si ricava:

se $M \leqslant \alpha$, la 1ª successione ha *zero variazioni* e la 2ª *zero variazioni*;
se $\alpha < M \leqslant \beta$, " " " *due variazioni* " " *zero variazioni*;
se $\beta < M$ " " " *due variazioni* " " *due variazioni*.

Cioè la eccedenza del numero di variazioni della 1ª successione sulla 2ª è zero o due (e ciò per $\alpha < M \leqslant \beta$). Non esistendo però radici reali si vede immediatamente come il teor. II° debba essere modificato. Si avrà cioè, in generale, anche per l'equaz. di 2° grado, il seguente:

TEOREMA II (*di* FOURIER-BUDAN). — *Se si considerano le due successioni* $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$; $f(\beta)$, $f'(\beta)$, $f''(\beta)$, *si avrà*: 1°) *il numero delle variazioni della prima successione non è mai inferiore a quello della seconda*; 2°) *il numero delle radici reali dell'equaz. di 2° grado* $f(x)=0$, *(tenuto calcolo del loro grado di multiplicità) comprese nell'intervallo* (α, β) *l'estremo inferiore escluso, non può mai superare la differenza tra le variazioni di segno della prima successione sulla seconda, ma può esserle inferiore di un numero pari. Ciò potrà avvenire solo nel caso che le radici siano complesse ed*

$$\alpha < M \leqslant \beta,$$

dove

$$M = -\frac{b}{2a}.$$

Si ponga bene attenzione al fatto che il teor. precedente dà il numero esatto od una limitazione superiore delle radici reali comprese nell'intervallo (α, β), *l'estremo inferiore escluso*, cioè le radici x per le quali è

$$\alpha < x \leqslant \beta.$$

9. Basta osservare che

$$f(0) = c; \qquad f'(0) = b; \qquad f'' = 2a,$$

per ricavare immediatamente dal teor. I° la nota regola dei segni di Cartesio.

Così dal teor. di Fourier-Budan può dedursi il teor. I°. Infatti si scelga μ maggiore di entrambe le radici, se queste sono reali, oppure non inferiore ad M nel caso di radici complesse coniugate. Allora, in ogni caso, non esistono radici reali maggiori di μ, (quindi il numero di radici reali contenute nell'intervallo α, μ, l'estremo inferiore escluso, coincide col numero delle radici maggiori di α); e, come appare dai numeri 4, 5, 6 la successione $f(\mu)$, $f'(\mu)$, $f''(\mu)$ non ha variazioni. Tali osservazioni sono sufficienti al nostro scopo.

Incominciando dunque dal dimostrare il teor. di Fourier-Budan, potrebbe dedursi quindi il teor. I° e la regola di Cartesio.

Può invece seguirsi anche il procedimento inverso e cioè dimostrare prima la regola di Cartesio, da questa dedurre il teor. I° e poscia, come è stato fatto precedentemente, pervenire al teor. di Fourier. Tale procedimento sarebbe pure elementarissimo. Lo applicherò per mostrare come la regola di Cartesio ed i due teor. ora veduti possano stabilirsi anche per equazioni di grado qualunque; cercando sempre di rendere le dimostrazioni, per quanto mi sarà possibile, semplici ed accessibili in una scuola secondaria.

Sarà bene esemplificare più specialmente con riferimenti ad equaz. di grado superiore riducibili al 2° grado.

Occorrerà premettere alcuni teor., del resto ben noti.

10. Tutto il metodo poggia su una formola la quale dà il valore di un polinomio $f(x)$ in un punto qualunque x, quando si conoscano i valori della funzione e di tutte le derivate in un punto x_0 (*formula di* Taylor-Maclaurin).

Siano $f_0, f_1, f_2, \dots f_n$ i resti e l'ultimo quoziente (di grado zero) delle successive divisioni di $f(x)$ per $x-x_0$. Allora è

$$f(x)=f_0+(x-x_0)\,.\,f_1+(x-x_0)^2\,.\,f_2+\dots+(x-x_0)^n\,.\,f_n\,.$$

Per mezzo della regola di Ruffini possono effettuarsi nei casi più semplici (ad es: equaz. di 1°, 2°, 3° grado, biquadratiche ecc.) le divisioni indicate. Determinate così le $f_0, f_1, \dots f_n$, si scriverebbe per questi casi la formola di Taylor. Tutto ciò sarebbe elementarissimo.

Più in generale si potrebbe procedere così. Avendo riguardo al modo come la eguaglianza precedente è stata ottenuta, si vede che è una identità.

Altrettante identità saranno allora le uguaglianze dedotte prendendo successivamente le derivate 1ª, 2ª, ... dei due membri. Facendo in ciascuna di queste identità $x=x_0$, si ricaverebbe immediatamente:

$$f_0=f(x_0);\ f_1=f'(x_0);\ f_2=\frac{1}{1\,.\,2}f''(x_0);\ \dots;f_n=\frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}f^{(n)}(x_0).$$

Sostituendo si avrà così la formola di Taylor per un polinomio, cioè:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{1\,.\,2}f''(x_0)+\dots+\frac{(x-x_0)^n}{1\,.\,2\,.\,3\dots n}f^{(n)}(x_0).$$

Dal modo come questa formola è stata ottenuta, si deduce la seguente osservazione che ci sarà utile in seguito: la serie dei valori che assumono per x_0 il polinomio f e le sue derivate è uguale, a meno di fattori numerici positivi, a quella dei resti e dell'ultimo quoziente delle n successive divisioni per $x-x_0$.

Posta la definizione che x_0 dicesi radice di grado k, se $f(x)$ è divisibile per $(x-x_0)^k$ e non per $(x-x_0)^{k+1}$, per la osservazione precedente, si ha subito: Condizione necessaria e sufficiente perchè x_0 sia radice di grado k è che sia

$$f(x_0)=f'(x_0)=\ldots=f^{(k-1)}(x_0)=0; \qquad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

Da questo si deduce:

Se x_0 *è radice di grado* k *di* $f(x)=0$, *è anche radice di grado* $k-1$ *di* $f'(x)=0$.

II. Ricordo poi altri teor. ben noti. Per brevità facciamo uso delle seguenti convenzioni:

1°) se esiste un numero positivo M tale che per ogni $x>M$, la $f(x)$ ha una certa proprietà, diremo che tali proprietà vale per $x=\infty$;

2°) se considerate un punto x_0, esiste un numero positivo μ, tale che per ogni x che soddisfi alla $0<x-x_0<\mu$, — o risp. alla $0<x_0-x<\mu$, — la $f(x)$ ha una certa proprietà, diremo che tale proprietà ha luogo in un *intorno a destra*, — o risp. *intorno a sinistra*, — del punto x_0.

Dopo ciò, considerato un polinomio:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$

se $a_n\neq 0$, e se a_k è il coeff. del 1° termine diverso da zero, i teoremi ai quali accennavamo possono brevemente essere esposti così:

a) *La* $f(\infty)$ *ha il segno di* a_n;

b) *il segno di* $f(x)$ *è quello di* a_k *in un intorno a destra del punto zero, invece in un intorno a sinistra è quello di* $(-1)^k . a_k$;

c) *se* α, β *sono numeri reali che non annullano* $f(x)$, *tra* α *e* β *è contenuto un numero pari o dispari di radici di* $f(x)=0$, *a seconda che* $f(\alpha)$ *ed* $f(\beta)$ *hanno segni uguali od opposti.*

Dopo ciò, sia $a_0=0$, e sia a_k il coeff. del 1° termine diverso da zero: dal teor. *b*) si ricava subito che in un intorno a destra del punto zero, f ed f' hanno lo stesso segno — quello di a_k —, in un intorno a sinistra hanno segno opposto, — risp. quelli di $(-1)^k . a_k$; $(-1)^{k-1} . a_k$.

Posto allora nella formola di Taylor $x-x_0=y$, ed applicando alla funzione in y così ottenuta quanto è stato ora detto, si avrà:

d) *Le due funz.* f, f' *hanno in un intorno a destra di una radice* x_0 *di* $f(x)=0$ *lo stesso segno, in un intorno a sinistra hanno invece segno opposto.*

Da questo e dal teor. *c*) si ricava immediatamente il seguente teorema:

e) *Tra due radici reali successive di* $f(x)=0$, *esiste sempre un numero dispari di radici reali di* $f'(x)=0$.

Infine, ricordando la convenzione circa il segno da attribuirsi ai termini nulli di una successione (ad es: quella dei coefficienti), dai teor. *a*), *b*), si deduce:

f) *Le funzioni* f(x) f'(x) *hanno per* $x = \infty$ *ugual segno, — quello di* a_0 —; *in un intorno a destra del punto zero risp. i segni di* a_0, a_1; *in un intorno a destra di un punto qualunque* x_0 *hanno risp. i segni di* $f(x_0)$, $f'(x_0)$.

12. Ricordato ciò che del resto rappresenta cose ben note, si può dimostrare un teor. fondamentale.

Indichiamo con N_α, N'_α risp. i numeri delle radici reali maggiori di α delle equaz. $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. Analogamente si indichi con $N_{\alpha,\beta}$, $N'_{\alpha,\beta}$ i numeri delle radici delle stesse equaz. comprese nell'intervallo (α, β), l'estremo inferiore escluso. Allora vale il seguente:

Teorema fondamentale. — 1°) *È sempre* $N_0 \leqslant N'_0 + 1$, *e se in questa relazione ha luogo il segno uguale, i coeff.* a_0 *ed* a_1 *debbono avere segno opposto*; 2°) *È sempre* $N_\alpha \leqslant N'_\alpha + 1$, *e se ha luogo il segno uguale,* $f(\alpha)$ *ed* $f'(\alpha)$ *hanno segno opposto*; 3°) *È sempre* $N_{\alpha,\beta} \leqslant N'_{\alpha,\beta} + 1$, *e, se ha luogo il segno uguale,* $f(\alpha)$ *ed* $f'(\alpha)$ *hanno segno opposto.*

Dimostriamo la prima parte. Siano le N_0 radici nei punti $x_1, x_2, \ldots x_r$ risp. dei gradi di multiplicità $k_1, k_2, \ldots, k_r$. La $f'(x) = 0$ avrà radici negli stessi punti coi gradi di multiplicità $k_1 - 1, k_2 - 1, \ldots, k_r - 1$; e di più, pel teorema *e*) avrà almeno una radice reale in ciascuno degli $r - 1$ intervalli formati dalle N_0 radici.

Sarà dunque:

$$N_0 = k_1 + k_2 + \ldots + k_r; \; N'_0 \geqslant (k_1-1) + (k_2-1) + \ldots + (k_r-1) + r - 1,$$

da cui

$$N_0 \leqslant N'_0 + 1.$$

Supponiamo ora che, fissato N_0, sia N'_0 il minimo possibile compatibilmente con quanto si è ora veduto, cioè $N'_0 = N_0 - 1$. Allora, per quanto si è detto sopra non esiste nessuna radice positiva di $f'(x) = 0$ minore delle radici positive di $f(x) = 0$. Per ter. *d*), *c*), *f*), si ricava allora che i coeff. a_0, a_1 avranno segni opposti. Nello stesso modo si dimostra la 2ª e 3ª parte del teorema.

13. Dopo ciò si può trovare la regola per la determinazione di N_0. Una prima nozione del numero N_0 è data dal seguente teor: N_0 è *pari o dispari a seconda che* a_0 *ed* a_n *hanno lo stesso segno o segno opposto*, il qual teor. è conseguenza dei teor. *f*), *c*).

Ad una determinazione maggiore si giungerà nel seguente modo. Si indichi con $w_{0,1}$ il numero delle variazioni di segno tra a_0 ed a_1. Dal teor. ora stabilito si deduce facilmente che $N_0 - N'_0$ è pari o dispari, secondo che a_0 ed a_1 hanno lo stesso segno o segno opposto. Cioè si avrà:

$$N_0 - N'_0 = w_{0,1} - 2\nu_1, \tag{1}$$

dove ν_1 è num. intero relativo. Dal teor. fond. si ha:

$$N_0 - N'_0 \leqslant 1. \tag{2}$$

Allora se fosse $\nu_1 < 0$, essendo $w_{0,1} \geqq 0$, si avrebbe dalla (1):

$$N_0 - N'_0 > 1$$

in contraddizione colla (2). Si è giunti quindi al seguente:

LEMMA. — *È sempre*

$$N_0 - N'_0 = w_{0,1} - 2\nu_1,$$

dove ν_1 *è intero non negativo.*

Dopo ciò può dimostrarsi, per induzione, la seguente:

REGOLA DI CARTESIO. — *Se* $f(x) = 0$ *è un'equaz. algebrica di grado* n, *il numero delle radici positive, tenuto calcolo del loro grado di multiplicità, non supera il numero delle variazioni dei coefficienti; e, se ne è inferiore, ne differisce per un numero pari.*

Sia infatti

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n; \qquad a_n \neq 0$$

e si faccia la solita convenzione circa i termini nulli.

Si avrà

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1}.$$

Il teor. è stato dimostrato per $n=1$; 2. Sia vero per $n-1$. Allora se indichiamo con w' il numero delle variazioni tra i coeff. di $f'(x)$, sarà:

$$N'_0 = w' - 2\nu',$$

dove ν' è intero non negativo.

Dal lemma ora veduto si ricava, ponendo $\nu' + \nu_1 = \nu$,

$$N_0 = w' + w_{0,1} - 2\nu.$$

E giacchè è $w' + w_{0,1} = w$, dove w è il numero delle variazioni dei coeff. di $f(x)$, si avrà:

$$N_0 = w - 2\nu,$$

dove ν è intero non negativo.

La regola di Cartesio è così dimostrata in tutta la sua generalità.

14. Dalla formola di Taylor-Maclaurin, posto $y = x - \alpha$, si ha

$$f(x) = f(\alpha) + y \cdot f'(\alpha) + \frac{y^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha) + \ldots + \frac{y^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} f^{(n)}(x).$$

Ora i valori positivi di y che annullano il 2° membro corrispondono ai valori di x maggiori di α che annullano $f(x)$. Questa osservazione è sufficiente per dedurre dal lemma e dalla regola precedente i seguenti:

Lemma. — È

$$N_\alpha - N'_\alpha = w_{0,1}(\alpha) - 2\nu_1$$

dove $w_{0,1}(\alpha)$ rappresenta il num. delle variazioni tra $f(\alpha)$ *ed* $f'(\alpha)$, *e ν_1 è intero non negativo.*

Teorema I. — *Il numero delle radici reali di un'equaz. algebrica di grado qualunque (tenuto calcolo del loro grado di multiplicità) maggiori di un numero reale α, non può superare il num. delle variazioni della successione*

$$f(\alpha),\ f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha),$$

e, se ne è inferiore, ne differisce per un numero pari.

15. Passiamo ora al teor. di Fourier-Budan per un'equaz. algebrica di grado n.

Dati due numeri reali $\alpha < \beta$, pel lemma ora veduto, avrò:

$$N_\alpha - N'_\alpha = w_{0,1}(\alpha) - 2\nu'_1; \qquad N_\beta - N'_\beta = w_{0,1}(\beta) - 2\nu''_1.$$

Da queste, sottraendo, si ha evidentemente:

$$N_{\alpha,\beta} - N'_{\alpha,\beta} = w_{0,1}(\alpha) - w_{0,1}(\beta) - 2\nu_1.$$

Dimostriamo che ν_1 non può essere negativo. Infatti se $\nu_1 < 0$, essendo

$$w_{0,1}(\alpha) - w_{0,1}(\beta) \geqslant -1,$$

sarà

$$N_{\alpha,\beta} \geqslant N'_{\alpha,\beta} + 1,$$

ed il segno uguale potrà aversi per

$$w_{0,1}(\alpha) = 0; \qquad w_{0,1}(\beta) = 1.$$

Si ha quindi una contraddizione col teor. fondamentale. È così dimostrato il seguente

Lemma. — È

$$N_{\alpha,\beta} - N'_{\alpha,\beta} = w_{0,1}(\alpha) - w_{0,1}(\beta) - 2\nu_1,$$

dove ν_1 è numero intero non negativo.

Ora il teor. di Fourier è dimostrato per $n = 1$; 2. Dal lemma, per induzione, si avrà:

Teorema II (*di* Fourier-Budan). — *Il numero di radici reali (tenuto calcolo del loro grado di multiplicità) dell'equaz. a coefficienti reali dell'n^{esimo} grado* $f(x) = 0$, *che soddisfano alla relazione $\alpha < x \leqslant \beta$, cioè che cadono nell'intervallo (α, β) l'estremo inferiore escluso, non supera l'eccedenza delle variazioni di segno della successione* $f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$ *sulle variazioni di* $f(\beta), f'(\beta), \ldots, f^{(n)}(\beta)$; *e, nel caso, ne differisce per un numero pari. Si tenga presente che nel calcolo delle variazioni non si deve tener conto dei termini nulli.*

16. Sarebbe facile poi dimostrare che se $f(x)=0$ ha radici tutte reali, altrettanto avverrà di $f'(x)=0$ e delle successive equaz. derivate. Potrebbe quindi, per ragioni didattiche, incominciare (o magari, n un insegnamento elementare limitarsi soltanto a ciò) dal caso par-icolare ora accennato. Da quanto è stato detto si vede subito come l procedimento sarebbe semplificato. La via ora suggerita può essere giustificata anche da ragioni storiche, giacchè secondo Darboux V. FOURIER, *Oeuvres publiés par Darboux*, t. 2°, pag. 311) al solo caso articolare ora detto si sarebbe limitata una prima dimostrazione di Budan.

17. Terminerò con alcune osservazioni e norme pratiche per le pplicazioni, limitandomi alle equaz. di 2° grado.

Al discriminante dell'equazione di 2° grado può darsi la seguente rma:

$$\Delta = f'^2(0) - 2f(0) \,.\, f''(0).$$

Prendo allora in esame una espressione analoga al 2° membro per x ıalunque. Per le

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0); \; f'(x) = f'(0) + xf''(0); \; f''(x) = f''(0),$$

ricava immediatamente

$$\Delta = f'^2(x) - 2f(x) \,.\, f''(x). \tag{1}$$

Si ha dunque che il 2° membro della (1) è un invariante della ızione $f(x)$.

La (1) potrebbe dedursi anche così:

$$(x) \,.\, f''(x) = 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = (2ax+b)^2 - \Delta = f'^2(x) - \Delta, \text{ ecc.}$$

Dalla (1) si ricavano le seguenti conseguenze:

a) Se $\Delta < 0$, le funzioni $f(x)$ ed $f''(x)$ hanno sempre lo stesso segno;

b) Se in un punto x è $ff'' \leqslant 0$, l'equaz. ha radici reali;

c) Se in punto x è $f = f' = 0$, nel punto si ha una radice doppia; ›versa se in un punto x è $f = 0$, ed è $\Delta = 0$, si ricava $f' = 0$. Cioè icava per le equaz. di 2° grado quanto è stato detto in generale a le radici multiple;

d) Se in un punto x la successione f, f', f'' presenta una sola va-ione (essendo allora necessariamente $f \,.\, f'' \leqslant 0$) l'equazione ha ci reali.

a (1) potrebbe essere utilizzata anche per avere diverse espres- del discriminante.

d es. per x coincidente colle radici dell'equaz. o col punto M, rebbero formole di facile verificazione diretta e delle quali è la loro generalizzazione.

18. Finora era stato supposto sempre $f'' \neq 0$. Specialmente per la discussione completa nel caso che i coeff. contengano parametri sarà utile esaminare anche gli annullamenti di f''. In tal caso una radice almeno è infinita e l'equaz. si riduce di grado. Sia dapprima $f'' = f' = 0$. I teor. perdono allora ogni significato e l'equaz. è indeterminata od ha ambedue le radici infinite a seconda che $f = c$ è zero o diverso da zero.

Sia ora $f'' = 0$; $f' \neq 0$. Applicando i teor. I° e II° alla equaz. di 1° grado così ottenuta ed osservando che alle variazioni calcolate per questa equaz. ridotta corrisponde lo stesso numero di variazioni nella successione f, f', f'', si giunge infine alla conclusione che *nei teoremi dimostrati può togliersi la limitazione* $f'' \neq 0$, *purchè si tenga presente che essi teor. riguardano solo le radici finite.*

19. I teor. I° e II° sono utili per la discussione dei problemi nei quali le radici di un'equaz. debbono essere contenute in un dato intervallo. È necessario però tener presente quanto è stato detto circa gli estremi (casi limiti) e completare se occorre la discussione coll'esame diretto dei valori che $f(x)$ assume negli estremi dell'intervallo.

Se però i coeff. contengono parametri, per determinare col variare di essi, il numero delle variazioni corrispondenti alla successione f, f', f'' è conveniente procedere nel seguente modo.

Si fissi anzitutto l'intervallo di variabilità dei parametri per il quale le radici dell'equaz. sono reali. Dopo ciò, e sempre subordinatamente alla condizione di realtà già esaminata, si può procedere così, ad es.: per l'estremo α: 1°) *si trovino i valori dei parametri pei quali* $f(\alpha) \cdot f'(\alpha) < 0$ *e per essi si avrà una variazione tra i primi due termini della successione*; 2°) *si determinino i valori dei parametri per i quali* $f'(\alpha) \cdot f''(\alpha) < 0$, *e per essi si avrà una variazione tra il 2° ed il 3° termine della successione*; 3°) *si determinino i valori dei parametri per i quali* $f(\alpha) = 0$ *e per questi valori*, *se* $f(\alpha) \neq 0$ (posto $\Delta > 0$, e per la (1) del n. 17 essendo allora $f \cdot f'' < 0$) *si avrà una sola variazione in tutta la successione.*

Risolvendo queste tre relazioni rispetto ai parametri la discussione procede immediata. Essa potrà poi, se occorre, essere completata per quanto riguarda gli estremi dell'intervallo. La discussione sarà così semplicissima anche dal punto di vista pratico, e potrà (ad es. se abbiamo un solo parametro) essere agevolata da una rappresentazione grafica dei valori dei parametri per i quali le radici sono reali e per i quali sono soddisfatte ciascuna delle tre relazioni ora esaminate.

Tutto ciò sarà chiarito da due esempi.

Esempio 1°. — Determinare le posizioni delle radici dell'equazione:

$$(k-1)x^2 - 2(k-2)x - (7k+1) = 0,$$

rispetto al numero 1.

Si ha:

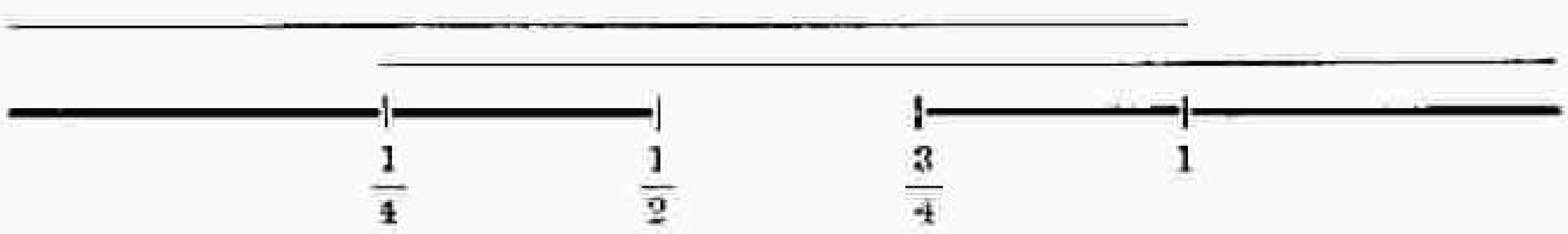
$$\Delta = 8\left(k - \frac{1}{2}\right)\left(k - \frac{3}{4}\right);$$

$$f(1) = -8\left(k - \frac{1}{4}\right);$$

$$f'(1) = 2; \quad f''(1) = 2(k-1).$$

Ordinati i capisaldi della discussione, si fissino i valori di k pei uali le radici sono reali. Osservando poi che è sempre $f'(1) > 0$ per ualunque valore del parametro, si trovino i valori di k per i quali i ha risp.:

$$f(1) \,.\, f'(1) < 0; \qquad f'(1) \,.\, f''(1) < 0.$$



Si concluderà allora che per $k \leqslant \frac{1}{4}$ si ha *una* sola radice maggiore di **1**; per $\frac{1}{4} < k \leqslant \frac{1}{2}$ oppure $\frac{3}{4} \leqslant k < 1$ si hanno *due* radici aggiori di 1; per $k \geqslant 1$ si ha *una* sola radice maggiore di **1**.

Esempio 2°. — Discutere per quali valori di m l'equazione:

$$(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6 = 0$$

vrà radici comprese tra 1 e 2.

Si ha:

$$\Delta = -(m-1)(m-3)$$

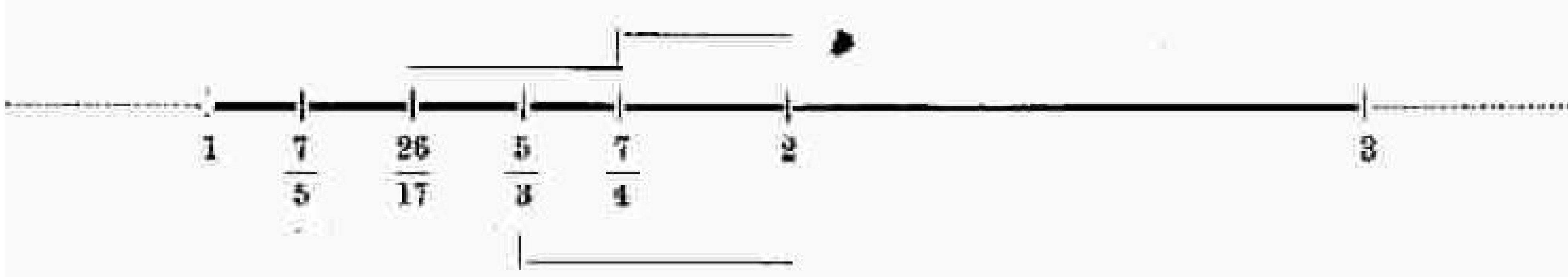
$$f(1) = 10\left(m - \frac{7}{5}\right); \quad f'(1) = 6\left(m - \frac{5}{3}\right); \quad f''(1) = 2(m-2);$$

$$f(2) = 17\left(m - \frac{26}{17}\right); \quad f'(2) = 8\left(m - \frac{7}{4}\right); \quad f''(2) = 2(m-2).$$

Ordinati i capisaldi della discussione e tenuta presente la condiione di realtà, si risolvano le seguenti relazioni:

$$f(1) \,.\, f'(1) < 0; \qquad f(1) \,.\, f''(1) < 0; \qquad f'(1) = 0$$

$$f(2) \,.\, f'(2) < 0; \qquad f'(2) \,.\, f''(2) < 0; \qquad f''(2) = 0.$$



Si vede immediatamente di qui che solo per $\frac{7}{5} < m \leqslant \frac{26}{17}$ si ha na radice (la maggiore) nell'intervallo considerato.

20. Per le equaz. di 2° grado, riprendendo le considerazioni dei numeri 3, 4, 5 si può stabilire immediatamente anche il teor. di Sturm. Infatti se $\Delta > 0$, i segni di f, f', f'' coincidono con quelli di $f, f', \Delta . f''$. Se $\Delta = 0$ essendo

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{1}{2}(x - x')$$

si deduce che in $f(x), f'(x), \Delta . f''(x) = 0$, si ha una variazione o nessuna a seconda che la radice doppia x' è maggiore o no di x. Se infine $\Delta < 0$, sappiamo che $f, f'' > 0$ per qualunque punto e che perciò f e $\Delta . f''$ hanno segno opposto, quindi nella successione $f(x), f'(x), \Delta . f''(x)$ si avrà una variazione sola, qualunque sia x.

Si giunge così al seguente:

Teorema di Sturm. — *Se data un'equaz. di 2° grado* $f(x) = 0$, *si considerano le due successioni* $f(\alpha), f'(\alpha), \Delta . f''(\alpha)$; $f(\beta), f'(\beta), \Delta . f''(\beta)$, *si avrà che il numero delle radici reali dell'equaz. (senza tener calcolo del loro grado di multiplicità) comprese nell'intervallo* (α, β) *l'estremo inferiore escluso, è uguale alla differenza tra le variazioni di segno della 1ª successione sulla 2ª.*

Egidio Gennari.

LE SIMILITUDINI

SOMMARIO. — I. Richiamo delle nozioni fondamentali sulle similitudini. — II. Principali determinazioni delle similitudini e delle congruenze. — III. I versi nelle figure simili. — IV. Le congruenze sulla retta. — V. Le similitudini sulla retta. — VI. Le congruenze nel fascio di raggi o di semipiani. — VII. Le congruenze nel piano. — VIII. Le similitudini nel piano. — IX. Le congruenze nella stella di raggi. — X. Le congruenze nello spazio. — XI. Le similitudini nello spazio. — XII. I movimenti.

Le corrispondenze di similitudine e di uguaglianza possono trattarsi elementarmente con ogni rigore, quando si sia dato modo di paragonare i versi delle figure; gli sviluppi, di cui qui presento un largo riassunto (*), suppongono precisamente che le nozioni sul verso si siano introdotte seguendo la via indicata in una mia nota apparsa anni sono in questo *Periodico* (**), e da esse è fatta essenzialmente dipendere lo studio e la classificazione delle similitudini e delle

(*) Uno svolgimento più ampio e propriamente scolastico apparirà — spero fra non molto — nella "Biblioteca degli Studenti" edita dal Giusti; ma debbo intanto ringraziare vivamente il ch.mo prof. Lazzeri che ha voluto accogliere nel suo *Periodico* la presente trattazione ridotta.

(**) *Sul verso degli angoli e dei triedri* (in questo *Periodico*, anno XXVI, 1910).

congruenze: una strada in certo modo inversa ha seguito invece il prof. SCORZA nella prima parte di un suo recente volume (*), dove la teoria dei versi è fatta dipendere dalle isomerie fra fasci e stelle di semirette; di quell'ottimo libro ho, pure, tratto largo profitto nello stendere il presente articolo; in particolare sono anche qui esplicitamente trattate le congruenze fra fasci e stelle di semirette, le quali per altro si considerano come subordinate da similitudini fra piani o nello spazio. Dal sommario sopra riprodotto appare sufficientemente lo scopo e il disegno di questo scritto: e perchè questo non vuole essere una trattazione particolareggiata dell'argomento, ma vuol presentarne in modo completo l'ossatura, così nei primi due paragrafi — che sono necessari richiami di cose notissime — sono omesse pressochè interamente le dimostrazioni, e nel seguito non è fatto posto a nessuno di quegli argomenti di contorno che, pure essendo di notevole interesse, sono rispetto allo scopo indicato, superflui. L'ultimo paragrafo — che contiene, in forma forse non inadatta alla scuola, un cenno sui sistemi continui di figure invariabili (**) — è diretto a mostrare come il concetto di congruenza diretta si possa ricondurre a quello di sovrapponibilità mediante movimenti; giacchè mi sembra che in qualche punto del corso elementare di Geometria debba darsi un collegamento fra l'assetto logico di questa scienza e le sue immediate interpretazioni cinematiche.

E. VENERONI.

I. — Richiamo delle nozioni fondamentali sulle similitudini.

1. *Se una figura* [1] (F) *è riferita ad una figura* (F') *per modo che il rapporto fra la distanza di due punti qualunque della prima e quella dei due punti omologhi della seconda sia costante ed uguale ad un numero assoluto* k (diverso da zero) si dirà che *la* (F) *è simile alla* (F') o che *la* (F) *è riferita alla* (F') *in una similitudine con rapporto* k. In particolare, *se* $k = 1$, *la* (F) *dicesi congruente alla* (F'), cosicchè ***congruenza** è ogni similitudine di rapporto uno.* Nelle ipotesi poste, anche la (F') è simile alla (F) con rapporto $\frac{1}{k}$ (proprietà *simmetrica* della similitudine); è, cioè, riferita alla (F) in una similitu-

---

(*) G. SCORZA, *Complementi di Geometria*. vol. I. Bari, Laterza, 1914. Cfr. anche un articolo che appare dello stesso autore, nel " *Pitagora* ", anno XV; 1908-09; pp. 1-15; 50-60. Ivi per la prima volta si considerano esplicitamente fasci e stelle di semirette congruenti.

(**) Cfr. i classici " *Fondamenti di Geometria* " di G. VERONESE, Padova, Tipografia del Seminario, 1891.

[1] Salvo esplicita avvertenza, intendiamo per *figura* una *classe di punti*. Supponiamo posto il concetto di *corrispondenza biunivoca* fra una *prima* e una *seconda* classe di elementi e con esso quelli di *corrispondenza inversa* di una data, e di *prodotto* di una *prima* per una *seconda* corrispondenza biunivoca. Si diran *riferite* due figure o classi poste in corrispondenza biunivoca.

dine di rapporto $\frac{1}{k}$, che dicesi *inversa* della data, e che è una congruenza se tale è la data. Se poi una figura (F) è riferita a una figura (F′) in una similitudine di rapporto k, e la (F′) è riferita a una terza figura (F″) in una similitudine di rapporto h, la (F) risulta riferita alla (F″) in una similitudine di rapporto kh, la quale dicesi *prodotto* della *prima* per la *seconda* delle due date similitudini; questa proposizione racchiude la proprietà *transitiva* della similitudine.

2. Due figure subordinate rispettivamente a (cioè contenute rispettivamente in) due figure simili (F), (F′) si dicono *omologhe* se la seconda è il luogo dei punti omologhi ai punti della prima nella similitudine data fra (F) ed (F′). Ed è chiaro che *una similitudine fra due figure determina (subordina, induce) una similitudine di ugual rapporto fra due figure omologhe in essa, rispettivamente subordinate alle date,* e che *se due figure si appartengono in* (F), *le loro omologhe in* (F′) *pure si appartengono.*

3. *Se tre punti* A, B, C *di una figura* (F) *sono allineati, altrettanto accade pei tre punti omologhi* A′, B′, C′ *di una figura* (F′) *simile ad* (F), *e inoltre, quando i punti* A, B, C *si seguon sulla loro retta nell'ordine scritto, anche i punti* A′, B′, C′ *si susseguono sulla loro retta nell'ordine scritto.* Il teorema, che si estende facilmente a quanti si vogliano punti allineati, permette poi di dimostrare che *se su una retta son dati tre punti,* A, B, X, *distinti fra loro, e su un'altra retta due punti* A′, B′ *esiste — ed è sulla* A′B′ *— uno ed un sol punto* X′ *tale che le due terne collineari* ABX, A′B′X′ *risultino simili.*

4. *Se,* invece, *tre punti* A, B, C *di una figura* (F) *non sono allineati, non lo sono neppure i tre punti omologhi* A′, B′, C′ *della figura* (F′) *simile ad* (F) *e i triangoli* ABC, A′B′C′ *risultano equiangoli.* E allora *se quattro punti* A, B, C, D *della* (F), *fra loro distinti, sono (non sono) in un piano anche i loro omologhi* A′, B′, C′, D′ *della* (F′) *sono (non sono) in un piano.*

5. Dai teoremi dei n. 3, 4 si ricava poi facilmente che *in due figure simili la figura omologa a un segmento, a un raggio, a una retta dell'una è ordinatamente un segmento, un raggio, una retta dell'altra;* le origini di due raggi omologhi sono punti omologhi, come pure gli estremi di un segmento sono omologhi agli estremi del segmento omologo.

6. Considerando un angolo [1] come l'assieme dei raggi che proiettano dal suo vertice i punti di un segmento terminato ai suoi lati, si avrà allora che *in due figure simili la figura omologa a un angolo dell'una è un angolo dell'altra;* i vertici di due angoli omologhi sono

[1] Salvo contrarie avvertenze, *angolo* o *diedro* sta per *angolo* o *diedro convesso.*

punti omologhi, i lati sono raggi ordinatamente omologhi. Quindi *la figura omologa a un semipiano dell'una è un semipiano dell'altra*; e le origini dei due semipiani omologhi sono rette omologhe. Così pure *un piano dell'una figura è mutato* (¹) *dalla similitudine in un piano dell'altra*, mentre, d'altronde, *la superficie di un poligono convesso dell'una sarà mutata nella superficie di un poligono convesso dell'altra*; e i vertici dei due poligoni omologhi sono punti omologhi.

7. Considerando un diedro come l'assieme dei semipiani che dallo spigolo proiettano i punti di un segmento terminato alle sue faccie, e in seguito, un semipiano come l'assieme di due diedri adiacenti, si avrà subito che *ogni similitudine muta un diedro di una figura nel diedro dell'altra che ha per faccie i semipiani omologhi alle faccie del primo, e muta un semispazio in un semispazio uscente dal piano omologo al piano-origine del primo*. Ne seguirà che *le figure omologhe a un angoloide o a un poliedro convessi dell'una figura, sono, nella figura simile, l'angoloide o il poliedro (convessi); che hanno rispettivamente per spigoli e per vertici i raggi ed i punti omologhi agli spigoli e ai vertici dei primi.*

8. *Due angoli omologhi, due diedri omologhi, due angoloidi omologhi di due figure simili sono uguali.* L'eguaglianza di due angoli omologhi fu già stabilita [4] (²); si stabilirà quella di due diedri omologhi prendendo due punti A, B sullo spigolo e i punti C, D uno su ciascuna faccia del primo diedro: i loro omologhi A', B', C', D' appartengono rispettivamente allo spigolo e all'una e all'altra faccia del secondo diedro; i due tetraedri ABCD, A'B'C'D' hanno allora gli spigoli ordinatamente proporzionali, onde il diedro AB(CD) è uguale al diedro A'B'(C'D'). Infine l'eguaglianza di due angoloidi omologhi si stabilirà tagliando gli spigoli dell'uno nei punti ABC... con un piano non passante pel vertice O; considerando gli omologhi A'B'C'... che saranno punti degli spigoli del secondo, posti in un piano, distinti dal vertice O', e infine paragonando le due piramidi OABC..., O'A'B'C'... che hanno gli spigoli ordinatamente proporzionali.

9. *Due poligoni omologhi di due figure simili sono simili*, nel senso solitamente definito negli " *Elementi* ", in quanto i lati omologhi e gli angoli omologhi dei due poligoni sono tali anche nella similitudine data: onde i due poligoni hanno i lati proporzionali e gli angoli eguali, ordinatamente. Così *due poliedri omologhi di due figure simili sono simili*, dacchè, per quanto ora si è detto, le loro faccie omologhe sono poligoni simili, mentre i loro angoloidi omologhi sono uguali.

10. Notiamo ancora che *in figure simili a rette o piani paralleli (incidenti) dell'una sono omologhe nell'altra rette o piani paralleli (incidenti)*, e che *se una retta e un piano sono fra loro perpendicolari, essi*

(¹) Se, in due classi riferite, a un elemento A o a un gruppo (X) di elementi della prima classe corrispondono nella seconda l'elemento A' o il gruppo (X)' diremo che la corrispondenza posta fra le due classi, *muta*, *trasforma*, *porta* A in A', (X) in (X').

(²) Useremo le parentesi [ ] a richiamo di numeri precedenti.

son mutati da una similitudine in una retta e un piano fra loro perpendicolari.

11. Intendendo per *fascio di raggi* l'assieme delle semirette che escono da un punto e stanno in un piano, e per *stella di raggi* la totalità delle semirette che escon da un punto, si possono pensare riferite fra loro due figure composte di raggi, senza che tale riferimento importi nessuna corrispondenza fra i punti dei raggi che compongono le due figure. Il concetto di *congruenza* già posto per due *figure di punti*, ne suggerisce uno analogo per le *figure di raggi*, quando ci si fondi sulla uguaglianza degli angoli anzichè dei segmenti; le figure di raggi che così si verranno a paragonare dovranno però appartenere ciascuna ad una stella, se no, non si potrebbe sempre parlare di angolo di due raggi nel senso da noi precisato [6]. *Diremo*, quindi, ***congruenti*** *due figure di raggi, ciascuna appartenente a una stella, quando siano fra loro riferite per modo che l'angolo (convesso o piatto) di due raggi distinti qualunque dell'una sia uguale all'angolo dei raggi omologhi dell'altra.*

12. Si abbiano ora in due stelle (O), (O′) due figure congruenti di raggi (f), (f'); le totalità dei punti appartenenti ai raggi dell'una e dell'altra costituiscono due figure di punti (F), (F′). Fissato un numero assoluto k, diverso da zero, si faccia corrispondere al punto O di (F) il punto O′ di (F′), e a ogni punto M di (F), diverso da O, quell'unico punto M′ di (F′), che si ottiene portando sul raggio di (f'), omologo al raggio OM di (f) nella congruenza data, un segmento OM′, al quale OM abbia il rapporto k. Si viene a stabilire così fra le figure (F) ed (F′) una corrispondenza, evidentemente biunivoca, che si proverà facilmente essere una similitudine di rapporto k; cosicchè *due figure congruenti di raggi si possono sempre riguardare come figure simili di punti, potendosi assegnare ad arbitrio il rapporto di similitudine* k. Di questo teorema sta anche l'inverso, in quanto *due figure di raggi omologhi in una similitudine sono congruenti* [8].

13. Poichè, se di due figure simili l'una è un piano o lo spazio, anche l'altra è un piano o lo spazio, se di due figure congruenti di raggi l'una è un fascio o una stella anche l'altra è un fascio o una stella, e si avrà che *fasci di raggi omologhi o stelle di raggi omologhi di due figure simili sono congruenti*, o, come, suol dirsi, *una data similitudine subordina una congruenza fra due fasci, o fra due stelle di raggi omologhi nella similitudine. Viceversa* [12] *una congruenza fra due fasci (o fra due stelle) si potrà sempre riguardare come subordinata fra di essi da una similitudine — di assegnato rapporto* k *— fra i piani di due fasci, o nello spazio* (¹).

(¹) Se le classi fra cui è posta una corrispondenza biunivoca coincidono (e ciò non porta di necessità la coincidenza degli elementi omologhi) si dirà che la corrispondenza è posta *in quella classe*, o fra *due classi sovrapposte ad essa*, o che la corrispondenza *muta in sè la classe* etc. Un elemento che coincida col suo omologo si dirà *unito*.

14. Intendendo per fascio di semipiani d'asse r la totalità dei emipiani che escono da una retta r, *diremo fra loro congruenti due gure riferite di semipiani, ciascuna di un fascio, se il diedro (convesso piatto) di due semipiani della prima è uguale al diedro di due semiiani omologhi della seconda.*

15. Siano (φ), (φ') due figure congruenti di semipiani, e siano r, r' li assi dei loro fasci [14]; presi su r, r' due punti O, O', si diano (f), (f') le figure di raggi delle stelle (O), (O'), composte rispetvamente dalle totalità dei raggi delle due stelle che stanno nei emipiani di (φ), (φ'). Nelle due stelle (O), (O') si faccia corrispondere:) a uno dei due raggi in cui O divide r uno dei due in cui O' diide r', e al rimanente dei primi il rimanente dei secondi; *b*) a un ggio x di (f), fuori di r, quel raggio x' di (f'), che sta in quel semiano di (φ) che è omologo, nella congruenza data, al semipiano rx (φ), e che forma coi due raggi di r' angoli ordinatamente uguali a elli che x forma cogli omologhi di r. Si prova facilmente che la corspondenza biunivoca così posta fra le due stelle di raggi (O), (O') è a congruenza. E allora *due figure congruenti di semipiani, ciascuna un fascio, si possono sempre considerare come figure congruenti di ggi, appartenenti a due stelle i cui centri sono punti arbitrarî sugli si.* Onde le *stesse figure di semipiani si potranno riguardare come ure simili di punti,* potendosi ancora assegnare ad arbitrio la costante similitudine k.

Inversamente *due figure di semipiani, ciascuna di un fascio, omohe in una similitudine dello spazio, o in una congruenza fra due stelle raggi sono congruenti* [8].

Avremo così che *una similitudine dello spazio subordina una conuenza fra due fasci di semipiani omologhi,* e viceversa *una congruenza due fasci di semipiani si potrà sempre riguardare come subordinata essi da una similitudine dello spazio, per la quale possono ancora egnarsi ad arbitrio due coppie di punti omologhi sugli assi dei due ci.* Quest'ultima scelta equivale infatti a stabilire che a un punto O primo asse sia omologo un punto O' del secondo, che la similiine abbia un dato rapporto, e che infine a un raggio dei due in O divide r corrisponda un determinato raggio dei due in cui O' ide r', condizioni tutte a nostro arbitrio.

II. — Principali determinazioni delle similitudini e delle congruenze.

16. Se di due figure simili l'una è una retta, un piano, lo spazio he l'altra è rispettivamente una retta, un piano, lo spazio. Per determinazione di una similitudine, fra rette, fra piani, nello spazio vono i teoremi seguenti.

Esiste una ed una sola similitudine fra due rette r, r′ *la quale muti due punti* A, B *fissati ad arbitrio su* r *ordinatamente in due punti* A′, B′ *fissati comunque da* r′. Difatti, facendo corrispondere ai punti A, B di r ordinatamente i punti A′, B′ di r' e ad ogni altro punto M di r quel punto M′ di r' che rende simili le due terne collineari ABM, A′B′M′ [3], si viene a stabilire fra le r, r' una corrispondenza S che è evidentemente biunivoca.

Dalla costruzione data e dalle prime proprietà delle proporzioni fra segmenti si ricava poi facilmente che, presi due punti qualsiasi X, Y in r e detti X′, Y′ i loro trasformati mediante S, si ha sempre

$$\frac{XY}{X'Y'}=\frac{AB}{A'B'},$$

e si conclude che S è una similitudine. L'unicità del punto M′ che rende simili le terne ABM, A′B′M′ prova poi che ogni altra similitudine S_0 fra le r, r' che muti A, B in A′, B′ muta ogni punto nel suo omologo nella S, onde S, S_0 coincidono.

Corollario. — *Esiston due e due sole similitudini fra due rette* r, r′ *che abbiano un dato rapporto* k, *e che mutino un punto dato su* r *in un punto dato su* r′.

17. *Esiste una ed una sola similitudine fra due piani* α, α' *che muti i vertici di un triangolo* ABC, *comunque dato su* α, *ordinatamente nei vertici* A′B′C′ *di un triangolo simile al primo e del resto comunque fissato su* α'. Difatti si faccia corrispondere a ogni punto M della retta $r\equiv BC$ di α quel punto M′ della retta $r'\equiv B'C'$ di α' che gli è omologo nella similitudine S_r fra r, r' che porta B, C in B′, C′; e ad ogni punto N di fuori di r quel punto N′ di α' che è vertice di un triangolo B′C′N′ simile a BCN e che sta rispetto alla B′C′ dalla stessa parte di A′ o dalla opposta, secondochè l'una o l'altra cosa accada di A rispetto alla BC. Si vien così a stabilire fra i piani α, α' una corrispondenza biunivoca S che muta A, B, C in A′, B′, C′ ordinatamente. Dalla costruzione data e dalle prime proprietà dei triangoli simili si ricaverà agevolmente che, detti X, Y due punti distinti qualunque di α, ed X′, Y′ i loro trasformati mediante S in α', si ha

$$\frac{XY}{X'Y'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{BA}{B'A'}=\frac{AC}{A'C'},$$

e questo prova che la S è una similitudine. Se poi S_0 è una similitudine qualsiasi fra α, α' che muti A, B, C in A′, B′, C′ essa coincide con S, cioè i trasformati M′, M'_0 di un punto qualunque M di α mediante S, S'_0 coincidono sempre; la cosa è conseguenza del n. 16 se M sta su BC e quindi M′ ed M'_0 sono su B′C′; e se M è fuori di BC, i punti M′, M'_0 coincidono come vertici di due triangoli B′C′M′, B′C′M'_0 situati da una stessa parte rispetto a B′C′ e (simili e quindi) uguali fra loro.

Corollario. — *Esistono due e due sole similitudini fra due piani che mutino due punti arbitrarii del primo ordinatamente in due punti comunque scelti nel secondo.*

18. *Esiste una ed una sola similitudine dello spazio, che muti i vertici* A, B, C, D *di un tetraedro comunque dato ordinatamente nei vertici* A', B', C', D' *di un altro tetraedro simile al primo, e, del resto, comunque fissato.* Faremo qui corrispondere a ogni punto del piano $\alpha \equiv BCD$ quel punto del piano $\alpha' \equiv B'C'D'$ che gli è omologo nella similitudine S_α fra i piani α, α' che è determinata dal mutare i vertici del triangolo BCD ordinatamente nei vertici del triangolo (simile) B'C'D', e a ogni punto M fuori di α il vertice M' dell'unico tetraedro B'C'D'M' che è simile al tetraedro BCDM e che sta rispetto ad α' dalla parte di A' o dall'opposta, secondo che ciò accada per A ed M rispetto ad α. Si vien così a stabilire una corrispondenza biunivoca **S** nello spazio che muta A, B, C, D in A', B', C', D'. Dalla costruzione data e dalle prime proprietà dei tetraedri simili si ricava poi che, detti X, Y due punti qualunque ed X', Y' i loro trasformati mediante **S**, si ha sempre

$$\frac{XY}{X'Y'} = \frac{BC}{B'C'},$$

e la **S** è, così, una similitudine. Se poi S_0 è una similitudine dello spazio che muti A, B, C, D in A', B', C', D', essa coincide con **S**, cioè i trasformati M', M'_0 di un punto qualunque M mediante **S**, S'_0 coincidono sempre; ciò segue dal n. 17 se M sta sul piano $\alpha \equiv BCD$ e quindi M', M'_0 sono su $\alpha' \equiv B'C'D'$; e se M è fuori di α, i punti M', M'_0 coincidono come vertici di due tetraedri B'C'D'M', $B'C'D'M'_0$ situati dalla stessa parte rispetto ad α' e (simili e quindi) uguali fra loro.

Corollario. — *Esistono due e due sole similitudini dello spazio nelle quali si corrispondono due triangoli simili assegnati.*

19. Se di due figure congruenti di raggi l'una è un fascio, o una stella, anche l'altra è un fascio o una stella. Per la determinazione di una congruenza fra due fasci o fra due stelle di raggi servono i seguenti teoremi analoghi ai precedenti; essi si potrebbero stabilire direttamente basandosi sulla definizione di congruenza fra fasci o fra stelle; invece nelle dimostrazioni seguenti una tale congruenza è riguardata, come è sempre possibile [13], come subordinata, fra i fasci o fra le stelle, da una similitudine fra piani o nello spazio.

20. *Dati in due fasci di raggi due angoli uguali, esiste fra i due fasci una ed una sola congruenza che porta un dato lato del primo angolo in un dato lato del secondo e il rimanente lato del primo nel rimanente lato del secondo.*

Difatti sieno O, O'; α, α' i centri ed i piani dei due fasci; $\widehat{ab}$ sia l'angolo dato nel primo, ed $\widehat{a'b'}$ l'angolo uguale del secondo; fissato un numero assoluto non nullo k, e scelti sui raggi a, b due punti A, B distinti da O, si portin sui raggi a', b' due segmenti O'A', O'B' tali che si abbia:

$$OA : O'A' = OB : O'B' = k.$$

I due triangoli simili OAB, O'A'B' determinano [17] fra i piani α, α' una similitudine **S**, la quale subordina fra i fasci di raggi omologhi di centri O, O' una congruenza Γ che porta i raggi OA, OB nei raggi O'A', O'B, cioè, come volevasi, a, b in a', b'. Viceversa se fra i due fasci è posta una congruenza Γ_0 che muti a, b in a', b', essa si potrà sempre riguardare come subordinata fra i due fasci da una similitudine fra i due piani α, α', della quale si può stabilire ad arbitrio il rapporto; se questo si prende eguale al predetto numero k, in tale similitudine ai punti O, A, B di α dovranno corrispondere i punti O', A', B' di α'; essa dunque coincide con **S**, e allora Γ_0 coincide con Γ come volevasi.

Corollario. — *Esistono due e due sole congruenze fra due fasci di raggi che mutino un raggio fissato dell'uno in un raggio fissato dell'altro.*

21. Si prova nella stessa maniera che *dati in due stelle di raggi due triedri uguali* (abc), (a'b'c'), *esiste una sola congruenza fra le due stelle che muti i raggi* a, b, c, *ordinatamente nei raggi* a', b,' c'.

Corollario. — *Date in due stelle due angoli uguali* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *esiston due e due sole congruenze fra le due stelle, che mutino i raggi* a, b *ordinatamente nei raggi* a', b'.

III. — I versi nelle figure simili.

22. Due raggi appartenenti a una retta si posson dire *equiversi* se uno di essi appartiene all'altro, *contraversi* nella ipotesi opposta, e dalle proprietà di ordinamento dei punti di una retta, comunque stabilite [1], si caverà che *raggi di una retta equiversi (o contraversi) ad un terzo sono equiversi fra loro,* e che se *di due raggi di una retta l'uno è equiverso e l'altro contraverso ad un terzo della stessa retta, i due raggi dati sono fra loro contraversi.* Date allora su una retta due coppie di punti A, B; C, D riferite nel modo scritto (con che intendiamo che ai punti A, B si siano fatti rispettivamente corrispondere

---

[1] Se ad esempio si postula sulla retta l'esistenza di due *ordini naturali o versi*, come negli *Elementi di Geometria* di Enriques e Amaldi (cfr. per maggiori particolari l'articolo di U. Amaldi *Sui concetti di retta e piano*, in "*Questioni riguardanti le Matematiche Elementari raccolte ed ordinate da* F. Enriques", Bologna, Zanichelli, 1912; *postulato* IV a pag. 59 e segg.), due raggi equiversi di una retta, di origini A, B, son le classi dei punti della retta che *seguono* A o B in uno stesso verso della retta. In questo verso uno dei due punti A, B precede l'altro (ivi, IV, α); se A *precede* B, ogni punto del secondo raggio, *seguendo*, in quel verso, B, *segue* nello stesso verso A (ivi, IV, β) onde appartiene al primo raggio. Di due raggi equiversi, dunque, uno appartiene all'altro. Analogamente per due raggi contraversi.

ı punti C, D) *i segmenti riferiti* AB, CD [1] *si diranno equiversi o contraversi a seconda che lo sieno i due raggi* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ (e (quindi) i due $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$).

23. Sieno ora AB, CD due segmenti riferiti fra loro nel modo scritto, e appartenenti a una retta r di una figura (F); gli omologhi A′, B′, C′, D′ dei punti suddetti, in una figura (F′) simile a (F), sono su una retta r' e i segmenti A′B′, C′D′ risultano su di questa riferiti nel modo scritto [2]. E poichè raggi di una retta che si appartengono vengon mutati da una similitudine in raggi della retta omologa che pure si appartengono [2], i raggi $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{C'D'}$, hanno ugual verso o verso opposto secondo che così accada per i raggi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; dunque i segmenti A′B′, C′D′ saranno equiversi o contraversi a seconda che tali sieno i segmenti AB, CD. Si conclude che *una similitudine muta raggi o segmenti* (collineari) *fra loro equiversi (o contraversi) in raggi o segmenti* (collineari) *fra loro equiversi (o contraversi).* Se due raggi o due segmenti riferiti della (F) non son collineari, ma sono su rette parallele, si trae il giudizio sul verso di essi dal fatto che essi giacciano o no in uno stesso semipiano uscente dalla retta che congiunge le origini dei raggi, o due estremi omologhi dei due segmenti; e poichè una similitudine muta un semipiano in un semipiano uscente dalla retta omologa alla retta origine del primo, *il giudizio sul verso sarà conservato attraverso la similitudine anche se si tratti di raggi o segmenti riferiti fra loro paralleli.*

24. In un piano α di una figura (F) si considerino due angoli riferiti $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ (con che intendiamo che ai raggi a, b si sian fatti corrispondere ordinatamente i raggi c, d) [3]: gli angoli omologhi $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$ in una figura (F′) simile alla (F) risultano pure riferiti nel modo scritto e stanno in un piano α'. Per confrontare il verso dei due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ [4] basterà assumere nel piano α una retta r che seghi le rette di tutti i lati nei punti A, B, C, D e stabilire: a) se i vertici dei due angoli sono da una stessa parte o da bande opposte rispetto ad r; b) se il numero dei *lati* dei due angoli (cioè dei raggi a, b, c, d) incontrati da r è pari o dispari; c) se i due segmenti AB, CD così riferiti sulla r sono equiversi o contraversi. Ma se diciamo r', A′, B′, C′, D′

---

(1) Intendiamo dire che ai punti A, B si son fatti corrispondere ordinatamente i punti C, D; la corrispondenza non ne porta con sè nessuna fra i punti interni ai due segmenti; le due figure riferite son veramente le due *coppie* di punti A, B; C, D, e così diremmo se non credessimo opportuno evitare distinzioni soverchie.

(2) Detta T la corrispondenza posta fra le coppie AB, CD ed S la similitudine, la corrispondenza che risulta fra le coppie A′B′, C′D′ sarebbe, in ben conosciute notazioni, rappresentata col simbolo S^{-1} TS.

(3) Vale qui un'osservazione analoga a quella fatta nella nota (1).

(4) Ci richiameremo, quindinnanzi, molte volte alla nota: E. Venezioni, *Sul verso degli angoli dei triedri* (in questo *Periodico*, anno XXVI, fasc. 1°, 1910) che sarà, in seguito, indicata con la lettera N. Vedansi per quanto ora ci occorre i numeri da 1 a 5.

i trasformati di r, A, B, C, D nella similitudine data, e osserviamo: che i vertici degli angoli $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$ son dalla stessa o da diversa parte rispetto ad r', secondo che così accada dei vertici degli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ rispetto ad r, ai quali i primi sono omologhi nella similitudine data; che tanti dei raggi a', b', c', d' sono incontrati da r', quanti dei loro omologhi da r; che i segmenti A′B′, C′D′ sono equiversi o contraversi secondo che lo sieno AB, CD [23], concluderemo che il giudizio sul verso dei due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ è identico a quello sul verso dei due angoli $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$. Cioè *Ogni similitudine muta angoli (complanari) fra loro equiversi (o contraversi), in angoli (complanari) fra loro equiversi (o contraversi).*

E poichè il giudizio sul verso di due triangoli riferiti coincide col giudizio sul verso di due loro angoli omologhi, avremo pure che *triangoli (complanari) equiversi o contraversi sono da una similitudine mutati in triangoli (complanari) equiversi o contraversi.*

25. Sieno ora (abc), $(a'b'c')$; (def), $(d'e'f')$ due coppie di triedri omologhi [1] in due figure simili (F), (F′); e poniamo che i due triedri (abc), (def) sieno riferiti fra loro nel modo scritto, cosicchè col tramite della similitudine [2], i due triedri $(a'b'c')$, $(d'e'f')$ risulteranno pure fra loro riferiti nel modo scritto. Su un piano α di (F), che incontri le *rette* di tutti gli spigoli dei triedri (abc), (def), questi determineranno due triangoli riferiti ABC, DEF; e il giudizio sul verso dei due triedri (abc), (def) dipenderà dallo stabilire [3]; *a)* se i vertici dei due triedri stessi siano o no separati da α; *b)* se il numero complessivo dei raggi a, b, c, d, e, f incontrati da α è pari o dispari; *c)* se i due triangoli ABC, DEF sono equiversi o contraversi. Ma detti α', A′, B′, C′, D′, E′, F′ il piano e i punti di (F′) omologhi ad α, A, B, C, D, E, F, si osservi: *a)* che i vertici dei due triedri $(a'b'c')$, $(d'e'f')$ sono o no separati da α' secondochè questo accada per i vertici di (abc), (def) rispetto ad α; *b)* che tanti sono gli spigoli di questi ultimi incontrati da α', quanti sono gli spigoli dei primi incontrati da α; *c)* che i due triangoli A′B′C′, D′E′F′ sono equiversi o contraversi secondo che lo sieno ABC, DEF [24]. Si può dunque concludere che il giudizio sul verso è identico per i due triedri riferiti e per i loro trasformati mediante la similitudine. Cioè *ogni similitudine dello spazio muta triedri equiversi (o contraversi) in triedri equiversi (o contraversi).*

E poichè il giudizio sul verso di due tetraedri riferiti coincide col giudizio sul verso di due loro triedri omologhi, anche *tetraedri riferiti fra loro equiversi (o contraversi) son mutati da una similitudine in tetraedri equiversi (o contraversi).*

26. Poichè una congruenza fra due fasci (o due stelle) di raggi si può sempre riguardare come subordinata, fra i due fasci (o le due

(1) Colle notazioni (abc) intendiamo il triedro convesso che ha per spigoli i tre raggi a, b, c.
(2) Cfr. nota (3) al n. 23.
(3) Cfr. N. n.i 7 a 12.

stelle) da una similitudine, si avrà che *una congruenza fra due fasci di raggi muta angoli equiversi (o contraversi) in angoli equiversi (o contraversi); e una congruenza fra due stelle di raggi muta triedri equiversi (o contraversi) in triedri equiversi (o contraversi).*

27. Quando due diedri (convessi) riferiti abbiano il medesimo spigolo, si può stabilire il paragone del verso dei due diedri basandosi sul teorema seguente [1]:

Dati due diedri riferiti, col medesimo spigolo, il giudizio sul verso degli angoli loro sezioni con un piano che incontri (e non contenga) lo spigolo è indipendente dal piano.

Sieno $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\gamma\delta}$ due diedri riferiti aventi in comune lo spigolo r; e siano π, π' dapprima due piani seganti r in punti distinti, e segantisi fra loro in una retta p non parallela a nessuna faccia dei due diedri dati; sieno $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$; $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$ gli angoli sezione di π e π' rispettivamente coi diedri dati, ed A, B, C, D i punti di incontro di p coi piani delle loro faccie; il punto A appartiene ad ambedue i raggi a, a' se p incontra il semipiano α; appartiene ad ambedue gli opposti se p incontra il semipiano opposto ad α; così per i punti B, C, D: allora il numero complessivo dei lati incontrati da p è lo stesso per i due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ e per i due $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$; i segmenti AB, CD che le rette dei lati dei primi determinano su p sono gli stessi determinati su p dalle rette dei lati dei secondi; e poichè gli angoli di ciascuna coppia hanno lo stesso vertice, il giudizio sul verso dei due angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{cd}$ sarà lo stesso che per gli angoli $\widehat{a'b'}$, $\widehat{c'd'}$. Se i due piani π, π' s'incontrano in un punto dello spigolo comune ai due diedri, o se sono paralleli fra loro. o se, non essendolo, si segano in una retta p parallela ad una delle faccie dei diedri dati, si assumerà un piano ausiliario π'' che incontri lo spigolo dei diedri in un punto distinto dagli incontri di esso con π e π', che non sia parallelo nè a π nè a π', e che non seghi nè π nè π' in rette parallele a qualche faccia dei diedri; e allora si concluderà che il giudizio sul verso degli angoli sezione è lo stesso per i due piani π, π'' e per i due π'', π' e quindi è lo stesso per i due π e π', come volevasi.

Definizione. — *Due diedri (convessi) riferiti, aventi in comune lo spigolo, si dicono avere ugual verso o versi opposti secondo che abbiano ugual verso o versi opposti gli angoli loro sezioni con un piano qualunque* (che incontri lo spigolo e non lo contenga).

28. Si abbiano due fasci congruenti di semipiani e nel primo siano due diedri riferiti $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\gamma\delta}$, ai quali nel secondo corrispondano i diedri, che risultano fra loro riferiti, $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\gamma'\delta'}$; segando i due fasci con due piani π, π' rispettivamente perpendicolari agli spigoli si otterranno in π, π' due fasci di raggi congruenti e in essi due coppie di angoli

[1] Si aggiunge qui la semplice dimostrazione di questo Teorema, perchè non trovasi in N.

omologhi $\widehat{ab}, \widehat{cd}$; $\widehat{a'b'}, \widehat{c'd'}$; secondo che i primi due sono equiversi o contraversi, lo saranno i secondi [26]; e allora (per la definizione precedente) a seconda che abbiano ugual verso o versi opposti i due diedri $\widehat{\alpha\beta}$, $\widehat{\gamma\delta}$, avranno ugual verso o versi opposti i due diedri $\widehat{\alpha'\beta'}$, $\widehat{\gamma'\delta'}$. Dunque *una congruenza fra fasci di semipiani muta diedri equiversi (o contraversi) dell'uno in diedri equiversi (o contraversi) dell'altro.*

29. Se due rette riferite in una similitudine sono sovrapposte, è possibile il paragone del verso di due segmenti omologhi MN, M'N'; e allora la proprietà vista al n. 22, mostra subito che se i due segmenti MN, M'N' sono equiversi (o contraversi) altrettanto accade di due altri segmenti omologhi qualunque. Di modo chè *in una similitudine su una retta due segmenti omologhi sono sempre equiversi o sempre contraversi.* Nel primo caso la similitudine si dirà *similitudine rettilinea diretta*, nel secondo *inversa.*

La stessa distinzione può darsi anche per le similitudini fra due rette parallele.

Se due piani riferiti in una similitudine sono sovrapposti, è possibile il paragone del verso di due angoli (o di due triangoli) omologhi, che risultano senz'altro fra loro riferiti; e risulterà, per quanto si è visto al n. 24, che *due angoli (o due triangoli) omologhi in una similitudine piana sono sempre equiversi, o sempre contraversi*; nel primo caso la *similitudine piana* dicesi *diretta*, nel secondo *inversa.*

Data poi una similitudine nello spazio, il paragone del verso di due triedri (o di due tetraedri) omologhi, che risultano senz'altro fra loro riferiti, condurrà sempre, per quanto si è visto al n. 25, ad uno stesso giudizio cioè *in una similitudine spaziale due triedri (o due tetraedri) omologhi sono sempre equiversi, o sempre contraversi.* Nel primo caso si avrà *una similitudine spaziale diretta*, nel secondo una *similitudine spaziale inversa*. Queste distinzioni si riferiscono pure alle *congruenze rettilinee, piane o spaziali.*

Dalle proprietà dei versi si ha poi che *il prodotto di due similitudini su una retta, o su un piano, o nello spazio è una similitudine diretta se le due date sono ambedue dirette o ambedue inverse, è una similitudine inversa se delle date una è diretta e l'altra inversa.*

30. Se due fasci congruenti sono nel medesimo piano, è possibile il paragone del verso di due angoli omologhi, e poichè una congruenza fra due fasci è sempre determinata da una similitudine fra i piani dei due fasci, che qui risultan sovrapposti, si avrà che *in due fasci di un piano fra loro congruenti due angoli omologhi sono sempre equiversi o sempre contraversi.* La congruenza fra i due fasci complanari si dirà *diretta* nel primo caso, *inversa* nel secondo. Similmente in due stelle congruenti è sempre possibile il paragone del verso di due triedri omologhi, e poichè una congruenza fra due stelle è sempre determinata da una similitudine dello spazio, si avrà che *in due stelle* *congruenti due triedri omologhi sono sempre equiversi o sempre contraversi.*

La congruenza fra le due stelle si dirà *diretta* nel primo caso, *inversa* nel secondo. Si avrà poi, come al n. 29, che *il prodotto di due congruenze in un fascio (o fra fasci complani), o in una stella (o fra lue stelle) è una congruenza diretta, se ambedue le date sono dirette, o mbedue sono inverse; è una congruenza inversa, se di esse una è diretta l'altra inversa.*

IV. — Le congruenze sulla retta.

31. *Una congruenza diretta (o inversa) su una retta è determinata uando siano assegnati due punti omologhi.*

Difatti su una retta r siano assegnati due punti A, A', omologhi n una congruenza diretta C; preso un punto M, distinto da A, si orti su r a partire da A' nel verso di AM un segmento A'M' uguale d AM; le due coppie di punti omologhi AA', MM' determinano su r a congruenza diretta C. Così per una congruenza inversa.

Ne deriva che *una congruenza rettilinea diretta che ammetta un unto unito è l'identità*, perchè l'identità è una congruenza diretta, nel punto unito coincidono due punti omologhi.

32. *Una congruenza rettilinea inversa è la simmetria rispetto a un unto della retta*; in altri termini se su una retta r è assegnata una ongruenza inversa C, ogni punto M di r è portato da C nel simetrico di M rispetto a un punto fisso di r. Difatti, poichè C non uò essere l'identità, esistono su r due punti distinti A, A' omologhi ı C; detto U il punto medio di AA', i segmenti AU, A'U sono guali e contraversi, perciò U è unito in C; e allora detti M, M' due unti omologhi in C, i segmenti UM, UM' sono omologhi in C, quindi ono uguali e contraversi; cioè M, M' sono simmetrici rispetto ad U. *punto U è unito in C.*

33. La simmetria rispetto a un punto U della retta è una tal orrispondenza che quando un punto M di r si consideri appartenente l'una o all'altra delle due punteggiate sovrapposte il suo omologo ella seconda o nella prima è sempre lo stesso punto M', simmetrico M rispetto ad U; si dice perciò che la simmetria considerata è ia corrispondenza che ha carattere *involutorio*; essa è, anzi, *l'unica militudine rettilinea che goda di tal proprietà*, astrazion fatta dalla entità; e difatti se in una similitudine rettilinea S vi son due punti stinti A, A' corrispondentisi fra loro in doppio modo, tali cioè che al nto A, pensato come appartenente alla prima o alla seconda punteggata, corrisponda sempre nella seconda o nella prima il punto A', al segento AA' sarà omologo in S il segmento A'A; e poichè i due segmenti A, A'A sono uguali e contraversi la S è una *congruenza inversa.*

34. Al carattere involutorio della simmetria rettilinea si ricorre per dimostrare il seguente lemma che ci occorrerà tosto. *Se due segmenti* AB, A′B′ *di una retta sono uguali ed equiversi, i due segmenti* AA′, BB′ *sono pure uguali ed equiversi.* Difatti, poichè i segmenti AB, B′A′ saranno uguali e *contraversi*, nella congruenza inversa (simmetria) determinata dai due punti A, B′ come punti omologhi, saranno omologhi anche B, A′, e quindi, per il carattere involutorio della congruenza, anche A′, B; perciò i due segmenti AA′, B′B, omologhi in una congruenza inversa, sono eguali e contraversi, e quindi sono eguali ed equiversi i due AA′, BB′ [1].

35. Su una retta r sia ora assegnata una congruenza diretta **C** diversa dall'identità; sieno AA′, BB′ due coppie di punti omologhi; allora i segmenti AB, A′B′, omologhi in **C**, sono uguali ed equiversi, e perciò lo sono anche i due AA′, BB′ cioè *in una congruenza rettilinea diretta, che non sia l'identità, è costante in grandezza e verso il segmento che ha origine in un punto della prima punteggiata ed estremo nell'omologo della seconda.* Una tale congruenza rettilinea dicesi *traslazione*; *grandezza* e *verso* della traslazione sono la grandezza e il verso del segmento ora detto.

Riassumendo, una congruenza rettilinea diretta è l'*identità*, o una *traslazione*; una congruenza rettilinea inversa è la *simmetria* rispetto a un punto della retta.

V. — Le similitudini sulla retta.

36. Ci occupiamo qui delle similitudini rettilinee che non sono congruenze. Se **S** è una tale similitudine, vi son certo su r due punti, omologhi in **S**, fra loro distinti A, A′, in quanto **S** non è l'identità, che è una congruenza diretta. Detto k il rapporto della similitudine **S**, poichè k è diverso da uno, esistono due punti U, V l'uno interno, l'altro esterno al segmento AA′ che dividono tale segmento nel rapporto k, per modo cioè che si abbia, in valore assoluto,

$$\frac{UA}{UA'} = \frac{VA}{VA'} = k.$$

Se allora **S** è una similitudine diretta, poichè due punti M, M′ sono omologhi in **S**, se sono estremi di due segmenti AM, A′M′ equiversi e tali che $AM : A'M' = k$, sarà V unito in **S**; mentre se **S** è una similitudine inversa, sarà U unito in **S**, per modo chè *una similitudine rettilinea, che non sia una congruenza, ammette sempre un punto unito,*

---

(1) La dimostrazione di questo lemma è affatto simile a quella che si darà più oltre per un lemma analogo relativo a due angoli di un fascio; questa ultima dimostrazione trovasi in G. Ascoli, *Complementi di Geometria*. Giusti, Livorno, 1913, pag. 23, nota (1).

e ne ammette uno solo, perchè, ammettendone due, sarebbe una congruenza. Quel punto si chiama *centro della similitudine*, alla quale si dà talvolta il nome di *omotetia rettilinea*; poichè i segmenti UM, UM′, (oppure VM, VM′) che escono dal centro della omotetia e vanno a due punti omologhi sono segmenti omologhi in **S** essi sono sempre equiversi, se **S** è una similitudine diretta, contraversi, se è inversa; nel primo caso *due punti omologhi nella omotetia diretta sono da una stessa parte rispetto al centro*, nel secondo *due punti omologhi nella omotetia inversa sono da bande opposte rispetto al centro*; in ogni caso *il rapporto delle loro distanze dal centro è in valore assoluto uguale alla costante* k *della similitudine*. Si suole in questo caso, seguendo note convenzioni, attribuire alla costante k il segno $+$ o il segno $-$, secondo chè trattisi del primo o del secondo dei casi accennati.

VI. — Le congruenze in un fascio di raggi o di semipiani.

37. *Una congruenza diretta (o inversa) tra due fasci complani o in un fascio, è determinata quando siano assegnati due raggi omologhi.*

Sieno a, a' i due raggi omologhi dati nei due fasci (O), (O′); preso un raggio b di (O), distinto e non opposto ad a, esiston due raggi b', b'' di (O′), simmetrici rispetto alla retta di a', che formano con a' angoli uguali ad $\widehat{ab}$. E poichè i due angoli così ottenuti $\widehat{a'b'}$, $\widehat{a'b''}$ sono di verso discorde, l'uno di essi sarà equiverso e l'altro contraverso all'angolo $\widehat{ab}$. Delle due sole congruenze [20] che mutan l'angolo $\widehat{ab}$ di (O) nell'angolo $\widehat{a'b'}$ o nell'angolo $\widehat{a'b''}$ di (O′), l'una è diretta e l'altra inversa come volevasi. La dimostrazione val pure se i due fasci (O), (O′) sono sovrapposti.

Ne deriva che *una congruenza diretta in un fascio che ammetta un raggio unito è l'identità*, perchè l'identità in un fascio è una congruenza diretta, e in un raggio unito coincidono due raggi omologhi.

38. *Una congruenza inversa in un fascio è la simmetria rispetto a una retta (del fascio)*; in altri termini se in un fascio (O) è assegnata una congruenza inversa Γ, ogni raggio m di (O) ha per omologo in Γ il simmetrico di m rispetto a una retta r uscente da O. Difatti, poichè Γ non è l'identità nel fascio, che è una congruenza diretta, potremo considerare due raggi distinti a, a' di (O) omologhi in Γ; detta r la retta che biseca l'angolo $\widehat{aa'}$, (anche se piatto, nel qual caso sarà r perpendicolare in O alla retta di a, a') ed u, v i due raggi in cui r è scissa da O, i due angoli $\widehat{au}$, $\widehat{a'u}$ sono uguali e contraversi, cosicchè u è unito in Γ; così v è unito in Γ; e allora, detti m, m' due raggi distinti omologhi in Γ, gli angoli $\widehat{um}$ $\widehat{um'}$ (e così $\widehat{vm}$, $\widehat{vm'}$) sono omologhi in Γ, quindi sono uguali e contraversi, cioè m, m' sono simmetrici rispetto alla r.

39. Come già al n. 33 si noterà che *la simmetria in un fascio ha carattere involutorio*, perchè, quando un raggio m di (O) si consideri appartenere al primo o al secondo dei due fasci inversamente congruenti sovrapposti ad (O), il suo omologo nel secondo o nel primo è sempre lo stesso raggio m', simmetrico di m rispetto alla retta r dei due raggi uniti. Però, contrariamente a quanto accade per le similitudini rettilinee, la simmetria nel fascio non è la sola congruenza involutoria non identica del fascio, come risulta in appresso.

40. Se a ciascun raggio del fascio (O) si fa corrispondere il suo opposto, si ha una congruenza diretta del fascio, che dicesi *opposizione. E se in una congruenza diretta di un fascio due dati raggi omologhi sono opposti, la congruenza è l'opposizione*, cioè sono opposti due raggi omologhi qualunque, perchè la congruenza diretta data e l'opposizione avendo in comune una coppia di raggi omologhi, coincidono [37]. Anche *l'opposizione ha carattere involutorio.*

41. Del carattere involutorio della simmetria in un fascio si approfitta per dimostrare il seguente lemma; *se due angoli* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *di un fascio sono uguali ed equiversi, e i raggi* a, a' *sono distinti e non opposti, anche i raggi* b, b' *sono distinti e non opposti e gli angoli* $\widehat{aa'}$, $\widehat{bb'}$ *sono uguali ed equiversi.* Difatti nella congruenza diretta determinata nel fascio dai due raggi omologhi a, a' sono omologhi pure b, b' e poichè a, a' son distinti e non opposti tale congruenza non è l'identità e non è l'opposizione, epperò anche i raggi b, b' sono distinti e non opposti. Per la ipotesi, gli angoli $\widehat{ab}$, $\widehat{b'a'}$ sono uguali e contraversi, di modo che la congruenza inversa o simmetria del fascio, che muta a in b', muta pure b in a', e quindi, per il carattere involutorio della simmetria, anche a' in b; dunque gli angoli $\widehat{aa'}$, $\widehat{b'b}$, omologhi in una simmetria, sono uguali e contraversi, epperò i due angoli $\widehat{aa'}$, $\widehat{bb'}$ sono uguali ed equiversi (¹).

42. Nel fascio (O) sia data una congruenza diretta Γ che non sia l'identità nè l'opposizione; se allora a, a' sono due raggi omologhi, essi sono distinti e non opposti: sieno ora m, m' due altri raggi omologhi qualunque; se m è opposto ad a, sarà anche m opposto ad a', e gli angoli opposti al vertice $\widehat{aa'}$, $\widehat{mm'}$ sono uguali ed equiversi; se poi m non è opposto ad a, gli angoli (omologhi in Γ) $\widehat{am}$, $\widehat{a'm'}$ sono uguali ed equiversi; son dunque uguali ed equiversi anche i due $\widehat{aa'}$, $\widehat{mm'}$ [41]. Cioè *in una congruenza diretta di un fascio, che non sia l'identità nè l'opposizione, è costante in grandezza e verso l'angolo che ha origine in un raggio del primo fascio e termine nel raggio omologo del secondo.* Una tale congruenza si dirà *rotazione nel fascio*; l'ampiezza ed il verso dell'angolo ora descritto si diranno *ampiezza e verso della rotazione.*

(¹) Cfr. nota (1) al n. 34.

Riassumendo, una congruenza diretta in un fascio è l'*identità* o *pposizione*, o una *rotazione*; una congruenza inversa in un fascio è ıa *simmetria del fascio*.

43. Se è data una congruenza Γ in un fascio di semipiani, la se- ɔne con un piano perpendicolare al suo spigolo produce nel piano ı fascio di raggi e una congruenza in quest'ultimo fascio. Partendo . ciò, è ben facile stabilire che *una congruenza diretta in un fascio semipiani o muta in sè ciascun semipiano del fascio ed è l'*identità; *o ıta ciascun semipiano del fascio nel suo opposto, e dicesi* opposizione; *o è le che il diedro che ha origine in un semipiano e termine nell'omologo costante in grandezza e verso, e dicesi* rotazione nel fascio *di semi- ıni. Una congruenza inversa in un fascio di semipiani sarà invece npre la* simmetria *rispetto a un piano del fascio.*

(Continua) E. VENERONI.

CONSIDERAZIONI SUGLI INFINITESIMI ED INFINITI ATTUALI

1. Premetto che non ho la pretèsa di fare delle dimostrazioni, ı soltanto delle modeste argomentazioni.

Dividasi un segmento AB di lunghezza a in m parti eguali e su ıscuna di esse costruiscasi un triangolo isoscele di altezza $b+h$, ɜendo b, h due segmenti arbitrari, il primo costante, il secondo va- .bile, e si consideri la spezzata formata dai $2m$ lati eguali dei trian- li così ottenuti; essa ha una lunghezza espressa da

$$l_m = 2m\sqrt{\frac{a^2}{4m^2}+(b+h)^2}.$$

Variando h, varia la spezzata in posizione e grandezza, e per h ıdente a 0, la lunghezza l_m ha per limite $2m\sqrt{\frac{a^2}{4m^2}+b^2}$ e la spez- ɪa ha per posizione limite quella della spezzata che si ottiene pren- ɪdo eguale a b l'altezza dei triangoli sopra considerati, posizione ıite che viene raggiunta quando l_m assume il suo valore limite.

2. Dividasi ora un segmento AB di lunghezza a in n parti eguali e ciascuna di esse costruiscasi un triangolo isoscele di altezza $\frac{a}{n-1}$ i consideri la spezzata formata dai $2n$ lati eguali dei triangoli così enuti; essa ha una lunghezza espressa da

$$l_n = a\sqrt{1+\left(\frac{2n}{n-1}\right)^2}.$$

La l_n è una funzione di n decrescente al crescere di n (essendo $n > 1$). Difatti dati ad n due valori $n_1 < n_2$, si ha:

$$l^2_{n_1} - l^2_{n_2} = 4a^2 \left(\frac{n_1}{n_1-1} + \frac{n_2}{n_2-1}\right)\left(\frac{n_1}{n_1-1} - \frac{n_2}{n_2-1}\right) =$$

$$= 4a^2 \left(\frac{n_1}{n_1-1} + \frac{n_2}{n_2-1}\right)\left(\frac{1}{n_1-1} - \frac{1}{n_2-1}\right) > 0.$$

Ora facendo crescere indefinitamente n, la lunghezza l_n ha per limite $a\sqrt{5}$, che è l'ipotenusa del triangolo rettangolo avente per cateti AB e 2AB (più avanti si vedrà di questo una dimostrazione geometrica), e allorchè la spezzata (che in ogni sua posizione si può porre in corrispondenza biunivoca con AB, considerando come corrispondenti due punti quando appartengono ad una normale ad AB) ha questa lunghezza (minima), assumerà una certa posizione limite (allo stesso modo che il contorno di un poligono regolare circoscritto ad una circonferenza ha, quando il numero dei lati cresce indefinitamente, per posizione limite la circonferenza, almeno stando nel campo finito). I punti della spezzata variabile si avvicinano, al crescere indefinito di n, ad AB in modo che, dato un segmento qualsiasi, la distanza di ognuno di essi da AB diviene minore di esso, giacchè ciò accade per $\frac{a}{n-1}$, altezza comune ai nostri triangoli isosceli (le basi $\frac{a}{n}$ dei quali vanno pure decrescendo in guisa da divenire minori di un segmento finito assegnato qualsiasi), ma intanto la posizione limite a cui tende la nostra spezzata, al crescere indefinito di n, non può essere il segmento AB, perchè la lunghezza della spezzata in detta posizione è $a\sqrt{5}$ e non a, e nessuna parte di AB può venir occupata da più parti della nostra spezzata nella sua posizione limite, sia perchè, come s'è osservato, la spezzata si mantiene sempre in corrispondenza biunivoca con AB, sia perchè se una parte di AB venisse occupata da più parti della spezzata nella sua posizione limite, ciò, per ragion di simmetria, dovrebbe accadere ugualmente per qualsiasi parte di AB, nel qual caso la lunghezza della nostra linea nella sua posizione limite dovrebbe essere un multiplo di a, lunghezza di AB, il che non è.

A me pare pertanto che si possano dalle precedenti considerazioni trarre le seguenti conseguenze:

1°. Il gruppo di punti che dividono AB in n parti eguali tende in AB, al crescere indefinito di n ad una posizione limite formata da punti che corrispondono biunivocamente ai numeri dell'intera serie naturale, e in guisa che due consecutivi di essi sono estremi di un segmento di cui nessun multiplo può essere eguale o maggiore di AB, segmenti che sono dunque infinitesimi (attuali) rispetto ad AB, il quale a sua volta è infinito (attuale) rispetto a ciascuno di quelli. Si può anche osservare che, essendo detto gruppo di punti numerabile, perchè corrisponde biunivocamente alla serie naturale, non può occupare tutto il segmento AB.

2°. Debba ammettersi l'esistenza di un ente analitico e di un'operazione, moltiplicazione di un segmento per tale ente, in guisa che il prodotto di uno di detti segmenti infinitesimi per codesto ente sia eguale ad AB, e l'esistenza di un altro ente analitico tale che il prodotto di AB per esso sia eguale ad uno dei segmenti infinitesimi anzidetti.

3°. Sopra ciascuno dei segmenti infinitesimi indicati in 1° esiste un triangolo isoscele di altezza infinitesima (attuale) α, tale che il prodotto di 2β (indicando con β uno dei lati eguali di codesto triangolo) per il primo degli enti analitici di cui è parola sopra, sia eguale ad $AB\sqrt{5}$, segmento a cui è equivalente le spezzata nella sua posizione limite.

3. Vediamo una conseguenza delle precedenti conclusioni. Fissiamo sopra una circonferenza C un punto A e uno dei due versi e dividiamo la circonferenza, a partire da A e nel verso fissato, in n parti eguali, e consideriamo i poligoni regolari P_n, P'_n inscritto e circoscritto, aventi il primo per vertici gli n punti di divisione e l'altro lati tangenti nei medesimi. Al crescere indefinito di n i perimetri dei due poligoni formano due classi contigue, il cui limite comune è un segmento che si assume come circonferenza rettificata, giacchè, si suol dire, al limite i contorni dei due poligoni vengono a coincidere con la circonferenza. Ora stando alla prima delle precedenti conclusioni, l'ultima asserzione non è propriamente esatta, giacchè il gruppo degli n punti considerati, al crescere indefinito di n, tende ad una posizione limite, nella quale due punti consecutivi sono estremi di un arco infinitesimo, ma che è pur sempre un arco e che non può perciò coincidere col segmento che congiunge i suoi estremi, nè con la spezzata bilatera formata dalle parti di tangenti in essi, comprese fra questi e il loro punto d'incontro. I perimetri dei due poligoni tendono adunque a due posizioni limiti diverse dalla circonferenza e perciò diverse fra loro (essendo una interna e l'altra esterna al cerchio); solo può dirsi che p. es. le normali condotte alla circonferenza dai punti di dette posizioni limiti sono infinitesime. Parimenti dei perimetri delle posizioni limiti di P_n, P'_n possiamo solo dire che differiscono fra loro di un segmento infinitesimo. Difatti prendiamo una delle dimostrazioni della contiguità delle classi formate dai perimetri di P_n, P'_n, p. es. quella che si legge negli *Elementi di geometria* di ENRIQUES e AMALDI. " Costruiamo sulla base AB, uguale a quattro diametri del cerchio O, un triangolo isoscele ABC di altezza $CT = \frac{\varepsilon}{2}$ prendiamo poi n così grande che sia $n\widehat{CAB} > 2$ retti, e quindi la n^{ma} parte di due retti risulti minore di $\widehat{CAB}$. Ecc. ". Ora se dalle considerazioni del n. 2 risulta l'esistenza di segmenti infinitesimi e quindi anche di angoli infinitesimi, la costruzione di cui è parola nell'accennata dimostrazione può farsi soltanto nel caso che ε (e perciò $\widehat{CAB}$) non sia infinitesimo, e con ciò detta dimostrazione prova solo che la differenza dei perimetri di P_n e P'_n può rendersi minore di qualunque segmento non infinitesimo.

Così pure quanto ai confronto dei perimetri delle posizioni limiti di P_n, P'_n con quel segmento che intuitivamente corrisponde alla circonferenza rettificata, si potrà solo dire che ciascuno di detti perimetri differisce da questo di un segmento infinitesimo. Anche quest'ultima conclusione però così senz'altro non è totalmente giustificata. Difatti essa è fondata sulla seguente ipotesi: Se due classi di spezzate sono tali da formare, rettificate, due classi contigue di segmenti (tali cioè che ogni segmento dell'una sia maggiore di ogni segmento dell'altra, e tali che fissato un segmento ε piccolo quanto si voglia, ma *finito*, si possano trovare due elementi nelle due classi che differiscano tra loro meno di ε), e se variando le due spezzate sono tali che in ogni stato possano mettersi in corrispondenza biunivoca con una data linea fissa C, e se i loro punti si avvicinano a quelli di questa linea in modo che le distanze tra i punti corrispondenti possano rendersi minori di un segmento finito comunque fissato, il limite comune alle due spezzate rettificate coincide col segmento che intuitivamente corrisponde alla C rettificata. Mostreremo nel paragrafo seguente che questa asserzione non è sempre vera.

4. Prendasi un segmento AB e divisolo in n parti eguali, si costruiscano su esse da una banda i triangoli isosceli di altezza $\frac{AB}{n-1}$ e dall'altra quelli di altezza $\frac{AB}{n+1}$, e consideriamo le classi L_n, L'_n formate, al variare di n, dai perimetri delle due spezzate risultanti P_n, P'_n: dimostreremo che dette classi sono contigue.

Anzitutto osserviamo che se sopra ciascuno dei segmenti $\frac{AB}{n}$ si costruisce il triangolo isoscele di altezza $\frac{AB}{n}$, il perimetro della spezzata Q_n che ne risulta è costante al variare di n (lo indicheremo con L). Per questo dividiamo AB in n parti eguali e sia AC la prima di queste e poi dividiamo AB in $n+1$ parti eguali e sia AD la prima di queste, e si costruiscano su AC, AD i triangoli isosceli ACE, ADF di altezze eguali ad AC, AD; questi avendo le basi proporzionali alle rispettive altezze, sono simili, e perciò, essendo $\widehat{CAE} = \widehat{DAF}$, si ha che AF si trova sopra AE, ed è

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} = \frac{n+1}{n},$$

donde $n\,AE = (n+1)\,AF$ ed anche $2n\,AE = 2(n+1)\,AF$, il che dice che i perimetri delle spezzate ottenute dividendo AB sia in n che in $n+1$ parti eguali e costruendo su ciascuna di esse un triangolo isoscele di altezza eguale alla base, sono eguali.

Ora dimostreremo che è sempre $L_n > L$. Difatti costruita una P_n, se è ACD il primo dei triangoli formati per ottenerla, si prenda sulla sua altezza DH il segmento $HE = AC$; essendo $DH > HE$, sarà $AD > AE$ e perciò $2nAD > 2nAE$ e infine $L_n > L$. Analogamente si vede che è sempre $L'_n < L$, e perciò ogni elemento della classe L_n è maggiore di ogni elemento della L'_n.

Preso ora un segmento ε piccolo a piacere, ma finito rispetto ad AB (cioè tale che esista un suo multiplo maggiore di AB e quindi un summultiplo di questo minore di ε, e allora ε è finito anche rispetto a 2AB), riferendosi alla figura della dimostrazione precedente, dal triangolo AED abbiamo

$$AD - AE < DE = DH - HE = \frac{AB}{n-1} - \frac{AB}{n} = \frac{AB}{n(n-1)}$$

donde $2nAD - 2nAE < \frac{2AB}{n-1}$, e potendosi prendere un valore n' tale che per $n \geqslant n'$ sia $\frac{2AB}{n-1} < \varepsilon$, per tali valori di n sarà $L_n - L < \varepsilon$. Analogamente si prova che si può prendere un valore n'' tale che per $n \geqslant n''$ sia $L - L'_n < \varepsilon$. Allora prendendo n in modo che sia

$$L_n - L < \frac{\varepsilon}{2}\,,\quad L - L'_n < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

risulta $L_n - L'_n < \varepsilon$, e perciò L_n, L'_n sono contigue e individuano nel campo finito (cioè a meno di infinitesimi) un segmento eguale ad L, il quale equivale (come si vede costruendo L per $n=1$) al doppio dell'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti $\frac{AB}{2}$. AB, ossia all'ipotenusa del triangolo rettangolo di cateti AB, 2AB.

Ora al crescere indefinito di n le due spezzate P_n, P'_n variano in modo da soddisfare a tutte le condizioni esposte alla fine del paragrafo precedente, ma intanto i loro perimetri, anche nel campo finito, individuano un segmento di lunghezza diversa da AB.

Abbiamo detto che L_n, al crescere indefinito di n, ha per limite L, cioè $AB\sqrt{5}$ a meno di infinitesimi. L'espressione di L_n è, come s'è visto (n. 2),

$$AB\sqrt{1 + \left(\frac{2n}{n-1}\right)^2}.$$

Ora prendendo le due spezzate formate rispettivamente dai lati di quelle che si ottengono costruendo una P_n e una Q_n sopra ciascuno di n segmenti consecutivi eguali ad AB, la differenza dei loro perimetri è data da

$$n(L_n - L) = AB\left(n\sqrt{1+\left(\frac{2n}{n-1}\right)^2} - n\sqrt{5}\right) =$$

$$= \frac{AB\left(\sqrt{5n^4-2n^3+n^2}-\sqrt{5n^4-10n^3+5n^2}\right)}{n-1} =$$

$$= \frac{AB(8n^3-4n^2)}{(n-1)\left(\sqrt{5n^4-2n^3+n^2}+\sqrt{5n^4-10n^3+5n^2}\right)} =$$

$$= \frac{AB\left(8-\frac{4}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{5-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{5-\frac{10}{n}+\frac{5}{n^2}}\right)}$$

il cui limite, per n crescente indefinitamente, è a meno di infinitesimi, $\frac{4}{5}AB\sqrt{5}$, il che significa che $L_n - L$, per n crescente indefinitamente tende ad un segmento che moltiplicato per n dà un prodotto che, crescendo n indefinitamente, si avvicina al segmento finito $\frac{4}{5}AB\sqrt{5}$, e perciò detto segmento non è un segmento nullo, ma solo un infinitesimo.

5. Riguardo agli enti analitici e al prodotto di un segmento per essi, di cui è parola nella seconda conclusione del n. 2, si osservi che, in virtù della prima conclusione del n. 2, è

$$\lim_{n=\infty}\left(AB\frac{1}{n}\right)$$

eguale ad un certo segmento infinitesimo ε.

Si suole affermare che $AB\frac{1}{n}$, crescendo n indefinitamente, tende a 0 (segmento nullo). La dimostrazione di questa conclusione consiste nel far vedere che, dato un segmento qualsiasi σ finito con AB (cioè tale che esista un suo multiplo che supera AB), esiste un valore n' tale che per $n \geqslant n'$ è $AB\frac{1}{n} < \sigma$. Ora ciò non porta a concludere che $AB\frac{1}{n}$ tenda al segmento nullo, ma solo ad un segmento del quale un multiplo qualsiasi non superi AB, cioè ad un segmento infinitesimo, e questo sarà il segmento nullo solo quando si escluda l'esistenza di un segmento infinitesimo, il che pare non possa farsi stando alla prima delle conclusioni cui siamo arrivati al n. 2.

Introduciamo ora un simbolo η, che chiameremo *unità infinitesima di primo ordine* con la convenzione

$$AB \cdot \eta = \lim_{n=\infty}\left(AB\,\frac{1}{n}\right) = \varepsilon.$$

Avendo poi

$$\lim_{n=\infty}(\varepsilon n) = AB,$$

si potrà introdurre un altro simbolo ω, che chiameremo *unità infinita di primo ordine* con la convenzione

$$\varepsilon\omega = \lim_{n=\infty}(\varepsilon n) = AB.$$

Allora, dati due numeri α, β, convenendo di porre $\alpha > \beta$ o $\alpha < \beta$ secondo che, dato un segmento RS qualsiasi, sia $RS \cdot \alpha > RS \cdot \beta$ o $RS \cdot \alpha < RS \cdot \beta$, si avrà che se α è un ordinario numero reale, è $\alpha > \eta$ e $\alpha < \omega$. Prendendo le mosse da questi principi, si può stabilire, in modo da soddisfare molto bene l'intuizione, una teoria dei numeri infiniti dei vari ordini.

6. Chiuderemo queste considerazioni col recare un esempio di una spezzata il cui perimetro è un infinito. Diviso un segmento $AB = a$ in n parti uguali, e costruito sopra ciascuna di esse un triangolo isoscele di altezza costante b, si faccia crescere n indefinitamente. Allora, stando alla prima delle conclusioni del n. 2, la spezzata variabile tende ad una posizione limite, e se è AC uno dei lati di questa posizione limite, si avrà che il perimetro della spezzata in letta posizione è espresso da $(2AB)\omega$.

F. Palatini.

CONTRIBUTO ALLO STUDIO DEL QUADRANGOLO PIANO INCOMPLETO

1. Questione:

Stabilire la condizione necessaria e sufficiente, affinchè co' quattro riangoli

$$\Delta(a, b, f) = \sqrt{P}, \qquad \Delta(c, d, f) = \sqrt{Q},$$
$$\Delta(a, d, e) = \sqrt{R}, \qquad \Delta(b, c, e) = \sqrt{S},$$

i possa costruire il quadrangolo di lati a, b, c, d *e di diagonali* e, f.

Poniamo (1)

$$\sqrt{\sigma} = \frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)},$$

(1) Questa formola che esprime la superficie di un quadrangolo in funzione de' lati e delle iagonali (analoga a quella per il triangolo), fu data elementarmente dal Dostor ne' *Nouv. Ann.*, nn. 1848, p. 69. Si trova pure ricavata in altro modo negli " Éléments de la Théorie des déteriinants " dello stesso Autore a pag. 200, 2a ediz.

allora si hanno le due equazioni

$$\sqrt{\sigma}=\sqrt{P}+\sqrt{Q}, \qquad \sqrt{\sigma}=\sqrt{R}+\sqrt{S},$$

le quali, rese razionali, dànno luogo alle altre due

$$\left.\begin{array}{l}\sigma^2-2\sigma(P+Q)+(P-Q)^2=0,\\ \sigma^2-2\sigma(R+S)+(R-S)^2=0.\end{array}\right\} \qquad (\sigma)$$

Queste equazioni ammettono la radice σ comune, epperò fra' suoi coefficienti sussiste la relazione

$$\begin{array}{l}[(R-S)^2-(P-Q)^2]^2+\\ -4(P+Q-R-S)[(R+S)(S-Q)^2-(P+Q)(R-S)^2]=0,\end{array} \qquad (\rho)$$

che rappresenta la condizione cercata.

2. Forme diverse della (ρ). — La (ρ) può mettersi sotto forme diverse, per esempio:

Ponendo per brevità

$$P+Q=\alpha_1,\quad P-Q=\beta_1,\quad R+S=\alpha_2,\quad R-S=\beta_2,$$

si hanno le forme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\alpha_1 & \beta_1^2 & 0\\ 0 & -1 & 2\alpha_1 & \beta_1^2\\ 1 & 2\alpha_2 & \beta_2^2 & 0\\ 0 & -1 & 2\alpha_2 & \beta_2^2 \end{vmatrix}=0, \qquad (\rho)'$$

$$\left.\begin{array}{l}(2\alpha_1\beta_2\mp 2\beta_1\alpha_2)^2=\\ \quad=(\beta_1^2-\beta_2^2+2\alpha_1\alpha_2\pm\beta_1\beta_2)(\beta_1^2-\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_2\mp 2\beta_1\beta_2),\\ (2\alpha_1\alpha_2\mp 2\beta_1\beta_2)^2=\\ \quad=(\beta_1^2-\beta_2^2-2\alpha_1\alpha_2\mp 2\alpha_2\beta_1)(\beta_1^2-\beta_2^2+2\alpha_1\beta_2\pm 2\alpha_2\beta_1),\end{array}\right\} \qquad (\rho)''$$

dove si corrispondono i segni.

Particolarmente interessante riesce la (ρ) messa sotto forma

$$(\sigma_1-\sigma'_1)(\sigma_1-\sigma'_2)(\sigma_2-\sigma'_1)(\sigma_2-\sigma'_2)=0. \qquad (\rho)'''$$

dove σ_1, σ_2, σ'_1 e σ'_2 sono rispettivamente le radici delle (σ) ossia

$$\begin{array}{ll}\sigma_1=P+Q+\sqrt{2PQ}, & \sigma_2=P+Q-\sqrt{2PQ},\\ \sigma'_1=R+S+\sqrt{2RS}, & \sigma'_2=R+S-\sqrt{2RS};\end{array}$$

e fatte queste sostituzioni la $(\rho)'''$ diviene [1]

$$(\Sigma P^2-2\Sigma PQ)^2-64RSPQ=0. \qquad (R)$$

La (ρ) messa sotto questa forma ci dà modo di mostrare che essa comprende i quadrangoli convesso, concavo e intrecciato.

[1] Si osservi come la $(\varrho)'''$ in modo rapidissimo ci ha dato la identità della (ϱ) colla (R), mentre ben diverso lavoro occorre dovendo verificare la cosa per via di trasformazioni e di sviluppi.

Infatti la (R) resulta ancora dal prodotto dei primi membri delle seguenti otto equazioni:

$$\left.\begin{array}{ll}\sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}+\sqrt{S}=2\sqrt{\sigma}, \ (1) & \sqrt{P}+\sqrt{Q}+\sqrt{R}-\sqrt{S}=0, \ (3)\\ \sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}-\sqrt{S}=0, \ (2) & \sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}+\sqrt{S}=0, \ (4)\\ \sqrt{P}+\sqrt{Q}-\sqrt{R}+\sqrt{S}=0, \ (5) & \sqrt{P}-\sqrt{Q}-\sqrt{R}-\sqrt{S}=0, \ (6)\\ \sqrt{P}-\sqrt{Q}+\sqrt{R}-\sqrt{S}=0, \ (7) & \sqrt{P}-\sqrt{Q}-\sqrt{R}+\sqrt{S}=0, \ (8)\end{array}\right\} (Q)$$

a ciascuna delle quali — come qui è indicato — risponde uno dei sette quadrangoli qui tracciati, meno il quadrangolo (1) che risponde alle equazioni (1) e (2).

La (R) comprende tanto i casi in cui nessun vertice del quadrangolo cade nell'interno del triangolo formato dagli altri tre [equa-

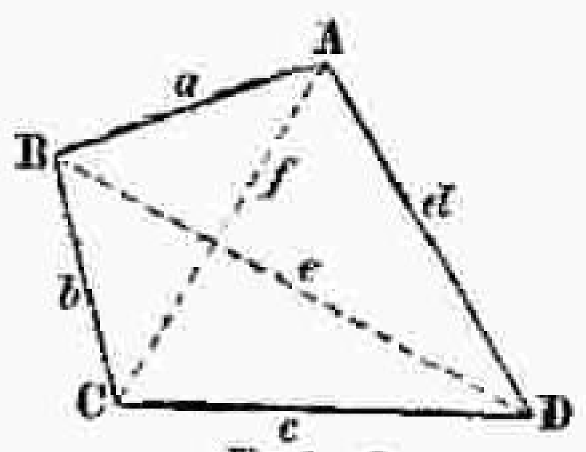


Fig. 1 e 2.

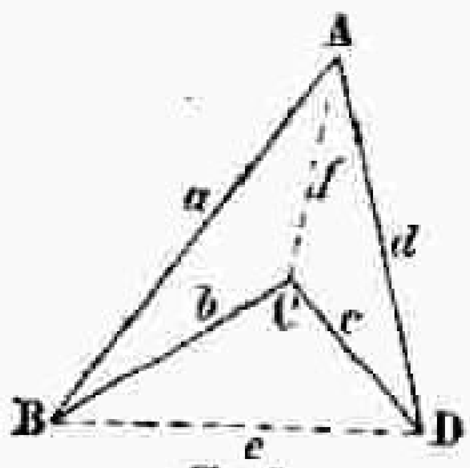


Fig. 3.

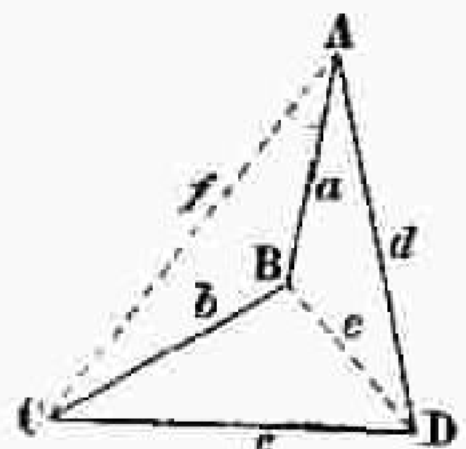


Fig. 4.

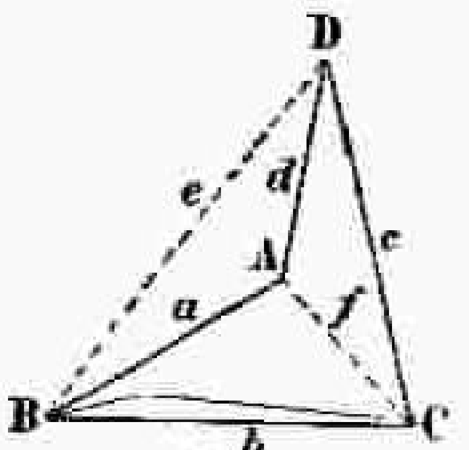


Fig. 5.

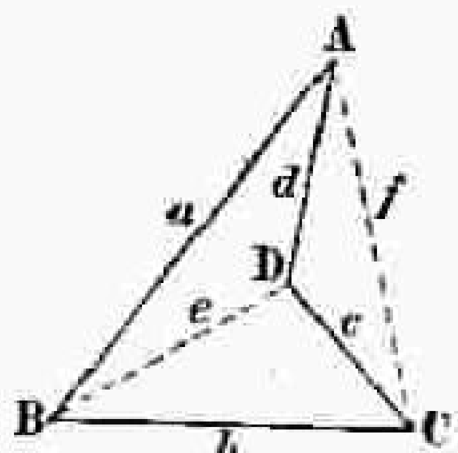


Fig. 6.

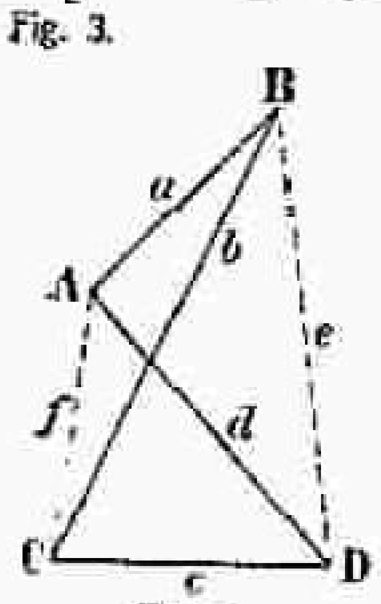


Fig. 7.

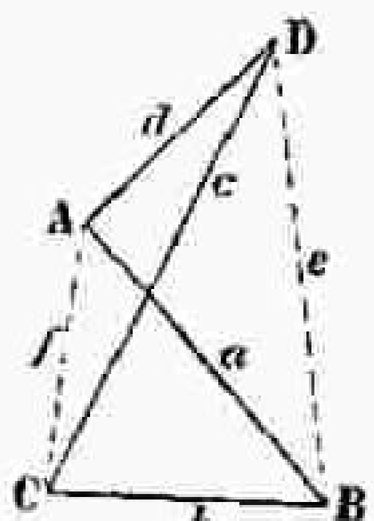


Fig. 8.

oni (1), (2), (7), (8)] e tanto i casi in cui un vertice cade nell'interno del triangolo formato dagli altri tre (¹).

3. La relazione di Carnot (²) fra' quattro lati e le due diagonali un quadrangolo incompleto è

$$\begin{aligned}{}^2c^2f^2+(b^2+c^2-e^2)(c^2+f^2-d^2)(b^2+f^2-a^2)=\\ =b^2(c^2+f^2-d^2)^2+c^2(b^2+f^2-a^2)+f^2(b^2+c^2-e^2)^2,\end{aligned}$$

a questa può mettersi sotto la forma (³)

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&f^2&b^2&c^2\\1&f^2&0&a^2&d^2\\1&b^2&a^2&0&e^2\\1&c^2&d^2&e^2&0\end{vmatrix}=0,$$

(¹) Quanto è detto sin qui può servire bene di risposta alla questione n. 1885 dell'*Interm. des Math.*, vol. VII, pag. 234, anno 1900 (sin qui non vi era stata alcuna risposta).

(²) *Géom. de position*, pag. 387.

(³) Altre forme si conoscono del Catalan, del Deshoves, del Ciamberlini ecc., (sarebbe desiabile una bibliografia).

forma nota e data dal BRIOSCHI (*Nouv. Ann.*, 1855, pag. 173), e dal CAYLEY (*Mathematical Cambridge Journal*, tom. II); d'altra parte ricordando che

$$16\,P = 2\sum_{a,\,b,\,c} a^2b^2 - \Sigma a^4; \qquad 16\,R = \sum_{a,\,d,\,f} a^2d^2 - \Sigma d^4$$
$$16\,Q = 2\sum_{c,\,d,\,e} c^2d^2 - \Sigma c^4; \qquad 16\,S = 2\sum_{b,\,c,\,f} b^2c^2 - \Sigma b^4$$

la risultante delle (σ) diviene la relazione del 16° grado (¹)

$$\Delta\,\{(e^2 - f^2)\,(He^2f^2 - Ie^2 + Jf^2) - H\,(Ke^2 + Lf^2)\} = 0, \tag{1}$$

dove

$$H = (a^2 - c^2)\,(b^2 - d^2), \quad I = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\,(a^2b^2 - c^2d^2),$$
$$J = (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)\,(a^2d^2 - b^2c^2),$$
$$K = (a^2 - d^2)\,(b^2 - c^2), \quad L = (a^2 - b^2)\,(c^2 - d).$$

Ciò che dimostra che la relazione di Carnot è compresa nella (ρ) e questa maggiore generalità è dovuta — come resulta da quanto innanzi abbiamo esposto — al fatto che la relazione $\Delta = 0$ appartiene solo al quadrangolo di lati a, b, c, d e di diagonali e ed f, mentre la (ρ) oltre a questo si riferisce anche a' due quadrilateri a, b, c, d, e ed a, b, c, d, f colle condizioni risultanti dalle (Q).

4. La risoluzione della questione impostata in principio porta anche alla risoluzione dell'altra:

Dati quattro punti in un piano e presi come assi le congiungenti due coppie di essi stabilire la relazione che lega le distanze delle due coppie di punti scelti e le distanze dei quattro punti da' due assi.

Dovendo scegliere come assi le rette su cui si trovano due dei sei elementi a, b, c, d, e, f si vede subito che si hanno quindici casi — inoltre — se si tiene presente che si ha (²)

$$2\sqrt{P} = \begin{cases} bh_{A,\,b} \\ fh_{B,\,f} \\ ah_{C,\,a}\,, \end{cases} \quad 2\sqrt{Q} = \begin{cases} ch_{A,\,c} \\ fh_{D,\,f} \\ dh_{B,\,d}\,, \end{cases} \quad 2\sqrt{R} = \begin{cases} eh_{A,\,c} \\ ah_{D,\,a} \\ dh_{B,\,d}\,, \end{cases} \quad 2\sqrt{S} = \begin{cases} eh_{C,\,e} \\ bh_{D,\,b} \\ ch_{B,\,c}\,, \end{cases}$$

quando sia scelto il sistema di assi, per esempio: quelli su cui si trovano e ed f, servendosi della (ρ)', la relazione domandata diviene

$$\begin{vmatrix} 1 & 2f^2(h^2_{B,\,f} + h^2_{D,\,f}) & f^4(h^2_{B,\,f} - h^2_{D,\,f})^2 & 0 \\ 1 & -1 & 2f^2(h^2_{B,\,f} + h^2_{D,\,f}) & f^4(h^2_{B,\,f} - h^2_{D,\,f})^2 \\ 1 & 2e^2(h^2_{A,\,e} + h^2_{C,\,e}) & e^4(h^2_{A,\,e} - h^2_{C,\,e}) & 0 \\ 0 & -1 & 2e^2(h^2_{A,\,e} + h^2_{C,\,e}) & e^4(h^2_{A,\,e} + h^2_{C,\,e})^2 \end{vmatrix} = 0.$$

(¹) Questo laborioso calcolo è dovuto ai signori WELSCH e GOULARD. V. *Intérm. des Math.* vol. IV, pag. 164-65, anno 1897.

(²) Con $h_{A,\,b}$ intendiamo la distanza del vertice A dall'asse su cui si trova b.

G. CANDIDO.

PROBLEMI [1]

(Continuazione — Vedi fascicolo V, anno XXIX).

143. Siano ABC un triangolo isoscele rettangolo in C; B' e A' i punti di mezzo di CB e CA; I_A e I_B i centri dei circoli exinscritti interni agli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$; D il punto situato sulla perpendicolare in A ad AC, esterno al triangolo tale che sia $AD = 3AA'$; E, il punto analogo a D sulla perpendicolare in B a BC e tale che sia $BE = 3BB'$; K il punto situato internamente al triangolo ABC sulla traiettoria dell'angolo $\widehat{C}$ e tale che $CK = \dfrac{3\,CA\sqrt{2}}{10}$.

Dimostrare che gli otto punti A, A', B, B', I_A, I_B, E, D. Appartengono ad un'iperbole che ha K per centro.

144. Trovare il luogo dei vertici situati sull'asse minore delle ellissi che passano per un punto fisso, ed hanno in comune un vertice dell'asse maggiore e la tangente di esso.

145. Se P, Q sono i punti d'incontro della tangente e della normale in M ad una ellisse di centro O con la perpendicolare ad OM condotta per O, dimostrare che:

1° il luogo di P è una *kreuzcurve*;

2° il luogo di Q è una sestica di cui l'area è $^1/_3$ di quello dell'evoluta dell'ellisse.

146. Essendo x_1, x_2, x_3, x_4 le radici dell'equazione

$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0,$$

calcolare l'espressione

$$\frac{x_1}{x_1^2-1} + \frac{x_2}{x_2^2-1} + \frac{x_3}{x_3^2-1} + \frac{x_4}{x_4^2-1}$$

senza risolvere l'equazione.

$\left(\text{Si trova } \dfrac{91}{60}\right)$.

147. Essendo note le ordinate y_1, y_2, y_3 di tre punti A, B, C dell'iperbole $y^2 - 2px = 0$, trovare la relazione esprimente che il circolo circoscritto ad ABC passi per il fuoco F. Calcolare le coordinate del centro di questo circolo e quello del quarto punto d'incontro D con la parabola.

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante BARISIEN, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

148. Per un sistema di ellissi omofocali, il luogo dei punti d'incontro dell'evoluta con le diagonali del rettangolo degli assi è una curva di 10 ordini.

Per una serie d'iperboli omofocali il luogo dei punti d'incontro dell'evoluta con gli asintoti è una curva di 8° gradi.

Costruire queste due curve.

149. Trovare il punto della cubica

$$y^2 = \frac{x^2 (x-b)}{a-x},$$

i quali sono reali se a e b sono di segno eguali.

Calcolare l'area compresa fra la curva ed il suo asintoto.

(Le coordinate dei punti d'insieme sono

$$x = \frac{4ab}{3a+b}, \qquad y = \pm \frac{4ab}{3a+b}\sqrt{\frac{b}{3a}}.$$

L'area richiesta è

$$U = \frac{\pi (a-b)(3a+b)}{4}\Big).$$

150. Un segmento MN di lunghezza costante scorre con un estremo M sopra un circolo, con l'altro estremo N sopra una tangente a questo circolo. Trovare il luogo del punto di mezzo di MN.

151. Una corda variabile MN di una parabola è di lunghezza costante. Trovare:

1° il luogo del punto medio di MN;

2° il luogo della proiezione del vertice della parabola su MN;

3° il luogo del polo di MN rispetto alla parabola.

Calcolare anche l'area compresa fra l'asse della parabola, la prima delle suddette curve, la parabola ed una parallela all'asse di questa.

152. Costruire:

1° la seconda sviluppata di una parabola;

2° la curva luogo del simmetrico del centro di curvatura della parabola rispetto al punto di contatto.

153. Il volume generato dal cappio della strofoide retta

$$y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

rotando d'un intero giro attorno ad y è $\frac{\pi a^3}{3}(3\pi - 8)$.

154. Si consideri l'ellisse e le due iperboli

$$(e)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (i)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad (i')\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

1° il luogo dei poli delle tangenti di (e) rispetto a ciascuna delle iperboli (i), (i') è la stessa (e);

2° il luogo dei poli delle normali di (e) rispetto a ciascuna delle due iperboli (i), (i') è una *kreuzcurve*;

3° Determinare le normali ad (e) che sono tangenti a (i) o ad (i').

155. Calcolare

$$\frac{\operatorname{sen}^7 \varphi \, dy}{\cos \varphi}.$$

(Si trova

$$\frac{\operatorname{sen}^7 \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi} = - \operatorname{L} \cos \varphi + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi - \frac{3}{4} \cos^4 \varphi + \frac{1}{6} \cos^6 \varphi \Big).$$

156. I valori di x ed y che si ottengono risolvendo il sistema

$$[a^2x^2 + b^2y^2 - (a^2 - b^2)^2]^3 + 27a^2b^2 (a^2 - b^2)^2 x^2y^2 = 0,$$
$$a^2x^2 - b^2y^2 = a^4 - b^4$$

sono tutti immaginari.

(Si dimostra con considerazioni algebriche. La cosa risulta evidente considerando due curve, evolute di ellisse e d'iperbole, rappresentate dalle due equazioni).

157. Essendo M_i il piede di una delle quattro normali ad un'ellisse uscenti da un punto I, si consideri per ciascuno dei punti M_i:

a) il circolo di centro I e raggio IM_i;

b) il circolo avente IM_i per diametro;

c) il circolo di centro M_i e raggio M_iI.

Si dimostri che:

1° il luogo del punto I tale che la somma delle potenze del centro O della ellisse rispetto ai quattro circoli *a*) è un'iperbole;

2° i luoghi analoghi per i quattro circoli *b*) o *c*) sono pure due iperboli;

3° per un punto qualsiasi I la somma delle potenze di O rispetto ai quattro circoli *b*) diminuita della somma delle potenze di O rispetto ai quattro circoli *a*) è costante ed eguale a $2(a^2 + b^2)$.

158. Dimostrare che l'equazione in λ

$$\frac{\lambda (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) + b (a \cos \theta - b)}{\sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) + 2\lambda b (a \cos \theta - b) + b^2}} =$$
$$= \frac{\lambda (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) + a (b \cos \theta - a)}{\sqrt{\lambda^2 (a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta) + 2\lambda a (b \cos \theta - a) + a^2}}$$

on ha altra radice che $\lambda = \frac{1}{2}$.

(Formando l'equazione di 4° grado in λ, si vede che i termini in λ^4, λ^3, λ^2 ono nulli e resta $2\lambda - 1 = 0$).

159. Si considerino in un piano due rette perpendicolari Ox, Oy due punti fissi P, Q si traccino due rette variabili OM, OM' tali che

$$\operatorname{tg} MOx \operatorname{tg} M'Ox = \text{costante} = \lambda.$$

Per P si conduca una retta che faccia con una delle rette OM, OM' l'angolo θ, e per Q si conduca una retta che faccia con la seconda retta l'angolo θ'. Trovare il luogo del punto d'incontro R di queste due rette.

Casi in cui: 1° $\theta=0$, $\theta'=0$; 2° $\theta=90°$, $\theta'=90°$.

(Il luogo si compone di 8 coniche).

160. Una corda MN variabile d'un'iperbole equilatera di centro O si sposta in guisa che il triangolo OMN abbia un'area costante. Trovare il luogo del punto d'incontro P delle tangenti in M ed N.

161. Siano C il centro di curvatura corrispondente ad un punto M di una parabola e D il centro di curvatura corrispondente al punto C della sviluppata. Dimostrare che il rapporto dei raggi di curvatura CD e MC è proporzionale alla distanza di M dall'asse della parabola.

$\left(\text{La parabola essendo } y^2=2px, \text{ si trova } \frac{CD}{MC}=\frac{3y}{p}\right)$.

162. Sia PQ una corda fissa di una data conica. Per Q si traccino due corde variabili QR, QS egualmente inclinate su PQ. Dimostrare che la corda RS passa per una punto fisso. Se PQ è parallelo ad un asse della conica questo punto è all'infinito.

163. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^{\frac{5}{2}}\,dx=\frac{5\pi}{64}.$$

164. Siano M un punto mobile sul circolo circoscritto al triangolo ABC; P, Q le sue proiezioni sulle rette CA, CB e P', Q' i simmetrici di M rispetto alle rette CA, CB. Dimostrare che:

1° i luoghi dei punti di mezzo di PQ e P'Q' sono due circoli;

2° la retta P'Q' passa per l'ortocentro del triangolo fisso ABC.

165. Se AB è una corda fissa di una conica e P un punto di essa, RQ una corda che varia con la condizione che l'angolo BPQ sia bisecato dalla retta AB si dimostri che l'inviluppo della RQ è una conica; e che questo è una parabola se la retta AB è parallela ad un asse della conica data.

166. Per ciascuno dei triangoli d'area massima iscritti in una ellisse l'area del triangolo pedale del punto di Lemoine è costante.

167. Essendo M un punto qualunque di una data ellisse di assi $2a$, $2b$; P, Q, R i piedi delle tre normali condotte da M all'ellisse, e x_1, x_2, x_3 le distanze di questi tre punti dall'asse minore, dimostrare che

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a^4}{b^4}(2b^2-a^2)=\text{costante}$$

$$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}=-\frac{(a^4-b^4)}{a^6}=\text{costante}.$$

168. Siano A, B, C, D quattro punti di un'ellisse; F uno dei suoi :hi; A', B', C' i punti d'incontro delle rette AF, BF, CF con l'el- ɘ; A'', B'', C'' i punti d'incontro delle rette DA', DB', DC' con le e BC, CA, AB rispettivamente. Dimostrare che i quattro punti A'', C'', F sono in linea retta.

69. Il luogo dei punti M del piano d'un triangolo ABC, tali che

$$\overline{MA}^2 . \operatorname{sen} \widehat{2A} + \overline{MB}^2 . \operatorname{sen} \widehat{2B} + MC . \operatorname{sen} \widehat{2C} = K^2 = \text{costante},$$

ı circolo concentrico al circolo circoscritto al triangolo ABC.
ie A', B', C' sono le proiezioni del punto M sulle rette del trian-, l'area del triangolo $A'B'C'$ è costante.

70. La tangente in un punto M d'una circonferenza di centro O ntri un diametro fisso OX in T; e sia T' il simmetrico di T rispetto). La perpendicolare condotta dal punto di mezzo I di TM su OX ntri OM in K; la perpendicolare condotta in K od OK incontri OX ; e sia L' il simmetrico di L rispetto ad O.

°. Trovare i luoghi dei punti medi di IL, IL', ML, ML', IT, IT'.

°. La retta IL inviluppa una curva tale che l'area compresa fra e gli asintoti è $\frac{1}{12}$ di quella del cerchio dato.

°. La retta IL' inviluppa una curva *cappa* tale che l'area com- ı fra essa e i suoi asintoti è $\frac{1}{4}$ dell'area del cerchio dato. Questa ɪ è anche il luogo del punto I_3.

71. Il circolo che ha per diametro una corda AB di una ellisse ɜntro O incontra l'ellisse in altri due punti C, D. Indicando ?, Q i punti d'incontro dell'asse minore con le rette AB, CD, si ha

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \text{costante}.$$

72. Si consideri un circolo di centro O e raggio R ed uno di o O' e raggio r interno al primo. Indicando con d la distanza entri O, O', è noto che, se $d^2 = R^2 - 2Rr$, esistono infiniti trian- ABC inscritti nel primo circolo e circoscritti al secondo.

. Per uno qualunque di questi triangoli, il centro del circolo dei punti è ad una distanza costante dal punto O', eguale a $\frac{a^2}{2R}$.

. I luoghi dei baricentri e degli ortocentri dei triangoli ABC due circoli.

rendendo un sistema di assi ortogonali di cui O sia l'origine e OO' l'asse : si trova

luogo del baricentro di ABC $\left(x - \frac{2a}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{a^4}{9R^2}$

» » ortocentro $(x - 2a)^2 + y^2 = \frac{a^4}{R^2}\Big)$.

173. Sono dati due circoli concentrici C, C_1 di centro O e un diametro fisso X. Se M, M_1 sono due punti di C, C_1 rispettivamente tali che le semirette OM, OM_1 siano egualmente inclinate su X, dimostrare che la retta MM_1 è sempre normale ad una ellisse fissa.

174. Una corda focale qualunque d'una ellisse passante per il fuoco F incontra le tangenti negli estremi dell'asse maggiore nei punti P, P'. Dimostrare che:

1° il circolo avente per diametro PP' inviluppa l'ellisse data ed è bitangente ad essa;

2° il luogo del punto d'incontro della corda di contatto con PP' è la direttrice relativa al fuoco F.

175. Siano A, B due punti fissi ed M un punto variabile sopra una stessa conica. I luoghi dell'ortocentro e del centro del circolo dei nove punti del triangolo MAB sono due coniche.

176. Inviluppo delle corde d'una conica che sono visti da un vertice sotto un angolo di 45°. Studiare particolarmente il caso in cui la conica data è una parabola.

177. Il luogo del punto M del piano di un triangolo ABC tale che il triangolo avente per vertici le proiezioni di M sulle tre altezze abbia una superficie costante è una ellisse. Caso in cui la superficie data è eguale a quella del triangolo ABC.

178. Si considerino le parabole P che hanno la stessa corda OA normale in O. Le loro direttrici inviluppano una seconda parabola Q che si domanda di determinare.

(Continua) E.-N. BARISIEN.

PICCOLE NOTE

Sul metodo differenziale per la ricerca dei massimi e minimi nell'insegnamento medio.

1. Si ritiene da molti che una esposizione del principio fondamentale che il Calcolo offre per la ricerca dei massimi e minimi non possa darsi in modo rigoroso nell'insegnamento secondario senza incorrere in notevoli difficoltà. E difatti seguendo la falsa-riga dei corsi universitarî di Calcolo, si crede necessario ricorrere al teorema degli incrementi finiti, o alle delicate considerazioni sul comportamento di una funzione intorno a un punto, in relazione al comportamento in un intervallo, o infine all'uso della derivata seconda, che non è del resto per sè sufficiente allo scopo.

Avendo avuto occasione di studiare l'argomento per un esperimento che di questo metodo ho fatto nella scuola, ho potuto constatare che i punti essenziali della teoria possono stabilirsi con semplicità e rigore in modo accessibile a qualunque scolaresca, non eccezionalmente scadente, facendo uso soltanto della definizione di funzione crescente e decrescente in un intervallo, del teorema di esistenza del massimo e del minimo di una funzione finita e continua in un intervallo, e della definizione di derivata. Sono stato condotto a fondare la teoria su queste sole basi da una considerazione metodica: che cioè tutta l'esposizione ordinaria del Calcolo è fondata sul teorema degli incrementi finiti, e quindi sul teorema di Rolle, che è a sua volta conseguenza diretta del teorema di esistenza del massimo e del minimo; sicchè in sostanza essa è un metodo *euristico* che ricerca massimi e minimi, presupponendone però l'esistenza. E allora volli vedere se sfruttando direttamente il teorema di esistenza non si potesse ottenere un criterio per riconoscere i massimi e i minimi almeno nei casi che si presentano nella pratica (funzioni derivabili, che soddisfano alle condizioni di Dirichlet). Il criterio è del resto ben noto, ma non ne conoscevo finora una dimostrazione fondata su basi così semplici; credo che essa possa tornare utile a qualche collega desideroso di rinnovare l'esperimento nella scuola, e per ciò indico qui per sommi capi il modo di giungervi.

2. Dato in generale il concetto di funzione, di continuità, di funzione crescente o decrescente in un intervallo, di massimo e di minimo, si dimostrerà o si darà per dimostrato il teorema di esistenza del massimo e del minimo di una funzione finita e continua in un intervallo. Si esporrà il concetto di derivata, con quella copia di schiarimenti, di interpretazioni e di regole che più si crederà opportuna, e si farà notare che l'esistenza della derivata deve verificarsi caso per caso.

Si dimostrerà poi che nei punti di massimo e minimo relativo la derivata si annulla (se sono verificate le note condizioni); sicchè risulterà che possono essere massimi o minimi di $f(x)$ solo i punti in cui $f'(x) = 0$, e si dovrà determinare quali tra le radici di $f'(x)$ corrispondono a massimi, quali a minimi, quali a nessuno dei due casi.

Si noterà che le radici di $f'(x)$ dividono generalmente il campo totale in cui si studia la questione in tanti intervalli in ciascuno dei quali la derivata ha segno costante, ciò che nei casi singoli si verifica con facilità. Basterà allora studiare a $f(x)$ in un intervallo nel cui interno la $f'(x)$ ha segno costante.

3. Per questo si osservi che se (a, b) è uno di questi intervalli (siano o no a e b radici di $f'(x) = 0$) in esso la $f(x)$ assume effettivamente il suo valore massimo e il suo valore minimo; ma ciò non può aversi in punti interni all'intervallo perchè in essi $f'(x)$ non si annulla; dunque massimo e minimo si avranno per i valori estremi a e b. E propriamente, se $f(a) < f(b)$, si avrà per $x = a$ il minimo e per $x = b$ il massimo; se $f(a) > f(b)$ l'opposto; non potrà essere $f(a) = f(b)$ perchè in tal caso $f(x)$ in (a, b) sarebbe costante e la sua derivata nulla, contro l'ipotesi.

In particolare per verificare se per $x = c$, radice di $f'(x)$, la $f(x)$ ha un massimo, un minimo, o nessun dei due, basterà prendere due valori m, n tali che $m < c < n$ e che tra m e c e tra c e n la $f'(x)$ abbia segni costanti: per esempio m e n potranno essere le due radici di $f'(x)$ che comprendono c. Allora, se $f(m) < f(c)$, $f(n) < f(c)$, $f(c)$ è massimo di $f(x)$ in (m, c) o in (c, n), quindi in (m, n); se invece $f(m) > f(c)$, $f(n) > f(c)$, per $x = c$ si ha un minimo di $f(x)$. Se infine $f(m) < f(c) < f(n)$, oppure $f(m) > f(c) > f(n)$, $f(c)$ è massimo di $f(x)$ in uno dei due intervalli (m, c), (c, n) minimo nell'altro: e per $x = c$ non si ha nè massimo nè minimo.

4. A complemento di quanto si è ora detto può dimostrarsi che se nell'interno dell'intervallo (a, b) $f'(x)$ non si annulla e $f(a) < f(b)$, $f(x)$ è crescente in (a, b). Ed infatti, poichè $f(a)$ è il valore minimo di $f(x)$ in (a, b), $f(b)$ il valore massimo, per un valore p in (a, b) si ha $f(a) < f(p) < f(b)$ (esclusa l'uguaglianza per quanto si è trovato sopra). Ma anche per (p, b) può farsi la stessa considerazione; sicchè avendosi $f(p) < f(b)$, per un valore q compreso tra p e b sarà $f(p) < f(q) < f(a)$. Concludendo $f(a) < f(p) < f(q) < f(b)$, cioè $f(x)$ è crescente in (a, b). Analogamente $f(x)$ è decrescente in (a, b) se $f(a) > f(b)$.

5. Invece di fare la riprova $f(a) \gtrless f(b)$ se ne può fare una più semplice, osservando cioè il segno di $f'(x)$. Ed infatti se la $f(x)$ è crescente in (a, b), per due valori p, q di questo intervallo le differenze $f(p) - f(q)$, $p - q$ hanno ugual segno, quindi il rapporto incrementale $\dfrac{f(p) - f(q)}{p - q}$ è positivo. Al limite per $p = q$ si avrà $f'(q) \geqslant 0$ e anzi, non essendo $f'(q) = 0$, dovrà aversi $f'(q) > 0$. Nello stesso modo, se $f(x)$ è decrescente in (a, b), in un punto q compreso tra a e b sarà $f'(q) < 0$. Dal segno $f'(x)$ può dunque riconoscersi se nell'intervallo (a, b) la $f(x)$ è crescente o decrescente: ne segue subito che saranno punti di massimo quelli che terminano un intervallo in cui $f'(x) > 0$ o ne iniziano uno in cui $f'(x) < 0$; di minimo quelli che presentano l'opposto carattere; non daranno massimi nè minimi quei punti che dividono due intervalli nei quali $f'(x)$ ha il medesimo segno. Ed è questo il criterio che avevamo in vista e che nei casi elementari è più che sufficiente allo scopo; chi ne trovasse la dimostrazione non abbastanza agevole per i giovani può limitarsi al criterio del n. 3 che non mi sembra offrire nessuna difficoltà.

G. Ascoli.

RETTIFICA.

Modena, 14 febbraio 1915.

Chiar.mo Prof. Lazzeri

A Lei, mi rivolgo per pregarla di compiacersi, nel caso che credesse di riparlare del compianto prof. Pirondini, di correggere una inesattezza nella quale Ella è involontariamente incorsa, asserendo che questo esimio matematico nacque in Parma, mentre, come risulta dagli atti dello Stato Civile, egli nacque nell'anno 1857 nella Villa S. Caterina situata presso Modena.

Sentimenti di affezione mi legavano al prof. Pirondini, che fu mio discepolo nell'Istituto tecnico e nella Università di Modena, epperciò sono grato a Lei per l'onore che ha voluto fare alla memoria di lui, lamentando pubblicamente la immatura perdita di chi veramente non fu, come Ella dice, conosciuto ed apprezzato quanto meritava.

Con alta stima

Suo Obbl.mo

Francesco Nicoli.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 9 Aprile 1915

LE SIMILITUDINI

(Continuaz. e fine — v. fascicolo precedente).

VII. — Le congruenze nel piano.

44. *Dati in un piano due segmenti uguali fra loro riferiti* AB, A′B′, *tono una sola congruenza diretta ed una sola congruenza inversa, nel no che mutino i punti* A, B *ordinatamente nei punti* A′, B′.

Fissato un punto C fuori di AB, esistono due punti C′, C″, simmetrici etto ad A′B′ e tali che i triangoli A′B′C′, A′B′C″ siano uguali al ngolo ABC; e poichè tali triangoli hanno verso contrario, perchè no verso contrario i loro angoli $A'\widehat{C'}B'$, $A'\widehat{C''}B'$, di essi l'uno, e sia 'C′, sarà direttamente uguale ad ABC, mentre l'altro, A′B′C″, sarà ale e contraverso ad ABC. La congruenza diretta determinata dai ngoli omologhi ABC, A′B′C′ e la congruenza inversa determinata due ABC, A′B′C″ sono le richieste.

Ne segue che *una congruenza diretta in un piano che ammetta due i uniti distinti è l'identità.*

5. Fissato nel piano un segmento orientato HH′, a ciascun punto M piano si faccia corrispondere l'estremo M′ del segmento che esce I e che è parallelo (o collineare) ed equiverso ad HH′: si sta- à così nel piano una corrispondenza biunivoca **C** che è una ruenza, com'è facile provare; ed è anche una congruenza diretta: ti, se su una retta r, parallela ad HH′ si fissano due punti M, N, trasformati mediante **C** sono due punti M′, N′, della retta stessa, chè MM′, NN′ sono uguali ed equiversi, lo sono pure [34] MN, ; allora preso un punto P, fuori di r, e il suo trasformato P ante **C**, poichè PP′ è parallelo alla r, e i segmenti MN, M′N′ equiversi, i due angoli $M\widehat{P}N$, $M'\widehat{N'}P'$, omologhi in **C**, sono equi- e **C** è una congruenza diretta che dicesi *traslazione* nel piano; *lezza, direzione* e *verso* della traslazione sono quelli del seg- HH′.

. Fissato un punto U del piano, si faccia corrispondere al punto U nto medesimo, e a ogni punto M del piano, diverso da U, il suo etrico M′ rispetto ad M; si stabilisce così nel piano una corrispondenza biunivoca **C**, che è evidentemente una congruenza; e poichè se M, N sono due punti non allineati con U, ed M′, N′ i loro trasformati mediante **C**, i due angoli $M\widehat{U}N$, $M'\widehat{U}N'$, omologhi in **C**, sono opposti al vertice e quindi equiversi, la **C** è una *congruenza diretta*, che dicesi *simmetria centrale* nel piano; il punto U è il suo *centro*.

47. In un fascio (U) del piano si immagini una *rotazione* ρ del fascio; e si faccia corrispondere al punto U il punto stesso, e a ogni punto M del piano, diverso da U, quel punto M′ che si ottiene portando sul raggio m' di (U), omologo in ρ al raggio $m \equiv$ UM, un segmento UM′ uguale ad UM; è facile provare che la corrispondenza biunivoca **C**, così posta nel piano, è una congruenza; se difatti M, N son due punti distinti da U e non allineati con U, ed M′, N′ sono i loro trasformati mediante **C**, gli angoli $M\widehat{U}N$, $M'\widehat{U}N'$, omologhi in ρ, sono uguali, e con essi sono uguali i triangoli UMN, UM′N′ e quindi i segmenti MN, M′N′; ed è ben semplice compiere la dimostrazione nel caso che i punti M, N, e quindi anche i punti M′, N′ sieno allineati con U. E poichè gli angoli $M\widehat{U}N$, $M'\widehat{U}N'$ sono omologhi in **C**, e sono equiversi per essere omologhi in ρ, sarà **C** una congruenza diretta; essa dicesi *rotazione nel piano*; U ne è il *centro*; l'*ampiezza* ed il *verso* son quelli di ρ, cioè dell'angolo costante $M\widehat{U}M'$. Si osservi che *in una rotazione la mutua distanza di due punti omologhi è proporzionale alla distanza di entrambi dal centro.*

48. Si prova facilmente che *ogni congruenza diretta nel piano, che non sia l'identità, è una traslazione, o una simmetria centrale, o una rotazione.* Difatti se **C** è una congruenza diretta non identica del piano ed A un punto non unito, sieno A′ ed A_0 gli omologhi di A quando si pensi rispettivamente come punto del primo o del secondo piano; siano cioè A′, A_0 i trasformati di A nella corrispondenza **C** e nella sua inversa. Nè l'uno nè l'altro dei punti A_0, A′ può coincidere con A, che non è unito; dimodochè su di essi si possono fare le tre ipotesi seguenti: 1°. I punti A_0, A′ coincidono; 2°. Il punto A è punto medio del segmento A_0A'; 3°. I punti A_0AA' son vertici di un triangolo. Nel primo caso, detto U il punto medio di $A_0A \equiv A'A$, la **C** porta i punti A_0, A rispettivamente nei punti A, A′, che sono i loro simmetrici rispetto ad U; ha dunque due coppie di punti omologhi in comune colla simmetria piana centrale di centro U, quindi [44] coincide con essa. Nel secondo, le due coppie di punti A_0A, AA′, omologhi in **C**, sono pure coppie di punti omologhi nella traslazione piana che ha la grandezza, la direzione ed il verso del segmento AA′; dunque **C** coincide con essa. Nel terzo (fig. 1), si consideri la circonferenza circoscritta al triangolo isoscele A_0AA', e ne sia U il centro; i due triangoli A_0UA, AUA′ sono uguali, e sono anche equiversi, perchè sono di verso opposto

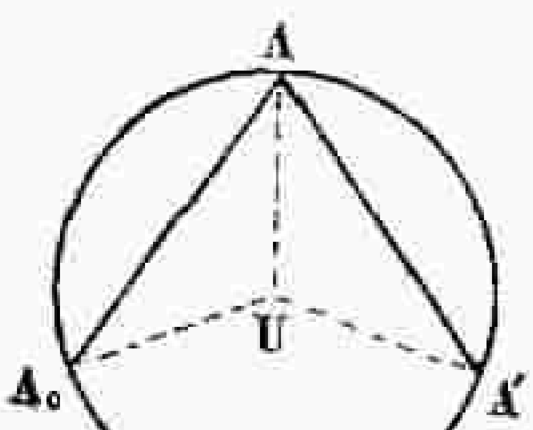


Fig. 1.

i due triangoli A_0UA, AUA' (perchè hanno due vertici omologhi a sè in comune e i rimanenti da bande opposte (1)); dunque U è unito in C, la quale ha in comune colla rotazione di centro U, e che ha per ampiezza e verso l'ampiezza e il verso dell'angolo $A_0\widehat{U}A$, le due coppie di punti omologhi A_0A, AA' (e, si potrebbe aggiungere, la coppia U, U) e coincide quindi con essa.

49. Fissata nel piano una retta r, si faccia corrispondere a un punto qualunque di r il punto stesso, e a un punto del piano, fuori di r, il suo simmetrico rispetto ad r stessa; si stabilisce così, nel piano, una corrispondenza biunivoca C che è evidentemente una congruenza: e poichè se U, V sono due punti distinti di r, ed M, M′ due punti distinti simmetrici rispetto ad r, i due triangoli MUV, M′UV, omologhi in C, sono contraversi (1), la C è una *congruenza inversa*, che diremo *simmetria assiale nel piano*; la retta r ne è l'*asse*, ed è luogo di punti uniti in C.

50. Fissata nel piano una retta r e un segmento orientato PQ (fig. 2), a ogni punto M del piano si costruisca l'omologo M_0 nella traslazione che ha la grandezza, la direzione e il verso del segmento PQ, ciò che si otterrà facendo il segmento MM_0 uguale parallelo ed equiverso a PQ; poi si costruisca il simmetrico di M_0 rispetto ad r, e sia M′; facendo corrispondere a ogni punto M il punto M′ che così se ne ottiene, si stabilisce una corrispondenza biunivoca C nel piano, che è il *prodotto* della traslazione PQ (2) per la simmetria piana di asse r; essa è, evidentemente, una *congruenza inversa*, che diremo *antitraslazione*, della quale l'*asse* è r, la *grandezza* e il *verso* son quelli del segmento PQ. Se anzichè assoggettare M prima alla traslazione PQ, e il punto ottenuto M_0 alla simmetria rispetto ad r, si costruisce prima il simmetrico di M rispetto ad r, che sia M_1, e di questo l'omologo nella traslazione PQ, si perviene allo stesso punto M′; cosicchè la congruenza C è anche il prodotto della simmetria rispetto ad r, e della traslazione PQ; queste due ultime corrispondenze sono cioè permutabili. Si osservi che nell'antitraslazione non vi sono punti uniti.

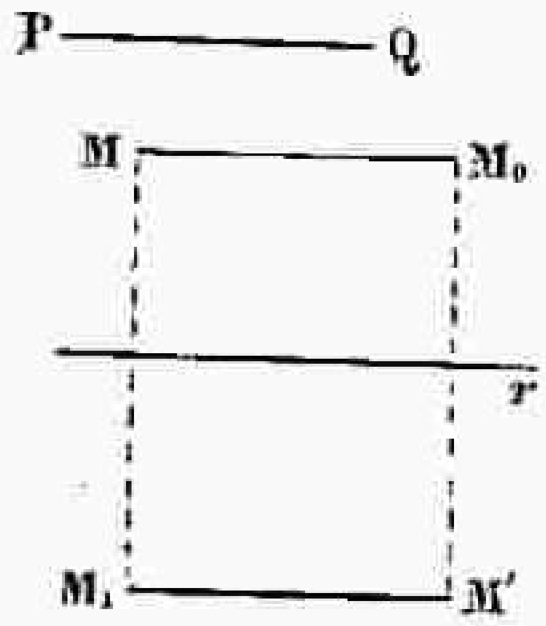


Fig. 2.

51. Si prova facilmente che *una congruenza inversa nel piano è una simmetria assiale, o una antitraslazione*. Difatti se C è una congruenza inversa del piano ed A un punto non unito, sieno A′, A_0 gli omologhi di A quando si pensi rispettivamente come punto del primo o del secondo sistema; siano cioè A′, A_0 i trasformati di A

(1) Cfr. N. n. 6, cor. 3°.

(2) Indichiamo dunque una *traslazione* (e così si farà anche per lo spazio) colla stessa notazione che indica un segmento orientato che ne dà la *grandezza*, la *direzione* ed il *verso*.

in **C** e nella sua inversa. Come al n. 48, potremo sui tre punti A_0, A, A′ far le sole tre ipotesi seguenti: 1° i punti A_0, A′ coincidono; 2° il punto A dimezza il segmento A_0A'; 3° i punti A_0, A, A′ son vertici di un triangolo, isoscele sulla base A_0A'. Nel primo caso, detto u l'asse del segmento $A_0A \equiv A'A$, le due coppie di punti A_0A, AA' sono coppie di punti omologhi sia in **C**, sia nella simmetria piana di asse u, con la quale quindi coincide **C**. Nel secondo caso, detta r la retta dei tre punti A_0AA', le due coppie di punti A_0A; AA' sono coppie di punti omologhi sia in **C**, sia nell'antitraslazione d'asse r che ha la grandezza e il verso del segmento AA', con la quale quindi coincide **C**. Nel terzo caso (fig. 3), detta r la congiungente i punti medi dei lati A_0A, AA' del triangolo A_0AA', ed H il punto medio di A_0A', le due coppie di punti A_0A, AA', sono coppie di punti omologhi sia in **C**, sia nell'antitraslazione d'asse r che ha la grandezza ed il verso del segmento A_0H, con la quale quindi coincide **C**.

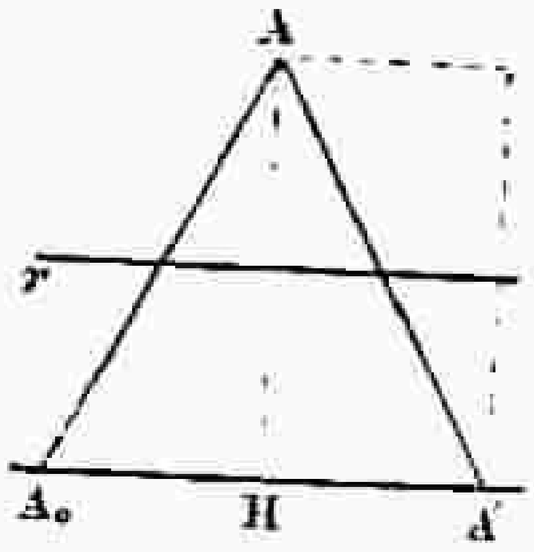


Fig. 3.

Delle differenti specie di congruenze, nel piano non identiche le due simmetrie sono le sole involutorie.

VIII. — Le similitudini nel piano.

52. *Una similitudine del piano con rapporto* $k \neq 1$ *ammette sempre un punto unito ed uno solo,* che dicesi *centro della similitudine.*

Sia **S** la data similitudine, che, per essere $k \neq 1$, non è l'identità, onde si può fissare un punto non unito A; detti A', A_0 gli omologhi di A in **S** e nella sua inversa, nessuno di essi coincide con A, e neppure coincidon fra loro, perchè i segmenti A_0A, AA' omologhi in **S**, sono diseguali. Se, allora, i tre punti A_0AA' sono su una retta r, questa è mutata in sè da **S**, onde **S** subordina su r una similitudine rettilinea $\mathbf{S}_r$ con lo stesso rapporto k diverso da uno; vi è quindi su r un punto unito per $\mathbf{S}_r$ e quindi per **S**. Quando invece i tre punti A_0AA' non sono allineati, converrà trattare separatamente le due ipotesi che **S** sia una similitudine diretta, od inversa. Se **S** è diretta (fig. 4), si considerino la circonferenza che passa per A_0, A e tocca in A la AA', e la circonferenza che passa per A, A′ e tocca in A la AA_0: esse, avendo un punto A comune e in esso tangenti distinte, si segano di nuovo in un punto U; i due triangoli A_0AU, $AA'U$ sono simili, come mostrano note proprietà degli angoli nel cerchio;

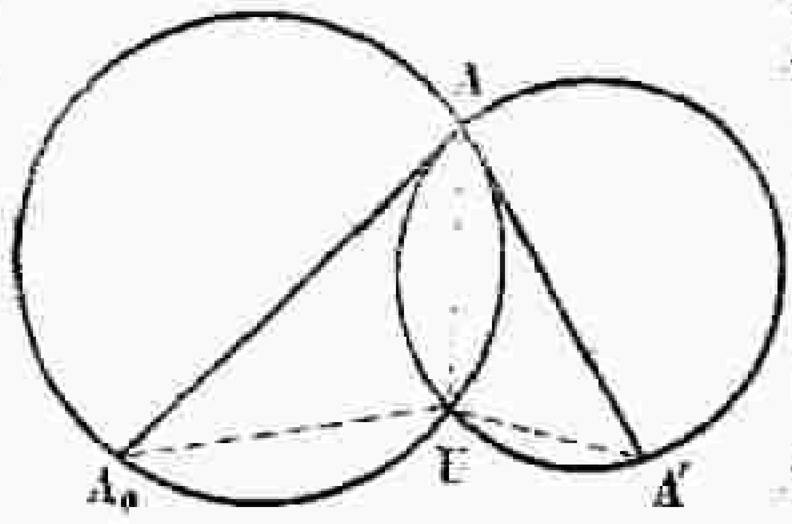


Fig. 4.

inoltre gli angoli omologhi di essi, $A_0\widehat{U}A$, $A\widehat{U}A'$, sono equiversi, perchè sono di versi opposti i due $A\widehat{U}A_0$, $A\widehat{U}A'$; poichè, allora, i due triangoli A_0AU, $AA'U$ sono direttamente simili, e i punti A_0, A sono mutati da **S** in A, A', il punto U è unito in **S**. Se **S** è inversa (fig. 5), la retta per A, esterna all'angolo $A_0\widehat{A}A'$, che forma con AA_0, AA' angoli ordinatamente uguali agli angoli $A\widehat{A'}A_0$, $A\widehat{A_0}A'$, incontra la retta A_0A' (perchè i segmenti A_0A, AA' sono disuguali) in un punto U esterno al segmento A_0A'; i triangoli A_0UA, AUA' sono simili inversamente, perchè gli angoli $A_0\widehat{U}A$, $A\widehat{U}A'$ sono inversi [1]; dunque U è unito in **S**. Che poi, in ogni caso, non vi possa essere più che un punto unito risulta dal fatto che essendovene due, U, V, il segmento UV sarebbe omologo a sè e quindi $k=1$ contro l'ipotesi.

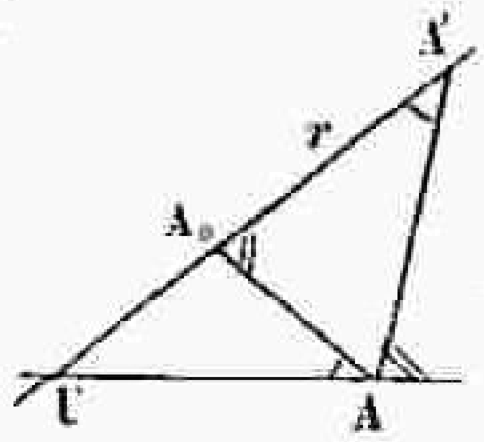


Fig. 5.

53. Ogni raggio m uscente dal centro U di una data similitudine piana **S**, di rapporto $k \neq 1$, vien mutato da **S** in un raggio, m' uscente da U, e al variare di m e quindi di m' intorno ad U, si ottengono nel fascio (U) due fasci di raggi congruenti; cioè *una similitudine piana* **S** *subordina una congruenza* Γ *nel fascio di raggi che ha per centro il punto unito della similitudine*, e due raggi omologhi in Γ sono omologhi in **S**; si otterrà allora il trasformato mediante **S** di un punto qualunque M del piano, distinto da U, portando sul raggio m' di (U), trasformato del raggio $m \equiv UM$ in Γ, un segmento UM', tale che sia $UM : UM' = k$. Viceversa *assegnata nel piano una congruenza* Γ *di un fascio* (U), *ed un numero assoluto* k, *se si fa corrispondere al punto* U *il punto stesso, e a ogni punto* M *diverso da* U *il punto* M' *che si ottiene portando sul raggio* m', *trasformato del raggio* $m \equiv UM$ *mediante* Γ, *un segmento* UM' *tale che sia* $UM : UM' = k$, *la corrispondenza biunivoca* **S** *così ottenuta nel piano, è una similitudine di rapporto* k, *nella quale il punto unito è* U. Poichè due angoli omologhi in Γ, lo sono in **S**, sarà **S** diretta o inversa secondo che lo sia Γ, e la classificazione delle similitudini piane **S**, con rapporto k diverso da uno, si ricaverà facilmente dalla classificazione delle congruenze Γ di un fascio. Tenendo presente che in ogni caso *le distanze di due punti omologhi dal centro di similitudine sono in rapporto costante*, si avranno tutti e soli i seguenti tipi [2]:

1°. Se la congruenza Γ del fascio (U) è l'*identità*, la similitudine **S** è *diretta* e dicesi *omotetia diretta* di rapporto k. *Due punti omologhi sono allineati con* U *e dalla stessa parte di esso. Due segmenti omologhi sono paralleli ed equiversi, quando la retta dell'uno e (quindi) la retta*

---

(1) Cfr. N. n. 4, cor. 2°.

(2) Le denominazioni adottate qui e nel seguito per le varie specie di corrispondenze si trovano nell'opera citata di G. Scorza e, in parte, nella Memoria del Pieri: *La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di punto e sfera*. Roma, Lincei, 1908.

dell'altro non contengono il centro; sono collineari ed equiversi se le loro rette passano per il centro.

2°. Se la congruenza Γ del fascio (U) è l'*opposizione*, la similitudine **S** è *diretta*, e dicesi *omotetia inversa* di rapporto k. *Due punti omologhi sono allineati col centro e separati da esso: due segmenti omologhi sono paralleli (o collineari) e contraversi.* In questo caso e nel precedente, potendosi paragonare sempre il verso di due segmenti omologhi, che risulta concorde nel primo e discorde nel secondo caso, si conviene di attribuire alla costante k il segno $+$ se si tratta di omotetia diretta, il segno $-$ se di omotetia inversa.

3°. Se la congruenza Γ è una *rotazione* nel fascio (U), la **S** è una similitudine *diretta* che dicesi *rotomotetia*, di cui U è il *centro*, k la *costante*, mentre l'ampiezza e il verso son quelli della rotazione Γ. In questo caso *due punti omologhi* M, M′ *sono visti da* U *sotto angolo* $\widehat{MUM'}$ *costante in grandezza e verso. Una rotomotetia è il prodotto di una rotazione piana per una omotetia diretta, come pure è il prodotto di una rotazione piana per una omotetia inversa* (fig. 6). Difatti sulla UM′ dall'una e dall'altra parte rispetto ad U si portino i due segmenti $UM_1 = UM_2 = UM$. Il prodotto della rotazione $\widehat{MUM_2}$ (¹) per l'omotetia diretta che ha per centro U e per coppia di punti omologhi M_2, M′ porta, come **S**, i punti U, M nei punti U, M′ e poichè tal prodotto è una similitudine diretta, coincide con **S**. Così coincide con **S** il prodotto della rotazione $\widehat{MUM_1}$ per la omotetia inversa di centro U che ha per coppia di punti omologhi M_1, M′.

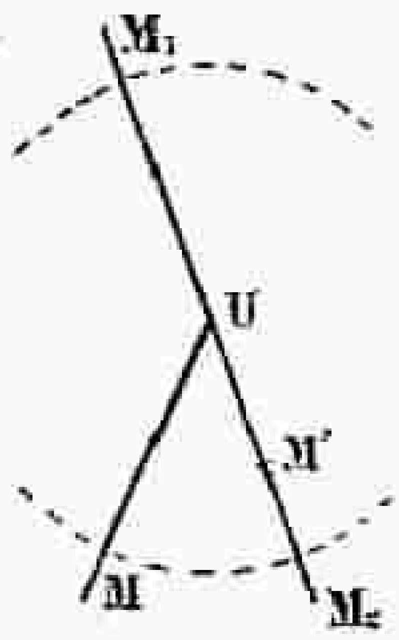


Fig. 6.

4°. Se, infine, Γ è una *simmetria nel fascio* (U), la **S** è una similitudine *inversa* che dicesi *antiomotetia* (fig. 7). Due punti omologhi qualunque sono proiettati da U in due raggi simmetrici rispetto all'asse u della simmetria Γ, che dicesi anche *asse* dell'antiomotetia. In particolare un punto di questo asse è portato da **S** in un punto dell'asse stesso situato rispetto ad U dalla stessa parte del primo; un punto della retta r perpendicolare ad u in U è portato da **S** in un punto della r, situato rispetto ad u da banda opposta al primo. La r dicesi *asse secondario* della antiomotetia. *Una antiomotetia è il prodotto di una simmetria piana assiale per una omotetia diretta, o di una simmetria piana assiale per una omotetia inversa, essendo sempre il centro dell'omotetia sull'asse della*

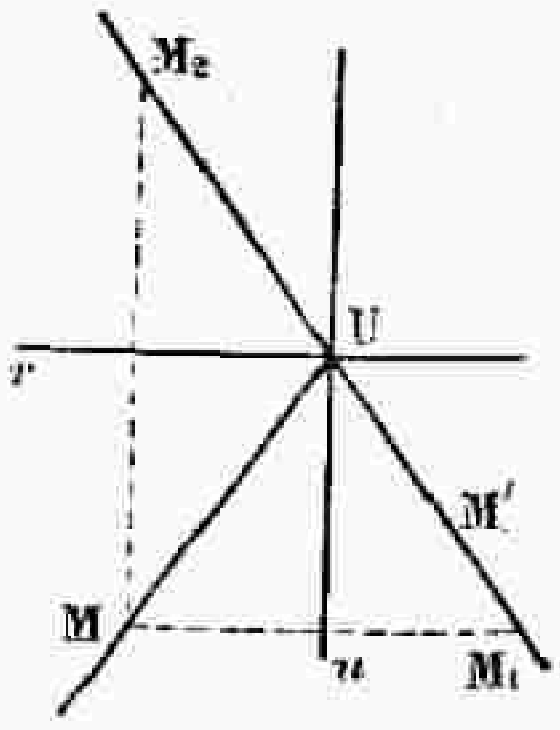


Fig. 7.

(¹) Indichiamo dunque una *rotazione* piana colla stessa notazione che spetta a un angolo che à vertice nel centro di rotazione, la cui *ampiezza* e il cui *verso* danno l'ampiezza e il verso della rotazione.

simmetria. Difatti sieno M_1, M_2 i simmetrici di M rispetto alle u, r; sarà M_1 sul raggio UM′, ed M_2 sull'opposto; allora il prodotto della simmetria piana d'asse u per la omotetia diretta di centro U che muta M_1 in M′ trasforma, come **S**, i punti U, M nei punti U, M′ e poichè esso è, come **S**, una similitudine inversa, coincide con **S**. Così, la **S** è anche il prodotto della simmetria piana d'asse r, per la omotetia inversa di centro U che muta M_2 in M′ [1].

54. *Se due rette parallele sono riferite in una similitudine che non* sia *una congruenza diretta,* [29], *le congiungenti le coppie di punti omologhi concorrono in un punto* (fig. 8).

Difatti siano A, B due punti di una retta r, ed A′, B′ gli omologhi dell'altra r'; nel piano delle due rette le due coppie di punti omo-

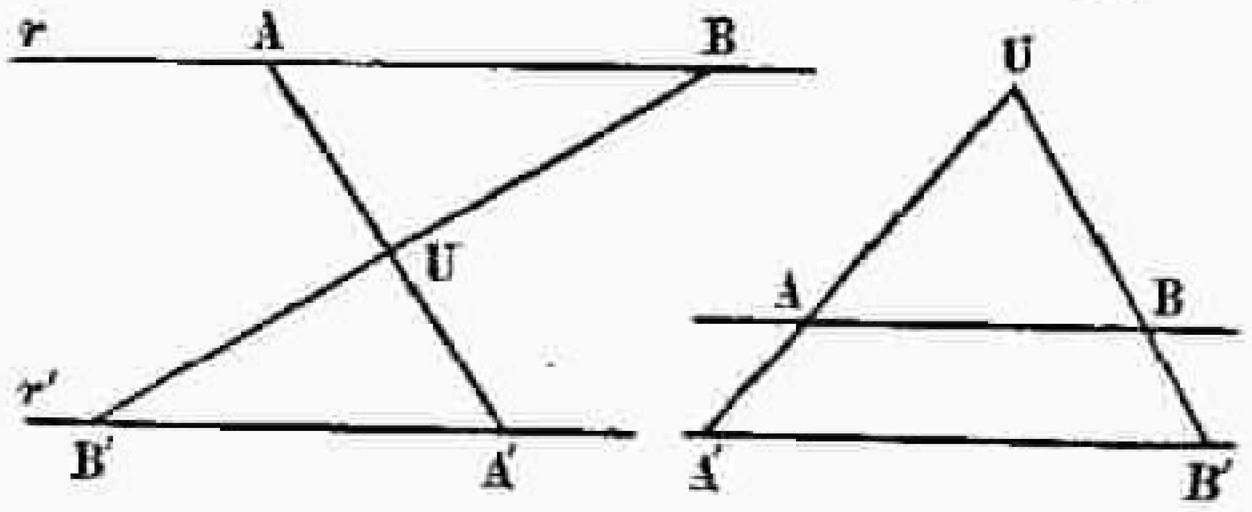


Fig. 8.

loghi A, A′; B, B′ determinano una similitudine diretta **S** nella quale sono omologhe le due punteggiate simili date; e poichè i segmenti AB, A′B′ non sono insieme uguali ed equiversi, le rette AA′, BB′ si incontrano in un punto U; i due triangoli UAB, UA′B′ sono direttamente simili ed U è unito in **S**; nel fascio (U) la **S** subordina l'identità o l'opposizione secondochè U è esterno o interno alla striscia rr', e la **S** è nel primo caso una omotetia diretta, nel secondo una omotetia inversa, di centro U; in questo punto concorrono dunque le congiungenti le coppie di punti omologhi in **S** e in particolare le coppie di punti omologhi nella similitudine data fra r, r'.

Corollario. — *In una similitudine fra due rette parallele, che non sia una congruenza diretta, esistono due (soli) punti omologhi la cui congiungente è perpendicolare alle rette date.*

IX. — Le congruenze nella stella di raggi.

55. *Dati, in due stelle di raggi* (O), (O′), *due angoli uguali* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *esistono una ed una sola congruenza diretta ed una ed una sola congruenza inversa fra le due stelle che mutino i raggi* a, b *nei raggi* a′, b′ *ordinatamente.* — Si dimostra come al n. 37.

[1] Si può poi senza difficoltà stabilire, per ogni tipo di similitudine o di congruenza nel piano se vi siano rette *unite*, mutate, cioè, in sè, dalla similitudine o dalla congruenza; e fissare, per ciascun caso il tipo di similitudine o di congruenza *rettilinea* indotta dalla data sulla retta unita. Di ciò, che non è essenziale pel seguito, lasciamo la cura al lettore.

Corollario. — *Dati in una stella due angoli uguali* $\widehat{ab}$, $\widehat{a'b'}$ *esistono una ed una sola congruenza diretta, ed una ed una sola congruenza inversa della tella che mutino i raggi* a, b *ordinatamente in* a', b'.

Facendo corrispondere a ciascun raggio di una stella (O) il raggio stesso si ha quella particolare congruenza diretta che dicesi *identità*; facendo invece corrispondere a ciascun raggio di (O) il suo opposto, si ha quella particolare congruenza inversa che dicesi *opposizione*. Si avrà allora che *una congruenza diretta, in una stella, la quale ammetta due raggi, distinti e non opposti, uniti è l'identità*, e che *una congruenza inversa, in una stella, la quale trasformi due raggi fra loro distinti e non opposti rispettivamente nei raggi opposti, è l'opposizione.*

56. *Una congruenza diretta in una stella, che non sia l'identità, ammette sempre due raggi uniti fra loro opposti, e nel fascio di semipiani che ha per asse la retta di essi, subordina una congruenza diretta.*

Nella stella (O) sia assegnata una congruenza diretta, non identica, Γ; si potrà sempre scegliere un raggio a di (O) che non sia mutato da Γ nel suo opposto; perchè se questo non fosse possibile, Γ sarebbe la opposizione che è una congruenza inversa. Se allora a coincide col suo trasformato a' mediante Γ, esso è unito, e tale è allora anche il suo opposto. Se invece a, a' (che non sono opposti) sono distinti, diciamo a_0 quel raggio di (O) che si trasforma in a mediante Γ; gli angoli $\widehat{a_0a}$, $\widehat{aa'}$ non sono nulli nè piatti e sono fra loro uguali; sui raggi a_0, a, a' si posson fare le sole ipotesi seguenti:

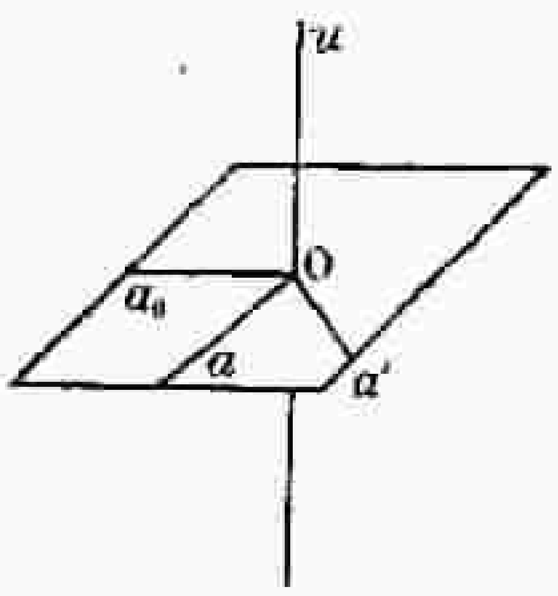


Fig. 9.

1° i raggi a_0, a' coincidono, e allora il raggio bisettore dell'angolo $\widehat{a_0a}$ è portato da Γ nel raggio bisettore dell'angolo $\widehat{aa'} \equiv \widehat{aa_0}$, cioè è un raggio unito, e con esso è unito l'opposto;

2° il raggio a biseca l'angolo $\widehat{a_0a'}$ (fig. 9); se allora u è uno dei due raggi perpendicolari in O al piano a_0aa', i due triedri (a_0au), $(aa'u)$ sono uguali, e sono anche equiversi perchè sono fra loro contraversi i triedri (a_0au), $(a'au)$ che hanno la faccia $\widehat{au}$ in comune e i rimanenti spigoli (omologhi fra loro) da bande opposte di essa (¹). Ne segue che u, e così il raggio opposto, sono uniti in Γ;

3° i raggi a_0aa' formano un triedro isoscele, con $\widehat{a_0a} = \widehat{aa'}$ (fig. 10); detto u l'asse del cono circolare di vertice O, che ha per generatrici a_0, a, a', i triedri (a_0au), $(aa'u)$ sono evidentemente uguali (è infatti $\widehat{a_0a} = \widehat{aa'}$, e inoltre $\widehat{a_0u} = \widehat{au} = \widehat{a'u}$), e sono anche equiversi, perchè sono contraversi i due (a_0au), $(a'au)$, che hanno la faccia $\widehat{au}$ in comune, mentre i rimanenti spigoli a_0, a' sono da bande opposte rispetto ad essa (¹). Ne segue che u, e il raggio ad esso opposto sono uniti.

(¹) Cfr. N. n. 7, Cor. 1°.

È così stabilito che ogni congruenza Γ di una stella, che non sia l'identità, ammette due raggi uniti fra loro opposti, nè può ammetterne altri [55]. Detti allora u, u_1 i soli raggi uniti fra loro opposti di Γ, un raggio m di (O), che stia nel piano ω perpendicolare ad u in U è portato da Γ in un raggio m' pure perpendicolare in O ad u, cioè in un raggio m' del fascio $(O\omega)$, (2) il quale è pertanto mutato in sè da Γ; nè può mai il raggio m coincidere col suo omologo m', se no Γ sarebbe l'identità; quindi la congruenza che nel fascio $(O\omega)$ è subordinata da Γ non può essere una simmetria del fascio, che avrebbe un raggio unito, ed è

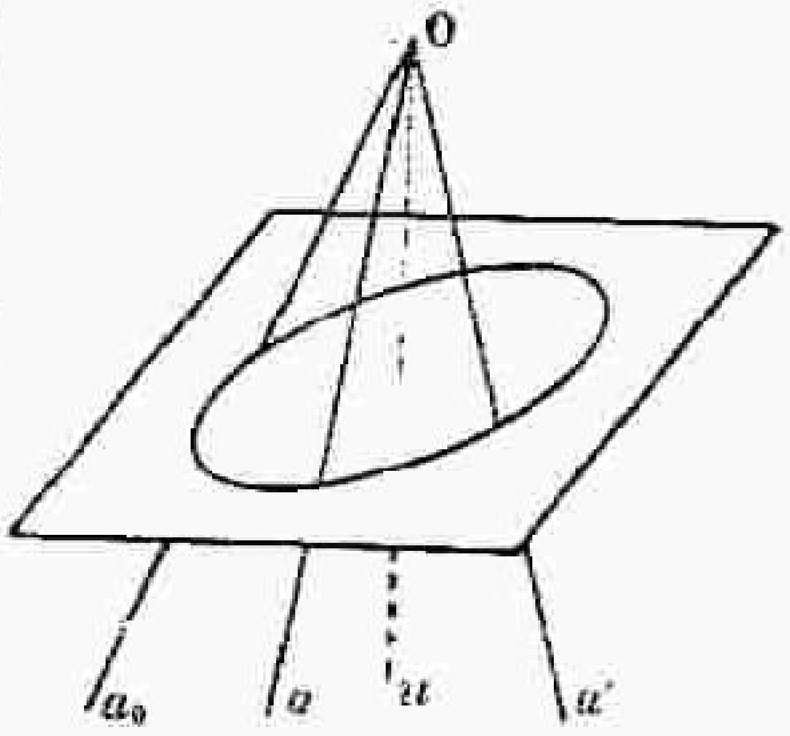


Fig. 10.

quindi una congruenza diretta del fascio $(O\omega)$; detta r la retta dei raggi uniti, il semipiano rm (1) è portato da Γ nel semipiano rm'; Γ dunque subordina, nel fascio di semipiani d'asse r, una congruenza γ, la cui sezione con ω [43] è una congruenza diretta e non identica. È pertanto anche γ una congruenza diretta e non identica. Ne segue che l'omologo in Γ di un raggio x qualunque di (O) distinto da u, u_1, si otterrà costruendo il semipiano omologo al semipiano rx nella congruenza γ del fascio (r), e su di esso quel raggio x' che forma coi raggi u, u_1 di r angoli eguali a quelli che cogli stessi raggi forma x. Viceversa *se in un fascio di semipiani d'asse* r *è data una congruenza diretta* γ, *e preso un punto* O *di* r *si fanno corrispondere ai raggi* u, u₁ *in cui* O *divide* r, *ordinatamente i raggi stessi, e a un raggio qualunque* x, *distinto da* u, u₁ *il raggio* u' *che si ottiene nel modo su esposto, la corrispondenza biunivoca* Γ *così posta nella stella* (O) *è una congruenza diretta*; che tale corrispondenza sia una congruenza è evidente; si considerino due raggi distinti e non opposti m, n del fascio $(O\omega)$, essi son mutati dalla congruenza stessa in due raggi m', n' del fascio stesso e i due angoli $\widehat{mn}$, $\widehat{m'n'}$ sono equiversi, perchè sezioni di due diedri omologhi in γ; allora i triedri (umn), $(um'n')$ sono equiversi (2), e poichè essi sono omologhi in Γ, questa è una congruenza diretta.

57. La assegnazione dei vari tipi delle congruenze dirette non identiche in una stella è ridotta alla classificazione delle congruenze dirette γ da esse subordinate nel fascio di semipiani che ha per asse la retta r dei due raggi uniti u, u_1. Se γ è l'*identità*, anche la congruenza diretta Γ proposta, è, come facilmente si vede, l'*identità*. Se γ è l'*opposizione*, due raggi omologhi distinti qualunque sono sim-

(1) Colla notazione $(O\omega)$ indichiamo il fascio di raggi che à per centro O e per piano ω. Colla notazione rm dove r è una retta ed m un raggio che esce da un punto di quella intendiamo il semipiano che esce da r e contiene m.

(2) Cfr. N. n. 10.

metrici rispetto alla r, e la congruenza diretta Γ dicesi *simmetria assiale nella stella.* Se γ è una *rotazione*, due raggi omologhi distinti qualunque sono equiinclinati sui raggi uniti, e vengono proiettati da r in un diedro costante in grandezza e verso; la Γ dicesi *rotazione nella stella*; la r ne è l'*asse*: la *grandezza* e il *verso* ne son quelli del diedro ora descritto. Si concluderà che *una congruenza diretta in una stella è l'identità, o è una simmetria assiale (della stella) o una rotazione (della stella).*

58. Si ottengono facilmente i varî tipi di congruenze inverse in una stella, osservando che il prodotto di una congruenza inversa Γ data in una stella (O) per l'*opposizione* è una congruenza diretta [30]. Se cioè m'', m' sono omologhi in Γ, ed m è il raggio opposto ad m', facendo corrispondere ad ogni raggio m'', anzichè m', il suo opposto m, si avrà in (O) una congruenza diretta Γ', che potrà essere l'*identità, la simmetria rispetto a una retta* r *per* O, *oppure una rotazione.* Se Γ' è l'identità, cioè se m'' coincide sempre con m, i raggi $m'' \equiv m, m'$, omologhi in Γ sono sempre opposti, e Γ è l'*opposizione.* Se invece Γ' è la simmetria rispetto a una retta u per O, poichè i due raggi m, m'' sono sempre simmetrici rispetto alla u, i raggi m'', m', omologhi in Γ, son sempre simmetrici rispetto al piano α perpendicolare in O ad u, e la Γ dicesi *simmetria rispetto al piano* α *nella stella* (O). Infine se Γ' è una *rotazione* intorno a una retta u per O, il diedro $u\ (m''m)$ è costante in grandezza e verso; è quindi costante in grandezza e verso il diedro $u\ (m'', m')$ che è adiacente e quindi supplementare e contraverso [1] al precedente, e poichè i raggi m, m'' formano angoli uguali con ciascuno dei due raggi in cui O divide u, i raggi $m''\ m'$, omologhi in Γ, formano con ognuno dei primi angoli supplementari. La Γ dicesi *antirotazione nella stella*, di asse u; *dall'asse due raggi omologhi qualunque son proiettati in due semipiani che formano un diedro costante in grandezza e verso, che diconsi grandezza e verso dell'antirotazione: i raggi stessi formano poi angoli supplementari con ciascuno dei due raggi dell'asse* (fig. 11).

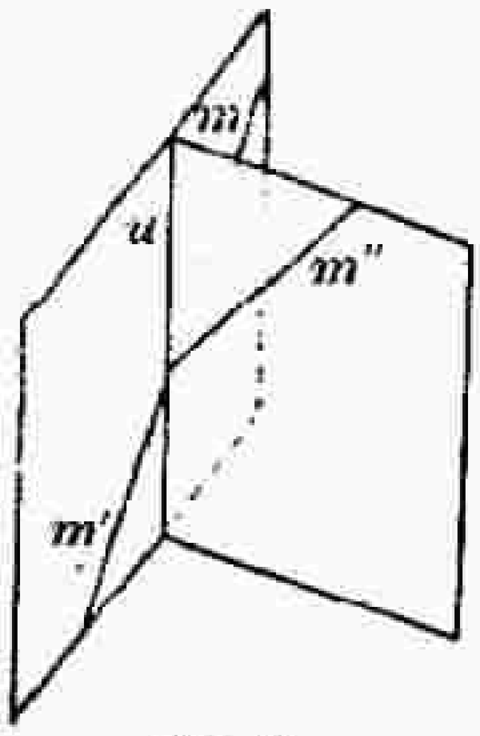


Fig. 11.

Nella simmetria rispetto a un piano e nella antirotazione esistono due soli raggi omologhi fra loro opposti che, per la seconda, sono i due raggi in cui O divide il suo asse, e, per la prima, i due raggi in cui O divide la perpendicolare in O al piano di simmetria. Una congruenza inversa in una stella è dunque l'*opposizione*, o *una simmetria rispetto a un piano della stella*, o una *antirotazione* [2].

---

[1] Si paragonino le due sezioni normali: cfr. N. n. 1, cor. 1°.

[2] Lasciamo al lettore di determinare per ogni tipo di congruenza nella stella i *fasci di raggi* (e quindi i *piani* come sostegni di quelli) *uniti*. Cfr. la nota al n. 53.

X. — Le congruenze nello spazio.

59. *Dati nello spazio due triangoli eguali* ABC, A'B'C' *esistono una ed una sola congruenza diretta ed una ed una sola congruenza inversa dello spazio che mutino i punti* A, B, C *ordinatamente nei punti* A', B', C'.

Si prova in modo analogo a quello seguito nel n. 44, e ne verrà che *una congruenza diretta dello spazio, nella quale sieno uniti i tre vertici di un triangolo è l'identità.*

60. Fissato nello spazio un segmento orientato HH', a ciascun ›unto M dello spazio si faccia corrispondere l'estremo M' del segnento MM' che è parallelo (o collineare) ed equiverso ad HH'. Si ;tabilisce così una corrispondenza biunivoca **C** nello spazio, che è ›videntemente una congruenza; ed è anche una congruenza diretta; lifatti se in un piano α parallelo ad HH', si scelgon tre punti non ıllineati ABC, i loro omologhi A'B'C' in **C** si trovano pure su α; ›recisamente i due triangoli ABC, A'B'C' sono anche omologhi nella raslazione piana, di grandezza, direzione, e verso HH', che **C** subor-ina, com'è evidente, in α; dunque ABC, A'B'C' sono triangoli eguali d equiversi; se allora D, D' sono due punti esterni ad α, omologhi ı **C**, essi sono su una parallela al piano α e quindi dalla stessa arte rispetto ad esso; dunque i triedri D(ABC), D'(A'B'C') sono quiversi [1]. E **C** è una congruenza diretta che dicesi *traslazione* ello spazio; *grandezza, direzione* e *verso* della traslazione son quelli, el segmento HH'.

61. Fissata una retta u, a ciascun suo punto si faccia corrispon-ıre il punto stesso; e a ciascun punto M fuori di u il suo simme-ico M' rispetto ad u; si stabilisce così nello spazio una corrispon-ınza biunivoca **C** che, com'è facile provare, è una congruenza; essa anzi una congruenza diretta. E difatti in un piano α, perpendicolare l u in un punto U (piano che **C** muta in sè e sul quale subordina simmetria rispetto ad U) si prendan due punti B, C non allineati n U e i loro simmetrici B', C' rispetto ad U (o ad u) che sono i ro omologhi in **C**; preso un punto V su u, distinto da U, poichè lue triangoli UBC, UB'C' sono equiversi, lo sono pure i due triedri (UBC), V'(U'B'C'); essi sono omologhi in **C**; dunque **C** è una conuenza diretta che dicesi *simmetria spaziale rispetto a una retta*, che è *l'asse.*

62. In un fascio (u) di semipiani d'asse u si stabilisca una rotane γ del fascio; si faccia poi corrispondere a ciascun punto di u, ›unto stesso, e a un punto M fuori di u quel punto M' del semipiano

---

[1] Cfr. la nota (3) al n. 25.

omologo in γ al semipiano rM, che ha da u la stessa distanza e su u la stessa proiezione che ha M; è facile provare che la corrispondenza biunivoca C così posta è una congruenza; essa è anzi una congruenza diretta; e difatti in un piano α, perpendicolare ad u in un suo punto U, piano che C muta in sè e sul quale, com'è chiaro, subordina una rotazione piana C di centro U) si prendano due punti B, C non allineati con U e i loro trasformati B', C' mediante C, che sono pure in α, e sono anche i trasformati di B, C mediante C; allora i triangoli UBC, UB'C', omologhi nella rotazione piana C, sono equiversi, e, preso un punto V diverso da U su u, si troverà, come or ora, che C è una congruenza diretta: essa dicesi *rotazione spaziale d'asse* u; la sua *ampiezza* e il suo *verso* son l'ampiezza e il verso costanti del diedro secondo cui due punti omologhi sono proiettati da u, cioè l'ampiezza e il verso di γ.

Si osservi che *in una rotazione la distanza di due punti omologhi è proporzionale alla loro comune distanza dall'asse.*

63. Se ora si considerano i *prodotti* della simmetria che ha per asse una retta u, o di una rotazione intorno ad u per una traslazione HH' *di cui la direzione sia parallela ad* u, si ottengono due nuove congruenze dirette, prive di punti uniti, che diremo rispettivamente *elicomozione simmetrica* e *elicomozione.*

64. Fissato nello spazio un punto U si faccia corrispondere al punto U il punto stesso, e a ogni punto M, diverso da U, il simmetrico M' rispetto ad U; si ha così una corrispondenza biunivoca nello spazio, C, che è evidentemente una congruenza; ed è una congruenza inversa, perchè presi tre punti ABC, non situati in un piano con U, e i loro simmetrici A'B'C' rispetto ad U, i triedri U(ABC), U(A'B'C'), omologhi in C, sono opposti al vertice e quindi contraversi. La C dicesi *simmetria centrale nello spazio*; U è il suo *centro.*

65. Fissato nello spazio un piano α, si faccia corrispondere a ciascun punto di α il punto stesso e a un punto M fuori di α il suo simmetrico M' rispetto ad α; si ha così una corrispondenza biunivoca C nello spazio che è evidentemente una congruenza; ed è anche una congruenza inversa, perchè preso su α un triangolo ABC, e presi due punti M, M' distinti, simmetrici rispetto ad α, i due triedri M(ABC), M'(ABC) omologhi in C sono contraversi [1]. La C dicesi *simmetria rispetto al piano* α.

66. In una stella (U) si immagini una antirotazione Γ, e si faccia corrispondere al punto U il punto stesso, e a un punto M qualunque distinto da U il punto M' che si ottiene facendo $UM' = UM$ sul raggio m' di (U) omologo in Γ al raggio $m \equiv UM$. Si ottiene così nello spazio una corrispondenza biunivoca C che è una congruenza inversa

---

[1] Cfr. la nota (3) al n. 25.

perchè Γ è inversa; la diremo *antirotazione nello spazio*; il *centro* ne è U che ne è l'unico punto unito (perchè in una antirotazione della stella non vi sono raggi uniti [58]); l'*asse* e l'*ampiezza* di **C** son l'*asse* e l'*ampiezza* di Γ. Ed è ben facile provare che *la antirotazione dello spazio è il prodotto di una rotazione dello spazio per la simmetria rispetto a un punto dell'asse di questa* (che è anche l'asse di quella).

67. Infine si consideri il prodotto di una traslazione PQ dello spazio per una simmetria rispetto a un piano α parallelo a PQ: si otterrà una congruenza inversa **C** dello spazio che si dirà *antitraslazione* di cui PQ dà la *grandezza* e il *verso*, mentre α ne è il *piano direttore*. Nell'antitraslazione non esiston punti uniti.

68. Ci rimane a provare che quelle ora descritte sono le sole possibili congruenze dirette od inverse dello spazio. Sia **C** una congruenza diretta od inversa dello spazio; se essa ammette un punto unito U, essa subordina nella stella (U) una congruenza Γ rispettivamente diretta od inversa, e due punti omologhi in **C** si otterranno portando a partire da U due segmenti uguali su due raggi omologhi in Γ. E si ha allora facilmente che secondochè Γ è nella stella (U) l'*identità*, una *simmetria assiale*, una *rotazione*, l'*opposizione*, una *simmetria rispetto a un piano*, o una *antirotazione*, la **C** è nello spazio l'*identità*, una *simmetria assiale*, una *rotazione*, una *simmetria centrale*, una *simmetria rispetto a un piano*, una *antirotazione*. Sia invece **C** una congruenza diretta priva di punti uniti ed A, A' siano due punti omologhi in **C**; il prodotto di **C** per la traslazione A'A è una congruenza diretta **C'** nella quale A è unito; se **C'** è l'*identità*, **C** è, chiaramente, la *traslazione* AA'; se **C'** è una *rotazione* o una *simmetria assiale*, l'asse dell'una o dell'altra è una retta uscente da A e divisa da A in due raggi u, v i quali, per essere uniti in **C'**, son portati da **C** nei due raggi rispettivamente equiversi ad essi u', v' e fra loro opposti uscenti da A', e il piano π perpendicolare in A ad u sarà quindi [10] portato da **C** nel piano π' perpendicolare in A' ad u'; i due piani π, π' debbon dunque coincidere o esser paralleli: se coincidono (fig. 12), sul piano $\pi \equiv \pi'$, mutato in sè da **C**, la **C** subordina una congruenza C_π che è *diretta*, perchè detti D, D' due punti sui raggi u, u', omologhi in **C**, che son fra loro equiversi, B, C due punti di π non allineati con A, e B', C' i loro omologhi in **C** (e quindi in C_π) che sono punti del piano $\pi' \equiv \pi$, poichè i tetraedri ABCD, A'B'C'D' sono equiversi e D, D' sono dalla stessa parte di $\pi \equiv \pi' \equiv ABC \equiv A'B'C'$, i triangoli ABC, A'B'C', omologhi in C_π, sono equiversi; e poichè C_π non ha punti uniti, che sarebbero tali anche per **C**, dovrà C_π essere la traslazione AA' del piano π; ma se si considera la traslazione AA'

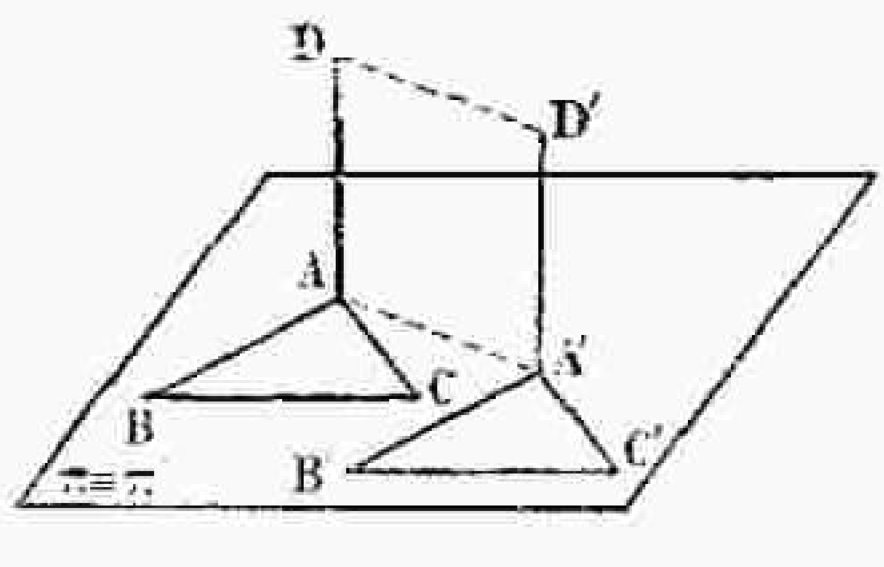


Fig. 12.

nello spazio, essa muta il triangolo ABC, nel triangolo A'B'C', come **C**, onde **C** coincide con essa.

Se i piani π, π' sono paralleli, mantenuti alle lettere ABCD, A'B'C'D' i significati precedenti, la traslazione che ha l'ampiezza e il verso della distanza dei piani π, π', porta il triangolo ABC di π in un triangolo A''B''C'' di π', che sarà così uguale al triangolo A'B'C', e il tetraedro ABCD in un tetraedro A''B''C''D'' direttamente uguale ad esso e al tetraedro A'B'C'D'; i segmenti AD, A'D', A''D'' sono fra loro uguali ed equiversi; dunque D', D'' sono da una parte rispetto a π', e i triangoli A''B''C'', A'B'C' sono quindi direttamente congruenti. Se fossero identici la **C** coinciderebbe con la traslazione AA'' $\equiv$ AA'; se fossero congruenti per traslazione, i segmenti A''B'', A''C'' che sono uguali ed equiversi ad AB, AC, lo sarebbero ad A'B', A'C'; onde sarebbero uguali

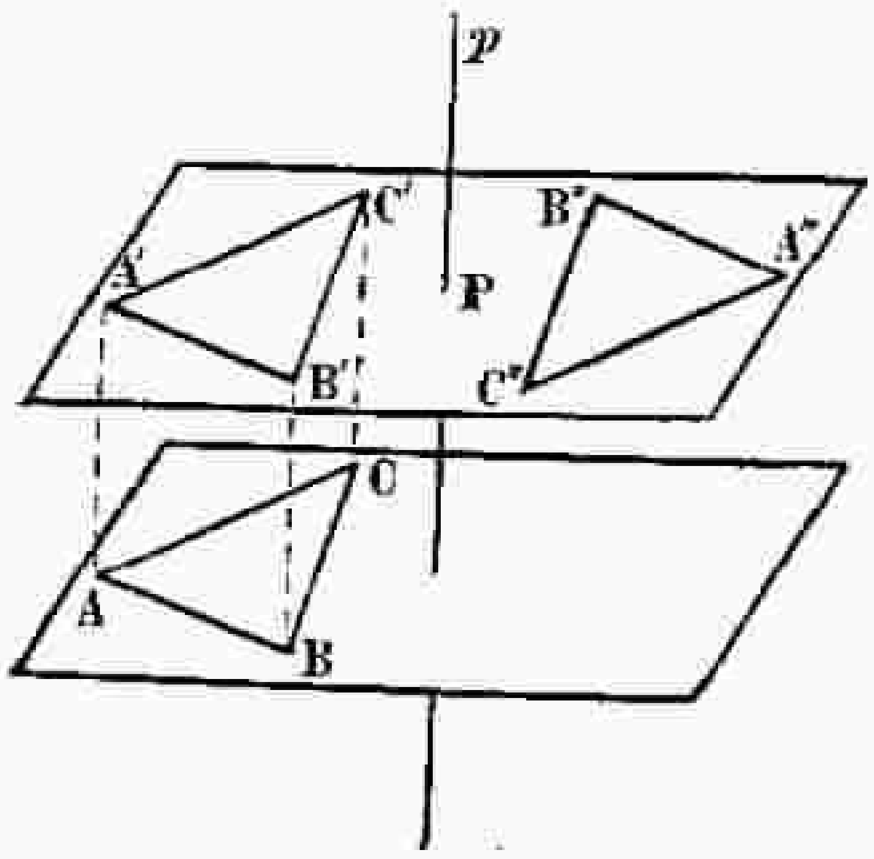


Fig. 13.

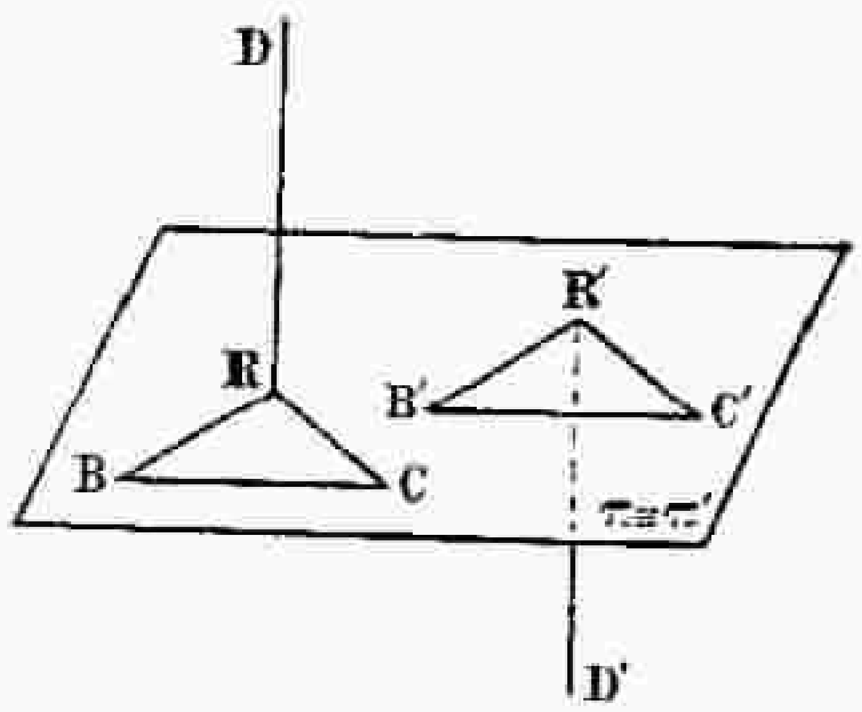


Fig. 14.

ed equiversi AB ed A'B', AC ed A'C', e sarebbero uguali ed equiversi fra loro AA', BB', CC'; la **C** sarebbe di nuovo la traslazione AA'; escluso questo caso, la congruenza fra A''B''C'' ed A'B'C' è dunque una rotazione o una simmetria rispetto a un punto P di π' (fig. 13); detta p la perpendicolare in P al piano π', la traslazione AA'' seguita dalla rotazione p (A''A') o dalla simmetria rispetto a p porta il triangolo ABC nel triangolo A'B'C' onde **C** è il prodotto di quella traslazione per questa rotazione o questa simmetria, il cui asse è parallelo alla direzione della prima.

Se **C** è una congruenza inversa senza punti uniti (fig. 14), si prova come prima, che detti A, A' due punti omologhi in **C**, vi son due raggi u, v fra loro opposti uscenti da A che son portati da **C** in due raggi fra loro opposti u', v' rispettivamente contraversi ad u, v; fra le rette r, r' delle coppie di raggi u, v; u', v' la **C** subordina dunque una congruenza rettilinea inversa, e vi son dunque due punti R, R', omologhi in essa e in **C**, tali che la RR' è perpendicolare alle r, r' [54]; il piano $\pi\equiv\pi'$, perpendicolare alle r, r' in R, R', è perciò mutato da **C** in sè [10]; la **C** subordina su di esso una congruenza diretta $\mathbf{C}_\pi$

perchè, detti D, D' due punti omologhi in **C**, sulle r, r', distinti da R, R', essi sono separati da π, onde, detti B, C due punti di $\pi \equiv \pi'$, non allineati con R, e B', C' i loro omologhi in **C**, che son pure su $\pi' \equiv \pi$, dall'essere contraversi i tetraedri RBCD, R'B'C'D', seguirà che sono equiversi i triangoli RBC, R'B'C' omologhi in C_π. E poichè la C_π non può ammettere punti uniti — che sarebbero tali per **C** — essa è la traslazione RR'; e allora l'antitraslazione che ha la grandezza e il verso del segmento RR' e per piano direttore il piano π muta, come **C**, il triangolo RBC nel triangolo R'B'C' e coincide con **C** come volevasi.

Riassumendo, una congruenza diretta nello spazio è l'*identità*, o una *rotazione*, o una *traslazione*, o una *simmetria assiale* oppure è il prodotto di una *simmetria assiale* o di una *rotazione* per una *traslazione* parallela all'asse di quella; una congruenza inversa dello spazio è la *simmetria rispetto a un punto*, o *rispetto a un piano*, o una *antirotazione* o una *antitraslazione*. Fra esse le sole involutorie sono le *simmetrie*.

XI. — Le similitudini nello spazio.

69. *In una similitudine dello spazio, che non sia una congruenza, esiste sempre un punto unito ed uno solo* (CENTRO *della similitudine*).

Sia **S** la data similitudine; A, A' due punti omologhi distinti. Il prodotto della similitudine **S** — che porta A in A' — per la traslazione spaziale A'A — che porta A' in A — è una similitudine spaziale S_0 che ha in A un punto unito e che subordina quindi nella stella (A) una congruenza Γ_0; in Γ_0, se è diretta, esiston due raggi uniti fra loro opposti e se è inversa esiston due raggi omologhi fra loro opposti; in ogni caso vi è una retta r per A che è mutata in sè da Γ_0 e quindi da S_0; e poichè dalla r si passa all'omologa in S_0 cercando prima l'omologa di r in **S**, che sarà una retta r' per A', e applicando poi ad r' la traslazione A'A, e questa riporta r' in r, le r, r' sono parallele. Vi è, dunque una retta r per A, la cui omologa in **S** è una retta r' per A' parallela alla r. Sulle due rette parallele r, r' la **S** subordina dunque una similitudine con rapporto $k \neq 1$, onde su r, r' vi sono due punti H, H' omologhi in tale similitudine e in **S**, tali che la loro congiungente è perpendicolare alle r, r' [54]. Ora la **S** porta il piano α perpendicolare in H ad r, nel piano perpendicolare in H' ad r', che così coincide col primo. Sul piano α, unito in **S**, la **S** subordina allora una similitudine piana con rapporto $k \neq 1$, che ammette un punto unito U, che è tale anche per **S**, la quale poi, non essendo una congruenza, non può ammettere due punti uniti distinti.

70. Come già al n. 68, si vedrà allora che la **S** *subordina nella stella* (U), *che ha per centro il punto unito, una congruenza diretta o inversa secondo che tale è* **S**, cosicchè ogni similitudine dello spazio, con rapporto k diverso da uno, si potrà ottenere *stabilendo in una stella di raggi* (U) *una congruenza* Γ, e *ritenendo*, nella voluta similitudine, *unito il punto* U, *ed omologhi due punti* M, M' *distinti da* U, *quando i raggi* UM, UM' *siano omologhi in* Γ *e si abbia inoltre* UM : UM' $= k$. Dalla classificazione delle congruenze in una stella si ottiene così facilmente la classificazione delle similitudini spaziali con rapporto $k \neq 1$. In ogni caso *il rapporto* k *delle distanze di due punti omologhi dal centro di similitudine è costante*. Si avranno, con tale avvertenza, tutti e soli i tipi seguenti:

1°. Se la congruenza Γ della stella (U) è *l'identità*, la **S** è una similitudine diretta, che dicesi *omotetia spaziale diretta* di centro U e rapporto k; *due punti omologhi sono allineati con* U *e dalla stessa parte di esso; due segmenti omologhi son paralleli* (*o collineari*) *ed equiversi*, per cui alla *costante di omotetia* si attribuisce il segno $+$. *Due piani omologhi sono paralleli, o coincidono se passan pel centro* etc.

2°. Se la congruenza Γ della stella (U) è una *simmetria assiale d'asse* u, la **S** è una similitudine diretta che dicesi *rotomotetia simmetrica di asse* u; *due punti omologhi son proiettati da* U *in due raggi simmetrici rispetto ad* u; e la **S** è il *prodotto della omotetia diretta di centro* U *e rapporto* $+$ k, *per la simmetria rispetto ad* u;

3°. Se la congruenza Γ della stella (U) è una *rotazione* nella stella, d'asse u, la **S** è una similitudine diretta che dicesi *rotomotetia spaziale d'asse* u; *ampiezza* di essa è quella di Γ. *Due punti omologhi son proiettati da* U *in due raggi equiinclinati su ciascun raggio di* u, *e da* u *in un diedro costante in grandezza e verso.*

La **S** *è il prodotto della omotetia diretta di centro* U *e rapporto* $+$ **k** *per la rotazione d'asse* u *che ha l'ampiezza e il verso di* Γ.

4°. Se Γ è *l'opposizione*, la **S** è una similitudine inversa che dicesi *omotetia spaziale inversa di centro* U *e rapporto* $-$ k; *due punti omologhi sono allineati con* U *e separati da esso; due segmenti omologhi son paralleli* (*o collineari*) *e contraversi* etc.

5°. Se Γ è la *simmetria rispetto a un piano* α *nella stella* (U), la **S** è una similitudine spaziale inversa che dicesi *antiomotetia simmetrica* avente per centro U e per piano direttore α; *due punti omologhi son proiettati da* U *in due raggi simmetrici rispetto ad* α, e la **S** è evidentemente il *prodotto della omotetia diretta di centro* U *e rapporto* k *per la simmetria rispetto ad* α.

6°. Se Γ è una *antirotazione* d'asse u, la **S** è una similitudine spaziale inversa che si dirà *antiomotetia*, di *centro* U, d'*asse* u, avente per *ampiezza* e per *verso* quelli dell'antirotazione Γ. Due punti omologhi son proiettati da U in due raggi che formano angoli supplementari con uno stesso raggio dell'asse, e da u in due semipiani formanti un diedro d'ampiezza e verso costanti. E la **S** è il *prodotto di una omotetia diretta* (di centro U e rapporto $+k$) *per una antirotazione d'asse* u [1].

XII. — I movimenti.

71. *Due figure finite* [2] *fra loro riferite*, (F), (F') *si diranno* sovrapponibili con un movimento, *se, dato un segmento comunque piccolo* ε, *è possibile costruire delle figure* (F_1) $(F_2) \ldots (F_n)$, *riferite alle date, e tali che nella successione*

$$(F),\ (F_1),\ (F_2) \ldots .\ (F_n),\ (F')$$

ciascuna figura sia congruente alla successiva, e la distanza fra due punti omologhi qualunque di due figure consecutive sia sempre minore del segmento ε [3].

Ne verrà che *due figure sovrapponibili con un movimento sono congruenti*, dimodochè se una di esse è rettilinea (cioè è una *punteggiata*) o è piana, anche l'altra è rettilinea o piana. Le figure intermedie costruite (F_1), $(F_2), \ldots$ (F_n) si posson dire *posizioni intermedie della figura mobile*, e saranno tutte, nei casi ora detti, punteggiate o figure piane.

72. Quando le figure (F), (F') siano punteggiate appartenenti alla stessa retta, se anche le posizioni intermedie — che sono punteggiate — appartengono alla stessa retta, si dirà che le *due punteggiate collineari* (F), (F') *sono sovrapponibili con un movimento* rettilineo.

Quando le (F), (F') sono figure di un medesimo piano, se anche le posizioni intermedie — che sono figure piane — appartengono allo stesso piano, si dirà che le *due figure complane* (F), (F') *sono sovrapponibili con un movimento* piano.

73. *La condizione affinchè due punteggiate collineari siano sovrapponibili con un movimento rettilineo è che esse sieno direttamente congruenti.*

Siano (F), (F') due punteggiate su una retta r, direttamente congruenti, ed A, A' due punti omologhi di esse. Fissato un segmento ε piccolo ad arbitrio, dividasi il segmento AA' in un numero così grande di parti uguali che ognuna di esse sia minore di ε; sieno A_1, $A_2, \ldots$ A_n i punti di divisione; le traslazioni rettilinee determinate dal portare rispettivamente A in A_1, A_1 in $A_2, \ldots$, A_{n-1} in A_n, A_n in A' portano successivamente la (F) in punteggiate intermedie (F_1) $(F_2) \ldots$ (F_n)

[1] Sono facilmente determinabili, per ogni tipo di congruenza o di similitudine nello spazio, le *rette* e i *piani* uniti e insieme le congruenze o le similitudini rettilinee o piane che le date subordinano sulle rette o sui piani uniti. Cfr. note ai n. 53, 58.

[2] Una figura si dirà *finita* se esiste un segmento maggiore della distanza di due punti qualunque della figura.

[3] Oltre alla citata opera del VERONESE, cfr. B. LEVI. *Sull'uguaglianza diretta e inversa delle figure* (in questo *Periodico*, Vol. XII, Fasc. II, 1904).

direttamente uguali ad (F), e infine in una punteggiata (F″) che coincide con (F′), in quanto (F″) ed (F′) risultano fra loro direttamente congruenti con A′ unito e quindi sono identiche. Allora nella successione di punteggiate sulla r:

$$(F), (F_1) \dots (F_n), (F')$$

ciascuna è congruente alla successiva, mentre la distanza tra due punti omologhi di due qualunque punteggiate successive è, per una proprietà delle traslazioni, sempre eguale a ognuno dei segmenti $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_nA'$, epperò è minore di ε. Le (F), (F′) sono dunque sovrapponibili con un movimento rettilineo.

Invece, sieno ora (F), (F′) due punteggiate di una retta r, sovrapponibili con un movimento rettilineo; e, quindi, fra loro congruenti. Presi in (F) due punti distinti A, B, e fissato un segmento ε minore della metà di AB, sarà possibile per ipotesi costruire una successione di punteggiate sovrapposte

$$(F), (F_1) \dots (F_n), (F')$$

ciascuna congruente alla successiva, e tali che la distanza di due punti omologhi qualunque di due punteggiate consecutive sia minore di ε. Detti allora A_1, B_1 i punti di (F_1) omologhi ai punti A, B di (F) ed O il punto medio di AB, poichè è $AA_1 < AO$, sarà A_1 rispetto ad O dalla parte di A, e così B_1 rispetto ad O dalla parte di B; i segmenti AB, A_1B_1 sono dunque equiversi, e perciò (F), (F_1) sono direttamente congruenti; si prova nella stessa maniera che sono direttamente congruenti (F_1), (F_2); … (F_n) ed (F′); lo sono dunque anche (F) ed (F′) come si voleva.

74. *La condizione affinchè due figure di un piano siano sovrapponibili con un movimento piano è che esse siano direttamente congruenti.*

Siano (F), (F′) due figure finite direttamente congruenti (non identiche) di un piano; esse saranno figure omologhe in una congruenza diretta del piano che, non essendo per ipotesi, l'identità sarà una *traslazione*, o una *simmetria centrale* o una *rotazione*. Se è una traslazione, fissato come prima il segmento ε, scelti due punti omologhi A, A′ di (F), (F′), diviso il segmento AA′ mediante i punti $A_1A_2 \dots A_n$ in parti uguali fra loro e minori di ε, le traslazioni piane determinate dal portare rispettivamente A in A_1, A_1 in A_2, … A_n in A′ portano la (F) successivamente in figure intermedie (F_1), (F_2), … (F_n) e da ultimo in (F′) [1], cosicchè nella successione di figure piane

$$(F), (F_1), (F_2) \dots (F_n), (F')$$

[1] Si applica, qui, più volte, il seguente Teorema di assai semplice dimostrazione: *Se* A, B, C, *son tre punti allineati, il prodotto delle traslazioni* (*rettilinee, piane, spaziali*) AB, BC *è la traslazione* (*rettilinea, piana, spaziale*) AC.

iascuna è congruente alla seguente, mentre, come nel n. precedente, distanza fra due punti omologhi di due figure successive è minore di ε.

Se invece la congruenza che lega (F), (F′) è una *rotazione* o una *mmetria*, sia O il centro della rotazione o della simmetria (fig. 15); a A un punto di (F) che disti da O non meno di ogni altro punto (F), punto che esiste certo, poichè (F) è finita; il suo omologo A′ (F′) avrà da O distanza non minore di ogni altro punto di (F′). I ie punti A, A′ dividono il cerchio di centro O e di raggio OA = OA′ due archi. Sceltone uno, lo si divida, mediante i punti $A_1 A_2 \ldots A_n$, un numero così grande di parti uguali che la corda di ognuna sia inore del segmento prefissato ε. Le rotazioni piane *determinate* dalaver per centro O e dal portare rispettivamente A in A_1, A_1 in $\ldots A_n$ in A′ portano la (F) successivamente in figure intermedie

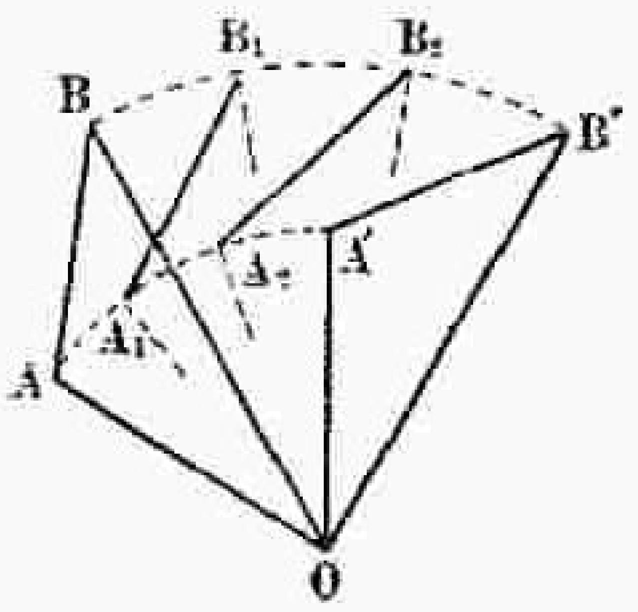


Fig. 15.

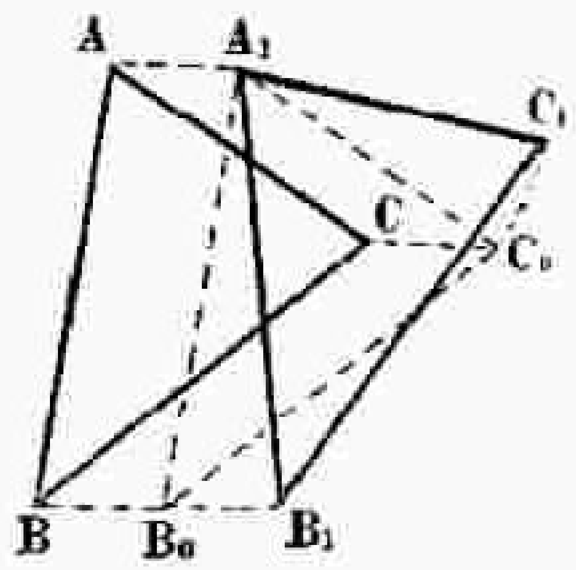


Fig. 16.

l piano $(F_1), (F_2), \ldots (F_n)$ tutte direttamente congruenti alla (F), e ultimo in una figura piana (F″), che coincide con (F′), in quanto (F′) (F″), direttamente congruenti alla (F), lo sono tra loro; ma sono, r esse, O ed A′ punti uniti, onde (F′) ed (F″) coincidono. Allora lla successione di figure piane

$$(F),\ (F_1),\ (F_2) \ldots\ (F_n),\ (F')$$

scuna è congruente, per rotazioni di centro O, alla seguente; ora una rotazione la mutua distanza di due punti omologhi è propornale alla loro comune distanza dal centro di rotazione [47]; dunque distanza di due punti omologhi di (F), (F_1) è minore od uguale AA_1, in quanto A è il punto di (F) che più dista da O; tale dinza è quindi minore di ε. Così per due figure consecutive qualun- della successione. Dunque le due figure piane (F), (F′) sono rapponibili con un movimento piano.

Siano, invece, (F), (F′) due figure di un piano sovrapponibili con un vimento piano (fig. 16); esse sono certamente congruenti e si tratta provare che lo sono direttamente. Siano ABC tre punti non alati di (F), A′B′C′ i loro omologhi in (F′); i triangoli ABC, A′B′C′ o uguali. Fissato un segmento ε minore della metà di ogni altezza del triangolo ABC (e quindi anche della metà di ogni altezza del triangolo A'B'C'), sarà per ipotesi possibile costruire nel piano una successione di figure

$$(F),\ (F_1),\ (F_2), \ldots\ (F_n),\ (F')$$

tali che la distanza di due punti omologhi qualunque di due figure consecutive sia sempre minore di ε. Basterà provare che due figure consecutive, ad esempio (F), (F_1) sono direttamente congruenti, e perciò basterà assicurarci che il triangolo ABC, scelto in (F), è equiverso al triangolo congruente $A_1B_1C_1$ che gli corrisponde in (F_1). La traslazione AA_1 porta il triangolo ABC nel triangolo d'ugual verso $A_1B_0C_0$; e sarà $BB_0 = CC_0 = AA_1$; e quindi essendo

$$B_0B_1 \leqslant B_0B + BB_1$$
$$C_0C_1 \leqslant C_0C + CC_1$$

sarà

$$B_0B_1 \leqslant AA_1 + BB_1\ ;\ C_0C_1 \leqslant AA_1 + CC_1$$

dunque

$$B_0B_1 \leqslant 2\varepsilon\ ;\ C_0C_1 \leqslant 2\varepsilon.$$

I due triangoli $A_1B_0C_0$, $A_1B_1C_0$ sono equiversi perchè i loro vertici B_0, B_1, stanno dalla stessa parte del lato comune A_1C_0, in quanto è $B_0B_1 < 2\varepsilon$ e quindi B_0B_1 è minore dell'altezza, uscente da B_0, del triangolo $A_1B_0C_0$, che è uguale al triangolo ABC. Così sono equiversi i due triangoli $A_1B_1C_0$, $A_1B_1C_1$ in quanto è $C_0C_1 < 2\varepsilon$ e quindi C_0C_1 è minore dell'altezza, uscente da C_1, del triangolo $A_1B_1C_1$. Perciò ABC, $A_1B_1C_1$ sono equiversi come volevasi. La dimostrazione si semplifica quando A coincida con A_1, oppure B_0 con B_1.

75. *La condizione affinchè due figure dello spazio sieno sovrapponibili con un movimento è che esse sieno direttamente congruenti.*

Siano (F), (F') due figure finite direttamente congruenti non identiche dello spazio; esse saranno figure omologhe in una congruenza diretta dello spazio, diversa dall'identità, che sarà una *traslazione*, o una *rotazione* o una *simmetria assiale*, o infine il prodotto di una *traslazione* per una *rotazione o una simmetria assiale.* Nei primi tre casi basteranno lievi varianti alla prima parte della dimostrazione esposta nel numero precedente, per assicurarci che (F), (F') sono sovrapponibili con un movimento. Nell'ultimo caso, si potrà costruire una figura (F''), congruente ad (F) in una traslazione, e ad (F') in una rotazione o in una simmetria assiale; dall'essere sovrapponibili con un movimento (F) ed (F''), (F'') ed (F'), segue tosto che lo sono (F) ed (F').

Si supponga invece che le figure dello spazio (F), (F') sieno sovrapponibili con un movimento e quindi congruenti; proveremo che esse sono direttamente congruenti. Perciò basterà provare che due tetraedri omologhi ABCD, A'B'C'D' delle sue figure date, che sono congruenti, sono anche equiversi. Fissato un segmento ε minore del *terzo* di ogni altezza di ciascuno dei due tetraedri, sarà possibile costruire una successione di figure congruenti

$$(F), (F_1) \dots (F_n), (F')$$

tali che la distanza di due punti omologhi di due figure consecutive sia sempre minore di ε; detto $A_1B_1C_1D_1$ il tetraedro di (F_1) omologo ad ABCD, basterà provare che detti tetraedri sono equiversi. Posto che sia $AB \geqslant AC$; $AB \geqslant AD$, la traslazione AA_1 porta il tetraedro ABCD in un tetraedro eguale ed equiverso $A_1B_0C_0D_0$ (fig. 17), e sarà

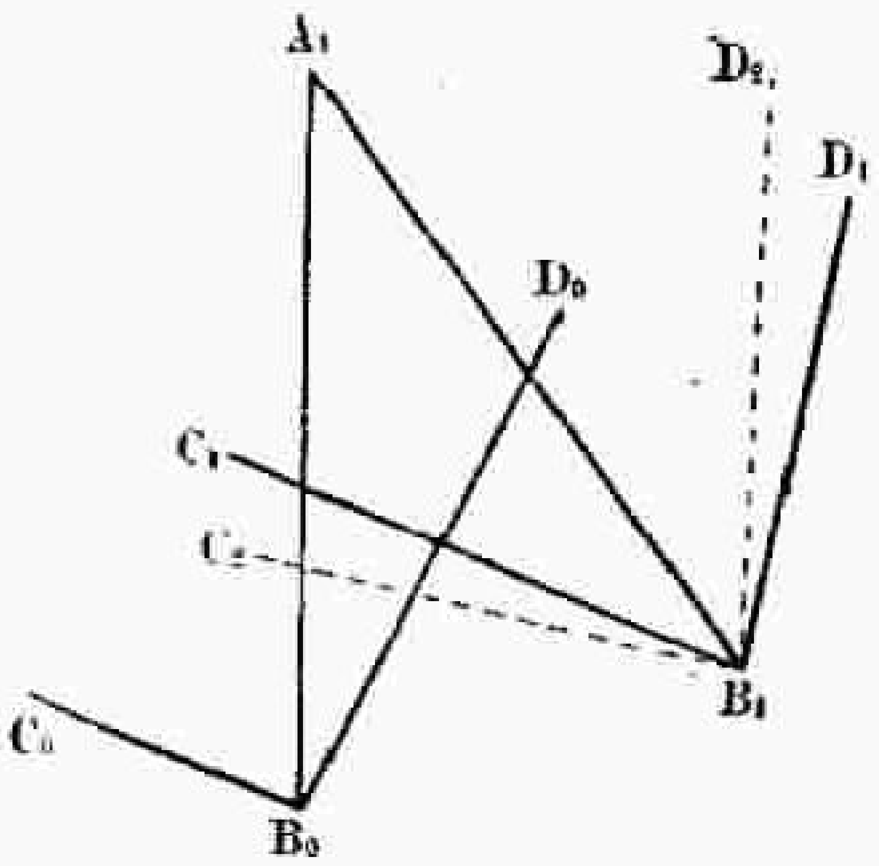


Fig. 17.

$$BB_0 = CC_0 = DD_0 = AA_1;$$

si avrà come prima

$$B_0B_1 \leqslant 2\varepsilon; \quad C_0C_1 \leqslant 2\varepsilon; \quad D_0D_1 \leqslant 2\varepsilon.$$

I punti B_0B_1 non possono essere simmetrici rispetto ad A, perchè la loro distanza è minore di ogni altezza di ognuno dei tetraedri e perciò anche di AB. Posto che B_0 e B_1 non coincidano, la rotazione $B_0\widehat{A_1}B_1$ intorno alla normale in A_1 al piano $B_0A_1B_1$ porta il tetraedro $A_1B_0C_0D_0$ in un tetraedro $A_1B_1C_2D_2$, eguale ed equiverso; e poichè la distanza di B_0 dall'asse di rotazione è uguale ad AB, mentre le distanze di C_0, D_0 dall'asse stesso non sono maggiori di AC, AD, sarà la prima non minore di ognuna delle seconde e quindi [62]

$$C_0C_2 \leqslant B_0B_1; \quad D_0D_2 \leqslant B_0B_1$$

onde

$$C_0C_2 \leqslant 2\varepsilon, \quad D_0D_2 \leqslant 2\varepsilon.$$

E allora dall'essere

$$C_1C_2 \leqslant C_1C_0 + C_0C_2; \; D_1D_2 \leqslant D_1D_0 + D_0D_2$$

si cava

$$C_1C_2 \leqslant 3\varepsilon; \; D_1D_2 \leqslant 3\varepsilon.$$

I due tetraedri $A_1B_1C_2D_2$, $A_1B_1C_1D_2$ sono equiversi perchè i loro vertici C_1C_2 sono dalla stessa parte rispetto alla faccia comune $A_1B_1D_2$, in quanto C_1C_2, minore di 3ε, è minore dell'altezza, uscente da C_2, del tetraedro $A_1B_1C_2D_2$, che è uguale ad ABCD; così i due tetraedri $A_1B_1C_1D_2$, $A_1B_1C_1D_1$ sono equiversi perchè D_1D_2, minore di 3ε, è minore dell'altezza, uscente da D_1, del tetraedro $A_1B_1C_1D_1$, onde i vertici D_1, D_2

sono da una parte rispetto alla faccia comune $A_1B_1C_1$. Si conclude che $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ sono equiversi, come volevasi. La dimostrazione si semplifica se A coincide con A_1, oppure B_0 con B_1.

76. *Due punteggiate inversamente congruenti di una retta, che non sono sovrapponibili con un movimento rettilineo, lo sono con un movimento piano*; detto O il loro centro di simmetria, esse possono riguardarsi come figure omologhe nella simmetria piana centrale che O, come centro, determina in un piano passante per la loro retta; e poichè due figure di un piano, simmetriche rispetto a un punto, sono sovrapponibili con un movimento piano, lo sono pure le date. Così *due figure finite inversamente congruenti di un piano, che non sono sovrapponibili con un movimento piano, lo sono con un movimento dello spazio.* Difatti se esse son simmetriche rispetto a una retta r del loro piano, esse sono figure omologhe nella simmetria *dello spazio* d'asse r, che è una congruenza *diretta* dello spazio; onde le date figure sono sovrapponibili con un movimento dello spazio (*ribaltamento* attorno ad r). Se poi la congruenza piana inversa che lega le due figure piane date è una antitraslazione, una traslazione porterà la prima di esse ad esser simmetrica dell'altra rispetto a una retta r del loro piano, parallela alla direzione della traslazione; e allora le due figure piane date saranno sovrapponibili con una *traslazione*, seguita da un *ribaltamento* intorno alla r.

Può, più generalmente, osservarsi che *due punteggiate congruenti, su rette distinte o no, sono sovrapponibili con un movimento* che può essere piano se le due rette sono in un piano; e che *due figure piane congruenti, di piani distinti o no, sono sempre sovrapponibili con un movimento.* Difatti detti B, C due punti di una punteggiata e B′, C′ gli omologhi in una punteggiata congruente, se esse sono complanari, la congruenza piana diretta che porta B in B′ e C in C′ mostra che le due punteggiate sono sovrapponibili con un movimento piano; se non sono complanari, presi fuori di esse due punti A, A′ tali che i triangoli ABC, A′B′C′ sieno uguali, la congruenza spaziale diretta, che muta il primo nel secondo, mostra che le due punteggiate si possono sovrapporre con un movimento dello spazio; infine se in due date figure piane congruenti si considerano due triangoli omologhi ABC, A′B′C′, ancora la congruenza spaziale diretta, che muta il primo nel secondo, mostra che le due figure piane si possono sovrapporre con un movimento dello spazio.

E. Veneroni.

LE DUE SFERE DEI DODICI PUNTI RELATIVE AL TETRAEDRO ORTOGONALE

L'articolo che presento al benevolo lettore è diviso in tre para-
afi: nel primo viene sommariamente esposto il sistema baricen-
co dedotto dal cartesiano e data l'equazione del piano e della
ra in coordinate baricentriche. È quel tanto che basta per leg-
'e correntemente i due paragrafi che seguono, uno destinato alla
ma, l'altro alla seconda sfera dei dodici punti pel tetraedro or-
onale.

Lo studio della prima sfera dei dodici punti può farsi in
do molto più semplice, com'è noto; io l'ho fatto così per dare,
ne applicazione del precedente paragrafo, l'equazione di detta
ra in coordinate baricentriche e senza presupporre alcuna cogni-
ne sull'argomento per parte del lettore. Lo studio della seconda
ra credo meriti di essere osservato per la semplicità che pre-
ta; esso mi ha poi permesso di trovare agevolmente qualche
prietà di un cerchio che non credo noto nella geometria del
ngolo: un cerchio che passa per i punti G ed H, e che appar-
ie a un fascio di cui fa parte il cerchio circoscritto.

In altri articoli susseguenti verrò trattando, con ricorso al si-
na baricentrico, vari argomenti, sia pel piano, che per lo spazio
biente o per gli spazi di dimensione superiore, confidando sempre
la consueta cortese ospitalità del *Periodico* e nella benignità del
ore.

§ 1. — Preliminari.

Nello spazio ambiente S_3 fissiamo un sistema di assi cartesiani
ogonali e rispetto a questo sistema siano:

$$\left.\begin{array}{llll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \text{le coordinate di } A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \quad " \qquad " \qquad " \ A_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \quad " \qquad " \qquad " \ A_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & \quad " \qquad " \qquad " \ A_4 \end{array}\right\} . \tag{1}$$

Preso poi sulla retta A_1A_2 un punto generico P_{12}, poniamo:

$$A_1P_{12} : P_{12}A_2 = x_{12} , \tag{2}$$

abiliamo che x_{12} sia positiva o negativa a seconda che P_{12} è in-
o o esterno al segmento finito A_1A_2. La x_{12} è la *coordinata ba-*

ricentrica di P_{12}: A_1 e A_2 si dicono i *punti fondamentali* del sistema baricentrico. A_1 ha per coordinata 0, A_2 ha per coordinata ∞, il punto medio di A_1A_2 ha per coordinata 1.

Indichiamo con $\xi_{12.1}$, $\xi_{12.2}$, $\xi_{12.3}$ le coordinate cartesiane di P_{12}: allora la formula (2) ci conduce alle:

$$\frac{\xi_{12.i}-a_{1i}}{a_{2i}-\xi_{12.i}}=x_{12}. \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

Da queste segue:

$$\xi_{12.i}=\frac{a_{2i}x_{12}+a_{1i}}{x_{12}+1}. \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

Prendiamo ora sulla congiungente A_3 con P_{12} un punto P_{123} di coordinate $\xi_{123.1}$, $\xi_{123.2}$, $\xi_{123.3}$: questo punto sia proiettato da A_1 e A_2 sulle rette A_2A_3, A_1A_3 nei punti P_{23}, P_{13} tali che:

$$\left.\begin{aligned} A_2P_{23} : P_{23}A_3 = x_{23} \\ A_1P_{13} : P_{13}A_3 = x_{13} \end{aligned}\right\}. \tag{5}$$

Il teorema di *Van Aubel* ci dà:

$$A_3P_{123} : P_{123}P_{12} = \frac{1}{x_{13}}+\frac{1}{x_{23}}=\frac{x_{23}+x_{13}}{x_{13}x_{23}},$$

ma poichè pel teorema di *Ceva* è

$$x_{12}x_{23}=x_{13}, \tag{5'}$$

la precedente formula si trasforma facilmente così:

$$A_3P_{123} : P_{123}P_{12} = \frac{x_{12}+1}{x_{13}}. \tag{6}$$

E allora, tenendo conto delle (3), (6) segue:

$$\xi_{123.i}=\frac{a_{3i}x_{31}+a_{2i}x_{21}+a_{1i}}{x_{31}+x_{21}+1}. \tag{7}$$

Le x_{12}, x_{13}, x_{23}, legate dalla (5'), sono le *coordinate baricentriche* di P_{123}; $A_1A_2A_3$ sono i *punti fondamentali* del sistema baricentrico.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Per } A_1 \text{ la } x_{12} \text{ è } 0, \text{ la } x_{13} \text{ è } 0, \text{ la } x_{23} \text{ qualunque} \\ \quad \text{"}\ \ A_2 \text{ la } x_{12} \text{ è } \infty, \text{ la } x_{13} \text{ qualunque, la } x_{23} \text{ è } 0 \\ \quad \text{"}\ \ A_3 \text{ la } x_{12} \text{ è qualunque, la } x_{13} \text{ è } \infty, \text{ la } x_{23} \text{ è } \infty \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Sulla congiungente A_4 con P_{123} prendiamo un punto P_{1234} di coordinate cartesiane $\xi_{1234.1}$, $\xi_{1234.2}$, $\xi_{1234.3}$ e dalle rette dei lati del triangolo $A_1A_2A_3$ proiettiamo P_{1234} sulle rette A_4A_1, A_4A_2, A_4A_3; se poniamo:

$$\left.\begin{aligned} A_1P_{14} : P_{14}A_4 = x_{14} \\ A_2P_{24} : P_{24}A_4 = x_{24} \\ A_3P_{34} : P_{34}A_4 = x_{34} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

saranno, pel teorema di *Ceva*, legate queste x nuove alle x_{12}, x_{13}, x_{23} dalle formule

$$\left.\begin{aligned} x_{23} \,.\, x_{34} &= x_{24} \\ x_{12} \,.\, x_{24} &= x_{14} \\ x_{13} \,.\, x_{34} &= x_{14} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

tenuta sempre presente la (5').

Il teorema di *Van Aubel* dà:

$$\left.\begin{aligned} A_4P_{1234} : P_{1234}P_{123} &= \frac{1}{x_{14}} + \frac{1}{x_{24}} + \frac{1}{x_{34}} \\ &= \frac{x_{13} + x_{12} + 1}{x_{14}} \end{aligned}\right|. \tag{11}$$

E allora per la (4) si troverà:

$$\xi_{1234.i} = \frac{a_{4i}x_{41} + a_{3i}x_{31} + a_{2i}x_{21} + a_{1i}}{x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1}. \tag{12}$$

I numeri x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{14}, x_{24}, x_{34} si dicono le *coordinate baricentriche* del punto P_{1234}: esse non sono indipendenti, ma legate dalle (5') (10). A_1, A_2, A_3, A_4 sono i *punti fondamentali* del sistema baricentrico.

Per il punto A_1 è:

$$x_{12} = 0, \qquad x_{13} = 0, \qquad x_{14} = 0;$$

le altre coordinate son legate dalla relazione $x_{23} \,.\, x_{34} = x_{24}$.

Per il punto A_2 è:

$$x_{23} = 0, \qquad x_{24} = 0, \qquad x_{12} = \infty;$$

le altre coordinate son legate dalla relazione $x_{13} \,.\, x_{34} = x_{14}$.

Per il punto A_3 è:

$$x_{34} = 0, \qquad x_{13} = \infty, \qquad x_{23} = \infty;$$

le altre coordinate son legate dalla relazione $x_{12} \,.\, x_{24} = x_{14}$.

Per il punto A_4 è:

$$x_{14} = \infty, \qquad x_{24} = \infty, \qquad x_{34} = \infty;$$

le altre coordinate son legate dalla relazione $x_{12} \,.\, x_{23} = x_{13}$.

Per trovare l'equazione del piano in coordinate baricentriche osserviamo che una relazione lineare fra le $\xi_{1234.i}$ si trasforma, in virtù della (12), in una relazione del tipo:

$$A'_4x_{14} + A'_3x_{13} + A'_2x_{12} + A'_1 = 0; \tag{13}$$

questa è l'equazione di un piano generico. A seconda che esso passa per A_1 o per A_2, o per A_3, o per A_4, mancheranno rispettivamente i coefficienti A'_1, A'_2, A'_3, A'_4.

Una combinazione lineare del primo membro della (13) e del primo membro dell'equazione di un altro piano uguagliata a zero rappresenta l'equazione di un piano del fascio che ha per asse l'intersezione dei due piani dati.

L'equazione del piano all'infinito è:

$$x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1 = 0\,; \tag{14}$$

l'equazione di un piano parallelo al piano di equazione (13) è:

$$A'_4 x_{14} + A'_3 x_{13} + A'_2 x_{12} + A'_1 + \lambda\,.\,(x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1) = 0, \tag{15}$$

e il parametro λ potrà essere determinato in maniera che il piano passi per un punto assegnato dello spazio.

Supponiamo ora che il punto P_{1234} descriva una superficie sferica di equazione:

$$\xi^2_{1234.1} + \xi^2_{1234.2} + \xi^2_{1234.3} + a\,.\,\xi_{1234.1} + b\,.\,\xi_{1234.2} + c\,.\,\xi_{1234.3} + d = 0. \tag{16}$$

Tenendo presenti i valori (12) si trova un'equazione del tipo:

$$\begin{gathered} Ax^2_{14} + Bx^2_{13} + Cx^2_{12} + Dx_{13}\,.\,x_{14} + Ex_{12}\,.\,x_{14} + \\ + F\,.\,x_{12}\,.\,x_{13} + Gx_{14} + Hx_{13} + Lx_{12} + M = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

dove:

$$\left.\begin{aligned}
A &= a^2_{41} + a^2_{42} + a^2_{43} + a\,.\,(a_{41} + a_{42} + a_{43}) + d \\
B &= a^2_{31} + a^2_{32} + a^2_{33} + a\,.\,(a_{31} + a_{32} + a_{33}) + d \\
C &= a^2_{21} + a^2_{22} + a^2_{23} + a\,.\,(a_{21} + a_{22} + a_{23}) + d \\
M &= a^2_{11} + a^2_{12} + a^2_{13} + a\,.\,(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + d \\
D &= 2a_{31}a_{41} + 2a_{32}a_{42} + 2a_{33}a_{43} + a\,(a_{31} + a_{41}) + \\
&\qquad + b\,(a_{32} + a_{42}) + c\,(a_{33} + a_{43}) + 2d \\
E &= 2a_{21}a_{41} + 2a_{22}a_{42} + 2a_{23}a_{43} + a\,(a_{21} + a_{41}) + \\
&\qquad + b\,(a_{22} + a_{42}) + c\,(a_{23} + a_{43}) + 2d \\
F &= 2a_{21}a_{31} + 2a_{22}a_{32} + 2a_{23}a_{33} + a\,.\,(a_{21} + a_{31}) + \\
&\qquad + b\,(a_{22} + a_{32}) + c\,.\,(a_{33} + a_{23}) + 2d \\
G &= 2a_{11}a_{41} + 2a_{12}a_{42} + 2a_{13}a_{43} + a\,.\,(a_{11} + a_{41}) + \\
&\qquad + b\,.\,(a_{12} + a_{42}) + c\,.\,(a_{13} + a_{43}) + 2d \\
H &= 2a_{11}a_{31} + 2a_{12}a_{32} + 2a_{13}a_{33} + a\,(a_{11} + a_{31}) + \\
&\qquad + b\,.\,(a_{12} + a_{32}) + c\,.\,(a_{13} + a_{33}) + 2d \\
L &= 2a_{11}a_{21} + 2a_{12}a_{22} + 2a_{13}a_{23} + a\,(a_{11} + a_{21}) + \\
&\qquad + b\,.\,(a_{12} + a_{22}) + c\,.\,(a_{13} + a_{23}) + 2d
\end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

I dieci coefficienti sono legati da alcune relazioni che riportiamo qui sotto e nelle quali l_{ik} indica la misura dello spigolo A_iA_k:

$$\left.\begin{aligned}
A + B - D &= l^2_{34} \\
A + C - E &= l^2_{24} \\
B + C - F &= l^2_{23} \\
A + M - G &= l^2_{14} \\
B + M - H &= l^2_{13} \\
C + M - L &= l^2_{12}
\end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

Per mezzo di queste possiamo esprimere D, E, F, G, H, L, per A, ;, C, M e porre l'equazione di una sfera generica sotto la forma:

$$(Ax_{14}+Bx_{13}+Cx_{12}+M)\,.\,(x_{14}+x_{13}+x_{12}+1=$$
$$=l^2_{34}x_{13}\,.\,x_{14}+l^2_{24}x_{12}\,.\,x_{14}+l^2_{23}x_{12}\,.\,x_{13}+l^2_{14}x_{14}+l^2_{13}x_{13}+l^2_{12}x_{12}\,. \qquad (20)$$

I coefficienti A, B, C, M saranno determinati dall'imporre, per ;empio, che la sfera passi per quattro punti.

Si noti che sottraendo membro a membro l'equazione (20) e quella un'altra sfera i cui coefficienti siano A', B', C', M', si ottiene equazione di una particolare sfera del fascio da esse determinato, era che si spezza in due piani; uno è il piano all'infinito di juazione:

$$x_{14}+x_{13}+x_{12}+1,$$

l'altro è il piano di equazione:

$$(A-A')\,x_{14}+(B-B')\,x_{13}+(C-C')\,x_{12}+M-M'=0, \qquad (21)$$

ıe si chiama *piano radicale delle due sfere.*

Premesse queste poche nozioni sul sistema baricentrico, andiamo trovare l'equazione di alcune sfere notevoli.

§ 2. — La prima sfera dei dodici punti.

Cerchiamo se esiste una sfera che passi per i punti medi dei ;i A_iA_k.

Scrivendo che vogliamo soddisfatte queste *sei* condizioni e ricorndo che una sfera è perfettamente determinata dal passaggio per attro punti, dalle corrispondenti relazioni deve necessariamente ıturire che il tetraedro in questione è un tetraedro particolare.

Si trova:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,.\,(C+M)=l^2_{12} \\ 2\,.\,(B+M)=l^2_{13} \\ 2\,.\,(A+M)=l^2_{14} \end{array}\right\}. \qquad (22)$$

r l'effetto del passaggio pei punti medi di A_1A_2, A_1A_3 e A_1A_4.

Quanto agli altri tre bisogna seguire questo procedimento. Rifemoci al punto medio di A_2A_3 e poniamo quindi:

$$x_{23}=1.$$

L'equazione (20) può scriversi così tenendo presenti le

$$\left.\begin{array}{l} x_{12}\,.\,x_{23}=x_{13} \\ x_{12}\,.\,x_{24}=x_{14} \\ x_{13}\,.\,x_{34}=x_{14} \\ x_{23}\,.\,x_{34}=x_{24} \end{array}\right\}, \qquad (23)$$

$$(\mathrm{A} \,.\, x_{12}x_{23}x_{34} + \mathrm{B}x_{12} \,.\, x_{23} + \mathrm{C}x_{12} + \mathrm{M})\,(x_{12}x_{23}x_{34} + x_{12}x_{23} + x_{12} + 1) =$$
$$= l^2_{34} \,.\, x^2_{12}x^2_{23}x_{34} + l^2_{24}x^2_{12} \,.\, x_{23} \,.\, x_{34} + l^2_{23}x^2_{12} \,.\, x_{23} +$$
$$+ l^2_{14}x_{12}x_{23}x_{34} + l^2_{13}x_{12}x_{23} + l^2_{12}x_{12}\,,$$

e dividendo per x^2_{12}

$$\left(\mathrm{A} \,.\, x_{23} \,.\, x_{34} + \mathrm{B}x_{23} + \mathrm{C} + \frac{\mathrm{M}}{x_{12}}\right) . \left(x_{23} \,.\, x_{34} + x_{23} + 1 + \frac{1}{x_{12}}\right) =$$
$$= l^2_{34} \,.\, x^2_{23} \,.\, x_{34} + l^2_{24} \,.\, x_{23} \,.\, x_{34} + l^2_{23}x_{23} +$$
$$+ l^2_{14} \,.\, \frac{x_{23} \,.\, x_{34}}{x_{12}} + l^2_{13} \,.\, \frac{x_{23}}{x_{12}} + l^2_{12}\frac{1}{l_{12}}\,. \tag{24}$$

E ponendo

$$x_{23} = 1, \qquad x_{34} = 0 \qquad \mathrm{e} \qquad x_{12} = \infty\,;$$

e analogamente:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,.\,(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = l^2_{23} \\ 2\,.\,(\mathrm{A} + \mathrm{C}) = l^2_{24} \\ 2\,.\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = l^2_{34} \end{array}\right\}. \tag{25}$$

Scritte così le sei condizioni (22), (25) è facile ricavare i valori di A, B, C, M. Sommando le prime due delle (22) e togliendovi la prima delle (25) si trova un primo valore di M:

$$4\mathrm{M} = l^2_{12} + l^2_{13} - l^2_{23}\,, \tag{26}$$

e in modo analogo si trova:

$$\left.\begin{array}{l} 4\,.\,\mathrm{M} = l^2_{12} + l^2_{14} - l^2_{24} \\ 4\,.\,\mathrm{M} = l^2_{13} + l^2_{14} - l^2_{34} \end{array}\right\}. \tag{27}$$

Dal confronto di questi valori di M segue:

$$l^2_{12} + l^2_{34} = l^2_{13} + l^2_{24} = l^2_{14} + l^2_{23}\,, \tag{28}$$

che dicono che il tetraedro in discorso è *ortogonale*.

Inoltre, insieme coi valori di M sopra riportati si ha:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{A} = \dfrac{l^2_{34} + l^2_{24} - l^2_{23}}{4} \\ \mathrm{B} = \dfrac{l^2_{23} + l^2_{34} - l^2_{24}}{4} \\ \mathrm{C} = \dfrac{l^2_{23} + l^2_{24} - l^2_{34}}{4} \end{array}\right\}, \tag{29}$$

per cui l'equazione della sfera di cui ci occupiamo assumerà l'aspetto:

$$\frac{1}{4} \,.\, \{(l^2_{34} + l^2_{24} - l^2_{23}) \,.\, x_{14} + (l^2_{23} + l^2_{34} - l^2_{24}) \,.\, x_{13} + (l^2_{23} + l^2_{24} - l^2_{34}) \,.\, x_{12} +$$
$$+ (l^2_{13} + l^2_{14} - l^2_{34})\} \,.\, \{x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1\} =$$
$$= l^2_{34} \,.\, x_{13} \,.\, x_{14} + l^2_{24} \,.\, x_{12} \,.\, x_{14} + l^2_{14} \,.\, x_{14} + l^2_{13} \,.\, x_{13} + l^2_{12} \,.\, x_{12}\,, \tag{30}$$

tenute presenti le (28).

C'interessa di conoscere in quale altro punto questa superficie sferica viene tagliata da ciascuna delle rette degli spigoli del tetraedro. Riferiamoci per questa ricerca allo spigolo A_1A_2 e da questo resultato particolare trarremo le conclusioni generali.

Poniamo nella (30) $x_{14}=x_{13}=0$. Essa diventerà:

$$\{(l^2_{23}+l^2_{24}-l^2_{34})\,x_{12}+(l^2_{13}+l^2_{14}-l^2_{34})\}\,.\,(x_{12}+1)=4l^2_{12}x_{12}\,; \qquad (31)$$

equazione di secondo grado in x_{12} che ha per soluzioni:

$$x_{12}=1 \qquad \text{e} \qquad x_{12}=\frac{l^2_{13}+l^2_{14}-l^2_{34}}{l^2_{23}+l^2_{24}-l^2_{34}}=\frac{l^2_{12}+l^2_{13}-l^2_{23}}{l^2_{12}+l^2_{23}-l^2_{13}}. \qquad (32)$$

La (32) ci dice che la superficie sferica di cui ci occupiamo passa per il piede dell'altezza calata su A_1A_2 tanto da A_3 che A_4. Essa dunque contiene i *cerchi d'Eulero* relativi a ciascuna faccia del tetraedro.

Una volta nota l'equazione in coordinate baricentriche di questa sfera, conosciuta sotto il nome di *prima sfera dei dodici punti*, è facile determinare i punti che essa ha in comune con un piano o con una retta arbitraria.

Noi lasciamo questa ricerca al cortese lettore che troverà campo da soddisfare la sua curiosità; ci contenteremo di scrivere le equazioni di tre cerchi, di quello secondo cui la detta sfera è segata da un piano mediano, di quello secondo cui è segata dal piano di una faccia e di quello secondo cui è segata da un piano generico del fascio il cui asse è la retta di uno spigolo.

Quanto al primo, basterà porre x_{13} in luogo di x_{14} nella (30) e allora troveremo l'equazione corrispondente al caso che il piano mediano esca dallo spigolo A_1A_2 e passi per il punto medio di A_3A_4. Essa è:

$$\begin{aligned}(l^2_{23}+l^2_{24}-l^2_{34})^2\,.\,x^2_{12}-2\,.\,(l^2_{23}+l^2_{24})\,x_{12}\,.\,x_{13}-2l^2_{12}x_{12}-\\ -2\,.\,(l^2_{14}+l^2_{13})\,.\,x_{13}+(l^2_{13}+l^2_{14}-l^2_{34})=0. \qquad (33)\end{aligned}$$

Il piano $A_1A_2A_3$ sega la detta sfera secondo una circonferenza la cui equazione si ottiene dalla (30) facendovi $x_{14}=0$. Eliminando in quest'ultima $l_{14}l_{24}l_{34}$ a mezzo delle (28) otteniamo:

$$\begin{aligned}\{(l^2_{23}+l^2_{13}-l^2_{12})\,x_{13}+(l^2_{23}+l^2_{12}-l^2_{13})\,.\,x_{12}+(l^2_{13}+l^2_{12}-l^2_{23})\}\,.\\ .\,\{x_{13}+x_{12}+1\}=4\,\{l^2_{23}x_{12}x_{13}+l^2_{13}x_{13}+l^2_{12}x_{12}\}. \qquad (34)\end{aligned}$$

Questa è l'equazione del *cerchio d'Eulero* relativo al triangolo $A_1A_2A_3$. I cerchi d'Eulero relativi alle quattro facce di un tetraedro ortogonale sono sopra la prima sfera dei dodici punti.

Un piano del fascio di assi A_1A_2 ha per equazione:

$$x_{14}=\lambda\,.\,x_{13}\,. \qquad (35)$$

Facendo la sostituzione nella (30) si trova l'equazione del cerchio giacente in quel piano sotto la forma:

$$\begin{aligned}&\{[(l^2_{34}+l^2_{24}-l^2_{23})\lambda+(l^2_{23}+l^2_{34}-l^2_{24})]\,x_{13}+(l^2_{23}+l^2_{24}-l^2_{34})\,x_{12}+\\&\quad+(l^2_{13}+l^2_{14}-l^2_{34})\}\,.\,\{(\lambda+1)\,.\,x_{13}+x_{12}+1\}=\\&=4\,.\,\{\lambda l^2_{34}\,.\,x^2_{13}+(\lambda\,.\,l^2_{24}+l^2_{23})\,x_{12}\,.\,x_{13}+(\lambda\,.\,l^2_{14}+l^2_{13})\,x_{13}+l^2_{12}x_{12}\};\qquad(36)\end{aligned}$$

per $\lambda=1$ si riduce naturalmente alla (33), per $\lambda=0$ alla (34).

§ 3. — **La seconda sfera dei dodici punti.**

Continuando le nostre ricerche sul tetraedro ortogonale riprendiamo l'equazione (20) e scriviamo che la sfera corrispondente passa per i baricentri delle quattro facce; si tratta di quattro condizioni che servono a determinare i coefficienti A, B, C, M. Otterremo il sistema di equazioni:

$$\left.\begin{aligned}3\,.\,(B+C+M)&=l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{23}\\3\,.\,(A+C+M)&=l^2_{12}+l^2_{14}+l^2_{24}\\3\,.\,(A+B+M)&=l^2_{13}+l^2_{14}+l^2_{34}\\3\,.\,(A+B+C)&=l^2_{23}+l^2_{24}+l^2_{34}\end{aligned}\right\}.\qquad(37)$$

Da queste si ricava:

$$\left.\begin{aligned}9\,.\,A&=2\,.\,(l^2_{14}+l^2_{24}+l^2_{34})-(l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{23})\\9\,.\,B&=2\,.\,(l^2_{13}+l^2_{23}+l^2_{34})-(l^2_{14}+l^2_{24}+l^2_{12})\\9\,.\,C&=2\,.\,(l^2_{13}+l^2_{23}+l^2_{24})-(l^2_{34}+l^2_{14}+l^2_{13})\\9\,.\,M&=2\,.\,(l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{14})-(l^2_{34}+l^2_{24}+l^2_{23})\end{aligned}\right\},\qquad(38)$$

ovvero, ponendo

$$\left.\begin{aligned}l^2_{14}+l^2_{24}+l^2_{34}&=\sigma^2_{4.4}\\l^2_{13}+l^2_{23}+l^2_{34}&=\sigma^2_{3.3}\\l^2_{12}+l^2_{23}+l^2_{24}&=\sigma^2_{2.2}\\l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{14}&=\sigma^2_{1.1}\\l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{23}&=\sigma_4^2\\l^2_{14}+l^2_{24}+l^2_{12}&=\sigma_3^2\\l^2_{34}+l^2_{14}+l^2_{13}&=\sigma_2^2\\l^2_{34}+l^2_{24}+l^2_{23}&=\sigma_1^2\end{aligned}\right\}:\qquad(39)$$

$$\left.\begin{aligned}9\,.\,A&=2\,.\,\sigma^2_{4.4}-\sigma_4^2\\9\,.\,B&=2\,.\,\sigma^2_{3.3}-\sigma_2^2\\9\,.\,C&=2\,.\,\sigma^2_{2.2}-\sigma_2^2\\9\,.\,M&=2\,.\,\sigma^2_{1.1}-\sigma_1^2\end{aligned}\right\}.\qquad(40)$$

L'equazione della nostra sfera potrà così scriversi sotto la forma:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{9}\,.\,\{(2\,.\,\sigma^2_{4.4}-\sigma_4^2)\,.\,x_{14}+(2\,.\,\sigma^2_{3.3}-\sigma_3^2)\,x_{13}+(2\,.\,\sigma^2_{2.2}-\sigma_2^2)\,x_{12}+\\&\quad+(2\,.\,\sigma^2_{1.1}-\sigma_1^2)\}\,.\,\{x_{14}+x_{13}+x_{12}+1\}=\\&=l^2_{34}x_{13}x_{14}+l^2_{24}x_{12}x_{14}+l^2_{23}x_{12}x_{13}+l^2_{14}x_{14}+l^2_{13}x_{13}+l^2_{12}x_{12}\,.\qquad(41)\end{aligned}$$

Andiamo a trovare in quali punti essa incontra le rette degli spigoli del tetraedro e riferiamoci ad A_1A_2. Basta fare:

$$x_{13}=x_{14}=0,$$

e ricaveremo x_{12} dall'equazione di secondo grado:

$$P\,.\,x^2_{12}+Q\,.\,x_{12}+R=0, \tag{42}$$

dove:

$$\left.\begin{array}{l} P=2\,.\,\sigma^2_{22}-\sigma_2^{\,2}, \\ Q=2\,.\,\sigma^2_{22}-\sigma_2^{\,2}+2\sigma^2_{11}-\sigma_1^{\,2}-9\,.\,l^2_{12}, \\ R=2\,.\,\sigma^2_{11}-\sigma_1^{\,2}. \end{array}\right\} \tag{43}$$

Il tetraedro è finora generico: supponiamo che sia ortogonale, che cioè risultino soddisfatte le (28). Allora le precedenti diventano:

$$\left.\begin{array}{l} P=3\,.\,\sigma^2_{22}-\sigma^2, \\ Q=-3l^2_{12}, \\ R=3\,.\,\sigma^2_{11}-\sigma^2, \end{array}\right\} \tag{44}$$

dove è:

$$\sigma^2=l^2_{12}+l^2_{13}+l^2_{14}+l^2_{23}+l^2_{24}+l^2_{34}. \tag{45}$$

Risolvendo l'equazione quadratica (42) si trova che la retta A_1A_2 incontra la sfera di cui si tratta nei punti P_{12} e Q_{12} di coordinata baricentrica:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{3\,.\,l^2_{12}+\sqrt{9\,.\,l^4_{12}-4\,.\,(3\,.\,\sigma^2_{22}-\sigma^2)\,.\,(3\,.\,\sigma^2_{11}-\sigma^2)}}{6\,.\,\sigma^2_{22}-2\,.\,\sigma^2}, \\[2ex] \dfrac{3\,.\,l^2_{12}-\sqrt{9\,.\,l^4_{12}-4\,.\,(3\,.\,\sigma^2_{22}-\sigma^2)\,.\,(3\,.\,\sigma^2_{11}-\sigma^2)}}{6\,.\,\sigma^2_{22}-2\,.\,\sigma^2}. \end{array}\right\} \tag{46}$$

La semplice osservazione di queste ci permette di scrivere immediatamente le coordinate baricentriche dei punti P_{23}, Q_{23}, P_{13}, Q_{13}, P_{14}, Q_{14}, P_{24}, Q_{24}, P_{34}, Q_{34} e noi tralasceremo di riportarle.

Calcoliamo piuttosto la potenza del vertice A_1 rispetto alla nostra sfera. La formula:

$$(A_1P_{12})=l_{12}\,.\,\frac{x'_{12}}{x'_{12}+1},$$

dedotta dalla (2) ci dà per:

$$x'_{12}=\frac{-Q+\sqrt{Q^2-4P\,.\,R}}{2\,.\,P},$$

$$(A_1P_{12})=l_{12}\,.\,\frac{-Q+\sqrt{Q^2-4PR}}{2P-Q+\sqrt{Q^2-4PR}}, \tag{47}$$

e per:

$$x'_{12}=\frac{-Q-\sqrt{Q^2-4PR}}{2P},$$

dà

$$(A_1Q_{12})=l_{12}\,.\,\frac{-Q-\sqrt{Q^2-4PR}}{2P-Q-\sqrt{Q^2-4PR}}. \tag{48}$$

Moltiplicando queste membro a membro si ha la potenza domandata espressa da:

$$l^2_{12} \cdot \frac{Q^2 - (Q^2 - 4PR)}{(2P - Q)^2 - (Q^2 - 4PR)} = \frac{l^2_{12} \,.\, R}{P + R - Q} .$$

Tenendo presenti i valori di P, Q, R si trova:

$$\frac{3 \,.\, \sigma^2_{11} - \sigma^2}{9} . \qquad (49)$$

E anche questa formula permette di scrivere le analoghe espressioni quando si cambi vertice.

Andiamo a calcolare $(P_{12}Q_{12})$. Le (47), (48) dànno facilmente:

$$(P_{12}Q_{12}) = \frac{\sqrt{9 \,.\, l^4_{12} - 4 \,.\, (3\sigma^2_{11} - \sigma^2) \,.\, (3\sigma^2_{22} - \sigma^2)}}{9 \,.\, l_{12}} . \qquad (50)$$

Analogamente si trova:

$$(P_{34}Q_{34}) = \frac{\sqrt{9 \,.\, l^4_{34} - 4 \,.\, (3\sigma^2_{33} - \sigma^2) \,.\, (3\sigma^2_{44} - \sigma^2)}}{9 \,.\, l_{34}} . \qquad (51)$$

Segue di qui che:

Per ogni coppia di spigoli opposti del tetraedro ortogonale $A_h A_k A_l A_m$ *l'espressione*

$$l^2_{hk} \,.\, l^2_{lm} \,.\, \{l^2_{hk} - 9 \,.\, (P_{hk}Q_{hk})^2\} \,.\, \{l^2_{lm} - 9 \,.\, (P_{lm}Q_{lm})^2\} \qquad (52)$$

è costante.

Seghiamo ora la nostra superficie sferica con uno dei piani delle facce, per esempio col piano $A_1A_2A_3$. L'equazione del cerchio sezione si ottiene facendo x_{14} eguale a zero nella (41). In seguito a questa sostituzione si trova:

$$\{(2\sigma^2_{33} - \sigma^2_3)\, x_{13} + (2\sigma^2_{22} - \sigma^2_2)\, x_{12} + (2\sigma^2_{11} - \sigma^2_1)\} \,.\, (x_{13} + x_{12} + 1) =$$
$$= 9 \,.\, \{l^2_{23} x_{12} x_{13} + l^2_{12} x_{12} + l^2_{13} x_{13}\}. \qquad (53)$$

In questa equazione possiamo, servendoci delle (28), fare sparire ogni traccia delle $l_{14} l_{24} l_{34}$; otteniamo così:

$$\{l^2_{13} + l^2_{23} - l^2_{12}\}\, x^2_{13} + \{l^2_{12} + l^2_{23} - l^2_{13}\}\, x^2_{12} -$$
$$- l^2_{23} x_{12} x_{13} - l^2_{13} x_{13} - l^2_{12} x_{12} + (l^2_{12} + l^2_{13} - l^2_{23}) = 0. \qquad (54)$$

Questo cerchio, come già sappiamo, passa per il *baricentro* del triangolo $A_1A_2A_3$; del resto basta osservare che la somma algebrica dei coefficienti della sua equazione è ***zero***, per convincersi di questo.

Ora l'equazione della mediana uscente da A_1 è

$$x_{12} = x_{13} ,$$

per cui, se nella (54) poniamo x_{12} al posto di x_{13}, l'equazione risultante:

$$l^2_{23} x^2_{12} - (l^2_{12} + l^2_{13})\, x_{12} + (l^2_{12} + l^2_{13} - l^2_{23}) = 0 \qquad (55)$$

metterà la soluzione $x_{12} = 1$. L'altra soluzione:

$$x_{12} = x_{13} = \frac{l^2_{12} + l^2_{13} - l^2_{23}}{l^2_{23}} \tag{56}$$

risponde all'ulteriore punto che la mediana per A_1 ha in comune nostro cerchio. Questo dunque passa, oltre che per il baricentro, he per *tre* altri punti facilmente determinabili [1] e giacenti sulle liane.

Se poi osserviamo che l'equazione (54) è anche soddisfatta da:

$$\left.\begin{aligned} x_{12} &= \frac{l^2_{13} + l^2_{12} - l^2_{23}}{l^2_{23} + l^2_{12} - l^2_{13}}, \\ x_{13} &= \frac{l^2_{13} + l^2_{12} - l^2_{23}}{l^2_{13} + l^2_{23} - l^2_{12}}, \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

sono le coordinate dell'ortocentro, potremo dire che il nostro hio passa per *cinque* punti e che la sfera che contiene i bariri delle facce di un tetraedro ortogonale contiene anche gli centri delle facce medesime.

'ossiamo facilmente trovare le coordinate dei punti ove il cerchio contrato dalle rette dei lati del triangolo $A_1A_2A_3$; facciamo le zioni:

$$\left.\begin{aligned} l^2_{12} + l^2_{13} - l^2_{23} &= D^2_{23}, \\ l^2_{23} + l^2_{13} - l^2_{12} &= D^2_{12}, \\ l^2_{23} + l^2_{12} - l^2_{13} &= D^2_{13}, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

quali potranno semplificarsi alcune delle formule precedenti. [2] ra dall'equazione (54), o meglio dalla (53), segue:

$$(D^2_{12} . x_{13} + D^2_{13} . x_{12} + D^2_{23})(x_{13} + x_{12} + 1) = \\ = 3 . \{l^2_{23} x_{12} . x_{13} + l^2_{13} x_{13} + l^2_{12} x_{12}\}. \tag{59}$$

er avere le coordinate dei punti $P_{12}Q_{12}$ si farà in questa $x_{13} = 0$ troverà che queste sono radici dell'equazione:

$$(D^2_{13} . x_{12} + D^2_{23}) . (x_{12} + 1) = 3 l^2_{12} . x_{12} . \tag{60}$$

er avere quelle di $P_{13}Q_{13}$ faremo invece $x_{12} = 0$ e perverremo [q]uazione:

$$(D^2_{12} x_{13} + D^2_{23}) . (x_{13} + 1) = 3 l^2_{13} x_{13} . \tag{61}$$

er avere poi quelle di P_{23} e Q_{23} bisognerà ricordare la relazione:

$$x_{12} . x_{23} = x_{13},$$

---

[1] La soluzione (56) si può interpretare geometricamente così: Pel punto K di *Lemoine* del lo si tiri la parallela ad A_2A_3 e si congiunga A_2 con l'intersezione giacente in A_1A_3 e l'intersezione giacente in A_1A_2. Per A_2 e A_3 si conducano le parallele a dette congiunlei punti ove queste parallele tagliano A_1A_3 e A_1A_2 rispettivamente si prendano i simrispetto ad A_3 e A_2 e si congiungano con A_2 e con A_3. Quest'ultime rette si tagliano ito (56).

[2] Si noti l'equazione del cerchio d'*Eulero*:

$$(D^2_{12} . x_{13} + D^2_{13} . x_{12} + D^2_{23}) . (x_{13} + x_{12} + 1) = 4 . \{l^2_{23} . x_{12} . x_{13} + l^2_{13} . x_{13} + l^2_{12} x_{12}\}.$$

dalla quale segue $x_{23} = \frac{x_{13}}{x_{12}}$; dividendo ambo i membri della (59) per x^2_{12} e facendo poi crescere x_{12} oltre ogni limite si troverà:

$$(D^2_{12} . x_{23} + D^2_{13}) . (x_{23} + 1) = 3l^2_{23} x_{23} , \tag{62}$$

e questa ci darà le coordinate richieste. Sono così altri sei punti — in tutto *undici* — per cui passa il cerchio di cui trattiamo.

E possiamo anche calcolare la potenza di un vertice del triangolo $A_1A_2A_3$ rispetto a questo cerchio.

Invero, secondo la formula (49), la potenza di A_1 rispetto alla sfera in discorso è:

$$\frac{3 . \sigma^2_{11} - \sigma^2}{9} .$$

Se ora teniamo conto delle (28) e a mezzo di queste eliminiamo l_{12}, l_{13}, l_{23} otteniamo come espressione della potenza di A_1 rispetto al nostro cerchio:

$$\frac{D^2_{23}}{3} . \tag{63}$$

E analogamente le potenze di A_2 e di A_3 rispetto al medesimo cerchio saranno:

$$\frac{D^2_{13}}{3} , \qquad \frac{D^2_{12}}{3} . \tag{64}$$

Conoscendo queste potenze, con una mia formula sarà facile conoscere il raggio del cerchio di cui ci occupiamo. La formula a cui alludiamo è: [1]

$$\frac{R_1}{R} . l_{12} . l_{13} . l_{23} = \{p_1^4 . l^2_{23} + p_2^4 . l^2_{13} + p_3^4 . l^2_{12} +$$
$$+ \Sigma (p_1^2 . p_2^2 + p_3^2 l^2_{12}) . (l^2_{12} - l^2_{13} - l^2_{23}) + l^2_{12} . l^2_{23} . l^2_{13}\}^{\frac{1}{2}} , \tag{65}$$

dove p_i^2 è la potenza del vertice A_i rispetto al cerchio considerato il cui raggio incognito è R_1, ed R è il raggio del cerchio circoscritto.

Applicando questa formula al caso nostro otterremo:

$$p_1^4 . l^2_{23} + p_2^4 . l^2_{13} + p_3^4 . l^2_{12} = \frac{D^4_{23} . l^2_{23} + D^4_{13} . l^2_{13} + D^4_{12} . l^2_{12}}{9} =$$
$$= \frac{4}{9} . l^2_{12} . l^2_{13} . l^2_{23} . \{\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \cos^2 A_3\} , \tag{66}$$

$$\Sigma . (p_1^2 p_2^2 + p_3^2 . l^2_{12}) . (l^2_{12} - l^2_{13} - l^2_{23}) =$$
$$= - \Sigma \left\{ \frac{4}{9} l^2_{12} l^2_{13} l^2_{23} \cos A_1 \cos A_2 + \frac{2}{3} . l_{13} . l_{23} . l^2_{12} \cos A_3 \right\} .$$
$$. \frac{2 l_{13} l_{23} \cos A_3}{3} = - \frac{8}{9} l^2_{12} l^2_{13} l^2_{23} \cos A_1 \cos A_2 \cos A_3 -$$
$$- \frac{4}{9} l^2_{12} l^2_{13} l^2_{23} \{\cos^2 A_1 + \cos^2 A_2 + \cos^2 A_3\} , \tag{67}$$

---

[1] Vedasi in proposito una mia nota nel *Supplemento al Periodico di Matematica* (fasc. IX, anno 1914). Sarebbe utile trovare della (55) la corrispondente nello spazio ordinario.

e quindi facendo le necessarie riduzioni e soppressioni:

$$R_1 = \frac{R}{3} \,.\, \sqrt{9 - 8 \,.\, \cos A_1 \,.\, \cos A_2 \,.\, \cos A_3}\,. \tag{68}$$

Se il triangolo è equilatero, è:

$$R_1 = \frac{2 \,.\, \sqrt{2} \,.\, R}{3}\,.$$

Riprendiamo ora l'equazione del cerchio d'*Eulero* e quella del nostro cerchio e cerchiamo l'equazione del loro asse radicale. Moltiplicando la (34) per 3, sottraendovi membro a membro la (59) moltiplicata per 4 e sopprimendo il fattor comune $x_{13} + x_{12} + 1$, troviamo come equazione di questo asse:

$$D^2_{12} \,.\, x_{13} + D^2_{13} \,.\, x_{12} + D^2_{23} = 0. \tag{69}$$

Per trovare in quali punti taglia le rette del triangolo $A_1A_2A_3$, facciamo una volta $x_{13} = 0$ e un'altra volta $x_{12} = 0$; troveremo:

$$x_{12} = -\frac{D^2_{23}}{D^2_{13}}, \qquad x_{13} = -\frac{D^2_{23}}{D^2_{12}}, \tag{70}$$

e tanto ci basta per concludere che quest'asse radicale contiene i coniugati armonici dei piedi delle altezze rispetto ai due vertici del triangolo giacenti sulla retta della corrispondente base.

E se teniamo presente l'equazione di uno di due cerchi, si vedrà subito che le coordinate dei *punti base* del fascio da essi determinato sono le soluzioni del sistema:

$$\left.\begin{aligned} D^2_{12} \,.\, x_{13} + D^2_{13} \,.\, x_{12} + D^2_{23} = 0, \\ l^2_{23} \,.\, x_{12} \,.\, x_{13} + l^2_{12} x_{12} + l^2_{13} x_{12} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Ricavando x_{13} dall'una e dall'altra ed eguagliando le due espresioni si perviene all'equazione quadratica:

$$x^2_{12} \,.\, D^2_{13} \,.\, l^2_{23} + x_{12} \,.\, \{D^2_{13} l^2_{13} + D^2_{23} l^2_{23} - D^2_{12} \,.\, l^2_{12}\} + D^2_{23} l^2_{13} = 0\,; \tag{72}$$

equazione che si può successivamente scrivere:

$$\begin{aligned} & x^2_{12} \,.\, D^2_{13} \,.\, l^2_{23} + \\ & + 2 l_{12} \,.\, l_{13} \,.\, l_{23} \,.\, \{l_{13} \cos A_2 + l_{23} \cos A_1 - l_{12} \cos A_3\} \,.\, x_{12} + D^2_{23} \,.\, l^2_{13} = 0\,; \end{aligned} \tag{73}$$

e per una nota formula che permette di semplificare il coefficiente di x_{12}:

$$x^2_{12} \,.\, D^2_{13} \,.\, l^2_{23} + x_{12} \,.\, D^2_{23} \,.\, D^2_{13} + D^2_{23} \,.\, l^2_{13} = 0. \tag{74}$$

Risoluta questa, si hanno facilmente i valori di x_{13} e x_{23}.

Così conosciamo *tredici* punti del nostro cerchio. E altri *tre* si potranno conoscere associando alla (54) la

$$\frac{x_{13}}{x_{12}} = x_{23} = \frac{D^2_{12}}{D^2_{13}}\,.$$

Ponendo in luogo di x_{13} l'espressione $x_{12} \cdot \frac{D^2_{13}}{D^2_{12}}$, si trova l'equazione di secondo grado:

$$x^2_{12} \{D^2_{13} + D^2_{12} - l^2_{13}\} \cdot D^2_{13} - \\ - x_{12} \cdot \{l^2_{12} \cdot D^2_{12} + l^2_{13} \cdot D^2_{13}\} + D^2_{23} \cdot D^2_{12} = 0, \tag{75}$$

ovvero:

$$x^2_{12} \cdot l^2_{23} \cdot D^2_{13} - x_{12} \cdot \{l^2_{12} D^2_{12} + l^2_{13} \cdot D^2_{13}\} + D^2_{23} \cdot D^2_{12} = 0, \tag{76}$$

che dà le coordinate baricentriche del punto d'incontro del nostro cerchio con la retta contenente l'altezza uscente da A_1. Conosciamo così *sedici* punti del cerchio di cui ci occupiamo, perchè una delle soluzioni della (76) corrisponde all'ortocentro, l'altra, come facilmente si trova, è la soluzione:

$$x_{12} = \frac{D^2_{12}}{l^2_{23}}. \tag{77}$$

Cosicchè, ritornando alla sfera presa a studiare in questo paragrafo, essa contiene — oltre i dodici punti che segna sulle rette degli spigoli — i baricentri delle facce, in numero di quattro, gli ortocentri delle medesime, in numero di quattro, gli ulteriori punti d'incontro con le mediane delle facce, in numero di dodici, gli ulteriori punti d'incontro con le altezze delle facce, in numero di dodici, i punti base dei fasci determinati in ogni singola faccia dai due cerchi (34) e (54) e analoghi, in numero di otto; in tutto 52 punti. Il cortese lettore potrà ritrovare il resultato che essa contiene anche i punti che dividono nel rapporto di 2 a 1 i segmenti che congiungono i vertici all'ortocentro H; e sono quattro.

La sfera di cui ci siamo occupati in questo paragrafo è nota sotto il nome di *seconda sfera dei dodici punti.* Le equazioni delle due sfere sono:

1ª sfera
$$\begin{cases} \{(l^2_{34} + l^2_{24} - l^2_{23}) \cdot x_{14} + (l^2_{23} + l^2_{31} - l^2_{24}) \cdot x_{13} + (l^2_{23} + l^2_{24} - l^2_{34}) x_{12} + \\ \quad + (l^2_{13} + l^2_{14} - l^2_{34})\} \cdot (x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1) = \\ \quad = 4 \cdot \{l^2_{34} x_{13} x_{14} + l^2_{24} x_{12} x_{14} + l^2_{23} x_{12} x_{13} + l^2_{14} x_{14} + l^2_{13} x_{13} + l^2_{12} x_{12}\}; \end{cases}$$

2ª sfera
$$\begin{cases} \{(l^2_{34} + l^2_{24} - l^2_{23}) \cdot x_{14} + (l^2_{23} + l^2_{34} - l^2_{24}) \cdot x_{13} + (l^2_{23} + l^2_{24} - l^2_{34}) x_{12} + \\ \quad + (l^2_{13} + l^2_{14} - l^2_{34})\} \cdot (x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1) = \\ \quad = 3 \cdot \{l^2_{34} x_{13} x_{14} + l^2_{24} x_{13} x_{14} + l^2_{23} x_{12} x_{13} + l^2_{14} x_{14} + l^2_{13} x_{13} + l^2_{12} x_{12}\}. \end{cases}$$

Esse hanno per piano radicale:

$$(l^2_{34} + l^2_{24} - l^2_{23}) \cdot x_{14} + (l^2_{23} + l^2_{34} - l^2_{24}) \cdot x_{13} + \\ + (l^2_{23} + l^2_{24} - l^2_{34}) \cdot x_{12} + (l^2_{13} + l^2_{14} - l^2_{34}) = 0, \tag{78}$$

che contiene l'asse radicale (69) e i tre analoghi.

E. Piccioli.

SOPRA ALCUNE PROPRIETÀ

relative alla trasformazione dei gruppi di sostituzioni

1. Sia H un sottogruppo del gruppo di sostituzione G. *Chiameremo* *vato di* H *rispetto a* G, *e indicheremo con* H′, *il sottogruppo di* H : potrà in casi particolari coincidere collo stesso H) *formato dalle* *ituzioni comuni simultaneamente ad* H *ed ai gruppi ad esso coniu-* *in* G, cioè ai gruppi distinti:

$$H_1 = H, \quad H_2, \quad H_3, \ldots \quad H_s = g_s^{-1} H g_s, \ldots, \quad H_j$$

quali H può essere trasformato dalle sostituzioni di G. È mani-o, da questa definizione, che H′ è *invariante* rispetto a G, cioè è sformato in se stesso da ogni sostituzione di G; cosicchè il suo ivato rispetto a G coinciderebbe con H′ stesso. E anche chiaro H′ concide con H soltanto nel caso particolare in cui H sia in-iante rispetto a G.

2. *Il gruppo* H′ *così definito gode anche della proprietà di essere il* *ssimo gruppo contenuto in* H, *che sia invariante rispetto a* G. Questo potrebbe anche assumere, volendo, come definizione di H [1]. Sia atti (supposto che H non sia esso stesso invariante rispetto a G, qual caso il teorema sarebbe già dimostrato) H″ il sottogruppo ssimo contenuto in H ed invariante rispetto a G. Consideriamo qualunque H_s dei gruppi (1) coniugati ad H in G; poichè g_s tra-rma H in H_s, e d'altra parte deve trasformare H″ in se stesso, hiaro che: $g_s^{-1} H'' g_s = H''$ deve far parte di H_s.

Il gruppo H″ è, dunque, comune a tutti i gruppi (1); onde esso à contenuto in H′ per la definizione stessa di H′. D'altra parte non può essere un sottogruppo proprio di H′, che è pure inva-nte in G, poichè, altrimenti, non sarebbe un sottogruppo massimo H invariante in G, come si è supposto. Si ha dunque:

$$H'' = H'. \qquad \text{c. d. d.}$$

3. Come facilmente appare da questa proprietà di H′, *il gruppo* H′ *uò anche definire come l'insieme di tutte quelle sostituzioni di* H *che una qualsiasi sostituzione di* G *sono trasformate in sostituzioni della* *sa* H.

---

[1] Poichè è facile vedere che, se H non è esso stesso invariante rispetto a G, esiste in H nico sottogruppo *massimo* (cioè non contenuto in altro consimile) che sia invariante rispetto . Infatti, se esistessero in H due sottogruppi U e V invarianti rispetto a G e massimi di sto genere, anche il gruppo [U.V] generato dalla loro combinazione, sarebbe invariante ri-tto a G, il che escluderebbe che U e V fossero massimi.

È chiaro, in primo luogo, che tutte quelle sostituzioni di H che, da qualsiasi sostituzione di G, sono trasformate in sostituzioni dello stesso H costituiscono un gruppo H″. Dico che H″ è invariante rispetto a G. Ammesso, infatti, se è possibile, che così non fosse, siano H''_1, H''_2, $H''_3 \dots H''_\lambda$ i gruppi distinti (tutti contenuti in H, per la proprietà stessa di H″) nei quali H″ può esser trasformato dalle sostituzioni di G; le sostituzioni di G potranno trasformare questi gruppi soltanto fra loro. Se infatti, esistesse in G una sostituzione γ trasformante, p. es., H''_2 in un gruppo $H''_{\lambda+1}$ diverso dai suddetti, detta g una sostituzione di G che trasforma H″ in H''_2 è chiaro che $g\gamma$ trasformerebbe H″ in $H''_{\lambda+1}$, contro il supposto che H''_1, $H''_2 \dots H''_\lambda$ siano i soli gruppi nei quali H″ può esser trasformato dalle sostituzioni di G.

Si vede, dunque, p. es., che H''_2 sarà trasformato in un gruppo della detta serie, cioè in un gruppo contenuto in H. Esisterebbero dunque, oltre le sostituzioni di H″, altre sostituzioni (contenute in H''_2) di H le quali, da ogni sostituzione di G, sarebbero trasformate in sostituzioni di H, contro quanto già si era stabilito.

Il gruppo H″ è dunque invariante rispetto a G e, per conseguenza, è contenuto in H′, che è, per supposto, il sottogruppo massimo di H che sia invariante rispetto a G. D'altra parte il gruppo H′ dovrebbe esser contenuto in H″, perchè essendo esso invariante rispetto a G, le sue sostituzioni devono esser trasformate da ogni sostituzione di G in sostituzioni (di H′ e quindi) di H. Concludiamo, pertanto, che H″ = H′. c. d. d.

4. Detti rispettivamente h ed h' gli ordini di H e del suo derivato H′, detto inoltre i l'indice di H rispetto al gruppo G, si ha la relazione: [1]

$$h = h'(i-1)! \tag{2}$$

5. Consideriamo ora anche il sottogruppo K, di G, formato da tutte quelle sostituzioni di G che trasformano in se stesso il gruppo H. Il suo indice rispetto a G è precisamente [2] lo stesso numero j già adottato all'Art. 1 per rappresentare il numero dei sottogruppi di G coniugati con H e distinti da H. È chiaro [3] che j è un divisore di i e concide con 1 soltanto nel caso che H sia invariante in G. Sarà, dunque, in ogni caso, $j \gtreqless i$.

Detto K′ il derivato di K rispetto a G e detti k e k' rispettivamente gli ordini di K e K′, si avrà analogamente alla (2):

$$k \gtreqless k'(j-1)!$$

---

[1] Cfr. CAPELLI, *Ist. di Analisi Algebrica*, 4ª ed. (Napoli, 1909), cap. III, § 13.

[2] Idem, *op. cit.*

[3] Infatti, poichè K deve contenere H, l'ordine di K è un multiplo di quello di H; quindi l'indice di K è un divisore di quello di H.

la quale, poichè $h \gtreqless k$, segue per la (2)

$$h \gtreqless k'(j-1)!$$

6. Se il gruppo G è semplice, si ha: $k'=1$ (e così pure $h'=1$) ı (3) ci dà:

$$h \gtreqless (j-1)!$$

Si ha dunque il teorema (più utile di quello noto [1]): *l'ordine di lunque sottogruppo* H *di un gruppo semplice* G *non può superare* $(j-1)!$, *ndo* j *il numero dei sottogruppi di* G *coniugati con* H, *ovvero anche, è la stessa cosa, l'indice, rispetto a* G, *del sottogruppo di* G *formato quelle sostituzioni di* G *che trasformano* H *in se stesso.*

7. Se prendiamo per G il gruppo alternato fra m lettere, H potrà ere uno qualunque dei gruppi di sostituzioni di classe pari e j non rà, evidentemente, superare il numero N (H) dei gruppi simili H; onde dalla (4) si ha, a maggior ragione:

$$h \gtreqless [N(H)-1]!$$

Dunque: *l'ordine di un gruppo qualunque di sostituzioni tutte di sse pari, non può superare il fattoriale del numero dei gruppi simili esso e da esso differenti.*

8. Corollario I. — *Per qualunque gruppo fra* m *lettere* (m > 4), *non sia l'alternato, esiste sempre almeno un altro gruppo simile ad*).

(Se così non fosse, non sarebbe invariante nel simmetrico, ed il togruppo *pari* lo sarebbe nell'alternato, che è semplice).

9. Corollario II. — *Per qualunque gruppo fra* m *lettere, composto sole sostituzioni di classe pari, che non sia il gruppo alternato, esino almeno altri due gruppi che gli sono simili.*

Fa eccezione il caso di $m=4$. Infatti, per 4 lettere si ha il gruppo ırmonico che non ha alcun gruppo a sè simile.

10. Osserviamo, per ultimo, che il gruppo K' considerato all'Art. 5, re a godere delle tre proprietà che già gli spettano come derito di K (già esposte negli Art. 1, 2 e 3 rispettivamente) *gode anche la quarta proprietà di esser l'insieme di tutte quelle sostituzioni di* G *trasformano in se stesso così il gruppo* H *come tutti i suoi coniui in* G.

[1] Cfr. Capelli, *Ist. di Analisi Algebrica*, 4ª ed. (Napoli, 1909), cap. III, § 13.

A. Palomby.

UNA IDENTITÀ CONDIZIONATA

(Risposta alla questione n. 2553, pag. 71, vol. X dell'"Inter. des Math.")

La questione proposta dal sig. A. Dombrovski di Pietrogrado è la seguente:

Se $a^2 = b^2 + c^2$, *dove* a, b, c *sono i lati di un triangolo rettangolo, si ha la identità*

$$a^n + b^n + c^n = a^2b^2(a^{n-4}+b^{n-4}) + a^2b^2(a^{n-4}+c^{n-4}) - b^2c^2(b^{n-4}+c^{n-4}), \quad \text{(I)}$$

da cui per $n = 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ *resulta*

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = ab(a+b) + ac(a+c) - bc(b+c),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a^6 + b^6 + c^6 = a^2b^2(x^2+b^2) + a^2c^2(a^2+c^2) - b^2c^2(c^2+c^2) \qquad \text{(I)}'$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Queste formole sono note?

Rispondo subito che la identità (I)′ — nelle identiche condizioni della questione proposta — era già nota: si trova enunciata nel *Periodico di Matematica*, vol. III, pag. 145, anno 1888 — autore il prof. Besso — ciò che fa presumere questo A. sia stato in possesso della (I), non solo, ma di altri enunciati (v. loc. cit.) parrebbe possedesse altre identità condizionate del genere della (I). Pertanto ecco una identità condizionata che comprende come caso particolarissimo la (I):

Se

$$a_1^m = \sum_2^k a_i^m,$$

è pure

$$(i) \quad \sum_1^k a_i^n - \sum_2^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m}) + 2\sum_2^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m}) = 0 \quad (i \neq j).$$

Per verificare la (1) osserviamo subito che

$$\sum_2^k a_i^m \sum_2^k a_j^{n-m} = \sum_2^k a_i^n + \sum_2^k a_i^m a_j^{n-m} + \sum_2^k a_i^{n-m} a_j^m = \sum_2^k a_i^n + \sum_2^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m})$$

e qui nella seconda sommatoria dell'ultimo membro $i \neq j$.

Ciò premesso, la presunta identità da verificare si può scrivere uccessivamente

$$a_i^n - \sum_1^k a_i^{n-m} a_j^m - \sum_1^k a_i^m a_j^{n-m} + 2\sum_1^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_i^{n-2m}) = 0, \quad (i \mp j)$$

$$) \quad \sum_1^k a_i^n - a_i^{n-m} \sum_2^k a_j^m - a_i^m \sum_2^k a_i^{n-m} - \sum_1^k a_i^m a_j^{m2} (a_i^{n-2m} + a_j^{m-2m}) +$$
$$+ 2\sum_2^k a_i^m a_j^m (\alpha_i^{n-2m} a_j^{n-2m}) = 0, \quad (i \mp j)$$

a è pure

$$- a_i^m \sum_2^k a^{n-m} = - \sum_2^k a_i^m \sum_2^k a_j^{n-m} = - \sum_2^k a_i^n - \sum_2 a_i^m a_j^{n-m} - \sum_2^k a_i^{n-m} a_j^m$$

d anche

$$- a_1^{n-m} \sum_2^k a_i^m = - a_1^n \qquad (4)$$

sostituendo nella (k) gli elementi secondo la (4), si ha

$$\sum_1^k a_i^n - a_1^n - \sum_2^k a_i^n - \sum_2^k a_i^m a_j^{n-m} - \sum_2^k a_i^{n-m} a_j^m +$$
$$+ \sum_2^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m}) = 0,$$

ssia

$$\sum_1^k a_i^n - \sum_1^k a_i^n - \sum_2^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m}) +$$
$$+ \sum_1^k a_i^m a_j^m (a_i^{n-2m} + a_j^{n-2m}) = 0,$$

la identità è verificata.

Dalla (i) discende l'altra

$$a_1^n - \sum_2^k a_i^n - \sum_1^k a_i^n a_j^m (a^{n-2m} + a_j^{n-2m}) + 2\sum_2^k a_i^m \sum_2^k a_j^{n-m} = 0 .$$

La cosa si vede facilmente scrivendo nel primo membro della (i) a espressione nulla

$$2\sum_2^k a_i^n - 2\sum_2^k a_i^n ,$$

tenendo presente che si ha

$$2\sum_2^k a_i^n + 2\sum_2^k a_i^m a_j^m (a^{n-2m} + a_j^{n-2m}) = 2\sum_2^k a_i^m \sum_2^k a^{n-m}.$$

Facendo $m = 2$ e $k = 3$ nella (i) si ricava la identità del signor Dombrovski, ed ecco qualche altra applicazione:

Se i numeri positivi a, b, c, d *sono legati dalla relazione*

$$\Sigma a^6 - \Sigma a^2b^2(a^2+b^2) + 2d^2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) - 6a^2b^2c^2 = 0,$$

essi misurano rispettivamente gli spigoli e la diagonale di un parallepipedo rettangolo.

Se i numeri positivi a, b, c *sono legati dalla relazione*

$$\Sigma a^9 - \Sigma a^3b^3(a^3+b^3) + 2a^3b^3c^3 = 0$$

esiste un triangolo acutangolo coi lati misurati da quei tre numeri.

I termini della serie del Fibonacci verificano le uguaglianze

$$a_n^3 + a^3_{n-1} + a^3_{n-2} = a_{n+1}\, a_n\, a_{n-1} - a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3} + a_n a_{n-2}(a_n^2 + a^2_{n-2}),$$
$$a_n^4 + a^4_{n-1} + a^4_{n-2} = a_n\, a_{n-1}\, a_{2n-1} - a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{2n-3} + a_n a_{n-2}(a_n^2 + a^2_{n-2}).$$

G. Candido.

PICCOLE NOTE

Sull'uguaglianza $a^b = b^a$ con a e b interi e positivi.

Alle pagg. 12, 115 e 117 dell'annata IV di questo Periodico, ci son tre Note dei Professori Besso, Dainelli e Carlini, intitolate come, o press'a poco come, la presente: la quale giunge al risultato di quelle, per via semplice.

1. *Se* m *è uno dei numeri 3, 4, 5, . . . ,*

$$m > \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Questa relazione infatti è valida per $m=3$; perchè $3^4 > 4^3$, e quindi

$$3 > \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad \text{cioè di} \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^3.$$

Da essa poi, moltiplicando per $1+\frac{1}{m}$, si deduce che

$$m+1 > \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1},$$

e, a più forte ragione,

$$m+1 > \left(1+\frac{1}{m+1}\right)^{m+1}.$$

E così la proposizione è dimostrata per induzione.

2. *Se* m *è uno dei numeri 3, 4, 5, . . . ,*

$$\sqrt[m]{m} > \sqrt[m+1]{(m+1)}.$$

Segue infatti dalla relazione precedente che

$$\sqrt[m]{m} > 1 + \frac{1}{m};$$

, moltiplicando per m, che

$$m\sqrt[m]{m} > m + 1,$$

iò che è lo stesso,

$$(\sqrt[m]{m})^{m+1}, > m + 1;$$

che si trae la proposizione, prendendo le radici $(m+1)^{me}$ dei due membri.

Ne deduco che, per es., $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$, cioè di $\sqrt{2}$. E che, col crescere dell'in-
m da 3 in su, $\sqrt[m]{m}$ diminuisce.

3. Scrivo dunque che

$$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} > \dots.$$

. E possiamo ora concludere.

Supponendo che a e b sieno interi maggiori di 1, e $a < b$:

) se $a = 2$ e $b = 3$, $a^b < b^a$; e se $a = 2$ e $b = 4$, $a^b = b^a$.

) in ogni altro caso, $a^b > b^a$. Infatti: o $a = 2$ e b è uno dei numeri 5, 6, 7, ...;
ora $2^b > b^2$, perchè $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}, > \sqrt[b]{b}$: o a e b sono inter i maggiori di 2;
ora $a^b > b^a$, perchè $\sqrt[a]{a} > \sqrt[b]{b}$.

A. Tanturri.

BIBLIOGRAFIA

ele Leoncini. — *Aritmetica ed algebra* ad uso del primo biennio
ell'Istituto tecnico. Volume primo (per la prima classe). Giulio
annini, Brescia.

:co finalmente un libro che si può usare davvero nell'insegnamento; si può
e paragrafo per paragrafo, senza tagli, e senza che ne rimangano soffocati
ani scolari della prima classe degli Istituti tecnici; i quali ne trarranno
dubbio reale, intimo e durevole profitto.

libro è, manifestamente, nato nella scuola, provato a tutte le esigenze
ratica, nutrito di esperienza didattica, consapevole delle manchevolezze
i e delle debolezze naturali della scolaresca, conscio del poi, e cioè delle
tà dei successivi sviluppi e del fine al quale deve tendere questo primo
amento di Aritmetica ed Algebra.

oncetti sono sempre i più naturali e i più *veri*; i numeri dei quali si parla
no proprio i numeri che si sono conosciuti fin dalle scuole elementari e
incontrano nelle applicazioni; non sono simboli irriconoscibili, o almeno

soltanto riconoscibili per lontani riflessi. L'A. infatti sembra aver concepito l'insegnamento dell'Aritmetica nel primo corso dell'Istituto tecnico nel solo modo nel quale esso può essere didatticamente opportuno e trovarsi al suo posto, cioè come un rafforzamento, un consolidamento logico delle nozioni già acquistate, molto consigliabile prima di procedere alle generalizzazioni e alla disinvolta speditezza dell'Algebra.

L'A., nella prefazione, si limita a rilevare la impossibilità pratica, dato il programma da svolgere, di dedicare all'Aritmetica molto tempo: e la ragione è più che sufficiente, essendo anzitutto necessario, nel primo corso, imparare l'Algebra. Ma io credo di poter indovinare che, se il principio dell'economia del tempo non si fosse imposto, si sarebbe imposta l'opportunità didattica; giacchè evidentemente l'A. è di quegli insegnanti che misurano il valore di ciò che si insegna dal durevole beneficio che ne viene agli scolari.

Il principio della massima economia del tempo (che poi, notiamo bene, è risparmio di lavoro e di energia, la quale può essere utilmente spesa) non potrebbe essere applicato con maggiore acume. L'A. non lascia sfuggire occasione per dir quando più si presenta opportuno quello che dovrebbe poi dire, di proposito, altra volta. Così le proprietà delle disuguaglianze rispetto alla somma, alla differenza e al prodotto vengono subito notate; si è parlato appena di potenza, di un numero frazionario che già si osserva come ne varia il valore col variare della base o dell'esponente; appena definito il prodotto si nota subito la condizione necessaria e sufficiente affinchè esso si annulli; parlando del quoziente incompleto, si hanno immediatamente i teoremi sui quali si fonda la ricerca del massimo divisore comune, per il quale occorrerà poi dir poche parole. Ma bisogna scorrere il libro per vedere come tante grandi e piccole difficoltà che si incontrano nell'insegnamento vengano prevenute ed eliminate, e per rimanere qualche volta sorpresi che si possa in così poco tempo imparare tante belle cose.

Tutto ciò si deve al sano criterio didattico che ha ispirato l'A. Lo studio della Matematica non deve apparire arduo; deve anzi infondere nello studioso una serena fiducia nelle proprie forze, deve essere un riposo della mente nell'esame di una verità sicura e piana. Non è facile raggiungere in modo assoluto lo scopo, ma certo il libro è su questa via.

Ho detto che l'A. parte dal concetto naturale di numero; con alcune proposizioni afferma quelle proprietà che gli occorrono nel seguito, e mi pare che siano proprio tutte. Ma una volta fatto questo, egli non è indulgente mai in fatto di logica deduttiva; i ragionamenti filano, e non mancano anelli nella catena. In tutte le dimostrazioni relative alla moltiplicazione sono messi bene in evidenza i casi del moltiplicatore 1 e 0, e, per la potenza, dell'esponente 1 e 0. I teoremi sono molti, ma non apparisce che siano troppi.

Il partire dal concetto naturale e intuitivo di numero e fondare su questo delle dimostrazioni rigorose è, naturalmente, meno agevole per i numeri frazionari. Anche qui si stabiliscono pochi principi, che sono sufficienti per il seguito; l'A. ammette il concetto di uguaglianza e di disuguaglianza, lo chiarisce con alcune parole che forse potrebbero essere più opportune, ma non penetra nel concetto. Per farlo avrebbe probabilmente avuto bisogno di partire dall'idea di grandezza, ed ha preferito lasciare all'insegnante la cura di giustificare con opportuni richiami i principi affermati, dei quali soli ha bisogno.

Chi adopererà questo libro, è necessario che accetti il criterio dell'A. e non si sforzi di porre su altre basi la teoria delle frazioni; se tenterà di fare questo perderà i benefici del metodo seguito nel libro. Però credo che l'A. stesso potrà,

una seconda edizione, gettare maggior luce sul concetto di uguaglianza e di
nma dei numeri frazionari.

Con semplicità efficace, che permette di non tralasciare, come si fa di solito, sti capitoli, l'A. tratta del sistema di numerazione decimale e delle regole tiche per le operazioni con numeri interi e decimali. Osservo però che, mentre solito la nomenclatura è la più corrispondente all'uso, viene chiamato *numero imale* anche il simbolo che rappresenta un numero *intero* nel sistema di nurazione a base dieci. Mi pare che questo possa far nascere confusione. Per la arezza non chiamerei mai numeri i simboli, e per una distinzione consacrata l'uso chiamerei numeri decimali soltanto quei numeri *frazionari* le cui unità o tutte decimali; numeri che si possono sempre rappresentare con simboli la solita forma, la quale viene così ad essere normale per essi.

Giacchè parlo di nomenclatura, osservo come l'A. chiami espressione *intera* lla nella quale " non è indicata alcuna divisione con il *divisore letterale* „. È ıque una espressione intera anche

$$\frac{\dfrac{a+b}{3}+c}{5}.$$

Non mi pare naturale intendere così, almeno in un primo studio, e direi *intera petto alle lettere*. È vero che l'espressione precedente si può scrivere anche

$$\left[(a+b)\frac{1}{3}+c\right]\frac{1}{5}$$

llora è veramente intera; ma questa trasformazione richiede l'uso di regole alcolo relative alle frazioni. Noto poi come dimostrando che " qualunque espresne razionale intera può trasformarsi in un polinomio „ l'A. non consideri il o di espressioni del tipo della prima delle due scritte sopra, che pure egli te fra le intere.

Così, vengono chiamate *equazioni intere* anche quelle ben fornite di denomiori, letterali o no, purchè i denominatori stessi non contengano l'incognita. sono intere, perchè si insegna, come tutti dicono, a *ridurle a forma intera?* do che sarebbe più opportuno dire, nei vari casi nei quali può occorrere una inzione, *equazioni intere rispetto all'incognita*.

Queste osservazioni dimostrano... come siano poche le osservazioni da fare. concetto importante è quello dei *valori eccezionali* per le lettere che comono in una espressione algebrica; essi sono esclusi dal *campo* della espressione ebrica. " La totalità dei valori che si possono attribuire alle lettere che entrano una data espressione si dirà il *campo* in cui quella espressione ha significato „. equivalenza di due espressioni algebriche è limitata ai valori appartenenti al ıpo nel quale ambedue le espressioni hanno significato.

Osservo però che meglio che di *valori eccezionali* per le lettere di una espresne algebrica si parlerebbe di *sistemi eccezionali di valori*. Infatti la distinzione fatta *lettera per lettera*, e uno stesso valore può essere eccezionale se attrito a una lettera e non se attribuito a un'altra; metteremo o no tale valore nel ıpo della espressione? Ma dico di più, anche lettera per lettera non si può lare sempre di valori eccezionali; così nella espressione

$$\frac{-2+a^2bc}{a+b}$$

portata come esempio dell'A., non solo *nessun valore* si può escludere dal campo dell'espressione, perchè potremo attribuirlo almeno alla lettera c, ma nessun valore si può escludere neppure per la lettera a e per la lettera b considerate isolatamente; bensì bisogna escludere tutti quei sistemi di valori delle lettere a, b, c per i quali la somma $a+b$ si annulla.

Chiamerei perciò *sistemi eccezionali di valori* quelli per i quali l'espressione non ha significato, e *campo dell'espressione* l'insieme dei sistemi di valori che si possono attribuire alle lettere. Si tratta di una lieve modificazione, necessaria in una edizione prossima; ma in ogni modo non dubito che lo scolaro, anche coll'attuale dizione, comprenderà bene come stanno le cose.

È un merito grande questo di mettere in evidenza i limiti dell'equivalenza di due espressioni. Ne segue una insolita e pregevole precisione anche nei principi sull'equivalenza delle equazioni. Il lettore non si meraviglierà di trovare il teorema: „ se due equazioni hanno i membri rispettivamente equivalenti esse sono, in generale, equivalenti „; la riserva è più che giusta, come viene dimostrato con buoni esempi. Analoghe e documentate riserve si fanno per gli altri principi.

I concetti di *equazione più generale* di un'altra, e poi di sistema più generale di un altro e di equazione *conseguenza* di più altre, sono molto bene usati. Non ho mai trovato un libro nel quale siano dati con tanta sicurezza i mezzi per giudicare della equivalenza o no di due equazioni o di due sistemi.

Non ho detto nulla del capitolo sulla divisibilità dei polinomi. A fondamento di questo è posto il *principio di identità* dei polinomi; esso viene rigorosamente dimostrato in una apposita nota, e permette di dare alla identità

$$A = B \, . \, Q + R$$

un significato non formale, ma reale. Il quoziente Q e il resto R non sono due polinomi tali che sviluppando l'espressione $B \, . \, Q + R$ colla regola di calcolo sui polinomi si abbia il dividendo A; ma sono i due soli polinomi i cui valori, per ogni valore delle lettere, soddisfano, insieme ai valori di A e B, all'uguaglianza soprascritta. Anche qui, considerando la questione sotto il suo aspetto più naturale si evitano delle difficoltà e si acquista una più larga nozione.

L'A. aggiunge al solito teorema sulla condizione di divisibilità per $x - a$, nel quale espone anche la regola di Ruffini per la formazione del quoziente, un altro teorema sulla divisibilità per $x^m - a$, che è molto grazioso e credo originale. Se ne può facilmente dedurre una regola generale per decidere della divisibilità per un binomio qualunque.

In conclusione, questo breve volumetto è pieno di cose; non vi mancano neppure buoni e numerosi esercizi. Auguro che somigli a questo, nei pregi, il volume che l'A. sta preparando per il secondo corso; e, per il beneficio dei nostri scolari, auguro altresì che il libro, ispirato ai più sani criteri didattici, abbia una larga diffusione.

P. Benedetti.

Carlo Leoni. — *La Matematica nel suo insegnamento primario e secondario.* Casa editrice Vallardi, 1915. Pag. 256. — L. 2,50.

Non sono molti in Italia gl'Insegnanti delle Scuole medie che, dotati di buona cultura, sappiano resistere alla tentazione di far qualche breve incursione negli sconfinati domini della Matematica superiore, e preferiscano invece dedicare le poche ore di libertà allo studio di questioni, apparentemente più umili, ma di più ivo e diretto interesse per l'insegnamento nelle Scuole secondarie dei varii radi.

Tra questi pochi, si è rivelato uno dei più benemeriti il Prof. Leoni dal Liceo i Chiavari e lo dimostra esaurientemente il suo bel lavoro che, com'è noto, otenne il premio Ministeriale conferitogli da una Commissione dell'Accademia dei incei composta dei Prof.[ri] Masci, Pincherle, Ragnisco e Zuccante.

Il Prof. Leoni nella sua operetta in cui sono raccolti i frutti di acute osserazioni e di lunghe e vive esperienze fatte nella Scuola, si dimostra al corrente elle più delicate e dibattute questioni didattiche concernenti l'insegnamento ella Matematica, ed oltre a ciò, dotato di larga e soda coltura filosofica.

Avendo presentato il suo lavoro ad un concorso di carattere prevalentemente edagogico, era naturale che il Ch. Autore si trovasse costretto a tirare in campo ualcuna delle questioni di questa Scienza, e a dire pure due parole delle sue ricette „ come, ad esempio, quella dell' " interesse Herbartiano „; ma lo fa con dovuta discrezione e senza troppo insistere sopra argomenti non alla portata ella maggior parte dei lettori cui è indirizzato il libro.

Se l'Autore non indugia in variazioni sulle sentenze della Pedagogia ufficiale, iò non vuol dire che il libro manchi di carattere pedagogico: esso, all'opposto, quanto mai pedagogico; ma di una pedagogia alla buona ed accessibile a tutti ome quella che scaturisce spontanea da una mente chiara ed acuta e da un temeramento equilibrato a cui si accoppia una felice intuizione psicologica dell'animo i discenti.

Per l'esposizione limpida ed elegante, e per la ricca messe di geniali ed acute sservazioni, il libro del Prof. Leoni si legge e rilegge con vivo piacere anche chi è incanutito nell'esercizio della scuola: per tutti i giovani poi che incoinciano la loro carriera d'insegnanti sarà una guida autorevole e simpatica che accompagnerà nei primi passi fornendo loro, senz'ombra di pedanteria, preziosi ggerimenti sopra ogni questione d'immediata importanza per la scuola.

Il libro è destinato ai docenti di Matematica, ma contiene pure non poche gine che tutti indistintamente gl'insegnanti possono consultare con profitto, e e si riferiscono all'arte tanto delicata del mantenere la disciplina, al modo di errogare e giudicare gli alunni, agli esami scritti ed orali e così via.

Tra i varii capitoli di carattere matematico segnaliamo i due ultimi intorno a trattazione elementare dei fondamenti della Geometria e dell'Aritmetica, in i con esemplare chiarezza di esposizione vengono discussi i varii metodi ora in : in proposito diremo che se l'Autore non nega il dovuto plauso alle geniali struzioni logiche di Peano, Hilbert, Russel etc., d'altra parte si mostra un poco ttico intorno all'opportunità della loro immediata introduzione nella scuola; e in pieno accordo con tutti coloro i quali ritengono forse arrischiato il pretendere la media dei nostri ragazzetti possa compiere in pochi mesi quell'evoluzione la collettività dei pensatori ha faticosamente percorsa in più secoli.

Chiudiamo questo breve cenno di presentazione esternando il voto che presto Prof. Leoni venga destinato ad una sede di maggior importanza: e se per arare a ciò sarà proprio necessario che egli passi sotto le forche caudine di un corso, gli auguriamo di imbattersi in una Commissione esaminatrice la quale ia il coraggio di valutare in pari modo l'opera di chi ha lavorato per il miramento diretto della scuola, e quella, certo lodevole ma in fondo egoistica, chi, seguendo le proprie inclinazioni, ha speso il suo tempo nella ricerca scienza che ben spesso presenta un solo interesse estetico.

U. Scarpis.

Francesco Palatini. — *Aritmetica ed Algebra* ad uso delle Scuole medie superiori. 3ª edizione. Petrini-Gallizio, Torino. — L. 4.

L'ottimo trattato del Palatini ha la sorte che si merita. Dopo 5 anni appena dalla pubblicazione della I edizione ecco venirne alla luce la III, prova del lusinghiero successo ottenuto dal libro che, come dicemmo nelle recensioni alle precedenti edizioni, offre pregi non comuni. In questa nuova edizione il trattato ha anzi raggiunto un assetto sempre migliore, sempre più armonico, ottemperando sempre meglio tanto alle esigenze scientifiche quanto alle didattiche.

P. C.

Veronese G. — *Complementi di algebra e di geometria* ad uso dei Licei moderni (1ª e 2ª classe), trattati con la collaborazione del prof. P. Gazzaniga. Padova, Drucker, 1915.

I programmi per i Licei moderni avendo introdotti nell'insegnamento matematico alcuni concetti che fino ad ora facevano parte dell'insegnamento superiore, l'illustre prof. Veronese ha raccolto in questo piccolo volume di circa 100 pagine soltanto la parte nuova di tali programmi a complemento di quanto si trova nelle precedenti e notissime sue opere scolastiche.

" I nuovi concetti, dice l'A. nella prefazione, sono da noi svolti in questo " libro con metodo geometrico e quindi spesso appoggiandosi alla rappresenta" zione grafica e con esempi tolti dalla meccanica e dalla fisica, come giusta" mente consigliano le istruzioni che accompagnano i programmi, perchè questa " è la via più facile per fare entrare nella mente degli alunni certi concetti per " loro natura delicati ".

È quasi superfluo osservare che questi complementi possono servire agli studenti della seconda e terza classe del liceo moderno anche se precedentemente sono stati usati altri testi di geometria.

La nuova operetta con savio senso pratico, cerca di conciliare per quanto è possibile il rigore matematico con la necessità di rendere facili e piani certi concetti che servono di base agli insegnamenti più elevati, ma che in forma più o meno rudimentale trovano ormai continue e importanti applicazioni in moltissimi e svariati casi.

(K.).

Delens, *Problèmes d'arithmétique amusante.* Vuibert, Paris, 1914.

In questo volumetto l'Autore ha raccolto sotto forma dilettevole delle applicazioni elementari di note proposizioni di aritmetica, ed ha costruito parecchi problemi i cui enunciati possono destare la curiosità e l'interesse dei giovani e le cui risoluzioni costituiscono un aggradevole esercizio ed un eccitamento a cercare altri problemi dello stesso tipo. I caratteri di divisibilità sono utilizzati in modo particolare.

Come tutte le opere che giovano a diffondere e volgarizzare lo studio della matematica, crediamo degna di lode questa raccolta del Delens. (K.).

ERRATA-CORRIGE. — Nel fascicolo III, a pag. 138; *invece di:* punto della cubica, *leggasi:* punto d'insieme della cubica. — A pag. 139, problema 155, *invece di:*

$$\frac{\mathrm{sen}^7\varphi\, dy}{\cos\varphi}, \quad \textit{leggasi:} \quad \int \frac{\mathrm{sen}^7\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi}.$$

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 Giugno 1915

NUOVE RICERCHE GEOMETRICHE

Nel triangolo fondamentale ABC, il piede P, dell'altezza AP, re-
iva al lato BC, cada sul prolungamento di questo lato. L'altezza AP,
ficientemente prolungata, incontri poi, in un secondo punto A_1, il
concerchio di ABC.

Denominiamo i triangoli ABC, A_1BC *triangolo conveniente* e *trian-
 obbiettivo*, rispettivamente.

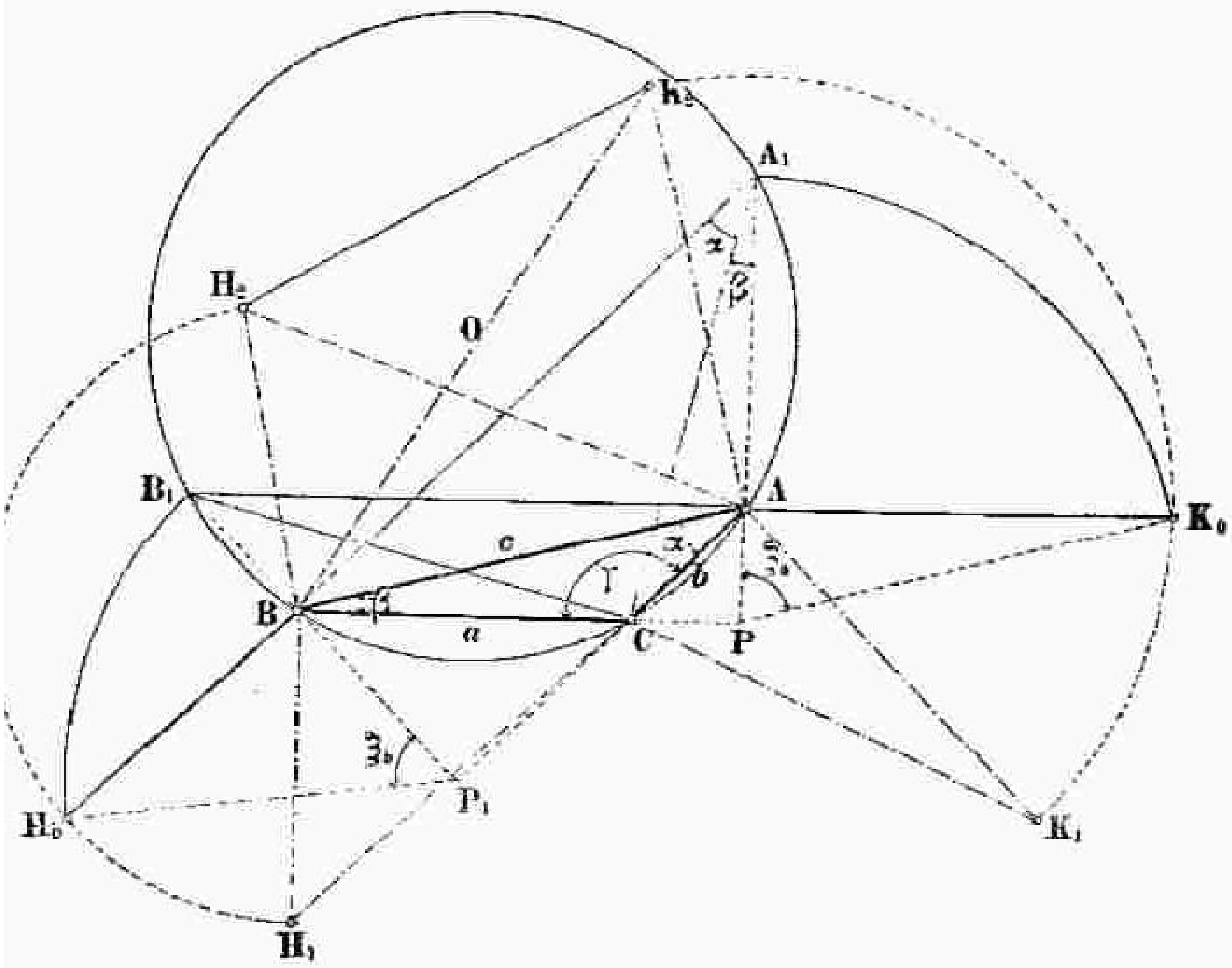


Fig. 1.

e le considerazioni fatte pel vertice A rispetto al lato opposto BC
ono anche pel vertice B rispetto al lato opposto AC, se, cioè,
ezza BP_1 relativa al prolungamento di AC, sufficientemente pro-
ata incontra in un secondo punto B_1 il circoncerchio di ABC,
 mostra la figura 1, denomineremo ABC *triangolo biconveniente.*
principali di ABC son quelli che comprendono l'angolo ottuso e
ci principali quelli giacenti sul lato opposto a quest'angolo ottuso.
riangolo conveniente dev'essere necessariamente ottusangolo, ma
riangolo ottusangolo, se è conveniente, può non essere biconve-

niente. Un triangolo biconveniente, che si può semplicemente costruire, non sarà un particolare triangolo i cui lati siano vincolati da prestabilite relazioni, ma un triangolo ottusangolo affatto generico che sodisfa alle predette proprietà rispetto al suo circoncerchio.

Siano rispettivamente a, b, c; α, β, γ le misure dei lati BC, CA, AB e degli angoli A, B, C del triangolo fondamentale ABC, di area Δ, e conduciamo dal punto A la perpendicolare AK_0 al segmento PA_1, avendo chiamato con K_0 il punto in cui la circonferenza di centro P e raggio PA_1, $P(PA_1)$, incontra questa perpendicolare.

Condotta la PK_0 e posto $APK_0 = \xi_a$, sarà:

$$CP = -b\cos\gamma, \qquad AP = b \operatorname{sen}\gamma, \qquad CP = CA_1 \operatorname{sen}\beta,$$

onde

$$CA_1 = -b\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = -b\cos\gamma \operatorname{cosec}\beta.$$

Sostituendo questo valore di CA_1 in $PA_1 = CA_1 \cos\beta$, sarà

$$PA_1 = -b\cos\gamma \operatorname{cotg}\beta.$$

È

$$PA = PK_0 \cos\xi_a = PA_1 \cos\xi_a,$$

onde

$$\cos\xi_a = \frac{AP}{A_1P} = \frac{b\operatorname{sen}\gamma}{-b\cos\gamma\operatorname{cotg}\beta} = -\operatorname{tang}\gamma\operatorname{tang}\beta. \qquad [I]$$

È inoltre:

$$AK_0 = \sqrt{PA_1^2 - PA^2} = \sqrt{b^2\cos^2\gamma\operatorname{cotg}^2\beta - b^2\operatorname{sen}^2\gamma} =$$
$$= b\sqrt{\cos^2\gamma\operatorname{cotg}^2\beta - (1-\cos^2\gamma)} = b\sqrt{\cos^2\gamma(1+\operatorname{cotg}^2\beta) - 1} =$$
$$= b\sqrt{\cos^2\gamma\operatorname{cosec}^2\beta - 1} = b\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2 - 1}. \qquad [II]$$

Abbiamo ora

$$BA_1^2 = PA_1^2 + BP^2 = b^2\cos^2\gamma\operatorname{cotg}^2\beta + [a - b\cos\gamma]^2.$$

E sviluppando e ponendo $\cos^2\gamma = 1 - \operatorname{sen}^2\gamma$, verrà

$$A_1B^2 = [b^2\cos^2\gamma\operatorname{cotg}^2\beta - b^2\operatorname{sen}^2\gamma] + [a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma] = AK_0^2 + c^2.$$

Quest'ultima relazione mostra che se dal punto A s'immagina innalzata la perpendicolare al piano su cui giace ABC, il vertice A_1 del triangolo BCA_1 che ruota, senza deformarsi, attorno a BC, incontrerà, in tal movimento, la predetta perpendicolare. Ed il piano di A_1BC in questa posizione, dovrà ruotare attorno a BC dell'angolo $APK_0 = \xi_a$ perchè, con la più breve rotazione, venga a coincidere col piano iniziale ABC.

Noi, riferendoci alle formule [I], [II] possiamo intanto enunciare
ondamentale

Teorema delle rotazioni. — *In ogni triangolo conveniente* ABC *il dotto delle tangenti degli angoli adiacenti al lato* BC, *opposto al ver- principale* A, *è uguale al coseno dell'angolo* ξ_a *di cui deve ruotare rno a quel lato il suo triangolo obbiettivo* A_1BC *perchè, con la più re rotazione, il vertice* A_1 *incontri la perpendicolare in* A *al suo piano iale* ABC. *Il valore del segmento di questa perpendicolare compreso il vertice principale* A *ed il punto d'incontro, è dato dal prodotto lato principale* $AC = b$ *per la radice quadrata del binomio che si ne togliendo l'unità del quadrato del rapporto tra il coseno dell'an- ottuso* C *al seno dell'altro angolo adiacente al lato opposto al vertice icipale* A.

Il triangolo ABC della figura 1 è biconveniente e però possiamo licare al vertice B le costruzioni eseguite rispetto al vertice A: egmento BH_0 è l'analogo di AK_0 e l'angolo BP_1H_0 è l'analogo 'angolo $APK_0 = \xi_a$. Talchè, ponendo $BP_1H_0 = \xi_b$, sarà, pel teo- a delle rotazioni,

$$\cos \xi_b = -\operatorname{tang} \gamma \operatorname{tang} \alpha \qquad [III]$$

$$BH_0 = a \sqrt{\left[\frac{\cos \gamma}{\operatorname{sen} \alpha}\right]^2 - 1}. \qquad [IV]$$

a [II] e [IV] si ha:

$$AK_0 = 2R \sqrt{\cos^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \beta} \qquad [II']$$

$$BH_0 = 2R \sqrt{\cos^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \alpha}, \qquad [IV']$$

ssendo il raggio del circoncerchio di ABC.

E poi

$$\frac{\cos \xi_a}{\cos \xi_b} = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha}, \qquad \frac{AK_0}{BH_0} = \sqrt{\frac{\cos^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \beta}{\cos^2 \gamma - \operatorname{sen}^2 \alpha}}. \qquad [V], [VI]$$

hiamiamo, per convenienza di dire ξ_a, ξ_r *angoli caratteristici* re- i ai vertici principali A, B e AK_0, BH_0 *segmenti caratteristici* ivi ai medesimi vertici, rispettivamente. Le formule II', IV', V, VI nno allora le seguenti proposizioni:

) *Il valore del segmento caratteristico corrispondente al vertice di degli angoli acuti è uguale al prodotto del diametro del circoncer- del triangolo fondamentale per la radice quadrata del binomio che tiene togliendo dal quadrato del coseno dell'angolo ottuso il quadrato eno del rimanente angolo acuto.*

) *In ogni triangolo biconveniente le tangenti degli angoli dei vertici ipali sono inversamente proporzionali ai coseni dei corrispondenti li caratteristici.*

c) *In ogni triangolo biconveniente il rapporto tra i due binomi che si ottengono sottraendo dal quadrato del coseno dell'angolo ottuso il quadrato del seno di uno degli angoli acuti è uguale all'inverso del rapporto tra i quadrati dei segmenti caratteristici corrispondenti ai vertici di quegli angoli acuti.*

I lati dei triangoli obbiettivi si calcolano semplicemente:

$$\overline{A_1C}^2 = b_1{}^2 = b^2 + b^2\left(\frac{\cos^2\gamma}{\operatorname{sen}^2\beta} - 1\right); \qquad b_1 = b\,\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta} = 2R\cos\gamma, \quad \text{etc.}$$

Scriviamo qui sotto le formule relative

$$A_1C = b_1 = 2R\cos\gamma, \qquad A_1B = c_1 = 2R\cos\beta,$$
$$B_1C = a_2 = 2R\cos\gamma, \qquad B_1A = c_2 = 2R\cos\alpha,$$

ritenendo che $\cos\gamma$ è negativo.

Ora è

$$b_1 = 2R\operatorname{sen}\beta_1, \quad c_1 = 2R\operatorname{sen}\gamma_1, \quad a_2 = 2R\operatorname{sen}\alpha_2, \quad c_2 = 2R\operatorname{sen}\gamma_2,$$

quindi le relazioni tra angoli del triangolo biconveniente e dei suoi triangoli obbiettivi:

$$\begin{cases}\cos\gamma = \operatorname{sen}\beta_1, \\ \cos\beta = \operatorname{sen}\gamma_1,\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\gamma = \operatorname{sen}\alpha_2, \\ \cos\alpha = \operatorname{sen}\gamma_2.\end{cases}$$

Sui segmenti caratteristici. — *m)* La condizione che il segmento caratteristico relativo ad uno dei vertici principali, ad es. al vertice A, sia uguale al diametro del circoncerchio di ABC, importa [form. II] che sia

$$1 = \cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta$$

ed è

$$1 = \operatorname{sen}^2\beta + \cos^2\beta.$$

Dunque, scelto R come unità di misura, dovrà essere

$$2 = \cos^2\beta + \cos^2\gamma,$$

condizione che non può essere sodisfatta. Laonde *il segmento caratteristico corrispondente ad uno qualunque dei vertici principali di un triangolo biconveniente non potrà superare, nè uguagliare, il diametro del circoncerchio di questo triangolo.* Ed allora, la possibilità che uno dei segmenti caratteristici, ad es. quello relativo al vertice dell'angolo $A = \alpha$, sia uguale al raggio R del circoncerchio, implica che i rimanenti angoli γ e β del triangolo sodisfacciano alla condizione

$$\frac{1}{4} = \cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta$$

e, per essere $1 = \cos^2 \beta + \operatorname{sen}^2 \beta$ verrà

$$\frac{1}{2} + \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] = \sqrt{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}.$$

Adunque *se il segmento caratteristico corrispondente ad uno degli angoli acuti di un triangolo biconveniente dev'essere uguale al raggio del circoncerchio di questo triangolo, è necessario e sufficiente che il triangolo rettangolo che ha per cateti il coseno dell'angolo ottuso ed il coseno del rimanente angolo acuto abbia per ipotenusa il segmento che si ottiene sommando alla metà di quel raggio la sua sezione aurea.*

Questa condizione non è illusoria, e però vediamo di costruire un triangolo che vi sodisfi. Se PQ è un diametro del cerchio di centro O

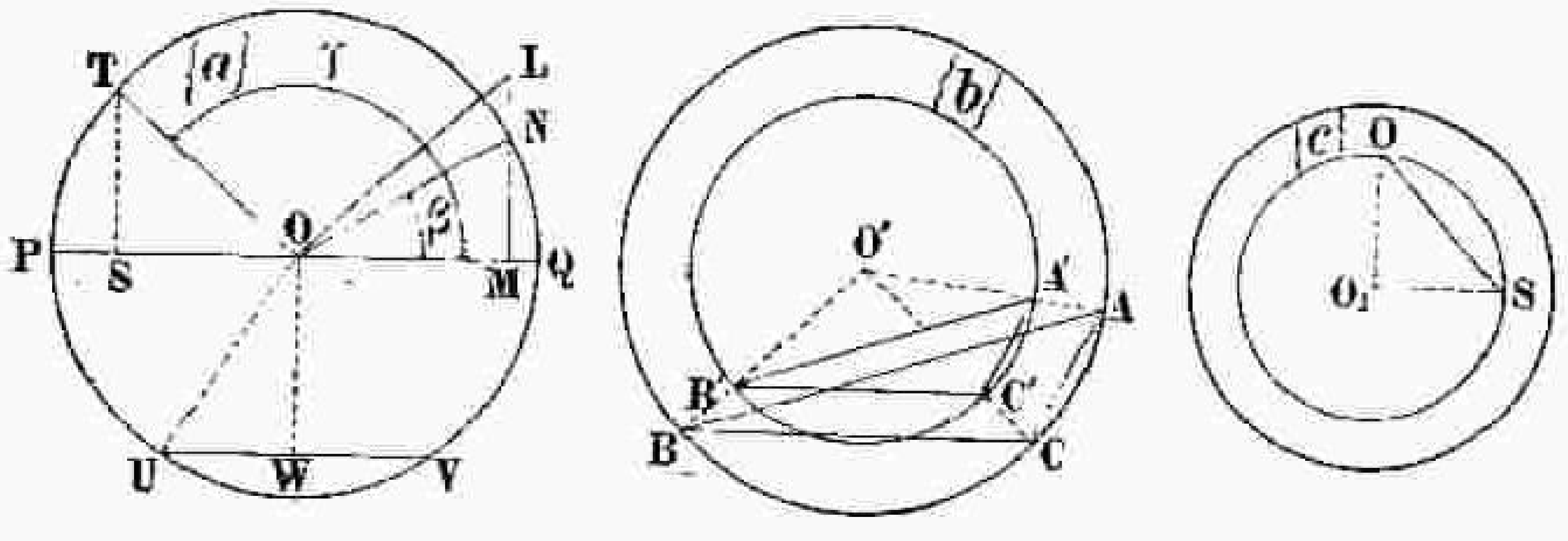


Fig. 2.

(fig. 2, *a*) facciamo l'angolo NOQ uguale ad un arbitrario angolo β, *convenientemente* piccolo, e da N tiriamo MN perpendicolare ad OQ. Con centro in O e con raggio uguale ad $\frac{1}{2}$ OQ + sez. aur. OQ, tagliamo in L la MN sufficientemente prolungata e prendiamo, sul raggio OP, OS = ML. Tiriamo ST perpendicolare ad OP e uniamo T con O.

Il triangolo ABC che abbia gli angoli adiacenti al lato BC uguali ai due angoli QON = β, QOT = γ e che sia inscritto nel cerchio di diametro PQ sodisfarà alla proprietà che il segmento caratteristico relativo al vertice del rimanente angolo A = α, sia uguale al raggio OQ = R del predetto cerchio.

Inscriviamo dunque nel cerchio di diametro PQ un siffatto triangolo. Perciò su un segmento arbitrario B'C' (fig. 2, *b*) costruiamo il triangolo A'B'C' i cui angoli in B', C' siano uguali rispettivamente ai due angoli β, γ e chiamiamo O' il circoncentro di A'B'C'. Sui raggi OA', OB', OC', sufficientemente prolungati, facciamo

$$O'A = O'B = O'C = OQ = R$$

così il triangolo ABC è il richiesto.

Possiamo evitare l'introduzione della sez. aur. nella risoluzione della questione in discorso. Infatti un triangolo che abbia gli angoli adiacenti al lato BC sodisfacenti alla condizione

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{sen}^2\beta = \cos^2\gamma$$

e che sia conveniente ed inscritto in un cerchio di cui assumiamo come unità di misura il raggio, avrà il segmento caratteristico relativo al vertice A uguale al raggio del cerchio ora menzionato. La costruzione di un tal triangolo si fa semplicemente uniformandoci all'anzidetto metodo.

n) Se il segmento caratteristico relativo al vertice A dev'essere uguale al lato principale $AC = b$ uscente da quel vertice, ciò importa che sia [form. II]

$$\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2 - 1} = 1,$$

talchè

$$\cos\gamma = \operatorname{sen}\beta\,\sqrt{2}.$$

Analogamente, se il segmento caratteristico relativo al vertice B dev'essere uguale al lato principale $BC = a$ uscente da quel vertice, dovrà essere [form. IV]

$$\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right]^2 - 1} = 1, \qquad \text{ossia} \qquad \cos\gamma = \operatorname{sen}\alpha\,\sqrt{2}.$$

L'una condizione esclude l'altra, a meno che non si tratti di un triangolo isoscele ABC.

Adunque *la condizione necessaria e sufficiente perchè il segmento caratteristico corrispondente al vertice di uno degli angoli acuti sia uguale al lato principale uscente da quel vertice, è che il coseno dell'angolo ottuso sia uguale al lato del quadrato inscritto nel cerchio che ha per raggio il seno del rimanente angolo acuto.*

Riferendoci alla [fig. 2, *a*], disegniamo [fig. 2, *c*] il cerchio di cui sia OS il lato del quadrato inscritto ed OO_1 il raggio. Tiriamo la corda $UV = OO_1 + O_1S$ del cerchio O (OQ) e sia OW perpendicolare ad UV. Dopo ciò è chiaro che il triangolo ABC inscritto in O (OQ), che abbia i due angoli adiacenti al lato BC uguali ai due angoli $UOW = \beta$, $QOT = \gamma$, avrà il segmento caratteristico del vertice A uguale al lato AC. E noi possiamo costruire un siffatto triangolo col metodo esposto in fig. 2, *b*.

p) Nel triangolo biconveniente ABC siano i segmenti caratteristici relativi ai vertici A, B uguali rispett. ai lati opposti *a*, *b*. Gli angoli α, β, γ del triangolo dovranno allora sodisfare alle relazioni

$$a = b\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2 - 1}, \qquad b = a\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right]^2 - 1}$$

›erò saranno vincolati dall'espressione

$$\frac{\cos^2\gamma}{\text{sen}^2\beta}-1=\frac{1}{\frac{\cos^2\gamma}{\text{sen}^2\alpha}-1}$$

ia, dopo lievi trasformazioni e riduzioni, dalla relazione

$$\cos^2\gamma=\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\beta. \qquad [\lambda]$$

Nella predetta ipotesi, *il triangolo rett. che ha per cateti i seni degli oli acuti dovrà avere per ipotenusa il coseno dell'angolo ottuso.* Ma sta condizione, che è necessaria, è anche sufficiente perchè sia ificata l'ipotesi menzionata?

Siano x, y i segmenti caratteristici incogniti corrispondenti rispetmente ai vertici A, B del triangolo ABC i cui angoli siano legati la [λ]. Abbiamo dalle formule II, IV, per effetto di [λ]:

$$x=b\frac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }\beta},\qquad y=a\frac{\text{sen }\beta}{\text{sen }\alpha}$$

erò

$$x=a,\qquad y=b.$$

ıdunque la condizione [λ] è sufficiente.

Ioi, uniformandoci agli esposti criteri costruttivi, possiamo core un triangolo per il quale i segmenti caratteristici si trovino predette condizioni.

SSERVAZIONI. — Il triangolo ABC che entra nei casi *m*), *n*), *p*) considerati, lo denomineremo *ultraconveniente* rispetto al raggio irconcerchio, rispetto ad un lato uscente da uno dei vertici prini, rispetto al lato opposto ad uno dei medesimi vertici, rispettinte. Nei casi *m*), *n*) se rispetto ad un vertice il segmento teristico sodisfa alla posta condizione, non vi può sodisfare siıneamente rispetto al rimanente vertice principale.

ediante le formule II, IV si può, più generalmente, vedere a condizioni debbano sottostare i lati e gli angoli di ABC perchè menti caratteristici sodisfino a certe prestabilite proprietà. E on i casi *m*) *n*) *p*), sopra considerati, abbiamo voluto intenderci fatti più notevoli ed il metodo servirà di base a possibili uli ricerche.

traedri notevoli. — Per semplicità di dire denominiamo il trian-ıBC che entra nei casi *m*), *n*), *p*) *ultraconveniente di 1°, 2°, 3° ordine.* vertici A_1, B_1 dei triangoli obbiettivi A_1BC, B_1CA relativi ai i A, B del triangolo biconveniente ABC, incontrino, nel loro ıento rotatorio attorno BC, CA, rispettivamente in S_a, S_b le ıdicolari al piano di ABC condotte per i vertici A, B.

ue tetraedri S_a[ABC], S_b[ABC] hanno le facce ribaltate sul della base comune ABC con un procedimento non difficile ad ere (fig. 1).

Il segmento K_2H_2 in quel piano, dà in vera grandezza la distanza S_aS_b nello spazio calcolabile con la formula

$$S_aS_b = c^2 + \left[b\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2 - 1} - a\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right]^2 - 1}\right]^2 =$$
$$= c^2 + \left[2R\left(\sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta} - \sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}\right)\right]. \quad [\mathrm{VII}]$$

Ma qualora il triangolo ABC sia ultraconveniente di 1° ordine rispetto al vertice A (e non può esserlo simultaneamente rispetto al vertice B) od ultraconveniente di 2° ord. rispetto al medesimo vertice od ultraconveniente di 3° ord., quella distanza ci vien data rispettivamente dalle formule

$$S_{au1}S^2_{bu1} = \left[R\left(1 - 2\sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}\right)\right]^2 + c^2$$
$$S_{au2}S^2_{bu2} = \left[b - a\sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right]^2 - 1}\right]^2 + c^2 \qquad [\mathrm{VIII}]$$
$$S_{au3}S^2_{bu3} = [a - b]^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab,$$

nelle quali è chiaro abbastanza il significato dei simboli al primo membro.

I tetraedri S_a[ABC], S_b[ABC] (e gli altri due ad essi simmetrici rispetto al piano di ABC) possono denominarsi *tetraedri ortogonali armonici* e quando si tratti di un triangolo ultraconveniente di 1°, 2°, 3° ord. i tetraedri che vi corrispondono si diranno rispettivamente *tetraedri ortogonali ultrarmonici di 1°, 2°, 3° ordine.*

Questi tetraedri corrisponderanno nei primi due casi al vertice A o al vertice B secondo che il triangolo ABC è ultraconveniente rispetto ad A o rispetto a B.

Posto che lo sia rispetto ad A, come abbiamo supposto sopra, indicheremo con S_{au1}[ABC], S_{au2}[ABC] i predetti tetraedri e nel caso del triangolo ultraconveniente di 3° ord. vi corrisponderà la coppia di tetraedri (S_{au3}[ABC], S_{bu3}[ABC]).

Risulta dalle considerazioni precedentemente fatte il modo come costruire effettivamente un tetraedro ultrarmonico di 1°, 2°, 3° ord., il quale è caratterizzato da notevoli curiose proprietà. Così il *tetraedro ultrarmonico* di *1° ord.* S_{au1}[ABC], *ha il suo spigolo ortogonale* AS_{au1} *uguale al raggio del circoncerchio della base* ABC *che è un triangolo ultraconveniente di 1° ord. e sodisfa perciò ad esposte proprietà. L'angolo* $BS_{au1}C$ *della faccia obbiettiva si projetta ortogonalmente in vera grandezza sull'angolo* BAC *della faccia base, ed il prodotto delle tangenti degli angoli della base adiacenti allo spigolo* BC *opposto all'ortogonale* AS_{au1}, *dà il coseno dell'angolo* ξ_a *di cui deve ruotare il piano della faccia obbiettiva* BCS_{au1} *attorno a* BC, *perchè, con la più breve rotazione, possa venire a coincidere col piano della faccia base* ABC.