sono soluzioni dell'equazione di Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0.$$

Le congruenze W ammettono lungo ogni retta un complesso lineare osculatore nel senso che esso contiene tutte le rigate osculatrici alla congruenza lungo una retta.

Se la congruenza sta in un complesso lineare, tutti i complessi lineari osculatori coincidono con esso, così avviene per le congruenze caratteristiche.

Le rigate (uv), (vw), (wu) costituiscono i tre sistemi ∞^2 di rigate principali del complesso, perchè lungo ogni loro retta esiste un complesso lineare tangente stazionario al complesso dato (cfr. paragr. 14).

La V_3 (9) del paragr. 16 sta sulla R^2_4 solo nel caso in cui sia del second'ordine, allora rappresenta nello spazio ordinario un complesso lineare speciale.

Due sistemi di congruenze caratteristiche sono pure speciali ed hanno per direttrice l'asse del complesso.

Quindi se un complesso rappresentato dalle equazioni

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w) \qquad (i = 1, 2 \dots 6)$$
$$R(x_i) = 0$$

ha in ogni sua retta un complesso lineare tangente stazionario è un complesso lineare speciale.

La V_3 (10), del paragr. 17, non può stare sulla R^2_4, perchè per ogni retta di questa quadrica passano solo due piani giacenti su di essa, quindi a quella V_3 non corrisponde nello spazio ordinario nessun complesso di rette.

---

[1] Il BIANCHI chiama congruenza W ogni congruenza che faccia corrispondere alle assintotiche di una sua falda focale, le assintotiche dell'altra falda focale. Si può definire anche la congruenza W come una congruenza di raggi, la quale faccia corrispondere sulle due falde focali, a sistemi coniugati, sistemi coniugati. Si dimostra che se una congruenza si può rappresentare parametricamente mediante funzioni che siano soluzioni dell'equazione alle derivate parziali di Laplace, essa è una congruenza W.

DOTT. EMMA CAIRO.

SOMMA DELLE POTENZE SIMILI DI DUE QUANTITÀ

in funzione della loro somma e del loro prodotto

Nell'Algebra superiore si danno le formole (dette di WARING) delle somme delle potenzo simili delle radici di un'equazione di grado qualunque, in funzione dei coefficienti.

Mi occupo in questa *Nota* della stessa questione per il caso della equazione di 2° grado o, in altre parole, trovo le formole che esprimono la somma delle potenze simili di due quantità in funzione della somma e del prodotto delle quantità medesime: il metodo di deduzione è semplice e i risultati particolari che ottengo, riguardo alla legge di formazione dei coefficienti degli sviluppi relativi, mi sembrano degni di essere notati.

Ecco le conclusioni cui giungo:

Sieno α e β le radici dell'equazione

$$x^2 - sx + p = 0$$

di modo che è

$$\alpha + \beta = s, \qquad \alpha\beta = p.$$

Posto $\sigma_k = \alpha^k + \beta^k$, si ottiene per $k = 2n$, cioè pari:

$$\sigma_{2n} = s^{2n} - D_1^{(n)} s^{2n-2} . p^2 + D_2^{(n)} s^{2n-4} . p^2 - D_3^{(n)} s^{2n-6} p^3 + \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)} sp^{n-1} + (-1)^n D_n^{(n)} . p^n,$$

dove è

$$D_1^{(n)} = 2n, \dots D_{n-1}^{(n)} = n^2, \quad D_n^{(n)} = 2$$

e inoltre

$$D_i^{(n)} = 2D_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)} - D_{i-2}^{(n-2)}.$$

Mentre per $k = 2n + 1$, cioè dispari, si ha:

$$\sigma_{2n+1} = s^{2n+1} - D_1^{(n)} s^{2(n-1)+1} . p + D_2^{(n)} s^{2(n-2)-1} . p^2 - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)} s^3 p^{n-1} + (-1)^n D_n^{(n)} sp^n,$$

dove è analogamente

$$D_i^{(n)} = 2D_{i-1}^{(n-2)} + D_i^{(n-1)} - D_{i-2}^{(n-2)}$$

e

$$D_1^{(n)} = 2n + 1 \qquad \text{e} \qquad D_n^{(n)} = 2n + 1.$$

Deduco, tanto per k pari che per k dispari, tra i coefficienti corrispondenti a uno stesso valore di n una relazione ricorrente assai semplice.

Ottengo poi alcuni risultati, forse non noti, intorno a valori di determinanti particolari fatti con coefficienti binomiali.

***

1. Seguendo le notazioni ora introdotte, dagli sviluppi della potenza del binomio si ottiene

$$\sigma_{2n} = s^{2n} - \binom{2n}{1}\sigma_{2n-2}p - \binom{2n}{2}\sigma_{2n-4}p^2 - \ldots - \binom{2n}{n-1}\sigma_2 p^{n-1} - \binom{2n}{n}p^n$$

$$\sigma_{2n-2} = s^{2n-2} - \binom{2n-2}{1}\sigma_{2n-4}p - \binom{2n-2}{2}\sigma_{2n-6}p^2 - \ldots - \binom{2n-2}{n-1}p^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_6 = s^6 - \binom{6}{1}\sigma_4 p - \binom{6}{2}\sigma_2 p^2 - \binom{6}{3}p^3$$

$$\sigma_4 = s^4 - \binom{4}{1}\sigma_2 p - \binom{4}{2}p^2$$

$$\sigma_2 = s^2 - \binom{2}{1}p$$

ossia

$$\sigma_{2n} + \binom{2n}{1}\sigma_{2n-2}p + \binom{2n}{2}\sigma_{2n-4}p^2 + \ldots + \binom{2n}{n-1}\sigma_2 p^{n-1} = s^{2n} - \binom{2n}{n}p^n$$

$$\sigma_{2n-2} + \binom{2n-2}{1}\sigma_{2n-4}p + \ldots + \binom{2n-2}{n-2}\sigma_2 p^{n-2} = s^{2n-2} - \binom{2n-2}{n-1}p^{n-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sigma_6 + \binom{6}{1}\sigma_4 p + \binom{6}{2}\sigma_2 p^2 = s^6 - \binom{6}{3}p^3$$

$$\sigma_4 + \binom{4}{1}\sigma_2 p^2 = s^4 - \binom{4}{2}p^2$$

$$\sigma_2 = s^2 - \binom{2}{1}p.$$

Si tratta allora di un sistema lineare di n equazioni fra le n indeterminate $\sigma_2, \sigma_4, \ldots \sigma_{2n}$. Essendo il determinante del sistema

$$\begin{vmatrix}
1 & \binom{2n}{1}p & \binom{2n}{2}p^2 & \ldots\ldots & \binom{2n}{n-1}p^{n-1} \\
0 & 1 & \binom{2n-2}{1}p & \ldots\ldots & \binom{2n-2}{n-2}p^{n-2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots\ldots & 1 & \binom{6}{1}p & \binom{6}{2}p^2 \\
0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & \binom{4}{1}p \\
0 & \ldots\ldots & \ldots & 0 & 1
\end{vmatrix} = 1,$$

si deduce

$$\sigma_{2n} = \begin{vmatrix} s^{2n} - \binom{2n}{n} p^n & \binom{2n}{1} p & \binom{2n}{2} p^2 & \dots\dots\dots & \binom{2n}{n-1} p^{n-1} \\ s^{2n-2} - \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} & 1 & \binom{2n-2}{1} p & \dots\dots\dots & \binom{2n-2}{n-2} p^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^6 - \binom{6}{3} p^3 & 0 \dots\dots 0 & 1 & \binom{6}{1} p & \binom{6}{2} p^2 \\ s^4 - \binom{4}{2} p^2 & 0 \dots\dots\dots & 0 & 1 & \binom{4}{1} p \\ s^2 - \binom{2}{1} p & 0 \dots\dots\dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

onde

$$\sigma_{2n} = \begin{vmatrix} s^{2n} & \binom{2n}{1} p & \binom{2n}{2} p^2 & \dots\dots\dots & \binom{2n}{n-1} p^{n-1} \\ s^{2n-2} & 1 & \binom{2n-2}{1} p & \dots\dots\dots & \binom{2n-2}{n-1} p^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s^6 & 0 \dots\dots 0 & 1 & \binom{6}{1} p & \binom{6}{2} p^2 \\ s^4 & 0 \dots\dots\dots & 0 & 1 & \binom{4}{1} p \\ s^2 & 0 \dots\dots\dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^n \begin{vmatrix} \binom{2n}{1} p & \binom{2n}{2} p^2 & \dots\dots\dots & & \binom{2n}{n} p^n \\ 1 & \binom{2n-2}{1} p & \dots\dots\dots & & \binom{2n-2}{n-1} p^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots\dots 0 & 1 & \binom{6}{1} p & \binom{6}{2} p^2 & \binom{6}{3} p^3 \\ 0 \dots\dots\dots & 0 & 1 & \binom{4}{1} p & \binom{4}{2} p^2 \\ 0 \dots\dots\dots & \dots & 0 & 1 & \binom{2}{1} p \end{vmatrix}$$

Il primo determinante, sviluppato secondo gli elementi della prima colonna, è un polinomio contenente solo le potenze pari di s e cioè

$s^{2n}, s^{2n-2}, \ldots s^6, s^4, s^2$. Il coefficiente di s^{2n} è $+1$ e, in generale, il coefficiente di s^{2i} è

$$(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} \binom{2n}{1}p & \binom{2n}{2}p^2 \ldots & \binom{2n}{n-i}p^{n-i} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \binom{2n}{n-1}p^{n-1} \\ 1 & \binom{2n-2}{1}p & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ 0 \ldots\ldots\ldots 1 & \binom{2i+2}{1}p & \binom{2i+2}{2}p^2 \ldots & \binom{2i+2}{i-1}p^{i-1} & & \binom{2i+2}{i}p^i \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0 & 1 & \binom{2i-2}{1}p \ldots & \binom{2i-2}{i-3}p^{i-3} & & \binom{2i-2}{i-1}p^{i-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots 0 & 1 & & \binom{4}{1}p \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \ldots 0 & & 1 \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si riduce al seguente

$$(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} \binom{2n}{1}p & \binom{2n}{2}p^2 & \ldots & \binom{2n}{n-i}p^{n-i} \\ 1 & \binom{2n-2}{1}p & \ldots & \binom{2n-2}{n-i-1}p^{n-i-1} \\ 0 & 1 \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots\ldots & & 1 & \binom{2i+2}{1}p \end{vmatrix}.$$

È facile poi vedere che tutti i termini dello sviluppo contengono il fattore p^{n-i}; quindi il coefficiente di s^{2i} si può indicare con

$$(-1)^{n-i}D_{n-i}^{(n)}p^{n-i} = (-1)^{n-i}p^{n-i}\begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \ldots & \binom{2n}{n-i} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} & \ldots & \binom{2n-2}{n-i-1} \\ 0 & 1 \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 \ldots\ldots & & 1 & \binom{2i+2}{1} \end{vmatrix},$$

epperò si può scrivere

$$\sigma_{2n} = s^{2n} - D_1^{(n)}ps^{2(n-1)} + D_2^{(n)}p^2s^{2(n-2)} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}D_{n-1}^{(n)}p^{n-1}s^2 + (-1)^n D_n^{(n)}p^n.$$

Questa relazione è sempre vera qualunque sieno i numeri α e β, da cui non dipendono i coefficienti D; dunque anche per $\alpha = 1$, e $\beta = -1$: ma in tal caso è $\sigma_{2n} = 2$, $s = 0$, $p = -1$ e quindi

$$2 = D_n^{(n)},$$

cioè

$$\begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \binom{2n}{n} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \binom{2n-2}{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{2n-4}{1} & \ldots\ldots & \binom{2n-4}{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & & 1 & \binom{2}{1} \end{vmatrix} = 2.$$

Si noti poi inoltre che è $D_1^{(n)} = \binom{2n}{1}$: ora proverò che fra i coefficienti $D_i^{(n)}$ vi è una relazione ricorrente assai facile a determinarsi. A tal fine si osservi che il determinante $D_{n-i}^{(n)}$, sviluppato secondo gli elementi dell'ultima colonna, ci dà

$$D_{n-i}^{(n)} = (-1)^{n-i+1}\binom{2n}{n-i} + (-1)^{n-i}\binom{2n-2}{n-i-1}\cdot\begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{n-i-1}\binom{2n-4}{n-i-2}\begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \binom{2n}{3} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} & \binom{2n-2}{2} \\ 0 & 1 & \binom{2n-4}{1} \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots + \binom{2i+2}{1}\begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \ldots & \binom{2n}{n-i-1} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} & \ldots & \binom{2n-2}{n-i-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots\ldots & 1 & \binom{2i+4}{1} \end{vmatrix}.$$

Quindi si può scrivere

$$D_{n-i}^{(n)} = \binom{2i+2}{1} D_{n-i-1}^{(n)} - \binom{2i+4}{2} D_{n-i-2}^{(n)} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{n-i}\binom{2n-2}{n-i-1} D_1^{(n)} - (-1)^{n-i}\binom{2n}{n-i}. \qquad (1)$$

In particolare, poichè è

$$D_1^{(n)} = \binom{2n}{1} \qquad \text{e} \qquad D_0^{(n)} = 1,$$

sarà

$$D_2^{(n)} = \binom{2n-2}{1} D_1^{(n)} - \binom{2n}{2} = \binom{2n-2}{1} \cdot \binom{2n}{1} - \binom{2n}{2} = n\,(2n-3)$$

e ancora

$$D_n^{(n)} = \binom{2}{1} D_{n-1}^{(n)} - \binom{4}{2} D_{n-2}^{(n)} + \dots + (-1)^n \binom{2n-2}{n-1} D_1^{(n)} - (-1)^n \binom{2n}{n} = 2.$$

2. Voglio ancora dedurre un'altra relazione ricorrente tra i coefficienti D per valori diversi di n. Infatti, considerando il determinante $D_{n-i}^{(n)}$ e sviluppandolo secondo gli elementi della prima colonna, si ottiene

$$D_{n-i}^{(n)} = \binom{2n}{1} \begin{vmatrix} \binom{2n-2}{1} & \binom{2n-2}{2} & \dots & \binom{2n-2}{n-i-1} \\ 1 & \binom{2n-4}{1} & \dots & \binom{2n-4}{n-i-2} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 & & \binom{2i+2}{1} \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \binom{2n}{2} & \dots\dots & & \binom{2n}{n-i} \\ 1 & \binom{2n-4}{1} & \dots & \binom{2n-4}{n-i-4} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 1 & \binom{2i+2}{1} \end{vmatrix};$$

di nuovo, sviluppando il secondo determinante nella stessa maniera, si ottiene

$$D_{n-i}^{(n)} = \binom{2n}{1} D_{n-1-i}^{(n-1)} - \binom{2n}{2} \begin{vmatrix} \binom{2n-4}{1} & \dots\dots & & \binom{2n-4}{n-i-2} \\ 1 & \binom{2n-6}{1} & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 1 & \binom{2i+2}{1} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \binom{2n}{3} & \dots\dots & & \binom{2n}{n-i} \\ 1 & \binom{2n-6}{1} & \dots & \binom{2n-6}{n-i-3} \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & 1 & \binom{2i+2}{1} \end{vmatrix}$$

e continuando a procedere così sull'ultimo determinante si ottiene, come è facile verificare,

$$D^{(n)}_{n-i} = \binom{2n}{1} D^{(n-1)}_{n-i-1} - \binom{2n}{2} D^{(n-2)}_{n-i-2} + \binom{2n}{3} D^{(n-3)}_{n-i-3} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-i} \binom{2n}{n-i-1} D^{(i+1)}_{i} - (-1)^{n-i} \binom{2n}{n-i}, \quad (2)$$

dove è chiaro il significato dei vari D.

Si consideri il seguente specchio di coefficienti

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 2 & & & & & \\
1 & D^{(2)}_1 & 2 & & & & \\
1 & D^{(3)}_1 & D^{(3)}_2 & 2 & & & \\
1 & D^{(4)}_1 & D^{(4)}_2 & D^{(4)}_3 & 2 & & \\
1 & D^{(5)}_1 & D^{(5)}_2 & D^{(5)}_3 & D^{(5)}_4 & 2 & \\
1 & D^{(6)}_1 & D^{(6)}_2 & D^{(6)}_3 & D^{(5)}_4 & D^{(6)}_5 & 2 \\
\dots & & & & & &
\end{array}$$

Nella prima riga di questo quadro si trovano i coefficienti successivi dello sviluppo di σ_2, nella seconda riga quelli dello sviluppo di $\sigma_4, \dots$ in generale nella n^{esima} riga quelli di σ_{2n}. Nella prima colonna a sinistra i coefficienti di p^0 (che son sempre uguali a 1) nella seconda quelli di p, nella terza quei di $p^2, \dots$ nella n^{esima} quelli di p^n. A capo di ogni colonna, eccettuato la prima, si ha sempre il numero 2: anzi anche a capo della prima colonna si potrebbe mettere 2, valore di $\sigma_0 = \alpha^0 + \beta^0$. Si ottiene in tal modo coi coefficienti D un triangolo analogo al triangolo di Tartaglia: la (1) è una relazione tra gli elementi di una stessa linea orizzontale, mentre la (2) esprime il valore di un coefficiente per mezzo dei coefficienti delle linee e delle colonne precedenti.

3. Mi propongo inoltre di far vedere che fra gli elementi di tre linee e colonne successive passa la relazione lineare seguente

$$D^{(n)}_i = 2\, D^{(n-1)}_{i-1} + D^{(n-1)}_i - D^{(n-2)}_{i-2}, \quad (3)$$

dove si deve tener presente che $D^{(n)}_n = 2$, $D^{(n)}_0 = 1$, qualunque sia $n > 0$ e per $n < 2$ e $i < 2$ è $D = 0$ e infine $D^{(0)}_0 = 2$.

Dimostrerò ciò per via induttiva.

Intanto questa relazione è vera, qualunque sia n, per le prime colonne, cioè per $i = 2$. Infatti è per la (2)

$$D^{(n-1)}_2 = \binom{2n-2}{1} D^{(n-2)}_1 - \binom{2n-2}{2} D^{(n-3)}_0 ;$$

ma

$$D^{(n-2)}_1 = \binom{2n-4}{1}, \quad D^{(n-3)}_0 = D^{(n-2)}_0 = 1 \quad \text{e} \quad D^{(n-1)}_1 = \binom{2n-2}{1},$$

onde

$$D_2^{(n-1)}=\binom{2n-2}{1}\binom{2n-4}{1}-\binom{2n-2}{2}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}2D_1^{(n-1)}+D_2^{(n-1)}-D_0^{(n-2)}&=4(n-1)+4(n-1)(n-2)-(n-1)(2n-3)-1\\&=4n-5+(2n-5)(n-1)\\&=2n^2-3n\end{aligned}$$

e inoltre per la (2)

$$D_2^{(n)}=\binom{2n}{1}D_1^{(n-1)}-\binom{2n}{2}D_0^{(n-2)};$$

da cui

$$D_2^{(n)}=\binom{2n}{1}\binom{2n-2}{1}-\binom{2n}{2}=4n(n-1)-n(2n-1)=2n^2-3n$$

cioè

$$D_2^{(n)}=2D_1^{(n-1)}+D_2^{(n-1)}-D_0^{(n-2)}$$

ossia la (3) è vera per $i=2$.

Ciò posto, farò vedere che la relazione (3), essendo vera per il valore $i-1$, è vera anche per il valore i.

La (1), cambiando opportunamente gli indici, dà luogo alle quattro formole seguenti:

$$(1)^a\qquad D_i^{(n)}=\binom{2n-2i+2}{1}D_{i-1}^{(n)}-\binom{2n-2i+4}{2}D_{i-2}^{(n)}+\dots$$
$$\dots+(-1)^i\binom{2n-6}{i-3}D_3^{(n)}-(-1)^i\binom{2n-4}{i-2}D_2^{(n)}+(-1)^i\binom{2n-2}{i-1}D_1^{(n)}-(-1)^i\binom{2n}{i},$$

$$(1)^b\qquad D_{i-2}^{(n-2)}=\binom{2n-2i+2}{1}D_{i-3}^{(n-2)}-\binom{2n-2i+4}{2}D_{i-4}^{(n-2)}+\dots$$
$$\dots+(-1)^i\binom{2n-6}{i-3}D_1^{(n)}-(-1)^i\binom{2n-4}{i-2},$$

$$(1)^c\qquad D_{i-1}^{(n-1)}=\binom{2n-2i+2}{1}D_{i-2}^{(n-1)}-\binom{2n-2i+4}{2}D_{i-3}^{(n-1)}+\dots$$
$$\dots+(-1)^i\binom{2n-6}{i-3}D_2^{(n)}-(-1)^i\binom{2n-4}{i-2}D_1^{(n-1)}+(-1)^i\binom{2n-2}{i-1}$$

$$(1)^d\qquad D_i^{(n-1)}=\binom{2n-2i}{1}D_{i-1}^{(n-1)}-\binom{2n-2i+2}{2}D_{i-2}^{(n-1)}+\dots$$
$$\dots+(-1)^i\binom{2n-8}{i-3}D_3^{(n-1)}-(-1)^i\binom{2n-6}{i-2}D_2^{(n-1)}+$$
$$+(-1)^i\binom{2n-4}{i-1}D_1^{(n-1)}-(-1)^i\binom{2n-2}{i}.$$

Inoltre, tenendo presente la relazione seguente [1]

$$0=\left[\binom{2n-2i+2}{1}-\binom{2n-2i}{1}\right]D_{i-1}^{(n-1)}-\left[\binom{2n-2i+4}{2}-\binom{2n-2i+2}{2}\right]D_{i-2}^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^i\left[\binom{2n-2}{i-1}-\binom{2n-4}{i-1}\right]D_1^{(n)}-(-1)^i\left[\binom{2n}{i}-\binom{2n-2}{i}\right] \quad (4)$$

---

[1] Per dimostrare l'identità

$$0=\left[\binom{2n-2i+2}{1}-\binom{2n-2i}{1}\right]D_{i-1}^{(n-1)}-\left[\binom{2n-2i+4}{2}-\binom{2n-2i+2}{2}\right]D_{i-2}^{(n-1)}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^i\left[\binom{2n-2}{i-1}-\binom{2n-4}{i-1}\right]D_1^{(n)}-(-1)^i\left[\binom{2n}{i}-\binom{2n-2}{i}\right],$$

si osservi che è per la (1)

$$D_i^{(n-1)}=\binom{2n-2i}{1}D_{i-1}^{(n-1)}-\binom{2n-2i+2}{2}D_{i-2}^{(n-1)}+\ldots+(-1)^i\binom{2n-4}{i-1}D_1^{(n)}-(-1)^i\binom{2n-2}{i}$$

che è lo sviluppo, secondo gli elementi dell'ultima colonna, del determinante seguente

$$D_i^{(n-1)}=\begin{vmatrix}\binom{2n-2}{1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \binom{2n-2}{i}\\ 1 & \binom{2n-4}{1} & \ldots\ldots\ldots\ldots & \binom{2n-4}{i-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0\ldots\ldots0 & 1 & \binom{2n-2i+2}{1} & \binom{2n-2i+2}{2}\\ 0\ldots\ldots\ldots\ldots0 & & 1 & \binom{2n-2i}{1}\end{vmatrix}.$$

Chiamando X ciò che diventa questo determinante, quando agli elementi dell'ultima colonna si sostituiscono, a partire dall'ultimo, rispettivamente le differenze

$$\binom{2n-2i+2}{1}-\binom{2n-2i}{1},\ \binom{2n-2i+4}{2}-\binom{2n-2i+2}{2}\ldots\binom{2n-2}{i-1}-\binom{2n-4}{i-1},\ \binom{2n}{i}-\binom{2n-2}{i}$$

si ottiene il secondo membro dalla relazione (4).

Tenendo poi presente che è, come facilmente si prova in virtù di note relazioni tra i coefficienti binomiali,

$$\binom{m}{r}-\binom{m-2}{r}=\binom{m-1}{r-1}+\binom{m-2}{r-1}$$

e quindi

$$\binom{2n-2i+2}{1}-\binom{2n-2i}{1}=\binom{2n-2i+1}{0}+\binom{2n-2i}{0};\quad \binom{2n-2i+4}{2}-\binom{2n-2i+2}{2}=$$
$$=\binom{2n-2i+3}{1}+\binom{2n-2i+2}{1};\ldots\binom{2n-2}{i-1}-\binom{2n-4}{i-1}=\binom{2n-3}{i-2}+\binom{2n-4}{i-2};$$
$$\binom{2n}{i}-\binom{2n-2}{i}=\binom{2n-1}{i-1}+\binom{2n-2}{i-1},$$

si ottiene

$$X=\begin{vmatrix}\binom{2n-2}{1} & \ldots\ldots\ldots & \binom{2n-2}{i-1} & \binom{2n-1}{i-1}+\binom{2n-2}{i-1}\\ 1 & \binom{2n-4}{1}\ldots\ldots\ldots & & \binom{2n-3}{i-2}+\binom{2n-4}{i-2}\\ 0 & 1\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0\ldots1 & \binom{2n-2i+2}{1} & \binom{2n-2i+3}{1}+\binom{2n-2i+2}{1}\\ 0 & 0\ldots0 & 1 & \binom{2n-2i+1}{0}+\binom{2n-2i}{0}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\binom{2n-2}{1} & \ldots\ldots\ldots & \binom{2n-2}{i-1} & \binom{2n-1}{i-1}\\ 1 & \binom{2n-4}{1}\ldots & \binom{2n-4}{i-2} & \binom{2n-3}{i-2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & \ldots\ldots0\ \ 1 & \binom{2n-2i+2}{1} & \binom{2n-2i+3}{1}\\ 0 & \ldots\ldots\ldots1\ . & 1 & \binom{2n-2i+1}{0}\end{vmatrix}.$$

e sommando membro a membro le $(1)^c$, $(1)^d$ e (4), dopo avere moltiplicato ambo i membri della $(1)^c$ per 2, si ottiene:

$$\begin{aligned}2D_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)} = \binom{2n-2i+2}{1}\Big[2D_{i-2}^{(n-1)} + D_{i-1}^{(n-1)}\Big] - \\ - \binom{2n-2i+4}{2}\Big[2D_{i-3}^{(n-1)} + D_{i-2}^{(n-1)}\Big] + \ldots \\ \ldots - (-1)^i\binom{2n-4}{i-2}\Big[2D_1^{(n-1)} + D_2^{(n-1)}\Big] + \\ + (-1)^i\binom{2n-2}{i-1}\Big[2 + D_1^{(n-1)}\Big] - (-1)^i\Big[0 + \binom{2n}{i}\Big]. \qquad (5)\end{aligned}$$

E giacchè si suppone che la (3) sia vera da $1, 2, \ldots$ fino a $i-1$, si hanno le relazioni seguenti:

$$\begin{aligned}D_{i-1}^{(n)} &= 2D_{i-2}^{(n-1)} + D_{i-1}^{(n-1)} - D_{i-3}^{(n-2)}\\ D_{i-2}^{(n)} &= 2D_{i-3}^{(n-1)} + D_{i-2}^{(n-1)} - D_{i-4}^{(n-2)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_3^{(n)} &= 2D_2^{(n-1)} + D_3^{(n-1)} - D_1^{(n-2)}\\ D_2^{(n)} &= 2D_1^{(n-1)} + D_2^{(n-1)} - D_0^{(n-2)}\end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned}D_{i-1}^{(n)} + D_{i-3}^{(n-2)} &= 2D_{i-2}^{(n-1)} + D_{i-1}^{(n-1)}\\ D_{i-2}^{(n)} + D_{i-4}^{(n-2)} &= 2D_{i-3}^{(n-1)} + D_{i-2}^{(n-1)}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ D_3^{(n)} + D_1^{(n-2)} &= 2D_2^{(n-1)} + D_3^{(n-1)}\\ D_2^{(n)} + D_0^{(n-2)} &= 2D_1^{(n-1)} + D_2^{(n-1)}\\ D_1^{(n)} &= 2 + D_1^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Con ciò la (5) diventa

$$\begin{aligned}2D_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)} = \binom{2n-2i+2}{1}\Big[D_{i-1}^{(n)} + D_{i-3}^{(n-2)}\Big] - \\ - \binom{2n-2i+4}{2}\Big[D_{i-2}^{(n)} + D_{i-4}^{(n-2)}\Big] + \ldots \\ \ldots - (-1)^i\binom{2n-4}{i-2}\Big[D_2^{(n)} + D_0^{(n-2)}\Big] + \\ + (-1)^i\binom{2n-2}{i-1}. D_1^{(n)} - (-1)^i\binom{2n}{i}. \qquad (5)'\end{aligned}$$

Se poi si sommano membro a membro le $(1)^a$ e $(1)^b$, il secondo membro della nuova eguaglianza è lo stesso di quello della $(5)'$: si conclude quindi

$$D_i^{(n)} + D_{i-2}^{(n-2)} = 2D_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)},$$

cioè la (3), come volevasi provare.

Avuto riguardo alla relazione nota $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$, si vede che l'ultima colonna di questo determinante è uguale alla somma delle due precedenti, quindi si conclude $X = 0$, come si voleva dimostrare.

4. Dopo ciò è facile dimostrare che è $D_{n-1}^{(n)} = n^2$, qualunque sia n.

Infatti il teorema è vero, come si vede subito per $n = 1, = 2, = 3$. Dico che è vero per ogni n; si supponga pure vero per $n-2$ e per $n-1$, cioè si supponga

$$D_{n-2}^{(n-1)} = (n-1)^2 \quad \text{e} \quad D_{n-2}^{(n-2)} = (n-2)^2.$$

Allora la relazione (3) per $i = n-1$ dà

$$D_{n-1}^{(n)} = 2D_{n-2}^{(n-1)} + D_{n-1}^{(n-1)} - D_{n-3}^{(n-2)},$$

da cui, essendo $D_{n-1}^{(n-1)} = 2$,

$$D_{n-1}^{(n)} = 2(n-1)^2 + 2 - (n-2)^2 = n^2.$$

Ricordando che primitivamente i coefficienti $D_{n-1}^{(n)}$ erano messi sotto forma di determinante, facendo $i = 1$, si deduce

$$D_{n-1}^{(n)} = \begin{vmatrix} \binom{2n}{1} & \binom{2n}{2} & \dots & \binom{2n}{n-1} \\ 1 & \binom{2n-2}{1} & \dots & \binom{2n-2}{n-2} \\ 0 & 1 & \dots & \binom{2n-4}{n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 \dots\dots 0 & 1 & & \binom{4}{1} \end{vmatrix} = n^2,$$

relazione che sarebbe assai laborioso provare direttamente.

Ancora si noti che la (2) per $i = 1$, essendo

$$D_{n-1}^{(n)} = n^2,\ D_{n-2}^{(n-1)} = (n-1)^2,\ D_{n-3}^{(n-2)} = (n-2)^2, \dots,\ D_1^{(2)} = 4,$$

fornisce quest'altra relazione pure interessante

$$n^2 = \binom{2n}{1}(n-1)^2 - \binom{2n}{2}(n-2)^2 + \binom{2n}{3}(n-3)^2 - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-2}4 - (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}.$$

5. Ad illustrazione delle cose ora dette, ecco il triangolo dei coefficienti degli sviluppi di σ_{2n} per successivi valori di n, coefficienti costruiti in base alla relazione (3):

σ_0	2						
σ_2	1	2					
σ_4	1	4	2				
σ_6	1	6	9	2			
σ_8	1	8	20	16	2		
σ_{10}	1	10	35	50	25	2	
σ_{12}	1	12	54	112	105	36	2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Del resto, come si è visto e in modo analogo che pel triangolo di Tartaglia per ottenere i coefficienti dello sviluppo di σ_{2n}, non occorre conoscere i coefficienti degli sviluppi precedenti e ciò in base alla relazione (1) già trovata.

Così in particolare avremo

$$\sigma_{10} = s^{10} - 10p \,.\, s^8 + 35p^2 \,.\, s^6 - 50p^3 \,.\, s^4 + 26p^4 \,.\, s^2 - 2p^5$$
$$\sigma_{12} = s^{12} - 12p \,.\, s^{10} + 54p^2 \,.\, s^8 - 112p^3 \,.\, s^6 + 105p^4 \,.\, s^4 - 35p^5 \,.\, s^2 + 2p^6.$$

Parecchie proprietà si possono dedurre relative al triangolo dei coefficienti, e cioè che gli elementi di un lato sono tutti 2, quelli della prima linea parallela a questo lato tutti quadrati, quelli della seconda linea parallela allo stesso lato hanno per differenze successive 5, 14, 30, 55, ..., numeri che a lor volta hanno per differenze successive i quadrati 9, 16, 25, ..., come è facile dimostrarlo in generale. Inoltre i coefficienti delle potenze dispari di p sono sempre pari: infine fatto $\alpha = \beta = 1$ e quindi $\sigma_{2n} = 2$ e $p = 1$ ed $s = 2$ viene

$$2 = 2^{2n} - D_1^{(n)} \,.\, 2^{2n-2} + D_2^{(n)} \,.\, 2^{2n-4} - \ldots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)}\, 2^2 + (-1)^n\, 2.$$

***

6. Un procedimento del tutto simile si può tenere per calcolare la somma delle potenze simili dispari delle due quantità α e β.

Partendo dalle n equazioni lineari fra le n quantità $\sigma_3, \sigma_5, \ldots \sigma_{2n-1}$, equazioni che si ottengono dallo sviluppo delle potenze di un binomio e cioè

$$\sigma_{2n+1} + \binom{2n+1}{1} \sigma_{2n-1}\, p + \binom{2n+1}{2} \sigma_{2n-3}\, p^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{2n+1}{n-2} \sigma_5\, p^{n-2} + \binom{2n+1}{n-1} \sigma_3\, p^{n-1} = s^{2n-1} - \binom{2n+1}{n} sp^n$$
$$\sigma_{2n-1} + \binom{2n-1}{1} \sigma_{2n-3}\, p + \ldots$$
$$\ldots + \binom{2n-1}{n-3} \sigma_5\, p^{n-3} + \binom{2n-1}{n-2} \sigma_3\, p^{n-2} = s^{2n-1} - \binom{2n-1}{n-1} sp^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_7 + \binom{7}{1} \sigma_5\, p + \binom{7}{2} \sigma_3\, p^2 = s^7 - \binom{7}{3} sp^3$$
$$\sigma_5 + \binom{5}{1} \sigma_3\, p = s^5 - \binom{5}{2} sp^2$$
$$\sigma_3 = s^3 - \binom{3}{1} sp.$$

Essendo il determinante del sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{2n+1}{1}p & \binom{2n+1}{2}p^2 & \ldots & \binom{2n+1}{n-2}p^{n-2} & \binom{2n+1}{n-1}p^{n-1} \\ 0 & 1 & \binom{2n-1}{1}p & \ldots & \binom{2n-1}{n-3}p^{n-3} & \binom{2n-1}{n-2}p^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots 1 & & \binom{7}{1}p & \binom{7}{2}p^2 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & & 1 & \binom{5}{1}p \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

si deduce

$$\sigma_{2n+1} = \begin{vmatrix} s^{2n+1} - \binom{2n+1}{n}p^n s & \binom{2n+1}{1}p & \binom{2n+1}{2}p^2 \ldots\ldots & & \binom{2n+1}{n-1}p^{n-1} \\ s^{2n-1} - \binom{2n-1}{n-1}p^{n-1}s & 1 & \binom{2n-1}{1}p \ldots\ldots & & \binom{2n-1}{n-2}p^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s^7 - \binom{7}{3}p^3 s & 0 & 0 \ldots 1 & \binom{7}{1}p & \binom{7}{2}p^2 \\ s^5 - \binom{5}{2}p^2 s & 0 & 0 \ldots\ldots 1 & & \binom{5}{1}p \\ s^3 - \binom{3}{1}ps & 0 & 0 \ldots\ldots 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

onde

$$\sigma_{2n+1} = \begin{vmatrix} s^{2n-1} & \binom{2n+1}{1}p & \ldots & \binom{2n+1}{n-1}p^{n-1} \\ s^{2n-1} & 1 & & \binom{2n-1}{n-2}p^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s^7 & 0 \ldots\ldots\ldots & & \binom{7}{2}p^2 \\ s^5 & 0 \ldots 0 & 1 & \binom{5}{1}p \\ s^3 & 0 \ldots\ldots 0 & & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^n s \begin{vmatrix} \binom{2n+1}{1}p & \binom{2n+1}{2}p^2 & \ldots & \binom{2n+1}{n-1}p^{n-1} & \binom{2n+1}{n}p^n \\ 1 & \binom{2n-1}{1}p & \ldots & \binom{2n-1}{n-2}p^{n-2} & \binom{2n-1}{n-1}p^{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 \; \binom{7}{1}p & \binom{7}{2}p^2 & & \binom{7}{3}p^3 \\ 0 & 0 \ldots 0 \; 1 & \binom{5}{1}p & & \binom{5}{2}p^2 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 1 & & \binom{3}{1}p \end{vmatrix}.$$

Sviluppando secondo le potenze decrescenti di s si ottiene

$$\sigma_{2n+1} = s^{2n+1} - D_1^{(n)} p s^{2n-1} + D_2^{(n)} s^{2n-2} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)} p^{n-1} s^3 + (-1)^n D_n^{(n)} p^n s.$$

dove, come è facile provare in modo analogo di prima, è

$$D_i^{(n)} = \begin{vmatrix} \binom{2n+1}{1} & \binom{2n+1}{2} & \dots\dots\dots\dots & & \binom{2n+1}{i} \\ 1 & \binom{2n-1}{1} & \dots\dots\dots\dots & & \binom{2n-1}{i-1} \\ 0 & 1 & \dots\dots\dots\dots & & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots & & \binom{2(n-i)+5}{1} & \binom{2(n-i)+5}{2} \\ 0 & 0 \dots\dots & & 1 & \binom{2(n-i)+3}{1} \end{vmatrix}.$$

Sviluppando questo determinante secondo gli elementi dell'ultima colonna, si ottiene la relazione seguente:

$$D_i^{(n)} = \binom{2(n-i)+3}{1} D_{i-1}^{(n)} - \binom{2(n-i)+5}{2} D_{i-2}^{(n)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^i \binom{2n-1}{i-1} D_1^{(n)} - (-1)^i \binom{2n+1}{i}, \qquad (6)$$

mentre che sviluppandolo secondo gli elementi della prima colonna si ha

$$D_i^{(n)} = \binom{2n+1}{1} D_{i-1}^{(n-1)} - \binom{2n+1}{2} D_{i-2}^{(n-2)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^i \binom{2n+1}{i-1} D_1^{(n-i+1)} - (-1)^i \binom{2n+1}{i}. \qquad (7)$$

In particolare si avrebbe

$$D_n^{(n)} = \binom{2n+1}{1} D_{n-1}^{(n-1)} - \binom{2n+1}{2} D_{n-2}^{(n-2)} + \dots$$
$$\dots + (-1)^n \binom{2n+1}{n-1} D_1^{(1)} - (-1)^n \binom{2n+1}{n} \qquad (7)'$$

e

$$D_2^{(n)} = \binom{2n+1}{1} D_1^{(n-1)} - \binom{2n+1}{2} = \binom{2n+1}{1} \cdot \binom{2n-1}{1} - \binom{2n+1}{2},$$

giacchè

$$D_1^{(n-1)} = \binom{2n-1}{1}.$$

7. Un'altra relazione importante, che si dimostrerebbe in modo analogo della (3) per le potenze pari, è la seguente

$$D_i^{(n)} = 2D_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)} - D_{i-2}^{(n-2)}, \tag{8}$$

dove per $i = 2$ è $D_0^{(n-2)} = 1$ e per ogni $i > n$ il coefficiente corrispondente è nullo.

In particolare è

$$D_n^{(n)} = 2\, D_{n-1}^{(n-1)} + D_n^{(n-1)} - D_{n-2}^{(n-2)}$$

ove $D_n^{(n-1)} = 0$. Ammettendo dimostrato essere

$$D_{n-2}^{(n-2)} = 2\,(n-2) + 1 \qquad \text{e} \qquad D_{n-1}^{(n-1)} = 2\,(n-1) + 1$$

si ottiene

$$\begin{aligned} D_n^{(n)} &= 2\,[2\,(n-1)+1] - [2\,(n-2)+1] \\ &= 4n - 2 - 2n + 3 = 2n + 1. \end{aligned}$$

Ora poichè, come si vede subito per i primi valori di n è

$$D_n^{(n)} = 2n + 1, \quad \text{cioè} \quad D_1^{(1)} = 3, \quad D_2^{(2)} = 5,$$

ne viene che è in generale

$$D_n^{(n)} = 2n + 1.$$

Ossia, ricorrendo al determinante che dava il valore di $D_i^{(n)}$, si si può scrivere anche

$$D_n^{(n)} = \begin{vmatrix} \binom{2n+1}{1} & \binom{2n+1}{2} & \cdots\cdots & & \binom{2n+1}{n} \\ 1 & \binom{2n-1}{1} & \cdots\cdots & & \binom{2n-1}{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots\cdots\cdots & & \binom{2n-3}{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \;\ldots\; 1 & & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} \\ 0 & 0 \;\ldots\; 0 & & 1 & \binom{3}{1} \end{vmatrix} = 2n + 1.$$

od anche in virtù della (7)'

$$\begin{aligned} 2n + 1 = \binom{2n+1}{1}(2n+1) - \binom{2n+1}{2}(2n-3) + \binom{2n+1}{3}(2n-5) - \ldots \\ \ldots + (-1)^n \binom{2n+1}{n-1} 3 - (-1)^n \binom{2n+1}{n}. \end{aligned}$$

8. Un'altra relazione importante fra i coefficienti D è la seguente, che si dimostra subito col solito metodo di induzione, e cioè

$$D_{n-1}^{(n)} - D_{n-2}^{(n-1)} = n^2.$$

Si verifica facilmente essere vera la relazione per i primi valori di n, cioè

$$D_1^{(2)} - D_0^{(1)} = 5 - 1 = 2^2$$
$$D_2^{(3)} - D_1^{(2)} = 14 - 5 = 3^2;$$

Allora dalle due relazioni seguenti dedotte dalla (8), si ha

$$D_{n-1}^{(n)} = 2\,D_{n-2}^{(n-1)} + D_{n-1}^{(n-1)} - D_{n-3}^{(n-2)}$$
$$D_{n-2}^{(n-1)} = 2\,D_{n-3}^{(n-2)} + D_{n-2}^{(n-2)} - D_{n-4}^{(n-3)}.$$

Sottraendo membro a membro

$$D_{n-1}^{(n)} - D_{n-2}^{(n-1)} = 2\,[D_{n-2}^{(n-1)} - D_{n-3}^{(n-2)}] + \\ + [D_{n-1}^{(n-1)} - D_{n-2}^{(n-2)}] - [D_{n-3}^{(n-2)} - D_{n-4}^{(n-3)}]$$

e supposto

$$D_{n-2}^{(n-1)} - D_{n-3}^{(n-2)} = (n-1)^2, \quad D_{n-3}^{(n-2)} - D_{n-4}^{(n-3)} = (n-2)^2$$

ed essendo

$$D_{n-1}^{(n-1)} - D_{n-2}^{(n-2)} = 2\,(n-1) + 1 - [2\,(n-2) + 1] = 2$$

si ottiene infine

$$D_{n-1}^{(n)} - D_{n-2}^{(n-1)} = 2\,(n-1)^2 + 2 - (n-2)^2 = n^2$$

come volevasi provare.

9. Riassumendo anche coi coefficienti D si può formare un triangolo avente proprietà analoghe di quello del n. 5 per il caso delle potenze pari.

Ed ecco, in base alla relazione (8), costruito il triangolo

σ_1	1						
σ_3	1	3					
σ_5	1	5	5				
σ_7	1	7	14	7			
σ_9	1	9	27	30	9		
σ_{11}	1	11	44	77	55	11	
σ_{13}	1	13	65	156	182	91	13
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

dove nella $n+1^{\text{esima}}$ linea si trovano i successivi coefficienti dello sviluppo di σ_{2n-1} e nella $i+1^{\text{esima}}$ colonna i coefficienti di p^i.

Anche qui per conoscere gli elementi della $n+1^{\text{esima}}$ linea non occorre costruire il triangolo, ma basta servirsi della relazione (6).

Un'altra relazione da notarsi fra gli elementi di una stessa linea è la seguente

$$2 = 2^{2n+1} - D_1^{(n)} \cdot 2^{2n-1} + D_2^{(n)} \cdot 2^{2n-3} - \ldots \\ \ldots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)} \cdot 2^3 + (-1)^n \cdot D_n^{(n)} \cdot 2,$$

ossia

$$1 = 2^{2n} - D_1^{(n)} 2^{(n-1)} + D_2^{(n)} 2^{2(n-2)} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{n-1} D_{n-1}^{(n)} . 2^2 + (-1)^n D_n^{(n)},$$

la quale si ottiene facendo $\alpha = \beta = 1$ e quindi

$$\sigma_{2n+1} = 2, \qquad s = 2 \qquad \text{e} \qquad p = 1.$$

10. Parecchie altre relazioni interessanti si potrebbero dedurre fra i coefficienti D e D: in particolare le seguenti

$$\mathrm{D}_{i-1}^{(n-1)} + D_i^{(n-1)} = \mathrm{D}_i^{(n)}$$
$$D_{i-1}^{(n-1)} + \mathrm{D}_i^{(n)} \;= D_i^{(n)},$$

le quali facilmente si dimostrano per induzione servendosi delle relazioni (3) ed (8).

Queste ultime formole dimostrano che, se coi coefficienti D e D si forma un unico quadro in modo che nelle linee successive si trovino i coefficienti di $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots \sigma_i, \dots$ e nelle colonne successive a partire da quella a sinistra i coefficienti di $p^0, p, p^2, p^3, \dots,$ nella prima colonna si ha sempre 1, le successive colonne incominciano tutte con 2 e ciascuna contiene numeri, le cui differenze successive sono date dai numeri della precedente colonna, escluso il 2. Ecco allora il quadro in questione:

σ_1	1						
σ_2	1	2					
σ_3	1	3					
σ_4	1	4	2				
σ_5	1	5	5				
σ_6	1	6	9	2			
σ_7	1	7	14	7			
σ_8	1	8	20	16	2		
σ_9	1	9	27	30	9		
σ_{10}	1	10	35	50	25	2	
σ_{11}	1	11	44	77	55	11	
σ_{12}	1	12	54	112	105	36	2
. . . . ecc.							

Si ha quindi una legge assai semplice per estendere fino a quel numero che si vuole il triangolo dei coefficienti.

AMERIGO BOTTARI.

PROIEZIONE CENTRALE E OMOTETIA

Nel Metodo della Proiezione centrale in uso nella Geometria descrittiva un punto qualunque M si suole determinare dando la sua proiezione M′ ed una retta {T, I′} od un piano [t, i′] che lo contenga. Questo sistema presenta l'inconveniente che un medesimo punto è suscettibile di due serie doppiamente infinite di rappresentazioni; giacchè, in luogo dei punti T, I′ si possono scegliere come elementi determinatori di M altri due punti allineati con M′ e che stiano da questo a distanze il cui rapporto sia $\mu = \frac{M'T}{M'I'}$; e così, invece delle rette t, i' due rette fra loro parallele e che si trovino da M′ a distanze il cui rapporto sia $\frac{M't}{M'i'} = \frac{M'T}{M'I'} = \mu$. (1) Emerge da ciò che l'elemento essenziale che, insieme alla proiezione, completa la determinazione del punto, è il numero μ. Interpretando questo come " rapporto di un'omotetia " di centro M′, si vede che il punto M si può intendere definito e rappresentato col mezzo dell'omotetia di centro M′ e rapporto μ; per analogia con quanto si fa nel Metodo dei piani quotati, si può scrivere $M \equiv (M', \mu)$; con tale sistema di dati si può subito ottenere una delle $2.\infty^2$ rappresentazioni consuete del punto M.

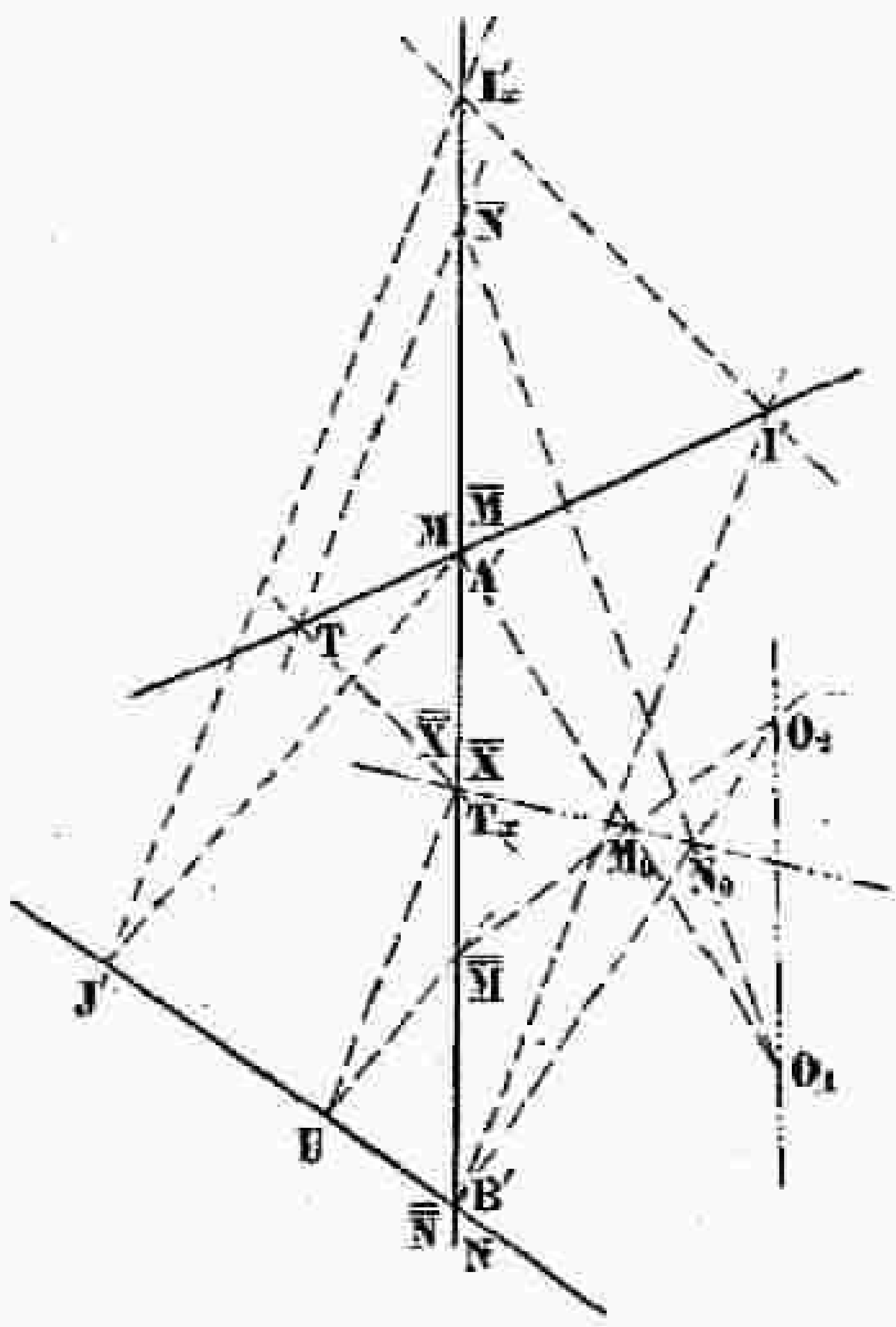
Applicando questa corrispondenza fra i punti dello spazio e le omotetie, ogni proposizione di geometria proiettiva si può trasformare in altra concernente le omotetie piane; per es., siccome " dati tre punti arbitrari è individuato un piano che tutti li contiene " così si vede che " date in un piano tre omotetie, esiste in generale una coppia determinata ed unica di rette (fra loro parallele) che si corrispondano in tutte ".

Le stesse considerazioni guidano a concepire nuove soluzioni per i problemi fondamentali di posizione della Geometria descrittiva. Come esempio ci occuperemo della *costruzione della retta determinata da due punti*, chè così si giunge ad un procedimento grafico il quale, se dal punto di vista *pratico* non può accampare diritti di preferenza sopra quelli consueti, dal punto di vista *dottrinale* ha il vantaggio di non presupporre la soluzione di altri problemi fondamentali di posizione, come accade per tutti gli altri metodi oggi usati.

I punti dati siano $A \equiv (A', TI')$, $B \equiv (B', UJ')$, ossia $A \equiv (A', \alpha)$, $B \equiv (B', \beta)$, ove $\alpha = \frac{A'T}{A'I'}$ e $\beta = \frac{B'U}{B'J'}$. La retta x cercata ha per ele-

(1) Dette m la quota del punto M e d la distanza, si ha notoriamente $\mu = \frac{m}{d}$.

menti descrittivi T_x, I'_x due punti della retta $x' = A'B'$ tali che si abbia $\frac{A'T_x}{A'I'_x} = \alpha$, $\frac{B'T_x}{B'I'_x} = \beta$. La ricerca di tali punti rientra evidentemente in quella delle coppie di elementi corrispondenti in due proiettività aventi la medesima sede; e siccome queste corrispondenze sono similitudini, così di dette coppie al finito ve n'è una sola, onde (come era a prevedersi) quel problema scende dal secondo al primo grado. Per costruire la coppia cercata s'immagini che un punto percorra la retta x'; per ogni posizione di esso cerchiamo i corrispondenti in quelle similitudini di centri A', B' e rapporti α, β; questi punti a lor volta descriveranno due punteggiate simili, il cui punto unito al finito



sarà uno dei cercati; l'altro sarà il corrispondente di una (e quindi nell'altra) di quelle similitudini.

Per ridurre al minimo le linee da tracciare, chiamiamo M il punto A': il punto $\overline{M}$ che gli corrisponde nella prima similitudine coincide con M stesso; invece il punto $\overline{\overline{M}}$ che gli corrisponde nella seconda si otterrà unendo M a J', conducendo da U la parallela alla congiungente e poi determinandone la intersezione con x'. Similmente chiamiamo N il punto B'; esso coincide col suo corrispondente $\overline{\overline{N}}$ nella seconda di quelle similitudini, mentre quello $\overline{N}$ che gli corrisponde nella prima nasce unendo N a I' e poi segnando la parallela a questa da T.

Si assumano ora due punti O_1 e O_2 appartenenti ad una parallela a x', come centri di due fasci di raggi prospettivi alle due punteggiate simili $\overline{M}, \overline{N}, \ldots$; $\overline{\overline{M}}, \overline{\overline{N}}, \ldots$ e se ne determini l'asse di prospettiva. Questo è la congiungente dei punti $M_0 = O_1\overline{M} . O_2\overline{\overline{M}}$ e $N_0 \equiv O_1\overline{N} . XO_2\overline{\overline{N}}$;

esso taglia la retta x' nel punto cercato T_x. Unendo T_x a T e conducendo da I' la parallela alla congiungente, questa taglierà x' nell'altro punto cercato I'_x. Notisi, per verifica, che le due rette $I'_x XJ'$ e $T_x U$ devono risultare fra loro parallele.

Giova osservare che le considerazioni esposte in principio di questa Nota si possono immantinente estendere a spazi lineari qualunque. In particolare si vede che ogni punto dello spazio lineare a quattro dimensioni si può rappresentare sopra una omotetia dello spazio ordinario (ossia mediante la sua proiezione centrale ed un numero). Ora siccome nello spazio a quattro dimensioni quattro punti indipendenti individuano un piano, così si conclude la seguente proposizione (analoga ad altra segnalata in principio): „Date nello spazio quattro omotetie, esiste in generale una coppia di piani (fra loro paralleli) che si corrispondano in tutte „.

Cerchi il lettore una dimostrazione diretta di questa proposizione e della analoga planimetrica.

GINO LORIA.

PROBLEMI [1]

(Continuazione — Vedi fascicolo VI, Anno XXVII)

28. Sia O il vertice ed M un punto qualunque di una parabola, C il centro di curvatura relativo ad M e M' il piede della terza normale condotta da G. Il circolo circoscritto al triangolo MOM' ha il suo centro su MC.

29. Calcolare l'area compresa fra la curva

$$x^2y + a(x^2 - y^2) = 0$$

ed il suo asintoto.

30. Sia F il fuoco di una parabola ed r una retta perpendicolare all'asse della medesima. Da un punto qualunque M di questa si conducano le tre normali alla parabola e siano ρ_1, ρ_2, ρ_3 i raggi di curvatura relativi ai piedi di queste normali. Si dimostrino le relazioni

$$\rho_1^{\frac{2}{3}} + \rho_2^{\frac{2}{3}} + \rho_3^{\frac{2}{3}} = \text{costante}$$

$$\rho_2^{\frac{2}{3}} \cdot \rho_3^{\frac{2}{3}} + \rho_3^{\frac{2}{3}} \cdot \rho_1^{\frac{2}{3}} + \rho_1^{\frac{2}{3}} \cdot \rho_2^{\frac{2}{3}} = \text{costante}$$

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \frac{MF^3}{8}.$$

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriteci dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni o generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

31. Si consideri una ipocicloide triangolare di cui A, B, C sono i punti di regresso. La tangente in A incontra la curva in A′, la tangente A′ incontra la curva in P e Q.

Dimostrare che le tangenti in P e Q sono perpendicolari.

32. Costruita l'ellisse che ha per fuochi i punti A, B e che passa per C, s'indicherà con d il suo semidiametro coniugato a quello che passa per C, con h l'altezza uscente da C e con R il raggio del circolo circoscritto al triangolo ABC.

Dimostrare la relazione

$$2Rh = d^2.$$

33. L'area compresa fra la curva

$$y^2 = \frac{(a-x)^3}{9(a+x)}$$

ed il suo asintoto è πa^2.

34. Essendo P il punto d'incontro delle tangenti ad una iperbole equilatera di centro O nei punti M, N, dimostrare che i triangoli OPM, OPN sono equivalenti.

35. Sia ABCD un parallelogrammo circoscritto ad una ellisse coi lati paralleli a due diametri coniugati, ed F, F′ i fuochi della ellisse. Dimostrare che i quattro triangoli FAB, FCD, F′AD, F′BC hanno lo stesso ortocentro, e che il luogo di questo ortocentro, quando il parallelogrammo si sposta è un'ellisse.

36. L'antipodaria di una parabola rispetto ad un punto P del suo asse è in generale una quintica che diventa una cubica:

1°, se P è il vertice della parabola;

2°, se P è il fuoco della parabola.

37. Se N è il punto d'incontro della normale in M ad una parabola con l'asse della parabola stessa, e MP, MQ sono le altre due normali in P e Q condotte per M, i punti M, N, P, Q ed il vertice della parabola sono conciclici.

38. Dimostrare che l'inviluppo della retta avente per equazione

$$bx\cos\omega - ay\,\mathrm{sen}\,\omega + \frac{ab\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\omega}{\mathrm{sen}(\varphi-\omega)} = 0,$$

nella quale il parametro ω è variabile, è la parabola

$$\sqrt{\frac{x\cos\varphi}{a}} - \sqrt{\frac{y\,\mathrm{sen}\,\varphi}{b}} + 1 = 0.$$

39. Sia AB una corda di una parabola di fuoco F, P il polo della corda rispetto alla parabola. Si ha $FP^2 = FA \cdot FB$.

Dedurne che se un triangolo è circoscritto alla parabola, il prodotto delle distanze dal fuoco dei tre vertici di esso è eguale al prodotto dei raggi vettori focali dei punti di contatto.

40. Si consideri un'ellisse di cui O è il centro, A, A′ gli estremi dell'asse maggiore. F, F′ i fuochi. La tangente e la normale in un punto M dell'ellisse incontrino l'asse maggiore in T ed N; infine sia P la proiezione M sull'asse maggiore.

Dimostrare che

$$AP \,.\, A'T + FN \,.\, F'T = A'P \,.\, AT + F'N \,.\, FT.$$

41. L'inviluppo della curva rappresentato in coordinate polari dell'equazione

$$2\rho \,.\, \cos\lambda \,.\, \cos(\omega+\lambda) + a \,.\, \text{sen}^2(\omega+\lambda) = 0,$$

al variare di λ è una parabola.

42. Si consideri un circolo c di centro O e raggio R e la tangente in un suo punto A. Da un punto P variabile su questa tangente si conduca la seconda tangente c e sia M il punto di contatto.

Dimostrare che:

1°, il centro del circolo circoscritto al triangolo AMP è una retta;

2°, il luogo dell'ortocentro del triangolo AMP è il circolo di centro A e raggio $OA = R$;

3°, il luogo del baricentro del triangolo AMP è una cubica unicursale; l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto è

$$\frac{\pi R^2}{3};$$

4°, il luogo del centro del circolo dei nove punti del triangolo AMP è una cubica unicursale; l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto è:

$$\frac{5\pi R^2}{8};$$

5°, il luogo dei centri dei circoli inscritti e circoscritti al triangolo AMP si compone del circolo c e di una quartica;

6°, il luogo dell'ortocentro del triangolo OAM è una strofoide retta, di cui il vertice è in A e il punto doppio in O;

7°, il luogo del baricentro del triangolo OAM è un circolo;

8°, il luogo del centro del circolo dei nove punti del triangolo OAM è una cubica unicursale; l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto è:

$$\frac{3\pi R^2}{128};$$

9°, il luogo dei centri di similitudine del circolo c e del circolo AMP è una iperbole di cui gli asintoti fanno un angolo di 60°.

43. Se MNPQ è un parallelogrammo circoscritto ad un'ellisse coi lati paralleli a due diametri coaiugati e K è un punto qualunque:

1°. Se il parallelogrammo MNPQ varia e K resta fissa, si ha

$$\overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KP}^2 + \overline{KQ}^2 = \text{costante}.$$

2°. Se il punto K varia e il parallelogrammo MNPQ resta fisso, si ha:

$$\overline{KM}^2 + \overline{KN}^2 + \overline{KP}^2 + \overline{KQ}^2 - \overline{4KO}^2 = \text{costante}.$$

44. Sieno O il centro, A un vertice, MM′ un diametro variabile di una ellisse.

Dimostrare che

$$\operatorname{tg} \widehat{\mathrm{MAO}} \times \operatorname{tg} \widehat{\mathrm{M'AO}} = \text{costante}.$$

45. Essendo P la proiezione di un punto M di un'ellisse sull'asse maggiore, si considerino i tre circoli seguenti:

1°, di centro M e raggio MP;

2°, di diametro MP;

3°, di centro P e raggio PM.

Trovare i luoghi dei punti di contatto delle tangenti condotte dal centro O dell'ellisse ai suddetti circoli, e le aree delle curve ottenute.

(1°. Se $(a \cos\varphi,\ b \operatorname{sen}\varphi)$ sono le coordinate di M, per le coordinate del punto di contatto T della seconda tangente condotta da O al circolo di centro M e raggio MP si ha:

$$x = \frac{a \cos\varphi\,(a^2\cos^2\varphi - b^2\operatorname{sen}^2\varphi)}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}, \quad y = \frac{2a^2b \operatorname{sen}\varphi \cos^2\varphi}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

e per equazione

$$(x^2+y^2)^2\,[4a^2b^2x^2 + (a^2+b^2)\,y^2] - 2a_s b^2\,(x^2+y^2)\,[2a^2x^2 + \\ + (a^2+b^2)\,y^2] + a^4b^4y^2 = 0.$$

Questa curva ha due punti doppi

$$x = 0, \qquad y = +\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

la sua area è

$$u_1 = \frac{2\pi\,a^2b}{a+b}.$$

2°. Si hanno i risultati relativi al circolo di diametro MP, cambiando nelle formule precedenti b in $\frac{b}{2}$. Si trova

$$u_2 = \frac{2\pi\,a^2b}{2a+b}.$$

3°. Il luogo richiesto è la quartica

$$(x^2+y^2)\,[b^2x^2 + (a^2+b^2)\,y^2] = a^2b^2x^2,$$

la cui area è

$$u_3 = \frac{\pi a^2\,(\sqrt{a^2+b^2} - a)}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Nel caso in cui l'ellisse è un circolo $(a = b = \mathrm{R})$ le aree delle tre curve precedenti sono

$$u_1 = \pi\mathrm{R}^2, \qquad u_2 = \frac{2}{3}\pi\mathrm{R}^2, \qquad u_3 = \frac{\pi\mathrm{R}^2}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\Big).$$

(Continua).

E.-N. BARISIEN.

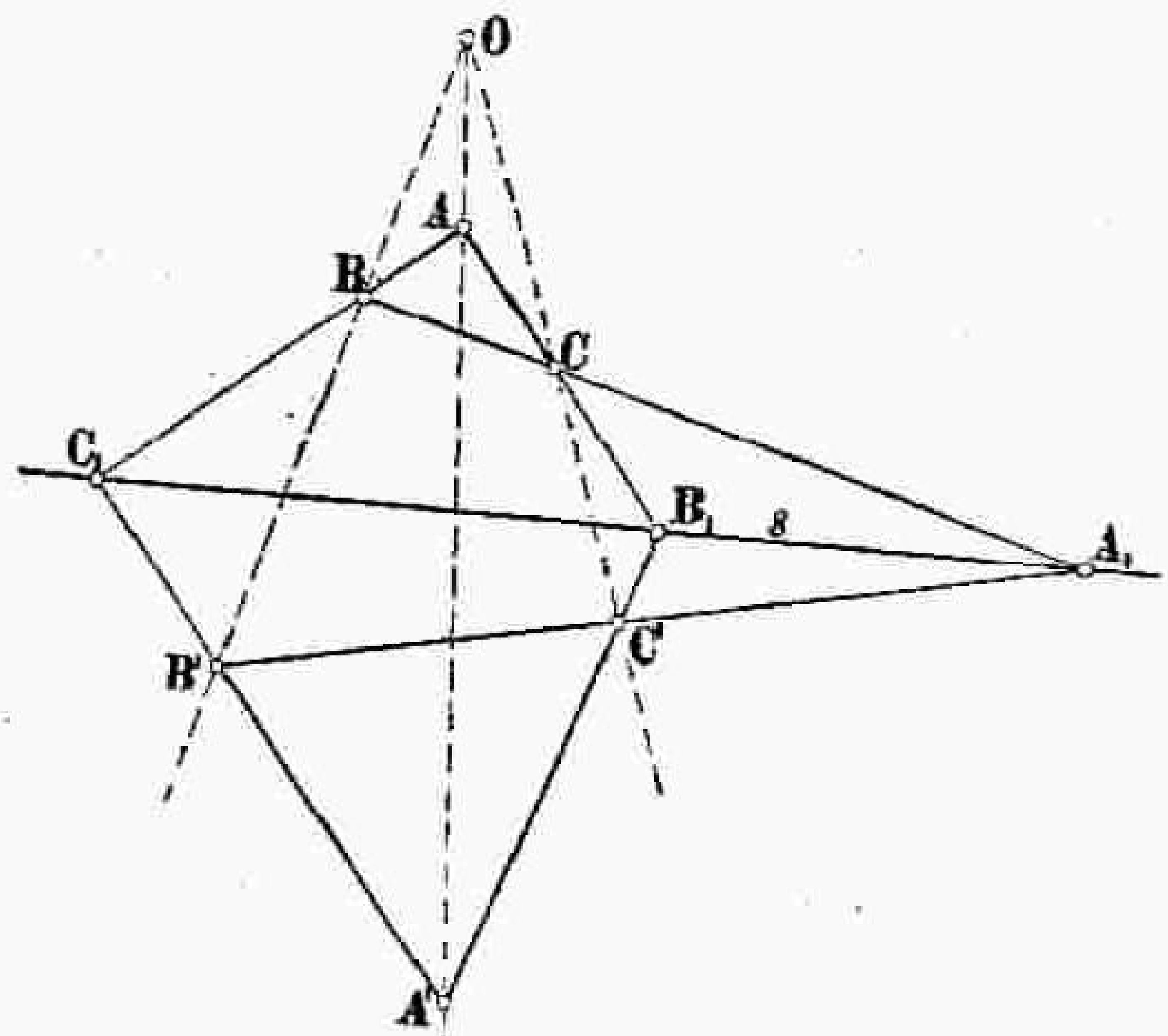
PICCOLE NOTE

Dal teorema di Desargues.

1. Può accadere che gli elementi di una figura abbiano nella figura stessa ufficio e funzioni scambievoli; valgano gli esempi seguenti:

Mentre in un punto H concorrono le altezze di un triangolo ABC, anche in ciascuno dei vertici A, B, C concorrono rispettivamente le altezze dei triangoli HBC, HAC, HAB; vale a dire che 3 qualunque dei 4 punti considerati sono vertici di un triangolo, di cui il quarto è l'ortocentro.

Mentre una trasversale taglia i lati AB, AC, BC di un triangolo rispettivamente nei punti P, Q, R, in modo che il prodotto di tre segmenti non consecu-



ti AP, BR, CQ sia uguale al prodotto degli altri tre BP, CR, AQ, anche ciascuno dei lati AB, AC, BC taglia rispettivamente i lati dei triangoli CQR, BPR, PQ in modo da determinare analoghe relazioni; vale a dire che ciascuna delle rette considerate, fungendo da trasversale rispetto al triangolo delle altre 3, glia i lati di questo nel modo anzidetto.

2. In tale ordine di idee, prendiamo a considerare la figura corrispondente teorema fondamentale di Desargues:

Se due triangoli sono prospettivi, le intersezioni dei lati corrispondenti sono in a retta, e viceversa.

Siano ABC, A'B'C' due triangoli prospettivi, sia O il centro in cui concorrono ggi AA', BB', CC' e sia s l'asse su cui concorrono rispettivamente in C_1, B_1, A_1 coppie di lati AB, A'B'; AC, A'C'; BC, B'C'.

Intanto, con analogia alle deduzioni di Steiner rispetto al numero degli esa- i di Pascal determinati da 6 punti di una conica, si può osservare che, insieme ai triangoli prospettivi considerati, sono tali altre 3 coppie di triangoli non tracciati nella figura, e che si ottengono scambiando fra loro opportunamente i vertici corrispondenti. Indicando con la sovrapposizione delle lettere la corrispondenza dei vertici, i triangoli prospettivi sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} A\,B'C' \\ A'B\,C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A'B\,C' \\ A\,B'C \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A'B'C \\ A\,B\,C' \end{pmatrix}.$$

Indipendentemente da ciò, prendendo in considerazione i soli triangoli primitivi, notiamo che il teorema di Desargues contempla 10 punti in ciascuno dei quali concorrono 3 di 10 rette passanti ciascuna per 3 dei 10 punti. Ne segue che ciascuno dei 10 punti può essere considerato come il centro in cui concorrono i 3 raggi determinati dalle coppie dei vertici corrispondenti di due triangoli, dei quali i lati corrispondenti s'incontrano sulla decima retta. Dalla semplice ispezione della figura si rileva che le 9 coppie derivate di triangoli prospettivi sono le seguenti:

Centri	Triangoli	Assi	Centri	Triangoli	Assi	Centri	Triangoli	Assi
A	$\begin{pmatrix} B\,C\,O \\ C_1B_1A' \end{pmatrix}$	$A_1B'C'$	A'	$\begin{pmatrix} AC_1B_1 \\ OB'C' \end{pmatrix}$	BCA_1	A_1	$\begin{pmatrix} B'BC_1 \\ C'CB_1 \end{pmatrix}$	$OA'A$
B	$\begin{pmatrix} B'C_1A_1 \\ O\,A\,C \end{pmatrix}$	$A'C'B_1$	B'	$\begin{pmatrix} A'C'O \\ C_1A_1B \end{pmatrix}$	B_1AC	B_1	$\begin{pmatrix} C'CA_1 \\ A'AC_1 \end{pmatrix}$	$OB'B$
C	$\begin{pmatrix} C'B_1A_1 \\ O\,A\,B \end{pmatrix}$	$A'B'C_1$	C'	$\begin{pmatrix} A'B'O \\ B_1A_1C \end{pmatrix}$	C_1AB	C_1	$\begin{pmatrix} A'B_1A \\ B'A_1B \end{pmatrix}$	$C'OC$

Si ha quindi:

Nel piano e nello spazio la prospettività di una coppia di triangoli trae seco la prospettività di altre 9 coppie di triangoli aventi i vertici, i lati, i centri, gli assi, i punti di concorso dei lati corrispondenti, ed i raggi determinati dai vertici corrispondenti nei 10 punti e sulle 10 rette individuate dalla prima coppia.

3. Sempre a proposito del teorema di Desargues, considerato nel piano (omologia piana), è degno di nota che 4 dei 10 punti, ad esempio B, C, B', C', determinano un quadrilatero semplice, convesso o concavo, avente i vertici sui 4 lati di un quadrilatero $AB_1A'C_1$, convesso o concavo, e mentre due lati opposti del primo s'incontrano in un punto A_1 sopra una diagonale del secondo, gli altri due lati del primo s'incontrano in un punto O sull'altra diagonale del secondo.

Si ha quindi:

Nel piano, posto che un quadrilatero abbia i vertici sui quattro lati di un secondo quadrilatero, se due lati opposti del primo s'incontrano sopra una diagonale del secondo, gli altri due lati del primo s'incontrano sull'altra diagonale del secondo.

È quasi superfluo osservare che non una ma 10 coppie di tali quadrilateri sono tracciate nella figura corrispondente al teorema.

Se invece si considera il teorema di Desargues con riferimento a due triangoli prospettivi non coplanari, 4 dei 10 punti, ad esempio B, C, B', C', determinano un quadrilatero avente i vertici rispettivamente su quattro spigoli di un tetraedro $AB_1A'C_1$, e mentre due lati opposti del primo s'incontrano in un punto A_1 sopra un quinto spigolo del secondo, gli altri due lati del primo s'incontrano in un punto O sul sesto spigolo del secondo.

Si ha quindi:

Posto che un quadrilatero abbia i vertici su quattro spigoli di un tetraedro, se due lati opposti del primo s'incontrano sopra un quinto spigolo del secondo, gli altri due lati del primo s'incontrano sul sesto spigolo del secondo.

DIEGO FELLINI.

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 797

797. *Il prodotto dei cubi delle distanze di un punto di un'ellisse dai fuochi lella medesima è in un rapporto costante col prodotto dei quattro raggi di curvaura corrispondenti ai piedi delle normali condotte da quel punto.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. R. Gatti, R. Ginnasio di Gioia del Colle.

È facile vedere che il raggio ρ_1 di curvatura, nel punto x_1, y_1 dell'elsse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, si esprime con la formola:

$$\rho_1=\frac{(a^2-e^2x'^2)^{\frac{3}{2}}}{ab},$$

che quindi, il prodotto dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, relativi a quattro punti della rva, le cui ascisse sono rispettivamente x_1, x_2, x_3, x_4, è dato da

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=\frac{(a^8-a^6e^2\,\mathrm{S}_2+a^4e^4\,\mathrm{S}_{2,2}-a^2e^6\,\mathrm{S}_{2,2,2}+e^8\,\mathrm{S}_{2,2,2,2})^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

ve

$$\mathrm{S}_2=\Sigma x_1^2,\quad \mathrm{S}_{2,2}=\Sigma' x_i^2x_j^2,\quad \mathrm{S}_{2,2,2}=\Sigma x_i^2x_j^2x_r^2,\quad \mathrm{S}_{2,2,2,2}=x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2.$$

Indichiamo ora con x, y le coordinate del punto d'incidenza di una normale, ssante per un altro punto x', y'.

Avremo così:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$c^2xy=a^2yx'-b^2xy',$$

le quali si trae, eliminando y:

$$c^4x^4-2a^2c^2x'x^3+a^2(a^2x'^2+b^2y'^2-c^4)\,x^2+2a^4c^2x'x-a^6x'^2=0.$$

Se quindi x_1, x_2, x_3, x_4 sono appunto le radici di quest'equazione, del quarto do in x, avremo:

$$\Sigma x_1=2\,\frac{a^2}{c^2}\,x',\qquad \Sigma x_ix_j=\frac{a^2}{c^4}\,(a^2x'^2+b^2y'^2-c^4)$$

$$\Sigma x_ix_jx_r=-2\,\frac{a^4}{c^2}\,x',\qquad x_1x_2x_3x_4=-\frac{a^6}{c^4}\,x'^2,$$

dalle quali, con facili calcoli, si ricavano le altre:

$$S_2 = \frac{2a^2}{c^4}(a^2x'^2 - b^2y'^2 + c^4), \qquad S_{2,2} = \frac{a^4}{c^4}\left(\frac{(a^2x'^2 + b^2y'^2 - c^4)^2}{c^4} + 6a^2x'^2\right),$$

$$S_{2,2,2} = \frac{2a^8x'^2}{c^8}(a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^4), \qquad S_{2,2,2,2} = \frac{a^{12}}{c^8}x'^4.$$

Utilizzando queste relazioni ed osservando che, se il punto $(x'y')$ appartiene all'ellisse, $b^2x'^2 + a^2y'^2 = a^2b^2$, avremo:

$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4 = \frac{a^2b^2}{c^6}(a + ex')^2(a - ex')^2,$$

formola che esprime la proprietà enunciata.

Altra risoluzione del prof. G. Usai, R. Scuola Normale di Cremona.

QUISTIONI PROPOSTE

801. Da un punto M si conducano le normali ad una parabola nei punti N_1, N_2, N_3. Se L_1, L_2, L_3 sono i punti d'incontro di esse con l'asse,

1° qualunque sia M e qualunque sia la parabola, posto

$$\frac{MN_1}{L_1N_1} = \mu_1, \quad \frac{MN_2}{L_2N_2} = \mu_2, \quad \frac{MN_3}{L_3N_3} = \mu_3,$$

si ha

$$2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) = \text{costante} = 3;$$

2° se il punto M si sposta sopra una parallela all'asse, si ha

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \text{costante}, \quad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = \text{costante};$$

3° il luogo dei punti M tali che sia $\mu_1\mu_2\mu_3 = \text{costante}$ è una parabola.

E.-N. Barisien.

802. Chiamo espressione probabile di una funzione $f(x)$ relativamente ad un dato triangolo di lati a, b, c la E_f che misura la probabilità di chiudere un altro triangolo con i valori $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$ essendo p, q, r le perpendicolari condotte sui lati del triangolo dato da un punto preso a caso nel suo interno.

Il Lemoine ha studiato il caso di $f(x)=x$ ed ha trovato

$$E_f = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Io ho esaminato il caso di $f(x)=x+k$ essendo k una costante arbitraria positiva o negativa nel *Giornale di Battaglini*, anno 1894, pag. 358.

Ricercare la E_f per $f(x)=x^2$.

F. VERDE.

803. Posto:

$$\varphi_i = a_i x + b_i y + c_i \qquad (i=1,2,3,4)$$

si indichi con Δ_i il minore complementare dell'elemento e_i nel determinante

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Si dimostri che le tre diagonali del quadrilatero che ha per lati le rette di equazioni:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = 0;$$

hanno per equazioni:

$$\Delta_1\varphi_1 + \Delta_2\varphi_2 = 0, \quad \Delta_1\varphi_1 + \Delta_3\varphi_3 = 0, \quad \Delta_1\varphi_1 + \Delta_4\varphi_4 = 0.$$

ADRIANO GANDINI.

BIBLIOGRAFIA

Annuaire pour l'an 1913, publié par le Bureau des Longitudes. Paris, Gauthier-Villars, 1912.

È stato pubblicato, secondo il consueto, questo annuario, così denso di notizie, che conta ormai più di un secolo, essendo il primo volume pubblicato nel 1796. Secondo le disposizioni inaugurate nel 1904, contiene oltre i soliti dati astronomici, dei quadri dettagliati relativi alla geografia, alla statistica, alla metrologia, alle monete e alla meteorologia; ma non contiene i dati fisici e chimici che sono riserbati al successivo volume.

Esso contiene anche due interessanti articoli; nel primo di essi il sig. Bigourdan dà un riassunto delle osservazioni della importante eclisse di sole del 17 aprile 1912 fatte in tutti i paesi ove essa fu visibile; il secondo, del comandante Ferrié, si riferisce ad un argomento di grande attualità, l'applicazione della telegrafia senza fili all'invio dell'ora, sul quale dà le notizie più esatte e precise.

Il volume si chiude coi discorsi pronunziati in occasione dei funerali dei due membri del Bureau des Longitudes morti durante il corrente anno, l'astronomo

Radau e l'illustre Poincaré; ed è malinconico vedere i discorsi pronunziati in onore di quest'ultimo il 19 Luglio 1912, che seguono immediatamente quello pronunziato dallo stesso Poincaré sul feretro del Radau il 29 Decembre 1911 in nome del Consiglio dell'Osservatorio di Parigi.

K.

Dott. M. Del Giudice. — *Lezioni di aritmetica razionale e algebra elementare*, ad uso degli Istituti Tecnici e dei Licei. — Vol. III, Roma-Milano, Tip. Elzeviriana, Francesco Marcolli e C., 1912. — L. 3,50.

Questa terza parte del corso di matematica elementare del prof. Del Giudice che vede ora la luce, è ispirata ai medesimi criteri che l'Autore seguì nelle parti precedenti, e ne è la naturale e logica continuazione. Nella sua graduale trattazione comprende i seguenti 5 capitoli:

I. Numeri irrazionali. — II. Proporzioni. Rappresentazione di forme geometriche sul campo dei numeri. Calcolo formale delle radici aritmetiche dei numeri positivi. Riduzione di questo a calcolo delle potenze. — III. Limiti. Continuità e discontinuità delle funzioni. Frazioni decimali periodiche. — IV. Progressioni. Studio della funzione esponenziale. Logaritmi. Approssimazioni. Radici. — V. Potenza di un binomio. Numeri complessi. Equazioni di grado superiore ad 1.

Non v'è alcun dubbio che la trattazione dei numeri irrazionali con metodo elementare presenta delle serie difficoltà, e si corre il rischio o di divagare soverchiamente in considerazioni astratte e qualche volta astruse, ovvero di scendere (per amore di brevità e di mala intesa facilitazione) un po' troppo vicino alla pratica e all'empirismo. L'Autore ha saputo contenersi egualmente lontano dai due eccessi, ispirando la sua trattazione a un senso di giusta sobrietà. Naturalmente le ragioni dell'allargamento del campo dei numeri razionali e della necessaria introduzione di altri enti analitici sono sempre le medesime che incontra ogni trattatista che imprende uno studio sull'argomento. Si tratta sempre della necessità di avere una corrispondenza biunivoca fra gli enti numerici e *tutti* i segmenti di una retta che hanno l'origine comune, rendendo così la serie numerica assolutamente continua come è la serie dei segmenti suddetti. Fatto questo, il problema puramente formale dell'estrazione della radice aritmetica ennesima da un numero positiva è immediatamente risolto. Il merito principale dell'Autore sta nell'aver fatta questa introduzione dei nuovi enti aritmetici ricorrendo al minimo numero possibile di principî fondamentali, e nell'aver raggiunto nell'esposizione teorica e nello sviluppo delle varie operazioni sui nuovi numeri quella chiarezza e quel rigore che gli sono abituali.

Il capitolo II comprende la trattazione di tre argomenti del massimo interesse: Le proporzioni numeriche e i problemi fondamentali che vi si annettono. La rappresentazione delle forme geometriche fondamentali e dei loro elementi sul campo dei numeri, che è in sostanza l'ordinaria rappresentazione cartesiana nel piano e nello spazio, ridotta naturalmente alle cose più importanti e semplici. Il calcolo e le trasformazioni dei radicali, a cui fa seguito la teoria e il calcolo delle potenze ad esponente frazionario.

Un altro argomento che suol presentare qualche difficoltà agli scolari, molti dei quali non riescono ad afferrarne il vero e proprio significato, è la teoria dei limiti che pure costituiscono uno dei capisaldi della scienza.

L'Autore con molta chiarezza e precisione riesce a dare il concetto di limite di una successione di numeri, dopo di che espone e dimostra una serie di teoremi che permettono di calcolare il limite di varie funzioni composte (somme, differenze, prodotti, quozienti, potenze) conoscendo i limiti delle funzioni componenti. Fa seguito a questo studio una esposizione sommaria e succosa della continuità di una funzione di una variabile, a destra e a sinistra di un punto e delle discontinuità di prima e seconda specie.

Un'interessante applicazione della teoria dei limiti è la ricerca delle generatrici delle frazioni decimali periodiche, che l'Autore svolge nel modo più generale, supponendo che la base di numerazione sia un qualunque numero a delle serie naturale.

Il capitolo IV comincia collo studio delle progressioni aritmetiche, a cui fa seguito l'altro delle progressioni geometriche; in entrambi questi studi sono esposte le principali proprietà delle due serie. Vien dopo una trattazione oltremodo interessante della funzione esponenziale a^x, dove a è un numero positivo diverso da *zero* e da *uno*. L'Autore suppone dapprima che x sia razionale, e in seguito dà la definizione della funzione a^x per valori irrazionali di x, dimostrando infine che essa è continua in tutto il campo dei numeri reali.

Considera in seguito la funzione *inversa* di una data funzione e, come caso particolare, prende a studiare la funzione $\log_a x$, della quale espone le proprietà caratteristiche.

Parla quindi delle approssimazioni numeriche nel calcolo logaritmico, dei logaritmi a base 10, delle tavole di logaritmi, e di tutte le questioni pratiche che vi si annettono.

Il capitolo termina coll'esposizione d'importanti applicazioni all'interesse (semplice e composto), allo sconto, alla capitalizzazione, all'ammortamento, alla rendita e alle approssimazioni di radici di numeri positivi.

Il quinto ed ultimo capitolo del Trattato comprende tre parti del massimo interesse: La prima consiste nella dimostrazione della formola che dà lo sviluppo della potenza n^{ma} del binomio, dimostrazione che è fatta in modo inappuntabile. La seconda parte comprende uno studio breve ma pur completo (almeno per quanto può occorrere allo scolaro che sta per imprendere lo studio delle equazioni di secondo grado) dei numeri complessi.

L'idea dell'Autore di premettere alla trattazione delle equazioni quadratiche un breve studio dei numeri complessi, è stata ottima. Prima di tutto l'introduzione dei numeri immaginari non offre maggiore difficoltà dell'introduzione dei numeri irrazionali, e poi c'è l'altra osservazione non priva d'interesse che lo scolaro che apprende come l'equazione di secondo grado a un'incognita abbia sempre *in tutti i casi* due radici, non dovrà mai più in seguito modificare tale enunciato, il quale resterà anzi confermato e generalizzato per il caso delle equazioni algebriche di grado n.

In seguito a questo l'Autore parla estesamente dell'equazione di 2° grado, delle equazioni riducibili a quelle di 2° grado, delle equazioni irrazionali e dei sistemi di equazioni non tutte lineari. Oltre dare le formole risolutive dell'equazione quadratica, espone le proprietà delle radici e (nel caso che queste siano reali) le relazioni fra i loro segni e quelli dei coefficienti dei termini dell'equazione.

Da quest'esposizione un po' minuta risulta chiaro quanto sia meritevole di lode la nuova opera del prof. Del Giudice.

Il terzo volume è una felice e bella continuazione dei due precedenti, e non v'ha alcun dubbio che il quarto volume ora in corso di pubblicazione costituirà il degno coronamento dell'opera bene pensata dall'Autore e ottimamente messa insieme.

G. Pirondini.

G. Frattini. — *Lezioni di Algebra, Geometria e Trigonometria* sull'intero programma del secondo biennio degli Istituti tecnici (sezione fisico-matematica). — Volume I per la terza classe, 2ª edizione, 1912. Volume II per la quarta classe, 1912. — G. B. Paravia e C.i.

Vol. I. — Cap. I. *Numeri irrazionali.* — Non classi contigue, non sezioni, non limiti, non segmenti numerici; l'A. affronta lo " scandalo dell'Aritmetica „ per la via più spiccia e più comoda, considera cioè gli irrazionali come simboli che rappresentino le serie dei loro valori approssimati, non altrimenti di quanto si fa nel calcolo numerico. Ecco come. Data una serie decimale periodica, per es. 0,4646..., costruisce un segmento $\frac{46}{99}$ del segmento unitario, e osserva che contiene 4 decimi in tutto, 46 centesimi, 464 millesimi ecc. Questo segmento è unico. Data una decimale non periodica, per es. 3,14159 ..., ammette che a questa corrisponda pure un segmento (postulato del Dedekind) che si dimostra esser unico. Stabilito così che ad ogni numero (chiamando numero ogni decimale finita o indefinita, periodica o no) corrisponde un segmento rettilineo unico e determinato, è facile riconoscere che ad ogni segmento corrisponde un numero: basta misurare il segmento. Ciò posto detti uguali due numeri che corrispondano a segmenti uguali, e di due numeri disuguali detto maggiore quello che corrisponde a segmento maggiore, l'intera teoria viene riassunta in nove pagine con una semplicità ammirevole. La somma di due numeri è il numero corrispondente al segmento somma dei segmenti corrispondenti agli addendi, e le proprietà commutativa e associativa di essa derivano dalle stesse proprietà della somma di segmenti. Il prodotto di due numeri è il numero corrispondente alla base di un rettangolo di altezza 1 equivalente al rettangolo costruito con i segmenti corrispondenti ai fattori. Le proprietà commutativa e distributiva risultano con semplici considerazioni geometriche, l'associativa segue dalla commutativa. Geometricamente vengono pure definite le operazioni inverse.

Qualche pagina di applicazioni, " breve ritorno su argomenti capitali del programma del 1° biennio „, serve a dimostrare l'esistenza e l'unicità della radice positiva di un numero, a definire le potenze con esponente irrazionale, a stabilire l'esistenza del logaritmo.

Arrivati a questo punto potremmo ben dire: " ab uno disce omnes „ e invitare il lettore a leggere il libro: crediamo che difficilmente potrebbe trovarne altri di più piacevole lettura fra i libri di matematica. Non sarà male tuttavia, per dare un'idea generale dell'opera, dare una scorsa anche agli altri capitoli.

Il cap. II è dedicato alle approssimazioni numeriche, argomento trascurato dalla generalità dei libri di testo, e pure così importante.

Questi due primi capitoli non fanno parte dei programmi ufficiali, ma nessuno, crediamo, riterrà inutile, prima d'inoltrarsi nel pelago di questi programmi, una breve rassegna delle proprietà fondamentali dei numeri reali, e le norme per il computo degli errori nei calcoli approssimati.

Il cap. III tratta delle disuguaglianze. Le convenzioni relative alle disuguaglianze dei numeri con segno vengono dedotte dall'unico criterio di ritenere maggiore quel numero che si trovi *dopo* l'altro nella nota rappresentazione mediante punti di una retta, ove si cominci a contare dalla sinistra. Questo criterio vien messo anche sotto altre forme equivalenti; si osserva che non tutte le proprietà delle disuguaglianze vere per i numeri positivi continuano a sussistere, e poi si tratta dei noti principî relativi alle disuguaglianze (di 1° e 2° grado) e della risoluzione di queste.

Nel cap. IV (discussione di problemi) non si ha la solita esposizione del metodo Tartinville, ma dalla trattazione di appropriati problemi di 1° e 2° grado, algebrici e geometrici si deducono alcune utilissime norme generali.

Il cap. V dedicato alla goniometria, pur ispirandosi a modernità di vedute è alieno da ogni prolissità. Il seno e il coseno sono definiti come l'ordinata e l'ascissa del termine dell'arco, la tangente è definita come il rapporto al raggio del segmento di tangente ecc., la cotangente è la tangente dell'arco complementare. Non si parla di secante e di cosecante, e questo fatto mostra bene l'intenzione dell'A. di evitare qualsiasi considerazione non strettamente necessaria ai fini pratici dell'insegnamento.

Il cap. VI (trigonometria) comprende, oltre ad alcuni cenni sulle tavole trigonometriche, le relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo e obliquangolo, la risoluzione dei triangoli obliquangoli, il problema di Pothenot, espressioni varie dell'area di un triangolo, ecc.; solo accennata nell'applicazione a pag. 111, la risoluzione dei triangoli rettangoli. Questa, essendo molto semplice, può trovar posto fra gli esercizi nel volume che l'A. promette e che ci auguriamo di prossima pubblicazione.

Il cap. VII relativo ai massimi e minimi si inizia colla definizione di funzione e con esempi di rappresentazione grafica (sinusoide, curva logaritmica) e dopo la determinazione dei massimi e minimi di alcune funzioni di x, contiene vari problemi e l'esposizione dei consueti metodi elementari (metodo dei confini, dei moltiplicatori, ecc.).

Il cap. VIII tratta dei limiti e delle forme indeterminate. Le applicazioni alla misura del cerchio, al volume del tetraedro ecc. sono opportuni richiami al programma del 1° biennio. " Se il ritorno sulla via percorsa, nota l'A. nella prefazione al 1° volume, è solo rimedio quando il segno fu oltrepassato, ragion vuole che divenga regola nei nostri Istituti tecnici, dove un programma de universa materia che va dall'aritmetica ragionata ai confini estremi dell'algebra, dall'assioma della linea retta, alla sfera e alle scoperte di Archimede, vuol essere sbrigato nei primi due anni .... ". L'A. si limita alle forme $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, osservando che altre forme, come $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, ecc., di poca importanza nella matematica elementare, avranno largo sviluppo all' Università come applicazione del calcolo differenziale.

Nel cap. IX l'algoritmo delle frazioni continue, di cui fa notare l'importanza per il calcolo approssimato, è applicato all'equazione esponenziale, ai numeri irrazionali, alle equazioni.

Il cap. X tratta brevemente delle figure uguali, simmetriche e simili, l'XI delle omotetie, il XII del contributo dell'omotetia alla risoluzione di problemi sul cerchio: si giunge fino al problema d'Apollonio.

Un'appendice dà l'espressione in funzione dei lati, dei raggi del cerchio inscritto e dei cerchi exinscritti a un triangolo.

Mancano gli elementi di geometria descrittiva, e veramente, essendo il programma della terza classe pletorico, quest'argomento è sacrificato da molti insegnanti; non era male tuttavia se l'A. le aveva dedicato un capitolo.

Vol. II. — Il I cap. riprende la teoria delle equazioni e le aggiunge interessanti complementi: equazioni decomponibili, radici razionali, equazioni a radici opposte, aumentate, invertite, equazioni e formole omogenee, ecc.

L'argomento non è prescritto dai programmi, ma non vi è chi non ne veda l'utilità, specialmente dal punto di vista dell'A., il quale ritiene necessario, come si è detto, riprendere gli argomenti fondamentali del 1° biennio, sia per impedirne la dimenticanza, sia per completarli, sia per dare all'intero corso un assetto organico e armonico.

Per questo scopo appunto, e per il bisogno di aprire le porte della scuola media ai concetti e ai metodi della moderna matematica, in un capitolo, il VII, si tratta delle derivate, valendosi dello sviluppo binomiale, e si applicano ai massimi e minimi delle funzioni. Notevole la dimostrazione del teorema di Fermat basata sullo sviluppo binomiale.

All'analisi indeterminata di 1° grado (cap. X) è aggiunto un breve capitolo contenente esempi di equazioni di 2° grado, argomento anche questo che sorpassa i programmi, ma che è interessante non fosse altro per i punti di contatto colla teoria dei numeri.

L'A. ha fatto bene anche a porre in appendice i numeri complessi, argomento che vari professori trattano nel loro corso e che è " vario di riassuntivi esercizi sull'universa materia dell'algebra, della geometria e della goniometria ", (Prefazione al II volume). Servono d'introduzione a questi numeri, dei quali è messa in luce l'importanza per la teoria delle equazioni, i binomi irrazionali.

Per dar luogo a questi utili complementi è ridotta qualche parte del programma, così alle sezioni coniche è riserbato un breve capitolo, l'VIII, ma, come nota l'A., " per le curve di 2° ordine è assai un anno all'Università ". Del resto il libro non deve sopprimere il maestro; deve soltanto offrire agli scolari un riepilogo breve, chiaro, ordinato, delle lezioni udite.

Quanto al resto poco c'è da dire. Il cap. IX parla degli angoli poliedri e dei poligoni sferici, il III dà le principali formole di goniometria sferica, il IV parla della risoluzione dei triangoli sferici, riducendo al minimo le discussioni relative, il V svolge il calcolo combinatorio (disposizioni, permutazioni, combinazioni) che è applicato nel VI allo sviluppo del binomio. Nei cenni sulla probabilità rifulgono meglio che altrove lo spirito arguto dell'A. e i pregi del suo stile. Infine il cap. IX parla dei poliedri euleriani e platonici.

Un giudizio riassuntivo sul libro risulta chiaro da questa rapida rassegna. Non potremmo affermare con sicurezza che sotto il rispetto teorico e puramente dottrinale il libro non contenga qualche lacuna, ma è certo che sotto l'aspetto didattico, lascia ben poco, per non dir nulla, a desiderare.

La forma svelta, spigliata, attraente dell'opera, il vantaggio di riunire in un tutto armonico il programma del 2° biennio, sparso finora in libri diversi, i pregi didattici, le assicurano larga e meritata diffusione. Della simpatia che ha incontrato è segno manifesto il rapido esaurirsi della 1ª edizione del I volume.

Se poi si pensa che l'A. ha esitato tanto a pubblicare quest'opera, e ci si è indotto per la prescrizione ministeriale che proibisce l'uso delle dispense (come confessa, quasi scusandosi, nella prefazione al II volume) mentre siamo indotti a benedire, per una volta almeno, l'ordine ministeriale, non possiamo fare a meno di vergognarci, noi giovani, di buttar fuori opere con tanta leggerezza, scusabile solo in parte colla necessità, che ne pinge, di vincer concorsi o altro.

A. Natucci.

VI CONGRESSO
DELLA SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

GENOVA — 17-25 Ottobre 1912

SEDUTA INAUGURALE.

Il Congresso fu inaugurato il giorno 17 ottobre ad ore 9,30 nel salone del Palazzo Ducale, con l'intervento del Ministro della P. I., di parecchi senatori e deputati, delle autorità locali e di numerosi congressisti.

Il comm. Ronco, presidente del Comitato ordinatore, ed il Sindaco di Genova rivolsero per primi parole di saluto ai convenuti, quindi il ministro Credaro pronunziò un discorso nel quale, dopo aver portato il saluto del Governo e ricordato le benemerenze di Genova per gli studi, parlò della funzione delle scienze nella vita sociale, e terminò colle parole seguenti:

I vostri congressi, che accomunano l'opera del filosofo con quella del matematico, l'indagine del sociologo con quella del fisico, la ricerca del giurista o del filosofo con quella del naturalista o del cultore di scienze tecniche; sono l'espressione vivente dell'intimo nesso tra la missione di tutti gli scienziati. I quali, mentre tendono sempre più a differenziarsi, ogni giorno dànno opera all'abbattimento di qualcuna delle vecchie barriere che segnavano artificiali confini.

Oggi si è compreso che l'autonomia delle singole scienze quanto più deve essere ricercata nei mezzi, tanto meno deve essere raggiunta rispetto allo scopo, che è collettivo. Ogni vero scienziato è oggi orgoglioso di porgere una pietra di base del grande edificio del sapere; ma è anche non meno orgoglioso di sacrificare sull'altare di un grande fine collettivo i vieti residui di un esclusivismo, ormai superato per sempre a vantaggio del progresso integrale della scienza.

Di questo rinnovamento della scienza contemporanea deve essere un riflesso la scuola. Ciò avviene quasi automaticamente nell'istruzione superiore, ove i progressi scientifici hanno una eco immediata e subiscono giorno per giorno una continua elaborazione: invece, questo indispensabile parallelismo tra i progressi della scienza e la funzione della scuola rappresenta uno dei più gravi problemi della pedagogia e della politica scolastica rispetto all'istruzione di grado medio.

A una parziale risoluzione di questo problema mirò la legge del 21 luglio 1911; che creò il ginnasio-liceo moderno. Questo istituto, che ad alcuni, che io non chiamerò " lungimiranti ", parve timida *riforma*, vuole rispecchiare la più intima tendenza della scienza contemporanea, la quale senza perdere di vista i problemi generali del sapere si avvicina, differenziandosi, sempre più alla vita pratica.

L'oratore continuò esaminando i mezzi migliori a far sì che la scienza si accordi bene colla scuola e questa colla vita, inneggiò al rinnovamento e al riordinamento più moderno e pratico degli studi; poi concluse:

Signori e Signore!

Oggi l'Italia si presenta al mondo civile forte della sua finanza ricostituita con spirito di memoranda saggezza e di perseverante abnegazione; ammirata nella forza eroica del suo esercito e della sua armata; invidiata per la sapienza della sua legislazione sociale rivolta ad attenuare le asprezze delle competizioni economiche; sollecita di porgere a tutti la pacifica orma emancipatrice dell'alfabeto; stimata per la splendida produzione del suo pensiero scientifico e per lo splendore delle sue arti.

Ogni cittadino può esser chiamato all'esercizio del più alto diritto pubblico. Il pensiero nostro da Ascoli a Carducci, da Galileo Ferraris a Pacinotti è prodigo al mondo di inestimabili benefici.

La Patria segue con amore e con orgoglio l'opera vostra, sia essa rivolta a scrutare i segreti della natura o della coscienza umana; essa sente che la grandezza della vostra missione è prestigio e decoro per tutti gli italiani.

In nome di S. M. il Re dichiaro aperta la sesta riunione della Società Italiana per il progresso delle scienze.

Parlarono poi il prof. Benzoni, preside della facoltà di filosofia, in rappresentanza del rettore, e il prof. Garbasso, a nome della presidenza del Congresso, ed infine il prof. senatore Scialoia presidente dell'Associazione per il progresso delle scienze tenne il discorso inaugurale trattando delle questioni di diritto che si riferiscono al dominio dell'aria e alla navigazione aerea. Alla fine del suo discorso il senatore Scialoia propose d'inviare un telegramma di omaggio a S. M. il Re, alto patrono dell'Associazione.

Il giorno stesso a ore 14,30 ebbe luogo l'inaugurazione del Museo di storia naturale con discorsi del Vice-direttore prof. Gestro e del prof. Arturo Issel e vennero pure iniziate le riunioni delle varie classi.

Adunanze delle classi.

Com'è noto per l'art. 1 del Regolamento l'Associazione è divisa in tre classi:

A) *Scienze fisiche e matematiche.*

B) *Scienze biologiche.*

C) *Scienze morali.*

Le adunanze a classi riunite furono tenute nel Palazzo S. Giorgio nel seguente ordine:

Venerdì 18 a ore 8. — Grassi G. B.: Biologia marina e pesca. — Foà Pio: Le secrezioni interne. — Rolandi-Ricci: Correlazioni fra l'aumento della ricchezza e il progresso politico nell'Italia moderna.

Sabato 19 a ore 9. — Canalis: La difesa contro le malattie esotiche nel porto di Genova. — Imperiali di Sant'Angelo: La politica coloniale della repubblica di Genova. — Sacco: I mondi antichi.

Lunedì 21 a ore 9. — Benini: L'azione recente dell'oro sui prezzi generali delle merci. — Guareschi: La storia delle scienze e Domenico Guglielmini.

MORSELLI: I limiti della coscienza. — VISCONTI-PRASCA tenente di vascello: Artiglierie navali. — GORINI: I fermenti selezionati e la fabbricazione del formaggio.

La classe *A* tenne pure le sue sedute nel Palazzo S. Giorgio nel seguente ordine:

Giovedì 17 a ore 16. — CAPUTO colonnello, capo della Missione dell'Istituto geografico militare della Libia: Cenno sui nostri lavori geodetico-topografici nella Libia. — PORRO: Sui cataloghi stellari. — COEN CAGLI: Di una futura sistemazione del porto di Genova.

Venerdì 18 a ore 14. — JONA: Sui cavi sottomarini. — PANTANELLI: Difese montane. — ROLLA: Il terzo principio della termodinamica.

Sabato 19 a ore 14. — LUIGGI: Le opere marittime della Libia. - Primo contributo allo studio dei materiali da costruzioni idrauliche marittime della Libia. — ABRAHAM: Una nuova teoria della gravitazione. — SELLA: La pesca delle spugne nella Libia.

Martedì 22 a ore 15. — REGGIO: Ritenute di acque di alta, bassa e media elevazione. — VINASSA DE RÉGNY P.: Note geologiche su la Libia italiana. — FANTOLI: Di alcune vedute direttive odierne nelle investigazioni idrografiche e idrauliche.

La classe *B* tenne le sue adunanze nel Museo civico di storia naturale e la classe *C* nella R. Università negli stessi giorni ed ore della classe *A*. Fra queste notiamo la conferenza del prof. GINO LORIA: La storia delle scienze è una scienza?, tenuta il giorno 18 alla classe *C*.

Ecco un breve cenno delle conferenze che possono più interessare i lettori del *Periodico*.

Prof. ROLLA: *Il terzo principio della termodinamica.*

La legge fisica che, per la sua portata enorme, può essere considerata come il terzo principio della termodinamica, fu enunciata sei anni or sono da Walter Nernst, professore di chimica-fisica all'Università di Berlino. L'oratore, che fu scolare del grande chimico tedesco e collaborò col Maestro alle ricerche sperimentali necessarie per la verifica del nuovo principio, fece un'esposizione critica degli importanti lavori che riuscirono in questi ultimi tempi a diradare le nubi di diffidenza con cui i teorici accolsero la proposizione di Nernst. La quale ha lo scopo di fissare il valore assoluto dell'entropia, che la termodinamica lascia indeterminato. Il secondo principio infatti dice solo che in un sistema libero, sede di un processo spontaneo, il valore dell'entropia cresce; il principio di Nernst dice che l'entropia di un corpo solido o liquido, come il calore specifico, tende allo zero, all'annullarsi della temperatura assoluta.

L'entropia dunque è determinata per qualunque temperatura, anche per i sistemi gassosi ed eterogenei, quando si pensi che essi possono passare, per via isotermica e reversibile, in altri costituiti da sole fasi solide.

Lo stato di equilibrio di un sistema qualunque risulta così fissato mediante i soli dati sperimentali (calori specifici, tensioni di vapore, calori di formazione).

La grande mole di misure eseguite sta a dimostrare il buon accordo della teoria coll'esperienza.

Ma la portata della nuova legge risulta specialmente da considerazioni cinetico-molecolari, suggerite dalla teoria dei *quanti* di energia, che, nata da un problema di ottica, serve ormai di base all'intero edificio della fisica. La costante che figura nell'espressione dell'entropia ricavata dalla teoria classica di Boltzmann è determinata nella nuova teoria e il principio di Nernst risulta dimostrato.

Del resto basta la considerazione che, per il secondo principio, non è possibile raffreddare un corpo solido fino allo zero assoluto, per comprendere che la nuova legge di termodinamica esprime senz'altro un fatto sperimentale. Infatti, ammesso che il calore molecolare di un corpo solido tenda allo zero, all'annullarsi della temperatura assoluta (ed è un fatto di esperienza) si dimostra che una dilatazione adiabatica porterebbe un corpo solido allo zero assoluto, se il coefficiente di dilatazione non tendesse pure allo zero. Questo andamento del coefficiente di dilatazione è una conseguenza immediata del principio di Nernst, verificata dall'esperienza.

Così, dato il suo carattere di legge naturale, il terzo principio della termodinamica non si può respingere a priori in base a investigazioni teoriche, come il principio della conservazione dell'energia e quello dell'accrescimento dell'entropia.

Prof. Max Abraham: *Una nuova teoria della gravitazione.*

In questa conferenza l'autore si propose di riassumere i punti essenziali di una nuova teoria della gravitazione svolta da lui stesso e dal prof. Einstein di Zurigo. Questa teoria collega il potenziale della gravitazione colla velocità della luce, e riduce la gravitazione ad azioni immediate; la legge di Newton vale soltanto in modo approssimativo. La massa di un sistema è proporzionale alla sua energia, cosicchè le leggi della conservazione dell'energia e della massa si confondono in una sola legge. La teoria di relatività, la quale non conduce ad una spiegazione soddisfacente della gravitazione, deve essere abbandonata.

Prof. Gino Loria: *La storia della scienza è una scienza? (Conquiste, tendenze, aspirazioni della storia delle scienze).*

L'oratore cominciò coll'indicare alcuni caratteri generali della " ricerca storica „ ed istituì un parallelo fra questa e la " ricerca scientifica „, dal quale risulta in che cosa differiscano e in che cosa somiglino. Ne concluse che nulla autorizza a ritenere la prima inferiore alla seconda e dette ragione dell'opposta opinione, segnalando alcuni lavori sopra la storia delle scienze atti a screditare questa branca di studi, affrettandosi a fare subito conoscere i modelli che la Francia per prima ha offerti a coloro che intendono dedicarvisi. Passò poi ad indicare i metodi, gli ausiliari, i problemi metodologici propri della storia delle scienze, arrestandosi in particolare sopra la tanto dibattuta questione se sia possibile una " storia della scienza „, materia di cui nel Collegio di Francia esiste una cattedra apposita.

Dimostrata poi l'utilità di cui è ricca la storia delle scienze, egli chiese perchè mai essa annoveri oggi, specialmente in Italia così scarsi cultori e si arrestò ad enumerare i mezzi per accrescerli. Egli sostenne, in particolare, la necessità di un " Manuale „ per coloro che vogliono consacrarvisi; e, dopo aver osservato che non potrebbe essere opera di un sola persona, fece voti che la Società per il Progresso delle Scienze (presso cui la storia delle scienze ha incontrato un lusinghiero favore) assumesse la tutela e la direzione di un'impresa che, senza dubbio, riscuoterebbe il plauso di tutto il mondo civile.

Adunanze della Sezione I.

La sezione I (Matematica, Fisica, Mineralogia) si adunò nella R. Università. Ecco un breve riassunto dei suoi lavori.

Venerdì 18. — Il prof. Casazza trattò brevemente di un appunto sulla caduta dei gravi e il prof. Cisotti colla comunicazione: *Su di alcune recenti ricerche d'Idrodinamica*, fece una rassegna delle più recenti questioni idrodinamiche ed espose alcuni interessanti risultati, in proposito dei suoi studi speciali.

Sabato 19. — Il prof. Loria, per incarico del prof. Edgardo Ciani, comunicò le conclusioni di un lavoro dal titolo " Le curve piane di quint'ordine invarianti rispetto a gruppi di collineazioni piane ". Per invito del prof. Volterra il prof. G. Loria pose ai voti il seguente ordine del giorno:

" La Sezione I della VI Riunione della Società per il progresso delle scienze " fa voti: I. Che nella edizione completa delle opere di Eulero, attualmente in " corso di esecuzione, come trovarono posto le note di Lagrange al trattato di " Algebra, vengano inserite le osservazioni al Calcolo integrale dovute a Lorenzo " Mascheroni. - II. Che il Governo italiano accordi, ove sia necessario, una sovven" zione pecunaria onde ottenere, dalla Casa editrice il corrispondente ampliamento " del primitivo piano finanziario dell'impresa ". È approvato ad unanimità.

Il prof. Rumi annunziò alla Sezione uno speciale adattamento d'un fotometro di Lummer e Brodhum, alla misura dell'illuminazione di un ambiente illuminato, con la costruzione del cosidetto solido d'illuminazione. L'istrumento così modificato, chiamasi fotofasimetro. Espose alcuni risultati dell'uso da lui fatto dell'apparecchio. — Il prof. Bonacini parlò di un processo per ottenere fotografie a colori su carta colla carta " Ubtocolor ", di recente fabbricazione, mostrò i risultati ed aggiunse alcune sue osservazioni. — Il prof. Boggio parlò di alcune funzioni analoghe a quelle di Green che compaiono nella teoria della elasticità e del teorema di reciprocità ad esse relative. — Il prof. Bortolotti dette alcuni nuovi criteri di convergenza degli integrali impropri definiti, e li applicò a dimostrare un teorema sulla invariantività della frequenza di un insieme per trasformazioni finite e continue. — Si dette per letta la comunicazione del prof. Anfossi " Sulla distribuzione della pioggia per le stagioni nelle varie stazioni dell'Italia settentrionale ". — Il prof. Gianfranceschi espose i lavori da lui fatti sullo studio delle curve vocali, adoperando, come oscillografo, l'elettrometro bifilare di Wulf. — La comunicazione fu illustrata con proiezioni. — Il prof. Lo Surdo chiese alcune spiegazioni, che furon date dal conferenziere. — Il dottor P. Rossi parlò sul comportamento dell'Uranio X rispetto ai metodi usuali di separazione elettrochimica degli elementi radioattivi, cioè il metodo elettrochimico propriamente detto, ed il metodo elettrolitico. Quanto al primo di detti metodi l'oratore trovò che la legge di Lucas è soddisfatta solo in parte; quanto al secondo metodo trovò che quando il deposito anodico è radioattivo, l'attività è dovuta solo all'Uranio X, questa attività è da considerarsi come conseguenza di fenomeni di assorbimento, da parte di attività contenute nei sali di Uranio, nell'Uranio X.

Mercoledì 23. — Il prof. Piola, anche a nome del prof. Tieri, descrisse una disposizione sperimentale per determinare gli sforzi ai quali sono soggetti i corpi magnetici nel campo magnetico. — Seguì il prof. Fiorentino che riferì sul problema della composizione delle vocali che per varie ragioni sembra ancora molto degno di studio. — L'ing. L. Pesenico, offrendo in omaggio alla Società di Fisica due suoi libri sui cataclismi geologici, ne riassunse l'argomento e lo scopo. — Il prof. Lo Surdo presentò un ordine del giorno in cui rinnovò il voto, fatto a Roma lo scorso anno affinchè i magnetografi, impiantati dal Donati in Firenze ed attualmente in ottime condizioni, vengano tolti dall'attuale stato di inoperosità. Tale voto fu approvato ad unanimità.

Nella seduta interna amministrativa della Società tenutasi il 19 ottobre si procedette alla elezione parziale delle nuove cariche sociali, che diede i seguenti risultati:

Ufficio di Presidenza e di Amministrazione.

Segretario: Prof. Vincenzo Reina; *Vice-segretario*: Dott. Giorgio Abetti; *Amministratore*: Prof. Bonaldo Stringher; *Economo-Cassiere*: Dott. Luciano Pigorini.

Presidenti di Sezione.

Classe A: Prof. Guido Grassi; prof. Francesco Marino Zuco; prof. sen. Giuseppe Veronese. — *Classe* B: Prof. Guglielmo Romiti; prof. Daniele Rosa. — *Classe* C: Prof. Giovanni Lorenzoni; prof. Giacinto Romano.

Membri del Comitato Scientifico.

Prof. Giuseppe Bellucci; Col. Filippo Cavazza; prof. Corrado Gini; prof. Giuseppe Oddo.

Le cariche sociali restano così costituite:

Ufficio di Presidenza e di Amministrazione.

Presidente: Prof. sen. Vittorio Scialoja. — *Vice-presidenti*: Prof. Antonio Garbasso; prof. Romualdo Pirotta. — *Segretario*: Prof. Vincenzo Reina. — *Vice-segretario*: Dott. Giorgio Abetti. — *Amministratore*: Prof. Bonaldo Stringher. — *Cassiere-Economo*: Dott. Luciano Pigorini. — *Vice-segretario aggiunto*: Prof. Gaetano Grisostomi. — *Bibliotecario*: N. N.

Presidenti di Sezione.

Classe A: Prof. Orso Mario Corbino; prof. sen. Giuseppe Della Vedova; prof. Guido Grassi; prof. Francesco Marino Zuco; prof. sen. Giuseppe Veronese; prof. Ferruccio Zambonini. — *Classe* B: Prof. sen. Luigi Luciani; prof. Oreste Mattirolo; prof. Guglielmo Romiti; prof. Daniele Rosa. — *Classe* C: Prof. Gherardo Ghirardini; prof. Pasquale Jannaccone; prof. Giovanni Lorenzoni; prof. Giacinto Romano.

Membri del Comitato Scientifico.

Prof. Giuseppe Bellucci; Col. Filippo Cavazza; prof. Corrado Gini; prof. Tullio Levi-Civita; prof. Giuseppe Oddo; prof. Silvio Perozzi; ing. Eugenio Rignano; prof. Giovanni Vacca.

Quale sede della VII Riunione del 1913 venne stabilita la città di Siena.

III CONGRESSO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI MATEMATICA " MATHESIS „

GENOVA — 21-24 Ottobre 1912

Questo Congresso fu tenuto nel ridotto del teatro *Carlo Felice*. La seduta inaugurale ebbe luogo il 21 ottobre alle ore 9,30.

Presero posto alla presidenza il prof. Castelnuovo, il prof. Vigoni, R. Provveditore agli studi di Genova, rappresentante il Ministro della P. Istruzione, l'assessore Vitali e l'avv. Garnier.

Si levò primo a parlare il prof. Vigoni, il quale con un elevato e applaudito discorso, dopo aver dimostrato che nella scienza è l'avvenire della nostra razza, si disse lieto di portare ai congressisti il saluto inaugurale del ministro Credaro.

Seguì il prof. Vitali, il quale assicurò che Genova seguiva con profonda attenzione gli studi del Congresso ed era orgogliosa di ospitare i soci della " Mathesis „, ai quali rinnovò il saluto della sua città.

A nome della sezione di Genova il prof. Loria dette con parola ornata il benvenuto ai convenuti e infine l'illustre Presidente dell'Associazione, prof. Castelnuovo, cominciò il suo discorso coi ringraziamenti di rito. Indagò poscia perchè troppo pochi si occupano e dànno importanza alle questioni didattiche.

Rilevato il dissidio fra scuola e vita, riconobbe che la prima pecca di teoricismo. La tendenza allo specialismo ha aggravato il male.

Il prof. Castelnuovo vagheggia una riforma della scuola che la liberi del carattere troppo dogmatico e teorico che oggi l'opprime. Teme però che la riforma sarebbe troppo lenta ed imperfetta, quando ad essa dovessero provvedere solo gli uomini che vivono per la scuola. Egli invoca un'unione degli insegnanti e degli uomini di azione perchè insieme affrontino il grave problema. Ed è lieto di lanciare questo augurio dalla nobile città di Genova che pur nella febbre del suo intenso lavoro sa dimostrare qual pregio essa attribuisca alla coltura nazionale. " Se l'ambiente ove trascorreremo questi giorni ci farà sentire quanto profondi siano i legami tra la vita attiva e la scuola — concluse — avremo una nuova ragione per rallegrarci di aver scelto Genova come sede del nostro Congresso „.

Le adunanze si succedettero senza interruzione nei giorni successivi e furono ampiamente discusse le relazioni preparate dalla sottocommissione italiana della commissione internazionale per l'insegnamento matematico, e cioè:

Relazioni sulle *Scuole elementari e normali* (prof. Conti),
Relazione sulle *Scuole classiche* (prof. Scarpis e Fazzari),
Relazione sulle *Scuole ed Istituti Tecnici* (prof. Scorza),
Relazione intorno alla *Preparazione degli insegnanti di matematica* (prof. Pincherle),
Relazione sulle *Scuole commerciali, industriali, militari*, ecc. (prof. Lazzeri).

Furono pure discussi i seguenti temi:

a) *Effetti giuridico-specifici della laurea in matematica* (Relatore prof. Veneroni).
b) *Sull'incompatibilità degli uffici di professore di matematica nelle scuole medie e assistente universitario* (Relatore prof. Vivanti).

Queste discussioni furono alternate con le seguenti conferenze:

Conferenza del prof. G. Loria: *Eccentricità e misteri dei numeri.*
" " " V. Reina: *Matematica di precisione e matematica di approssimazione.*
" " " G. Vacca: *I classici delle matematiche.*

La sera del 21 ebbe luogo una adunanza nell'aula magna dell'Università, in comune con l'Associazione elettrotecnica italiana per discutere sull'ordinamento degli studi per gli allievi ingegneri. In detta adunanza, riuscita solenne per il numero e il valore degli intervenuti, si accentuò la tendenza, enunciata per la prima volta nel I Congresso delle Scienze tenuto a Parma nel 1907, a ridurre gl'insegnamenti di matematiche pure nel primo biennio di matematiche che è comune agli studenti di matematiche pure e agli allievi ingegneri in guisa che essi possan seguire il corso di meccanica razionale al secondo anno.

Parlarono in questo senso i professori Lori, Somigliana, Enriquez ed altri. Il prof. Pincherle, pur riconoscendo la necessità di avere di mira nel primo biennio gl'interessi dei futuri ingegneri, parlò con calda e appassionata parola dei danni che recherebbe alla cultura scientifica del nostro paese il dare agli studenti di matematiche pure un insegnamento troppo sommario, e lasciare andare in abbandono le belle conquiste scientifiche di oltre cinquant'anni; ed enunciò anche l'idea di tenere separati gli studenti di matematiche pure da quelli d'ingegneria sino dal primo anno d'Università per meglio tutelare gl'interessi degli uni e degli altri.

Nacque una larga ed animata discussione alla quale presero parte molti dei congressisti, e che si chiuse colla proposta, accettata da tutti, di nominare una commissione mista di teorici e di tecnici, incaricata di studiare il grave problema e fare proposte concrete.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 2 Gennaio 1913.

L'ALGORITMO DELLE POTENZE E IL BINOMIO DI NEWTON

nel calcolo vettoriale

---

1. Non sappiamo richiamare la benevola attenzione dei lettori su quanto si ha qui occasione di esporre senza prima invocare a nostra giustificazione un'acuta osservazione del Cantor secondo il quale caratteristica della ricerca matematica è la più completa libertà o, come avverte il prof. Gino Loria in una sua conferenza, (1) la facoltà di introdurre nuovi enti per definizione purchè non contradicano a principî di già accettati e di ammettere come possibile qualunque proposizione di cui non sia stata ancora dimostrata la falsità.

In una nota precedente (2) abbiamo esteso al calcolo formale dei vettori l'espressione algebrica che dà il quadrato di un polinomio: e il risultato apparisce possibile *a-priori* perchè, contenendo lo sviluppo i quadrati dei termini, esiste ed ha significato nel calcolo vettoriale la seconda potenza (scalare o interna) di un vettore data per definizione dalla espressione:

$$\mathbf{a}^2 = a^2.$$

Non è più così se si cerca di estendere al calcolo vettoriale la formola che dà lo sviluppo del binomio di Newton; in tal caso si leve in primo luogo dar significato alle successive potenze scalari li un vettore ossia alle espressioni:

$$\mathbf{a}^3,\quad \mathbf{a}^4, \dots, \mathbf{a}^n, \dots$$

poscia ricercare se in base ad esse sia valido lo sviluppo newtoiano di un binomio i cui termini sono vettori. E poichè in fondo il alcolo vettoriale è un sistema essenzialmente formale che esprime ioè per convenzione determinate espressioni fra scalari con equivanti aggregazioni di simboli vettoriali e viceversa, si vede così che detta ricerca si può intendere in due modi diversi: o dando alle pressioni $\mathbf{a}^i$ $(i = 1, 2, 3, \dots)$ quel significato che appare il più natule ossia il più conforme alla ordinaria definizione di potenza da lato e ai principî del calcolo vettoriale dall'altro e poscia veri-

---

(1) *Matematica e realtà*. Febbraio 1911.

(2) *Periodico di Matematica*, anno XXVIII, fasc. I, Sett. 1912.

ficando se in base ai principî stabiliti è valido lo sviluppo newtoniano o definendo addirittura i superiori simboli di potenza in modo che tale sviluppo resti verificato.

A dir vero la costruzione di un algoritmo di potenze vettoriali dovrebbe risultare dall'esame di tutto l'algoritmo algebrico delle potenze e non dalla considerazione di casi particolari: ma se non prima è dimostrata a-priori la possibilità o la impossibilità di un tale algoritmo — il che può risultare solo dalla dimostrazione che l'idea medesima di esso contradice o no ai fondamenti del calcolo vettoriale — la ricerca di esso deve procedere per gradi prendendo le mosse dai casi particolari.

Esporremo qui il principio di un algoritmo che pur verificando, come si dimostrerà, qualcuno dei teoremi elementari delle potenze, non verifica però la formola del binomio di Newton: anzi il procedimento di verifica conduce alla conclusione che tale formola è valida solo per i binomî di numeri. Tale risultato negativo non può però in alcun modo infirmare la validità dell'algoritmo stesso — la quale, come si è accennato, dovrebbe esser negata in modo diverso — sia per l'esattezza dell'accennata conclusione sia per il fatto che non tutte le proprietà e formole algebriche si traducono inalterate negli algoritmi formali poichè, com'è noto, alcune di esse valgono integralmente, altre con modificazioni, altre infine non sono addirittura valide.

2. Dato un vettore qualunque $\mathbf{a}$ e il versore $\mathbf{i}$ di tutti i vettori agenti nella direzione di $\mathbf{a}$, si può sempre porre per convenzione:

$$\mathbf{a}^1 = \mathbf{a} = a\mathbf{i}; \tag{1}$$

si sa d'altro lato che:

$$\mathbf{a}^2 = a^2 \tag{2}$$

ossia che il quadrato interno o scalare del vettore è la quantità scalare uguale al quadrato del modulo.

Com'è noto tale definizione della seconda potenza si ottiene dall'espressione generale del prodotto interno di due vettori:

$$\mathbf{ab} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

ove si supponga $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ e in conseguenza $a = b$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ ed ove si convenga di indicare con $\mathbf{a}^2$ l'espressione $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{aa}$ che risulta dalla notazione del primo membro.

Per estendere la notazione agli esponenti superiori a 2 ammetteremo sia valido il principio generale dell'elevazione a potenza, ammetteremo cioè che si abbia:

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \ldots \times \mathbf{a} \;\; n \text{ volte}. \tag{3}$$

Potendo ciò sembrare in contradizione col noto principio secondo il quale è un'operazione priva di significato l'operazione $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

che indica il prodotto scalare di tre vettori, [1] osserviamo subito che ciò potrebbe esser vero nel caso di tre vettori distinti per i quali occorre considerare direzioni ed angoli diversi, mentre potrebbe ciò per contro non sussistere nel caso in cui avendosi $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c}$ si considerano solo una direzione unica ed angoli nulli. Ed infatti vediamo subito che le nostre definizioni, fondate sul principio espresso dalla (3) si basano anzi sui seguenti notissimi principî di calcolo vettoriale (che considerano entrambi una direzione unica) senza contradire per nulla ad essi:

1° il prodotto di un numero scalare k per un vettore $\mathbf{m}$ è un vettore avente la grandezza km, la direzione uguale a quella di $\mathbf{m}$ e il verso uguale od opposto a quello di $\mathbf{m}$ secondochè k è positivo o negativo (i fattori k che noi consideriamo si suppongono qui, per ora, positivi).

2° il prodotto scalare di due vettori aventi la stessa direzione è uguale al prodotto dei loro moduli.

Consideriamo in effetti la terza potenza e ricordando il postulato ammesso si ha:

$$\mathbf{a}^3 = \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a}$$

onde per la (2)

$$\mathbf{a}^3 = \alpha^2 \mathbf{a}$$

e per il primo dei principî esposti si può dire che il cubo (interno o scalare) di un vettore, è un vettore che ha per direzione e senso quelli del vettore dato e per modulo α^3; si può quindi scrivere:

$$\mathbf{a}^3 = \alpha^3 \mathbf{i}. \tag{4}$$

Considerando analogamente la quarta potenza si avrà:

$$\mathbf{a}^4 = \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a}$$

e procedendo ad eseguire i prodotti successivi indicati al secondo membro si arriverà all'espressione:

$$\mathbf{a}^4 = \mathbf{a}^3 \times \mathbf{a}$$

onde ricordando il secondo dei principî esposti si può scrivere infine:

$$\mathbf{a}^4 = \alpha^4 \tag{5}$$

e dire che la quarta potenza di un vettore è uno scalare uguale alla quarta potenza del modulo.

Le (1) (2) (4) (5) forniscono la regola generale a cui conduce l'adoperato metodo di conclusione da n ad $n+1$: quando lo esponente è dispari l'applicazione successiva della (3) conduce in definitiva al prodotto di un numero per un vettore ossia ad un vettore, quando

---

[1] BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elem. di Calcolo vettoriale*, 1909, pag. 33.

lo esponente è pari si perviene in fine a un prodotto scalare di due vettori agenti nella stessa direzione il che dà luogo ad un numero. Detto quindi h un numero reale intero e positivo, pari o dispari, possiamo scrivere in generale:

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{2h} = a^{2h} \\ \mathbf{a}^{2h+1} = a^{2h+1}\,\mathbf{i} \; (h = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{6}$$

Si ha pertanto che la potenza n^{esima} di un vettore è uno scalare uguale alla potenza n^{esima} del modulo ovvero un vettore avente la direzione e il senso del vettore dato e il modulo uguale alla potenza n^{esima} del modulo secondochè n è pari o dispari. Da quanto si è detto emerge intanto che l'applicazione successiva del prodotto scalare conduce anche in questi casi ad una quantità scalare, avendosi un vettore solo quando il prodotto interno è alternativamente sostituito dal prodotto di un numero per un vettore. Osserviamo poi che gli esponenti si suppongono sempre esser numeri che si considerano inoltre sempre interi e positivi.

* * *

3. Avendo considerato le potenze successive del vettore $\mathbf{a}$ possiamo considerare anche quelle del vettore ad esso contrario, ossia quelle di $-\mathbf{a}$ il cui tensore è $-a$ avendosi, come si sa:

$$-\mathbf{a} = (-a)\,\mathbf{i}.$$

Si ha allora con procedimento del tutto analogo a quello tenuto e ricordando i due principi sopra esposti:

$$\begin{gathered} (-\mathbf{a})^1 = -\mathbf{a} = -(\mathbf{a}^1) \\ (-\mathbf{a})^2 = (-\mathbf{a}) \times (\mathbf{a}-) = (-a)(-a) = a^2 \\ (-\mathbf{a})^3 = a^2(-\mathbf{a}) = (-a)^3\,\mathbf{i} = (-a^3)\,\mathbf{i} = -(\mathbf{a}^3) \\ (-\mathbf{a})^4 = [(-a^3)\,\mathbf{i}] \times (-\mathbf{a}) = (-a^3)(-a) = a^4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Così continuando, possiamo porre in generale:

$$\begin{cases} (-\mathbf{a})^{2h} = a^{2h} \\ (-\mathbf{a})^{2h+1} = (-a^{2h+1})\,\mathbf{i} \end{cases} \tag{7}$$

e confrontando con le (6) risulta:

$$\begin{cases} (-\mathbf{a})^{2h} = \mathbf{a}^{2h} \\ (-\mathbf{a})^{2h+1} = -(\mathbf{a}^{2h+1}) \end{cases} \tag{8}$$

risultato formale perfettamente conforme a quello dell'algebra ordinaria. Poichè i due membri della prima delle (8) rappresentano la quantità scalare positiva a^{2h}, possiamo convenire di indicare con la notazione formale $-\mathbf{a}^{2h}$ la quantità scalare essenzialmente negativa $-a^{2h}$. Sappiamo per esempio che il prodotto scalare di due vettori uguali ed opposti è una quantità scalare negativa che ha il valore assoluto uguale al quadrato del tensore comune, ossia:

$$(+\mathbf{a}) \times (-\mathbf{a}) = -a^2$$

onde in base alla convenzione fatta possiamo anche porre:

$$(+\mathbf{a}) \times (-\mathbf{a}) = -\mathbf{a}^2.$$

Facendo inoltre la convenzione di indicare con $-\mathbf{a}^{2h+1}$ l'espressione $(-\mathbf{a})^{2h+1}$, possiamo porre in base alle (8):

$$\begin{cases} (-\mathbf{a})^{2h} = -(-\mathbf{a}^{2h}) \\ (-\mathbf{a})^{2h-1} = -\mathbf{a}^{2h+1} \end{cases} \tag{9}$$

risultato, anche questo, del tutto conforme a quello dell'ordinario algoritmo delle potenze.

Estenderemo ora a tale algoritmo formale qualcuno dei teoremi elementari sulle potenze.

Pertanto ricordiamo qui che dati due numeri pari la loro somma e il loro prodotto sono sempre pari; dati due numeri dispari mentre la somma è sempre pari il loro prodotto è sempre dispari; dati finalmente due numeri uno dei quali è pari mentre l'altro è dispari si ha viceversa che la loro somma è sempre dispari mentre il loro prodotto è sempre pari. Tali proprietà si possono agevolmente dedurre esprimendo, come abbiam visto, un numero pari con l'espressione:

$$m = 2h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

e un numero dispari con l'espressione generale:

$$n = 2h' + 1 \qquad (h' = 1, 2, 3, \ldots).$$

***

4. Consideriamo un vettore **a**, il suo versore **i** e due numeri reali, interi e positivi, m ed n.

Supposti i due numeri entrambi dispari si ha:

$$\mathbf{a}^m = a^m \mathbf{i}$$
$$\mathbf{a}^n = a^n \mathbf{i}$$

e facendo il prodotto scalare dei due vettori, poichè essi agiscono nella stessa direzione avremo:

$$\mathbf{a}^m \mathbf{a}^n = a^m a^n = a^{m+n}$$

e poichè $m+n$ è pari possiamo porre:

$$a^{m+n} = \mathbf{a}^{m+n}$$

e finalmente:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m+n}. \tag{10}$$

Se m è pari ed n è dispari si avrà:

$$a^m = \mathbf{a}^m, \qquad \mathbf{a}^n = a^n\mathbf{i}.$$

Considerato il prodotto $a^m\mathbf{a}^n$ fra lo scalare a^m e il vettore $\mathbf{a}^n$ esso, per la prima delle uguaglianze precedenti, si può porre sotto la forma $\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n$ onde eseguendo il prodotto su detto avremo:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n = a^m\mathbf{a}^n = a^m a^n\mathbf{i} = a^{m+n}\mathbf{i}$$

e poichè $m + n$ è dispari il secondo membro è proprio la potenza $m + n^{esima}$ del vettore $\mathbf{a}$, per cui avendosi

$$a^{m+n}\mathbf{i} = \mathbf{a}^{m+n}$$

si può finalmente scrivere, anche in tal caso:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m+n}.$$

Nel caso di m, n entrambi pari si ha:

$$a^m = \mathbf{a}^m, \qquad a^n = \mathbf{a}^n.$$

Ora al modo stesso che nella definizione del quadrato scalare si pone $aa = a^2$ uguale per definizione ad $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$, il prodotto algebrico $a^m a^n$ si può, anche per le uguaglianze formali precedenti, mettere analogamente sotto la forma $\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n$: porremo quindi

$$\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n = a^m a^n.$$

Trasformando il secondo membro e osservando che $m + n$ è pari avremo:

$$a^m a^n = a^{m+n} = \mathbf{a}^{m+n}$$

e sostituendo avremo ancora:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{a}^n = \mathbf{a}^{m+n}.$$

La (10) è pertanto dimostrata in ogni caso ed essa esprime, come in algebra, che il prodotto di due potenze della stessa base è una potenza della stessa base che ha per esponente la somma degli esponenti. Secondochè m ed n sono entrambi pari, entrambi dispari, uno pari e l'altro dispari il primo membro è rispettivamente la rappresentazione simbolica di un prodotto numerico, un prodotto interno, la rappresentazione simbolica del prodotto di un numero per un vettore e il secondo membro è rispettivamente un numero, un altro numero, un vettore.

Consideriamo ora l'espressione:

$$(\mathbf{a}^m)^n.$$

Se i due numeri m ed n sono entrambi pari si ha:

$$(\mathbf{a}^m)^n = (a^m)^n = a^{mn}$$

e poichè mn è pari:

$$a^{mn} = \mathbf{a}^{mn}$$

onde:

$$(\mathbf{a}^m)^n = \mathbf{a}^{mn}. \tag{11}$$

Se i due numeri sono entrambi dispari si ha:

$$(\mathbf{a}^m)^n = (a^m\mathbf{i})^n = [(a^m)^n]\,\mathbf{i} = a^{mn}\mathbf{i}$$

e poichè mn è dispari, il secondo membro è la potenza mn^{esima} di $\mathbf{a}$, per cui essendo

$$a^{mn}\mathbf{i} = \mathbf{a}^{mn}$$

risulta ancora:

$$(\mathbf{a}^m)^n = \mathbf{a}^{mn}.$$

Finalmente se m è pari ed n è dispari si ha, ricordando che mn è pari:

$$(\mathbf{a}^m)^n = (a^m)^n = a^{mn} = \mathbf{a}^{mn}$$

e viceversa se m è dispari ed n pari:

$$(\mathbf{a}^m)^n = (a^m\mathbf{i})^n = (a^m)^n = a^{mn} = \mathbf{a}^{mn}.$$

La (11) rimane così completamente dimostrata ed esprime, come in Algebra, che la potenza di una potenza si ha facendo il prodotto degli esponenti. Se gli esponenti sono pari il primo membro è un numero, se sono dispari è la potenza di un vettore, se uno è pari e l'altro è dispari è un numero o la potenza di un vettore: e corrispondentemente il secondo membro sarà un numero, un vettore ed un numero.

Siano ora $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ due vettori divergenti da un'origine comune O e consideriamo un numero m, dispari. Si avrà:

$$\mathbf{a}^m = a^m\mathbf{i}, \qquad \mathbf{b}^m = b^m\mathbf{j}$$

essendo $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ due versori presi rispettivamente sulle direzioni dei vettori dati. Posto, com'è evidente:

$$\mathrm{ang}\,(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathrm{ang}\,(\mathbf{a}^m, \mathbf{b}^m) = \theta$$

si avranno i due prodotti interni:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m = a^m b^m \cos\theta \tag{12}$$
$$\mathbf{ab} = ab \cos\theta. \tag{13}$$

Elevando la (13) alla potenza m^{esima} avremo:

$$(\mathbf{ab})^m = a^m b^m \cos^m\theta = a^m b^m \cos\theta \cos^{m-1}\theta \tag{14}$$

e sostituendo al secondo membro il valore (12) si avrà:

$$(\mathbf{ab})^m = (\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m)\cos^{m-1}\theta \tag{15}$$

e poichè, come si sa, è:

$$\cos\theta = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{ij}$$

si può anche scrivere:

$$(\mathbf{ab})^m = (\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m)\,(\mathbf{ij})^{m-1}. \tag{16}$$

La (15) o la (16) dànno la potenza m^{esima} di un prodotto interno e mostrano che a meno di un altro fattore è il prodotto interno delle potenze m^{esime} dei fattori. Il teorema di algebra accennato non si traduce quindi integralmente in tale algoritmo.

Se m è pari si ha invece

$$\mathbf{a}^m = a^m, \qquad \mathbf{b}^m = b^m$$

e posto, come si è visto altrove:

$$\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m = a^m b^m$$

avremo per la (14):

$$(\mathbf{ab})^m = (\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m)\cos^m\theta = (\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m)\,(\mathbf{ij})^m. \tag{17}$$

Così ad esempio per $m = 2$ si avrà:

$$(\mathbf{ab})^2 = a^2b^2\cos^2\theta = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2\cos^2\theta.$$

***

5. Si sa di già che lo sviluppo del binomio di Newton è valido per $n = 2$: vedremo ora che esso non è valido per $n = 3$ quando si adoperi il superiore algoritmo.

Consideriamo pertanto i due vettori concorrenti:

$$\mathbf{a} = A - O, \qquad \mathbf{b} = B - O$$

e sia la loro somma o risultante:

$$\mathbf{r} = R - O.$$

Sappiamo che si ha:

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ r = (a^2 + 2ab\cos\theta + b^2)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Supponendo valido lo sviluppo del binomio per l'esponente $n = 3$ si ha:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^3 = \mathbf{a}^3 + 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 3\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3 \tag{18}$$

e applicando ai termini del secondo membro i vari principi dell'algoritmo esposto:

$$\begin{cases} \mathbf{a}^3 = a^3\mathbf{i} \\ 3\mathbf{ab}^2 = 3b^2\mathbf{a} = 3ab^2\mathbf{i} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \mathbf{b}^3 = b^3\mathbf{j} \\ 3\mathbf{a}^2\mathbf{b} = 3a^2\mathbf{b} = 3a^2b\mathbf{j} \end{cases}$$

le quali esprimono che i primi due vettori agiscono nella direzione OA e nel medesimo verso mentre gli altri due agiscono nella direzione OB e anch'essi nel medesimo verso. Applicando ora alla (18) la proprietà commutativa della somma vettoriale, potremo scrivere:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3=(\mathbf{a}^3+3\mathbf{a}\mathbf{b}^2)+(\mathbf{b}^3+3\mathbf{a}^2\mathbf{b})$$

e ricordando che la somma di vettori lungo la stessa direzione ha per modulo la somma dei moduli, porremo:

$$\begin{aligned}\mathbf{m}&=(\mathbf{a}^3+3\mathbf{a}\mathbf{b}^2)=(a^3+3ab^2)\,\mathbf{i}\\ \mathbf{n}&=(\mathbf{b}^3+3\mathbf{a}^2\mathbf{b})=(b^3+3a^2b)\,\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Quindi, se l'algoritmo esposto verifica la (18) il vettore

$$\mathbf{r}^3=r^3\mathbf{k}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3$$

(essendo **k** il versore della direzione OR) deve essere la risultante dei due vettori **m** ed **n** che comprendono l'angolo $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{a}^3,\mathbf{b}^3)=\theta$. [1] Pertanto il tensore di $\mathbf{r}^3$, ossia r^3 deve risultare dalla relazione:

$$(r^3)^2=(a^3+3ab^2)^2+(b^3+3a^2b)^2+2(a^3+3ab^2)(b^3+3a^2b)\cos\theta. \quad (19)$$

Onde verificare la relazione ora scritta osserviamo che lo sviluppo del suo secondo membro deve evidentemente uguagliare lo sviluppo dell'espressione:

$$(r^3)^2=(r^2)^3=(a^2+2ab\cos\theta+b^2)^3 \text{ [2]}$$

la quale contiene pure a, b, e $\cos\theta$. Ora l'uguaglianza delle due espres-

---

[1] Si può adoperare un altro procedimento ponendo:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^3=(\mathbf{a}^3+\mathbf{b}^3)+(3\mathbf{b}^2\mathbf{a}+3\mathbf{a}^2\mathbf{b})$$

dove, posti:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}&=(3\mathbf{b}^2\mathbf{a}+3\mathbf{a}^2\mathbf{b})=q\mathbf{q}_0\\ \mathbf{p}&=(\mathbf{a}^3+\mathbf{b}^3)=p\mathbf{p}_0\end{aligned}$$

si vede che mentre i due vettori **p**, **q** comprendono un certo angolo $(\mathbf{p},\mathbf{q})=\alpha$ ciascuno di essi è la risultante di due vettori che comprendono l'angolo θ talchè si avrà:

$$\begin{aligned}p^2&=(a^3)^2+(b^3)^2+2a^3b^3\cos\theta\\ q^2&=(3ab^2)^2+(3a^2b)^2+2(3ab^2)(3a^2b)\cos\theta.\end{aligned}$$

Se l'algoritmo esposto verificasse perciò la (18) si dovrebbe avere:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^3&=\mathbf{p}+\mathbf{q}\\ (r^3)^2&=p^2+q^2+2pq\cos\alpha\end{aligned}$$

la cui considerazione deve condurre ad analoghe conclusioni.

[2] Posto $M=a^2+2ab\cos\theta+b^2\,(=r^2)$ la formola scritta si può anche ottenere dalla seguente:

$$r^3=(\sqrt{M})^3=\sqrt{M^3}=M^{\frac{3}{2}}$$

caso particolare di quest'altra che dà le potenze successive di r:

$$r^n=(\sqrt{M})^n=\sqrt{M^n}=M^{\frac{n}{2}} \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

e la quale si può porre facilmente.

sioni non si verifica, poichè mentre il secondo membro della precedente, applicando la nota formola:

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy^2 + 3xz^2 + 3yz^2 + \\ + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2z + 6xyz$$

dà il polinomio ordinato, completo e simetrico:

$$F = a^6 + 6\cos\theta\, a^5b + (3 + 12\cos^2\theta)\, a^4b^2 + \\ + (12\cos\theta + 8\cos^3\theta)\, a^3b^3 + (3 + 12\cos^2\theta)\, a^2b^4 + 6\cos\theta\, ab^5 + b^6:$$

il secondo membro della (19) dà invece l'altro polinomio ordinato, completo e anch'esso simetrico:

$$F' = a^6 + 6\cos\theta\, a^5b + 15\, a^4b^2 + 20\cos\theta\, a^3b^3 + \\ + 15a^2b^4 + 6\cos\theta\, ab^5 + b^6.$$

Quindi poichè non è $F = F'$ l'esposto algoritmo non verifica in generale lo sviluppo del binomio di Newton. Le formole poste esprimono che lo sviluppo in quistione è valido solo quando si ha:

$$F = F'$$

ossia solo quando:

$$3 + 12\cos^2\theta = 15$$
$$12\cos\theta + 8\cos^3\theta = 20\cos\theta.$$

Le su scritte condizioni si traducono com'è evidente nella condizione più generale:

$$x + y\cos^2\theta = x + y$$

essendo x ed y due numeri qualunque. Perchè questa sia valida deve essere:

$$\cos^2\theta = 1$$

onde:

$$\cos\theta = \sqrt{1} = \pm 1$$

onde:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \theta = k\pi \qquad (k = 0, 1, 2, 3 \ldots).$$

Tal risultato esprime che la (18) è valida solo se i due vettori **a** e **b** hanno la stessa direzione: ossia in conclusione che lo sviluppo newtoniano è valido per i soli numeri poichè sappiamo in generale che il calcolo dei numeri è uguale a quello dei vettori aventi la medesima direzione, essendochè p. es. la somma di essi si riduce ad una somma algebrica e il loro prodotto scalare o interno ad un prodotto algebrico.

SALVATORE AUGUSTO TOSCANO.

NOTA. — Non essendosi potute, per un contrattempo, correggere le notazioni qui adoperate onde renderle al tutto conformi a quelle del sistema *intrinseco* (o *assoluto* od *autonomo*) di Calcolo vettoriale proposto dagl'illustri Proff. BURALI-

FORTI e MARCOLONGO, ora universalmente adottato, si dichiarano qui le due modificazioni essenziali da apportare ad esse.

1°. Non è permesso indicare mod **a**, mod **b**,... con le notazioni abbreviate $a, b, \ldots$ ossia indicare i moduli dei vettori mediante la lettera non grassetta uguale a quella grassetta con cui i vettori si indicano. Invero tale convenzione non si può applicare a indicare le espressioni:

$$\operatorname{mod}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}), \qquad \operatorname{mod}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \qquad \operatorname{mod}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$$

visto che p. es. $(\mathbf{a} \pm \mathbf{b})$ " non è una lettera e non è a carattere grassetto „ e che è assurdo d'altro lato porre:

$$\operatorname{mod}(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \operatorname{mod}\mathbf{a} \pm \operatorname{mod}\mathbf{b} = a \pm b.$$

In generale non si può stabilire una convenzione logica fissa, cioè applicabile in ogni caso, relativamente alla specie dei segni atti a indicare i vettori, i loro moduli ecc., e in generale i vari enti di una classe (BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elem. di Calcolo vettoriale*, 1909, nota (4) a pag. 161).

2°. Nel sistema di calcolo vettoriale intrinseco la notazione da adottare per il prodotto interno è la primitiva notazione $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ di Grassmann ed è da abbandonare la notazione **ab** che è propria del prodotto alternato nel sistema di calcolo geometrico di Grassmann-Peano.

SU TRE SISTEMI ∞^1 DI SUPERFICIE P[1] DEL SECOND'ORDINE

e sopra una corrispondenza di indici (1, 2) fra due S_3

1. Consideriamo le equazioni:

$$x_i = a_i u^2 + b_i u + r_i + a_i v^2 + b_i v + s_i + a_i w^2 + b_i w + t_i. \quad (i = 1 \ldots 4). \quad (1)$$

Ponendo eguale a costante uno dei tre parametri, si ottiene una superficie P che varia in una semplice infinità di superficie P, quando si faccia variare la costante.

Ripetendo lo stesso per gli altri parametri si ottengono tre sistemi ∞^1 di superficie P.

Li indichiamo con $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$, $w = \text{cost.}$

Siccome u, v, w entrano nelle (1) allo stesso modo, le superficie dei tre sistemi saranno del medesimo ordine; possiamo determinarlo per una di esse, ad esempio per una superficie del sistema $w = \text{cost.}$

[1] Si chiama superficie P una superficie che ammette un doppio sistema coniugato di coni circoscritti. Ogni superficie rappresentabile parametricamente mediante le equazioni:

$$x_i = \varphi_i(u) + \psi_i(v),$$

è una superficie P.

Vedi in proposito la nota del Prof. S. CORRADO SEGRE: " Sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti „. (R. A. delle Scienze, anno 1907-08, Torino).

Essa sarà rappresentata da:

$$x_i = a_i(u^2 + v^2) + b_i u + c_i v + f_i.$$

Assumiamo come nuove coordinate dei punti di questa superficie:

$$\begin{aligned} x_1 &= u^2 + v^2, \\ x_2 &= u, \\ x_3 &= v, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Eliminando i parametri, si ha:

$$x_1 x_4 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Quest'equazione rappresenta una quadrica a punti ellittici, perchè l'intersezione col piano $x_1 = 0$ o col piano $x_4 = 0$ è una coppia di rette immaginarie coniugate:

$$x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Siccome ogni quadrica dei tre sistemi si può rappresentare con la (2), riferendoci ad un certo tetraedro fondamentale variabile con essa, si conclude che i tre sistemi di superficie P che consideriamo sono composti di quadriche non rigate.

2. Le linee coordinate su ogni quadrica del sistema triplo sono coniche perchè, ponendo eguale a costante due dei parametri, le (1) risultano funzioni di secondo grado di un parametro, perciò rappresentano una linea di second'ordine.

Siccome su ogni quadrica le linee coordinate sono segate da tutte le quadriche dei due sistemi ai quali quella non appartiene, possiamo dire che due quadriche di sistema diverso si segano secondo coniche.

3. Consideriamo una quadrica del sistema $w =$ cost., su essa le linee u e le linee v costituiscono un doppio sistema coniugato. (¹) I coni circoscritti alla quadrica lungo le u hanno i vertici sulla retta rappresentata da:

$$x_i = a_i u + b_i. \qquad (2)$$

Infatti, le tangenti alle v lungo una u concorrono tutte nel punto

---

(¹) Diciamo linee u e linee v, rispettivamente le linee $u =$ cost., $v =$ cost., ossia le linee coordinate. La condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie rappresentata parametricamente mediante le coordinate omogenee x_i del punto eguali a certe funzioni di due parametri u, v, abbia come sistema doppio coniugato il doppio sistema delle linee coordinate, è che le quattro funzioni x_i di u, v siano soluzioni di una stessa equazione alle derivate parziali:

$$A \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + B \frac{\partial \theta}{\partial u} + C \frac{\partial \theta}{\partial v} + D\theta = 0,$$

ove θ è la funzione di u, v che si considera, A, B, C, D sono coefficienti dei quali A non può essere nullo. Nel caso nostro, le x_i sono soluzioni dell'equazione: $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0$.

di coordinate $dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv = \frac{dx_i}{du}$ essendo, per $v = \text{cost.}$, $\frac{\partial x_i}{dv} = 0$; ora si ha, derivando le (1):

$$\frac{\partial x_i}{du} = 2a_i u + b_i ;$$

tale punto è fisso per una medesima linea u, mentre varia sopra la retta determinata dai punti di coordinate a_i e b_i al variare di u.

Analogamente i coni circoscritti alla quadrica lungo le v hanno i vertici sulla retta rappresentata da:

$$x_i = a_i v + c_i . \tag{3}$$

Le generatrici di un cono circoscritto alla quadrica ed uscente da un punto della retta (2) sono tangenti coniugate delle tangenti alla linea secondo cui il cono tocca la quadrica; ma ogni generatrice è tangente alla sezione fatta dal piano che essa determina con la retta (2), perciò i piani per questa retta segano la quadrica secondo le linee coniugate delle u ossia secondo le v.

Analogamente i piani per la retta (3) segano la quadrica secondo le linee coniugate delle v, ossia secondo le u; le due rette sono dunque reciproche rispetto alla quadrica considerata.

Per la stessa ragione sono reciproche rispetto a tutte le quadriche del sistema $w = \text{cost.}$, e poichè hanno il punto di coordinate a_i a comune, sono loro tangenti in a_i.

Analogamente le rette:

$$x_i = a_i u + b_i , \qquad x_i = a_i w + d_i$$

sono tangenti in a_i a tutte le quadriche del sistema $v = \text{cost.}$, e le rette:

$$x_i = a_i v + c_i , \qquad x_i = a_i w + d_i$$

sono tangenti in a_i a tutte le quadriche del sistema $u = \text{cost.}$

Concludiamo che i tre sistemi ∞^1 di quadriche considerate hanno un punto A a comune, e che le quadriche d'uno stesso sistema sono tangenti tra loro in quel punto.

Le linee coordinate di tutte queste quadriche formano tre sistemi ∞^2 tali che quelle d'uno stesso sistema sono tangenti fra loro in a_i.

4. Poniamo:

$$u = \frac{u'}{t'} , \qquad v = \frac{v'}{t'} , \qquad w = \frac{w'}{t'} ;$$

indi interpretiamo u', v', w', t', che possiamo indicare con u, v, w, t, come coordinate cartesiane omogenee di punto in uno spazio Σ'; chiamiamo Σ lo spazio sinora considerato.

Sostituendo nelle relazioni (1), esse prendono la forma:

$$\rho x_i = a_i (u^2 + v^2 + w^2) + b_i ut + c_i vt + d_i vt + b_i t^2 .$$

Queste rappresentano fra Σ e Σ' una corrispondenza di indici (1, 2).

Ad un punto di P di Σ corrispondono in Σ' due punti P' e Q'; viceversa, ad un punto di P' di Σ', corrisponde in Σ un solo punto P.

Se P descrive in Σ una superficie od una linea, i suoi omologhi descrivono in generale in Σ' due superficie o due linee, però possono anche descrivere una sola superficie od una sola linea.

La corrispondenza suddetta determina fra i punti di Σ' una corrispondenza (11) nella quale sono omologhi due punti come P' e Q', e poichè dato P' è determinato Q' e viceversa, la corrispondenza è involutoria.

Due superficie o due linee descritte rispettivamente da P' e da Q' sono omologhe nella detta corrispondenza.

Un piano di Σ di equazione $\Sigma\xi_i x_i = 0$ ha per omologo in Σ' una sfera di equazione:

$$\Sigma\xi_i\,[a_i(u^2 + v^2 + w^2) + b_i ut + c_i vt + d_i wt + e_i t] = 0,$$

ossia, scrivendo per semplicità con (ξa) ogni formola del tipo $\Sigma\xi_i a_i$,

$$(\xi, a)(u^2 + v^2 + w^2) + (\xi, b)\,ut + (\xi, c)\,vt + (\xi, d)\,wt + (\xi, e)\,t^2 = 0.$$

Ad un fascio di piani di Σ, corrisponde in Σ' un fascio di sfere e ad una stella di piani una rete di sfere, come si può vedere dalle equazioni.

Alla retta, asse del fascio di piani, corrisponde il cerchio base del fascio di sfere, quindi al sistema ∞^3 dei piani di Σ corrisponde in Σ' un sistema ∞^3 di sfere Γ'; al sistema ∞^4 delle rette di Σ corrisponde in Σ' un sistema ∞^4 di cerchi γ'.

Per tre punti P_1, P_2, P_3 di Σ passa un solo piano; quindi per sei punti $P'_1, Q'_1, P'_2, Q'_2, P'_3, Q'_3$ di Σ' passa una sfera del sistema, e poichè una sfera che passa per P'_1, P'_2, P'_3, deve contenere anche Q'_1, Q'_2, Q'_3, essendo essa unita nella corrispondenza (11) di Σ', ne viene che per tre punti di Σ' passa una ed una sola sfera Γ'.

Questo lo si vede subito, se osserviamo che il sistema ∞^3 di sfere Γ' si può rappresentare con:

$$\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \lambda_4 S_4 = 0,$$

essendo $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 0$ le equazioni di quattro Γ' non per uno stesso punto, ma arbitrarie.

Analogamente, per due punti P_1, P_2 di Σ passa una sola retta, quindi per i punti omologhi P'_1, Q'_1, P'_2, Q'_2 passa un cerchio λ'. Ma un cerchio λ' per P'_1, P'_2 contiene Q'_1, Q'_2, quindi per due punti di Σ' passa uno ed un solo cerchio λ'.

Tre piani di Σ hanno un sol punto a comune e le tre sfere omologhe in Σ' hanno due soli punti a comune pei quali non passano tutte le altre Γ', quindi in Σ' non vi sono punti fondamentali all'infuori dell'assoluto, comune a tutte le sfere.

Sia
$$\xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w + \xi_4 t = 0,$$
l'equazione di un piano di Σ'; considerandola insieme alle (1) e tenendo conto delle posizioni fatte al paragrafo 4, si ottiene la rappresentazione della superficie omologa in Σ, essa è una quadrica. Quindi al sistema ∞^3 di piani di Σ' corrisponde in Σ un sistema ∞^3 di quadriche Δ.

Questo sistema contiene evidentemente i tre sistemi ∞^1 di quadriche considerate. Essi corrispondono rispettivamente ai tre sistemi ∞^1 di piani paralleli ai piani coordinati di Σ' ($u=0$, $v=0$, $w=0$).

Ad una retta di Σ' di equazioni:
$$\begin{cases} \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w + \xi_4 t = 0, \\ \xi'_1 u + \xi'_2 v + \xi'_3 w + \xi'_4 t = 0, \end{cases}$$
corrisponde in Σ una linea di cui la rappresentazione si ottiene considerando queste equazioni insieme alle (1).

Dalle (1), eliminando due parametri, si ottengono le x_i funzioni di secondo grado d'un solo parametro, le quali rappresentano una conica.

Altrimenti: una retta r' di Σ' incontra una Γ' in due punti di cui gli omologhi devono stare sul piano corrispondente a Γ', e sulla curva corrispondente ad r', e siccome essi devono essere due soli, la curva sarà una conica.

Al sistema ∞^4 delle rette di Σ' corrisponde in Σ un sistema ∞^4 di coniche δ.

Tre punti di Σ: P_1, P_2, P_3, hanno per omologhi in Σ' i punti P'_1, P'_2, P'_3; Q'_1, Q'_2, Q'_3 i quali determinano otto piani:
$$\begin{array}{llll} P'_1P'_2P'_3, & P'_1P'_2Q'_3, & P'_1Q'_2P'_3, & Q'_1P'_2P'_3, \\ Q'_1Q'_2Q'_3, & Q'_1Q'_2P'_3, & Q'_1P'_2Q'_3, & P'_1Q'_2Q'_3, \end{array}$$
se i punti P_i non sono allineati.

A questi corrispondono in Σ otto quadriche Δ.

Se i punti P_1, P_2, P_3 si avvicinano indefinitamente sul piano π, i punti P'_1, P'_2, P'_3; Q'_1, Q'_2, Q'_3 si avvicinano pure indefinitamente sulla sfera omologa di π.

Le Δ per P_1, P_2, P_3 si riducono a due e sono quelle corrispondenti ai piani $(P'_1P'_2P'_3)$, $(Q'_1Q'_2Q'_3)$ tangenti alla sfera. Quindi vi sono due quadriche Δ tangenti in un dato punto ad un dato piano.

Le Δ passanti per due punti P_1, P_2 sono quelle corrispondenti ai piani per le rette $\overline{P'_1P'_2}$, $\overline{P'_1Q'_2}$, $\overline{P'_2Q'_1}$, $\overline{Q'_1Q'_2}$, quindi costituiscono quattro sistemi ∞^1; le quadriche corrispondenti ai piani $(P'_1P'_2Q'_1)$, $(P'_1Q'_1Q'_2)$ hanno un punto doppio in P_1 e quelle corrispondenti a $(P'_1P'_2Q'_2)$, $(P'_2Q'_1Q'_2)$ hanno un punto doppio in P_2.

Le Δ passanti per un punto P sono quelle che corrispondono ai piani delle due stelle di centri P' e Q', costituiscono perciò due sistemi ∞^2, i quali hanno a comune ∞^1 coni aventi i vertici in P: sono i coni corrispondenti ai piani del fascio $\overline{P'_1Q'_1}$.

Agli ∞^2 piani tangenti ad una Γ' corrispondono in Σ ∞^2 Δ tangenti ad un piano π.

Per un punto P' passano ∞^1 piani tangenti a Γ', quindi vi sono $\infty^1 \Delta$ passanti per un punto P e tangenti ad un piano π.

Per una retta r' passano due piani tangenti a Γ', quindi vi sono due Δ passanti per una conica δ e tangenti ad un piano π.

Per due punti arbitrari P_1, P_2 passano quattro coniche δ corrispondenti alle rette $\overline{P'_1Q'_2}$, $\overline{P'_1P'_2}$, $\overline{P'_2Q'_1}$, $\overline{Q'_1Q'_2}$.

Vi sono due δ tangenti in un punto ad una data retta e quindi due sistemi ∞^1 di δ tangenti in punto ad un dato piano.

Per un punto P passano due sistemi ∞^2 di coniche δ corrispondenti alle rette delle due stelle di centri P', Q', essi hanno a comune una conica corrispondente alla retta $P'Q'$.

5. La corrispondenza considerata si può far prevenire come prodotto d'una corrispondenza (12) fra Σ ed una V_3^2 di S_4, con una corrispondenza (11) fra Σ' e la stessa varietà. Il procedimento seguente ci farà vedere meglio la natura del sistema delle Δ contenente i tre sistemi ∞^1 di superficie P considerati.

Consideriamo in un S_4 contenente Σ e Σ' una varietà quadratica $\wedge$ rappresentata dalle equazioni:

$$x_i = a_i(u^2 + v^2 + w^2) + b_i u + c_i v + d_i w + e_i \; (i = 1 \ldots 5).$$

È una V_3^2 a punti ellittici come si può vedere dall'equazione che si ottiene eliminando i parametri. A questo fine consideriamo come nuove coordinate dei punti di $\wedge$:

$$\begin{aligned} x_5 &= u^2 + v^2 + w^2, \\ x_4 &= u, \\ x_3 &= v, \\ x_2 &= w, \\ x_1 &= 1, \end{aligned}$$

dalle quali si ottiene l'equazione:

$$x_1x_5 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0.$$

Gli $S_3: x_1 = 0$, $x_5 = 0$, segano la V_3^2 rispettivamente secondo due coni rappresentati da:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0; \\ x_5 &= 0, & x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0', \end{aligned}$$

i quali sono immaginari.

Questa V_3^2 contiene un sistema triplo semplicemente infinito di quadriche, per ∞^1 delle quali è costante il parametro u, per ∞^1, il parametro v, per le altre ∞^1, il parametro w; le indicheremo rispettivamente con P_u, P_v, P_w. Tale sistema triplo lo diremo caratteristico per la V_3^2. Le P_u sono sezioni della V_3^2 con gli S_3 del fascio:

$$x_4 - ux_1 = 0,$$

che ha per base il piano di equazioni: $x_1 = 0$, $x_4 = 0$; tale piano è tangente alla V_3^2 nel punto $(0, 0, 0, 0, 1)$, perciò tutte le P_u hanno nel punto $(0, 0, 0, 0, 1)$ lo stesso piano tangente. Analogamente le P_v sono tangenti in quel punto al piano $(x_3 = 0, x_1 = 0)$, e le P_w, al piano $(x_2 = 0, x_1 = 0)$.

Le intersezioni di questi tre piani sono le rette luoghi dei vertici dei coni tangenti a Λ lungo le linee coordinate.

Infatti, la linea $x_i = a_i u + b_i$ deve stare in tutti gli S_3 che contengono le P_v, ed in tutti gli S_3 che contengono le P_w, sarà la retta $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$. Analogamente dicasi per le altre.

Proiettiamo Λ sullo spazio Σ da un punto P ad essa esterno. Tutti i punti di Λ hanno per immagini i punti di Σ interni alla quadrica ψ traccia della V_3^2 cono, di vertice P e tangente a Λ.

Un punto di Σ interno a ψ ha per corrispondenti due punti di Λ, viceversa un punto di Λ ha per omologo un solo punto di Σ. La corrispondenza è quindi di indici (12).

Alle ∞^4 sezioni spaziali di Λ corrispondono ∞^4 quadriche inscritte in ψ.

Ma il cono che da P proietta una quadrica di Λ, la incontra ancora in una quadrica, perciò ognuna di quelle ∞^4 quadriche di Σ corrisponde a due quadriche distinte su Λ.

Due quadriche di Λ hanno a comune una conica, ne viene che le quadriche del sistema ∞^4 si intersecano secondo coniche.

Le ∞^3 sezioni di Λ per un suo punto Q hanno per omologhe ∞^3 quadriche per un punto. Viceversa ∞^3 quadriche per un punto interno a ψ e inscritte in ψ, hanno rispettivamente per immagini su Λ due sistemi ∞^3 di sezioni spaziali fatte per due punti.

Ai tre sistemi ∞^1 delle superficie caratteristiche di Λ, corrispondono tre sistemi ∞^1 di quadriche contenute entro una tripla infinità per il punto S, immagine del punto $(0, 0, 0, 0, 1)$. Le proprietà di cui godono le quadriche del sistema caratteristico sono proiettive, quindi i tre sistemi di proiezione sono composti di superficie P tali che tutte quelle d'uno stesso sistema sono tangenti in S ad un medesimo piano. Le rette intersezioni dei tre piani tangenti sono i luoghi dei vertici dei coni circoscritti alle superficie lungo le linee coordinate.

Le ∞^3 quadriche di Λ sezioni degli S_3 per P, si proiettano doppiamente nelle porzioni degli ∞^3 piani di Σ contenute entro ψ.

Poniamo ora $u = \frac{u'}{t'}$, $v = \frac{v'}{t'}$, $w = \frac{w'}{t'}$ ed interpretiamo u', v', w', t' come coordinate cartesiane omogenee di punto in Σ'. Le relazioni:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = t'^2 : w't' : v't' : u't' : u'^2 + v'^2 + w'^2$$

rappresentano una corrispondenza biunivoca fra i punti di Σ' ed i punti di $\wedge$.

Al punto $(0, 0, 0, 0, 1)$ corrisponde il piano all'infinito di Σ'. Alle ∞^3 sezioni per esso:

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots \xi_4 x_4 = 0,$$

corrispondono superficie rappresentate da equazioni del tipo:

$$t'(\xi_1 t' + \xi_2 w' + \xi_3 v' + \xi_4 u') = 0,$$

ossia, prescindendo dal piano $t' = 0$, corrispondono gli ∞^3 piani di Σ'.

Alle P_u, sezioni di $\wedge$ cogli S_3 del fascio $x_4 - cx_1 = 0$, corrispondono i piani $(u' - c) = 0$, ossia i piani paralleli al piano coordinato $u' = 0$, di equaz. $u' =$ cost.

Analogamente alle P_v corrispondono i piani v' cost., alle P_w, i piani $w =$ cost.

Alle ∞^4 sezioni di $\wedge$, corrispondono le ∞^4 sfere di Σ':

$$\xi_1 t^2 + \xi_2 w't' + \xi_3 v't' + \xi_4 u't' + \xi_5(u'^2 + v'^2 + w'^2) = 0.$$

Ad ∞^3 sezioni per un punto, corrisponderanno ∞^3 sfere per un punto.

Riassumendo: abbiamo stabilito fra Σ e $\wedge$ la seguente corrispondenza di indici (12):

Σ	$\wedge$
Un punto,	due punti,
∞^4 quadriche inscritte in una quadrica ψ,	∞^4 sezioni spaziali,
una quadrica del sistema,	due quadriche sezioni,
∞^3 quadriche per un punto,	∞^3 sezioni per un punto, ∞^3 sezioni per un altro punto,
tre sistemi ∞^1 di superficie P,	tre sistemi ∞^1 di superficie caratteristiche, tre sistemi ∞^1 di quadriche per un punto S_1,
∞^3 piani,	∞^3 quadriche sezioni degli S_3 per P, centro di proiezione.

Tra Σ' e $\wedge$ si ha la corrispondenza di indici (11):

Σ'	$\wedge$
∞^4 sfere,	∞^4 quadriche sezioni,
∞^3 sfere per un punto,	∞^3 quadriche per un punto,

Σ'	Λ
∞^3 piani,	∞^3 quadriche per il punto (00001), comune alle superficie caratteristiche,
tre sistemi ∞^1 di piani paralleli ai piani coordinati,	i tre sistemi caratteristici,
piano all'infinito,	punto (00001).

Facendo il prodotto delle due corrispondenze, si ha una corrispondenza (12) fra Σ e Σ'.

Σ	Σ'
∞^4 quadriche inscritte in una quad. ϕ,	∞^4 sfere,
una quadrica del sistema,	due sfere,
∞^3 quadriche per il punto S, immagine del punto (00001),	∞^3 sfere per un punto S' ed ∞^3 piani,
∞^3 piani,	∞^3 sfere,
∞^2 piani per S,	∞^2 piani per S',
tre sistemi ∞^1 di quadriche P per S.	tre sistemi ∞^1 di piani paralleli ai piani coord.,
	tre sistemi ∞^1 di sfere per S',
punto S,	punto S' e piano all'infinito.

Questa corrispondenza è dello stesso tipo di quella già considerata fra Σ e Σ', quindi possiamo dire che il sistema delle Δ si compone di quadriche per un punto fisso inscritte in una quadrica fissa.

Diciamo S quel punto, esso ha per omologhi un punto S' ed il piano all'infinito.

La corrispondenza involutoria (cfr. pag. 157 e seg.) di Σ' è tale che ad S' corrisponde il piano all'infinito, sono uniti i piani per S', alle sfere per questo punto corrispondono i piani di Σ', ad una sfera generica corrisponde una sfera; è quindi un'inversione di centro S'.

Due quadriche Δ_1, Δ_2 si tagliano secondo due coniche, di cui l'una, per S, ha per omologhi una retta ed un cerchio. La retta è l'intersezione dei piani $\pi'_1 \pi'_2$ omologhi di Δ_1 e Δ_2: il cerchio è l'intersezione delle sfere che indichiamo con Δ'_1, Δ'_2, omologhe di Δ_1 e Δ_2.

I due piani e le due sfere si corrispondono rispettivamente nell'inversione.

L'altra conica ha per immagine i due cerchi $(\Delta'_1 \pi'_2)$, $(\Delta'_2 \pi'_1)$.

Due piani $u =$ cost., hanno a comune una retta all'infinito che ha per corrispondente nell'inversione il punto S', quindi le P_u non hanno punti comuni, all'infuori di S.

Analogamente dicasi per le P_v e le P_w.

Due quadriche P, di sistema diverso, si tagliano sempre secondo due coniche.

Consideriamo in Σ' tre piani $u = v = w = k$; essi hanno a comune un punto M′ che, al variare di k, descrive una retta, la quale ha per omologo nell'inversione un cerchio per S′.

Quindi, se consideriamo tre quadriche P, appartenenti rispettivamente ai tre sistemi corrispondenti ai valori $u = v = w = k$, abbiamo che le tre coniche per S, da esse determinate, hanno a comune ancora un punto M omologo di M′.

Variando k, M descrive una conica che ha con ogni quadrica dei tre sistemi un solo punto comune.

Per ogni punto di questa conica esce una quadrica P di ciascun sistema.

Dott. Emma Cairo.

SULLA DIVISIBILITÀ DELLA SOMMA DI POTENZE SIMILI

di numeri interi consecutivi pel numero dei suoi termini

In una mia precedente *Nota* mi sono occupato della divisibilità per p della somma di potenze simili di p numeri interi consecutivi nell'ipotesi che p sia numero primo. (1) Nella presente *Nota* mi propongo di trattare la stessa questione nel caso generale di un numero k primo o composto e di risolvere anche il problema di determinare, mediante una formula semplice e generale, il resto della divisione in tutti i casi. (2)

Per brevità indicheremo con $S(k, n)$ la somma

$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (k-1)^n + k^n$$

e con $Z(k, n)$ la somma dei soli termini di $S(k, n)$ che sono primi con k; bisogna per altro notare che il primo simbolo può anche significare la somma delle potenze n^e di k numeri interi consecutivi qualunque, e anche, più generalmente, delle potenze n^e di un sistema completo

(1) *Di una proprietà dei numeri primi*, "Periodico di Matematica", anno XXVII, fasc. II, Settembre-Ottobre 1911.

(2) Credo che tale questione generale non sia ancora stata risoluta da alcuno. Come avevo accennato nella citata mia Nota, E. Catalan in una sua Memoria: *Quelques théorèmes d'arithmétique* nei "Mémoires de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique", tomo XLVI, a. 1886 tratta bensì, ma soltanto in minima parte, tale questione di divisibilità. Ivi è considerato in modo assai incompleto il caso di k pari, il quale invero presenta le maggiori difficoltà, e non è nemmeno posta la questione di determinare il resto della divisione. Ecco perchè ho ritenuto utile studiare di nuovo e con altri mezzi tale oggetto e cercare una soluzione completa dell'interessante questione.

di numeri incongrui (mod. k), ed il secondo la somma delle potenze n^e di $\varphi(k)$ numeri interi primi con k ed incongrui (mod. k), dove con $\varphi(k)$ intendiamo di indicare, come si usa, il numero dei numeri primi con k e non maggiori di k. Ed infatti noi consideriamo tali somme unicamente dal punto di vista della teoria delle congruenze, cioè dei resti delle loro divisioni per k.

Divideremo la nostra ricerca in due parti. Innanzi tutto ci proponiamo di risolvere la questione della divisibilità di $S(k, n)$ per k, esponendone tutti i casi possibili, e questa prima parte ci condurrà pure ad alcune conclusioni analoghe per $Z(k, n)$ (1); nella seconda parte ci occuperemo della non divisibilità e determineremo per $S(k,n)$ e $Z(k,n)$ due formule che permettono di trovare il resto della divisione e che offrono il vantaggio di esprimere in forma sintetica il risultato complessivo di tutta la ricerca (Teoremi V e VI).

I.

Teorema I. — *Se* $\mathbf{k}$ *è un numero dispari ed* n *è un numero naturale non divisibile per alcun divisore primo, diminuito dell'unità, del numero* $\mathbf{k}$, $S(\mathbf{k}, \mathrm{n})$ *è un multiplo di* $\mathbf{k}$.

Dimostrazione. — Distingueremo tre casi:

a) *Il numero* $\mathrm{k} = \mathrm{p}$ *è primo e dispari.* (2) Sia g una radice primitiva di p; allora

$$g^0, g, g^2, \ldots g^{p-2}$$

è un sistema completo di $p-1$ numeri incongrui (mod. p) e non divisibili per p; quindi si ha

$$S(p, n) \equiv Z(p, n) \equiv 1 + g^n + g^{2n} + \ldots$$
$$\ldots + g^{(p-2)n} \equiv \frac{g^{(p-1)n} - 1}{g^n - 1} \qquad (\text{mod. } p) \qquad (1)$$

Ora, poichè n per ipotesi non è divisibile per $p-1$ $(p > 2)$ e g è una radice primitiva di p, la differenza $g^n - 1$ non è un multiplo di p, mentre lo è $g^{(p-1)n} - 1$. Ne segue che $S(p, n)$ e $Z(p, n)$ sono divisibili per p.

b) *Il numero* $\mathrm{k} = \mathrm{p}^\alpha$ *è una potenza di un numero primo dispari.* — Sia g una delle $\varphi\varphi(p^\alpha)$ radici primitive di p^α e indichiamo per comodità con ω il numero $\varphi(p^\alpha)$. Allora le potenze

$$g^0, g, g^2, \ldots, g^{\omega-1}$$

(1) Se $n = 0$ si ha $S(k, 0) = k$ e $Z(k, 0) = \varphi(k)$, quindi supporremo sempre $n > 0$; se $k = 1$ si ha $S(1, n) = 1$, $Z(1, n) = 1$; perciò escluderemo questo caso.

(2) Questo caso fu già da me considerato nella citata *Nota*, basandomi sopra un teorema relativo alle congruenze binomie di grado n. Ora ne dò una seconda dimostrazione conforme a quella del caso $b)$ seguente.

formano un sistema completo di numeri incongrui (mod. p^α) con esclusione di tutti e dei soli numeri divisibili per p. Si separino i numeri

$$1, 2, 3 \ldots (p^\alpha - 1), p^\alpha$$

in due gruppi, il primo dei quali contenga tutti i numeri

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega$$

che non sono divisibili per p e che perciò risultano, salvo l'ordine, rispettivamente congrui alle sopra notate potenze di g (mod. p^α), e il secondo i rimanenti, cioè

$$p, 2p, 3p, \ldots (p^{\alpha-1} - 1)\, p, p^\alpha.$$

In primo luogo avremo

$$Z(p^\alpha, n) = x_1{}^n + x_2{}^n + \ldots + x_\omega{}^n \equiv 1 + g^n + g^{2n} + \ldots + g^{(\omega-1)n} \pmod{p^\alpha}$$

ossia

$$Z(p^\alpha, n) \equiv \frac{g^{\omega n} - 1}{g^n - 1} \qquad (\text{mod. } p^\alpha).$$

Ora, essendo g una radice primitiva di p^α, epperciò anche di p, e poichè per ipotesi n non è divisibile per $p-1$, la differenza $g^n - 1$ non è un multiplo di p, mentre $g^{\omega n} - 1$ è divisibile per p^α. Ne segue che

$$Z(p^\alpha, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^\alpha). \tag{2}$$

In secondo luogo, poichè la somma delle potenze n^e dei numeri del secondo gruppo è

$$p^n\,[1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (p^{\alpha-1} - 1)^n + p^{(\alpha-1)n}] = p^n\, S(p^{\alpha-1}, n),$$

si ha la *relazione fondamentale*

$$S(p^\alpha, n) = Z(p^\alpha, n) + p^n\, S(p^{\alpha-1}, n). \tag{3}$$

Dalla quale si riconosce, in virtù della congruenza (2), che se fosse

$$S(p^{\alpha-1}, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^{\alpha-1}),$$

cioè se il teorema fosse dimostrato per la potenza $p^{\alpha-1}$, esso sussisterebbe anche per p^α. Ma il teorema fu già dimostrato nel caso *a)* per $\alpha = 1$, dunque esso si verifica per qualunque potenza del numero p.

c) *Sia* $k = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots = Aa^\alpha = Bb^\beta = Cc^\gamma = \ldots$ *un prodotto di potenze di numeri primi dispari.* — È facile dimostrare che $S(k, n)$ è divisibile per ciascuna delle potenze $a^\alpha, b^\beta, c^\gamma, \ldots$ e quindi pel loro prodotto k. Riferendoci p. es. ad a^α, è chiaro che i termini di $S(k, n)$ si possono separare in A sezioni contenenti ciascuna le potenze n^e di a^α numeri interi *consecutivi*, cosicchè abbiamo evidentemente la congruenza

$$S(k, n) \equiv A \,.\, S(a^\alpha, n) \qquad (\text{mod. } a^\alpha). \tag{4}$$

E infine, poichè per ipotesi n non è multiplo di $a-1$, pel caso b) è $S(a^\alpha, n)$ divisibile per a^α; per conseguenza $S(k, n)$ è un multiplo di a^α. Analogamente si proceda per $b^\beta, c^\gamma, \ldots$.

Così il teorema è dimostrato.

Teorema II. — *La somma* $S(2^\lambda, n)$ *è divisibile per* 2^λ *se* n *è dispari e maggiore dell'unità ed è* $\lambda > 1$; *in ogni altro caso divisa per* 2^λ *dà il resto* $2^{\lambda-1}$. (1)

Dimostrazione. — Quando è $\lambda = 1$ ed n un numero naturale qualsiasi, si ha

$$S(2, n) = 1 + 2^n \equiv 1 \equiv 2^0 \pmod{2};$$

in pari tempo notiamo che è

$$Z(2, n) = 1 \equiv 2^0 \pmod{2}. \tag{5}$$

Esaurito così il caso di $\lambda = 1$, supporremo d'ora innanzi $\lambda > 1$.

La relazione fondamentale (3) sussiste evidentemente anche per $p = 2$ e in questo caso, essendo

$$Z(2^\lambda, n) = 1^n + 3^n + 5^n + \ldots + (2^\lambda - 1)^n,$$

essa diviene

$$S(2^\lambda, n) = [1^n + 3^n + 5^n + \ldots + (2^\lambda - 1)^n] + 2^n S(2^{\lambda-1}, n). \tag{6}$$

Ora, è noto che per $\lambda \geqq 2$ i numeri dispari minori di 2^λ, cioè

$$1, 3. 5, \ldots (2^\lambda - 1)$$

sono rispettivamente congrui (mod. 2^λ), salvo l'ordine, ai numeri

$$5^0, 5, 5^2 \ldots 5^{\eta-1}, -5^0, -5, -5^2, \ldots -5^{\eta-1},$$

dove $\eta = 2^{\lambda-2}$. (2) Perciò abbiamo

$$\begin{aligned} Z(2^\lambda, n) \equiv 1 + 5^n + 5^{2n} + \ldots + 5^{(\eta-1)n} + \\ + (-1)^n + (-5)^n + (-5^2)^n + \ldots + (-5^{\eta-1})^n \pmod{2^\lambda}, \end{aligned}$$

e quindi se n è *dispari* si ha sempre

$$Z(2^\lambda, n) \equiv 0 \pmod{2^\lambda}, \tag{7}$$

invece se n è *pari*

$$Z(2^\lambda, n) \equiv 2 \frac{5^{\eta n} - 1}{5^n - 1} \pmod{2^\lambda}. \tag{8}$$

---

(1) Come si vede, in questo teorema viene considerato anche il caso della non divisibilità di $S(2^\lambda, n)$ per 2^λ. Ciò riesce opportuno per stabilire in modo esauriente il successivo Teorema III, nel quale si considera k numero pari qualunque.

(2) Cfr. p. es. *Lezioni sulla teoria dei numeri* di P. G. Lejeune Dirichlet, pubblicate da R. Dedekind, § 130.

Ciò premesso, distingueremo tre casi.

a) *Sia* n $=1$. — In tal caso la (6) in virtù della (7) ci dà la congruenza

$$S(2^\lambda, 1) \equiv 2\, S(2^{\lambda-1}, 1) \qquad (\text{mod. } 2^\lambda),$$

epperò si avrà

$$S(2^\lambda, 1) \equiv 2^{\lambda-1} \qquad (\text{mod. } 2^\lambda)$$

ove sia

$$S(2^{\lambda-1}, 1) \equiv 2^{\lambda-2} \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda-1});$$

ma ciò si verifica per $\lambda=2$, giacchè in questo caso l'ultima congruenza diviene

$$S(2, 1) \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

la quale è evidente. Dunque se $n=1$, per ogni valore di $\lambda \geqq 1$ si ha

$$S(2^\lambda, 1) \equiv 2^{\lambda-1} \qquad (\text{mod. } 2^\lambda).$$

b) *Sia* n >1 *e dispari.* — Allora la (6) in virtù della (7) ci dà

$$S(2^\lambda, n) \equiv 2^n\, S(2^{\lambda-1}, n) \qquad (\text{mod. } 2^\lambda) \tag{9}$$

e perciò si avrà

$$S(2^\lambda, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2^\lambda) \tag{10}$$

qualora sia

$$S(2^{\lambda-1}, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda-1}).$$

Ma è chiaro che per $\lambda=2$ e per $\lambda=3$, essendo $n \geqq 3$, la (9) si riduce alla (10). Quindi se $n \geqq 3$ e *dispari*, per ogni valore di $\lambda > 1$ sussiste la congruenza (10).

c) *Sia* n *pari.* — In questo caso dalle (6) e (8) deduciamo

$$S(2^\lambda, n) \equiv 2\,\frac{5^{\eta n}-1}{5^n-1} + 2^n\, S(2^{\lambda-1}, n) \qquad (\text{mod. } 2^\lambda). \tag{11}$$

Innanzi tutto per $\lambda=2$ si ricava direttamente

$$S(2^2, n) = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 3^n \equiv 2\,\frac{5^{\eta n}-1}{5^n-1} \equiv 2\ (\text{mod. } 2^2) \tag{12}$$

sia perchè n è pari sia perchè $\eta=1$.

Ciò posto, passiamo al caso di $\lambda \geqq 3$ e dimostriamo che è

$$\frac{5^{\eta n}-1}{5^n-1} \equiv 2^{\lambda-2} \qquad (\text{mod. } 2^\lambda). \tag{13}$$

È noto che se $\nu \geqq 3$ il numero 5 appartiene all'esponente $2^{\nu-2}$ (mod. 2^ν); dunque se 2^μ è la massima potenza di 2 che divida n, la differenza 5^n-1 sarà divisibile per $2^{\mu+2}$ e non per $2^{\mu+3}$ (ed è qui $\mu \geqq 1$, essendo n pari). Quindi si ha

$$5^n = 1 + h2^{\mu+2},$$

dove h è numero dispari. Secondo la legge binomiale si ha

$$5^{\eta n} = (1 + h2^{\mu+2})^{\eta} = 1 + \binom{\eta}{1} h2^{\mu+2} + \binom{\eta}{2} h^2 2^{2(\mu+2)} + \dots$$
$$\dots + \binom{\eta}{r} h^r 2^{r(\mu+2)} + \dots,$$

onde

$$\frac{5^{\eta n}-1}{5^n-1} = 2^{\lambda-2} + \frac{\eta!}{2!\,(\eta-2)!} h2^{\mu+2} + \dots$$
$$\dots + \frac{\eta!}{r!\,(\eta-r)!} h^{r-1} 2^{(\mu+2)(r-1)} + \dots.$$

Ora, in questo sviluppo il secondo termine contiene il fattore $2^{\lambda+\mu-1}$, il quale, essendo per ipotesi $\mu \geqq 1$, non è inferiore a 2^{λ}; inoltre tutti gli altri termini sono pure divisibili per 2^{λ}, poichè $r!$ contiene il fattore 2 con un esponente che non può superare $r-1$. Così la (13) è dimostrata.

Per la (8) si ha quindi

$$Z(2^{\lambda}, n) \equiv 2^{\lambda-1} \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda}), \tag{14}$$

epperò la (11) si riduce alla seguente congruenza

$$S(2^{\lambda}, n) \equiv 2^{\lambda-1} + 2^n S(2^{\lambda-1}, n) \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda}).$$

Dalla quale, essendo $n \geqq 2$, risulta che è

$$S(2^{\lambda}, n) \equiv 2^{\lambda-1} \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda})$$

qualora sia

$$S(2^{\lambda-1}, n) \equiv 2^{\lambda-2} \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda-1}).$$

Ma ciò si verifica, come si vede dalla (12), per $\lambda = 2$; dunque se n è *pari*, per ogni valore di $\lambda \geqq 1$ si ha

$$S(2^{\lambda}, n) \equiv 2^{\lambda-1} \qquad (\text{mod. } 2^{\lambda}).$$

Così il teorema è dimostrato.

Corollario. — *Se* n *è un numero naturale, la somma* $S(2^{\lambda}, n)$ *è sempre divisibile per* $2^{\lambda-1}$.

Teorema III. — *Se* k *è un numero pari ed* $n > 1$ *è dispari, la somma* $S(k, n)$ *è divisibile per* k *o soltanto per* $\frac{1}{2}k$ *secondo che* k *è o non è divisibile per* 4; *se* $n = 1$, *allora* $S(k, n)$ *è divisibile soltanto per* $\frac{1}{2}k$; *se, infine,* n *è pari,* $S(k, n)$ *è divisibile soltanto per* $\frac{1}{2}k$, *ove inoltre* n *non sia multiplo di alcuno dei fattori primi, diminuito dell'unità, del numero* k.

Per la dimostrazione basta ricorrere ai Teoremi I e II e al precedente Corollario e adottare un procedimento identico a quello tenuto nella dimostrazione del caso *c*) nel Teorema I.

Osservazione. — Con le relazioni (1), (2), (5), (7) e (14) emerge dalle precedenti dimostrazioni che la somma $Z(p^{\alpha}, n)$, ove p sia primo >2 si comporta in modo identico a quello della somma $S(p^\alpha, n)$; lo stesso avviene per le due somme $S(2^\lambda, n)$ e $Z(2^\lambda, n)$ eccettuato il solo caso di $n=1$ con $\lambda \geqq 2$, nel quale $Z(2^\lambda, n)$ è divisibile per 2^λ, mentre $S(2^\lambda, n)$ dà il resto $2^{\lambda-1}$. Tratteremo nel Teorema VI il caso di $Z(k, n)$ nell'ipotesi che k non sia potenza di un numero primo.

II.

Compiuta la prima parte della nostra ricerca, veniamo ora a considerare anche i casi in cui $S(k, n)$ non è divisibile per k. Ciò è stato già fatto per $k=2^\lambda$ nel Teorema II; ci resta dunque da trattare la questione per k diverso da una potenza di 2.

Teorema IV. — *Se* p *è un numero primo dispari ed* n *è un numero naturale divisibile per* $p-1$, *la somma* $S(p^\alpha, n)$ *divisa per* p^α *dà il resto* $\varphi(p^\alpha)$.

Dimostrazione. — In primo luogo dimostriamo che è

$$Z(p^\alpha, n) \equiv \varphi(p^\alpha) \qquad (\text{mod. } p^\alpha). \tag{15}$$

Ove sia n un multiplo di $\omega = \varphi(p^\alpha)$, questa congruenza è una conseguenza immediata del teorema di *Fermat* generalizzato. Invero se

$$x_1, x_2, \ldots x_\omega$$

è un sistema completo di numeri primi con p ed incongrui (mod. p^α), si ha subito

$$(x_1^n - 1) + (x_2^n - 1) + \ldots + (x_\omega^n - 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^\alpha),$$

donde si ricava immediatamente la (15). Come caso particolare per $\alpha = 1$ si ha

$$Z(p, n) = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (p-1)^n \equiv p-1 \qquad (\text{mod. } p),$$

ossia

$$S(p, n) \equiv Z(p, n) \equiv \varphi(p) \qquad (\text{mod. } p). \tag{16}$$

Questa congruenza significa che il teorema sussiste per $\alpha = 1$.

Se n è multiplo di $p-1$, ma non di ω, consideriamo la congruenza (Teorema I, b))

$$Z(p^\alpha, n) \equiv \frac{g^{n\omega} - 1}{g^n - 1} \qquad (\text{mod. } p^\alpha)$$

ed osserviamo che, essendo g una radice primitiva di p^α e quindi anche di p, si ha $g^n = 1 + hp$ (dove h è un numero intero che contiene il fattore primo p con esponente uguale a quello col quale p è contenuto in n). Quindi applicando il teorema binomiale, si ha

$$g^{n\omega} = (1+hp)^\omega = 1 + \binom{\omega}{1} hp + \binom{\omega}{2} h^2p^2 + \ldots + \binom{\omega}{r} h^rp^r + \ldots,$$

onde

$$\frac{g^{n\omega}-1}{g^n-1}=\varphi(p^\alpha)+\frac{\omega!}{2!(\omega-2)!}hp+\ldots+\frac{\omega!}{r!(\omega-r)!}h^{r-1}p^{r-1}+\ldots.$$

Ora, in questo sviluppo il secondo termine contiene il fattore p^α (si noti che $p>2$) e tutti i successivi termini sono pure divisibili per p^α, giacchè $r!$ contiene il fattore p con un esponente minore di $r-1$. Così la (15) è dimostrata.

Ne consegue, in virtù della relazione fondamentale (3), che si ha

$$S(p^\alpha, n)\equiv\varphi(p^\alpha)+p^n S(p^{\alpha-1}, n) \qquad (\text{mod. } p^\alpha).$$

Da questa congruenza discende che è

$$S(p^\alpha, n)\equiv\varphi(p^\alpha) \qquad (\text{mod. } p^\alpha),$$

qualora sia

$$S(p^{\alpha-1}, n)\equiv\varphi(p^{\alpha-1}) \qquad (\text{mod. } p^{\alpha-1}).$$

Ma ciò si verifica per $\alpha=1$, come si vede dalla (16), quindi il teorema è dimostrato. Esso si può anche esprimere con la congruenza

$$S(p^\alpha, n)+p^{\alpha-1}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p^\alpha).$$

TEOREMA V. — *Se* n *e* $\mathrm{k}=2^\lambda a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots=2^\lambda L=a^\alpha A=b^\beta B=c^\gamma C=\ldots$ $(\lambda\geqq 0,\ \alpha\geqq 0,\ \beta\geqq 0,\ \gamma\geqq 0\ldots)$ *sono numeri naturali, ed* a, b, c, ... *sono i differenti divisori primi dispari di* k, *sussiste la congruenza*

$$S(k, n)\equiv\varepsilon_2 L\varphi(2^\lambda)+\varepsilon_a A\varphi(a^\alpha)+\varepsilon_b B\varphi(b^\beta)+\ldots \quad (\text{mod. } k), \qquad (17)$$

dove $\varepsilon_2=0$ *se* n *è dispari* >1 *e* $\lambda>1$, *è invece* $\varepsilon_2=1$ *in ogni altro caso;* $\varepsilon_a=1$ *ovvero* $=0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $a-1$; $\varepsilon_b=1$ *ovvero* $=0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $b-1$, *e così via.*

DIMOSTRAZIONE. — Risulta dal Teorema II che è

$$S(2^\lambda, n)\equiv\varepsilon_2\varphi(2^\lambda) \qquad (\text{mod. } 2^\lambda), \qquad (18)$$

e dai Teoremi I *a*) e *b*) e IV si hanno le congruenze

$$S(a^\alpha, n)\equiv\varepsilon_a\varphi(a^\alpha) \quad (\text{mod. } a^\alpha), \quad S(b^\beta, n)\equiv\varepsilon_b\varphi(b^\beta) \quad (\text{mod. } b^\beta) \text{ ecc.}, \qquad (19)$$

dove $\varepsilon_2, \varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots$ vanno presi $=0$ ovvero $=1$ appunto com'è detto nell'enunciato. Ora, se nella congruenza (17) gli esponenti $\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ si riducono tutti allo zero, meno uno, essa diventa una delle congruenze (18) o (19). Dunque il nostro teorema è vero quando k sia un numero primo oppure una potenza di un numero primo.

Se k è un prodotto di potenze di numeri primi disuguali, allora considerando le seguenti congruenze, analoghe alla (4),

$$S(k, n)\equiv L\,.\,S(2^\lambda, n) \quad (\text{mod. } 2^\lambda), \qquad S(k, n)\equiv A\,.\,S(a^\alpha, n) \quad (\text{mod. } a^\alpha),$$
$$S(k, n)\equiv B\,.\,S(b^\beta, n) \quad (\text{mod. } b^\beta), \text{ ecc.}$$

e tenendo conto delle (18) e (19), si ricavano le seguenti altre

$$S(k,n) \equiv \varepsilon_2 L\varphi(2^\lambda) \pmod{2^\lambda}, \quad S(k,n) \equiv \varepsilon_a A\varphi(a^\alpha) \pmod{a^\alpha},$$
$$S(k,n) \equiv \varepsilon_b B\varphi(b^\beta) \pmod{b^\beta}, \text{ ecc.}$$

Ora, da queste ultime, ponendo per brevità

$$\omega = \varphi(2^\lambda), \quad \omega_1 = \varphi(a^\alpha), \quad \omega_2 = \varphi(b^\beta), \text{ ecc.}$$

si ha la congruenza [1]

$$S(k,n) \equiv \varepsilon_2 L^{\omega+1}\omega + \varepsilon_a A^{\omega_1+1}\omega_1 + \varepsilon_b B^{\omega_2+1}\omega_2 + \dots \pmod{k}, \quad (20)$$

dove pel teorema di *Fermat* generalizzato è

$$L^\omega \equiv 1 \pmod{2^\lambda}, \quad A^{\omega_1} \equiv 1 \pmod{a^\alpha}, \quad B^{\omega_2} \equiv 1 \pmod{b^\beta}, \text{ ecc.}$$

quindi

$$L^{\omega+1} \equiv L, \quad A^{\omega_1+1} \equiv A, \quad B^{\omega_2+1} \equiv B, \text{ ecc.} \pmod{k}.$$

Perciò infine abbiamo dalla (20)

$$S(k,n) \equiv \varepsilon_2 L\varphi(2^\lambda) + \varepsilon_a A\varphi(a^\alpha) + \varepsilon_b B\varphi(b^\beta) + \dots \pmod{k},$$

come si voleva dimostrare. Ciò si può anche esprimere con la congruenza

$$S(k,n) + \varepsilon_2 2^{\lambda-1}L + \varepsilon_a a^{\alpha-1}A + \varepsilon_b b^{\beta-1}B + \dots \equiv 0 \pmod{k}.$$

Corollario. — *La somma* $S(k,n)$ *è sempre divisibile pel numero*

$$2^{\lambda-\varepsilon_2} a^{\alpha-\varepsilon_a} b^{\beta-\varepsilon_b} c^{\gamma-\varepsilon_c} \dots,$$

dove $\varepsilon_2, \varepsilon_a, \varepsilon_b, \dots$ *vanno presi* $=0$ *ovvero* $=1$ *secondo la regola data nel precedente teorema.*

Teorema VI. — *Se* n *e* $k = 2^\lambda a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots = 2^\lambda L = a^\alpha A = b^\beta B = c^\gamma C = \dots (\lambda \geqq 0,\ \alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0,\ \gamma \geqq 0 \dots)$ *sono numeri naturali, ed* a, b, c, … *sono i differenti divisori primi dispari di* k, *sussiste la congruenza*

$$Z(k,n) \equiv \varphi(k) \{\varepsilon_2 L^{\tau(2^\lambda)} + \varepsilon_a A^{\tau(a^\alpha)} + \varepsilon_b B^{\tau(b^\beta)} + \dots\} \pmod{k}, \quad (21)$$

dove $\varepsilon_2 = 0$ *se* n *è dispari qualunque e* $\lambda > 1$, *è invece* $\varepsilon_2 = 1$ *in ogni altro caso;* $\varepsilon_a = 1$ *ovvero* $=0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $a-1$; $\varepsilon_b = 1$ *ovvero* $=0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $b-1$, *e così via.*

Dimostrazione. — Da quanto abbiamo notato nella *Osservazione* e dalla dimostrazione del Teorema IV (congruenze (15) e (16)) risulta che sussistono le congruenze

$$\left.\begin{array}{l} Z(2^\lambda,n) \equiv \varepsilon_2 \varphi(2^\lambda) \pmod{2^\lambda}, \quad Z(a^\alpha,n) \equiv \varepsilon_a \varphi(a^\alpha) \pmod{a^\alpha} \\ Z(b^\beta,n) \equiv \varepsilon_b \varphi(b^\beta) \pmod{b^\beta} \text{ ecc.} \end{array}\right\}, \quad (22)$$

---

[1] Cfr. p. es. Dirichlet, *l. c.*, § 25.

dove $\varepsilon_2, \varepsilon_a, \varepsilon_b, \ldots$ vanno presi $= 0$ ovvero $= 1$ com'è detto nell'ennunciato del nostro teorema. Dunque questo è vero quando k sia numero primo oppure una potenza di un numero primo; ed infatti la congruenza (21) si riduce subito ad una delle (22) quando uno solo degli esponenti $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \ldots$ sia diverso dallo zero.

Per dimostrarlo nel caso generale ci è necessario fare una breve digressione, premettendo come *lemma* la seguente proposizione: *Un sistema completo di* $\nu = \varphi(\mathbf{k})$ *numeri primi con* k *ed incongrui* (mod. k)

$$x_1, x_2, x_3, \ldots x_\nu \tag{23}$$

si può scomporre in $\varphi(\mathrm{L})$ *gruppi contenenti ciascuno* $\varphi(2^\lambda)$ *numeri incongrui* (mod, 2^λ), *oppure in* $\varphi(\mathrm{A})$ *gruppi formati ciascuno con* $\varphi(\mathrm{a}^\alpha)$ *numeri incongrui* (mod. a^α), *e così via.*

Per la dimostrazione riferiamoci p. es. ad a^α e indichiamo con

$$x'_1, x'_2, x'_3, \ldots x'_{\omega_1} \tag{24}$$

i numeri *minori* di a^α e primi con a^α. Preso uno qualunque di questi numeri p. es. x'_s, formiamo la progressione aritmetica

$$x'_s, \quad x'_s + a^\alpha, \quad x'_s + 2a^\alpha, \ldots x'_s + (\mathrm{A} - 1)\, a^\alpha, \tag{25}$$

nella quale il numero dei termini A è primo con la ragione a^α e l'ultimo termine non supera k perchè $x'_s < a^\alpha$. Orbene, per un noto teorema, (¹) nella progressione (25) il numero dei termini primi con A, *e perciò anche con* **k**, è precisamente $\varphi(\mathrm{A})$. Allora è chiaro che variando s da 1 ad ω_1 si ottengono $\varphi(a^\alpha)$ progressioni analoghe alla (25), contenenti cioè ciascuna $\varphi(\mathrm{A})$ numeri congrui tra loro (mod. a^α), primi con k, minori di k e perciò incongrui (mod. k). E siccome due tali numeri presi in progressioni diverse sono incongrui (mod. a^α) e quindi anche incongrui (mod. k), il complesso di tutti questi numeri, il cui numero è appunto $\varphi(a^\alpha)\,\varphi(\mathrm{A}) = \varphi(k)$, costituisce un sistema completo di numeri incongrui (mod. k) e primi con k, come i numeri (23). Ora, prendendo uno dei nominati numeri da ciascuna delle $\varphi(a^\alpha)$ progressioni (25) si ottiene un gruppo di $\varphi(a^\alpha)$ numeri incongrui (mod. a^α) e di così fatti gruppi se ne possono formare $\varphi(\mathrm{A})$. Altrettanto può dirsi evidentemente dei numeri (23), e così il *lemma* è dimostrato.

(¹) Il teorema a cui alludo è il seguente: *Se* x *è un numero intero qualunque e* d, n *sono primi fra loro, nella progressione aritmetica* $x,\ x + d,\ x + 2d \ldots x + (n-1)d$ *di* n *termini il numero dei numeri primi con* n *è* $\varphi(n)$. — Questa è una notevole, eppure poco ricordata generalizzazione del teorema di EULERO relativo al numero $\varphi(n)$, e si può dedurre da quest'ultimo teorema osservando che i termini della progressione formano un sistema completo di numeri incongrui (mod. n). Si può però darne una semplice dimostrazione *indipendentemente* dal teorema di EULERO (e dedurre poi questo come caso particolare, $x = d = 1$) fondandosi sulla seguente proposizione: *Se in una progressione aritmetica di* mp *termini la differenza* d *è un numero primo con* p, *saranno* m *i termini della progressione divisibili per* p. (Quest'ultima si trova p. es. nell'opera *La teoria delle congruenze* di P. L. TCHEBICHEF, trad. ital. di I. Massarini, Roma, Loescher, 1895, § 7, Teorema 10).

Da queste premesse è facile ottenere una dimostrazione del nostro teorema, analoga a quella del Teorema V. A tal fine si formi p. es. rispetto al modulo a^α uno qualunque dei $\varphi(A)$ gruppi di numeri incongrui (mod. a^α) presi dal sistema (23) o dalle progressioni (25) nel modo suddetto. Allora la somma delle potenze n^{me} di questi numeri sarà congrua (mod. a^α) alla somma $Z(a^\alpha, n)$, e di consimili somme se ne potranno ricavare $\varphi(A)$. Altrettanto può dirsi pei moduli 2^λ, b^β, c^γ .... Quindi si hanno le congruenze

$$\begin{aligned} Z(k, n) &\equiv \varphi(L)\, Z(2^\lambda, n) && (\text{mod. } 2^\lambda) \\ Z(k, n) &\equiv \varphi(A)\, Z(a^\alpha, n) && (\text{mod. } a^\alpha) \\ Z(k, n) &\equiv \varphi(B)\, Z(b^\beta, n) && (\text{mod. } b^\beta) \text{ ecc.} \end{aligned}$$

e queste per le (22) si trasformano nelle seguenti

$$\begin{aligned} Z(k, n) &\equiv \varepsilon_2 \varphi(L)\, \omega && (\text{mod. } 2^\lambda) \\ Z(k, n) &\equiv \varepsilon_a \varphi(A)\, \omega_1 && (\text{mod. } a^\alpha) \\ Z(k, n) &\equiv \varepsilon_b \varphi(B)\, \omega_2 && (\text{mod. } b^\beta) \text{ ecc. } (^1) \end{aligned}$$

Dalle quali, essendo per il teorema di *Fermat* generalizzato

$$L^\omega \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2^\lambda), \qquad A^{\omega_1} \equiv 1 \quad (\text{mod. } a^\alpha), \qquad B^{\omega_2} \equiv 1 \quad (\text{mod. } b^\beta) \text{ ecc.}$$

si deduce la congruenza

$$Z(k, n) \equiv \varepsilon_2 L^\omega \varphi(L)\, \omega + \varepsilon_a A^{\omega_1} \varphi(A)\, \omega_1 + \varepsilon_b B^{\omega_2} \varphi(B)\, \omega_2 + \ldots \quad (\text{mod. } k),$$

ossia

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \left\{ \varepsilon_2 L^{\varphi(2^\lambda)} + \varepsilon_a A^{\varphi(a^\alpha)} + \varepsilon_b B^{\varphi(b^\beta)} + \ldots \right\} \quad (\text{mod. } k),$$

come si voleva dimostrare.

Avvertenza. — La formula (21) può dar luogo nelle applicazioni numeriche a calcoli troppo laboriosi non ostante gli artifizi che si possono usare operando sui resti di potenze anzichè sulle potenze medesime. Perciò è opportuno avvertire che a tale fine pratico la formula si può semplificare utilmente e che spesso essa è suscettibile di notevoli riduzioni.

In primo luogo importa notare che se taluna delle differenze $a-1$, $b-1$, ... è divisibile per uno dei fattori primi $2, a, b, \ldots$ di k, allora $\varphi(k)$ contiene questo fattore primo con esponente almeno uguale a quello che esso ha in k; così p. es. se $b-1$ è divisibile per a, il numero $\varphi(k)$ è multiplo di a^α, e in questo caso il prodotto $\varepsilon_a \varphi(k) A^{\varphi(a^\alpha)}$ è divisibile per k e come tale si può trascurare, cioè possiamo porre $\varepsilon_a = 0$. A tale proposito si osservi che *ogniqualvolta* k

(1) Quando si abbia $\varepsilon_2 = \varepsilon_a = \varepsilon_b = \ldots = 1$, queste congruenze dànno immediatamente

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \qquad (\text{mod. } k).$$

Questo è il caso negli esempi 4° e 7° che diamo più sotto.

è pari e ha almeno un divisore primo dispari a, *la differenza* $a-1$ *è pari e si può porre* $\varepsilon_2=0$.

In secondo luogo, se k ha due o più divisori primi diversi, osserviamo che, indicando con R_a, R_b, ... i resti delle divisioni di A per a^α, di B per b^β, ... (o eventualmente i minimi resti negativi, se questi sono in valore assoluto minori di quelli), dalle congruenze

$$A^{\omega_1-1}\equiv R_a{}^{\omega_1-1} \pmod{a^\alpha}, \qquad B^{\omega_2-1}\equiv R_b{}^{\omega_2-1} \pmod{b^\beta}, \text{ ecc.}$$

avremo

$$A^{\omega_1}\equiv AR_a{}^{\omega_1-1}, \qquad B^{\omega_2}\equiv BR_b{}^{\omega_2-1}\ldots, \qquad \pmod{k},$$

quindi

$$Z(k,n)\equiv\varphi(k)\,\{\varepsilon_a AR_a{}^{\varphi(a^\alpha)-1}+\varepsilon_b BR_b{}^{\varphi(b^\beta)-1}+\ldots\} \pmod{k}. \quad (26)$$

Inoltre, essendo Q_a, Q_b, ... i resti delle divisioni di $\varphi(k)$ per a^α, per b^β, ..., dalle congruenze

$$\varphi(k)\equiv Q_a \pmod{a^\alpha}, \qquad \varphi(k)\equiv Q_b \pmod{b^\beta}, \text{ ecc.}$$

si deducono

$$A\varphi(k)\equiv AQ_a, \qquad B\varphi(k)\equiv BQ_b,\ldots \pmod{k},$$

per le quali la (26) diviene

$$Z(k,n)\equiv\varepsilon_a AQ_a R_a{}^{\varphi(a^\alpha)-1}+\varepsilon_b BQ_b R_b{}^{\varphi(b^\beta)-1}\ldots \pmod{k}. \quad (27)$$

Quando invece k è potenza di un numero primo si applica senz'altro la (21).

***

Diamo ora alcuni esempi numerici in applicazione delle nostre formule [1]

1°. Sia $k=25=5^2$ ed $n=3$. Le formule (17) e (21) ci dànno

$$S(25,3)\equiv 0, \qquad Z(25,3)\equiv 0 \pmod{25}.$$

2°. Sia $k=8=2^3$ ed $n=5$. Dalle formule (17) e (21) si ha subito

$$S(8,5)\equiv 0, \qquad Z(8,5)\equiv 0 \pmod{8}$$

3°. Sia $k=120=2^3.3.5$ ed $n=1$. Abbiamo

$$S(120,1)\equiv 15\,\varphi(2^3)\equiv 15.4\equiv 60 \pmod{120}$$
$$Z(120,1)\equiv 0 \pmod{120}.$$

[1] Lasciamo al lettore la cura di controllare i resultati per mezzo delle note formule sommatorie che dànno i valori di $S(k,n)$, somma delle n^{me} potenze dei primi k numeri naturali, e che si possono dedurre p. es., dipendentemente dai *numeri di* BERNOULLI, applicando alla funzione x^{n+1} la formula sommatoria del MACLAURIN. Quelle formule sommatorie permettono di trovare il resto di $S(k,n)$ divisa per k, ma per ogni esponente n bisogna ricorrere ad una formula speciale, la quale al crescere di n si va complicando; al contrario la nostra formula (17) presenta il grande vantaggio di essere applicabile ad ogni $S(k,n)$, qualunque sia n, e richiede soltanto che k venga decomposto nei suoi fattori primi.

4°. Sia $k = 45 = 3^2 . 5$ ed $n = 4$. Poichè 4 è divisibile per $3 - 1$ e $5 - 1$, avremo

$$S(45, 4) \equiv 5\varphi(3^2) + 3^2\varphi(5) \equiv 30 + 36 \equiv 21 \pmod{45}$$
$$Z(45, 4) \equiv \varphi(45)\{5^{\varphi(3^2)} + 9^{\varphi(5)}\} \pmod{45}.$$

Per semplificare i calcoli ricorriamo alla (26); osservando che *rest* $(5, 9) = 5$, *rest* $(9, 5) = 4$, otteniamo

$$Z(45, 4) \equiv \varphi(45)\{5^6 + 9 . 4^3\} \equiv 24(10 + 36) \equiv 24 \pmod{45}.$$

Del resto, come abbiamo notato, si ha

$$Z(45, 4) \equiv \varphi(45) \pmod{45}.$$

5°. Sia $k = 90 = 2 . 3^2 . 5$ ed $n = 7$. Poichè 90 non è divisibile per 4 si ha

$$S(90, 7) \equiv 45\varphi(2) \equiv 45 \pmod{90}$$
$$Z(90, 7) \equiv \varphi(90) . 45^{\varphi(2)} \equiv 0 \pmod{90}.$$

A quest'ultimo resultato si arriva subito, osservando che 90 è pari, ma non potenza di 2 (vedi la precedente *Avvertenza*).

6°. Sia $k = 492 = 2^2 . 3 . 41$ ed $n = 6$. Essendo 6 divisibile per $3 - 1$ si ha

$$S(492, 6) \equiv 123\varphi(2^2) + 164\varphi(3) \equiv 246 + 328 \equiv 82 \pmod{492};$$
$$Z(492, 6) \equiv \varphi(492)\{123^{\varphi(2^2)} + 164^{\varphi(3)}\} \pmod{492};$$

ma, osservando chè 492 ammette divisori primi dispari e che si ha

$$\varphi(492) = 160, \quad \text{rest}(160, 3) = 1, \quad \text{rest}(164, 3) = 2,$$

applicando la (27) si ottiene

$$Z(492, 6) \equiv 1 . 164 . 2^1 \equiv 328 \pmod{492}.$$

7°. Sia $k = 300 = 2^2 . 3 . 5^2$ ed $n = 8$. Poichè 8 è divisibile per $3 - 1$ e $5 - 1$, si ha

$$S(300, 8) \equiv 75\varphi(2^2) + 100\varphi(3) + 12\varphi(5^2) \equiv$$
$$150 + 200 + 240 \equiv 290 \pmod{300};$$
$$Z(300, 8) \equiv \varphi(300)\{75^{\varphi(2^2)} + 100^{\varphi(3^2)} + 12^{\varphi(5^2)}\} \pmod{300}.$$

Ma poichè 300 ammette diversi divisori primi ed abbiamo

$$\varphi(300) = 80, \quad \text{rest}(80, 3) = 2, \quad \text{rest}(80, 5^2) = 5, \quad \text{rest}(100, 3) = 1,$$

applicando la (27) si ha

$$Z(300, 8) \equiv 2 . 100 . 1^1 + 5 . 12^{20} \equiv 200 + 5 . 276 \equiv 80 \pmod{300}.$$

Del resto, come si è notato, abbiamo

$$Z(300, 8) \equiv \varphi(300) \pmod{300}.$$

8°. Sia $k = 57876 = 2^2 . 3 . 7 . 13 . 53$ ed $n = 132$. Essendo 132 divisibile per $3 - 1$, $7 - 1$, $13 - 1$, avremo

$$S(57876, 132) \equiv 14469\,\varphi(2^2) + 19292\,\varphi(3) + 8268\,\varphi(7) + 4452\,\varphi(13) \equiv$$
$$\equiv 54802 \pmod{57876}.$$

Per la $Z(57876, 132)$ applichiamo subito la (27); osservando che $7 - 1$ è divisibile per 3 e $53 - 1$ per 13 si può porre $\varepsilon_3 = 0$, $\varepsilon_{13} = 0$; inoltre essendo

$$\varphi(57876) = 14976, \quad \mathrm{rest}\,(14976, 7) = 3, \quad \mathrm{rest}\,(8268, 7) = 1$$

si avrà

$$Z(57876, 132) \equiv 3 \,.\, 8268 \,.\, 1^6 \equiv 24804 \qquad (\mathrm{mod.}\ 57876),$$

UMBERTO CONCINA.

SOMME DI FATTORIALI

1. Esistono diverse formole che danno la somma delle potenze simili di n numeri in progressione aritmetica, ma non se ne conoscono che diano le somme dei prodotti a k a k di essi numeri. (1) È questa lacuna che noi ci proponiamo di colmare con la presente Nota.

In sostanza la ricerca in parola consiste nella determinazione delle formole esprimenti le somme delle combinazioni semplici di n elementi a k a k, dove gli elementi stessi sono numeri in progressione aritmetica ed hanno valore di fattori nelle combinazioni (termini) alle quali appartengono.

2. Consideriamo il prodotto

$$(x + a)(x + a + d) \ldots (x + a + [n - 1]\, d) \tag{1}$$

essendo x una variabile arbitraria.

Sviluppando la (1) secondo le potenze decrescenti di x, si avrà

$$(x + a)(x + a + d) \ldots (x + a + [n - 1]\, d) = x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n \tag{2}$$

dove, com'è noto, il coefficiente A_k indica la somma dei prodotti a k a k degli n numeri in progressione aritmetica

$$a,\ a + d, \ldots, a + (n - 1)\, d.$$

(1) Il prof. ARNOLDO MARTINI-ZUCCAGNI, in un suo pregevole libro (*Trattato di Algebra complementare*, pag. 236, R. Giusti, editore, Livorno), dà l'espressione:

$$S_r = \frac{\{a + (n - r + 1)\, \delta\} \ldots \{a + (n + 1)\, \delta\} - a\,(a + \delta) \ldots (a + r\delta)}{(r + 1)\, \delta}$$

della somma particolare:

$$S_r = a_1 a_2 \ldots a_r + a_2 a_3 \ldots a_{r-1} + \ldots + a_{n-r+1}\, a_{n-r+2} \ldots a_n$$

essendo $a_k = a + k\delta$.

Determiniamo questi coefficienti.

Cambiando nella (2) x in $x+d$, avremo:

$$(x+a+d)(x+a+2d)\dots(x+a+nd)=(x+d)^n+A_1(x+d)^{n-1}+\dots A_n. \quad (3)$$

Se ora moltiplichiamo i due membri della (2) per $x+a+nd$ ed i due membri della (3) per $x+a$, nelle (2) e (3), risultando eguali i primi membri, dovranno essere pure eguali i secondi, epperò si otterrà l'eguaglianza:

$$\begin{aligned}(x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n)(x+a+nd) &= \\ =[(x+d)^n+A_1(x+d)^{n-1}+\dots+A_n](x+a).\end{aligned}$$

Dovendo essa sussistere identicamente, dovranno essere eguali nei due membri i coefficienti delle stesse potenze di x; si perverrà quindi, previa semplici riduzioni, al sistema ricorrente:

$$A_1=\left[\binom{n}{2}d+\binom{n}{1}a\right]$$

$$2A_2=\left[\binom{n}{3}d+\binom{n}{2}a\right]d+\left[\binom{n-1}{2}d+\binom{n-1}{1}a\right]A_1$$

$$\begin{aligned}3A_3=\left[\binom{n}{4}d+\binom{n}{3}a\right]d^2+\left[\binom{n-1}{3}d+\binom{n-1}{2}a\right]dA_1+ \\ +\left[\binom{n-2}{2}d+\binom{n-2}{1}a\right]A_2\end{aligned}$$

. . . .

$$\begin{aligned}kA_k=\left[\binom{n}{k+1}d+\binom{n}{k}a\right]d^{k-1}+\left[\binom{n-1}{k}d+\binom{n-1}{k-1}a\right]d^{k-2}A_1+\dots \\ \dots+\left[\binom{n-k+1}{2}d+\binom{n-k+1}{1}a\right]A_{k-1}\end{aligned}$$

potendo k assumere tutti i valori da 1 ad n.

Si ha quindi, per determinante:

$$A_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} 1 & 0\dots & 0 & [\binom{n}{2}d+\binom{n}{1}a \\ -\left[\binom{n-1}{2}d+\binom{n-1}{1}a\right] & 2\dots & 0 & \left[\binom{n}{3}d+\binom{n}{2}a\right]d \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\left[\binom{n-1}{k-1}d+\binom{n-1}{k-2}a\right]d^{k-3} & -\left[\binom{n-2}{k-2}d+\binom{n-2}{k-3}a\right]d^{k-4} & \dots(k-1) & \left[\binom{n}{k}d+\binom{n}{k-1}a\right]d^{k-2} \\ -\left[\binom{n-1}{k}d+\binom{n-1}{k-1}a\right]d^{k-2} & -\left[\binom{n-2}{k-1}d+\binom{n-2}{k-2}a\right]d^{k-3} & \dots-[\binom{n-k+1}{2}d+\binom{n-k+1}{1}a & \left[\binom{n}{k+1}d+\binom{n}{k}a\right]d^{k-1}. \end{vmatrix}$$

3. Per $a = d = 1$, la progressione è formata dalla serie dei numeri naturali ed allora, ricordando la relazione

$$\binom{m}{p} + \binom{m}{p-1} = \binom{m+1}{p}:$$

si ha

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n) = \tag{4}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots & 0 & \binom{n+1}{2} \\ -\binom{n}{2} & 2 & 0 \dots & 0 & \binom{n+1}{3} \\ -\binom{n}{3} & -\binom{n-1}{2} & 3 \dots & 0 & \binom{n+1}{4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\binom{n}{k-1} & -\binom{n-1}{k-2} & -\binom{n-2}{k-3} \dots & (k-1) & \binom{n+1}{k} \\ -\binom{n}{k} & -\binom{n-1}{k-1} & -\binom{n-2}{k-2} \dots & -\binom{n-k+2}{2} & \binom{n+1}{k+1} \end{vmatrix} x^{n-k}$$

dove, posto $A_k = \Sigma_{n,k}$, si è fatto per generalità $1 = \Sigma_{n,0}$.

In particolare:

$$\begin{aligned} \Sigma_{n,1} &= \frac{(n+1)n}{2} \\ \Sigma_{n,2} &= \frac{(n+1)n(n-1)(3n+2)}{24} \\ \Sigma_{n,3} &= \frac{(n+1)^2 n^2 (n-1)(n-2)}{48} \\ \Sigma_{n,4} &= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{5}$$

Le (5), evidentemente, si annullano per $n < k$, come del resto può ormalmente verificarsi nel determinante della (4) se si pone in esso $> n$. Ne segue che $\Sigma_{n,k}$ è divisibile per il prodotto $n(n-1)\dots$ $\dots(n-k+1)$; ma poichè l'ultima colonna del determinante stesso divisibile per $(n+1)$, essendo

$$\binom{n+1}{r} = (n+1)\frac{1}{r}\binom{n}{r-1}$$

avrà:

$$\Sigma_{n,k} = (n+1)n(n-1)\dots(n-k+1)\,\varphi_{k-1}(n)$$

ve $\varphi_{k-1}(n)$ è una funzione intera di n (a determinatore numerico) grado $k-1$.

4. Poichè

$$(x+1)(x+2)\dots(x+n) = x^n + \Sigma_{n,1} x^{n-1} + \dots \Sigma_{n,n} \tag{6}$$

per $x = 1$ si deduce

$$(n+1)! = \Sigma_{n,0} + \Sigma_{n,1} + \ldots + \Sigma_{n,n}.$$

Da questa si ricavano pure le altre:

$$n!\,n = \Sigma_{n,0} + \Sigma_{n,1} + \ldots + \Sigma_{n,n-1}$$
$$n! = \Sigma_{n-1,0} + \Sigma_{n-1,1} + \ldots + \Sigma_{n-1,n-1}.$$

Inoltre, dalla (6), si dedurrà l'espressione derivata d'ordine h:

$$f^{(h)}(x+1)(x+2)\ldots(x+n) =$$
$$= n(n-1)\ldots(n-h+1)\,x^{n-h} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=n-h} (n-k)(n-k-1)\ldots(n-k-h+1)\,\Sigma_{n,k}\,x^{n-k-h}.$$

FABIO FERRARI.

ALCUNI TEOREMI SULLE CONICHE A CENTRO

In una mia nota " Sopra una classe speciale di cissoidali „ publicata in questo *Periodico* (fasc. II dell'anno XXVIII) ho fatto notare un teorema nuovo sulla generazione dell'iperbole che credo importante sia perchè ci permette di far rientrare le curve del secondo ordine in una vasta classe di curve che godono notevoli proprietà, sia anche perchè ci dà il modo di istituire una discussione delle coniche con procedimenti nuovi e indipendenti dalla geometria metrico-proiettiva.

In questa nota ripiglio il teorema su ricordato estendendolo anche all'ellisse e deduco qualcuna delle proprietà delle coniche a centro considerandole come *cissoidali*, fermandomi in particolare sull'iperbole, data l'importanza pratica di qualcuno dei teoremi che saranno esposti. Lo scopo di questa nota è solo di far vedere con qualche esempio di dimostrazione come il nuovo teorema possa esser fecondo di applicazioni per lo studio delle coniche.

1. Rammentiamo che, per cissoidale di due curve, s'intende quella curva che ha per raggio vettore in ogni punto la differenza dei raggi vettori delle due altre. Ciò posto, date due rette di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} y = m_1x + p_1 \\ y = m_2x + p_2 \end{array}\right\}, \tag{1}$$

sulla cui posizione rispetto a un sistema d'assi coordinati cartesiani ortogonali non facciamo alcuna ipotesi particolare, la loro cissoidale rispetto all'origine per polo ha per equazione

$$m_1m_2x^2 - (m_1+m_2)\,xy + y^2 + (m_1p_2 - m_2p_1)\,x + (p_1 - p_2)\,y = 0. \tag{2}$$

Poniamo

$$\left.\begin{aligned} m_1m_2 &= a_{11} \\ -(m_1+m_2) &= 2a_{12} \\ m_1p_2 - m_2p_1 &= 2a_{13} \\ p_1 - p_2 &= 2a_{23} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

per cui la (2) piglia la forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}\,xy + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0. \tag{4}$$

Supporremo che i coefficienti di questa equazione siano tutti reali. Allora dalle (3) si hanno per $m_1, p_1;\ m_2, p_2$ i valori seguenti

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= -a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}} \\ p_1 &= \quad a_{23} + \frac{a_{13} - a_{12}\,a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}}} \\ m_2 &= -a_{12} - \sqrt{a^2_{12} - a_{11}} \\ p_2 &= -a_{23} + \frac{a_{13} - a_{12}\,a_{23}}{\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}}} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

che sono finiti e reali o immaginarii secondo che

$$a_{12}^2 - a_{11} \gtrless 0. \tag{6}$$

Escluderemo dalle nostre considerazioni il caso che $a_{12}^2 - a_{11} = 0$.

Ne concludiamo intanto che *la cissoidale di due rette distinte, reali o immaginarie, è una curva del secondo ordine sempre reale.* E precisamente un'iperbole o un'ellisse secondo che le due rette generatrici son reali o immaginarie.

In quel che segue chiameremo *prima* e *seconda generatrice* rispettivamente le rette rappresentate dalle (1). Supporremo poi sempre che esse siano distinte.

2. Dal modo stesso col quale la curva è stata generata si deduce anzi tutto che essa passa per il polo; a meno che le due generatrici non siano parallele, nel qual caso la curva si riduce a una retta. Si ha inoltre che *la tangente alla curva nel polo passa per il punto d'incontro delle due generatrici.* Chiameremo questo punto *pseudocentro.* Sempre per la sua stessa generazione risulta poi che la curva ha due assintoti reali o immaginarii. Di essi, com'è evidente, uno coincide con la seconda generatrice e l'altro è parallelo alla prima e ad essa simmetrico rispetto al polo. Si deduce ancora che la curva ammette almeno due assi di simmetria coincidenti con le bisettrici degli angoli formati dagli assintoti.

Osservando che, per quanto è stato detto, le equazioni degli assintoti sono

$$\left.\begin{aligned} y &= m_1x - p_1 \\ y &= m_2x + p_2 \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

si hanno subito le coordinate del centro

$$x_0 = \frac{p_1 + p_2}{m_1 - m_2}, \qquad y_0 = \frac{m_1 p_2 + m_2 p_1}{m_1 - m_2}. \tag{8}$$

Si vede poi, anche direttamente, che, in funzione di queste coordinate, le equazioni degli assintoti sono

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m_1, \qquad \frac{y - y_0}{x - x_0} = m_2. \tag{9}$$

Rammentando ora le (5) le equazioni (9) diventano

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}}}{a_{11}} \tag{10}$$

e le coordinate del centro sono date da

$$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}, \tag{11}$$

essendo A_{ik} un minore del secondo ordine del discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix}$$

dell'equazione (4).

Osservando le (8) o le (11) possiamo dire che il centro è un punto sempre reale, proprio finchè $m_1 \neq m_2$ e diventa improprio per $m_1 = m_2$, ossia per $A_{33} = 0$. È indeterminato quando $p_1 + p_2 = 0$, $m_1 - m_2 = 0$ (o, ciò che è lo stesso, quando $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$) nel qual caso risulta nullo il discriminante della (2) o della (4). Com'è evidente la curva si scinde allora in due rette parallele che costituiscono una figura avente infiniti centri di simmetria.

3. Passando dagli assi primitivi ad altri paralleli condotti per il punto (α, β) si avrà la nuova equazione sostituendo nella (2) ad x, y rispettivamente $x + \alpha$, $y + \beta$. Si ottiene

$$\begin{aligned} & m_1 m_2 x^2 - (m_1 + m_2)\, xy + y^2 + \\ & + [2 m_1 m_2 \alpha - (m_1 + m_2)\beta + (m_1 p_1 - m_2 p_1)]\, x + \\ & + [2\beta - (m_1 + m_2)\alpha + (p_1 - p_2)]\, y + \\ & + [m_1 m_2 \alpha^2 - (m_1 + m_2)\alpha\beta + \beta^2 + (m_1 p_2 - m_2 p_1)\alpha + (p_1 - p_2)\beta] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Possiamo trasformare questa equazione in modo che siano nulli i coefficienti dei termini di primo grado. Le coordinate della nuova origine saranno date dalle equazioni che si ottengono annullando i coefficienti di x, y nella (12)

$$\begin{aligned} 2 m_1 m_2 \alpha - (m_1 + m_2)\beta + (m_1 p_2 - m_2 p_1) &= 0 \\ -(m_1 - m_2)\alpha + 2\beta + (p_1 - p_2) &= 0. \end{aligned}$$

Si trovano per α e β i valori

$$\alpha=\frac{p_1+p_2}{m_1-m_2}, \qquad \beta=\frac{m_1p_2+m_2p_1}{m_1-m_2},$$

si ritrovano cioè le coordinate del centro [n, 2].

Scegliendo dunque l'origine delle coordinate nel centro l'equazione della curva piglia la forma

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)\,xy+y^2+a_{33}=0, \tag{13}$$

in cui a_{33} è uguale a

$$a_{33}=m_1m_2\alpha^2-(m_1+m_2)\,\alpha\beta+\beta^2+(m_1p_2-m_2p_1)\,\alpha+(p_1-p_2)\,\beta.$$

Il calcolo di a_{33} si fa subito scrivendo l'espressione precedente in quest'altro modo

$$\begin{aligned}a_{33}=&[m_1m_2\alpha-\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,\beta+\tfrac{1}{2}(m_1p_2-m_2p_1)]\,\alpha+\\&+[\beta-\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,\alpha+\tfrac{1}{2}(p_1-p_2)]\,\beta+\\&+\tfrac{1}{2}(m_1p_2-m_2p_1)\,\alpha+\tfrac{1}{2}(p_1-p_2)\,\beta.\end{aligned}$$

Ora, quando si considerano le coordinate del centro, i primi due termini del secondo membro di questa ultima espressione scompaiono e si avrà

$$\begin{aligned}a_{33}=&\frac{1}{2}(m_1p_2-m_2p_1)\frac{p_1+p_2}{m_1-m_2}+\\&+\frac{1}{2}(p_1-p_2)\frac{m_1p_2+m_2p_1}{m_1-m_2}=p_1p_2.\end{aligned} \tag{14}$$

Quindi la (13) si può scrivere

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)\,xy+y^2+p_1p_2=0. \tag{15}$$

4. Osserviamo che, rispetto ai nuovi assi coordinati, gli assintoti della curva hanno per equazioni

$$y=m_1x, \qquad y=m_2x,$$

o, complessivamente, com'è facile verificare

$$m_1m_2x^2-(m_1+m_2)\,xy+y^2=0. \tag{16}$$

E, per quanto è stato detto, gli assi della curva, che son le bisettrici degli angoli formati da queste due rette, hanno per equazione complessiva

$$-\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,x^2-(m_1m_2-1)\,xy+\tfrac{1}{2}(m_1+m_2)\,y^2=0. \tag{17}$$

Proponiamoci ora di trovare un particolare sistema d'assi di riferimento tale che nell'equazione (15) si annulli il termine in xy. Facendo rotare il sistema primitivo di un angolo φ si dovrà sostituire nella (15) ad x, y rispettivamente $x\cos\varphi-y\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $x\,\mathrm{sen}\,\varphi+y\cos\varphi$ e quindi l'equazione si cambierà nell'altra

$$\begin{aligned}m_1m_2(x\cos\varphi-y\,\mathrm{sen}\,\varphi)^2-(m_1+m_2)\,(x\cos\varphi-y\,\mathrm{sen}\,\varphi)\times\\\times(x\,\mathrm{sen}\,\varphi+y\cos\varphi)+(x\,\mathrm{sen}\,\varphi+y\cos\varphi)^2+p_1p_2=0,\end{aligned}$$

e, per determinare $\operatorname{tg}\varphi$, si ha l'equazione

$$\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) - m_1 m_2 \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi = 0,$$

ossia

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)\operatorname{tg}^2\varphi + (1 - m_1 m_2)\operatorname{tg}\varphi - \tfrac{1}{2}(m_1 + m_1) = 0.$$

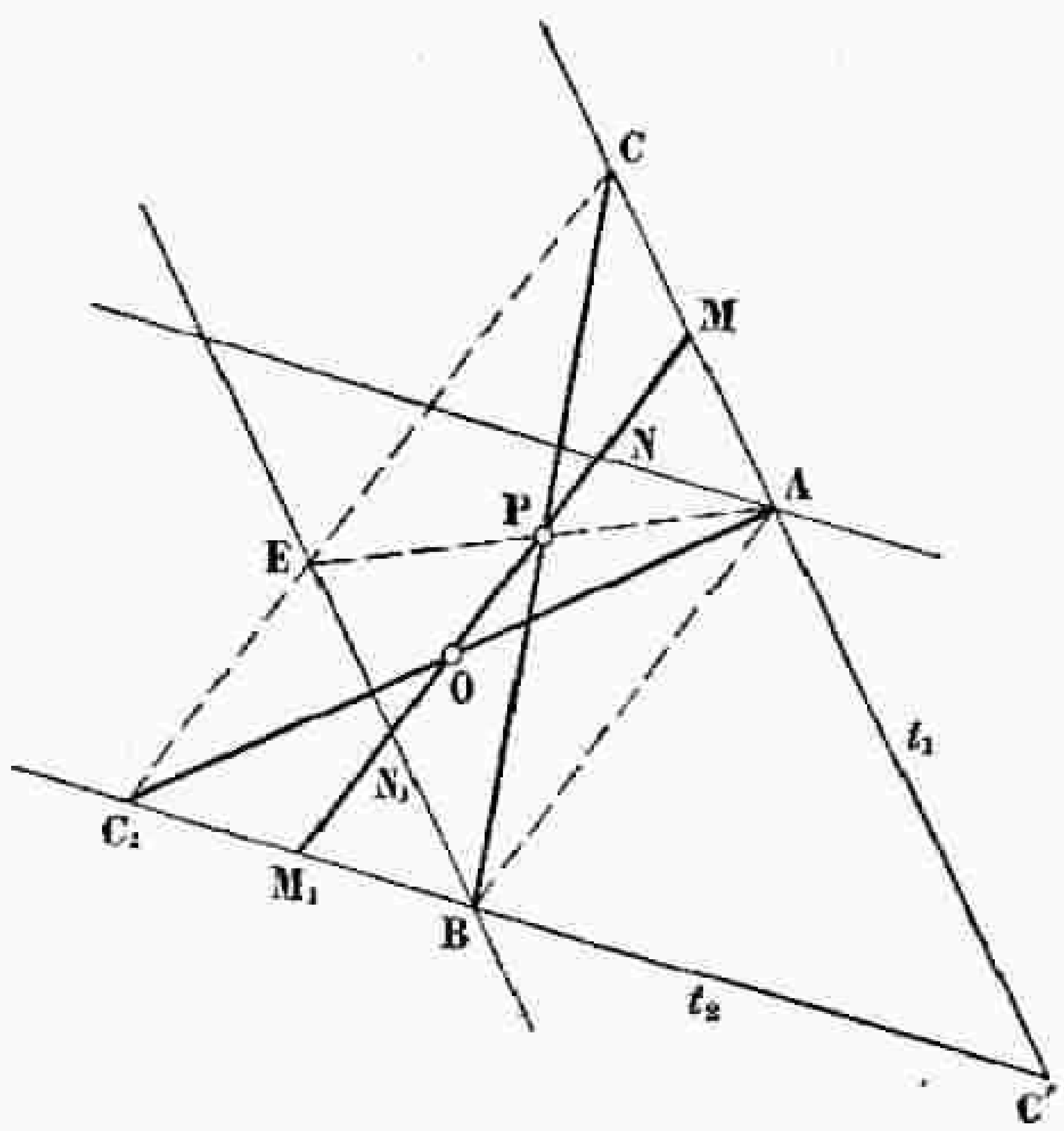
E, sostituendo a $\operatorname{tg}\varphi$ il suo valore $\dfrac{y}{x}$ si ritrova la (17).

Se ne conclude che l'equazione di una conica a centro riferita ai suoi assi piglia la forma

$$m_1 m_2 x^2 + y^2 + p_1 p_2 = 0. \tag{18}$$

5. Consideriamo ora in modo speciale il caso in cui le generatrici siano reali e distinte, il caso cioè dell'iperbole. Ricaveremo per questa nuova via qualcuno dei teoremi già noti sull'iperbole e ne aggiungeremo qualcun altro che discende immediatamente dal nuovo metodo d'indagini.

Osserviamo che l'iperbole resta perfettamente individuata quando siano dati il polo O e le due generatrici o, ciò ch'è lo stesso, il polo e gli assintoti. Si assuma ora il polo in un altro punto P dell'iperbole e si costruisca la retta che, con l'assintoto t_2, riproduca come cissoidale l'iperbole primitiva. Evidentemente questa retta sarà la simmetrica del primo assintoto rispetto al polo P ed intersecherà t_2 in B. Ora la tangente nel polo P dell'iperbole passa proprio per B, punto d'incontro delle due nuove generatrici. Se ne deduce essendo il punto P un punto qualunque dell'iperbole, che *il punto di contatto della tangente all'iperbole è equidistante dai punti in cui essa incontra gli assintoti.*



Si noti ora che, essendo AP = PE, BP = PC, il quadrilatero ABEC è un parallelogrammo; e, poichè, per costruzione $MN = M_1N_1$, la retta OP è parallela ad AB e, passando per il centro P del parallelogrammo, ne è una mediana. Si conclude che $AM = MC$.

Possiamo quindi enunciare i due teoremi seguenti che danno un mezzo semplicissimo per costruire l'iperbole per tangenti.

Teorema I. — *Il segmento del 1° assintoto (2ª retta generatrice) compreso fra la tangente e il pseudocentro è dimezzato dalla trasversale che dal polo proietta il punto di contatto della tangente all'iperbole.*

Teorema II. — *La parallela condotta per il pseudocentro alla trasversale passante per il polo e per un altro punto dell'iperbole e la tangente in questo punto concorrono in un punto del secondo assintoto.*

Per l'eguaglianza dei segmenti OM_1 e PM si ritrova la nota proprietà che *se una retta incontra un'iperbole i segmenti di essa compresi fra la curva e gli assintoti sono eguali.*

Il primo dei due teoremi pocanzi dimostrati ci dice che $BM_1 = M_1C$ e $BN_1 = N_1E$; cioè la retta CC_1 coincide con la CE. Se ne deduce che *due tangenti d'un'iperbole intersecano gli assintoti in punti tali che le due rette che li congiungono son parallele alla trasversale passante pei punti di contatto.*

6. Servendosi del teorema fondamentale dimostrato nel n. 1 sarebbe facile ricavare qualche nota proprietà dell'iperbole con considerazioni puramente geometriche. Ad esempio, osservando la figura si riconosce subito che *il triangolo compreso fra una tangente e gli assintoti ha aria costante.* Infatti per le due tangenti in O e P i due triangoli BCC', AC_1C' hanno in comune la parte ABC' e i due triangoli ABC, ABC_1 sono equivalenti, avendo la stessa base e la stessa altezza.

Se P_1, P_2 sono due punti dell'iperbole e O un altro punto assunto come polo, costruite le tangenti in P_1, P_2 si vede che *il segmento dell'assintoto compreso fra le proiettanti i punti di contatto dal polo è uguale alla metà del segmento intercetto sullo stesso assintoto delle tangenti.* Mantenendo fissi i punti P_1 e P_2 e facendo variare il polo si dovrà evidentemente conservare la proprietà enunciata, per il primo teorema del n. 5. L'enunciato precedente si completa dunque con quest'altro:

Le rette che congiungono un punto qualunque d'un'iperbole con due punti fissi della stessa curva intercettano su un assintoto un segmento di lunghezza costante ed uguale a metà di quello intercettato sullo stesso assintoto dalle tangenti all'iperbole nei punti fissi.

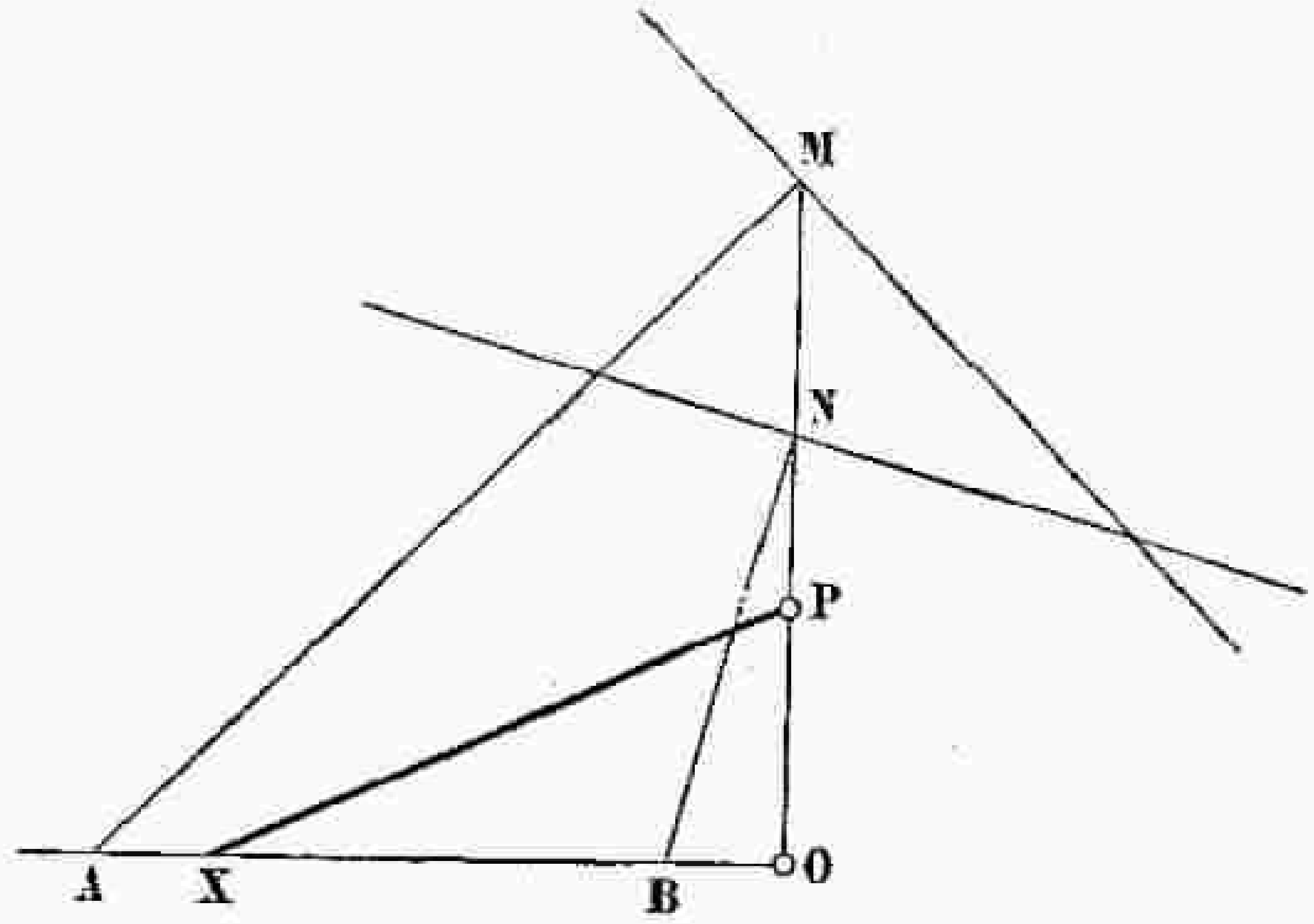
7. Dalla relazione

$$OP = OM - ON$$

si ha, derivando rispetto a φ, anomalia del raggio OM rispetto a un qualunque asse polare passante per O:

$$\frac{d}{d\varphi} OP = \frac{d}{d\varphi} OM - \frac{d}{d\varphi} ON$$

ossia: *la sottonormale polare dell'iperbole in un punto è uguale alla differenza delle sottonormali polari delle due rette generatrici nei punti corrispondenti.*



Questo teorema offre il mezzo di poter costruire in modo semplice la normale e la tangente in un punto all'iperbole. Le normali in M, N alle generatrici intersecano la normale per O al raggio OM in A, B rispettivamente. Preso $OX = OA - OB$, sarà OX la sottonormale polare dell'iperbole nel punto P e XP ne sarà la normale.

RAFFAELE LEONARDI.

PICCOLE NOTE

Nuova dimostrazione di un noto teorema sui massimi e minimi.

È noto che, *se più quantità positive variabili hanno somma* S *costante, il loro prodotto* P *assume il suo massimo valore quando i valori delle quantità considerate sono tutti uguali fra loro.*

Tale importante teorema è dimostrato di solito col procedimento seguente, dovuto a Cauchy. Si prova prima la verità dell'asserto nel caso di due quantità soltanto. Per il caso poi di tre o più quantità si osserva che, se i valori x_0 ed y_0 di due fra esse sono diseguali, il prodotto P aumenta ove ad entrambe le quantità si dia invece il valore $\frac{x_0 + y_0}{2}$; donde si conclude che, se i valori delle quantità considerate non sono tutti eguali, il prodotto P non ha il massimo valore possibile e che tale prodotto è quindi massimo quando le quantità considerate hanno tutte lo stesso valore.

Ma siamo noi sicuri che esistano effettivamente dei valori delle quantità variabili corrispondentemente ai quali P assume il suo massimo valore possibile? La dimostrazione precedente ci assicura soltanto che P *non è massimo* quando le quantità considerate *non sono eguali*. Ma di qui non è lecito concludere che P *è massimo* quando dette quantità *sono eguali*.

Rigorosa è invece la dimostrazione che del nostro teorema diede nel 1879 il prof. Davide Besso (*Annuario del R. Istituto Tecnico di Roma*) e che il prof. Frattini ha riprodotta nella 1ª edizione delle sue bellissime " Lezioni di algebra, geometria e trigonometria ad uso degli Istituti Tecnici " (Paravia, 1911). Essendomi però sembrato che il procedimento seguito dal Besso fosse troppo lungo e complicato, mi proposi di vedere se si poteva dare del teorema una dimostrazione più semplice che, senza scostarsi troppo da quella del Cauchy, la rendesse rigorosa. La dimostrazione trovata è la seguente, che non credo sia nota ed alla quale il Frattini volle tosto concedere l'onore di gentilmente riportarla nella 2ª edizione delle sue " Lezioni " (fatta ad un anno di distanza dalla 1ª!).

***

Siano n le quantità variabili considerate.

Se esse sono tutte eguali, il loro valore comune è manifestamente $\frac{S}{n}$ ed il loro prodotto è $\left(\frac{S}{n}\right)^n$. Si ha cioè $P=\left(\frac{S}{n}\right)^n$.

Se esse invece non hanno tutte lo stesso valore, ve n'è certamente una (almeno) il cui valore è minore di $\frac{S}{n}$ ed una il cui valore è maggiore.

Indichiamo con x e con y queste due quantità; i loro valori potranno indicarsi con $x_0=\frac{S}{n}-h$ e con $y_0=\frac{S}{n}+k$, dove h e k sono evidentemente due numeri positivi ed h è minore di $\frac{S}{n}$.

Attribuiamo alla x, invece del valore x_0, il valore $\frac{S}{n}$. La somma S manifestamente non muta se si attribuisce alla y il valore $\frac{S}{n}+k-h$ (positivo, essendo $\frac{S}{n}>h$) e si lasciano immutati i valori delle altre $n-2$ quantità. Per vedere se e come varia il prodotto P basta evidentemente vedere se e come varia il prodotto delle quantità x ed y, le sole che hanno mutato il loro valore.

Tale prodotto era prima

$$\left(\frac{S}{n}-h\right).\left(\frac{S}{n}=k\right)=\left(\frac{S}{n}\right)^2+k.\frac{S}{n}-h.\frac{S}{n}-hk;$$

ora è

$$\frac{S}{n}.\left(\frac{S}{n}+k-h\right)=\left(\frac{S}{n}\right)^2+k.\frac{S}{n}-h.\frac{S}{n}.$$

Esso è dunque aumentato del prodotto $h.k$; ed alle altre quantità che, eventualmente, avevano già il valore $\frac{S}{n}$ ne va ora aggiunta un'altra, la x.

Ripetiamo, se necessario, il procedimento ora indicato, fino ad ottenere che le n quantità considerate abbiano tutte il valore $\frac{S}{n}$. Il loro prodotto va sempre aumentando e da ultimo è $\left(\frac{S}{n}\right)^n$; il prodotto primitivo P era dunque $<\left(\frac{S}{n}\right)^n$.

Vale insomma la relazione $P \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)^n$, il segno $=$ valendo solo quando le n quantità considerate hanno tutte lo stesso valore; e con ciò il nostro teorema resta completamente dimostrato.

***

Dalla relazione precedente si ottiene ovviamente l'altra $S \geqslant n \cdot \sqrt[n]{P}$, nella quale abbiamo ancora che il segno $=$ vale solo quando i valori delle quantità considerate sono tutti eguali fra loro.

Ne risulta tosto dimostrato l'altro importante teorema che dice: *se più quantità positive variabili hanno prodotto P costante, la loro somma S è minima quando le quantità considerate hanno tutte lo stesso valore.*

PAOLO CATTANEO.

IN MEMORIA
DI
ANTONIO PACINOTTI

(17 giugno 1841 — 25 marzo 1912)

Antonio Pacinotti aveva appena diciassette anni quando ideò un apparecchio per valutare le intensità delle correnti indipendentemente dalla forza direttrice del magnetismo. Fu questo strumento che a Lui dette la spinta per la costruzione del suo famoso *anello* ad *elettro-calamita trasversale*; il rinomato *anello* che, variato nella forma, ha dato luogo a tutte le macchine elettrodinamiche moderne.

Il principio di *reversibilità* delle macchine magneto-elettriche ed elettro-magnetiche era già stato dimostrato dal PACINOTTI nel 1860, ma fu da Lui reso noto solo nel 1864. In questo anno ebbe dunque origine la prima dinamo costruita dal PACINOTTI, il quale ne costruì poi un'altra nel 1870. Studiando ancora, il PACINOTTI cambiò nel 1874 in cilindro pieno l'anello e costruì una macchina magneto-elettrica a *gomitolo* con spire rettangolari; nel 1881 trasformò ancora l'anello primitivo e costruì una dinamo *a volano*; le spire indotte avevano in questa la forma a D.

I progressi erano continui e mai il PACINOTTI perse di vista la teorica e la pratica delle macchine per generare la corrente elettrica, tanto vero che nel maggio del 1911 prese un brevetto per un *Commutatore particolare ad alto potenziale* e nel luglio dello stesso anno ne prese un altro sulla nuova *elettro-calamita trasversale ad anello spezzabile e ricomponibile*, che dovrebbero portare un potente contributo alla costruzione economica delle grandi dinamo ad alto potenziale.

Nel campo dell'elettrotecnica il PACINOTTI portò dunque un immenso contributo schiudendo nuovi ed illimitati orizzonti.

Basterebbe questo solo contributo per rendere, come lo è difatti, immortale il suo nome.

Ma in altri campi lavorò alacremente il PACINOTTI ed in ogni suo lavoro si trovano sempre idee geniali che dischiuderanno nuove vie alle ricerche scientifiche. Basta leggere attentamente le sue numerose memorie per convincersene.

Accennerò solo, per avvalorare con qualche esempio questa mia asserzione, a qualcuna delle più importanti.

Nel campo della fisica pura accennerò:

a) alla *teoria elettrica della affinità*, secondo la quale le correnti elettriche, sieno esse dovute al semplice contatto, od al calore, od all'azione chimica, od all'azione della luce, ecc., hanno origine dagli *attriti molecolari di scorrimento* tra gli elementi delle molecole, le quali avrebbero l'attitudine di potersi caricare di elettricità di nome contrario confricandosi tra loro;

b) alle correnti prodotte da due metalli omonomi, non in contatto ed immersi in una soluzione di un sale del metallo usato, sotto l'azione della luce o del calore;

c) alla teoria dell'ebollizione, *corretta* per quel che riguarda le temperature e le tensioni;

d) alla correzione da farsi alle leggi di Coulomb e di Matteucci sulla dispersione delle cariche elettriche operata dall'aria;

e) alla elettricità prodotta dalle coppie bimetalliche per attrito.

Nel campo della fisica tecnologica accennerò solo:

a) alla costruzione di *tini a conduttura forzata* per avere un maggior rendimento ed una migliore qualità di vino nella fermentazione dell'uva;

b) ai *viali elettromagnetici* che, se ben capiti, porteranno tanti vantaggi nella trazione elettrica;

c) alla introduzione della trazione polispastica di coltri bivomeri per ottenere un rendimento maggiore del terreno con risparmio di spesa;

d) allo studio sull'attrito di scorrimento, col quale studio si dimostra l'influenza della temperatura, delle vibrazioni, della umidità, della elettrolisi, della untuosità, sulla adesione e sullo attrito nello sfregamento fra alcuni corpi e sul lavoro di alcuni aratri.

Dovrei accennare ancora ai contributi portati dal PACINOTTI agli studi astronomici, alla meccanica applicata all'agricoltura, all'architettura rurale, alla idraulica rurale, ecc. ecc., ma non lo faccio per non dilungarmi di troppo. Per chi voglia conoscere almeno in riassunto i lavori del PACINOTTI potrà leggere l'opuscolo che fu da me pubblicato col titolo " IN MEMORIA DI ANTONIO PACINOTTI " (Pisa, Tip. del " Nuovo Cimento " marzo 1913).

ANTONIO PACINOTTI stoicamente sopportò le patite ingiustizie, non chiese mai nulla a nessuno e dette tutto il suo fecondo ingegno per gli altri.

Le più grandi onorificenze lo lasciarono sempre freddo, chè egli non le agognava. Riteneva essere un dovere dare il proprio contributo d'operosità per la grandezza della Patria, sia come cittadino, sia come insegnante, sia come scienziato, e fu sinceramente modesto per spontanea elezione.

Anima onesta, spirito sereno, cuore ottimo, scrupolosa rettitudine di sentimenti, erano le doti naturali di ANTONIO PACINOTTI. E per ciò questo Grande Uomo rimase sempre indifferente a tutto ciò che portava la sua persona in alto. Egli desiderava fare il bene per il bene, non per fine egoistico, e per la tranquillità della sua coscienza potè conservare fino all'ultimo suo anelito di vita una straordinaria serenità di spirito.

Fu grande come scienziato, fu immenso per la sua bontà, fu sublime per la sua lucidità di mente e perciò la sua figura rifulgerà doppiamente, e come grande inventore e come uomo perfetto.

Livorno, 10 Marzo 1913.

Prof. VITTORIO BOCCARA.

BIBLIOGRAFIA

Il prof. Ortu Carboni ha inviato alla direzione del " Periodico di Matematica " una lettera in risposta alla recensione del suo *Trattato di Matematica finanziaria*, pubblicata nel N. 2 di questo giornale. — Una parte di questa lettera contiene accenni a quistioni personali che non crediamo possano trovar opportunamente posto in un giornale scientifico, e confidiamo che l'egregio professore sarà soddisfatto di veder pubblicato quella parte che può veramente considerarsi come risposta alle critiche del prof. Sibirani.

G. L.

Il prof. Sibirani discorre di un volume contenente 431 pagine esclusive di Matematica finanziaria, a questo modo:

si ferma ad analizzare, nei modi voluti dai suoi fini, alcuni numeri di un capitolo preliminare, il quale vuole affermare soltanto e rapidissimamente (e da altri sono pur stato accusato di soverchie pretese!) la necessità di una cultura complementare per lo studio della Matematica finanziaria anche rivolto a fini pratici;

vuole, onestamente sempre, far credere che io abbia preteso ammannire lezioni di Analisi infinitesimale in 10 pagine, che contengono semplicemente un formulario e qualche esempio di applicazione dell'Analisi infinitesimale alla Matematica finanziaria, con lo scopo di invogliare allo studio di quella disciplina e con opportuni rimandi ai più facili manuali;

attribuisce a me anche evidenti errori di stampa.

Non dimentica però una mostra pedale degli articoli e dei processi brevettati degli amici, che io ho avuto il torto di trascurare, avendo scritto il libro prima della loro produzione, ma che non avrei neppur potuto curare scrivendolo oggi. E mette pure avanti un nome venerato, il quale, con le sue ben note larghezze di idee e nobiltà di animo, non può ritenere offensivo per lui il disaccordo in qualche punto fondamentale, nè gradire certi incensi... disinteressati.

Genova, dicembre 1912.

S. Ortu Carboni.

G. Riboni. — *Elementi di calcolo letterale e di algebra*, per le scuole medie di 1° grado. — Societa editrice "Dante Alighieri", Albrighi-Segati. — L. 1,80.

L'egregio Autore svolge in questo pregevole volumetto, in modo assai semplice, chiaro ed esatto, il ben noto programma di Aritmetica, Calcolo letterale ed Algebra assegnato alla 3ª classe della Scuola tecnica. Le 3 parti del programma non sono però tenute distinte ed esposte separatamente: l'aritmetica coi numeri segnati (chiamati dall'A. impropriamente, come troppo spesso si suole, numeri algebrici) è svolta contemporaneamente al calcolo letterale (chiamato dall'A. calcolo algebrico o algebra, mentre sarebbe opportuno riserbare tale denominazione alla teoria delle equazioni).

Un'esperienza ormai, purtroppo, abbastanza lunga mi ha invece convinto che lo studio del calcolo letterale riesce molto più facile ed efficace quando prima si conosce bene l'aritmetica coi numeri segnati. Ritengo opportuno abituare gli alunni a trattare i numeri negativi con assai maggiore famigliarità. Come la considerazione degli aggregati di oggetti ci porta spontaneamente allo studio dei numeri naturali e la divisibilità in parti eguali a quello delle frazioni, così le grandezze che variano indefinitamente in due sensi opposti ci inducono allo studio dei numeri segnati, senza bisogno, nè opportunità, di premettere alcuna nozione di calcolo letterale. Io preferisco che esso sia esposto solo dopo aver studiato l'intero campo di razionalità: come una sintesi ed un'applicazione delle varie proprietà trovate valide nei tre campi sempre più ampii di numeri che si sono successivamente considerati.

Fatta l'accennata riserva sulla disposizione data alla materia (e sull'abuso della parola: algebra) sembrami che il libro del Riboni sia degnissimo di ogni elogio. Nella prima parte (I numeri algebrici e le operazioni relative) approvo specialmente l'adeguata estensione che l'A. volle dare allo studio delle frazioni letterali, che è tanto importante e del quale invece si dà di solito soltanto un rapido cenno. Nella seconda parte (Le equazioni) l'A., dopo un'accuratissimo studio teorico delle equazioni (lineari), si occupa dell'intavolazione delle equazioni e della discussione dei risultati, svolgendo per esteso parecchi interessanti problemi. Un'ampia raccolta di esercizi e problemi benissimo scelti e dati da svolgere al lettore aumenta il pregio di questo bel trattatello, che vivamente raccomando ai colleghi delle Scuole tecniche o normali. (Anzi, a proposito, perchè l'A., nel titolo, parla solo di Scuole medie di 1° grado? L'esimio Collega mi accontenti "almeno" in questo, nella 2ª edizione, che spero non si farà molto aspettare).

P. Cattaneo.

E. Sadun e C. Soschino. — *Lezioni di aritmetica.* — 4ª edizione. — Paravia, 1912. — L. 2,75.

Gli egregi A. svolgono in questo libro l'aritmetica razionale dei numeri interi e frazionari, ai quali sono appunto rispettivamente dedicate la prima e la seconda parte del libro. L'esposizione è chiara e precisa; ma non mi sembra semplice e sobria quanto sarebbe desiderabile in un libro scolastico. La tendenza a voler trattare l'argomento troppo astrattamente, troppo in generale e con troppi dettagli nocque forse all'efficacia didattica.

Nella prima parte sono dimostrate le proprietà delle varie operazioni coi numeri interi e le regole di calcolo col sistema di numerazione decimale; sono poi esposte le teorie dei numeri primi, del mass. com. div. e del min. com. mult. Un'appendice ed alcune note dànno modo però, a chi lo desideri, di premettere lo studio del mass. com. div. e del min. com. mult. a quello dei numeri primi. La seconda parte del libro si occupa delle frazioni, studiando, naturalmente, prima le ordinarie e poi le decimali, i quozienti approssimati ed i quozienti periodici. In conformità al già accennato mio desiderio di maggior semplicità e praticità avrei preferito che in questa seconda parte fosse stato messo meglio in evidenza l'intimo legame esistente tra le frazioni e le grandezze e che tale legame fosse stato, ad es., utilmente sfruttato nelle definizioni di somma e di prodotto. Il libro termina con una bella raccolta di numerosi esercizi.

P. Cattaneo.

G. Fazzari. — *Elementi di aritmetica*. — 2ª edizione. — Parte I, numeri interi, L. 1,40; parte II, numeri frazionari, decimali e proporzioni, L. 1,10. — Libr. Reber, Palermo.

In questi due pregevoli volumetti è svolto in modo semplice, chiaro e preciso il programma di aritmetica razionale prescritto nel Ginnasio superiore e nella 1ª classe dell'Istituto tecnico. Agli argomenti strettamente necessari ne sono aggiunti parecchi altri complementari, tenuti però ben distinti dai primi, in modo che si possano con tutta facilità tralasciare ove se ne sia costretti da rigorose esigenze scolastiche. Senza trascurare la parte teorica sono poi tenuti nel debito conto ed ampiamente trattati gli importantissimi argomenti relativi alla pratica algoritmica.

Numerose ed ampie sono le note storiche ed etimologiche che seguono ciascun paragrafo; frutto della ben conosciuta, singolare competenza che su tale argomento ha l'A., esse dànno nel loro complesso una breve storia dell'Aritmetica, assai utile ed interessante, specialmente per gli alunni dei Ginnasi e Licei. Ed assai utile è la bella raccolta di moltissimi esercizi, problemi, giuochi e quesiti varî, proposti alla fine di ciascun volumetto e seguìti quasi tutti da un cenno di risoluzione; in tale modo l'A. coglie spesso il pretesto di accennare a tante interessanti teorie e di dare delle utilissime nozioni, atte ad allargare la mente dei giovani ed a render loro la matematica sempre più attraente.

Passando alla parte critica devo però fare alcune osservazioni. Non consento coll'A. sulla convenienza didattica di definire il prodotto di più numeri interi seguendo l'indirizzo combinatorio proposto dal compianto prof. Capelli: tale definizione sarebbe bene porre soltanto in nota e seguire nel testo il metodo solito. Invece di dedurre i varî caratteri di divisibilità dal criterio generale dovuto al Pascal preferirei che tale criterio fosse posto in nota e che i varî caratteri di divisibilità fossero esposti *more solito*. Relativamente alle frazioni dovrei ripetere quanto già scrissi più sopra per le *Lezioni* dei professori Sadun e Soschino. Un'altra raccomandazione dovrei fare da ultimo all'A.: nella 3ª edizione, che gli auguro non molto lontana, adoperi caratteri più grandi e faccia meno economia di spazio; lo studio dei due bei volumetti ne rimarrebbe certamente assai semplificato; in compenso si potrebbe (e sarebbe forse bene) abbreviare parecchie note e si potrebbe aumentare un po' la mole... e il prezzo dei volumetti; quand'anche costassero 3 lire, sarebbero sempre denari bene spesi!

P. Cattaneo.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 Marzo 1913.

SAGGIO SULLA TEORIA DEI VERSI

nelle forme geometriche fondamentali

Al lavoro critico e ricostruttivo esercitatosi negli ultimi tempi sui fondamenti della Geometria non è sfuggita la opportunità di dare un compiuto assetto logico alla teoria dei versi delle figure fondamentali, specialmente in vista della utilità di questa nella classificazione delle congruenze e similitudini, come pure della continua sua applicazione in Geometria Analitica e in Meccanica razionale. In corrispondenza ai varii metodi di costruire l'edificio geometrico furono date da varii autori diverse esposizioni di questa teoria. Fra esse un posto a parte occupa quella del Veronese, poichè il concetto di *verso* vi è assunto come primitivo per una classe assai estesa di figure, ed anche per altre caratteristiche che è qui inutile ricordare. Nel sistema dell'Hilbert, il quale assume come primitiva l'idea della successione di tre punti sopra una retta, e nel sistema, teoricamente più semplice, del Pasch e del Peano, ripreso più recentemente dal De Franchis (1) e dallo Schur, (2) fondato sui concetti di *classe*, *punto*, e *segmento* la definizione dei *versi* è invece necessaria per tutte le forme. A questi indirizzi può intendersi coordinata l'esposizione dell'Amaldi (3) per il verso degli angoli nella quale si accenna anche agli sviluppi analoghi per lo spazio; come pure le ricerche del Levi e del Veneroni (4) che riducono tutti i casi a quello della punteggiata mediante successive proiezioni, ciò che può facilitare specialmente una trattazione didattica di questa teoria.

Nel presente saggio mi propongo una trattazione della teoria dei versi di tutte le forme che differisce notevolmente da quelle citate e che pur non essendo forse di esse meno complicata mi sembra possa essere di qualche interesse dal punto di vista critico in quanto riconduce in modo diretto per ogni tipo di figure l'uguaglianza e l'opposizione dei versi alle nozioni grafiche elementari. Il carattere logico che ho dato alla esposizione e forse sembra complicarla, mi è sembrato necessario per essere sicuro del massimo rigore; come pure mi

(1) M. De Franchis, *Geometria elementare* (Sandron, Palermo).
(2) F. Schur, *Grundlagen der Geometrie* (Teubner, Leipzig, 1909).
(3) In: *Questioni riguardanti la Matematica elementare* (Bologna, Zanichelli, 1912): U. Amaldi, *Sui concetti di retta e di piano*, pag. 69-74.
(4) B. Levi, *Sull'uguaglianza diretta e inversa delle figure*, " Per. di Mat. ", XIX, 1904, pag. 207; e E. Veneroni, *Sul verso degli angoli e dei triedri*, " Per. di Mat. ", XXVI, 1911, pag. 15.

parve opportuna l'adozione di qualche termine anche se poco usato e poco felice per indicare classi di figure equiverse contenute in una data forma.

§ 1. — Carattere logico della teoria.

1. Data una classe C, una relazione R tra elementi di C si dice *equaliforme* se possiede le proprietà formali di una uguaglianza; cioè se essendo x, y, z elementi di C, si ha sempre:

$$x\mathrm{R}x; \qquad \text{(Prop. riflessiva)} \quad (\alpha)$$
$$\text{da } x\mathrm{R}z \text{ e } y\mathrm{R}z \text{ si deduce } x\mathrm{R}y. \quad \text{(Prop. transitiva)} \quad (\beta)$$

È ben noto come da queste proprietà si deduca logicamente l'altra:

$$\text{da } x\mathrm{R}y \text{ segue } y\mathrm{R}x. \qquad \text{(Prop. simmetrica)} \quad (\gamma)$$

2. In modo analogo, si potrebbe dire *oppositiforme* la relazione $\overline{\mathrm{R}}$ opposta di R, quando R è equaliforme e inoltre:

$$\text{da } x\overline{\mathrm{R}}z \text{ e } y\overline{\mathrm{R}}z \text{ si deduce } x\mathrm{R}y. \qquad (\delta)$$

Dalle (α) (β) (γ) (δ) seguono facilmente le altre:

$$\text{non è mai } x\overline{\mathrm{R}}x; \qquad (\varepsilon)$$
$$\text{da } x\overline{\mathrm{R}}y \text{ segue } y\overline{\mathrm{R}}x; \qquad (\zeta)$$
$$\text{da } x\mathrm{R}z \text{ e } x\overline{\mathrm{R}}z \text{ segue } x\overline{\mathrm{R}}y. \qquad (\eta)$$

P. es. essendo C la classe dei numeri reali, lo zero escluso, la relazione espressa dalla disuguaglianza $xy > 0$ è equaliforme; la sua opposta è oppositiforme. Se invece C è la classe delle rette di un piano π, e R è espressa dalle parole " parallela o coincidente ", R è equaliforme, ma $\overline{\mathrm{R}}$ non è oppositiforme, perchè rette incidenti a una terza non sono necessariamente parallele o coincidenti.

3. Una coppia di relazioni opposte R, $\overline{\mathrm{R}}$ soddisfacenti alle condizioni (α) (β) (δ) distingue la classe C in due classi C′, C″, tali che tra due elementi della stessa classe sussiste la relazione R, tra elementi di classi diverse non sussiste la R e sussiste quindi la $\overline{\mathrm{R}}$. Infatti basta scegliere in C un elemento a e porre in C′ ogni x per cui $x\mathrm{R}a$, in C″ ogni y per cui $y\overline{\mathrm{R}}a$.

4. È noto [1] come ogni relazione equaliforme R definisca per astrazione una funzione f degli elementi della classe tale che la relazione R

---

[1] Vedi per maggiori particolari i recenti *Elementi di calcolo vettoriale* di C. Burali-Forti e R. Marcolongo, e l'articolo di S. Catania: *Sulle definizioni per astrazione e per postulati*, in " Boll. di Matematica ", Anno X, pag. 12.

tra due elementi della classe si traduca nell'uguaglianza dei corrispondenti valori della funzione f. Nel nostro caso saranno dunque scritture equivalenti le seguenti:

$$xRy; \qquad f(x) = f(y).$$

La condizione supplementare (δ) esige di più che la funzione f oltre ad avere un medesimo valore per tutti gli elementi della classe C' abbia anche un medesimo valore, diverso dal primo, per quelli della classe C''; che insomma la relazione R definisca un ente *a due soli valori.*

5. Si riconosce facilmente che una relazione R appartiene al tipo considerato quando *per ogni elemento* y *di* C *esiste un altro elemento* (*coniugato*) y' *tale che*

$$\text{da } x\overline{R}y \text{ si deduce } xRy'. \tag{θ}$$

Se infatti si ha, secondo la (δ), $x\overline{R}z$ e $y\overline{R}z$ e si chiama z' il coniugato di z, si avrà anche xRz' e yRz' e quindi xRy.

6. Nel seguito di questo studio la classe C sarà formata di certe figure geometriche (segmenti, angoli ecc.); tra due di esse dimostreremo possibili due sole relazioni, l'una opposta dell'altra, e che dinoteremo con le locuzioni « *equiverso* », « *contraverso* ». Proveremo che la prima di esse è equaliforme, la seconda oppositiforme; per questo si dimostreranno caso per caso le proprietà (α), (β), (θ), cioè le seguenti:

A) *Una figura è equiversa a se stessa.*

B) *Figure equiverse ad una terza sono equiverse tra loro.*

C) *Per ogni figura esiste una figura coniugata, tale cioè che ogni figura contraversa alla prima è equiversa alla seconda.*

Dopo ciò gli elementi di C si potranno distinguere in due classi a ciascuna delle quali appartiene uno stesso valore di una certa funzione che prende il nome di *verso* della classe, e che è suscettibile quindi di due soli valori.

§ 2. — Versi della retta.

7. Essendo data una retta r, due raggi a, b di r si diranno *equiversi* se uno di essi contiene l'altro; *contraversi* se ciò non avviene. Sono quindi contraversi due raggi opposti, due raggi che hanno a comune un segmento, e due raggi che non hanno punti comuni; nè evidentemente possono darsi altri casi.

8. Ogni raggio contiene se stesso; la proprietà (A) è dimostrata.

9. I raggi a e b siano equiversi al raggio c; potrà verificarsi uno qualunque dei quattro casi:

a contiene c,	b contiene c;
a contiene c,	c contiene b;
c contiene a,	b contiene c;
c contiene a,	c contiene b.

Nel secondo caso e nel terzo è chiaro che dei raggi a e b uno contiene l'altro: essi sono quindi equiversi. Nel primo, siano A, B, C, le origini dei tre raggi; allora a risulta del segmento AC e del raggio c, b del segmento BC e del raggio c. Quindi A e B cadono da una stessa parte di c, onde AC contiene BC o BC contiene AC. Concludendo anche in questo caso a contiene b o viceversa: a e b sono equiversi.

Dimostrazione analoga si ha per la quarta ipotesi; resta così provata la proprietà (B).

10. Come *coniugato* del raggio b possiamo assumere il raggio opposto b'; infatti se a e b sono contraversi si possono fare le seguenti ipotesi:

a e b sono opposti;
a e b hanno a comune un segmento AB;
a e b non hanno punti comuni.

Nel primo caso a e b' coincidono; nel secondo b' è il prolungamento di AB dalla parte di B, quindi a contiene b'. Nel terzo a non contiene B, e b non contiene A, quindi b' contiene A, ed è equiverso ad a. È con questo dimostrata anche la proprietà (C).

11. Dai n. precedenti e dall'osservazione generale del n. 6 risulta la possibilità di coordinare ad ogni rêtta due enti detti i suoi *versi*, in modo che ogni raggio abbia un verso, e ad ogni verso corrispondano infiniti raggi equiversi. Le due classi nelle quali possono così distinguersi i raggi di r si diranno *rette ordinate*; r è il loro *sostegno*.

12. Coordinando ad un segmento AB un determinato ordine dei suoi estremi abbiamo il segmento *ordinato*; ogni segmento AB è *sostegno* di due segmenti ordinati che si indicheranno con AB e BA; nel primo A è l'*origine*, B il *termine*; l'opposto nel secondo.

Per definizione, *verso* del segmento AB è il verso del raggio che ha la stessa origine e che lo contiene. Indicandolo con A (B) poniamo dunque:

$$\text{verso AB} = \text{verso A (B)}.$$

Evidentemente anche per i segmenti ordinati valgono tutte le proprietà formali delle relazioni *equiverso* e *contraverso*; e si può quindi ampliare il contenuto della locuzione *retta ordinata* comprendendovi i raggi e i segmenti che hanno un dato verso. Indicheremo con $r(\omega)$ la retta ordinata che ha per sostegno la retta r e il verso ω.

13. Fra le conseguenze della precedente definizione notiamo le seguenti, di immediata dimostrazione:

a) *I segmenti ordinati* AB *e* BA *sono contraversi.*

b) *Se* C *giace in* AB, CA *e* CB *sono contraversi,* AC *e* CB *equiversi, ecc.*

14. Ciò che precede può estendersi senz'altro ad ogni sistema che possa porsi in corrispondenza biunivoca con una punteggiata; p. es. al fascio di rette parallele o di piani paralleli.

§ 3. — Versi sulle rette di un fascio o di una stella di centro improprio.

15. Basterà che ci limitiamo al caso di una stella Σ di rette parallele. Sulle rette r e s della stella si considerino due rette ordinate $r(\sigma)$, $s(\tau)$; vale allora il teorema:

Se due raggi di $s(\sigma)$ *e di* $t(\tau)$ *cadono da una stessa parte o da parti opposte rispetto alla retta che congiunge le loro origini, lo stesso avviene per altri due raggi qualunque delle stesse rette ordinate. Nel primo caso le rette si dicono* equiverse, *nel secondo* contraverse.

Sia dapprima a' un raggio di $s(\sigma)$, di origine A; b' e c' due raggi di $t(\tau)$, di origini B e C. Dobbiamo provare che se a' e b' giacciono da una stessa parte di AB, a' e c' giacciono da una stessa parte di AC. Ed infatti, supposto p. es. che b' contenga c', rispetto ad AC cadono da parti opposte a' e AB, quindi a' e B; cadono quindi da una stessa parte a' e c'.

Dobbiamo poi provare che se a' e b' cadono da parti opposte di AB, anche a e c cadranno da parti opposte di AC. Questa seconda asserzione si riduce alla prima considerando il raggio a' opposto di a.

Se ora si vuol passare al caso generale, basta applicare due volte il risultato precedente. Poichè, se a', b', di origini A e B sono raggi di $s(\sigma)$, c', d' di origini C, D raggi di $t(\tau)$, e per es. a' e c' cadono da una stessa parte di AC, anche a' e d' cadranno da una stessa parte di AD, e infine b' e d' cadranno da una stessa parte di BD.

16. Definita così la relazione *equiverso* e la sua opposta *contraverso*, tra rette ordinate di diverso sostegno e ammesso per completare questa definizione che due rette ordinate di comune sostegno si dicano *equiverse* se identiche, *contraverse* se opposte, dimostriamo che sono soddisfatte le proprietà (A) (B) (C).

17. Avendo ammesso per definizione di dire equiverse due rette ordinate identiche, la (A) è verificata.

18. La (B) si verifica immediatamente nel caso in cui delle tre rette ordinate che in essa si considerano due abbian lo stesso sostegno; poichè allora esse coincidono. Dimostriamola nel caso in cui i sostegni siano distinti.

Siano allora $r(\rho)$, $s(\sigma)$, $t(\tau)$ le tre rette ordinate; le prime due siano equiverse alla terza. Tagliamo r, s e t con un piano π nei punti A, B e C.

Sulla retta ordinata $r(\rho)$ esisterà allora un raggio a' di origine A, su $s(\sigma)$ un raggio b' di origine B, su $t(\tau)$ un raggio c' di origine C. Per l'ipotesi a' e c' cadono da una stessa parte rispetto ad AC, quindi a π; e così b e c cadono da una stessa parte rispetto a BC e quindi a π. Lo stesso avverrà perciò per a e b: $s(\sigma)$ e $t(\tau)$ son dunque equiverse.

19. Come *coniugata* di una data retta ordinata si può assumere la sua opposta (sullo stesso sostegno); infatti è chiaro che se $s(\sigma)$, $s(\sigma')$ sono rette ordinate opposte e $t(\tau)$ è contraverso a $s(\sigma)$, un raggio b' di $t(\tau)$ e uno a' di $s(\sigma)$ cadono da parti opposte rispetto alla congiungente delle loro origini; sostituendo al raggio a il suo opposto a', che appartiene a $s(\sigma')$, b e a' cadranno da una medesima parte della stessa congiungente, onde $t(\tau)$ e $s(\sigma')$ saranno equiversi. La proprietà (C) è dimostrata.

20. Potremmo ripetere qui le conclusioni del n. 11, ciò che omettiamo per brevità; osserviamo solo che *equiversi* e *contraversi* possono anche dirsi i raggi di due rette ordinate che presentino questo carattere; e così pure i segmenti ordinati.

§ 4. — Versi di un fascio di raggi.

21. Coordinando ad un angolo $\widehat{ab}$ un ordine determinato dei suoi lati (p. es. a, b) abbiamo l'*angolo ordinato* $\widehat{ab}$; a è il raggio *origine*, b il raggio *termine*.

22. Due angoli piatti $\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$ di un fascio O si diranno *equiversi* se la loro parte comune è uno degli angoli convessi $\widehat{ab'}$, $\widehat{a'b}$; *contraversi* se ciò non avviene, cioè se la loro parte comune è uno degli angoli convessi $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$.

Per evitare difficoltà distinguiamo il caso in cui le rette aa', bb' coincidano. Si consideri allora una coppia di raggi opposti del fascio c, c' distinti da a e a'; per definizione l'angolo $\overline{aca'}$ (¹) sarà detto equiverso ad $\overline{aca'}$ e ad $\overline{a'c'a}$; contraverso ad $\overline{ac'a'}$ e ad $\overline{a'ca}$.

23. Per l'ultima definizione la proprietà (A) è verificata.

24. Per dimostrare la (B) si consideri a parte il caso in cui dei tre angoli piatti che in essa si considerano due abbiano i lati sulla stessa retta.

(¹) In generale con la scrittura $\overline{ab} = \overline{apqr \ldots b}$ vogliamo significare che l'angolo $\overline{ab}$ contiene, in quest'ordine, i raggi $p, q, r \ldots$; cioè che $\widehat{aq}$ contiene p, $\widehat{ar}$ contiene q, e così via.

Per es. $\overline{aa'}$ sia equiverso a $\overline{bb'}$; diciamo che esso sarà equiverso anche al suo opposto al vertice $\overline{b'b}$. Infatti se $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ hanno a comune $\widehat{a'b}$, $\overline{aa'}$ e $\overline{b'b}$ hanno a comune $\widehat{ab}$; e se invece i primi hanno a comune $\widehat{ab'}$, gli altri hanno a comune $a'b'$; in ogni modo sono equiversi.

Passando poi al caso generale, dovremmo distinguere varî casi; vedremo che basta limitarci al seguente. Siano $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ equiversi a $\overline{cc'}$, e precisamente $\overline{aa'}$ e $\overline{cc'}$ abbiano a comune $\widehat{ac'}$, $\overline{bb'}$ e $\overline{cc'}$ abbiano a comune $\widehat{bc'}$.

Si potrà quindi scrivere:

$$\begin{cases} \overline{aa'} \equiv \overline{ac'a'} \\ \overline{cc'} \equiv \overline{cac'} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} \overline{bb'} \equiv \overline{bc'b'} \\ \overline{cc'} \equiv \overline{cbc'} \end{cases}$$

Poichè il dato angolo $\overline{cc'}$ contiene a e b, a cadrà in $\widehat{cb}$ o in $\widehat{bc'}$; nel primo caso scriveremo:

$$\overline{cc'} \equiv \overline{cabc'}$$

e poichè b cade in $\widehat{ac'}$:

$$\overline{aa'} \equiv \overline{abc'a'}.$$

Inoltre, a cadendo in $\widehat{cb}$, a' cadrà in $\widehat{c'b'}$, e quindi:

$$\overline{bb'} \equiv \overline{bc'a'b'}.$$

Confrontando le espressioni di $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ si vede che essi hanno a comune $\widehat{ba'}$; sono quindi equiversi.

Nel secondo caso scriveremo:

$$\overline{cc'} = \overline{cbac'} \qquad\qquad \overline{bb'} \equiv \overline{bac'b'}$$

e quindi, b cadendo in $\widehat{ca}$, b' in $\widehat{c'a'}$:

$$\overline{aa'} = \overline{ac'b'a'};$$

si vede ancora che $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ hanno a comune ab' e quindi sono equiversi.

Si è detto che ogni caso si riduce a questo; infatti se per es. $\overline{aa'}$ e $\overline{cc'}$ hanno a comune $\widehat{a'c}$, $\overline{b'b}$ e $\overline{cc'}$ hanno a comune $\widehat{bc'}$, considereremo al posto di $\overline{aa'}$ il suo opposto al vertice $\overline{a'a}$ il quale ha a comune con $\overline{cc'}$ l'angolo $\widehat{a'c'}$; per $\overline{a'a}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$ vale la dimostrazione precedente, quindi $\overline{a'a}$ e $\overline{bb'}$ sono equiversi. Abbiamo allora visto che sono equiversi anche $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$.

25. Come *coniugato* di un dato angolo piatto $\overline{bb'}$ possiamo assumere l'altro angolo piatto che ha gli stessi lati e che pel momento indichiamo con $\underline{bb'}$.

Infatti (tralasciando per brevità i soliti casi eccezionali) se un angolo piatto $\overline{aa'}$ ha comune con $\overline{bb'}$ la parte $\widehat{ab'}$ o la parte $\widehat{a'b}$, con $\overline{bb'}$ avrà comune rispettivamente la parte $\widehat{a'b'}$ o la parte $\widehat{ab}$; in ogni modo $\overline{aa'}$ e $\overline{bb'}$ saranno contraversi. È così dimostrata la proposizione (C).

26. Dopo ciò, possiamo intendere senz'altro estesa agli angoli piatti del fascio O la nozione di *verso*; la classe degli angoli piatti del fascio O aventi un determinato verso ω si dirà *fascio ordinato* $O(\omega)$. Il fascio O è *sostegno* di due fasci ordinati opposti.

27. Dato un angolo convesso $\widehat{ab}$ esiste un angolo piatto $\overline{aa'}$ con la stessa origine e che contiene $\widehat{ab}$; dato un angolo concavo $\widehat{ab}$ esiste un angolo piatto $\overline{aa'}$ con la stessa origine e che è contenuto in $\widehat{ab}$. In ambo i casi diremo per definizione *verso* di $\widehat{ab}$ quello del relativo angolo piatto $\overline{aa'}$. Non restano così alterate le note proprietà formali, onde è lecito estendere il significato della locuzione *fascio ordinato*, comprendendovi tutti gli angoli che hanno un dato verso.

28. Dalla precedente definizione si deducono immediatamente i corollari:

a) *L'angolo convesso* $\widehat{\mathrm{ab}}$ *e l'angolo concavo* $\widehat{\mathrm{ab}}$ *sono contraversi.*

b) *Gli angoli convessi (concavi)* $\widehat{\mathrm{ab}}$ *e* $\widehat{\mathrm{ba}}$ *sono contraversi.*

c) *Gli angoli opposti al vertice sono equiversi (essendo le origini raggi opposti).*

d) *Se* c *cade in* $\widehat{\mathrm{ab}}$, $\widehat{\mathrm{ca}}$ *e* $\widehat{\mathrm{cb}}$ *sono contraversi,* $\widehat{\mathrm{ac}}$ *e* $\widehat{\mathrm{cb}}$ *equiversi ecc.*

29. Ciò che precede può evidentemente applicarsi ad ogni sistema che possa porsi in corrispondenza biunivoca con un fascio di rette; p. es. alla circonferenza, e al fascio di semipiani. In questo ultimo caso si possono quindi definire i due *fasci ordinati* di semipiani che hanno per sostegno una data retta r.

Per il seguito occorre notare che se ad un diedro si coordina oltre che un ordine delle facce, anche un verso della costola, si ottiene una figura che diremo *diedro orientato*; un fascio ordinato nel quale sia fatta questa scelta di un verso ρ sulla costola si dirà *fascio orientato* di semipiani, di *sostegno* $r(\rho)$. Se ω è il verso del fascio, il fascio orientato si indicherà con $r(\rho, \omega)$. Questa considerazione ci permetterà più tardi il confronto dei versi di diedri di diverso asse, che è impossibile se essi sono solamente ordinati.

§ 5. — **Versi del piano.**

30. Due fasci ordinati $O_1(\omega_1)$, $O_2(\omega_2)$ di centri distinti, appartenenti ad un piano π, si diranno *equiversi* quando l'angolo piatto del primo fascio che ha per origine $O_1(O_2)$ e l'angolo piatto del secondo