$$h=2$$

$$\begin{array}{c|lllll}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\
\hline
a_2 & a_1 & a_1 & 0 & 0 & \\
a_3 & a_1+a_2 & 2a_1+a_2 & 2a_1 & a_1 & \\
a_4 & a_1+a_2+a_3 & 3a_1+2a_2+a_3 & 5a_1+2a_2 & 5a_1+a_2 & \\
a_5 & a_1+a_2+a_3+a_4 & 4a_1+3a_2+2a_3+a_4 & 9a_1+5a_2+2a_3 & 13a_1+5a_2+a_3 & \\
a_6 & a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 & 5a_1+4a_2+3a_3+2a_4+a_5 & 14a_1+9a_2+5a_3+2a_4 & 26a_1+13a_2+5a_3+a_4 & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots &
\end{array}$$

ed in essa l'entrata orizzontale e verticale figurano staccate dalla parte rimanente. Si vede subito che ogni termine della tavola è un'espressione lineare di $a_1, a_2, a_3, \ldots$ a coefficienti positivi interi. Se si considera una qualsiasi colonna, p. es. la 4^a, si osserva che i coefficienti di a_1 nei diversi termini di essa, sono ordinatamente 0, 2, 5, 9, 14, ..., quelli di a_2 sono 0, 0, 0, 2, 5, 9, 14, ..., quelli di a_3 sono 0, 0, 0. 0, 2, 5, 9, ... In generale nella verticale n^{ma} i coefficienti di a_1 costituiscono una successione che incomincia con

$$\left(\mathrm{E}\,\frac{n-2}{h}+1\right)+(n-1) \text{ zeri};$$

i coefficienti successivi a tali zeri, sono gli stessi, e si succedono nello stesso ordine nelle diverse successioni riferentesi ad $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Per avere quelli di a_1 basta evidentemente nella tavola suddetta supporre $a_2=a_3=a_4=\ldots=0$ ed $a_1=1$. Essi sono i termini della tavola

$$h=2$$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 3 & 5 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 4 & 9 & 13 & 13 & 9 & 4 \\
0 & 1 & 5 & 14 & 26 & 35 & 35 & 26
\end{array}$$

dello stesso passo $h=2$. Se stacchiamo da essa le due entrate, la parte rimanente è una tavola del passo $h=2$, coll'entrata orizzontale 1, 1, 0, 0,... e la verticale 1, 1, 1,.... In generale i termini della tavola

$$h$$

$$\begin{array}{|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 0 & 0 & 0\ldots \\
0 & 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 1 & 0\ldots \\
0 & 1 & & & & & \\
0 & 1 & & & & &
\end{array}$$

$$\underbrace{\hphantom{1 \quad 1 \quad 1 \ldots\ldots 1 \quad 1}}_{h}$$

di passo h, colle entrate costituite ciascuna da un'unità seguita da zeri, sono i cofficienti di a_1 nei corrispondenti termini della tavola

$$h$$

$$\begin{array}{|ccccc}
a_1 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots \\
a_2 & & & & \\
a_3 & & & &
\end{array}$$

di ugual passo. Staccate da essa le due entrate, la parte rimane è una tavola di ugual passo coll'entrata orizzontale formata da h meri iniziali uguale ad uno, seguiti da zeri, e colla verticale form da numeri tutti uguali ad uno. Tenuto conto di quanto è stato de risulta, in una tavola

$$\begin{array}{c|ccc} & & h & \\ \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \\ & \dots & \dots & \dots \\ & a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} \dots \end{array}$$

del passo h, nella quale $a_{12}=a_{13}=a_{14}=\dots=0$, ogni elemento della forma:

$$a_{ij}=\lambda'^{(h)}_{i,j,1}a_{11}+\lambda'^{(h)}_{i,j,2}a_{21}+\dots+\lambda'^{(h)}_{i,j,m}a_{m1}$$

e risulta

$$\lambda'^{(h)}_{1,1,1}=1;\quad \lambda'^{(h)}_{1,j,r}=0 \quad \text{se } j,\ r \text{ non sono simultaneamente uguali a zero.}$$

$$\lambda'^{(h)}_{i,1,r}=0 \qquad \text{se} \qquad r \neq i;\quad \lambda'^{(h)}_{i,1,r}=1$$

e negli altri casi, (¹) cioè se i ed j sono simultaneamente maggiori di 1, si ha dalle (1) per $n=h$ ed $a_{11}=a_{12}=\dots=a_{1h}=1$:

$$\lambda'^{(h)}_{i,j,1}=\lambda^{(h)}_{i-1,j-1,1}+\lambda^{(h)}_{i-1,j-1,2}+\dots+\lambda^{(h)}_{i-1,j-1,h};\quad i,j>1$$

ove le λ hanno il valore dato dalle (1) e cioè:

$$\lambda^{(h)}_{i-1,j-1,r}=\left\{\begin{matrix} i-2 \\ j-r-1\end{matrix}\right\}_h;\qquad r=1,2,\dots h$$

e:

$$\lambda'^{(h)}_{i,j,r}=\lambda'^{(h)}_{i-r+1,j,1};\qquad r=2,3\dots m$$

ovvero:

$$\lambda'^{(h)}_{i,j,r}=\left\{\begin{matrix} i-r-1 \\ j-2\end{matrix}\right\}_h+\left\{\begin{matrix} i-r-1 \\ j-3\end{matrix}\right\}_h+\dots+\left\{\begin{matrix} i-r-1 \\ j-1-h\end{matrix}\right\}_h.$$

Passiamo ora al caso di una tavola generale di addizione linee, col passo h. Consideriamo ad es. la seguente del passo h

$$h=2$$

a_1	b	c	d	e
a_2	a_1+b	a_1+b+c	$b+c+d$	$c+d+e$
a_3	a_1+a_2+b	$2a_1+a_2+2b+c$	$2a_1+3b+2c+d$	$a_1+2b+3c+2d+e$
a_4	$a_1+a_2+a_3+b$	$3a_1+2a_2+a_3+3b+c$	$5a_1+2a_2+6b+3c+d$	$5a_1+a_2+7b+6c+3$
a_5	$a_1+a_2+a_3+a_4+b$	$4a_1+3a_2+2a_3+a_4+4b+c$	$9a_1+5a_2+2a_3+10b+4c+d$	$18a_1+5a_2+a_3+16b$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

coll'entrata orizzontale a, b, c, d, e, e colla verticale $a_1, a_2, a_3, \dots$ si suppone $b=c=d=e=0$, essa si trasforma nella tavola di u

(¹) Si ha appunto per i presupposti valori delle $\lambda'^{(h)}$:

$$a_{11}=a_{11};\quad a_{12}=0;\quad a_{13}=0;\dots;\quad a_{21}=a_{21};\quad a_{31}=a_{31};\dots$$

passo, coll'entrata orizzontale a_1, 0, 0, ... e verticale $a_1, a_2, \dots a_5$, quella appunto esaminata precedentemente; se invece si suppone $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 0$, essa si riduce ad una tavola di ugual passo con entrata orizzontale 0, b, c, d, e, e verticale 0, 0, 0,... cioè del tipo precedentemente studiato con entrata verticale costituita da numeri uguali.

Adunque un termine qualunque della tavola suddetta vale la somma dei termini di ugual posto delle due altre da essa dedotte nel modo indicato. Evidentemente un tal fatto è generale. Sia adunque la tavola generale del passo h.

$$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|llll} \hline a_{11} & a_{12} & \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\dots & a_{mn} \end{array} \end{array}$$

Indichiamo con b_{ij} il termine generale della tavola di passo h, con entrata orizzontale 0, $a_{12}, a_{13}, \dots$ e verticale 0, 0, 0, ... cioè poniamo

$$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|llll} \hline 0 & a_{12} & a_{13} \dots\dots & a_{1n} \\ 0 \dots\dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & & \\ 0 \dots\dots\dots\dots & & & \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|lll} \hline b_{11} & b_{12} \dots\dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} \dots\dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \\ b_{m1} \dots\dots\dots\dots & & \end{array} \end{array}$$

e con c_{ij} il termine generale della tavola di passo h, con entrata verticale $a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots a_{m1}$ ed orizzontale a_{11}, 0, 0, 0 ... cioè poniamo:

$$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|llll} \hline a_{11} & 0 & 0 & \dots\dots \\ a_{21} \dots\dots\dots\dots & & & \\ a_{31} \dots\dots\dots\dots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} \dots\dots\dots\dots & & & \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|lll} \hline c_{11} & c_{12} \dots\dots\dots & c_{1n} \\ c_{21} \dots\dots\dots\dots & & \\ \vdots & & \\ c_{m1} \dots\dots\dots\dots & & \end{array} \end{array}$$

Risulta allora:

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad a_{ij} = b_{ij} + c_{ij} \\ \text{essendo:} \\ \qquad\qquad c_{i1} = a_{i1}; \quad b_{i1} = 0, \quad \text{qualunque sia } i \\ \qquad\qquad c_{1j} = 0; \quad b_{1j} = a_{1j}; \quad j > 1 \\ \text{e, per applicazione delle (1) e (2), se } i \text{ ed } j \text{ sono simultanea-} \\ \text{mente} > 1: \\ a_{ij} = (\lambda^{(h)}_{i,j,2}\, a_{12} + \lambda^{(h)}_{i,j,3}\, a_{13} + \dots + \lambda^{(h)}_{i,j,n}\, a_{1n}) + \\ \qquad + (\lambda'^{(h)}_{i,j,1}\, a_{11} + \lambda'^{(h)}_{i,j,2}\, a_{21} + \dots + \lambda'^{(h)}_{i,j,m}\, a_{m1}) \\ \text{essendo, come è noto:} \\ \qquad\qquad \lambda^{(h)}_{i,j,r} = \left\{ {i-1 \atop j-r} \right\}_h \\ \lambda'^{(h)}_{i,j,r} = \left\{ {i-r-1 \atop j-2} \right\}_h + \left\{ {i-r-1 \atop j-3} \right\}_h + \dots + \left\{ {i-r-1 \atop j-h-1} \right\}_h \end{array}\right\} \quad (3)$$

In particolare se $h=1$, si ha:

$$\lambda^{(1)}_{i,j,r} = \binom{i-1}{j-r}; \qquad \lambda'^{(1)}_{i,j,r} = \binom{i-r-1}{j-2}$$

epperò:

$$a_{ij} = \left[\binom{i-1}{j-2} a_{12} + \binom{i-1}{j-3} a_{13} + \ldots + \binom{i-1}{j-n} a_{1n}\right] +$$
$$+ \left[\binom{i-2}{j-2} a_{11} + \binom{i-3}{j-2} a_{21} + \ldots + \binom{i-m-1}{j-2} a_{m1}\right]$$

Le (3) permettono evidentemente di esprimere in ogni ca
cioè l'elemento generico di una tavola per linee di passo h, i
zione degli elementi delle entrate.

Altre proprietà delle tavole di addizione per linee. — Si cons
e dimostrano facilmente le seguenti proprietà:

1°. In una tavola del passo h la somma degli elementi ap
nenti alle prime i linee e ad h colonne successive, vale l'el
della linea $(i+1)^a$ situato sulla colonna immediatamente a
dell'ultima di esse (colonne), meno l'elemento dell'entrata oriz
appartenente alla stessa colonna.

2°. In una tavola la cui entrata verticale è una progression
dine p, colle differenze p^{me} uguali a $d \neq 0$, la q^{ma} colonna è un
gressione d'ordine $p+q-1$ colle differenze $(p+q-1)^e$ ugu
In particolare:

3°. In una tavola la cui entrata verticale ha gli elementi
(cioè una progressione d'ordine 0) la q^{ma} colonna è una progr
d'ordine $q-1$ colle differenze $(q-1)^e$ uguali agli elementi d
trata verticale.

4°. Se in una tavola di passo h si aumenta di un numero
mento a_{1k} $(k>1)$ dell'entrata orizzontale, l'elemento a_{ij} di ess
aumentato di $\lambda^{(h)}_{i,j,k} \cdot \rho$; se si aumenta di ρ l'elemento a_{k1} dell'e
verticale, l'elemento a_{ij} viene aumentato di $\lambda'^{(h)}_{i,j,k}\, a_{k1}$. In parti

5°. Se si moltiplica a_{1k} (od a_{k1}) per un numero σ, si avrà l'a
subito da a_{ij} applicando la regola precedente, dopo aver
$\rho = (\sigma-1)\, a_{1k}$ (oppure $\rho = (\sigma-1)\, a_{k1}$). Se $\sigma = -1$, moltiplic
od a_{k1} per σ equivale a cambiar loro il segno; si porrà
$\rho = -2a_{1k}$ oppure $\rho = -2a_{k1}$.

II. — Tavole di addizione per colonne.

Anche in queste tavole si ha un'entrata orizzontale $d_{11}, \ldots$
una verticale $d_{11}, \ldots d_{m1}$. Si completano le colonne 2^a, 3^a, ... i
che ogni termine di una di esse (il 1° eccettuato) valga la so
quello che ha a sinistra e degli h sovrastanti a quest'ultimo,
la somma di quello che ha a sinistra e di tutti quelli sovras

quest'ultimo, se essi sono in numero minore di h. Al solito h è il passo della tavola.

Ribaltando la tavola attorno all'entrata orizzontale se ne ha una seconda che è per linee e del passo h ed ha l'entrata orizzontale $d_{11}, d_{21}, \ldots d_{m1}$ e la verticale $d_{11}, d_{12}, \ldots d_{1n}$.

$$\begin{array}{|llll}
d_{m1} & & & \\
\vdots & & & \\
d_{21} & & & \\
d_{11} & d_{12} & \ldots\ldots\ldots & d_{1n} \\
\hline
d_{11} & d_{12} & \ldots\ldots\ldots & d_{1n} \\
d_{21} & & & \\
\vdots & & & \\
d_{m1} & & &
\end{array} \tag{3'}$$

Se dunque si considera la tavola per linee

$$\begin{array}{|llll}
\multicolumn{4}{c}{h} \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1m} \\
a_{21} & & & \\
\vdots & & & \\
a_{n1} & & &
\end{array}$$

posto: $a_{11} = d_{11}$; $a_{12} = d_{21}$; $\ldots a_{1m} = d_{m1}$; $a_{21} = d_{12}$; $\ldots$; $a_{n1} = d_{1n}$, risulterà:

$$d_{ij} = a_{ji}$$

epperò per le (3, § I):

$$d_{ij} = (\lambda^{(h)}_{j,i,2}\, d_{21} + \ldots + \lambda^{(h)}_{j,i,m}\, d_{m,1}) + (\lambda'^{(h)}_{j,i,1}\, d_{11} + \ldots + \lambda'^{(h)}_{j,i,n}\, d_{1n}) \tag{1}$$

nella quale le $\lambda^{(h)}$ e $\lambda'^{(h)}$ hanno il significato ed il valore già stabilito dalle (1 e 2; § I). In particolare se $h = 1$, si ha:

$$d_{ij} = \left[\binom{j-1}{i-2} d_{21} + \ldots + \binom{j-1}{j-m} d_{m1}\right] + \\ + \left[\binom{j-2}{i-2} d_{11} + \ldots + \binom{j-1-n}{i-2} d_{1n}\right]. \tag{1'}$$

III. — Tavole di addizione per diagonali.

In queste supponiamo l'entrata orizzontale formata da n numeri $a_{11} \ldots a_{1n}$, l'ultimo dei quali a_{1n} diverso da zero, seguiti da un numero illimitato di zeri; l'entrata verticale $a_{11}, a_{21}, \ldots a_{m1}$ può essere costituita comunque. Si completano la 2ª, 3ª, ... linea, per modo che ciascun elemento (il 1° eccettuato) valga la somma di quello che ha a sinistra e di altri h appartenenti alla diagonale ↗ che si stacca

da quest'ultimo, oppure la somma di quello che ha a sinistra
tutti quelli che appartengono alla diagonale ↗ che si stacca da q
st'ultimo, se essi sono in numero minore di h.

Al solito h è il passo della tavola, i cui elementi saranno sem
scritti entro un angolo retto a lati doppi. Ci proponiamo di trov
l'espressione del termine generale in funzione degli elementi d
entrate. ([1])

Muoviamo da un qualsiasi esempio numerico. Sia la tavola di
dizione per diagonali del passo $h=2$.

$h=2$

1	2	1	3	1	0	0	0	0...
2	4	5	8	9	9	9	9...	
2	7	15	24	33	42	51...		
1	13	36	69	111	162...			
1	29	89	191	344...				

Scriviamo ora sotto alla 1ª linea, la 2ª, 3ª,... rispettivamente
state di uno, due,... posti verso destra, indi ribaltiamo attorno
1ª linea lo specchio di numeri ottenuto, in modo da averne un
simmetrico di esso.

				1	29	89	191	344...
			1	13	36	69	111	162...
		2	7	15	24	33	42...	
	2	4	5	8	9	9...		
1	2	1	3	1	0	0...		
1	2	1	3	1	0	0...		
	2	4	5	8	9	9...		
		2	7	15	24	33	42...	
			1	13	36	69	111	162...
				1	29	89	191	344...

Ruotando quest'ultimo in modo che la 1ª linea (dal basso all'
diventi la 1ª colonna, se ne ha un terzo che opportunamente

([1]) Di tali tavole si occupa il LUCAS nella *Théorie des nombres* al Cap. 7º (Les éch
arithmétiques), nel caso $h=1$. Tratta del quadrato aritmetico di Fermat, che è una tav
diagonali del passo 1, colle entrate costituite da elementi tutti eguali ad 1 ed illimitate. V
in seguito che, se $h=1$, gli zeri finali dell'entrata orizzontale possono anche sopprimersi,
le formole ottenute nel caso generale, valgono, nel caso $h=1$, per il quadrato di Fermat.
noto, ogni numero del quadrato di Fermat, p. es. a_{ij}, esprime in quanti modi si può andar
ad a_{ij} mediante un cammino costituito da tratti successivi aventi alternativamente l
zioni $\longrightarrow$ e $\downarrow$, oppure $\downarrow$ e $\longrightarrow$, recandosi ciascuna volta da un elemento di una linea (c
ad una a destra (sotto) della stessa. È anche noto che i termini della 2ª, 3ª,... colonna
sono i cosidetti numeri naturali, triangolari, piramidali ecc....; l'elemento $a_{i,j+1}$ di esso
comunemente l'i^{mo} numero figurato di ordine j.

pletato è una tavola di addizione per linee del passo $h=2$. Essa è la seguente:

$h=2$

1	1	−4	−2	9
2	2	−2	−5	3
1	4	2	−5	−4
3	5	7	1	−7
1	8	15	13	1
0	9	24	36	29
0	9	33	69	89
0	9	132	111	191
0	9	141	252	434

ed ha per entrata verticale l'entrata orizzontale della primitiva tavola di addizione per diagonali e per entrata orizzontale la $1, 1, -4, -2, 9$. I termini di questa si ottengono disponendo i termini $1, 2, 2, 1, 1$ dell'entrata verticale della tavola primitiva, in modo che siano rispettivamente il $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots$ della $1^a, 2^a, 3^a, \ldots$ colonna, e completando poi le colonne in modo che l'insieme dei termini scritti formi una tavola di addizione per linee del passo $h=2$.

Orbene supponiamo di essere riusciti ad operare in modo analogo sulla tavola per diagonali

$$\begin{array}{c|cccccc} \multicolumn{7}{c}{h} \\ \hline a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 & 0 & \ldots \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array}$$

Ne risulterà una tavola di addizione per linee di passo h.

$$\begin{array}{c|ccc} \multicolumn{4}{c}{h} \\ \hline b_{11} & \ldots & \ldots & b_{1m} \\ \vdots \\ b_{n1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{array}$$

In essa i termini dell'entrata verticale $b_{11}, \ldots b_{n1}, 0, 0, \ldots$ sono rispettivamente uguali ad $a_{11}, \ldots a_{1n}, 0, 0, \ldots$ costituenti l'entrata orizzontale della tavola per diagonali, e gli elementi $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots$ della diagonale $\searrow$ che si stacca da b_{11}, sono rispettivamente uguali agli elementi $a_{11}, a_{21}, \ldots a_{m1}$ dell'entrata verticale della tavola data. Si avrà in generale:

$$a_{ij} = b_{j+i-1,i}. \tag{1}$$

Se dunque si riesce a costruire la tavola delle b, si potrà l'espressione di $b_{j+i-1,i}$ e quindi quella di a_{ij}. Ora nella tavola le incognite sono gli elementi $b_{12}, b_{13}, \dots b_{1m}$ dell'entrata orizz in numero di $m-1$; sono invece termini noti $b_{11}, b_{21}, \dots b_{m1}$ d trata verticale e $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \dots$ della diagonale ↘ che si da b_{11}. Ma si ha dalle (3, § I):

$$\begin{aligned}
a_{21} &= b_{22} = \lambda^{(h)}_{2,2,2}\, b_{12} + \lambda^{(h)}_{2,2,3}\, b_{13} + \dots + \lambda^{(h)}_{2,2,m}\, b_{1m} + H_{22} \\
a_{31} &= b_{33} = \lambda^{(h)}_{3,3,2}\, b_{12} + \lambda^{(h)}_{3,3,3}\, b_{13} + \dots + \lambda^{(h)}_{3,3,m}\, b_{1m} + H_{33} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1} &= b_{mm} = \lambda^{(h)}_{m,m,2}\, b_{12} + \lambda^{(h)}_{m,m,3}\, b_{13} + \dots + \lambda^{(h)}_{m,m,m}\, b_{1m} + H_{mm}
\end{aligned}$$

dove si è posto, per brevità:

$$\left.\begin{aligned}
&H_{ii} = \lambda'^{(h)}_{i,i,1}\, b_{11} + \lambda'^{(h)}_{i,i,2}\, b_{21} + \dots + \lambda'^{(h)}_{i,i,n}\, b_{n1} \\
&\text{ovvero:} \\
&H_{ii} = \lambda'^{(h)}_{i,i,1}\, a_{11} + \lambda'^{(h)}_{i,i,2}\, a_{12} + \dots + \lambda'^{(h)}_{i,i,n}\, a_{1n}
\end{aligned}\right\} \quad (i = 2, \dots m)$$

Poichè le $\lambda^{(h)}$ e $\lambda'^{(h)}$ hanno valori che dipendono soltanto da dici, per determinare i valori delle incognite $b_{12}, b_{13} \dots b_{1m}$ al un sistema di $m-1$ equazioni lineari. Se esso ha una sola sol come accadrà in generale, i valori degli elementi dell'entrat zontale della tavola delle b sono univocamente determinati.

Si avrà allora dalle (3) l'espressione dell'elemento generic

$$\begin{aligned}
a_{ij} = b_{j+i-1,i} = [\lambda^{(h)}_{i+j-1,i,2}\, b_{12} + \lambda^{(h)}_{i+j-1,i,3}\, b_{13} + \dots + \lambda^{(h)}_{i+j-1,i,m}\, b_{1r} \\
+ [\lambda'^{(h)}_{i+j-1,i,1}\, a_{11} + \lambda'^{(h)}_{i+j-1,i,2}\, a_{12} + \dots + \lambda'^{(h)}_{j+j-1,i,n}\, a_{1n}]
\end{aligned}$$

nella quale le $\lambda^{(h)}$ e $\lambda'^{(h)}$ hanno i valori determinati dalle (1 e

In particolare se $h=1$, i coefficienti $\lambda^{(h)}$ e $\lambda'^{(h)}$ che compaion espressioni di H_{ii} valgono:

$$\lambda^{(1)}_{i,i,r} = \binom{i-1}{i-r}; \qquad \lambda'^{(1)}_{i,i,r} = \binom{i-r-1}{i-2}; \qquad r = 1, 2, \dots$$

e risulta:

$$\begin{aligned}
a_{ij} = b_{i+j-1,i} = \left[\binom{i+j-2}{i-2} b_{12} + \binom{i+j-2}{i-3} b_{13} + \dots + \binom{i+j-2}{i-m}\, b \right. \\
+ \left[\binom{i+j-3}{i-2} a_{11} + \binom{i+j-4}{i-2} a_{12} + \dots + \binom{i+j-n-2}{i-2} a_{1}\right.
\end{aligned}$$

Rapporto al caso particolare $h=1$ osserviamo quanto seg

Se nell'esempio numerico dapprima considerato sopprimiamo le colonne 6ª, 7ª,..., che incominciano con uno degli zeri dell'entrata orizzontale, risulta la tavola:

$h = 2$

1	2	1	3	1
2	4	5	8	9
2	7	15	24	33
1	13	36	69	111
1	29	89	191	344

che non coincide con quest'altra

$h = 2$

1	2	1	3	1
2	4	5	8	9
2	7	15	24	33
1	13	36	69	102
1	29	89	191	293

ottenuta senza scrivere alcun zero di seguito agli elementi 1, 2, 1, 3, 1 dell'entrata orizzontale, e completando le linee 2ª, 3ª,... in modo che ogni termine valga la somma di quello che sta alla sua sinistra e di altri h (o di tutti gli altri se sono in numero minore di h) appartenenti alla diagonale $\nearrow$ che si stacca da quest'ultimo, anche se essa contiene due soli termini. Differisce invece da essa per i termini 4° e 5° della 5ª colonna.

In generale le due tavole di addizione per diagonali di passo h

$$\begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|llllll} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} & 0 & 0 & 0 \ldots \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} h \\ \begin{array}{|l} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} \end{array}$$

coincidono nelle prime n colonne termine a termine, salvo i termini delle ultime $h-1$ colonne e delle linee $(h+2)^a$, $(h+3)^a \ldots$. Epperò i termini a_{ij} comuni alle due tavole sono quelli per i quali $i > h+1$; $j \leqslant n-h+1$.

Si tratti dell'una o dell'altra specie di tavole, per tali termini valgono le (3). Se $h=1$, i termini comuni alle due tavole sono quelli per i quali $i > 2$; $j \leqslant n$, e poichè è sempre $j \leqslant n$, possiamo dire che le due tavole coincidono completamente. Adunque se $h = 1$, gli zeri finali dell'entrata orizzontale possono essere soppressi; la tavola che

si ottiene coincide, salvo il numero delle colonne, con quella c
avrebbe se tali zeri fossero mantenuti.

Perciò rapporto alla tavola per diagonali del passo $h=1$,

$$h=1$$

$$\begin{array}{||l}
a_{11} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; a_{1n} \\
a_{21} \\
\vdots \\
a_{m1}
\end{array}$$

che contiene un numero finito di termini nella 1ª linea, valgo
formole (3). In essa ogni termine (il 1° eccettuato) della 2ª, 3ª...
vale la somma di quello che è alla sua sinistra e di quello ch
sta sopra.

Rechiamo qualche esempio di applicazione dei risultati ott
Riferiamoci all'esempio numerico dapprima considerato. Si

$$m=5, \quad n=5; \quad b_{11}=a_{11}=1; \quad b_{21}=a_{12}=2; \quad b_{31}=a_{13}=1$$
$$b_{41}=a_{14}=3; \quad b_{51}=a_{15}=1; \quad b_{11}=1; \quad b_{22}=a_{21}=2; \quad b_{33}=a_{31}$$
$$b_{44}=a_{41}=1; \quad b_{55}=a_{51}=1.$$

I valori delle $\lambda^{(2)}$ e $\lambda'^{(2)}$ sono per le (3, § I):

$$\lambda^{(2)}_{2,2,2}=\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}_2=1; \quad \lambda^{(2)}_{2,2,3}=\lambda^{(2)}_{2,2,4}=\lambda^{(2)}_{2,2,5}=0$$

$$\lambda^{(2)}_{3,3,2}=\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}_2=2; \quad \lambda^{(2)}_{3,3,3}=\left\{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right\}_2=1; \quad \lambda^{(2)}_{3,3,4}=\lambda^{(2)}_{3,3,5}=0,$$

$$\lambda^{(2)}_{4,4,2}=\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}_2=6; \quad \lambda^{(2)}_{4,4,3}=\left\{\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right\}_2=3; \quad \lambda^{(2)}_{4,4,4}=\left\{\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right\}_2=1; \quad \lambda^{(2)}_{4,4,5}$$

$$\lambda^{(2)}_{5,5,2}=\left\{\begin{matrix}4\\3\end{matrix}\right\}_2=16; \quad \lambda^{(2)}_{5,5,3}=\left\{\begin{matrix}4\\2\end{matrix}\right\}_2=10; \quad \lambda^{(2)}_{5,5,4}=\left\{\begin{matrix}4\\1\end{matrix}\right\}_2=4;$$
$$\lambda^{(2)}_{5,5,5}=\left\{\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.$$

$$\lambda'^{(2)}_{2,2,1}=\left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_2=1; \quad \lambda'^{(2)}_{2,2,2}=\lambda'^{(2)}_{2,2,3}=\lambda'^{(2)}_{2,2,4}=\lambda'^{(2)}_{2,2,5}=0$$

$$\lambda'^{(2)}_{3,3,1}=\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}_2=2; \quad \lambda'^{(2)}_{3,3,2}=\left\{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right\}_2=0+1=1;$$
$$\lambda'^{(2)}_{3,3,3}=\lambda'^{(2)}_{3,3,4}=\lambda'^{(2)}_{3,3,}$$

$$\lambda'^{(2)}_{4,4,1}=\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right\}_2=5; \quad \lambda'^{(2)}_{4,4,2}=\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right\}_2=2;$$
$$\lambda'^{(2)}_{4,4,3}=\lambda'^{(2)}_{4,4,4}=\lambda'^{(2)}_{4,4,}$$

$$\lambda'^{(2)}_{5,5,1}=\left\{\begin{matrix}3\\3\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}\right\}_2=13; \quad \lambda'^{(2)}_{5,5,2}=\left\{\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}2\\2\end{matrix}\right\}_2=5;$$
$$\lambda'^{(2)}_{5,5,3}=\left\{\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right\}_2+\left\{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right\}_2=1: \quad \lambda'^{(2)}_{5,5,4}=\lambda'^{(2)}_{5,5,}$$

Epperò risulta:

$$\begin{aligned} H_{22} &= 1\,.\,1 = 1 \\ H_{33} &= 2\,.\,1 + 1\,.\,2 = 4 \\ H_{44} &= 5\,.\,1 + 2\,.\,2 = 9 \\ H_{55} &= 13\,.\,1 + 5\,.\,2 + 1\,.\,1 = 24. \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni nelle incognite b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15} sarà:

$$\begin{aligned} &b_{12} + 1 = 2 \\ &2b_{12} + b_{13} + 4 = 2 \\ &6b_{12} + 3b_{13} + b_{14} + 9 = 1 \\ &16b_{12} + 10b_{13} + 4b_{14} + b_{15} + 24 = 1 \end{aligned}$$

che ammette la sola soluzione: $b_{12} = 1$; $b_{13} = -4$; $b_{14} = -2$; $b_{15} = 9$, e questi numeri assieme a $b_{11} = 1$ costituiscono l'entrata orizzontale 1, 1, -4, -2, 9, della tavola di addizione per linee di passo $h = 2$, già considerata.

Come altro esempio, consideriamo il quadrato aritmetico di Fermat che è una tavola per diagonali del passo $h = 1$ colle entrate costituite da termini tutti uguali ad 1.

$$\overset{h=1}{\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & 56 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 & 126 \\ 1 & 6 & 21 & 56 & 126 & 252 \end{matrix}\right.} = \overset{h=1}{\left\|\begin{matrix} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{16} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{61} \end{matrix}\right.}$$

Si ha pertanto:

$$a_{11} = a_{12} = \ldots = a_{1n} = 1; \qquad a_{11} = a_{21} = a_{31} = \ldots = a_{m1} = 1.$$

$$H_{ii} = \lambda'^{(1)}_{i,i,1} + \lambda'^{(1)}_{i,i,2} + \ldots + \lambda'^{(1)}_{i,i,n} =$$
$$= \binom{i-2}{i-2} + \binom{i-3}{i-2} + \ldots + \binom{i-n-1}{i-2} = 1 + 0 + \ldots + 0 = 1.$$

Il sistema di equazioni nelle $b_{12}, b_{13}, \ldots b_{1m}$ è:

$$\begin{aligned} &\binom{1}{0} b_{12} + 1 = 1 \\ &\binom{2}{1} b_{13} + \binom{2}{0} b_{13} + 1 = 1 \\ &\binom{3}{2} b_{12} + \binom{3}{1} b_{13} + \binom{3}{0} b_{14} + 1 = 1 \\ &\vdots \\ &\binom{m-1}{m-2} b_{12} + \binom{m-1}{m-3} b_{13} + \ldots + \binom{m-1}{0} b_{1m} + 1 = 1 \end{aligned}$$

che ammette l'unica soluzione $b_{12} = b_{13} = \ldots = b_{1m} = 0$.

Pertanto dalle (3') risulta per $j=n$; $i=m$. (1):

$$a_{ij}=\binom{i+j-3}{i-2}+\binom{i+j-4}{i-2}+\ldots+\binom{i-2}{i-2}=\binom{i+j-2}{i-1}=\binom{i+j-2}{j-1}$$

IV. — Tavole di addizione circolare.

Sono tavole ad una sola entrata costituita da una succession numeri $a_{11}, a_{12} \ldots a_{1n}$. In essa si riguarda a_{12} come *successivo* od *stra* di $a_{11} \ldots, a_{1n}$ come successivo od a destra di $a_{1,n-1}$, a_{11} come cessivo di a_{1n}; del pari si riguarda a_{1n} come *precedente od a si* di a_{11}, a_{11} come precedente di a_{12} ecc.... Il *senso* o *verso* da $a_{12}, a_{13} \ldots$ verrà detto *destro* e quello da a_{11} ad $a_{1n}, a_{1,n-1}$ verrà sinistro. Fissato un elemento della successione si dirà che un è *spostato circolarmente* od anche soltanto *spostato* di k posti *destra o verso sinistra*, quando percorrendo la successione nel destro o sinistro, a partire dall'elemento fissato, se ne incontrano prima di arrivare a quell'altro. Converrà, per capire prontamen teoria delle tavole di addizione circolare, immaginare gli ele dell'entrata distribuiti attorno ad una circonferenza, essendo a_{11} contigui e considerare su di essa come destro il verso da a_{11} ad e come sinistro il verso da a_{11} ad a_{1n}....

Le linee 2ª, 3ª,... della tavola si ottengono con questa no ciascun termine di una linea vale la somma di quello che g sopra e di altri h a destra od a sinistra di quest'ultimo. Nel 1 si hanno le tavole *destrorse*, nel 2° caso le *sinistrorse*.

Il numero n si dirà *ordine* della tavola ed il numero $h \gtreqless$ dirà *passo* della tavola. Scriveremo i termini di una tavola ent angolo retto ed indicheremo con una freccia apposta al lato de golo parallelo alle linee il senso della tavola. Ci proponiamo tutto di trovare l'espressione dell'elemento generico a_{ij} di una t di addizione circolare in funzione degli elementi dell'entrata.

Tavole destrorse. — Riferiamoci subito ad un caso partic Siano a, b, c, d, e gli elementi dell'entrata di una tavola des del passo $h=1$, talchè ogni elemento della 2ª, 3ª... linea si o sommando quello che gli sta sopra con quello che è a destra (larmente) di quest'ultimo.

---

(1) Allo stesso risultato, ma per via affatto diversa, arriva il Lucas, trattando del q aritmetico di Fermat nel Cap. VII della *cit. op.* Egli indica con $F^y{}_x$ il termine che sec nostre notazioni verrebbe indicato con $a_{x+1,y+1}$ e dimostra che $F^y{}_x=\binom{x+y}{x}=\binom{x+y}{y}$

$$h = 1$$

a	b	c	d	e
$a+b$	$b+c$	$c+d$	$d+e$	$e+a$
$a+2b+c$	$b+2c+d$	$c+2d+e$	$d+2e+a$	$e+2a+b$
$a+3b+3c+d$	$b+3c+3d+e$	$c+3d+3e+a$	$d+3e+3a+3b$	$e+3a+3b+c$
$a+4b+6c+4d+e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2a+5b+10c+10d+5e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$7a+7b+15c+20d+15e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$22a+14b+22c+35d+35e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Sono complete le prime quattro linee e delle rimanenti è scritto soltanto il 1° termine (un polinomio). Si vede intanto che: in ciascuna linea un termine si ottiene dal precedente eseguendo sulle lettere a, b, c, d, e una sostituzione circolare e lasciando invariati i coefficienti. Per scoprire la legge di successione dei coefficienti basta adunque considerare i termini di una sola colonna, p. es. della 1ª. Orbene teniamo sott'occhio i numeri del triangolo T_1, cioè quello dei coefficienti binomiali. Vediamo subito che nei primi 5 termini della 1ª colonna (5 è l'ordine della tavola) i coefficienti di a, b, c, d, e sono i numeri della corrispondente linea di T_1. In generale: *nel 1° termine della* i^{ma} *orizzontale di una tavola circolare destra di passo* h *ed ordine* n, *i coefficienti sono ordinatamente uguali ai termini della* i^{ma} *linea di* T_h, *semprechè sia*: $(i-1)h+1 \leqslant n$; (si noti che $(i-1)h+1$ è appunto il numero dei termini di tale linea). Consideriamo ora il 6° termine della 1ª colonna della tavola suddetta. Esso si ottiene sommando quello che gli sta sopra con quello che è a destra di quest'ultimo:

$$2a+5b+10c+10d+5e =$$
$$= (a+4b+6c+4d+e)+(b+4c+6d+4e+a).$$

Scritte le due successioni identiche di numeri 1, 4, 6, 4, 1, spostando la 2ª di un posto verso destra rispetto alla 1ª, e sommando per colonne si ha

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & | \; 1 \end{array}$$

la successione 1, 5, 10, 10, 5, 1. Scomponendola in gruppi di 5 elementi (l'ultimo gruppo potendo contenerne anche meno) andando da sinistra a destra, e sommando i gruppi elemento ad elemento, si ha:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 1 & & & & \\ \hline 2 & 5 & 10 & 10 & 5 \end{array}$$

cioè risultano i coefficienti di a, b, c, d, e nel 6° termine della 1ª colonna della tavola. Si comprende senza difficoltà come questo fatto debba essere generale e cioè: *i coefficienti del 1º termine della* i^ma^ *linea di tavola circolare destrorsa di ordine* n *e passo* h, *quando* $(i-1)h+1$ *si ottengono scomponendo l'*i^ma^ *linea di* T_h *in gruppi di* n *termini, and da sinistra a destra, scrivendo questi gruppi in modo che i termini c spondenti siano in colonna e sommando per colonne* (l'ultimo gr può contenere anche meno di n termini).

Adunque se

$$\begin{array}{|llll} \multicolumn{4}{c}{\xrightarrow{\quad\quad h \quad\quad}} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn} \end{array}$$

è una tavola circolare destrorsa di ordine n e passo $h \lesseqgtr n$, avr

$$a_{i1} = \mu^{(h)}_{i1}\, a_{11} + \mu^{(h)}_{i2}\, a_{12} + \ldots + \mu^{(h)}_{in}\, a_{1n}$$

e sarà:

$$\mu^{(h)}_{ij} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{Bmatrix}_h \quad \text{se} \quad (i-1)h+1 \leqslant n$$

$$\mu^{(h)}_{ij} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-1+n \end{Bmatrix}_h + \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-1+2n \end{Bmatrix}_h + \ldots + \begin{Bmatrix} i-1 \\ j-1+kn \end{Bmatrix}_h$$
$$\text{se} \quad (i-1)h+1 > n,$$

k essendo il quoziente della divisione di $[(i-1)h+1]-j$ per n.

L'espressione di a_{ij} si avrà da quella di a_{i1} eseguendo sul 2º membro la sostituzione:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,n-j+1} & a_{1,n-j+2} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{1j} & a_{1,j+1} & a_{1n} & a_{11} & & a_{1,j-1} \end{pmatrix}$$

epperò:

$$a_{ij} = \mu^{(h)}_{i1}\, a_{1j} + \mu^{(h)}_{i2}\, a_{1,j+1} + \ldots$$
$$\ldots + \mu^{(h)}_{i,n-j+1}\, a_{1n} + \mu^{(h)}_{i,n-j+2}\, a_{11} + \ldots + \mu^{(h)}_{in}\, a_{1,j-1}$$

ovvero:

$$a_{ij} = \mu^{(h)}_{i,n-j+2}\, a_{11} + \ldots + \mu^{(h)}_{in}\, a_{1,j-1} + \mu^{(h)}_{i1}\, a_{1j} + \ldots + \mu^{(h)}_{i,n-j+1}\, a_{1n}$$

Il numero h è per sua natura maggiore di zero. Osserviar tavia che, se $h=0$ ed $j=1$, si ha:

$$\mu^{(0)}_{i,1} = \begin{Bmatrix} i-1 \\ 0 \end{Bmatrix}_0 + \begin{Bmatrix} i-1 \\ 0+n \end{Bmatrix}_0 + \ldots = 1 + 0 + 0 \ldots = 1$$

e

$$\mu^{(0)}_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad j > 1.$$

Risulta in tal caso $a_{ij} = a_{1j}$, cioè: le linee della tavola sar identiche all'entrata. In tal modo non è senza senso una ta passo $h=0$, avente tutte le linee identiche. Effettivamente og mento delle linee 2^a, 3^a, ... vale quello che gli sta sopra senz'altra aggiunta.

Se $n=1$, allora $j=1$, e:

$$\mu_{i1}^{(h)}=\begin{Bmatrix} i-1 \\ 0 \end{Bmatrix}_h+\begin{Bmatrix} i-1 \\ 1 \end{Bmatrix}_h+\ldots+\begin{Bmatrix} i-1 \\ (i-1)\,h \end{Bmatrix}_h=(h+1)^{i-1}$$

per una proprietà dei termini di una medesima linea di T_h. La tavola si riduce ad una sola colonna i cui termini sono:

$$a_{11},\quad a_{11}(h+1), \ldots a_{11}(h+1)^2, \ldots$$

avendosi appunto:

$$a_{i1}+a_{11}(h+1)^{i-1}.$$

Vediamo ora qual'è il significato dei coefficienti $\mu^{(h)}$.

Se nella tavola di passo $h=1$ ed ordine $n=5$ recata ad esempio si suppone $a=1$, $b=c=d=e=0$, la 1^a colonna si riduce ai soli coefficienti di a nei diversi termini di essa; se si suppone $a=c=$ $=d=e=0$; $b=1$ essa si riduce ai soli coefficienti di b ecc.... Adunque se si considera la tavola:

$$h=1$$

$$\begin{array}{|ccccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

il 1° termine della i^{ma} linea di essa sarà il valore di μ_{i1}. Il valore di μ_{i2} sarà il 1° termine della i^{ma} linea della tavola

$$h=1$$

$$\begin{array}{|ccccc} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

ovvero il termine posto a sinistra, circolarmente, del 1° delle i^{ma} linea della tavola precedente, giacchè l'entrata della 1^a si ottiene da quella della 2^a spostando di un posto verso sinistra i singoli elementi.

Adunque il valore di μ_{i2} sarà pure il 2° termine della i^{ma} linea della tavola sinistrorsa

$$h=1$$

$$\begin{array}{|ccccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

perchè è evidente che in due tavole di ugual entrata e di senso contrario le i^{me} linee contengono gli stessi termini ma distribuiti circolarmente in senso opposto. Adunque i termini di quest'ultima tavola sono i valori delle $\mu^{(1)}$.

Si ha pertanto:

$$\overset{h=1}{\longleftarrow}\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{h=1}{\longleftarrow}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
2 & 5 & 10 & 10 & 5 \\
7 & 7 & 15 & 20 & 15 \\
22 & 14 & 22 & 35 & 35
\end{array}\right. \equiv \left|\begin{array}{ccccc}
\mu^{(1)}_{11} & \mu^{(1)}_{12} & \mu^{(1)}_{13} & \mu^{(1)}_{14} & \mu^{(1} \\
\mu_{21}^{(1)} & & & & \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & & & \\
\vdots & & & & \\
\mu_{81}^{(1)} & & & &
\end{array}\right.$$

Ed in generale

$$\overset{h}{\longleftarrow}\qquad\qquad\qquad\qquad \overset{h}{\longleftarrow}$$

$$\left|\begin{array}{l}
1 \quad \underbrace{0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \\
\vdots
\end{array}\right. \equiv \left|\begin{array}{l}
\mu^{(h)}_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots \mu^{(h} \\
\mu^{(h)}_{21} \\
\vdots
\end{array}\right.$$

Tavole sinistrorse. — Consideriamo ad es. la tavola circolar strorsa di passo $h = 1$, coll'entrata a, b, c, d, e

$$h = 1$$

a	b	c	d	e
$a + e$	$a + b$	$b + c$	$c + d$	d +
$a + d + 2e$	$2a + b + e$	$a + 2b + c$	$b + 2c + d$	c +
$a + c + 3d + 3e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$a + b + 4c + 6d + 4e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$2a + 5b + 10c + 5d + 5e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$7a + 15b + 20c + 15d + 7e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$22a + 35b + 35c + 22d + 14e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$57a + 70b + 57c + 36d + 36e$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

Si vede che ogni linea contiene, salvo l'ordine, gli stessi della corrispondente linea della tavola destrorsa di ugual ent ugual passo precedentemente considerata.

In generale: la *i^{ma} linea di una tavola sinistrorsa* (destr *ottiene dalla* i^{ma} *della corrispondente tavola destrorsa* (sinistro *ugual passo e colla stessa entrata spostando circolarmente vers* (sinistra) *ciascun elemento di* $h(i-1)$ *posti, oppure sempliceme posti se* r *è il resto della divisione* $h(i-1)$ *per* n. *Pertanto*: *le sono identiche, anche avuto riguardo all'ordine di distribuzione mini, quando* $h(i-1)$ *è multiplo di* n. Anche in questa tavola termine di una linea si passa al successivo eseguendo una zione circolare su a, b, c, d, e.

Consideriamo adunque il 1° termine di una linea qualsias della 9ª. Se percorrendo da *destra a sinistra* la 9ª linea de golo T_1 la scomponiamo in gruppi di 5 termini (l'ultimo gru tendo anche contenerne meno di 5) e scriviamo i termini gruppi andando da destra a sinistra e mettendo in colonna i corrispondenti, indi sommiamo per colonne,

70	56	28	8	1
	1	8	28	56
70	57	36	36	57

le somme ottenute, considerate da destra a sinistra, cioè nell'ordine 57, 36, 36, 57, 70, sono i coefficienti degli addendi del suddetto 1° termine della 9ª linea, e cioè rispettivamente del 1° e degli altri che sono successivamente e circolarmente a sinistra di esso, cioè i coefficienti di a, b, c, d, e. Possiamo anche dire che le somme ottenute considerate da sinistra a destra e cioè nell'ordine 70, 57, 36, 36, 57, sono i coefficienti rispettivamente di b, c, d, e, a. In generale rapporto ai termini della tavola sinistrorsa di ordine n e di passo h

$$\xleftarrow{\qquad\qquad h \qquad\qquad}$$
$$\begin{array}{|l} a_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} \end{array}$$

avremo:

$$a_{i1} = \nu^{(h)}_{i1}\, a_{11} + \nu^{(h)}_{i2}\, a_{12} + \ldots + \nu^{(h)}_{in}\, a_{1n}$$

essendo

$$\nu^{(h)}_{i1} = \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h-n \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h-kn \end{matrix}\right\}_h$$

ed anche, per la (5, parte I):

$$\nu^{(h)}_{i1} = \left\{\begin{matrix} i-1 \\ 0 \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ n \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ kn \end{matrix}\right\}_h$$

k essendo il maggior intero per il quale $(i-1)h-kn \geqslant 0$, e:

$$\nu^{(h)}_{ij} = \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h+j-1-n \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h+j-1-2n \end{matrix}\right\}_h + \ldots$$
$$\ldots + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ (i-1)h+j-1-kn \end{matrix}\right\}_h$$

ovvero:

$$\nu^{(h)}_{ij} = \left\{\begin{matrix} i-1 \\ n+1-j \end{matrix}\right\}_h + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ 2n+1-j \end{matrix}\right\}_h + \ldots + \left\{\begin{matrix} i-1 \\ kn+1-j \end{matrix}\right\}_h ; \qquad j > 1 \qquad (2)$$

k essendo il maggior intero per il quale

$$(i-1)\,h + j - 1 - kn \geqslant 0.$$

E poichè l'espressione di a_{ij} si ha eseguendo su quella di a_{i1} la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots a_{1,n-j+1} & a_{1,n-j+2} \ldots a_{1n} \\ a_{1,j} & a_{1,j+1} \ldots a_{1n} & a_{11} \ldots\ldots a_{1,j-1} \end{pmatrix}$$

avremo:

$$a_{ij} = \nu^{(h)}_{i1}\, a_{1j} + \nu^{(h)}_{i2}\, a_{1,j+1} + \ldots$$
$$\ldots + \nu^{(h)}_{i,n-j+1}\, a_{1n} + \nu^{(h)}_{i,n-j+2}\, a_{11} + \ldots + \nu^{(h)}_{in}\, a_{1,j-1}$$

ovvero:

$$a_{ij} = \nu^{(h)}_{i,n-j+2}\, a_{11} + \ldots + \nu^{(h)}_{i,n}\, a_{1,j-1} +$$
$$+ \nu^{(h)}_{i1}\, a_{1j} + \nu^{(h)}_{i2}\, a_{1,j+1} + \ldots + \nu^{(h)}_{i,n-j+1}\, a_{1n}.$$

Quanto al significato dei coefficienti $\nu^{(h)}$, considerazioni ana
a quelle fatte per le tavole destrorse ci permettono di asserir
essi sono i termini di una tavola destrorsa di passo h coll'en
orizzontale $1, \underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n-1}$.

Si ha ad es.:

$$\begin{array}{|ccccc} \multicolumn{5}{c}{\xrightarrow{\quad h=1 \quad}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 10 & 10 & 5 \\ 7 & 15 & 20 & 15 & 7 \end{array} \equiv \begin{array}{|l} \multicolumn{1}{c}{\xrightarrow{\quad h=1 \quad}} \\ \nu^{(1)}_{11} \quad \nu^{(1)}_{12} \ldots\ldots \nu^{(1)}_{1,5} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \nu^{(1)}_{7,1} \end{array}$$

ed in generale

$$\begin{array}{|l} \multicolumn{1}{c}{\xrightarrow{\qquad h \qquad}} \\ 1 \quad \underbrace{0 \quad 0 \ldots\ldots\ldots 0}_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} = \begin{array}{|l} \multicolumn{1}{c}{\xrightarrow{\qquad h \qquad}} \\ \nu^{(h)}_{11} \ldots\ldots\ldots\ldots \nu^{(h)}_{1n} \\ \nu^{(h)}_{21} \\ \vdots \end{array}$$

Analogamente a quanto è stato detto per le tavole dest
se $h=0$, la tavola ha tutte le linee identiche, poichè si ha: $\nu^{(0)}$
e $\nu^{(0)}_{ij}=0$, se $j>1$. Se $n=1$, la tavola si riduce ad una sola col
ed è $a_{i1}=a_{11}(h+1)^{i-1}$ poichè:

$$\nu^{(h)}_{i1}=\left\{ \begin{matrix} i-1 \\ (i-1)\,h \end{matrix} \right\}_h + \ldots + \left\{ \begin{matrix} i-1 \\ 0 \end{matrix} \right\}_h = (h+1)^{i-1}.$$

Altre proprietà delle tavole circolari. — Sono le seguenti:

1°. La somma dei termini della i^{ma} linea, vale il prodotto
somma di quelli dell'entrata per il numero $(h+1)^{i-1}$.

Infatti consideriamo ad es. una tavola destrorsa. Poichè i
cienti $\mu^{(h)}_{i1}, \ldots \mu^{(h)}_{i,n}$ si ottengono scomponendo l'i^{ma} linea di
gruppi e sommando opportunamente, come si è visto, i loro
menti, la somma di tali coefficienti è uguale alla somma dei te
della i^{ma} linea di T_h, epperò:

$$\mu^{(h)}_{i1}+\mu^{(h)}_{i2}+\ldots+\mu^{(h)}_{in}=(h+1)^{i-1}.$$

Ora se nella somma $a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}$ si sostituiscono ad $a_{i,1}$,
le espressioni date dalla (1), si ottiene appunto una somma nella
$a_{11}, a_{12}, \ldots$ figurano ciascuna coi coefficienti $\mu^{(h)}_{i1}, \ldots \mu^{(h)}_{in}$; pert

$$a_{i1}+a_{i2}+\ldots+a_{in}=(h+1)^{i-1}(a_{11}+a_{12}+\ldots a_{1n}).$$

3°. In una tavola circolare destrorsa (sinistrorsa), del passo h, la somma degli elementi appartenenti alle prime i linee e ad h colonne consecutive (si riguardano come consecutive la 1ª e l'ultima), supposte contate nel senso sinistro (destro), vale l'elemento della $(i+1)^a$ linea appartenente alla colonna che segue a sinistra (destra) circolarmente l'ultima delle suddette h colonne, meno l'elemento dell'entrata appartenente alla stessa colonna.

Questa proprietà è una evidente conseguenza del modo col quale si procede per formare le tavole circolari.

2° Se $a_{i1}, \ldots a_{in}$, è l'i^{ma} linea di una tavola destrorsa ed $a'_{i1}, \ldots a'_{in}$, è l'i^{ma} di una sinistrorsa dello stesso passo e della stessa entrata, detto r il resto della divisione di $(i-1)h$ per n, si ha:

$$a_{i1} = a'_{i,r+1}\,; \qquad a_{i,2} = a'_{i,r+2}\,; \ldots a_{i,n-r} = a'_{i,n}\,;$$
$$a_{i,n-r+1} = a'_{i1}\,; \ldots a_{in} = a'_{ir}\,.$$

Se invece $a_{i,1}, \ldots a_{in}$ è la i^{ma} linea della tavola sinistrorsa ed $a'_{i1}, \ldots a'_{in}$ la i^{ma} della destrorsa, sarà:

$$a_{i1} = a'_{i,n-r+1}\,; \qquad a_{i2} = a'_{i,n-r+2}\,; \ldots a_{i,r} = a'_{in}\,;$$
$$a_{i,r+1} = a_{i1}\,; \qquad a_{i,r+2} = a'_{i,2}\,; \ldots a_{in} = a'_{i,n-r}$$

convenendo che quando il 2° indice di una a' supera n, si debba togliere da esso n e ritenendo, quando $r=0$, $a_{i0} = a_{i,n}$.

Pertanto: *per i valori di* i *tali che* $(i-1)h$ *sia multiplo* n, *le linee* i^{me} *delle due tavole coincidono.*

Possiamo riunire le relazioni suddette nelle seguenti:

$$\begin{aligned} &\text{destr. } a_{ij} = a'_{i,j+r} \text{ sinistr.} \\ &\text{sinistr. } a_{ij} = a'_{i,n-r-j} \text{ destr.} \end{aligned} \qquad (5)$$

convenendo che quando uno degli indici $j+r$, $n-r+j$ delle a' supera n (essendo $j \leqslant n$ ed $r < n$, il massimo valore di tali indici è $2n$) si debba sostituire ad esso il resto che si ottiene dividendolo per n, e ritenendo, se occorre, $a'_{i,0} = {}_{in}$.

La 1ª delle (5) lega le a di una tavola destrorsa alle a' della corrispondente sinistrorsa; la 2ª lega le a di una sinistrorsa alle a' della corrispondente destrorsa.

E poichè in esse si può cambiare j in $j+1$, $j+2, \ldots j-1, j-2, \ldots$ segue che: *percorrendo nelle due tavole la linea* i^a *nello stesso senso, muovendo da due termini uguali e corrispondentisi secondo le* (5), *si incontrano ordinatamente termini uguali.*

4°. Poichè i coefficienti $\nu^{(h)}$ sono i termini di una tavola destrorsa di ordine n con entrata 1, 0, 0, ... ed i coefficienti $\mu^{(h)}$ sono quelli della corrispondente sinistrorsa colla stessa entrata, possiamo nella 1ª delle (5) sostituire $\nu^{(h)}$ ad a e $\mu^{(h)}$ ad a' e nella 2ª possiamo sostituire $\mu^{(h)}$ ad a e $\nu^{(h)}$ ad a'. Abbiamo per tanto, sempre ritenendo c sia il resto della divisione di $(i-1)h$ per n:

$$\nu^{(h)}_{ij} = \mu^{(h)}_{i,j+r}$$
$$\mu^{(h)}_{ij} = \nu^{(h)}_{i,n-r+j}$$

nelle quali, agli indici $j+r$, ed $n-r+j$, quando essi superir dovranno sostituirsi i resti delle loro divisioni per n, ed occorr dovrà ritenersi $\mu^{(h)}_{i,0} = \mu_{i,n}$; $\nu^{(h)}_{i,0} = \nu^{(h)}_{i,n}$. (1)

5°. Se l'elemento a_{1k} dell'entrata di una tavola di passo h ec dine n viene aumentato di un numero ρ, l'elemento a_{ij} di essa v aumentato di $\mu^{(h)}_{1,k-j+1}\,\rho$, $\mu^{(h)}_{i,1}\,\rho$, $\mu^{(h)}_{i,n-(j-k-1)}\,\rho$ se la tavola è strorsa e secondochè sia $k \gtreqless j$; viene aumentato di $\nu^{(h)}_{j,k-}$ $\nu^{(h)}_{i,1}\,\rho$, $\nu^{(h)}_{i,n-(j-k-1)}\,\rho$ se la tavola è sinistrorsa e secondochè sia k Ciò è conseguenza delle (1) e (2).

In particolare se si moltiplica a_{1k} per un numero σ, si avr variazione subita da a_{ij}, applicando la regola precedente, riten $\rho + (\sigma - 1)\,a_{1k}$. Se $\sigma = -1$, vale a dire se si cambia segno ad per avere la variazione di a_{ij}, si porrà $\rho = -2a_{1k}$.

(Continua) N. TRAVERS

SU UNA QUESTIONE ELEMENTARE DI MASSIMO E DI MINIM

I. Si abbia un parallelepipedo retto rettangolo K, di cui siano x con $x \geqslant y \geqslant z$, le misure degli spigoli; saranno x, y, z numeri re positivi. Indicheremo sempre nel seguito un tale parallelepiped simbolo K (x, y, z) e scriveremo anche brevemente p. r. r. K $(x,y$

Diciamo $L = 12a$ la somma degli spigoli di K, $S = 6b^2$ la supe totale, $V = c^3$ il volume (con a, b, c positivi). Avremo le relazi

$$(1) \qquad \begin{cases} x + y + z = 3a \\ xy + yz + zx = 3b^3 \\ xyz = c^3; \end{cases}$$

(1) Avremo occasione in seguito di dedurre la proprietà rappresentata dalle (6) da a coefficienti $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$. Quanto alle (5), possono considerarsi conseguenza delle (6).

Per es. riferendoci alla i^{ma} linea di una tavola destrorsa, si ha per le (1):

$$a_{i1} = \mu^{(h)}_{i1}\,a_{11} + \mu^{(h)}_{i2}\,a_{12} + \dots + \mu^{(h)}_{in}\,a_{1n}$$

ovvero, per la 1ª delle (6):

$$a_{i1} = \nu^{(h)}_{i,n-r+1}\,a_{11} + \nu^{(h)}_{i,n-r+2}\,a_{12} + \dots + \nu^{(h)}_{i,n-r+n}\,a_{1n}.$$

In questa le $\nu^{(h)}$ devono essere considerate circolarmente verso destra da $\nu_{i,n-r+1}$ talchè se in una di esse il 2° indice supera n, si può da esso togliere n. Risulta allora c che il 2° membro vale il termine $a_{i,r+1}$ della tavola sinistrorsa corrispondente alla destro siderata, come appunto vuole la 1ª delle (5). Analogamente dicasi per $j = 2, 3 \dots$

quindi x, y, z sono le radici della equazione di 3° grado in ω:

$$(2) \qquad f(\omega) = \omega^3 - 3a\omega^2 + 3b^2\omega - c^3 = 0;$$

nelle nostre ipotesi, questa equazione avrà dunque tutte tre le radici reali e positive.

Pel teorema di Rolle tali saranno anche quelle della equazione derivata:

$$f'(\omega) = 3(\omega^2 - 2a\omega + b^2) = 0;$$

sarà quindi

$$a^2 \geqslant b^2,$$

cioè

$$(3)_1 \qquad a \geqslant b.$$

Quando sia inoltre $a = b$, la $f'(\omega) = 0$ ha la radice doppia $\omega = a$, e questo, pel teorema di Rolle, è possibile soltanto se la $f(\omega) = 0$ ha la radice tripla $\omega = a$, cioè se è anche $c = a$ ed insieme $x = y = z = a$.

Consideriamo ora l'equazione reciproca della (2):

$$(2)' \qquad \psi(\theta) = \theta^3 - 3\frac{b^2}{c^3}\theta + 3\frac{a}{c^3}\theta - \frac{1}{c^3} = 0;$$

anche essa avrà tutte le radici reali e positive; si avrà quindi per essa una diseguaglianza analoga alla $(3)_1$, cioè la:

$$(3)_2 \qquad ac^3 \leqslant b^4,$$

e quando in questa valga il segno di eguaglianza, sarà ancora

$$a = b = c, \qquad x = y = z = a.$$

Dalle $(3)_1$, $(3)_2$ segue:

$$bc^3 \leqslant ac^3 \leqslant b^4$$

donde

$$c^3 \leqslant b^3,$$

cioè

$$(3)_3 \qquad c \leqslant b;$$

e da questa e dalla $(3)_1$ anche

$$(3)_4 \qquad c \leqslant a;$$

e se in una delle $(3)_3$, $(3)_4$ sale il segno di uguaglianza, varrà anche nelle $(3)_1$, $(3)_2$ e quindi ancora $x = y = z = a$.

Nelle L, S, V, le disuguaglianze superiori si scrivono:

$$(3)^*_1 \qquad 24\,\mathrm{S} \leqslant \mathrm{L}^2,$$

$$(3)^*_2 \qquad 3\,\mathrm{LV} \leqslant \mathrm{S}^2,$$

$$(3)^*_3 \qquad 216\,\mathrm{V}^2 \leqslant \mathrm{S}^3,$$

$$(3)^*_4 \qquad 1728\,\mathrm{V} \leqslant \mathrm{L}^3;$$

ed ove in una qualunque di queste valga il segno di uguaglia
varrà in tutte ed il p. r. r. è un cubo. Inversamente per il c
tutte le uguaglianze superiori sono verificate.

È ovvio enunciare i teoremi di massimo e minimo, espressi d
disuguaglianze (3). Quelli contenuti dalle $(3)_3$, $(3)_4$ sono noti; no
se lo siano quelli corrispondenti alle $(3)_1$, $(3)_2$.

2. Avendo l'equazione (2) tutte le radici reali, il suo discri
nante Δ è positivo o nullo. Ora si ha:

$$\Delta = 27\,\{3a^2b^4 - 4b^6 - 4a^3c^3 + 6ab^2c^3 - c^6\};$$

dovrà dunque aversi, insieme colle (3), l'altra disuguaglianza:

$$c^6 - 6ab^2c^3 + 4a^3c^3 + 4b^6 - 3a^2b^4 \leqslant 0. \tag{4}$$

Discutiamo questa disuguaglianza, e, precisamente, supponend
essa date due delle tre quantità a, b, c (in modo che valgano le
cerchiamo come varia la terza.

Siano date dapprima a e b, con $a \geqslant b$; poichè $c^3 = V$, avr
dalla (4) per il volume V del p. r. r. K la disuguaglianza di seco
grado:

$$\theta(V) = V^2 + 2aV(2a^2 - 3b^2) + b^4(4b^2 - 3a^2) \leqslant 0.$$

Dette quindi V_1 e V_2 (con $V_1 > V_2$) le due radici della $\theta(V)$
posto cioè

$$V_1 = a(3b^2 - 2a^2) + 2k^3, \quad V_2 = a(3b^2 - 2a^2) - 2k^3 \tag{5}$$

con

$$k^2 = a^2 - b^2,$$

perchè sia $\theta(V) \leqslant 0$, deve aversi

$$V_2 \leqslant V \leqslant V_1. \tag{6$_1$}$$

Si trae di qui di nuovo che per $a = b$, è $k = 0$, $V = V_1 = V_2 =$
$c = a$; cioè il p. r. r. K è un cubo.

Sia dunque $a > b$; osservando che deve essere anche $V > 0$,
stinguiamo due casi:

1°. Sia

$$4b^2 - 3a^2 > 0;$$

cioè

$$a < \frac{2b}{\sqrt{3}} \qquad \text{od anche} \qquad L^2 < 32S;$$

sarà $V_1 > V_2 > 0$; V può quindi prendere qualunque valore tr
e V_2.

2°. Sia invece

$$4b^2 - 3a^2 \leqslant 0\,,$$

cioè

$$a \geqslant \frac{2b}{\sqrt{3}}, \qquad \text{od anche} \qquad L^2 \geqslant 32\,S;$$

è allora $V_2 \leqslant 0$, $V_1 > 0$ e V potrà variare soltanto tra 0 e V_1; sarà cioè

$$(6)_2 \qquad 0 < V \leqslant V_1.$$

Inversamente, se nei due casi precedenti, $V = c^3$ soddisfa alla $(6)_1$ o $(6)_2$, sarà $\Delta \geqslant 0$ e l'equazione (2) avrà tutte tre le radici reali, che per la regola di Cartesio saranno anche positive. Adunque:

Di un p. r. r. K siano assegnati la somma L degli spigoli e la superficie totale S, e sia $24\,S < L^2$, di guisa che il p. r. r. non sia un cubo. Allora:

1°. *Se si ha la limitazione*

$$32\,S > L^2 > 24\,S,$$

il volume V di K varia tra un massimo V_1 ed un minimo V_2, dati dalle (5) e può prendere qualunque valore intermedio tra V_1 e V_2.

2°. *Se si ha invece:*

$$L^2 \geqslant 32\,S$$

il volume V varierà tra il massimo V_1 e lo zero, prendendo ancora qualunque valore intermedio.

È da notare anche che V_1 e V_2 corrispondono ai *due* p. r. r. K_1 e K_2, con basi quadrate, che hanno la somma degli spigoli e la superficie totale assegnate: infatti sia per V_1, che per V_2, si ha $\Delta(V) = 0$, cioè $\Delta = 0$. Li indicheremo perciò anche con V_{k_1} e V_{k_2} rispettivamente; e si avranno le formule:

1°. Per $4b^2 - 3a^2 > 0$ è:

$$V_{k_1} = (a-k)^2\,(a+2k)\,; \qquad V_{k_2} = (a+k)^2\,(a-2k)$$

con

$$k^2 = a^2 - b^2$$

e gli spigoli relativi sono:

$$(7)_1 \qquad x_1 = a + 2k; \quad y_1 = z_1 = a - k \quad (\text{per } K_1)$$

$$(7)_2 \qquad x_2 = y_2 = a + k; \quad z_2 = a - 2k \quad (\text{per } K_2).$$

2°. Se è invece $4b^2 - 3a^2 \leqslant 0$, per il p. r. r. K_1 si hanno ancora le stesse formule; in luogo del p. r. r. K_2, dovrà invece considerarsi il p. r. r. *degenere* $\overline{K}_2$, pel quale è

$$V_{\overline{K}_2} = 0$$

$$(7)^*_2 \quad \overline{x}_2 = \frac{1}{2}\,(3a + \sqrt{9a^2 - 12b^2})\,; \ \overline{y}_2 = \frac{1}{2}\,(3a - \sqrt{9a^2 - 12b^2})\,; \ \overline{z}_2 = 0.$$

Dalle (7) si ha ancora:

$$(7)'_1 \qquad x_1 = \frac{3a^3 - 4ab^2 + V_{k_1}}{a^2 - b^2}; \quad y_1 = z_1 = \frac{ab^2 - V_{k_1}}{2(a^2 - b^2)}$$

e per $4b^2 - 3a^2 > 0$

$$(7)'_2 \qquad x_2 = y_2 = \frac{ab^2 - V_{k_2}}{2(a^2 - b^2)}; \quad z_2 = \frac{3a^3 - 4ab^2 - V_{k_2}}{a^2 - b^2}.$$

3. L'equazione $f'(\omega) = 0$ ha le due radici

$$\varepsilon = a + k, \quad \eta = a - k \quad (k^2 = a^2 - b^2)$$

e da note proprietà è

$$(8) \qquad x > \varepsilon > y > \eta > z;$$

d'altra parte detta ω una qualunque delle radici della (2) è

$$V_k = c^3 = f(\omega) + c^3 = \omega^3 - 3a\omega^2 + 3b\omega$$

e quindi anche:

$$\frac{dV_k}{d\omega} = f'(\omega).$$

Ma, dalla (8), si ha:

$$(8)' \qquad f'(x) > 0, \quad f'(y) < 0, \quad f'(z) > 0;$$

ne segue:

$$(9) \qquad \frac{dV_k}{dx} > 0, \quad \frac{dV_k}{dy} < 0, \quad \frac{dV_k}{dz} > 0;$$

V_k (pensato come funzione o della sola x, o della sola y, o
sola z) è cioè una funzione crescente di x (o di z), decrescen
Quindi, se $K(x, y, z)$, $K'(x', y', z')$ sono due p. r. r. che hanno la
degli spigoli e la superficie totale assegnate, V_k, V_k' sono i l
lumi, si avrà anche:

$$(9)' \qquad \frac{V_k - V_k'}{x - x'} > 0, \quad \frac{V_k - V_k'}{y - y'} < 0, \quad \frac{V_k - V_k'}{z - z'} > 0.$$

In particolare, ponendo $K' = K_1$ o a K_2 (o a $\overline{K}_2$), e ricordan
è $V_{k_1} \geqslant V_k \geqslant V_{k_2}$, avremo le limitazioni:

$$(10) \qquad x_1 \geqslant x \geqslant x_2; \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2; \quad z_1 \geqslant z \geqslant z_2,$$

essendo le (x_1, y_1, z_1), date dalle $(7)_1$, le (x_2, y_2, z_2) dalle $(7)_2$
secondochè è $4b^2 - 3a^2 > 0$, oppure $4b^2 - 3a^2 \leqslant 0$.

Più generalmente, quando sia $V_k > V_{k'}$, sarà $x > x'$, $y < y'$,
cioè al variare del volume V_k del p. r. r. $K(x, y, z)$, in un se
terminato, tra V_{k_1} e V_{k_2} (o tra V_{k_1} e lo zero) lo spigolo m

ed il minore di K variano concordemente con V_k, lo spigolo medio varia discordemente, tra i limiti dati dalle (10). Ne segue, inversamente, che facendo in K variare lo spigolo $\begin{cases}\text{maggiore } x\\ \text{minore } z\end{cases}$ gli elementi $\begin{cases}V_k, z\\ V_k, x\end{cases}$ variano concordemente con $\begin{cases}x\\ z\end{cases}$, y varia discordemente; facendo invece variare lo spigolo medio y, V_k, x, z variano in senso opposto tra i limiti rispettivi.

4. Siano ora assegnati b e c, cioè la superficie totale ed il volume del p. r. r. considerato, con $b \geqslant c$; e sia variabile a, cioè la somma degli spigoli di esso p. r. r. Dovrà aversi ancora $\Delta \geqslant 0$, e quindi a dovrà soddisfare alla disuguaglianza di 3° grado:

$$\varphi(a) = 4c^3a^3 - 3a^2b^4 - 6ab^2c^3 + 4b^6 + c^6 \leqslant 0.$$

Ora per l'equazione cubica $\varphi(a) = 0$, il discriminante D, come si calcola facilmente, è uguale a

$$D = 2^4 . 3^3 . (b^6 - c^6)^3$$

è quindi positivo per $b > c$, nullo per $b = c$; l'equazione $\varphi(a) = 0$ ha perciò tutte le radici reali e, per la regola di Cartesio, una è negativa, due positive, distinte ed ambedue maggiori di b [1] se $b > c$, uguali a b per $b = c$; dette a_1, a_2, con $a_1 \geqslant a_2$, le due radici positive della $\varphi(a) = 0$, sarà $\varphi(a) \leqslant 0$, con $a > 0$, solo quando si abbia:

(11)
$$a_1 \geqslant a \geqslant a_2 .$$

Si ha di qui nuovamente che per $b = c$ il p. r. r. K è un cubo; supposto quindi $b > c$, e quindi $a_1 > a_2$, i valori massimo a_1 e minimo a_2 corrispondono ancora (poichè è per essi $\Delta = 0$) ai due p. r. r. $K'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$, $K'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$ a basi quadrate che soddisfano alle condizioni assegnate.

Se inoltre $K(x, y, z)$ è un p. r. r. che soddisfa alle condizioni stesse, detto ω uno qualunque dei suoi spigoli, si ha subito dalla (2):

$$a = \frac{\omega^3 + 3b^2\omega - c^3}{3\omega^2}, \quad \frac{da}{d\omega} = \frac{f'(\omega)}{3\omega^2};$$

donde, per le (8) ed (8)' del n. 3, si ha ancora

(11)'
$$\frac{da}{dx} > 0, \quad \frac{da}{dy} < 0, \quad \frac{da}{dz} > 0;$$

e di qui si traggono delle conclusioni affatto analoghe a quelle del n. 3.

---

[1] È infatti

$$\begin{cases}\varphi(b) = (b^3 - c^3)^2 > 0\\ \varphi'(b) = 6b^2(c^3 - b^3) < 0.\end{cases}$$

In particolare si avranno le limitazioni

$$x'_1 \geqslant x \geqslant x'_2;\quad y'_1 \leqslant y \leqslant y'_2;\quad z'_1 \geqslant z \geqslant z'_2, \tag{12}$$

essendo, conforme alle (7)′ del n. 3:

$$\begin{cases} x'_1 = \dfrac{3a_1^3 - 4a_1b^2 + c^3}{a_1^2 - b^2}, & y'_1 = z'_1 = \dfrac{a_1b^2 - c^3}{2(a_1^2 - b^2)} \\ x'_2 = y'_2 = \dfrac{a_2b^2 - c^3}{2(a_2^2 - b^2)}, & z'_2 = \dfrac{3a_2^3 - 4a_2b^2 + c^3}{a_2^2 - b^2} \end{cases} \tag{12'}$$

e per le (12) sarà anche (poichè $x > y > z$)

$$x'_1 > y'_1 = z'_1;\quad x'_2 = y'_2 > z'_2.$$

Quando inoltre si faccia variare a in un senso determinato t
ed a_2, segue dalle (11)′ che x e z varieranno concordemente co
y discordemente, e di qui, inversamente, si traggono delle con
sioni affatto analoghe a quelle del n. 3.

5. Siano infine assegnati, per il p. r. r. K (xyz) a e c (con a
cioè la somma degli spigoli ed il volume; e cerchiamo come
variare b, cioè la superficie totale di K.

Potremmo procedere in guisa affatto analoga che al n. 4;
più semplice osservare che, insieme colla equazione (2), anche la
reciproca (2)′ ha le radici reali e positive; e per questa sono
gnate il prodotto delle radici e la somma dei prodotti a due a
la superficie totale del p. r. r. K è poi uguale alla somma delle
dici della $\psi(\theta) = 0$ moltiplicate per c^3. Varranno allora, per le r
della $\psi(\theta) = 0$, tutti i risultati del numero precedente e basterà
terpretarli per la $f(\omega) = 0$. Ci limiteremo ad enunciarli. Av
che b^2 potrà variare tra un minimo b_1^2 ed un massimo b_2^2 (che
le due radici positive dell'equazione cubica in b^2, che si ottiene
nullando il discriminante Δ della (2)); si avrà quindi

$$b_1^2 \leqslant b^2 \leqslant b_2^2; \tag{13}$$

ed ai due valori minimo e massimo b_1^2, b_2^2 di b^2 corrispondono
p. r. r. $K''_1(x''_1\,y''_1\,z''_1)$, $K''_2(x''_2\,y''_2\,z''_2)$ a basi quadrate, essendo an

$$\begin{cases} x''_1 = \dfrac{3a^3 - 4ab_1^2 + c^3}{a^2 - b_1^2}, & y''_1 = z''_1 = \dfrac{ab_1^2 - c^3}{2(a^2 - b_1^2)}, \\ x''_2 = y''_2 = \dfrac{ab_2^2 - c^3}{2(a^2 - b_2^2)}, & z''_2 = \dfrac{4a^3 - 4ab_2^2 + c^3}{a^2 - b_2^2}; \end{cases} \tag{14}$$

e per gli spigoli x, y, z del p. r. r. K si avranno le limitazioni

$$x''_1 \geqslant x \geqslant x''_2,\quad y''_1 \leqslant y \leqslant y''_2,\quad z''_1 \geqslant z \geqslant z''_2 \tag{13'}$$

ed al variare di b^2 tra i limiti (13) in un senso determinato, x e z varieranno discordemente, y concordemente a b^2, ed inversamente al variare di x (o di z) tra i limiti dati dalle (13)', b^2 ed y varieranno discordemente, z (od x) concordemente tra i limiti rispettivi; al variare di y, b^2 varierà concordemente, x e z discordemente.

5. Le dimostrazioni, che precedono, per quanto semplici, non sono elementari, nel senso che ordinariamente s'intende. Gli stessi risultati possono però anche ottenersi per via affatto elementare, e non meno semplice, colle considerazioni seguenti:

Conservando le notazioni che precedono, dalla (1) del n. 1 abbiamo le relazioni:

$$(14)\qquad \begin{cases} x+z=3a-y, \\ xz=3b^2-y(x+z)=y^2-3ay+3b^2; \end{cases}$$

quindi x o z sono le radici dell'equazione di 2° grado in ω:

$$(15)\qquad g(\omega)=\omega^2-(3a-y)\,\omega+y^2-3ay+3b^2=0.\ \text{(}^1\text{)}$$

E poichè x e z sono positivi e comprendono tra loro la y, dovrà aversi

$$(16)_1\qquad g(0)=\psi(y)=y^2-2ay+3b^2>0$$

$$(16)_2\qquad g(y)=3\theta(y)=3(y^2-2ay+b^2)\leqslant 0.$$

Dalla $(16)_2$ si ha intanto che il trinomio $\theta(y)$ deve decomporsi in due fattori lineari reali; deve essere dunque

$$(17)\qquad a^2\geqslant b^2,\quad \text{cioè}\quad a\geqslant b,$$

cioè la $(3)_1$ del n. 1; posto inoltre

$$(18)\qquad k=\sqrt{a^2-b^2},\quad y_2=a+k,\quad y_1=a-k\quad (\text{con } k>0),$$

sarà $\theta(y)\leqslant 0$, quando si abbia

$$(19)\qquad y_1\leqslant y\leqslant y_2.$$

Se ora è $a=b$, sarà

$$k=0,\quad y_1=y_2=y=a$$

e la $g(\omega)$ diventa

$$\bar{g}(\omega)=(\omega-a)^2=0;$$

e quindi anche $x=z=a$; il p. r. r. K è cioè un cubo. Abbiamo così una parte dei risultati del n. 1.

(1) È evidentemente $g(\omega)=\dfrac{f(\omega)}{\omega-y}$ con $f(y)=0$.

Sia dunque $a > b$; dovrà valere anche la $(16)_1$.

Distinguiamo ora due casi:

1°. Il polinomio $\psi(y)$ non si decompone in fattori lineari r
cioè:

(20)' $$4b^2 - 3a^2 > 0, \quad a < \frac{2}{\sqrt{3}} b;$$

è allora, qualunque sia y, $\psi(y) > 0$; si ha quindi per y solta
limitazione (19).

2°. Sia invece

(20)'' $$4b^2 - 3a^2 \leqslant 0, \quad a \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} b,$$

posto:

(21) $$y_3 = \frac{3a + \sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2}, \quad y_4 = \frac{3a - \sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2},$$

sarà $\psi(y) > 0$, solo quando y sia esterno all'intervallo $(y_4 y$
come subito si verifica, è:

$$\theta(y_3) = ay_3 - 2b^2 = \frac{3a^2 - 4b^2 + a\sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2}$$

$$\theta(y_4) = \qquad = \frac{3a^2 - 4b^2 - a\sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2},$$

quindi se $4b^2 - 3a^2 = 0$, è

$$\theta(y_3) = \theta(y_4) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad y_3 = y_4 = y_2,$$

quindi la (19) va completata nel modo seguente:

(19)' $$y_1 \leqslant y < y_2 \qquad (4b^2 - 3a^2 = 0)$$

se invece $4b^2 - 3a^2 < 0$, è allora

$$\theta(y_3) > 0, \qquad \theta(y_4) < 0,$$

cioè:

$$y_1 < y_4 < y_2 < y_3;$$

e quindi, perchè sia $\psi(y) > 0$, dalla (19) si ha la limitazione

(19)'' $$y_1 \leqslant y < y_4,$$

essendo le y_1, y_2, y_3, y_4 definite dalle (18) e (21), come si
dalle (10) del n. 3. [1]

7. Siano y, y' due valori della y che soddisfano alle lim
che precedono; siano $K(xyz)$, $K'(x'y'z')$ i p. r. r. corrisponde
V_K' i loro volumi.

---

[1] Si noti che, colle notazioni del n. 3, è $\overline{y_2} = y_4$, essendo $\overline{y_2}$ dato dalla $(7)'_2$.

Avremo:

$$(21)\quad \begin{cases} V_k = y\,.\,xz = y^3 - 3ay^2 + 3b^2y \\ V_{k'} = \qquad\quad = y'^3 - 3ay'^2 + 3b^2y', \end{cases}$$

donde:

$$V_k - V_{k'} = (y - y')\left\{\frac{1}{2}\,\theta(y) + \frac{1}{2}\,\theta(y') + 2\,\theta\left(\frac{y+y'}{2}\right)\right\}.$$

Ma, con y ed y', anche $\frac{y+y'}{2}$ soddisfa alle limitazioni (19)', (19)'', sarà quindi

$$\theta(y) \leqslant 0, \qquad \theta(y') \leqslant 0, \qquad \theta\left(\frac{y+y'}{2}\right) \leqslant 0,$$

non potendo per $y \neq y'$ valere sempre il segno di uguaglianza; ne segue

$$(22)_y \qquad \frac{V_k - V_{k'}}{y - y'} < 0.$$

Per la simmetria delle (1) in x, y, z, insieme colle $(22)_y$ si avranno anche le relazioni:

$$\begin{aligned} V_k &= x^3 - 3ax^2 + 3b^2x = z^3 - 3az^2 + 3b^2z \\ V_{k'} &= x'^3 - 3ax'^2 + 3b^2x' = z'^3 - 3az'^2 + 3b^2z' \end{aligned}$$

ed anche

$$\begin{aligned} V_k - V_{k'} &= (x - x')\left\{\frac{1}{2}\,\theta(x) + \frac{1}{2}\,\theta(x') + 2\,\theta\left(\frac{x+x'}{2}\right)\right\} \\ &= (z - z')\left\{\frac{1}{2}\,\theta(z) + \frac{1}{2}\,\theta(z') + 2\,\theta\left(\frac{z+z'}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Si osservi ora che la equazione $g(\omega) = 0$, quando in essa si scambi la y colla x (o colla z) ha come radici la y e la z (o la y e la x) ambedue non maggiori della x (non minori della z); è quindi:

$$\theta(x) \geqslant 0, \qquad \theta(x') \geqslant 0, \qquad \theta\left(\frac{x+x'}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\theta(z) \geqslant 0, \qquad \theta(z') \geqslant 0, \qquad \theta\left(\frac{z+z'}{2}\right) \geqslant 0,$$

e perciò colla $(22)_y$ si avranno anche le altre disuguaglianze

$$(22')_x \quad \frac{V_k - V_{k'}}{x - x'} > 0, \qquad\qquad (22')_z \quad \frac{V_k - V_{k'}}{z - z'} > 0,$$

cioè le (9)' del n. 3. Se ne traggono quindi le stesse conclusioni.

Per gli spigoli dei due p. r. r. $K_1(x_1y_1z_1)$, $K_2(x_2y_2z_2)$ (o $K_4(x_4$
corrispondenti ai valori massimo e minimo di y, dati dalle (19)' o (
si hanno poi subito dalla (15) le formule:

$$(23)_1 \quad \begin{cases} x_1 = a + 2k; \quad y_1 = z_1 = a - k \\ V_{k_1} = (a-k)^2(a+2k) = 3ab^2 - 2a^3 + 2k^3 \\ aV_{k_1} = b^4 - \{k(a-k)\}^2 \end{cases}$$

$$(23)_2 \quad \begin{cases} x_2 = y_2 = a + k; \quad z_2 = a - 2k \\ X_{k_2} = (a+k)^2(a-2k) = 3ab^2 - 2a^3 - 2k^3 \\ aV_{k_2} = b^4 - \{k(a+k)\}^2 \end{cases}$$

$$(23)_3 \begin{cases} x_4 = y_3 = \dfrac{3a + \sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2}, \quad y_4 = \dfrac{3a - \sqrt{9a^2-12b^2}}{2}, \quad z_4 \\ \qquad V_{k_4} = 0 \end{cases}$$

si hanno cioè le (7) e le (7)' del n. 2.

Si avranno quindi, per $4b^2 - 3a^2 > 0$, le limitazioni (10)
$4b^2 - 3a^2 \leqslant 0$ le analoghe, nelle quali x_2, y_2, z_2 si intendano
tuite da x_4, y_4, z_4.

Dalle $(23)_1$ si ha poi anche, essendo in ogni caso $V_k \leqslant V_{k_1}$, l
suguaglianza:

$$aV_k \leqslant b^4,$$

o posto $V_k = c^3$

$$ac^3 \leqslant b^4;$$

e potrà valere il segno di uguaglianza solo per $k = 0$, cioè per
Otteniamo così nuovamente la $(3)_2$ del n. 1 e da questa e dall
si traggono allo stesso modo le $(3)_3$, $(3)_4$.

8. Riprendiamo le formule $(23)_1$:

$$\begin{cases} V_{k_1} = 3ab^2 - 2a^3 + 2k^3 \quad (k^2 = a^2 - b^2) \\ aV_{k_1} = b^4 - \{k(a-k)\}^2 \end{cases}$$

e proponiamoci di vedere da queste, come varia V_{k_1}, quando
ponendo fissa una delle due quantità a, b, si faccia variare l'

Osserviamo perciò che, con notazioni evidenti, si ha

$$V_{k_1}(a,b) - V_{k_1}(a,b') = 3a(b^2 - b'^2) + 2\{k^3 - k'^3\}.$$

Ma, essendo

$$a^2 = b^2 + k^2 = b'^2 + k'^2,$$

si ha:

$$k - k' = -\frac{b^2 - b'^2}{k + k'};$$

ne segue:

$$V_{k_1}(ab) - V_{k_1}(ab') = \frac{b^2 - b'^2}{k + k'} \{3a(k + k') - 2(k^2 + k'^2 + kk')\};$$

ma chiaramente è $a > k$, $a > k'$, e quindi anche:

$$3a(k + k') > 2(k^2 + k'^2 + kk')$$

ed infine si ha la disuguaglianza:

$$\frac{V_{k_1}(ab) - V_{k_1}(ab')}{b - b'} > 0; \qquad (21)$$

onde, quando b varia tra 0 ed a, $V_{k_1}(ab)$ varia concordemente con b.

Analogamente si ha:

$$aV_{k_1}(ab) - a'V_{k_1}(a'b) = k'^2(a' - k')^2 - k^2(a - k)^2 =$$
$$= \{k'(a' - k') + k(a - k)\}\{k'(a' - k') - k(a - k)\}$$

e poichè il primo fattore è essenzialmente positivo, basterà studiare il secondo. Ora avendosi:

$$b^2 = a^2 - k^2 = a'^2 - k'^2$$

e quindi:

$$(a + k)(a - k) = (a' + k')(a' - k')$$

ed anche:

$$k'(a' - k') - k(a - k) = a(a - k) - a'(a' - k');$$

ed insieme:

$$a' - k' = \frac{(a - k)(a + k)}{a' + k'}$$

onde si ha infine:

$$k'(a' - k') - k(a - k) = \frac{a - k}{a' + k'} kk' \left(\frac{a}{k} - \frac{a'}{k'}\right).$$

Sia ora, per fissare le idee, $a > a'$; è allora anche $k > k'$, ed inoltre:

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{k}\right)^2; \quad \left(\frac{a'}{k'}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{k'}\right)^2,$$

onde

$$\frac{a}{k} < \frac{a'}{k'};$$

la quantità $k'(a' - k') - k(a - k)$ ha dunque il segno contrario ad $a - a'$. Ne segue:

$$\frac{aV_{k_1}(ab) - a'V_{k_1}(a'b')}{a - a'} < 0.$$

Ma identicamente:

$$\frac{V_{k_1}(ab) - V_{k_1}(a'b)}{a - a'} = \frac{1}{a}\left\{\frac{a V_{k_1}(ab) - a' V_{k_1}(a'b)}{a - a'}\right\} - \frac{1}{a} \cdot V_{k_1}(a$$

si ha quindi, a più forte ragione:

$$(24)_a' \qquad \frac{V_{k_1}(ab) - V_{k_1}(a'b)}{a - a'} < 0;$$

cioè quando si tenga fisso b e si faccia variare a (per i valo minori di b) V_{k_1} varia discordemente con a.

Quando poi sia $4b^2 - 3a^2 > 0$, dalla formola $(23)_2$:

$$V_{k_2} = 3ab^2 - 3a^3 - 2k^3; \qquad a V_{k_2} = b^4 - \{k(a+k)\}^2$$

affatto analogamente si ha:

$$V_{k_2}(ab) - V_{k_2}(ab') = 3a(b^2 - b'^2) - 2(k^3 - k'^3);$$

e poichè la differenza $k - k'$ ha il segno opposto alla $b - b'$, subito:

$$(24)_b^2 \qquad \frac{V_{k_2}(ab) - V_{k_2}(ab')}{b - b'} > 0.$$

E poi anche

$$V_{k_2}(ab) - V_{k_2}(a'b) =$$
$$= (a - a')\{3b^2 - 2(a^2 + a'^2 + aa')\} - 2(k - k')\{k^2 + k'^2$$

ma, poichè $b^2 < a^2$, $b^2 < a'^2$ è

$$3b^2 < 2(a^2 + a'^2 + aa'),$$

la differenza $(k - k')$ ha poi il segno di $a - a'$; ne segue sul

$$(24)_b^2 \qquad \frac{V_{k_2}(ab) - V_{k_2}(a'b)}{a - a'} < 0;$$

e dalle $(24)_a^2$, $(24)_b^2$ si traggono per $V_{k_2}(ab)$ le *stesse* conclus abbiamo avuto per $V_{k_1}(ab)$.

9. I risultati ottenuti possono riassumersi al modo segue

Di un parallelepipedo retto rettangolo K si dicano gli sp ordine di grandezza, $x \geqslant y \geqslant z$; sia $L = 12a$ la loro somma, la superficie totale, $V = c^3$ il volume di K.

Si hanno allora le disuguaglianze:

$$(A) \qquad 24S \leqslant L^2, \quad 3LV \leqslant S^2, \quad 216V^2 \leqslant S^3, \quad 1728V \leqslant L^3$$

(cioè:

$$(A)' \qquad a \geqslant b, \quad ac^3 \leqslant b^4, \quad b \geqslant c, \quad a \geqslant c;$$

ed ove in una qualunque di queste valga il segno di ugu varrà in tutte ed il parallelepipedo K è un cubo.

Siano ora assegnate dal p. r. r. K la somma L degli spigoli e la superficie totale S, e si abbia

$$(B) \qquad 24S < L^2,$$

in guisa che il p. r. r. K non sia un cubo; e se ne faccia variare il volume.

Conviene allora distinguere due casi:

1°. Si abbia, insieme colla (B)

$$(C) \qquad L^2 < 32S, \qquad (4b^2 - 3a^2 > 0).$$

Esistono allora due p. r. r. $K_1(x_1y_1z_1)$, $K_2(x_2y_2z_2)$ con due spigoli uguali, che hanno la somma degli spigoli e la superficie totale assegnate; e si ha per essi, posto $k = \sqrt{a^2 - b^2}$, con $k > 0$

$$(23)_1 \qquad \begin{cases} x_1 = a + 2k, \; y_1 = z_1 = a - k; \\ V_{k_1} = 3ab^2 - 2a^3 + 2k^3; \quad aV_{k_1} = b^4 - \{k(a-k)\}^2; \end{cases}$$

$$(23)_2 \qquad \begin{cases} x_2 = y_2 = a + k; \quad z_2 = a - 2k; \\ V_{k_2} = 3ab^2 - 2a^3 - 2k^3; \quad aV_{k_2} = b^4 - \{k(a+k)\}^2. \end{cases}$$

Qualunque altro p. r. r. $K(xyz)$ che soddisfa alle condizioni assegnate, ha un volume V_k minore di V_{k_1}, maggiore di V_{k_2} e fra i suoi spigoli si hanno le limitazioni:

$$(D) \qquad x_1 \geqslant x \geqslant x_2; \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2; \quad z_1 \geqslant z \geqslant z_2.$$

Quando inoltre il volume V_k di $K(xyz)$ si faccia variare, in un senso determinato, tra V_{k_1} e V_{k_2}, gli spigoli massimo e minimo (x e z) di K variano concordemente con V_k, lo spigolo medio y varia invece discordemente tra i limiti rispettivi, dati dalle (D). E perciò inversamente, se si fa variare lo spigolo massimo (o minimo) di K, tra i limiti dati dalle (D), in un senso determinato, il volume V_k e l'altro spigolo estremo variano concordemente tra i limiti relativi, lo spigolo medio varia invece discordemente; quando poi si faccia variare lo spigolo medio, gli spigoli estremi ed il volume V_k del p. r. r. K variano discordemente con esso.

Nei due p. r. r. K_1 e K_2 di volume massimo e minimo, si faccia ora variare la somma L degli spigoli, rimanendo costante la superficie totale S. I volumi V_{k_1} e V_{k_2} variano allora discordemente con L. Si tenga invece costante L e si faccia variare la superficie totale S: i due volumi V_{k_1} e V_{k_2} variano allora concordemente con S.

2°. Sia invece:

$$(C') \qquad L^2 \geqslant 32\,S, \qquad (4b^2 - 3a^2 \leqslant 0).$$

In questo caso, esiste un solo p. r. r. con due spigoli uguali, che soddisfa alle condizioni assegnate, ed è quello K_1, i cui elementi sono dati dalle $(23)_1$; ed il volume V_k di un qualunque p. r. r. $K(xyz)$ che

soddisfa alle condizioni stesse, varia tra il massimo V_{k_1} e lo
e per i suoi spigoli si hanno le limitazioni analoghe alle (D)

$$(D)' \qquad x_1 \geqslant x \geqslant x'_2; \quad y'_1 \leqslant y \leqslant y'_2; \quad z_1 \geqslant z \geqslant 0,$$

dove abbiam posto

$$x'_2 = \frac{3a + \sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2}, \quad y'_2 = \frac{3a - \sqrt{9a^2 - 12b^2}}{2}.$$

E per la variazione di V_k e degli spigoli x, y, z tra i limit
precedono, come per la variazione del volume massimo V_{k_1} si l
le stesse conclusioni che nel primo caso.

10. Un procedimento affatto analogo può tenersi per studiare
sieme dei p. r. r., nei quali si suppongano costanti il volume
superficie totale (o la somma degli spigoli); ma esso conduce
suguaglianze del 3° grado che vogliamo evitare.

Questo è possibile ricordando i risultati ottenuti al n. 8 e
dosi della nota *legge di reciprocità* sulle questioni di massimo
nimo. Ricordiamo l'enunciato di questa legge: (¹)

Se tra due gruppi X, Y *di numeri esiste una corrispondenz
che l'insieme dei numeri* Y *corrispondenti di un* X *arbitrario
tato di un* $\begin{Bmatrix} \textit{massimo} \\ \textit{minimo} \end{Bmatrix}$ *il quale varî concordemente (o discorde
coll'* X *prescelto, allora: se* Y_1 *è il* $\begin{Bmatrix} \textit{massimo} \\ \textit{minimo} \end{Bmatrix}$ *dei valori* Y *corr
denti ad un certo valore* X_1*, questo valore* X_1 *è il* $\begin{Bmatrix} \textit{minimo} \\ \textit{massimo} \end{Bmatrix}$
pure il $\left(\begin{Bmatrix} \textit{massimo} \\ \textit{minimo} \end{Bmatrix}\right)$ *dei valori* X *corrispondenti al valore* Y_1.

Ciò posto, abbiamo visto al n. 8 che se $\overline{a}$ soddisfa alla limit

$$(E) \qquad 4b^2 > 3\overline{a}^2 > 3b^2$$

tra i p. r. r. K (xyz), che hanno la somma degli spigoli $= 12\overline{a}$ e
perficie totale S uguale a $6b^2$, ve ne è uno di volume m
$V_{k_1} = \overline{c_1}^3$, uno di volume minimo $V_{k_2} = \overline{c_2}^3$. Poichè inoltre al
di $\overline{a}$ (in un senso determinato) entro i limiti dati dalla (E), V_k
variano *discordemente* con $\overline{a}$ (n. 8), per la legge di reciprocità
enunciata si ha che considerando tutti i p. r. r. K che hanno
lume $V_{k_1} = \overline{c_1}^3$ e la superficie totale S uguale a $6b^2$, la somma L
dei loro spigoli avrà un *massimo* $12\overline{a}$, che si ottiene per il p.
che soddisfacendo alle condizioni assegnate, ha due spigoli (n
ralleli) e precisamente i due spigoli minori uguali.

(¹) Cfr. ad es.: ENRIQUES, *Questioni di matematica elementare* (Zanichelli, Bologna,
vol. II, p. 500).

Analogamente, per tutti i p. r. r. K, che hanno il volume $V_{k_2} = \overline{c_2}^3$ e la superficie totale $S = 6b^2$, la somma $L = 12a$ degli spigoli avrà un *minimo*, ancora uguale a $12\overline{a}$, il quale si ottiene per il p. r. r. K_2, che, avendo il volume e la superficie totale assegnate, ha ancora due spigoli, e precisamente, i due maggiori, uguali.

Ma, ancora per la $(24)_a^2$, quando si considerino i p. r. r. K che hanno la sup. totale $S = 6b^2$, e un volume $c'^3 > \overline{c_2}^3$, si avrà per la somma degli spigoli $a' < \overline{a}$ e poichè è sempre $a' > b$, in quanto nessuno dei p. r. r. K può essere un cubo, varrà ancora la (E).

Fatto quindi $c' = c_1 = c$, abbiamo che: Considerando tutti i p. r. r. K (x, y, z) che hanno un volume $V = c^3$, ed una superficie totale $S = 6b^2$ assegnati, la somma degli spigoli $L = 12a$, varia tra un massimo $12a_1$ ed un minimo $12a_2$, i quali corrispondono ai due p. r. r. $K_1 (x_1 y_1 z_1)$, $K_2 (x_2 y_2 z_2)$ che, soddisfacendo alle condizioni assegnate, hanno due spigoli non paralleli uguali e precisamente i due minori nel caso del massimo, i due maggiori nel caso del minimo.

Ed i valori massimo e minimo a_1 ed a_2 sono le due radici positive della equazione di 3° grado in a che si ottiene facendo nelle $(23)_1$ e $(23)_2$, V_{k_1} o $V_{k_2} = c^3$, e rendendo razionale l'uguaglianza ottenuta, cioè, in altre parole, dalla equazione $\varphi(a) = 0$, considerata al n. 4. E (mediante le (12) del n. stesso) si potrebbe facilmente costruire un'equazione di 3° grado, cui soddisfano le misure x_1, x_2 (e analogamente le y_1, y_2; z_1, z_2) degli spigoli maggiori (o degli altri) dei due p. r. r. K_1 e K_2 che corrispondono al massimo o minimo di a.

Otteniamo così, senza calcolo, quasi tutti i risultati del n. 4.

Supponiamo ora in $V_{k_1}(a, b)$, $V_{k_2}(a, b)$ fissa a e variabile b; poichè, come abbiamo visto, $V_{k_1}(ab)$, $V_{k_2}(ab)$ variano *concordemente* con b, ripetendo il ragionamento fatto sopra, avremo che, considerando tutti i p. r. r. $K(xyz)$, che hanno un volume $V = c^3$ ed una somma degli spigoli $L = 12a$ assegnati, (con $a > c$), la superficie totale $S = 6b^2$ varierà tra un minimo $6b_1^2$ ed un massimo $6b_2^2$ che corrispondono ancora ai due p. r. r. K_1 e K_2 che, soddisfacendo alle condizioni assegnate, hanno due spigoli non paralleli uguali, e precisamente i due maggiori nel caso del minimo, i minori in quello del massimo.

E i due valori b_1^2, b_2^2 sono ancora le due radici positive della equazione cubica in b^2, che si ha uguagliando a zero il discriminante della (2), etc.; si hanno così di nuovo i risultati del n. 5.

O. Nicoletti.

SOPRA UNA EQUAZIONE INTEGRALE

1. Si abbia una sfera di raggio unitario: sia P un suo ge
punto, N(P) una funzione nota di esso. Si tratta di determir
funzione incognita F(P) che soddisfa alla equazione integr
Fredholm:

$$N(P) = F(P) + \lambda \int_\sigma F(P_1) \cos(\widehat{P, P_1})\, d\sigma_1.$$

Nell'integrale del secondo membro l'integrazione si fa risp
punto P_1 sulla sfera σ: e $\cos(PP_1)$ indica il coseno dell'arco
chio massimo PP_1.

Comincierò col trovare il nucleo risolvente della (1) con un
diretto: applicherò in seguito il metodo di Fredholm che si
qui semplice, pel fatto che le due trascendenti intere sono po

Si verifica in questa nostra equazione che l'unico autov
uno zero anche del numeratore della risolvente di Fredholm.

Determinerò poi la soluzione completa della equazione om

$$0 = F(P) + \lambda \int_\sigma F(P_1) \cos(\widehat{P, P_1})\, d\sigma_1,$$

corrispondente alla (1); equazione che come è noto non ha s
se non quando λ sia un autovalore.

2. Essendo P, P_1, P_2 tre punti sulla sfera, i primi due f
arbitrarii, il terzo variabile, calcoliamo l'integrale:

$$I = \int_\sigma \cos(\widehat{P, P_2}) \cos(\widehat{P_1, P_2})\, d\sigma_2.$$

Detto O il centro della sfera, scegliamo un sistema di
nate avente per asse z la OP, e il piano zx contenente il p
Dette θ, φ le coordinate polari (colatitudine e longitudine
avremo in primo luogo:

$$\cos(\widehat{P, P_2}) = \cos\theta;$$

e dal triangolo sferico P, P_1, P_2;

$$\cos(\widehat{P_1, P_2}) = \cos\theta \cos(P, P_1) + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(P, P_1) \cos\varphi.$$

Ricordando che

$$d\sigma = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

avremo quindi

$$I = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} [\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \cos(P, P_1) + \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}(P, P_1) \cos\varphi$$

Ma dei due integrali in cui può spezzarsi la somma il secondo è nullo, perchè

$$\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0,$$

e quindi eseguendo nella prima parte l'integrazione rispetto a φ:

$$I = 2\pi \cos(P, P_1) \int_0^{\pi} \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

e finalmente:

$$I = \frac{4\pi}{3} \cos(P, P_1). \tag{3'}$$

Ora il nucleo risolvente della (1) è una funzione $K(P, P_1, \lambda)$ tale che

$$\cos(P, P_1) + K(P, P_1, \lambda) = -\lambda \int_\sigma K(P, P_2, \lambda) \cos(\widehat{P_1, P_2}) \, d\sigma_2; \tag{4}$$

ed una volta noto K la soluzione della (1) è data da [1]:

$$F(P) = N(P) + \lambda \int_\sigma K(P, P_1, \lambda) N(P_1) \, d\sigma_1. \tag{5}$$

Dico che è possibile determinare una funzione $\varphi(\lambda)$ in modo che

$$\varphi(\lambda) \cos(P, P_1)$$

sia il nucleo risolvente.

Dovrà infatti essere per la (4) e ricordando la (3):

$$\cos(P, P_1) + \varphi(\lambda) \cos(P, P_1) = -\lambda\varphi(\lambda) I;$$

ed anche per la (3')

$$1 + \varphi(\lambda) = -\frac{4\pi}{3} \lambda \, . \, \varphi(\lambda)$$

e da questa

$$K = \varphi(\lambda) \cos(\widehat{P, P_1}) = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}\lambda + 1} \cos(\widehat{P, P_1}). \tag{6}$$

Ricaviamo intanto che la nostra equazione ammette un solo autovalore (o costante caratteristica):

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4\pi}. \tag{7}$$

Quando $\lambda \neq \lambda_1$ avremo secondo la (5):

$$F(P) = N(P) - \frac{\lambda}{\frac{4\pi}{3}\lambda + 1} \int_\sigma N(P_1) \cos(P, P_1) \, d\sigma_1. \tag{I}$$

---

[1] Vedi p. es. VOLTERRA, *Equations intégrales*, Cap. III.

3. Applichiamo ora alla (1) il metodo di Fredholm. Dovren primo luogo costruire la trascendente intera [1]

$$D(\lambda) = 1 +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_{\sigma_1} \ldots \int_{\sigma_2} \ldots \int_{\sigma_\nu} \begin{vmatrix} 1 & (\cos P_1P_2) \ldots & \cos(P_1P_\nu) \\ \cos(P_2P_1) & 1 & \ldots \cos(P_2P_\nu) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(P_\nu P_1) & \ldots\ldots & 1 \end{vmatrix} d\sigma_1 \, d\sigma_2 \ldots d\sigma$$

Ora i determinati sotto il segno integrale sono nulli per $n >$ la serie si riduce quindi a un polinomio e si avranno da calco due termini

$$I_2 = \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \begin{vmatrix} 1 & \cos(P_1P_2) \\ \cos(P_1P_2) & 1 \end{vmatrix} d\sigma_1 \, d\sigma_2,$$

$$I_3 = \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \int_{\sigma_3} \begin{vmatrix} 1 & \cos(P_1P_2) & \cos(P_1P_3) \\ \cos(P_2P_1) & 1 & \cos(P_2P_3) \\ \cos(P_3P_1) & \cos(P_3P_2) & 1 \end{vmatrix} d\sigma_1 \, \sigma_2 \, \sigma_3 .$$

Indicherò il modo con cui ho calcolato il primo: il secondo s cola mediante questo e l'integrale I del § 2.

Avremo

$$I_2 = \int_{\sigma_2} d\sigma_2 \int_{\sigma_1} \operatorname{sen}^2(P_1P_2) \, d\sigma_1 .$$

Integriamo rispetto alle zone sferiche elementari aventi per pc Sarà, detta dh l'altezza infinitesima della zona ed h la distanz centro:

$$d\sigma = 2\pi \, dh,$$

$$\operatorname{sen}^2(P_1P_2) = 1 - h^2;$$

quindi

$$I_2 = \int_{\sigma_2} d\sigma_2 \, . \, 2\pi \int_{-1}^{+1} (1 - h^2) \, dh = \frac{2}{3} (4\pi)^2.$$

In modo analogo si trova

$$I_3 = \frac{2}{9} (4\pi)^3.$$

avremo quindi

$$D(\lambda) = 1 + 4\pi\lambda + \frac{1}{3} (4\pi\lambda)^2 + \frac{1}{27} (4\pi\lambda)^3 = \left(1 + \frac{4\pi}{3} \lambda\right)^3.$$

Si trova così l'autovalore λ_1 già trovato: esso è radice di $D(\lambda)$ mentre è soltanto polo semplice pel nucleo risolvente

---

(1) Vedi p. es. VOLTERRA, *l. c.*, "I termini in diagonale sarebbero cos (P_iP_i) quind ad uno ".

(2) Vedi mia Nota, "Una osservazione sopra due relazioni poligonometriche ", *Peri Matematica*, Fasc. I, 1915.

Consideriamo ora l'altra trascendente intera:

$$D(P, P_1, \lambda) = \cos(P, P_1) +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_{\sigma} \int_{\sigma_2} \cdots \int_{\sigma_\nu} \begin{vmatrix} \cos(PP_1) & \cos(PR_1) & \ldots & \cos(PR_\nu) \\ \cos(P_1R_1) & 1 & \ldots & \cos(R_1R_\nu) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(P_1R_\nu) & \cos(R_\nu R_1) & \ldots & 1 \end{vmatrix} d\sigma_1 \ldots d\sigma_\nu \quad (11)$$

dove P, P_1 sono fissi ma arbitrarii: le integrazioni sono estese quindi ai punti $R_1 R_2 \ldots R_\nu$.

Ora io ho dimostrato [1] che i determinanti sotto il segno integrale sono nulli per $\nu > 2$: eseguendo i calcoli per i termini non nulli si trova:

$$D = \left(1 + \frac{4\pi}{3}\lambda\right)^2 \cos(P, P_1). \quad (11')$$

Il nucleo risolvente è il quoziente

$$-\frac{D(P, P_1, \lambda)}{D(\lambda)},$$

e si trova dalle (11'), (8') appunto il risultato del n. 2.

4. Consideriamo ora l'equazione omogenea (2) corrispondente alla (1): essa ha soluzione quando e solo quando:

$$\lambda = \lambda_1.$$

Determinerò ora tutte le soluzioni della detta equazione omogenea

$$O = F(P) + \lambda_1 \int_{\sigma} F(P_1) \cos(P, P_1)\, d\sigma_1. \quad (2')$$

Comincerò col ricordare che tutte le soluzioni di questa si ottengono con combinazioni lineari di q soluzioni indipendenti: è noto inoltre che: [2]

$$q \leqslant p - r + 1$$

essendo p l'ordine di molteplicità dello zero λ_1 per $D(\lambda)$: r l'ordine di molteplicità del polo λ_1 pel nucleo risolvente. Nel nostro caso

$$p = 3, \qquad r = 1$$

quindi

$$q \leqslant 3. \quad (12)$$

Dimostrerò ora che, detto Π un punto fisso,

$$\cos(P, \Pi), \quad (13)$$

---

[1] Nota citata Formol. (11') salvo l'evidente cambiamento di notazione.
[2] H. B. Heywood et M. Frechet, *L'equation de Fredholm.*

è soluzione della (1'): infatti per la (3') e (7)

$$\lambda_1 \int_\sigma \cos(P_1\Pi)\cos(PP_1)\,d\sigma_1 = \lambda_1\left(-\frac{1}{\lambda_1}\right)\cos(\Pi\,.\,P) = -\cos($$

quindi

$$\cos(\Pi P) + \lambda_1 \int_\sigma \cos(P_1,\Pi)\cos(PP_1)\,d\sigma_1 = 0.$$

Ora io dico che la (13) rappresenta la soluzione generale, si moltiplichi per una costante.

Infatti consideriamo per esempio il triangolo sferico tri golo X, Y, Z; avremo tre soluzioni (linearmente indipendent

$$\cos(P,X), \qquad \cos(P,Y), \qquad \cos(P,Z).$$

Ma abbiamo ricordato che le soluzioni indipendenti non essere più di tre: per queste potremo scegliere le anzidette luzione generale sarà

$$C_1\cos(PX) + C_2\cos(PY) + C_3\cos(PZ)$$

alla quale si può sempre dare la forma

$$C\cos(P,\Pi).$$

ROCCO SERI

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 815

815. *Se*

$$a+b+c=\alpha+\beta+\gamma \qquad e \qquad \frac{\alpha}{b+c}=\frac{\beta}{c+a}=\frac{\gamma}{a+b},$$

si ha

$$\frac{1}{4}\Sigma(b^2+ab+bc-ca)(c^2+bc+ca-ab) = -\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \gamma & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & \alpha \\ \gamma & \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

F. NEDE

Risoluzione del sig. A. Colucci e prof. G. Candido.

Si ha facilmente

$$-\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & 0 & \gamma & \beta \\ \beta & \gamma & 0 & \alpha \\ \gamma & \beta & \alpha & 0 \end{vmatrix} = -\alpha^4-\beta^4-\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2.$$

È nota la identità

$$-\Sigma\alpha^4+2\Sigma\beta^2\gamma^2 = \Sigma(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2).$$

Essendo per ipotesi

$$\frac{\alpha}{b+c}=\frac{\beta}{c+a}=\frac{\gamma}{a+b}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2},$$

risulta

$$\alpha=\frac{b+c}{2},\ \beta=\frac{c+a}{2},\ \gamma=\frac{a+b}{2},$$

e la detta identità diventa

$$-\Sigma\,\alpha^4+2\Sigma\,\beta^2\gamma^2=\frac{1}{4}\,\Sigma\,(b^2+ab+bc-ca)\,(c^2+bc+ca-ab). \qquad (2)$$

Dalle (1) e (2) risulta quanto volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

G. Loria, *Guida allo studio della storia delle matematiche.* U. Hoepli, Milano, 1916. — L. 3.

Le celebre Collezione dei Manuali Hoepli si è testè accresciuta di un nuovo elemento di grande importanza, perchè è rappresentato da un'opera che non ha somigliante in alcuna letteratura. Parliamo della *Guida allo studio della storia delle matematiche*; ne è autore il prof. Gino Loria della Università di Genova, ben noto a tutti per i suoi importanti lavori scientifici e storici, i quali lo designavano meglio di qualunque altro per comporre un manuale destinato a coloro che intendono dedicarsi ad un ramo di studii che va di giorno in giorno acquistando maggior favore fra le classi dirigenti.

Il nuovo volume del prof. Loria è diviso in due parti; la 1ª (intitolata " Preparazione alle ricerche sulla storia delle matematiche ") fa conoscere alcune generalità sul metodo storico e poi le principali pubblicazioni sulla storia delle matematiche: con ciò lo studioso è posto in grado di conoscere lo stato attuale di questa disciplina. La 2ª parte (che porta il titolo " Ausiliari delle ricerche sulla storia delle matematiche ") descrive ed analizza tutti i mezzi che si trovano oggi a disposizione di coloro che intendono di compiere qualche ricerca originale sopra questa branca dello scibile. Naturalmente nella nuova *Guida* abbondano le indicazioni bibliografiche; esse son date con la più scrupolosa esattezza in base ad uno studio di quanto offrono le letterature greca, latina, italiana, francese, tedesca ed inglese. Nè va taciuto che, quantunque l'autore abbia rivolta di preferenza la propria attenzione alle matematiche, pure la maggior parte di quanto egli insegna potrà venire studiato con sommo giovamento anche da coloro che intendono consacrarsi ad investigazioni relative alla storia della fisica, della chimica, della medicina o delle scienze naturali in generale.

Euclide, *Il primo libro degli elementi.* Testo greco, versione italiana a cura di Giovanni Vacca, con prefazione di Nicola Festa. Firenze, G. C. Sansoni editore, 1916.

È una pubblicazione importante ed interessante, e sarà accolta con grande compiacenza da tutti gli ammiratori di Euclide. — Nella introduzione il Vacca descrive il mondo greco in cui ha vissuto il grande geometra, enumera le cognizioni matematiche del suo tempo, osserva giustamente che i Greci di quell'epoca non solo nelle arti, nella storia, nella filosofia, ma anche nelle matemati nelle sue applicazioni primi tra i contemporanei, e maestri per i posteri.

Il testo greco è quello ristabilito dal filologo danese J. L. Heiberg, l duzione italiana è pressochè letterale, ma con qualche interpretazione nuo originale del significato di alcuni vocaboli.

Per esempio nei *preliminari*, il titolo greco " ὅροι " è tradotto in *t* mentre altri lo traducono in *definizioni* ed il Vacca giustifica e dà ragi questa variazione all'uso comune.

Il titolo " Κοιναὶ ἔννοιαι " è tradotto in *nozioni comuni*, il termine " in *uguale*, il " τὰ " in *cose*. Si può osservare che il vocabolo *cosa* non è te matematico nella lingua italiana, e che al nostro orecchio, e forse per abit non suonano troppo bene frasi come queste: " *Le cose uguali ad una stess uguali tra loro* " ed altri in cui ritorna la parola *cosa*. Dal contesto euclideo che Euclide col " τὰ " indica figura o *grandezza*, anzi determinate specie di dezze cioè lunghezze rettilinee, angoli, superfici poligonali, e che l'ἴσος si " *eguale in grandezza* " e corrisponde al moderno " *equivalente* " usato do gendre. Secondo Euclide " le cose sovrapponentisi l'una sull'altra sono ugu loro " ma non enuncia la proposizione inversa, che però come osserva il applica nella (4), in cui ammette che *segmenti* ed *angoli* uguali siano sovrapp

Nelle note e commenti a piè di pagina il Vacca dà preziose notizie st sugli autori delle diverse proposizioni, fa acute osservazioni sulle medesim lizza ragionamenti e concetti euclidei col metodo e coi simboli della Logi tematica. In queste note il lettore trova la storia del *Postulato delle para* Euclide fino ai nostri giorni, trova curiose notizie sul teorema di Pitagor anche prima di Pitagora, almeno in casi particolari, ai Cinesi (1110 av. ai Babilonesi, legge i più bei nomi dei Geometri dell'antichità, Talete, Pi Archimede, Pappo, Proclo, ecc. colle notizie più preziose ed accurate sul in cui vissero, e sulle proposizioni a cui hanno legato il loro nome.

Un breve glossario contenente circa 140 vocaboli del testo greco trad italiano, e stampato in fine del volume, mette il lettore in condizioni, a poco esperto in quella lingua, di comprendere in poco tempo il testo gr avere la soddisfazione di leggere Euclide nel suo originale, e giudicare se tiche e gli appunti fatti ad Euclide da geometri antichi e moderni, che il espone e discute, siano più o meno giustificati.

Merita lode speciale il valoroso Editore G. C. Sansoni di Firenze per dato questo volume elegante nella forma, correttissima nella stampa, ed di incoraggiamento a proseguire per questa via, ed a darci altre pubbli su Euclide e su altri Geometri dell'antichità interessanti e riuscite come

F. CASTELLAN

SALVATORE PINCHERLE, *Lezioni di calcolo infinitesimale*. N. Zani Bologna, 1915.

Da parecchi lustri l'Italia non è più tributaria dell'estero per quanto r buoni libri di testo, tanto per le Scuole medie come per le superiori; ed può affermare che nel nostro paese la produzione in questo senso è an aumento e va di giorno in giorno sempre più arricchendosi di nuove oper tificamente e didatticamente pregevoli. Ciò si verifica in ogni ordine di stu escluse le matematiche sia elementari, che superiori.

Uno dei rami più interessanti delle scienze esatte, è senza dubbio il Calcolo infinitesimale che, se non rappresenta più ai giorni nostri le colonne d'Ercole della scienza, tuttavia conserva sempre intatto il suo grande valore speculativo ed estetico, a cui si aggiunge la massima importanza informativa, essendo lo strumento principale d'indagine di cui si valgono tutte le scienze di carattere [illegible], e l'Ingegneria nelle sue svariate e molteplici operazioni.

Anche per quanto concerne il Calcolo infinitesimale l'Italia non è arretrata rispetto alle altre nazioni; poichè può vantare, a tale riguardo, una vera collana di ottimi libri; la quale, partendo dall'opera classica del Dini che gareggia coi grandi trattati del Jordan, del La-Vallée Poussin, dello Stolz ecc., attraverso alle opere di Genocchi-Peano, Cesaro, Arzelà, d'Arcais, Vivanti e Bagnera nelle quali tutte risalta una nota di personale originalità, arriva agli spigliati manuali del Pascal.

A queste opere tutte meritevoli di encomio, se ne aggiunge ora un'altra dovuta al Pincherle, il valente analista dell'Università di Bologna. L'opera edita recentemente e con la consueta accuratezza dalla Casa Zanichelli, consta di un grosso volume di circa ottocento pagine; e viene ad occupare una posizione intermedia tra il libro di consultazione ed il manuale scolastico. Contiene, esposti con la dovuta larghezza, tutti gli argomenti necessarii per giungere alla completa cognizione della materia; ma l'illustre Autore, con il suo ben noto senso della misura, ha saputo tenersi sempre entro giusti confini, così che il suo volume non presenta quella mole quasi paurosa che possa sconcertare e disorientare il giovane il quale lo abbia scelto per guida in un primo studio di questa materia.

Il libro si apre con un chiaro e stringato riassunto di tutti quegli argomenti di Analisi algebrica, numeri reali, aggregati, limiti, serie, che costituiscono le basi ormai granitiche, e lo strumento principale del Calcolo.

Questo capitolo introduttorio, che viene ad intonare il lettore con il carattere del libro, è poi quanto mai utile agli studenti offrendo loro un mezzo rapido per riacquistare il sicuro possesso di quelle nozioni e definizioni di Analisi algebrica tanto delicate, ed indispensabili per procedere nello studio del Calcolo con la dovuta sicurezza.

Definiti, nel 1° Capitolo, il concetto di funzione di una variabile reale nel senso più generale e quello di continuità, l'A., prima di passare al Calcolo infinitesimale, s'intrattiene sopra un argomento che figura pure nei trattati di Analisi algebrica, vale a dire sulle serie di potenze le cui proprietà, compreso lo sviluppo di Taylor, vengono esposte in modo elegante ed esauriente: viene di conseguenza che, quando al Capitolo 5° si parlerà dello sviluppo di Taylor per le funzioni in generale, sembrerà al principiante meno brusco il salto dal caso elementare dal semplice polinomio, a quello della funzione nel senso di Dirichlet.

Ci sembra che lo studio delle serie di potenze contribuisca ad aprire quello spiraglio sulla conoscenza delle funzioni analitiche a cui allude l'A. nella prefazione.

Col Cap. 3° comincia il vero e proprio Calcolo infinitesimale; e l'A. segue la tradizione di premettere la parte differenziale all'integrale; ritenendo che, se vi sono anche buone ragioni storiche e critiche che possano consigliare il metodo [illegible] partendo dal concetto, cronologicamente più remoto, d'integrale definito; d'altra parte, un elementare criterio didattico sconsiglia dall'accoppiare nell'esposizione, e fino dall'inizio, due difficoltà che si possono meglio affrontare e vincere separatamente.

Una volta stabilite le basi del differenziale, nei capitoli che precedono l'integrale, vengono svolti in modo rigoroso e completo, ma senza inutili digressioni, tutti quegli argomenti che formano l'ossatura di un libro destinato t allievi ingegneri, come agli studenti di matematica pura.

Per quanto riguarda il metodo tenuto nell'indagine di alcuni fatti notevoli dove entra in giuoco il concetto di continuità, l'A. sostituend di successione quella di aggregato ordinato, senza per questo appesanti le dimostrazioni indipendenti dal postulato di Zermelo il quale app noverο di quelle proposizioni sulle quali, fino a tanto non si comprom gore, è forse più opportuno serbare il silenzio.

Al Cap. 9° comincia l'esposizione del Calcolo integrale con la d'integrale definito di una funzione reale di variabile reale in un dato finito.

L'A. prende ad esaminare l'aggregato Z non numerabile costituito d possibili suddivisioni dell'intervallo d'integrazione in intervalli parzial lisce per questo un facile criterio di ordinamento.

Detti poi h_i gl'intervalli parziali che compongono una certa su ed L_i, l_i i limiti superiore ed inferiore della funzione in h_i, posto S $s = \Sigma h_i l_i$, considera i due aggregati pure non numerabili della S ed s tutte le possibili divisioni dell'intervallo d'integrazione e che, messi spondenza con Z, risultano essi pure ordinati.

Gli aggregati S ed s ammettono rispettivamente limite inferiore e s con procedimento quanto mai semplice si dimostra che questi coincidono dei due aggregati ordinati. In tal modo viene felicemente superato quel che, in altri Trattati, è costituito dal Lemma di Darboux.

Seguono i più importanti argomenti teorici del Calcolo integrale, una certa abbondanza, ma contenuti entro limiti tali da non turbare mai delle proporzioni tra le varie parti dell'opera.

Vengono poi le applicazioni del Calcolo alla Geometria, e le Equaz renziali: e la trattazione di tali argomenti è limitata, data l'indole sco libro, alle questioni fondamentali.

Notiamo però qualche novità di esposizione, specialmente in ciò ch le equazioni differenziali: in particolare merita di venir posta in luce con cui è svolta la teoria dell'Equazioni differenziali a coefficienti costa impostata sul fatto che una forma differenziale lineare è un'operazion tiva, e sulla decomposizione di una tale forma in forme elementari ordine.

L'A. tratta così le equazioni differenziali a coefficienti costanti c stesso metodo che altra volta ebbe ad applicare più in generale alle distributive.

Ad ogni capitolo del libro tien dietro una sobria raccolta di esercizi di questioni complementari; il cui scopo non è tanto quello di addest vani nel maneggio delle formule, quanto di completare la trattazione mento che ne forma il tema.

Il nome dell'A. è poi troppo noto perchè sia necessario accenna stante perspicuità della forma anche in quest'opera non certo l'ultima assidua, feconda consuetudine di lavoro darà all'Italia ed alla Scienza

U. Sca

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 7 Aprile 1910

LE PROPRIETÀ DEI NUMERI $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$

derivanti dalla considerazione di speciali combinazioni di elementi dette combinazioni con ripetizione fino ad h e la loro applicazione: 1° allo studio delle tavole generali di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari, di passo h; 2° alla determinazione in funzione di p e di $Q_1, Q_2, \dots Q_n$, dell'elemento di posto m nella successione individuata da n numeri iniziali $Q_1, \dots Q_n$ e dall'equazione ricorrente: $Q_m = p(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \dots + Q_{m-n})$.

(Continuazione — Vedi fascicoli I, II e III)

Distribuzione degli elementi centrali nelle linee di una tavola circolare. — In una tavola circolare chiamiamo *termine centrale* di una linea ogni termine tale che percorrendo circolarmente la linea in due versi opposti muovendo da esso, si incontrino ordinatamente gli stessi termini e chiamiamo *coppia centrale* una coppia di termini consecutivi uguali tali che, percorrendo la linea circolarmente in un senso muovendo da uno di essi, e nel senso opposto muovendo dall'altro, s'incontrino ordinatamente gli stessi termini.

Nelle seguenti tavole i termini o coppie centrali di ciascuna linea sono stampati in carattere grassetto.

$h = 2$

1	1	0	0	0
1	2	2	1	0
2	3	5	5	3
10	8	10	13	13
36	31	28	31	36
103	103	95	80	95

$h = 2$

$1_{(1)}$	$1^{(1)}$	0	0	0
$1_{(2)}$	2	2	$1^{(2)}$	0
$2^{(3)}{}_{(3)}$	2	5	5	3
$10_{(4)}$	8	$10^{(4)}$	13	13
$36^{(5)}{}_{(5)}$	31	28	31	$36^{(5)}$
$103^{(6)}{}_{(6)}$	103	95	80	95

$h=2$

1	0	**0**	0
1	**1**	1	**0**
2	2	**3**	2
7	**6**	7	**7**
21	20	**20**	20
61	**61**	61	**60**

$h=2$

$1^{(1)}_{(1)}$	0	0	
$1_{(2)}$	1	$1^{(2)}$	
$2^{(3)}_{(3)}$	2	3	
$7_{(4)}$	6	$7^{(4)}$	
$21^{(5)}_{(5)}$	20	20	2
$61_{(6)}$	61	$61^{(6)}$	6

$h=3$

1	0	0	**0**	0	0
1	**1**	**1**	1	**0**	**0**
2	2	3	**4**	3	2
11	**9**	**9**	11	**12**	**12**

$h=3$

$1^{(1)}_{(1)}$	0	0	0	0	
$1_{(2)}$	1	1	$1^{(2)}$	0	
$2^{(3)}_{(3)}$	2	3	4	3	
$11_{(4)}$	9	9	$11^{(4)}$	12	1

$h=1$

$2_{(1)}$	**0**	$2^{(1)}$	1	1
$3_{(2)}$	2	2	$3^{(2)}$	**2**
$5_{(3)}$	5	**4**	5	$5^{(3)}$
$\mathbf{10}^{(4)}_{(4)}$	10	9	9	10
$20_{(5)}$	$20^{(5)}$	19	**18**	19
$39_{(6)}$	**40**	$39^{(6)}$	37	37

Nel 1° esempio vi è su ogni linea un termine centrale sottoli
ed una coppia centrale sottolineata. A destra della tavola
un'altra identica, nella quale appaiono muniti degli indici succ
1, 2, ... in basso i termini successivi di una colonna p. es. la
degli indici successivi 1, 2, ... in alto altrettanti termini ugu
primi, uno per ogni linea. Essi sono distribuiti su una line
diremo spirale, che si stacca dal 1°, che è $1^{(1)}$, passa per il
è $1^{(2)}$, e continua circolarmente passando per $2^{(3)}_{(3)}$ ecc....
mero $2^{(3)}_{(3)}$ ha due indici perchè appartiene alla 1ª colonna e
spirale ad essa relativa. È importante osservare che sono ugua
numeri l'uno della 1ª colonna, l'altro della corrispondente s
situati sulla stessa linea. Nel 2° esempio su ciascuna linea vi
due termini centrali, e tra i termini centrali di due linee conse
è stabilita una corrispondenza, sottolineando nello stesso modo
mini corrispondenti. A destra della tavola sono muniti di in
numeri della 1ª colonna ed i loro uguali della corrispondente s
Nel 3° esempio su ognuna delle linee 1ª, 3ª, ... vi sono due t

centrali e su ognuna delle linee 2ª, 4ª,... due coppie centrali. È stabilita una corrispondenza tra due termini centrali o due coppie centrali, oppure tra un termine centrale ed una coppia centrale, appartenenti a due linee consecutive o distanti tra loro di due posti, sottolineando nello stesso modo gli elementi centrali (termini o coppie) corrispondenti. A destra della tavola c'è l'uguale coi numeri della 1ª colonna e della corrispondente spirale. Nel 4º esempio su ogni linea c'è un elemento centrale (sottolineato) ed una coppia centrale. Sono segnati gli indici dei termini della 1ª colonna e della corrispondente spirale.

Ci proponiamo ora di rintracciare: 1º la legge di distribuzione degli elementi (termini o coppie) centrali; 2º la legge del percorso della spirale corrispondente ad una data colonna.

Riguardo alla 1ª i casi possibili sono tre.

1º *n dispari; un numero dispari di termini centrali e di coppie centrali sull'entrata.*

Due schemi corrispondenti a questa ipotesi ed a due valori, l'uno pari, l'altro dispari, di h, sono ad es. i seguenti:

$h = 2$

$\underline{\mathbf{a}}$	b	$\underline{\mathbf{c}}$	b	$\underline{\mathbf{a}}$
$\underline{\mathbf{2a+b}}$	$\underline{\mathbf{2a+b}}$	$a+b+c$	$\underline{\mathbf{2b+c}}$	$a+b+c$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

$h = 3$

$\mathbf{a}$	b	$\underline{\mathbf{c}}$	b	$\underline{\mathbf{a}}$
$2a+b+c$	$\underline{\mathbf{2a+2b}}$	$2a+b+c$	$\underline{\mathbf{a+2b+c}}$	$\underline{\mathbf{a+2b+c}}$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

In ambedue il termine centrale dell'entrata è c, e la coppia centrale è aa. Questi schemi, ed altri che esamineremo in seguito, mostrano che se vi sono elementi centrali su una linea (l'entrata ad es.) ne sono anche *sulla linea successiva* [1]

[1] Il seguente esempio mostra che i termini centrali possono presentarsi da una certa linea in poi, anche se la linea precedente non ne contiene.

$h = 1$

1	2	3	4
5	3	5	7
8	8	12	12
. . .	. . .	. . .	. . .

Nella 1ª linea non vi sono elementi centrali; nella 2ª vi sono due termini centrali, nella 3ª due coppie centrali ecc.

Un altro esempio di entrata sarebbe **abbabbabb**; in ess
tre elementi centrali e tre coppie centrali.

Supponiamo $h \mp kn + (n-1)$, cioè che h diviso per n, non
resto $n-1$, giacchè in tal caso ogni linea ha i termini ug
cettuata l'entrata che può avere termini non tutti uguali);
mine è quindi centrale sulle linee 2^a, 3^a,... ed ogni copp
Supponiamo in questo caso dapprima h pari. Sia per es.
siano a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_4, a_3, a_2 i termini successivi
trata circolarmente disposti. Indichi la freccia il verso dell

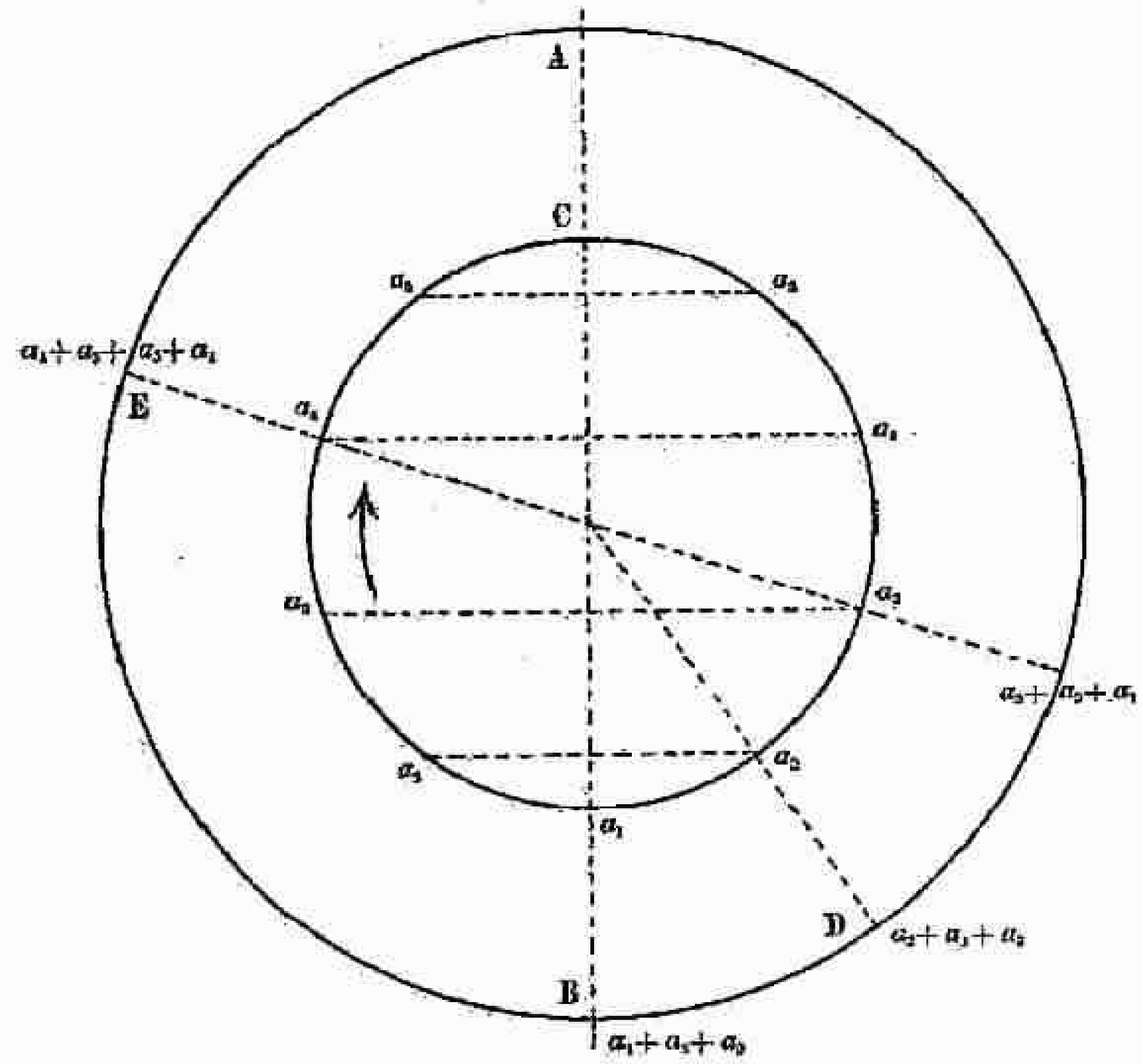

Fig. 1.

L'entrata ha adunque il termine centrale a_1 e la coppia cen
i termini di essa appaiono simmetricamente distribuiti ris
retta AB. Riferiamoci per semplicità al termine centra
p. es. $h=2$, alla 2^a linea appartiene il termine $a_1 + a_2 +$
di a_1 e degli a_2, a_3 a sinistra di AB.

Se consideriamo a_3 a destra di AB, il termine della 2^a
è sotto di esso, vale $a_3 + a_2 + a_1$, cioè è uguale al termine a
sottostante ad a_1 della entrata. Adunque per avere sulla
termine uguale ad un dato, che è somma di tre addendi, si
il termine simmetrico dell'ultimo addendo rispetto ad A
mine della 2^a linea sottostante a questo è uguale al ter
Da ciò segue che il termine che occupa sulla 2^a linea la p
e che vale $a_2 + a_1 + a_2$, ha per uguale se stesso ed è p
termine centrale di essa. Si vede che esso è spostato risp

spostamento centrale della entrata, di un solo posto nel verso contrario a quello della tavola e lo sarebbe di due posti se fosse $h=4$, di 3 se fosse $h=6$; lo spostamento è adunque in generale di $-\frac{h}{2}$ posti, cioè di $\frac{h}{2}$ *posti nel senso contrario (rappresentato dal segno —) a quello della tavola*. Supponiamo ora h dispari p. es. $h=3$. Questa volta l'elemento centrale della 2ª linea è in E e vale $a_4+a_5+a_5+a_4$; esso è discosto dal punto C di due posti (quelli occupati sull'entrata da a_5 ed a_4 a sinistra di AB) nel senso contrario a quello della tavola, e lo sarebbe di 3 posti se fosse $h=5, \ldots$; in generale esso sarà discosto dal punto C di $-\frac{h+1}{2}$ posti nel verso contrario a quello della tavola, ovvero da a_1 di $\frac{n+1}{2}-\frac{h+1}{2}$ posti nel verso della tavola (nel caso $h=3$, quelli occupati sull'entrata da a_2, a_3, a_4, a_5 a sinistra di AB) e C, meno quelli occupati da a_5 (a sinistra di AB) e C). Ma $\frac{n+1}{2}-\frac{h+1}{2}=\frac{n-h}{2}$. Dunque lo spostamento è dato in grandezza e segno da $\frac{n-h}{2}$; cioè da una linea alla successiva l'elemento (termine o coppia) centrale si sposta di $\frac{n-h}{2}$ posti nel verso della tavola o nel verso opposto, secondochè $n-h$ è positivo o negativo. Quando h è pari possiamo assumere come valore dello spostamento un numero che differisca da $-\frac{h}{2}$ per un multiplo di n; quando h è dispari un numero che differisca per un multiplo di n da $\frac{n-h}{2}$. Un'espressione che soddisfa ad ambedue le condizioni, ed è sempre positiva, (e se $n>1$ sempre diversa da zero) è $\frac{(n-1)h}{2}$. Se h è pari essa differisce da $-\frac{h}{2}$ di $\frac{h}{2}n$, e se n è dispari differisce da $\frac{n-h}{2}$ di $\frac{h-1}{2}n$. Si può dunque assumere come valore dello spostamento nel verso della tavola il numero $\frac{(n-1)h}{2}$. Se r è il resto della divisione di $\frac{(n-1)h}{2}$ per n, si può anche dire che lo spostamento è di r posti nel verso della tavola, oppure di $n-r$ nel verso contrario.

2° *n pari ed* h *pari; un numero pari di termini centrali sull'entrata (se ve ne sono) e così pure di coppie centrali (se ve ne sono).*

Schemi corrispondenti a questa ipotesi sono ad es. i seguent

$$h = 2$$

$$\begin{array}{|llll}
\underline{\mathbf{a}} & b & \underline{\mathbf{c}} & b \\
a+b+c, & \underline{\mathbf{a}+2\mathbf{b}}, & a+b+c, & \underline{2\mathbf{b}+\mathbf{c}}
\end{array}$$

$$h = 2$$

$$\begin{array}{|llllll}
a & \underline{\mathbf{b}\qquad\qquad} & \mathbf{b} & a & \underline{\mathbf{d}\qquad\qquad} & \mathbf{d} \\
\underline{\mathbf{a}+2\mathbf{d}}, & a+b+d, & \underline{\mathbf{a}+2\mathbf{b}, \ \mathbf{a}+2\mathbf{b}}, & & a+b+d, & \underline{\mathbf{a}+2\mathbf{d}}
\end{array}$$

(si corrispondono in due linee consecutive due elementi centrali so lineati nello stesso modo). Nel 1° esempio su ciascuna linea vi s due elementi centrali, nel 2° esempio vi sono due coppie centra

Come altro esempio: **a**, b, **c**, b, **a**, b, **c**, b è un'entrata con qua termini centrali e nessuna coppia centrale, ed $\underline{\mathbf{aa}}$ $\underline{\mathbf{bb}}$ $\underline{\mathbf{aa}}$ $\underline{\mathbf{bb}}$ è un trata con quattro coppie centrali e nessun termine centrale.

Riferiamoci al caso particolare $n = 10$, $h = 4$. Siano $a_1, a_2, \ldots$ i termini dell'entrata circolarmente disposti. Si hanno in D e

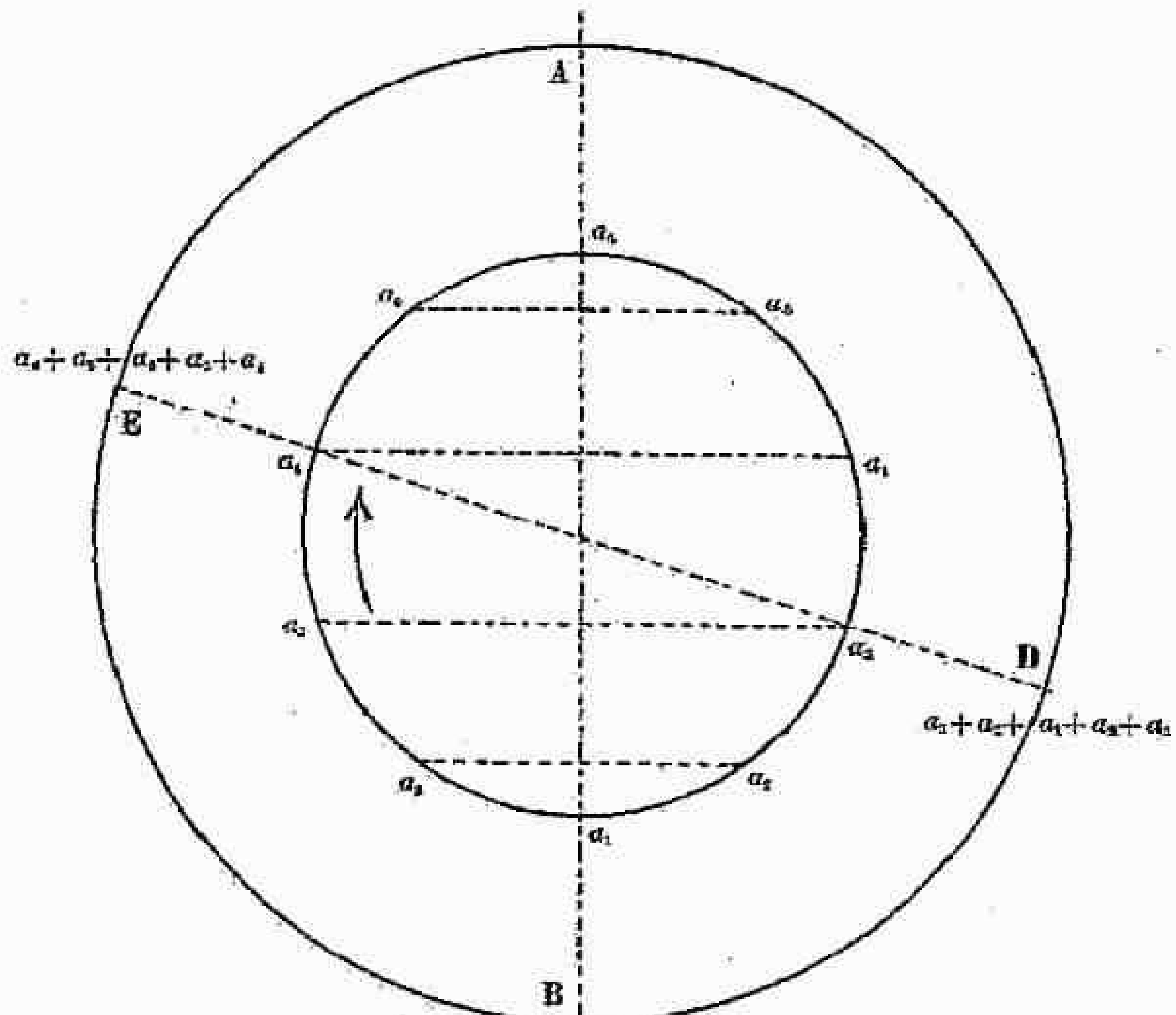

Fig. 2.

diametralmente opposti i due termini centrali della 2^a linea ed il l valore è $a_3 + a_2 + a_1 + a_2 + a_3$, $a_4 + a_5 + a_6 + a_5 + a_4$. I tern centrali dell'entrata sono a_1 ed a_6; il termine centrale che occ la posizione D sulla 2ª linea è spostato di -2 posti rispetto ad a_1, e quello che occupa la posizione E è spostato di -2 posti rispetto ad a_5.

Se fosse $h=6$ si troverebbe che tali spostamenti sono di -3 posti. In generale ad ogni elemento (termine o coppia) centrale di una linea ne corrisponde uno della successiva, spostato rispetto al precedente di $-\frac{h}{2}$ posti, cioè di $\frac{h}{2}$ posti nel verso contrario a quello della tavola.

3°. n *pari*; h *dispari non della forma* $kn+(n-1)$; *i termini centrali dell'entrata (se ve ne sono) sono in numero pari, e così pure le coppie centrali (se ve ne sono).*

Uno schema corrispondente a questa ipotesi è ad es. il seguente:

$h=3$; colonne 1ª, 2ª, 3ª

a	b	c
$a+b+c+d$	$\mathbf{a+2b+2c}$	$\mathbf{a+2b+2c}$
$\mathbf{2a+4b+6c+3d}$,	$2a+5b+6c+3d$,	$3a+6b+5c+2d$,
$11a+21b+21c+10d$,	$\mathbf{9a+20b+23c+11d}$,	$\mathbf{9a+20b+23c+11d}$,

colonne 4ª, 5ª, 6ª

d	c	b
$a+b+c+d$,	$\mathbf{b+2c+d}$,	$\mathbf{b+2c+d}$
$\mathbf{3a+6b+4c+2d}$,	$3a+6b+5c+2d$,	$2a+5b+6c+3d$
$11a+21b+21c+10d$,	$\mathbf{12a+23b+20c+9d}$,	$\mathbf{12a+23b+20c+9d}$

In esso sulla 1ª, 3ª, ... linea si hanno due termini centrali e sulla 2ª, 4ª, ... due coppie centrali. Si corrispondono su due linee consecutive, o distanti di due posti, gli elementi centrali sottolineati nello stesso modo. Vedesi che se ad una linea appartengono termini (coppie) centrali, sulla successiva sono altrettante coppie (termini) centrali. Come altro esempio l'entrata contenente i dieci termini **a** b **cc** b **a** b **cc** b ha due termini centrali e due coppie centrali; tal sarà pure adunque delle rimanenti linee.

Riferiamoci ad un caso particolare. Sia $n=10$ ed a_1, a_6 i due termini centrali dell'entrata. Poniamo $h=3$. Al termine centrale a_1 della 1ª linea corrisponde la coppia centrale $a_2+a_1+a_2+a_3$, $a_3+a_2+a_1+a_2$ della 2ª; il termine di essa più vicino ad a_1 è spostato rispetto ad a_1 di -1 posti ed il più lontano di -2 posti. Se fosse stato $h=5$ tali spostamenti sarebbero stati di -2 e -3 posti rispettivamente. In generale lo spostamento, rispetto ad un termine

centrale di una linea, dei due termini della coppia centrale
spondente della linea successiva è di $-\frac{h+1}{2}+1=-\frac{h-1}{2}$
se trattasi del termine della coppia più prossimo circolarme

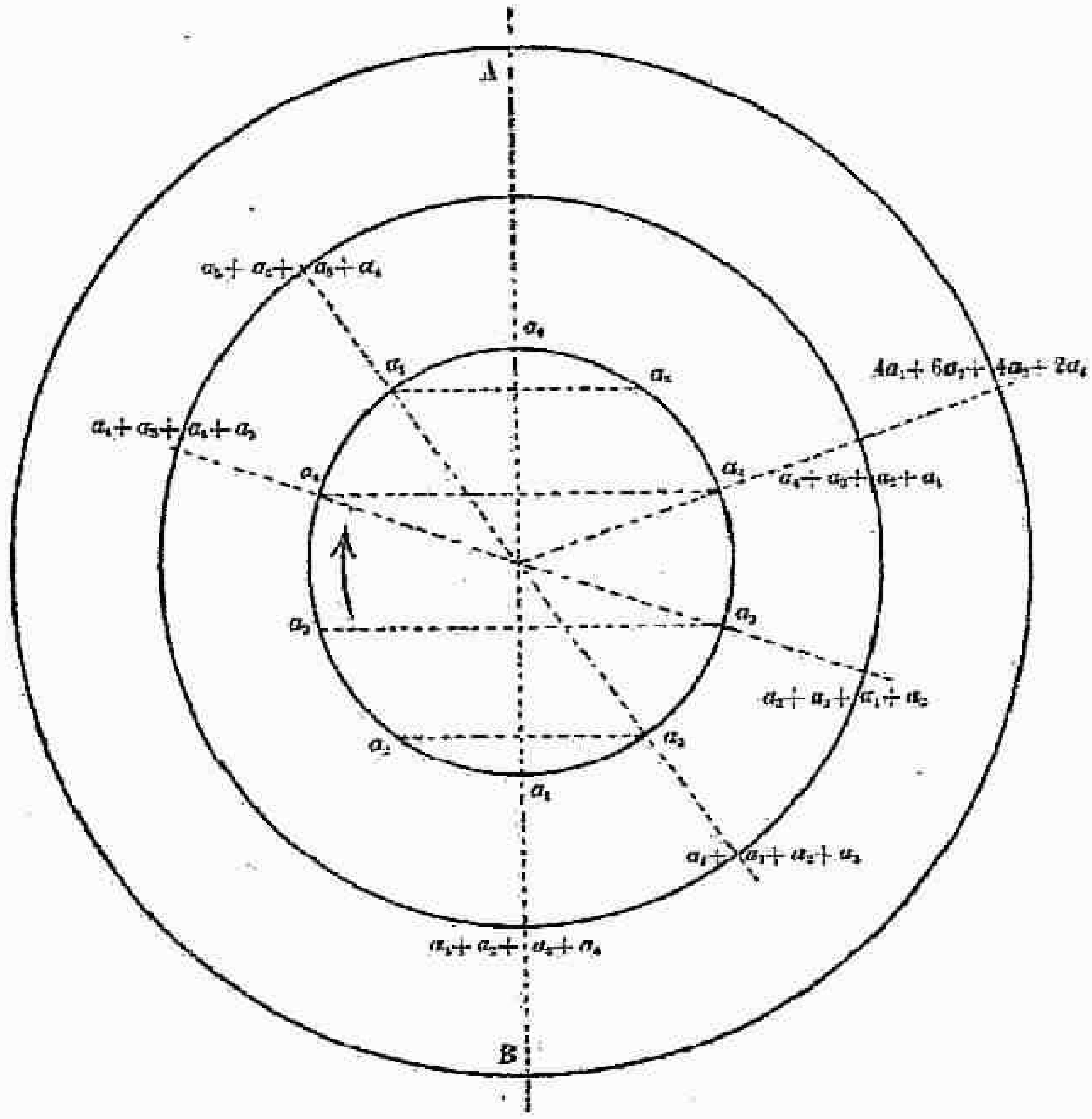

Fig. 3.

suddetto termine centrale, e di $-\frac{h+1}{2}$ posti, se trattasi d
mine più lontano. Nella 3ª linea troviamo il termine centrale
$+6a_2+4a_3+2a_4$ che è spostato rispetto ad a_1 di -3 posti
generale al termine centrale di una linea iª corrisponde un
trale della linea $(i+2)$ª spostato rispetto al primo di

$$-\frac{h+1}{2}+\left(-\frac{h-1}{2}\right)=-h \text{ posti.}$$

Analogamente di $-h$ posti sarà spostata la coppia centrale
linea $(i+2)$ª, corrispondente ad una coppia centrale della l
Ai suddetti spostamenti $-\frac{h-1}{2}$, $-\frac{h+1}{2}$, $-h$ possiamo so
gli altri $kn-\frac{h-1}{2}$, $kn-\frac{h+1}{2}$, $kn-h$, k essendo un inte
lunque. Perchè questi tre termini siano positivi, basterà

$n > h$. Se q è il quoziente della divisione di h per n ed r il resto, basterà porre $k = q$ se $r = 0$, e $k = q + 1$ se $r \neq 0$. Ad analoghi risultati si giunge se si considera una coppia centrale dell'entrata, anzichè un termine centrale.

Osserviamo ancora che gli spostamenti trovati nei vari casi esaminati, sempre supponendo h non della forma $kn + (n-1)$, sono: nel 1° caso $-\frac{h}{2}$, $\frac{n-h}{2}$; nel 2° caso $-\frac{h}{2}$; nel 3° caso $-\frac{h-1}{2}$, $-\frac{h+1}{2}$, $-h$. Siano q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 ed r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 i quozienti e resti rispettivamente di h, $|n-h|$, $h-1$, $h+1$, $2h$, per $2n$, talchè:

$$-\frac{h}{2} = -q_1 n - \frac{r_1}{2}; \quad \frac{|n-h|}{2} = q_2 n + \frac{r_2}{2}; \quad -\frac{h-1}{2} = -q_3 n - \frac{r_3}{2}$$

$$-\frac{h+1}{2} = -q_4 n - \frac{r_4}{2}; \quad -h = -q_5 n - \frac{r_5}{2}.$$

Ritenendo positivi gli spostamenti nel verso della tavola e negativi quelli nel verso contrario, possiamo concludere:

1° se n è dispari ed h pari, ad un elemento (termine o coppia) centrale di una linea ne corrisponde uno analogo nella linea sottostante, spostato rispetto ad esso di $-\frac{r_1}{2}$, oppure di $n - \frac{r_1}{2}$ posti; lo spostamento è nullo se h è multiplo di $2n$; $(r_1 = 0)$;

2° se n è dispari ed h pari, lo spostamento suddetto è di $\frac{r_2}{2}$ posti se $n - h > 0$, e di $-\frac{r_2}{2}$ posti oppure $n - \frac{r_2}{2}$ posti se $n - h > 0$; lo spostamento è nullo se $|n-h|$ è multiplo di $2n$, ovvero se h è multiplo dispari di n;

3° se n è pari ed h dispari, il suddetto spostamento è di $-\frac{r_1}{2}$ posti oppure di $n - \frac{r_1}{2}$ posti; è nullo se h è multiplo di $2n$;

4° se n è pari ed h pari, lo spostamento di un termine centrale appartenente ad una linea $(i+1)^a$ rispetto al termine più prossimo, circolarmente, della coppia centrale che gli corrisponde nella linea i^a è $-\frac{r_3}{2}$ oppure $n - \frac{r_3}{2}$ posti, ed è nullo se $h-1$ è multiplo di $2n$; lo spostamento rispetto al termine più lontano, circolarmente, della suddetta coppia centrale della linea i^a è di $-\frac{r_4}{2}$ oppure $n - \frac{r_4}{2}$ posti, ed è nullo se $h+1$ è multiplo di $2n$; lo spostamento di un elemento (termine o coppia) centrale di una linea $(i+2)^a$ dall'elemento centrale analogo che gli corrisponde nella linea i^a, è $-\frac{r_5}{2}$ oppure $n - \frac{r_5}{2}$ posti, ed è nullo se h è multiplo di n.

Abbiamo già osservato che in corrispondenza di ciascuna col di una tavola circolare la cui entrata abbia elementi centrali s tracciare una linea spirale che passi per termini della tavola, per ciascuna linea, uguali a quelli della colonna considerata e cedentisi nel medesimo ordine. La legge del percorso di tale spirale è molto semplice. Stabiliamo una corrispondenza tra i mini di una medesima linea in modo che: 1° ad un termine cen corrisponda il termine stesso; 2° ad un termine appartenente ad coppia centrale corrisponda l'altro termine di essa; 3° ad un ter che non sia centrale e non appartenga ad una coppia centrale risponda un altro simmetrico di esso rispetto ad ogni termine trale e ad ogni coppia centrale. Poichè una linea è divisa d termine centrale o da una coppia centrale in due porzioni sin triche, basterà che il fatto si verifichi rispetto ad un qualsiasi mine centrale o ad una qualsiasi coppia centrale. Possiamo a dire: *la linea spirale corrispondente ad una data colonna, passa termini corrispondenti su ciascuna linea a quelli di tale colonna.* tanto: *una colonna e la corrispondente spirale si incrociano in termini di essa colonna che sono centrali nelle linee alle quali ap tengono; se un termine della colonna considerata appartiene ad coppia centrale, la corrispondente spirale passa per l'altro termi tale coppia.*

Proprietà dei coefficienti $\mu^{(h)}$ **e** $\nu^{(h)}$. — 1°. La legge della distribuz dei termini centrali nelle linee delle tavole dei coefficienti $\mu^{(h)}$ e è, come risulterà in seguito, importantissima. In $\mu^{(h)}_{i,j}$ e $\nu^{(h)}_{i,j}$ il 1 dice i è il numero d'ordine della linea i^a, ed il secondo indice j può superare l'ordine n della tavola, ossia il numero dei termini l'entrata. Pertanto essendo $j > n$, oppure $j \leqslant 0$, i simboli $\mu^{(h)}_{i,j}$ e sono senza senso. Converremo di dar loro significato ritenendo:

$$\mu^{(h)}_{i,0} = \mu^{(h)}_{i,n}\,; \qquad \mu^{(h)}_{i,-j} = \mu^{(h)}_{i,kn-j}\,; \qquad \mu^{(h)}_{i,j} = \mu^{(h)}_{i,r}$$

e del pari

$$\nu^{(h)}_{i,0} = \nu^{(h)}_{i,n}\,; \qquad \nu^{(h)}_{i,-j} = \nu^{(h)}_{i,kn-j}\,; \qquad \nu^{(h)}_{i,j} = \nu^{(h)}_{i,r}$$

j essendo un intero positivo, kn il minor multiplo di n tale $kn - j \geqslant 0$, ed r il resto della divisione di j per n, quando $j >$

Da ciò risulta che se nelle tavole ad es. delle $\mu^{(h)}$ il termine occupa il posto j^o della i^a linea, i posti essendo contati circolarm verso destra e percorrendo, se $j > n$, la linea anche più volt termine $\mu^{(h)}_{i,-j}$ occuperà il posto $(j+1)^o$ della i^a linea, i posti esse questa volta contati circolarmente verso sinistra a partire dall timo termine di essa (l'ultimo a destra di chi guarda la linea). trettanto dicasi rapporto a $\nu^{(h)}_{i,j}$. Del pari è chiaro che il term $\mu^{(h)}_{i,j\pm s}$ è spostato di s posti circolarmente verso destra (segno + sinistra (segno —) rispetto a $\mu^{(h)}_{i,j}$, talchè essendo $\mu^{(h)}_{i,0} = \mu^{(h)}_{i,1-1}$,

...vesi appunto ritenere che $\mu^{(h)}_{i,0}$ occupi il 1° posto a sinistra circolar-...mente di $\mu^{(h)}_{i,1}$, epperò: $\mu^{(h)}_{i,0} = \mu^{(h)}_{i,n}$.

Ciò posto, osserviamo (1) che nell'entrata, o prima linea, di una

---

(1) Affinchè possano meglio essere constatati i risultati che seguono, riportiamo alcune tavole dei coefficienti $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$.

$\mu^{(h)}$

$h = 1$

1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1	0	0
1	3	3	1	0
1	4	6	4	1
2	5	10	10	5
7	7	15	20	15
22	14	22	35	35
57	36	36	57	70
127	93	72	93	127

$h = 2$

1	0	0	0	0
1	1	1	0	0
1	2	3	2	1
4	4	6	7	6
17	14	14	17	19
53	50	45	45	50
148	153	148	140	140
428	441	449	441	428
1297	1297	1318	1331	1318

$h = 7$

1	0	0	0	0
2	2	2	1	1
12	13	14	13	12
101	101	103	104	103
820	817	817	820	822

$h = 1$

1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	1	0
1	3	3	1
2	4	6	4
6	6	10	10
16	12	16	20
36	28	28	36
72	64	56	64

$h = 2$

1	0	0	0
1	1	1	0
2	2	3	2
7	6	7	7
21	20	20	20

$h = 6$

1	0	0	0
2	2	2	1
12	12	13	12
86	85	86	86
201	200	200	200

$\nu^{(h)}$

$h = 1$

1	0	0	0	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	2
1	0	1	3	3
1	1	4	6	4
2	5	10	10	5
7	15	20	15	7
22	35	35	22	14
57	70	57	36	36
127	127	93	72	92

$h = 2$

1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	1	2	8	2
4	6	7	6	4
17	19	17	14	14
53	50	45	45	50
148	140	140	148	153
428	428	441	449	441
1207	1318	1331	1318	1297

$h = 7$

1	0	0	0	0
2	1	1	2	2
12	12	13	14	13
101	103	104	103	101
820	822	820	817	817

$h = 1$

1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	2
1	1	3	3
2	4	6	4
6	10	10	6
16	20	16	12
36	36	28	28
72	64	56	64

$h = 2$

1	0	0	0
1	0	1	1
2	2	3	2
7	7	7	6
21	20	20	20

$h = 6$

1	0	0	0
2	1	2	2
12	12	13	12
86	86	86	85
201	200	200	200

tavola delle $\mu^{(h)}$ o $\nu^{(h)}$ è termine centrale il 1° termine (che vale soltanto, quando n è dispari (es.: 1, 0, 0; 1, 0, 0, 0, 0; ...); vi invece due termini centrali, quando n è pari (es.: 1, 0, 0, 0; 1, 0, 0, 0; ...); il 1° di essi, vale 1 ed occupa il posto 1°, il 2° vale ed occupa il posto $\left(1 \pm \frac{n}{2}\right)^0$. I termini centrali nella 1ª linea tavola, ad es. delle $\mu^{(h)}$, sono adunque: $\mu^{(h)}_{1,1}$ se n è dispari; μ $\mu^{(h)}_{1,1\pm\frac{n}{2}}$ se n è pari. Supponiamo dapprima n dispari, h pari. Al per quanto è stato detto riguardo allo spostamento dei termini trali da una linea a quella che la segue di uno o due posti in tavola di addizione circolare, il termine centrale si sposta da linea alla successiva di $\frac{h}{2}$ posti nel senso contrario a quello tavola, epperò verso destra se si tratta della tavola delle $\mu^{(h)}$ ha il verso $\longleftarrow$, e verso sinistra se si tratta della tavola dell che ha il verso $\longrightarrow$. Adunque, poichè il solo termine centrale 1ª linea è il 1°, vale a dire è $\mu^{(h)}_{1,1}$ o $\nu^{(h)}_{1,1}$, sulla i^a linea sar centrali i termini $\mu^{(h)}_{i,1+(i-1)\frac{h}{2}}$, $\nu^{(h)}_{i,1+(i-1)\frac{h}{2}}$. Esaminando uno ad casi possibili, tenendo conto dei risultati già esposti riguardo al stribuzione dei termini centrali nelle linee delle tavole di addi circolare, *ed escluso il caso* $\mathrm{h} = \mathrm{kn} + (\mathrm{n} - 1)$, (k *positivo inter quale tutti i termini di una linea, a partire dalla 2ª, sono uguali, e q centrali*, si arriva alle conclusioni riassunte nel seguente spec

2° indice delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$ centrali nella linea i^a

		$\mu^{(h)}$	$\nu^{(h)}$
n dispari	h pari;	$1+(i-1)\frac{h}{2}$	$1-(i-1)\frac{h}{2}$
n dispari	h dispari, $n \geqslant h$;	$1-(i-1)\frac{n-h}{2}$	$1+(i-1)\frac{n-h}{2}$
n dispari	h dispari, $n \leqslant h$;	$1+(i-1)\frac{h-n}{2}$	$1-(i-1)\frac{h-n}{2}$
n pari; h pari;		$1+(i-1)\frac{h}{2}$	$1-(i-1)\frac{h}{2}$

2° indice delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$ centrali nella linea $(2i-1)^a$

n pari h dispari	1° termine centrale corrispondente al 1° termine dell'entrata	$1+(i-1)h$	$1-(i-1)h$
n pari h dispari	2° termine centrale corrispondente al termine $\left(1+\frac{n}{2}\right)^0$ dell'entrata	$1+(i-1)h \pm \frac{n}{2}$	$1-(i-1)h \pm \frac{n}{2}$

L'esame di questo specchio conduce a notevoli conclusioni.

Se ad es. si considera il caso n dispari, h pari, si vede che se $i = 2q - 1$, nella $(2q-1)^a$ linee la $\mu^{(h)}$ centrale è

$$\mu^{(h)}_{2q-1,\,1+(2q-1-1)\frac{h}{2}} \quad \text{ovvero} \quad \mu^{(h)}_{2q-1,\,1+(q-1)h}.$$

La $\nu^{(h)}$ centrale è invece $\nu^{(h)}_{2q-1,\,1-(q-1)h}$. Ad analoga conclusione si arriva, tenuto conto che al 2° indice di una $\mu^{(h)}$ si può aggiungere e togliere un multiplo di n, negli altri casi, ed anche nell'ultimo, poichè in questo il termine centrale che sempre ci occorrerà considerare in una linea di posto dispari è quello che corrisponde al 1° termine dell'entrata. Adunque indicando con σ_q e σ'_q il 2° indice della $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$ centrali nella linea $(2q-1)^a$, e corrispondenti al 1° termine, esso pure centrale, dell'entrata, si ha:

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_q = 1 + (q-1)\,h & \text{rapporto alle } \mu^{(h)} \\ \sigma'_q = 1 - (q-1)\,h & \text{rapporto alle } \nu^{(h)} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

2°. Sappiamo che salvo l'ordine di distribuzione dei termini le linee i^e delle tavole delle $\mu^{(h)}$, e $\nu^{(h)}$ aventi la stessa entrata, coincidono. Volendo fissare a qual termine di una corrisponde, come uguale, un termine dell'altra, osserviamo che i termini centrali della linea i^a (quelli corrispondenti al 1° termine dell'entrata, quando sulla linea i^a ci sono due termini centrali) si corrispondono indubbiamente come uguali. Ora se ad es. consideriamo il caso n dispari, h pari, essi occupano nelle due tavole i posti $1 + (i-1)\dfrac{h}{2}$, $1 - (i-1)\dfrac{h}{2}$ della linea i^a, e la loro distanza è di posti $2\,(i-1)\dfrac{h}{2} = (i-1)\,h$.

Adunque se $\mu^{(h)}_{i,j}$ è termine centrale della linea i^a, sarà $\nu^{(h)}_{i,j-(i-1)h}$ pure centrale della linea i^a; ma percorrendo le linee in un dato senso a partire da tali termini centrali si devono incontrare ordinatamente i medesimi termini, epperò la conclusione precedente vale anche se $\mu^{(h)}_{ij}$ non è termine centrale. Abbiamo adunque:

$$\left.\begin{array}{l} \mu^{(h)}_{i,j} = \nu^{(h)}_{i,j-(i-1)h} \\ \nu^{(h)}_{i,j} = \mu^{(h)}_{i,j+(i-1)h} \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Di queste, la 2ª si ottiene dalla 1ª aggiungendo $(i-1)\,h$ ai secondi indici delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$, il che è lecito, poichè ciò equivale a considerare due termini similmente spostati rispetto a due uguali e corrispondentisi secondo la 1ª delle (10).

Le (10) coincidono evidentemente colle (6), poichè nei secondi indici delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$, ad $(i-1)\,h$ si può sostituire il resto r della divisione di $(i-1)\,h$ per n. Esse valgono anche nei rimanenti casi contemplati dallo specchio (8). Infatti se si ha n dispari ed h dispari, oppure n pari ed h pari, si constata che, a meno di un multiplo di n, la distanza dei termini centrali, l'uno della linea i^a nella tavola delle $\mu^{(h)}$ e l'altro della linea i^a della tavola delle $\nu^{(h)}$, è sempre $(i-1)\,h$ posti. Quanto al caso n pari, h dispari, se la linea con derata è la $(2i-1)^a$, la distanza dei termini centrali, corrisponde in ciascuna tavola al 1° dell'entrata, è di $2(i-1)h$ ovvero $[(2i-1)-1$ posti; essa adunque si ottiene ancora togliendo l'unità dal num d'ordine della linea e moltiplicando il risultato per h, appunto co nei casi precedenti. Le (10) valgono adunque in tutti i casi. In e si può sostituire $j \pm u$ ad j, u essendo un intero positivo, eppe *se nelle tavole delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$, aventi ugual entrata, si percorrono le line nello stesso senso, a partire da due termini uguali e corrispondentisi condo le* (10), *si incontrano ordinatamente i medesimi termini.*

Si vede ancora, considerando ad es. la 1ª, che se $i = kn + 1$, i condi indici della $\mu^{(h)}$ del 1° membro e della corrispondente $\nu^{(h)}$ del differiscono, qualunque sia j, di un multiplo di n. Si ha pertanto

$$\mu^{(h)}{}_{kn+1,j} = \nu^{(h)}{}_{kn+1,j}$$

pertanto: *nelle due tavole delle $\mu^{(h)}$ e $\nu^{(h)}$ aventi ugual entrata, le li i cui numeri d'ordine sono della forma* kn + 1 *coincidono, anche av riguardo all'ordine di successione dei termini.*

3°. Un'altra importante conseguenza può dedursi dall'esame de specchio (8). Consideriamo ad es. il caso n dispari, h pari. Se $\mu^{(h)}{}_{i,}$ un termine della linea i^a della tavola delle $\mu^{(h)}$ ed è ad es. $j \leqslant (i-1)\frac{h}{2}$ la sua distanza dalla $\mu^{(h)}$ centrale di essa linea (corrispondente 1° termine dell'entrata) è di $1 + (i-1)\dfrac{h}{2} - j$ posti.

Segue che i due termini

$$\mu^{(h)}{}_{i,1+(i-1)\frac{h}{2}-[1+(i-1)\frac{h}{2}-j]}\,, \qquad \mu^{(h)}{}_{i,1+(i-1)\frac{h}{2}+[1+(i-1)\frac{h}{2}-j]}$$

ovvero $\mu^{(h)}{}_{i,j}$, $\mu^{(h)}{}_{i,2+(i-1)h-j}$, della linea i^a sono uguali, perchè equid stanti da un termine centrale.

Sempre nella stessa ipotesi n dispari, h pari, si trova con an logo ragionamento che sono uguali i termini $\nu^{(h)}{}_{i,j}$, $\nu^{(h)}{}_{2-(i-1)h-j}$ del linea i^a nella tavola delle $\nu^{(h)}$. L'esame degli altri casi conduce ag stessi risultati. [1] La conclusione è che possono stabilirsi le formol

$$\left.\begin{aligned} \mu^{(h)}{}_{i,j} &= \mu^{(h)}{}_{i,2+(i-1)h-j} \\ \nu^{(h)}{}_{i,j} &= \nu^{(h)}{}_{i,2-(i-1)h-j} \end{aligned}\right\} \qquad (1$$

---

[1] Ciò si constata senz'altro nei casi n dispari, h dispari e nel caso n pari, h pari; quanto caso n pari, h dispari, la distanza di $\mu^{(h)}{}_{2i-1,j}$ dal termine centrale $\mu^{(h)}{}_{2i-1,1+(i-1)h}$ della lin $(2i-1)^a$, corrispondente al 1° termine dell'entrata, è, se ad es. $j \leqslant (i-1)\,h$, di $1 + (i-1)h -$ posti. Il termine simmetrico di $\mu^{(h)}{}_{2i-1,j}$ rispetto a $\mu^{(h)}{}_{2i-1,1+(i-1)h}$, è il termine

$$\mu^{(h)}{}_{2i-1,1+(i-1)h+[1+(i-1)h]-j} \qquad \text{ovvero} \qquad \mu^{(h)}{}_{2i-1,2+2(i-1)h-j}$$

od infine $\mu^{(h)}{}_{2i-1,2+[(2i-1)-1]h-j}$. Ora la (1ª) delle (11), se si cambia i in $2i-1$, diventa a punto $\mu^{(h)}{}_{2i-1,j} = \mu^{(h)}{}_{2i-1,2+[(2i-1)-1]h-j}$; essa adunque vale anche nel caso n pari, h pa Analogamente dicasi della 2ª.

... che fanno corrispondere ad ogni termine della i^a linea della tavola delle $\mu^{(h)}$ o $\nu^{(h)}$ un suo uguale sulla stessa linea.[1] In esse evidentemente si può sostituire $j \pm u$ ad j, u essendo un intero positivo, epperò: *se a partire da due termini uguali della linea i^a e corrispondentisi secondo l'una o l'altra delle (11), si percorre la linea in due versi opposti, si incontrano ordinatamente i medesimi termini.*

Osserviamo ancora che si ha dalla 1^a delle (10):

$$\mu^{(h)}_{i,1} = \nu^{(h)}_{i,1-(i-1)h}.$$

Sostituendo a $\nu^{(h)}_{i,1-(i-1)h}$ il termine $\nu^{(h)}_{i,1}$, che gli è uguale per la 2^a delle (11), si ha:

$$\mu^{(h)}_{i,1} = \nu^{(h)}_{i,1}$$

vale a dire: *il 1^o termine di qualsiasi linea è lo stesso nelle due tavole.*

... 4^o. Essendo p e q due interi positivi non nulli, u e v due interi qualsiansi e σ_p, σ_q, σ'_p, σ'_q espressioni date dalle formole

$$\sigma_p = 1 + (p-1)h; \qquad \sigma_q = 1 + (q-1)h$$
$$\sigma'_p = 1 - (p-1)h; \qquad \sigma'_q = 1 - (q-1)h$$

... aventi il significato dichiarato dalla (9), si hanno le relazioni:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_i^n (\mu^{(h)}_{p,i+u}\, \mu^{(h)}_{q,i+v}) = \mu^{(h)}_{p+q-1,\,\sigma_p+v-u} = \mu^{(h)}_{p+q-1,\,\sigma_q+u-v} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in ambedue } p \leqslant q \text{ se } u \neq v \\ \sum\limits_i^n (\nu^{(h)}_{p,i+u}\, \nu^{(h)}_{q,i+v}) = \nu^{(h)}_{p+q-1,\,\sigma'_p+v-u} = \nu^{(h)}_{p+q-1,\,\sigma'_q+u-v} \end{array}\right\} \qquad (12)$$

... ed in particolare, se $u = v = 0$; $p = q$:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_1^n {}_i\, [\mu^{(h)}_{q,i}]^2 = \mu^{(h)}_{2q-1,\,\sigma_q} \\ \sum\limits_1^n {}_i\, [\nu^{(h)}_{q,i}]^2 = \nu^{(h)}_{2q-1,\,\sigma'_q} \end{array}\right\} \qquad (12')$$

vale a dire: *moltiplicando n termini circolarmente consecutivi della p^a linea della tavola delle $\mu^{(h)}$, ($\nu^{(h)}$), aventi i posti $(1+u)^o$, $(2+u)^o$, ... rispettivamente per n consecutivi circolarmente sulla q^a linea, aventi i posti*

---

[1] Queste formole devono far corrispondere ad un termine centrale, il termine stesso. Perchè ... riguarda, p. es. rapporto alla 1^a, occorre che il 2^o indice della $\mu^{(h)}$ del 1^o membro sia uguale, a meno di un multiplo di n, al 2^o della $\mu^{(h)}$ del 2^o membro, qualora, ben inteso, si supponga che $\mu^{(h)}_{ij}$ sia un termine centrale della linea i^a. Ora l'uguaglianza

$$j = 2 + (i-1)h - j \pm kn \qquad \text{ovvero} \qquad 2j = 2 + (i-1)h \pm kn$$

... essendo un intero positivo, è soddisfatta se si attribuiscono ad j i valori stabiliti dallo spec... (2) per il 2^o indice della $\mu^{(h)}_i$ centrale. Ciò può constatarsi senz'altro nei casi n dispari, h pari ... dispari, e nel caso n pari, h pari. Quanto al caso n pari, h dispari, posto $j = 1 + (i-1)h$, ... ha: $2j = 2 + 2(i-1)h = 2 + [(2i-1)-1]h$, e poichè questa volta l'indice della linea ... -1, si vede che il valore di $2j$ è della forma voluta. Infatti tale espressione di $2j$ si ha pure dall'uguaglianza precedente, supponendo $k = 0$, e cambiando i in $2i - 1$.

$(1+v)^0$, $(2+v)^0, \ldots$ *e sommando i prodotti ottenuti, si ha il del termine posto* $\sigma_p + v - u$ *oppure* $\sigma_q + u - v$ $(\sigma'_p + v - u$ $\sigma'_q + u - v)$ *della linea* $(p+q-1)^a$.

In particolare: *la somma dei quadrati dei termini della* q *della tavola delle* $\mu^{(h)}$, $(\nu^{(h)})$, *vale il termine di posto* σ_q, (σ'_q), *d nea* $(2q-1)^a$.

Volendo dare ragione p. es. della 1^a delle (12) osserviam tutto che, posto $u - v = w$, basterà provare la relazione:

$$\sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}{}_{p,i+w}\,\mu^{(h)}{}_{q,i}\right) = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,\sigma_p - w} = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,\sigma_q + w}$$

Infatti, supposta vera una tal relazione, si deduce da ess delle (12) aggiungendo v ai secondi indici delle $\mu^{(h)}$ del 1^0 m Ciò è lecito, perchè se indichiamo ad es. con $a_1, a_2, \ldots a_n$ le con $b_1, b_2, \ldots b_n$ le $\mu^{(h)}{}_q$, il primo membro vale $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots$ aggiungendo un intero v positivo o negativo ai secondi indici le $\mu^{(h)}$, si otterrà, come valore del 1^0 membro, una somma che d dalla precedente soltanto per l'ordine dei termini.

Osserviamo ancora che il doppio aspetto del 2^0 membro de si spiega tenendo conto dei valori di σ_p e σ_q, e della prima de Invero risulta:

$$\mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,\sigma_p - w} = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,1+(p-1)h-w} = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,2+(p+q-2)h-[1+(p}$$
$$= \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\,1+(q-1)h+w} = \mu^{(h)}{}_{p+q-2,\,\sigma_q+w}.$$

Si può anche supporre nella (13) w positivo, perchè se foss gativo, posto $kn + w = w' > 0$, e dimostrata la relazione r all'espressione

$$\sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}{}_{p,i+w'}\,\mu^{(h)}{}_{q,i+kn}\right) \quad \text{ovvero} \quad \sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}{}_{p,i+w'}\,\mu^{(h)}{}_{q,i}\right),$$

si potrà togliere kn dai secondi indici delle $\mu^{(h)}$, ottenend l'espressione

$$\sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}{}_{p,i+w}\,\mu^{(h)}{}_{q,i}\right)$$

uguale alle precedenti.

Ciò posto la (13), nell'ipotesi $0 \leqq w$, può dimostrarsi, ad e conseguenza delle (1), (2), (11). Inverò se nella tavola destrorsa

$$\begin{array}{l}
\xrightarrow{\qquad\qquad h \qquad\qquad} \\
\left|\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
\nu^{(h)}{}_{21} & \ldots & \ldots & \ldots & \nu^{(h)}{}_{2n} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\nu^{(h)}{}_{p,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \nu^{(h)}{}_{p,n} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\nu^{(h)}{}_{q,1} & \ldots & \ldots & \ldots & \nu^{(h)}{}_{q,n} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right.
\end{array}$$

se si sopprimono le prime $(p-1)$ linee, rimane la tavola destrorsa:

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad h \longrightarrow \\ \hline 1^a & \nu^{(h)}_{p,1} \ \dots\dots\dots\dots \ \nu^{(h)}_{p,n} \\ \vdots & \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ (q-p+1)^a & \nu^{(h)}_{q,1} \ \dots\dots\dots\dots \ \nu^{(h)}_{q,n} \\ & \ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

accentrata $\nu^{(h)}_{p,1}, \dots \nu^{(h)}_{p,n}$. Pertanto, ricorrendo alla (1), possiamo esprimere una delle $\nu^{(h)}_q$, appartenente alla linea $(q-p+1)^a$, in funzione di $\nu^{(h)}_{p,1}, \dots \nu^{(h)}_{p,n}$. Basta nelle (1) porre $a_{11} = \nu^{(h)}_{p,1}, \dots, a_{1n} = \nu^{(h)}_{p,n}$. Consideriamo ad es. l'espressione di $\nu^{(h)}_{q,1}$:

$$\nu^{(h)}_{q,1} = \nu^{(h)}_{p,1}\,\mu^{(h)}_{q-p+1,1} + \nu^{(h)}_{p,2}\,\mu^{(h)}_{q-p+1,2} + \dots + \nu^{(h)}_{p,n}\,\mu^{(h)}_{q-p+1,n}$$

la quale, sostituendo alle $\nu^{(h)}$ le $\mu^{(h)}$ che sono loro uguali per la 2^a delle (10), diventa:

$$\mu^{(h)}_{q,1+(q-1)h} = \mu^{(h)}_{p,(p-1)h+1}\,\mu^{(h)}_{q-p+1,1} + \dots + \mu^{(h)}_{p,(p-1)h+n}\,\mu^{(h)}_{q-p+1,n}$$

ovvero, posto $q-p+1=q'$ e quindi $q=p+q'-1$:

$$\mu^{(h)}_{p+q'-1,1+(q-1)h} = \mu^{(h)}_{p,1+(p-1)h}\,\mu^{(h)}_{q',1} + \dots + \mu^{(h)}_{p,n+(p-1)h}\,\mu^{(h)}_{q',n}.$$

Ora rapporto ad $1+(q-1)h$, che è il 2° indice della $\mu^{(h)}$ del 1° membro, si ha, se ad es. $p \leqslant q'$:

$$1+(q-1)h = [1+(q'-1)h] + (p-1)h$$

vale a dire, esso vale il 2° indice della $\mu^{(h)}$ centrale nella $(2q'-1)^a$ linea, aumentato di $(p-1)h$, talchè se si indica $(p-1)h$ con w, si vede che la relazione ottenuta è della forma voluta dalla (13). Se invece è $q' \leqslant p$ allora, per la 1^a delle (11), nel 1° membro dell'ultima relazione ottenuta si può sostituire

$$\mu^{(h)}_{p+q'-1,2+(p+q'-2)h-1-(q-1)h} \quad \text{ovvero} \quad \mu^{(h)}_{p+q'-1,1}$$

a $\mu^{(h)}_{p+q'-1,1+(q-1)h}$. Ma $\mu^{(h)}_{p+q'-1,1}$ ha per secondo indice 1 e si ha:

$$1 = [1+(p-1)h] - (p-1)h$$

vale a dire esso si ottiene diminuendo di $(p-1)h$ il 2° indice della $\mu^{(h)}$ centrale nella $(2p-1)^a$ linea, talchè indicando $(p-1)h$ con w', l'ultima relazione ottenuta può scriversi:

$$\sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}_{q',i}\,\mu^{(h)}_{p,i+w'}\right) = \mu^{(h)}_{p+q'-1,1} = \mu^{(h)}_{p+q'-1,\,\sigma_p-w'}$$

e togliendo w' dai secondi indici delle $\mu^{(h)}$ del 1° membro, il che come sappiamo è lecito, risulta:

$$\sum_1^n{}_i\left(\mu^{(h)}_{q',i-w'}\,\mu^{(h)}_{p,i}\right) = \mu^{(h)}_{p+q'-1,\,\sigma_p-w'}.$$

Infine se k è il minor intero positivo tale che $kn - w' \geqq 0$, si scrivere:

$$\sum_1^n{}_i \left(\mu^{(h)}{}_{q',i-w'+kn}\, \mu^{(h)}{}_{p,i}\right) = \mu^{(h)}{}_{p+q'-1,\,\sigma_p - w' + kn}$$

e, posto $kn - w' = w$:

$$\sum_1^n{}_i \mu^{(h)}{}_{q',i+w}\, \mu^{(h)}{}_{p,i} = \mu^{(h)}{}_{p+q'-1,\sigma_p+w}; \quad q' \leqq p$$

che ha la forma voluta dalla (13), poichè da essa si ottiene (biando p in q' e q in p.

In modo analogo si trattano i casi che si hanno muovendo l'espressione di $\nu^{(h)}{}_{q,2}$, $\nu^{(h)}{}_{q,3}$ ....

Infine la (2ª) delle (12) si dimostra con processo analogo a q seguito per dimostrare la 1ª, considerando la tavola delle $\mu^{(h)}$ an: quella della $\nu^{(h)}$.

L'esame delle (12) mostra subito che: *tenendo fissi* u *e* v *ed degli interi* p *e* q, *al variare dell'altro, i valori del 2° membro termini di una stessa colonna della tavola delle* $\mu^{(h)}$ (1ª formola) *o* $\nu^{(h)}$ (2ª formola).

Ancora è chiaro che, supposto $p = q$, i valori del 2° membro termini della linea $(p + q - 1)^a$ equidistanti da quello che si ha l'ipotesi $u = v = 0$, $p = q$. Ma se $p = q$; $u = v = 0$, dalle formole si passa alle (12'). Adunque: *la somma dei quadrati dei termini linea* q*ª vale in ognuna delle due tavole un termine centrale della* $(2q - 1)^a$.

Ed infatti questo termine ha nel 2° membro delle (12') app per secondi indici σ_q o $\sigma_{q'}$.

Dalle (12) possono aversi altre relazioni pure importanti. S 1° membro della 1ª si sostituisce a $\mu^{(h)}{}_{q,i+v}$ il termine $\nu^{(h)}{}_{q,i+v-(}$ che per la 1ª delle (10) è uguale ad esso, si ottiene:

$$\sum_1^n{}_i \left(\mu^{(h)}{}_{p,i+u}\, \nu^{(h)}{}_{q,i+v-(q-1)h}\right) = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,\sigma_q+v-u}$$

e cambiando v in $v + (q - 1)\,h$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_1^n{}_i \left(\mu^{(h)}{}_{p,i+u}\, \nu^{(h)}{}_{q,i+v}\right) = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,i+(p+q-2)h+v-u} = \mu^{(h)}{}_{p+q-1,i+u-v} \\ \text{ovvero, per la 1ª delle (10):} \qquad\qquad p \leqq q \text{ se } u \neq v \\ \sum_1^n{}_i \left(\mu^{(h)}{}_{p,i+u}\, \nu^{(h)}{}_{q,i+v}\right) = \nu^{(h)}{}_{p+q-1,i+v-u} = \nu^{(h)}{}_{p+q-1,i-(p+q-2)h+u-v} \end{array}\right\}$$

Si ha così una espressione semplice della somma dei prodotti nuti moltiplicando n termini circolarmente consecutivi della p^a della tavola delle $\mu^{(h)}$ per n consecutivi della q^a della tavola del

In particolare se $p=q$; $u=v=0$, risulta:

$$\sum_1^n {}_i\left(\mu^{(h)}_{q,i}\,\nu^{(h)}_{q,i}\right)=\begin{cases}\mu^{(h)}_{2q-1,1}=\mu^{(h)}_{2q-1,1+2(q-1)h}\\ \nu^{(h)}_{2q-1,1}=\nu^{(h)}_{2q-1,1-2(q-1)h}\end{cases} \qquad (14')$$

vale a dire: *moltiplicando il 1°, 2°... termine della* q^a *linea della tavola delle* $\mu^{(h)}$ *rispettivamente per il 1°, 2°,... della* q^a *della tavola della* $\nu^{(h)}$, *la somma dei prodotti ottenuti vale il 1° termine della linea* $(2q-1)^a$ *dell'una o dell'altra tavola.*

Sempre muovendo dalla 1^a delle (12), e sostituendo a $\mu^{(h)}_{p,i+u}$ nel 1° membro il termine $\nu^{(h)}_{p,i+u-(p-1)h}$, che è uguale ad esso per la 1^a delle (10), indi cambiando u in $u+(p-1)h$, si ottiene la relazione:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_i\left(\nu^{(h)}_{p,i+u}\,\mu^{(h)}_{q,i+v}\right)=\mu^{(h)}_{p+q-1,1+(p+q-2)h+u-v}=\mu^{(h)}_{p+q-1,1+v-u}\\ \text{ovvero, per la } (1^a) \text{ delle } (10): \qquad\qquad p\leqq q \text{ se } u\neq v\\ \sum_i\left(\nu^{(h)}_{p,i+u}\,\mu^{(h)}_{q,i+v}\right)=\nu^{(h)}_{p+q-1,1+u-v}=\nu^{(h)}_{p+q-1,1-(p+q-2)h+v-u}\end{array}\right\} \qquad (15)$$

Da esse, se $p=q$, $u=v=0$, si hanno ancora le (14').

(Continua)

N. Traverso.

SU ALCUNI TEOREMI DI LAGUERRE

Sono noti alcuni teoremi di Laguerre che danno una limitazione superiore del numero di radici reali d'una equazione algebrica qualunque, maggiori di un numero reale positivo α, o comprese in un intervallo $(0, \alpha)$.

I più importanti, dal punto di vista pratico, ed ai quali mi riferirò in questa nota, sono i seguenti:

Teorema I (comunemente noto sotto il nome di teorema di Laguerre).

Supposto data un'equazione algebrica, ordinata secondo le potenze decrescenti di x,

$$(1) \qquad f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$$

si consideri la successione seguente (successione di Laguerre):

$$f_0=a_0;\quad f_1=a_0x+a_1;\quad f_2=a_0x^2+a_1x+a_2;\ldots;f_n=f(x).$$

Il numero delle radici reali dell'equazione data, superiori ad un numero positivo α, *non supera il numero delle variazioni che presenta*

per $x = \alpha$ *la successione delle funzioni di Laguerre; ed in ogn*
differenza fra i due numeri è pari.

TEOREMA II. — *Data un'equazione algebrica* (1), *si formi c*
ficienti, aggiungendo ad essi un numero qualunque di zeri, il q
Horner. Si chiami diagonale principale quella avente per term

$$f(x);\quad f'(x);\quad \frac{f''(x)}{\underline{|2}};\quad \frac{f'''(x)}{\underline{|3}};\quad \ldots;\quad \frac{f^{(n)}(x)}{\underline{|n}}.$$

Il numero delle radici reali dell'equazione data, superiori a
supera il numero delle variazioni per $x = \alpha$ *della successione*
considerando un'orizzontale qualunque fino a raggiungere o so
il termine corrispondente della diagonale principale e risalendo p
lelamente a questa diagonale; ed in ogni caso la differenza f
numeri è pari.

Teoremi analoghi si hanno considerando un intervallo (0
Ad es.: analogo al teorema I si ha il seguente:

TEOREMA III. — *Data un'equazione algebrica ordinata secon*
tenze crescenti di x,

$$(2)\qquad f(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n; \qquad f(\alpha) \neq 0,$$

si considerano le funzioni

$$f_0 = a_0;\ f_1 = a_0 + a_1 x; \qquad f_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2; \ldots; f_n =$$

Il numero delle radici reali dell'equazione data, comprese n
vallo $(0, \alpha)$ *per* α *positivo, non supera il numero delle variazioni p*
della successione considerata; ed in ogni caso, la differenza f
numeri è pari.

I teoremi I e III si deducono facilmente l'uno dall'altr
infatti pensare, anzichè all'equazione data, all'equazione a r
ciproche.

Questi tre teoremi come osserva Laguerre, si possono e
anche al caso nel quale si consideri una serie anzichè un p

Sono stati dati, di più, da Laguerre altri teoremi, ripresi
recentemente da Fekete-Pölya (*Rendiconti Circolo Matem. di*
t. XXXIV, 1912, 2° semestre, p. 89) e da Curtiss (*Matemati*
nalen. Bd. 73, 1913, S. 424). Ma di essi mi occuperò prossi
in un'altra nota.

Del teorema I° Laguerre ha dato una dimostrazione (*O*
Laguerre, t. 1° oppure *Nouvelles Annales de Mathèmatiques*, t. X
p. 49-97; *Journal de Liouville*, 1883, p. 99) che poggia su u
ralizzazione della regola di Descartes per una serie second
tenze crescenti o decrescenti di x.

E. Lucas ha dato dello stesso teorema una dimostrazi dimostrazione, più elementare (*Nouvelles Annales* ecc., t. XIX, p. 145), che è affatto simile a quella comunemente esposta nei trattati di *Analisi Algebrica* per la regola di Descartes.

Un'altra dimostrazione dello stesso teorema (sotto la forma del teor. III) è pure data da Hurwitz (*Matematische Annalen*, Bd. 71, 1912 p. 584) facendolo dipendere da un teorema dal quale deduce anche quello di Fourier-Budan.

In questo articolo, con considerazioni elementarissime, dimostrerò i teoremi I e II per un'equazione algebrica qualunque, deducendoli direttamente da quello di Fourier-Budan o, più esattamente, dal teorema analogo che dà una limitazione del numero di radici maggiori di α.

Col nostro metodo apparirà anche dimostrato che i teor. I e II (quest'ultimo qualora non si prolunghi il quadro di Horner, coll'aggiunta di zeri ai coefficienti) danno una limitazione superiore del numero di radici reali maggiori di α, in generale, meno utile di quella data dal teorema di Fourier-Budan. Ciò fu già osservato pel solo teorema I (*Nouvelles Annales* ecc., 1880, p. 307).

Mostrerò di più che il teorema di Laguerre (teorema I) ha, in confronto del teorema di Fourier-Budan, lo svantaggio di non dare il numero esatto di radici reali, nemmeno quando l'equazione data ha tutte le sue radici reali.

Si può osservare dunque che il metodo di dimostrazione da noi scelto, oltre che a confrontare teoremi diversi e stabilirne la diversa importanza, serve anche a porre in luce la dipendenza e la connessione dei teoremi di Laguerre con quello di Fourier-Budan e l'utilità del loro uso contemporaneo. Osservo infatti che i primi si possono applicare mentre si costruisce il quadro di Horner, che può essere usato per la ricerca delle variazioni di $f(\alpha), f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$.

In tal modo, l'uso simultaneo dei teoremi di Laguerre e di Fourier-Budan conduce, per gradi successivi, ad una limitazione superiore del numero cercato.

Laguerre ha poi osservato, su alcuni esempi, che il teorema II, qualora però si aggiunga ai coefficienti un numero conveniente di zeri, può riuscire più utile di quello di Fourier-Budan.

Potrebbe domandarsi se, prolungando convenientemente il quadro di Horner, si possa avere il numero esatto di radici reali maggiori di α o comprese nell'intervallo $(0, \alpha)$. Si può rispondere affermativamente, come mostrerò in altro articolo, approfittando dei risultati ottenuti da Fekete e Pólya nella memoria già citata.

Si potrebbe estendere tutto ciò anche al caso di funzioni reali di variabili reali, regolari (nel senso della teoria delle funzioni analitiche) espresse da una serie.

1. Si premetta un lemma che corrisponde e comprende quello di Segner.

Sia una successione, finita od infinita:

(3) $$f_0;\ f_1;\ f_2;\ \ldots f_{r-1};\ f_r;\ f_{r+1};\ldots f_{s-1};\ f_s;\ f_{s+1};\ \ldots;\ f_n;\ \ldots$$

di funzioni reali di una variabile reale x, definite in tutto l'ir vallo pel quale dovranno poi essere considerate.

Si consideri la nuova successione

(4) $$f_0;\ f_1;\ f_2;\ \ldots f_{r-1};\ \varphi_r;\ \varphi_{r+1};\ \ldots \varphi_{s-1};\ \varphi_s;\ f_{s+1};\ \ldots;\ f_n;\ \ldots$$

ottenuta dalla precedente sostituendo ad un *numero finito* di ter successivi:

(3)' $$f_r;\ f_{r+1};\ \ldots;\ f_{s-1};\ f_s$$

rispettivamente gli altri:

(4)' $$\varphi_r;\ \varphi_{r+1};\ \ldots;\ \varphi_{s-1};\ \varphi_s.$$

Di più siano i termini φ deducibili dagli f per mezzo della guente legge ricorrente di formazione:

(5) $$\begin{cases} \varphi_r = f_r \\ \varphi_{r+i} = u_i\varphi_{r+i-1} + v_i f_{r+i}; \end{cases} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots s$$

dove u_i, v_i sono costanti o funzioni reali di x, positive in tutti i dell'intervallo.

Si dimostra facilmente allora il seguente:

LEMMA. — *Per* x *qualunque che soddisfi alle condizioni già po numero delle variazioni della* (4) *non supera il numero delle v zioni della* (3).

La dimostrazione è semplice ed è quella usata pel lemm Segner.

Si osservi cioè che, essendo

$$v_i f_{r+i} = \varphi_{r+i} - u_i \cdot \varphi_{r+i-1},$$

ed u_i, v_i essenzialmente positive, ogni qualvolta φ_{r+i} è di segn posto del termine precedente, sarà dello stesso segno del ter corrispondente f_{r+i}.

Se allora scrivo della (4)' soltanto il primo termine e quel segno opposto al precedente — i quali bastano per contare le v zioni della (4)' — e questi sono ad es.:

$$\varphi_r;\ \varphi_{r_1};\ \varphi_{r_2};\ \ldots;\ \varphi_{r_m},$$

si otterrà che hanno rispettivamente gli stessi segni dei corris denti

$$f_r;\ f_{r_1};\ f_{r_2};\ \ldots;\ f_{r_m}.$$

Ciò è sufficiente per concludere che la (4)' non ha più varia della (3)'.

Con tale osservazione si giunge subito alla dimostrazione del lemma.

Basterà infatti notare che, se il numero delle variazioni della (4)' è minore di quelle della (3)', il numero delle variazioni della (4) non può superare quelle delle (3). Se poi la (4)' ha tante variazioni quante ne ha la (3)', ricordando che i primi termini di queste due successioni parziali hanno lo stesso segno si osserva che anche gli ultimi termini dovranno avere segno uguale, e che quindi la (4) avrà ugual numero di variazioni della (3). Così il lemma è dimostrato.

Di più; ricordando che, se gli elementi estremi di due successioni hanno i medesimi segni, la differenza tra il numero di variazioni nelle due successioni è sempre un numero pari (CAPELLI, *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 1909, p. 570) si ha:

Se la successione (3) *è infinita o se, nel caso della successione finita, l'ultimo termine non è stato cambiato nel passaggio dalla successione* (3) *alla* (4), *la differenza tra il numero delle variazioni delle due successioni è pari.*

2. Si abbia ora un'equazione algebrica a coefficienti reali, del grado n:

$$(1) \qquad f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Si formi coll'operatore α (numero reale *positivo*) il quadro di Horner

$$\begin{array}{c|l}
\alpha & a_0;\ a_1;\ a_2;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ a_{n-1},\ a_n \\
\hline
 & f_{1,0};\ f_{1,1};\ f_{1,2};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ f_{1,n-1};\ f_{1,n} \\
 & f_{2,0};\ f_{2,1};\ f_{2,2};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ f_{2,n-1} \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & f_{i,0};\ f_{i,1};\ f_{i,2};\ \ldots\ldots;\ f_{i,n-i+1} \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
 & f_{n+1,0}
\end{array}$$

La prima linea

$$f_{1,0};\ f_{1,1};\ f_{1,2};\ \ldots\ f_{1,n}$$

è formata dalle cosidette funzioni di Laguerre, nel punto $x = \alpha$.

Esse sono cioè:

$$\begin{aligned}
f_{1,0} &= a_0 \\
f_{1,1} &= a_0\alpha + a_1 \\
f_{1,2} &= a_0\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
f_{1,n} &= a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n = f(\alpha),
\end{aligned}$$

e rappresentano i coefficienti del quoziente ed il resto della divisione di $f(x)$ per $x - \alpha$.

Chiamerò ancora funzioni di Laguerre, d'ordine i, quelle
hanno percorrendo la i^{esima} orizzontale e risalendo poi lungo
gonale principale del quadro di Horner; cioè:

$$f_{i,0};\ f_{i,1};\ f_{i,2};\ \ldots;\ f_{i,n-i+1};\ f_{i-1,n-i+2};\ f_{i-2,n-i+3};\ \ldots\ f_{1,n}.$$

Si vede facilmente, ricordando come si forma il quadro di H
che la successione di funzioni di Laguerre d'ordine i si ded
quella d'ordine $i-1$ colla legge data pel passaggio dalla (3) a

Pel lemma esposto, si ha allora:

*Per α positivo, il numero delle variazioni delle funzioni di La
d'ordine* i *qualunque non supera quello delle variazioni delle f
d'ordine* i — 1; *e, se ne è inferiore, la differenza è un numero p*

Si osservi di più che *le funzioni di Laguerre di ordine* n +
ferendo per fattori numerici positivi, hanno i segni di

$$f;\ f';\ f'';\ \ldots;\ f^{(n)}.$$

Si supponga dimostrato allora il teorema (analogo o dedo
quello di Fourier-Budan), che dà una limitazione superiore de
dici reali maggiori di α, per α reale, per mezzo del calcolo de
riazioni della successione $f;\ f';\ f'';\ \ldots;\ f^{(n)}$.

Se α è positivo, per quanto si è visto ora, si dedurrà il seg

Teorema. — *Il numero delle radici reali dell'equazione* (1), *m
di un numero reale positivo α, non supera il numero delle var
che appaiono in una successione di Laguerre d'ordine* i *qualunq
ne è inferiore, ne differisce per un numero pari.*

Se $i=1$, questo corrisponde al teorema I comunemente con
come teorema di Laguerre. Per $i>1$ quanto qui si afferma
tenuto nel teorema II (*Journal de Liouville*, 1883, p. 116).

Con questo metodo si è dimostrato di più che *col teorema
cedente (e quindi con quello di Laguerre) si ha, in generale, un
tazione superiore delle radici reali maggiori di α non inferiore e
meno utile di quella ottenuta col teorema di Fourier-Budan.* Pe
particolare del teorema di Laguerre ciò è stato notato da C
(*Nouvelles Annales*, 1880, p. 307).

3. Si consideri ora l'equazione dedotta dalla (1).

$$x^m f(x) = 0$$

con m intero non negativo.

Si osservi che questa equazione ha le stesse radici reali
da zero della (1). Applicando il teorema ora veduto si avrà a
seguente:

Teorema. — *Il numero delle radici reali di* f(x) = 0 *maggior
numero reale α positivo, non supera il numero delle variazioni
paiono in una successione di Laguerre d'ordine qualunque relat*
x^m . f(x), *dove* m *è intero non negativo qualunque e, se ne è in
ne differisce per un numero pari.*

Si osservi poi che le funzioni che si debbono considerare in questo teorema si possono ottenere formando coll'operatore α il quadro di Horner rispetto ai coefficienti di $x^m f(x)$.

Esso potrà evidentemente ottenersi aggiungendo ai coefficienti della (1), m zeri e ricavando le altre orizzontali secondo la regola solita.

Formato in tal modo il quadro e chiamata diagonale principale quella formata dai termini $f; f'; \frac{f''}{\underline{|2}}; \ldots \frac{f^{(n)}}{\underline{|n}}$, per avere le funzioni cercate d'ordine i, si percorra dunque la i^{esima} linea orizzontale fino a raggiungere (per $m = 0$), o sorpassare (per $m > 0$) il termine della diagonale principale e si risalga poi parallelamente a questa diagonale fino alla prima linea orizzontale. È dunque così dimostrato il teorema II.

Si è già osservato in principio che il teorema III si ricava dal teorema I passando dall'equazione data all'equazione a radici reciproche.

Nello stesso modo si otterrebbe un teorema analogo al teor. II, per un intervallo $(0, \alpha)$.

4. Si è visto che il teorema I dà in generale una limitazione superiore meno utile del teorema di Fourier-Budan. Ora mostrerò che di più, sempre in generale, non dà (all'opposto di quello di Fourier-Budan) il numero esatto di radici nemmeno nel caso che l'equazione sia a radici tutte reali.

Anche ciò toglie importanza al teorema I, per quanto possa ritenersi utile a cagione, come osserva lo stesso Laguerre, della grande facilità di costruire le funzioni che occorrono, per via ricorrente.

Ci possiamo persuadere di quanto abbiamo ora detto anche soltanto considerando un'equazione di 2° grado. Se considero infatti, ad esempio, un'equazione di 2° grado a radici reali positive $x_1 \leqslant x_2$ e scelgo un numero reale α tale che

$$x_2 < \alpha < x_1 + x_2,$$

si scorge che nella successione delle funzioni di Laguerre si hanno due variazioni, mentre nessuna radice è maggiore di α.

Osservazione analoga può farsi per un'equazione di grado qualunque.

Sia infatti:

$$f(x) \equiv x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

un'equazione a radici tutte reali

$$x_1, x_2, \ldots x_n.$$

Sappiamo che

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Se x_n è la radice maggiore, ed esse sono tali che possa d
minarsi α positivo per modo che

$$x_n < \alpha < x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

il che avverrà certamente se

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} > 0,$$

e quindi

$$x_n > 0;$$

tra

$$f_0 = 1 > 0$$

ed

$$f_1 = \alpha + a_1 < 0,$$

si ha già una variazione.

Dunque nella successione di Laguerre si ha almeno una v
zione, mentre nessuna radice è maggiore di α.

5. Da quanto abbiamo detto appare la maggior utilità del
rema di Fourier-Budan rispetto a quello di Laguerre.

Se però si osserva che per l'esame delle variazioni nella su
sione $f(\alpha)$; $f'(\alpha)$; $f''(\alpha)$; ...; $f^{(n)}(\alpha)$ può usarsi il procedimento di H
e che le successioni delle funzioni di Laguerre d'ordine mino
uguale ad n, si vengono allora successivamente costruendo
nessun calcolo supplementare, si vedrà che sarà utile applicar
mano, per le successioni del 1°, 2°, 3° ecc. ordine, i teoremi cit
Laguerre.

Essi, in molti casi daranno la limitazione richiesta, dispen
dal proseguire nella costruzione del quadro di Horner.

In ogni caso si giunge in tal modo, per gradi successiv
limitazione superiore del numero di radici reali maggiori di α

Tenendosi sempre sul terreno delle applicazioni pratiche e
quindi pensare ad altri teoremi di Laguerre che danno altre
tazioni od il numero esatto delle radici reali — ad es.: quello
sviluppo di $\dfrac{f(x)}{(x-\alpha)^p}$ o di $e^x \cdot f(x)$ — la utilità del teorema II a
maggiore se si osserva con Laguerre che esso, prolungando c
niente il quadro, può dare una limitazione superiore più ba
quella offerta dal teorema di Fourier-Budan.

Dei diversi esempi portati da Laguerre ne ricorderò qui un
tanto (*Journal de Liouville*, 1883, p. 117).

Sia

$$x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 15x + 9 = 0.$$

Applicando il teorema di Laguerre (I) o quello di Fourier-
si ha una stessa limitazione superiore di quattro radici reali
giori di 1.

Coll'uso del teorema II, e coll'aggiunta di un solo zero ai coefficienti dell'equazione, si scorge invece che non esiste nessuna radice maggiore di 1.

L'utilità di questo teorema apparirà maggiore ancora, se si dimostra, come mi propongo di fare prossimamente, che esso, aggiungendo opportunamente gli zeri, dà il numero esatto di radici maggiori di α.

Egidio Gennari.

SULLE FORMOLE DI MOLTIPLICAZIONE DELLE FUNZIONI CIRCOLARI

e teorema di reciprocità pei residui quadratici

In questa nota stabilisco le formole di moltiplicazione dell'argomento per le funzioni circolari ed iperboliche e poi, nel n. 2 della medesima, me ne servo per dedurre una dimostrazione del teorema di reciprocità per i residui quadratici.

Il metodo che seguirò, molto semplice, ha una certa importanza, in quanto si applica anche per dedurre, mediante le formole di moltiplicazione complessa dell'argomento delle funzioni ellittiche $p^{(u)}$ di Weierstrass lemniscatiche ed equianarmoniche, i teoremi di reciprocità per i resti biquadratici e cubici nel campo intero (complesso) di Gauss. (¹)

1. Dalla formola di Moivre:

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^m = \cos mx + i \operatorname{sen} mx$$

mediante lo sviluppo della potenza del binomio, si ottiene

$$\cos mx = \cos^m x - \binom{m}{2} \cos^{m-2} x \, . \operatorname{sen}^2 x + \binom{m}{4} \cos^{m-4} x \, . \operatorname{sen}^4 x + \ldots \quad (1)$$

$$\operatorname{sen} mx = m \cos^{m-1} x \, . \operatorname{sen} x - \binom{m}{3} \cos^{m-3} x \, . \operatorname{sen}^3 x + $$
$$+ \binom{m}{5} \cos^{m-5} x \, . \operatorname{sen}^5 x + \ldots \quad (2)$$

La (2) si scriva

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = m \cos^{m-1} x - \binom{m}{3} \cos^{m-3} x \, . \operatorname{sen}^2 + \binom{m}{5} \cos^{m-5} x \, . \operatorname{sen}^4 x + \ldots$$

dalla quale, ove si pensi di sostituire $1 - \cos^2 x$ al posto di $\operatorname{sen}^2 x$, risulta essere $\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}$ un polinomio in $\cos x$, di grado $m-1$, conte-

(¹) V. mia *Tesi di laurea* (Pisa, 11 luglio 1914), e come mostrerò prossimamente in una mia memoria sul problema per l'equisezione della lemniscata e della curva di Kiepert.

nente le successive potenze di $\cos x$ con esponenti che sono nu
di parità opposta a quella di m.

Indicando con $a_0, a_1, \ldots,$ i coefficienti di tale polinomio, por

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = a_0 \cos^{m-1} x + a_1 \cos^{m-3} x + a_2 \cos^{m-5} x + \ldots$$
$$\ldots + a_r \cos^{m-2r-1} x + \ldots$$

in cui evidentemente

$$a_0 = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots = 2^{m-1}.$$

Calcoliamo gli altri coefficienti.

All'uopo, la (3) si scriva brevemente così:

$$\operatorname{sen} mx = \Sigma_r\, a_r \cos^{m-2r-1} x \,.\, \operatorname{sen} x,$$

ove la somma è estesa a tutti gli interi r che verificano la
zione $r \leqslant \dfrac{m-1}{2}$, e si prendano, come è lecito, dei due meml
derivate rispetto ad x, si avrà

$$m \cos mx = \Sigma_r\, a_r \{(m-2r) \cos^{m-2r} x - (m-2r-1) \cos^{m-2r-2}$$

Derivando di nuovo

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = \Sigma_r \frac{a_r}{m^2} \{(m-2r)^2 \cos^{m-2r-1} x -$$
$$-(m-2r-1)(m-2r-2) \cos^{m-}$$

Confrontando quest'ultima colla (3), e scrivendo che i coeffi
di $\cos^{m-2r-1} x$ sono uguali, si ottiene

$$a_r = a_r \frac{(m-2r)^2}{m^2} - a_{r-1} \frac{(m-2r+1)(m-2r)}{m^2},$$

da cui

$$a_r = \frac{(m-2r+1)(m-2r)}{4r(r-m)} a_{r-1}.$$

Cambiando in questa successivamente r, in $r-1$, $r-2, \ldots$
ottiene:

$$a_{r-1} = \frac{(m-2r+3)(m-2r+2)}{4(r-1)(r-m-1)} a_{r-2}$$

. . . .

$$a_2 = \frac{(m-3)\ (m-4)}{4\,.\,2\,.\,(2-m)} a_1$$

$$a_1 = \frac{(m-1)\ (m-2)}{4\,.\,1\,.\,(1-m)} a_0.$$

Moltiplicando membro a membro

$$a_r = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\ldots(m-2r+1)(m-2r}{4^r\,.\,r!\,(1-m)(2-m)\ldots(r-m)}$$

e semplificando questa, col dividere numeratore e denominatore per

$$(m-1)(m-2)\dots(m-r),$$

e ricordando che $a_0 = 2^{m-1}$, si ha

$$a_r = (-1)^r \, 2^{m-2r-1} \frac{(m-r-1)(m-r-2)\dots(m-2r+1)(m-2r)}{r!};$$

per cui si ottiene la formola

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = (2\cos x)^{m-1} - \binom{m-2}{1}(2\cos x)^{m-3} + \binom{m-3}{2}(2\cos x)^{m-5} + \dots$$
$$\dots + (-1)^r \binom{m-r-1}{r}(2\cos x)^{m-2r-1} + \dots \qquad (4)$$

Procedendo in modo analogo dalla (1) si ottiene:

$$2\cos mx = (2\cos x)^m - \frac{m}{1}(2\cos x)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2!}(2\cos x)^{m-4} + \dots$$
$$\dots (-1)^r \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\dots(m-2r+1)}{r!}(2\cos x)^{m-2r} + \dots \qquad (5)$$

Dalle formole (4) e (5), che si estendono subito al caso di argomenti complessi, si deducono immediatamente le formole analoghe per le funzioni iperboliche; basta ricordare che, per qualunque valore reale o complesso z dell'argomento, si ha

$$\operatorname{sen}h\, z = \frac{1}{i}\operatorname{sen}(iz), \qquad \cos h\, z = \cos(iz)$$

per dedurre le

$$\frac{\operatorname{sen}h\, mz}{\operatorname{sen}h\, z} = (2\cos h\, z)^{m-1} - \binom{m-2}{1}(2\cos h\, z)^{m-3} +$$
$$+ \binom{m-3}{2}(2\cos h\, z)^{m-5} + \dots + (-1)^r \binom{m-r-1}{r}(2\cos h\, z)^{m-2r-1} + \dots;$$

$$2\cos h\, mz = (2\cos h\, z)^m - \frac{m}{1}(2\cos h\, z)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}(2\cos h\, z)^{m-4} + \dots$$
$$\dots + (-1)^r \frac{m(m-r-1)(m-r-2)\dots(m-2r+1)}{r!}(2\cos h\, z)^{m-2r} + \dots$$

Supponiamo ora m dispari, la (4) scritta così:

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = 2^{m-1}(1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{m-1}{2}} - 2^{m-3}\binom{m-2}{1}(1-\operatorname{sen}^2 x)^{\frac{m-3}{2}} + \text{ecc.}$$

ci mostra essere $\dfrac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x}$ un polinomio in $\operatorname{sen} x$ di grado $m-1$, col primo coefficiente $(-1)^{\frac{m-1}{2}} . 2^{m-1}$; questo polinomio si annulla per

$$x = \pm \frac{\pi}{m}, \quad \pm 2\frac{\pi}{m}, \quad \pm 3\frac{\pi}{m}, \ldots \pm \frac{m-1}{2} \cdot \frac{\pi}{m}.$$

Quindi l'equazione, in sen x, di grado $m-1$

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = 0$$

ha le $m-1$ radici distinte

$$\pm \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}, \quad \pm \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{m}, \quad \pm \operatorname{sen} 3\frac{\pi}{m}, \ldots \pm \operatorname{sen}\frac{m-1}{2}\frac{\pi}{m}$$

e si avrà

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = (-1)^{\frac{m-1}{2}} . 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 r\frac{\pi}{m}\right).$$

Osservando che

$$\lim_{x=0} . \frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x=0} . m\left(\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}\right)\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right) = m$$

$$\lim_{x=0} (-1)^{\frac{m-1}{2}} . 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 r\frac{\pi}{m}\right) = 2^{m-1} \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \operatorname{sen}^2 r\frac{\pi}{m} =$$

$$= \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(2 \operatorname{sen} r\frac{\pi}{m}\right)^2,$$

si ha pure

$$m = \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left(2 \operatorname{sen} r\frac{\pi}{m}\right)^2$$

e

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{\operatorname{sen} x} = m \prod_{1}^{\frac{m-1}{2}}{}_r \left\{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 r\frac{\pi}{m}}\right\}.$$

2. Siano adesso p e q due numeri primi, positivi, dispari: di buiamo un sistema completo di resti (mod. p) e (mod. q), con e sione del termine divisibile per p e q, rispettivamente nei due gr

$$\begin{array}{llllll} A) & 1, & 2, & 3, \ldots & \frac{1}{2}(p-1) & \multirow{2}{*}{rispetto al mod. p,} \\ A') & -1, & -2, & -3, \ldots & -\frac{1}{2}(p-1) & \\ B) & 1, & 2, & 3, \ldots & \frac{1}{2}(q-1) & \\ B') & -1, & -2, & -3, \ldots & -\frac{1}{2}(q-1) & \end{array}$$

A) $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(p-1)$ / A') $-1, -2, -3, \ldots -\frac{1}{2}(p-1)$ rispetto al mod. p,

B) $1, 2, 3, \ldots \frac{1}{2}(q-1)$ / B') $-1, -2, -3, \ldots -\frac{1}{2}(q-1)$ rispetto al mod. q,

in modo che i numeri di ciascun secondo gruppo siano i contra quelli del rispettivo primo gruppo.

Indicando con r_1 uno qualunque dei numeri A), i prodotti

$$1 . q, \ 2 . q, \ 3 . q, \ldots \tfrac{1}{2}(p-1) . q$$

...ranno parte congrui a numeri del gruppo A) e parte a numeri ...di A'), mod. p, cioè

$$r_i q \equiv \pm r_h \pmod{p}$$

...quindi, in ogni caso, sarà

$$\operatorname{sen} q r_i \cdot \frac{\pi}{p} = \pm \operatorname{sen} r_h \frac{\pi}{p}$$

... la precedente formola si può scrivere

$$q r_i \equiv r_h \frac{\operatorname{sen} q r_i \dfrac{\pi}{p}}{\operatorname{sen} r_h \dfrac{\pi}{p}} \pmod{p}.$$

...Facendo, in questa, percorrere ad r_i i numeri del gruppo A), mol...tiplicando membro a membro le congruenze che così si ottengono, ...e dividendo, come è lecito, i due membri della congruenza così otte...nuta per $1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots \frac{1}{2}(p-1)$, si ha

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_r \frac{\operatorname{sen} q r \dfrac{\pi}{p}}{\operatorname{sen} r \dfrac{\pi}{p}} \pmod{p}$$

...e, usando il simbolo di Legendre,

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_r \frac{\operatorname{sen} q r \dfrac{\pi}{p}}{\operatorname{sen} r \dfrac{\pi}{p}},$$

...dove, nel Π_r, r percorre i numeri del gruppo A).

Analogamente

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \prod_{1}^{\frac{q-1}{2}}{}_{r'} \frac{\operatorname{sen} p r' \dfrac{\pi}{q}}{\operatorname{sen} r' \dfrac{\pi}{q}},$$

...dove, nel $\Pi_{r'}$, r' percorre i numeri del gruppo B).

...Infine, ricordando la (6), dal confronto dei secondi membri delle ...due ultime formole si ha,

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}} \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = 2^{\frac{1}{2}(p-1)(q-1)} \prod_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_r \prod_{1}^{\frac{q-1}{2}}{}_{r'} \left(\operatorname{sen}^2 r \frac{\pi}{p} - \operatorname{sen}^2 r' \frac{\pi}{q}\right)$$

...da cui

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

...che è la ben nota espressione del teor. di reciprocità pei residui ...quadratici.

A. Cerone.

FORMULE PER IL CALCOLO DI $\sqrt[m]{N}$.

(*Applicazione delle funzioni* U_n, V_n *di* LUCAS)

Nell'*Int. des Math.* (Vol. 10°, anno 1903, p. 275, n. 2677) fu posta la seguente questione, rimasta sino a questo momento s risposta:

" HUTTON, ne' suoi *Tracts on mathematical and philosophical jects*, 1812, pag. 210, dà la formola seguente per il calcolo del va approssimato di $\sqrt[m]{N}$: Se r è il valore approssimato di $\sqrt[m]{N}$ e pone $r^m = A$, si avrà

$$\sqrt[m]{N} = \frac{(m+1)N + (m-1)A}{(m+1)A + (m-1)N} r.$$

Nel caso di $m = 2$

$$\sqrt{N} = \frac{3N + A}{3A + N} r.$$

Applicando successivamente questa formola, e ponendo

$$r = \frac{V_1}{U_1},$$

si ha

$$\sqrt{N} = \frac{V_1 L_1 L_3 L_9 \ldots}{U_1 K_1 K_3 K_9 \ldots} = \frac{V_{3^n}}{U_{3^n}}$$

con le relazioni di ricorrenza

$$L_m = V_m^2 - 3q^m, \qquad V_{3m} = V_m L_m,$$
$$K_m = V_m^2 - q^m, \qquad U_{3m} = U_m K_m,$$

dove

$$V_1^2 - NU_1^2 = 4q.$$

Si può scegliere V_1 e U_1 in modo che $q = \pm 1$.

Le funzioni U_m e V_m sono quelle di LUCAS (*Theor. des noi* pag. 138). Si può ancora scrivere

$$\sqrt{N} = \frac{V_1}{U_1} \prod_{m=0}^{m=\infty} \left(1 - \frac{2q^{3^m}}{K_{3^m}}\right)$$

e le espressioni (2) e (4) sono rapidamente convergenti. Des sapere se queste formole sono state date esplicitamente ".

E. B. ESCOTT (*Ann. Arbor*, *Mich*

La risposta è affermativa: Nella mia Nota « Sulle funzioni U_n e V_n di Lucas » (V. *Periodico*, vol. IV della 2^a serie, anno 1902, pag. 321) trovasi già stabilita la formula

$$\sqrt{\varphi^2 + k} = \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{V_{2^n}(2\varphi_1 - k)}{U_{2^n}(2\varphi_1 - k)} \qquad (3)'$$

che corrisponde alla (3). La (3)' — mediante l'altra — facilmente deducibile

$$\frac{V_{2^n}}{U_{2^n}} = \frac{V_1}{U_1} \prod_{i=1}^{i=n} \left(\frac{V^2_{2^{i-1}} - 3q^{2^{i-1}}}{U^2_{2^{i-1}} - q^{2^{i-1}}}\right) = \frac{V_1}{U_1} \prod_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{2q^{2^{i-1}}}{V^2_{2^{i-1}} - q^{2^{i-1}}}\right),$$

si trasforma nella (4).

Tutto questo è stabilito indipendentemente dalla formola approssimata di Hutton.

Qui dò una generalizzazione delle (3) e (4) relative alla $\sqrt[m]{N}$ ed a tal uopo mi servo della formola approssimata di Halley:

$$\sqrt[m]{\varphi^m \pm k} \equiv \frac{m-2}{m-1}\varphi + \sqrt{\frac{\varphi^2}{(m-1)^2} \pm \frac{2k}{m(m-1)\varphi^{m-2}}},$$

che si può scrivere

$$\sqrt[m]{\varphi^m \pm k} \equiv \frac{m-2}{m-1}\varphi + \frac{1}{m(m-1)\varphi^{m-1}}\sqrt{(m\varphi^m)^2 \pm 2km(m-1)\varphi^m},$$

e questa, tenendo presente quanto si è detto innanzi, dà luogo all'altra

$$\sqrt[m]{\varphi^m \pm k} \equiv \frac{m-2}{m-1}\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2m(m-1)\varphi^{m-1}} \lim_{n=\infty} \frac{V_{2^n}[2m\varphi_1^m \mp 2km(m-1)\varphi^m]}{U_{2^n}[2m\varphi_1^m \mp 2km(m-1)\varphi^{m-1}]} \qquad (3)''$$

ed anche all'altra

$$\sqrt[m]{\varphi^m \pm k} \equiv \frac{m-2}{m-1}\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2m(m-1)\varphi^{m-1}} \frac{V_1}{U_1} \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{\mp 2[2km(m-1)\varphi^m]^{2^{i-1}}}{V^2_{2^{i-1}} - [2km(m-1)\varphi^m]^{2^{i-1}}}\right). \qquad (4)''$$

Nè queste formole generali sono le uniche, che anzi, seguendo la via qui indicata, si scorge facilmente come possano costruirsene infinite, secondo la forma che si darà all'indice (arbitrario, pur tero) delle funzioni di Lucas.

Si osservi, per esempio, la forma speciale che prende la (caso che l'indice sia 2^n allora si ha

$$\frac{V_{2^n}}{U_{2^n}} = \frac{V_{2^n}}{V_1 V_2 V_{2^2} \ldots V_{2^{n-1}}}.$$

NOTA. — La formola di HALLEY è riportata nell'*Algebra di* (ediz. di Lione del 1774, vol. 1°, pag. 299, oppure ediz. di del 1828, pag. 122-123, vol. 1°), si trova anche dimostrata nel *lisi Algebrica* del FLAUTI, ediz. del 1830, vol. 1°, pag. 176-177

G. CANDID

STUDIO SULLE RISULTANTI

I.

1. Si indichi con (f, φ) la risultante delle due funzioni inter variabile x:

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n \end{cases} \qquad ($$

formata rispetto x (potendo le a e b contenere anche altre bili). Siano inoltre:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \qquad \text{e} \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

rispettivamente le radici di $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$; cosicchè si identicamente in x:

$$\begin{cases} f(x) = a_m(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m) \\ \varphi(x) = b_n(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_n). \end{cases}$$

Posto:

$$y = a_0 + a_1\beta_i + a_2\beta_i^2 + \ldots + a_m\beta_i^m = f(\beta_i) \tag{1}$$

si elimini β_i, col noto procedimento di *Sylvester*, fra le due zioni:

$$\begin{cases} (a_0 - y) + a_1\beta_i + a_2\beta_i^2 + \ldots + a_m\beta_i^m = 0 \\ b_0 + b_1\beta_i + b_2\beta_i^2 + \ldots + b_n\beta_i^n = 0; \end{cases}$$

Si avrà:

$$(2)\qquad \Theta(y)=\begin{vmatrix} a_0-y & a_1 & a_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & a_0-y & a_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0\ldots a_0-y & a_1\ldots & a_m \\ b_0 & b_1 & b_2\ldots\; b_n & 0\ldots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1\ldots\; b_{n-1} & b_n\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & b_n \end{vmatrix}=$$

$$=R+R_1y+\ldots+R_ny^n=0$$

cioè una equazione del grado n in y dove, in particolare:

$$R=(f,\varphi),\ldots,R_n=(-1)^nb_n{}^m.$$

Poichè la (2) è soddisfatta, come appare dalla (1), dai valori:

$$f(\beta_1),f(\beta_2),\ldots,f(\beta_n)$$

di y, che sono, in generale, in numero di n, deve essere, identicamente in y:

$$R+R_1y+R_2y^2+\ldots+R_ny^n=(-1)^nb_n{}^m\,[y-f(\beta_1)]\,[y-f(\beta_2)]\ldots[y-f(\beta_n)]$$

donde segue:

$$(3)\qquad R=(f,\varphi)=b_n{}^m f(\beta_1)\,f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)$$

$$(4)\qquad R_1=-\,b_n{}^mf(\beta_1)\,f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)\left\{\frac{1}{f(\beta_1)}+\frac{1}{f(\beta_2)}+\ldots+\frac{1}{f(\beta_n)}\right\}=$$

$$=-\,(f,\varphi)\left\{\frac{1}{f(\beta_1)}+\frac{1}{f(\beta_2)}+\ldots+\frac{1}{f(\beta_n)}\right\}$$

e così via.

La (3) e la sua analoga ci dicono che:

$$(f,\varphi)=0$$

è *condizione necessaria e sufficiente perchè le due equazioni* $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ *abbiano una radice comune finita od infinita.* (Il caso della radice comune infinita (¹) essendo caratterizzata da $a_n=b_n=0$).

Di più dalla (3) si deduce:

1°) (5) $$(f,\varphi)=(-1)^{mn}\,(\varphi,f)\ (^2)$$

2°) Se:

$$f(x)=f_1(x)f_2\,f(x)$$

(¹) CAPELLI, *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 4ª ed. Napoli (1909). Nota 1ª, p. 808.

(²) Si ha:

$$(f,\varphi)=b_n{}^m f(\beta_1)\,f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)=b_n{}^m a_m{}^n\prod_{h=1}^{h=m}\prod_{i=1}^{i=n}(\beta_i-\alpha_h)=$$

$$=(-1)^{mn}\,\varphi(\alpha_1)\,\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m)=(-1)^{mn}\,(\varphi,f).$$

si ha [1]:

$$(f, \varphi) = (f_1 f_2, \varphi) = (f_1, \varphi)(f_2, \varphi)$$

3°) Posto:

$$f(x) + \psi(x) . \varphi(x)$$

in luogo di $f(x)$, si ha:

$$(f + \psi\varphi, \varphi) = (f, \varphi)$$

se il grado μ di $\psi\varphi$ non supera il grado m di f e:

$$(f + \psi\varphi) = b_n^{\mu - m}(f, \varphi)$$

se μ supera m [2].

2. Se

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_{m+n-1} x^{m+n-1}$$

è una funzione intera qualunque di x del grado $m + n - 1$, identicamente:

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots & & \ldots\ldots & 0 & x^{n-1}.f(x) \\ 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots & & \ldots\ldots & 0 & x^{n-2}.f(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_0 & a_1 \ldots & a_m & f(x) \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots & b_n & 0 \ldots & 0 & x^{m-1}.\varphi(x) \\ 0 & b_0 & b_1 \ldots & b_{n-1} & b_n \ldots & 0 & x^{m-2}.\varphi(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & & \ldots\ldots & b_n & \varphi(x) \\ p_0 & p_1 & p_2 \ldots\ldots & & \ldots\ldots & p_{m+n-1} & P(x) \end{vmatrix} = 0$$

che, indicando con $A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0$; $B_{m-1}, B_{m-2}, \ldots, B_0$, gli ag dei successivi elementi dell'ultima colonna fino all'$m + n^{mo}$, osser che l'aggiunto dell'ultimo elemento dell'ultima colonna è pr mente (f, φ) e ponendo, per brevità:

$$(7) \qquad \begin{aligned} F_1(x) &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1}; \\ \Phi_1(x) &= B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{m-1} x^{m-1} \end{aligned}$$

può scriversi:

$$(8) \qquad (f, \varphi) P(x) = F_1(x) f(x) + \Phi_1(x) \varphi(x).$$

---

[1] Se, infatti, m_1 ed m_2 sono rispettivamente i gradi di f_1 ed f_2, la (4) ci dà:

$$(f_1 f_2, \varphi) = b_n^{m_1 + m_2} f_1(\beta_1) f_2(\beta_1) f_1(\beta_2) f_2(\beta_2) \ldots f_1(\beta_n) f_2(\beta_n) =$$
$$= \beta_n^{m_1} f_1(\beta_1) f_1(\beta_2) \ldots f_1(\beta_n) b_n^{m_2} f_2(\beta_1) f_2(\beta_2) \ldots f_2(\beta_n) = (f_1, \varphi)\ (f \ldots$$

[2] Se m è il grado di f, e quindi anche il grado di $f + \psi\varphi$:

$$(f + \psi\varphi, \varphi) = b_n^m [f(\beta_1) + \psi(\beta_1)\varphi(\beta_1)][f(\beta_2) + \psi(\beta_2)\varphi(\beta_2)] \ldots [f(\beta_n) + \psi(\beta \ldots$$

ossia, appunto perchè

$$\varphi(\beta_1) = \varphi(\beta_2) = \ldots = \varphi(\beta_n) = 0$$
$$(f + \psi\varphi, \varphi) = b_n^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n) = (f, \varphi).$$

Se, invece, il grado μ di $\psi(x)\varphi(x)$ è superiore ad m, la (7) ci dà

$$(f + \psi\varphi, \varphi) = b_n^{\mu} [f(\beta_1) + \psi(\beta_1)\varphi(\beta_1)] \ldots [f(\beta_n) + \psi(\beta_n)\varphi(\beta_n)] = b_n^{\mu - m} \ldots$$

Ove i coefficienti a, b, p delle funzioni f, φ, P siano affatto arbitrari, come supponiamo, la funzione intera $R = (f, \varphi)$ non può essere, come sappiamo dal suo significato di risultante, nulla. Dalla (8) si ha intanto, per:

$$x = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

$$(9) \qquad F_1(\beta_i) = (f, \varphi) \frac{P(\beta_i)}{f(\beta_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Dippiù, per la formola d'interpolazione di Lagrange, poichè $F_1(x)$ è di grado $n-1$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sono distinte fra loro, si ha:

$$F_1(x) = \sum_1^n{}_i\, F_1(\beta_i) \frac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_{i-1})(x-\beta_{i+1})\ldots(x-\beta_n)}{(\beta_i-\beta_1)(\beta_i-\beta_2)\ldots(\beta_i-\beta_{i-1})(\beta_i-\beta_{i+1})\ldots(\beta_i-\beta_n)} =$$

$$= \sum_1^n{}_i \frac{F_1(\beta_i)\,\varphi(x)}{\varphi'(\beta_i)(x-\beta_i)}$$

e anche:

$$(10) \qquad F_1(x) = (f, \varphi) \sum_1^n{}_i \frac{P(\beta_i)}{f(\beta_i)\,\varphi'(\beta_i)} \frac{\varphi(x)}{x-\beta_i}$$

e analogamente:

$$(11) \qquad \Phi_1(x) = (f, \varphi) \sum_1^n{}_i \frac{P(\gamma_i)}{\varphi(\alpha_i)\,f'(\alpha_i)} \frac{f(x)}{x-\alpha_i}.$$

Per la regola di Ruffini, poi, posto:

$$P_1(x) = \frac{P(x)}{f(x)\,\varphi'(x)} \qquad \Pi_1(x) = \frac{P(x)}{\varphi(x)\,f'(x)}$$

si ha:

$$(12) \qquad \begin{cases} A_{n-1} = (f, \varphi)\, b_n \sum_1^n{}_i P_1(\beta_i) \\ A_{n-2} = (f, \varphi) \sum_1^n{}_i P_1(\beta_i)(b_n\beta_i + b_{n-1}) \\ A_{n-3} = (f, \varphi) \sum_1^n{}_i P_1(\beta_i)(b_n\beta_i^2 + b_{n-1}\beta_i + b_{n-2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_0 = -(f, \varphi) \sum_1^n{}_i b_0 \dfrac{P_1(\beta_i)}{\beta_i} \\ B_{m-1} = (f, \varphi)\, a_m \sum_1^m{}_i \Pi_1(\gamma_i) \\ B_{m-2} = (f, \varphi) \sum_1^m{}_i \Pi_1(\alpha_i)(a_m\alpha_i + a_{m-1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0 = -(f, \varphi) \sum_1^m{}_i \dfrac{\Pi_1(\gamma_i)}{\alpha_i} \end{cases}$$

3. Posto in particolare:

$$P(x) = 1$$

avremo, in luogo della (8), l'identità:

$$(f, \varphi) = f_1(x) f(x) + \varphi_1(x) \varphi(x) \tag{13}$$

dove:

$$f_1(x) = a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_{n-1} x^{n-1}; \quad \varphi_1(x) = b'_0 + b'_1 x + \ldots + b'_{m-1} x \tag{14}$$

le a' e b' essendo certe funzioni intere delle a e b che si rica ranno dalla matrice del determinante R.

Sostituite nella (13), in luogo della x, le radici: $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ avrà:

$$R = (f, \varphi) = f_1(\beta_i) f(\beta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

ma le: $f(\beta_1), f(\beta_2), \ldots, f(\beta_n)$ sono le radici della equazione (2): dun le quantità:

$$\frac{R}{f(\beta_1)}, \frac{R}{f(\beta_2)}, \ldots, \frac{R}{f(\beta_n)}$$

sono, come si riconosce con una trasformazione a radici recipr congiunta ad una a radici multiple, le radici dell'equazione:

$$y^n + R_1 y^{n-1} + R_2 R y^{n-2} + \ldots + R_{n-1} R^{n-2} y + (-1)^n b_n{}^m R^{n-1} = \tag{16}$$

Le (15) ci dicono che $f_1(\beta_1), f_1(\beta_2), \ldots, f_1(\beta_n)$ *sono le radici dell'e zione* (16).

Ora, se indichiamo con $\Theta'(y)$ la funzione del grado n in y nuta mutando $a_0, a_1, \ldots, a_m$ in $a'_0, \ldots, a'_{m-1}, 0$, allo stesso modo si è stabilita la (2), si vedrebbe che $f_1(\beta_1), f_1(\beta_2), \ldots, f_1(\beta_n)$, gen mente tutte distinte come appare dalle (15), son le radici di: $\Theta'(y)$ sicchè dovrà essere identicamente rispetto ad y:

$$\Theta'(y) = (-1)^n b_n{}^{n-1} \{ y^n + R_1 y^{n-1} + R_2 R y^{n-2} + \ldots$$
$$\ldots + R_{n-1} R^{n-2} y + (-1)^n b_n{}^m R^{n-1}$$

In particolare, eguagliando i termini indipendenti da y, dalla tità precedente si ha:

$$(f_1, \varphi) = b_n{}^{m+n-1} \{(f, \varphi)\}^{n-1} \tag{17}$$

ed anche [1]:

$$(f, \varphi_1) = (-1)^{m^2 n} a_m{}^{m+n-1} \{(f, \varphi)\}^{m-1} \tag{18}$$

---

[1] Scambiando le parti di f e φ ed osservando che la (13) può anche scriversi:

$$(f, \varphi) = \{(-1)^{mn} \varphi_1(x)\} \varphi(x) + \{-1)^{mn} f_1(x)\} f(x) = \overline{\varphi_1}(x) \varphi(x) + \overline{f_1}(x) f($$

si deduce che:

$$(\overline{\varphi_1}, f) = a^{m+n-1} \{(\varphi, f)\}^{m-1}, \qquad (\varphi_1, f) = (-1)^{m^2 n} a_m{}^{m+n-1} \{(\varphi, f)\}^{m-1}$$

e quindi anche la (18).

4. Indichiamo con:

$$\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_{n-1} \text{ e } \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_{m-1}$$

le radici di f_1 e φ_1 rispettivamente; cosicchè:

$$(f_1, \varphi_1) = b'^{\,n-1}_{m-1} f_1(\beta'_1) f_1(\beta'_2) \ldots f_1(\beta'_{m-1}); \quad (f, \varphi_1) = b'^{\,m}_{m-1} f(\beta'_1) f(\beta'_2) \ldots f(\beta'_{m-1}).$$

Ammetteremo come dimostrato che $f_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ non hanno in generale radici infinite, cioè che a'_{n-1} e b'_{m-1} sono in generale diversi da zero.

Poichè sostituendo in (13), in luogo di x, la $\beta'_i (i = 1, 2, \ldots, m-1)$ si ha:

$$(f, \varphi) = f_1(\beta'_i) f(\beta'_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

si deduce:

$$(f_1, \varphi_1)(f, \varphi_1) = b'^{\,m+n-1}_{m-1} \{(f, \varphi)\}^{m-1}$$

donde, per la (18):

$$(19) \qquad (-1)^{m^2 n} (f_1, \varphi_1)\, a_m^{m+n-1} = b'^{\,m+n-1}_{m-1};$$

analogamente [1]:

$$(20) \qquad (\varphi_1, f_1)\, b^{m+n-1} = a'^{\,m+n-1}_{n-1}.$$

5. Da (10) ed (11), poichè ora è:

$$P(x) = 1,$$

segue:

$$(21) \qquad f_1(x) = (f, \varphi) \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{f(\beta_i)\, \varphi'(\beta_i)} \frac{\varphi(x)}{x - \beta_i}$$

$$(22) \qquad \varphi_1(x) = (f, \varphi) \sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{\varphi(\alpha_i)\, f'(\alpha_i)} \frac{f(x)}{x - \alpha_i}.$$

Supponiamo che una, α_1, delle radici di $f(x)$ coincida con una, β_1, delle radici di $\varphi(x)$; dippiù le radici residue di $f(x)$ e di $\varphi(x)$ siano diverse fra loro.

Si ha:

$$(f, \varphi) = b_n^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_n); \qquad (\varphi, f) = a_m^n \varphi(\alpha_1) \varphi(\alpha_2) \ldots \varphi(\alpha_m)$$

quindi per l'ipotesi fatta:

$$\frac{(f, \varphi)}{f(\beta_i)} = b_n^m f(\beta_1) f(\beta_2) \ldots f(\beta_{i-1}) f(\beta_{i+1}) \ldots f(\beta_n) \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

---

[1] Dalle aguaglianze:

$$\begin{cases} (\varphi_1, f_1) = a'^{\,m-1}_{n-1} \varphi_1(\alpha'_1) \varphi_1(\alpha'_2) \ldots \varphi_1(\alpha'_{n-1}) \\ (\varphi, f_1) = a'^{\,n}_{n-1} \varphi(\alpha'_1) \varphi(\alpha'_2) \ldots \varphi(\alpha'_{n-1}) \\ (f, \varphi) = \varphi_1(\alpha'_i) \varphi(\alpha'_i) \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

poichè per la (17):

$$(\varphi, f_1) = (-1)^{n(n-1)} (f_1, \varphi) = (f_1, \varphi) = b_n^{m+n-1} (f, \varphi)^{n-1}.$$

sicchè, ponendo:

(23) $$A = (-1)^{mn} a_m{}^n \frac{\varphi(\alpha_2)\ldots\varphi(\alpha_m)}{f'(\alpha_1)}; \qquad B = b_n{}^m \frac{f(\beta_2)\ldots f(\beta_n)}{\varphi'(\beta_1)}$$

da (21) e (22) si ha:

(24) $$(x-\alpha_1)\varphi_1(x) = Af(x)$$

(25) $$(x-\beta_1)f_1(x) = B\varphi(x) \qquad (\alpha_1 =$$

Da queste appare che, nelle ipotesi fatte in principio di que Art., *le radici di* $f_1(x)=0$ *altro non sono che le rimanenti ra* $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ *di* $\varphi(x)=0$ *e le radici di* $\varphi_1(x)=0$ *altro non sono ch rimanenti radici* $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ di $f(x)=0$.

6. Le identità (19) e (20) ci dicono che:

1°) a'_{n-1} *è divisibile per* b_n *e* b'_{m-1} *è divisibile per* a_m.

2°) (f_1, φ_1) *è la potenza* $m+n-1^{ma}$ *di una certa funzione in delle* a *e* b.

Si ha infatti dalla (6), per $P(x)=1$:

(26) $$(-1)^{n+1} a'_{n-1} = b_n\Delta, \qquad (-1)^n b'_{m-1} = a_m\Delta$$

avendo posto:

(27) $$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ a_0 & a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & a_0 & a_1 \ldots & a_m \\ b_1 & b_2 \ldots & b_n & 0 \ldots & 0 \\ b_0 & b_1 \ldots & b_{n-1} & b_n \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & b_0 \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

dippiù, poichè:

$$(\varphi_1, f_1) = (-1)^{(m-1)(n-1)}(f_1, \varphi_1)$$

dalle (26) paragonate alla (20) si ha:

(28) $$(f_1, \varphi_1) = \Delta^{m+n-1}$$

7. Se nella (21) eguagliamo i coefficienti in x^{n-1} di ambo i me e nella (22) operiamo analogamente pei coefficienti in x^{m-1}, otteni le formole:

$$a'_{n-1} = (f, \varphi)\sum_1^n{}_i \frac{b_n}{f(\beta_i)\varphi'(\beta_i)}, \qquad b'_{m-1} = (f, \varphi)\sum_1^m{}_i \frac{a_m}{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)}$$

che paragonate alle (26) danno rispettivamente:

$$\Delta = (-1)^{n+1}(f, \varphi)\sum_1^n{}_i \frac{1}{f(\beta_i)\varphi'(\beta_i)}, \quad \Delta = (-1)^n (f, \varphi)\sum_1^m{}_i \frac{1}{\varphi(\alpha_i)f'(\alpha_i)}$$

D'onde l'eguaglianza notevole:

$$\sum_{1}^{n}{}_i \frac{1}{f(\beta_i)\,\varphi'(\beta_i)} + \sum_{1}^{m}{}_i \frac{1}{\varphi(\alpha_i)\,f'(\alpha_i)} = 0. \tag{29}$$

8. Esempio. — Applichiamo le cose dette alle due funzioni intere di secondo grado ($m = n = 2$):

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_2 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \\ \varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2 (x - \beta_1)(x - \beta_2). \end{cases}$$

Per le funzioni:

$$f_1(x) = a'_0 + a'_1 x = a'_1 (x - \alpha'_1), \qquad \varphi_1(x) = b'_0 + b'_1 x = b'_1 (x - \beta'_1)$$

si ha dalle (26):

$$\begin{cases} a'_1 = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} b_2 = (b_1 a_2 - b_2 a_1)\, b_2 \\[2ex] b'_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} a_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, a_2. \end{cases} \tag{30}$$

Si ha inoltre, dalla matrice del determinante (2):

$$\begin{cases} a'_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = b_1^2 a_2 + b_2^2 a_0 - b_0 b_2 a_2 - b_1 b_2 a_1 \\[3ex] b'_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1^2 b_2 + a_2^2 b_0 - a_0 a_2 b_2 - a_1 a_2 b_1. \end{cases} \tag{31}$$

Poichè ora:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad (f_1, \varphi_1) = \begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix}$$

si verifica, per la (28), che:

$$\begin{vmatrix} b_1^2 a_2 + b_2^2 a_0 - b_0 b_2 a_2 - b_1 b_2 a_1 & (b_1 a_2 - b_2 a_1) b_2 \\ a_1^2 b_2 + a_2^2 b_0 - a_0 a_2 b_2 - a_1 a_2 b_1 & (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_1 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^3.$$

II.

9. Se le due equazioni $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ considerate nel prec. Art. hanno in comune due radici (finite od infinite); ossia, che è la stessa cosa, se le due forme corrispondenti:

$$f(x, \xi) = a_0 \xi^2 + a_1 \xi x + a_2 x^2, \qquad \varphi(x, \xi) = b_0 \xi^2 + b_1 \xi x + b_2 x^2$$

sono tali che una di esse è uguale all'altra moltiplicata per un tore costante o, infine, tali che esse abbiano in comune un divis del 2° grado, si avrà, ad es.:

$$a_0 = cb_0 \qquad a_1 = cb_1 \qquad a_2 = cb_2 .$$

Ora ci domandiamo se sussista una proprietà analoga nel che le due forme $f(x, \xi)$ e $\varphi(x, \xi)$ abbiano un divisore comune d grado (cioè $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$ abbiano due radici comuni: finite infinite).

10. Come sappiamo: $(f, \varphi) = 0$ *è condizione necessaria e suffici affinchè le due forme*:

$$(32) \qquad \begin{cases} \overline{f(x)} = f(x, \xi) = a_0\xi^m + a_1\xi^{m-1}x + a_2\xi^{m-2}x^2 + \ldots + a_m x^m \\ \overline{\varphi(x)} = \varphi(x, \xi) = b_0\xi^n + b_1\xi^{n-1}x + b_2\xi^{n-2}x^2 + \ldots + b_n x^n, \end{cases}$$

abbiano in comune un divisore del 1° grado almeno.

Supponiamo che le due forme $\overline{f(x)}$ e $\overline{\varphi(x)}$ abbiano in comune tanto un divisore di primo grado $p(x)$; cosicchè sia:

$$\overline{f(x)} = \overline{p(x)}\,\overline{F(x)} \qquad \overline{\varphi(x)} = \overline{p(x)}\,\overline{\Phi(x)}.$$

L'identità

$$(33) \qquad (f, \varphi)\,\xi^{m+n-1} = \overline{f_1(x)}\,\overline{f(x)} + \overline{\varphi_1(x)}\,\overline{\varphi(x)}$$

ci dice evidentemente, come del resto già sapevamo, che deve ess $(f, \varphi) = 0$ e ci dà quindi l'altra identità:

$$\overline{f_1(x)}\,\overline{F(x)} = -\,\overline{\varphi_1(x)}\,\overline{\Phi(x)}$$

dalla quale si vede che, se una delle due forme $\overline{\varphi_1(x)}$, $\overline{f_1(x)}$ è ide camente nulla, è tale anche l'altra.

Se poi esse non sono nulle identicamente, è chiaro che, esse $\overline{F(x)}$, per l'ipotesi fatta, prima con $\overline{\varphi_1(x)}$ e il grado di $\overline{F(x)}$ ugua quello di $\overline{\varphi_1(x)}$ come pure il grado di $\overline{\Phi(x)}$ uguale a quello di $\overline{f}$ dovrà $\overline{\Phi(x)}$ coincidere, a meno di un coefficiente costante, con $\overline{f}$ ed $\overline{F(x)}$ con $\overline{\varphi_1(x)}$.

Supponiamo che a_n e b_n siano entrambi diversi da zero, cioè $f(x)$ e $\varphi(x)$ non abbiano radici infinite; potrà allora accadere, al che la radice β_1 comune ad $f(x)$ e $\varphi(x)$ sia radice multipla di un queste funzioni, ad es. di $f(x)$: cosicchè $\varphi'(\beta_1)$ non sia nulla.

Dalla (25) si osserva che la $f_1(x)$ non è nulla identicamente po $b_n \neq 0$ e $\beta_2, \ldots, \beta_n$ non son radici di $f(x) = 0$; non essendo ident mente nulla la $f_1(x)$, non è poi identicamente nulla neanche la come è manifesto dalla identità (13), in cui $(f, \varphi) = 0$.

11. Occupiamoci ora delle $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$ dal punto di vista in riantivo.

Eseguiamo sulle (32) una qualsivoglia sostituzione lineare:

$$(34)\qquad x = g_{11}y + g_{12}\eta \qquad\qquad \xi = g_{21}y + g_{22}\eta$$

così otteniamo:

$$(35)\qquad \begin{cases} \overline{f(x)} \equiv \overline{F(y)} \equiv F(y,\eta) = A_0\eta^m + A_1\eta^{m-1}y + \ldots + A_m y^m \\ \overline{\varphi(x)} \equiv \overline{\Phi(y)} \equiv \Phi(y,\eta) = B_0\eta^n + B_1\eta^{n-1}y + \ldots + B_n y^n \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(y) = A_0 + A_1 y + \ldots + A_m y^m \\ \Phi(y) = B_0 + B_1 y + \ldots + B_n y^n. \end{cases}$$

Indichiamo ora con A′ e B′ rispettivamente i coefficienti a' e b' relativi alle forme $\overline{F(y)}$ e $\overline{\Phi(y)}$, anzichè alle primitive $\overline{f(x)}$, $\overline{\varphi(x)}$ (cioè costruiti con le A e B precisamente come le a' e b' erano costruite colle a e b); e poniamo:

$$\begin{cases} \overline{F_1(y)} \equiv F_1(y,\eta) = A'_0\eta^{n-1} + A'_1\eta^{n-2}y + \ldots + A'_{n-1}y^{n-1} \\ \overline{\Phi_1(y)} \equiv \Phi_1(y,\eta) = B'_0\eta^{m-1} + B'_1\eta^{m-2}y + \ldots + B'_{m-1}y^{m-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1(y) = A'_0 + A'_1 y + \ldots + A'_{n-1}y^{n-1} \\ \Phi_1(y) = B'_0 + B'_1 y + \ldots + B'_{m-1}y^{m-1}. \end{cases}$$

Avremo allora, analogamente alla (33):

$$(F,\Phi)\eta^{m+n-1} = \overline{F_1(y)}\,\overline{F(y)} + \overline{\Phi_1(y)}\,\overline{\Phi(y)}$$

ed essendo, come è ben noto, (f,φ) un invariante simultaneo delle due forme $f(x)$ e $\varphi(x)$ del peso mn, si ha, in virtù delle relazioni fra le A, B e le a, b:

$$(F,\Phi) = (g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})^{mn}(f,\varphi) = g^{mn}(f,\varphi) \qquad (g = g_{11}g_{22} - g_{21}g_{12})$$

Se ora prendiamo $g_{21} = 0$ cosicchè la sostituzione (34) assuma la forma:

$$(36)\qquad x = g_{11}y + g_{12}\eta, \qquad \xi = g_{22}\eta \qquad\qquad (g = g_{11}g_{22})$$

la (33) si potrà scrivere, tenendo presente anche le (35),

$$g_{11}^{mn}g_{22}^{mn}(f,\varphi)\,\xi^{m+n-1}g_{22}^{-(m+n-1)} = \overline{F_1(y)}\,\overline{f(x)} + \overline{\Phi_1(y)}\,\overline{\varphi(x)}$$

donde anche:

$$(37)\qquad (f,\varphi)\,\xi^{m+n-1} = g_{11}^{-mn}g_{22}^{m+n-1-mn}\{\overline{F_1(y)}\,\overline{f(x)} + \overline{\Phi_1(y)}\,\overline{\varphi(x)}\};$$

sostituendo nel secondo membro, in luogo delle y, η le loro espressioni in funzione di x, ξ date dalle (36), si otterrà una identità della stessa forma (33). Poichè ora le funzioni $\overline{f_1(x)}$ e $\overline{\varphi_1(x)}$, che rendono identica la (33), non si possono determinare (almeno finchè restano arbitrarie le a e b) che in un unico modo, segue dal paragone della (37) colla (33) che, in virtù delle (36) e delle corrispondenti relazioni le A′ e B′ e le a e b, deve essere:

$$g_{11}^{-mn} g_{22}^{m+n-1-mn}\, \overline{F_1(y)} = \overline{f_1(x)}, \qquad g_{11}^{-mn} g_{22}^{m+n-1-mn}\, \overline{\Phi_1(y)} = \overline{\varphi_1(x}$$

Queste formole ci dicono che *le due forme* $f_1(x)$ *e* $\varphi_1(x)$ *sono semicovarianti simultanei delle due forme fondamentali* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *senso che esse godono delle proprietà invariantive per tutte le sostituz lineari del tipo* (36).

12. Se, in particolare, è:

$$g_{22} = 1$$

e si pone dappertutto:

$$\xi = \eta = 1$$

si vede che *per ogni trasformazione del tipo*:

$$x = hy + k$$

si ha:

$$F_1(y) = h^{mn} f_1(x), \qquad \Phi_1(y) = h^{mn} \varphi_1(x)$$

essendo le F_1 *e* Φ_1 *costruite colla* y *e coi coefficienti* A *e* B *delle sformate* F(y) *e* Φ(y) *precisamente come le* $f_1(x)$ *e* $\varphi_1(x)$ *si costruis con la* x *e coi coefficienti delle* f(x) *e* φ(x).

13. Indichiamo con [φ], [f] ciò che divengono rispettivamente quando si scambiano in esse b_0 con b_n, b_1 con $b_{n-1}, \ldots$, e così a_0 a_m, a_1 con $a_{m-1}, \ldots$ cosicchè:

$$\begin{cases} [f(x)] = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m \\ [\varphi(x)] = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n \end{cases}$$

e così con $[a'_i]$, $[b'_i]$ ciò che divengono le a'_i, b'_i, che sono delle zioni intere delle $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$, quando si effettuino in ess stessi scambi. Indichiamo poi similmente con $[(f, \varphi)]$ la funzione (in cui si siano effettuati gli stessi scambi fra le a e fra le b.

Dall'identità (13), eseguendo i detti scambi si dedurrà evide mente l'altra identità:

$$(38) \qquad [(f, \varphi)] = ([a'_0] + [a'_1]x + \ldots + [a'_{n-1}]x^{n-1})[f(x)] + \\ + ([b'_0] + [b'_1]x + \ldots [b'_{m-1}]x^{m-1})[\varphi($$

Ora, poichè (f, φ) è un invariante simultaneo delle due forme e $\overline{\varphi(x)}$, rispetto alla trasformazione lineare:

$$x = \eta \qquad \xi = y$$

che sostituisce alla coppia x e ξ la coppia η e y ed ha per d minante del modulo: -1, si ha come è ben noto:

$$(39) \qquad [(f, \varphi)] = ([f], [\varphi]) = (-1)^{mn} (f, \varphi);$$

quindi la (38) può scriversi:

$$(40)\qquad ([f],[\varphi]) = ([a'_0]+[a'_1]x+\ldots+[a'_{n-1}]x^{n-1})\,[f(x)] + \\ + ([b'_0]+[b'_1]x+\ldots+[b'_{m-1}]x^{m-1})\,[\varphi(x)]$$

questa formola ci dice che *i semicovarianti* $f_1(x)$ *e* $\varphi_1(x)$ *relativi alle forme* $[f(x)]$ *e* $[\varphi(x)]$ *sono dati rispettivamente da:*

$$([a'_0]+[a'_1]x+\ldots+[a'_{n-1}]x^{n-1}),\qquad ([b'_0]+[b'_1]x+\ldots+[b'_{m-1}]x^{m-1}).$$

14. Se le due forme $\overline{f(x)}$ e $\overline{\varphi(x)}$ hanno un divisore comune di 1° grado, senza averne in comune uno del 2°, lo stesso accadrà evidentemente per le due forme $[f(x)]$, $[\varphi(x)]$ per le quali, inoltre, i coefficienti di x^m ed x^n saran diversi da zero, se tali erano i coefficienti a_0 e b_0 di $f(x)$ e $\varphi(x)$. Conseguentemente (per quanto si è dimostrato all'Art. 10) le due funzioni:

$$\begin{cases} [a'_0]+[a'_1]x+\ldots+[a'_{n-1}]x^{n-1} \\ [b'_0]+[b'_1]x+\ldots+[b'_{m-1}]x^{m-1} \end{cases}$$

non saranno identicamente nulle. Intanto, per la (39), la (40) può anche scriversi:

$$(f,\varphi) = (-1)^{mn}([a'_0]+[a'_1]x+\ldots+[a'_{n-1}]x^{n-1})\,[f(x)] + \\ + (-1)^{mn}([b'_0]+[b'_1]x+\ldots+[b'_{m-1}]x^{m-1})\,[\varphi(x)]$$

e dal paragone di questa formola colla (13) segue che, se $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$ fossero nulle identicamente, dovrebbe anche essere identicamente:

$$([a'_0]+[a'_1]x+\ldots+[a'_{n-1}]x^{n-1})\,[f(x)] + \\ + ([b'_0]+[b'_1]x+\ldots+[b'_{m-1}]x^{m-1})\,[\varphi(x)] = 0.$$

15. In base a quanto si è stabilito nell'Art. 10, ci è ora agevole di dimostrare che: *se i coefficienti* a_m *e* b_n *delle più alte potenze di* x *in* $f(x)$ *e* $\varphi(x)$ *sono diversi da zero, affinchè le due forme* $\overline{f(x)}$ *e* $\overline{\varphi(x)}$ *abbiano in comune un divisore di 2° grado, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due eguaglianze:*

$$(41)\qquad (f,\varphi)=0,\qquad \Delta=0.$$

Ammettiamo infatti, se è possibile, che, pur essendo soddisfatte queste condizioni, le due forme $\overline{f(x)}$ e $\overline{\varphi(x)}$ abbiano in comune soltanto un divisore del 1° grado, non uno del 2°. In tal caso, per quanto si è visto all'Art. 10, le due funzioni $f_1(x)$ e $\varphi_1(x)$ non sono nulle identicamente; e si ha poi, per essere $(f,\varphi)=0$, l'identità:

$$(42)\qquad \overline{f_1(x)}\,\overline{f(x)} + \overline{\varphi_1(x)}\,\overline{\varphi(x)} = 0.$$

Detta β_1 l'unica radice comune ad $f(x)$ e $\varphi(x)$ potremo scrivere:

$$f(x) = (x-\beta_1)\,F(x) \qquad \varphi(x) = (x-\beta_1)\,\Phi(x)$$

essendo $F(x)$, $\Phi(x)$ prime fra loro; chè altrimenti $f(x)$, $\varphi(x)$ avre in comune un divisore del 2° grado contro il supposto. Dalla ha così:

$$\overline{f_1(x)}\,\overline{F(x)} = -\,\overline{\varphi_1(x)}\,\overline{\Phi(x)} \tag{43}$$

donde appare, poichè $\overline{F(x)}$ e $\overline{\Phi(x)}$ son prime fra loro, che $f_1(x)$ coincider debbono, rispettivamente, a meno di un coefficiente cos con $\overline{\Phi(x)}$ e $\overline{F(x)}$.

Se, infatti $\overline{\Phi(x)}$ non coincidesse con $\overline{f_1(x)}$ dovrebbe essere r divisore, il che è assurdo, essendo $\Phi(x)$ di grado $n-1$ come

Segue di qui che anche le due forme $\overline{f_1(x)}$ e $\overline{\varphi_1(x)}$ saranno fra loro e che sarà per conseguenza:

$$(f_1, \varphi_1) \neq 0$$

e quindi anche, per la (28):

$$\Delta \neq 0$$

il che è in contraddizione con le condizioni (41); queste sono d sufficienti affinchè $\overline{f(x)}$ e $\overline{\varphi(x)}$ abbiano in comune un diviso 2° grado. Che esse siano necessarie ce lo dice la stessa (42) o la (43).

Ammettiamo, infatti, che $\overline{f(x)}$ e $\overline{\varphi(x)}$ abbiano in comune u sore di 2° grado. La $\overline{F(x)}$ e $\overline{\Phi(x)}$ della formola (43) avranno in comune un fattore di 1° grado. Se $\overline{f_1(x)}$ e $\overline{\varphi_1(x)}$ sono nulle ticamente, sarà evidentemente:

$$(f_1, \varphi_1) = 0$$

e quindi anche:

$$\Delta = 0.$$

Supponiamo, dunque, che non siano nulle identicamente $\overline{\varphi_1(x)}$ ed ammettiamo, se è possibile che sia $\Delta \neq 0$ e quindi $(f, \varphi) \neq 0$; sarebbe allora $\overline{\varphi_1(x)}$ primo con $\overline{f_1(x)}$: ma per la (42) do dividere $\overline{f_1(x)}\,\overline{F(x)}$. Dovrà dunque $\varphi_1(x)$ esser divisore di $\overline{F(x}$ coincidere con essa a meno di un fattore costante, poichè s egual grado; anche $\overline{f_1(x)}$ dovrà, per la stessa ragione, coi con $\overline{\Phi(x)}$.

Ma, allora, come $\overline{F(x)}$ e $\overline{\Phi(x)}$ hanno un divisore comune, do anche averlo $\overline{f_1(x)}$ e $\overline{\varphi_1(x)}$; cioè dovrà essere $(f_1, \varphi_1) = 0$, contro tesi. Il teorema si trova così dimostrato.

16. È assai importante di riconoscere che la restrizione fat l'enunciato del teorema del precedente Art. è veramente nece la restrizione cioè che a_m e b_n siano diversi da zero.

Si prenda, infatti:

$$\overline{f(x)} = a_0\xi^2 \qquad \overline{\varphi(x)} = b_0\xi^2 + b_1\xi x; \tag{44}$$

in tal caso si ha:

$$(f, \varphi) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Le due condizioni (41) sono dunque soddisfatte per le due forme (44). Pure esse non hanno in comune (finchè $b_1 \neq 0$) che un divisore di 1° grado, ma non uno di 2° grado.

ARMANDO PALOMBY.

PROBLEMI (¹)

(Continuazione — Vedi fascicolo II, anno XXXI).

234. Determinare la forma che deve avere la funzione $F(\varphi)$ affinchè sia

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} = L\,[F'(\varphi) + 2\sqrt{F(\varphi)}].$$

(Si trova

$$F(x) = x^2 + px + q.)$$

235. Dimostrare che

$$\int_0^a \left(\sqrt[2n]{a} - \sqrt[2n]{\varphi}\right)^{2n} d\varphi = \frac{a^2 n}{2^{4n-3}} \cdot \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (4n-2)}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (4n-1)}.$$

236. Siano M un punto variabile di una conica, P un punto fisso nel piano della medesima, T ed N i punti d'incontro della tangente e della normale in M con la perpendicolare in P a PM. Il luogo di T è una quartica unicursale, e il luogo di N è una sestica unicursale. Caso in cui:

1° P è il centro della conica;

2° P è un vertice;

3° P è uno dei fuochi.

(¹) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriticì dal Comandante BARISIEN, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

237. Dimostrare che se si rende razionale l'equazione

$$\sqrt[2n]{x}+\sqrt[2n]{y}=\sqrt[2n]{a},$$

il termine di grado più elevato è $(x-y)^{2n}$.

Formare l'equazione razionale quando $n=2$ e $n=3$.

238. L'area compresa fra la curva

$$(x+y-a)^3+27axy=0$$

e gli assi delle x e delle y positivi è $\frac{a^2}{20}$.

(Ci si arriva osservando che l'equazione proposta varia oltre che

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{a}.$$

Si può scrivere

$$x=a\cos^6\varphi, \qquad y=a\,\mathrm{sen}^6\varphi.$$

Queste sono le coordinate parametriche della curva, la quale è unic
Si trova allora facilmente l'area dalla formula

$$dV=\frac{1}{2}(xdy-ydx)=\frac{3a^2}{32}\mathrm{sen}^5 2\varphi\,.\,d\varphi \text{ ecc.})$$

(Continua) E.-N. Baris

QUISTIONI PROPOSTE

1816. Due parabole Γ_1, Γ_2 sono tali che l'una ha per ass rettrice dell'altra. Se da un qualunque punto della tangente alle due parabole si conducono le due tangenti distinte a I queste formano angoli uguali con gli assi rispettivi delle pa

F. Sibira

1817. Trovare tutte le curve tali che, essendo T, N i pun contro della tangente e della normale in un punto P variab curva, con una retta fissa r, sia TN eguale ad un costante.

1818. Conservando le notazioni del problema precedente le curve per le quali è costante

$$\frac{1}{PT}+\frac{1}{PN}.$$

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 21 Giugno 1916

LE PROPRIETÀ DEI NUMERI $\left\{ \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}_h$

derivanti dalla considerazione di speciali combinazioni di elementi dette combinazioni con ripetizione fino ad h e la loro applicazione: 1° allo studio delle tavole generali di addizione per linee, per colonne, per diagonali e circolari, di passo h; 2° alla determinazione in funzione di p e di $Q_1, Q_2, \ldots Q_n$, dell'elemento di posto m nella successione individuata da n numeri iniziali $Q_1, \ldots Q_n$ e dall'equazione ricorrente: $Q_m = p(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \ldots + Q_{m-n})$.

(Continuazione e fine — Vedi fascicoli I, II, III e IV)

Riduzione del passo ad un valore $< n$. — Le (1) e (2) valgono qualunque sia $h \geqq n-1$. Consideriamo per es. una tavola sinistrorsa e supponiamo $h = n-1$. In essa ciascun termine di una linea vale la somma del sovrastante e di tutti gli altri a sinistra, circolarmente, di esso; perciò posto

$$S = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n},$$

ogni elemento della 2ª linea vale S, ognuno della 3ª vale

$$nS = (h+1)S, \ldots$$

ognuno della i^{ma} vale

$$n^{i-2}S = (h+1)^{i-2}S.$$

Ciò risulta anche dalle (2), inquantochè si ha da esse, tenuto conto dell'ultima proprietà enunciata in (Parte I, § II, nn. 2, 4):

$$\nu_{ij}^{(n-1)} = n^{i-2}; \qquad j > 1.$$

Quando $h \geqslant n$, indichiamo con q il quoziente della divisione di h per n e con r il resto, talchè:

$$h = qn + r; \qquad r < n.$$

Per comprendere quello che accade supponiamo ad esempio $n = 5$; siano a, b, c, d, e gli elementi dell'entrata ed

$$S = a + b + c + d + e$$

la loro somma; sia poi $h = 22$, talchè $q = 4$, $r = 2$. Costruendo la tavola si trova che la 1ª colonna è:

$$h = 22 = 4 . 5 + 1$$

a	b
$4S + (a + e + d)$	
$4 . 5 (4S) + 4 . 3 . S + 4 . 3 . S + (a + b + 2c + 3d + 2e)$	
$4 . 5 [4 . 5 . (4S) + 4 . 3 . S + 4 . 3 . S] + 4 . 3^2 . S + 3 [4 . 5 (4S) + 4 . 3 . S + 4 . 3 . S] + (4a + 6b + 7c$	
$\vdots$	

Vediamo come risulta ciò. Intanto se si costruisce la tav

$$h' = 2$$

a	b	c	d	e
$a + d + e$	$a + b + e$	$a + b + c$	$b + c + d$	$c + d + e$
$a + b + 2c + 3d + e$	$2a + b + c + 2d + 3e$	$3a + 2b + c + d + 2e$	$2a + 3b + 2c + d + e$	$a + 2b + 3$
$4a + 6b + 7c + 6d + 4e$				
$\vdots$				

del passo $h' = 2$, resto della divisione di 22 per 5, si vede cl
mini della 1ª colonna di essa sono quelle parti dei corris
termini della tavola precedente, del passo $h = 22$, che non
gono il fattore S. Quanto alle parti che contengono il f
esse sono: 4S nel termine appartenente alla 2ª linea, il che
prende poichè esso vale:

$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e + (a + e + d) = 4S + (a + e +$$

La 2ª linea scritta per disteso è:

$$4S + (a + e + d), \quad 4S + (a + b + e), \quad 4S + (a + b + c$$
$$4S + (b + c + d), \quad 4S + (c + d + e).$$

Per avere il 1° termine della 3ª linea si sommano quatt
tutti i termini della 2ª più il 1°, 5°, 4° di essa. La somma è

$$(4S + 4S + 4S + 4S + 4S) + 4 \{(a + e + d) + (a + b + e) +$$
$$+ (a + b + c) + (b + c + d) + (c + d$$
$$+ (4S + 4S + 4S) + (a + b + 2c + 3c$$

ovvero:

$$4 . 5 . S + 4 . 3 . S + 4 . 3 . S + (a + b + 2c + 3d + e).$$

Si osservi che nel 1° addendo di questa somma, 4 è il q
della divisione di 22 per 5, 5 il valore di n, cioè il numero
mini dell'entrata; il fattore 3 del 2° addendo $4 . 3 . S$ è la
dei coefficienti dei termini di $a + e + d$, oppure di $a + b +$
fattore 3 del 3° addendo $4 . 3 . S$ è il resto 2 della suddetta
aumentato di 1, infine

$$(a + b + 2c + 3d + e)$$

è il 3° termine della 1ª colonna della suddetta tavola di pas
I rimanenti termini della 3ª linea differiscono dal 1° soltant

in luogo di $a+b+2c+3d+e$ contengono rispettivamente i termini 2°, 3°,... della 3ª linea della tavola di passo $h'=2$. Costruendo la 4ª linea della tavola di passo $h=22$ si trova appunto che il 1° termine di essa è quello indicato; si osservi che 3^2, fattore di $3^2 . S$, è la somma $1+1+2+3+1$ dei coefficienti di

$$a+b+2c+3d+e.$$

In generale si costruisca la tavola

$$h=r$$

$$B \equiv \left| \begin{array}{llc} a_{11} & a_{12} \dots\dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots\dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots\dots\dots\dots & \\ \vdots & & \end{array} \right.$$

col passo r uguale al resto della divisione di h per n.

Ciascun termine di essa, come è noto, è funzione lineare di

$$a_{11},\ a_{12},\dots a_{1n}$$

e la somma dei coefficienti dei termini della i^{ma} linea è $(r+1)^{i-1}$. La tavola di passo $h=qn+r$, $(r<n)$, posto

$$a_{11}+a_{12}+\dots+a_{1n}=S$$

e tenuto conto che $qn+r+1=h+1$, è:

$$h=qn+r; \qquad r<n$$

$$\left| \begin{array}{ll}
a_{11} & \\
qS+a_{21} & a_{12}\dots a_{1n} \\
qS+qn+qS(r+1)+qS(r+1)+a_{31} & \vdots \\
\quad \text{ovvero} & \\
q[(h+1)+(r+1)].S+a_{31} & \vdots \\
\quad \text{ovvero} & \\
q\dfrac{(h+1)^2-(r+1)^2}{h-r}.S+a_{31} & \vdots \\
q[(h+1)+(r+1)]S.qn+q.S(r+1)^2+(r+1)q[(h+1)+(r+1)].S+a_{41} & \vdots \\
\quad \text{ovvero} & \\
q[(h+1)^2+(h+1)(r+1)+(r+1)^2]S+a_{41} & \vdots \\
\quad \text{ovvero} & \\
q\dfrac{(h+1)^3-(r+1)^3}{h-r}S+a_{41} & \vdots \\
q\dfrac{(h+1)^4-(r+1)^4}{h-r}.S+a_{51} & \vdots \\
\quad\vdots & \vdots
\end{array}\right.$$

ovvero, posto

$$\frac{(h+1)^i - (r+1)^i}{h-r} = \eta_i , \qquad (i = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

$$h = qn + r$$

$$A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ q\eta_1 S + a_{21} & q\eta_1 S + a_{22} & q\eta_1 S + a_{23} \ldots & q\eta_1 S + \\ q\eta_2 S + a_{31} & \vdots & \vdots & q\eta_2 S + \\ q\eta_3 S + a_{41} & \vdots & \vdots & q\eta_3 S + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

la quale, supposto

$$a_{11} = a_1 ; \qquad a_{12} = a_{13} = \ldots = a_{1n} = 0, \qquad S = 1,$$

diventa:

$$\begin{array}{cc} h = qn + r & h = qn + \\ C \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ q\eta_1 + a'_{21} & q\eta_1 + a'_{22} \ldots & q\eta_1 + a'_{n1} \\ q\eta_2 + a'_{31} & q\eta_2 + a'_{32} \ldots & q\eta_2 + a'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \equiv & \begin{vmatrix} \mu_{11}^{(h)} \ldots \mu_{12}^{(h)} \ldots \\ \mu_{21}^{(h)} \\ \vdots \end{vmatrix} \end{array}$$

essendo le a' termini della tavola:

$$\begin{array}{cc} h' = r ; \quad r < n & h' = r ; \quad r < n \\ D \equiv \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \ldots\ldots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} \ldots\ldots & a'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \equiv & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \end{array}$$

del passo $h' = r$. Queste a' non sono che le $\mu^{(r)}$, cioè i coe
che compaiono nelle (1), quando il passo è r:

$$a'_{ij} = \mu_{ij}^{(r)}.$$

I numeri 0, $q\eta_1$, $q\eta_2$, $q\eta_3$, ... si ottengono sottraendo termin
mine due colonne corrispondenti qualunque delle tavole C e I
nuti questi numeri, e costrutta la tavola B, si costruisce subi

Adunque considerando la tavola

$$h = qn + r$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \ldots\ldots & b_{2n} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

nella quale

(16) e la tavola $\qquad b_{11} = a_{11}, \qquad b_{12} = a_{12}, \ldots b_{1n} = a_{1n},$

$$\begin{array}{l} \xleftarrow{\quad\quad\quad\quad\quad r \quad\quad\quad\quad\quad} \\ \left| \begin{array}{ll} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \vdots & \end{array} \right. \end{array}$$

posto

$$S = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n},$$

risulta:

$$b_{ij} = q\eta_{i-1} S + a_{ij}.$$

E poichè

$$q\eta_{i-1} = \mu_{i,j}^{(h)} - \mu_{i,j}^{(r)}$$

qualunque sia $j = 1, 2, 3, \ldots n$, sarà anche:

$$b_{ij} = (\mu_{ij}^{(h)} - \mu_{ij}^{(r)}) S + a_{ij}. \tag{17}$$

Avremo poi per le (16) e per $j > 1$:

$$q\eta_{i-1} = \mu_{ij}^{(h)} - \mu_{ij}^{(r)} = q \frac{(h+1)^{i-1} - (r+1)^{i-1}}{h-r} =$$

$$= \frac{(h+1)^{i-1} - (r+1)^{i-1}}{n} \tag{18}$$

talchè si ha pure:

$$b_{ij} = \frac{(h+1)^{i-1} - (r+1)^{i-1}}{n} S + a_{ij} \tag{17'}$$

la quale mostra come sieno tra loro dipendenti la tavola delle b *di passo* $h = qn + r$ *e quella delle* a *di passo* r, *aventi la stessa entrata*

$$a_{11} \quad a_{12} \ldots a_{1n}.$$

Esempio. — Sia

$$h = 22; \qquad n = 5; \qquad q = 4; \qquad r = 2.$$

Sottraendo termine a termine le tavole C e D si ha:

$$\begin{array}{c} h = 22 \\ \left| \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 105 & 106 & 107 & 106 & 105 \\ 2432 & 2432 & 2434 & 2435 & 2434 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \end{array} - \begin{array}{c} h' = 2 \\ \left| \begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right. \end{array} =$$

$$= \left| \begin{array}{rrrrr} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 104 & 104 & 104 & 104 & 104 \\ 2428 & 2428 & 2428 & 2428 & 2428 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right.$$

I numeri 0, 4, 104, 2428, ... di una colonna qualunque dello s chio di numeri così ottenuto sono i valori di 0, $q\eta_1$, $q\eta_2$, ... pe

$$h=22; \qquad r=2; \qquad q=4.$$

Si ha infatti

$$\eta_1=1; \qquad \eta_2=26; \qquad \eta_3=607; \ldots$$

e questi numeri moltiplicati per $q=4$ danno rispettivamente i dotti 4, 104, 2428, ... Considerando ora per es. la tavola

$$h=22=5.4+2$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

e costrutta la

$$h'=2$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 19 & 21 & 21 & 20 & 18 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

di ugual entrata e del passo $h'=2$, poichè

$$S=2+3+1+2+3=11$$

si avrà:

$$h=22$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right. =$$

$$h=22$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 1 & 2 & \\ 7+11.4 & 8+11.4 & 6+11.4 & 6+11.4 & 6+1 \\ 19+11.104, & 21+11.104, & 21+11.104, & 20+11.104, & 18+11. \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$$

Sarà poi per la (18):

$$q\eta_2=4=4.\frac{23-3}{20}; \qquad q\eta_3=104=4.\frac{23^2-3^2}{20};$$

$$q\eta_4=2428=4.\frac{23^3-3^3}{20}, \ldots$$

Quando $S=0$ si ha dall'ultima delle (17): $b_{ij}=a_{ij}$ e cioè vola di passo $h=22$ coincide con quelle di passo $h'=2$. In ta la somma dei termini di una qualsiasi linea è zero. Ciò si d dalle (4).

Se $r=0$, vale a dire se $h=qn$, la tavola B delle a ha il passo zero, epperò tutte le linee sono uguali all'entrata, cioè $a_{ij}=a_{1j}$.

Si ha per $j=1$, $\mu_{i,1}^{(0)}=1$, e quindi per l'ultima delle (17):

$$\left.\begin{array}{ll}
b_{i1}=(\mu_{n1}^{(h)}-1)\,S+a_{11} & \\
\text{essendo} & \\
\mu_{11}^{(h)}=1; \qquad \mu_{12}^{(h)}=\ldots=\mu_{1n}^{(h)}=0, & \\
\mu_{i,1}^{(h)}=\dfrac{(h+1)^{i-1}-1}{n}+1 & r=0 \\
\text{E invece,} & \\
\mu_{ij}^{(0)}=0 \quad \text{se} \quad j>1, & \\
\mu_{ij}^{(h)}=\dfrac{(h+1)^{i-1}-1}{n}; \qquad j>1 & \\
b_{ij}=\mu_{ij}^{h}\,S+a_{1j}; \qquad j>1 &
\end{array}\right\} \quad (19)$$

Infatti la tavola delle $\mu_{ij}^{(h)}$ è:

$$h=qn$$

$$\begin{array}{|rl}
\hline
1 & 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;0 \\
q+1 & q\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;q \\
q^2n+2q+1 & q^2n+2q\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;q^2n+2q
\end{array}$$

Quando $h=qn+(n-1)$, si ha

$$r=n-1; \qquad h+1=n(q+1).$$

Risulta in tal caso

$$\mu_{ij}^{(h)}-\mu_{ij}^{(n-1)}=\frac{n^{i-1}(q+1)^{i-1}-n^{i-1}}{n}=n^{i-2}[(q+1)^{i-1}-1].$$

La tavola delle $\mu_{ij}^{(n-1)}$ è:

$$n-1$$

$$\begin{array}{|llll}
\hline
1 & 0 & 0\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 0 \\
1 & 1 & 1\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & 1 \\
n & n & n\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & n \\
n^2 & n^2 & n^2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. & n^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Pertanto:

$$\mu_{ij}^{(n-1)}=n^{i-2}; \qquad \mu_{ij}^{(h)}=n^{i-2}(q+1)^{i-1}.$$

Si ha poi:

$$a_{ij}=n^{i-2}\,S$$

poichè la tavola delle a è:

$$\overset{n-1}{\longleftarrow}$$
$$\begin{array}{|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \mathrm{S} & \mathrm{S} & & \mathrm{S} \\ n\mathrm{S} & n\mathrm{S} & & n\mathrm{S} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Risulterà infine:

$$b_{ij} = n^{i-2}[(q+1)^{i-1} - 1]\,\mathrm{S} + n^{i-2}\mathrm{S} = n^{i+2}(q+1)^{i-1}.\mathrm{S}. \qquad (2$$

Se in particolare $n=1$, j ha il solo valore 1. Si ha poi

$$h = q; \qquad \mathrm{S} = a_{11}$$

e

$$b_{i1} = (h+1)^{i-1} a_{11}.$$

La tavola si riduce ad una sola colonna.

Dall'ultima delle (17) si può dedurre una relazione importan
Se in essa a b_{ij} ed a_{ij} sostituiamo le espressioni date dalle (2) pe
valori $qn+r$, ed r del passo, ricordando che

$$b_{11} = a_{11}, \ldots b_{1n} = a_{1n},$$

abbiamo:

$$\nu_{i1}^{(h)} a_{1j} + \nu_{i2}^{(h)} a_{1,j+1} + \ldots + \nu_{i,n}^{(h)} a_{1,j-1} = (\mu_{ij}^{(h)} - \mu_{ij}^{(r)})\,\mathrm{S} + \nu_{i1}^{(r)} a_{1j} + \ldots$$
$$\ldots + \nu_{i,n}^{(r)} a_{1,j}$$

ovvero

$$(\nu_{i,1}^{(h)} - \nu_{i,1}^{(r)})\,a_{1j} + (\nu_{i,2}^{(h)} - \nu_{i,2}^{(r)})\,a_{1,j+1} + \ldots$$
$$\ldots + (\nu_{i,n}^{(h)} - \nu_{i,n}^{(r)})\,a_{1,j-1} = (\mu_{ij}^{(h)} - \mu_{ij}^{(r)})\,\mathrm{S} \qquad (2$$

la qual relazione lega le ν di una tavola di passo $h = qn + r$ c
quelle di una tavola di passo r, e vale qualunque siano $a_{11}, \ldots a$
Relazioni particolari si avranno adunque attribuendo ad $a_{11}, \ldots$
valori particolari, per es. valori tali che si abbia $\mathrm{S} = 0, 1, -1, \ldots$

A conclusioni analoghe giungiamo considerando le tavole circ
lari destrorse. Data la tavola

$$\overset{h = qn + r; \quad r < n}{\longrightarrow}$$
$$\begin{array}{|cccc} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

destrorsa del passo $h = qn + r$; $(r < n)$, e la

$$\overset{r}{\longrightarrow}$$
$$\begin{array}{|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$