

Sostituendo avremo:

$$r_{n,n+i} = \delta \frac{i h^{i+1} - (i+1) h^i + 1}{(1-h)^2}.$$

III Abbiamo trovato (formula [1]):

$$r_{n,n+i} = \sum_1^i m h^m \frac{s_{n+m-1} - s_{n+m}}{s_n}.$$

Se l'assicurazione fosse fatta a capitale interamente e incondizionatamente riservato; vale a dire, se il capitale versato dovesse interamente (senza interessi) restituirsi qualunque fosse l'epoca della morte, il valore analogo al precedente si otterrebbe estendendo la somma  $\sum$  del secondo membro fino che  $n+m-1$  divenisse eguale al numero d'anni limite (secondo la tavola scelta) della durata della vita umana.

Se però il contributo cessasse dal momento della decorrenza della pensione, il valore attuale del capitale (incondizionatamente riservato), da restituirsi in caso di morte, dovrebbe considerarsi come il valore di un'assicurazione limitata al periodo anteriore all'età  $n+i$  (nel quale il capitale si accumula e aumenta progressivamente) come l'assicurazione precedente, più il valore di una seconda assicurazione differita all'età  $n+i$  per tutto il capitale accumulato, che resta costante in questo secondo periodo.

Supponendo conosciute le formule relative alle assicurazioni immediate e differite di capitali determinati scadibili alla morte, posso considerare completamente risolto il problema che io mi ero proposto di studiare.

GIUSEPPE GARDENGHI.

$$\begin{aligned} 1 + 2h + 3h^2 + \dots + i h^{i-1} &= \frac{d}{dh} (1 + h + h^2 + h^3 + \dots + h^i) \\ &= \frac{d}{dh} \frac{1 - h^{i+1}}{1-h} = \frac{(i+1) h^i (1-h) + 1 - h^{i+1}}{(1-h)^2} \\ &= \frac{i h^{i+1} - (i+1) h^i + 1}{(1-h)^2}. \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE DELLA PERIODICITÀ  
NELLA ESPRESSIONE IN SERIE INFINITE  
DELLE GRANDEZZE RAZIONALI**

---

1. Abbiassi una grandezza  $x$  razionale od irrazionale, per semplicità, minore di 1.

Sia  $a$  un numero intero e positivo fissato: prendansi a considerare le grandezze  $\frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3},$  ecc. e si determini quante grandezze  $\frac{1}{a}$  contiene  $x$  (al massimo): sieno  $c_1$ ; così si determini quante  $\frac{1}{a^2}$  contiene la parte rimanente di  $x$  e sieno  $c_2$ , e così di seguito; la operazione avrà un termine o no; cioè con quel procedimento si verrà o no ad esaurire tutta la  $x$ ; in altri termini  $x$  sarà esprimibile in questa forma:  $x = c_1 \frac{1}{a} + c_2 \frac{1}{a^2} + c_3 \frac{1}{a^3} + \text{ecc.}$  ( $0 \leq c_i < a$ ), e la serie sarà finita o infinita.

Voglio far vedere come discenda da un noto teorema sui Numeri (\*) che, *quando  $x$  è razionale, la suddetta operazione, se non finisce, deve necessariamente diventare periodica e quindi che la serie, se è infinita, deve essere periodica.*

2. Premetto le due seguenti osservazioni. Se si arresta la operazione alla considerazione delle grandezze  $\frac{1}{a^n}$  si dice che si è calcolato  $x$  con la approssimazione di  $\frac{1}{a^n}$  ovvero a meno di  $\frac{1}{a^n}$  e il valore approssimato sarebbe  $c_1 \frac{1}{a} + c_2 \frac{1}{a^2} + c_3 \frac{1}{a^3} + \dots + c_n \frac{1}{a^n}$ , il quale è un certo numero di  $\frac{1}{a^n}$  e precisamente il massimo numero delle  $\frac{1}{a^n}$  contenute in  $x$ ; la parte rimanente di  $x$  sarebbe l'errore relativo a quella approssimazione.

---

(\*) Teorema di Fermat; esteso da Eulero. — V. BALTZER, *Aritmetica generale*, § 13 n. 21 e BERTRAND, *Trattato di Algebra elementare*, trad. da Bettl, Nota V. Teoremi 1. e 2.



Osservo anche che dovendosi calcolare  $\frac{x}{a}, \frac{x}{a^2}, \dots, \frac{x}{a^m}, \dots$  si avrebbero gli identici numeri  $c$  che si otterrebbero calcolando  $x$  e precisamente i numeri  $c$  che si otterrebbero per la  $(m+1)^a$   $(m+2)^a$  ecc. approssimazione di  $\frac{x}{a^m}$  sarebbero rispettivamente gli stessi di quelli che si otterrebbero per la  $1^a, 2^a, \dots$  approssimazione di  $x$ . Infatti per le approssimazioni  $(m+1)^a$   $(m+2)^a$  ecc. di  $\frac{x}{a^m}$  si devono fare fra  $\frac{x}{a^m}$  e  $\frac{1}{a^{m+1}} \frac{1}{a^{m+2}}$  ecc. le stesse operazioni che si fanno fra  $x$  e  $\frac{1}{a} \frac{1}{a^2}$  ecc. per le approssimazioni  $1^a, 2^a, \dots$ : ora i rapporti di quantità fra queste due categorie di grandezze

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a^m}, \frac{1}{a^{m+1}}, \frac{1}{a^{m+2}} \text{ ecc.} \\ x, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2} \text{ ecc.} \end{array} \right\}$$

sono identici.

3. Premesso questo, sia  $x$  adunque una grandezza razionale ( $< 1$ ): sarà allora uguale ad una espressione  $\frac{r}{s}$ , ove  $r, s$  sono numeri interi. Se  $s = a$  ovvero è composto di fattori primi che sono *tutti* fattori primi pure di  $a$  la operazione da eseguirsi su  $x$  ha termine (cioè la serie è finita) e reciprocamente.

Gli altri casi che possono presentarsi sono *unicamente* i seguenti:

1).  $s$  è composto di fattori primi tutti diversi da quelli di  $a$ , cioè è primo con  $a$ .

2).  $s$  è composto di fattori primi parte diversi, parte uguali a quelli di  $a$ .

Considero il primo caso; dico che si può certamente arrivare con la operazione a un punto tale, cioè arrivare ad una approssimazione tale, che l'errore relativo sia una grandezza della specie  $\frac{x}{a^m}$ , ed anzi più precisamente che l'approssimazione per la quale si verifica questo fatto sarà a meno di  $\frac{1}{a^m}$ : dimostrato questo sic-

come si sa che calcolando una grandezza  $\frac{x}{a^m}$  si trovano per le approssimazioni  $(m+1)^a$   $(m+2)^a$  ecc. gli stessi numeri che per le approssimazioni  $1^a$ ,  $2^a$ , ecc. di  $x$  e le approssimazioni che bisognerà determinare di  $\frac{x}{a^m}$  per avere le successive di  $x$  sono appunto le  $(m+1)^a$   $(m+2)^a$  ecc., così si vede come i risultati della operazione si ripeteranno tali e quali e cioè la serie sarà periodica. Dimostro adunque che esiste una approssimazione a meno di  $\frac{1}{a^m}$

tale che l'errore relativo è  $\frac{x}{a^m}$ . Perciò basta applicare il succitato teorema, che è il seguente: «avendosi due numeri  $p$ ,  $q$  primi fra loro, esiste una potenza (intera)  $q^\varphi$  di  $q$  tale che  $q^\varphi - 1$  è un multiplo di  $p$ ;  $\varphi$  è poi il numero degli interi inferiori a  $p$  e primi con esso».

Essendo i due numeri  $a$ ,  $s$  primi fra loro esisterà una certa potenza d'esponente  $\varphi(s)$  (intero, positivo) di  $a$  tale che  $a^{\varphi(s)} - 1$  sarà un multiplo di  $s$  e quindi

$$\frac{r}{s} \left\{ a^{\varphi(s)} - 1 \right\} = x \left\{ a^{\varphi(s)} - 1 \right\}$$

sarà un numero intero  $I$ ; onde  $\frac{I}{a^{\varphi(s)}} \leftarrow x \rightarrow \frac{x}{a^{\varphi(s)}}$ ; ora si vede subito che la grandezza  $\frac{I}{a^{\varphi(s)}}$  è effettivamente una approssimazione di  $x$ : infatti è minore di  $x$  ed aggiungendovi  $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$  si ha una grandezza maggiore di  $x$ , perchè  $\frac{x}{a^{\varphi(s)}}$  è minore di  $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$ ;  $I$  è quindi il massimo numero di  $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$  contenute in  $x$  e  $\frac{I}{a^{\varphi(s)}}$  è la approssimazione di  $x$  a meno di  $\frac{1}{a^{\varphi(s)}}$ . Dalla medesima precedente uguaglianza si ricava poi anche che l'errore relativo a tale approssimazione è precisamente  $\frac{x}{a^{\varphi(s)}}$ .

Giunti quindi con la più volte citata operazione a tale approssimazione la operazione stessa riproduce i medesimi risultati e la serie è necessariamente periodica.



Il secondo caso poi può essere immediatamente ricondotto al primo. Se  $s$  contiene fattori primi parte uguali, parte diversi da quelli di  $a$ , sia  $\sigma$  il prodotto di tutti i suoi fattori primi che sono uguali a fattori primi di  $a$ , e  $s'$  sia il prodotto dei rimanenti, sicchè,  $\sigma s' = s$ . La minima potenza di  $a$  che contiene  $\sigma$  sia  $a^k$  e sia  $\sigma \tau = a^k$ ; allora

$$a^k x = a^k \frac{r}{s} = \sigma \tau \frac{r}{s} = \tau \frac{r}{s'}$$

e quindi  $a^k x = \frac{\tau r}{s'}$  ed eseguendo la divisione  $a^k x = \frac{\tau r}{s'} = i + \frac{t}{s'}$  ove  $i$  sarà un intero e potrà anche essere 0, e  $\frac{t}{s'}$  sarà una frazione, il cui denominatore è un numero primo con  $a$  e quindi  $x = \frac{i}{a^k} + \frac{t}{s'} \frac{1}{a^k}$ ; ora siccome  $x < 1$ ,  $a^k x < a^k$ , quindi  $i < a^k$  e perciò  $i$  sarà della forma  $i_1 a^{k-1} + i_2 a^{k-2} + \dots + i_{k-1} a + i_k$ , ove  $0 \leq i_j < a$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ), onde

$$x = \frac{i_1}{a} + \frac{i_2}{a^2} + \dots + \frac{i_{k-1}}{a^{k-1}} + \frac{i_k}{a^k} + \frac{t}{s'} \frac{1}{a^k};$$

la grandezza  $\frac{t}{s'}$  dà luogo a sua volta a una serie periodica e quindi anche in questo caso  $x$  è esprimibile mediante la solita operazione in una serie infinita periodica, previa una certa serie finita.

4. Si può anche osservare che, ammessa come nota tale proprietà e cioè che una grandezza razionale si può esprimere mediante una serie periodica della suddetta forma (al che si può arrivare facendo uso del metodo ordinariamente seguito nei trattati di Aritmetica elementare) se ne può dedurre come conseguenza che se sia  $p$  un numero intero primo con un certo altro intero  $q$  esiste una potenza  $g^{\text{esima}}$  di  $q$  per la quale  $q^{g-1}$  è multiplo di  $p$ . Si formi infatti la grandezza  $\frac{1}{p}$ , la quale, essendo razionale, si potrà esprimere in una serie della forma

$$c_1 \frac{1}{q} + c_2 \frac{1}{q^2} + c_3 \frac{1}{q^3} + \dots + c_g \frac{1}{q^g} + c_1 \frac{1}{q^{g+1}} + \\ c_2 \frac{1}{q^{g+2}} + \dots + c_g \frac{1}{q^{2g}} + \text{ecc. } (0 \leq c_i < q)$$

ove ogni  $g$  termini i numeri  $c$  si ripeteranno identicamente. Ora osservo che tale serie è una progressione geometrica avente per primo termine  $\frac{c_1 q^{g-1} + c_2 q^{g-2} + \dots + c_g}{q^g}$  e per ragione  $\frac{1}{q^g}$  e quindi la sua somma è  $\frac{c_1 q^{g-1} + c_2 q^{g-2} + \dots + c_g}{q^g - 1}$ , vale a dire  $\frac{1}{p}$  è uguale a questa espressione; ma le quantità che vi figurano come numeratore e denominatore sono due numeri intieri, onde si vede che il numero  $p$  moltiplicato per un opportuno numero intero dà  $q^g - 1$ , o in altri termini  $q^g - 1$  è un multiplo di  $p$ .

Non è forse inutile il notare la forma

$$(q - 1) q^{g-1} + (q - 1) q^{g-2} + \dots + (q - 1) q + (q - 1)$$

sotto cui si può mettere il numero  $q^g - 1$ .

D.<sup>r</sup> ITALO AMALDI.

## TEOREMI SUI TRIANGOLI ISOBARICENTRICI

In una nota, inserita nel 1° fascicolo del II anno di questo Periodico, intitolata « Di alcune proprietà del triangolo », il Prof. Besso mostrava l'esistenza di certi triangoli isobaricentrici con un triangolo dato. I Professori Pesci e Panizza continuarono, in lavori pubblicati nello stesso Periodico, lo studio del Prof. Besso, estendendo la serie dei triangoli isobaricentrici con un triangolo dato. La presente nota è un'aggiunta ai lavori fatti dai detti professori.

Dato un triangolo  $ABC$ , si diranno  $M, N, P$  i punti medii dei lati  $BC, CA, AB$  rispettivamente ed  $O$  il suo baricentro. Sieno  $A', B'$  due punti qualunque del piano del triangolo, si conduca  $A'O$ , che si prolungherà dalla parte di  $O$  fino in  $M'$  in modo che sia  $A'O = 2 OM'$ , e si unisca  $B'$  con  $M'$  e la retta  $B'M'$  si prolunghi dalla parte di  $M'$  fino in  $C'$ , in modo che sia  $M'C' = B'M'$ ; sarà



$A' B' C'$  un triangolo isobaricentrico con il triangolo dato. Dati  $A'$ ,  $B'$ , il punto  $C'$  resta determinato in modo unico. Dunque:

*Dato un triangolo, un triangolo isobaricentrico ad esso è determinato in modo unico quando si assegnino ad arbitrio due suoi vertici.*

Un triangolo isobaricentrico con un triangolo dato è pure determinato da un vertice  $A'$  e dalla direzione dei due lati  $A' B'$ ,  $A' C'$  che escono da  $A'$ . Basterà condurre per  $M'$  una retta che sia terminata ai lati dell'angolo  $B' A' C'$  e sia bisecata in  $M'$ .

I punti  $B'$ ,  $C'$  sono simmetrici rispetto al punto  $M'$ . Dunque:

*Se dei vertici d'un triangolo isobaricentrico con un triangolo dato uno rimane fisso e un altro descrive una linea, l'altro descrive una linea simmetrica rispetto a un punto determinato dal vertice fisso.*

Se il triangolo  $A' B' C'$  deve essere simile al triangolo dato, basterà assegnare il solo vertice  $A'$ . Infatti, determinato  $M'$ , si conduca per  $M'$  una retta che faccia con  $A' M'$  angoli eguali (in grandezza e senso) a quelli che  $B C$  forma con  $A M$ , e per  $A'$  si conducano due rette che formino con  $A' M'$  i medesimi angoli che  $A B$ ,  $A C$  formano con  $A M$ ; si sarà così costruito un triangolo simile al dato e isobaricentrico con esso.

Il vertice  $A'$  si scelga sopra il lato  $B C$ , e il vertice  $B'$  sopra il lato  $A C$ . Se  $A'$  rimane fisso e  $B'$  descrive la retta  $A C$ , il vertice  $C'$  descriverà la simmetrica di  $A C$  rispetto al punto  $M'$  (Tav. I, fig. 1). Questa retta simmetrica tagli  $B A$  nel punto  $C'$ , sarà  $A' B' C'$  un triangolo isobaricentrico con il triangolo dato e iscritto in esso. E si dimostra che i vertici di questo triangolo dividono nello stesso rapporto i lati del triangolo fondamentale (Besso, l. c.).

Se  $A' B' C'$  oltre di essere iscritto deve essere simile al triangolo dato, il primo triangolo risulta perfettamente determinato. Calcolando i lati del triangolo  $A' B' C'$  in funzione dei lati del triangolo dato, e cercando la condizione perchè esso risulti simile al triangolo fondamentale, si trova  $\frac{BA'}{A'C} = 1$  per rapporto in cui  $A'$  deve dividere  $B C$ .

Dunque:

*Fra gli infiniti triangoli iscritti in un triangolo dato e isobaricentrici con esso, ve ne è un solo simile al dato ed ha per vertici i punti di mezzo dei lati del triangolo stesso.*

La costruzione di  $A' B' C'$  nell'ultimo caso mostra che se  $A'$  va all'infinito sopra  $BC$ ,  $B'$  e  $C'$  andranno pure all'infinito sopra i lati  $AC$ ,  $AB$  rispettivamente.

Sieno  $A', C'$  vertici di un triangolo isobaricentrico iscritto. Si ha:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AC'}{C'B}, \quad \text{ovvero:} \quad \frac{BC}{A'C} = \frac{AB}{C'B} = \frac{C'B}{C'B}$$

da cui

$$\frac{A'C}{C'B} = \frac{BC}{AB}$$

Similmente: se  $A'', A''', \dots, C', C'', \dots$  sono vertici di altri triangoli analoghi, si avrà:

$$\frac{A'C}{C'B} = \frac{A''C}{C'B} = \frac{A'''C}{C''B} = \dots$$

Dunque:

*Tutti i triangoli isobaricentrici con un triangolo dato e iscritti in esso segnano sopra i suoi lati tre punteggiate simili a due a due.*

Si ha inoltre:

*Se in un triangolo si iscrivono due triangoli isobaricentrici con esso, il triangolo che ha per lati i segmenti che i vertici di quei triangoli determinano sui lati è simile al dato.*

Se  $A'$  cade in  $C$ ,  $C'$  cadrà in  $B$ , e se  $A'$  cade in  $B$ ,  $C'$  cadrà in  $A$ . Cioè nella detta similitudine al punto  $B$  corrispondono i punti  $A$  e  $C$ , secondo che  $B$  si suppone appartenere alla punteggiata  $BC$  o alla punteggiata  $BA$ .

Segue allora dalle nozioni di Geometria proiettiva che le rette analoghe a  $B' C'$  inviluppano una parabola, la quale tocca i lati  $AB$ ,  $CB$  nei punti  $B$  e  $C$ . Si ha così il teorema:

*Se dei vertici d'un triangolo isobaricentrico e iscritto, un vertice descrive un lato del triangolo fondamentale, il lato opposto inviluppa una parabola, che è tangente agli altri due lati del triangolo fondamentale nei vertici situati sul primo lato.*



Si può dire anche:

*I lati di tutti i triangoli, isobaricentrici e iscritti, inviluppano un luogo del sesto ordine (e della sesta classe) costituito da tre parabole.*

Queste tre parabole sono di facilissima costruzione, perchè di ciascuna di esse si conoscono due tangenti e i relativi punti di contatto. Queste tre parabole oltre che tagliarsi a due a due nei vertici del triangolo fondamentale, si tagliano in altri tre punti, vertici d'un triangolo curvilineo, i cui lati son tre archi delle dette parabole. Questo triangolo curvilineo contiene dentro di sé tutti i punti del piano per i quali non passano lati dei triangoli isobaricentrici ed iscritti. Da quanto precede si può enunciare il seguente teorema:

*Dato un punto, esistono in generale sei triangoli isobaricentrici iscritti di ciascuno dei quali un lato passa per il punto dato.*

Può notarsi che il minimo triangolo isobaricentrico è quello circoscritto al detto triangolo parabolico. Infatti questo triangolo è quello formato dalle rette che congiungono i punti di mezzo dei lati del dato triangolo fondamentale, che è isobaricentrico al dato. Ora il rapporto fra il triangolo  $A' B' C'$  isobaricentrico iscritto e il triangolo  $A B C$  è (V. Pesci, anno II del Periodico)

$$\frac{m^2 - m + 1}{(m + 1)^2}$$

dove  $m$  è il rapporto  $B A' : A' C$ . Quel rapporto diviene minimo per  $m = 1$ , ciò che mostra che il triangolo isobaricentrico iscritto e simile al dato, è il minimo fra i triangoli isobaricentrici iscritti.

Sia (fig. 2)  $A' B' C'$  un triangolo isobaricentrico iscritto; si prolunghino le sue mediane fino a che incontrano i lati del triangolo fondamentale. Si ottengono due triangoli  $A'' B'' C''$ ,  $A''' B''' C'''$ , dei quali il primo soltanto è segnato nella figura.

Intanto poichè  $A' B' C'$  è isobaricentrico ed iscritto ad  $A B C$ , segue  $\frac{B A'}{A' C} = \frac{C B'}{B' A} = \frac{A C'}{C' B} = m$ .

Per essere  $MP'$  parallela a  $BA$ , si ha:  $MA'' : BA'' = P'M : CB$  e  $P'M = AC' : 2$ , sicchè



$$\frac{MA''}{BA''} = \frac{m}{2} \quad \text{quindi} \quad \frac{BM}{BA''} = \frac{2-m}{2} \quad \text{e} \quad \frac{BC}{BA''} = 2 - m.$$

Ma  $BC = BA'' + A''C$ , per cui  $\frac{BA''}{A''C} = \frac{1}{1-m}$ . Similmente risulta  $\frac{CB''}{B''A} = \frac{AC''}{C''B} = \frac{1}{1-m}$ , talchè anche il triangolo  $A''B''C''$  è isobaricentrico ad  $ABC$ .

Alla stessa conclusione si arriva considerando il triangolo  $A''B''C''$ .  
Dunque:

*Se un triangolo è isobaricentrico con un altro ed iscritto, le sue mediane tagliano i lati del triangolo fondamentale nei vertici d'un secondo triangolo isobaricentrico con il dato, e tagliano i prolungamenti dei lati stessi nei vertici d'un terzo triangolo isobaricentrico.*

Si costruisca il triangolo isobaricentrico  $A'B'C'$  (fig. 3) del quale il lato  $C'A'$  passi per  $B$  e il lato  $C'B'$  passi per  $A$ . Se, restando fisso  $C'B'$ , il lato  $C'A'$  ruota attorno a  $B$ , il punto  $M'$  descriverà una retta  $x$  ed il punto  $A'$  una retta  $y$ , parallele entrambe alla retta  $C'B'$ , e la prima passante per  $M$  e per il punto medio  $E$  di  $C'A'$ . Mentre  $C'$  descrive la punteggiata  $C'B'$ ,  $M'$  descrive  $x$ , ed  $A'$  descrive  $y$  e le due punteggiate  $(M')$ ,  $(A')$  saranno simili alla punteggiata  $(C')$  e perciò simili fra loro; e siccome sono parallele, saranno prospettive. Sia  $K$  il centro di prospettiva. Questo punto  $K$  cadrà nella mediana  $BN$ , perchè quando  $C'B$  cade in  $BN$ , allora  $A'$  ed  $M'$  cadranno sulla mediana stessa. Se  $C'B$  coincide con  $AB$ ,  $M'$  cadrà in  $M$  e  $A'$  è il punto comune a  $BA$  ed  $y$ . Così il punto  $K$  si costruisce immediatamente. Dunque:

*Se d'un triangolo isobaricentrico un lato passa per un vertice del triangolo fondamentale ed è fisso, mentre un altro lato ruota attorno a un altro vertice del triangolo fondamentale, il terzo lato descrive un fascio il cui centro si può costruire immediatamente.*

Da questo teorema nasce la risoluzione del seguente problema.

*Costruire un triangolo isobaricentrico circoscritto del quale sia data la direzione di un lato.*

Se il lato dato passa per  $A$ , costruito  $K$ , come precedentemente, la retta  $KC$  sarà un'altro lato del triangolo richiesto.



Se  $a' \equiv C' B'$  è parallela a  $B N$  (fig. 4) e si costruisce  $K$ , il fascio  $M (A V T N)$  è armonico, poichè  $T$  è punto medio di  $V A$  ed  $M N$  è parallela a  $V A$ , e perciò è armonico anche il gruppo  $O K \infty N$ . Così  $N$  è il punto medio di  $O K$ , e perciò  $B O = O K$ . Dunque: *Se dai vertici di un triangolo si conducono le parallele alle mediane, si ottengono due triangoli isobaricentrici con il dato.*

Riferiamoci alla fig. 3. Se  $a'$  ruota attorno ad  $A$ , descrive un fascio  $(a)$  proiettivo (uguale) al fascio  $(x)$ ; questo fascio è proiettivo (prospettivo) alla punteggiata  $(F)$ , descritta su  $A B$ , la punteggiata  $(F)$  è proiettiva alla punteggiata  $(G)$ , questa alla punteggiata  $(K)$  descritta su  $B N$ , e  $(K)$  al fascio  $(c')$ . Adunque i fasci  $(a')$ ,  $(c')$  sono proiettivi fra loro. Per conseguenza il luogo del punto  $B'$ , comune a due raggi corrispondenti, è una conica che passa per  $A$  e  $C$ . Questa conica passa per  $O$ , per il punto simmetrico di  $B$  rispetto ad  $N$  (V. Panizza, anno III del Periodico) e per altri due punti determinati, com'è stato detto, dalle parallele alle mediane condotte per  $A$  e  $C$ . Questa conica si può dunque facilmente costruire col teorema di Pascal, ed è in generale una ellisse. Di queste ellissi se ne hanno tre. Una di esse può chiamarsi la ellisse relativa ai due vertici per i quali passa.

Si consideri (fig. 5) la ellisse relativa ai vertici  $A, C$ ; sia  $D$  il simmetrico di  $B$  rispetto ad  $N$ ,  $E$  il punto comune alle  $A E, C E$  parallele alle mediane  $O C, O N$ ,  $F$  il punto comune alle  $A F, C F$  rispettivamente parallele alle mediane  $O N, O A$ . Quella ellisse passerà, oltrechè per i punti  $A, C$  per i punti  $O, D, E, F$ . Siccome poi è manifestamente  $O K = K D, A K = K E$ , sarà  $K$  il centro della detta ellisse. Si può notare inoltre che la parallela condotta da  $K$  al lato  $A C$  è un diametro coniugato al diametro  $O D$ , il diametro  $F C$  è coniugato a quello che si ottiene guidando da  $K$  la parallela a  $B C$  ecc. Da quanto precede e da altre facili osservazioni, che si possono fare nella figura, e dal fatto che per le tre ellissi sono eguali le involuzioni dei diametri coniugati ed eguali per esempio il semidiametro  $A K$  e i due suoi corrispondenti nelle altre due ellissi, si hanno i seguenti teoremi:

*Vi sono infiniti triangoli circoscritti a un triangolo dato e isobaricentrici con esso. Assegnata la direzione d'un lato il trian-*

golo resta determinato in modo unico, e se il primo lato ruota attorno al vertice per il quale è stato condotto, i due lati rimanenti colla loro mutua intersezione generano una ellisse la quale passa per i due vertici rimanenti del triangolo fondamentale, per il baricentro comune e per altri tre punti determinabili immediatamente.

La conica relativa a due vertici del triangolo fondamentale ha per centro il punto simmetrico del vertice rimanente rispetto al baricentro comune.

I centri delle tre ellissi che rappresentano il luogo dei vertici dei triangoli isobaricentrici e circoscritti formano un triangolo isobaricentrico col dato, eguale ad esso, e coi lati paralleli a quelli del medesimo.

I lati di questo triangolo considerati come diametri hanno per coniugati le rette che uniscono i suoi vertici ai vertici del triangolo fondamentale che sono opposti ai lati del triangolo che si considera.

Quelle tre ellissi sono eguali fra loro.

Se allora una di queste ellissi diviene un cerchio, le altre due divengono cerchi eguali ad esso. Si ha così la conseguenza che se in un triangolo l'angolo di due mediane (porzioni comprese fra i vertici e il punto comune) è supplemento dell'angolo opposto, lo stesso avviene per gli altri angoli, e il triangolo è equilatero.

Si ha inoltre:

*Data una retta vi sono in generale sei triangoli isobaricentrici circoscritti di ciascun dei quali un vertice cada sulla retta data.*

I vertici situati sulla retta data sono i punti che la retta stessa ha in comune colle tre ellissi sopra considerate.

Catania, ottobre 1889.

SEBASTIANO CATANIA.

---



## DIMOSTRAZIONE DELLA FORMOLA

CHE DÀ IL VOLUME D'UN TETRAEDRO IN FUNZIONE DEGLI SPIGOLI

---

Di un tetraedro sieno:  $B_1 B_2 B_3$  una faccia triangolare ossia la base d'area  $S$ ,  $\overline{B_4 A} = a$  la lunghezza della perpendicolare abbassata dal vertice opposto ossia l'altezza del tetraedro rispetto a quella faccia,  $b_1, b_2, b_3$  i tre spigoli lati del triangolo base,  $h_1, h_2, h_3$  gli altri spigoli lati del triedro concorrenti nel vertice opposto alla base considerata; diciamo inoltre con  $m_1, m_2, m_3$  le lunghezze delle congiungenti il piede  $A$  della perpendicolare coi vertici del triangolo  $B_1 B_2 B_3$  che sono le proiezioni dei tre spigoli lati del triedro sul piano di base.

Il volume del tetraedro sarà:

$$[1] \quad V = \frac{1}{3} a S.$$

Per trovare l'espressione dell'altezza  $a$  del tetraedro in funzione dei suoi spigoli scriviamo la nota relazione esistente fra i sei lati di un tetragono piano (\*) quale sarebbe nel nostro caso  $B_1 B_2 B_3 A$ , ossia:

$$[2] \quad \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & m_1^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & m_2^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & m_3^2 & 1 \\ m_1^2 & m_2^2 & m_3^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ed essendo pel teorema di Pitagora:

$$m_1^2 = h_1^2 - a^2, \quad m_2^2 = h_2^2 - a^2, \quad m_3^2 = h_3^2 - a^2$$

eseguita la sostituzione nel determinante ed aggiungendo agli elementi della 4<sup>a</sup> colonna quelli della 5<sup>a</sup> moltiplicati per  $a^2$  e simul-

(\*) *Periodico di Matematica*, 1886 - LORTA. Intorno ad alcune relazioni fra distanze. Pag. 38.

taneamente agli elementi della 4<sup>a</sup> riga aggiungendovi quelli della 5<sup>a</sup> moltiplicati pure per  $a^2$ , dalla relazione [2] si ottiene la relazione unica esistente fra i sei spigoli ed un'altezza del tetraedro:

$$[3] \quad \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & h_1^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & h_2^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & h_3^2 & 1 \\ h_1^2 & h_2^2 & h_3^2 & 2a^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando questo determinante e liberando il termine  $a^2$  dal suo coefficiente avremo:

$$[4] \quad a^2 = \left\{ \begin{array}{l} -h_1^4 b_1^2 - h_2^4 b_2^2 - h_3^4 b_3^2 + h_1^2 h_2^2 (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) \\ + h_2^2 h_3^2 (b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + h_3^2 h_1^2 (b_3^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ + h_1^2 b_1^2 (b_2^2 + b_3^2 - b_1^2) + h_2^2 b_2^2 (b_3^2 + b_1^2 - b_2^2) \\ + h_3^2 b_3^2 (b_1^2 + b_2^2 - b_3^2) - b_1^2 b_2^2 b_3^2. \end{array} \right\} : (-1) \begin{vmatrix} 0 & b_3^2 & b_2^2 & 1 \\ b_3^2 & 0 & b_1^2 & 1 \\ b_2^2 & b_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Osserviamo che lo sviluppo del determinante simmetrico che figura al denominatore è il seguente:

$$\begin{aligned} D &= b_1^4 + b_2^4 + b_3^4 - 2(b_1^2 b_2^2 + b_2^2 b_3^2 + b_3^2 b_1^2) \\ &= -(b_1 + b_2 + b_3)(b_1 + b_2 - b_3)(b_2 + b_3 - b_1)(b_3 + b_1 - b_2) \\ &= -16 p (p - b_1)(p - b_2)(p - b_3) = -16 S^2. \end{aligned}$$

Se diciamo colla lettera  $R$  la quantità in parentesi, ossia il numeratore dell'espressione di  $a^2$ , e per brevità la ricordiamo col nome di *risultante* del tetraedro, avremo:

$$a^2 = \frac{R}{16 S^2}.$$

Risalendo alla formula [1] si trova:

$$V^2 = \frac{16 \times a^2 S^2}{9 \times 16} \quad \text{ossia} \quad 144 V^2 = R.$$

Ed aggruppando i 22 termini contenuti nello sviluppo di  $R$ , funzione omogenea del 6° grado degli spigoli del tetraedro, il volume di questo si ricava dalla nota espressione (\*) seguente:

(\*) L. c. 1886. - Basso. Sul tetraedro a facce uguali. Pag. 2.



$$144 V^2 = b_1^2 h_1^2 (b_2^2 + h_2^2 + b_3^2 + h_3^2 - b_1^2 - h_1^2) + b_2^2 h_2^2 (b_3^2 + h_3^2 + b_1^2 + h_1^2 - b_2^2 - h_2^2) + b_3^2 h_3^2 (b_1^2 + h_1^2 + b_2^2 + h_2^2 - b_3^2 - h_3^2) - (h_1^2 h_2^2 b_3^2 + h_2^2 h_3^2 b_1^2 + h_3^2 h_1^2 b_2^2 + b_1^2 b_2^2 b_3^2).$$

L'applicazione della relazione [4] può essere utile nella ricerca di alcune proprietà del tetraedro di cui si hanno le dimostrazioni in molti importanti lavori (\*).

Sassari, 8 maggio 1890.

Ing. GIUSEPPE DELITALA  
Professore di Geometria pratica.

### SULL' EQUAZIONE $x^y = y^x$ CON $x$ ED $y$ INTERI E POSITIVI

Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due numeri disuguali interi e positivi dei quali  $\alpha$  sia il maggiore, che soddisfanno all'equazione:

$$\alpha^\beta = \beta^\alpha.$$

Sarà identicamente:

$$\alpha^\beta - \beta^\alpha = 0,$$

donde, posto:  $\frac{\alpha}{\beta} = r$

$$\beta^\beta [r^\beta - \beta^{(r-1)\beta}] = 0 \quad \text{da cui:} \quad (r)^\beta - (\beta^{r-1})^\beta = 0$$

e perciò, poichè  $r$  e  $\beta^{r-1}$  sono positivi e  $\beta$  è intero, sarà identicamente:  $r = \beta^{r-1}$  dalla quale uguaglianza e dalla posizione fatta si deduce:

$$\alpha = r^{\frac{r}{r-1}}, \quad \beta = r^{\frac{1}{r-1}} (**).$$

Ora perchè  $\alpha$  a  $\beta$  siano interi, come è ipotesi,  $r$  deve essere intero. Infatti se  $r$  fosse eguale ad una frazione irriducibile  $\frac{m}{n}$  si avrebbero di  $\alpha$  e di  $\beta$  rispettivamente i valori:

(\*) L. c. 1885. - BASSO. Sul tetraedro a facce uguali.

(\*\*) EUCLERO. Introd. II. § 519.

$$\sqrt[r]{\left(\frac{m}{n}\right)^m}, \sqrt[r]{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \text{ nel caso di } m > n$$

e

$$\sqrt[r]{\left(\frac{m}{n}\right)^m}, \sqrt[r]{\left(\frac{m}{n}\right)^n} \text{ nel caso di } m < n$$

che non sono interi. Dovendo dunque  $r$  essere intero, non può essere che eguale a 2, e per conseguenza:

$$\alpha = 4, \beta = 2$$

perchè ogni altro valore intero di  $r$  dà per  $\alpha$  e  $\beta$  valori non interi. Infatti nelle serie dei valori di  $\alpha$  e  $\beta$  per

$$r = 3, 4, 5, \dots, s, s + 1, \dots$$

che sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad 3 \sqrt[3]{3}, \quad 4 \sqrt[4]{4}, \quad 5 \sqrt[5]{5}, \dots, (s+1) \sqrt[s]{s+1}, \dots \\ \beta) & \quad \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[4]{4}, \quad \sqrt[5]{5}, \dots, \sqrt[s]{s+1}, \dots \end{aligned}$$

non s'incontra mai un intero; giacchè se potesse essere:

$$\sqrt[s]{s+1} = i$$

e quindi:

$$[1] \quad i^s = s + 1$$

con  $i$  intero ed  $s \geq 2$ , dovrebbe necessariamente essere  $i > 1$  e posto  $i = 1 + h$  dovrebbe  $h$  essere intero e soddisfare alla condizione:

$$[2] \quad h \geq 1$$

e la (1) diverrebbe:

$$[3] \quad (1 + h)^s = s + 1.$$

Ora avendosi per la [2]:

$$1 + hs \geq 1 + s$$



si dedurrebbe di qui per la [3]:

$$1 + hs \geq (1 + h)^s$$

ma questo risultato è falso, perchè si sa (\*) che:

$$1 + hs < (1 + h)^s$$

dunque non si può ammettere  $\sqrt[s]{s+1}$  intero.

Roma, 26 aprile 1890.

UGO DAINELLI.

---

### SULL' UGUAGLIANZA $a^b = b^a$ CON $a$ E $b$ INTERI E POSITIVI

---

Nel primo fascicolo di quest'anno il Prof. Besso ha trattato la stessa questione. Tuttavia ho creduto utile ritornarci sopra risolvendola in un modo alquanto più elementare.

1. Consideriamo l'uguaglianza

$$[1] \quad a + b = ab$$

dove  $a$  e  $b$  sono interi positivi, e vediamo per quali valori delle lettere essa è vera. Poiché dividendo ambo i membri per  $a$  o per  $b$ , il primo membro deve mantenersi intero, si riconosce che  $a$  e  $b$  devono essere multipli l'uno dell'altro; ciò vuol dire che deve essere  $a = b$ . Indichiamo con  $c$  il loro comune valore; dalla [1] si ha allora:  $2c = c^2$  e quindi  $c = 2$ .

Pertanto l'uguaglianza [1] ha luogo solo pel valore 2 di  $a$  e  $b$ . Per ogni altra coppia di valori per  $a$  e  $b$  non inferiori a 2, nè entrambi uguali a 2, si ha:

$$a + b < ab$$

cioè: *La somma di due numeri interi e positivi non inferiori a 2 nè*

---

(\*) Vedi qualunque Algebra, p. es. quella del BERTRAND trad. BETTI, pag. 297.

*entrambi uguali a 2, è minore del loro prodotto.* Infatti, uguale non può essere, nè maggiore giacchè, supposto  $a \geq b$ , se è

$$a + b > ab$$

si ha dividendo per  $a$ :

$$1 + \frac{b}{a} > b;$$

ma  $\frac{b}{a} \leq 1$ , quindi sarebbe  $b < 2$  contro l'ipotesi di  $a$  e  $b$  entrambi non inferiori a 2.

*2. La somma di tre numeri interi e positivi non inferiori a 2 è minore del loro prodotto.*

Siano infatti  $a_1, a_2, a_3$  tre di tali numeri e poniamo  $p = a_1 a_2$ ; dovrà essere  $p > 2$  perchè  $a_1$  ed  $a_2$  sono entrambi non inferiori a 2. Sarà quindi, per l'articolo precedente

$$p + a_3 < p a_3.$$

Ma  $p \geq a_1 + a_2$ , quindi sarà in ogni caso

$$a_1 + a_2 + a_3 < a_1 a_2 a_3.$$

Ammettiamo ora che per valori di  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , interi e positivi, non inferiori a 2, si abbia

$$[2] \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_1 a_2 \dots a_n.$$

Posto  $p = a_1 a_2 \dots a_n$ , si vede che deve essere  $p > 2$  perchè ciascuna  $a$  non può essere minore di 2. Indicando pertanto con  $a_{n+1}$  un numero intero e positivo non inferiore a 2, si avrà sempre

$$p + a_{n+1} < p a_{n+1}.$$

Ma per la [2] è  $p > a_1 + a_2 + \dots + a_n$  quindi a fortiori sarà:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} < a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}.$$

Poichè la [2] è vera per il caso di tre termini, essa è vera in generale. Si ha quindi che: *L'uguaglianza:*

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \dots a_n,$$

*in cui le lettere rappresentano interi positivi non inferiori a 2,*



è vera soltanto per  $n = 2$ , cioè nel caso di due numeri, ciascuno dei quali ha allora (per l'articolo precedente) il valore 2.

Posto  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$  si ricava che: L'uguaglianza:

$$a^n = a^n$$

con  $a$  non inferiore a 2 ed  $n > 1$ , non può verificarsi che nel caso di  $a = n = 2$ .

### 3. L'uguaglianza

$$[3] \quad a^b = b^a$$

con  $a$  e  $b$  interi e positivi, ha luogo soltanto quando uno dei numeri è uguale a 2 e l'altro a 4.

Supponiamo  $a > b$  ed indichiamo con  $p$  un divisore primo di  $a$ ; esso dovrà essere, per la [3], divisore anche di  $b$ . Quindi se  $\alpha$  e  $\beta$  sono gli esponenti coi quali il divisore  $p$  entra in  $a$  e  $b$  rispettivamente, dovrà aversi

$$\alpha b = \beta a$$

sempre per la [3]. Ma  $a > b$ , quindi sarà  $\alpha > \beta$ . Segue da ciò che  $a$  è multiplo di  $b$ , perchè contiene tutti i divisori primi di  $b$  con esponenti rispettivamente maggiori. Poniamo adunque

$$[4] \quad a = bq.$$

Sostituendo nella [3] si ottiene

$$(bq)^b = b^{bq},$$

$$\text{cioè [5]} \quad bq = b^q.$$

Ora  $b$  non può essere inferiore a 2, perchè allora la [3] non si verifica, ne  $q = 1$ , perchè altrimenti sarebbe  $a = b$ , contro l'ipotesi di  $a > b$ . Per cui (per il n.º precedente), l'uguaglianza [5] non può verificarsi se non è

$$b = q = 2$$

e quindi in tal caso dalla [4] si ricava

$$a = 4.$$

PROF. LUIGI CARLINI.

---

## DEI CIRCOLI CIRCOSCRITTI AI TRIANGOLI

FORMATI DA  $n$  RETTE POSTE IN UN PIANO

---

§ 1. In quel che segue supporremo sempre che tutti gli angoli, posti in uno stesso piano, siano descritti con rotazioni dello stesso senso e considereremo come eguali due angoli che differiscano per un multiplo di  $360^\circ$  (\*); indicheremo poi

con  $(ab)$  l'angolo formato dalle due rette  $a$  e  $b$  (siccome la direzione dei lati dell'angolo in seguito non sarà determinata, questa notazione indicherà due diversi angoli, differenti di  $180^\circ$ , ma questa ambiguità non avrà nessuna influenza, perchè dell'angolo  $(ab)$  noi considereremo sempre il doppio),

con  $(ACB)$  l'angolo formato dal segmento di retta determinato dai due punti  $A$  e  $C$  col segmento di retta determinato dai due punti  $C$  e  $B$ .

Derivano immediatamente le seguenti conseguenze:

I) se  $C$  è il punto d'intersezione di due rette  $a$  e  $b$ , se inoltre  $A$  è un altro punto della retta  $a$  e  $B$  un altro punto della retta  $b$ , si ha sempre

$$2(ab) = 2(ACB),$$

II) se  $A'C'$  e  $B'C'$  sono due segmenti di retta rispettivamente perpendicolari agli altri due segmenti  $AC$  e  $BC$ , si ha sempre

$$2(A'C'B') = 2(ACB),$$

III) condizione necessaria e sufficiente affinchè tre punti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , in ordine non determinato, siano sopra una retta è che si abbia

$$2(ABC) = 0,$$

---

(\*) Cfr. BALTZER - *Planimetria*, § 2, 4.



IV) condizione necessaria e sufficiente affinchè quattro punti  $A, B, C, D$ , in ordine non determinato, siano sopra una circonferenza è che si abbia (\*)

$$2(ACB) = 2(ADB).$$

§ 2. *Quattro rette poste in un piano, prese a tre a tre, determinano quattro triangoli: le quattro circonferenze circoscritte a questi triangoli*

I) *passano per un punto.*

II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza (\*\*).*

Prima di tutto stabiliamo d'indicare

con  $a_1, a_2, a_3, a_4$  le quattro rette,

con  $p, q, r, s$  i quattro numeri 1, 2, 3, 4 in qualunque ordine,

con  $C_{p,q}^4$  il punto d'intersezione delle due rette, che restano, quando si escludano le due rette  $a_p$  e  $a_q$  (\*\*),

con  $C_p^4$  il centro della circonferenza circoscritta al triangolo che resta, quando si escluda la retta  $a_p$ ,

con  $P^4$  il punto pel quale devono passare le quattro circonferenze  $C_1^4, C_2^4, C_3^4, C_4^4$ ,

con  $C^4$  il centro della circonferenza sulla quale si debbono trovare i centri di queste quattro circonferenze;  
ed osserviamo che si avrà sempre

$$[1] \dots \dots \dots 2(C_{p,s}^4 C_{r,s}^4 C_{q,s}^4) = 2(a_q a_p),$$

perchè  $C_{r,s}^4$  è l'intersezione delle due rette  $a_p$  ed  $a_q$  e i punti  $C_{p,s}^4$  e  $C_{q,s}^4$  si trovano rispettivamente sulla prima e sulla seconda di queste rette (§ 1, I).

Ciò preposto passiamo a dimostrare separatamente la I e la II parte del teorema enunciato.

I) condizione necessaria e sufficiente affinchè le quattro circonferenze passino pel punto  $P^4$  è che si abbia (§ 1, IV)

(\*) Cfr. BALTZER - l. c. § 4, 3.

(\*\*) Questo teorema è dovuto allo STEINER, il quale ne propose la dimostrazione nel T. XVIII (pag. 302) degli *Annales des Mathématiques*. Della prima parte si conoscono varie dimostrazioni (Cfr. BALTZER - l. c. § 4, 7 — MIQUEL - *Journal des Mathématiques*, T. III pag. 455); ma la dimostrazione qui esposta offre il vantaggio di poter essere estesa ai casi che considereremo in seguito.

(\*\*\*) La scelta di questa notazione, che in questo primo caso rende un poco più laboriosa la esposizione, sarà giustificata da quel che segue.

$$[2] \dots \dots \dots 2 (C_{p,s}^1 P^1 C_{q,s}^1) = 2 (C_{p,s}^1 C_{r,s}^1 C_{q,s}^1),$$

la quale, per la [1], equivale all'altra

$$[3] \dots \dots \dots 2 (C_{p,s}^1 P^1 C_{q,s}^1) = 2 (a_q a_p).$$

Consideriamo due qualunque di quelle quattro circonferenze, per es.  $C_1^1$  e  $C_2^1$ : queste hanno in comune il punto  $C_{1,2}^1$  e un altro punto, ma le altre due circonferenze  $C_3^1$  e  $C_4^1$  non passano, in generale, per  $C_{1,2}^1$  dunque quest'altro punto dev'essere  $P^1$ ; quindi, per dimostrare quanto ci siamo proposto, potremo supporre vera la [3] quando ad  $s$  si attribuiscono i valori 1 e 2, e far vedere che essa è vera anche quando a questa lettera si attribuiscono i valori 3 e 4. Basterà limitarsi al primo di questi valori, perchè un ragionamento analogo varrà per l'altro; inoltre, posto  $s = 3$ , basterà dimostrare che la [3] è vera quando a  $p$  e a  $q$  si attribuiscono ordinatamente i valori 1 e 2, ossia che si ha

$$[4] \dots \dots \dots 2 (C_{1,3}^1 P^1 C_{2,3}^1) = 2 (a_2 a_1)$$

perchè allora sarà pure, per la [1],

$$2 (C_{1,3}^1 P^1 C_{2,3}^1) = 2 (C_{1,3}^1 C_{3,4}^1 C_{2,3}^1),$$

cioè il punto  $P^1$  assieme ai tre punti  $C_{1,3}^1 C_{2,3}^1 C_{3,4}^1$  sarà sulla circonferenza  $C_3^1$  e quindi la [2], e per conseguenza la [3], sarà vera anche quando alle lettere  $p$  e  $q$  si attribuiscono due qualunque dei tre valori 1, 2 e 4.

Osserviamo perciò che la [4] equivale all'altra

$$2 (C_{1,3}^1 P^1 C_{1,2}^1) + 2 (C_{1,2}^1 P^1 C_{2,3}^1) = 2 (a_2 a_1);$$

ora, essendo i quattro punti  $C_{1,2}^1 C_{1,3}^1 C_{1,4}^1 P^1$  tutti sulla circonferenza  $C_1^1$ , si ha

$$2 (C_{1,3}^1 P^1 C_{1,2}^1) = 2 (C_{1,3}^1 C_{1,4}^1 C_{1,2}^1),$$

e analogamente

$$2 (C_{1,2}^1 P^1 C_{2,3}^1) = 2 (C_{1,2}^1 C_{2,4}^1 C_{2,3}^1),$$

dunque dovrà essere

$$2 (C_{1,3}^1 C_{1,4}^1 C_{1,2}^1) + 2 (C_{1,2}^1 C_{2,4}^1 C_{2,3}^1) = 2 (a_2 a_1).$$



Ma, per la [1], si ha

$$2 (C_{1,3}^1 C_{1,4}^1 C_{1,2}^1) = 2 (a_2 a_3) \quad 2 (C_{1,2}^1 C_{2,4}^1 C_{2,3}^1) = 2 (a_3 a_1),$$

onde l'eguaglianza da dimostrare si trasforma nell'altra

$$2 (a_2 a_3) + 2 (a_3 a_1) = 2 (a_2 a_1),$$

la quale è evidente.

II) Si consideri l'angolo  $(C_p^1 C_s^1 C_q^1)$ , siccome il segmento  $C_{p,s}^1 P^1$  è la corda comune delle due circonferenze  $C_p^1$  e  $C_s^1$ , e il segmento  $C_{q,s}^1 P^1$  è la corda comune delle due circonferenze  $C_q^1$ ,  $C_s^1$ , si avrà (§ 1, II)

$$2 (C_p^1 C_s^1 C_q^1) = 2 (C_{p,s}^1 P^1 C_{q,s}^1)$$

e quindi per la [3]

$$[5] \dots \dots \dots 2 (C_p^1 C_s^1 C_q^1) = 2 (a_q a_p).$$

Questa eguaglianza dimostra la seconda parte del teorema, perchè per essa si avrà

$$2 (C_p^1 C_s^1 C_q^1) = 2 (C_p^1 C_r^1 C_q^1).$$

§ 3. Dopo avere stabilite notazioni analoghe a quelle del § prec. e con analogo ragionamento si dimostra facilmente quest'altro teorema:

*Cinque rette poste in un piano, prese a quattro a quattro, determinano pel teorema precedente cinque circonferenze: queste cinque circonferenze*

- I) *passano per un punto,*
- II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza.*

Vogliamo ora dimostrare che si ha il teorema generale

*n rette poste in un piano, prese a  $n - 1$  a  $n - 1$ , determinano col procedimento precedente n circonferenze: queste n circonferenze*

- I) *passano per un punto,*
- II) *hanno i loro centri sopra un'altra circonferenza.*

Ci serviremo del metodo d'induzione. Perciò, stabilito d'indicare

con  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  le  $n$  rette,

con  $p, q, r, \dots, v$  i numeri  $1, 2, 3, \dots, n - 1$  presi in

qualunque ordine,

con  $p, q, r, \dots, w$  i numeri  $1, 2, 3, \dots, n$  presi pure in ordine qualunque,

con  $C_{p,q}^{n-1}$  il centro della circonferenza determinata col procedimento precedente dalle  $n - 3$  rette che restano, quando dalle  $n - 1$  rette  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  si escludano le due rette  $a_p$  ed  $a_q$  (nel caso di  $n = 5$  questo punto è l'intersezione di due rette),

con  $C_p^{n-1}$  il centro della circonferenza determinata nello stesso modo dalle  $n - 2$  rette che restano quando dalle stesse  $n - 1$  rette si escluda la retta  $a_p$  solamente,

ammetteremo che si abbiano le due ugnaglianze

$$[6] \dots \dots 2 (C_{p,v}^{n-1} P^{n-1} C_{q,v}^{n-1}) = 2 (C_{p,v}^{n-1} C_{r,v}^{n-1} C_{q,v}^{n-1}) \quad (\text{Cfr. la [2]}),$$

$$[7] \dots \dots 2 (C_p^{n-1} C_v^{n-1} C_q^{n-1}) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [5]}),$$

dalle quali risulta dimostrato il nostro teorema per  $n - 1$  rette ( $P^{n-1}$  indica il punto pel quale passano le  $n - 1$  circonferenze), e faremo vedere come, stabilite notazioni analoghe alle precedenti, da queste derivino necessariamente le altre due

$$[8] \dots \dots 2 (C_{p,w}^n P^n C_{q,w}^n) = 2 (C_{p,w}^n C_{r,w}^n C_{q,w}^n),$$

$$[9] \dots \dots 2 (C_p^n C_w^n C_q^n) = 2 (a_q a_p),$$

che dimostrano appunto il nostro teorema per  $n$  rette.

Premettiamo che nella nostra ipotesi si avrà sempre

$$[10] \dots \dots 2 (C_{p,w}^n C_{r,w}^n C_{q,w}^n) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [1]}),$$

perchè, se dalle  $n$  rette  $a_1, a_2, \dots, a_n$  si esclude la retta  $a_w$ , restano le  $n - 1$  rette  $a_p, a_q, \dots, a_r$  e allora si vede che questa [10] non è altro che la [7] scritta sotto altra forma; in forza di questa [10] la [8] equivale all'altra

$$[11] \dots \dots 2 (C_{p,w}^n P^n C_{q,w}^n) = 2 (a_q a_p) \quad (\text{Cfr. la [3]}).$$

1) Ciò posto cominciamo dal dimostrare la [11]. Consideriamo perciò due qualunque delle  $n$  circonferenze  $C_1^n, C_2^n, \dots, C_n^n$ , p. es.  $C_1^n, C_2^n$ , la prima delle quali (per quanto si è ammesso) passa per gli  $n - 1$  punti  $C_{1,2}^n, C_{1,3}^n, C_{1,4}^n, \dots, C_{1,n}^n$  e la seconda per gli  $n - 1$  punti  $C_{2,2}^n, C_{2,3}^n, C_{2,4}^n, \dots, C_{2,n}^n$ : queste due circonferenze hanno in comune il punto  $C_{1,2}^n$  e un altro punto, ma le altre  $n - 2$  circon-



ferenze  $C_3^n, C_4^n, \dots, C_n^n$  non passano in generale per  $C_{1,2}^n$  dunque quest'altro punto deve essere  $P^n$ ; quindi, per dimostrare quanto ci siamo proposto, potremo supporre vera la [11] quando a  $w$  si attribuiscono i valori 1 e 2 e far vedere che essa è vera anche quando a questa lettera si attribuiscono i valori 3, 4,  $\dots, n$ . Basterà, come precedentemente, limitarsi al primo di questi valori, perchè un ragionamento analogo varrà per gli altri  $n - 3$ ; inoltre, posto  $w = 3$ , basterà dimostrare che la [11] è vera quando a  $p$  e a  $q$  si attribuiscono ordinatamente i valori 1 e 2, ossia che si ha

$$[12] \dots \dots \dots 2 (C_{1,3}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1),$$

perchè allora sarà pure, per la [10],

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (C_{1,3}^n C_{3,r}^n C_{2,3}^n), (r = 4, 5, \dots, n),$$

cioè il punto  $P^n$  assieme agli  $n - 1$  punti  $C_{3,r}^n$  ( $r = 4, 5, \dots, n$ ) sarà sulla circonferenza  $C_3^n$ , e quindi la [8], e per conseguenza la [11], sarà vera anche quando alle lettere  $p$  e  $q$  si attribuiscono due qualunque degli  $n - 1$  valori 1, 2, 4, 5,  $\dots, n$ .

Osserviamo perciò che la [12] equivale all'altra

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{1,2}^n) + 2 (C_{1,2}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1),$$

ora, essendo i quattro punti  $C_{1,2}^n, C_{1,3}^n, C_{1,4}^n, P^n$  sulla circonferenza  $C_1^n$ , si ha

$$2 (C_{1,3}^n P^n C_{1,2}^n) = 2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n),$$

e analogamente

$$2 (C_{1,2}^n P^n C_{2,3}^n) = 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n),$$

dunque dovrà essere

$$2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n) + 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n) = 2 (a_2 a_1).$$

Ma per la [10] si ha

$$2 (C_{1,3}^n C_{1,4}^n C_{1,2}^n) = 2 (a_2 a_3), \quad 2 (C_{1,2}^n C_{2,4}^n C_{2,3}^n) = 2 (a_3 a_1),$$

onde l'eguaglianza da dimostrarsi anche qui si trasforma nell'altra

$$2 (a_2 a_3) + 2 (a_3 a_1) = 2 (a_2 a_1),$$

che è evidente.

II) Passiamo a dimostrare la [9]. Siccome il segmento  $C_{p,w}^m P^n$  è la corda comune alle due circonferenze  $C_p^m$  e  $C_w^m$  e il segmento  $C_{q,w}^m P^n$  è la corda comune alle due circonferenze  $C_q^m$  e  $C_w^m$ , si ha subito

$$2 (C_p^m C_w^m C_q^m) = 2 (C_{p,w}^m P^n C_{q,w}^m);$$

da questa e dalla [11] risulta immediatamente la [9] in questione.

§ 4. Dietro le considerazioni precedenti si conclude che

*n rette poste in un piano (supposto  $n > 4$ ) determinano generalmente un punto e una circonferenza,*

punto e circonferenza che si trovano col procedimento indicato.

Le considerazioni del CLIFFORD (\*), che hanno per punto di partenza la sola prima parte del teorema del § 2, conducono invece a questa conclusione:

*n rette poste in un piano determinano un punto, se n è pari, e una circonferenza, se n è dispari,*

punto e circonferenza che, tolto il caso di  $n = 4$ , si determinano con un procedimento diverso dal nostro.

§ 5. Termineremo col dimostrare anche il seguente teorema:

*La circonferenza determinata da quattro rette, passa pel punto determinato dalle stesse quattro rette;*

questo teorema, pure dovuto allo STEINER (l. c. al § 2), si verifica solo in questo caso, ossia

*la circonferenza determinata da più di quattro rette non passa, in generale, pel punto determinato dalle stesse rette.*

Affinchè la circonferenza  $C^n$  passi pel punto  $P^n$  è condizione necessaria e sufficiente che si abbia

$$2 (C_p^m C_q^m P^n) = 2 (C_p^m C_r^m P^n).$$

Ora:  $C_{p,q}^m P^n$  è la corda comune alle due circonferenze  $C_p^m$  e  $C_q^m$  quindi

$$2 (C_p^m C_q^m P^n) = (C_{p,q}^m C_q^m P^n),$$

ma i punti  $C_{p,q}^m C_{q,r}^m P^n$  sono tutti sulla circonferenza  $C_q^m$  quindi anche

$$(C_{p,q}^m C_q^m P^n) = 2 (C_{p,q}^m C_{q,r}^m P^n),$$

(\*) Cfr. *Il senso comune nelle Scienze Esatte* - Ed. Dumolard, Milano.



per cui

$$2 (C_p^m C_q^m P^n) = 2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n P^n)$$

e analogamente

$$2 (C_p^m C_r^m P^n) = 2 (C_{p,r}^n C_{q,r}^n P^n).$$

Dietro queste due uguaglianze la condizione precedente si trasforma nell'altra

$$2 (C_{p,q}^m C_{q,r}^n P^n) = 2 (C_{p,r}^m C_{q,r}^n P^n),$$

ossia

$$2 (C_{p,q}^m C_{q,r}^n P^n) + 2 (P^n C_{q,r}^n C_{p,r}^m) = 0,$$

ossia

$$2 (C_{p,q}^m C_{q,r}^n C_{p,r}^m) = 0.$$

Questa condizione è certamente verificata per  $n = 4$ , perchè allora i punti  $C_{p,q}^4, C_{q,r}^4, C_{p,r}^4$  sono tutti sulla retta  $a_s$  (§ 1, III). Resta a dimostrarsi che essa non può, in generale, essere verificata per  $n > 4$ .

Dopo avere, al solito, convenuto di indicare con  $C_{p,q,r}^m$  il centro della circonferenza determinata dalle  $n - 3$  rette, che restano, quando si escludano le rette  $a_p, a_q, a_r$ , e con  $P_p^n$  il punto determinato dalle  $n - 1$  rette, che restano, quando si escluda la retta  $a_p$ , si osservi che, essendo  $C_{p,q,r}^n P_q^n$  la corda comune alle due circonferenze  $C_{p,q}^m$  e  $C_{q,r}^m$ , e  $C_{p,q,r}^n P_r^n$  la corda comune alle due circonferenze  $C_{q,r}^m$  e  $C_{p,r}^m$ , sarà

$$2 (C_{p,q}^n C_{q,r}^n C_{p,r}^n) = 2 (P_q^n C_{p,q,r}^n P_r^n)$$

e che quindi la condizione da verificarsi diventa

$$2 (P_q^n C_{p,q,r}^n P_r^n) = 0.$$

Ma questa, in generale, non è vera perchè i tre punti  $P_p^n, C_{p,q,r}^n, P_r^n$  sono sulla circonferenza  $C_{q,r}^m$  e quindi, in generale, non sono in linea retta, onde anche la seconda parte del teorema è dimostrata.

GIUSEPPE PESCI.

## TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE FISICO-MATEMATICA (\*)

ESTATE 1890, I). — *Un cilindro e un tronco di cono hanno a comune una base e l'altezza, e il rapporto dei loro volumi è il numero a. Trovare il rapporto dei raggi delle due basi del tronco di cono e discutere il risultato.*

Chiamando  $R, r$  i raggi delle basi del tronco, e supponendo che la base comune ai due solidi sia quella di raggio  $R$ , l'equazione a cui dà luogo il problema è

$$R^2 = \frac{a}{3} (R^2 + r^2 + Rr),$$

la quale, ponendo  $r : R = \rho$ , si trasforma nella seguente

$$a\rho^2 + a\rho + a - 3 = 0.$$

Si ha dunque

$$\rho = \frac{-a + \sqrt{12a - 3a^2}}{2a} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{a} - \frac{3}{4}}. \quad [1]$$

Poichè  $\rho$  è quantità di sua natura positiva, non solo devesi prendere, come si è fatto, il segno  $+$  pel radicale, ma conviene inoltre che  $a$  sia tale che si abbia  $12a - 3a^2 \geq a^2$ , ossia  $a \leq 3$ ; così  $a$  può assumere qualunque valor positivo da 0 a 3. Per  $a = 1$  segue, per l'ultimo membro della [1],  $\rho = 1$  e per  $a > 1$  si ha  $\rho < 1$  e viceversa, così per  $a > 1$  è  $r < R$  ciò che viene a supporre il cilindro eretto sulla base maggiore del tronco, mentre per  $a < 1$  è  $r > R$  ed il cilindro ha per base la base minore del tronco. Finalmente per  $a = 3$  si ha  $\rho = 0$ , quindi  $r = 0$  (escludendo  $R = \infty$ ): la base superiore del tronco si riduce così ad un punto.

(\*) Il lettore potrà notare che i due primi temi che seguono sono quelli assegnati per la licenza nella sessione d'esami testè chiusa. Debiamo poi l'enuncelato di gli altri quesiti alla cortesia del Ch.mo Prof. M. Misani, preside del R. Istituto tecnico di Udine, al quale siamo lieti di poter rendere pubbliche grazie.



ESTATE 1890, II). — *Un cono cavo contiene n sfere collocate l'una sopra l'altra, in modo che ciascuna sfera tocca la sfera che le sta sotto, quella che le sta sopra e la superficie interna del cono. Conoscendo il raggio della sfera suprema e la distanza del suo centro dal vertice del cono, trovare il raggio e la distanza analoga per un'altra qualunque delle sfere; e dimostrare che i raggi delle sfere formano una progressione geometrica; che le distanze dei centri dal vertice formano un'altra progressione geometrica e che le due progressioni hanno la stessa ragione.*

Siano:  $r_1$  il raggio della sfera suprema,  $a_1$  la distanza del suo centro dal vertice del cono;  $r_n$  ed  $a_n$  gli analoghi elementi per la  $n^{\text{esimo}}$  sfera. È chiaro che si avrà

$$r_2 - r_1 : r_1 = a_2 - a_1 : a_1$$

e per essere  $a_2 - a_1 = r_2 + r_1$ ,

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}$$

Dalla relazione  $a_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot a_1$ , si ricava poi

$$a_2 = a_1 \cdot \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}$$

Similmente deducesi

$$r_3 = r_2 \cdot \frac{a_2 + r_2}{a_2 - r_2} = r_2 \cdot \frac{\frac{r_2}{r_1} a_1 + r_2}{\frac{r_2}{r_1} a_1 - r_2} = r_1 \cdot \left( \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^2,$$

$$r_4 = r_1 \left( \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^3, \dots \quad r_n = r_1 \left( \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^{n-1}$$

e

$$a_3 = a_2 \cdot \frac{a_2 + r_2}{a_2 - r_2} = a_1 \left( \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^2, \dots \quad a_n = a_1 \left( \frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1} \right)^{n-1}.$$

Dai valori ottenuti per  $r_n$  ed  $a_n$ , che rispondono al quesito, segue poi che i raggi delle sfere formano una progressione geometrica, che le distanze dei centri dal vertice del cono formano un'altra progressione geometrica e che le due progressioni hanno la stessa ragione

$$\frac{a_1 + r_1}{a_1 - r_1}.$$

ESTATE 1889, II). — È data la somma  $a$  di tre numeri  $x, y, z$  in progressione aritmetica ed è dato il loro prodotto  $b$ ; trovare questi numeri e discutere i risultati.

Risposta. I numeri cercati sono

$$x = \frac{a}{3} + \sqrt{\frac{a^3 - 27b}{9a}}, \quad y = \frac{a}{3}; \quad z = \frac{a}{3} - \sqrt{\frac{a^3 - 27b}{9a}}$$

Il problema ha due soluzioni che conducono agli stessi numeri, salvo il loro ordine. I numeri cercati sono reali se  $a^3 \geq 27b$ , immaginari nel caso contrario. Essendo poi  $\frac{a^3 - 27b}{9a} = \frac{a^2}{9} - 3\frac{b}{a}$  si vede che  $a$  e  $b$  possono avere qualunque segno, senza che perciò il problema sia impossibile, mentre se  $a$  e  $b$  hanno segni contrari i numeri cercati sono sempre reali.

ESTATE 1871, a). — Dimostrare la relazione trigonometrica

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}(a + b) = 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}.$$

Dalle formule

$$\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}, \quad \operatorname{sen}(a+b) = 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

si ha subito

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b - \operatorname{sen}(a+b) &= 2 \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \left\{ \cos \frac{a-b}{2} - \cos \frac{a+b}{2} \right\} \\ &= 4 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \operatorname{sen} \frac{b}{2} \operatorname{sen} \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

(Continua).

A. LUGLI.

## ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI PER LA LICENZA LICEALE (\*)

1. Dati i quadrati  $q_1, q_2, q_3$  delle bisettrici degli angoli d'un triangolo e i rettangoli  $r_1, r_2, r_3$  dei segmenti in cui ciascun lato è diviso dalla bisettrice dell'angolo opposto, calcolare la lunghezza dei tre lati e dimostrare che in ogni triangolo rettangolo, la somma del quadrato

(\*) La redazione ringrazia quei Signori Presidi e Insegnanti che ebbero la gentilezza di comunicarle i temi che seguono.



della bisettrice dell'angolo retto, col rettangolo dei segmenti in cui l'ipotenusa resta divisa è doppia dell'area del triangolo.

2. Valendosi della nota proprietà delle radici dell'equazione di secondo grado, si dimostri che la somma ed il prodotto delle radici dell'equazione

$$q x^2 - p(1 - q)x + q^2 = 0$$

sono rispettivamente la somma delle radici delle equazioni:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= 0 \\ qx^2 - px + 1 &= 0 \end{aligned}$$

e il prodotto delle radici di questa, per le terze potenze delle radici dell'altra.

3. Se da un punto di un cerchio si calano le perpendicolari su due tangenti che si tagliano e la perpendicolare sulla retta che passa per i punti di contatto, questa terza perpendicolare è media proporzionale tra le altre due.

4. I centri delle facce d'un cubo, son vertici d'un ottaedro regolare, e viceversa i piani condotti per due vertici opposti d'un ottaedro e paralleli al piano degli altri quattro vertici, sono facce di un cubo.

Un cubo è equivalente a sei volte l'ottaedro regolare avente per vertici i centri delle facce di esso.

(*R. Liceo di Benevento*).

1. Descrivere con raggio dato un circolo tangente ad una retta e a una circonferenza data.

2. Costruire un triangolo conoscendosi un lato, un angolo ed un' altezza.

3. Un corriere percorre nel tempo  $t$  e colla velocità costante  $v$  il perimetro di un triangolo rettangolo di cui si conosce l'ipotenusa, calcolare i cateti.

4. Segare una sfera con un piano tale che l'area del circolo massimo sia media proporzionale fra le calotte determinate dal piano.

(*R. Liceo di Brescia*).

1. Dimostrare che prolungando i lati  $AB$  e  $CD$  di un rettangolo dato  $ABCD$ , di una medesima lunghezza  $x$  ed i lati  $BC$  e  $DA$  di una medesima lunghezza  $y$ , si ottengono quattro punti che sono vertici di un parallelogrammo, e determinare la relazione che deve esistere fra  $x$  e  $y$  perchè il parallelogrammo diventi una losanga.

2. Determinare il numero dei termini di una progressione aritmetica, nella quale il primo termine vale 10, la ragione 5 e la somma dei termini 175.

(R. Liceo di Casale Monferrato).

1. Inscrivere in un quadrato dato un quadrato, il cui lato sia eguale ed un dato segmento.

Il candidato può risolvere il problema anche con l'aiuto dell'algebra, e ricavare dal risultato ottenuto una costruzione geometrica.

(R. Liceo di Ferrara).

1. Un numero è formato di 3 cifre che sono in progressione geometrica. La somma delle cifre è 13 e se al numero si aggiunge 792 si ottiene il numero scritto con le stesse cifre, ma schierate nell'ordine inverso.

2. Data l'equazione:

$$x^2 - px + 6 = 0,$$

si determini  $p$  in modo che sia

$$x_1^2 + x_2^2 = 24.$$

3. Essendo  $R$  il raggio di una sfera, calcolare l'altezza  $x$  di un cono la cui base è un parallelo della sfera, il vertice è il centro della sfera e la superficie laterale la decima parte della superficie della sfera.

4. Tagliare una sfera con due piani paralleli ed egualmente lontani dal centro della sfera in modo, che la somma delle aree delle due sezioni sia uguale all'area della zona compresa fra i due piani.

(R. Liceo di Foggia).

1. Quali valori bisogna attribuire ad  $a$ ,  $b$ ,  $c$  perchè si abbia identicamente:

$$(a + b)x^2 + (a + c)x + b^2 + c^2 = (m - 3)x^2 + 2x + a^2$$

essendo  $m$  un numero dato?

2. Se  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sono i punti nei quali un piano arbitrario taglia rispettivamente i tre spigoli di un angolo triedro trirettangolo di vertice  $S$ , ed  $S$  ha  $O$  per proiezione nel piano  $ABC$ , il triangolo  $ASB$  è medio proporzionale fra i triangoli  $ABC$  ed  $OAB$ .

(R. Liceo di Lucca).

1. In un cerchio dato si inscriva un quadrangolo convesso e tale che due lati opposti siano uguali a due segmenti dati e che i lati rimanenti siano proporzionali a due altri segmenti dati.



2. Due punti partono in uno stesso istante dal vertice di un angolo retto e ne percorrono i lati con moto uniforme e con le velocità rispettive di  $a$  metri e  $b$  metri al minuto secondo.

Si dimostri che le distanze dei due punti dopo uno, due, tre, quattro. . . secondi formano una progressione per differenza e si calcoli la somma dei primi  $n$  termini di questa progressione.

(*R. Liceo di Mondovì*).

1. Se si inscrive in un triangolo equilatero di lato  $a$  un circolo: in questo circolo un triangolo equilatero, in questo triangolo di nuovo un circolo e così di seguito indefinitamente, si domanda qual'è la somma dei perimetri di tutti i triangoli descritti, escluso quello del triangolo dato.

2. Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze stesse.

(*R. Liceo di Novara*).

1. Costruire un cerchio che passi per due punti dati e tocchi una retta data.

2. Dato un cerchio di centro  $O$ , se si denotano con  $A$  e  $B$  i punti d'intersezione di una tangente qualunque con due tangenti parallele fisse, dimostrare che l'angolo  $A O B$  è retto.

3. Di 20 termini consecutivi di una progressione aritmetica, si conosce la somma dei termini di posto dispari e la somma dei termini di posto pari. Determinare la progressione.

4. Calcolare il volume di una piramide di altezza  $h$ , sapendo che la base è un decagono regolare di lato uguale ad  $a$ .

(*R. Liceo G. Garibaldi di Palermo*).

1. I segmenti che uniscono il punto di mezzo di un lato d'un triangolo con le proiezioni degli estremi di esso lato sulla bisettrice dell'angolo opposto sono uguali alla semidifferenza degli altri due lati del triangolo e comprendono un angolo uguale alla somma degli altri due del triangolo.

2. Costruire un parallelogrammo che abbia un angolo e le distanze dei lati adiacenti dal punto d'incontro delle diagonali eguali, rispettivamente, ad un angolo e a due segmenti dati.

3. La superficie d'un rettangolo è uguale alla  $m^{\text{ma}}$  parte del quadrato della diagonale ed il perimetro del rettangolo è di  $m \cdot a$ : calcolare i lati del rettangolo.

4. La superficie totale di un cono è equivalente a quella d'una sfera che ha il raggio di  $m \cdot a$  e la somma del lato col diametro della base è  $m \cdot b$ . Calcolare lato e raggio della base del cono.

(*R. Liceo V. E. di Palermo*).



1. Per un estremo  $A$  di un diametro  $AB$  di un cerchio dato, condurre una secante  $ACD$  tale che la porzione  $CD$  di essa, che è compresa fra il secondo punto  $C$  in cui essa taglia la circonferenza ed il punto  $D$  in cui essa taglia la tangente in  $B$ , sia uguale alla corda  $BC$ .

2. Se in un triangolo isoscele  $ABC$ , avente il vertice in  $A$ , si conducono le tre altezze  $AD$ ,  $BE$ ,  $CF$ , le quali s'incontrano in  $K$ , la retta  $DF$  sarà tangente alla circonferenza circoscritta al quadrilatero  $AFKE$ .

3. In un cerchio dato si inscrive un quadrato, in questo si inscrive un cerchio, in quest'ultimo un quadrato, e così di seguito. Dimostrare che le aree di questi cerchi formano una serie geometrica, e trovare la somma di questa serie.

4. Trovare due numeri, sapendo che la loro somma, il loro prodotto e la differenza dei loro quadrati sono tre numeri uguali.

(*R. Liceo di Pavia*).

1. Di un triangolo rettangolo si conosce l'area  $a^2$  e il raggio  $r$  del cerchio inscritto. Calcolare i lati.

2. Costruire un triangolo, dato un angolo, l'altezza che parte dal suo vertice e una delle altre due.

(*R. Liceo di Pesaro*).

1. Data l'equazione:

$$\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{x-b}} = \sqrt{\frac{x-a}{x-b}}$$

calcolare, senza risolverla, la somma e la differenza delle terze potenze delle radici, e cercare di qual numero bisogna aumentare le radici affinché l'equazione che ha le medesime radici della data aumentate del detto numero, manchi del secondo termine.

2. Dimostrare algebricamente che l'area di un triangolo rettangolo eguaglia il semiperimetro moltiplicato per il semiperimetro diminuito dell'ipotenusa; e dedurre la risoluzione del problema seguente: Calcolare le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo conoscendo l'area ed il perimetro.

3. Costruire sopra una data base un triangolo isoscele che abbia gli angoli alla base doppi dell'angolo al vertice, e calcolare le altezze del detto triangolo in funzione della base data.

4. Per un punto situato nel piano di un angolo condurre una trasversale tale che il rettangolo dei segmenti di questa retta, intercetti tra il punto dato e i lati dell'angolo, sia equivalente ad un quadrato dato.

(*R. Liceo di Salerno*).



1. Se le basi e le altezze di due piramidi rette sono uguali, saranno rispettivamente uguali anche le facce laterali; e, se queste sono similmente disposte, saranno eguali anche le piramidi.

2. Dividere un dato segmento di retta in due parti tali che il quadrato di una sia il doppio del quadrato dell'altra.

3. Calcolare i lati d'un triangolo rettangolo conoscendo il perimetro  $p$  e l'area  $A$ .

4. Cercare le relazioni che devono sussistere fra i coefficienti  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dell'equazione:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

perchè questa sia soddisfatta da tutte le terne di valori di  $x$ ,  $y$ ,  $z$  che verificano le equazioni

$$x = mz + a, y = nz + b.$$

(R. Liceo di Senigallia).

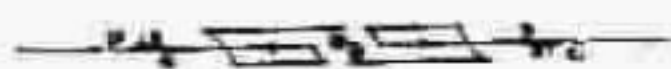
1. Dimostrare che la differenza dei quadrati descritti sopra due lati di un triangolo qualunque, è uguale alla differenza dei quadrati dei segmenti del terzo lato, determinati dalla perpendicolare abbassata su di esso dal vertice dell'angolo opposto.

2. Descrivere una circonferenza che passi per due punti dati ed abbia il centro in una retta data.

3. Il quadrato del maggiore di tre numeri interi consecutivi eguaglia la somma dei quadrati degli altri due numeri. Trovare i tre numeri.

4. Le differenze fra l'ipotenusa e i cateti di un triangolo rettangolo sono 3 e 6. Calcolare i lati.

(R. Liceo di Taranto).



## SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

a), c), 49, 51, 52, 56\*, 57\*, 58\*, 59, 60, 61, 62\* e 63\*.

a). Se i raggi dei cerchi inscritti nelle quattro facce d'un tetraedro sono fra loro eguali, è necessario che le facce stesse siano fra loro eguali?

(D. BESSO).

Soluzione del Prof. F. Palatini.

Siano due triangoli isosceli coi lati eguali misurati dal numero  $a$ , e siano  $b$  e  $b_1$  le misure delle loro basi. Se i raggi dei cerchi inscritti nei due trian-

goli sono eguali fra loro ha luogo l'eguaglianza

$$\frac{b^2(2a-b)}{2a+b} = \frac{b_1^2(2a-b_1)}{2a+b_1}$$

e reciprocamente.

Ora quest'eguaglianza non è soddisfatta soltanto da  $b_1 = b$ , ma anche, posto

$$b = 2ax \quad [1]$$

da

$$b_1 = a \frac{1-x^2 + \sqrt{(1-x^2)(1-x^2+4x)}}{1+x} \quad [2]$$

la quale quantità è sempre reale e positiva e minore di  $2a$ , per essere

$$0 < x < 1.$$

La condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza d'un tetraedro con uno spigolo eguale a  $b$ , lo spigolo opposto eguale a  $b_1$ , e gli altri quattro spigoli eguali ad  $a$ , è data dalla disuguaglianza

$$b^3 + b_1^3 - 4a^3 < 0$$

la quale è soddisfatta dai valori [1], [2]. Da ciò si conclude l'esistenza d'un tetraedro nel quale sono eguali i cerchi inscritti nelle quattro facce, sebbene queste non siano fra loro eguali.

c). *Fra quali limiti devono essere compresi gli angoli di un triangolo affinché si possa costruire un triangolo colle distanze del centro del circolo circoscritto ai tre lati?*

Soluzione del Prof. F. Viaggi (\*).

Sieno  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli di un triangolo  $ABC$ : suppongo  $\alpha$  costante e variabili gli altri due, e inoltre  $\beta > \gamma$ . Le distanze del centro ai tre lati sono proporzionali a  $\pm \cos \alpha, \pm \cos \beta, \cos \gamma$  (va scelto  $-\cos \alpha$  o  $-\cos \beta$ , se  $\alpha$  o  $\beta$  è ottuso). Chiamando  $s$  la somma delle distanze del centro dai lati  $AB, AC$ , e  $d$  la loro differenza, le condizioni affinché il problema sia possibile sono le seguenti: 1°, la distanza del centro dal lato  $BC$  sia minore di  $s$ ; 2°, sia maggiore di  $d$ .

In una circonferenza di raggio 1 prendo un segmento  $BMC$  capace dell'angolo  $\alpha$ , e sia  $M$  il punto medio dell'arco; facendo percorrere ad  $A$  l'arco  $MB$ , avrò tutti i triangoli, a uno dei quali è uguale o simile un qualunque triangolo avente un angolo eguale ad  $\alpha$ .

Sia  $\alpha > 90^\circ$ .

Mentre  $A$  va da  $M$  a  $B$ , la funzione

$$s = \cos \beta + \cos \gamma = 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

(\*) Altre soluzioni pervennero dal Prof. S. Gatti, F. Palatini.



decrese da  $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  ad  $1 - \cos \alpha$ ; e poichè è  $-\cos \alpha < 1 - \cos \alpha$ , la 1.<sup>a</sup> condizione è sempre soddisfatta. La funzione

$$d = \cos \gamma - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \frac{\beta - \gamma}{2}$$

crece da 0 ad  $1 + \cos \alpha$ : perciò

$$\text{se } -\cos \alpha \geq 1 + \cos \alpha, \text{ ossia se } \alpha \geq 120^\circ,$$

anche la 2.<sup>a</sup> condizione è soddisfatta, quindi il problema è possibile sempre;

$$\text{se } -\cos \alpha < 1 + \cos \alpha, \text{ ossia se } \alpha < 120^\circ,$$

esisterà una ed una sola posizione di  $A$  per cui sarà

$$-\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed  $M$  sarà il problema possibile. Ora i valori di  $\cos \gamma$  e  $-\cos \beta$ , che rispondono alla precedente equazione, sono le radici della quadratica

$$2(1 + \cos \alpha)x^2 + 2(1 + \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x + (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

le quali sono reali, perchè per ipotesi  $\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ , e di segni

contrari; e quindi la positiva va presa per valore di  $\cos \gamma$  e la negativa per quello di  $-\cos \beta$ : e le limitazioni, che cerchiamo, sono adunque le seguenti:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left( -\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Sia  $\alpha = 90^\circ$ .

Il problema è evidentemente impossibile.

Sia  $\alpha < 90^\circ$ .

In questa ipotesi prima ci occuperemo dei triangoli acutangoli e poi degli ottusangoli: cioè, se  $C_1$  è il punto diametralmente opposto di  $C$ , facciamo per ora percorrere ad  $A$  l'arco  $MC_1$ ; quindi  $C_1B$ .

Quando  $A$  va da  $M$  a  $C_1$ , la funzione

$$s = \cos \beta + \cos \gamma$$

decrece da  $2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}$  a  $\operatorname{sen} \alpha$ ; e la funzione

$$d = \cos \gamma - \cos \beta$$

crece da 0 a  $\operatorname{sen} \alpha$ . Perciò

$$\text{se } \cos \alpha \geq \sqrt{3} - 1 \left( \text{conseguenza di } \cos \alpha \geq 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \right),$$

$$\text{ossia } \alpha \leq 42^\circ 56' 29'', \dots$$

la 1<sup>a</sup> condizione non è mai soddisfatta: il problema è impossibile

$$\text{se } \sqrt{3} - 1 > \cos \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } 42^\circ \dots < \alpha < 45^\circ,$$

la 2<sup>a</sup> condizione è sempre soddisfatta; ed esisterà una e una sola posizione di A per cui sarà

$$\cos \alpha = s$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed M, sarà soddisfatta anche la 1<sup>a</sup> condizione e quindi il problema sarà possibile: ora i valori di  $\cos \gamma$  e  $\cos \beta$  che risolvono la precedente equazione sono le radici della quadratica

$$2(1 - \cos \alpha) x^2 - 2(1 - \cos \alpha) \cos \alpha \cdot x + (2 \cos^2 \alpha - 1) = 0$$

le quali sono reali, perchè  $\cos \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$  come conseguenza dell'ipotesi

$\cos \alpha < \sqrt{3} - 1$ , e positive; e poichè  $\cos \gamma > \cos \beta$ , la minore delle radici dà il valore di  $\cos \beta$ , l'altra quello di  $\cos \gamma$ . Quindi la limitazione

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} \leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} \geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left( \cos \alpha - \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

$$\text{Se } \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha = 45^\circ,$$

sono verificate 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> condizione; dunque il problema è possibile sempre;

$$\text{se } \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha > 45^\circ,$$

la 1<sup>a</sup> è sempre soddisfatta; ed esiste una ed una sola posizione di A per cui risulta

$$\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella ed M è soddisfatta anche la 2<sup>a</sup> e quindi il problema è possibile; ora i valori di  $\cos \gamma$  e  $-\cos \beta$  che risolvono la precedente equazione sono radici della

$$2(1 + \cos \alpha) x^2 - 2(1 + \cos \alpha) \cos \alpha \cdot x + (2 \cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali, perchè per  $\alpha$  acuto  $\text{sen } \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ , e di segni contrari. Quindi

la limitazione

$$\text{sen } \frac{\alpha}{2} \leq \cos \gamma < \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \text{tang } \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)$$



$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \geq \cos \beta > \frac{1}{2} \left( -\cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Occupiamoci ora dei triangoli ottusangoli.

Mentre  $A$  va da  $C_1$  a  $B$  sull'arco  $C_1 B$ , la funzione

$$s = \cos \gamma - \cos \beta$$

cresce da  $\operatorname{sen} \alpha$  ad  $1 + \cos \alpha$ ; e la funzione

$$d = \cos \gamma + \cos \beta$$

decrece da  $\operatorname{sen} \alpha$  ad  $1 - \cos \alpha$ : perciò

se 
$$\cos \alpha > \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha < 45^\circ,$$

la 2ª condizione è soddisfatta, e per un'unica posizione di  $A$  sarà verificata la equazione

$$\cos \alpha = d$$

e per le posizioni intermedie tra quella e  $B$  sarà soddisfatta anche la 1ª, e quindi il problema sarà possibile. I valori di  $\cos \gamma$  e  $-\cos \beta$  sono radici di

$$2(1 + \cos \alpha)x^2 - 2(1 + \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x - (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali e positive, e poichè  $\cos \gamma > -\cos \beta$ , essendo  $\beta$  ottuso, si hanno le limitazioni

$$1 > \cos \gamma > \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$-\cos \alpha < \cos \beta < -\frac{1}{2} \left( \cos \alpha - \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \operatorname{sen}^4 \frac{\alpha}{2}} \right).$$

Se 
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } \alpha = 45^\circ,$$

il problema è sempre possibile

se 
$$\frac{1}{2} < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ ossia } 60^\circ > \alpha > 45^\circ,$$

la 1ª condizione è soddisfatta; e vi sarà una posizione di  $A$  per cui risulta

$$\cos \alpha = d$$

e per tutte le posizioni intermedie tra quella e  $B$  è verificata anche la 2ª; ma i valori di  $\cos \gamma$  e  $\cos \beta$  che soddisfano l'equazione sono le radici della quadratica

$$2(1 - \cos \alpha)x^2 - 2(1 - \cos \alpha)\cos \alpha \cdot x + (2\cos^2 \alpha - 1) = 0$$

che ha radici reali, perchè  $\cos \frac{\alpha}{2} < \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$  come conseguenza dell'ipotesi  $\cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , e di segni contrari. Quindi le limitazioni sono

$$1 > \cos \gamma > \frac{1}{2} \left( \cos \alpha + \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

$$- \cos \alpha < \cos \beta < -\frac{1}{2} \left( \cos \alpha - \cotg \frac{\alpha}{2} \sqrt{3 - 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} \right)$$

se  $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$ , ossia  $\alpha \geq 60^\circ$

la 2<sup>a</sup> condizione non è mai soddisfatta e quindi il problema è impossibile.

*Scolio.* — Se con le distanze del centro del cerchio circoscritto ad un triangolo dai suoi lati si può costruire un triangolo, o i raggi dei cerchi ex-inscritti sono tutti maggiori del raggio del circoscritto o due sono minori e quindi il terzo maggiore, o reciprocamente; le distanze dei centri dei cerchi ex-inscritti da quello del circoscritto sono o tutte maggiori del lato del triangolo equilatero inscritto in questo, o due minori e l'altra maggiore, e reciprocamente.

49. Dimostrare che, quando  $n$  tende all'infinito, si ha

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2.$$

(D. BESSO).

Dimostrazione del Prof. L. Merante (\*).

Dall'eguaglianza

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

nell'ipotesi  $a > b$ , segue

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} < \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b} < \frac{1}{2\sqrt{b}},$$

e fatto  $a = b + 1$ , abbiamo

$$\frac{1}{2\sqrt{b+1}} < \sqrt{b+1} - \sqrt{b}, \quad [1]$$

$$\frac{1}{2\sqrt{b}} > \sqrt{b+1} - \sqrt{b}. \quad [2]$$

Facendo nella [1]  $b = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e sommando, e nella [2]  $b = 1, 2, \dots, n$  e sommando, otteniamo la limitazione

(\*) Altra dimostrazione pervenne dal Sig. Prof. F. Viaggi.



$$\sqrt{n+1} - \sqrt{1} < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) < \sqrt{n}$$

ossia

$$0 < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \sqrt{1} - \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \sqrt{1} - \sqrt{n+1}$$

e dividendo per  $\frac{1}{2} \sqrt{n}$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + 2 \sqrt{\frac{1}{n}} - 2 \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 2 + 2 \sqrt{\frac{1}{n}} - 2 \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Quando  $n$  tende all'infinito l'ultimo membro tende a zero, quindi

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2.$$

### 51. Risolvere l'equazione

$$\omega^5 + 5 a \omega^3 + 5 a^2 \omega + b = 0. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Soluzione del Prof. U. Scarpis (\*).

Per maggiore semplicità nelle formule di soluzione mettiamo il termine noto sotto la forma  $2b$ : facendo quindi  $x = \alpha + \beta$  si ottiene, come è facile verificare, l'equazione:

$$\alpha^5 + \beta^5 + (\alpha\beta + a)(5\alpha^3 + 10\alpha^2\beta + 10\alpha\beta^2 + 5a\alpha + 5a\beta + 5\beta^3) + 2b = 0$$

la quale sarà soddisfatta qualora si faccia:

$$\alpha^5 + \beta^5 = -2b \quad \alpha \cdot \beta = -a,$$

dalle quali si ricava:

$$\alpha = \sqrt[5]{-b + \sqrt{b^2 + a^5}}, \quad \beta = \sqrt[5]{-b - \sqrt{b^2 + a^5}}.$$

Indicando ora con  $\alpha, \beta$  le radici quinte aritmetiche delle quantità

$$-b + \sqrt{b^2 + a^5}, \quad -b - \sqrt{b^2 + a^5},$$

e con  $\omega$  una radice quinta propria dell'unità, le radici dell'equazione proposta saranno:

$$\alpha + \beta, \alpha\omega + \beta\omega^4, \alpha\omega^2 + \beta\omega^3, \alpha\omega^3 + \beta\omega^2, \alpha\omega^4 + \beta\omega.$$

(\*) Altre soluzioni furono inviate dal Prof. G. Russo, F. Viaggi.

Se  $b^2 + a^5 > 0$ , l'equazione ha una radice reale e quattro complesse coniugate.

Se  $b^2 + a^5 = 0$ , ponendo  $b = -c^5$ ,  $a = -c^2$ , si ha:

$$x^5 - 5c^2x^3 + 5c^4x - 2c^5 = 0$$

ed essendo il primo membro decomponibile nei fattori  $(x - 2c)$ ,  $(x^2 + cx - c^2)^2$ , si vede subito che le radici sono tutte reali e che due di esse sono doppie.

Se  $b^2 + a^5 < 0$  sarà pure  $a < 0$  e ponendo

$$a = -c, \quad -b \pm \sqrt{b^2 - c^5} = -b \pm i\sqrt{c^5 - b^2} = \rho (\cos \gamma \pm i \sin \gamma),$$

da cui:

$$\rho^2 = c^5, \quad \cos \gamma = -\frac{b}{\rho} = -\frac{b}{c^{\frac{5}{2}}}$$

si ha:

$$\alpha = \sqrt[5]{\rho (\cos \gamma + i \sin \gamma)} = c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right) + i c^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right)$$

$$\beta = \sqrt[5]{\rho (\cos \gamma - i \sin \gamma)} = c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right) - i c^{\frac{1}{2}} \sin \left( \frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right)$$

e quindi in fine:

$$\alpha + \beta = 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 2k\pi}{5} \right).$$

Dando ora a  $k$  successivamente i valori 0, 1, 2, 3, 4 si ottengono cinque valori differenti di  $\alpha + \beta$  i quali soddisfanno l'equazione proposta, e siccome essa è del quinto grado, saranno le radici cercate. Le formule che somministrano le dette radici sono le seguenti:

$$2c^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\gamma}{5}, \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 2\pi}{5} \right), \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 4\pi}{5} \right), \quad 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 6\pi}{5} \right), \\ 2c^{\frac{1}{2}} \cos \left( \frac{\gamma + 8\pi}{5} \right),$$

dalle quali si deduce che anche in questo caso sono tutte reali.

## 52. Risolvere l'equazione

$$x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Soluzione del Prof. U. Scarpis (\*).

Ponendo egualmente il termine noto sotto la forma  $2b$  e facendo  $x = \alpha + \beta$ , si ottiene l'equazione:

$$\alpha^7 + \beta^7 + 2b + 7(\alpha\beta + a)(\alpha^5 + 3\alpha^4\beta + 5\alpha^3\beta^2 + 5\alpha^2\beta^3 + 3\alpha\beta^4 + \beta^5) + \\ 7(\alpha\beta + a) \{ a(2\alpha^3 + 5\alpha\beta^2 + 5\alpha^2\beta + 2\beta^3) + a^2(\alpha + \beta) \} = 0$$

(\*) Altre soluzioni furono inviate dai Prof. G. Russo, F. Viaggi.



che sarà soddisfatta qualora si abbia:

$$\alpha^7 + \beta^7 = -2b, \quad \alpha\beta = -a,$$

dalle quali si ricava:

$$\alpha = \sqrt[7]{-b + \sqrt{b^2 + a^7}} \quad \beta = \sqrt[7]{-b - \sqrt{b^2 + a^7}}.$$

Limitando ora il significato di  $\alpha, \beta$  al solo valore aritmetico delle precedenti radici settime ed indicando con  $\omega$  una radice settima propria dell'unità, si scorge che le radici dell'equazione proposta si possono ottenere dall'espressione:

$$\alpha \cdot \omega^\mu + \beta \omega^\nu$$

dando a  $\mu$  e  $\nu$  tutti quei valori interi e positivi che soddisfano la relazione:  $\mu + \nu = 7$ .

La completa analogia con la questione precedente rende superflua la discussione delle formule di soluzione.

**56°.** Dimostrare che, indicando con  $A, B, C, D$  quattro vertici consecutivi d'un poligono regolare, si ha

$$\overline{AC^2} = AB \times (AB + AD). \quad (\text{D. Besso}).$$

Dimostrazione del Sig. *G. Scarpini*, allievo dell'Istituto tecnico di Catanzaro.

Sul prolungamento della  $CB$  si abbassi da  $A$  la perpendicolare  $AE$ ; allora, dal triangolo  $ABC$  ottusangolo in  $B$ , si ha:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BE,$$

ma si sa che  $BC = AB$  ed è facile vedere che

$$BE = \frac{1}{2} (AD - AB),$$

quindi la precedente relazione diviene:

$$\overline{AC^2} = 2AB^2 + AB(AD - AB) = AB^2 + AB \times AD = AB(AB + AD).$$

Dimostrazione del Sig. *G. Marcantoni*, allievo del R. Liceo di Modena.

Siano  $A, B, C, D$  (Fig. 6) i quattro vertici consecutivi di un poligono regolare. Si unisca  $B$  con  $D$ , e, prolungato  $AD$  in  $E$ , per modo che sia  $DE \equiv AB$ , si unisca  $C$  con  $E$ .

Considerando ora i due triangoli  $ABC, BCD$ , si vede che questi sono uguali ed isosceli. Sarà quindi  $\text{ang. } BAC \equiv \text{ang. } CBD$ .

Parimenti si può dimostrare facilmente che sono uguali i due triangoli  $ABD$  e  $ACD$ . E che è  $\text{ang. } BDA \equiv \text{ang. } CAD$ .

Sarà, per conseguenza, anche l'intero  $\text{ang. } BAD \equiv$  all'intero  $\text{ang. } CDA$ .

Ora si osservi che nel quadrilatero  $ABCD$ , gli angoli sono a due a due

uguali. E siccome fra tutti e quattro devono essere uguali a quattro retti, due di essi, presi dalle due coppie di angoli uguali, devono sommare due retti. Cioè sarà:  $\text{ang. } BAD + ABC \equiv 2 \text{ retti}$ .

Le rette  $BC$ ,  $AD$  devono dunque essere parallele; e l'angolo  $BCA$  deve essere uguale all'angolo  $CAD$  e l'angolo  $CDE \equiv BCD$ . Si dimostra quindi facilmente che i due triangoli  $ABC$ ,  $CDE$  sono uguali ed isosceli, e che è  $\text{ang. } CED \equiv BCA$  ed anche che è:  $\text{ang. } CED \equiv CAE$ .

Da tutto questo si ricava che il triangolo  $ACE$  è isoscele ed ha gli angoli alla base uguali agli angoli alla base del triangolo isoscele  $ABC$ ; e che quindi i due triangoli sono simili.

Sussisterà quindi la proporzione:

$$AB : AC = AC : AE \text{ ossia } AB : AC = AC : (AD + DE).$$

Ma  $DE \equiv AB$ . Quindi  $AB : AC = AC : (AD + AB)$ .

Ed essendo il prodotto dei medi uguale a quello degli estremi, si ricava

$$\overline{AC^2} \equiv AB (AD + AB).$$

c. d. d.

Dimostrazione del Sig. *P. Marano* studente a Catania (\*).

Tiro dai punti  $B$  e  $C$  le perpendicolari  $BE$  e  $CF$  sulla  $AD$ . Applicando al triangolo rettangolo  $ACF$  il teorema di Pitagora, si ha:

$$\overline{AC^2} = \overline{AF^2} + \overline{CF^2}.$$

Sostituendo in questa eguaglianza ad  $\overline{AF^2}$  il suo equivalente  $(AE + EF)^2$ , sviluppando e riducendo, si ottiene:

$$\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + \overline{AB^2} + 2AE \times AB = AB (AB + AB + 2AE).$$

E siccome  $AE = DF$ , sarà  $AB + 2AE = AD$ .

Sostituendo risulta:

$$\overline{AC^2} = AB \times (AB + AD) \text{ c. d. d.}$$

*Osservazione.* — La relazione data si può dimostrare immediatamente applicando il teorema di Tolomeo al quadrilatero inscrittibile  $ABCD$ , poichè essa può scriversi:

$$\overline{AC^2} = \overline{AB^2} + AB \times AD.$$

(\*) I Sigg. *G. Alessio*, *G. Bitonti*, *L. Isola*, *S. Martucci*, *F. Tallarico* (Istituto tecnico Catanzaro), *A. Colanni* (R. Liceo Parini Milano), *A. Graciotti* (Scuola tecnica Osimo), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *M. Righetto* (Istituto tecnico Spezia), *P. Rizzuti* (R. Liceo Catanzaro), *E. Segrè* (R. Liceo Modena), *G. L'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti), hanno dimostrato che il teorema proposto è un corollario di quello di Tolomeo sul quadrangolo inscritto.

Altre dimostrazioni sono pervenute dal Sig. *A. Sidoli* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia), *P. Patrassi* (R. Istituto tecnico Terni), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *E. Gabrielli* (R. Scuola tecnica Velletri), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *R. Luvadori* e *G. Prinzi* (R. Istituto tecnico Roma).



Si può notare che la condizione che i punti  $A, B, C, D$  siano vertici consecutivi d'un poligono regolare non è necessaria; basterà che i detti punti siano situati sopra una stessa circonferenza di circolo e che sia  $AB = BC = CD$ .

**57.** *Dimostrare che, se un triedro ha un diedro retto, la somma dei coseni dei tre angoli piani non può essere uguale a  $-1$ .* (D. BESSO).

Dimostrazione del Sig. *G. Michele Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti (\*).

Chiamando con  $a, b, c$  le misure dei tre angoli piani, il primo opposto e gli altri due adiacenti al diedro retto, dalla trigonometria sferica si ha la formola:

$$\cos a = \cos b \cos c;$$

dalla quale:

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 = (1 + \cos b)(1 + \cos c) = 4 \cos^2 \frac{b}{2} \cos^2 \frac{c}{2};$$

quindi

$$\cos a + \cos b + \cos c + 1 > 0.$$

Il che dimostra il teorema.

**58.** *Un tronco di piramide, in cui il perimetro della base maggiore è doppio di quello della base minore, è diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi; calcolare a meno di  $\frac{1}{10000}$  il rapporto delle distanze del piano segante dalle due basi.* (D. BESSO).

Soluzione del Sig. *O. Manfredi*, allievo del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia (\*\*).

Prolungando le facce laterali del tronco otteniamo un angoloide di vertice  $V$ . Le basi  $b, B$  del tronco sono sezioni fatte in questo angoloide da piani paralleli, ed essendo il perimetro della base  $B$  doppio di quello della base  $b$ , la distanza della base  $B$  dal vertice sarà doppia di quella della base  $b$ , cioè quest'ultima distanza sarà uguale all'altezza del tronco che chiameremo  $h$ .

I volumi delle piramidi staccate in un angoloide da piani paralleli stanno fra di loro come i cubi delle distanze di questi piani dal vertice. Se dunque  $b'$  è la sezione parallela alle basi, che ci si propone di condurre, la piramide di base  $B$  starà a quella di base  $b$  come  $8 : 1$ , e siccome il solido fra  $B$  e  $b'$  deve

(\*) Dimostrazioni simili a questa hanno inviato i Sigg. *R. Cassò* (R. Liceo Reggio Emilia), *R. Salvadori* e *G. Princi* (R. Istituto tecnico Roma), *G. A. Venturi*, *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia). Altre dimostrazioni sono pervenute dai Sigg. *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari).

(\*\*) Altre soluzioni sono pervenute dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Biondi* (Istituto tecnico Catanzaro), *G. D'Asdia* (R. Istituto tecnico Girgenti), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *R. Salvadori* e *G. Princi* (R. Istituto tecnico Roma).

essere equivalente al solido fra  $b$  e  $b'$ , il rapporto fra la piramide di base  $b'$  e la piramide di base  $b$  sarà eguale a  $1 + \frac{7}{2} : 1$  cioè a  $9 : 2$ .

Se  $x, y$  sono le distanze del piano secante dalle basi  $B$  e  $b$  rispettivamente, saranno  $h + y$  ed  $h$  le distanze delle basi  $b'$  e  $b$  dal vertice  $V$ , quindi il precedente rapporto fra le due piramidi di basi  $b'$  e  $b$  sarà espresso anche da:  $\left(\frac{h+y}{h}\right)^3 = \left(1 + \frac{y}{h}\right)^3$ . Avremo dunque:  $\left(1 + \frac{y}{h}\right)^3 = \frac{9}{2}$ , da cui:  
 $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1 = 0,6509$  a meno di  $\frac{1}{10000}$  per difetto.

Se si vuole determinare il rapporto  $\frac{x}{y}$  delle distanze del piano secante  $b'$  dalle basi  $B$  e  $b$ , basterà ricordare che essendo  $h = x + y$ , si ha  $\frac{y}{x+y} = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1$ , da cui:

$$\frac{x+y}{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1}$$

Ma si ha identicamente

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}} - 1} = \frac{\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^3 + \sqrt[3]{\frac{9}{2}} + 1}{\frac{9}{2} - 1} = \frac{\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{36} + 2}{7}$$

Quindi, sostituendo e semplificando

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[3]{162} + \sqrt[3]{36} - 5}{7} = 0,5361 \text{ a meno di } \frac{1}{10000} \text{ per difetto.}$$

**59.** Dimostrare che il rapporto del raggio del circolo inscritto ad un ettangolo regolare al raggio del circolo circoscritto soddisfa alla equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0. \quad (\text{D. BESSO}).$$

Dimostrazione del Sig. Prof. S. Catania.

Sieno  $A, B, C, D$  (Fig. 7) quattro vertici consecutivi dell'ettangolo. Si prolunghi  $AB$  dalla parte di  $B$  fino in  $H$  e  $K$ , in modo che sieno  $BH = AB$ ,  $AK = AD$ . La retta  $DC$  prolungata tagli  $AH$  in un punto  $I$ , e la retta  $KC$  tagli  $AD$  in un punto  $P$ . Siccome l'ang.  $BAC = \frac{1}{7}$  di 2 retti, e l'ang.  $ACD = \frac{4}{7}$  di 2 retti, gli angoli  $ACI, AIC$  saranno ciascuno  $\frac{3}{7}$  di 2



retti, e perciò sarà  $AI = AC$ . Inoltre è manifestamente la retta  $AC$  bisettrice dell'angolo  $PCI$ , e quindi, condotta la retta  $CH$ , siccome l'angolo  $A CH$  risulterà retto, perchè  $AB = BH = BC$ , sarà  $CH$  bisettrice dell'angolo supplementare  $ICK$ . Così il fascio delle quattro rette  $C(AHIK)$  è armonico, ed armonico sarà eziandio il gruppo  $AHIK$ ; da cui segue che

$$\frac{2}{AH} = \frac{1}{AI} + \frac{1}{AK},$$

ovvero

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}. \quad [1]$$

Sieno  $y, z, u$  i numeri che misurano  $AB, AC, AD$  rispettivamente, ed  $x$  il rapporto fra il raggio del circolo iscritto all'ottagono e il raggio del circolo circoscritto. Si avrà immediatamente

$$x = \cos \frac{\pi}{7}$$

$$z = 2y \cos \frac{\pi}{7} = 2yx; \quad z^2 = y^2 + yu = 4y^2 x^2.$$

La [1] allora può scriversi

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2yx} + \frac{1}{u} = \frac{1}{2yx} + \frac{1}{4yx^2 - y}.$$

Moltiplicando per  $y$  e togliendo i fratti, si avrà

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

che è quanto volevasi dimostrare.

*Osservazione.* Si può verificare che il rapporto del raggio del circolo iscritto nell'ottagono regolare di seconda specie al raggio del circolo circoscritto, preso, questo rapporto, col segno negativo, soddisfa alla equazione precedente, e che vi soddisfa pure il rapporto analogo relativo all'ottagono regolare di terza specie.

Pertanto le radici della detta equazione sono  $\cos \frac{\pi}{7}, -\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}$ . E allora hanno luogo, fra le altre, le seguenti identità:

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}; \quad \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{8}.$$

Dimostrazione dei Sigg. Prof. *F. Viaggi* e *M. Misani* (\*).

L'identità goniometrica

$$64 \cos^7 a - 112 \cos^5 a + 56 \cos^3 a - 7 \cos a - \cos 7a = 0,$$

(\*) Altre soluzioni della questione sono pervenute dai Sigg. Prof. *L. Carlini, S. Gatti, G. Riboni* e *G. Russo*.

mostra che le radici della equazione

$$64 x^7 - 112 x^5 + 56 x^3 - 7 x + 1 = 0 \quad [\alpha]$$

sono comprese nella formola

$$x = \cos \frac{(2k+1)\pi}{7}$$

nella quale a  $k$  si attribuiscono successivamente 7 valori interi consecutivi, per esempio, da  $-3$  a  $+3$ . Esaminando queste radici, si trova che una di esse,  $\cos \pi = -1$ , è semplice, e tre,  $\cos \frac{\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{3\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{5\pi}{7} = -\cos \frac{2\pi}{7}$ , sono doppie; dunque il primo membro della  $[\alpha]$  è il prodotto di  $x+1$  per il quadrato d'un polinomio del 3° grado, il qual polinomio trovasi essere  $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$ .

Le radici della equazione

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

sono adunque  $\cos \frac{\pi}{7}$ ,  $-\cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\cos \frac{3\pi}{7}$ , che esprimono (la seconda cambiata di segno) i rapporti tra l'apotema e il raggio d'un ettagono regolare convesso o stellato.

**60.** *Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque d'una superficie sferica dai quattro vertici d'un tetraedro a facce eguali, in essa inscritto, è uguale ad otto volte il quadrato del raggio.*

(D. BESSO).

Dimostrazione del Sig. Prof. M. Misani.

Convorrà approfittare di alcune proprietà del tetraedro a facce eguali già esposte dal Prof. Besso nel volume primo di questo Periodico.

Se  $S, A, B, C$  sono i quattro vertici di un tal tetraedro e  $G$  è il suo centro di gravità, questo punto coincide col centro della sfera circoscritta (V. teorema 12 dello scritto citato del Prof. Besso), di più in esso si bisecano le congiungenti i punti medi delle coppie di spigoli opposti; perchè è facile dimostrare che, per essere ciascuna di queste congiungenti perpendicolare a due spigoli opposti (V. teorema 16 l. c.), i loro punti di mezzo coincidono con quello che dista egualmente dai quattro vertici, cioè col punto  $G$ .

Ciò posto, chiamando con  $a, b, c$  gli spigoli  $BC, AC, AB$ , che sono rispettivamente eguali ai loro opposti (V. teorema 3 l. c.) con  $d_a, d_b, d_c, d_s$ , le distanze di un punto qualunque  $D$  della superficie sferica circoscritta al tetraedro dai predetti vertici e con  $M, M_1$  i punti di mezzo dei due spigoli opposti  $SA$  e  $BC$ ; dai triangoli  $DSA, DCB$ , per un notissimo teorema di geometria, si avrà

$$d_a^2 + d_s^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2DM^2$$



$$d_b^2 + d_c^2 = \frac{1}{2} a^2 + 2 D M_1^2$$

e sommando

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = a^2 + 2 (D M^2 + D M_1^2),$$

ma nel triangolo  $D M M_1$ , per lo stesso teorema, si ha

$$D M^2 + D M_1^2 = \frac{1}{2} M M_1^2 + 2 D G^2,$$

dunque

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = a^2 + M M_1^2 + 4 D G^2.$$

Ora dal triangolo rettangolo  $S M M_1$  e dal triangolo  $S B C$ , si ricava

$$M M_1^2 + \frac{1}{4} a^2 = S M_1^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{1}{4} a^2,$$

dalla quale

$$M M_1^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

e perciò

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4 D G^2;$$

ma (V. teorema 14 l. c.)

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8 D G^2,$$

dunque

$$d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 + d_s^2 = 8 D G^2,$$

la quale è l'espressione del teorema enunciato.

Una dimostrazione simile a questa è stata inviata dal Sig. Prof. *G. Riboni*, il quale vi aggiunge la seguente:

*Osservazione.* — Se s'indicano rispettivamente con  $x, a, b, c, d$  le rette  $O M, O A, O B, O C, O D$ , ( $\cap$ ) dai triangoli  $M O A, M O B, M O C, M O D$  si ha:

$$\begin{aligned} \overline{M A}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x a), & \overline{M B}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x b), \\ \overline{M C}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x c), & \overline{M D}^2 &= 2 R^2 (1 - \cos x d), \end{aligned}$$

da cui addizionando

$$\begin{aligned} \overline{M A}^2 + \overline{M B}^2 + \overline{M C}^2 + \overline{M D}^2 &= 8 R^2 - \\ & 2 R^2 (\cos x a + \cos x b + \cos x c + \cos x d), \end{aligned}$$

(\*) Le lettere  $A, B, C, D, O, M$  indicano rispettivamente i quattro vertici del tetraedro, il centro della sfera circoscritta e un punto qualunque della superficie sferica.

perciò in causa della relazione dimostrata risulta:

$$\cos \alpha a + \cos \alpha b + \cos \alpha c + \cos \alpha d = 0$$

e perciò i raggi  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ ,  $OD$  sono equipollenti ai lati d'un quadrangolo equilatero gobbo.

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi*.

Sia  $ABCD$  un tetraedro,  $S$  il suo baricentro,  $O$  un punto qualunque ed  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  le proiezioni di  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  sulla retta  $OS$ ; per la nota proprietà del baricentro è

$$SA' + SB' + SC' + SD' = 0. \quad [\alpha]$$

Dai triangoli  $OSA$ ,  $OSB$ , ... si deducono le uguaglianze

$$\overline{OA}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{SA}^2 + 2 OS \cdot SA',$$

e analoghe; dalle quali sommando membro a membro e tenendo presente la  $[\alpha]$ , si deduce

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = 4 \overline{OS}^2 + \overline{SA}^2 + \overline{SB}^2 + \overline{SC}^2 + \overline{SD}^2.$$

(Cf. Baltzer - Stereom. § 11, 7).

Se il tetraedro è a facce eguali, il baricentro coincide col centro della sfera circoscritta (cf. la memoria del Besso sul *Tetraedro a facce uguali* stampata in questo Periodico, Anno I, Fasc. I, n. 12); quindi se  $O$  è sulla superficie della sfera il secondo membro dell'ultima uguaglianza si trasforma nell'ottuplo del quadrato del raggio.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Russo*.

È facile vedere che in ogni tetraedro a facce eguali, le rette che congiungono i punti medi delle costole opposte (mediane) sono bisecate dal centro della sfera ad esso circoscritta. Premesso ciò, indichiamo con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i lati di una faccia, con  $R$  il raggio della sfera circoscritta, con  $l$ ,  $m$ ,  $n$  le lunghezze delle mediane, con  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  le distanze d'un punto della superficie della sfera dai quattro vertici del tetraedro; con  $A_1$ ,  $A_2$ ;  $B_1$ ,  $B_2$ ;  $C_1$ ,  $C_2$  rispettivamente le distanze dello stesso punto dai punti medi delle coppie di costole opposte. Allora pel teorema delle mediane si ha:

$$A_1^2 + A_2^2 = 2R^2 + \frac{1}{2} l^2,$$

$$B_1^2 + B_2^2 = 2R^2 + \frac{1}{2} m^2,$$

$$C_1^2 + C_2^2 = 2R^2 + \frac{1}{2} n^2,$$

sommando

$$A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2 = 6R^2 + \frac{1}{2} (l^2 + m^2 + n^2),$$



ma è noto che

$$l^2 + m^2 + n^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = 4 R^2, \quad [1]$$

quindi

$$A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2 = 8 R^2. \quad [2]$$

Inoltre

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2 C_1^2 + \frac{1}{2} c^2; \quad \beta^2 + \gamma^2 = 2 A_1^2 + \frac{1}{2} a^2;$$

$$\gamma^2 + \alpha^2 = 2 B_1^2 + \frac{1}{2} b^2; \quad \alpha^2 + \delta^2 = 2 A_2^2 + \frac{1}{2} a^2;$$

$$\beta^2 + \delta^2 = 2 B_2^2 + \frac{1}{2} b^2; \quad \gamma^2 + \delta^2 = 2 C_2^2 + \frac{1}{2} c^2;$$

sommando

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 2(A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 + C_1^2 + C_2^2) + (a^2 + b^2 + c^2);$$

e per le [1] e [2]

$$3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = 24 R^2,$$

ossia

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 8 R^2.$$

c. b. d.

*Osservazione.* Il teorema potrebbe essere generalizzato così:

Dimostrare che la somma dei quadrati delle distanze d'un punto qualunque dello spazio dei quattro vertici d'un tetraedro a facce eguali, è uguale a  $4(d^2 + R^2)$ ; in cui  $d$  indica la distanza del punto dal centro della sfera circoscritta al tetraedro.

**61.** *Fra quali limiti deve variare l'angolo acuto  $\alpha$ , acciocchè l'angolo  $\beta$ , legato ad  $\alpha$  dalla seguente relazione*

$$\frac{\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} + 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\sqrt{2} - 1 + (\sqrt{2} - 1) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta},$$

sia pur esso acuto?

(S. GATTI).

Soluzione del Prof. F. Viaggi.

Tenendo presente che

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1, \quad \operatorname{cotg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} + 1,$$

la relazione proposta dà luogo alla seguente

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right) \operatorname{tg}^2 \beta - \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \operatorname{tg} \beta + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 0. [1]$$

La quale fornisce per  $\operatorname{tg} \beta$  due valori reali: infatti la condizione di realtà delle

radici della [1] è

$$\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)^2 - 4 \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right)^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \alpha \geq 0$$

ossia

$$\left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}\right) \left(1 - \operatorname{tg}^4 \alpha\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha\right)^4 \geq 0; \quad [2]$$

ora, posto  $f(x) = \left(1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}\right) \left(1 - x^4\right) + \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - x\right)^4$ , è  $f'(x) \gtrless 0$  se-

condo che è  $x \gtrless x_1 = \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\pi}{8}}}$ , perciò, facendo variare  $x$  da

$-\infty$  a  $+\infty$ ,  $f(x)$  decresce sino a  $f(x_1)$  e quindi cresce, e poichè questo valore minimo  $f(x_1)$  che essa assume è positivo, così  $f(x)$  è sempre positiva, ossia la [2] è sempre soddisfatta (come disuguaglianza e mai come eguaglianza).

Le radici di [1] saranno positive, quando  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \alpha$  e  $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \cdot \operatorname{tg} \alpha$  avranno lo stesso segno, ossia, poichè  $\alpha$  è positivo e minore di  $\frac{\pi}{2}$ , quando

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{8} \quad \text{oppure} \quad \frac{3\pi}{8} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

E queste sono le limitazioni domandate.

**62.** Essendo  $a$  e  $b$  numeri interi primi con 30, dimostrare che l'espressione

$$a^8 + a^6 b^2 - a^2 b^6 - b^8$$

rappresenta un numero multiplo di 720.

(S. GATTI).

Dimostrazione di *G. M. Nobile*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti (\*).  
Basterà dimostrare che tale espressione è divisibile per 16, per 9 e per 5.

Poichè i numeri  $a$  e  $b$  sono dispari, i numeri  $\frac{a+b}{2}$ ,  $\frac{a-b}{2}$  sono interi, ed avendo questi per somma il numero dispari  $a$ , uno di essi è pari; onde  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  è multiplo di 8; sicchè il prodotto

$$(a^2 - b^2) (a^2 + b^2) (a^4 + a^2 b^2 + b^4) \dots [\alpha]$$

equivalente alla espressione proposta, ha il primo fattore divisibile per 8, ed il secondo per 2; è quindi divisibile per 16.

$a$ ,  $b$  divisi per 3 danno per resto 1 o 2; perciò  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $a^4$ ,  $b^4$  danno, divisi per 3, il resto 1; e quindi primo e terzo fattore del prodotto  $[\alpha]$  sono divisibili per 3, e tutto il prodotto è divisibile per 9. Col metodo analogo a quello tenuto

(\*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. D'Adda* (R. Istituto tecnico Girgenti), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).



testè si dimostra che  $a^4 - b^4$  è divisibile per 5; oppure col teorema di Fermat, osservando che  $a^4$  e  $b^4$  divisi per 5 danno per resto 1; dunque il prodotto dei due primi fattori di  $[\alpha]$  è divisibile per 5.

*Osservazione.* — Poichè l'espressione proposta si può scrivere anche sotto la forma  $(a^2 + b^2)(a^6 - b^6)$ , si può dire anche che: « essendo  $a, b$  interi primi « con 2, 3, 5, 7 l'espressione  $a^8 + a^5 b^3 - a^2 b^5 - b^8$  rappresenta un multiplo « di 5040 ».

**63°.** *Costruire un triangolo dato un lato, l'altezza relativa a questo lato e la bisettrice dell'angolo opposto.*

Soluzione del Sig. P. Marano studente a Catania (\*).

Sia  $ADE$  un triangolo rettangolo di cui il cateto  $AE$  sia eguale alla data altezza e l'ipotenusa  $AD$  alla data bisettrice. Si tiri da  $A$  la perpendicolare ad  $AD$ , finchè incontri in  $F$  la  $DE$  prolungata, e si divida  $DF$  per metà in  $O$ . Si costruisca l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo di cui un cateto sia  $OD$  e l'altro la metà del lato dato ( $BC$ ), e fatto centro in  $O$  e raggio quest'ipotenusa, si segni nella  $ED$  dalla parte di  $D$ , un punto  $X$ , a partire dal quale si segneranno da una parte e dall'altra due punti  $B$  e  $C$  in modo che sia  $XB = XC =$  metà del lato dato; sarà  $ABC$  il triangolo richiesto.

Infatti:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OX}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{4} = \left( OX + \frac{BC}{2} \right) \left( OX - \frac{BC}{2} \right) = OB \times OC.$$

Questa relazione prova (AMIOT, *Geom. elem.*, 25<sup>a</sup> ristampa, pag. 87) che i punti  $BCDF$  sono armonici, e quindi le quattro rette  $AB, AC, AD, AF$  sono pure armoniche. Ma i raggi coniugati  $AD$  ed  $AF$  sono perpendicolari fra loro, quindi esse bisecano gli angoli supplementari formati da' lati  $AB, AC$  (AMIOT, luogo citato, pag. 89).

*Osservazione.* — Se  $Y$  è il simmetrico di  $X$  rispetto ad  $O$ , e si segnano a partire da  $O$ , su  $XY$ , i punti  $B', C'$  in modo che  $B'Y = YC'$ , il triangolo  $AB'C'$  avrà l'altezza data, la base data, e per bisettrice dell'angolo esterno opposto a questa base la bisettrice data.

Soluzione di G. M. Nobile, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti (\*\*).

Siano  $a, h, \alpha$  il lato, l'altezza e la bisettrice dati. Se  $h = \alpha$ , il triangolo domandato è isoscele; e conoscendone base ed altezza agevolmente si costruisce. Se  $h < \alpha$ , costruisco un triangolo  $AHD$  rettangolo in  $H$ , il cui cateto  $AH$  e l'ipotenusa  $AD$  siano rispettivamente eguali ad  $h$  ed  $\alpha$ ; del segmento  $AH$  costruisco il simmetrico  $AE$  rispetto ad  $AD$ , e conduco  $AF$  perpendicolare ad  $AE$ ; se  $F$  si prende rispetto ad  $AE$  dalla stessa banda di  $D$ , è l'angolo  $DAF$  minore di  $EAF$ , perciò acuto; ed essendo acuto anche  $HDA$ , le di-

(\*) Soluzioni analoghe alla presente pervennero dal Sigg. E. Goti e G. Paoli (R. Istituto tecnico Arezzo), G. Prinzi e R. Salvadori (R. Istituto tecnico di Roma), A. Sidoti (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).

(\*\*) Una soluzione sostanzialmente analoga alla presente venne inviata dall'alunno P. P. Rizzuti (Istituto tecnico Catanzaro).



rezioni  $AF$ ,  $DH$  s'incontrano in un punto  $F$ . Costruisco la circonferenza di diametro  $a$  tangente in  $A$  ad  $AF$ ; e sia  $MN$  il diametro che prolungato passi per  $F$ . Sulla  $FD$  a partire da  $F$  nella direzione  $FD$  (o nella opposta) stacco due segmenti  $FB$ ,  $FC$  ( $FB'$ ,  $FC'$ ) rispettivamente eguali ad  $FM$ ,  $FN$ . Io dico che i triangoli  $ABC$ ,  $AB'C'$  sono quelli domandati.

Infatti questi due triangoli hanno evidentemente i lati  $BC$ ,  $B'C'$  eguali ad  $a$  e le altezze corrispondenti eguali ad  $h$ ; rimane dunque a dimostrare che le bisettrici degli angoli opposti sono eguali ad  $\alpha$ .

E in vero, essendo  $FMN$ ,  $FA$  trasversale e tangente d'uno stesso cerchio,  $FA$  è media geometrica tra  $FM$ ,  $FN$  e quindi tra  $FB$ ,  $FC$  e tra  $FB'$ ,  $FC'$ ; perciò i cerchi  $ABC$ ,  $AB'C'$  risultano tangenti in  $A$  ad  $FA$ , ed hanno quindi i centri sulla retta indefinita  $AE$ , il primo sulla direzione  $AE$  e l'altro sull'opposta; e, tenendo presente che la bisettrice interna (o esterna) d'un angolo d'un triangolo è bisettrice interna (o esterna) dell'angolo formato dall'altezza e dal diametro del cerchio circoscritto condotto per lo stesso vertice, si conchiude che la bisettrice interna dell'angolo in  $A$  del triangolo  $ABC$ , o la esterna del triangolo  $AB'C'$ , è  $AD$  e quindi eguale ad  $\alpha$  (\*).

Si dichiarara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione 64. dal Sig. R. Bettazzi, S. Catania, P. Morino, G. Russo, F. Viaggi; 65. S. Catania, F. Viaggi; 66. O. Manfredi, G. M. Nobile, P. P. Rizzuti; 67. R. Bettazzi, L. Carlini, F. Viaggi; 68. S. Catania, F. Viaggi; 69. C. Aiello, R. Bencivenga, O. Manfredi, G. M. Nobile; 70. C. Aiello, R. Bencivenga, G. Bitonti, S. Lopriore, P. Marano, G. M. Nobile; 71. C. Aiello, R. Bencivenga, S. Lopriore, A. Restifa; 72. C. Aiello, R. Bencivenga, G. M. Nobile; 74. G. M. Nobile — soluzioni alle quali verrà data evasione, nel fascicolo venturo.

La Direzione.

## QUISTIONI PROPOSTE (\*\*)

75\*. Dimostrare che se  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , sono punti dei lati  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  d'un triangolo così situati che, posto  $\frac{BA_1}{BC} = h$ ,  $\frac{CB_1}{CA} = k$ ,  $\frac{AC_1}{AB} = l$ , abbia luogo la relazione

(\*) Altre soluzioni si riceverono dal Sigg. C. Aiello (R. Liceo V. E. Napoli), G. Bitonti Istituto tecnico Catanzaro), S. Lopriore (R. Liceo Bari), A. Mucci (R. Istituto tecnico Arezzo).

(\*\*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.



$$(2h - 1)a^2 + (2k - 1)b^2 + (2l - 1)c^2 = 0,$$

le perpendicolari ai lati  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ , condotte dai punti  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , passano per uno stesso punto.

**76.** Trovare una relazione fra i coseni degli angoli  $A'AB$ ,  $B'BC$ ,  $C'CA$  che le rette  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ , fra loro parallele e situate da una stessa banda del piano  $ABC$ , formano coi lati  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  del triangolo  $ABC$ , supposto equilatero.

D. BESSO.

---

## RIVISTA BIBLIOGRAFICA

---

*I principii di Geometria logicamente esposti.* Saggio di GIUSEPPE PEANO, Professore nella R. Accademia militare, libero docente nella R. Università di Torino. Torino, Bocca, 1889, p. 40.

Nella chiusa della Rivista bibliografica che pubblicammo or fa un anno in questo *Periodico* (\*) intorno agli *Arithmetices principia* del prof. Peano, noi abbiamo espressa la nostra convinzione che il Calcolo della logica fosse suscettibile di applicazioni numerose assai ed abbiamo citato come esempio un'esposizione fatta col suo aiuto dei principii della Geometria. Poco tempo dopo, tale nostra previsione riceveva una luminosa conferma dall'opuscolo di cui ora intendiamo occuparci, nel quale appunto lo stesso A. riprende *ex-novo* la questione di determinare un gruppo di assiomi geometrici, combinando i quali colle norme note del comune raziocinio, si possano dimostrare tutte le proprietà delle figure. A intraprendere questo lavoro egli fu indotto non già — come a qualche lettor maligno potrebbe far credere il titolo che egli vi pose — perchè opinasse che i suoi predecessori, nel tracciare le prime linee della Scienza dell'estensione, si fossero scostati dai precetti della Logica, ma collo scopo di mettere in luce l'utilità che si ritrae dal sostituire in tali ricerche delicatissime l'Algebra logica all'ordinario ragionamento.

Nè è difficile rendersi conto di quante ragionevolmente egli si sia proposto di raggiungere tale intento. Infatti l'applicazione del procedimento anzidetto esige definizioni precise degli enti considerati ed enunciazioni esplicite di tutte le proposizioni su cui ci si fonda, epperò rende impossibile che si interpreti in varii modi una stessa definizione e che si applichino proposizioni non ancora enunciate o dimostrate; quindi sembra che il Calcolo logico, col presentare dinanzi agli occhi quasi gli scheletri dei ragionamenti, spiani la via più naturale e sicura per porne in evidenza gli organi essenziali e sia da ritenersi come il metodo

---

(\*) T. IV p. 154-156.



migliore per uno studio anatomico di un'argomentazione qualsiasi. Epperò l'algoritmo dialettico è e sarà un potente ausiliario in tutte quelle investigazioni in cui fa mestieri (come in quella compiuta dal Peano) stabilire quali e quante ipotesi convenga fare su un certo complesso di dati a fine di potere concludere che questi posseggono un certo complesso di proprietà.

Non si aspetti il lettore di trovare qui una enumerazione dei postulati su cui il prof. Peano propone di fondare la Geometria, né l'indicazione dei teoremi da lui dimostrati; non facciamo la prima, né diamo la seconda perchè, onde giudicare rettamente i criterii che guidarono l'A. nella scelta delle proposizioni assunte per vere o dimostrate, è indispensabile seguire passo passo i suoi ragionamenti. Diciamo soltanto che egli, come già fece il Pasch nelle sue *Vorlesungen ueber neuere Geometrie*, parte dai concetti di *punto* e *segmento rettilineo* e costruisce col loro mezzo gli altri enti geometrici; ed aggiungiamo che ad un certo punto i due scrittori battono cammini affatto differenti (\*).

Nel testo di questo *Saggio* l'A. studia diffusamente la parte della Geometria che precede la *teoria delle parallele*; in un *Appendice* egli si occupa di tale teoria e del modo di introdurre il concetto di *moto*; in una posteriore pubblicazione (\*\*) egli ha gettate le basi di un'analoga esposizione della *Geometria di misura*. Perciò possiamo dire di possedere in complesso gli elementi per una completa trattazione degli elementi della Geometria fatta dal nuovo punto di vista. Ma è forza convenire che questi elementi esigono tuttora una elaborazione, probabilmente lunga e faticosa, per potere comporre qualche cosa di definitivo; ad ammettere la necessità di tale lavoro complementare si è spinti, fra l'altro, dalla considerazione che finora non ci è stato ancora detto in qual modo sia per manifestarsi l'influenza di queste investigazioni sui metodi per insegnare le prime proprietà dello spazio, influenza che presto o tardi si deve avvertire se esse posseggono in realtà quel valore scientifico che a noi sembra scorgervi.

Poichè il prof. Peano ha già discussi i fondamenti dell'Aritmetica e quelli della Geometria, così sembra poco verosimile che ci si presenti in avvenire l'occasione di occuparci qui di altri suoi contributi al Calcolo della logica. Perciò vogliamo rinnovare ora l'espressione della nostra piena approvazione al metodo da lui tenuto per diffondere questo nuovo ramo della Matematica. Invece di esporre con infiniti particolari di secondaria importanza i principii di questa dottrina - come fece non a guari uno scienziato ultramontano - egli si sforzò di condensarli in poche pagine e ne fece poi delle applicazioni belle ed importanti. Così egli raggiunse un triplice scopo: di non atterrire, cioè, la maggioranza degli studiosi con la prospettiva di una disciplina nuova, assai vasta e complicata; di mostrare, su esempi opportuni quali siano i caratteri essenziali del Calcolo logico, epperò in quali circostanze esso possa applicarsi con vantaggio e in che cosa consista questo vantaggio; di arrecare, finalmente, dei dati di fatto capaci

---

(\*) L'indole di questo giornale e lo spazio di cui disponiamo non ci consentono di arrestarci sulle belle considerazioni di indole assai generale ed astratte, svolte dall'A. nelle *Note*: ci basti di averle segnalate all'attenzione dei lettori.

(\*\*) *Les propositions du cinquième Livre d'Euclide, réduites en formules* (Mathesis, T. X).



di fungere da documenti per un giudizio equo ed illuminato sul Calcolo stesso, in base a cui decidere se questo debba collocarsi nel museo degli oggetti di curiosità scientifica, oppure se sia miglior consiglio accordargli un posto onorevole fra gli utensili proprii alle Scienze di ragionamento (\*).

Mantova, 17 giugno 1890.

GINO LORIA.

Prof. BELLINO CARRARA. — *Algebra*. — Venezia, Tipografia Emiliana, 1890.  
— Prezzo L. 5.

L'Algebra del Prof. BELLINO CARRARA è veramente preziosa per gli scolari dei Licei d'Italia; è divisa in cinquanta lezioni delle quali venticinque comprendono la materia del primo anno e le rimanenti quella del secondo; i titoli degli argomenti delle lezioni sono precisamente i diversi comma dei programmi ufficiali. I varii argomenti sono svolti abbastanza ampiamente e con sufficiente rigore; numerosi esercizi, giudiziosamente scelti ed ordinati, accrescono notevolmente il pregio dell'opera perchè molti sono risolti e discussi diligentemente e spesso la trattazione di problemi generali vi è ben preparata con quella di facili problemi particolari; delle questioni non risolte sono dati i risultati finali.

Parmi però che si sarebbe guadagnato in chiarezza e rigore ponendo meglio in evidenza i postulati e le definizioni, basi delle diverse teorie; i numeri negativi e gli irrazionali, p. es., non sono abbastanza chiaramente stabiliti con postulati convenienti e le operazioni con numeri irrazionali non sono definite; per la somma, p. es., si sarebbe potuto dimostrare che, se  $u_n$  ed  $u'_n$  sono variabili razionali coi limiti  $U$  ed  $U'$  tende ad un limite ancora la variabile razionale  $u_n + u'_n$  e porre come definizione che questo limite è la somma  $U + U'$ ; con ciò si sarebbe acquistato il diritto di parlare di somma di numeri irrazionali tra loro e coi razionali. Non è dato con precisione il significato di numero aritmetico che, essendo rapporto di grandezze omogenee, è un numero, razionale od irrazionale, nè positivo nè negativo, ed il significato attribuito a numero algebrico non è quello, generalmente adottato, di radice d'equazione a coefficienti interi. Alcune definizioni, sebbene universalmente accettate, non sono abbastanza chiare; tale è quella della moltiplicazione perchè, p. es.,  $3^3 \cdot (3 + 3)$  non è eguale a  $3 \cdot 2$  sebbene sia  $2 = 1^1 \cdot (1 + 1)$ : siffatte definizioni dovrebbero esser date come definizioni complesse rinvenenti più definizioni semplici e precise date innanzi. Bene fece l'autore conservando per il teorema sulla divisibilità per  $a - a$  l'antica, notissima e semplicissima, dimostrazione criticata anche in questo periodico; ma doveva renderla rigorosa premettendo, p. es., il teorema, facilissimo a dimostrarsi: « Due polinomii non identici con una lettera comune prendono diverso valore

(\*) Come abbiamo fatto per gli *Arithmetico Principia* indicammo alcuni errori di stampa dell'opuscolo ora discusso:

p.	dal basso	linea	invece di	distributiva	leggi	associativa
>	21	dall'alto	>	9	>	>
>	24	>	>	14	>	>
>	39	dal basso	>	10	>	>

>	$a'bd$	>	$ab'd$
>	$ab$ è identico a $cd$	>	$ac$ è identico a $bd$
>	$ab'    cf$	>	$a'b    c'f$



per infiniti valori diversi della lettera comune ». Nella definizione di proporzionalità data in principio del numero 299 non è compresa la condizione, notoriamente necessaria, che quando l'una grandezza cresca debba crescere anche l'altra; se tutti i numeri aritmetici fossero divisi nelle classi

$$A_1 \ A_2 \ A_3 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

tali che nessun numero fosse esprimibile razionalmente mediante uno di classe diversa, essendo fissati i numeri

$$k_1 \ k_2 \ k_3 \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

arbitrariamente, si potrebbe far corrispondere ad ogni numero della classe  $A_m$  il prodotto del medesimo per  $k_m$ ; considerando quei numeri come i valori d'una grandezza  $A$  ed i loro corrispondenti come i valori di una grandezza  $B$ , si troverebbero  $A$  e  $B$  nella relazione accennata in principio del n.º 299 senza essere proporzionali; si potrebbe p. es., far corrispondere ad ogni valore razionale di  $A$  lo stesso valore di  $B$  e ad ogni valore irrazionale di  $A$  il valore doppio di  $B$ .

Per l'indole affatto elementare che deve avere l'insegnamento scientifico nelle scuole classiche, sono certamente di quasi nessuna importanza le precedenti osservazioni e le altre che potrebbero esser fatte all'algebra di cui mi sono occupato sicchè, pei molti suoi pregi accennati sopra parmi che risponda assai bene alle esigenze degli orari e programmi vigenti nei nostri Licei.

F. GIUDICE.

Dott. GIUSEPPE BERNARDI. — *Tavole dei quadrati e cubi dei numeri interi da 1 a 1000*. Parma. Tipografia Ferrari e Pellegrini, 1888. Prezzo: L. 1.50.

Le tavole del Prof. BERNARDI contengono oltre ai quadrati e cubi, i doppi, e i tripli quadrati dei numeri da 1 a 1000. Il pregio delle medesime consiste essenzialmente nella introduzione in cui l'A. risolve con molta chiarezza di dettaglio i problemi nei quali possono utilizzarsi tavole di questa natura. Notevoli fra questi i problemi VII e IX, la cui soluzione riposa sopra due teoremi, sviluppati nella introduzione, per mezzo dei quali, con calcolo abbreviato, vengono trovate le radici quadrate dei numeri interi fra 1000000 e 10 bilioni e le radici cubiche degli interi fra 1 bilione ed 1 quatrilione. Il 2º di questi teoremi, che contiene un'eccezione importante, merita d'essere riportato ed è il seguente:

*Se la radice cubica di un numero intero  $a$ , esatta, od approssimata a meno di una unità per difetto, ha  $2n + 1$  cifre almeno, e se si indica con  $c$  il numero formato dalle cifre di essa, escluse le  $n$  prime a destra, con  $q$  il quoziente e con  $r$  il resto della divisione  $\frac{a - c^3 \cdot 10^{3n}}{3c^2 \cdot 10^{2n}}$ , ponendo cioè:*

$$\frac{a - c^3 \cdot 10^{3n}}{3c^2 \cdot 10^{2n}} = q + \frac{r}{3c^2 \cdot 10^{2n}},$$

*si ha in generale:  $\sqrt[3]{a} = c \cdot 10^n + q$ , esattamente, od a meno d'una unità*



per difetto, ovvero a meno d'una unità per eccesso, secondochè rispettivamente è

$$r \begin{cases} > \\ < \end{cases} 3q^2c \cdot 10^n + q^3.$$

Fanno però eccezione i  $10^{3n}$  numeri interi compresi fra i 2 limiti  $(10^{2n} + 10^n)^3 - 10^{3n}$  e  $(10^{2n} + 10^n)^3 - 1$  inclusi, per tutti i quali si ha

invece:  $\sqrt[n]{a} = c \cdot 10^n + q$ , a meno di due unità per eccesso.

Per questi titoli le tavole in discorso parmi possano riuscire di giovamento agli alunni delle Scuole secondarie.

A. LUGLI.

### Publicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

- Bibliotheca mathematica.* Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 2, 1890.
- Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII. Marzo-Aprile, Maggio-Giugno, 1890. Napoli, B. Pellerano editore.
- Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas*, publicado pelo D<sup>r</sup>. F. GOMES TEIXEIRA, professor na Academia Polytechnica do Porto. Vol. IX, n. 4, 5. Coimbra 1889.
- Journal de Mathématiques élémentaires* à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. G. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, L. LÉVY, agrégé des sciences mathématiques, directeur des études à l'École préparatoire de Saint-Barbe. 3<sup>e</sup> Série, Quatorzième année. N. 5, 6, 7, 8. Mai, Juin, Juillet, Août, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. 14<sup>e</sup> année. N. 16, 17, 18, 19, 20. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.
- Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Juillet, Août-Septembre, 1890. Paris, Gauthiers-Villars e fils; Gand Ad. Hoste, Éditeur.
- Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2<sup>a</sup>, Vol. IV, Fasc. 5<sup>o</sup> e 6<sup>o</sup>, Maggio, Giugno 1890.
- Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.* Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. G. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 4, 5 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.
- BERNARDI (F.) — Nozioni elementari dei numeri immaginari e dei numeri complessi. R. Tipografia editrice Salentina: Lecce 1890.
- BOLTSHAUSER (G. A.) — Le linee equitermiche in Italia (Bollettino mensile dell'Osser. di Moncalieri, Serie II, vol. X, n. 6).
- CARRARA (B.) — La matematica nei licei del Regno esposta in lezioni ed esempi alla gioventù studiosa — Parte 1<sup>a</sup>: Algebra — Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. — Prezzo: L. 5.
- — La moderna meteorologia in Italia. Cremona, V. Ghisani, Tipografo, 1890.



- CASEY (F.) — Géométrie élémentaire récente. Traduit de l'anglais par Fr. Palisse: avec une Préface par M. I. Neuberg. Paris, Gauthier-Villars e fils; Gand, Ad. Hoste, Editeur; 1890.
- DELITALA (G.) — Ricerche di Stereometria. Sassari, Editore-Tipografo G. Dessi, 1890.
- — Una questione di estimo privato (non catastale): Sulla stima dei miglioramenti fondiari (Rivista di Topografia e Catasto, n. 8, febb. 1890) — Sulla costante del planimetro polare di Amsler, Sassari, 1890.
- GIUDICE (F.) — Due teoremi sulle serie a termini positivi — Osservazioni sulle serie — Un nuovo criterio di convergenza per le serie a termini positivi — Per un recente articolo del Sig. Fouret (Rend. Cir. mat. di Palermo, Tomo IV, 1890).
- INGRAMI (G.) — Sulle funzioni implicite di una variabile reale (Rend. sessioni R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna 1889) — Sulla rappresentazione analitica per una funzione reale di due variabili reali. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1889).
- JUNG (G.) — Un'osservazione sul grado massimo dei sistemi lineari di curve piane algebriche (Annali di matematica, Tomo XVII) — Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano (Rend. Cir. mat. di Palermo, IV, 1890).
- Lettera di Temistocle Zona a proposito di un lavoro di triangolazione del Prof. Venturi. Palermo, Tip. Fratelli Vena, 1890.
- LIVERANI (A.) — Fra una lezione e l'altra. Livorno, A. Debatte, 1890.
- LONGCHAMPS (G. de) — Sur les paraboles de M. Artzt (Journal de Mathé. spéciales, 1890).
- LORIA (G.) — Il periodo aureo della Geometria greca (Memorie R. Acc. delle Scienze di Torino, Serie II, Tomo XL).
- MARCOLONGO (R.) — Sulle geodetiche tracciate sulle quadriche prive di centro (Rend. R. Acc. Lincei, 1890) — Deformazione di una sfera omogenea isotropa per speciali condizioni ai limiti (Idem, idem).
- MITTAG-LEFFLER (G.) — Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une equation différentielle linéaire et homogène (Acta mathematica, tome 15).
- PANIZZA (F.) — Aritmetica razionale. Manuale Hoepli, Milano, 1890 — Prezzo L. 1,50.
- PASCAL (E.) — Sopra le funzioni iperellittiche di 1<sup>a</sup> Specie (1.<sup>ter</sup> Stufe) per  $p = 2$ . Memoria V (Annali di mat. Serie II, XVIII).
- PEANO (P.) — Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules — Sur l'interversion des dérivations partielles (Mathesis, tome X, 1890).
- PRINCIVALLE (F.) — Trattato di aritmetica pratico per le Scuole secondarie con note storiche e 600 esercizi. Sassari, Tip. Azuni, 1889. — Prezzo L. 1,60.
- RAZZABONI (A.) — Sulle flessioni dell'evoluta del catenoide (Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).
- RICCARDI (P.) — De propositione novae Bibliothecae mathematicae italicæ seculi XIX (Biblioteca mathe. par G. Eneström, 1890).
- TIBERI (E.) — Teoria generale sulle condizioni di divisibilità dei numeri e nuova dimostrazione del teorema di Pappo e di Pitagora — Arezzo, Tip. Cagliani, 1890.
- VIAGGI (F.) Sulla similitudine di triangoli appartenenti a due serie (Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).
- VEIBERT (H.) — Annuaire de la jeunesse pour l'année 1890. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles. Prix: 3 francs.

---

Chiusura della redazione il di 29 agosto 1890.



# TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE FISICO-MATEMATICA

(Continuazione e fine).

AUTUNNO 1890, D). — *In un cono si conosce la differenza fra la superficie laterale e quella della base, e si conosce la somma di queste due superficie. Trovare l'apotema e l'altezza del cono, e il raggio della sua base, e discutere i risultati.*

Indicando rispettivamente con  $\pi s_1^2$  e  $\pi s_2^2$  la differenza e la somma date, con  $x$ ,  $y$ ,  $z$  il raggio della base, il lato e l'altezza del cono, il problema dà luogo al sistema di equazioni:

$$x(y - x) = s_1^2; \quad x(y + x) = s_2^2; \quad y^2 = x^2 + z^2.$$

Risolvendolo, il che è assai semplice, si trova

$$x = \sqrt{\frac{s_2^2 - s_1^2}{2}}; \quad y = \frac{s_1^2 + s_2^2}{\sqrt{2(s_2^2 - s_1^2)}}; \quad z = \frac{2s_1s_2}{\sqrt{2(s_2^2 - s_1^2)}}.$$

Questi valori non sono reali e finiti che nel caso in cui sia  $s_2 > s_1$ , il che è in accordo colla natura del problema proposto, la somma delle due superficie dovendo superare necessariamente la loro differenza. È poi opportuno osservare che avendosi sempre  $s_1^2 + s_2^2 > 2s_1s_2$ , segue, com'era da aspettarsi,  $y > z$ .

ESTATE 1871, b). — *Risolvere le due equazioni a due incognite*

$$(x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{64}{15}, \quad x^2 + y^2 = 136.$$

Riducendo la prima a forma intera e sostituendo in luogo di  $x^2 + y^2$  il valore dato dalla seconda, si ottiene un'equazione di 1° grado in  $xy$ , da cui deducesi  $xy = 60$ . Dopo ciò dal sistema sem-

placissimo

$$xy = 60 \quad x^2 + y^2 = 136$$

si ricavano immediatamente le due soluzioni:  $x = 6, y = 10$ ;  $x = -6, y = -10$ .

ESTATE 1872, II). — *Da due punti A e B del terreno, nei quali si può far stazione con un grafometro, si vedono due punti inaccessibili X ed Y. Determinare la distanza XY conoscendo gli angoli  $XAY = 0^\circ. 25'. 3''$ ,  $XAB = 121^\circ. 0'. 11''$ ,  $XBA = 45^\circ$ ,  $XBY = 0^\circ. 0'. 24''$  e la distanza  $AB = m. 152$ .*

Risposta: chiamando  $d$  la distanza  $AB$  e supponendo i quattro punti  $A, B, X, Y$  in uno stesso piano, e così situati che il punto  $Y$  cada fuori del triangolo formato dagli altri tre, si deduce con procedimento noto (V. SERRET. Trig. libro 4°.)  $XY = d \cdot 0,0840194 = m. 12,711$ .

ESTATE 1873, I) — *Date le equazioni  $x^5 + y^5 = 17050$ ,  $x + y = 10$ , trovare i valori di  $x$  ed  $y$ .*

Dall'identità

$$x^5 + y^5 = (x + y)^5 - 5(xy)(x + y)^3 + 5(xy)^2(x + y),$$

in seguito ai valori dati per  $x + y$  ed  $x^5 + y^5$ , segue l'equazione di 2° grado in  $xy$

$$(xy)^2 - 100(xy) + 1659 = 0,$$

da cui deducesi  $xy = 79$  od  $xy = 21$ . I valori di  $x$  ed  $y$  sono perciò da cercarsi fra le radici delle equazioni

$$X^2 - 10X + 79 = 0, \quad X^2 - 10X + 21 = 0$$

e poichè le radici della prima sono immaginarie e quelle della seconda sono 3 e 7, così questi numeri sono precisamente i valori cercati.

AUTUNNO 1873, I). — *Trovare quattro numeri in progressione geometrica data la loro somma  $= 45$  e quella dei loro quadrati  $= 765$ .*



Chiamando, in generale,  $a$  la somma dei quattro numeri,  $b^2$  quella dei loro quadrati e rappresentando con  $x$  il primo numero e con  $y$  la ragione della progressione, le equazioni del problema sono

$$x + xy + xy^2 + xy^3 = \frac{x(y^4 - 1)}{y - 1} = a,$$

$$x^2 + x^2y^2 + x^2y^4 + x^2y^6 = \frac{x^2(y^8 - 1)}{y^2 - 1} = b^2.$$

Quadrando la prima, poi dividendo membro a membro questa e la seconda equazione, si ha:

$$\frac{(y^4 - 1)(y + 1)}{(y - 1)(y^4 + 1)} = \frac{a^2}{b^2},$$

e sopprimendo il fattore  $y - 1$ , che ancora rimane comune ai termini del quoziente, e riducendo a forma intera, risulta

$$(a^2 - b^2)y^4 - 2b^2y^3 - 2b^2y^2 - 2b^2y + (a^2 - b^2) = 0,$$

equazione reciproca di 4° grado, che è facile risolvere.

Introducendo i valori particolari dati nell'enunciato, questa equazione si trasforma nell'altra

$$14y^4 - 17y^3 - 17y^2 - 17y + 14 = 0$$

che dà per  $y$  le due radici reali  $2$  e  $\frac{1}{2}$  e due radici immaginarie. Seguono, per la 1ª delle equazioni del problema, i valori corrispondenti per  $x$ ,  $3$  e  $24$ , cosicchè i quattro numeri cercati sono  $\therefore 3 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 24$ .

AUTUNNO 1873, II). — Dato il perimetro d'un triangolo  $2p = 8644^m,204$  e gli angoli  $A = 73^\circ \cdot 42' \cdot 50'',04$ ;  $B = 57^\circ \cdot 32' \cdot 7''.54$ ;  $C = 48^\circ \cdot 45' \cdot 2'',42$  calcolare il raggio del circolo inscritto, il raggio del circolo circoscritto e l'area del triangolo.

Dalle note formole

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \quad \operatorname{tg} \frac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

moltiplicando membro a membro ed osservando che

$$\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

si deduce immediatamente

$$[1] \quad \Delta = p^2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$$

e per essere  $r = \frac{\Delta}{p}$

$$[2] \quad r = p \operatorname{tg} \frac{1}{2} A \operatorname{tg} \frac{1}{2} B \operatorname{tg} \frac{1}{2} C.$$

Avendosi poi

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} =$$

$$\frac{a+b+c}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C} = \frac{2p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C},$$

si ricava

$$a = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}, \quad b = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} B}{\cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} A}, \quad c = \frac{p \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B},$$

per cui da  $R = \frac{abc}{4\Delta}$ , sostituendo, segue

$$[3] \quad R = \frac{p}{4 \cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C}.$$

Valendosi delle formole [1], [2], [3] e tenendo conto dei valori assegnati nell' enunciato, si ottiene

$$r = \text{m. } 806,00; \quad R = \text{m. } 1691,33; \quad \Delta = \text{m.}^2 1691,33.$$

ESTATE 1874, I). — *Trovare quattro numeri in proporzione geometrica, data la somma dei medi, la somma degli estremi, e la somma delle quarte potenze dei quattro termini. — Applicare la formola generale al caso speciale in cui la somma dei medi sia 10, quella degli estremi 11, e la somma delle quarte potenze 5729.*



Indicando con  $x$  ed  $y$  il 1° e 3° termine della proporzione, con  $z$  il rapporto comune, con  $a, b, c^4$ , rispettivamente, le tre somme date, si avranno le equazioni

$$x + yz = a, \quad y + xz = b, \quad x^4 + y^4 z^4 + y^4 + x^4 z^4 = c^4.$$

Inalzando alla quarta potenza i membri della prima 1° e 2° equazione, poi addizionandole e tenendo conto della terza equazione, si ottiene

$$c^4 + 4xyz(x^2 + y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2) + 12x^2 y^2 z^2 = a^4 + b^4.$$

Ora quadrando la 1° e 2° equazione, quindi addizionando, si ricava

$$x^2 + y^2 + y^2 z^2 + x^2 z^2 = a^2 + b^2 - 4xyz,$$

onde sostituendo nell'equazione precedente, fatte le debite riduzioni, si deduce l'equazione seguente

$$4(xyz)^2 - 4(a^2 + b^2)(xyz) + a^4 + b^4 - c^4 = 0,$$

di 2° grado in  $xyz$  e da cui si ha

$$xyz = \frac{a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2 b^2 + c^4}}{2}.$$

Indicando con  $\alpha$  il 2° membro dell'equazione precedente, il sistema primitivo può così essere sostituito dal seguente

$$yz = a - x, \quad xz = b - y, \quad xyz = \alpha.$$

Dividendo rispettivamente l'ultima di queste equazioni per le precedenti si ha, fatte le riduzioni:

$$x^2 - ax + \alpha = 0, \quad y^2 - by + \alpha = 0,$$

da cui

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \alpha}, \quad y = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \alpha}$$

e infine  $z = \alpha : (xy)$ .

Si può notare che per la realtà dei valori di  $x$  ed  $y$  e, in generale, di quello di  $z$ , conviene che sia  $\frac{a^2}{4} \geq \alpha$  e  $\frac{b^2}{4} \geq \alpha$  e poichè  $\alpha =$

$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \pm \frac{\sqrt{2a^2b^2 + c^4}}{2}$ , ha due valori uno dei quali è maggiore sia di  $\frac{a^2}{4}$  come di  $\frac{b^2}{4}$ , cioè quello che si ottiene prendendo il segno + pel radicale, così consegue che in ogni caso per  $\alpha$  devesi prendere la espressione  $\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{\sqrt{2a^2b^2 + c^4}}{2}$ , senza che derivi da ciò sempre la realtà per  $x, y, z$ .

Nel caso particolare dell'enunciato risulta  $\alpha = 24$ , e poichè sia  $\frac{a^2}{4}$  che  $\frac{b^2}{4}$  sono maggiori di 24, così i valori di  $x, y, z$  sono reali e si hanno i seguenti sistemi di soluzioni

$$\left(6, 8, \frac{1}{2}\right), \left(4, 8, \frac{3}{4}\right), \left(6, 3, \frac{4}{3}\right), \left(4, 3, 2\right)$$

a cui corrispondono le proporzioni:

$$3 : 6 = 4 : 8; \quad 3 : 4 = 6 : 8; \quad 8 : 6 = 4 : 3; \quad 8 : 4 = 6 : 3.$$

ESTATE 1874, II). — *Trovare e discutere il luogo geometrico di un punto tale che la somma o la differenza delle tangenti condotte da esso a due cerchi dati di grandezza e di posizione, sia eguale ad una retta data.*

Siano  $O$  e  $C$  (Tav. II, fig. 1<sup>a</sup>) i dati cerchi di raggi  $R$  ed  $r$  e riferiamo i punti del piano al sistema di assi coordinati ortogonali  $OC, OY$ . Posto  $OC = d$  e chiamando  $M$  un punto del luogo, cioè un tal punto dal quale conducendo le tangenti  $MA, MB$  ai due cerchi  $O$  e  $C$ , abbiasi  $AM \pm MB = a$ , dove  $a$  rappresenta il dato segmento, trattasi di trovare l'equazione del luogo medesimo.

Si osservi a tal uopo che si ha

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2, \quad \overline{MC}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{MP}^2,$$

essendo  $P$  il piede della perpendicolare calata da  $M$  sull'asse  $OC$  delle  $x$ , od  $\overline{OM}^2 = x^2 + y^2$ ;  $\overline{MC}^2 = (d - x)^2 + y^2$ , sicchè dai triangoli rettangoli  $AOM, MCB$  segue subito:

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}; \quad MB = \sqrt{(d - x)^2 + y^2 - r^2}$$



e l'equazione cercata sarà:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - R^2} \pm \sqrt{(d-x)^2 + y^2 - r^2} = a.$$

Quadrando due volte, coll'attenzione d'isolare in un membro il radicale che rimane dopo la prima quadratura, l'equazione precedente diviene razionale, e, fatte le opportune riduzioni, si trasforma nella seguente

$$4x^2(d^2 - a^2) + 4dx(r^2 + a^2 - d^2 - R^2) - 4y^2a^2 = \\ 4R^2r^2 - 4R^2d^2 - [d^2 - (R^2 + r^2 + a^2)]^2$$

che può anche scriversi

$$[1] \quad 4(d^2 - a^2)x^2 - 4a^2y^2 + 4d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)x + \\ (4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - a^2 - r^2)^2) = 0.$$

Il luogo cercato è dunque una conica della quale la  $OC$ , ossia l'asse delle  $x$ , è asse della curva, in quantochè ad ogni valore di  $x$  corrispondono valori uguali e di opposto segno per  $y$ .

Per decidere intorno alla natura di questa conica, si calcoli dapprima il *discriminante*  $\Delta$  della [1]. Questo è

$$\Delta = -16a^2(d^2 - a^2) \{4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - r^2 - a^2)^2\} \\ + 16a^2d^2(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)^2 = 16a^4 \left( (R^2 + r^2 + a^2 - d^2)^2 - 4R^2r^2 \right);$$

mentre il *discriminante*  $\mathcal{C}$  dei termini al 2° grado di [1] è

$$\mathcal{C} = 16a^2(a^2 - d^2).$$

Segue da ciò, in seguito alla nota discussione delle linee di 2° ordine (\*), che il luogo cercato sarà una parabola quando sia  $d = a$  ed  $R > r$ . Infatti in questo caso si ha:

$$\mathcal{C} = 0, \quad \Delta = 16a^4 \left( (R^2 + r^2)^2 - 4R^2r^2 \right) = 16a^4(R^2 - r^2)^2 > 0,$$

che se poi fosse anche  $R = r$ , sarebbe  $\Delta = 0$  e il luogo si ridur-

(\*) D'OVIDIO. Geometria analitica.

rebbe ad una coppia di rette parallele. In questo caso invero la [1] diviene

$$y^2 = R^2, \quad \text{da cui} \quad y = \pm R.$$

Dunque: le tangenti parallele e comuni a due circonferenze uguali costituiscono il luogo geometrico dei punti pei quali le tangenti condotte alle circonferenze stesse hanno una somma o differenza costante uguale alla retta congiungente i centri, com'è agevole verificare anche geometricamente.

Se poi sia  $d > a$ , allora  $C < 0$  e il luogo è una iperbole, mentre se  $d < a$  e quindi  $C > 0$ , il luogo è una ellisse.

È assai facile costruire per punti il luogo stesso, prescindendo dalle considerazioni precedenti. Essendo  $a$  il segmento dato, somma o differenza delle tangenti, si conducano da due punti arbitrari  $R, T$ , delle date circonferenze, le tangenti  $RS, TU$  e prendansi sulle medesime dei segmenti  $RS, TU$  tali che sia  $RS = m < a$  e  $TU = a - m$ , o  $RS = m > a$  e  $TU = m - a$ , a seconda dei casi, quindi si descrivano le circonferenze concentriche ad  $O$  e  $C$  coi raggi rispettivi  $OS, CU$ ; i loro punti d'intersezione  $M, N$  saranno evidentemente punti del luogo. Se poi prendesi su  $RS$  e  $TU$ ,  $RH = a$  e  $TV = a$  e si tracciano le circonferenze di centri  $O$  e  $C$  e raggi  $OH, CV$ , i punti  $I, L; D, E$  in cui queste incontrano le circonferenze date sono punti comuni a queste ed al luogo richiesto.

È interessante notare che nei punti  $I, L; D, E$  le circonferenze  $O$  e  $C$  e la conica [1] sono tangenti. Per dimostrare ciò si chiamino  $x', y'$  ed  $x'', y''$ , rispettivamente, le coordinate dei punti  $D, I$ . È chiaro, per la costruzione fatta, che  $x', y'$  saranno le soluzioni comuni alle equazioni

$$[2] \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad (d - x)^2 + y^2 = a^2 + r^2,$$

mentre  $x'', y''$  saranno le soluzioni comuni alle equazioni

$$[3] \quad x^2 + y^2 = R^2 + a^2, \quad (d - x)^2 + y^2 = r^2.$$

Dai sistemi [2] e [3], si ricava subito

$$[4] \quad x' = \frac{R^2 + d^2 - a^2 - r^2}{2d}, \quad x'' = \frac{R^2 + a^2 - r^2 + d^2}{2d}.$$



Ora, fermandoci al punto  $D$ , l'equazione della tangente al luogo rappresentato dalla [1] nel punto stesso, è (\*)

$$\begin{aligned} & \{4(d^2 - a^2)x' + 2d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)\}x - 4a^2y'y \\ & + 2d(r^2 + a^2 - d^2 - R^2)x' + 4a^2R^2 + (d^2 + R^2 - r^2 - a^2)^2 = 0, \end{aligned}$$

la quale, con la sostituzione ad  $x'$  del valore [4], si trasforma nella seguente

$$\frac{4a^2}{2d}(a^2 + r^2 - d^2 - R^2)x - 4a^2y'y + 4a^2R^2 = 0,$$

che può anche scriversi

$$x'x + y'y - R^2 = 0;$$

ma questa è la tangente al cerchio dato  $O$  nel punto  $[x', y']$ , dunque questo cerchio e la conica [1] hanno nel punto  $D$  la tangente in comune. Lo stesso vale per  $I$  e quindi anche, per la simmetria della figura rispetto ad  $OC$ , per i punti  $E$  ed  $L$ .

Ma vi ha un'altra proprietà degna di considerazione. Immaginiamo descritto l'asse radicale  $GF$  dei cerchi dati, luogo dei punti pei quali le tangenti condotte ai cerchi medesimi sono uguali, e proponiamoci di trovare l'ascissa del punto in cui questo taglia  $OC$ . Un punto di quest'asse radicale potrà evidentemente trovarsi descrivendo due circonferenze di centri  $O$  e  $C$  e aventi per raggi, rispettivamente, le ipotenuse di due triangoli rettangoli di cateti  $R$  ed  $\frac{a}{2}$ ,  $r$  ed  $\frac{a}{2}$ : un tal punto avrà per conseguenza per coordinate i valori  $x'''$ ,  $y'''$  di  $x$  ed  $y$  soddisfacenti al sistema di equazioni

$$[5] \quad x^2 + y^2 = R^2 + \frac{a^2}{4}, \quad (d - x)^2 + y^2 = r^2 + \frac{a^2}{4},$$

da cui ricavasi

$$[6] \quad x''' = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d}.$$

Ora, in seguito alle [4], si ha

(\*) Cfr. D'OVIO, o. c.

$$\frac{\alpha' + \alpha''}{2} = \frac{R^2 + d^2 - r^2}{2d} = \alpha''',$$

si può così concludere, tenendo conto anche di ciò che si è detto precedentemente, che

*Il luogo geometrico dei punti pei quali le tangenti condotte a due circonferenze date hanno una somma o differenza costante è una conica avente un doppio contatto colle circonferenze. Le corde di contatto sono parallele e l'asse radicale delle due circonferenze è equidistante da queste corde.*

*Osservazione.* — Supponendo  $a = 0$ , ossia proponendoci di determinare il luogo dei punti pei quali la differenza delle tangenti condotte ai dati cerchi è nulla, l'equazione [1] si trasforma nella

$$4d^2x^2 + 4d(r^2 - d^2 - R^2)x + (d^2 + R^2 - r^2)^2 = 0,$$

che può scriversi

$$[2dx + r^2 - d^2 - R^2]^2 = 0,$$

da cui

$$x = \frac{d^2 + R^2 - r^2}{2d};$$

il luogo degenera così in una retta, perpendicolare alla congiungente i centri dei due cerchi, che non è altro che l'asse radicale dei medesimi (Cfr. con la [6]).

AUTUNNO 1874, II). — *Data la base di un triangolo  $a = 3246^m,927$ . l'altezza  $h = 2145,797$ , e la somma degli altri due lati  $b + c = 5397,278$ , risolvere il triangolo.*

Avendosi

$$\Delta = \sqrt{p^2(p-a)^2 \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} = \sqrt{p^2(p-a)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A},$$

si ricava

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{\Delta}{p(p-a)},$$

sicchè posto  $b + c = s$ , l'angolo  $A$  risulta determinato dalla relazione

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \frac{2ah}{(s-a)(s+a)},$$



Da  $\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$ , si deduce poi

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\text{sen } B + \text{sen } C}{\text{sen } A} = \frac{2 \text{sen } \frac{1}{2} (B+C) \cos \frac{1}{2} (B-C)}{2 \text{sen } \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2} (B-C)}{\text{sen } \frac{1}{2} A},$$

onde:  $\cos \frac{1}{2} (B-C) = \frac{s \cdot \text{sen } \frac{1}{2} A}{a}$ , mentre è  $B+C = \pi - A$ .

Conoscendo così  $B+C$  e  $B-C$  potranno determinarsi  $B$  e  $C$  e quindi

$$b = \frac{a \text{sen } B}{\text{sen } A}, \quad c = s - b = \frac{a \text{sen } C}{\text{sen } A}.$$

Valendosi dei dati numerici dell'enunciato, si trova

$$A = 73^\circ . 42' . 50''; \quad B = 57^\circ . 32' . 7''; \quad C = 48^\circ . 45' . 3'';$$

$$b = \text{m. } 2854,026; \quad c = 2543,252.$$

ESTATE 1875, II). — *Date tre tangenti e la direzione dei diametri di una parabola, trovare: 1° i punti di contatto delle tre tangenti date; 2° altre tangenti della curva; 3° i punti di contatto di queste tangenti.*

Sia  $u$  (fig. 2<sup>a</sup>) la direzione data, comune ai diametri della parabola, e  $a, b, c$  le tre tangenti date. Taglinsi  $a$  e  $b$  in  $A$ ,  $b$  e  $c$  in  $B$ . Conducendo per  $A$  una parallela a  $c$  e per  $B$  una parallela ad  $a$ , pel corollario al teorema di BRIANCHON che *in un quadrilatero semplice circoscritto ad una conica, le due diagonali e le congiungenti i punti di contatto dei lati opposti concorrono in un punto*, il punto  $O$  in cui si tagliano le parallele menzionate sarà un punto della congiungente il punto di contatto della tangente  $b$  col punto di contatto della retta all'infinito. Se dunque per  $O$  si conduce una parallela ad  $u$  e si trova il suo punto  $H$  d'incontro con  $b$ , sarà questo il punto in cui  $b$  tocca la conica.

Per trovare un'altra tangente della parabola, prendasi sulla  $c$  un punto qualunque  $C$  e si osservi che le tre tangenti date, la tangente condotta da  $C$  alla parabola e la retta all'infinito formano un pentagono circoscritto alla conica, sicchè per l'altro corollario del teorema di BRIANCHON, che *due diagonali e la congiungente il vertice per cui non passano queste due diagonali col punto di contatto del lato opposto, concorrono in uno stesso punto*, si avrà che trovato il punto d'intersezione  $L$  delle  $AC$ ,  $BO$ , la  $HL$  sarà parallela alla tangente alla parabola passante per  $C$ , cosicchè questa tangente  $d$  si costruirà subito. Ed ora partendo dalle tre tangenti  $b$ ,  $c$ ,  $d$  si potrà, ripetendo la 1<sup>a</sup> costruzione, trovare il punto di contatto della retta  $c$  colla parabola, poi ripetendo la 2<sup>a</sup> costruzione per un punto  $D$  della  $a$ , potrà tracciarsi una 5<sup>a</sup> tangente e trovare poi il punto di contatto di  $a$  colla conica e così di seguito, conforme a quanto è richiesto nell'enunciato.

*Osservazione.* — Trovati che siano due punti di contatto si possono avere agevolmente punti e tangenti della curva, fra i due primi, tirando la corda di questi, dividendola per metà, congiungendo il punto medio ottenuto col punto d'intersezione delle tangenti alle estremità della corda, dividendo per metà quest'ultima congiungente e per il punto così ottenuto guidando una parallela alla corda e ciò per una notissima proprietà della *polare*.

ESTATE 1875, IV). — *Fra due rette date allogare un segmento che sia veduto da due punti fissi sotto angoli dati.*

Siano  $MO \equiv u$ ,  $NO \equiv v$  le rette date,  $A$  e  $B$  i punti fissi ed  $\alpha$ ,  $\beta$  gli angoli dati sotto ai quali dev'essere veduto lo stesso segmento  $MN$  allogato fra le rette  $MO$ ,  $NO$ .

*Soluzione geometrica.* — S'immagini che un angolo uguale ad  $\alpha$  ruoti intorno al punto  $A$  (fig. 3<sup>a</sup>) ed i suoi lati incontrino rispettivamente le rette  $u$  e  $v$  nei punti  $M$ ,  $M'$ ,  $M''$ , ...;  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$ , .... È chiaro che le punteggiate così ottenute saranno proiettive poichè i fasci  $A(M', M'', M''', \dots)$ ,  $A(N', N'', N''', \dots)$ , di cui sono sezioni, sono congruenti, dall'eguaglianza degli angoli  $NAM$ ,  $N'AM'$ , ... risultando quella degli angoli  $NAN''$  ad  $MAM'$ ,  $N'AN'''$  ad



$M'' A M''$ , ecc.. Le congiungenti i punti corrispondenti delle due punteggiate involuppano per conseguenza una conica alla quale è pure tangente la retta cercata  $MN$ , insieme alle rette  $u$  e  $v$  poichè al punto  $O$  riguardato come appartenente all'una od all'altra di queste rette corrisponde un punto situato nell'altra.

Nello stesso modo si prova che la  $MN$  deve toccare la conica involuppo delle rette congiungenti i punti corrispondenti delle due punteggiate proiettive che si ottengono sulle rette  $u$  e  $v$  dalle intersezioni dei lati d'un angolo uguale a  $\beta$  ruotante intorno a  $B$ , la quale conica è ancora tangente ad  $u$  e  $v$ .

La retta cercata è dunque una tangente comune alle due coniche anzidette. E poichè dalle 4 tangenti in comune due sono le rette  $u$  e  $v$ , il problema ammette in generale due soluzioni.

*Soluzione analitica.* — Conducansi (fig. 4<sup>a</sup>)  $AO$ ,  $BO$  e supposto che la retta  $MN$ , segnata nella figura, sia quella cercata, pongasi  $OM = x$ ,  $ON = y$ ,  $OA = a$ ,  $OB = b$ , angolo  $MON = O$ , ang.  $MOA = \theta_1$ , ang.  $AON = \theta_2$ , ang.  $MOB = \psi_1$ , ang.  $BON = \psi_2$ , ang.  $OAM = A_1$ , ang.  $NOA = A_2$ , ang.  $OBM = B_1$ , ang.  $NBO = B_2$ , dei quali angoli  $O$ ,  $\theta_1$  e  $\theta_2$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sono da riguardarsi come noti, mentre per le coppie di angoli rimanenti sussistono solo le relazioni  $A_1 + A_2 = \alpha$ ,  $B_1 + B_2 = \beta$ .

Posto ciò, ferdandoci a considerare solo quello che avviene pel punto  $A$ , è chiaro che si avrà

$$\text{area } MON + \text{area } NAM = \text{area } AMO + \text{area } AON,$$

ossia, per l'applicazione d'un teorema notissimo di trigonometria

$$[1] \quad xy \sin O + AM \cdot AN \sin \alpha = a (x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2).$$

Ora da relazioni conosciute, consegue

$$AM \sin A_1 = x \sin \theta_1, \quad AN \sin A_2 = y \sin \theta_2$$

$$AM \cos A_1 = a - x \cos \theta_1, \quad AN \cos A_2 = a - y \cos \theta_2$$

e mediante moltiplicazione della 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> di queste uguaglianze e della 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>, e successiva sottrazione dei prodotti ottenuti:

$$AM \cdot AN (\cos A_1 \cos A_2 - \sin A_1 \sin A_2) = \\ (a - x \cos \theta_1) (a - y \cos \theta_2) - xy \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

e finalmente sviluppando il prodotto indicato nel 2° membro e tenendo conto del teorema relativo al coseno della somma di due angoli

$$AM \cdot AN \cos \alpha = a^2 - a(x \cos \theta_1 + y \cos \theta_2) + xy \cos O.$$

Eliminando, servendosi di questa equazione e della [1], il prodotto  $AM \cdot AN$ , risulta

$$\begin{aligned} a^2 \sin \alpha - a(x \cos \theta_1 + y \cos \theta_2) \sin \alpha + xy \cos O \sin \alpha = \\ a(x \sin \theta_1 + y \sin \theta_2) \cos \alpha - xy \sin O \cos \alpha, \end{aligned}$$

la quale, dopo facili riduzioni, si riduce a

$$[2] \quad \sin(\alpha + O)xy - a \sin(\alpha + \theta_1)x - a \sin(\alpha + \theta_2)y + a^2 \sin \alpha = 0,$$

in cui sono quantità incognite soltanto  $x$  ed  $y$ .

Similmente ragionando pel punto  $B$  si è condotti all'altra equazione

$$[3] \quad \sin(\beta + O)xy - b \sin(\beta + \psi_1)x - b \sin(\beta + \psi_2)y + b^2 \sin \beta = 0.$$

Formando sistema delle equazioni [2] e [3], che sono di 2° grado in  $x$  ed  $y$ , possono ricavarsi i valori di queste due incognite, dopo di che il problema è completamente risoluto.

Osservando che le [2] e [3] sono della forma

$$mxy - nx - py + q = 0, \quad m_1xy - n_1x - p_1y + q_1 = 0$$

e che dall'eliminazione del termine in  $xy$  si ottiene

$$(mn_1 - m_1n)x + (mp_1 - m_1p)y + qm_1 - q_1m = 0$$

risulta che  $x$  è esprimibile linearmente per  $y$ . Ricavando effettivamente  $x$  e sostituendo in una delle equazioni primitive si giunge ad un'equazione di 2° grado ad un'incognita. Segue da ciò che le [2] e [3] ammettono due sistemi di soluzioni, il che accorda con quanto risultava dalla soluzione geometrica.

Autunno 1875, I). — Trovare, con tre decimali esatti, una soluzione comune alle due equazioni

$$2x^2 + 4xy + 13x + 6y + 1 = 0,$$

$$x^2 + 6xy + 19x + 4y + 2 = 0.$$



Eliminando il termine contenente  $xy$  dalle due equazioni si ha il sistema equivalente al dato

$$\begin{aligned} 4x^2 + x + 10y - 1 &= 0, \\ x^2 + 6xy + 19x + 4y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Ricavando dalla prima di queste due  $y$  in funzione di  $x$  e sostituendo il valore ottenuto nella seconda, risulta l'equazione di 3° grado

$$[1] \quad 2x^3 + x^2 - 16x - 2 = 0;$$

liberandola dal 2° termine col porre  $x = z + u$ , poi determinando convenientemente  $u$  ( $= -\frac{1}{6}$ ) in modo che il coefficiente di  $z^2$  si annulli, si giunge all'equazione

$$z^3 - \frac{97}{12}z + \frac{37}{108} = 0,$$

la quale confrontata con  $z^3 + pz + q = 0$  dà per la quantità  $27q^2 + 4p^3$  un numero negativo. Essa ha dunque le sue radici reali. Risolvendola trigonometricamente si trova  $z' = +2,82169\dots$ ;  $z'' = -2,86407$ ;  $z''' = +0,04239$ , sicchè i tre valori di  $x$ , soddisfacenti alla [1], saranno:

$$x' = +2,65502, \quad x'' = -3,03074; \quad x''' = -0,12428.$$

Se ora si osservi che

$$y = \frac{1 - x - 4x^2}{10},$$

i valori di  $y$  corrispondenti a quelli già trovati per  $x$ , saranno

$$y' = -2,9851; \quad y'' = -3,2710; \quad y''' = +0,1063.$$

È bene notare che dei tre sistemi di soluzioni trovati, l'ultimo non offre molta garanzia d'esattezza, essendo concorso a determinarlo il coseno d'un angolo prossimo a  $90^\circ$ .

AUTUNNO 1875, II). — *Descrivere una parabola tangente a tre rette date e passante per un punto dato.*

LEMMA. *Se una trasversale incontra una parabola, un diametro di questa, e la tangente all'estremità del diametro, il segmento della trasversale compreso fra la tangente e il diametro è medio proporzionale fra la secante e la sua parte esterna.*

Siano  $A, B, C$  (fig. 5<sup>a</sup>) tre punti d'una parabola,  $BD'$  la direzione di un diametro, che incontra dunque la conica nel suo punto all'infinito  $D$ , cosicchè  $ABCD$  è un quadrilatero inscritto: per un corollario al teorema di PASCAL, ossia che se un quadrilatero è inscritto in una conica le due coppie di lati opposti e le tangenti in due vertici opposti si tagliano in punti che sono nella stessa retta, potremo concludere che tirando per  $A$  e  $C$  le parallele a  $BD'$  e trovando i loro punti d'intersezione  $E, F$ , rispettivamente, con  $CB, AB$  ed immaginando per  $B$  la tangente  $BG$  alla parabola, i punti  $E, F$  saranno allineati col punto in cui questa tangente incontra la retta all'infinito, e col punto d'intersezione delle tangenti in  $A$  e  $C$ ; onde  $EF$  è parallela a  $BG$ . E se  $D', G$  sono i punti in cui il diametro e la tangente per  $B$  incontrano  $AC, CF$ , si avrà per conseguenza

$$CB : CE = CG : CF = CD' : CA,$$

onde  $GD'$  sarà parallela ad  $AF$ .

Posto ciò prolunghinsi  $BG, CA$  finchè s'incontrino in  $H$ , sarà:  $BH : GH = AH : D'H = D'H : CH$  e perciò

$$\overline{D'H}^2 = AH \cdot CH \quad \text{c. d. d.}$$

Ed ora passiamo a considerare il problema proposto.

Siano  $a, b, c$  (fig. 6<sup>a</sup>) le tre tangenti date,  $A$  un punto pel quale deve passare la parabola,  $M, N$  i punti d'intersezione di  $a$  e  $b, b$  e  $c$ . Per  $M$  si tiri una parallela a  $c$  e per  $N$  una parallela ad  $a$ , le quali s'incontrano in  $O$ , sarà  $O$  un punto del diametro della parabola che passa pel punto di contatto di  $b$  con la curva (\*). Così condotta  $AO$  e prolungata fino ad incontrare la tangente  $b$  in  $R$ , pel lemma precedente, si avrà un altro punto  $B$  della curva servendosi della relazione  $RB = \frac{RO^2}{RA}$  e portando il segmento  $RB$  su  $RA$  nella direzione  $RA$ .

(\*) Le rette  $a, b, c$  e la retta all'infinito formano un quadrilatero circoscritto alla parabola, le cui diagonali sono  $MO, NO$ , sicchè per un noto teorema  $O$ , il punto di contatto di  $b$  e quello della retta all'infinito sono per diritto.



Per trovare i punti di contatto delle tangenti colla parabola, sia  $D$  il punto in cui la corda  $AB$  taglia  $a$  e si determini quel punto  $E$  pel quale si ha

$$\overline{DE}^2 = DB \cdot DA,$$

$E$  sarà un punto del diametro passante pel punto di contatto della tangente  $a$ . Condotta poi per  $Q$ , intersezione di  $a$  e  $c$ , una parallela a  $b$ , che incontra  $OM$  in  $I$ , sarà  $IE$  il diametro stesso e il punto  $G$ , in cui  $IE$  incontra  $a$ , il punto di contatto di  $a$ . Per avere poi i punti di contatto di  $b$  e  $c$  colla parabola basta: 1° tirare per  $O$  una parallela ad  $IG$  fino ad incontrare  $b$  in  $L$ , 2° trovare il punto  $P$  d'intersezione di  $ON$  con  $IQ$ , quindi tracciare  $PH$  parallela ad  $IE$  fino ad incontrare la tangente  $c$  in  $H$ .

Dopo ciò il problema può considerarsi completamente risoluto.

*Discussione.* In primo luogo è opportuno dimostrare che, colla costruzione indicata per trovare un secondo punto  $B$  della curva,  $B$  viene a cadere, com'è necessario, sempre nell'interno dell'angolo formato da  $a$  e  $c$ . Si ha infatti evidentemente dalla figura  $RC : RO > RA : RO$ , ma  $RC : RO = RN : RM = RO : RD$  e d'altra parte  $RA : RO = RO : RB$ , onde

$$RO : RD > RO : RB$$

sicchè il punto d'intersezione di  $AO$  con  $a$ , cade fra  $B$  ed  $R$ .

In secondo luogo si osservi che oltre  $E$  esiste sulla  $AB$  un secondo punto  $E'$  avente da  $D$ , distanza uguale a  $DE$ , pel quale si possono ripetere i ragionamenti fatti per  $E$  e che conduce alla determinazione di altri punti di contatto di  $a$ ,  $b$ ,  $c$  colla parabola. Il problema proposto ha perciò due soluzioni, tutte le volte che  $A$  non è punto di una tangente.

*Osservazione.* — È utile osservare che il diametro della parabola passante per  $Q$  taglia per metà la corda  $GH$  ed incontra quindi nel punto medio  $K$  anche il segmento  $EF$  determinato su  $AB$  dalla intersezione dei diametri  $IE$ ,  $PH$ , ciò che condurrebbe ad un'altra soluzione del problema.

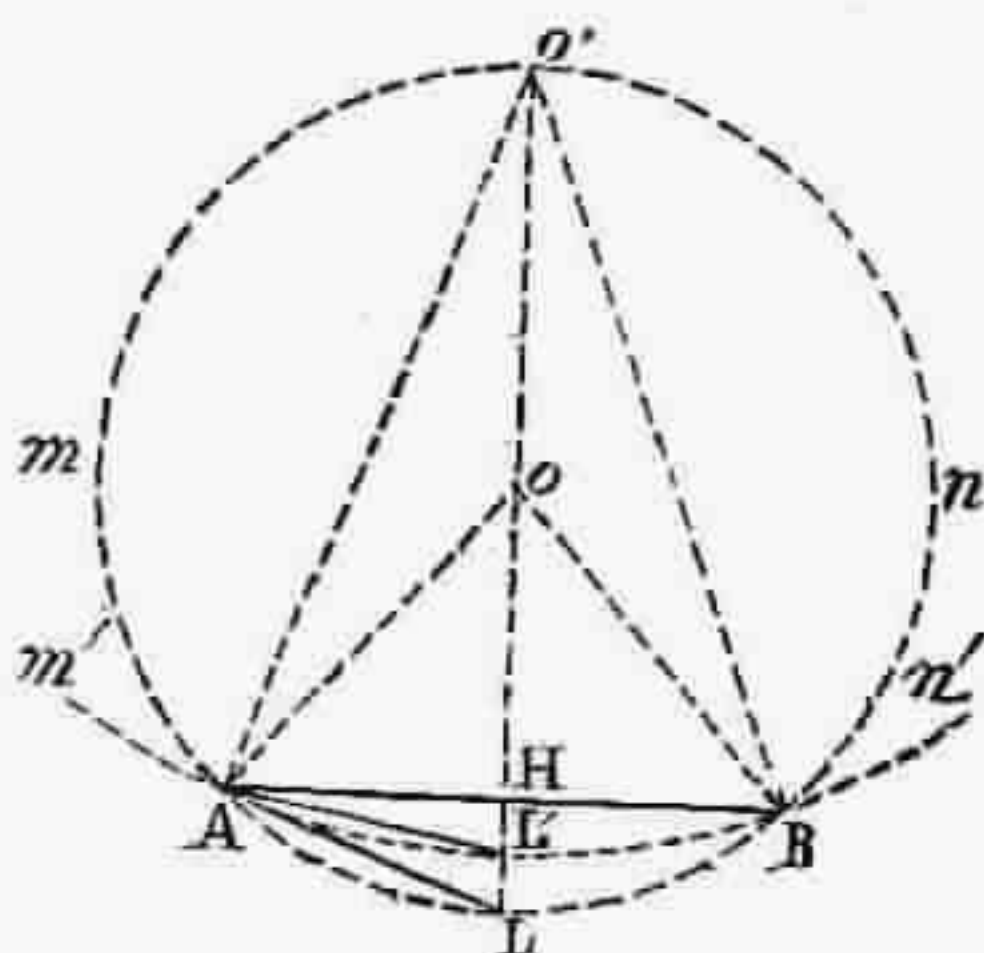
A. LUGLI.

## UNA DIMOSTRAZIONE DI CORSO

### INTORNO AI NOTI PROBLEMI SUI POLIGONI REGOLARI

I noti problemi della geometria elementare intorno ai poligoni regolari, per la determinazione di  $\pi$ , si possono far dipendere, in modo assai semplice e didatticamente utile, dal seguente:

\* Dati il raggio  $R$  e l'apotema  $r$  di un poligono regolare di  $n$  « lati uguali ad  $AB = a$ , calcolare il raggio  $R'$  e l'apotema  $r'$  del « poligono regolare di numero doppio di lati parimente costruito « sopra  $AB$  ».



Basta per ciò considerare il triangolo isoscele  $OAB$ , i cui lati  $OA = OB = R$  e la cui altezza  $OH = r$  ne sono rispettivamente il raggio e l'apotema e tracciare indi la circonferenza  $mABn$  e il suo diametro per  $H$ : l'angolo inscritto  $A'O'B$  essendo metà di quello  $AOB$  saranno  $O'A = R'$  ed  $O'H = r'$  gli elementi cercati, e si avrà

$$r' = R + r \quad \text{ed} \quad R' = \sqrt{2R \cdot r'} = \sqrt{2R(R + r)}$$

e chiamando  $R_1$  ed  $r_1$  il raggio e l'apotema del poligono regolare isoperimetro al dato di numero doppio di lati costruito sopra  $AH$ , sarà

$$r_1 = \frac{1}{2} r' = \frac{R + r}{2} \quad \text{ed} \quad R_1 = \sqrt{R \cdot r_1} \dots [1]$$

Ed è anche qui facile il mostrare la nota relazione  $R_k - r_k < \frac{1}{4}(R_{k-1} - r_{k-1})$  tra le differenze del raggio coll'apotema in due poligoni isoperimetri consecutivi: infatti essendo  $AL'$  bisettrice del-



l'angolo  $A$  nel triangolo  $H A L$  sarà  $H L' < \frac{1}{2} H L$  cioè  $R' - r' < \frac{1}{2} (R - r)$ , epperò

$$R_1 - r_1 < \frac{1}{4} (R - r).$$

Ora il problema: « Dato il lato  $A B = a$  di un poligono regolare « ed il raggio  $O A = R$  del cerchio circoscritto, calcolare il lato «  $A L = c$  del poligono regolare di un numero doppio di lati, in- « scritto nello stesso cerchio » si risolve subito mediante la proporzione

$$c : a = R : R' \text{ d'onde } c = \frac{a R}{R'} = \frac{a R}{\sqrt{2 R (R + r)}} \text{ e } c^2 = \frac{a^2 R^2}{2 R (R + r)}$$

e ponendo per  $a^2$  il suo valore  $4 (R^2 - r^2)$  si avrà

$$c^2 = 2 R (R - r) = 2 R \left( R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} \right).$$

Eguale è la soluzione dell'altro problema: « Dati i « perimetri  $p, P$  di due poligoni regolari simili inscritto e circo- « scritto ad uno stesso cerchio, calcolare i perimetri  $p', P'$  dei poli- « goni regolari inscritto e circoscritto di un numero doppio di lati ».

Infatti considerando  $A B$  come lato del poligono regolare di  $2n$  lati circoscritto al cerchio di raggio  $O' H = R + r$ , il lato  $x$  del poligono simile circoscritto al cerchio di raggio  $R$  sarà dato dalla proporzione  $x : a = R : R + r$ , d'onde  $x = \frac{a R}{R + r}$ .

Analogamente il lato  $y$  del poligono regolare di  $n$  lati, eguali ad  $A B = a$ , circoscritto al cerchio di raggio  $R$  è dato dalla proporzione  $y : a = R : r$ , d'onde  $y = \frac{a R}{r}$ ; sicchè gli anzidetti perimetri  $p, P, p', P'$  potranno così esprimersi

$$p = n a; P = \frac{n a R}{r}; p' = \frac{2 n a R}{\sqrt{2 R (R + r)}}; P' = \frac{2 n a R}{R + r}$$

e si avrà, com'è ovvio,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{P} = \frac{R + r}{n a R}; \frac{1}{p'} = \frac{R + r}{2 n a R},$$

d'onde

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{P} \right) \text{ ossia } P' = \frac{2 P p}{P + p} \dots \dots [2]$$

Inoltre

$$p' : p = \frac{2 R}{\sqrt{2 R (R + r)}} = \frac{\sqrt{2 R (R + r)}}{R + r} = \frac{P'}{p};$$

d'onde

$$p' = \sqrt{p \cdot P'} \dots \dots \dots [3]$$

e, com' è risaputo, le formule [1], [2] e [3] risolvono il problema proposto.

Palermo, giugno 1890.

Ing. F. P. PATERNÒ.

---

**ALCUNI TEMI DI MATEMATICA**  
**PROPOSTI PER LA LICENZA LICIALE**

---

1. Per un punto assegnato condurre una retta la quale seghi un cerchio dato in punti tali che la somma delle loro distanze da una retta data sia uguale ad un segmento dato.
2. Se due cerchi si segano, formando un angolo di 75°, e la distanza dei loro centri è doppia dell'apotema del dodecagono regolare inscritto nel minore di essi, dimostrare che la corda comune a questi due cerchi è lato dell'esagono regolare inserito nel cerchio maggiore ed è lato del quadrato inscritto nel cerchio minore.
3. Supposto che le lettere dell'alfabeto italiano abbiano rispettivamente per valori i numeri che indicano l'ordine con cui si seguono, si determini un nome (a noi tutti caro) sapendo che esso è composto di sei lettere e che i valori numerici di queste adempiono alle seguenti condizioni:
  - la somma dei valori della terza e della sesta è uguale a 19;
  - la somma dei valori della seconda e della quinta è uguale a 10;
  - la somma dei quadrati dei valori delle quattro predette lettere è uguale a 407;
  - i valori della quinta, della sesta e della terza hanno per quarto proporzionale il doppio del valore della seconda;
  - di questi quattro valori il maggiore è quello della terza e poi segue quello della quinta;



i valori delle altre due lettere sono dati dalle radici reali dell'equazione

$$x^2 - 18x - 3\sqrt{x^2 - 30x + 228} = 12x - 230,$$

la minore delle quali esprime il valore della prima lettera.

*NB.* Dall'alfabeto vanno escluse le lettere  $k, j, x, y, w$ .

4. Di due coni circolari retti aventi il lato eguale, il vertice di comune ed i piani delle basi paralleli, son date: la somma  $2a$  del raggio di uno di questi coni colla sua altezza; la somma  $2b$  del raggio e dell'altezza dell'altro cono; e la somma  $2S$  delle aree dei triangoli che si ottengono segnando i due coni con un piano passante per i loro centri. — Il primo dei nominati coni ha il raggio minore dell'altezza; ed il secondo ha invece il raggio maggiore dell'altezza.

Determinare i volumi di questi due coni.

(Sessione di luglio, 1890 — *R. Liceo di Bari*).

1. Essendo  $ABC', ACB', BCA'$  tre triangoli equilateri, costruiti sui lati del triangolo qualunque  $ABC$  dalla parte esterna di esso, si dimostri che i segmenti  $AA', BB', CC'$  sono fra loro uguali e passano per uno stesso punto.

2. Costruire un triangolo di cui son dati il perimetro, un angolo ed un'altezza. Si prenda in esame ciasenno dei casi che può presentare questo problema.

3.  $S_n, S_{n-1}, S_{n-2}$  denotando rispettivamente le somme delle potenze  $n^{\text{esimo}}, (n-1)^{\text{esimo}}$  ed  $(n-2)^{\text{esimo}}$  delle radici dell'equazione

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dimostrare che si deve avere

$$aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0.$$

4. Facendo ruotare un triangolo rettangolo prima attorno alla ipotenusa e poi attorno ad un suo cateto si ottengono due solidi di cui i volumi sono rispettivamente espressi da  $\frac{1}{3}\pi a^3, \frac{1}{3}\pi b^3$ .

Determinare i tre lati di questo triangolo, e dimostrare quale di questi due volumi debba essere maggiore.

(Sessione d'ottobre, 1890 — *R. Liceo di Bari*).

1. Iserivere in un triangolo un rettangolo del quale è dato il rapporto dei lati.

2. Le bisettrici degli angoli esterni di un quadrilatero qualunque formano un quadrilatero iscrivibile.

3. Dividere un cono con un piano parallelo alla base in modo che la superficie laterale del cono superiore sia media proporzionale fra la superficie laterale dell'intero cono e la superficie laterale del tronco di cono. (Risolvere questo problema algebricamente, supposto noti il raggio della base ed il lato del dato cono).

4. Un aeronauta tira un colpo di fucile verso terra, dirigendo la canna dell'arma verticalmente. Supposta la velocità iniziale del proiettile di 300 m.; l'accelerazione  $g = m. 9,809$  e la velocità del suono m. 340: si domanda a quale altezza dovrà trovarsi il pallone, perchè la palla giunga a terra contemporaneamente al rumore dell'esplosione.

(Sessione d'ottobre, 1890. *R. Liceo Ruggero Sattimo di Caltanissetta*).

1. Condurre una retta in modo che i segmenti di essa, compresi in due cerchi dati, siano uguali rispettivamente a due segmenti determinati.

2. Descrivere con raggio dato una circonferenza che sia tangente ad un lato di un angolo, e tagli dall'altro un segmento dato.

3. Data l'area di un triangolo, determinare il valore dei tre lati del medesimo, nell'ipotesi che i lati siano proporzionali ai numeri  $m, n, p$ .

4. Calcolare il raggio di un circolo, essendo nota la differenza fra le aree del triangolo e dell'esagono regolari circoscritti al circolo.

(Sessione di luglio, 1890 - *R. Liceo e Ginnasio di Carmagnola*).

1. Da un punto preso fuori di un angolo condurre una retta la quale tagli i lati del medesimo in modo che i due segmenti di essa, compresi fra il punto ed i lati, siano proporzionali ai numeri interi  $m, n$ .

2. Trovare il luogo dei punti dai quali conducendo le due tangenti ad un cerchio, queste comprendono un angolo dato.

3. Scomporre in fattori di primo grado rispetto ad  $x$ , il polinomio  $3x^3 - 3x^2\sqrt{a} + ax^2 - x\sqrt{a^3}$ .

4. Calcolare il valore numerico del lato di un cono di rivoluzione nel caso in cui si conoscono il raggio della base, e la somma delle superficie laterali del cono e della piramide esagonale regolare iscritta nel medesimo.

(Sessione d'ottobre, 1890 - *R. Liceo e Ginnasio di Carmagnola*).

1. In una progressione aritmetica crescente la somma del diciannovesimo e del trentunesimo termine è 42 e il loro prodotto è 425. Trovare il primo termine e la ragione.



2. In un triangolo rettangolo la somma dell'ipotenusa e di un cateto è  $a$ ; quella dell'ipotenusa e dell'altro cateto è  $b$ . Calcolare i tre lati e l'area del triangolo.

3. Se si congiungono tra loro i punti di mezzo dei successivi lati di un quadrilatero convesso, e i punti di incontro delle congiungenti con le diagonali del quadrilatero si uniscono ancora fra loro, si ha un quadrilatero simile al dato ed equivalente alla quarta parte di esso.

4. Se si congiungono fra loro i vertici alterni di un esagono regolare, si ha un altro esagono regolare. I lati di questo nuovo esagono sono uguali al terzo delle rette che congiungono i vertici alterni del primo.

(Sessione di luglio, 1890 - *Liceo pareggiato di Chiavari*).

1. Costruire un triangolo rettangolo conoscendone l'ipotenusa e l'altezza.

2. Trovare tre numeri in progressione geometrica tali che la loro somma sia  $13a$  e la somma dei loro quadrati sia  $91a^2$ .

(Sessione d'ottobre, 1890 - *R. Liceo di Cremona*).

1. Due piramidi sono eguali, se hanno eguali la base, l'altezza ed una delle facce laterali, purchè la posizione relativa di tali elementi sia precisamente la stessa.

2. La base di un triangolo isoscele è media proporzionale tra la sua proiezione sul lato ed il doppio di questo.

3. Di un trapezio isoscele sono date l'area, l'altezza e la lunghezza dei lati eguali: determinare le basi e le diagonali.

4. Il peso nell'acqua (distillata a  $4^\circ$ ) di una massa contenente  $a$  Cg. di un certo metallo e  $b$  Cg. di un altro metallo è  $c$ , ed il peso nell'acqua di una massa contenente  $a'$  Cg. del primo metallo e  $b'$  Cg. del secondo metallo è  $c'$ : determinare il peso specifico di ciascuno dei due metalli.

(Sessione di luglio 1890 - *R. Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli*).

1. Un poligono convesso di numero pari di lati, se ha gli angoli opposti eguali, ha i lati opposti paralleli.

2. Se le tre facce laterali di un prisma triangolare hanno un angolo della stessa grandezza, il prisma deve essere retto.

3. Un parallelogrammo circoscrittibile ad un cerchio non può essere che rombo.

4. Determinare le quattro radici dell'equazione:

$$(x^2 - 11x + 24)^2 - 2(x^2 - 11x + 24) - 24 = 0.$$



5. Se l'area di un triangolo isoscele è terza parte del quadrato della base, il raggio del cerchio inscritto nel triangolo è la quarta parte della base.

Il candidato, se crede, può giovare del teorema: L'area di un triangolo è data dal prodotto del perimetro per la metà del raggio del cerchio inscritto.

(Sessione di ottobre 1890. *R. Liceo Ginnasiale Umberto I in Napoli*).

1. Descrivere un cerchio che sia tangente ad una retta data in un punto dato e che sia pure tangente ad una data circonferenza.

2. La circonferenza che passa per gli estremi d'un lato d'un triangolo isoscele e per un punto della base e quella passante per questo medesimo punto e per gli estremi dell'altro lato sono eguali tra loro; le minori di tali circonferenze passano per il baricentro della base ed hanno per diametro il lato del triangolo, quelle tangenti alla base sono maggiori di quelle che la tagliano, internamente, ed hanno per diametro il segmento che è terzo proporzionale dopo l'altezza ed il lato del triangolo isoscele.

3. La somma delle circonferenze di tre cerchi è  $a \cdot m$ , la somma delle superfici dei cerchi stessi è  $b \cdot m \cdot q$ . e sono in progressione aritmetica i loro raggi: si domandano le lunghezze di questi.

4. Da un punto del primo lato d'un angolo acuto si conduce la perpendicolare sul secondo lato; dal piede di questa si conduce la perpendicolare sul primo lato, dal piede di questa la perpendicolare sul secondo lato, e si continua così indefinitamente; la somma delle infinite perpendicolari così condotte è  $a \cdot m$  ed è  $b \cdot m$  la somma delle prime due: si domandano le lunghezze di queste.

(Sessione di ottobre 1890 — *Liceo V. E. di Palermo*).

1. Un numero  $N$  è il prodotto di tre numeri  $(2x - 1)$ ,  $(2x + 1)$ ,  $(2x + 3)$ ; dividendolo per ciascuno di essi, e sommando i quoti, si ottiene 239. Calcolare il numero  $N$ .

2. Cercare due numeri tali, che 12 ne sia la differenza, e  $\frac{5}{4}$  sia il rapporto fra il medio aritmetico ed il medio geometrico dei medesimi.

3. Il raggio del circolo circoscritto ed il raggio del circolo inscritto in un triangolo rettangolo, sono rispettivamente eguali a  $m \cdot 7,5$  ed a  $m \cdot 3$ .

Calcolare:

1. i tre lati; — 2. le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa; —



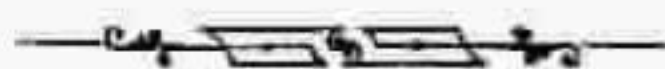
3. l'altezza corrispondente all'ipotenusa; — 4. l'area; — 5. le mediane, le bisettrici degli angoli interni ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati; — 6. gli angoli acuti; — 7. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono generato dal suddetto triangolo rettangolo in una rotazione intorno al cateto maggiore; — 8. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono che si ottiene, segnando il soprannominato cono con un piano parallelo alla base e distante un metro dal vertice; — 9. il volume e l'area della superficie della sfera il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, il quale abbia la base doppia del cateto minore del surripetuto triangolo rettangolo e abbia gli altri due lati eguali ciascuno a 15 metri; — 10. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cilindro il cui raggio ed altezza siano rispettivamente eguali al raggio ed al diametro della sfera di cui sopra.

4. I valori dei tre lati di un triangolo rettangolo sono rispettivamente eguali a tre numeri interi consecutivi.

Calcolare :

1. i tre lati; — 2. le proiezioni dei cateti sopra l'ipotenusa; — 3. l'altezza corrispondente all'ipotenusa; — 4. l'area; — 5. il raggio del circolo circoscritto, ed il raggio del circolo inscritto; — 6. le mediane, le bisettrici degli angoli interni del triangolo rettangolo, ed i segmenti che queste bisettrici determinano sui lati; — 7. gli angoli acuti; — 8. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del cono che si ottiene facendo ruotare il triangolo rettangolo in parola, attorno al cateto maggiore; — 9. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale ed il volume del tronco di cono, che si ottiene segnando il suaccennato cono con un piano parallelo alla base, e distante un metro dalla base; — 10. il volume e l'area della superficie della sfera, il cui raggio sia eguale al raggio del circolo inscritto nel triangolo isoscele, che abbia la base uguale al doppio del cateto minore del triangolo rettangolo in questione, e che abbia due lati eguali ciascuno all'ipotenusa; — 11. l'area della superficie laterale, l'area della superficie totale, ed il volume del cilindro, che abbia il raggio e l'altezza rispettivamente eguali al raggio ed al diametro della sfera suddetta.

(Sessione di luglio 1890. — *R. Liceo di Reggio Emilia*).



## SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 64 e 65

64. Risolvere il seguente sistema d'equazioni:

$$ax^2 + by^2 + \alpha(ax - by) + (a+b)(1+\alpha-y)x - (a+b)(1+\alpha)y + \alpha(a+b)(1+\alpha) = 0$$

$$2y^3 + \{\alpha^2 + (a+b)^2 - 2y^2\}x - \{\alpha^2 + (a+b)^2 - 2x^2\}y - 2x^3 = 0,$$

nelle quali  $\alpha, a, b$  esprimono quantità note.

(S. GATTI).

Soluzione del Prof. P. Morino (\*).

La prima equazione si può scrivere successivamente

$$ax^2 - (a+b)xy + by^2 + \{ax + (a+b)(1+x)\}x - \{\alpha b + (a+b)(1+\alpha)\}y + \alpha(a+b)(1+\alpha) = 0,$$

$$(x-y)(ax - by) + (a+b)(1+x)(x-y+\alpha) + \alpha(ax - by) = 0,$$

$$(x-y+\alpha)\{ax - by + (a+b)(1+\alpha)\} = 0 \dots \dots [1]$$

La seconda equazione si può scrivere successivamente

$$2x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 2y^3 + \{\alpha^2 + (a+b)^2\}y - \{\alpha^2 + (a+b)^2\}x = 0,$$

$$2x^2(x-y) + 2y^2(x-y) - \{\alpha^2 + (a+b)^2\}(x-y) = 0,$$

$$(x-y)\{2x^2 + 2y^2 - [\alpha^2 + (a+b)^2]\} = 0 \dots \dots [2]$$

L'equazione [1] si scompone nelle seguenti:

$$x - y + \alpha = 0 \dots \dots [3], \quad ax - by + (a+b)(1+\alpha) = 0 \dots \dots [4]$$

e l'equazione [2] nelle:

$$x - y = 0 \dots \dots [5], \quad 2x^2 + 2y^2 - [\alpha^2 + (a+b)^2] = 0 \dots \dots [6]$$

I sistemi risolvibili sono pertanto: [3], [5]; [3], [6]; [4], [5]; [4], [6].

Il primo sistema è incompatibile se  $\alpha$  è differente da zero ed è indeterminato se  $\alpha = 0$ .

Dagli altri tre sistemi si ricavano cinque valori di  $x$  ed altrettanti di  $y$ .

Il sistema [3], [6] porge l'equazione

$$4x^2 + 4\alpha x + \alpha^2 = (a+b)^2$$

ossia

$$(2x + \alpha)^2 = (a+b)^2,$$

(\*) Altre soluzioni sono state inviate dai sigg. Prof. R. Bellazzi, S. Catania, G. Russo, F. Viaggi.



da cui

$$x_1 = \frac{a+b-\alpha}{2}, \quad x_2 = -\frac{a+b+\alpha}{2}.$$

I valori corrispondenti di  $y$  sono

$$y_1 = \frac{a+b+\alpha}{2}, \quad y_2 = -\frac{a+b-\alpha}{2}.$$

Il sistema [4], [5] porge la soluzione

$$x_3 = y_3 = \frac{(a+b)(1+\alpha)}{b-a}$$

Dal sistema [4], [6] si ha l'equazione

$$2(a^2 + b^2)x^2 + 4a(a+b)(1+\alpha)x + (a+b)^2 \{2(1+\alpha)^2 - b^2\} - \alpha^2 b^2 = 0$$

da cui si ricavano gli altri due valori  $x_4, x_5$  di  $x$ . Sostituendo i medesimi successivamente nella [4] si ottengono i valori corrispondenti di  $y$ .

Le radici  $x_4, x_5$  sono reali quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{(a+b)^2 + \alpha^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2 (1+\alpha)^2}{a^2 + b^2} \dots \dots \dots [7]$$

Le radici  $x_1, x_2$  sono sempre reali per tutti i valori delle quantità  $a, b, \alpha$  e diventano eguali nell'ipotesi di  $a+b=0$ ; in tal caso si ha

$$x_3 = y_3 = 0; \quad x_4 = -\frac{\alpha}{2}, \quad y_4 = \frac{\alpha}{2}; \quad x_5 = \frac{\alpha}{2}, \quad y_5 = -\frac{\alpha}{2}.$$

Se  $a=b$ , si ha  $x_3 = y_3 = \infty$  e la [7] diventa

$$\frac{4a^2 + \alpha^2}{2} \geq \frac{4a^2(1+\alpha)^2}{2a^2},$$

o più semplicemente

$$-3\alpha^2 - 8\alpha + 4(\alpha^2 - 1) \geq 0.$$

Quest'ineguaglianza è soddisfatta per tutti i valori di  $\alpha$  compresi nell'intervallo

$$-\frac{4+2\sqrt{1+3\alpha^2}}{3}, \quad \frac{-4+2\sqrt{1+3\alpha^2}}{3}$$

non esclusi questi stessi valori, nel quale caso appunto le radici  $x_4, x_5$  sono reali ed eguali. Nel caso in cui sia  $1+\alpha=0$ , le radici  $x_4, x_5$  sono sempre reali, eguali in valore assoluto e di segni contrarii.

**65.** *Fra tutti i triangoli sferici che hanno un angolo di 90° il lato ad esso opposto costante, e gli altri due lati minori di 90°, qual è quello di massima area?*  
(D. BESSO).

Soluzione del Prof. F. Viaggi.

Il problema si riconduce a trovare quando la somma degli angoli diventa massima.

Nel triangolo  $A B C$  sia  $C = 90^\circ$ ,  $c$  costante,  $a$  e  $b$  minori  $90^\circ$ , e quindi, per noto teorema, acuti anche  $A$  e  $B$ .

Una delle formole di DELAMBRE è

$$\operatorname{sen} \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}} \cos \frac{a-b}{2}.$$

Essendo  $\frac{A+B}{2}$  acuto, al massimo o minimo di  $\frac{A+B}{2}$  corrisponde il massimo o minimo del suo seno, e reciprocamente; e badando al secondo membro si ha massimo quando è  $a = b$ : ossia il triangolo assume area massima quando è isoscele.

Direttamente o come corollario del teorema precedente si dimostra che: « se l'ipotenusa d'un triangolo sferico rettangolo è costante e gli altri due lati ottusi; quando questi diventano eguali, il triangolo assume lo stato di minimo. »

E come proposizioni correlative: « se un lato di un triangolo sferico è di  $90^\circ$ , l'angolo opposto costante e gli altri due angoli minori (maggiori) di  $90^\circ$ , il perimetro è massimo (minimo) quando il triangolo è isoscele. »

Soluzione del Prof. S. Catania.

Siano  $a, b, c$  i lati del triangolo sferico, e sia  $a$  quello opposto all'angolo di  $90^\circ$ . L'equazione

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} S = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c}{\cos \frac{1}{2} a}$$

fornisce per  $S$  un arco espresso in gradi, che ridotto in parti del raggio uguale ad uno, e moltiplicato per il quadrato del raggio della sfera, darà l'area del triangolo sferico rettangolo di cateti  $b$  e  $c$  e d'ipotenusa  $a$ , descritto sulla sfera stessa (Si veggia TURNER, *Trigonometria sferica*). Inoltre, essendo  $b$  e  $c$  minori di  $90^\circ$ , il lato  $a$  sarà minore di  $90^\circ$ , onde il massimo dell'area del triangolo è minore dell'ottava parte dell'area della superficie della sfera, o si deduce che  $S < 90^\circ$ , e che quindi il massimo di  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} S$  darà il massimo di  $S$  che corrisponderà al massimo dell'area del triangolo.

Si tratta adunque di trovare il massimo di  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} b \operatorname{sen} \frac{1}{2} c$ , ovvero di  $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c$ , poichè  $\cos \frac{1}{2} a$  è costante.

Intanto si ha

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} b \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} c = \frac{1 - \cos b - \cos c + \cos b \cos c}{4}$$

e  $\cos a = \cos b \cos c$ ;

eliminando  $\cos c$  si ottiene

$$\frac{1 + \cos a}{4} = \frac{\cos^2 b + \cos a}{4 \cos b}$$



e la quistione è ridotta a trovare il minimo di  $\frac{\cos^2 b + \cos a}{4 \cos b}$ . Questa funzione trattata coi metodi elementari noti dà  $\frac{1}{2} \sqrt{\cos a}$  per suo valore minimo. Allora  $\cos b = \sqrt{\cos a} = \cos c$ , e il triangolo di massima area richiesto è il triangolo sferico rettangolo isoscele.

*Osservazione.* — Il luogo dei vertici degli angoli retti di tutti i triangoli sferici di cui parla il problema è una curva gobba che risulta segnando la sfera con il cono quadrico che ha il vertice nel centro della sfera, e che è generato dalla retta comune a due piani corrispondenti dei due fasci di piani ortogonali proiettivi che hanno per assi i raggi della sfera che passano per i termini del lato fisso di quei triangoli sferici. Questa curva, che è una delle due parti della curva gobba di 4° ordine secondo cui quel cono taglia la sfera, non può mai ridursi ad un cerchio, come è facile verificare segnando il detto cono con il piano tangente alla sfera nel punto di mezzo del lato  $a$ , e si ottiene per sezione una ellisse di semiassi  $\operatorname{tg} \frac{1}{2} a$  e  $\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2 \cos a}}$ , che sono soltanto eguali per  $a = 0$ .

---

## QUISTIONI PROPOSTE (\*)

---

**75.** Dimostrare che, se ciascun lato d'un triangolo sferico viene diviso in due segmenti in modo che il prodotto dei coseni di tre segmenti non consecutivi sia eguale al prodotto dei coseni degli altri tre, i cerchi massimi perpendicolari ai tre lati condotti pei rispettivi punti di divisione passano per gli estremi d'uno stesso diametro.

**76.** Dimostrare che, se in un esagono convesso equilatero sono eguali fra loro le congiungenti le coppie di vertici opposti, queste congiungenti devono passare per uno stesso punto.

D. BESSO.

**77\*.** Dare un metodo per la risoluzione del sistema d'equazioni:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Dy + E &= 0 \\ A_1x^2 + B_1xy + A_1y^2 + D_1x + D_1y + E_1 &= 0. \end{aligned}$$

**78\*.** Dimostrare la regola: un numero è divisibile per 17 se lo è la somma algebrica dei prodotti che si formano scomponendo, comin-

---

(\*) Il tempo utile per l'invio delle soluzioni delle quistioni nuove e di quelle rimaste insolute scade un mese e mezzo dopo la chiusura della redazione del fascicolo. La data di chiusura si troverà nell'ultima pagina di ciascun numero del Periodico.

Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

ciando da destra, il numero in periodi di quattro gruppi di due cifre ciascuno, e moltiplicando ordinatamente il numero di ciascun gruppo per 1, 2, 4, 8 con tal legge per i segni da avere, incominciando dal positivo, tre variazioni ed una permanenza.

B. CARRARA.

**79.** Dimostrare: 1. che le perpendicolari condotte dai vertici di un triangolo a ciascuno de' lati, incontrandosi, determinano un esagono inscrittibile in un cerchio; 2. che gli angoli ed i lati opposti di questo esagono sono rispettivamente fra loro eguali; 3. che quest'esagono è equivalente al doppio del triangolo considerato.

Questa proposizione può estendersi a qualunque triangolo?

S. GATTI.

---

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **75.** dal Sig. A. Baldassarre, G. Fumanti, P. Marano, G. M. Nobile; **76.** R. Bettazzi, S. Catania, L. Mariscotti, F. Palatini, G. Riboni, F. Viaggi — soluzioni alle quali si darà evasione nei venturi fascicoli.

La Direzione.

---

## RIVISTA BIBLIOGRAFICA

---

Dottor GIUSEPPE INGRAMI. — *L'Aritmetica pel Ginnasio superiore*. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1890. — Prezzo L. 1,25.

Questo libro del Prof. INGRAMI, è, sotto l'aspetto teorico, assai commendevole e può considerarsi come un corso completo dei primi elementi dell'aritmetica razionale. Non è un rimpasto cattivo dei più noti e reputati manuali d'aritmetica come tanti libricoli che vedono ogni dì la luce per opera d'autori che spesso digiuni di una soda coltura matematica sentono il bisogno di pubblicarli per riempire un vuoto che solo esiste nella loro mente. Gli argomenti che vi si trovano svolti sono precisamente quelli del programma pel Ginnasio superiore: le definizioni sono ben scelte e messe in evidenza e lo svolgimento logico delle proprietà trattate lascia poco a desiderare.

Soltanto l'A., a mio giudizio, non ha dato alla parte pratica, al vero e proprio conteggio, quell'estensione che sarebbe a desiderarsi in un libro di questa natura. Ed invero chi ha pratica dell'insegnamento, per un lungo e continuato esercizio nell'opera di docente, sa per esperienza che le diverse teoriche non tro-



vano profonda e duratura sede nella mente del discente se non siano avvalorate da numerosi ed appropriati esempi ed applicazioni. Oltrechè deve pur considerarsi quanto importi che sin dalla più giovane età ciascuno acquisti quella facilità nel maneggio dei numeri che ben difficilmente si guadagna più tardi, ed è tanto indispensabile nel corso della vita; principio troppo spesso non tenuto in quel conto che merita.

Ma per tornare al libro di cui è questione, osservando anche come la parte pratica e d'applicazione di cui è deficiente, possa venire agevolmente aggiunta dall'insegnante che voglia adottarlo nella sua scuola, mi piace porre in rilievo come l'A. abbia voluto scostarsi, con molta opportunità più che altrove, dalla trattazione ordinaria nella teorica delle proporzioni. Difatti egli ha posto a fondamento di questa teoria la definizione: « Se di quattro numeri  $a, b, c, d$  gli equimultipli del primo e terzo contengono egual numero di volte rispettivamente il secondo e quarto, questi numeri si dicono in *proporzione* » (\*), ciò che gli ha permesso di dare, nei diversi teoremi che vi si riferiscono, dimostrazioni aventi in qualche modo analogia con quelle proprie alle grandezze geometriche proporzionali con grande vantaggio dell'insegnamento futuro in uno dei punti più scabrosi di esso (\*\*).

A. LUIGI.

---

### Publicazioni ricevute dalla Direzione del Periodico

---

- Bibliotheca mathematica.* Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 3, 1890.
- Giornale di Matematiche* ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII. Luglio-Agosto, 1890. Napoli, B. Pellerano, editore.
- Journal de Mathématiques élémentaires* à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne. 3<sup>e</sup> Série, Quatorzième année. N. 9, 10. Septembre, Octobre, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.
- Journal de Mathématiques élémentaires* publié par H. VUIBERT. 15<sup>e</sup> année. N. 1, 2. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.
- Mathesis*, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. MANSION, professeur à l'Université de Gand, et J. NEUBERG, professeur à l'Université de Liège. Tome dixième. Octobre, 1890. Paris, Gauthier-Villars et fils; Gand Ad. Hoste, éditeur.
- Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.* Tomo IV. Fasc. V. Settembre-Ottobre 1890.

---

(\*) Cfr. DE PAOLIS. *Elementi di geometria*.

(\*\*) V. a questo proposito a pag. 66 dell'articolo del Prof. VALERI: *Sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie classiche*, pubblicato in questo Periodico.



- Rendiconti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2<sup>a</sup>, Vol. IV, Fasc. 7<sup>o</sup> e 8<sup>o</sup>. Luglio, Agosto, 1890.
- Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und gehobenen Bürgerschulen, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 5, 6 Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1890.
- BETTAZZI (R.) — Teoria delle Grandezze. Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei. Pisa, E. Spoerri, editore, 1890. — Prezzo: L. 6.
- BERNARDI (L.) — Euclide. Libro primo, con numerosi esercizi e relativi indirizzi alle soluzioni dei medesimi. Udine, M. Bardusco, 1891. — Prezzo: L. 1,25.
- CATTORI (M.) — L'elettricità e l'avvenire dell'Industria italiana. Note ed appunti. Roma, 1890.
- DESSENON (E.) — Cours de trigonométrie rectiligne. Paris, Nony et C<sup>ie</sup>, 17, rue des Écoles, 1891.
- FAIFOPER (A.) — Elementi di geometria ad uso dei Licei. 7<sup>a</sup> edizione. Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. — Prezzo: L. 3.
- — Elementi di geometria ad uso degli Istituti tecnici (1<sup>o</sup> biennio) e dei Licei. 7<sup>a</sup> edizione, Venezia, Tipografia Emiliana, 1890. — Prezzo: L. 4.
- GATTI (S.) — Delle equazioni aventi le radici in progressione aritmetica. Bari, Stabilimento Tipografico Gissi e Avellino, 1891. — Prezzo: L. 1,20.
- LORIA (G.) — Sull'applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie. (Rend. R. Accademia dei Lincei. Vol. VII, 1890).
- MILLOSEVICH (E.) — Determinazione dell'orbita della cometa 1889 II (Memorie Società Spettroscopisti italiani, Vol. XIX, 1890).
- PEANO (G.) — Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires (Mathematische Annalen XXXVII Bd.).
- PINCHERLE (S.) — Gli elementi dell'aritmetica a uso delle Scuole secondarie inferiori. Bologna, N. Zanichelli, 1891. — Prezzo: L. 2.
- REGGIO (G. Z.) — In giro per le Scuole secondarie classiche e tecniche (Ateneo Veneto, Luglio-Agosto, 1890).
- RICCARDI (P.) — Saggio di una bibliografia euclidea. Parte quarta. (Memorie R. Acc. delle Scienze dell'Ist. Bologna. Serie V, Tomo I, 1889).
- — Saggio di una biblioteca matematica italiana del secolo XIX. (Memorie R. Acc. delle Scienze dell'Ist. Bologna. Serie IV, Tomo X, 1890).
- TAMBURINI (S.) — Guida pratica di disegno geometrico, esposta a tavole sinottiche ad uso delle Scuole Tecniche, Normali, Professionali, ecc. — Parte prima: L. 1,25. — Parte seconda: L. 1,25. — Parte terza: L. 1,25. — Antonio Vallardi, editore.
- — Breve Testo complementare della Guida pratica di Disegno Geometrico. Antonio Vallardi, editore. — Prezzo: Cent. 25.
- TESTI (G.) — Corso di matematiche ad uso delle Scuole secondarie superiori e più specialmente degli Istituti tecnici secondo i vigenti programmi governativi. — Vol. I. Aritmetica razionale. — Livorno, R. Giusti, 1891. — Prezzo: L. 2,50.
- VISALLI (P.) e MANDES (G.) — Trattato di algebra ad uso degli alunni della R. Accademia navale, delle Scuole militari e secondarie. Livorno, R. Giusti, 1891. — Prezzo: L. 3,75.

---

Chiusura della redazione il di 9 novembre 1890.