e cambiando a in a e p' in p:

$$a\binom{p}{i}+(a+b)\binom{p+1}{i}+(a+2b)\binom{p+2}{i}+\dots$$
$$\dots+(a+kb)\binom{p+k}{i}=(a+kb)\binom{p+k+1}{i+1}-$$
$$-a\binom{p}{i+1}-b\binom{p+k+1}{i+2}+b\binom{p+1}{i+2} \qquad (4)$$

ultima delle formole che volevamo dimostrare.

In particolare se $a=b=1$, è:

$$\binom{p}{i}+2\binom{p+1}{i}+3\binom{p+2}{i}+\dots(k+1)\binom{p+k}{i}=$$
$$=(k+1)\binom{p+k+1}{i+1}-\binom{p+k+1}{i+2}+\binom{p}{i+2}. \qquad (4')$$

E se $a=1$, $b=0$ si ha la formola nota:

$$\binom{p}{i}+\binom{p+1}{i}+\dots+\binom{p+k}{i}=\binom{p+k+1}{i+1}-\binom{p}{i+1}.$$

N. Traverso.

Espressione in funzione di n dell'n^{mo} termine delle successioni di numeri derivanti dalla relazione $Q_n=(n-1)\,Q_{n-1}+(n-1)\,Q_{n-2}$ e sua applicazione ad alcune classi notevoli di permutazioni.

È noto che indicando con P_n il numero delle permutazioni di n oggetti differenti, con P'_n il numero di quelle nelle quali ciascun oggetto occupa un posto diverso da quello che ha in una di esse detta principale, con P''_n il numero delle rimanenti, nelle quali adunque almeno un oggetto occupa lo stesso posto che ha nella permutazione principale, i numeri P_n, P'_n, P''_n soddisfano alla relazione ricorrente: [1]

$$Q_n=(n-1)\,Q_{n-1}+(n-1)\,Q_{n-2}. \qquad (1)$$

Lo studio di tali numeri è importante nell'analisi combinatoria; ritengo quindi utile far conoscere una formola che permette di esprimere in funzione di n l'n^{mo} termine delle successioni Q_1, $Q_2\dots$ determinate dai valori iniziali Q_1, Q_2 o dalla (1).

[1] Per la dimostrazione si può consultare "Sopra alcune classi notevoli di permutazioni" del prof. Silvio Minetola, *Giornale di Battaglini*, vol. XLIII.

Tale formola è, per quanto io so, nuova.
Si ha dalla (1):

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 1 \,.\, Q_1 + 0 \,.\, Q_2 \\
Q_2 &= 0 \,.\, Q_1 + 1 \,.\, Q_2 \\
Q_3 &= 2Q_1 + 2Q_2 \\
Q_4 &= 3Q_2 + 3Q_3 = 6Q_1 + 9Q_2 \\
Q_5 &= 32Q_1 + 44Q_2 \\
Q_6 &= 190Q_1 + 265Q_2 \\
& \dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

ed in generale

$$Q_n = S_n Q_1 + R_n Q_2 \tag{2}$$

essendo $S_1, S_2, S_3, \dots$ i termini della successione

$$1, \;\; 0, \;\; 2, \;\; 6, \;\; 32, \;\; 190, \dots$$

ed $R_1, R_2, R_3 \dots$ quelli della successione

$$0, \;\; 1, \;\; 2, \;\; 9, \;\; 44, \;\; 265 \dots$$

Dall'esame di tali successioni risulta subito che:

$$S_n = nS_{n-1} + 2(-1)^{n-1} \tag{3}$$

$$R_n = nR_{n-1} + (-1)^n. \tag{4}$$

Sostituendo nella (3) ad S_{n-1} l'espressione che si ottiene da essa cambiando n in $n-1$, poi sostituendo nella relazione ottenuta ad S_{n-2} l'espressione che si ottiene della (3) cambiando n in $n-2$, si ha:

$$S_n = n(n-1)(n-2)S_{n-3} + 2n(n-1)(-1)^{n-3} + 2n(-1)^{n-2} + 2(-1)^{n-1}.$$

Continuando nello stesso processo, risulta in generale:

$$
\begin{aligned}
S_n = n(n-1)\dots(n-i)\, S_{n-i-1} + 2n(n-1)\dots(n-i+1)(-1)^{n-i-1} + \\
+ 2n(n-1)\dots(n-i+2)(-1)^{n-i} + \dots + 2n(-1)^{n-2} + 2(-1)^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Ed assumendo per i il valore $n-4$, talchè:

$$[S_{n-i-1}]_{i=n-4} = S_3 = 2$$

risulta, se n è pari, e:

$$
\begin{aligned}
S_n = 2\,[n(n-1)\dots 6 \,.\, 5 \,.\, 4 - n(n-1)\dots 6 \,.\, 5 + \\
+ n(n-1)\dots 7 \,.\, 6 - \dots - n(n-1) + n - 1],
\end{aligned}
$$

e se n è dispari:

$$S_n = 2\,[n(n-1)\dots 6 \,.\, 5 \,.\, 4 - n(n-1)\dots 6 \,.\, 5 + \dots + n(n-1) - n + 1]$$

ovvero, indicando al solito un $D_{p,q}$ il numero delle disposizioni semplici di p oggetti diversi, q a q:

$$\left.\begin{array}{l} S_n = 2\,[D_{n,n-3} - D_{n,n-4} + D_{n,n-5} - \ldots - D_{n,3} + D_{n,1} - D_{n,0}] \\ \text{se } n \text{ è pari, e:} \\ S_n = 2\,[D_{n,n-3} - D_{n,n-4} + D_{n,n-5} - \ldots + D_{n,2} - D_{n,1} + D_{n,0}] \end{array}\right\} \quad (5)$$

se n è dispari.

Con processo analogo, movendo dalla (4), si prova che:

$$R_n = n(n-1)\ldots(n-i)R_{n-i-1} + n(n-1)\ldots(n-i+1)(-1)^{n-i} + \ldots$$
$$\ldots + n(n-1)(-1)^{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n$$

e ponendo $i = n-3$ talchè:

$$[R_{n-i-1}]_{i=n-3} = R_2 = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} R_n = D_{n,n-2} - D_{n,n-3} + D_{n,n-4} - \ldots + D_{n,2} - D_{n,1} + D_{n,0} \\ \text{se } n \text{ è pari, e} \\ R_n = D_{n,n-2} - D_{n,n-3} + D_{n,n-4} - \ldots - D_{n,2} + D_{n,1} - D_{n,0} \end{array}\right\} \quad (6)$$

se n è dispari.

Adunque l'espressione di Q_n in funzione di n si ha dalla (2) nella quale ad S_n ed R_n si intendano sostituite le espressioni date dalle (5) e (6).

Siano ora n oggetti differenti distribuiti linearmente in un certo ordine $a_1, a_2, \ldots a_n$ e diamo a P_n, P'_n, P''_n il significato già stabilito. Si ha adunque:

$$P'_n + P''_n = P_n = n!$$

E poichè ognuno dei simboli P_n, P'_n, P''_n soddisfa, come è stato osservato, ad una relazione del tipo (1), risulterà:

$$P_n = S_n P_1 + R_n P_2.$$

Ma: $P_1 = 1$, $P_2 = 2$, quindi:

$$P_n = S_n + 2R_n = n!\ (^1) \qquad (7)$$

Del pari è:

$$P'_n = S_n P'_1 + R_n P''_2.$$

Ma $P'_1 = 1$, $P'_2 = 1$, come è facile constatare, epperò:

$$P'_n = S_n + R_n.$$

---

(1) In generale dalla (2), suppponendo $Q_2 = 2Q_1$ si ha:

$$Q_n = Q_1(S_n + 2R_n) = n!\, Q_1.$$

ovvero:

$$\left.\begin{array}{l} P'_n = D_{n,n-3} - D_{n,n-4} + D_{n,n-5} - \ldots - D_{n,2} + D_{n,1} - D_{n,0} \\ \text{se } n \text{ è pari, e:} \\ P'_n = D_{n,n-3} - D_{n,n-4} + D_{n,n-5} - \ldots + D_{n,2} - D_{n,1} + D_{n,0} \end{array}\right\} \qquad (8)$$

se n è dispari.

Infine si ha:

$$P''_n = S_n P''_1 + R_n P''_2$$

e poichè:

$$P''_1 = 0; \quad P''_2 = 1,$$

come è evidente, risulta:

$$P''_n = R_n \qquad (9)$$

qualunque sia n.

Le (7), (8), (9), ove al posto di S_n ed R_n siano sostituite le espressioni date dalle (5) e (6) permettono adunque di esprimere P_n, P'_n, P''_n in funzione di n.

Come è noto le P' e P'' soddisfano alle relazioni:

$$\begin{array}{ll} P'_n = nP'_{n-1} - 1, & \text{per } n \text{ pari} \\ P'_n = nP'_{n-1} + 1, & \quad\text{"} \quad \text{dispari} \\ P''_n = nP''_{n-1} + 1, & \quad\text{"} \quad \text{pari} \\ P''_n = nP''_{n-1} - 1, & \quad\text{"} \quad \text{dispari} \end{array}$$

ed è facile constatare, tenuto conto delle note proprietà del simbolo $D_{p,q}$, che esse sono verificate. (¹)

N. Traverso.

SOPRA ALCUNE IPERSUPERFICIE RIGATE

ottenute come inviluppi di iperpiani

1. In una nota pubblicata da questo *Periodico* nel fasc. V del maggio 1913, il prof. G. Usai tratta delle ipersuperficie inviluppo; limitandosi, come egli stesso afferma, ad una facile ma interessante estensione di alcuni concetti ben noti per lo spazio a tre dimensioni e cioè ai concetti di inviluppo, caratteristiche di Monge e spigolo di regresso. Nella nota in parola vien preso in considerazione uni-

(¹) Per altra via sono dimostrate nel citato lavoro del prof. Minetola.

mente il caso in cui la ipersuperficie dipenda da un solo para- tro arbitrario, ma è naturale di pensare anche al caso in cui nella uazione che determina la ipersuperficie vengano a comparire due rametri indipendenti. Anzi in quest'ultimo caso si hanno alcuni ultati interessanti, che non hanno riscontro in corrispondenti pro- ietà delle ordinarie superficie dello spazio a tre dimensioni, ed è indi opportuno di prendere in speciale considerazione il caso in scorso.

Nella presente nota mi limito a trattare la quistione per uno azio a quattro dimensioni, per evitare i lunghi sviluppi o le nota- ni abbreviate, e determino le equazioni parametriche di certe ersuperficie rigate speciali; le quali in luogo di avere ∞^3 spazi re dimensioni tangenti, come accade generalmente per ogni iper- perficie, ne posseggono solamente ∞^2; cioè lo spazio ad esse tan- nte in un punto viene ad essere pure tangente lungo una retta.

Non è a mia conoscenza che queste ipersuperficie siano ancora ate studiate, specialmente nel modo generale e coi metodi da me ottati; esse non sono poi le usuali ipersuperficie sviluppabili lungo gli ∞^1 piani a due dimensioni osculatori ad una curva, perchè per li sviluppabili lo spazio a tre dimensioni tangente in un punto è ngente lungo un piano a due dimensioni e non lungo una retta. a estensione agli spazi ad n-dimensioni dei risultati che ottengo, r le varietà contenute in uno spazio a quattro dimensioni, nella esente nota, non offre alcuna difficoltà e per ora non me ne occupo; i riservo solamente di far conoscere l'importanza delle rigate sopra entovate in una nota che seguirà fra non molto alla presente.

2. Siano x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate cartesiane dei punti di un S_4. rendiamo a considerare una varietà a tre dimensioni od ipersuper- cie, che indicheremo con V_3, la cui equazione sia:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) = 0, \tag{1}$$

ssendo α e β due parametri del tutto indipendenti fra loro. Se a uesti parametri si dànno rispettivamente due accrescimenti $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ passerà dalla V_3 rappresentata dalla (1) ad un'altra V'_3 rappre- ntata dalla equazione:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha + \Delta\alpha, \beta + \Delta\beta) = 0, \tag{2}$$

la superficie V_2 (varietà a due dimensioni) di intersezione della V_3 on la V'_3, quando esiste, oltre che per mezzo delle equazioni (1) e (2) potrà anche rappresentare con il sistema:

$$\left.\begin{array}{c} f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) = 0 \\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha + \alpha\Delta, \beta + \Delta\beta) - f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) = 0 \end{array}\right\}, \tag{3}$$

ormato con l'equazione (1) e con una combinazione lineare delle quazioni (1) e (2). Ma la seconda equazione del sistema (3), quando la (1) soddisfi alle solite condizioni e sia derivabile rispetto ad α e β, può anche scriversi:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} \Delta\beta + \varepsilon = 0,$$

essendo $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta}$ le derivate parziali della (1) ed ε un'infinitesimo di ordine superiore a $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$. E quando si considerino due valori determinati e fissi per α e β mentre le quantità $\Delta\alpha$ e $\Delta\beta$, che denoteremo con $d\alpha$ e $d\beta$, si fanno convergere allo zero; allora la V_2 sopra considerata verrà ad assumere una posizione limite dipendente pure dal limite verso cui converge il rapporto $\frac{d\alpha}{d\beta}$ ed in luogo del sistema (3) si potrà prendere per definire questa V_2 limite il sistema delle seguenti due equazioni:

$$\left.\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha, \beta) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial \beta} d\beta = 0 \end{aligned}\right\} . \tag{4}$$

Osservando ora questo sistema si vede chiaramente che tutte le ipersuperficie rappresentate dalle due equazioni che lo costituiscono, quando si fissino due valori per α e β e si lasciano variare arbitrariamente $d\alpha$ e $d\beta$, passano tutte per la curva d'intersezione delle tre ipersuperficie:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \tag{5}$$

E questo è importantissimo notarlo, perchè resta così dimostrato che tutte le ipersuperficie V'_3 infinitamente vicine alla V_3 vengono a passare per una stessa curva situata sulla V_3. Siccome poi l'equazione (1) definisce una doppia infinità di V_3 così si avrà pure una doppia infinità di queste curve le quali costituiranno un luogo e più precisamente una ipersuperficie che indicheremo con I_3 e che chiameremo l'inviluppo delle V_3 rappresentate dalla (1).

Volendo l'equazione di questo inviluppo basta ricavare dalle due ultime equazioni del sistema (5) i valori di α e β per sostituirli nella prima, si ha così un'equazione priva di parametri arbitrari che rappresenta appunto l'inviluppo I_3. Detta equazione sarà dunque:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha(x_1, x_2, x_3, x_4), \beta(x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0, \tag{6}$$

dove i valori $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\beta(x_1, x_2, x_3, x_4)$ si intendono ricavati dalle due equazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0. \tag{7}$$

3. Dimostriamo ora che una ipersuperficie rappresentata dalla (1), che diremo inviluppata, e l'inviluppo I_3 hanno lo stesso iperpiano tangente nei punti che hanno a comune. Questo equivale evidentemente a dire che l'inviluppata e l'inviluppo hanno un certo contatto lungo una curva e precisamente lungo la curva rappresentata dal sistema delle equazioni (5).

L'equazione di un iperpiano tangente alla (1) in un punto (x_1, x_2, x_3, x_4) ha per equazione:

$$(X_1 - x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + (X_2 - x_2)\frac{\partial f}{\partial x_2} + (X_3 - x_3)\frac{\partial f}{\partial x_3} + (X_4 - x_4)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \quad (8)$$

mentre l'equazione dell'iperpiano tangente nello stesso punto all'inviluppo I_3 si avrà dalla equazione (6) che lo rappresenta:

$$\begin{aligned}(X_1 - x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_1}\right) + (X_2 - x_2)\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_2}\right) + \\ + (X_3 - x_3)\left(\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_3}\right) + \\ + (X_4 - x_4)\left(\frac{\partial f}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_4} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial x_4}\right) = 0. \quad (9)\end{aligned}$$

Ora questa equazione si riduce immediatamente alla (8) quando si tenga conto delle (7); e l'identità delle due equazioni risulterà completamente dimostrata quando si osservino le (5); dalle quali risulta che i medesimi valori di α e β che soddisfano la $f = 0$ sono anche quelli che soddisfano alle due equazioni $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$. Si può dunque concludere, come volevamo:

L'inviluppo I_3 ed ogni inviluppata hanno gli iperpiani tangenti che coincidono lungo tutti i punti della curva che hanno in comune.

4. Un esempio interessantissimo della teoria svolta si ha quando si considera un iperpiano S_3 di un S_4 la cui equazione venga a contenere due parametri arbitrari. Per trattare questo caso particolare scriviamo l'equazione di un S_3 nel seguente modo:

$$x_1 f_1(\alpha, \beta) + x_2 f_2(\alpha, \beta) + x_3 f_3(\alpha, \beta) + x_4 f_4(\alpha, \beta) + f_5(\alpha, \beta) = 0 \quad (10)$$

dove si è messo in evidenza che i cinque coefficienti f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 dell'equazione dell'iperpiano sono funzioni dei due parametri indipendenti α, β.

Per quanto si è notato sopra, l'inviluppo di quella doppia infinità di iperpiani è definito dalle tre equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + x_4 f_4 + f_5 = 0 \\ x_1\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + x_2\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} + x_3\frac{\partial f_3}{\partial \alpha} + x_4\frac{\partial f_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} = 0 \\ x_1\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + x_2\frac{\partial f_2}{\partial \beta} + x_3\frac{\partial f_3}{\partial \beta} + x_4\frac{\partial f_4}{\partial \beta} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta} = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (11)$$

Siccome poi ognuna delle tre equazioni di questo sistema rappresenta un S_3, così si può subito affermare che l'inviluppo I_3 è in questo caso costituito da una doppia infinità di rette, e di più si può aggiungere che lungo ognuna di queste rette l'iperpiano S_3 rappresentato dall'equazione (10) è tangente all'inviluppo stesso.

Volendo poi l'equazione della ipersuperficie I_3 si dovrebbe, secondo quanto abbiamo già detto, dedurre i valori di α e β dalle due ultime equazioni del sistema (11) per sostituirli nella prima delle (11) stesse; e questo può risultare possibile, naturalmente solo quando le funzioni f_i della (10) sono effettivamente date. Ma anche quando la forma di queste funzioni è sconosciuta, si può tuttavia ottenere una rappresentazione parametrica della I_3 nel modo seguente. Dalle (11) si possono ricavare i valori di x_1, x_2, x_3 in funzione della x_4, delle f_i e delle loro derivate parziali prime rispetto ad α e β, in tal modo si ottiene:

$$x_1 = \frac{-\begin{vmatrix} x_4 f_4 + f_5 & f_2 & f_3 \\ x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \beta} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}} \qquad x_2 = \frac{-\begin{vmatrix} f_1 & x_4 f_4 + f_5 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \beta} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}$$

$$x_3 = \frac{-\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & x_4 f_4 + f_5 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & x_4 \frac{\partial f_4}{\partial \beta} + \frac{\partial f_5}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}.$$

Ora per brevità porremo:

$$x_4 = \gamma, \qquad a_1 = -\frac{\begin{vmatrix} f_4 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_4}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_4}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}, \qquad b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} f_5 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_5}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_5}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta} \end{vmatrix}}$$

ed espressioni costruite n modo analogo intenderemo che rappresentino a_2, b_2, a_3, b_3 per cui si avrà:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1\gamma + b_1 \\ x_2 &= a_2\gamma + b_2 \\ x_3 &= a_3\gamma + b_3 \\ x_4 &= \gamma \end{aligned}\right\} . \tag{12}$$

Ed in queste formole le a_i, b_i sono funzioni di α e β le quali ultime, assieme a γ, rappresentano tre parametri arbitrari. Questa rappresentazione della varietà I_3 pone bene in chiaro che essa è rigata, perchè dando ad α e β un sistema qualunque di valori; le a_i e b_i diventano costanti e le equazioni (12), nelle quali viene ora ad essere variabile solamente γ, rappresentano una retta. Potendo poi pensare ∞^2 sistemi di valori da attribuirsi ad α e β così si avranno pure ∞^2 rette costituenti l'inviluppo I_3.

5. Si considerino ora le equazioni di una retta qualsiasi dello spazio S_4 che prenderemo sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1\gamma + b_1 \\ x_2 &= a_2\gamma + b_2 \\ x_3 &= a_3\gamma + b_3 \\ x_4 &= a_4\gamma + b_4 \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

essendo γ un parametro arbitrario che determina i vari punti della retta. Quando in queste equazioni le a_i, b_i, in luogo che costanti, si riguardano come funzioni di due parametri dipendenti α, β, esse vengono allora a rappresentare una ipersuperficie rigata; e l'equazione dell'iperpiano ad essa tangente in un punto (x_i), quando si indichino con (X_i) le coordinate correnti, è la seguente:

$$\begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 & X_4 - x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \gamma\dfrac{\partial a_1}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial b_1}{\partial\alpha} & \gamma\dfrac{\partial a_2}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial b_2}{\partial\alpha} & \gamma\dfrac{\partial a_3}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial b_3}{\partial\alpha} & \gamma\dfrac{\partial a_4}{\partial\alpha} + \dfrac{\partial b_4}{\partial\alpha} \\ \gamma\dfrac{\partial a_1}{\partial\beta} + \dfrac{\partial b_1}{\partial\beta} & \gamma\dfrac{\partial a_2}{\partial\beta} + \dfrac{\partial b_2}{\partial\beta} & \gamma\dfrac{\partial a_3}{\partial\beta} + \dfrac{\partial b_3}{\partial\beta} & \gamma\dfrac{\partial a_4}{\partial\beta} + \dfrac{\partial b_4}{\partial\beta} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

Ora questa equazione non risulta indipendente da γ, per cui variando il punto (x_i) su una determinata retta della ipersuperficie varia pure, in generale, l'iperpiano tangente. Invece per gli inviluppi I_3 rappresentati dalle equazioni (12) succede che, mentre un punto percorre una retta della varietà, l'iperpiano tangente non muta, e questa semplicissima osservazione mostra intanto che le rigate dedotte come inviluppo di una doppia infinità di iperpiani, costituiscono una classe di rigate speciali, mentre le più generali sarebbero rappresentate dalle (13) in cui a_i, b_i sono funzioni quali si vogliono dei due parametri α e β.

Non sarà infine fuori luogo il mostrare come si possano generare geometricamente queste ipersuperficie. È noto che nello spazio a tre dimensioni, in generale, due superficie si intersecano in una linea, tre superficie in un gruppo di punti, e con l'applicazione del principio di dualità dello spazio si ha pure: Due inviluppi di ∞^2 piani hanno a comune una sviluppabile e tre inviluppi di ∞^2 piani hanno a comune un gruppo di piani. Ma una volta considerate le sviluppabili come generate da una semplice infinità di piani tangenti a due superficie viene spontanea l'idea di studiare la superficie, luogo di ∞^2 punti distribuiti su ∞^1 rette, aderente alla sviluppabile e con essa intimamente connessa. Volendo fare nello spazio a quattro dimensioni considerazioni analoghe, bisognerà prendere in esame l'intersezione di due ipersuperficie V_3, V'_3 che generalmente è una superficie V_2, poi successivamente considerare le intersezioni di tre e di quattro ipersuperficie, che sempre abbandonando casi eccezionali, saranno rappresentate generalmente da una curva e da un gruppo di punti rispettivamente. Allora, con l'applicazione del principio di dualità, si ottiene: Gli ∞^2 iperpiani comuni da due inviluppi di ∞^3 iperpiani formano una speciale varietà di ∞^2 elementi, mentre gli ∞^1 iperpiani comuni a tre inviluppi costituiscono una sviluppabile, e gli iperpiani comuni a quattro inviluppi formano un gruppo finito di elementi.

Anche nello spazio a quattro dimensioni si può poi passare alla rappresentazione per punti di questi inviluppi ed allora si hanno i seguenti risultati:

Gli ∞^3 iperpiani tangenti contemporaneamente a due varietà V_3, V'_3 generano come luogo di punti un I_3, mentre gli iperpiani tangenti contemporaneamente a tre varietà V_3, V'_3, V''_3 generano come luogo di punti una usuale sviluppabile.

Si vede dunque che le rigate speciali prese in considerazione nella presente nota ed indicate con I_3 non sono altro che una estensione delle ordinarie sviluppabili già da tempo note e studiate sia nello spazio ordinario sia negli spazi a più dimensioni.

E. Beggi.

DETERMINANTI CUBICI ED EQUAZIONI LINEARI

Sia la matrice cubica di n^0 ordine formata da n^3 elementi a_{ijk} in cui il primo indice di ciascun elemento indica lo *strato orizzontale* a cui appartiene, il secondo lo *strato di prospetto*, il terzo lo *strato di profilo*; e si convenga di rappresentare rispettivamente con D', D'', D''' i tre determinanti che si ottengono lasciando immutati nel termine diagonale principale $a_{111} \dots a_{nnn}$ i primi indici, od i secondi, od i terzi e permutando gli altri.

È noto (PASCAL, *I determinanti.* Hoepli, 1897) che:

Scambiando fra loro due strati orizzontali, il determinante D′ *resta immutato; scambiando fra loro due strati verticali paralleli, il determinante* D′ *muta di segno.*

Ma, estendendo tale considerazione a D″ ed a D‴, si ha che lo scambio di due strati di prospetto lascia inalterato D″, mentre lo scambio di due strati orizzontali o di profilo lo fa mutare di segno; e si ha pure che lo scambio di due strati di profilo lascia inalterato D‴, mentre lo scambio di due strati orizzontali o di prospetto lo fa mutare di segno.

Ed allora, riepilogando, si può concludere che:

Lo scambio di due strati orizzontali, o di prospetto, o di profilo lascia rispettivamente immutato il determinante D′, *o* D″, *o* D‴ *e fa mutare di segno gli altri due.*

Da questo principio fondamentale consegue il

TEOREMA. — *Se in una matrice cubica sono uguali due strati orizzontali, o di prospetto, o di profilo, sono rispettivamente uguali a zero* D″ *e* D‴, *o* D′ *e* D‴, *o* D′ *e* D″.

Infatti, scambiando fra loro i due strati paralleli uguali, se questi ad esempio sono orizzontali, D″ e D‴ divengono rispettivamente $-$D″ e $-$D‴; d'altronde, per l'uguaglianza dei due strati i due determinanti non mutano affatto e si ha quindi D″ $= -$ D″ e D‴ $= -$ D‴, vale a dire D″ $= 0$ e D‴ $= 0$.

È quasi superfluo osservare che altrettanto avviene se due strati paralleli sono composti di elementi rispettivamente proporzionali.

Si ha inoltre il

COROLLARIO. — *Moltiplicando gli elementi di uno strato di profilo ordinatamente per i complementi algebrici (minori reciproci), rispetto a* D′ *o a* D″, *degli elementi corrispondenti di uno strato parallelo e sommando i risultati, si ottiene sempre lo zero.*

Infatti una tale operazione corrisponde al sostituire nella matrice ad uno strato di profilo uno strato parallelo, e con ciò due strati di profilo risultano uguali.

Sia ora il sistema di n^2 equazioni lineari non omogenee con n incognite

$$\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} a_{111}x_1 + \dots\dots + a_{11n}x_n = h_{11} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{1n1}x_1 + \dots\dots + a_{1nn}x_n = h_{1n} \end{array}\right. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \left\{\begin{array}{l} a_{n11}x_1 + \dots\dots + a_{n1n}x_n = h_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{nn1}x_1 + \dots\dots + a_{nnn}x_n = h_{nn} \end{array}\right.\end{array}\right.$$

e proponiamoci di determinare i valori delle incognite con metodo analogo al metodo di Cramer, ma con riferimento ai determinanti cubici.

Formata la matrice cubica D dei coefficienti, e supposto D′ diverso da zero, moltiplichiamo ciascuna equazione per i complementi algebrici, rispetto a D′, dei coefficienti di x_1. Tali complementi non possono essere tutti uguali a zero, se tale non è D′, ed indicandoli con $A'_{111} \ldots A'_{1n1} \ldots ; A'_{n11} \ldots A'_{nn1}$, si ha:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_{111}A'_{111}x_1 + \ldots\ldots + a_{11n}A'_{111}x_n = h_{11}A'_{111} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n1}A'_{1n1}x_1 + \ldots\ldots + a_{1nn}A'_{1n1}x_n = h_{1n}A'_{1n1} \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} a_{n11}A'_{n11}x_1 + \ldots\ldots + a_{n1n}A'_{n11}x_n = h_{n1}A'_{n11} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn1}A'_{nn1}x_1 + \ldots\ldots + a_{nnn}A'_{nn1}x_n = h_{nn}A'_{nn1}. \end{cases} \end{cases}$$

Sommando queste nuove equazioni, ed indicando con D'_{x_1} il determinante che si ottiene quando in D' si sostituiscano ai coefficienti di x_1 i termini noti corrispondenti del sistema primitivo, tenuto presente il corollario suesposto, si ha:

$$D'x_1 = D'_{x_1}.$$

Altrettanto può farsi rispetto alle altre incognite; cosicchè si ha in fine:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D'_{x_1}}{D'} \\ \ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{D'_{x_n}}{D'}. \end{cases}$$

Analogamente, supposto diverso da zero il determinante D″, con uguale procedimento si ricava:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D''_{x_1}}{D''} \\ \ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{D''_{x_n}}{D''}. \end{cases}$$

Quando però si ripetessero gli stessi ragionamenti e le stesse operazioni, prendendo a considerare il determinante D‴, non si giungerebbe ad analoghi risultati; e ciò perchè non si annullerebbero in generale nell'equazione sommatoria i coefficienti delle incognite da eliminare.

Mentre adunque i determinanti D′ e D″ possono servire alla determinazione dei valori delle incognite, altrettanto non può dirsi del determinante D''', dal quale quindi si deve astrarre completamente nella ricerca in discorso. Ciò del resto è in armonia col fatto che i coefficienti di ciascuna equazione, presi nel loro ordine naturale di successione, costituiscono nella matrice cubica dei coefficienti una linea di uno strato orizzontale e di uno strato di prospetto, ma non già una linea di uno strato di profilo.

Risulta inoltre da quanto precede essere condizione necessaria e sufficiente, affinchè le equazioni siano compatibili ed il sistema sia determinato, che uno almeno dei determinanti D' e D'' sia diverso da zero, e che, quando siano ambedue diversi da zero, i due sistemi di valori delle incognite risultino eguali.

D. Fellini.

IL TEOREMA DI VAN AUBEL E LA SECONDA FORMULA DI STEWART

estesi al tetraedro ipersferico

I. — Il teorema di Van Aubel esteso all'n-edro lineare di S_{n-1}.

Il teorema di Van Aubel per il piano si enuncia così:

" Se nel triangolo $A_1A_2A_3$ si conducono pel vertice A_1 la ceviana A_1P_{32} e pel vertice A_2 la ceviana A_2P_{31} ad incontrarsi in O_2 e se quella uscente da A_3 e passante per O_2 incontra A_1A_2 in Q_3, sussiste la formula:

$$\frac{A_3O_2}{O_2Q_3} = \frac{A_3P_{31}}{P_{31}A_1} + \frac{A_3P_{32}}{P_{32}A_2} \text{ "} \tag{1}$$

e per lo spazio:

" Se nel tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ per i vertici $A_1A_2A_3$ si conducano i piani $A_1P_{42}P_{43}$, $A_2P_{43}P_{41}$, $A_3P_{41}P_{42}$ ad incontrarsi in O_3 e si chiama Q_4 il punto ove il piano $A_1A_2A_3$ è segato dalla retta A_4O_3, si ha:

$$\frac{A_4O_3}{O_3Q_4} = \frac{A_4P_{41}}{P_{41}A_1} + \frac{A_4P_{42}}{P_{42}A_2} + \frac{A_4P_{43}}{P_{43}A_3} \text{ "}. \tag{2}$$

Questi due teoremi si estendono molto facilmente all'n-edro lineare dello spazio con $n-1$ dimensioni. Si vede subito che essi si ottengono facendo n eguale a 3, o a 4 nell'enunciato generale seguente:

" Se nell'n-edro $A_1A_2 \ldots A_n$ per i vertici $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ si conducono gli S_{n-2}:

$$A_1P_{n2} \ldots P_{n,n-1}, \qquad A_2P_{n1}P_{n3} \ldots P_{n,n-1}, \qquad P_{n1}P_{n2} \ldots P_{n,n-2}A_{n-1}$$

e si chiamano O_{n-1} e Q_n rispettivamente il punto che essi hanno in comune e quello ove l'S_{n-2} determinato da $A_1A_2 \ldots A_{n-1}$ vien tagliato dall'S_1 determinato da A_n e da O_{n-1}, sussiste la formula:

$$\frac{A_nO_{n-1}}{O_{n-1}Q_n} = \frac{A_nP_{n.1}}{P_{n.1}A_1} + \frac{A_nP_{n.2}}{P_{n.2}A_2} + \ldots + \frac{A_nP_{n.n-1}}{P_{n.n-1}A_{n-1}} \text{ ».} \tag{3}$$

Che questa formula valga effettivamente si può dimostrare con considerazioni baricentriche poco dissimili da quelle che si trovano esposte in una delle Note che fanno seguito al bellissimo *Aperçu historique* del signor CHASLES: per questo ci dispensiamo dall'esporle. Osserviamo solamente che il punto O_2 (O_3) di cui sopra — che è il baricentro dei punti $A_1A_2A_3$ ($A_1A_2A_3A_4$) carichi di masse convenienti, determinate quando siano fissati P_{31} e P_{32} ($P_{41}P_{42}$ e P_{43}) — si può ottenere determinando prima il baricentro di A_3 e A_1 (A_4, A_1 e A_2), poi quello del baricentro trovato e di A_2(A_3). Così, in generale, per ottenere O_{n-1} basterà costruire prima il baricentro di $A_nA_1A_2 \ldots A_{n-2}$ e poi quello del baricentro trovato e di A_{n-1}, sempre supposti carichi gli n vertici di masse convenienti che saranno, come già avvertimmo, determinate, una volta fissate le posizioni dei punti $P_{n1}P_{n2} \ldots P_{n.n-1}$.

II. — Un altro punto di vista sotto il quale si può estendere la formula di Stewart all'n-edro di S_{n-1}.

Nel presente paragrafo ci proponiamo di estendere all'n-edro lineare una formula che già dimostrammo per il tetraedro e che, pel caso del triangolo, coincide con l'ordinaria formula di STEWART.

Giova ricordare che se nel triangolo $A_1A_2A_3$ poniamo:

$$A_3P_{31} : P_{31}A_1 = m_1 : n_1 \qquad \text{e} \qquad A_3P_{32} : P_{32}A_2 = m_2 : n_2$$

si ha, indicando con Q_3 il baricentro del segmento A_2A_1, dove A_2 ed A_1 sono carichi di masse proporzionali a $m_2 . n_1$ e m_1n_2:

$$\overline{A_3Q_3}^2 = \frac{\frac{m_1}{n_1}}{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}\,\overline{A_3A_1}^2 + \frac{\frac{m_2}{n_2}}{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}}\,\overline{A_3A_2}^2 - \frac{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}}{\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)^2}\,\overline{A_2A_1}^2.$$

Pel tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ se poniamo:

$$A_4P_{41} : P_{41}A_1 = m_1 : n_1, \quad A_4P_{42} : P_{42}A_2 = m_2 : n_2, \quad A_4P_{43} : P_{43}A_3 = m_3 : n_3$$

e indichiamo con Q_4 il baricentro di $A_1A_2A_3$ quando A_1A_2 ed A_3 siano carichi di masse proporzionali a $m_1 . n_2 . n_3$, $n_1 . m_2 . n_3$, $n_1 . n_2 . m_3$, avremo:

$$\overline{A_4Q_4}^2 =$$

$$= \frac{\frac{m_1}{n_1}}{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}}\overline{A_4A_1}^2 + \frac{\frac{m_2}{n_2}}{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}}\overline{A_4A_2}^2 +$$

$$+ \frac{\frac{m_3}{n_3}}{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}}\overline{A_4A_3}^2 - \frac{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}}{\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right)^2}\overline{A_1A_2}^2 -$$

$$- \frac{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_3}{n_3}}{\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right)^2}\overline{A_1A_3}^2 - \frac{\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m_3}{n_3}}{\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right)^2}\overline{A_2A_3}^2.$$

Sembrerebbe che dovesse aversi in generale per l'n-edro di S_{n-1}:

$$\overline{A_nQ_n}^2 = \frac{\sum_1^{n-1}{}_s \frac{m_s}{n_s}}{\sum_1^{n-1}{}_r \frac{m_r}{n_r}}\overline{A_nA_s}^2 - \frac{\sum_1^{n-1}{}_{ik} \frac{m_i}{n_i}\cdot\frac{m_k}{n_k}\overline{A_iA_k}^2}{\left(\sum_1^{n-1}{}_r \frac{m_r}{n_r}\right)^2}\overline{A_iA_k}^2, \tag{4}$$

ove Q_n indica il baricentro dei punti $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ carichi di masse onvenienti ed essendo in generale P_{nk} determinato dalla condizione:

$$A_nP_{nk} : P_{nk}A_k = m_k : n_k \qquad (k = 1, 2 \ldots n-1).$$

Che la formula (4) sussista, lo proveremo col metodo di induzione. upponiamo che per l'$(n-1)$-edro di S_{n-2} valga la formula:

$$\overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2 = \frac{\sum_1^{n-2}{}_s \frac{m'_s}{n'_s}}{\sum_1^{n-2}{}_r \frac{m'_r}{n'_r}}\overline{A_{n-1}A_s}^2 - \frac{\sum_1^{n-2}{}_{ik} \frac{m'_i}{n'_i}\cdot\frac{m'_k}{n'_k}}{\left(\sum_1^{n-2}{}_r \frac{m'_r}{n'_r}\right)^2}\overline{A_iA_k}^2 \tag{5}$$

ove è in generale:

$$m'_i : n'_i = A_{n-1}P_{n-1,i} : P_{n-1,i}A_i \qquad (i \text{ da } 1 \text{ a } n-2)$$

Q_{n-1} indica il baricentro di $A_1A_2\ldots A_{n-2}$.

Prendiamo un punto A_n fuori di S_{n-1} e poniamo:

$$A_nP_{ns} : P_{ns}A_s = m_s : n_s \qquad (s \text{ da } 1 \text{ a } n-1);$$

i $n-1$ vertici $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ verranno ad essere caricati di masse oporzionali a

$$m_1 . n_2 . n_3 \ldots n_{n-1}, \qquad n_1n_2\ldots n_{n-2}m_{n-1}.$$

Consideriamo i due $(n-1)$-edri

$$A_1A_2\ldots A_{n-2}A_n, \qquad A_1A_2\ldots A_{n-2}A_{n-1}.$$

Il primo di essi dà:

$$\begin{aligned}\overline{A_nQ_{n-1}}^2 &= \\ &= \frac{1}{N_2}\left\{\frac{m_1}{n_1}\overline{A_nA_1}^2+\ldots+\frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}\overline{A_nA_{n-2}}^2\right\} \\ &- \frac{1}{N_2^2}\left\{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\overline{A_1A_2}^2+\ldots+\frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}\cdot\frac{m_{n-3}}{n_{n-3}}\overline{A_{n-2}A_{n-3}}^2\right\} \qquad (6)\end{aligned}$$

dove Q_{n-1} indica il baricentro di $A_1A_2\ldots A_{n-1}A_{n-2}$ e dove ancora si è posto:

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}+\ldots+\frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}=N_2.$$

L'altro $(n-1)$-edro $A_1A_2\ldots A_{n-2}A_{n-1}$ dà per una formola analoga alla (5):

$$\begin{aligned}\overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2 &= \left\{\frac{m_1}{n_1}\overline{A_{n-1}A_1}^2+\ldots+\frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}\overline{A_{n-1}A_{n-2}}^2\right\}\cdot\frac{1}{N_2} \\ &- \left\{\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\overline{A_1A_2}^2+\ldots+\frac{m_{n-3}}{n_{n-3}}\cdot\frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}\overline{A_{n-2}A_{n-3}}^2\right\}\frac{1}{N_2^2} \qquad (7)\end{aligned}$$

dove si deve però osservare che il coefficiente di $\overline{A_{n-1}A_k}^2$ sarebbe veramente:

$$\frac{\dfrac{A_{n-1}P_{n-1.k}}{P_{n-1.k}A_k}}{\dfrac{A_{n-1.1}P_{n-1.1}}{P_{n-1.1}A_1}+\ldots+\dfrac{A_{n-1}P_{n-1.n-2}}{P_{n-1.n-2}A_{n-2}}}.$$

Ma siccome il triangolo generico $A_nA_{n-1}A_k$ dà, pel teorema di Ceva:

$$\frac{A_{n-1}P_{n-1.k}}{P_{n-1.k}A_k}=\frac{m_k}{n_k}\cdot\frac{n_{n-1}}{m_{n-1}},$$

si può a detta frazione sostituire l'altra più semplice:

$$\frac{\dfrac{m_k}{n_k}}{\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}+\ldots+\dfrac{m_{n-2}}{n_{n-2}}}=\frac{\dfrac{m_k}{n_k}}{N_2}.$$

Si prenda ora a considerare il triangolo $A_nA_{n-1}Q_{n-1}$ e si osservi che i punti A_{n-1}, Q_{n-1} e Q_n sono allineati. Se applichiamo a questo triangolo il teorema di Stewart, abbiamo:

$$\overline{A_nQ_n}^2 =$$

$$= \frac{\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}}}{\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}} + \dfrac{A_nP_{n,n-1}}{P_{n,n-1}A_{n-1}}} \overline{A_nQ_{n-1}}^2 + \frac{\dfrac{A_nP_{n,n-1}}{P_{n,n-1}A_{n-1}}}{\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}} + \dfrac{A_nP_{n,n-1}}{P_{n,n-1}A_{n-1}}} \overline{A_nA_{n-1}}^2$$

$$- \frac{\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}} \cdot \dfrac{A_nP_{n,n-1}}{P_{n,n-1}A_{n-1}}}{\left(\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}} + \dfrac{A_nP_{n,n-1}}{P_{n,n-1}A_{n-1}}\right)^2} \cdot \overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2$$

dove P indica il baricentro di A_n e Q_{n-1}.

Se in questa formula poniamo per $\dfrac{A_nP}{PQ_{n-1}}$ l'espressione

$$N_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_{n-2}}{n_{n-2}}$$

fornitaci dal teorema di Van Aubel applicato all'$(n-1)$-edro $A_1A_2\ldots A_{n-2}$, e per $\dfrac{A_nP_{n.n-1}}{P_{n.n-1}A_{n-1}}$ la frazione $\dfrac{m_{n-1}}{n_{n-1}}$ e poniamo ancora

$$N_1 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} + \ldots + \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} = N_2 + \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}},$$

troviamo:

$$\overline{A_nQ_n}^2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \overline{A_nQ_{n-1}}^2 + \frac{\dfrac{m_{n-1}}{n_{n-1}}}{N_1} \cdot \overline{A_nA_{n-1}}^2 - \frac{N_2 \cdot \dfrac{m_{n-1}}{n_{n-1}}}{N_1^2} \cdot \overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2.$$

Poniamo ora in questa formula per $\overline{A_nQ_{n-1}}^2$ e $\overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2$ le loro espressioni date dalle (6), (7). Avremo:

$$\overline{A_nQ_n}^2 = \frac{1}{N_1} \cdot \left\{\frac{m_1}{n_1} \overline{A_nA_1}^2 + \ldots + \frac{m_{n-2}}{n_{n-2}} \overline{A_nA_{n-2}}^2\right\} \tag{8}$$

$$- \frac{1}{N_1 \cdot N_2} \cdot \left\{\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \overline{A_1A_2}^2 + \ldots + \frac{m_{n-2}}{n_{n-2}} \cdot \frac{m_{n-3}}{n_{n-3}} \overline{A_{n-2}A_{n-3}}^2\right\}$$

$$+ \frac{\dfrac{m_{n-1}}{n_{n-1}}}{N_1} \cdot \overline{A_nA_{n-1}}^2 - \frac{N_2 \cdot \dfrac{m_{n-1}}{n_{n-1}}}{N_1} \left[\frac{1}{N_2}\left\{\frac{m_1}{n_1}\overline{A_{n-1}A_1}^2 + \ldots + \frac{m_{n-2}}{n_{n-2}} \overline{A_{n-1}A_{n-2}}^2\right\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{N_2^2}\left\{\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_2}{n_2} \overline{A_1A_2}^2 + \ldots + \frac{m_{n-3}}{n_{n-3}} \cdot \frac{m_{n-2}}{n_{n-2}} \overline{A_{n-3}A_{n-2}}^2\right\}\right].$$

Si osservi ora che i primi $n-2$ termini insieme col termine

$$\frac{1}{N_1} \cdot \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} \overline{A_nA_{n-1}}^2$$

danno il sommatorio

$$\frac{\sum_s^{n-1} \frac{m_s}{n_s} \overline{A_n A_s}^2}{\sum_r^{n-1} \frac{m_r}{n_r}}.$$

Quanto al resto, i termini della forma $\frac{m_h}{n_h} \cdot \frac{m_k}{n_k} \overline{A_h A_k}^2$, dove nè h, nè k hanno il valore $n-1$, compariscono nella seconda e nell'ultima parentesi: precisamente, nella seconda col coefficiente $-\frac{1}{N_1 N_2}$ e nell'ultima col coefficiente $+\frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} \cdot \frac{1}{N_1^2 . N_2}$, per cui il coefficiente generico di $A_h A_k$ sarà:

$$\frac{m_h}{n_h} \cdot \frac{m_k}{n_k} \left\{ -\frac{1}{N_1 N_2} + \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} \cdot \frac{1}{N_1^2 N_2} \right\} = \frac{1}{N_1^2 . N_2} \cdot \frac{m_h}{n_h} \cdot \frac{m_k}{n_k} \cdot \left\{ -N_1 + \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{N_1^2 N_2} \cdot \frac{m_h}{n_h} \cdot \frac{m_k}{n_k} . N_2 = -\frac{1}{N_1^2} \cdot \frac{m_h}{n_h} \cdot \frac{m_k}{n_k}.$$

Se a questi aggiungiamo i termini contenuti nella terza parentesi, che hanno la forma

$$-\frac{1}{N_1^2} \frac{m_{n-1}}{n_{n-1}} \cdot \frac{m_i}{n_i} \overline{A_{n-1} A_i}^2 \qquad (i \text{ da } 1 \text{ a } n-2),$$

potremo comprendere tutti questi termini nel sommatorio

$$-\frac{1}{N_1^2} \sum_{ik}^{n-1} \frac{m_i}{n_i} \frac{m_k}{n_k} \overline{A_i A_k}^2$$

dove N_1 è stato posto uguale a $\sum_r^{n-1} \frac{m_r}{n_r}$.

La (8) si trasforma così nella (4). Siccome questo sussiste per $n=3$, $n=4$, essa è generale.

La (4) sarà detta la *seconda formula di Stewart* per distinguerla da un'altra trovata in altro articolo di questo pregevole Periodico.

Per fare un'applicazione di questo teorema supponiamo che il punto generico P_{hk} sia il punto medio di $A_h A_k$, cioè che sia:

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_{n-1} = n_1 = n_2 = \ldots = n_{n-1}.$$

In questo caso la formula (4) diventa

$$\overline{A_n Q_n}^2 = \frac{1}{n-1} \cdot (\overline{A_n A_1}^2 + \ldots + \overline{A_n A_{n-1}}^2)$$
$$- \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \{\overline{A_1 A_2}^2 + \ldots + \overline{A_{n-2} A_{n-1}}^2\}$$

dove Q_n indica il centro delle medie distanze dei punti $A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$.

Immaginiamo scritte le analoghe relazioni per $\overline{A_{n-1}Q_{n-1}}^2$, $\overline{A_{n-2}Q_{n-2}}^2$ ecc., e sommiamo tutte queste relazioni membro a membro. In ognuna di queste relazioni il termine generico $\overline{A_hA_k}^2$ comparisce, e precisamente col coefficiente $\frac{1}{n-1}$ nelle due che danno $\overline{A_hQ_h}^2$ e $\overline{A_kQ_k}^2$ e col coefficiente $-\frac{1}{(n-1)^2}$ in ciascuna delle $n-2$ rimanenti; in conseguenza il coefficiente da cui esso termine si trova affetto nella formula finale sarà:

$$\frac{2}{n-1}-\frac{n-2}{(n-1)^2}=\frac{2(n-1)-(n-2)}{(n-1)^2}=\frac{n}{(n-1)^2}.$$

Avremo quindi:

$$\sum_1^n{}_s\overline{A_sQ_s}^2=\frac{n}{(n-1)^2}\cdot\sum_1^n{}_{hk}\overline{A_hA_k}^2.$$

Se l'n-edro è regolare e indichiamo con h la misura dell'altezza di esso, con l quella dello spigolo, riferite alla medesima unità di misura, avremo dalla precedente:

$$h^2=\frac{n}{2(n-1)}\cdot l^2.$$

III. — La formula di Van Aubel e quella di Stewart estese al tetraedro ipersferico.

Ci è necessario ricordare, giacchè dovremo applicarla fra poco, una formula che dimostrammo altre volte e che costituisce l'estensione del teorema di V. Aubel al triangolo sferico.

Nel triangolo sferico $A_1A_2A_3$ indichiamo con P_{ik} un punto generico del lato A_iA_k; se O_2 è il punto comune ad A_1P_{23}, A_2P_{13} e A_3P_{12} si ha:

$$\frac{\operatorname{sen} A_3O_2}{\operatorname{sen} O_2P_{12}}=\left\{\left(\frac{\operatorname{sen} A_3P_{13}}{\operatorname{sen} P_{13}A_1}\right)^2+\left(\frac{\operatorname{sen} A_3P_{23}}{\operatorname{sen} P_{23}A_2}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\cdot\frac{\operatorname{sen} A_3P_{13}}{\operatorname{sen} P_{13}A_1}\cdot\frac{\operatorname{sen} A_3P_{23}}{\operatorname{sen} P_{23}A_2}\cos A_1A_2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

La dimostrazione di questa formula si può trovare in un mio articolo pubblicato nel *Bollettino di Matematica* del prof. Conti.

Sia ora in S_4 un'ipersfera e siano $A_1A_2A_3A_4$ quattro punti di detta ipersuperficie e tali che *tre* qualunque di essi non appartengano a una medesima V_1 sferica massima. Prendiamo sugli archi A_4A_1 A_4A_2 A_4A_3 rispettivamente i punti $P_{41}P_{42}P_{43}$ e consideriamo sopra ciascuno dei rimanenti spigoli quel punto che risulta determinato dall'imporre la condizione che per ognuna delle facce passanti per A_4 venga soddisfatto il teorema di CEVA: sia P_{23} il punto situato su A_2A_3, P_{31} quello su A_3A_1 e P_{21} quello su A_1A_2 e siano $Q_1Q_2Q_3$ i punti comuni alle ceviane dei tre triangoli $A_4A_2A_3$, $A_4A_3A_1$ e $A_4A_1A_2$ rispettivamente.

È subito visto che il teorema di CEVA è soddisfatto anche per la rimanente faccia $A_1A_2A_3$, cosicchè gli archi A_3P_{21}, A_2P_{13}, A_1P_{23} avranno in comune un punto Q_4 e gli archi A_3Q_3 e A_4Q_4 avranno di conseguenza, a comune un punto O_3.

Prendiamo ora il triangolo sferico $A_4A_1A_2$ e applichiamo ad esso la formula (9) allo scopo di calcolare il rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{12}}$.

Avremo:

$$\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3Q_{12}} = \left[\left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\cdot\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\cdot\cos A_1A_2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

Ora nel triangolo $A_4A_3P_{21}$ l'arco $P_{21}O_3$ passa per P_{43} e quindi la medesima formula (9) potrà servirci pel calcolo del rapporto $\dfrac{\operatorname{sen} A_4O_3}{\operatorname{sen} O_3Q_4}$.

Avremo:

$$\frac{\operatorname{sen} A_4O_3}{\operatorname{sen} O_3Q_4} = \left[\left(\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{21}}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{21}}\cdot\frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3}\cdot\cos A_3P_{21}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (11)$$

dove $\cos A_3P_{21}$ rimane ad essere calcolato, per mezzo del teorema di STEWART, dal triangolo $A_1A_2A_3$.

Così facendo, si trova:

$$\cos A_3P_{21} = \frac{\operatorname{sen} A_2P_{21}\cos A_3A_1 + \operatorname{sen} A_1P_{21}\,.\cos A_3A_2}{\{\operatorname{sen}^2 A_2P_{21} + \operatorname{sen}^2 A_1P_{21} + 2\operatorname{sen} A_1P_{21}\,.\operatorname{sen} A_2P_{21}\cos A_1A_2\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Ma essendo questa formula omogenea in $\operatorname{sen} A_1P_{21}$ e $\operatorname{sen} A_2P_{21}$, ad essi potremo sostituire i rapporti

$$\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}$$

che sono loro proporzionali in virtù del teorema di CEVA, soddisfatto, per quanto dicemmo, nella faccia $A_1A_2A_4$.

Perverremo così alla formula:

$$\cos A_3P_{21} =$$
$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\cdot\cos A_3A_1 + \dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\cdot\cos A_3A_2}{\left(\dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\right)^2 + 2\,.\dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\cdot\cos A_1A_2}$$

o, tenendo presente la (10), alla

$$\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{12}} \cdot \cos A_3P_{12} = \frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1} \cdot \cos A_3A_1 + \frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \cdot \cos A_3A_2. \quad (12)$$

Se ora nella (11) poniamo per $\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{12}}$ la sua espressione fornitaci dalla (10) e poniamo poi per $\frac{\operatorname{sen} A_4Q_3}{\operatorname{sen} Q_3P_{12}} \cdot \cos A_3P_{12}$ quella data dalla (12), troveremo:

$$\frac{\operatorname{sen} A_4O_3}{\operatorname{sen} O_3Q_4} = \left[\left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} A_{42}P_2}\right)^2 + \right.$$
$$+ 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \cos A_1A_2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3}\right)^2 +$$
$$\left. + 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3} \cdot \left\{\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1} \cos A_3A_1 + \frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \cos A_3A_2\right\}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

ossia:

$$\frac{\operatorname{sen} A_4O_3}{\operatorname{sen} O_3Q_4} = \left[\left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2}\right)^2 + \left(\frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3}\right)^2 + \right.$$
$$+ 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \cos A_1A_2 + 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{41}}{\operatorname{sen} P_{41}A_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3} \cos A_1A_3 +$$
$$\left. + 2\frac{\operatorname{sen} A_4P_{42}}{\operatorname{sen} P_{42}A_2} \cdot \frac{\operatorname{sen} A_4P_{43}}{\operatorname{sen} P_{43}A_3} \cos A_2A_3\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (14)$$

che è la formula di VAN AUBEL estesa al tetraedro ipersferico.

Ciò posto, consideriamo in un S_3 di S_4 un tetraedro $A'_1A'_2A'_3A'_4$ e conduciamo un'ipersfera di S_4 che tocchi l'S_3 nel punto A'_4: sia R il raggio di questa ipersfera. Se proiettiamo dal centro di questa ipersfera il tetraedro sull'ipersfera stessa e indichiamo con T_i la proiezione di un punto generico T'_i di S_3 (compreso A'_4 per uniformità di scrittura), avremo in generale:

$$A'_4T'_i = R \,.\, \operatorname{tg} A_4T_i. \quad (15)$$

Ma la formula di VAN AUBEL estesa al tetraedro lineare si può porre sotto la forma:

$$\frac{A'_4O'_3}{A'_4Q'_4 - A'_4O'_3} = \frac{A'_4P'_{41}}{A'_4A'_1 - A'_4P'_{41}} + \frac{A'_4P'_{42}}{A'_4A'_2 - A'_4P'_{42}} + \frac{A'_4P'_{43}}{A'_4A'_3 - A'_4P'_{43}},$$

per cui, tenendo presente la (14) essa darà luogo all'altra:

$$\frac{\operatorname{tg} A_4O_3}{\operatorname{tg} A_4Q_4 - \operatorname{tg} A_4O_3} =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} A_4P_{41}}{\operatorname{tg} A_4A_1 - \operatorname{tg} A_4P_{41}} + \frac{\operatorname{tg} A_4P_{42}}{\operatorname{tg} A_4A_2 - \operatorname{tg} A_4P_{42}} + \frac{\operatorname{tg} A_4P_{43}}{\operatorname{tg} A_4A_3 - \operatorname{tg} A_4P_{43}}.$$

E facendo ricorso alla nota formula:

$$\mathrm{tg}\, a - \mathrm{tg}\, b = \frac{\mathrm{sen}\,(a-b)}{\cos a \,.\, \cos b}$$

per trasformare i denominatori delle frazioni precedenti, l'ultima formula si muterà nella seguente:

$$\frac{\mathrm{sen}\, A_4O_3}{\mathrm{sen}\, O_3A_4} \,.\, \cos A_4Q_4 =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}\, A_4P_{41}}{\mathrm{sen}\, P_{41}A_1} \cos A_4A_1 + \frac{\mathrm{sen}\, A_4P_{42}}{\mathrm{sen}\, P_{42}A_2} \,.\, \cos A_4A_2 + \frac{\mathrm{sen}\, A_4P_{43}}{\mathrm{sen}\, P_{43}A_3} \,.\, \cos A_4A_3.$$

Questa formula, ove si tenga conto della (14) del precedente paragrafo, prenderà la forma:

$$\cos A_4Q_4 = \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{41}}{\mathrm{sen}\, P_{41}A_1} \,.\, \cos A_4A_1 + \dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{42}}{\mathrm{sen}\, P_{42}A_2} \cos A_4A_2 + \dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{43}}{\mathrm{sen}\, P_{43}A_3} \cos A_4A_3}{\left\{ \sum_1^3{}_r \left(\dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{4r}}{\mathrm{sen}\, P_{4r}A_r}\right)^2 + 2 \,.\, \sum_1^3{}_{ij} \dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{4i}}{\mathrm{sen}\, P_{4i}A_i} \,.\, \dfrac{\mathrm{sen}\, A_4P_{4j}}{\mathrm{sen}\, P_{4j}A_j} \cos A_iA_j \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

dove nel secondo sommatorio i ed j debbono avere valori differenti.

Si ha così la formula domandata di STEWART già trovata pel triangolo sferico; invero a quest'ultima possiamo dare anche la forma:

$$\cos A_3P_{12} =$$

$$= \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{31}}{\mathrm{sen}\, P_{31}A_1} \,.\, \cos A_3A_1 + \dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{32}}{\mathrm{sen}\, P_{32}A_2} \,.\, \cos A_3A_2}{\left\{ \left(\dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{31}}{\mathrm{sen}\, P_{31}A_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{32}}{\mathrm{sen}\, P_{32}A_2}\right)^2 + 2 \,.\, \dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{31}}{\mathrm{sen}\, P_{31}A_1} \,.\, \dfrac{\mathrm{sen}\, A_3P_{32}}{\mathrm{sen}\, P_{32}A_2} \,.\, \cos A_1A_2 \right\}^{\frac{1}{2}}}$$

dalla quale risulta manifesta l'analogia a cui alludevamo sopra.

OSSERVAZIONE. — Seguendo le tracce del procedimento precedente si troverebbe per l'n-edro ipersferico di S_n:

$$\frac{\mathrm{sen}\, A_nO_{n-1}}{\mathrm{sen}\, O_{n-1}Q_n} =$$

$$= \left\{ \sum_1^{n-1}{}_r \left(\frac{\mathrm{sen}\, A_nP_{nr}}{\mathrm{sen}\, P_{nr}A_r}\right)^2 + \sum_1^{n-1}{}_{ik} \frac{\mathrm{sen}\, A_nP_{ni}}{\mathrm{sen}\, P_{ni}A_i} \,.\, \frac{\mathrm{sen}\, A_nP_{nk}}{\mathrm{sen}\, P_{nk}A_k} \,.\, \cos A_iA_k \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (a)$$

$$\cos A_nQ_n = \frac{\sum_1^{n-1}{}_i \dfrac{\mathrm{sen}\, A_nP_{ni}}{\mathrm{sen}\, P_{ni}A_i} \,.\, \cos A_nA_i}{\dfrac{\mathrm{sen}\, A_nO_{n-1}}{\mathrm{sen}\, O_{n-1}Q_n}} \qquad (b)$$

dove nel denominatore della frazione del secondo membro della (b) si deve porre lo sviluppo dato dal secondo membro della (a).

E. PICCIOLI.

UN'APPLICAZIONE DELLA TEORIA DELLE FUNZIONI ORDINATRICI
alla Matematica finanziaria

1. Indicando con L_a il valore di una lira impiegata nell'intervallo di tempo $0 \vdash a$ al tasso d'interesse continuo variabile t_x è, come è noto,

$$L_a = e^{\int_0^a t_x dx};$$

ne consegue che un capitale C, versato al tempo y, sarà divenuto al tempo a

$$Ce^{\int_y^a t_x dx}.$$

Si supponga ora che un capitale venga versato con continuità nell'intervallo di tempo $0 \vdash a$. Indichi $C(y)$ il capitale versato dal tempo 0 al tempo y; la quota di versamento nell'intervallo infinitesimo di tempo $y \vdash y + dy$ è

$$\frac{dC(y)}{dy} dy;$$

la $\frac{dC(y)}{dy}$ si può chiamare l'*intensità* di versamento, o *velocità* di versamento: [1] indichiamola con A_y.

Il capitale $C(a)$ versato nell'intervallo di tempo $0 \vdash a$ ed impiegato al tasso di interesse continuo t_x, sarà divenuto al tempo a

$$S_a = \int_0^a A_y \, e^{\int_y^a t_x dx} dy.$$

Consideriamo l'insieme dei tassi d'interesse continuo variabili τ_x per i quali accada che la misura del tempo per cui τ_x si mantiene compreso fra due valori qualsivogliano α e β, eguagli la misura del tempo per cui t_x si mantiene compreso fra gli stessi valori α e β; dalla quale ipotesi discende, in particolare,

$$\frac{1}{a}\int_0^a t_x dx = \frac{1}{a}\int_0^a \tau_x dx,$$

cioè la media del tasso t_x è uguale alla media di ciascuno dei tassi τ_x.

Ci si può proporre di determinare nell'insieme dei tassi τ_x quello che fa divenire massima al tempo a la somma S_a e quello che la fa

(1) C. Teofilato, "Del tasso continuo variabile", *Giornale di Battaglini*, vol. XLVI, pagine 144-152.

divenire minima, cioè quelli che rendono massimo e minimo l'integrale

$$\int_0^a A_y e^{\int_y^a \tau_x dx} dy. \qquad (1)$$

Richiamata la definizione di funzione ordinatrice non crescente o non decrescente di una data funzione, noi proveremo che si ha il massimo dell'integrale (1) quando per τ_x si prende la funzione ordinatrice non decrescente di t_x e si ha il minimo quando si prende l'ordinatrice non crescente di t_x.

2. Sia $f(x)$ una funzione reale della variabile x nell'intervallo $a \vdash b$, ivi continua ed il cui minimo sia μ ed il massimo M. Sia A un valore compreso fra μ e M, gli estremi inclusi. Esisterà la misura dell'insieme dei punti in cui $f(x) < A$; codesta misura $m[I\{f(x) < A\}]$ indichiamola con l_A; esisteranno ancora $m[I\{f(x) = A\}]$ che indichiamo con λ_A e $m[I\{f(x) > A\}]$ che indichiamo con L_A.

Definiamo in $a \vdash b$ una funzione con le seguenti condizioni: se $\lambda_A = 0$, in $x = a + l_A$ abbia il valore A, se $\lambda_A \neq 0$, la funzione abbia il valore A in $x = a + l_A$, in $x = a + l_A + \lambda_A = b - L_A$ e nei punti intermedi. Facendo percorrere ad A tutti i valori da μ ad M, resta definita in $a \vdash b$ una funzione che rappresenteremo con $O_1 f(x)$, la quale gode delle proprietà: (¹)

a) è non decrescente;

b) è continua;

c) le misure degli insiemi dei punti di $a \vdash b$ in cui $f(x)$ ed $O_1 f(x)$ prendono valori compresi fra due valori qualunque A e B sono uguali;

dalle quali ultime due ipotesi discende che $O_1 f(x)$ prende tutti e soli i valori di $f(x)$ e che è

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b O_1 f(x)\, dx.$$

La $O_1 f(x)$, col porre $a + b - x$ in posto di x, diviene una funzione $O_2 f(x)$, la quale è non crescente e gode delle proprietà *b*) e *c*) e di quelle che da esse ne conseguono.

La funzione $O_1 f(x)$ diremo *funzione ordinatrice non decrescente* di $f(x)$ e la $O_2 f(x)$ diremo *funzione ordinatrice non crescente* di $f(x)$.

3. Sia $\varphi(x)$ una funzione integrabile in $0 \vdash a$ e m, n, p, q quattro numeri tali che $0 < m < n < p < q < a$, $n - m = q - p$; sia di più il limite inferiore di $\varphi(x)$ in $m \vdash n$ non minore del limite superiore di $\varphi(x)$ in $p \vdash q$. La funzione $\theta(x)$ che in $0 \vdash m$, $n \vdash p$, $q \vdash a$ coincide con $\varphi(x)$, che per $m < x < n$ è definita da $\varphi(x + p - m)$

(¹) Per la dimostrazione veggasi: F. SIBIRANI, "Su le funzioni ordinatrici delle funzioni reali di una o più variabili reali". *Atti della R. Accademia dei Lincei*, vol. XX, serie 5ª, pp. 694-701.

che per $p < x < q$ è definita da $\varphi(x - p + m)$, soddisfa alla relazione

$$\int_0^a \psi(y)\, e^{\int_y^a \theta(x)\,dx} dy > \int_0^a \psi(y)\, e^{\int_y^a \varphi(x)\,dx} \tag{2}$$

ove $\psi(y)$ è una qualunque funzione positiva in $0 \vdash a$.

Invero la funzione $\theta(x) - \varphi(x)$ è nulla in $0 \vdash m$, $n \vdash p$, $q \vdash a$, è negativa per $m < x < n$ e positiva per $p < x < q$, onde

$$\int_y^a (\theta(x) - \varphi(x))\, dx$$

è nullo in $q \vdash a$, è positivo per $m < y < q$ e per essere

$$\int_m^n (\theta(x) - \varphi(x))\, dx = -\int_p^q (\theta(x) - \varphi(x))\, dx,$$

è nullo pure in $0 \vdash m$. Allora

$$e^{\int_y^a (\theta(x) - \varphi(x))\, dx}$$

è uguale ad 1 per $0 \leqslant y \leqslant m$, è maggiore di 1 per $m < y < q$, è uguale ad 1 per $q \leqslant y \leqslant a$, cioè

$$e^{\int_y^a \theta(x)\,dx} = e^{\int_y^a \varphi(x)\,dx}$$

per $0 \leqslant y \leqslant m$ e per $q \leqslant y \leqslant a$ e

$$e^{\int_y^a \theta(x)\,dx} > e^{\int_y^a \varphi(x)\,dx}$$

per $m < y < q$, e poichè $\psi(y)$ è funzione positiva in $0 \vdash a$, sarà pure negli stessi intervalli

$$\psi(y)\, e^{\int_y^a \theta(x)\,dx}$$

uguale o maggiore di

$$\psi(y)\, e^{\int_y^a \varphi(x)\,dx},$$

onde risulta dimostrata la (2).

4. La funzione $O_1 t_x$ appartiene all'insieme delle funzioni τ_x definite nel § 1; orbene dico che $O_1 t_x$ rende massimo l'integrale (1). Se τ_x non è una funzione non decrescente, ci saranno sempre in $0 \vdash a$ due intervalli $m \vdash n$, $p \vdash q$ di uguale lunghezza, nel primo dei quali il minimo di τ_x non è inferiore al massimo di τ_x nel secondo intervallo; allora la funzione $\mu(x)$ che coincide con τ_x in $0 \vdash m$, $n \vdash p$, $q \vdash a$, che prende in $m \vdash n$ ordinatamente i valori che τ_x ha in $p \vdash q$ e viceversa, per ciò che abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, soddisfa alla relazione

$$\int_0^a A_y\, e^{\int_y^a \mu(x)\,dx}\, dx > \int_0^a A_y\, e^{\int_y^a \tau_x\,dx},$$

giacchè A_y è manifestamente una funzione positiva. Ma dalla funzione $O_1 t_x$, perchè non decrescente, non si può, col procedimento indicato sopra, dedurre una funzione che renda

$$\int_0^a A_y \, e^{\int_y^a \mu(x)\,dx} dy > \int_0^a A_y \, e^{\int_y^a O_1 t_x dx}$$

e poichè $O_1 t_x$ è la sola funzione dell'insieme delle funzioni τ_x che sia non decrescente, è provato che $O_1 t_x$ rende massimo l'integrale (1).

Con ragionamento del tutto analogo si prova che il minimo dell'integrale (1) si ha quando si prende per τ_x la funzione $O_2 t_x$.

F. Sibirani.

FORMULE DEI NUMERI PRIMI

1. Nella nota "Un nuovo aspetto dato al teorema di Goldbach" (*Rend. Acc. Lincei*, 1913) ho stabilito due forme caratteristiche pei numeri primi, le quali forniscono facili algoritmi per tali numeri. Una terza formula più semplice e più elegante stabilisco qui dopo aver esibito le prime due e per l'analogia che colla nuova presentano, e per qualche osservazione che in comune con questa richiamano.

2. Premetto che parlo sempre di numeri interi, indico con p_m l'm^{esimo} numero primo dispari, e con $E(x)$ il massimo intero non maggiore di x.

La prima di quelle due formule rappresenta tutti e soli i numeri primi a partire da $p = 3$. Essa è data da

$$p = 2^x \pi' - \pi \tag{1}$$

dove è:

$$\pi = 1 . 3 . 5 . 7 . 11 \ldots p_m; \quad p_m \leqslant E(\sqrt{p}) < p_{m+1}; \, x \geqslant 1; \quad p < p^2_{m+1};$$

e π' è prodotto di fattori primi maggiori di p_m con esponenti $\geqslant 0$.

Si hanno così per es. le seguenti forme caratteristiche:

$$3 = 2^2 - 1; \quad 5 = 2 . 3 - 1; \quad 7 = 2^3 - 1; \quad 11 = 2 . 7 - 3$$
$$29 = 2^2 . 11 - 3 . 5; \quad 53 = 2 . 79 - 3 . 5 . 7 \ldots$$

3. La seconda formula è data da

$$p = \pi - 2^x \pi', \tag{2}$$

dove sono conservate le notazioni precedenti. Essa vale per tutti e soli i numeri primi $p > 121$.

4. Ma essa può estendersi al di sotto di tale limite fino a $p=7$, fissando che per $5 < p < 121$ sia $\pi = 1.3.5\ldots p_\mu$, essendo p_μ il più piccolo numero primo per cui risulti $\pi > p$. Per $p > 121$ è sempre $\pi = 1.3.5\ldots p_m$, con $p_m \leqslant E(\sqrt{p}) < p_{m+1}$: segue manifestamente: $p_\mu \geqslant p_m$.

Seguendo questa seconda formula si ha ad es.

$$7 = 3.5 - 2^3; \qquad 11 = 3.5 - 2^2; \qquad 17 = 3.5.7 - 2^3.11\ldots$$

5. Ed ora veniamo alla nuova formula. Essa è data dal seguente

TEOREMA. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero* $p > 5$ *sia primo è che sia:*

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= p \\ \alpha + \beta &= \pi \end{aligned} \tag{3}$$

con α *e* β *primi fra loro*, e dove π ha i valori fissati al n. 4.

La condizione è sufficiente: se p è tale che si possano trovare α e β primi fra loro e soddisfacenti al sistema (3), p è primo. Invero, non può entrare nella differenza p un fattore primo dispari compreso fra 1 e p_{m+1}, perchè esso, entrando pure nella somma π, entrerebbe in α ed in β, che non sarebbero più primi fra loro. Nè può entrare in p un fattore $q > p_m$ e diverso da p, perchè sarebbe $p = qr$, e dall' ipotesi

$$p_{m+1} > E(\sqrt{p})$$

seguirebbe

$$p^2_{m+1} > qr,$$

onde, essendo $q \geqslant p_{m+1}$, sarebbe $r < p_{m+1}$, e i fattori di r (minori o uguali a p_m) entrerebbero in p, ciò che si è escluso; onde p è primo

Il ragionamento non varia se, (essendo $p < 121$) si sostituisce p_μ a p_m, perchè sarebbe sempre $p^2_{\mu+1}, > p = qr$; onde, per $q \geqslant p_{\mu+1}$, sarebbe pure $r < p_{\mu+1}$.

La condizione è necessaria: invero, se p è primo dispari, si potrà sempre porre

$$\alpha = \frac{\pi + p}{2}, \qquad \beta = \frac{\pi - p}{2}$$

cioè soddisfacenti al sistema (3), e per $p > 5$, α e β dovranno essere primi fra loro, perchè se avessero un fattore comune $n > 1$, questo entrerebbe in p, che non sarebbe più primo.

6. Segue dal teorema che è *caratteristica* per i numeri primi la forma

$$p = \frac{\pi + p}{2} - \frac{\pi - p}{2}$$

con $\frac{\pi + p}{2}$ e $\frac{\pi - p}{2}$ primi fra loro, e dove è $\pi = 1.3.5\ldots p_m$, essendo $p_m \leqslant E(\sqrt{p}) < p_{m+1}$ per $p > 121$, ed essendo invece p_m il più piccolo numero primo per cui risulti $\pi > p$ quando è: $5 < p < 121$.

7. Codesta formula rappresenta tutti e soli i numeri primi a partire da $p = 7$. Essa appare più elegante delle precedenti, ed ha su di esse, fra gli altri, il vantaggio che non ha bisogno della limitazione esplicita: $p < p^2_{m+1}$. Come è unica per ogni numero primo, fornisce inoltre un semplicissimo algoritmo dei numeri primi.

Così si hanno ad es. le seguenti forme caratteristiche:

$$7 = 11 - 4; \quad 11 = 13 - 2; \quad 13 = 14 - 1; \quad 17 = 61 - 44;$$
$$19 = 62 - 43; \quad 127 = 641 - 514; \quad 131 = 643 - 512 \ldots$$

MARIO VECCHI.

PROBLEMI (1)

(Continuazione — Vedi fascicolo I)

70. Si consideri il circolo di centro C tangente ad un'ellisse in un punto M e passante per un fuoco F.

1°. Se M si muove sull'ellisse, il luogo del punto C è una quartica unicursale di cui l'area è

$$\frac{\pi a}{8b}(3b^2 - a^2).$$

2°. Il luogo del punto P, secondo punto d'incontro di MC col circolo suddetto è una quartica la cui area è

$$\frac{\pi a}{2b}(a^2 - b^2).$$

($2a$, $2b$ asse dell'ellisse data).

71. È data un'ellisse e i cui assi sono 2A e 2B e una retta r parallela all'asse maggiore di e alla distanza b. Un punto M variabile su e si proietta in P su r. Si prenda su M nel senso PM, $QP = k\mathrm{MP}$. L'inviluppo del circolo di centro Q e raggio QP è, oltre la r, una sestica unicursale la cui area è

$$\mathrm{U} = \frac{2\pi k\mathrm{B}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{AB}k + \mathrm{B}^2k^2)}{\mathrm{A} + \mathrm{B}k} + 2\pi b^2k^2.$$

Ecco alcuni casi particolari interessanti

1°. $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{R}, \quad k = 1, \quad b = 0, \quad \mathrm{U} = 3\pi \mathrm{R}^2.$

(1) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriti dal Comandante BARISIEN, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

L'inviluppo è allora una epicicloide a due regressi o nefroide

2°. $A=B=R\sqrt{2}$, $k=1$, $b=R$, $U=8\pi R^2$.

3°. $k=1$, $b=0$, $U=\dfrac{2\pi B(A^2+AB+B^2)}{A+B}$.

Se di più, $A=B=R$, $U=3\pi R^2$.

4°. $k=\dfrac{1}{2}$, $b=0$, $U=\dfrac{\pi B(4A^2+2AB+B^2)}{2(2A+B)}$.

Se di più, $A=B=R$, $U=\dfrac{7\pi R^2}{6}$.

5°. $k=2$, $b=0$, $U=\dfrac{4\pi B(A^2+2AB+4B^2)}{A+2B}$.

Se di più, $A=B=R$, $U=\dfrac{28\pi R^2}{3}$.

72. Un punto M qualunque d'un'ellisse si proietta in P sull'asse maggiore; Q è il simmetrico di P rispetto alla tangente in M e I è il punto medio di PQ.

Il circolo di centro M e raggio MP è tangente al suo inviluppo in Q. Il luogo di Q è una sestica di cui l'area è

$$U=\frac{2\pi b(a^2+ab+b^2)}{a+b}.$$

Il luogo di I è una sestica di cui l'area è

$$U_1=\pi ab+\frac{\pi b^4}{2(a+b)^2}.$$

Se l'ellisse è un circolo, il luogo di Q è un'epicicloide a due regressi.

73. Sulla normale ad una parabola in un suo punto P si prenda il punto M equidistante da P e dal fuoco F. Siano Q, R i piedi delle altre due normali condotte da M e P_1 il polo di QR. Dimostrare che:

1) la retta PP_1 passa per il fuoco F;

2) il luogo del punto medio di PP_1 è una parabola.

74. Siano N e N_1 i punti d'incontro della normale in un punto qualunque M di un'epicicloide a due regressi col circolo base, e M', M'_1 i simmetrici di M rispetto a N e N_1. Il luogo dei punti M', M'_1 si compone di due curve chiuse, le aree delle quali sono eguali l'una al cerchio base, l'altra a 21 volte il cerchio stesso.

75. Si prenda su ogni tangente dell'ipocicloide a quattro regressi, a partire dal punto di contatto, un segmento costante l. Il luogo degli estremi di questi segmenti si compone di due curve chiuse, ciascuna delle quali ha un'area equivalente alla differenza delle aree dell'ipocicloide e del cerchio di raggio l.

76. Essendo data una cissoide retta, il luogo dei centri dei circoli che passano per il punto di regresso e tagliano la cissoide ortogonalmente è una cubica asintotica alla cissoide. Calcolare l'area compresa fra queste due curve.

77. Sieno MM', QQ' due diametri coniugati variabili di un'ellisse, P il punto d'incontro dell'ellisse col circolo osculatore in M, e O, O' i centri dei circoli circoscritti ai triangoli PMM', e PQQ'. Dimostrare che ciascuna delle due curve luoghi dei punti O, O' ha un'area eguale a $^1/_8$ di quella della sviluppata dell'ellisse.

78. Siano OA e OB due raggi fissi ortogonali di un circolo di centro O, ed M un punto variabile sul circolo stesso. Si descrive un circolo di centro M e raggio eguale all'arco $\widehat{MB}$. Luoghi dei punti d'incontro di questo circolo coi diametri paralleli ad OA e OB. Studiare la quadratura e la rettificazione di queste curve.

79. Sia M un punto d'un'ellisse di centro O, e N il corrispondente centro di curvatura. La perpendicolare condotta da N ad OM inviluppa una curva la cui area è eguale a quattro volte l'area della sviluppata dell'ellisse.

80. L'area della podaria di un'iperbole rispetto ad uno dei suoi vertici è $\dfrac{\pi a^3}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\pi a^3}{c}$.

81. Essendo P la proiezione del centro O di una ellisse sopra una tangente variabile di essa, si prendano sulla tangente stessa a partire da P due segmenti $PQ=PQ'=OP$ e due $PS=PS'=2.OP$. Dimostrare che ciascuna delle ovali luoghi di Q e Q' ha un'area eguale a quella del circolo ortottico dell'ellisse, e che ciascuna delle ovali luoghi di S e S' ha un'area doppia di quella del circolo stesso.

82. La quartica luogo del punto medio delle corde di un'ellisse viste dal fuoco sotto un angolo retto ha per area

$$U=\frac{\pi b^3(a^4-b^4+4a^2b^2)}{2a(a^2+b^2)^2}.$$

Dedurne che la curva luogo dei vertici degli angoli retti circoscritti alla curva antipodaria dell'ellisse ha per area 4U. Generalizzare la quistione per un punto qualunque dell'asse maggiore.

83. Fare la quadratura e la rettificazione d'una curva parallela alla sviluppata di un'ellisse.

84. Sono dati un circolo ed un ellisse concentrici. Siano P, Q i punti d'incontro dell'ellisse colla polare rispetto ad essa di un punto M del circolo, N il punto d'incontro delle normali all'ellisse in P, Q, ed M' il polo della retta che congiunge i piedi delle altre due normali condotte da N. Dimostrare che, se M si sposta nel circolo dato:

1) il luogo del centro dell'iperbole equilatera tangente in P e Q alle rette MP e MQ è un circolo;

2) il luogo del centro dell'iperbole equilatera tangente in P' e Q' a $M'P'$ e $M'Q'$ è una sestica, l'area della quale è indipendente dalle lunghezze degli assi della data ellisse ed è la metà dell'area del circolo.

85. Nella ipotesi dell'esercizio precedente trovare l'equazione e l'area del luogo del baricentro del triangolo NPQ; e dimostrare che il luogo dell'ortocentro dello stesso triangolo è la podaria del centro di una certa ellisse.

86. La differenza delle aree della podaria e dell'antipodaria del centro d'una ellisse è eguale ad $^1/_3$ della somma delle aree della sviluppata dell'ellisse e della podaria del centro di questa sviluppata.

87. Essendo O il centro d'una ellisse, M un punto di questo, R il raggio del circolo ortottico (o di Monge), si porti sopra OM un segmento $ON = \frac{OM^2\sqrt{2}}{R}$. Dimostrare che la curva luogo di N è una quartica che ha la stessa area dell'ellisse, e calcolare le coordinate del punto d'incontro di questa quartica con l'ellisse.

88. Siano P, Q le proiezioni del centro d'un'ellisse su due tangenti perpendicolari che s'incontrano in M.

1) Le aree delle tre curve seguenti: inviluppo di PQ luogo, della proiezione O su PQ, luogo della proiezione di M su PQ sono legate fra loro da un'equazione di 2° grado.

2) Il luogo del polo di PQ rispetto all'ellisse ha un'area doppia di quella dell'ellisse stessa.

89. La curva luogo del punto d'incontro delle perpendicolari a due diametri coniugati di un'ellisse nei loro estremi ha un'area doppia della somma delle aree dell'ellisse e della sua sviluppata.

90. Sulla tangente in M ad un'ellisse e in un senso determinato si prende MN eguale alla *media aritmetica* del semidiametro che termina in M e del suo coniugato, ed un segmento MP eguale alla media geometrica dei semidiametri stessi. Dimostrare che la differenza fra il doppio dell'area del luogo di N e l'area del luogo di P è equivalente all'area dell'ellisse aumentata della metà dell'area del circolo ortottico.

91. Date due ellissi concentriche e omotetiche, siano M un punto variabile sull'ellisse maggiore, PQ la corda polare di M rispetto all'altra ellisse, N il punto d'incontro delle normali di P e Q a questa, P', Q' i piedi delle altre due normali condotte per N e P'', Q'' gli altri due punti d'incontro del circolo MPQ con l'ellisse minore.

Calcolare l'area delle tre curve inviluppi delle tre perpendicolari condotte ai segmenti PQ, $P'Q'$, $P''Q''$ per i loro rispettivi punti medi.

92. Sieno PQ la corda polare di un punto M rispetto ad un'ellisse di centro O e S, S_1 le aree della ellisse e della sua sviluppata. Dimostrare che se P, Q concidono:

1) l'area del luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo limite MPQ è $\frac{S-3S_1}{4}$;

2) l'area del luogo dell'ortocentro del triangolo limite MPQ è $4S+3S_1$;

3) l'area del luogo del centro del circolo dei nove punti del triangolo limite MPQ è $\frac{25S+9S_1}{16}$;

4) l'area del luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo limite OPQ è $\frac{S}{4}-\frac{S_1}{12}$;

5) l'area del luogo dell'ortocentro del triangolo limite OPQ è $S+S_1$;

6) l'area del luogo del centro del circolo dei nove punti del triangolo limite OPQ è $\frac{9S}{16}-\frac{S_1}{6}$.

93. Sia data un'ellisse Σ' interna ad un'altra Σ, e sia C il punto di contatto di una corda AB di Σ tangente a Σ'.

1) Trovare il luogo del punto medio della corda AB.

2) Quante sono le corde AB eguali ad una lunghezza data?

3) Quante sono le corde divise per metà da C?

4) Si consideri il caso in cui le due ellissi Σ, Σ' son concentriche ed hanno gli assi paralleli; e calcolare in questo caso l'area della curva luogo del punto medio di AB.

94. Trovare l'area della podaria del centro della sviluppata d'una sviluppata d'un'ellisse.

$$U=\frac{\pi c^4}{ab}-\frac{\pi c^4(a^2+b^2)^2}{a^3b^3}+\frac{\pi(a^2+b^2)^2(3a^4+3b^4+2a^2b^2)c^4}{8a^5b^5}-\frac{3\pi abc^4}{2(a+b)^4}.$$

95. Essendo data la curva rappresentata dall'equazione

$$(Ax)^{\frac{2}{3}}+(By)^{\frac{2}{3}}=C^{\frac{4}{3}},$$

designamo con S uno dei punti di regresso della curva situata sull'asse OX. Preso un punto M della curva come centro si descriva un circolo di raggio

$$\rho=A\,rc(MS)+\frac{B^2C^2}{A(A^2-B^2)};$$

questo incontra la tangente in M in due punti P e P' e la normale in due punti Q, Q'.

Dimostrare che:

1) il luogo di uno dei punti P, P' è un'ellisse;

2) l'area del luogo dell'altro punto P e P' è eguale a quella dell'ellisse;

3) l'area del luogo di ciascuno dei punti Q, Q' è pure eguale a quella dell'ellisse.

96. L'inviluppo della retta

$$x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = a \cos^2\alpha$$

al variare di α, è una curva Σ parallela ad un'ipocicloide a 4 regressi.

Il luogo del punto dal quale si posson condurre due tangenti ortogonali della curva Σ è una curva che ha per area $\frac{3\pi a^2}{2}$.

97. L'area dell'antipodaria di un'ellisse rispetto ad uno dei suoi fuochi è $\frac{3\pi ab}{2} - \frac{\pi a^3}{2b}$.

98. La curva antipodaria dell'ellisse i cui semiassi a, b stanno nel rapporto $\sqrt{3}$, rispetto ad uno dei suoi fuochi, si compone di due parti equivalenti.

(Si trova in generale per area dell'antipodaria

$$U = \frac{\pi a}{2b}(3b^3 - a^2).$$

Se dunque $a = b\sqrt{3}$, $U = 0$).

99. Essendo P la proiezione del centro O di un'ellisse sopra una tangente della medesima, Q la proiezione di P sull'asse maggiore, S la proiezione di O sulla parallela ad OP condotta per Q; dimostrare che l'area della curva luogo del punto S è $1/8$ di quella della podaria del centro dell'ellisse.

100. Essendo M un punto dato sopra un'ellisse, C il corrispondente centro di curvatura, si conducano da una stessa parte della tangente in M due segmenti $MP = MP' = MC$ inclinati d'un angolo costante α su MC. Dimostrare che le curve luogo di punti P, P' hanno la stessa area e calcolare quest'area.

101. L'area della curva luogo del punto d'incontro delle normali negli estremi di due diametri coniugati d'un'ellisse, è $2/3$ di quella della sviluppata dell'ellisse.

102. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^4\cos^2\theta + b^4\operatorname{sen}^2\theta)^2\, d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)^3} = a^4 b^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)^3}$$

(Si trova

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)^3} = \frac{\pi}{16\, a^5 b^5}(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2)\Big).$$

103. Si consideri l'arco della cicloide corrispondente a un giro completo del circolo generatore di raggio R. Le lunghezze di un arco MM' di quella cicloide, tale che la tangente in M, M' sieno perpendicolari è sempre compreso fra $4R$ e $4R\sqrt{2}$.

104. Le coordinate d'un punto d'un asteroide essendo

$$x = a\cos^3\varphi, \qquad y = a\,\text{sen}^3\,\varphi,$$

si consideri la curva di cui le coordinate sono $\dfrac{dx}{d\varphi}$, $\dfrac{dy}{d\varphi}$ e poi quelli di cui le coordinate sono $\dfrac{d^2x}{d\varphi^2}$, $\dfrac{d^2y}{d\varphi^2}$.

Trovare le aree di queste due curve in funzione di quella dell'asteroide.

105. Essendo P, Q i punti d'incontro di una conchiglia di Pascal con una retta condotta per il polo I di esso, il luogo dei centri di similitudine dei circoli di diametro IP, IQ si compone del punto I e di una cubica. Dimostrare che se I è un punto doppio della conchiglia a tangenti reali, l'area compresa fra la cubica suddetta ed il suo asintoto è finita. Quando la conchiglia diviene la cardioide, la cubica diventa una cissoide retta.

106. Sieno OA un raggio fisso e OB un raggio variabile di un circolo di centro O, C la proiezione di B sopra OA e P la proiezione di C su AB. Trovare l'equazione della curva luogo del punto P e dimostrare che la sua area è $^9/_{16}$ di quella del cerchio.

107. Essendo M un punto d'un'ellisse, C il corrispondente centro di curvatura, C', D, D' i punti d'incontro del circolo di centro M e raggio MC colla normale e colla tangente in M, dimostrare che le aree delle curve descritte dai quattro vertici del quadrato C'DCD' e le aree delle curve descritte dai punti medi dei lati di questo quadrato sono funzioni lineari delle aree della ellisse e della sua sviluppata.

108. Essendo F, F' i fuochi di un'ellisse, M un punto variabile sulla medesima, indichiamo con U l'area della curva luogo del fuoco della parabola tangente in F e F' alle rette MF, MF', con V l'area della curva (di 8° ordine) luogo della proiezione del centro dell'ellisse sull'asse della parabola suddetta, con E l'area dell'ellisse e con P quello della podaria del centro della sua evoluta. Dimostrare la relazione

$$\text{U} + 2\text{V} = \frac{\text{E}}{4} - \text{P}.$$

109. L'area della curva

$$r^2 = \frac{a^4\,\text{sen}^2\,\theta + b^4\cos^2\theta}{a^2\,\text{sen}^2\,\theta + b^2\cos^2\theta}$$

è uguale alla differenza fra l'area del circolo ortottico dell'ellisse dei semi assi a, b quelle dell'ellisse stessa.

Trovare una costruzione geometrica della curva stessa.

110. Si consideri un'ellisse e di centro O ed il suo circolo principale c. Essendo AB una corda di c tangente in M ad e, siano A', B i punti d'incontro della normale in M colle rette OA, OB. Il luogo dei punti A′, B′ si compone di due quartiche, ciascuna delle quali si compone di due ovali eguali. L'area di una di queste è $\frac{\pi a(a-b)}{2}$, essendo a, b i semiassi dell'ellisse e.

111. Essendo M un punto d'un'ellisse di centro O, C il corrispondente centro di curvatura, D il punto d'incontro di MC con la perpendicolare ad OM condotte per O, si dimostri che:

1) il luogo del punto medio di CD è un'ellisse;

2) il rapporto delle aree delle curve luoghi dei punti D, C è $^1/_3$.

112. Essendo M un punto variabile di un'ellisse di centro O, ciascuna delle bisettrici degli angoli formati dalla retta MO colla perpendicolare ad essa condotta per M inviluppa una curva chiusa unicursale, di cui l'area è la differenza fra la metà dell'area dell'ellisse e la sesta parte di quella della sua sviluppata.

113. 1) La corda comune ad un'ellisse fissa e al suo circolo osculatore in un punto variabile inviluppa una curva, la cui area è $^3/_2$ di quella dell'ellisse.

2) Il luogo dei punti medi delle corde suddette è una curva la cui area è metà di quella dell'ellisse.

3) La podaria del centro della curva precedente è una curva di cui l'area è uguale alla differenza fra l'area della podaria del centro dell'ellisse e il doppio dell'area del cerchio di raggio $\frac{ab}{a+b}$.

114. Si consideri un'ellisse e e la sua podaria p rispetto al centro O:

1) l'area della curva c polare reciproca di p rispetto ad e è eguale alla differenza fra l'area di e e $^1/_8$ dell'area della sua sviluppata;

2) la podaria della curva c rispetto ad O è una sestica la cui area è

$$U = \frac{\pi}{2(a^3+b^3)^3}[(a^4+b^4)^2+2a^3b^3(a^2+b^2)].$$

E.-N. Barisien.

(Continua)

PICCOLE NOTE

Sulla teoria dell'equivalenza e dell'equiestensione.

È noto che per confrontare le superficie piane a contorno curvilineo (rettilineo o circolare), e così per confrontare i solidi dei poliedri in generale e delle figure limitate da superficie piane e curve, non basta il concetto di *equivalenza* o *equiscomponibilità*.

I proff. ENRIQUES ed AMALDI nei loro *Elementi di geometria* introducono all'uopo i concetti di prevalente e suvvalente, e di superficie, o solidi, uguali, con le seguenti definizioni:

di due figure A e B si dice che la prima è *prevalente* alla seconda ($A > B$) e questa è *suvvalente* a quella ($B < A$) se tra le parti della prima si trovano tutte le parti della seconda e qualche altra in più; di due figure A e B si dice che esse hanno *superficie*, o *solidi, uguali* ($A = B$) se nessuna di esse è prevalente all'altra; (1)

e fondano la teoria di quelle classi di grandezze sul *postulato di* DE ZOLT *generalizzato*, e ancora — a partire dalla 2ª edizione — sul postulato complementare che qui enunciamo:

α) *Se di due figure la prima non è prevalente alla seconda, questa è prevalente ad una parte qualunque dell'altra.* (2)

Ora, questo postulato si presenta didatticamente alquanto oscuro, e di non facile uso per le deduzioni che se ne debbono trarre, tanto che gli autori lo hanno soppresso nelle ultime edizioni (5ª e 6ª) del libro citato, sostituendolo con tre proposizioni che di quel postulato sono conseguenza. (3)

Seguendo nella scuola come testo i predetti *Elementi*, trovai subito conveniente di sostituire al postulato α) il seguente postulato di più facile intuizione ed enunciazione, che gli è perfettamente equivalente: (4)

β) *Di tre figure* A, B, C, *se* A *non è prevalente a* B, *e* B *non è prevalente a* C, *sarà* A *non prevalente a* C.

Con facili dimostrazioni per assurdo dalla proporzione α) si deduce la β), e dalla β) si deduce la α).

Mediante il postulato β) si dimostrano in modo piano e rigoroso le seguenti posizioni I), ... VI), di cui nel libro citato si fa rapido e parziale accenno.

I) *Se* $A = B$ *e* $B = C$, *sarà* $A = C$ (postulato di n. 421 delle 5ª e 6ª ed.). Dimostrazione immediata.

II) *Se* $A > B$ *e* $B = C$ (*ovvero se* $A = B$ *e* $B > C$), *sarà* $A > C$.

Se fosse A non prevalente a C, per essere C non prevalente a C sarebbe A non prevalente a B, contro la prima ipotesi.

III) *Se* $A = A'$ *e* $B = B'$, *sarà* $A + B = A' + B'$ (postulato di n. 422).

Dimostrazione per assurdo: si supponga per esempio

$$A + B > A' + B';$$

avremo allora

$$A + B \text{ equiv } A' + B' + L,$$

ossia

$$A + B \text{ equiv } A' + B' + M + N \tag{1}$$

---

(1) Caso particolare di quest'ultima relazione è l'equivalenza o equiscomponibilità (A *equiv* B). Da queste definizioni e dalla teoria dell'equivalenza deriva immediatamente che delle tre relazioni $A > B$, $A < B$, $A = B$ sempre una ed una sola è verificata; e ancora, se A è prevalente a B, e B è prevalente a C, sarà A prevalente a C.

(2) ENRIQUES ed AMALDI, *Elementi di geometria*, 2ª ed., 1905, pp. 192-197, 393-395. Cfr. l'art. dell'AMALDI nelle *Questioni riguardanti le matematiche elementari* dell'ENRIQUES (vol. I, pp. 169, 179). Vedi pure: G. MARLETTA, *Trattato di geometria elementare* (1912), ove sono chiamate *equiestese* le figure piane aventi superficie uguali e le figure dello spazio aventi solidi uguali.

(3) Libro cit., 5ª ed. (1911), pp. 209, 540, 553. Nulla di variato della 6ª ed.

(4) Noto qui, per maggiore chiarezza, che date due figure A e B possono darsi due casi: o esiste o non esiste per esse una divisione in parti per la quale A è prevalente a B: nel secondo caso si potrà dire che A non è prevalente a B. *Praticamente*, rispetto alle superficie, quando A è prevalente a B, ciò può essere messo in evidenza col metodo dei quadratini esposto dagli E. ed A. nelle prime quattro edizioni degli *Elementi*.

essendo L *equiv* $M + N$; ma da $A' + M > A'$ e $A' = A$ si ha per II)

$$A' + M > A,$$

e analogamente

$$B' + N > B,$$

onde

$$A' + M + B' + N > A + B. \qquad (2)$$

Le relazioni (1) e (2) sono tra loro contraditorie, donde l'assurdo.

IV) *Se* $A > A'$ *e* $B = B'$ (*ovvero se* $A = A'$ *e* $B > B'$), *sarà* $A + B > A' + B'$ (postulato di n. 423).

Da $A > A'$ si deduce A *equiv* $A' + A''$, e quindi $A = A' + A''$, e per essere $B = B'$, avremo, per la III),

$$A + B = A' + A'' + B',$$

ma

$$A' + A'' + B' > A' + B',$$

onde per la II) avremo

$$A + B > A' + B'. \qquad \text{c. d. d.}$$

Definizione. — Se si ha la relazione $A = B + C$, cioè A ha superficie, o solido, ugnale alla somma $B + C$, si dice pure che A è la *somma* di B e C, e ancora si chiama C *differenza* di A e B scrivendo $C = A - B$.

V) *Se* $A = B + C$, *sarà* $A > B$ [corrisponde parzialmente al postulato α)].

Si supponga A non prevalente a B; allora da $B + C$ non prevalente ad A, e da A non prevalente a B, avremo, per β), $B + C$ non prevalente a B, che è assurdo.

VI) *Se* $A = A'$, $B = B'$ *e* $A > B$, *sarà* $A' > B'$ *ed* $A - B = A' - B'$ (n. 425).

Avremo

$$A \text{ equiv } B + C = B' + C,$$

onde essendo

$$A = A',$$

avremo per la I)

$$A' = B' + C$$

e quindi, per la V)

$$A' > B'.$$

Inoltre, si ponga $A = B + C$ ed $A' = B' + C'$, supponendo per esempio $C > C'$; da $B = B'$ e $C > C'$ si deduce per la IV)

$$B + C > B' + C',$$

e quindi

$$A = B + C > B' + C' = A',$$

e quindi, per la II), $A > A'$, che contradice all'ipotesi $A = A'$.

Senza difficoltà si dimostrano per le classi di grandezze considerate le ulteriori proprietà generali che sono richieste per la teoria delle proporzioni e per la teoria della misura.

Con questa noticina non ho avuto che l'intento didattico di portare qualche delucidazione su un punto notevole di un pregevole libro di testo che da dieci anni seguo nella scuola.

E. Maccaferri.

Di una proprietà della funzione indicatrice.

Nello studio della struttura di un campo di Galois, si trova che le sue $\varphi(p^n - 1)$ quantità primitive si scindono in $\frac{\varphi(p^n - 1)}{n}$ sistemi in modo che quelle di uno stesso sistema, sono radici di una congruenza di grado n irriducibile nel campo di razionalità:

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots (p-1).$$

Ciò porta di immediata conseguenza che:

$$\varphi(p^n - 1) \equiv 0. \qquad (\text{mod. } n)$$

Non avendo trovato una dimostrazione diretta di tale proprietà, non mi sembra inutile far conoscere la seguente che si raccomanda, oltre che per la semplicità, perchè viene a porgere un altro esempio della fecondità del concetto di gruppo.

Posto $p^n - 1 = q$, sieno:

$$r_1, \quad r_2, \ldots r_{\varphi(q)} \tag{1}$$

i $\varphi(q)$ numeri inferiori a q e primi con esso ai quali possiamo sostituire altri rispettivamente congrui ad essi (mod. q).

Poichè il prodotto di due fattori primi con q è pure primo con q, segue che i numeri (1) formano un gruppo $G_{\varphi(q)}$. Tra i numeri (1) ve ne saranno n eguali o congrui (mod. q) alle potenze

$$p^0 = 1, \quad p, \quad p^2, \ldots p^{n-1} \tag{2}$$

e poichè il prodotto di due qualunque dei numeri (2) è congruo (mod. q) ad uno degli stessi, ne viene che essi pure costituiscono un gruppo G_n sottogruppo di $G_{\varphi(q)}$. Ma l'ordine di un sottogruppo è divisore di quello del gruppo, per cui:

$$\varphi(q) \equiv 0. \qquad (\text{mod. } n)$$

U. Scarpis.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 804, 807 E 808

804. *Dato un sistema di coniche omofocali S, trovare:*

a) *l'inviluppo delle polari di un punto* (α, β);

b) *il luogo del polo di una retta* (u, v);

c) *l'inviluppo delle normali tali che le tangenti ai punti d'incidenza passino per un punto fisso* (α, β).

Neppi Modona.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

1°. *Caso di un sistema di coniche centrali omofocali.*

a) L'equazione cartesiana di una conica S_λ di S è

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0,$$

e l'equazione della polare p_λ del punto $P(\alpha, \beta)$ è:

$$\frac{x\alpha}{a^2+\lambda} + \frac{y\beta}{b^2+\lambda} - 1 = 0. \tag{1}$$

Col procedimento noto si trova l'equazione dell'inviluppo delle rette p_λ:

$$(\alpha x + \beta y)^2 - 2(a^2 - b^2)(\alpha x - \beta y) + (a^2 - b^2)^2 = 0. \tag{a'}$$

Questa curva è una parabola che tocca l'asse delle x nel punto di ascissa $x = \frac{a^2 - b^2}{\alpha}$ e l'asse delle y nel punto di ordinata $y = -\frac{a^2 - b^2}{\beta}$.

Facilmente si può trovare l'equazione plückeriana dell'inviluppo di p_λ; dalla (1) si ha:

$$u = -\frac{\alpha}{a^2+\lambda}, \qquad v = -\frac{\beta}{b^2+\lambda};$$

eliminando λ fra queste relazioni si ottiene l'equazione richiesta:

$$(a^2 - b^2)uv - \beta u + \alpha v = 0. \tag{a}$$

b) L'equazione della polare del punto (ξ, η) è:

$$\frac{x\xi}{a^2+\lambda} + \frac{y\eta}{b^2+\lambda} - 1 = 0,$$

dunque le coordinate plückeriane di questa polare sono:

$$u = -\frac{\xi}{a^2+\lambda}, \qquad v = -\frac{\eta}{b^2+\lambda};$$

eliminando λ fra queste relazioni si ottiene:

$$(a^2 - b^2)uv - \eta u + \xi v = 0. \tag{b}$$

Il luogo del polo della retta (u, v) è dunque una retta che ha per coordinate plückeriane i valori:

$$u_1 = \frac{1}{u(a^2 - b^2)}, \qquad v_1 = -\frac{1}{v(a^2 - b^2)}. \tag{b'}$$

Dalle equazioni (*a*) e (*b*) segue che le curve (*a*) e (*b*) si corrispondono dualmente.

c) Sia (ξ, η) il punto in cui la tangente passante pel punto (α, β) tocca la conica S_λ. Si hanno le relazioni:

$$\frac{\alpha\xi}{a^2+\lambda} + \frac{\beta\eta}{b^2+\lambda} - 1 = 0, \quad (2) \qquad \frac{\xi^2}{a^2+\lambda} + \frac{\eta^2}{b^2+\lambda} - 1 = 0; \quad (3)$$

e l'equazione della normale n_λ nel punto (ξ, η) è:

$$x(\alpha - \xi) + y(\beta - \eta) = \xi(\alpha - \xi) + \eta(\beta - \eta). \tag{4}$$

Cerchiamo l'equazione in coordinate plückeriane dell'inviluppo delle rette n_λ. Dalla (4), si hanno le relazioni:

$$u = -\frac{\alpha - \xi}{\xi(\alpha - \xi) + \eta(\beta - \eta)}, \qquad v = -\frac{\beta - y}{\xi(\alpha - \xi) + \eta(\beta - \eta)},$$

da cui:

$$\xi = \frac{\alpha v^2 - \beta uv - u}{u^2 + v^2}, \qquad \eta = \frac{\beta u^2 - \alpha uv - v}{u^2 + v^2}. \tag{5}$$

Eliminando λ fra le equazioni (2) e (3) si ricava:

$$a^2 - b^2 = \frac{\xi(\alpha - \xi) + \eta(\beta - \eta)}{(\alpha - \xi)(\beta - \eta)}(\beta\xi - \alpha\eta),$$

ed usando i valori (5) si trova l'equazione richiesta:

$$(a^2 - b^2)\,uv\,(\alpha u + \beta v + 1) + \alpha\beta\,(v^2 - u^2) + (\alpha^2 - \beta^2)\,uv + \alpha u - \beta v = 0. \qquad (c)$$

L'inviluppo è dunque una curva di 3^a classe.

2°. *Caso di un sistema di parabole omofocali.*

L'equazione:

$$y^2 = \lambda^2 + 2\lambda x$$

rappresenta il sistema di parabole omofocali; i fuochi sono: l'origine ed il punto all'infinito dell'asse delle x.

a) Noi troviamo mediante il procedimento precedente che l'equazione in coordinate plückeriane dell'inviluppo delle polari di un punto (α, β) è:

$$\beta u^2 - \alpha uv + v = 0. \qquad (a)$$

e che la sua equazione in coordinate cartesiane è:

$$(\alpha + x)^2 + 4\beta y = 0. \qquad (a')$$

Quest'equazione rappresenta una parabola che ha per tangente nel suo vertice $x = -\alpha$ l'asse delle x: essa è dalla parte negativa delle x e ha 2β per parametro.

b) Come equazione del luogo del polo di una retta (u, v) si trova:

$$\eta u^2 - \xi uv + v = 0, \qquad (b)$$

una retta che ha per coordinate plückeriane:

$$u_1 = -u, \qquad v_1 = \frac{u^2}{v}. \qquad (b')$$

Le linee (*a*) e (*b*) si corrispondono dualmente.

c) L'equazione in coordinate plückeriane della curva richiesta, che si trova analogamente al caso precedente, è:

$$\alpha v^2 - \beta uv + u = 0. \qquad (c)$$

e l'equazione in coordinate cartesiane è:

$$(\beta + y)^2 + 4\alpha x = 0. \qquad (c')$$

La curva è una parabola che ha per tangente nel suo vertice $y = -\beta$ l'asse delle y; essa è della parte negativa dell'asse y e ha 2α per parametro.

807. *Si consideri un circolo di centro* O *e raggio* r, *e l'asteroide che ha per punti di regresso gli estremi di due diametri* AB, CD *ortogonali di detto circolo. Siano* E, F *i punti di mezzo degli archi* AC, CB *del circolo, ed* M *il punto d'incontro del circolo tangente internamente in* E *al circolo dato e di raggio* $\frac{r}{4}$ *col circolo di diametro* EF. *Il circolo di centro* O *e di raggio* OM *incontra l'asteroide in otto punti reali. Dimostrare che le tangenti in questi punti all'asteroide sono anche normali alla curva.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

Prendiamo i due diametri AB, CD per assi delle coordinate cartesiane x, y; le equazioni parametriche dell'asteroide sono:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos^3\varphi \\ y = r\,\text{sen}^3\varphi \end{array}\right\}, \tag{1}$$

dove $(-\varphi)$ indica l'angolo formato dall'asse x e dalla tangente all'asteroide nel punto P che ha per parametro φ.

L'equazione della tangente nel punto P è:

$$\frac{\xi}{\cos\varphi} + \frac{\eta}{\text{sen}\,\varphi} = r. \tag{2}$$

Sia

$$\left.\begin{array}{l} \xi = r\cos^3\psi \\ \eta = r\,\text{sen}^3\psi \end{array}\right\} \tag{3}$$

il punto d'incontro di questa tangente coll'asteroide dato. La tangente in questo punto Q è ortogonale a quella nel punto P, se si ha:

$$\psi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}\cdot \tag{4}$$

Dalle (4), (3) e (2) otteniamo

$$\frac{\cos^3\varphi}{\text{sen}\,\varphi} - \frac{\text{sen}^3\varphi}{\cos\varphi} = 1;$$

ovvero

$$tg\,2\varphi = 2. \tag{5}$$

Ma, si ha:

$$\overline{OP}^2 = r^2(\cos^6\varphi + \text{sen}^6\varphi) = \overline{OQ}^2,$$

e poi dalla (5) si trae:

$$\cos^2\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \qquad \text{sen}^2\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}};$$

dunque è

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 = \frac{2}{5}r^2. \tag{6}$$

808. *È dato un circolo* c *ed una sua tangente fissa* t. *Essendo* P *la proiezione su* t *di un punto* M *mobile su* C, *dimostrare che l'inviluppo dei circoli di diametro* MP *è una curva, la cui area è* $\frac{5}{3}$ *di quella del circolo* c.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

L'equazione del circolo di diametro MP rispetto al sistema che è formato da t e dal diametro di c perpendicolare a t è:

$$x^2 + y^2 - 2r\cos\omega \,.\, x - r(1 + \text{sen}\,\omega)\,y + r^2\cos^2\omega = 0, \tag{1}$$

dove ω è l'angolo fra t e CM (C è il centro del circolo dato c).

Per differenziazione rispetto ad ω si trova:

$$2\,\text{sen}\,\omega \,.\, x - \cos\omega \,.\, y - r\,\text{sen}\,2\omega = 0. \tag{2}$$

Dalle (1) e (2) si trae:

$$x = r\cos\omega + \frac{y}{2}\cot g\,\omega, \quad (3) \qquad y = \frac{4r\,\text{sen}^2\omega\,(1+\text{sen}\,\omega)}{1+3\,\text{sen}^2\omega}\cdot \quad (4)$$

Da cui, per derivazione, si trova:

$$\frac{dx}{d\omega} = r \,.\, \frac{(1 - 5\,\mathrm{sen}^2\,\omega)\,(2 + 3\,\mathrm{sen}\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^3\,\omega)}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\,, \tag{5}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = r \,.\, \frac{2\,\mathrm{sen}\,2\omega\,(2 + 3\,\mathrm{sen}\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^3\,\omega)}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\,. \tag{6}$$

Se ne deduce:

$$dS = \left(x\frac{dy}{d\omega} - y\frac{dx}{d\omega}\right) d\omega = 4r^2 \frac{\mathrm{sen}\,\omega\,(1 + \mathrm{sen}\,\omega)\,(2 + 3\,\mathrm{sen}\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^3\,\omega)}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2} \,.\, d\omega,$$

e dunque:

$$S = 4r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2\,\mathrm{sen}\,\omega + 5\,\mathrm{sen}^2\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^3\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^4\,\omega - 3\,\mathrm{sen}^5\,\omega}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\, d\omega.$$

Poichè:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^{2n+1}\,\omega}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\, d\omega = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^{2n}\,\omega}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\, d\omega = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{sen}^{2n}\,\omega}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\, d\omega,$$

dove n è un numero intero, possiamo scrivere:

$$S = 8r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5\,\mathrm{sen}^2\,\omega + 3\,\mathrm{sen}^4\,\omega}{(1 + 3\,\mathrm{sen}^2\,\omega)^2}\, d\omega = 8r^2\, \mathrm{I}.$$

Poniamo $\mathrm{sen}\,\omega = u$, si ha:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 \frac{5u^2 + 3u^4}{(1 + 3u^2)^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\,\frac{9u^2 - 1}{(1 + 3u^2)^2}\right) \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2} + \int_0^1 \frac{9u^2 - 1}{(1 + 3u^2)^2}\,\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2} - 4\int_0^1 \frac{du}{(1 + 3u^2)^2\sqrt{1 - u^2}} + 3\int_0^1 \frac{du}{(1 + 3u^2)\sqrt{1 - u^2}}\right]$$

poniamo $1 + 3u^2 = z$, si ha:

$$\mathrm{I} = \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\int_1^4 \frac{dz}{z\sqrt{(z - 1)(4 - z)}}\right] = \frac{5\pi}{24}\,,$$

e dunque:

$$S = 8r^2 \,.\, \frac{5\pi}{24} = \frac{5}{3} \,.\, (\pi r^2). \qquad \text{q. e d.}$$

BIBLIOGRAFIA

Annuaire pour l'an 1914, publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

Questo interessantissimo volumetto che il *Bureau des longitudes* pubblica regolarmente ogni anno fino dal 1796, contiene quest'anno i quadri relativi alla Fisica e alla Chimica, interamente riveduti e rimessi a giorno dai sigg. RAVEAU e MARIE in armonia con la *Raccolta di costanti fisiche*, pubblicata nel 1913 dalla *Società francese di fisica*.

La parte astronomica con la quale si apre il volume, comprende le nozioni più importanti sopra i calendari in uso presso i diversi popoli civili, numerose tavole astronomiche, articoli relativi alla costituzione fisica della Luna, alla sismologia, alla fisica solare, ecc.

Alla fine del volume si trovano i seguenti articoli:

1°. HATT, *La deformazione delle imagini nelle lenti*. — 2°. BIGOURDAN, *Il giorno e le sue divisioni - I fusi orari e l'associazione internazionale dell'ora*. — 3°. BAILLAUD, *Notizia sulla 17ª conferenza generale dell'Associazione geodetica internazionale*.

Il secondo di questi è particolarmente interessante; esso è una storia dei vari mezzi escogitati dall'uomo per la misura del tempo, cominciando dalla più remota antichità e terminando ai segnali emessi dalla torre Eiffel.

K.

VIVANTI. — *Esercizi di analisi infinitesimale*. Pavia, Battei, 1913.

Nella prefazione il valoroso Autore così espone i concetti che gli furono di guida nella compilazione di questa ottima raccolta di 575 esercizî:

« Due quistioni fondamentali mi si affacciarono sin da principio: quale dovesse essere il carattere generale degli esercizi da scegliere; e se essi dovessero o no essere accompagnati dalla soluzione.

« Quanto al primo punto, io avrei voluto cercare la maggior parte delle quistioni da proporre nel vasto campo delle Matematiche applicate, e particolarmente della Meccanica e della Fisica, inteso nel senso più ampio; ciò avrebbe reso più interessante lo studio del libro ed avrebbe insinuato nei giovani la persuasione dell'utilità pratica di ciò che ad essi potrebbe altrimenti sembrare mera astrazione. Ma a far questo sarebbe stato necessario interpolare tutte quelle nozioni estranee alle Matematiche pure, che coloro, i quali si dedicano ad un primo studio del calcolo, in generale non possiedono; il che avrebbe accresciuto di non poco la mole del libro, ne avrebbe alterata l'omogeneità, ed avrebbe aggiunto nuove difficoltà a quelle inerenti all'Analisi stessa. Ho pertanto rinunciato a tale idea, limitandomi a spigolare, il più largamente possibile, nel campo della Geometria, la sola scienza d'applicazione di cui si possa presumere una certa conoscenza negli allievi del primo biennio universitario.

« Quanto al secondo punto, io penso che una collezione di esercizi, più che a fornire problemi agli studiosi, debba tendere ad insegnar loro la via di risolverli; e che l'idea di poter riscontrare nel libro la trattazione d'un problema, anzichè distogliere l'allievo dal tentarla per conto proprio, l'incoraggi anzi a farlo per la possibilità di controllare infine il suo operato. Ho quindi fatto seguire ciascun esercizio dalla soluzione, più o meno sviluppata a seconda dei casi „.

La scelta degli esercizi è buona, e le soluzioni sono ben fatte, con giusta sobrietà e chiarezza. L'ordine delle materie è quello stesso adottato dall'A. nel suo *Trattato di analisi infinitesimale*, uno dei primi nei quali è stata adottata la fusione del calcolo differenziale con l'integrale.

K.

LORIA GINO. — *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Seconda edizione totalmente riveduta. Manuali Hoepli, Milano, 1914.

Quest'opera importantissima è ben nota da tempo ai cultori della matematica, ed ha contribuito al risveglio degli studi di storia della scienza, che si è verificato in Italia e fuori, negli ultimi due decenni.

Fu pubblicata per la prima volta in vari volumi delle *Memorie dell'Accademia di Modena* dal 1893 al 1902, e fu giustamente apprezzata dai matematici. Disgraziatamente la poca diffusione di quelle *Memorie* non consentirono che l'opera fosse universalmente conosciuta, come sarebbe stato desiderabile: ormai era diventata una vera rarità bibliografica; ottimamente dunque ha fatto il solerte editore Hoepli ad accogliere nella sua bella collezione di manuali la seconda edizione di questo libro che l'illustre autore ha diligentemente riveduta e migliorata.

Come chiaramente dice il titolo stesso, il libro è un quadro dell'opera matematica degli antichi Greci, così compiuto e perfetto quanto si può desiderare, tenendo conto della imperfezione delle nostre conoscenze su quelle antiche età e dei documenti che sono pervenuti fino a noi. Tutti sanno più o meno vagamente che tre secoli prima dell'Era volgare la Geometria era già arrivata ad una tale altezza che gli *Elementi* di EUCLIDE poterono continuare ad esser libro di testo fino ai giorni nostri; tutti sanno che i germi della maggior parte delle concezioni moderne si trovano in germe nelle opere dei Greci; ma la gran maggioranza ignora come ed in quale misura. Nel libro del LORIA, frutto di lungo studio e grande amore tutti possono con poca fatica appagare il desiderio innato di conoscere quanto fecero gli antichi, fino a qual punto essi giunsero con le loro speculazioni scientifiche. Gl'insegnanti delle scuole medie non solo troveranno in esso una lettura molto istruttiva e dilettevole insieme, ma vi troveranno anche una quantità di notizie curiose ed interessanti che permetteranno loro, opportunamente usate nella scuola, a rendere l'insegnamento gradevole e meno pesante, con sollievo di loro stessi e degli scolari.

L'opera di quasi mille pagine si divide in cinque libri come segue:

Libro I. — *I geometri greci precursori d'Euclide.*
„ II. — *Il periodo aureo della geometria greca.*
„ III. — *Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci.*
„ IV. — *Il periodo argenteo della geometria greca.*
„ V. — *L'aritmetica dei Greci.*

Un accurato indice alfabetico delle materie rende facili le ricerche a chi voglia consultare il libro per argomenti speciali.

K.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 12 Marzo 1914.

Sulle equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine a coefficienti costanti e su alcune particolari equazioni ricorrenti lineari di ordine superiore al 2°.

Oggetto di questa nota è una esposizione completa della teoria delle equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine a coefficienti costanti, deducendo le formole più importanti da considerazioni riguardanti gli sviluppi di $(a+b)^1$, $(a+b)^2$.... Una immediata generalizzazione del metodo seguito ci permetterà di studiare alcune classi particolari di equazioni lineari ricorrenti di ordine superiore al 2° ed a coefficienti costanti. Tale studio metterà in chiaro che l'equazione generale ricorrente lineare del 2° ordine a coefficienti costanti è caso speciale non solo dell'equazione di ordine m, ma anche di una forma particolare perfettamente determinata di tale equazione. Risulterà pure che, almeno per lo svolgimento della teoria delle equazioni lineari del 2° ordine e di altre di ordine superiore delle quali esse sono caso particolare, la considerazione dell'equazione caratteristica non è necessaria. Tuttavia di questa ci occuperemo brevemente sia per mostrare che si può per altra via giungere ai medesimi risultati, sia più specialmente per stabilire alcune importanti relazioni tra le costanti ed i valori iniziali delle soluzioni dell'equazione generale ricorrente del 2° ordine. Considerazioni particolari riguarderanno poi alcune forme di equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine notevoli per le loro proprietà.

I. — Espressione del termine generale di una soluzione dell'equazione ricorrente del 2° ordine in funzione dei coefficienti e dei valori iniziali. Relazioni tra due termini consecutivi di una medesima soluzione.

L'equazione ricorrente lineare d'ordine n a coefficienti costanti, può mettersi sotto la forma:

$$u_m = p_1 u_{m-1} + p_2 u_{m-2} + \ldots + p_{n-1} u_{m-n+1} + p_n u_{m-n} \qquad (1)$$

$p_1, p_2, \ldots p_n$, essendo n numeri costanti (coefficienti). Dicesi soluzione dell'equazione ogni successione di numeri u_1, u_2, tali che $n+1$

consecutivi di essa $u_{m-n}, \dots u_{m-1}, u_m$ verifichino l'equazione. Tra le proprietà [1] di tale equazione ha per noi speciale importanza la seguente che è nota: Se $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots u_m^{(1)} \dots$ è la soluzione determinata dagli n valori iniziali $1, 0, 0, \dots, 0; \dots; u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots u_m^{(i)} \dots$ quella determinata dagli n valori iniziali $0, 0, \dots 1 \dots 0, 0$, l' i^{mo} dei quali vale 1, mentre i rimanenti sono tutti nulli, ... infine $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots u_m^{(n)}$ la soluzione determinata dagli n valori iniziali $0, 0, \dots 0, 1$, ed è $u_1, u_2, \dots u_m, \dots$ una soluzione generale determinata dagli n valori iniziali $u_1, u_2 \dots u_n$, si ha, per $m > n$, la relazione:

$$u_m = u_n u_m^{(n)} + u_{n-1} u_m^{(n-1)} + \dots + u_2 u_m^{(2)} + u_1 u_m^{(1)} \dots \qquad (2)$$

che permette di esprimere l'm^{mo} termine della successione $u_1, u_2, \dots u_m \dots$ in funzione degli m^{mi} termini delle n successioni in $u_1^{(i)}, u_2^{(i)} \dots u_m^{(i)}$, $(i = 1, 2 \dots n)$, e degli n valori iniziali $u_1, u_2, \dots u_n$ [2].

È importante per quel che segue un'applicazione della (2).

---

(1) Un'esposizione delle proprietà principali delle equazioni ricorrenti lineari a coefficienti costanti trovasi ad es. in *Lezioni di Algebra complementare* del prof. PINCHERLE. Bologna, 1909.

(2) Come applicazione della (2) giova osservare quanto segue:

Poniamo l'equazione ricorrente lineare del 2° ordine a coefficienti costanti, sotto la forma:

$$u_m = p u_{m-1} + q u_{m-2}$$

q essendo diverso da zero. Sia $u_1, u_2, \dots$ una soluzione di essa, determinata dai valori iniziali u_1, u_2; $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots$ quella determinata dai valori iniziali $1, 0$; $u_1^{(2)}, u_1^{(2)}, \dots$ quella determinata dai valori iniziali $0, 1$. La successione delle $u^{(1)}$ è:

$$1,\ 0,\ q,\ pq,\ p^2q + q^2,\ p^3q + 2pq^2,\ p^4q + 3p^2q^2 + q^3,\ \dots \dots \dots \quad (u^{(1)})$$

e quella delle $u^{(2)}$ è:

$$0,\ 1,\ p,\ p^2 + q,\ p^3 + 2pq,\ p^4 + 3p^2q + q^2,\ p^5 + 4p^3q + 3pq^2,\ \dots \dots \quad (u^{(2)})$$

Si vede subito che:

$$u_m^{(1)} = q\, u_{m-1}^{(2)}.$$

La legge di formazione dei coefficienti delle $u^{(2)}$ si scopre facilmente: Si ha:

$$u_m^{(2)} = \sum_{i=1}^{E\frac{m}{2}} \binom{m-i-1}{i-1} p^{m-2i} q^{i-1}.$$

La (2) ci permette di scrivere:

$$u_m = u_2 u_m^{(2)} + u_1 u_m^{(1)} = u_2 u_m^{(2)} + q u_1 u_{m-1}^{(2)}$$

epperò:

$$u_m = u_2 \sum_{i=1}^{E\frac{m}{2}} \binom{m-i-1}{i-1} p^{m-2i} q^{i-1} + u_1 \sum_{i=1}^{E\frac{m-1}{2}} \binom{m-i-2}{i-1} p^{m-2i-1} q^{i}$$

che serve ad esprimere u_m mediante potenze dei coefficienti p, q. Formole che servono ad esprimere il termine generale di una successione che risolva un'equazione lineare del 2° ordine, mediante le potenze dei coefficienti costanti, si trovano in *Theorie des nombres* del LUCAS nel capitolo *Les fonctions numériques du second ordre*. Ivi l'equazione ricorrente del 2° ordine è messa sotto la forma

$$v_m = p v_{m-1} - q v_{m-2}$$

Siano $v_1^{(i)}, \ldots v_2^{(i)}, \ldots v_m^{(i)} \ldots (i = 1, 2, \ldots, n+1)$, $n+1$ successioni soddisfacenti all'equazione (1) e determinate dagli n valori iniziali, $v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots v_n^{(i)}$. Sia il determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_n^{(1)} \ldots v_2^{(1)} v_1^{(1)} \\ \vdots \\ v_n^{(n)} \ldots v_2^{(n)} v_1^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0 \ (^1)$$

ed indichiamo con $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$; i determinanti ottenuti da Δ sostituendo agli elementi della $1^a, 2^a, \ldots n^{ma}$, verticale i numeri $v_m^{(1)}, v_m^{(2)}, \ldots v_m^{(n)}$. Per la (2) si ha:

$$\begin{aligned} v_m^{(1)} &= v_n^{(1)} u_m^{(n)} + \ldots + v_1^{(1)} u_m^{(1)} \\ &\vdots \\ v_m^{(n)} &= v_n^{(n)} u_m^{(n)} + \ldots + v_1^{(n)} u_m^{(1)} \\ v_m^{(n+1)} &= v_n^{(n+1)} u_m^{(n)} + \ldots + v_1^{(n+1)} u_m^{(1)}. \end{aligned}$$

Epperò, eliminando $u_m^{(1)}, u_m^{(2)}, \ldots u_m^{(n)}$:

$$v_m^{(n+1)} = \frac{1}{\Delta} \left(v_n^{(n+1)} \Delta_1 + v_{n-1}^{(n+1)} \Delta_2 + \ldots + v_1^{(n+1)} \Delta_n \right). \qquad (3)$$

In questa il 2° membro è funzione lineare di $v_m^{(1)}, v_m^{(2)}, \ldots v_m^{(n)}$ e precisamente posto:

$$D = \begin{vmatrix} v_1^{(1)} \ldots v_n^{(1)} \\ \vdots \\ v_1^{(n)} \ldots v_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

e detti $D_1, D_2, \ldots D_n$ i determinanti ottenuti da D sostituendo gli elementi della $1^a, 2^a, \ldots n^{ma}$ orizzontale con $v_1^{(n+1)}, v_2^{(n+1)}, \ldots v_n^{(n+1)}$, si ha:

$$v_m^{(n+1)} = \frac{1}{D} \left(v_m^{(1)} D_1 + v_m^{(2)} D_2 + \ldots + v_m^{(n)} D_n \right). \qquad (4)$$

---

e detti $v_0^{(2)}, v_1^{(2)}, v_2^{(2)} \ldots$ i termini della successione che risolve l'equazione e che è determinata dai valori iniziali $v_0^{(2)} = 0$, $v_1^{(2)} = 1$, è data una formola che può anche scriversi:

$$v_m^{(2)} = \sum_{0}^{E\frac{m-1}{2}} r \ (-1)^r \binom{m-r-1}{r} p^{m-2r-1} q^r$$

che coincide con quella sopra riportata per esprimere $u_m^{(2)}$, dopo aver sostituito $m+1$ ad m e $-q$ a q —. Il Lucas si occupa anche dell'espressione in funzione di potenze di p e q del termine generale w_n della successione determinata dai valori iniziali 2, p e risolvente l'equazione $v_m = pv_{m-2}$ e trova una formola che può scriversi:

$$w_m = p^m + \sum_{1}^{E\frac{m}{2}} r \ (-r)^r \frac{m}{r} \binom{m-r-1}{r-1} p^{m-2r} q^r$$

(1) Tal è, come è noto, la condizione n, e, s, affinchè le n soluzioni corrispondenti ad $i = 1, 2, \ldots n$, siano linearmente indipendenti.

* * *

Veniamo ora alle equazioni ricorrenti del 2° ordine.

Essendo a e b numeri reali non contemporaneamente nulli, consideriamo gli sviluppi:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^4 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Sia $u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ la successione nella quale u_n è la somma dei termini di posto dispari (i posti essendo contati da sinistra a destra) dello sviluppo di $(a+b)^n$, e $v_1, v_2, \ldots v_n \ldots$ la successione nella quale v_n è la somma dei termini di posto pari, divisi per b, dello sviluppo di $(a+b)^n$. Le due successioni sono adunque:

$$a,\ a^2+b^2,\ a^3+3ab^2,\ a^4+6a^2b^2+b^4,\ a^5+10a^3b^2+5ab^4, \ldots \quad (u)$$
$$1,\ 2a,\ 3a^2+b^2,\ 4a^3+4ab^2,\ 5a^4+10a^2b^2+b^4, \ldots\ldots \quad (v)$$

È agevole constatare che per $n>2$ si ha:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= 2au_{n-1} + (b^2-a^2)\, u_{n-2} \\ v_n &= 2av_{n-1} + (b^2-a^2)\, v_{n-2} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Risulta pertanto:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \sum_{0,2,4,\ldots n'} i \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \\ v_n &= \frac{1}{b} \sum_{1,3,5,\ldots n''} i \binom{n}{i} a^{n-i} b^i \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

nelle quali n' ed n'' rappresentano i massimi interi, rispettivamente pari e dispari, non superiori ad n. Risulta inoltre facilmente che sussistono le seguenti relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
u_n + bv_n &= (a+b)^n \\
u_n - bv_n &= (a-b)^n \\
u_n + av_n &= v_{n+1} \\
u_n - av_n &= (b^2-a^2)\, v_{n-1} \\
au_n + b^2v_n &= u_{n+1} \\
(b^2-a^2)^2\, v_{n-2} &= (a^2+b^2)\, v_n - 2au_n
\end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Dalle prime due si ha:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2} \\ v_n &= \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2b} \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

delle quali la 2ª è valida soltanto se $b \neq 0$.

Dalla 1ª e 3ª delle (7), sottraendo e cambiando poi n in $n-1$, si ha:

$$v_n = (a+b)^{n-1} - (b-a)\, v_{n-1}\,.$$

Dalla 2ª e 3ª si ha:

$$v_n = (a-b)^{n-1} + (a+b)\, v_{n-1}$$

che può anche dedursi dalla precedente cambiando b in $-b$.

Dalla 1ª e 5ª si ha:

$$u_n = (a+b)^{n-1} b + (a-b)\, u_{n-1}\,.$$

E dalla 2ª e 5ª:

$$u_n = (a+b)\, u_{n-1} - b\,(a-b)^{n-1}\,. \qquad (7')$$

Adunque: *ciascuna delle (u) o (v) è funzione lineare di 1° grado della precedente, essendo costante il coefficiente di questa.*

Sia ora l'equazione ricorrente lineare del 2° ordine:

$$\eta_n = p\eta_{n-1} + q\eta_{n-2} \qquad (9)$$

q essendo diverso da zero, e sia $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m \ldots$ una soluzione di essa determinata dai valori iniziali η_1, η_2. Volendo esprimere η_n in funzione di n, p, q, η_1, η_2 si determinino a e b per modo che:

$$\left.\begin{aligned} &p = 2a\,; && q = b^2 - a^2. \\ \text{Sarà:}\quad &a = \frac{p}{2}\,; && b = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4q+p^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (10)$$

La successione $u_1, u_2 \ldots$ i cui valori iniziali sono $u_1 = a$, $u_2 = a^2 + b^2$, e la successione $v_1, v_2, \ldots$ i cui valori iniziali sono $v_1 = 1$, $v_2 = 2a$, risolvono allora l'equazione (9), alla quale si riducono le equazioni ricorrenti (5), dopo le posizioni stabilite dalle (10). Si ha pertanto, a e b essendo determinate in funzione di p e q come mostrano le (10):

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2}$$
$$v_n = pv_{n-1} + qv_{n-2}\,.$$

Epperò assumendo ad es. $b = +\frac{1}{2}\sqrt{4q+p^2}$, risulta dalle (6):

$$u_n = \frac{1}{2^n} \underset{0,2,\ldots n'}{\Sigma i} \binom{n}{i} p^{n-i} (4q+p^2)^{\frac{i}{2}}$$

$$v_n = \frac{1}{2^{n-1}} \underset{1,3,\ldots n''}{\Sigma i} \binom{n}{i} p^{n-i} (4q+p^2)^{\frac{i-1}{2}}$$

le quali, poichè gli esponenti di $b = \frac{1}{2}\sqrt{4q + p^2}$ sono pari, sussistono inalterate se si pone $b = -\frac{1}{2}\sqrt{4q + p^2}$. (¹) Essendo p e q reali, come naturalmente supponiamo, a è sempre reale, ma b può essere immaginario: tuttavia, essendo pari gli esponenti di $(4q + p^2)^{\frac{1}{2}}$ nella 1^a e dispari nella 2^a, u_n e v_n risulteranno reali, talchè le due formole sono valide in ogni caso. Ciò risulta anche dal fatto che possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{p}{2}\right)^n \sum_{0,\,2,\ldots n'} i \binom{n}{i} r^{\frac{i}{2}} \\ v_n &= \left(\frac{p}{2}\right)^{n-1} \sum_{1,\,3,\ldots n''} i \binom{n}{i} r^{\frac{i-1}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

essendo $r = \frac{4q + p^2}{p^2}$. Il numero r, verrà chiamato *base dell'equazione ricorrente* (9). (²) Si ha $a = \frac{p}{2}$, e risulta poi evidentemente $b = \frac{p}{2}\sqrt{r}$. Pertanto le (8) possono scriversi:

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{p^n}{2^{n+1}}\left[(1+\sqrt{r})^n + (1-\sqrt{r})^n\right] \\ v_n &= \frac{p^{n-1}}{2^n\sqrt{r}}\left[(1+\sqrt{r})^n - (1-\sqrt{r})^n\right] \end{aligned}\right\}. \qquad (8')$$

Le (11) e la 1^a delle (8') sono valide anche se $r = 0$; la 2^a delle (8') è invece valida per $r \neq 0$.

Volendo ora esprimere η_n in funzione di p e q, basterà esprimerlo in funzione di u_n e v_n e dei valori iniziali η_1, η_2, poichè u_n e v_n sono appunto funzioni di p e q. Per le proprietà generali delle equazioni ricorrenti lineari a coefficienti costanti, (formola (4)), si ha:

$$\eta_n = \eta_2 \frac{\begin{vmatrix} u_n & a \\ v_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a \\ 2a & 1 \end{vmatrix}} + \eta_1 \frac{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & u_n \\ 2a & v_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 + b^2 & a \\ 2a & 1 \end{vmatrix}}$$

ovvero

$$\eta_n = \frac{1}{a^2 - b^2}\left\{(2a\eta_1 - \eta_2)\,u_n + \left[a\eta_2 - (a^2 + b^2)\,\eta_1\right] v_n\right\} \qquad (12)$$

(¹) Anche le (8) mostrano che u_n e v_n non cambiano cambiando b in $-b$ —. Perciò in tutta la rimanente parte di questo lavoro assumeremo sempre $b = +\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$.

(²) Le equazioni ricorrenti (9) potrebbero classificarsi a seconda della natura della base r. Molte ipotesi particolari, come vedremo in seguito, sono possibili.

Un criterio di classificazione sarebbe offerto ad es. dalla relazione $r \gtreqless 0$ ovvero $4q + p^2 \gtreqless 0$. È a notarsi che secondochè $r \gtreqless 0$, b risulta reale, nullo od immaginario.

la quale serve ad esprimere η_n in funzione di η_1, η_2, u_n, v_n e quindi di η_1, η_2, p, q. (Si noti che essendo $q \neq 0$ è pure $a^2 - b^2 \neq 0$).

Se $a = 0$, $b \neq 0$ si ha: $u_n = b^n$ se n è pari; $u_n = 0$ se n è dispari.

Inoltre $v_n = 0$ se n è pari; $v_n = b^{n-1}$ se n è dispari. Quindi poichè è $p = 0$; $b = \sqrt{q}$, la (12) diventa:

$$\left.\begin{aligned} \eta_n &= \eta_2\, q^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{se } n \text{ è pari} \\ \eta_n &= \eta_1\, q^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{se } n \text{ è dispari} \end{aligned}\right\}. \tag{12'}$$

Se $a \neq 0$, $b = 0$ e quindi $p^2 + 4q = 0$, si ha:

$$u_n = a^n,\; v_1 = g,\; v_2 = 0, \ldots\; v_n = na^{n-1},$$

come risulta osservando la successione delle (v), oppure dalla 2^a delle (11) $\left(\text{si noti che } r = 0;\ a = \frac{p}{2}\right)$. Si ha pertanto dalla (12):

$$\eta_n = (2a\eta_1 - \eta_2)\, a^{n-2} + n\,(\eta_2 - a\eta_1)a^{n-2}. \tag{12''}$$

La (12), tenuto conto delle (8), può scriversi:

$$\eta_n = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[\frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}(\eta_2 - 2a\eta_1) - \right.$$
$$\left. - \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2b}\{a\eta_2 - (a^2 + b^2)\,\eta_1\}\right].$$

E da questa si deduce facilmente:

1^a $$\eta_n = \frac{1}{2b}\left[(a+b)^{n-1}\{\eta_2 - (a-b)\eta_1\} + (a-b)^{n-1}\{(a+b)\eta_1 - \eta_2\}\right]$$

ovvero:

2^a $$\eta_n = \eta_2\,\frac{(a+b)^{n-1} - (a-b)^{n-1}}{2b} + \eta_1(b^2 - a^2)\,\frac{(a+b)^{n-2} - (a-b)^{n-2}}{2b}$$

od ancora per le (8):

3^a $$\eta_n = \eta_2 v_{n-1} + \eta_1\,(b^2 - a^2)\, v_{n-2}.$$

Da questa per la 4^a delle (7) si ha:

4^a $$\eta_n = (\eta_2 - a\eta_1)\, v_{n-1} + \eta_1 u_{n-1}$$

e sostituendo in questa a v_{n-1} la sua espressione in funzione di u_n ed u_{n-1} data dalle (8'):

5^a $$\eta_n = \frac{(a^2 + b^2)\,\eta_1 - a\eta_2}{b^2}\, u_{n-1} + \frac{\eta_2 - a\eta_1}{b^2}\, u_n.$$

(13)

Tali formole valgono se $b \neq 0$. Se b è immaginario, $a + b$ ed $a - b$ sono complessi coniugati e poichè, come si è visto, le v sono anche in tal caso reali, la 3^a della (13) mostra che tali sono pure le η. Adunque le (13) devono ritenersi valide in ogni caso.

La 1ª delle (13) serve ad esprimere η_n in funzione di η_1, η_2, p, q, n.

Cambiando in essa n in $n+1$, indi operando per addizione e sottrazione sulle due uguaglianze, si hanno dopo facili trasformazioni le due importanti relazioni:

$$6^a \quad \eta_{n+1} + \eta_n = \frac{1}{2b}\left[(a+b)^{n-1}(a+b+1)\{\eta_2 - (a-b)\eta_1\} + (a-b)^{n-1}(a-b+1)\{(a+b)\eta_1 - \eta_2\}\right]$$

$$7^a \quad \eta_{n+1} - \eta_n = \frac{1}{2b}\left[(a+b)^{n-1}(a+b-1)\{\eta_2 - (a-b)\eta_1\} + (a-b)^{n-1}(a-b-1)\{(a+b)\eta_1 - \eta_2\}\right]$$

nelle quali evidentemente è lecito cambiare b in $-b$.

Un caso particolare notevole, rapporto alle (13) si ha quando $4q+p^2$ sia il quadrato di un razionale: $4q+p^2=l^2$. Allora anche r è quadrato di un razionale: $r=\left(\frac{l}{p}\right)^2$. Risultano allora razionali $a+b$ ed $a-b$; poichè $a=\frac{p}{2}$; $b=\frac{l}{2}$; $a\pm b=\frac{p\pm l}{2}$. (13)

Si hanno adunque le formole:

$$8^a \quad \eta_n = \frac{(p+l)^{n-1}}{2^n \cdot l}\{2\eta_2 - (p-l)\eta_1\} + \frac{(p-l)^{n-1}}{2^n \cdot l}\{(p+l)\eta_1 - 2\eta_2\}$$

$$9^a \quad \eta_{n+1} + \eta_n = \frac{(p+l)^{n-1}(p+l+2)}{2^{n+1}l}\{2\eta_2 - (p-l)\eta_1\} + \frac{(p-l)^{n-1}(p-l+2)}{2^{n+1}l}\{(p+l)\eta_1 - 2\eta_2\}$$

$$10^a \quad \eta_{n+1} - \eta_n = \frac{(p+l)^{n-1}(p+l-2)}{2^{n+1}l}\{2\eta_2 - (p-l)\eta_1\} + \frac{(p-l)^{n-1}(p-l-2)}{2^{n+1}l}\{(p+l)\eta_1 - 2\eta_2\}$$

nelle quali è lecito cambiare l in $-l$.

Di tali formole quelle che esprimono $\eta_{n+1}+\eta_n$ ed $\eta_{n+1}-\eta_n$, stabiliscono una relazione di dipendenza tra due consecutive delle η.

Osservando la 1ª, 6ª e 7ª delle (13) vedesi che compaiono nei secondi membri le espressioni: $a+b+1$, $a+b-1$, $a-b+1$, $a-b-1$, $\eta_2-(a-b)\eta_1$, $(a+b)\eta_1-\eta_2$. Fissati p e q e quindi $a+b$ ad $a-b$, si potranno imporre ad $(a+b)\eta_1-\eta_2$ ed $\eta_2-(a-b)\eta_1$, condizioni speciali (equazioni ad es.) atte a determinarle; fissati invece η_1 ed η_2, si potranno imporre ad $a+b+1$, $a-b+1$ oppure ad $a+b-1$, $a-b-1$, condizioni speciali che permettano di determinare a e b e quindi p e q. Si potranno anche imporre condizioni speciali ad $(a+b)\eta_1-\eta_2$, $\eta_2-(a-b)\eta_1$, $a+b+1$, $a-b+1$ ecc. in modo che a, b, η_1, η_2 risultino determinate. In tal modo si possono avere successioni dotate di proprietà speciali.

Molte evidentemente sono le ipotesi possibili ed esempi opportuni saranno addotti in seguito. Così ipotesi particolari si avrebbero facendo acquistare alle suddette espressioni i valori 0, ± 1, ± 2, ± 3 $\pm 2^h$ ecc.

Osserviamo ancora rapporto alle (13) che essendo $b^2 - a^2 = q$ la 3^a di esse può scriversi:

$$\eta_n = \eta_2 v_{n-1} + q\eta_1 v_{n-2}.$$

Pertanto se $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$, $u_3^{(1)} \ldots$ è la successione 1, 0, ... risolvente la (9); $u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $u_3^{(2)} \ldots$ la successione 0, 1, ... pure risolvente la (9), si ha:

$$u_n^{(1)} = qv_{n-2}; \qquad u_n^{(2)} = v_{n-1}.$$

Adunque:

$$\eta_n = \eta_2 u_n^{(2)} + q\eta_1 u_{n-1}^{(2)}, \tag{13'}$$

la quale, scritto u al posto di η, coincide con quella stabilita in conseguenza della (2) (v. nota in calce alla (2)). Risulta ancora dalle (13) che:

se $\eta_2 = 0$,	$\eta_1 = 1$	$\eta_n = (b^2 - a^2)\, v_{n-2} = qv_{n-2}$;	(dalla 3^a)
" $\eta_2 = 1$,	$\eta_1 = 0$	$\eta_n = v_{n-1}$	(" 4^a)
" $\eta_2 = 1$,	$\eta_1 = \pm \dfrac{1}{b^2 - a^2}$	$\eta_n = v_{n-1} \pm v_{n-2}$	(" 3^a)
" $\eta_2 = 1 \pm a$,	$\eta_1 = \pm 1$	$\eta_n = v_{n-1} \pm u_{n-1}$	(" 4^a)
" $\eta_2 = a \pm b^2 \pm a^2$	$\eta_1 = 1 \pm a$	$\eta_n = u_{n-1} \pm u_n$	(" 5^a)

(si corrispondono i segni superiori e gli inferiori).

Se $\eta_2 = \eta_1\,(a + b)$, la 1^a delle (13) diventa:

$$\eta_n = \eta_1\,(a + b)^{n-1} = \eta_2\,(a + b)^{n-2}.$$

Se $\eta_2 = (a - b)\;\eta_1$ si ha invece:

$$\eta_n = \eta_1\,(a - b)^{n-1} = \eta_2\,(a - b)^{n-2}.$$

In ambo i casi le η sono termini di una progressione geometrica per es. se $\eta_n = 2\eta_{n-1} + 3\eta_{n-2}$ si ha $a=1$, $b=2$, e posto $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 3$ la condizione $\eta_2 = (a + b)\,\eta_1$ è verificata. Se invece si pone $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = -1$ è verificata la condizione $\eta_2 = (a - b)\,\eta_1$. Si hanno appunto le successioni 1, 3, 3^2, 3^3, ... e 1, -1, 1, -1,... delle potenze di 3 e (-1) rispettivamente.

II. — **Relazione tra i termini corrispondenti di tre successioni risolventi una medesima equazione ricorrente. Passaggio dai coefficienti p, q ai coefficienti ph, qh^2. Trasformazione dell'equazione a coefficienti razionali. Relazioni tra più termini di una medesima soluzione.**

È noto che tre soluzioni dell'equazione (9) sono linearmente dipendenti. Se esse sono $\eta_1, \eta_n, \ldots \eta_2 \ldots; \tau_1, \tau_n, \ldots \tau_n, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n \ldots$ si potrà esprimere η_n come funzione lineare a coefficienti costanti di τ_n, θ_n. Ed invero si ha subito dalla (4):

$$\eta_n = \tau_n \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \theta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}} + \theta_n \frac{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}} \tag{14}$$

purchè sia $\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Tale è appunto, come è noto, la condizione *n. e s.* affinchè le soluzioni $\tau_1, \tau_2, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots$ siano linearmente indipendenti. La (14) mostra come siano fra loro legati i valori iniziali e tre termini corrispondenti di tre soluzioni della (9).

* * *

Relazioni particolari sono possibili tra i termini corrispondenti di due successioni risolventi equazioni della forma (9) e soddisfacenti, riguardo ai valori di p e q, ad ipotesi speciali. Esamineremo appunto alcuni casi interessanti.

Se si moltiplica p per un numero h e q per h^2, l'equazione ricorrente (9) si trasforma in quest'altra:

$$\eta'_n = ph\eta'_{n-1} + qh^2\eta'_{n-2}.$$

Si ha evidentemente:

$$\frac{4q + p^2}{p^2} = \frac{4(qh^2) + (ph)^2}{(ph)^2} = r$$

cioè le due equazioni ricorrenti hanno ugual base. Dette a', b', u', v' ciò che diventano a, b, u, v rapporto alla nuova equazione, sarà:

$$a' = ah; \quad b' = bh; \quad a' \pm b' = h(a \pm b)$$

e quindi, come risulta dalle (11):

$$u'_n = u_n \,.\, h^n; \quad v'_n = v_n h^{n-1}; \quad (b'^2 - a'^2) = (b^2 - a^2)h^2.$$

La 3ª delle (13) ci permette adunque di scrivere:

$$\eta'_n = \eta_2 h^{n-2} v_{n-1} + \eta_1 h^2 (b^2 - a^2) h^{n-3} v_{n-2}$$

ovvero:

$$\eta'_n = h^{n-2} [\eta_2 v_{n-1} + \eta_1 h (b^2 - a^2) v_{n-2}]$$

cioè, supposto che i valori iniziali delle η', coincidano con quelli della successione delle η, cioè supposto $\eta'_1 = \eta_1$; $\eta'_2 = \eta_2$, i termini della successione η'_1, $\eta'_2 \ldots$ si ottengono moltiplicando per h^{n-2} quelli della successione $\eta'_1 h$, $\eta_2, \ldots$ risolvente la (9) (cioè la soluzione della (9) determinata dai valori iniziali $\eta_1 h$, η_2).

Si è supposto di moltiplicare p per h e q per h^2; osserviamo che se $\eta'_n = p'\eta_{n-1} + q'\eta_{n-2}$ è una equazione ricorrente analoga alla (9), l'uguaglianza $\frac{4q+p^2}{p^2} = \frac{4q'+p'^2}{p'^2}$ stabilita allo scopo di ricercare a quali condizioni devono soddisfare p, q, p', q', affinchè le due equazioni abbiano la stessa base, conduce appunto a ritenere $p' \equiv ph$; $p' = qh^2$, dove h è una costante.

Se h è negativo, a' e b' risultano di segno contrario a quello di a e b; sappiamo però che è lecito cambiare il segno di b ed assumere $b = -\frac{1}{2}\sqrt{4q+p^2}$. Potremo adunque anche ritenere $b' = b|h|$, talchè b' e b avranno ugual segno. Consideriamo ad es. il caso assai interessante in cui $h = -1$. Ciò equivale a cambiare segno a p e lasciare inalterato q, poichè $h^2 = 1$. Sarà $a' = -a$; $b' = -b$; ma si potrà anche assumere $b' = b$. Risulterà poi $b'^2 - a'^2 = b^2 - a^2$ e si avrà:

$$u'_n = (-1)^n u_n; \qquad v'_n = (-1)^{n-1} v_n.$$

Pertanto se η'_1, η'_2, $\eta'_3, \ldots$ è la successione corrispondente ai valori iniziali $\eta'_1 = \eta_1$; $\eta'_2 = \eta_2$ e risolvente la $\eta'_n = -p\eta' + q\eta'_{n-2}$, avremo dalla 3ª delle (13):

$$\eta'_n = (-1)^n \eta_2 v_{n-1} + (-1)^{n-1} \eta_1 (b^2 - a^2) v_{n-2}.$$

Sommando colla 2ª delle (13) si ha:

$$\eta_n + \eta'_n = 2\eta_2 v_{n-1}, \qquad \text{se } n \text{ è pari,}$$
$$\eta_n + \eta'_n = 2\eta_1 (b^2 - a^2) v_{n-2}, \qquad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Tali relazioni mostrano come si passi dalle η corrispondenti ai valori p, q dei coefficienti dell'equazione ricorrente, alle η' corrispondenti ai valori $-p$, q dei coefficienti di una analoga equazione ricorrente avente la stessa base, intendendosi che i due valori iniziali delle due successioni coincidano.

Consideriamo, per illustrare quanto è stato detto con un esempio, l'equazione $\eta'_n = 4\eta'_{n-1} + 4\eta'_{n-2}$. Essa si ottiene dalla $\eta_n = 2\eta_{n-1} + \eta_{n-2}$ moltiplicando $p = 1$, per 2 e $q = 1$ per $2^2 = 4$.

Pertanto i termini della $\eta'_1 = \eta_1$, $\eta'_2 = \eta_2$, $\eta'_3, \ldots$ si ottengono da quelli della successione $2\eta_1, \eta_2, s_3, s_4, \ldots$ risolvente la $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$, moltiplicandoli per $2^{-1}, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3 \ldots$ ecc. [1]

Riferendoci ancora alla (9), siano p e q due razionali e propriamente, come è sempre lecito, due frazioni di ugual denominatore $p = \frac{\alpha}{k}$; $q = \frac{\beta}{k}$. Si avrà:

$$\eta_n = \frac{\alpha}{k}\,\eta_{n-1} + \frac{\beta}{k}\,\eta_{n-2}.$$

La successione n è la seguente:

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \frac{\alpha\eta_2 + \beta\eta_1}{k},\ \frac{\alpha(\alpha\eta_2 + \beta\eta_1) + \beta k\eta_2}{k^2},$$
$$\frac{\alpha[\alpha(\alpha\eta_2 + \beta\eta_1) + \beta k\eta_2] + \beta k(\alpha\eta_2 + \beta\eta_1)}{k^3}, \ldots$$

nella quale, a partire dal 3° termine, i denominatori sono le potenze $2^a, 3^a \ldots$, di k ed a partire dal 4° termine ciascun numeratore si ottiene moltiplicando il precedente per α, l'antiprecedente per β e sommando. Se adunque si considera la successione:

$$\frac{\eta_1}{k},\ \eta_2,\ \alpha\eta_2 + \beta\eta_1,\ \alpha(\alpha\eta_2 + \beta\eta_1) + \beta k\eta_2, \ldots$$

vedesi che è determinata dai valori iniziali $\eta'_1 = \frac{\eta_1}{k}$, $\eta'_2 = \eta_2$ e dalla condizione di dover risolvere l'equazione ricorrente a coefficienti interi:

$$\eta'_n = \alpha\eta'_{n-1} + k\beta\eta'_{n-2}.$$

Tra le η' e le η passa adunque per $n \geqq 3$ la relazione

$$\eta_n = \frac{\eta'_n}{k^{n-2}}.$$

A questa si poteva anche giungere, senza costrurre la successione delle η, bensì muovendo dalla 3ª delle (13) e supponendo $p = \frac{\alpha}{k}$, $q = \frac{\beta}{k}$ ecc. Vedesi adunque che la costruzione di una successione ri-

---

[1] Come altro esempio si indichi con $\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3 \ldots$ la successione risolvente la (9) determinata dai valori iniziali $\eta'_1 = \eta_2$; $\eta'_2 = \eta_1$ cioè quelli della $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ scambiati di posto. Si ha dalla 3ª delle (13):

$$\eta'_n = \eta_1 v_{n-1} + \eta_2(b^2 - a^2)v_{n-2}$$

epperò, sommando e sottraendo:

$$\eta_n + \eta'_n = (\eta_2 + \eta_1)\,\{v_{n-1} + (b^2 - a^2)\,v_{n-2}\}$$
$$\eta_n - \eta'_n = (\eta_2 - \eta_1)\,\{v_{n-1} - (b^2 - a^2)\,v_{n-2}\}$$

cioè: le successioni $\frac{\eta_n + \eta'_n}{\eta_2 + \eta_1}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ ed $\frac{\eta_n - \eta'_n}{\eta_2 - \eta_1}$, $(n = 1, 2,)$ coincidono con quelle risolventi la (9) e corrispondenti rispettivamente alle coppie di valori iniziali 1, 1; 1, −1.

solvente l'equazione lineare del 2° ordine a coefficienti razionali, può sempre farsi dipendere da quella di una successione risolvente un'equazione a coefficienti interi. Es. se $\frac{\alpha}{k} = \frac{\beta}{k} = \frac{1}{2}$ le successioni delle η ed η' sono $\eta_2, \eta_2, \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \frac{\eta_1 + 3\eta_2}{2^2}, \ldots$; $\eta'_1 = \frac{\eta_1}{2}$, $\eta'_2 = \eta_2$, $\eta'_3 = \eta_2 + \eta_1$, $\eta'_4 = 3\eta_2 + \eta_1, \ldots$ ed è $\eta'_n = \frac{\eta'_n}{2^{n-2}}$ (¹).

* * *

Le relazioni tra i termini di una successione risolvente la (9) dipendono dai particolari valori attribuiti a p e q. Alcune sono tuttavia di indole generale. Accenneremo alle seguenti che si dimostrano facilmente. Si ha:

$$\left.\begin{array}{l} pq^{n-1}\eta_2 + pq^{n-2}\eta_4 + \ldots + pq^2\eta_{2n-4} + pq\eta_{2n-2} + p\eta_{2n} = \eta_{2n+1} - q^n\eta_1 \\ pq^{n-1}\eta_1 + pq^{n-2}\eta_3 + \ldots + pq^2\eta_{2n-5} + pq\eta_{2n-3} + p\eta_{2n-1} = \\ \qquad\qquad = \eta_{2n} - q^{n-1}\eta_2 + pq^{n-1}\eta_1 \\ p^{n-1}q\eta_1 + p^{n-2}q\eta_2 + \ldots + p^2q\eta_{n-2} + pq\eta_{n-1} + q\eta_n = \eta_{n+2} - p^n\eta_2 \end{array}\right\} \quad (15)$$

In particolare se $q = 1$, si ha:

$$\left.\begin{array}{l} p(\eta_2 + \eta_4 + \ldots + \eta_{2n}) = \eta_{2n+1} - \eta_1 \\ p(\eta_1 + \eta_3 + \ldots + \eta_{2n-1}) = \eta_{2n} - \eta_2 + p\eta_1. \\ \text{Se } p = 1, \text{ si ha:} \\ q(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n) = \eta_{n+2} - \eta_2. \end{array}\right\} \quad (15')$$

III. — Equazione caratteristica delle equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine. Relazioni tra le costanti ed i valori iniziali delle soluzioni di una equazione ricorrente del 2° ordine.

Dicesi equazione caratteristica dell'equazione ricorrente (9), nella quale supponiamo $q \neq 0$, l'equazione:

$$x^2 - px - q = 0. \quad (16)$$

(¹) Quando $\alpha = \beta = 1$ si ha: $\eta_n = \frac{\eta_{n-1} + \eta_{n-2}}{k}$; $\eta'_n = \eta'_{n-1} + k\eta'_{n-2}$. Quest'ultima equazione ricorrente è adunque particolarmente importante.

In una mia nota "*Su alcune notevoli successioni di numeri ciascuno dei quali è funzione lineare dei due precedenti*" (*Periodico*, fasc. IX, 1904), sono studiate le successioni che risolvono tali equazioni ricorrenti e sono stabilite le relazioni di dipendenza tra i termini delle successioni 0, 1 ... risolvente la $\eta'_n = \eta'_{n-1} + k\eta'_{n-2}$ (chiamata $s'_1, s'_2, \ldots$); $a, b \ldots$ risolvente la $\eta_n = \frac{1}{k}(\eta_{n-1} + \eta_{n-2})$, (chiamata $P_1, P_2, \ldots$); $a, b \ldots$, risolvente la $Q_n = Q_{n-1} + Q_{n-2}$. Inoltre vi si trova uno studio sulle successioni $S_1, S_2, \ldots$ tali che $S_n = S_{n-1} + kS_{n-2}$.

Posto:

$$a=\frac{p}{2}; \qquad b=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+4q}.$$

siano $x_1=a+b$; $x_2=a-b$ le radici. Suppongasi dapprima $\Delta^2=p^2+4q\neq 0$ e quindi $x_1\neq x_2$; $b\neq 0$. È noto che ogni soluzione $\eta_1, \eta_2, \ldots$ della (9) è della forma

$$\eta_n=hx_1^n+kx_2^n \tag{17}$$

h, e k essendo costanti il cui valore dipende dai valori iniziali η_1, η_2 soluzione. Per determinare h e k si osservi che per $n=1, 2$, si ha:

$$\begin{aligned} hx_1+kx_2&=\eta_1\\ hx_1^2+kx_2^2&=\eta_2. \end{aligned}$$

Risulta adunque facilmente:

$$h=\frac{\eta_2-(a-b)\eta_1}{2b(a+b)}; \qquad k=\frac{\eta_1(a+b)-\eta_2}{2b(a-b)}. \tag{18}$$

Si è supposto $b\neq 0$; essendo poi $q\neq 0$, non può essere $a\pm b=0$. Adunque $2b(a\pm b)\neq 0$.

Pertanto la (17) si può scrivere

$$\eta_n=\frac{\eta_2-(a-b)\eta_1}{2b(a+b)}(a+b)^n+\frac{\eta_1(a+b)-\eta_2}{2b(a-b)}(a-b)^n$$

ovvero:

$$\eta_n=\frac{1}{2b}\left[(a+b)^{n-1}\{\eta_2-(a-b)\eta_1\}+(a-b)^{n-1}\{(a+b)\eta_1-\eta_2\}\right]$$

che coincide colla 1ª delle (13).

Se $\eta_1=a$; $\eta_2=a^2+b^2$, la successione delle η coincide con quella delle u. In tal caso si ha: $h=k=\frac{1}{2}$, epperò la (17) diventa:

$$u_n=\frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2}.$$

Se $\eta_1=1$; $\eta_2=2a$, la successione delle η coincide con quella delle v. In tal caso si ha: $h=\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{2b}$; $k=-\frac{1}{\Delta}=-\frac{1}{2b}$; quindi essendo $b\neq 0$, si ha dalla (17):

$$v_n=\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2b}.$$

Si ottengono adunque ancora le (8).

Se $p^2+4q<0$, posto

$$b=\frac{1}{2}\sqrt{-(4q+p^2)}\,.\,i\,; \quad (i=\sqrt{-1}),$$

si ha sempre $x_1 = a + b$; $x_2 = a - b$, e le (18) continuano ad essere valide. Già abbiamo osservato che in tal caso sono ancora valide le (13) e la 3ª di esse mostra che le η risultano sempre reali.

Si è supposto finora $\Delta \neq 0$ e quindi $x_1 \neq x_2$. Se $b = 0$; $x_1 = x_2$, dalla teoria generale delle equazioni ricorrenti lineari si ha che:

$$\eta_n = hx_1^n + knx_1^{n-1} = ha^n + kn \cdot a^{n-1}. \tag{17'}$$

Avremo adunque per $n = 1, 2$:

$$\eta_1 = ha + k; \qquad \eta_2 = ha^2 + 2ka$$

epperò:

$$h = \frac{2a\eta_1 - \eta_2}{a^2}; \qquad k = \frac{\eta_2 - a\eta_1}{a} \tag{18'}$$

quindi, per la (17'):

$$\eta_n = (2a\eta_1 - \eta_2)\, a^{n-2} + n\,(\eta_2 - a\eta_1)\, a^{n-2}$$

che coincide appunto colla (12").

Adunque la considerazione dell'equazione caratteristica conduce ad espressioni di η_n che coincidono con quelle precedentemente trovate.

Essa ci permette ancora di stabilire importanti relazioni tra le costanti h e k ed i valori iniziali delle soluzioni dell'equazione ricorrente (9). Sia dapprima $q \neq 0$; $b \neq 0$; $x_1 \neq x_2$. Siano h_τ, k_τ; h_θ, k_θ; h_η, k_η le tre coppie di costanti relative a tre soluzioni $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$; $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$; $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ della (9), due a due linearmente indipendenti, talchè:

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}, \neq 0.$$

Poichè è $q \neq 0$; $b \neq 0$ e quindi $(a \neq b) \neq 0$ si constata facilmente che essendo diversi da zero i tre determinanti dei valori iniziali delle suddette soluzioni, lo sono pure quelli delle costanti h e k (date dalle 18), cioè:

$$\begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\eta & k_\eta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} h_\theta & k_\theta \\ h_\eta & k_\eta \end{vmatrix}, \neq 0.$$

Avremo adunque tre relazioni analoghe alla (17) e cioè:

$$\tau_n = h_\tau x_1^n + k_\tau x_2^n, \quad \theta_n = h_\theta x_1^n + k_\theta x_2^n, \quad \eta_n = h_\eta x_1^n + k_\eta x_2^n. \tag{19}$$

Per la (14), si ha: sostituendo ad es. nell'ultima ad x_1^n, x_2^n le espressioni date dalle prime due:

$$h_\eta x_1^n + k_\eta x_2^n = (h_\tau x_1^n + k_\tau x_2^n) \frac{\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}} + (h_\theta x_1^n + k_\theta x_2^n) \frac{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}}$$

ed uguagliando i coefficienti di x_1^n, x_2^n nei due membri:

$$k_\eta = \frac{h_\tau \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} + h_\theta \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}}, \quad k_\theta = \frac{k_\tau \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} + k_\theta \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}}.$$

Eliminando tra queste $\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}$ si ha la relazione:

$$\begin{vmatrix} h_\eta & k_\eta \\ h_\tau & k_\tau \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_\eta & k_\eta \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \tau_1 & \tau_2 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Eliminando x_1^n, x_2^n, tra le (19) si ha:

$$\eta_n = \frac{\tau_n \begin{vmatrix} h_\eta & k_\eta \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix} + \theta_n \begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\eta & k_\eta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix}}.$$

Uguagliando in questa e nella (14) i coefficienti di τ_n e θ_n rispettivamente si hanno le relazioni:

$$\begin{vmatrix} h_\eta & k_\eta \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{vmatrix} h_\eta & k_\eta \\ h_\tau & k_\tau \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_\tau & k_\tau \\ h_\theta & k_\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ \tau_1 & \tau_1 \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Si hanno adunque tre relazioni (20), (21), (22) tra le costanti h e k ed i valori iniziali di tre soluzioni, due a due linearmente indipendenti, dalla (9). È facile constatare che due sole di tali relazioni sono indipendenti, essendo ognuna conseguenza delle rimanenti.

Tali relazioni sussistono pure, quando sia $a \neq 0$; $b = 0$.

Intanto anche in questo caso è facile constatare che essendo diversi da zero i determinanti dei valori iniziali, lo sono pure quelli delle costanti h, k, date dalle (18'). Bisogna poi sostituire le (17') alle (17), mentre la (14) continua ad essere valida. Alle (19) sostituiremo adunque le seguenti:

$$\tau_n = h_\tau a^n + n k_\tau a^{n-1}, \qquad \theta_n = h_\theta a^n + n k_\theta a^{n-1}, \qquad \eta_n = h_\eta a^n + n k_\eta a^{n-1}.$$

Possiamo pertanto eliminare tra queste a^n ed a^{n-1} ecc. Otteniamo tre relazioni che differiscono dalla (20), (21), (22) soltanto per avere nk_η, nk_θ, nk_τ, al posto di k_η, k_θ, k_τ. Epperò, soppresso il fattore n, si hanno ancora le medesime relazioni.

Concludiamo che le (20), (21), (22) sono valide in ogni caso.

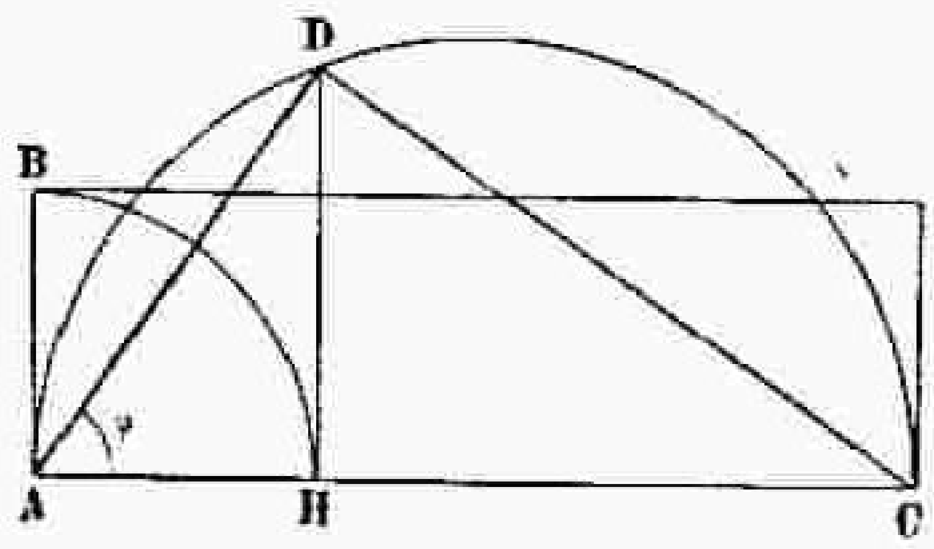
(Continua)

N. TRAVERSO.

NUOVI STRUMENTI TRASCENDENTI

La squadra ciclometrica.

1. Dato un segmento r (AB), si determini il segmento πr (AC), o per mezzo dell'*Integratore* di ABDANK-ABAKANOWICZ (detto comunemente *Planimetro*) [1], o con l'*Integrafo polare* del PASCAL [2], o, infine, col *Quadrografo* o col *Sinografo*, di cui alle pagine seguenti.



Di tali due segmenti si costruisca il rettangolo, che risulterà perciò equivalente al cerchio di raggio r, e, con la nota costruzione elementare, si trovi il lato (AD) del quadrato ad esso equivalente.

Dai triangoli rettangoli ADH, ADC, si ha:

$$\cos\varphi = \frac{AH}{AD} = \frac{AD}{AC} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

da cui:

$$\varphi = 55^{0}\,39'\,14''\,17''' \ldots = \text{costante},$$

come è naturale.

2. Uno strumento trascendente molto semplice è dunque la squadra simile al triangolo ACD, avente cioè un angolo acuto eguale all'angolo φ ora determinato.

Con essa, dato il raggio r (AH) di un cerchio, possiamo subito trovare la lunghezza della circonferenza $2\pi r$ (2AC), e il lato $r\sqrt{\pi}$ (AD) del quadrato equivalente; e viceversa, data la circonferenza o il lato del quadrato equivalente, possiamo determinare il raggio del cerchio, con semplici spostamenti della squadra, ossia con considerazione di triangoli simili alla squadra [3].

---

(1) V. KLEIN, *Conferenze sopra alcune questioni di geometria elementare*. Trad. GIUDICE, Torino, 1896, pag. 69.

(2) V. PASCAL, *I miei integrafi per equazioni differenziali*, Napoli, 1914, pag. 119.

(3) Non è questa una cosa completamente nuova, perchè nelle sue *Opera Mathematica* CRISTOFORO CLAVIO, gesuita di Bamberg, costruisce un triangolo rettangolo per la rettificazione della circonferenza (vol. I, pag. 301, Magonza, 1612) e due altri diversi triangoli rettangoli per la quadratura del cerchio (uno di seguito al precedente, l'altro a pag. 193 del vol. II, Magonza, 1611), supponendo di aver potuto preventivamente rettificare una circonferenza per mezzo della *quadratrice* di Dinostrato, di cui tra poco ci occuperemo.

Inoltre la ispezione della figura ci mostra come si possano ottenere altri segmenti, funzioni del trascendente π:

$$DH = r\sqrt{\pi - 1}; \quad DC = r\sqrt{\pi(\pi - 1)}; \quad HC = r(\pi - 1)$$

dove r è affatto arbitrario, commensurabile o no.

3. La determinazione dell'angolo φ per la costruzione di essa, potrebbe farsi, molto approssimatamente, con un goniometro di precisione; od anche, poichè è:

$$\pi = 3{,}141592653589\ldots,$$

e per: $r = 113$ è:

$$\pi r = 354{,}99996985\ldots,$$

si potrebbe ottenere la squadra, costruendo un triangolo rettangolo avente per proiezione di un cateto sull'ipotenusa mm. 113, e per ipotenusa mm. 355; l'errore, per eccesso, che si commetterebbe, sarebbe minore di $\frac{1}{10000}$ di millimetro, e quindi trascurabile [1].

4. Ho chiamata *ciclometrica* tale squadra, perchè ci può dare la misura dei segmenti di cui sopra, se i suoi bordi sono stati preventivamente millimetrati, e se essa non si deforma colle variazioni di temperatura ed umidità.

Il quadrografo.

1. Non passerò alla descrizione di questo mio secondo strumento trascendente, senza aver prima un po' trattato della *antica quadratrice*, la curva che Ippia e Dinostrato, circa quattro secoli prima dell'era volgare, adoperarono per risolvere i celebri problemi della trisezione dell'angolo e della rettificazione della circonferenza e quindi della quadratura del cerchio, insolubili col solo uso di riga e compasso [2].

---

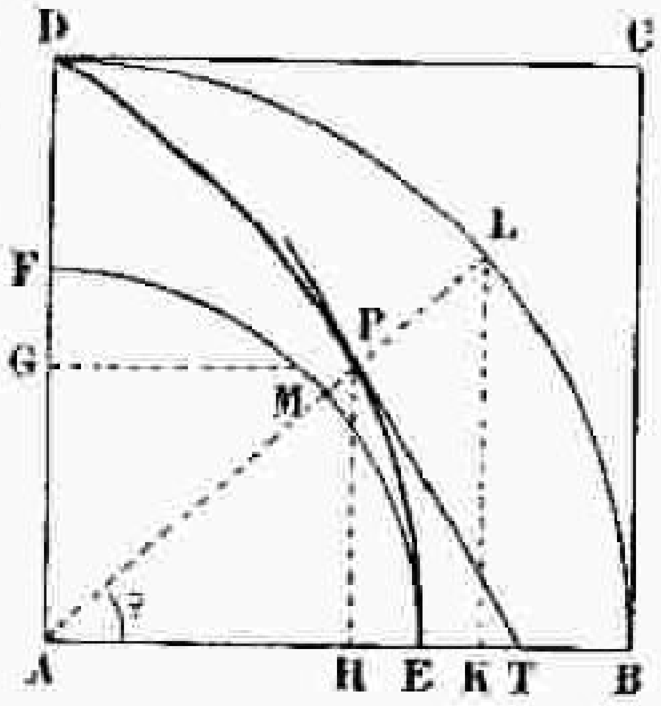
(1) Ho fatto i calcoli attribuendo ad r valori interi da 1 ad oltre 300, ed ho trovato che, oltre questo numero, solo per $r = 226$, con minimo errore, può esprimersi πr con un intero inferiore a 1000; il primo di essi dà: $\pi = \frac{355}{113}$, a tutti noto perchè già trovato da Mezio (circa l'anno 1585, secondo il MONTUCLA: *Histoire des Mathématiques*, Parigi, maggio 1802, tomo IV, pag. 635; però nella citata opera di CLAVIO del 1612, non è traccia di tale valore, ed infatti l'HOEFER, nella sua *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1879, p. 365, fa vivere Mezio dal 1571 al 1635), il secondo dà: $\pi = \frac{710}{226} = \frac{355}{113}$.

È facile trovare altri rapporti molto approssimati per due qualunque dei segmenti che entrano nel triangolo da costruire; per esempio, assumendo: $\sqrt{\pi} = 1{,}772453850\ldots$, per: $r = 167$, è: $r\sqrt{\pi} = 295{,}997929\ldots$, da cui $\sqrt{\pi} = \frac{296}{167}$, approssimato a meno di $\frac{1}{1000}$, e naturalmente, danno grande approssimazione le frazioni equivalenti a questa.

(2) È stata contestata la possibilità della costruzione di uno strumento adatto a descriverla con tratto continuo; e l'origine di questa memoria è appunto la lettura di tale discussione nel *Le scienze esatte nell'antica Grecia* del prof. G. LORIA, Milano, 1914, pag. 163 e 670.

2. Essa fu così ideata [1]:

Il lato DC di un quadrato compia con moto uniforme una traslazione parallela verso il lato AB, ed il lato AD, pure con movimento uniforme, ruoti intorno al suo estremo A in modo che, iniziando i movimenti nello stesso istante, contemporaneamente giungano a sovrapporsi in AB; le successive intersezioni dei due lati danno la curva DE, che è la *quadratrice*.



3. Assunti su AB e AD gli assi coordinati cartesiani ortogonali x ed y: detti: l'origine delle coordinate, il punto E d'intersezione della quadratrice con l'asse x, il segmento AE, l'asse x stesso, rispettivamente: *polo*, *vertice*, *parametro*, *asse* della quadratrice [2], indicata con l la lunghezza del segmento AB, con φ l'anomalia in radianti, dal modo di generazione della curva, abbiamo:

$$l\varphi : \frac{\pi}{2} l = y : l$$

e

$$x = y \operatorname{cotg} \varphi,$$

da cui, avendosi: $\varphi = \frac{\pi}{2l} y$, otteniamo l'equazione in coordinate cartesiane:

$$x = y \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2l} y;$$

e prendendo per polo ed asse polare il polo e l'asse della curva, essendo: $\rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \varphi}$ e $y = \frac{2l}{\pi} \varphi$, abbiamo l'equazione in coordinate polari:

$$\rho = \frac{2l}{\pi} \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

Dalle quali equazioni, essendo:

$$\lim_{y=0} . \frac{y}{\operatorname{tag} \frac{\pi}{2l} y} = \frac{y}{\frac{\pi}{2l} y} = \frac{2l}{\pi}$$

---

(1) V. ad esempio: CASTELNUOVO, *Lezioni di Geometria analitica*, Roma, 1909, pag. 108. — CHASLES, *Aperçu historique ....* Parigi, 1875, pag. 8. — CLAVIO, *Opera Mathematica*, Magonza, 1612, vol. I, pag. 296. — FAZZARI, *Breve storia della matematica*, Palermo, pag. 76. — HOEFER, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1879, pag. 161. — KLEIN, *Conferenze ...*, *l. c.*, pag. 48. — LEOTAUD, *Cyclomathia, Liber tertius, in quo mirabiles quadratricis facultates variae exponuntur*, Lione, 1663, pag. 1. — LORIA, *Le scienze esatte ...*, pag. 70. — MONTUCLA, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, tomo I, pag. 180. — OZANAM, *Dictionnaire mathématique*, Amsterdam, 1691, pag. 94. — PAPPO, *Collectiones mathematicae*. Trad. COMANDINI, Pesaro, 1588, libro IV, pag. 57. — PASCAL, *Repertorio di matematiche superiori*, Milano, 1910, vol. II, pag. 780.

(2) LEOTAUD (*l. c.*, pag. 5) dà invece i nomi di: *centro*, *vertice*, *saetta*, *asse*; e CLAVIO (*l. c.*, pag. 297) chiama *base* la saetta.

ed anche:

$$\lim_{\varphi=0} . \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = 1$$

è:

$$\mathrm{AE} = \frac{2l}{\pi};$$

talchè, indicando con k la lunghezza del segmento AE, già chiamato *parametro*, l'equazione in coordinate cartesiane ortogonali della quadratrice è:

$$x = y \operatorname{cotg} \frac{y}{k}$$

ed in coordinate polari è:

$$\rho = k \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}.$$

4. Dalla posizione fatta, poichè era $y = \frac{2l}{\pi} \varphi$, è:

$$y = k\varphi,$$

cioè: *l'ordinata di ogni punto della quadratrice è lo sviluppo dell'arco di circonferenza di raggio* k, *limitato dall'asse e dal raggio vettore della quadratrice in quel punto.* (In figura: $\overline{\mathrm{PH}} = \widehat{\mathrm{ME}}$) (1).

In altre parole, se si conducono per i punti di una parallela ad una retta data le quadratrici aventi polo in un punto dato di questa, e si limitano, ai raggi vettori estremi di esse, gli archi di circonferenza aventi centro nel polo e raggio eguale al corrispondente parametro, le lunghezze di tutti questi archi sono eguali fra loro, ed eguali alla distanza della parallela dall'asse.

Naturalmente, essendo qui y costante, gli angoli determinati dall'asse comune e dai singoli raggi vettori, sono inversamente proporzionali ai parametri delle corrispondenti quadratrici, ed osserviamo inoltre che, se è $y = k$, otteniamo $\varphi = 1$, cioè mediante la quadratrice otteniamo l'*unità angolare* o *radiante*, ossia l'angolo di $57^\circ 17' 44'' \ldots$ (2).

---

(1) Si confronti questa con l'equazione: $x = y$ che dà Newton per la quadratrice a pag. 102 del vol. I degli *Opuscula* (Trad. Castiglioni, Losanna e Ginevra, 1744), dove x è la lunghezza dell'arco di circonferenza (EM). Ivi è detto: *quae equatio ad veterum quadratricem pertinet*, poichè altre quadratrici si avevano già; ad esempio una di Tschirnhausen (1651-1708) che fu studiata nel 1698 dal suo contemporaneo P. Nicola, gesuita di Tolosa (v. Montucla, *l. c.*, tomo II, pag. 78).

È inutile inoltre che osservi che le ordinate della quadratrice sono eguali ai raggi vettori della corrispondente *spirale d'Archimede*: $\rho = k\varphi$.

Leotaud, che dà a queste due curve lo stesso polo e lo stesso asse, talchè risultano tangenti nel punto: $x = 0$; $y = l$, le chiama *connatae*, e nel citato libro III della sua *Cyclomathia* (la cui oculata traduzione non sarebbe priva di interesse) dà molte proposizioni in cui sono geometricamente riferite e confrontate le proprietà delle due curve.

(2) Anche con l'integrafo polare del Pascal può ottenersi tale angolo, mediante l'integrazione dell'equazione cubica: $\theta^3 + \frac{7}{2}\theta^2 + 6\theta - 4 = 0$, che ha una radice reale eguale ad $\frac{1}{2}$, rappresentata dall'apparecchio molto esattamente dall'angolo di $28^\circ 38' 52'' \ldots$ (v. *l. c.*, pag. 136).

Inoltre, come abbiamo già osservato, per la genesi della curva, per k costante, è: $\frac{y_1}{\varphi_1} = \frac{y_2}{\varphi_2} = \frac{y_3}{\varphi_3} = \ldots$; ossia: *data una quadratrice di parametro* k, *gli angoli dei raggi vettori con l'asse sono proporzionali alle ordinate dei punti corrispondenti*, e quindi la curva riduce il problema della divisione di un angolo in parti proporzionali a dati numeri, a quello della divisione di un segmento in parti proporzionali agli stessi numeri (1).

La *trisezione dell'angolo* ci appare dunque come un caso particolare di questa divisione più generale.

Altra conseguenza facile ad essere dimostrata è che, dato un settore circolare (per ora, minore di un quadrante), ed una quadratrice avente polo nel centro, per asse uno dei raggi limiti di esso, e passante per l'estremo dell'altro raggio, la corda sottesa dall'arco del settore è divisa per metà dalla quadratrice, ed ogni altro segmento compreso fra l'estremo dell'arco di quadratrice e l'asse di essa, è diviso dalla quadratrice in parti proporzionali agli angoli e quindi agli archi del settore, determinati dal raggio vettore che passa per il punto di intersezione.

Dalla $y = k\varphi$, che può scriversi:

$$y : k = \varphi : 1,$$

si ha pure:

$$y : k = \rho\varphi : \rho,$$

cioè: *l'ordinata di ciascun punto sta al parametro, come l'arco di circonferenza di raggio* ρ *ed angolo* φ *sta al raggio vettore* ρ; ed anche:

$$y : k = y\varphi : y$$

ossia: *l'ordinata di ogni punto della quadratrice è media proporzionale geometrica fra il parametro e l'arco di circonferenza* $y\varphi$ (2).

Ritornando alle equazioni ultime trovate per la curva, ponendo in esse rispettivamente $x = 0$, e $\varphi = \frac{\pi}{2}$, abbiamo, come caso particolare di una proprietà trovata:

$$\mathrm{AD} = \frac{\pi k}{2};$$

ossia: *il lato del quadrato è la quarta parte della circonferenza di raggio* k *rettificata* (3).

---

(1) V. PAPPO, libro IV, Probl. XI, Prop. XXXV.

Il Pascal risolve questo problema con l'integrafo polare (v. *l. c.*, pag. 120) costruendo una spirale d'Archimede, curva che si sa godere della stessa proprietà.

(2) Per la dimostrazione geometrica, v. LEOTAUD, *l. c.*, pag. 54, prop. XXXII e pag. 57, prop. XXXIII.

(3) Notiamo che per $k = 2$ è $\mathrm{AD} = \pi$, e per $k = r$ è $\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\pi r$, ossia, ora vediamo la possibilità della determinazione dell'angolo $\varphi = 55^\circ\,39'\,14''\,17'''\ldots$ di cui ci siamo serviti per la costruzione della *squadra ciclometrica*, se avremo uno strumento che ci descriva la curva a tratto continuo.

Da questa eguaglianza, e dalla seconda delle proporzioni ora trovate, si ha pure:

$$k = \frac{2\mathrm{AD}}{\pi} = \frac{2\mathrm{AD}^2}{\pi\mathrm{AD}}$$

o

$$k : \mathrm{AD} = \mathrm{AD} : \frac{\pi}{2}\,\mathrm{AD}$$

cioè: *il lato del quadrato è medio proporzionale geometrico fra il parametro della quadratrice e la quarta parte della circonferenza avente per raggio il lato del quadrato stesso* (¹).

5. Dalle osservazioni ora fatte, oltre le costruzioni dirette che ne scaturiscono, vediamo esser facile, data una quadratrice:

a) determinare sopra due circonferenze disuguali due archi di eguale lunghezza (purchè l'arco della circonferenza maggiore non sia maggiore della circonferenza minore);

b) costruire un triangolo isoscele di cui si conosca il rapporto dell'angolo al vertice agli angoli alla base;

c) determinare l'angolo di un poligono regolare qualunque

$$\alpha = \frac{\pi(n-2)}{n}$$

e quindi costruire un poligono regolare di un numero qualunque di lati;

d) determinare il raggio di una circonferenza di data lunghezza;

e) far passare per due punti un arco di circonferenza la cui lunghezza abbia un rapporto assegnato con la sua corda (²);

(¹) Questo teorema è stato dimostrato geometricamente da Dinostrato per mezzo della riduzione all'assurdo; ed è questa una delle più antiche dimostrazioni indirette. (V. Loria, *l. c.*, pag. 100; Pappo, *l. c.*, pag. 57; Teorema XIII, prop. XXVI; ecc.). Per questa sua proprietà di rettificare la circonferenza e quindi di poter ridurre il cerchio in quadrato equivalente, essa ha avuto il nome di *quadratrice*, traduzione della parola *τετραγωνίζουσα*, che vuol dire appunto: *che riduce in quadrato*, nome che davasi alle curve che godevano di tale proprietà.

(²) Dato il rapporto: $h = \frac{\text{arco}}{\text{corda}} = \frac{\frac{1}{2}\,\text{arco}}{\frac{1}{2}\,\text{corda}} = \frac{x\varphi}{x\,\text{sen}\,\varphi} = \frac{r\varphi}{\text{sen}\,\varphi}$, dove x è il raggio incognito dell'arco, e φ è la metà dell'angolo al centro che insiste su questo arco, essendo l'equazione della quadratrice: $\rho = k\frac{\varphi}{\text{sen}\,\varphi}$, presa la quadratrice di parametro k, il raggio vettore lungo hk, ci dà con l'asse l'angolo φ.

Pappo (v. citato libro IV, pag. 70, Prop. XL), dà la seguente dimostrazione:

$$\widehat{\mathrm{BLD}} : \overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{LA}} : \overline{\mathrm{AE}} = \widehat{\mathrm{LB}} : \overline{\mathrm{PH}},$$

ma:

$$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{LA}} = \overline{\mathrm{PH}} : \overline{\mathrm{LK}}$$

dunque:

$$\overline{\mathrm{PA}} : \overline{\mathrm{AE}} = \widehat{\mathrm{LB}} : \overline{\mathrm{LK}};$$

ora questo rapporto e quello dato, $\mathrm{AE} = k$, quindi $\mathrm{PA} = hk$, dà lo stesso angolo φ sopra determinato.

f) trovare un settore circolare di dato angolo equivalente ad un triangolo dato ([1]).

6. Sarebbe anche interessante far vedere come Pappo dimostra esser la quadratrice la proiezione delle intersezioni di due speciali elicoidi con piani inclinati di 45° sul piano di proiezione ([2]), e come mediante la quadratrice sia possibile determinare due angoli fra loro incommensurabili, ma rimando senz'altro ai libri più volte citati.

Così pure non trascriverò come si conducano le tangenti alla curva ([3]), ma dirò solo che se PT è la tangente in P, esiste la proporzione:

$$AE : AP = AP : AT, \qquad \text{ossia:} \qquad AT = \frac{\overline{AP}^2}{AE} = \frac{\rho^2}{k} \text{ (}^4\text{)}.$$

Newton indica pure il modo di determinare la curvatura in un punto qualunque di essa con metodo generale ([5]); dà gli sviluppi in serie: di un arco della curva ([6]), dell'ascissa di un suo punto, del segmento di asse compreso fra il vertice e l'intersezione con la tangente, ed infine lo sviluppo dell'area limitata dall'asse, da un arco della curva, dalla parallela all'asse per l'altro estremo di questo e dalla perpendicolare all'asse nel polo ([7]); ed accenna anche esser possibile, dalle equazioni ridotte in serie infinite, determinare la superficie del solido di rivoluzione ed il suo centro di gravità.

([1]) Ho posto qui questa proprietà, per quanto avrei dovuto forse ricordarla più avanti, solo perchè mi dispenso di darne la dimostrazione che può trovarsi in LEOTAUD, *l. c.*, pag. 99, Prop. LV, che la dà servendosi della *spirale connata*.

Per la costruzione dirò che occorre trasformare il triangolo in altro avente un angolo eguale all'angolo dato, descrivere poi col polo nel vertice di questo e per asse uno dei lati, una quadratrice di parametro minore di questo lato, e per l'altro estremo di questo condurre alla quadratrice la tangente; il settore richiesto ha per raggio il raggio vettore che va al punto di tangenza.

([2]) V. anche CHASLES, *l. c.*, pag. 30, § 26, il quale, poco dopo (nella Nota 1ª di pag. 32) osserva di aver riconosciuto che se il piano secante, in luogo di passare per una generatrice della superficie elicoidale, è condotto in modo arbitrario, si ottiene allora in proiezione una quadratrice allungata od accorciata, o, in altri termini, una *concoide della quadratrice* di Dinostrato.

([3]) Per la dimostrazione geometrica, v. NEWTON, *l. c.*, pag. 101 e 102; MONTUCLA, storia citata, tomo II, pag. 100, Nota D del libro I della parte IV; e LEOTAUD, *l. c.*, pag. 98, Prop. LIV.

([4]) Infatti, per note regole di calcolo, essendo $AT = x - y\frac{dx}{dy}$, è

$$AT = x - y\left[\operatorname{cotg}\frac{y}{k} + y\left(-\frac{1}{k\cdot \operatorname{sen}^2\frac{y}{k}}\right)\right] =$$

$$= y\operatorname{cotg}\frac{y}{k} - y\operatorname{cotg}\frac{y}{k} + \frac{y^2}{k\operatorname{sen}^2\frac{y}{k}} =$$

$$= \frac{1}{k}\,\frac{k^2\varphi^2}{\operatorname{sen}^2\varphi} =$$

$$= \frac{\rho^2}{k}.$$

Come caso particolare, se P coincide con D, il segmento AT diviene eguale a $\frac{\pi d}{2}$, e la tangente in tale punto risulterebbe tangente pure alla spirale d'Archimede: $\rho = k\varphi$.

([5]) NEWTON, *l. c.*, pag. 115. *Eadem ratione determinari potest, brevissima computatione, curvatura spiralium et aliarum curvarum quarumcunque.*

([6]) V. pag. 198.

([7]) V. pag. 318.

Terminerò di dare questo rapido sguardo retrospettivo alla *curva* che il Loria ritiene *indubbiamente meritevole di un bel posto nel gruppo delle curve piane particolari*, col dire che il *centro di gravità di un arco circolare* (anche qui, per ora, supposto minore di una semicirconferenza) è il vertice della quadratrice avente per polo il centro, per asse la bisettrice e passante per un estremo dell'arco; e il *centro di gravità del settore* corrispondente, è, a partire del vertice, ai due terzi del parametro della quadratrice stessa (¹).

7. Ed ora, prima di venire alla descrizione dell'apparecchio capace di tracciare con segno continuo la quadratrice, piacemi dare di essa la seguente definizione:

È la quadratrice il luogo geometrico delle intersezioni di una retta moventesi in un piano parallelamente a sè stessa con velocità costante, con un'altra retta rotante di moto pure uniforme intorno ad un suo punto nello stesso piano, con la sola condizione che nel loro movimento le due rette si sovrappongano (naturalmente al passaggio della prima per il centro di rotazione della seconda).

8. Così essa ci appare più chiara nella sua interezza di curva ad infiniti rami prolungantisi all'infinito, e di cui le proprietà speciali del tratto, finora considerato, del ramo contenente l'*unico vertice*, si estendono, almeno in parte a tutta la curva.

Stimo pure inutile trattenermi ora più oltre su queste proprietà, e, per esempio, far vedere che essa ha, nella retta già detta asse, un solo *asse di simmetria*, che ha *infiniti asintoti* nelle rette $y = 2hl$ per h numero intero qualunque diverso da zero (²), che una retta passante per il polo incontra la curva in punti le cui ordinate differiscono di multipli di $2l$, ma passo senz'altro alla esposizione schematica del *quadrografo*, col quale strumento credo possibile descrivere la curva con tratto continuo, senza la preventiva conoscenza di π, ciò che a Sporo da Nicea sembrava indispensabile (³).

(¹) Si sa infatti che la distanza δ del centro di gravità di un arco dal centro di questo, è: $\delta = \frac{\text{raggio} \times \text{corda}}{\text{arco}}$, e, detta φ la metà dell'angolo al centro che insiste sull'arco, si ottiene: $r = \delta \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$, che è la equazione della quadratrice di parametro δ; e si sa che $\frac{2}{3} \delta$ è la distanza, dal centro del settore, del centro di gravità del settore circolare corrispondente. Cfr. LEOTAUD, *l. c.*, Prop. LXVI, Coroll. 3°, pag. 130.

(²) Il MONTUCLA, a pag. 77 del tomo I della sua storia, riferisce che aver data alla curva estensione oltre il quadrante, è stata opera del gesuita P. Leotaud nel 1663. V. infatti LEOTAUD, *l. c.*, pag. 2, Prop. II, in cui però è attribuito alla quadratrice solo un ramo a due corna infinite.

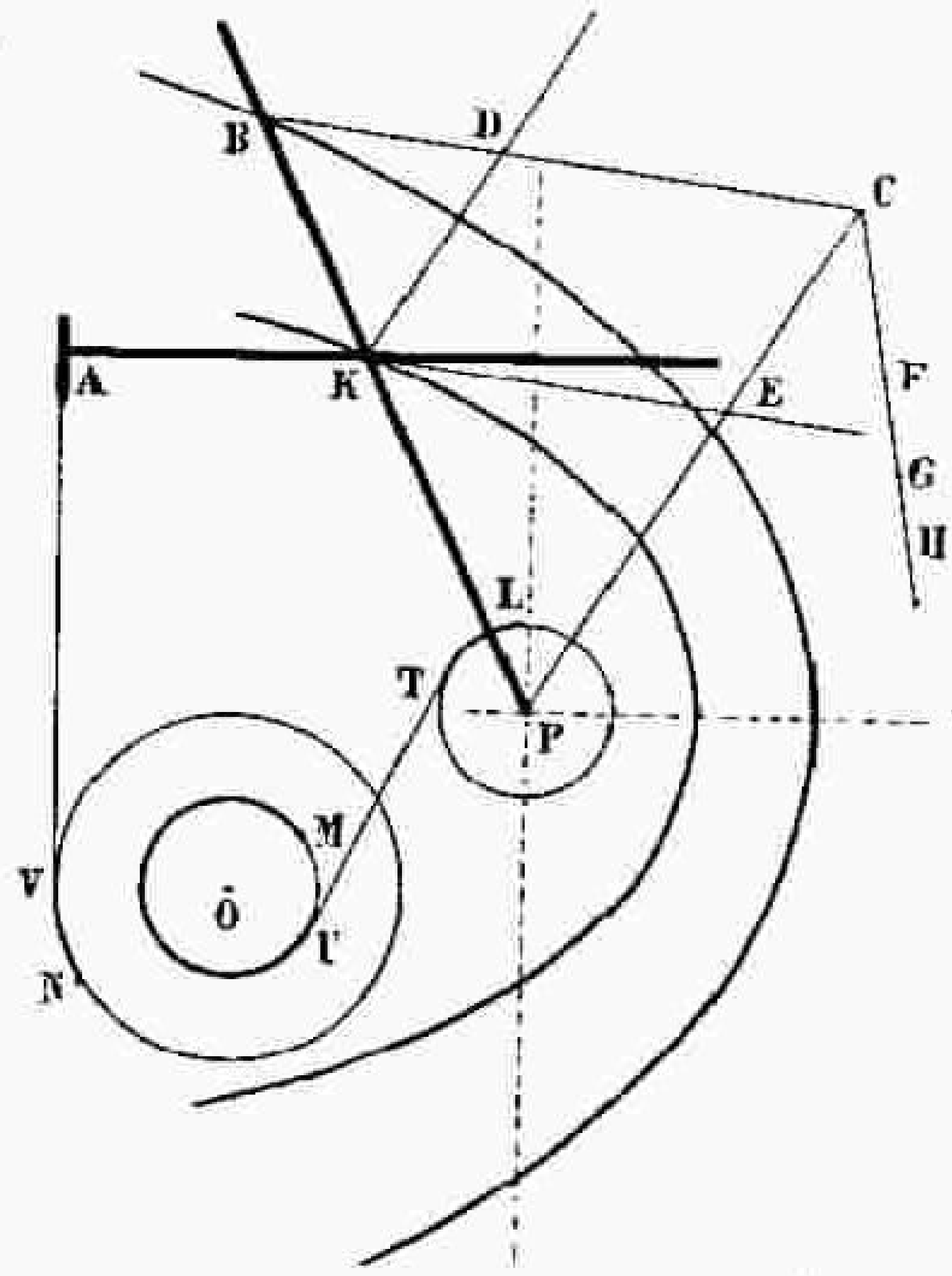
(³) V. LORIA, *l. c.*, pag. 670.

CLAVIO, trattando della quadratrice alla fine del libro VI degli *Elementi di Euclide* (*l. c.*, vol. I, pag. 296-304) e nella *Geometria pratica* (*l. c.*, vol. II, pag. 189-194), dice che essa, ritenuta inutile e non potendo esser descritta, fu rigettata da Pappo, perchè eravi petizione di principio nella sua definizione.

Egli, descritta la curva per punti, come si fa per le sezioni coniche (*così dice*), per ottenere il punto E, costruisce, rispetto all'asse AB, il simmetrico di un punto della curva ad esso vicinissimo e preventivamente determinato, ed unisce questi due punti; l'intersezione con la AB, gli dà il punto E.

9. Un cerchio PT sia capace di ruotare intorno al suo centro fisso P con velocità costante, e possa comunicare il suo moto ad un cerchio OU, pure di centro fisso, per mezzo di filo imponderabile ed inestensibile, avvolgentesi e svolgentesi rispettivamente; e questo cerchio, a sua volta, per essergli rigidamente connesso, possa comunicare il movimento al cerchio concentrico OV, di raggio maggiore.

Se un lato VA di un angolo VAK (per comodità supposto retto) tangente al cerchio OV, è capace di scorrere su sè stesso, al ruotare del cerchio si sposterà, e farà compiere alla retta AK una traslazione parallela con velocità costante, tutte le volte che il cerchio PT girerà di moto uniforme.



Si prenda per posizione origine quella in cui il lato AK passa per P e si fissi rigidamente al cerchio PT una retta PK nella direzione APK.

Il sistema meccanico è dunque tale, che, a rotazione uniforme della PK intorno a P, corrisponde traslazione uniforme della AK; e di più le due rette si sovrappongono durante il loro movimento nel piano: secondo la definizione ultima data, il luogo delle intersezioni K di tali rette è la quadratrice di Ippia e di Dinostrato; e tale luogo non varia se il movimento della retta PK, che potremo ritenere motrice, non è uniforme.

10. Trovato il sistema meccanico-teorico non resta che renderlo pratico.

I cerchi sieno tre carrucole con i perni nei rispettivi centri; in L ed M sieno fissati, per mezzo di viti micrometriche, gli estremi di un filo d'acciaio flessibile, secondo la disposizione della figura; il lato AK sia un'asta rigida; AV, rigida pur essa nella parte *scorrevole in una guida*, sia nella rimanente un altro filo d'acciaio il cui secondo estremo sia fissato con vite in N alla carrucola OV solidale con la OU; la retta PK sia un'altra asta rigida saldata (o, meglio, *fissabile*) alla carrucola PT; ed essa e la AK abbiano scanalature longitudinali.

Alla base dell'apparecchio, dove, naturalmente, sono fissati i perni delle carrucole e la guida dell'asta VA, è pure fissata una molla a spirale che ha l'ufficio di tenere allontanato A da V, e che quindi tiene tesi costantemente i fili d'acciaio; le viti micrometriche servono a rettificare l'apparecchio in modo che, passando per P, AK si sovrapponga a PK (a tale uopo AK sarà sopraelevata quanto basta); nelle due scanalature è guidato perpendicolarmente alla base dello strumento una punta scrivente; la PK alla sua estremità avrà una rotella di sostegno ed un manubrio per imprimere il movimento; ed infine la base porterà delle indicazioni tali da poter disporre l'apparecchio con P nell'origine di due assi coordinati ortogonali, ed orientato per modo che un'asse risulti l'asse della quadratrice (parallelo quindi all'asta AK).

Perchè il movimento sia trasmesso regolarmente, basterà che i fili (che mi par lecito supporre inestensibili almeno durante una sola descrizione meccanica della curva), non abbraccino l'intera gola di ciascuna carrucola (ciò avviene con la disposizione usata), e che le gole delle carrucole corrispondenti sieno nello stesso piano: dirò infine che se OV ha raggio doppio di OU, il parametro della quadratrice deve risultare il doppio del raggio PT.

Osservo pure che la punta scrivente, anzichè esser regolata dalle due scanalature, potrebbe esser comunque rigidamente sostenuta da un carrello scorrevole su una delle aste e guidate dalla scanalatura dell'altra (come negli integrafi del prof. Pascal); la curva descritta risulterebbe eguale al luogo dei punti K, ma spostata rispetto a questo.

11. Lo strumento è capace di descrivere a tratto continuo buona parte del ramo di quadratrice contenente il vertice (in figura ve n'è descritta più di quella che lo strumento disegnato può dare, però è facile vedere che aumenta l'arco descritto, coll'aumentare delle distanze dei centri delle carrucole lungo la retta PO); la parte quindi atta a risolvere i problemi ricordati innanzi; però descrive sempre la stessa curva; per volerla di parametro qualunque (essendo: $\rho = k \dfrac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$; $\rho' = k' \dfrac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi}$ ossia $\rho : \rho' = k : k'$) basta applicarvi un comune pantografo con centro di rotazione nel polo P e con l'estremità di un braccio fissato nel punto K descrivente la curva; l'estremo dell'altro braccio descriverà la curva del parametro voluto, se divideremo i bracci del pantografo in parti proporzionali ai due parametri della quadratrice dell'apparecchio e di quella desiderata.

12. Per semplificare questa divisione in parti proporzionali, io apporterei al pantografo l'aggiunta di una stecca mobile nel vertice C, sovrapponibile normalmente sulla CP o sulla CB, su cui sieno segnati i due punti F e G tali che $CF = k$ e $CG = l = \dfrac{\pi k}{2}$.

Volendo una quadratrice di parametro k', si *fissi* l'apparecchio in modo che le due aste AK e PK sieno sovrapposte; si ponga poi la punta B del pantografo a distanza k' da P, e si fissi KD in D dopo aver fatto sì che il punto F di CH coincida con l'estremo dell'asta KD che deve essere eguale alla PC; si fissi poi KE per modo che risulti CE = KD; allora il punto B descrive la quadratrice di parametro k'.

Volendo una quadratrice tale che $\frac{\pi k'}{2}$ sia eguale ad un dato segmento l', si fissi l'apparecchio nella posizione in cui la PK è normale alla AK: e si facciano le operazioni analoghe alle precedenti, prendendo sulla CH il punto G anzichè il punto F. (La facile dimostrazione si basa sulla similitudine dei triangoli del pantografo.)

Infine, volendo la quadratrice (intendo anche qui parlare solo di parte del ramo contenente il vertice) con polo ed asse dati e passante per un punto pure dato, si disponga lo strumento con l'asta PK passante per questo punto, su cui dovrà trovarsi il punto B del pantografo e si procederà per fissare i punti E e D nell'identico modo precedente, partendo dal punto H tale che CH = PK.

Per volere quadratrici di parametro minore di k, bisognerebbe porre B in K; ed allora la punta scrivente sarebbe la punta K del pantografo; osservo ancora che fissando questa punta scrivente o su AK o su PK e rendendola indipendente dall'altra di queste due stecche, il quadrografo ci può dare rette e circonferenze utili.

13. Trovato il modo di descrivere quadratrici, si potrebbero fabbricare dei curvilinei a loro somiglianza, su cui fossero anche indicati alcuni punti e linee notevoli, come, ad esempio, il vertice, il polo, l'asse, l'angolo di 53°39'14''17'''..., l'altro di 57°17'44''..., ed i punti in cui la normale all'asse per il polo incontra la curva; talchè la corda avente in essi gli estremi sarebbe lunga πk: ed anche di tale forma potrebbero farsi i comuni goniometri.

14. Questo semplice strumento ci faciliterebbe la risoluzione grafica di tutti i problemi citati.

Se, ad esempio, si volesse determinare il centro di gravità di un arco circolare, basterebbe porlo col polo nel centro dell'arco, e con asse sulla bisettrice dell'angolo al centro; segnare poi, della quadratrice che esso ci dà col suo bordo, il vertice e l'intersezione con uno dei raggi limiti del settore, e, per l'estremità di questo raggio, condurre la parallela alla retta che passa per questi due punti: la sua intersezione con la bisettrice ci dà il centro di gravità dell'arco; il punto, su questa bisettrice, a distanza dal centro eguale ai $\frac{2}{3}$ della distanza del punto ora determinato, è il centro di gravità del settore circolare corrispondente.

15. E chiuderò con due altre ammirevoli proprietà della quadratrice.

Essendo le sue equazioni:

$$x = y \operatorname{cotg} \frac{y}{k} \quad \text{e} \quad \rho = k \frac{\varphi}{\operatorname{sen} \varphi},$$

e potendosi esse scrivere, per dati valori $x = x_0$, $\rho = \rho_0$.

$$x_0 \operatorname{tag} \frac{y}{k} = y \qquad \text{e} \qquad \rho_0 \operatorname{sen} \varphi = k\varphi$$

od anche:

$$x_0 \operatorname{tag} \frac{y}{k} - y = 0 \qquad \text{e} \qquad \rho_0 \operatorname{sen} \varphi - k\varphi = 0,$$

il ramo di quadratrice contenente il vertice (e quindi il *quadrografo*) ci offre il mezzo di risolvere graficamente le equazioni trascendenti suscritte, o le altre equivalenti:

$$\operatorname{tag} \varphi - \frac{k}{x_0} \varphi = 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} \varphi - \frac{k}{\rho_0} \varphi = 0$$

ossia:

$$\operatorname{tag} \varphi = a\varphi \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} \varphi = b\varphi \text{ (}^1\text{)};$$

basta infatti, data una quadratrice di parametro k, per risolvere la prima di queste, prendere il punto $x_0 = \frac{k}{a}$ e determinare il punto della quadratrice che ha tale ascissa; il raggio vettore di tale punto ci dà con l'asse l'angolo φ cercato; e per risolvere la seconda basta determinare il raggio vettore $\rho_0 = \frac{k}{b}$, che ci dà con l'asse la radice φ della seconda equazione trascendente.

Il sinografo.

1. Ricordo che le equazioni della cicloide, la curva piana generata da un punto di una circonferenza di raggio r, che ruota, senza strisciare, sull'asse x, in coordinate cartesiane ortogonali, sono:

$$x = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - \cos \varphi),$$

e che il centro della circonferenza generatrice ha per coordinate:

$$x = r\varphi; \qquad y = r \text{ (}^2\text{)}.$$

Se il punto generatore non è sulla circonferenza, ma su una semiretta uscente dal centro di essa e con essa mobile, il luogo del punto

---

(1) Necessariamente, devono essere: $a > 1$ e $b < 1$.
Da queste equazioni si ricavano due altre proprietà della quadratrice facili a dimostrarsi geometricamente, cioè:

$$x : k = \varphi : \operatorname{tag} \varphi; \qquad \rho : k = \varphi : \operatorname{sen} \varphi.$$

(2) CHASLES, nella ricordata *Aperçu historique*, pag. 69, osserva che *la cicloide è l'inviluppo dello spazio percorso da un diametro del cerchio che rotola senza strisciare*; che le epicicloidi sono suscettibili anche di una doppia generazione simile; e che se, in luogo di un diametro, si considera nel cerchio mobile una corda qualunque, il suo inviluppo è una sviluppante di epicicloide.

è una cicloide allungata od accorciata, a seconda che la sua distanza dal centro è minore o maggiore di r [1].

Le equazioni:

$$x = r\varphi - a \operatorname{sen} \varphi$$
$$y = r - a \cos \varphi$$

dove a è la distanza del punto dal centro, danno la cicloide allungata, ordinaria, accorciata, secondo che a è minore, ugnale, maggiore di r; esse possono anche scriversi, ponendo $\frac{a}{r} = m$:

$$x = r(\varphi - m \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi) \; [2].$$

2. Ricordo altresì che la curva: $y = \operatorname{sen} x$ è detta sinusoide, se $x = \varphi$ è la lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio *uno*, corrispondente all'angolo φ; con un cambiamento dell'unità di misura, l'equazione di essa può prendere la forma:

$$x = r\varphi; \qquad y = r \operatorname{sen} \varphi,$$

dove r può rappresentare il raggio di un cerchio, e φ l'angolo al centro che insiste sull'arco x.

Si trasporti l'origine delle coordinate, conservando gli assi paralleli a sè stessi, nel punto: $x = -\frac{\pi r}{2}$; $y = -r$ e si ponga in luogo delle nuove coordinate e di $\varphi + \frac{\pi}{2}$, ancora x, y, φ; allora la sinusoide riferita ai nuovi assi è data da:

$$x = r\varphi$$
$$y = r(1 - \cos \varphi).$$

Sotto questa forma però essa è stata nota col nome di *compagna della cicloide*; il Montucla, nella sua storia [3], dopo aver detto che essa era stata prima chiamata *piccola cicloide*, osserva come *una*

---

[1] V., ad esempio: Berzolari, *Geometria analitica, Metodo delle coordinate*, Hoepli, 1911, pag. 140 e 263. — Loria, *Poliedri curve e superficie secondo i metodi della geometria descrittiva*. Hoepli, 1912, pag. 101. — Pascal, *Calcolo integrale*, Hoepli, 1895, pag. 177 e 222.

Credo utile osservare che taluni (come: Todhunter, *Calcolo differenziale*, Trad. Battaglini. Napoli, 1880, pag. 383) scambiano fra loro i due nomi di allungata ed accorciata.

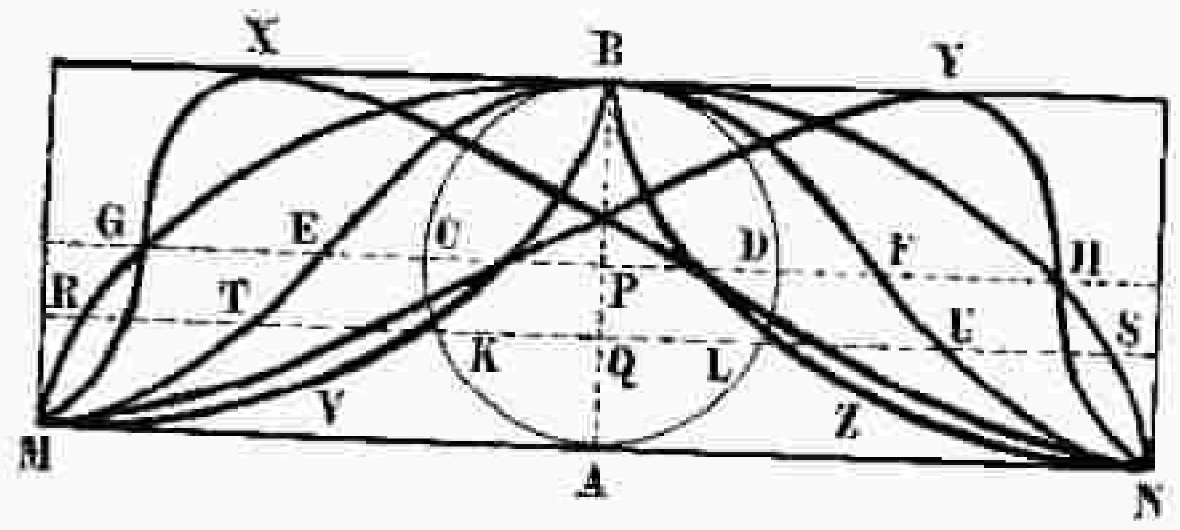
[2] Per particolareggiate notizie storiche, v. Montucla, storia cit., tomo II, da pag. 52 a 72; Hoefer, *l. c.*, pag. 413 e 543; e per le proprietà qualunque trattato di geometria analitica, calcolo, meccanica.

Ad esempio nelle: *Applicazioni geometriche ed analitiche del calcolo differenziale ed integrale* del Werner, Milano, Richiedei, 1895, trovansi determinati della cicloide: equazioni, tangente, normale, sottotangente, sottonormale, raggio di curvatura, centro del cerchio di curvatura, differenziale di arco, rettificazione di arco, area della cicloide e della superficie generata rotando intorno all'asse, e volume di questo solido.

[3] Tomo II, pag. 72-73.

parte di essa sia proprio la sinusoide, senza però mostrarne l'identità completa; tale identità è forse sfuggita anche al Todhunter ed al suo traduttore Battaglini [1], posteriori a lui di un secolo, e quasi nostri contemporanei, per quanto il nome di sinusoide le fosse già stato dato da Leibniz [2].

È notevole che *si ottiene una sinusoide, se si conducono per i punti di una circonferenza un fascio di parallele, e si limitano queste simme-*



tricamente al diametro ad esse perpendicolare, in modo che ognuna eguagli quello dei due archi (che ciascuna determina sulla circonferenza) *che contiene lo stesso estremo di detto diametro*; cioè in modo che sia

$$\overline{EF} = \widehat{CBD}, \qquad \overline{TU} = \widehat{KCBDL},$$

ossia:

$$\overline{EP} = \widehat{CB}\,; \qquad \overline{TQ} = \widehat{KCB}, \text{ ecc.} \ldots$$

Ed è pure notevole quest'altra sua generazione: *data la cicloide ordinaria* MGBHN, *ed il suo cerchio generatore di diametro* AB, *preso come asse* y, *si diminuiscano, simmetricamente ad* AB, *le ascisse dei punti della cicloide, delle ascisse dei corrispondenti punti del cerchio generatore; la curva risultante è ancora la sinusoide* (come si potrebbe, anche in questo caso facilmente verificare), cioè sia:

$$EP = GP - CP\,; \quad TQ = RQ - KQ\,; \quad PF = PH - PD, \text{ ecc.} \ldots$$

Aggiungerò che Pitot (1695-1771), a cui è dovuta la denominazione di linee a doppia curvatura, ha per primo osservato che *la sinusoide è ciò che diviene nello sviluppo di un cilindro circolare retto su un piano tangente, l'ellisse determinato su esso da un piano secante inclinato di 45° sull'asse*; ed ha osservato che *è anche la proiezione su un piano parallelo all'asse del cilindro, di un'elica su esso tracciata.*

3. A questo punto, anzichè trattare delle note proprietà delle due curve, mi sia concesso aprire una breve parentesi.

Si sa che, data una funzione, la curva rappresentatrice di essa, può solo dipendere dalla scelta dell'unità di misura, come è il caso della sinusoide, e che al variare dell'unità prescelta, la curva varia

(1) V. Todhunter, *l. c.*, pag. 384 e *Calcolo integrale*, pag. 122.
(2) V. Chasles, *l. c.*, pag. 139, Nota 1ª.

nel piano in grandezza, talchè, se si assume tale unità nella sua equazione come parametro, al variare di questo si ottengono le diverse curve di una famiglia di linee simili.

Se si variasse l'unità di misura delle sole ascisse, o delle sole ordinate, o di entrambi disugualmente, si avrebbero curve deformate (*affini*) rispetto a quella di partenza; ma non a tutte le variazioni di unità corrisponderebbero curve di forma diversa; poichè ne potremmo avere di simili; così ponendo: $x = x'$, $y = ay'$; e $x = \frac{1}{a} x'$, $y = y'$ otterremmo due curve simili; infatti se si prendesse per quest'ultima come nuova unità un segmento a volte maggiore, tanto per le x che per le y, la curva non varierebbe di forma e riprodurrebbe la prima.

Se si facessero: $x = ax'$; $y = by'$ la curva risulterebbe simile a quella che si otterrebbe facendo:

$$x = x', \quad y = \frac{b}{a} y'; \qquad \text{o} \qquad x = \frac{a}{b} x', \quad y = y';$$

quindi la diversa variazione della unità di misura delle due coordinate, ci dà una curva di cui si può avere la simile variando solo una delle coordinate.

4. Ciò premesso, se nell'equazione della sinusoide:

$$y = \operatorname{sen} x$$

od anche, nell'altra più generale, che si ottiene spostando l'origine delle coordinate di c sull'asse delle x:

$$y = \operatorname{sen} (x - c)$$

si facesse: $x = ax'$, $y = by'$, si otterrebbe la *curva sinusoidale*, che si incontra nella teoria dei movimenti vibratori:

$$y = \frac{1}{b} \operatorname{sen} (ax + c)$$

di forma analoga alla sinusoide [1].

Orbene, tale curva è simile a quella che si otterrebbe ponendo: $x = x'$, $y = \frac{b}{a} y'$; ossia alla:

$$y = \frac{a}{b} \operatorname{sen} (x + c);$$

e ponendo: $c = 0$; $\frac{a}{b} = m$, si ha, per $x = \varphi$:

$$y = m \operatorname{sen} \varphi$$

---

[1] V. Castelnuovo, citata *Geometria analitica*, pag. 105.

e per: $x = r\varphi$:

$$y = mr \operatorname{sen} \varphi.$$

Con un cambiamento dell'origine degli assi, analogo a quello già fatto per la sinusoide, si ottengono:

$$x = r\varphi$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

le quali dunque rappresentano una curva sinusoidale simile alla: $y = \frac{1}{b} \operatorname{sen}(ax + c)$, che potrà ottenersi in grandezza e posizione, prendendo: $x = ax'$; $y = ay'$ e spostando convenientemente l'origine degli assi.

5. Riepilogando, le equazioni:

$$x = r(\varphi - m \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

al variare di m danno *cicloidi allungate, ordinarie, accorciate*, secondo che: $m \lesseqgtr 1$; e, parimenti, le equazioni:

$$x = r\varphi$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

al variare di m danno *curve sinusoidali* o *sinusoidi allungate, ordinarie, accorciate*, secondo che: $m \lesseqgtr 1$.

6. Ricordando ora l'osservazione fatta, che l'ascissa del centro del cerchio generatore della cicloide è: $x = r\varphi$, concludo che:

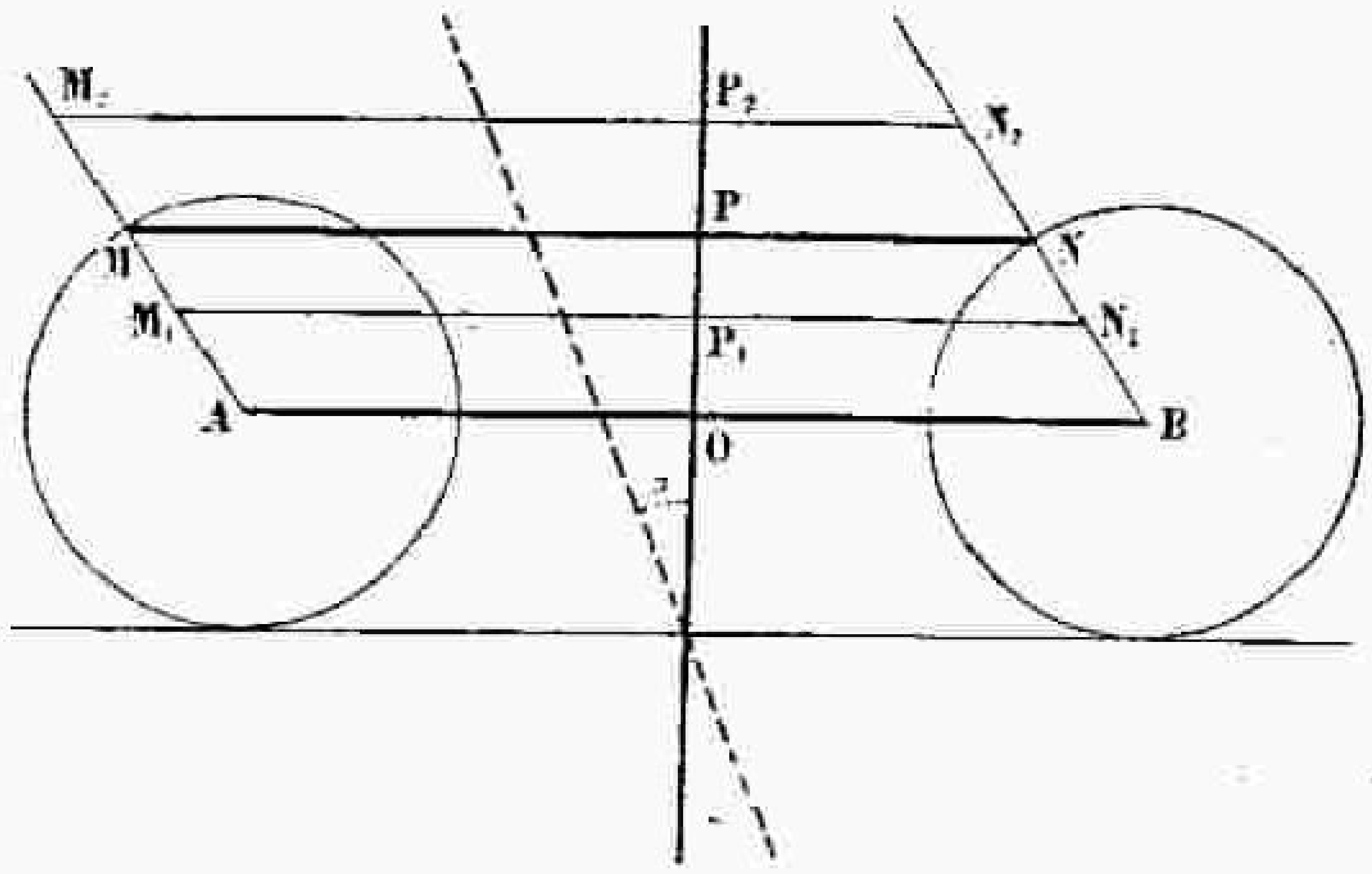
I punti della sinusoide allungata, ordinaria, accorciata, hanno, per ascisse, le successive ascisse del centro di un cerchio rotante su una retta, e, per ordinate, le ordinate dei corrispondenti punti della cicloide allungata, ordinaria accorciata, da esso generata.

Ciò risulta più chiaro se osserviamo che il parametro che compare nella equazione della cicloide è: $m = \frac{a}{r}$; quello della sinusoide è: $m = \frac{a}{b}$; e poichè vedesi che in questa, dei valori a e b, interessa solo il rapporto, può farsi $b = r$; allora i due parametri divengono eguali per eguali valori dei numeratori; ossia per avere una certa sinusoide allungata, ordinaria, accorciata, in cui il rapporto della unità delle ascisse a quella delle ordinate sia m, basterà, essendo $mr = a$, descrivere con un cerchio di raggio r la cicloide il cui punto generatore sia a distanza a dal centro, e costruire la curva i cui punti abbiano le coordinate determinate nel modo su detto.

7. È ora facile trovare il sistema meccanico capace di darci sinusoidi allungate, ordinarie, accorciate, insieme ad analoghe cicloidi.

Due cerchi A e B possano ruotare, senza strisciare, su una retta e nello stesso piano, mantenendo costante la distanza dei loro centri, e un punto M della circonferenza A e un punto N della circonferenza B sieno uniti con un segmento uguale e parallelo ad AB; i punti della MN, al ruotare dei cerchi, descrivono cicloidi.

Se in un punto qualunque O della AB, è fissata la OP, normale ad essa, per quanto si è detto, il luogo dei punti P è una sinusoide; se la MN è parallela ed uguale ad AB, ma se M ed N non sono sulle circonferenze, ma su semirette parallele uscenti dai centri A



e B, i punti della M_1N_1 o della M_2N_2 descrivono cicloidi allungate od accorciate, ed il luogo dei punti P_1 e P_2 è rispettivamente una sinusoide allungata o accorciata.

8. Il *sinografo* si comporrà dunque di una riga sollevata dal piano del disegno, lungo la quale, parallelamente a questo, possano scorrere due ruote A e B, sostenute superiormente da un telaio che porta i loro assi e che sostiene pure due rotelle che scorrono lungo il bordo opposto della riga, contro la quale sono premute da molle con regolatori di tensione; il telaio porterà inoltre, fra la riga e il piano del disegno, un'asta OP con scanalatura atta a guidare, per mezzo di apposito perno, il movimento di un carrello scorrevole lungo la MN e portante una punta scrivente; la OP avrà alle estremità due rotelle di sostegno; ed il telaio un manubrio per imprimere il movimento.

La MN poi sarà mobile, al disotto delle ruote A e B, lungo due aste parallele uscenti dal centro, e fissabile parallelamente a sè stessa; questa disposizione permetterà di ottenere sinusoidi non ordinarie; le cicloidi si otterranno fissando il carrello in un punto qualunque della MN e rendendolo indipendente dall'azione della OP.

Un pantografo che avesse l'estremo di un braccio esterno fissato al carrello nel punto P, e l'estremo centrale fissato in un punto qualunque della retta su cui rotolano i cerchi, descriverebbe con l'altro estremo una curva capovolta, simile, e dalla banda opposta a quella descritta dal punto P.

Sarebbe così possibile ottenere qualunque desiderata cicloide o sinusoide.

9. Osservo ancora che le equazioni:

$$x = r(\varphi + \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - \cos \varphi)$$

rappresentano pure una cicloide; infatti poniamo:

$$x' = \pi r - x$$
$$y' = 2r - y$$
$$\varphi' = \pi - \varphi$$

otteniamo:

$$x' = \pi r - r(\pi - \varphi') - r \operatorname{sen}(\pi - \varphi') = r\varphi' - r \operatorname{sen} \varphi' = r(\varphi' - \operatorname{sen} \varphi')$$
$$y' = 2r - r + r \cos(\pi - \varphi') = r - r \cos \varphi' = r(1 - \cos \varphi');$$

le posizioni fatte equivalgono ad uno spostamento dell'origine degli assi coordinati e all'inversione del senso positivo su di essi; le equazioni proposte rappresentano quindi una cicloide capovolta e spostata di πr, ma uguale alla cicloide

$$x = r(\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - \cos \varphi);$$

sono anzi le equazioni della curva simmetrica di questa rispetto alla sinusoide: $x = r\varphi$; $y = r(1 - \cos \varphi)$; dunque essa è descrivibile dal sinografo (è la curva MVBZN della figura).

Con analoghe considerazioni si vede che:

$$x = r(\varphi + m \operatorname{sen} \varphi)$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

sono le equazioni della cicloide allungata od accorciata, simmetrica della: $x = r(\varphi - m \operatorname{sen} \varphi)$; $y = r(1 - m \cos \varphi)$ rispetto alla sinusoide:

$$x = r\varphi$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

e quindi rispetto a quella uguale, capovolta e spostata di πr, ma compresa sempre fra le stesse parallele all'asse x.

10. Se la OP, anzichè esser perpendicolare alla AB, formasse con la normale l'angolo α, il luogo dei punti di intersezione della MN con la OP non sarebbe più una sinusoide; ma le equazioni della curva sarebbero:

$$x' = x \pm y \operatorname{tag} \alpha$$
$$y' = y$$

a seconda del segno di α, ossia a seconda che la OP è inclinata a destra od a sinistra della normale alla AB; posto: $\frac{\operatorname{tng} \alpha}{r} = n$, spostando convenientemente l'origine delle coordinate, si hanno, per la curva, le equazioni:

$$x = r(\varphi + n \cos \varphi)$$
$$y = r(1 - \cos \varphi)$$

o

$$x = r(\varphi - n \cos \varphi)$$
$$y = r(1 - \cos \varphi)$$

a seconda della inclinazione della OP; diremo la prima: *clinosinoide sinistra*, e la seconda: *clinosinoide destra*; le due curve sono simmetriche rispetto alle rette $x = (2h + 1)\pi r$. (In figura sono disegnate le due curve MGXN, MYHN, che si ottengono per $\alpha = 45^0$.)

II. Nella stessa ipotesi della OP inclinata di α, se la MN descrive cicloidi allungate od accorciate, si hanno, per il luogo delle intersezioni della OP con la MN, con opportuno cambiamento dell'origine degli assi, le equazioni:

$$x = r(\varphi \pm an \cos \varphi)$$
$$y = r(1 - m \cos \varphi)$$

dove il doppio segno è posto per distinguere se la curva è inclinata a destra od a sinistra, ed a, m, n, conservano il significato loro attribuito.

Se poi immaginiamo che il punto M vari sulla retta MA, per modo che la sua distanza a possa considerarsi anche negativa, le *equazioni più generali* della clinosinoide, o, semplicemente, *sinoide, allungata* o *ordinaria* o *accorciata, destra* o *sinistra, diritta* o *capovolta*, sono:

$$x = r(\varphi + a \cos \varphi)$$
$$y = r(1 + b \cos \varphi)$$

dove a e b sono costanti arbitrarie, variabili da $-\infty$ a $+\infty$.

Con i soliti spostamenti dell'origine delle coordinate, e cambiamento dell'unità di misura, esse si riducono alle:

$$x = h \cos \varphi + k\varphi$$
$$y = \cos \varphi$$

od alle

$$x = h \operatorname{sen} \varphi + k\varphi$$
$$y = \operatorname{sen} \varphi$$

con h e k variabili comunque.

12. Riepilogando, col sinografo possono descriversi le curve di equazioni:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\varphi + k\varphi \\ y = \cos\varphi \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = \cos\varphi + k\varphi \\ y = \operatorname{sen}\varphi \end{cases},$$

cioè le *cicloidi* (a queste possono facilmente ridursi le equazioni già date), e le *sinoidi* (di cui le sinusoidi sono caso particolare):

$$\begin{cases} x = h\operatorname{sen}\varphi + k\varphi \\ y = \operatorname{sen}\varphi \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x = h\cos\varphi + k\varphi \\ y = \cos\varphi \end{cases},$$

dove dalle variabili arbitrarie h e k dipendono la inclinazione della ΘP e la traslazione della MN.

13. Concluderò coll'osservare che il sinografo ci permette la risoluzione grafica di equazioni trascendenti diverse da quelle risolte col quadrografo; e, per esempio, ci dà i valori di φ che soddisfano alla equazione generale:

$$a\operatorname{sen}\varphi + b\varphi = c$$

od anche alla:

$$a\cos\varphi + b\varphi = c$$

con a, b, c, numeri qualunque, ma non posso qui darne esempi, per non avere ancora costruito neppure un modello degli strumenti ideati.

E. MOSCHETTI.

IL PENTAEDRO DI EGUAL MOMENTO NELL'S_4

e la prima ipersfera di Lemoine

1. Lavori sull'argomento, per quanto io sappia, non ne esistono e perciò credo opportuno esporre alcuni resultati, da me ottenuti in proposito, ai lettori del *Periodico.*

Converrà però, prima di entrare in dettagli, dire qualcosa sulla figura di S_4 che chiamo *pentaedro di ugual momento.*

Nell'S_4 prendiamo un tetraedro $B_1B_2B_3B_4$ regolare e un punto B_5 fuori dell'S_3 che contiene il tetraedro. Preso come polo B_5 e come potenza d'inversione k^2 facciamo un'inversione per raggi vettori reciproci, indicando con $A_1A_2A_3A_4$ i trasformati di $B_1B_2B_3B_4$.

Avremo, se i ed h sono differenti tra loro e da 5:

$$(A_iA_h) = (B_iB_h)\cdot\frac{k^2}{(B_5B_i)\cdot(B_5B_h)}, \qquad (1)$$

le misure intendendosi prese rispetto a un segmento u: mentre indicando con A_5 il punto B_5 quando lo si pensi come faciente parte della figura trasformata, si avrà, per i diverso da 5:

$$(A_iA_5) = \frac{k^2}{(B_5B_i)}. \tag{2}$$

Consideriamo ora il pentaedro $A_1A_2A_3A_4A_5$ ed esaminiamo i tetraedri che ne costituiscono le facce a tre dimensioni. Cominciamo da $A_1A_2A_3A_4$.

$$\left.\begin{aligned}
(A_1A_2).(A_3A_4) &= (B_1B_2).(B_3B_4).\frac{k^4}{(B_5B_1)(B_5B_2)(B_5B_3)(B_5B_4)} \\
(A_2A_3).(A_1A_4) &= (B_2B_3).(B_1B_4).\frac{k^4}{(B_5B_1).(B_5B_2).(B_5B_3)(B_5B_4)} \\
(A_3A_1).(A_2A_4) &= (B_3B_1).(B_2B_4).\frac{k^4}{(B_5B_1).(B_5B_2).(B_5B_3).(B_5B_4)}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e quindi — poichè il tetraedro $B_1B_2B_3B_4$ è regolare:

$$(A_1A_2).(A_3A_4) = (A_2A_3).(A_1A_4) = (A_3A_1).(A_2A_4).$$

Dunque il tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ è di ugual momento. Ma di ugual momento sono anche quelli che hanno un vertice in A_5: basta esaminarne uno, per esempio $A_5A_1A_2A_3$. Si ha

$$\left.\begin{aligned}
(A_5A_1).(A_2A_3) &= (B_2B_3).\frac{k^4}{(B_5B_1).(B_5B_2).(B_5B_3)} \\
(A_5A_2).(A_1A_3) &= (B_3B_1).\frac{k^4}{(B_5B_1).(B_5B_2).(B_5B_3)} \\
(A_5A_3).(A_1A_2) &= (B_1B_2).\frac{k^4}{(B_5B_1)\ (B_5B_2).(B_5B_3)}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Segue da queste:

$$(A_5A_1).(A_2A_3) = (A_5A_2).(A_1A_3) = (A_5A_3).(A_1A_2).$$

Concludiamo che esiste nell'S_4 un pentaedro tale che tutti i tetraedri che ne costituiscono le facce a tre dimensioni sono di egual momento. A un tal pentaedro dò il nome di *pentaedro di ugual momento*.

2. Preso ora un pentaedro $A_1A_2A_3A_4A_5$ come pentaedro di riferimento, fissiamo sopra l'S_1 di ogni spigolo una coppia di punti e sia P_{ik}, Q_{ik} quella scelta sulla retta dello spigolo A_iA_k. Se per i 20 punti P, Q passa un'ipersuperficie sferica, avranno luogo manifestamente le relazioni:

$$\left.\begin{aligned}
(A_1P_{12}).(A_1Q_{12}) &= (A_1P_{13}).(A_1Q_{13}) = (A_1P_{14})(A_1Q_{14}) = (A_1P_{15}).(A_1Q_{15}) \\
(A_2P_{12}).(A_2Q_{12}) &= (A_2P_{23}).(A_2Q_{23}) = (A_2P_{24})(A_2Q_{24}) = (A_2P_{25}).(A_2Q_{25}) \\
(A_3P_{13}).(A_3Q_{13}) &= (A_3P_{32}).(A_3Q_{32}) = (A_3P_{34}).(A_3Q_{34}) = (A_3P_{35}).(A_3Q_{35}) \\
(A_4P_{14}).(A_4Q_{14}) &= (A_4P_{34}).(A_4Q_{34}) = (A_4P_{24}).(A_4Q_{24}) = (A_4P_{45}).(A_4Q_{45}) \\
(A_5P_{15}).(A_5Q_{15}) &= (A_5P_{25}).(A_5Q_{25}) = (A_5P_{35}).(A_5Q_{35}) = (A_5P_{35}).(A_5Q_{35})
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Viceversa, se le (5) saranno soddisfatte, risultando in modo particolare soddisfatte per ogni tetraedro facente parte del pentaedro dato le note relazioni, se le condizioni esposte nel mio teorema fondamentale riguardo alla posizione dei punti sulle rette degli spigoli saranno verificate, si potrà concludere che i detti punti appartengono a un'ipersuperficie sferica.

In particolare, se si sappia che i punti P, Q, oltre che soddisfare le (5), sono *tutti interni* agli spigoli, si potrà concludere che esiste un'ipersuperficie sferica che li contiene: è questo appunto il caso della *prima ipersfera di Lemoine*; ma prima di entrare in argomento andiamo a scrivere le (5) sotto una forma più opportuna.

Poniamo:

$$\begin{cases} A_iP_{ik} : P_{ik}A_k = x'_{ik} \\ A_iQ_{ik} : Q_{ik}A_k = x_{ik} \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x'_{ik} = x'_{ki} \\ x_{ik} = x_{ki} \end{pmatrix} \tag{6}$$

convenendo che l'indice i sia minore dell'indice k. Calcolando allora gli elementi che figurano nella (5), queste potranno scriversi:

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= \frac{l^2_{12}x_{12}x'_{12}}{(x_{12}+1)(x'_{12}+1)} = \frac{l^2_{13}x_{13}x'_{13}}{(x_{13}+1)(x'_{13}+1)} = \\
&= \frac{l^2_{14}x_{14}x'_{14}}{(x_{14}+1)(x'_{14}+1)} = \frac{l^2_{15}x_{15}x'_{15}}{(x_{15}+1)(x'_{15}+1)} \\
p_2 &= \frac{l^2_{12}}{(x_{12}+1).(x'_{12}+1)} = \frac{l^2_{23}x_{23}x'_{23}}{(x_{23}+1)(x'_{23}+1)} = \\
&= \frac{l^2_{24}x_{24}x'_{24}}{(x_{24}+1)(x'_{24}+1)} = \frac{l^2_{25}x_{25}x'_{25}}{(x_{25}+1)(x'_{25}+1)} \\
p_3 &= \frac{l^2_{13}}{(x_{31}+1)(x'_{31}+1)} = \frac{l^2_{23}}{(x_{23}+1)(x'_{23}+1)} = \\
&= \frac{l^2_{34}x_{34}x'_{34}}{(x_{34}+1)(x'_{34}+1)} + \frac{l^2_{35}x_{35}x'_{35}}{(x_{35}+1)(x'_{35}+1)} \\
p_4 &= \frac{l^2_{14}}{(x_{41}+1)(x'_{41}+1)} = \frac{l^2_{24}}{(x_{24}+1)(x'_{24}+1)} = \\
&= \frac{l^2_{34}}{(x_{34}+1)(x'_{34}+1)} = \frac{l^2_{45}x_{45}x'_{45}}{(x_{45}+1)(x'_{45}+1)} \\
p_5 &= \frac{l^2_{15}}{(x_{15}+1)(x'_{15}+1)} = \frac{l^2_{25}}{(x_{25}+1)(x'_{25}+1)} + \\
&= \frac{l^2_{35}}{(x_{35}+1)(x'_{35}+1)} = \frac{l^2_{45}}{(x_{45}+1)(x'_{45}+1)}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

dove $p_1\, p_2\, p_3\, p_4$ e p_5 indicano le potenze dei vertici del pentaedro rispetto all'ipersfera dei 20 punti.

Teniamo presente la relazione:

$$\begin{aligned} p_1 = p_2x_{12}x'_{12} = p_3x_{12}x'_{12}x_{23}x'_{23} = p_4\,x_{12}x'_{12}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34} \\ = p_5x_{12}x'_{12}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}x_{45}x'_{45}. \end{aligned} \tag{8}$$

Confrontando tra loro le (7) avuto riguardo alla (8) si trova che a queste può sostituirsi il sistema (9):

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{l^2_{12}}{(x_{12}+1)(x'_{12}+1)}=\dfrac{l_{13}x_{23}x'_{23}}{(x_{13}+1)(x'_{13}+1)}=\dfrac{l_{23}x_{23}x'_{23}}{(x_{23}+1)(x'_{23}+1)}= \\
=\dfrac{l^2_{14}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}}{(x_{14}+1).(x'_{14}+1)}=\dfrac{l^2_{24}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}}{(x_{24}+1)(x'_{24}+1)}=\dfrac{l^2_{34}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}}{(x_{34}+1)(x'_{34}+1)}= \\
=\dfrac{l^2_{15}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}x_{45}x'_{45}}{(x_{15}+1).(x'_{15}+1)}=\dfrac{l^2_{25}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}x_{45}x'_{45}}{(x_{25}+1)(x'_{25}+1)}= \\
\qquad=\dfrac{l^2_{25}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}x_{45}x'_{45}}{(x_{35}+1)(x'_{35}+1)}=\dfrac{l^2_{45}x_{23}x'_{23}x_{34}x'_{34}x_{45}x'_{45}}{(x_{45}+1)(x'_{45}+1)}
\end{array}\right\} a) \\
\left.\begin{array}{l}
x_{13}\,.\,x'_{13}=x_{12}\,.\,x'_{12}\,.\,x_{23}\,.\,x'_{23} \\
x_{14}\,.\,x'_{14}=x_{12}\,.\,x'_{12}\,.\,x_{23}\,.\,x'_{23}\,.\,x_{34}\,.\,x'_{34} \\
x_{15}\,.\,x'_{15}=x_{12}\,.\,x'_{12}\,.\,x_{23}\,.\,x'_{23}\,.\,x_{34}\,.\,x'_{34}\,.\,x_{45}\,.\,x'_{45} \\
x_{24}\,.\,x'_{24}=x_{23}\,.\,x'_{23}\,.\,x_{34}\,.\,x'_{34} \\
x_{25}\,.\,x'_{25}=x_{23}\,.\,x'_{23}\,.\,x_{34}\,.\,x'_{34}\,.\,x_{45}\,.\,x'_{45} \\
x_{35}\,.\,x'_{35}=x_{34}\,.\,x'_{34}\,.\,x_{45}\,.\,x'_{45}\,.
\end{array}\right\} b)
\end{array}\right\} \quad (9)$$

3. Poniamo ora

$$\left.\begin{array}{l}
c_1^2=l_{23}\,.\,l_{45}=l_{24}\,.\,l_{35}=l_{25}\,.\,l_{34} \\
c_2^2=l_{13}\,.\,l_{45}=l_{14}\,.\,l_{35}=l_{15}\,.\,l_{34} \\
c_3^2=l_{12}\,.\,l_{45}=l_{14}\,.\,l_{25}=l_{15}\,.\,l_{24} \\
c_4^2=l_{13}\,.\,l_{25}=l_{12}\,.\,l_{35}=l_{23}\,.\,l_{15} \\
c_5^2=l_{12}\,.\,l_{34}=l_{23}\,.\,l_{14}=l_{13}\,.\,l_{24}
\end{array}\right\}. \qquad (10)$$

La costante generica c_i^2 sarà detta *costante del tetraedro di ugual momento opposto al vertice* A_i.

Dividiamo gli spigoli del pentaedro colla legge di divisione rappresentata per lo spigolo A_iA_h dalla relazione:

$$A_iP_{ih} : P_{ih}A_h = c_h^4 : c_i^4. \qquad (11)$$

Pel teorema di *Ceva* esteso al pentaedro gli iperpiani che proiettano i punti P_{ih} dagli S_2 opposti passano per un punto che diremo *punto di Lemoine del pentaedro di ugual momento* e indicheremo con K. Questo punto K è il punto comune agli S_1 che congiungono i vertici del pentaedro coi punti di *Lemoine* dei tetraedri di ugual momento che ne costituiscono le facce. Infatti la (11), nel caso particolare dello spigolo A_1A_2 dà:

$$\left.\begin{array}{l}
A_1P_{12} : P_{12}A_2 = c_2^4 : c_1^4 \\
\qquad = l^2_{13}\,.\,l^2_{45} : l^2_{23}\,.\,l^2_{45} = l^2_{13} : l^2_{23} \\
\qquad = l^2_{14}\,.\,l^2_{35} : l^2_{24}\,.\,l^2_{35} = l^2_{14} : l^2_{24} \\
\qquad = l^2_{15}\,.\,l^2_{34} : l^2_{25}\,.\,l^2_{34} = l^2_{15} : l^2_{25}
\end{array}\right\} \qquad (12)$$

Conduciàmo per questo punto K gli iperpiani paralleli a quelli delle facce: porremo perciò:

$$\left.\begin{aligned}
x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} &= \frac{c^4_2 + c^4_3 + c_4^4 + c_5^4}{c_1^4} \\
\frac{1}{x'_{12}} = x_{23} = x_{24} = x_{25} &= \frac{c_3^4 + c_4^4 + c_5^4 + c_1^4}{c_2^4} \\
\frac{1}{x'_{13}} = \frac{1}{x'_{23}} = x_{34} = x_{35} &= \frac{c_4^4 + c_5^4 + c_1^4 + c_2^4}{c_3^4} \\
\frac{1}{x'_{14}} = \frac{1}{x'_{24}} = \frac{1}{x'_{34}} = x_{45} &= \frac{c_5^4 + c_1^4 + c_2^4 + c_3^4}{c_4^4} \\
\frac{1}{x'_{15}} = \frac{1}{x'_{25}} = \frac{1}{x'_{35}} = \frac{1}{x'_{45}} &= \frac{c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4}{c_5^4}
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

giacchè il teorema di *Van Aubel* esteso al pentaedro il punto K divide, per es. la congiungente A_1 col punto di *Lemoine* K_1 del tetraedro di ugual momento $A_2A_3A_4A_5$ nel rapporto $\frac{c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4}{c_1^4}$.

Se ora andiamo a porre i valori (13) nelle formule (9) vediamo subito che le (b) sono identicamente soddisfatte, mentre le (a), dopo varie semplificazioni conducono alle relazioni:

$$\begin{aligned}
l^2_{12}c_1^4c_2^4 = l^2_{13}c_1^4c_3^4 = l^2_{14}c_1^4c_4^4 = l^2_{15}c_1^4c_5^4 = l^2_{23}c_2^4c_3^4 = \\
= l^2_{24}c_4^4c_4^4 = l^2_{25}c_2^4c_5^4 = l^2_{34}c_3^4c_4^9 = l^2_{35}c_3^4c_5^4 = l^2_{45}c_4^4c_5^4.
\end{aligned} \qquad (14)$$

Queste relazioni sono esse pure soddisfatte se si tien presente il quadro (10) giacchè ognuna delle espressioni precedenti vale $c_1^2 . c_2^3 . c_3^2 . c^2_4 . c_5^2$: verifichiamolo per una, per esempio, per la prima.

Si ha:

$$\left.\begin{aligned}
l^2_{12} . c_1^4 . c_2^4 &= l_{12} . l_{12} . c_1^2 . c_1^2 . c_2^2 . c_2^2 = \\
&= l_{12} . l_{12} . l_{23} . l_{45} . l_{24} . l_{35} . l_{13} . l_{45} . l_{14} . l_{35} \\
&= l_{12} . l_{12} . l_{23} . l_{15} . l_{24} . l_{25} . l_{43} . l_{45} . l_{14} . l_{35} \\
&= l_{12} . l_{12} . l_{13} . l_{35} . l_{24} . l_{35} . l_{43} . l_{45} . l_{14} . l_{35} \\
&= l_{12} . l_{15} . l_{13} . l_{25} . l_{24} . l_{35} . l_{43} . l_{45} . l_{14} . l_{23} \\
&= c_1^2 . c_2^2 . c_3^2 . c_2^4 . c_5^2 = p^{10} \\
&= \text{prodotto delle misure di tutti gli spigoli.}
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Andiamo a calcolare la lunghezza di $P_{12}P_{13}$. Dal triangolo $A_1P_{12}P_{13}$ segue:

$$(P_{12}P_{13})^2 = (A_1P_{12})^2 + (A_1P_{13})^2 - 2 . (A_1P_{12}) . (A_1P_{13}) . \cos A_2\widehat{A_1}A_3.$$

Se osserviamo che dalle (6), (13) segue

$$(A_1P_{12}) = \frac{l_{12}c_2^4}{S} \qquad (A_1P_{13}) = \frac{l_{13}c_3^4}{S}$$

dove si è posto
$$S = c_1^4 + c_2^4 + c_3^4 + c_4^4 + c_5^4,$$
facendo le sostituzioni ed esprimendo il coseno per l_{12}, l_{13}, l_{23}, si troverà, tenendo presenti le (14), (15):
$$(P_{12}P_{13}) = \frac{p^5}{S}. \tag{16}$$

Ugual lunghezza di $P_{12}P_{13}$ hanno anche
$$P_{12}P_{14},\quad P_{12}P_{15}.\quad P_{13}P_{14},\quad P_{13}P_{15},\quad P_{14}P_{15}.$$
Dunque il tetraedro $P_{12}P_{13}P_{14}P_{15}$ è *regolare*. E sono pure regolari, ed uguali a questo, anche i tetraedri
$$Q_{12}P_{23}P_{24}P_{25} - Q_{13}Q_{23}P_{34}P_{35} - Q_{14}Q_{24}Q_{34}P_{45} - Q_{15}Q_{25}Q_{35}Q_{45}.$$

4. Le formule
$$\left.\begin{array}{l} x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{15} \\ \dfrac{1}{x'_{12}} = x_{23} = x_{24} = x_{25} \\ \dfrac{1}{x'_{13}} = \dfrac{1}{x'_{23}} = x_{34} = x_{35} \\ \dfrac{1}{x'_{14}} = \dfrac{1}{x'_{24}} = \dfrac{1}{x'_{34}} = x_{45} \\ \dfrac{1}{x'_{15}} = \dfrac{1}{x'_{25}} = \dfrac{1}{x'_{35}} = \dfrac{1}{x'_{45}} \end{array}\right\} \tag{17}$$
definiscono una famiglia di ipersfere delle quali fa parte la *prima ipersfera di Lemoine*: diremo che queste costituiscono la *prima famiglia delle ipersfere di Tücker*.

Nell'ipotesi (17) le 9 (b) sono identicamente soddisfatte. Quanto alle 9 (a), se rimpiazziamo le $x_{12}x_{13}x_{14}x_{15}$ con a_1, le $\dfrac{1}{x'_{12}}x_{23}x_{24}x_{25}$ con a_2 e così via, esse divengono, dopo soppresso il fattor comune a_2:
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{l^2_{12}}{(a_1+1)(a_2+1)} = \dfrac{l^2_{13}}{(a_1+1)(a_3+1)} = \dfrac{l^2_{23}}{(a_2+1)(a_3+1)} = \\ = \dfrac{l^2_{14}}{(a_1+1)(a_4+1)} = \dfrac{l^2_{24}}{(a_2+1)(a_4+1)} = \dfrac{l^2_{34}}{(a_3+1)(a_4+1)} = \\ = \dfrac{l^2_{15}}{(a_1+1)(a_5+1)} = \dfrac{l^2_{25}}{(a_2+1)(a_5+1)} = \dfrac{l^2_{35}}{(a_3+1)(a_5+1)} = \dfrac{l^2_{45}}{(a_4+1)(a_5+1)} \end{array}\right\} \tag{18}$$

Chiamando λ il comune valore di questi rapporti, si ricava facilmente:
$$\frac{l^2_{12}\,.\,l^2_{13}}{(a_1+1)^2\,.\,(a_2+1)\,.\,(a_3+1)} : \frac{l^2_{23}}{(a_2+1)\,.\,(a_3+1)} = \lambda \tag{19}$$

da cui:

$$a_1 + 1 = \frac{l_{12} \cdot l_{13}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

e analogamente

$$\left.\begin{aligned} a_2 + 1 &= \frac{l_{12} \cdot l_{23}}{l_{13}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ a_3 + 1 &= \frac{l_{13} \cdot l_{23}}{l_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ a_4 + 1 &= \frac{l_{14} \cdot l_{24}}{l_{12}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ a_5 + 1 &= \frac{l_{25} \cdot l_{35}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

L'indeterminata λ è funzione simmetrica di secondo grado nelle l al suo variare si ottengono tutte le ipersfere della prima famiglia di *Tucker*: quella di *Lemoine* corrisponde al valore di λ dato dalla

$$\lambda = \frac{p^{10}}{S^2}. \tag{21}$$

Invero per le formule (13) e (20) si deve avere, per esempio:

$$a_1 + 1 = \frac{l_{12} \cdot l_{13}}{l_{23}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{S}{c_1^4}.$$

Di qui si trae

$$\lambda = \frac{l^2_{12} \cdot l^2_{13} \cdot c_1^8}{l^2_{23} \cdot S^2},$$

e altro non rimane da provare se non che essa è simmetrica e di secondo grado nelle l.

Si osservi in proposito che

$$\begin{aligned} \frac{l^2_{12} \cdot l^2_{13}}{l^2_{23}} \cdot c_1^8 &= \frac{l^2_{12} \cdot l^2_{13} \cdot c_1^2 \cdot c_1^2 \cdot c_1^2 \cdot c_1^2}{l^2_{23}} = \\ &= \frac{l_{12} \cdot l_{12} \cdot l_{13} \cdot l_{13} \cdot l_{23} \cdot l_{45} \cdot l_{23} \cdot l_{45} \cdot l_{24} \cdot l_{35} \cdot l_{25} \cdot l_{34}}{l^2_{23}} \\ &= l_{12} \cdot l_{12} \cdot l_{13} \cdot l_{13} \cdot l_{45} \cdot l_{45} \cdot l_{24} \cdot l_{35} \cdot l_{25} \cdot l_{34} \\ &= l_{14} \cdot l_{12} \cdot l_{13} \cdot l_{14} \cdot l_{23} \cdot l_{45} \cdot l_{24} \cdot l_{35} \cdot l_{25} \cdot l_{34} \\ &= l_{14} \cdot l_{12} \cdot l_{13} \cdot l_{15} \cdot l_{23} \cdot l_{45} \cdot l_{24} \cdot l_{35} \cdot l_{25} \cdot l_{34} \\ &= p^{10}. \end{aligned}$$

5. Quanto abbiamo esposto sopra si può facilmente estendere allo spazio con più dimensioni S_n. Senza entrare in dettagli ci basta osservare che la trasformazione per raggi vettori reciproci ci conduce facilmente all'esistenza di $(n+1)$-*edri* tali che *ogni* tetraedro contenuto in essi, cioè che abbia per vertici quattro dei loro vertici, sia di ugual momento: la figura da trasformarsi dev'essere un n-*edro regolare*.

Un $(n+1)$-*edro* potrà quindi dirsi di ugual momento quando tutti gli n-*edri* che ne costituiscono le facce sono di ugual momento.

Ci piace inoltre aggiungere che scelta sullo spigolo A_iA_k la coppia P_{ik}, Q_{ik} usando le formule (6), le equazioni che debbono esser soddisfatte perchè i punti P e Q siano sopra una ipersuperficie sferica sono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{l^2_{12}}{(x_{12}+1)(x'_{12}+1)} = \\
&\frac{l^2_{13}x_{23}x'_{23}}{(x_{13}+1).(x'_{13}+1)} = \frac{l^2_{23}x_{23}x_{23}}{(x_{23}+1)(x'_{23}+1)} = \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{l_{1h}x_{2h}\,.\,x'_{2h}}{(x_{1h}+1)\,(x'_{1h}+1)} = \ldots\ldots = \frac{l^2_{h-1.h}x_{2h}\,.\,x'_{2h}}{(x_{h-1.h}+1)\,(x'_{h-1.h}+1)} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{l_{1.n+1}x_{2.n+1}x'_{2.n+1}}{(x_{1.n+1}+1)\,(x'_{1.n+1}+1)} = \ldots = \frac{l^2_{n.n+1}x_{2.n+1}\,.\,x'_{2.n+1}}{(x_{n.n+1}+1)\,.\,(x'_{n.n+1}+1)} \\
&\text{con:} \\
&x_{p.h} = x_{p.p-1}\,.\,x'_{p.p+1}\,.\,x_{p+1p+2}\,.\,x'_{p-1p+2}\ldots x_{h-1.h}\,.\,x'_{h-1.h}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

dove p varia da 1 a $n-1$ e h da 3 a $n-1$ sempre che siano verificate le condizioni esposte nel mio teorema fondamentale.

E le $n+1$ equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{12} = x_{13} = \ldots = x_{1.n+1} \\
&\frac{1}{x'_{h1}} = \frac{1}{x'_{h2}} = \ldots = \frac{1}{x'_{h.h-1}} = x_{h.h+1} = x_{h.n+1}
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

dove h va da 2 a $n+1$, definiscono quella che, per analogia, chiameremo *prima famiglia delle ipersfere* di *Tucker relativa all'* $(n+1)$-*edro di ugual momento* $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$; famiglia di cui fa parte la *prima ipersfera di Lemoine.*

E. Piccioli.

BIBLIOGRAFIA

Opere matematiche di Luigi Cremona, pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. Tomo 1°. U. Hoepli, Milano, 1914. (¹)

Un Comitato, costituito sotto il patrocinio dell'Accademia dei Lincei (Presidente ULISSE DINI, Direttore della pubblicazione EUGENIO BERTINI) ha impreso a pubblicare le opere del padre della Geometria italiana e ce ne porge ora, in nitida veste, il primo volume.

Dire, a proposito di questo, della vita e dei caratteri generali della produzione scientifica cremoniana, sarebbe per un verso ripetere ciò che fu fatto da molti nell'ora non lontana in cui il grande geometra fu tolto alla patria, per l'altro anticipare sullo studio che il comitato ordinatore promette di darci nel terzo volume della pubblicazione.

Tuttavia il volume che abbiamo sott'occhio merita di essere salutato da una parola che lo richiami all'attenzione del pubblico e particolarmente dei giovani. Le dottrine che in esso sono trattate sono classiche; i principi della teoria delle curve piane, la cubica gobba, la quartica di seconda specie, la rigata del terzo grado che ne costituiscono i principali argomenti, figurano ormai, in Italia, nei corsi propedeutici alla Geometria superiore. Ma lo sviluppo che si dà a questi insegnamenti riesce necessariamente limitato da molteplici esigenze; e gli studiosi delle matematiche in generale o della Geometria in particolare poco vi si attardano, richiamati dai rapidi progressi della scienza, verso più alti problemi, che, superando la concezione puristica della Geometria, mirano ad illuminare il campo algebrico sotto diversi aspetti. Ora a questi studiosi, ed in special modo ai più giovani, crediamo di raccomandare la lettura e lo studio dell'opere del Cremona, quantunque e forse anzi per ciò che le vedute in essa dominanti possano apparire un po' lontane da quelle proprie del nostro tempo.

Il motivo di tale consiglio si riattacca ad una considerazione filosofica d'ordine generale e consiste nell'interesse che offre la storia delle scienze, nella tendenza ch'essa suggerisce o rafforza verso una concezione più libera dei problemi, nel freno salutare che ne deriva per ogni strettezza o particolarismo di scuola.

Ora l'opera cremoniana non è un capitolo qualsiasi nella storia delle matematiche italiane; è il capitolo che logicamente precede gli sviluppi della nostra scuola geometrica. E se — come ho ricordato poc'anzi — questa scuola è stata attratta da poderosi problemi, che sono ben degni dei nostri sforzi, non è detto che dallo stesso tronco su cui essa si è elevata, non possano sorgere altri rami fruttiferi.

In ogni caso la riflessione e la comprensione della ricerca geometrica del CREMONA è necessaria all'intelligenza piena dello spirito nuovo, quale si formò per il confluire di varie correnti ideali quando la Geometria proiettiva ebbe profondamente assimilati i concetti sintetici della teoria delle funzioni.

(¹) Siamo lieti di poter riprodurre, col consenso dell'Autore, questo interessante articolo bibliografico, che il ch. prof. ENRIQUES ha redatto per gli *Annali di Matematica*.

(N. della Redazione.)

L'opera del CREMONA segna un primo passo verso questa assimilazione; se pure le idee attinte dall'Algebra appaiano talvolta in codesto organismo geometrico come un imprestito fatto tacitamente. Si spiega così l'atteggiamento diverso e quasi opposto che si palesa nei discepoli, immediati continuatori dell'opera del maestro: la tendenza ad eliminare i concetti algebrici od analitici, edificando una teoria pura delle curve e delle superficie, e l'altra tendenza ad accogliere ed elaborare nella costruzione geometrica un più largo materiale analitico, sopprimendo infine la distinzione particolaristica.

Qui si rivelano istruttive perfino le mende che con savia e misurata prudenza gli editori hanno messo in vista nell'opera cremoniana: dico in ispecie qualche passaggio dove il requisito dell'algebricità non è esplicitamente enunciato come condizione necessaria per la validità dei teoremi; passaggio su cui richiamano l'attenzione del lettore opportune note poste in fine al volume.

Ma l'interesse più grande della lettura sta nella ricchezza di fantasia e nella concretezza dello spirito cremoniano: doti queste che spiegano l'ascendente esercitato dal maestro sulle giovani generazioni e lo straordinario impulso degli studi geometrici che ne è conseguito.

L'ordine cronologico seguìto nella pubblicazione che permette di vedere che dopo una nota attinente a ricerche di Geometria differenziale del Bordoni e un'altra di Algebra formale — i primi temi di ricerca suggeriti al CREMONA dall'attività del Brioschi — il genio del nostro si volse al campo della Geometria proiettiva attrattovi dalle brillanti ricerche di Chasles. Ma — sebbene destinato a svolgere l'indirizzo più astratto della scienza (in rapporto colle trasformazioni birazionali) — il CREMONA serbò pur sempre il gusto del metodo caratteristico della scuola francese. Parimente congiunse nel suo interesse gli argomenti di pura teoria e le applicazioni pratiche, come appare già dal volume in esame, il cui art. 26 concerne appunto la Prospettiva in rilievo di Poudra.

Il lavoro principale del volume, uno dei più importanti del Cremona e probabilmente quello che esercitò la più larga influenza didattica, è l'„Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane„ pubblicata già nelle Memorie dell'Accademia di Bologna del 1862.

Come è noto questa non è una costruzione interamente originale.

L'autore la presenta come un saggio, nato dal desiderio di dimostrare alcuni importanti teoremi enunciati da Steiner, e allargatosi ad un vero trattatello, in cui trovano posto nuovi resultati coordinati a quelli già conseguiti da Plücker, Cayley, Hesse, Clebsch, Salmon.... Pregio fondamentale dell'opera è il disegno sistematico della trattazione, che sostituisce al soccorso dell'analisi algebrica metodi sintetici di larga portata, ispirati dallo spirito geometrico di Poncelet, Chasles, Jonquières, Möbius....

Questo rapido cenno sembra sufficiente per lo scopo nostro, d'invogliare soprattutto i giovani alla approfondita lettura dell'opera cremoniana. Oltre alla bellezza delle ricerche e all'arte singolare dell'esposizione, vi troveranno essi un vivo sentimento del valore della scienza e dell'insegnamento. E qui basti ricordare il programma contenuto nella magnifica prolusione di Bologna del 1860, che è l'art. 25 del volume e le note storiche che ne costituiscono gli art. 22, 23.

Ci resta infine da rilevare la diligenza amorosa con cui l'edizione del volume è stata curata. La redazione originale del CREMONA è stata rispettata scrupolosamente, sia per la sostanza che per la forma, ma vi sono state introdotte opportunamente varie aggiunte che l'autore stesso appose manoscritte su qualche copia dei suoi lavori, probabilmente in vista di una nuova pubblicazione. Codeste aggiunte furono oggetto di rigoroso esame e di scelta per parte degli editori. Infine brevi e sobrie note, cui ho già accennato, servono a mettere davanti al lettore le lacune o le mende, a cui non si sarebbe potuto riparare senza alterare il carattere genuino dell'opera.

Così dunque la pubblicazione, già da questo primo volume, promette di riuscire sotto ogni riguardo degna del Maestro, che il concorde amore dei discepoli vuole far rivivere in mezzo alle più giovani generazioni scientifiche, e degna insieme della nostra Accademia che — onorando l'insigne geometra — ha felicemente espresso la gratitudine nazionale verso uno degli uomini che più hanno contribuito alla redenzione spirituale della nuova Italia.

Nel concetto del CREMONA — come in quello dei grandi fattori del nostro risorgimento — l'amore della scienza e l'amore della patria libera si fondevano in un unico ideale. " O giovani felici „ — esclamava egli chiudendo la sua prolusione sopra citata — " cui fortuna concesse di assistere ne' più begli anni della vita alla resurrezione della patria vostra, svegliatevi e sorgete a contemplare il novello sole che fiammeggia sull'orizzonte! Se la doppia tirannide dello sgherro austriaco e del livido gesuita vi teneva oziosi e imbelli, la libertà invece vi vuole operosi e vigili. Nelle armi e ne' militari esercizi rinvigorite il corpo; negli studî severi e costanti spogliate ogni ruggine di servitù e alla luce della scienza imparate a esser degni di libertà „.

FEDERIGO ENRIQUES.

CONFERENZA

DELLA COMMISSIONE INTERNAZIONALE DELL'INSEGNAMENTO MATEMATI

(Parigi, 1-4 Aprile 1914).

La *Commissione internazionale dell'insegnamento matematico* si è riunita nei primi giorni dello scorso aprile a Parigi nei locali della Sorbona allo scopo di discutere le due quistioni seguenti:

A) *Risultati ottenuti con l'introduzione del Calcolo differenziale ed integrale nelle classi superiori dell'insegnamento medio.*

B) *Della distribuzione e dello scopo delle matematiche nell'insegnamento tecnico superiore.*

Il giorno 1 aprile fu consacrato a riunione del Comitato centrale e dei delegati. La sera tutti i convenuti alla Conferenza presero parte ad una seduta straordinaria della *Società matematica di Francia*, alla quale seguì un trattenimento famigliare per fare le reciproche presentazioni e stabilire cordiali rapporti fra i congressisti intervenuti da tutti i paesi di Europa. L'Italia era rappresentata dai delegati prof. Castelnuovo ed Enriques, e dai professori Abraham, Fano, Lazzeri, Loria, Padoa.

Il giorno 2 alle 9 e mezzo ebbe luogo la solenne seduta di apertura sotto la presidenza del prof. DARBOUX, segretario perpetuo dell'Accademia di scienze, rappresentante il Ministro della Pubblica Istruzione di Francia, con intervento di un rappresentante del Presidente della Repubblica: parlarono applauditissimi il presidente Darboux, il prof. Castelnuovo in rappresentanza del prof. Klein, presidente della Commissione internazionale ed altri. La seduta si chiuse con una conferenza di Borel sull'*adattamento dell'insegnamento secondario ai progressi della scienza.*

Nella seduta pomeridiana dello stesso giorno 2 e nelle quattro sedute dei due giorni successivi 3 e 4 furono ampiamente trattati i due temi posti in discussione.

Quistione *A*). — La discussione s'iniziò in base ad una relazione generale del prof. Beke (dell'Università di Budapest) e ad una relazione supplementare (relativa alle scuole francesi) del prof. Bioche (del Liceo " Luigi il Grande „ di Parigi). La relazione del prof. Beke è un accurato e diligente lavoro in cui sono raccolti e vagliati i risultati ottenuti nei vari paesi sulla scorta di numerose relazioni particolari preparate dai vari Comitati nazionali. Sarebbe molto utile che fosse conosciuta e meditata da tutti gli insegnanti di matematica; e siamo dolenti di non poterla riassumere, poichè, sebbene occupi circa 40 pagine è essa stessa un riassunto; ma crediamo opportuno riportarne qualche brano che valga a dare un'idea approssimata del pensiero dell'egregio autore.

" La tendenza ad essere esatti, in tutte le ricerche, nel pensiero e nell'azione, ha rialzato il valore degli studi scientifici. Sembra che questa sia l'opinione predominante fra le personalità dirigenti dell'insegnamento secondario, comprese quelle che non hanno variato nel loro giudizio sul valore dell'insegnamento delle lettere. " Le lettere sono e resteranno (dice il signor Liard, vice-rettore dell'Accademia di Parigi, in una riunione tenuta al Museo pedagogico nel 1904) come per il passato, delle istitutrici provate che sarà impossibile sostituire nel loro dominio. Ma nel dominio delle scienze positive, si attendono dalle scienze effetti maggiori che per il passato per la formazione degli spiriti „. Questo cambiamento di valore educativo, attribuito alle scienze, esige che l'insegnamento delle matematiche, chiave di tutti gli studi scientifici, diventi più conforme all'idee nuove sulla formazione dello spirito. Esistono delle scienze che avendo sorpassato la fase che Picard, con frase felice, chiama *prematematica* della loro storia, hanno oltrepassato la soglia ove le matematiche cessano di essere un ornamento senza utilità, per diventare la lingua naturale del pensiero e delle deduzioni scientifiche e, per conseguenza, l'istrumento del progresso. Ne segue che l'abitudine delle matematiche e la conoscenza di certi elementi delle scienze matematiche che erano fino ad ora il privilegio di un piccolo numero di spiriti devono penetrare ormai negli strati più vasti dell'umanità „.

. . . .

" Quando la nostra Commissione delibera sulla trasformazione dell'insegnamento matematico per adattarlo alle cresciute esigenze della civilizzazione e dell'ideale di cultura dei nostri tempi, essa fa pure un passo nella via che si eleva al disopra delle aspirazioni nazionali, verso delle aspirazioni di umanità „.

La relazione termina dichiarando che il movimento riformista non è una rivoluzione, ma una tappa della evoluzione, e termina con queste parole:

" Con queste riforme noi lavoriamo non solamente al progresso dell'insegnamento matematico, ma anche all'evoluzione di tutta l'educazione. Dall'evoluzione dell'insegnamento matematico noi attendiamo una forte disciplina logica, una intuizione feconda, un vivo interesse per le quistioni pratiche, il sentimento delle realtà, l'apprezzazione giusta dei fatti, il metodo critico, l'abitudine del lavoro indipendente e soprattutto, la conoscenza e l'amore della verità. Tutto ciò insieme fa l'ideale supremo dell'educazione, la quistione primordiale della civilizzazione. Per servire quest'ideale, per risolvere questa quistione i professori dell'insegnamento secondario e superiore devono concentrare tutti i loro sforzi; se lo faranno, l'avvenire sarà ben preparato „.

Dalla discussione apparve che le idee del relatore, sebbene non senza contrasti, raccoglievano l'adesione della gran maggioranza.

QUISTIONE *B)*. — La discussione si aprì in base ad una bella relazione del prof. D'OCAGNE dal titolo: *L'ufficio delle matematiche nella scienza dell'ingegnere*. In sostanza egli affermò la necessità di una solida cultura matematica per i giovani allievi ingegneri; ed è confortante che tale affermazione sia fatta da uno che, come il D'Ocagne, è non solo un matematico, ma è anche e soprattutto un valente ingegnere.

Così è da sperare che, se i programmi del primo biennio di matematiche hanno dovuto subire delle gravi riduzioni ed amputazioni per piegarsi alle esigenze dei tempi, queste riduzioni saranno però contenute entro limiti tali che non compromettano la serietà e la dignità degli studi scientifici.

I professori francesi accolsero nel modo più cordiale e simpatico i colleghi degli altri paesi. Terminati i lavori della Conferenza il principe Rolando Bonaparte, membro dell'Istituto, convitò i congressisti ad un brillantissimo ricevimento nel suo splendido palazzo dell'Avenue d'Iena la sera del 4.

Riassumendo, si può affermare sicuramente che la Conferenza di Parigi ha avuto una notevole importanza. Essa non ha certamente stabilito qual sarà l'assetto definitivo delle scuole medie e superiori dei vari paesi in un avvenire più o meno prossimo; ma ha rilevato che siamo in un periodo di trasformazione e di transizione; che dappertutto si tende ad introdurre nell'insegnamento matematico un soffio di vita nuova, spogliandolo di tutto quello che ha ancora di accademico e di scolastico, e mettendolo più alla portata di tutti e cercando di rendere le matematiche uno strumento pratico e sicuro a servizio di tutte le scienze.

Fino ad ora l'insegnamento matematico delle scuole medie si è limitato a quelle nozioni geometriche che erano conosciute dai greci di venti secoli fa e all'algebra elementare. Tutto lo splendido edificio matematico creato dal genio dell'uomo negli ultimi secoli doveva essere riserbato all'Università ed era vietato agli studenti delle scuole medie di volgere a questo i loro sguardi. Chi ha assistito alla conferenza ha dovuto convincersi che presto o tardi dovrà schiudersi una nuova êra: che le barriere, le quali oggi separano così nettamente le matematiche delle scuole medie da quelle delle scuole superiori son destinate a cadere; che i futuri studenti di liceo dovranno nutrire il loro intelletto non solo col pensiero di Euclide e di Archimede, ma anche con quello di Newton e di Leibnitz, di Descartes e di Monge. Resta a determinarsi in che forma e in che misura, ma anche questo si troverà: ormai tutti i paesi sono incamminati per questa via.

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo: *Su alcune notevoli formule di analisi combinatoria* del prof. TRAVERSO, pubblicato nel fascicolo III, a pagina 98, nelle formule (1') e (1''), invece di:

$$\binom{p+k+1}{k+i+1}, \quad \text{leggasi:} \quad \binom{p+k+1}{k+i-1}.$$

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 Maggio 1914

Sulle equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine a coefficienti costanti e su alcune particolari equazioni ricorrenti lineari di ordine superiore al 2°.

(Continuaz. e fine — v. fasc. precedente)

IV. — Casi particolari notevoli dell'equazione ricorrente lineare del 2° ordine.

Le equazioni ricorrenti della forma (9) si differenziano esclusivamente per i valori dei coefficienti p e q. Molte sono le ipotesi possibili a tal riguardo; esamineremo quelle che ci sembrano in qualche modo degne di nota, rilevando in ciascun caso la particolare forma assunta da u_n, v_n, che sono i termini generali delle successioni che più ci interessano, perchè fondamentali. In tutte le ipotesi considerate r risulta intero, eccetto un caso nel quale $r = \frac{1}{9}$.

1°. Sia $p = +1$; $q = s(s+1)$, cioè q sia il prodotto di due interi (o anche semplicemente razionali) aventi per differenza 1. Avremo:

$$a = \frac{1}{2}; \quad b = \frac{2s+1}{2}; \quad a + b = s + 1; \quad a - b = -s.$$

Risulta: $r = (2s+1)^2$. Le (8) diventano:

$$u_n = \frac{(s+1)^n + (-1)^n s^n}{2}; \qquad v_n = \frac{(s+1)^n + (-1)^{n-1} s^n}{2s+1}.$$

Di queste la 2ª è valida soltanto se $2s + 1 \neq 0$. Nella stessa ipotesi la 1°, 6°, 7° della (13) diventano:

$$\eta_n = \frac{(s+1)^{n-1}(\eta_2 + s\eta_1) + (-1)^{n-1} s^{n-1} \{(s+1)\eta_1 - \eta_2\}}{2s+1}$$

$$\eta_{n+2} + \eta_n = \frac{(s+1)^{n-1}(s+2)(\eta_2 + s\eta_1) + (-1)^n s^{n-1}(s-1)\{(s+1)\eta_1 - \eta_2\}}{2s+1}$$

$$\eta_{n+2} - \eta_n = \frac{(s+1)^{n-1} . s . (\eta_2 + s\eta_1) + (-1)^n s^{n-1}(s+1)\{(s+1)\eta_1 - \eta_2\}}{2s+1}$$

valide per qualsiasi successione $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots$ risolvente l'equazione

$$\eta_n = \eta_{n-1} + s(s+1)\eta_{n-2}. \text{ [1]}$$

---

[1] Di altre proprietà di tali successioni è fatto cenno nella nota citata *Periodico*, fasc. IV 1904

2°. Sia $p = -1$; $q = s(s+1)$ talchè:

$$a = -\frac{1}{2}; \quad b = \frac{2s+1}{2}; \quad a + b = 1; \quad (a - b) = -(s+1);$$
$$r = (2s+1)^2.$$

Si ha dalle (8″) ed (11)

$$u_n = \frac{s^n + (-1)^n (s+1)^n}{2}; \qquad v_n = \frac{s^n + (-1)^{n-1} (s+1)^n}{2s+1}.$$

Di esse la 2ª vale se $2s + 1 \neq 0$. Con tale ipotesi le 1ª, 2ª, 7ª delle (13) diventano:

$$\eta_n = \frac{s^{n-1} \{\eta_2 + (s+1)\eta_1\} + (-1)^{n-1} (s+1)^{n-1} (s\eta_1 - \eta_2)}{2s+1}$$

$$\eta_{n-1} + \eta_n = \frac{s^{n-1} (s+1) \{\eta_2 + (s+1)\eta_1\} + (-1)^n (s+1)^{n-1} s (s\eta_1 - \eta_2)}{3s+1}$$

$$\eta_{n-2} - \eta_n = \frac{s^{n-1} (s-1) \{\eta_2 + (s+1)\eta_1\} + (-1)^n (s+1)^{n-1} (s+2)(s\eta_1 - \eta_2)}{2s+1}$$

valide per ogni successione $\eta_1, \eta_2, \ldots$ risolvente l'equazione

$$\eta_n = -\eta_{n-1} + s(s+1)\eta_{n-2}.$$

3°. Sia $p = \frac{1}{k}$ (k intero diverso da zero). Risulta $r = 4qk^2 + 1$ che sarà intero se tale è $4qk^2$. Basta ad es. che q sia intero, od anche:

$$q = p = \pm \frac{1}{2}; \qquad q = p = \pm \frac{1}{4}.$$

Considerazioni particolari faremo in seguito sul caso $p = q = \frac{1}{2}$.

4°. Sia $q = sp^2$, s essendo intero. Risulta $r = 4s + 1$. Es. $q = p^2$, $s = 1$, $r = 5$.

5°. Il caso 4° è particolare rispetto al seguente. Sia $q = sh^2$; $p = s'h$; $4s = k \,.\, s'^2$. (s, s', k interi non nulli). Risulta $r = k + 1$. Es.

$$s' = \pm 1; \qquad k = 4s; \qquad r = 4s + 1.$$

Se $s' = 1$ e quindi $p = h$; $q = sp^2$, si ha il caso n. 4°.

Se $s' = \pm 2$ risulta $k = s$; $r = s + 1$. Es.

$$s' = 2; \qquad h = 1; \qquad s = q; \qquad k = q; \qquad r = q + 1;$$

si ha il caso delle equazioni per le quali $p = 2$, che esaminiamo a parte al n. 7°.

6°. Sia $q = p^{2m}$, p essendo intero ed m intero positivo non nullo. Risulta $r = 4p^{2m-2} + 1$. Es. $q = p^2$; $m = 1$; $r = 5$. In particolare se $p = \alpha^s$; $q = \alpha^{2s}$ si ha: $r = 5$ qualunque siano α ed s.

7°. Sia $p=2$ talchè: $a=1$; $b=\sqrt{q+1}$; $r=q+1$, sarà intero se lo è q. L'equazione (9) diventa: $\eta_n=2\eta_{n-1}+(r-1)\eta_{n-2}$ cui soddisfano pure le successioni $u_1, u_2, \ldots$; $v_1, v_2, \ldots$. Esse sono:

$$1,\quad r+1,\quad 3r+1,\quad r^2+6r+1,\quad 5r^2+10r+1,\ \ldots\ldots (u)$$
$$1,\quad 2,\quad r+3,\quad 4r+4,\quad r^2+10r+5\ \ldots\ldots (v)$$

Dalle (8') ed (11) si ha:

$$\left.\begin{array}{l} u_n=\dfrac{(1+\sqrt{r})^n+(1-\sqrt{r})^n}{2}=\sum\limits_{0,2,\ldots n'} \binom{n}{i} r^{\frac{i}{2}} \\ v_n=\dfrac{(1+\sqrt{r})^n-(1-\sqrt{r})^n}{2\sqrt{r}}=\sum\limits_{1,3,\ldots n''} \binom{n}{i} r^{\frac{i-1}{2}} \end{array}\right\} \tag{23}$$

Soltanto se $r \neq 0$ la frazione il cui denominatore è $2\sqrt{r}$ esprime il valore di v_n.

Essendo $a=1$; $b^2-a^2=q$; $a^2+b^2=q+2$, le (7) assumono forma speciale. Ad es. la 3ª diventa:

$$u_n=v_{n-1}-v_n\,.$$

Casi speciali si hanno attribuendo ad r i valori $0, 1, 2, \ldots$.

(a) Sia $p=2$; $q=-1$; $a=1$; $b=0$; $r=0$. Si ha:

$$u_n=1\,;\qquad v_n=n.$$

Dalla (12''), o dalla 3ª delle (13), si ha:

$$\eta_n=(n-1)\,\eta_2+(2-n)\,\eta_1$$

cui soddisfano tutte le soluzioni $\eta_1, \eta_2, \ldots$ dell'equazione

$$\eta_n=2\eta_{n-1}-\eta_{n-2}.$$

(b) Sia $p=2$; $q=0$; $a=1$; $b=1$; $r=1$. Sarà: $\eta_n=2\eta_{n-1}$ le $\eta_1, \eta_2, \ldots$ costituiscono una progressione geometrica con ragione uguale a 2.

(c) Sia $p=2$; $q=1$. Risulta $r=2$ (successioni di Pell). [1]

Le successioni delle u e v sono:

$$1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99\ \ldots\ldots\ldots\ldots (u)$$
$$1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70\ \ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

e sussistono le relazioni:

$$\begin{aligned} u_n &= v_n+v_{n-1} \\ u_n &= 2v_n-u_{n-1} \\ v_n &= 3v_{n-1}-u_{n-2} \\ u_n &= (u_{n-1}+u_{n-2})+(v_{n-1}+v_{n-2}) \end{aligned}$$

facili a dimostrarsi.

---

[1] Questa ed altre successioni sono indicate coi nomi che esse hanno in LUCAS, *Théorie des nombres* — Cap. "Les fonctions numériques du second ordre".

(*d*) Sia $p = q = 2$. Risulta $r = 3$. Le successioni delle u e v sono:

1, 4, 10, 28, 76, 228. . . . . (u)
1, 2, 6, 16, 44, 120. . . . . (v)

Sussistono le relazioni:

$$u_n = 3v_n - 2u_{n-1}$$
$$v_{n+3} = 2(u_n + v_n + u_{n+1} + v_{n-1}).$$

(*e*) Sia $p = 2$, $q = 3$. Risulta $r = 4$.
Le successioni delle u e v, sono:

1, 5, 13, 41, 121, ... (u)
1, 2, 7, 20, 61, ... (v)

Si ha dalle (23):

$$u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2} = \sum_{0,2,\dots n'} i \binom{n}{i} 2^i$$
$$v_n = \frac{3^n + (-1)^{n-1}}{4} = \sum_{1,3,\dots n''} i \binom{n}{i} 2^{i-1}.$$

Inoltre [1]**:**

$$u_n = 2v_n + (-1)^n$$
$$u_n = 3u_{n-1} + (-1)^n \,.\, 2$$
$$v_n = 3v_{n-1} + (-1)^{n-1}$$
$$u_n = 2 \,.\, 3^{n-1} - u_{n-1}$$
$$v_n = 3^{n-1} - v_{n-1}.$$

La 1ª, 6ª, 7ª delle (13), poichè $a = 1$, $b = 2$, diventano dopo qualche trasformazione:

$$\eta_n = (\eta_2 + \eta_1) \frac{3^{n-1} + (-1)^n}{4} + (-1)^{n-1} \eta_1$$
$$\eta_{n+1} + \eta_n = (\eta_1 + \eta_2) \,.\, 3^{n-1}$$
$$\eta_{n+1} - \eta_n = (\eta_1 + \eta_2) \frac{3^{n-1} + (-1)^{n-1}}{2} + (-1)^n 2 \,.\, \eta_1$$

cui soddisfano le soluzioni $\eta_1, \eta_2, \dots$ dell'equazione

$$\eta_n = 2\eta_{n-1} + 3\eta_{n-2}.$$

(*f*) Sia $p = 2$; $q = 4$. Risulta $r = 5$.
Le successioni delle (u) e (v) sono:

1, 6, 16, 56, 176, ... (u)
1, 2, 8, 24, 80, ... (v)

---

[1] In questo caso ed in altri che esamineremo in seguito, otteniamo notevoli espressioni di u_n e v_n, sostituendo nelle (7), (1ª e 2ª) oppure nelle (7') ad a e b i loro valori.

Si constata subito che $\frac{u_n}{2^{n-1}}$ vale l'n^{mo} termine della successione di Leonardo Pisano incominciante con 1, 3 (per tali successioni $p=q=1$, cioè ciascun termine vale la somma dei due che lo precedono), e $\frac{v^n}{2^{n-1}}$ è l'$(n-1)^{mo}$ termine della analoga successione incominciante con 1, 1. Si passa infatti dal caso $p=2$, $q=4$, al caso $p'=q'=1$, moltiplicando p per $\frac{1}{2}$ e q per $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ (v. § 2°; passaggio dai coefficienti p, q, ai coefficienti ph, qh^2).

(g) Sia $p=2$; $q=8$ e quindi $r=9$.

Le successioni delle (u) e (v) sono:

$$1,\ 10,\ 28,\ 136,\ 496,\ 2080,\ \ldots\ldots\ldots\ldots (u)$$
$$1,\ 2,\ 12,\ 40,\ 176,\ 672,\ \ldots\ldots\ldots\ldots (v)$$

Si ha dalle (23):

$$u_n=\frac{4^n+(-2)^n}{2}=2^{2n-1}+(-1)^n\,2^{n-1}=\sum_{0,2,\ldots n'} i\binom{n}{i}3^i$$
$$v_n=\frac{4^n-(-2)^n}{6}=\frac{2^{2n-1}+(-1)^{n-1}\,2^{n-1}}{3}=\sum_{1,3,\ldots n''} i\binom{n}{i}3^{i-1}.$$

Inoltre:

$$u_n=3v_n+(-1)^n\,2^n$$
$$u_n=4u_{n-1}+(-1)^n\,.\,3\,.\,2^{n-1}$$
$$v_n=4v_{n-1}+(-1)^{n-1}\,.\,2^{n-1}.$$

La 1ª, 6ª, 7ª delle (13) diventano, dopo qualche trasformazione:

$$\eta_n=(\eta_2+2\eta_1)\frac{2^{2n-3}+(-1)^n\,2^{n-2}}{3}+(-1)^{n-1}\,.\,2^{n-1}\,\eta_1$$
$$\eta_{n-1}+\eta_n=(\eta_2+2\eta_1)\frac{5\,.\,2^{2n-3}+(-1)^{n-1}\,2^{n-2}}{3}+(-1)^n\,.\,2^{n-1}\,\eta_1$$
$$\eta_{n-1}-\eta_n=(\eta_2+\eta_1)\,2^{2n-3}+(-1)^{n-1}\,2^{n-2}\,\eta_2+(-1)^n\,2^n\,\eta_1$$

alle quali soddisfa ogni soluzione $\eta_1, \eta_2, \ldots$ dell'equazione

$$\eta_n=2\eta_{n-1}+8\eta_{n-2}.$$

8°. Sia $p=\pm q$. Essendo p e q interi, $r=\frac{4q+p^2}{p^2}=\pm\frac{4}{p}+1$, sarà intero soltanto se $p=\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$. I casi possibili sono:

p	+1,	+1,	−1,	−1,	2,	2,	−2,	−2,	4,	4,	−4,	−4
q	+1,	−1,	+1,	−1,	2,	−2,	2,	−2,	4,	−4,	4,	−4
r	5,	−3,	5,	−3,	3,	−1,	3,	−1,	2,	0,	2,	0.

Il caso $p=q=1$ è quello delle note successioni di Leonardo Pisano, nelle quali ciascun termine vale la somma dei due che lo precedono. Tratteremo in seguito i casi $p=1$; $q=-1$ e $p=2$, $q=-2$.

9°. Sia $p=4$. Essendo q intero, $r=\frac{q}{4}+1$ è intero soltanto se q è multiplo di 4 e quindi di p.

10°. Sia $p=q-1$. Se q è intero non nullo, $r=\left(\frac{q+1}{q-1}\right)^2$ sarà intero soltanto se $q=-1, 2, 3$ e corrispondentemente $p=-2, 1, 2$; $r=0, 9, 4$.

(*a*) Se $p=-2$, $q=-1$ si ha $a=-1$; $b=0$, $r=0$ e dalle (8') ed (11) (della 2ª delle (11) ci serviamo per avere l'espressione di v_n, poichè essendo $r=0$, la 2ª delle (8') non è valida), abbiamo:

$$u_n=(-1)^n; \qquad v_n=n(-1)^{n-1}.$$

Si ha poi:

$$\eta_n=(-1)^n(n-1)(\eta_1+\eta_2)+(-1)^{n-1}\eta_1$$
$$\eta_{n-1}+\eta_n=(-1)^{n-1}(\eta_1+\eta_2)$$
$$\eta_{n-1}-\eta_n=(-1)^{n-1}(2n-1)(\eta_1+\eta_2)+(-1)^n 2\eta_1$$

alle quali soddisfano le soluzioni $\eta_1, \eta_2 \ldots$ dell'equazione

$$\eta_n=-2\eta_{n-1}-\eta_{n-2}.$$

(*b*) Se $p=2$; $q=3$, risulta $a=1$, $b=2$, $r=4$. Si hanno le relazioni stabilite trattando il caso n. 7-*e*.

(*c*) Se $p=1$; $q=2$ risulta; $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{3}{2}$; $r=9$. Dalle (8') ed (11) si ha:

$$u_n=\frac{2^n+(-1)^n}{2}=\frac{1}{2^n}\sum_{0,2,\ldots n'} i \binom{n}{i} 3^i$$
$$v_n=\frac{2^n+(-1)^{n-1}}{3}=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{1,3,\ldots n''} i \binom{n}{i} 3^{i-1}.$$

Le successioni delle (u) e (v) sono:

$$\frac{1}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{7}{2},\quad \frac{17}{2},\quad \frac{31}{2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (u)$$
$$1,\quad 1,\quad 3,\quad 5,\quad 11\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (v)$$

e risulta:

$$u_n=2u_{n-1}+(-1)^n\cdot\frac{3}{2}$$
$$u_n=3\cdot 2^{n-2}-u_{n-1}$$
$$v_n=2v_{n-1}+(-1)^{n-1}$$
$$v_n=2^{n-1}-v_{n-1}.$$

Le 1ª, 6ª, 7ª delle (13) diventano dopo semplici trasformazioni:

$$\eta_n = (\eta_1 + \eta_2)\frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} + (-1)^{n-1}\eta_1$$

$$\eta_{n+1} + \eta_n = (\eta_1 + \eta_2)\, 2^{n-1}$$

$$\eta_{n+1} - \eta_n = \frac{2(\eta_1 + \eta_2)(2^{n-2} + (-1)^{n-1})}{3} + (-1)^n . 2\eta_1$$

alle quali soddisfa, ogni soluzione $\eta_1, \eta_2, \ldots$ dell'equazione

$$\eta_n = \eta_{n-1} + 2\eta_{n-2}.$$

11º. Sia $p = 3$; $q = -2$. Si ha $a = \frac{3}{2}$; $b = \frac{1}{2}$; $r = \frac{1}{9}$.

Si hanno le successioni di Fermat. Quelle delle u e v sono:

$$\frac{3}{2},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{9}{2},\quad \frac{17}{2},\quad \frac{33}{2}, \ldots \ldots \ldots \ldots (u)$$

$$1,\quad 3,\quad 7,\quad 15,\quad 31, \ldots \ldots \ldots \ldots (v)$$

Dalle (8') ed (11) risulta:

$$u_n = \frac{2^n + 1}{2} = \frac{1}{2^n} \sum_{0,2,\ldots n'} i \binom{n}{i} 3^{n-i}$$

$$v_n = 2^n - 1 = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{1,3,\ldots n''} i \binom{n}{i} 3^{n-i}.$$

Sono verificate le relazioni:

$$u_n = 2u_{n-1} + (-1)^{n-1}$$

$$u_n = 2^{n-2} + u_{n-1}$$

$$v_n = 2v_{n-1} + 1$$

$$v_n = 2^{n-1} + v_{n-1}.$$

Le 1ª, 6ª, 7ª delle (13) diventano facilmente:

$$\eta_n = (\eta_2 - \eta_1)(2^{n-1} - 1) + \eta_1$$

$$\eta_{n+1} + \eta_n = 2(\eta_2 - \eta_1)(3 . 2^{n-2} - 1) + 2\eta_1$$

$$\eta_{n+1} - \eta_n = (\eta_2 - \eta_1)\, 2^{n-1}$$

alle quali soddisfa ogni soluzione $\eta_1, \eta_2, \ldots$ dell'equazione:

$$\eta_n = 3\eta_{n-1} - 2\eta_{n-2}.$$

12º. Sia $p = 1$, $q = -1$. Risulta $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2} i$; $(i = \sqrt{-1})$; $r = -3$.

Dalle (8') ed (11) si ha:

$$u_n = \frac{(1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \sum_{0,2,\ldots n'} j \binom{n}{j} (-3)^{\frac{j}{2}}$$

$$v_n = \frac{(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n}{2^n \sqrt{3}\, i} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{1,3,\ldots n''} j \binom{n}{j} (-3)^{\frac{j-1}{2}}$$

Le successioni delle (u) e (v) sono:

$$\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \quad -1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2}, \ldots \quad (u)$$
$$1, \quad 1, \quad 0, \quad -1, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 1, \ldots \quad (v)$$

evidentemente periodiche.

Adunque $u_n = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 1$, secondochè n è della forma

$$\frac{6h-5}{6h-1}, \quad \frac{6h-4}{6h-2}; \quad 6h-3, \quad 6h,$$

h essendo un intero positivo $\geqslant 1$, e $v_n = 1, 0, -1$, secondochè n è della forma

$$\frac{6h-5}{6h-4}, \quad \frac{6h-3}{6h}, \quad \frac{6h-2}{6h-1}; \quad (h \text{ intero } \geqslant 1).$$

La successione delle η è:

$$\eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_2 - \eta_1, \quad -\eta_1, \quad -\eta_2, \quad \eta_1 - \eta_2, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \ldots$$

e si vede subito che è periodica; i segni dei termini si distribuiscono a gruppi di tre, i tre di un gruppo essendo opposti a quelli del gruppo precedente. Si ha adunque

$$\eta_n = \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_2 - \eta_1, \quad -\eta_1, \quad -\eta_2, \quad \eta_1 - \eta_2$$

secondochè n è della forma

$$6h-5, \quad 6h-4, \quad 6h-3, \quad 6h-2, \quad 6h-1, \quad 6h, \quad (h \geqslant 1).$$

13°. Sia $p=2$, $q=-3$. Si ha; $a=1$; $b=i\sqrt{2}$; $r=-2$. Dalle (8') ed (11) risulta:

$$u_n = \frac{(1+i\sqrt{2})^n + (1-i\sqrt{2})^n}{2} = \sum_{0,2,\ldots,n'} j \binom{n}{j} (-2)^{\frac{j}{2}}$$
$$v_n = \frac{(1+i\sqrt{2})^n - (1-i\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}\,.\,i} = \sum_{1,3,\ldots,n''} j \binom{n}{j} (-2)^{\frac{j-1}{2}}.$$

Le successioni delle (u) e (v) sono:

$$1, \quad -1, \quad -5, \quad -7, \quad 1, \quad 23, \quad 43, \ldots \quad (u)$$
$$1, \quad 2, \quad 1, \quad -4, \quad -11, \quad -10, \quad 13, \ldots \quad (v)$$

ed è notevole la distribuzione dei segni. Per i valori iniziali 0, 1; 2, 2 si hanno le cosidette successioni coniugate di Pell.

14°. Sia $p=2$; $q=-2$. Risulta $a=1$; $b=i$; $r=-1$. Si ha dalle (8') ed (11):

$$u_n = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2} = \sum_{0,2,\ldots,n'} j \binom{n}{j} (-1)^{\frac{j}{2}}$$
$$v_n = \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i} = \sum_{1,3,\ldots,n''} j \binom{n}{j} (-1)^{\frac{j-1}{2}}.$$