sta, ed evidentemente anche questo genere di verifica proviene da uno studio attento della costruzione della identità, a parte poi l'interesse che presenta il fatto che una proposizione rientra in una massa di altre da cui apparentemente ne pareva distaccata. E poi si dirà allo studioso: verifichiamo per altra via questa proposizione, e la cosa dipenderà dalla natura di essa e verrà così una specie di parallelo fra' metodi diversi di verifica; altro campo in cui l'ingegno del giovane studioso (e spesso dell'insegnante) è chiamato ad esercitazioni sempre utili, spesso non facili.

2. È utile che lo studioso s'ingegni a *leggere* la identità non come sta scritta, ma attribuendo un significato alle quantità che in essa figurano, e dando poi una forma concreta alla verità che essa rappresenta: Da una si trarrà che i numeri di quella forma non sono mai primi, un'altra vi presenterà la dimostrazione di un teorema di geometria in una linea di scrittura, ecc. È in questo modo che oltre a *fare dell'applicazione* si risveglierà nello studioso quella fantasia matematica che spesso non dà segni di vita, proprio perchè non è stata eccitata.

E chi può valutare le conseguenze di questo lavorìo iniziato in tempo opportuno e continuato con pazienza e con disciplina? E quante domande si rivolgerà lo studioso quando sarà messo su questa via, e quali curiosità si risveglieranno in lui! Mentre prima, tranne la cura della verifica, vedeva in quella linea di scrittura un semplice tema di esercitazione, dopo potrà vederci una sorgente di nuove proposizioni. Quando si è in questo campo dello studio di una identità è bene vedere le diverse forme sotto le quali essa può mettersi. Alle forme diverse corrispondono generalmente proposizioni diverse non solo, ma molte volte una forma speciale di una stessa identità può permetterne una verifica più rapida. Questa osservazione delle forme diverse assume ancora maggiore importanza di fronte ad una applicazione di cui dirò subito: la eliminazione. Questo paragrafo che a me pare troppo trascurato nel campo elementare trova un potente ausilio nelle identità, ed è importante osservare le non lievi differenze che conseguono nel risultato di una eliminazione ottenuta mediante una stessa identità messa sotto forme diverse.

Certo, ogni identità, in quanto rappresenta una verità, è degna della nostra attenzione, ma è doveroso (parlo per la esercitazione di scuola) scegliere quelle che presentano un maggiore interesse per lo studioso, sia in rapporto al momento, direi così, d'immedesimazione, sia in rapporto alle cognizioni di cui è provvisto, sia in relazione cogli studi che seguiranno. Questo è detto non solo in ordine alla lezione, s'intende bene, ma ancora rispetto agli esercizi da proporre.

3. Un punto su cui è bene insistere, come meglio è dato, previa preparazione, è la *generalizzazione* della identità. È uno studio che suggestiona il discente, e, mentre contribuisce allo sviluppo di que certa fantasia matematica, lo educa, lo ammonisce e lo discipli E quante difficoltà non trova chi vuol generalizzare! nel simb (forse nessun capitolo della scienza è così indicato come questo de identità per la iniziazione del discente alla scrittura simbolica), senso della generalizzazione e spesso nella stessa dimostrazione questa. In generale, dopo i casi più semplici, nel passare a qu più complicati è bene procedere per gradi e non dichiarare d colpo: *si generalizza con quest'altra identità!*; giacchè così facend è aggiunta una nuova esercitazione, ma non si è andati incon allo scopo di quella certa *spinta didattica* per uscire dalla prop zione particolare.

Chiuderò questa breve nota osservando che i giovani studiosi tendono con piacere alla *trasformazione* ed alla *combinazione* d identità; però, ripeto, sono tutte cose che non vanno improvvis ma coscienziosamente preparate e poichè questa preparazione d assolutamente tener conto della classe, è bene che una stessa id tità figuri in corsi diversi e con diversi risultati.

G. Candido.

CONCEZIONE DELLA RAGION DELL'ESSERE (1)

In memoria di Angelo Battelli
a Macerata Feltria il 1° Marzo
morto a Pisa l'11 decembre 1916.

Una verità assiomatica è il principio: " nei fenomeni della coesistenza (della vita nel senso più lato della parola) ha luogo solamente una *trasfo zione* tanto della sostanza che dell'energia e non mai una *creazione* di que di questa ".

Il piccolo seme vegetale (frutto di una trasformazione sintetica preced prendendo dai corpi vicini la sostanza e dallo spazio circostante l'energia, savi dal sole e dagli altri esseri in precedenza esistiti, diviene esile piant e poi, col tempo, robusto albero.

Assorbendo, assimilando, accumulando via via sostanze ed energie diffuse le trasforma in altre sostanze, in altre energie, che contribuiranno, così tr mate, a far sviluppare e crescere un altro seme di natura diversa.

---

(1) Se sia o non sia nuova questa concezione della ragion dell'essere lo scrivente no asserire; tiene però a dichiarare che nei non pochi testi da esso letti non ha mai trovato di simile. Questi brevi cenni pubblicati in memoria del suo maestro Angelo Battelli potre essere validamente sostenuti con i principii, da tutti oramai accettati, che regolano i fen fisico-chimici ed ampliamente illustrati con esempi che sono a conoscenza di ogni studi scienze.

Quest'altro seme, sintesi anch'esso di trasformazioni precedenti, farà sorgere un altro essere adatto non solo ad assorbire e ad assimilare le sostanze diffuse nello spazio, ma anche a trasformare le sostanze che le piante gli forniscono. E siccome esso assorbe, assimila e trasforma sostanza ed energia già elaborate potrà più rapidamente largire le assorbite energie ad altri esseri sotto forme diverse da quella che danno i vegetali.

Questo secondo essere è la bestia. La quale dunque dovrà alla sua volta prendere le sostanze e le energie fornitegli dalle piante e dallo spazio per trasformarle in sostanze ed energie che serviranno allo sviluppo di un altro seme dal quale sorgerà un nuovo essere che, oltre le facoltà acquisite dalla bestia, dovrà necessariamente averne altre che la bestia non ha; e ciò perchè viene ad assorbire, ad assimilare e ad accumulare sostanze ed energie già elaborate dai due esseri che crebbero, vissero e si svilupparono prima di lui.

Questo terzo essere, bestia più evoluta, lo diremo animale. Il quale potrà avere le funzioni degli esseri suoi predecessori, ma anche facoltà superiori a quelle da essi possedute e perciò, dopo le solite trasformazioni di sostanze ed energie prese dall'ambiente, darà sostanze ed energie migliori di quelle emesse in precedenza dagli altri e quindi atte a far sviluppare un altro seme, anch'esso sintesi di trasformazioni precedenti, dal quale sorgerà un animale più evoluto, cioè con facoltà ancor più alte di quelle degli esseri che lo precedettero.

Questo nuovo animale avrà i caratteri delle bestie inferiori e delle bestie superiori od animali, ma possederà nello stesso tempo facoltà maggiori di quelle possedute da essi; ne sarà per conseguenza ben diverso e ben distinto.

Questo nuovo individuo è l'uomo.

L'uomo, animale sapiente con facoltà inventive, deve necessariamente compiere quelle funzioni sintetiche che le piante e gli animali compiono per la conservazione della specie, ma deve altresì trasformare le energie che riceve in altre energie di ordine superiore.

Per compiere questa sua missione assorbe sostanze più facilmente assimilabili, fornitegli dagli esseri suoi predecessori o contemporanei. E siccome assorbe sostanze ed energie precedentemente elaborate, dovrà pur essere un trasformatore a maggior rendimento.

Se l'uomo, valendosi meno che sia possibile delle facoltà comuni agli altri esseri, riuscirà a produrre nuove energie sempre più alte e meglio assimilabili dai suoi discendenti, perchè questi diventino ancor più abili ed efficaci trasformatori delle energie dell'universo; se riuscirà insomma a restituire all'ambiente energie superiori a quelle di cui si valse, sarà egli pure un buon trasformatore, altrimenti sarà un mediocre, un cattivo, un pessimo trasformatore.

La vita di ogni essere ha dunque lo scopo di migliorare continuamente se stesso per rendersi atto ad assorbire, ad assimilare le diffuse energie del cosmo e comunicarle agli esseri della sua specie affinchè questi, alla lor volta, da mediocri divengano buoni, e, possibilmente ottimi trasformatori.

Quindi, in particolare, l'uomo riuscirà a migliorare i suoi simili se a questi comunicherà energie superiori; le quali nella vita sociale si manifestano sotto forma di verità che servono poi a regolare la vita futura e la utilizzazione delle energie dell'universo.

In altre parole egli deve concorrere coll'esempio e colla parola al progresso dell'umano benessere.

A volte l'uomo riesce a scoprire o a diffondere nuove verità reali che modificano radicalmente il pensiero umano; ed allora esso è un trasformatore tissimo rendimento. In questo caso il suo nome diviene simbolo ed esemp mortale di grandezza benefica e di umanità superiore per le future genera

Altre volte colla sua energia e col suo lungo e meditato studio l'uomo a determinare con maggior precisione le verità già note ed a comunicarle più o meno numeroso gruppo di altri uomini, che le propagheranno a loro In questo caso si dirà ch'esso fa scuola e diviene maestro.

Anche quest'uomo si potrà dire un buon trasformatore, per quanto eg un rendimento inferiore a quello del tipo sopra indicato; ed il suo nom ricordato dalle successive generazioni con affetto, stima e venerazione.

Ogni uomo può divenire un ottimo trasformatore, purchè sappia oppo mente usare i mezzi necessari alla elaborazione delle sue energie latenti.

Questi mezzi egli può conoscere con lo studio, ossia colla conoscenza verità già scoperte e palesate dai suoi predecessori, e tenendo un regime corrispondente ai ben noti doveri verso se stesso e verso i suoi simili.

L'uomo che sente di essere un buon trasformatore e vuole divenire ha l'obbligo di conservare più a lungo che sia possibile la propria esisten dedicarla a prò degli altri, restituendo con parsimonia e giusta misura le e superiori acquisite.

Come la molla dell'orologio, scaricandosi lentamente, può compiere quotidiano lavoro, ma, se vien fatta scaricare in modo repentino, restituisce attimo la energia presa e cessa subito di compiere la sua regolare ed utile fu così l'uomo che troppo si affretta a restituire le energie prese ed elaborate buon trasformatore, ma non dà il massimo rendimento. E questo sarà dato s da colui che pel suo temperamento flemmatico, si mantiene calmo e sere

Chi conosca la vita e le opere di un uomo è dunque in grado di giu in modo adeguato e sincero, purchè sappia assegnare i corrispondenti val sitivi o negativi ad ogni sua manifestazione esteriore di energia. La som questi valori esprimerà un giudizio sintetico preciso.

Con questo criterio si può dire, ad esempio, che Angelo Battelli, maestro fondatore di una scuola, la quale lavorò sempre con fede e con entu fu un buon trasformatore. Perciò il suo nome sarà venerato non solo d discepoli, oggi valorosi insegnanti, che ebbero da Lui lume ed incitamen loro attività scientifica, ma anche dai discepoli dei discepoli.

V. E

Livorno, 11 gennaio 1917.

LA MATEMATICA FINANZIARIA E LA MATEMATICA ATTUARI

in un recente Manuale del D.r R. Viti (1)

Pubblico con piacere poche considerazioni intorno a questo specialmente per due motivi: ogni pubblicazione nuova, sia

(1) Elementi di scienza attuariale per gli istituti tecnici, L. Cappelli editore, Rocc sciano.

elementare, su la Matematica finanziaria e su la Matematica attuariale, è un contributo per il loro collocamento nel posto, al quale hanno diritto anche nell'insegnamento medio [1]; il lavoro del professor *Viti*, dopo l'altro apprezzato del collega *Insolera* [2], è una spinta all'esame delle questioni seguenti, sinora poco o niente discusse e chiarite, da noi:

Quelle due discipline, ciascuna delle quali ha finalità, carattere e sviluppi suoi proprî e quindi nell'insegnamento superiore vice a sè, pur con vincoli parzialmente necessari di precedenza e di sviluppi, in quali condizioni convenienti possono presentarsi accomunate in una sola disciplina nell'insegnamento secondario? Cioè: quali sono i limiti, i metodi più adatti, i sussidi indispensabili e gli accorgimenti opportuni per introdurre in scuole medie l'insegnamento delle stesse discipline?

Bastano, in scuole secondarie professionali (sezioni di istituto tecnico ed istituti commerciali), *per un'esposizione elementare delle due discipline, rispondente agli scopi ed al livello di quelle scuole, le nozioni di Matematiche prescritte dai vigenti programmi, come queste sono ritenute bastevoli per gli insegnamenti, opportunamente ridotti e resi pratici, di Costruzioni e di Topografia* (nella sezione di agrimensura) *e di Astronomia* (nell'istituto nautico), *per gli sviluppi dei quali i corsi superiori esigono il potente sussidio dell'Analisi matematica? Oppure sono impossibili sviluppi elementari di Matematica finanziaria e di Matematica attuariale, seriamente fruttiferi, senza un insegnamento propedeutico di Matematica superiore? Ciò essendo, siffatti complementi possono limitarsi a poche teorie di Algebra ovvero debbono estendersi, com'è indispensabile in un Istituto superiore, a nozioni di Goniometria* (non prescritte nè per le sezioni professionali dell'istituto tecnico, nè per gli istituti commerciali), *di Geometria Analitica e di Analisi matematica* [3]?

Sono realmente necessari, per le future e modeste mansioni di esecutore, cui potranno aspirare un perito ragioniere, un perito commerciale ed un perito attuariale nelle Banche, in aziende commerciali (in particolare, di assicurazioni) *ed in altri uffici congeneri, teorie complete ed approfondite dei numeri irrazionali e dei limiti, nozioni sulle serie, l'interesse*

---

(1) Certi giudizi, simili a quelli contenuti nell'articolo *Matematica finanziaria ed attuariale* pubblicato dalla *Riforma sociale* del 1° gennaio 1916 (davvero sorprendenti, in bocca di uno stimato coltore di studi scientifici), sullo sviluppo attuale, sui confini della Matematica attuariale e sui contatti di quelle con altre discipline (delle quali, la Tecnica bancaria non va confusa con la Ragioneria), sfumano immediatamente come nebbia al vento, senza che alcuno perda del tempo intorno ad essi, quando si portino per un istante al cospetto non solo dei trattati di Matematica attuariale ricordati dal collega *Insolera* (nel numero successivo di quella Rivista) e degli altri lavori da lui non citati, ma anche e specialmente dei 50 volumi del *Journal of the Institute of Actuaries* di Londra.

(2) Elementi di Matematica finanziaria ed attuariale, S. Lattes e C., editori, Torino, 1916.

(3) In questo volume del *Viti*, si parla: di interesse continuo (pag. 54-58); di serie binomiale (pag. 55-58), sviluppando $(1+i)^{\frac{1}{k}}$ nell'ipotesi che sia nota la serie logaritmica e rimandando all'Analisi algebrica di Pincherle; di criterio del *Raabe* per la convergenza di una serie (pag. 75); di rappresentazione cartesiana (pag. 59); di calcolo combinatorio (pag. 110); di integrale (pag. 138); di annuità variabili (pagg. 77-82). Gli Elementi dell'*Insolera*, conformemente ai programmi degli istituti commerciali, presentano: l'analisi combinatoria (pagg. 21-29): il binomio di *Newton* (pagg. 30-32) e l'interpolazione come applicazione di esso; la capitalizzazione continua (pagg. 83-86); diagrammi cartesiani (pagg. 61, 88, 92, 103, 186). Il *Guerritore*, nel suo pregevole Manuale di Matematica finanziaria ad uso delle scuole di commercio (Zanichelli, Bologna, 1911), parla di serie (pag. 11), di derivata seconda (pag. 15), di curva logaritmica e di assintoti (pagg. 23-24), di interesse continuo (pagg. 26-29), di valore massimo (pag. 43), di sviluppi in serie (pag. 44), di derivate d'ordine dispari e pari (pag. 59), di sviluppo con la formola di *Lagrange* (pag. 61), ecc. Anche il *D.r Pagliero*, nel suo accurato volumetto *Come si risolvono i problemi d'interesse* (Lattes, Torino, 1912), discorre a lungo di interesse continuo (pagg. 39-47), mentre non si occupa nè di annuità, nè di prestiti.

continuo, le annuità certe variabili, sviluppi abbastanza estesi dall
ria delle probabilità, le operazioni su più teste con o senza reversi
le annuità vitalizie variabili e le assicurazioni variabili, ecc.?

Giova evitare in genere, per scuole medie, i simboli sintetici e
rali, potendo l'esame di casi particolari, anche numerici, chiarire,
stanza bene e razionalmente, proprietà e procedimenti? Specialmen
un libro destinato ad istituti secondari, conviene aver cura scrupol
definire ogni vocabolo non appartenente al linguaggio comune, pri
usarlo, anche se lo si definisce in seguito? Sono utili od ingomb
nel corpo di un testo scolastico, frequenti cenni storici sui singoli
menti? Qual parte, in quelle scuole, converrà fare agli esercizi di
cazione immediata o no, rispetto agli sviluppi teorici, nei limiti
l'orario?

Infine: *un libro di testo dev'essere, nelle scuole medie, una gui*
fettiva, per l'insegnante nelle sue lezioni e per l'allievo nello studi
mestico, ovvero *un inutile oggetto di puro lusso, che si prescrive so*
perchè così vogliono i regolamenti, ma che si lascia interamente i
sparte per dettare le proprie lezioni con metodo, sviluppi e lingu
diversi?

Basta enunciare tali quesiti, perchè se ne intenda subito tutta
portanza ed anzi si riconosca l'imprescindibilità della loro solu
per corsi elementari, nei quali un insegnamento può divenire a
decorativo, tanto quando è troppo esuberante ed alto, come qua
troppo smilzo e basso. Essi, lungi dall'essere stati esaminati p
due discipline Matematica finanziaria e Matematica attuariale
si è detto, non sono stati sinora neppur posti nettamente, d
Certo, io non intendo discuterli qua.

Non si hanno programmi ufficiali, che sieno mediocrement
lerabili, per l'insegnamento secondario della Matematica finan
e della Matematica attuariale. Nella sezione di Ragioneria degl
tuti tecnici, alcune nozioni di Matematica finanziaria ed anc
Matematica attuariale sono date sinora in parte dalla Maten
elementare ed in parte dalla Computisteria di non felice men
non ripeterò *come*, sia in generale negli Elementi di questa disci
sia nella pratica dell'insegnamento. Per la sezione commerciale
istituti commerciali, vigono certi programmi del 20 settembre 1
che addossano tutta la Matematica finanziaria al programma
gebra Elementare e, viceversa, in un programma, detto di Ele
di Matematica finanziaria ed attuariale, non segnano alcuna
di Matematica finanziaria, ma il calcolo combinatorio, lo svi
newtoniano, la teoria della probabilità, uno spunto di Demo
nelle tavole di sopravvivenza e pochi calcoli attuariali. Ess
dispongono niente, per la sezione attuariale degli istituti co
ciali: i programmi però del 1911 (in *Cinque anni di vita della R.*
media di studi commerciali ed attuariali, tip. Festa, Napoli) del
zione attuariale dell'istituto commerciale di Napoli, l'unica esi
in Italia, presentavano sviluppi di Algebra complementare, d
gonometria, di Geometria analitica, di Calcolo infinitesimale,

(1) Per giudicare della bontà di questi programmi, basterà sapere che non contengo
numero riguardante la Geometria; così che gli allievi degli istituti commerciali (che
gono ad una sezione professionale di istituto tecnico) sono licenziati con la sola cultura
trica acquistata dai corsi intuitivi e pratici della scuola tecnica e, con tale corredo di co
matematiche, possono passare ad istituti superiori, *rebus sic stantibus* per l'alto senno dei
moderatori scolastici!

tematica finanziaria, di Calcolo delle probabilità e di Matematica attuariale, aventi pressapoco un'estensione pari a quella dei programmi della sezione attuariale dell'Istituto superiore di Roma, allora esistente ed ora soppressa. E l'altezza di quegli sviluppi, non sognata mai da alcun programma di scuola media nè in Italia nè fuori, è confermata dal Manuale di Matematica finanziaria del *Guerritore*, il quale afferma essere il suo libro *in complesso un compendio delle lezioni che su quel soggetto s' impartiscono agli alunni della R. scuola media di studi commerciali ed attuariali di Napoli.*

In siffatta condizione di cose, la quale si approssima all'anarchia, un giudizio esauriente, su di un Manuale destinato in modo esplicito agli istituti tecnici, non parmi correttamente possibile. Non sarebbe onesto giudicare un libro indipendentemente dalla destinazione, che ad esso ha dato l'autore, in vista di un ipotetico programma, e che può avergli imposto molte rinunzie, strappi penosi, preferenze non gradite ed espedienti molteplici: cose tutte, di cui non dev'essere a priori ritenuto responsabile lui, senza tener conto delle esigenze di quella destinazione, ma che, attentamente vagliate, possono costituire titoli di merito o di demerito, rispetto a programmi ben definiti. D'altra parte, non si può sorvolare leggermente sul fatto, che anche la scienza e la scuola hanno le loro giuste esigenze. Io poi — che ho espresso in altre occasioni il mio parere su qualcuno dei precedenti quesiti e che, richiesto, ho presentato un abbozzo di programma per gli istituti tecnici, con la viva preoccupazione che vi si insegnasse poco, quanto può ritenersi sufficiente per quelle scuole, ma intensamente, e che si abbondasse nelle applicazioni rivolte sempre all'approfondimento delle questioni e a maggior sviluppo intellettuale degli alunni e non già alla pratica grossolana (l'insegnamento della Matematica finanziaria e della Matematica attuariale, negli istituti tecnici, è però ancora di là da venire!) — mi guarderei bene dal giudicare con i miei criteri scolastici, discutibili al pari di quelli dell'autore, un libro, che questi, nelle attuali condizioni di assoluta libertà, può aver concepito e condotto con criteri molto diversi e che gli è costato dei mesi di lavoro, rivolto tutto al bene della scuola e certamente non capitalizzato. Ma sarebbe inammissibile la pretesa, della quale non l'egregio collega *Viti*, ma altri colleghi peccano, di far servire anche a studenti di scuole superiori un libro compilato per quelli di scuole medie: la voluta qualità del doppio uso permetterebbe di ricavare la conseguenza dell'inadattabilità ad entrambi gli usi.

Per tutte le ragioni dette, io nel dare cordialmente al libro del prof. *Viti* il benvenuto fra la piccola schiera dei suoi confratelli italiani, mi limiterò a fare soltanto pochissime osservazioni, delle quali egli terrà quel conto che crederà in una eventuale riedizione e che vorrei fossero almeno incentivo ad una discussione serena, spassionata e vantaggiosa.

Il Manuale, dopo un'introduzione, contiene sei capitoli dedicati: all'interesse semplice (36 pag.), all'interesse composto (24 pag.), alle annuità (33 pag.), alle probabilità (52 pag.), alla Statistica (60 pag.), al premio e riserva (74 pag.). È sufficiente questo cenno del quantitativo delle diverse teorie trattate, perchè si possa aver idea del peso attribuito a ciascuna teoria.

L'autore, tanto per il giudizio degli argomenti di pertinenza delle due discipline esposte, quanto per i simboli, segue la scuola francese e piuttosto il *Marie* per la Matematica finanziaria ed il *Poterin du Motel* per la Matematica attuariale, mentre oggi predomina giu-

stamente la scuola inglese, col complesso di simboli del
attuariale di Londra, accettati da tutti i Congressi attuarial
intende compresi anche nella Matematica finanziaria (invec
tions financières, secondo i francesi) anche l'interesse semp
i nostri ordinari programmi assegnano alla Computisteria, e
prevalentemente pratico, delle operazioni di Borsa e di C
quali costituiscono capitoli della Tecnica bancaria e sono p
ste dalla Computisteria nei corsi elementari (la Matemati
ziaria, stabilita come la nona delle 11 materie fondament
legge 20 Marzo 1913 per gli istituti superiori di studi com
nota può aver interesse ad intervenirvi che in qualche stu
rale, specialmente di carattere teorico, e quindi come una
tante applicazioni più elevate).

Il prof. *Viti* ci ha pure offerto un volume autografo, che
?l lezioni di Matematica attuariale, tenute nell'anno scolastic
presso la Accademia dei Ragionieri di Bologna, e contiene l
degli ultimi tre capitoli del libro odierno. Questo compren
in più, rispetto all'altro, le teorie dell'interesse semplice e
e delle annuità, propedeutiche per la Matematica attuarial
nostante, conserva il titolo di quel primo volume: *Scienza A*
Potrebbe giustificarsi tale fatto col predominio della parte
(pagine 186) sulla finanziaria (pagine 93), la quale sta con
duzione alla prima; ma la sua ragione ci è piuttosto data
tendimento, affermato dall'autore nell'Introduzione, di consi
Matematica finanziaria e la Matematica attuariale (non si
riguardi della trattazione elementare o rispetto all'insegna
periore o, peggio, per le due discipline in se) come *parti d*
questione: *ricerca del valore di un capitale ad un'epoca indic*
il ragionamento che l'autore fa, per dimostrare il suo assu
almeno chiaro e certo non può essere inteso da chi inco
studio di queste discipline. Infatti, egli afferma che la *separ*
le operazioni sul certo e probabile (*fatta per comodità di stu*
po' troppo, anche nel campo elementare, in vero!) *è stabi*
natura dell'epoca (*momento*), *alla quale si riferisce la ricerca*
attuale (su, era detto *valore*) *e che può essere certa* (*cioè, fiss*
bilita: momento finanziario) *ovvero probabile* (*cioè, mobile,*
momento assicurativo). E poi: *il momento assicurativo è in d*
col fatto che è oggetto dell'assicurazione; è indubitato che fra q
ha carattere imponente e preminente la vita dell'uomo.

Che significa tutto ciò? (1) Quando io d'età x, posto in
pongo di stabilire quanto vale per me 1 lira, convenuto
saggio i per l'interesse, può verificarsi: che ad essa abb
senz'altro, dopo un certo tempo n, in A a contare da un'or
bilita, ma qualunque (in particolare, da 0); ovvero, che

(1) Insisto nel chiarire questo punto, specialmente perchè, in un libro di *Element*
tica attuariale (che l'Autore, *S. Spinedi*, crede *possa tornare utile ad alunni di istituti t*
tuti commerciali ed, in una prima lettura, anche ad alunni di istituti superiori, nientedi
fedelmente riprodotta, senz'altro, anzi con minori schiarimenti, la distinzione, fatta
l'epoca di riferimento in certa e probabile e la corrispondente distinzione della Mate
ziaria ed attuariale in due rami. In questi Elementi, è scritto: *la Matematica attuari*
teoria dell'interesse in rapporto alla mortalità, cioè la teoria delle rendite vitalizie ed
sulla vita dell'uomo. Non saprei proprio che idea della Matematica attuariale possa
questa definizione, chi ne inizia lo studio! Che, in corsi elementari e pratici, gli all
un po' credere al maestro, forse può in parte passare; ma, che debbano credere a co
prensibili, anche perchè contenenti accenni a cose non definite, veramente non par

momento di avere la lira in dipendenza di certe circostanze convenienti (ad es.: che io sia vivo, morto od ammalato alla fine del tempo n; che io e mia moglie siamo vivi alla fine del tempo n; che mia figlia sia viva al momento della mia morte, alla fine del tempo n; ecc.). Se non sono fissati n ed i, non posso calcolare valore alcuno. Nel primo caso (Matematica finanziaria: campo certo), il valore di 1 lira; nel secondo (Matematica attuariale: campo aleatorio), se ad es. la lira mi spetta quando sia vivo alla fine del tempo n, il valore di essa, accettata una certa legge di mortalità con una data tavola, è $v^n \, {}_np_x$. Ciò che si è detto per una lira, vale per una successione di lire, considerate ad uguali distanze di tempo (annuità). Variando uno dei numeri i, n, x, varia anche il valore di quella lira o di quella successione di lire. E non si uscirebbe dal campo della Matematica finanziaria, quando si presentasse questa parziale aleatorietà, non dipendente dalla mia età x: che io avessi diritto alla lira alla fine del tempo di n anni da oggi (obbligazioni); nel qual caso, potrei trovare, per la lira, un valore o prezzo medio. Ma l'oggetto dell'assicurazione, nel secondo caso, sarebbe la lira, non il fatto della mia vita (che bella cosa forse, se si potesse assicurare la vita!). Ecco tutto. Dov'è la mobilità, essendo noti i, n ed x? Come mai la mobilità equivarrebbe a probabilità e la fissità a certezza? Invano, ho cercato la spiegazione di quel momento finanziario o fisso nel n. 31 e di quello attuariale o mobile nel n. 97; nei quali numeri, i due problemi, nettamente distinti, sono proprio esposti come li ho ora accennati. Soltanto nel n. 46, ricompare la nozione di momento finanziario, a proposito delle annuità certe (di cui non si definisce il *valore*: si dà, per questo, la formula più generale con un semplice avverbio *manifestamente*, che riuscirà abbastanza ostico ad un principiante); mentre la nozione di momento attuariale non figura esplicitamente nei n. 97 e 98, a proposito di capitale differito e di annuità vitalizia.

Intendo bene che — mentre nell'insegnamento superiore, il quale deve sempre approfondire quanto più si può le questioni e non accontentarsi di nozioni generali o pratiche, s'impone la maggior differenziazione — convenga invece, nell'insegnamento elementare, unificare od almeno avvicinare quanto più è possibile, per rendere rapida e meno faticosa la visione delle cose ai principianti. Ma, quell'avvicinamento è soggetto al vincolo, che il discente vegga chiaro nei due campi, avvicinati o sovrapposti per ragioni didattiche. Come le quattro discipline Botanica, Zoologia, Mineralogia e Geologia nelle scuole secondarie stanno unite in una sola disciplina, le Scienze Naturali, senza perciò cessare d'essere scienze distinte per sè e per l'insegnamento superiore (ove anzi dànno pur luogo a branche speciali, ormai autonome ed interessanti: petrografia, tettonica, speleologia, metallogenia, cristallogenia, ecc.); così, Matematica finanziaria e Matematica attuariale possono stare congiunte nelle scuole medie in una sola disciplina X (1). E come la Botanica

---

(1) Quest'accoppiamento, per il predominio dei calcoli numerici e per il suo carattere pratico e commerciale, potrebbe esser chiamato *Aritmetica commerciale* (col qual nome, io ho già indicato un'esposizione di Matematica finanziaria, avente carattere pratico, appunto per scuole secondarie); a tale disciplina, potrebbero essere aggiunte tutte le applicazioni matematiche, presentate ora dalla Computisteria, lasciando a questa i rudimenti della Tecnica bancaria e mercantile. Nel programma del collega *S. Piazza* all'Università commerciale *Luigi Bocconi*, è indicato con Aritmetica commerciale un insieme di questioni pratiche, proprie oggi della Computisteria; mentre è detto di *Aritmetica finanziaria* un corso, che debbo ritenere razionale e collegato al corso complementare unico (Annuario dell'Università predetta, per gli anni scolastici 1914-15 e 1915-16,

e la Zoologia sono legate dalla Biologia, esame dei fatti della
organica comuni a quelle due scienze; così, la Matematica fi
ziaria e la Matematica attuariale hanno in comune la *Teoria n*
matica dell'Interesse, che dà alla Matematica attuariale i fatto
di sconto. Oltre questa zona comune, la Matematica finanziari
tutte le sue più interessanti applicazioni all'ammortamento (del c
il libro del prof. *Viti* non parla, onde non può dirsi che cont
le *teorie della Finanza*), si svolge entro un campo, da cui nient
tinge la Matematica attuariale e nel quale quella si trova piut
in relazione con la Tecnica bancaria e con la Ragioneria; ment
Matematica attuariale si fonda, oltrechè sulla Teoria matem
dell'Interesse, anche sulla Teoria delle Probabilità e sulla Demog
e si trova a contatto diretto con la Tecnica attuariale, cui pu
vano la Legislazione, la Ragioneria, la Statistica economica, le Sc
mediche (1).

Milano, tip. sociale di C. Sironi, 1916), interamente di Matematica finanziaria. L'accoppi
della Matematica finanziaria e della Matematica attuariale in una sola disciplina elemen
pratica, naturalmente per scuole medie, non è nè nuovo, nè recente fuori d'Italia: ne pres
saggi il *Cours d'Algèbre financière di Klompers* (Anversa, 1900) e l'*Aritmetica politica di H*
(Vienna, 1902).

(1) Stimo pertanto doveroso ritenere che il collega *Insolera*, quando, nei suoi Element
in principio, parla di *pleonasmo* per la denominazione di Matematica finanziaria ed attua
scrive che la Matematica finanziaria e la Matematica attuariale, il cui nesso io ho ora
sciuto, *possono e debbano riguardarsi come capitoli diversi di un'unica disciplina*, voglia r
ai *limiti modesti tracciati in linee programmatiche regolamentari di scuole medie statali*. In
caso, stanno tanto il *possono*, quanto il *debbono*. Se poi badiamo alle esigenze dell'insegn
superiore, che non sempre possono essere quelle della scienza in se o di certi aggrupp
voluti da considerazioni locali e personali, i due *possono* e *debbono* sussistono, per la Mat
finanziaria e per la Matematica attuariale, come per l'Algebra Complementare, la Geometr
litica ed il Calcolo infinitesimale (di cui, la 1ª e la 2ª sono riunite nell'Università di To
in quella di Pavia, la 1ª ed il 3º sono fusi nell'Analisi matematica presso il Politecnico
rino; mentre ciò non avviene altrove); sussistono, come per la Geometria analitica, la
tiva, la Descrittiva e la Geometria Superiore, capitoli della Geometria (delle quali, le pri
sono riunite a Roma, la 2ª e la 3ª a Pavia; mentre ciò non avviene altrove); ed infine,
lizzando sempre più, si può dire che quei *possono e debbono* sussistono, come per tutte l
matiche superiori, insegnate nelle nostre Università, poichè fra esse le affinità, le pene
ed i sussidi sono innumerevoli ed ogni giorno nel campo scientifico scompaiono antiche
convenzionali. Ma ciò non toglie, nell'insegnamento universitario, la convenienza ed anz
cessità di rispettare la differenziazione, imposta almeno dal bisogno e dall'utile della d
del lavoro. E certo l'affinità fra Geometria Analitica, Proiettiva e Descrittiva, che hanno
mune l'oggetto come parecchie discipline della facoltà medica, è molto maggiore che fra Mat
finanziaria e Matematica attuariale, alle quali le loro prime applicazioni segnano campi
eppure anche là quante differenze e non tutte di metodo e non tutte formali!... quante
esigenze, specie nei riguardi didattici! E chi non sa che gli abbinamenti di due discipli
ordinariamente a danno di una d'esse, essendo almeno ovvia la preferenza dell'insegna
una, a causa del suo indirizzo speciale degli studi e dei conseguenti suoi lavori? Il colle
lera conosce per esperienza, al pari di me, che, negli istituti superiori di studi commerci
questi gli unici, nei quali Matematica finanziaria e Matematica attuariale possano e
avere sviluppi di carattere scientifico), s'impone la necessità di innalzare convenientem
livello degli studi di Matematica (interessanti a più discipline e costituenti una nota fo
tale di quegli ambienti scolastici), a vantaggio non solamente della Matematica finan
della Matematica attuariale, facendo precedere il corso prescritto di Matematica finanz
una buona introduzione di Analisi. E questa introduzione dev'essere ben diversa da
che si trovano in qualche trattato di applicazioni, ad es. nelle *Leçons élémentaires sur*
des probabilités di R. di Montessus (del resto, pregevoli), nelle quali in sei pagine sono
tati l'analisi combinatoria, la valutazione approssimata di $m!$, gli integrali definiti sem
integrali indefiniti e le derivate, naturalmente per consigliar poi di ammettere senza d
zione qualche formola (pag. 40) e diverse trasformazioni di integrali (pag. 42). Conve
parte con quanto scrive il collega *Bagni* (Teoria matematica dei fenomeni collettivi
pag. XIII, Barbèra, 1915), ritengo che gli istituti superiori di studi commerciali voglio
stenza di tre corsi distinti, ma coordinati: Analisi, Calcolo numerico e Matematica fin
— Probabilità, Metodologia statistica e Demografia; — Matematica e Tecnica attuariali.
stessi istituti possono supplire, per le operazioni assicurative, alla mancanza di una spe

Nel capitolo VI della Statistica, l'autore tratta di alcune funzioni biometriche, delle tavole e delle equazioni di sopravvivenza, della determinazione di probabilità di vita e di decesso per una testa e per più teste e di probabilità di sopravvivenza. Risulta da questo che egli ritiene la Demografia compresa nella Statistica, secondo la concezione degli autori meno recenti. Il che è pure attestato da alcuni cenni storici, nei quali, dopo notizie sullo stadio embrionale dello sviluppo della Statistica, non si accenna chiaramente alle due correnti, manifestatesi nel successivo stadio scientifico (specialmente nel secolo XVIII), della Statistica descrittiva (disciplina politico-amministrativa) con *Couring* ed *Achenwall* e della Statistica investigatoria (scienza sociale) con gli Aritmetici politici e poi su base scientifica con *Süssmilch* (la questione dell'*ordine divino* non toglie il valore del metodo). In quelle notizie storiche, non si accenna neppure all'assetto attuale della Metodologia statistica, affatto distinta dalla Demografia e sorta già col *Cournot* alla fine della prima metà del secolo XIX, per cui rimase sorpassata la corrente della Statistica descrittiva e poi anche quella della Statistica considerata come scienza sociale generale; ed infine non si nota che gli scrittori italiani di Statistica del secolo XIX si occuparono di essa piuttosto con fini politici, in conseguenza delle condizioni politiche del nostro paese a quell'epoca (ved. i trattati di *Bosco* e *Benini*).

Nello stesso capitolo VI, non è fatto cenno delle tavole italiane di popolazione generale, pubblicate nel 1908 in base ai risultati del censimento del 1901. Sono invece presentate alcune statistiche economiche (pagg. 204-211), delle quali non si riesce ad intendere l'utilità per questi Elementi, ma che, ad ogni modo, avrebbero dovuto essere ricavate dall'ultimo Annuario statistico italiano del 1914.

Qualche maggior schiarimento, intorno alla nuda proprietà ed all'usufrutto (pagg. 83-85), non sarebbe inopportuno. Credo di non offendere le considerazioni premesse, sulla difficoltà di giudicare con sufficiente esattezza un libro, che non ha intenti di speculazione, se esprimo il dubbio che, quali si sieno i programmi per scuole medie e quale si sia la valentia dell'insegnante (quella del prof. *Viti* è ben nota), possa essere esposta in scuole secondarie di qualsiasi tipo la lunga dimostrazione di uno scarto s prefissato (pagg. 123-128).

Su questo ed altri dubbi, presentatimi dall'esperienza di alcuni anni d'insegnamento di Matematica finanziaria e di Matematica attuariale, potrà recare un giudizio ponderato il prof. *Viti*, dopo aver adottato per alcuni anni i suoi Elementi nell'Istituto tecnico, quando saranno attuate le riforme didattiche da parecchi anni promesse, *quod manet in votis!*

S. Ortu Carboni.

---

zione attuariale. Indubbiamente, a ciascuno di quei tre Corsi sarebbe affidato un campo non meno vasto, che quello di ciascuno degli altri insegnamenti fondamentali oggi prescritti. Ed a quel modo si può contribuire validamente a dimostrare erronei certi giudizi, per i quali *gli istituti superiori di studi commerciali*, aventi per legge grado universitario, *sarebbero confinati nei limiti di un insegnamento professionale pratico, avendo carattere ed obiettivi analoghi agli istituti tecnici e proponendosi essi di assicurare agli allievi unicamente una buona conoscenza degli istrumenti di lavoro nelle aziende industriali* (Annuario cit. dell'Univ. Comm. Bocconi, pag. 26).

BIBLIOGRAFIA

Annuaire pour l'an 1917, publié par le *Bureau des longitudes*. Paris, Gauthier-Villars.

Questo interessante annuario, che si pubblica fino dal 1796, oltre alle consuete tavole astronomiche e alle copiose notizie relative al Calendario, contiene quest'anno le nozioni essenziali relative alla Metrologia e alcune tavole di Meteorologia. Secondo le disposizioni adottate nel 1904, avrebbe dovuto contenere anche dei quadri dettagliati relativi alla Geografia, alla Statistica, ecc., ma in vista delle circostanze attuali questa parte è stata rinviata a tempi più opportuni. Contiene poi quattro interessanti articoli, cioè:

Il Calendario Babilonese di Bigourdan.
L'anticipazione dell'ora legale durante l'estate dell'anno 1916 di Renaud.
La determinazione del metro in lunghezze d'onda luminosa di Hamy.
La vita e i lavori di Ph. Hatt di Renaud.

Il secondo di questi (circa 90 pagine) è di grande attualità trattando una quistione che ha interessato universalmente il gran pubblico. Il lettore vi troverà una storia dettagliatissima della curiosa quistione e gli svariatissimi argomenti addotti a favore e contro il tanto discusso provvedimento.

Dopo lunga e crudele malattia, sopportata stoicamente, il giorno 15 Febbraio è morto a Livorno il

Prof. RICCARDO MAZZOLA

decano degli insegnanti della R. Accademia Navale.

Laureatosi giovanissimo a Napoli, ove era nato il 22 Aprile 185[illegible] nel 1878 fu nominato insegnante nella Scuola di Marina di Napoli e nel 1881 passò nella R. Accademia Navale, quando questa fu fondata in sostituzione delle scuole di Marina di Napoli e di Genova.

Insegnante di matematica colto e valente, in quarant'anni di carriera ha visto passare dinanzi a sè quasi tutti gli attuali ufficiali di Marina, dai Contr'Ammiragli ai Guardiamarina, i quali certamente anche in mezzo al tumulto della terribile guerra che stanno combattendo, dalle belle navi che vigilano giorno e notte sul mare, che dev essere e sarà nostro, invieranno un mesto ed affettuoso pensiero *all buona e cara imagine paterna* dell'antico maestro.

Ottimo cittadino, esemplare padre di famiglia, fu stimato ed amat da quanti lo conobbero; perciò alle lacrime ardenti della famigli si unisce oggi il rimpianto sincero dei colleghi, degli amici, deg estimatori, per la sua dipartita.

G. L.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 20 Febbraio 1917

VALORI DECIMALI ABBREVIATI E ARROTONDATI

Nota del Socio G. PEANO (*)

Per valore approssimato ad n cifre decimali di un numero reale a si suole intendere l'uno e l'altro dei due valori che indicherò con nomi diversi:

Il valore *abbreviato* ad n cifre decimali di a si ottiene cancellando le cifre che seguono quella di ordine n.

Il valore *arrotondato* ad n cifre decimali di a si ottiene cancellando le cifre che seguono quella di ordine n, e aumentando questa di una unità se la prima cifra cancellata è 5 o maggiore di 5.

Alcuni Autori usano i valori abbreviati, ma la maggioranza preferisce i valori arrotondati, e quasi tutte le tavole dei logaritmi e simili adottano questi. E siccome nessuno dà ragione del suo operare, la scelta pare una questione di gusto. Per rilevare una differenza oggettiva fra i due metodi, esporrò sotto forma parallela le regole dei calcoli numerici sui due valori approssimati.

Un numero reale è dato per approssimazione, quando è dato un intervallo cui esso appartiene. Le notazioni:

$$a^{-}b, \quad a^{\vdash}b, \quad a^{\dashv}b, \quad a^{\vdash\!\dashv}b$$

indicano l'intervallo da a a b, gli estremi a e b essendo esclusi, o compreso il primo, o il secondo, o tutti e due. Questa notazione figurata è molto comoda e discretamente diffusa.

Per distinguere i numeri decimali esatti dagli approssimati si sogliono usare dei punti. Volendo stabilire un parallelo fra i due metodi, introduco qui le notazioni:

$$1{\cdot}23.. = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}24$$

cioè con una scrittura della forma 1·23.. indico l'intervallo da 1·23 incluso ad 1·24 escluso; esso ha per ampiezza l'unità dell'ultimo ordine decimale, e 1·23 ne è il limite inferiore.

$$1{\cdot}23:: = 1{\cdot}225 \vdash 1{\cdot}275$$

cioè con una scrittura della forma 1·23:: indico l'intervallo da 1·225 incluso ad 1·235 escluso; esso ha per ampiezza l'unità dell'ultimo ordine decimale, e 1·23 ne è il punto medio.

(*) Dagli " Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino ", 14 gennaio 1917.

Esempio:

$\sqrt{2}\ \varepsilon\ 1{\cdot}41..$ | $\sqrt{2}\ \varepsilon\ 1{\cdot}41::$

significa:

$1{\cdot}41 \leqq \sqrt{2} < 1{\cdot}41 + 1/100$ | $1{\cdot}41 - 1/200 \leqq \sqrt{2} < 1{\cdot}41+1$

Il simbolo ε nella formula precedente si può leggere "è indica la proposizione singolare. Non si può confondere col segı perchè da "$1{\cdot}41\ \varepsilon\ 1{\cdot}4..$" e da "$1{\cdot}42\ \varepsilon\ 1{\cdot}4..$" non segue "$1{\cdot}41=1$

Parimenti:

$\sqrt{5}\ \varepsilon\ 2{\cdot}23..$ | $\sqrt{5}\ \varepsilon\ 2{\cdot}24::$

si può leggere:

Il valore abbreviato di $\sqrt{5}$ a 2 decimali è 2·23.

Il valore arrotondato di 2 decimali è 2·24.

Si hanno le proprietà seguenti:

§ 1. — Abbreviazioni ripetute.

Il valore abbreviato di un valore abbreviato è un valore abbreviato.

Il valore arrotondato valore arrotondato *non* è s un valore arrotondato.

Così il numero 0·445 arrotondato a due decimali diventa (questo arrotondato ad 1 decimale diventa 0·5, mentre il valo rotondato ad una cifra decimale del numero proposto è 0·4.

§ 2. — Somma di due numeri approssimati.

$1{\cdot}41.. + 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}64 \vdash 3{\cdot}66$

Il valore abbreviato a 2 decimali di questa somma è uno dei due numeri 3·64, ovvero 3·65.

$1{\cdot}41:: + 2{\cdot}24:: = 3.64 \vdash 3$

Il valore arrotondato a cimali di questa somma è u tre numeri 3·64 o 3·65 o 3

In generale:

Il valore abbreviato ad n decimali della somma di due numeri è la somma dei loro valori abbreviati, o questa somma aumentata di una unità dell'ultimo ordine decimale.

La somma dei valori abbreviati è il limite inferiore della somma degli intervalli che essi definiscono.

Il valore arrotondato a cimali della somma di due ı è la somma dei loro valor tondati, o questa somma a tata o diminuita di una dell'ultimo ordine decimal

La somma dei valori a dati è il punto medio della degli intervalli che essi scono.

§ 3. — Prodotto di due numeri approssimati.

Sia a calcolare

$$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23..$$

Se moltiplico i valori abbreviati dei due numeri, ho il limite inferiore del prodotto

$$1{\cdot}41 \times 2{\cdot}23 = 3{\cdot}1443.$$

Il limite superiore del prodotto vale

$$(1{\cdot}41 + 0{,}01) \times (2{\cdot}23 + 0{\cdot}01)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 \times 2{\cdot}23 & = & 3{\cdot}1443 \\ 1{\cdot}41 \times 0{\cdot}01 & = & 141 \\ 2{\cdot}23 \times 0{\cdot}01 & = & 223 \\ 0{\cdot}01 \times 0{\cdot}01 & = & 1 \\ \hline \text{limite superiore} & = & 3{\cdot}1808 \end{array}$$

Quindi

$$1{\cdot}41.. \times 2.23.. = 3{\cdot}1443 \vdash 3.1808.$$

In pratica si suol dire

$$1{\cdot}41.. \times 2{\cdot}23.. \bigcirc 3{\cdot}1..$$

Il prodotto dei due intervalli (o numeri approssimati) è contenuto nell'intervallo 3·1..

Sia a calcolare

$$1{\cdot}41{::} \times 2{\cdot}24{::}$$

Se moltiplico i valori arrotondati ho un valore appartenente all'intervallo prodotto (non il punto medio)

$$1{\cdot}41 \times 2{\cdot}24 = 3{\cdot}1584.$$

Il limite inferiore del prodotto vale

$$(1{\cdot}41 - 0{\cdot}005) \times (2{\cdot}24 - 0{\cdot}005)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 < 2{\cdot}24 & = & 3.1584 \\ -1{\cdot}41 \times 0{\cdot}005 & = - & 705 \\ -2{\cdot}24 \times 0{\cdot}005 & = - & 1120 \\ +0{\cdot}005 \times 0{\cdot}005 & = & 25 \\ \hline \text{limite inferiore} & = & 3{\cdot}140175 \end{array}$$

Il limite superiore vale

$$(1{\cdot}41 + 0{\cdot}005) \times (1{\cdot}25 + 0{\cdot}005)$$

che si calcola così:

$$\begin{array}{rcr} 1{\cdot}41 \times 2{\cdot}24 & = & 3{\cdot}1584 \\ 1{\cdot}41 \times 0{\cdot}005 & = & 705 \\ 2{\cdot}24 \times 0{\cdot}005 & = & 1120 \\ 0{\cdot}005 \times 0{\cdot}005 & = & 25 \\ \hline \text{limite superiore} & = & 3{\cdot}176675 \end{array}$$

Quindi

$$1{\cdot}41{::} \times 2.24{::} = 3{\cdot}140175 \vdash 3{\cdot}176675.$$

In pratica si suol dire

$$1{\cdot}41{::} \times 2{\cdot}24{::} \bigcirc 3{\cdot}1{::} \smile 3{\cdot}2{::};$$

Il prodotto dei due intervalli è contenuto nell'intervallo composto dagl'intervalli definiti dai valori arrotondati 3·1 e 3·2.

Il fatto che questo prodotto di due numeri abbreviati è con nuto nell'intervallo definito da un solo numero abbreviato, men il prodotto dei numeri arrotondati è contenuto nell'intervallo co posto da quelli definiti da due numeri arrotondati, è un caso; ca biando i fattori, si può anche avere l'opposto. È però sempre ve che mentre il prodotto dei limiti inferiori, o valori abbreviati, è limite inferiore del prodotto, invece il prodotto dei valori medii valori arrotondati, non è il valore medio del prodotto.

L'ultima formula scritta contiene il segno $\supset$, che si può legg " è contenuto ", e che indica la proposizione universale; e a des c'è il segno $\cup$ che indica l'intervallo composto. I segni ε, $\supset$, $\cup$ partengono alla Logica Matematica.

§ 4. — Simboli.

Per passare alle regole aritmetiche un po' più complicate, introd nuovi simboli. Uso il segno romano X per indicare *dieci*, o la b del sistema di numerazione. Quindi X^{-n} significa " l'unità decim di ordine n ".

Essendo a un numero reale, positivo e negativo, pongo:

Va = valore intero (o parte intera) di a, cioè quel numero intero (positivo o negativo) x tale che

$$x \leqq a < x + 1.$$

Wa = valore intero arrot dato di a, cioè quel numero tero x tale che

$$x - 1/2 \leqq a < x + 1/2,$$

cioè

$$Wa = V(a + 1/2).$$

Indicando n un numero intero, positivo o negativo, porremo

$V_n a$ = valore abbreviato ad n decimali di a; si può definire così:

$$V_n a = X^{-n} V(X^n a).$$

Si ha

$$V_0 a = Va.$$

Se a è un numero reale, $V_n a$ è un numero con n cifre decimali. Usando i simboli del Formulario si ha:

$$a \,\varepsilon\, q \,.\supset.\, V_n a \,\varepsilon\, n \times X^{-n}.$$

Viceversa, se b è un numero con n cifre decimali, porremo

$$V'_n b = b + (0 \vdash 1) X^{-n}.$$

$W_n a$=valore arrotondato decimali di a; si può definire c

$$W_n a = X^{-n} W(X^n a).$$

Si ha

$$W_0 a = Wa.$$

Parimenti:

$$a \,\varepsilon\, q \,.\supset.\, W_n a \,\varepsilon\, n \times X^{-}$$

Viceversa,

$$b \,\varepsilon\, n \times X^{-n} \,.\supset.$$

$$W' b = b + (-1 \vdash 1) X^{-n/2}$$

$V'_n b$ rappresenta l'intervallo di ampiezza X^{-n}, e il cui limite inferiore è b. Si ha:

$$V_n V'_n b = b$$
$$x \varepsilon V'_n V_n a . = . V_n x = V_n a.$$

Esempio:

$$V'_2 1{\cdot}23 = 1{\cdot}23..$$

$W'b$ rappresenta l'intervallo di ampiezza X^{-n}, e il cui punto medio è b. Si ha:

$$W_n W'_n b = b$$
$$x \varepsilon W'_n W_n a . = . W_n x = W_n a.$$

Esempio:

$$W'_2 1{\cdot}23 = 1{\cdot}23{:}{:}$$

Il simbolo Va ha il valore del simbolo Ea di Legendre; il simbolo $V_n a$ fu introdotto nella mia Nota: *Approssimazioni numeriche*, " R. Acc. dei Lincei ", 2 gennaio 1916. Il simbolo V' indica l'operazione inversa di V. Il simbolo W è qui introdotto, provvisoriamente, per stabilire il parallelismo delle due teorie.

Se p e q sono numeri interi, e $p \leqq q$, allora la scrittura $p \cdots q$, che si legge " l'intervallo dei numeri interi da p a q ", indica l'insieme dei numeri interi x tali che $p \leqq x \leqq q$. È una notazione usata nel " Formulario " da me edito.

§ 5. — Somma di più numeri abbreviati.

Sia a calcolare la somma di m numeri, di cui conosco i valori abbreviati ad n decimali, $b_1, b_2, \ldots b_m$. Dalla definizione di V' sommando si ha:

(1) $$\Sigma V'_n b = \Sigma b + (0 \cdots m) X^{-n}.$$

I due membri di questa eguaglianza sono classi di numeri, e precisamente degli intervalli. Segue:

(2) $$V_n \Sigma V'_n b = \Sigma b + [0 \cdots (m-1)] X^{-n}.$$

I due membri sono classi di numeri con n cifre decimali. Questa proposizione si legge:

" Il valore abbreviato ad n decimali della somma di m numeri, di cui si conoscono i valori abbreviati ad n decimali, è eguale alla somma di questi numeri abbreviati, aumentata di 0, o 1,... o $(m-1)$ unità dell'ultimo ordine ". Quindi $V_n \Sigma V'_n b$ ha m valori.

Si suole cancellare l'ultima cifra decimale di Σb, perchè può differire dalla somma richiesta di più unità; si considera cioè $V_{n-1} \Sigma b$. Siccome Σb è eguale al valore abbreviato $V_{n-1} \Sigma b$, più l'ultima cifra moltiplicata per X^{-n}, segue:

$$\Sigma b \ \varepsilon \ V_{n+1} \Sigma b + (0 \cdots 9) X^{-n},$$

e dalla (2)

$$V_n \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + (0 \cdots (m+8)) X^{-n}.$$

Segue:

(3) $$V_{n-1} \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + \left(0 \cdots V \frac{m+8}{10}\right) X^{-n+1},$$

" Il valore abbreviato ad $n-1$ decimali della somma di m meri di cui si conoscono i valori abbreviati ad n decimali, è eg alla somma di questi numeri abbreviati, in cui si cancelli l'ul cifra, e si aumenti di alcune unità dell'ultimo ordine decimal masto (cioè di ordine $n-1$); il numero di queste unità varia al quoziente di $m+8$ per 10 ".

Fissando dei limiti ad m, si hanno formule particolari:

$$(4) \qquad m \varepsilon 2 \cdots 11 \,.\, \supset .\, V_{n-1} \Sigma V'_n b \supset V_{n-1} \Sigma b + (0 \cdots 1) X^{-n+1}.$$

" Il valore con $n-1$ decimali della somma di più termini, numero non sia superiore ad 11, e dei quali si conoscono i v con n decimali, si ottiene facendo la somma dei valori abbre e cancellando l'ultima cifra; però l'ultima cifra rimasta forse si aumentare di 1 unità ".

In modo analogo si ha:

$$(5) \qquad V_{n-2} \Sigma V' b \supset V_{n-2} \Sigma b + \left(0 \cdots V \frac{m+98}{100}\right) X^{-n+2},$$

da cui si deduce il caso particolare:

$$m \varepsilon 2 \cdots 101 \,.\, \supset .\, V_{n-2} \Sigma V'_n b \supset V_{n-2} \Sigma b + (0 \cdots 1) X^{-n+2}.$$

" E se il numero dei termini non supera 101, si faccia la s dei loro valori abbreviati con n cifre, e si cancellino le ultim tutte le cifre rimaste sono esatte, salvo l'ultima che forse si aumentare di 1 unità ".

§ 5'. — Somma di più numeri arrotondati.

Sia invece a calcolare la somma di m numeri, di cui con valori arrotondati ad n decimali $b_1, b_2, \ldots b_m$. Dalla defin di W', sommando si ha:

$$(1) \qquad \Sigma W'_n b = \Sigma b + (-m \vdash m) X^{-n}/2.$$

Il calcolo di W_n di questa espressione si può fare colla fo

$$Wa = V\,(a + 1/2);$$

e si ottiene

$$(2) \quad \begin{cases} \text{per } m \text{ pari:} & W_n \Sigma W'_n b = \Sigma b + \left(-\frac{m}{2} \cdots \frac{m}{2}\right) \\ \text{per } m \text{ dispari:} & W_n \Sigma W'_n b = \Sigma b + \left(-\frac{m-1}{2} \cdots \frac{m-1}{2}\right) \end{cases}$$

Quindi $W_n \Sigma W'_n b$, per m pari, ha $m+1$ valori, e per m ha m valori. Paragonato questo risultato con quello della valori abbreviati, si ha che i valori abbreviati dànno un'appr zione maggiore se m è pari, o eguale se m è impari, all'approssimazione ottenuta coi valori arrotondati.

Se cancello l'ultima cifra di Σb, e arrotondo il risultato, cioè considero $W_{n-1}\,\Sigma b$, sarà:

$$\Sigma b \varepsilon W_{n-1}\,\Sigma b + (-5 \cdots 4)\,X^{-n}.$$

Il calcolo di $W_{n-1}\,\Sigma\,W'_n b$ si può fare riducendo i W ai V colla solita formula; il risultato è:

$$W_{n-1}\,\Sigma\,W'_n b \supset W_{n-1}\,\Sigma b + \left(V\frac{-m}{20} \cdots V\frac{m+17}{20}\right) X^{-n+1}. \tag{3}$$

Ne risulta che se il numero dei termini è compreso fra 3 e 11, il valore arrotondato a $n-1$ decimali della somma dei numeri di cui si conoscono i valori arrotondati ad n decimali può assumere 3 valori; mentre pei valori abbreviati si avevano soli 2 valori.

Se $m \varepsilon 12 \cdots 20$, si hanno 3 valori sia per V_{n-1} che per W_{n-1}.

Così continuando per valori successivi di m, si vede che i valori abbreviati dànno una approssimazione ora maggiore, ora eguale, mai minore, di quella rispondente ai valori arrotondati.

Delle formule precedenti pel valore approssimato d'una somma, la (4) ha importanza pratica; e ad essa si potrebbe limitare una esposizione elementare.

Nel caso più semplice della somma di 2 numeri abbreviati ad n decimali, la formula (2) dà 2 valori per V_n; la (3) dà 2 valori per V_{n-1}; la (5) dà 2 valori per V_{n-2}, e così via, sempre si ha un'ambiguità. Non esiste un numero intero n, tale che qualunque siano i numeri reali a e b, si abbia sempre $V(a+b) = V(V_n a + V_n b)$. Per esempio $V(1/3 + 2/3) = 1$, mentre $V[V_n(1/3) + V_n(2/3)] = 0$.

Quindi in pratica conviene introdurre una notazione, per es.:

$$1{\cdot}23\ldots = 1{\cdot}23 \vdash 1{\cdot}25$$

indicante l'intervallo di ampiezza 2 unità dell'ultimo ordine.

Esempio:

$$\text{“}\,1{\cdot}41.. + 2{\cdot}23.. = 3{\cdot}64....\,\text{”}.$$

Una notazione consimile fu introdotta dal prof. Tanturri, *Radici di numeri approssimati*, “Atti della R. Acc. di Torino”, 21 maggio 1816, pag. 1156.

§ 6. — Prodotto abbreviato.

Per eseguire il prodotto di due numeri approssimati, non volendo fare calcoli inutili, bisogna adottare la moltiplicazione abbreviata.

Se i due numeri sono $a = \Sigma\,a_r X^{-r}$ e $b = \Sigma\,b_s X^{-s}$, ove r e s sono interi, positivi e negativi, e a_r, b_s sono cifre, il loro prodotto ab-

breviato ai termini di grado decimale n si può indicare con $a\times$
e si può definire:

$$a \times_n b = \Sigma a_r \times b_s \times X^{-r-s}, \qquad \text{ove} \qquad r + s \leqq n.$$

Si può anche ridurre alla forma:

$$a \times_n b = \Sigma (V_{n-s} a) \times b_s \times X^{-s}.$$

Questo prodotto è funzione simmetrica di a e di b, come risu
dalla definizione. Se nell'ultima formula, ai V sostituisco i W, c
ai valori abbreviati sostituisco gli arrotondati, avrò un'espressi
che non è più funzione simmetrica di a e di b.

§ 7. — Cifre negative.

I valori arrotondati presentano qualche analogia colle cifre
gative considerate da CAUCHY, nei " Comptes Rendus de l'Académ
16 novembre 1840 (*Œuvres*, série 1, tome 5, pag. 431). Ogni num
si può esprimere come somma di potenze di dieci, i cui coeffici
sono cifre positive o negative non superiori a 5. Cauchy scriss
segno — sopra le cifre (come facciamo noi per le caratteristi
negative).

Così $1917 = 2\bar{1}2\bar{3} = 2000 - 100 + 20 - 3$. Se un numero è sc
colle cifre $-5 \cdots +4$, troncandolo alla cifra decimale di ordin
si ha il valore arrotondato del numero, eccetto quando la pr
cifra soppressa è -5, ed è seguita da cifra negativa.

Cauchy propose l'uso delle cifre negative per semplificare la m
tiplicazione, la cui tavola si riduce ad un quarto. Egli dice: " J'es
" qu'en raison de leur grande utilité, l'Académie me pardonner
" l'entretenir un moment de cet objet ", e la stessa scusa s
anche per me, a trattare queste questioni molto utili e poco c
siderate.

Alcuni autori che usano i numeri arrotondati, sottolineano l
tima cifra, se questa è aumentata (o forzata); così essi scrivon

$$\text{Log}\, 2 = 0{\cdot}301 \qquad \text{Log}\, 5 = 0{\cdot}69\underline{9}.$$

Ma questa sottolinea, o segno qualunque, la cui presenza o
senza indica in quale delle due metà dell'intervallo definito dal
mero arrotondato si trova il numero considerato, è precisam
una cifra in base 2. Le due pseudo-eguaglianze precedenti sig
cano:

$$\text{Log}\, 2 \varepsilon\, 0{\cdot}301 \vdash 0{\cdot}3015 \qquad \text{Log}\, 5 \varepsilon\, 0{\cdot}6985 \vdash 0{\cdot}599,$$

cioè indicano degli intervalli, di cui sono scritti i limiti super
o inferiore, e non i loro valori medii. Invece di aggiungere
cifra in base 2, si fa meglio dando una cifra decimale di più; c

dirla con Gauss (*Opere*, t. 3, p. 242) " man besser thut eine Ziffer " weiter zu geben ". La maggioranza degli autori che usano i numeri arrotondati, non introducono il segno per distinguere le metà dell'intervallo.

Per approssimare un numero si dà un intervallo cui esso appartiene. Questo intervallo si può definire mediante i suoi limiti inferiore e superiore, o mediante uno di questi limiti e l'ampiezza dell'intervallo e il suo punto medio, detto valore arrotondato.

Questi metodi possono ritenersi equivalenti, finchè i numeri si rappresentano con lettere. Ma usando le cifre, l'operazione dell'arrotondare l'ultima cifra in nessun caso produce semplificazioni; produce spesso complicazioni, e qualche volta dà anche risultati meno approssimati.

Criterio generale di divisibilità dei numeri interi

Introduzione.

I. Il sig. prof. Alberto Conti in un articolo relativo alla divisibilità dei numeri comparso su questo medesimo *Periodico* [1] così scrive:

" Nei principali trattati di aritmetica, per tacere dei minori, la " teoria della divisibilità dei numeri non è trattata in un modo così " completo come sarebbe desiderabile, perchè non vi è contenuto " alcun criterio generale di divisibilità indipendente dalla teoria dei " numeri primi, ma soltanto vi sono raccolti pochi caratteri di di" visibilità per alcuni dei primi numeri naturali, i quali caratteri " sono stabiliti con dimostrazioni tra loro assai simili, ma non ap" pariscono derivazioni di un carattere generale unico, in guisa che " sia posto in evidenza l'intimo legame esistente tra quei singoli " caratteri come pure tra le loro dimostrazioni.

Queste parole dell'illustre Professore fanno a proposito per il presente lavoro, nel quale si vuole dimostrare un criterio generale di divisibilità dei numeri, rispetto al quale tutti i particolari criteri soliti spiegarsi nelle scuole secondarie non sono che particolari conseguenze ed applicazioni. Poi il sig. Conti prosegue:

" Occupandomi di questo argomento trovai nella *Zeitschrift für*

---

(1) *Periodico di Matematica*, anno XIII, pag. 180.

" *Mathematik und Physik* von D^r. O. Schlömilch, Kahl und Can
" (Berlin, 1891) alcune ricerche particolari di Dietrichkeit, le qu
" fatte nell'anno 1891 diedero luogo ad altre ricerche ed osser
" zioni di Speckmann, di Dorsten e di Haas, comparse nella prede
" rivista nell'anno successivo, e particolarmente dalle osservazi
" del dott. Dorsten mi risultò che le regole date dal Dietrichl
" nel quarto e nel quinto fascicolo della *Zeitschrift* del 1891 potev
" considerarsi tutte come casi particolari di un criterio generale
" sig. Perrin pubblicato nel *Comptes rendus de l'Association franç*
" *pour l'avancement des Sciences* (Séance de 9 août 1889). Consu
" pure questo criterio, e non lo trovai abbastanza generale nè f
" dato su proprietà della teoria dei numeri così semplici come qu
" mercè le quali io ho stabilito il criterio „ che l'Autore espon
chiama *Criterio di Pascal* " perchè per stabilirlo io „ (è l'A. che c
tinua) " non ho fatto che dare una maggiore estensione a princ
" contenuti in un trattato [1] di quell'illustre matematico che è f
" una delle sue opere meno conosciute.

2. Il criterio di Pascal svolto dal sig. Conti è fondato sul segu

TEOREMA. — *Il resto della divisione di un numero intero* n *di* p *c per un altro numero* d *di* q *cifre* ($q \leqslant p - 1$) *è uguale al resto c divisione per* d *della somma dedotta dal numero* n *prendendon prime* q *cifre più la somma dei prodotti delle rimanenti cifre di* n, *i tiplicate ordinatamente per i primi* $p - q$ *resti successivi della c sione per* d *della prima potenza della base del sistema di numeraz che supera* d *stesso.*

Il criterio di divisibilità che ne deduce è il seguente:

Dato un numero qualunque intero n *di* p *cifre e un altro nu intero qualunque* d *di* q *cifre* ($q \leqslant p - 1$) *per sapere il resto dello visione di* n *per* d *si calcolino i primi* $p - q$ *moltiplicatori fissi co spondenti a* d: *si stacchi da* n *il numero formato dalle sue prime* q *a destra, e si aggiunga ad esso la somma dei prodotti delle rimar cifre di* n *moltiplicate ordinatamente per i moltiplicatori fissi calc Il numero* n' *così ottenuto è congruo ad* n *rispetto a* d: *e oper con* n' *come si è operato con* n *e così proseguendo, perverremo i ad un numero congruo a tutti i precedenti* n, n', … *e così piccolo si possa calcolare a memoria il resto della sua divisione per* d. *Q sarà il resto domandato, onde se questo resto sia zero,* n *sarà divi per* d. *I moltiplicatori fissi sono i resti de' quali si parla nell'enun del teorema.*

Per l'uso di questo criterio di divisibilità l'autore dell'articol compilato una tabella dei moltiplicatori fissi di tutti i numeri p da 1 a 101.

---

(1) PASCAL, *De numeris multiplicibus ex sola characterum numericorum additione cognos* (Il *Periodico di Matematica*, anno II ne dà una traduzione italiana).

In un articolo successivo (1) l'A. modifica il criterio di Pascal per alcuni casi particolari.

Nel 1899 lo stesso A. ha pubblicato un opuscolo sullo stesso argomento (2) e ve lo tratta sotto una forma più adeguata all'insegnamento secondario servendosi della teoria delle congruenze: ed alle proprietà essenziali del " Criterio di Pascal „ aggiunge altre che per il detto Criterio non sono essenziali, ma che con le altre possono pure offrire al lettore una teoria più completa della divisibilità dei numeri.

3. Intorno a questo argomento scrisse il sig. Lalbaletrier, (3) il quale dimostra due teoremi, dei quali il secondo, che fa più a proposito per noi, è il seguente:

Ogni numero è multiplo di un fattore della forma na — 1 *aumentato della somma dell'* n$^{\text{esima}}$ *parte delle sue decine (o più generalmente unità di 2° ordine) e delle sue unità.*

Ogni numero è multiplo di un fattore della forma na + 1 *diminuito della differenza fra l'*n$^{\text{esima}}$ *parte delle sue decine (unità di 2° ordine) e delle sue unità* (a *è la base del sistema di numerazione*).

Il sig. Lalbaletrier aggiunge al suo articolo la notizia, che dell'argomento della divisibilità dei numeri trattò la *Revue de la Société des Sciences de Guatemala* (4) nella quale si dimostrano due criterî di divisibilità: uno assai simile al " Criterio di Pascal „ (nov. 1893), l'altro (dic. 1893) dovuto al sig. A. Sanchez, che parte dal medesimo principio del sig. Lalbaletrier, cioè parte dalla possibilità di mettere ogni numero od un suo multiplo sotto la forma $10n \pm 1$.

4. Della divisibilità dei numeri tratta frequentemente il *Journal de Mathématiques* de Vuibert: ma per lo più in esercizî particolari che propone a dimostrare, o de' quali dà senz'altro la dimostrazione. Però qualche cosa di più di un semplice esercizio è la nota del signor Potier (5) dove dimostra che se $A - B$ e $C + D$ sono divisibili per n anche $AC + BD$ è divisibile per n.

Altri teoremi di importanza del sig. A. Bertrand vi si trovano, ma non sono ordinati a stabilire un criterio generale di divisibilità.

5. Il sig. prof. Mariantoni tratta della divisibilità dei numeri nel *Periodico di Matematica.* (6) Stabilisce i caratteri di divisibilità per i numeri primi (p) della forma $10k + 9$, $10k + 7$, $10k + 3$, $10k + 1$ servendosi della considerazione d'un sistema di due equazioni a tre incognite

$$ax + by = p$$
$$Ax + By = pz$$

(1) *Periodico di Matematica*, anno XIII, pag. 207.
(2) *La teoria della divisibilità.* Bologna, Zanichelli, 1899.
(3) *Journal de Mathematiques* de Longchamps, anno 1894, pag. 54.
(4) *Journ. de Math.* de Vuibert, 15 febr. 1890.
(5) *Journ. de Math.* de Vuibert, 1 dec. 1892.
(6) *Periodico di Matematica*, anno XIII, pag. 149.

dove p è numero primo, a e b sono le decine e le unità di p,

$$p = 10a + b.$$

L'A. dimostra che se α e β sono due numeri che soddisfano a relazione

$$a\alpha + b\beta = p$$

il numero

$$N = 10A + B$$

è divisibile per p quando

$$A\alpha + B\beta$$

sia divisibile per p.

Stabilita la condizione di divisibilità enumera le cautele da servare per renderne vantaggioso l'uso, e poi fa applicazioni a c particolari.

Il sig. prof. Levi [1] prende a dimostrare il criterio di divisibil del sig. prof. Mariantoni servendosi di concetti puramente aritr tici, cioè senza ricorrere alle equazioni.

Ed il prof. Mariantoni fa seguire [2] alla nota del prof. L un'altra nota, piccola di mole, ma di molta importanza, la qu contiene un criterio generalissimo di divisibilità. Dice:

Sia $p = A\alpha + b$ e sia primo con $a\alpha$ ovvero b. Sia inoltre N numero qualsiasi e si ponga

$$N = A\alpha' + B.$$

La condizione necessaria e sufficiente affinchè N *sia multiplo d è che sia*

$$Ab\alpha' - B\alpha a' \equiv 0 \pmod{p}.$$

6. Il prof. Gino Loria tratta pure di questo argomento [3] e s bilisce un criterio che il prof. Alb. Tagiuri riproduce parzialme in un proprio studio [4] colle parole seguenti:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un numero intero scritto nel sistema di numerazione decimale sia divisibile per a *pr con* 10 *è che sia divisibile per* a *la somma dei numeri ottenuti, se rando, finchè è possibile, le cifre di* N *in tanti gruppi di* m *cifre c scuno cominciando da destra,* m *essendo un numero intero che veri la congruenza*

$$10^m \equiv 1 \pmod{a}.$$

Il numero m per il teorema di Fermat generalizzato esiste perciò il criterio è generale.

Il sig. prof. Tagiuri nel suo lavoro estende questo criterio di visibilità ai numeri di un sistema di base g qualunque.

---

(1) *Period. di Mat.*, anno XIII, pag. 192.
(2) *Period. di Mat.*, anno XIII, pag. 217.
(3) LORIA, *Carattere di divisibilità per un numero intero qualunque.* " Rendiconti della R. dei Lincei, 1901 " e *Bollettino di Matematica* del prof. Conti, genn.-febbr. 1902.
(4) *Period. di Mat.*, anno XVIII, pag. 43.

7. Invece il sig. prof. Ant. Bindoni [1] parte dal medesimo criterio del prof. Loria che riassume nel modo seguente:

Dato un numero N *se con* $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$ *si indicano i numeri formati dai successivi gruppi di* t *cifre del numero* N *da destra a sinistra si ha facilmente l'una o l'altra delle due eguaglianze*

$$N - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) = a_1(10^t - 1) + a_2(10^{2t} - 1) + \\ + a_3(10^{3t} - 1) + \ldots$$

$$N - (a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots) = a_1(10^t + 1) + a_2(10^{2t} + 1) + \\ + a_3(10^{3t} + 1) + \ldots$$

dalle quali scendono rispettivamente i seguenti teoremi:

I. *Se* p *divide* $10^t - 1$, *la condizione necessaria e sufficiente perchè* p *divida* N *è che* p *divida*

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots).$$

II. *Se* p *divide* $10^t + 1$, *la condizione necessaria e sufficiente perchè* p *divida* N *è che* p *divida*

$$(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots).$$

Indi il prof. Bindoni richiama alla mente il significato della frase matematica: 10 (o più generalmente la base di numerazione a) appartiene a t rispetto al modulo p: ed è che se p è primo con 10 (o più generalmente colla base a) e t è il minimo esponente da darsi a 10 (ovvero ad a) per modo che $10^t - 1$ (ovvero $a^t - 1$) sia divisibile per p, si dice che 10 (ovvero a) appartiene a t rispetto al modulo p.

Suppone poi di possedere una tabella (cfr. HUMBERT, *Traité d'Arith.*, Nony, Paris) contenente gli esponenti ai quali appartiene 10 (ovvero a) rispetto ai moduli primi e assume a dimostrare i due seguenti teoremi:

I. *Se* a, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sono numeri primi fra loro a due a due e* $t_1, t_2, \ldots t_n$ *sono gli esponenti ai quali appartiene* a *rispetto ai moduli* $b_1, b_2, \ldots, b_n$; *l'esponente al quale appartiene* a *rispetto al modulo* $(b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_n)$ *è il minimo comune multiplo di* $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

II. *Se* a, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *sono numeri primi fra loro a due a due e* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ *sono i minimi esponenti per i quali*

$$a^{t_1} + 1, \ a^{t_2} + 1, \ldots, a^{t_n} + 1$$

sono divisibili rispettivamente per $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *ed inoltre* $t_1, t_2, \ldots t_n$ *sono dispari, il minimo esponente* t *per cui* $a^t + 1$ *è divisibile per il prodotto* $(b_1 \times b_2 \times \ldots \times b_n)$ *è il minimo comune multiplo di* $t_1, t_2, \ldots, t_n$.

[1] *Boll. di Mat.*, nn. 5-6-7-8, 1905, pag. 87.

8. Il sig. prof. P. A. Fontebasso in un articolo dal titolo " Alg
ritmo dei divisori di un numero dispari " [1] dimostra la seguen
proposizione:

*La condizione necessaria e sufficiente perchè un numero dispari
divisibile per un numero* d *è che sia*

$$d = k + t \pm \sqrt{(k+t)^2 - \mathrm{N}}$$

indicando con k *la radice a meno* 1 *di* N *e* t *un numero tale che*

$$(k+t)^2 - \mathrm{N}$$

sia un quadrato.

9. Dopo questo piccolo saggio della bibliografia relativa all'a
gomento di cui parliamo si intende come questo punto di matem
tica sia stato oggetto di studio e come sia tuttora argomento
attualità.

Rendo omaggio a tanti ingegni che portarono il loro contrib
al comune patrimonio scientifico, ed anch'io mi propongo di port
un sassolino all'edificio della scienza collo svolgere e dimostrare
criterio generale di divisibilità, che se non ha tutti i pregi, cer
mente non gli si possono negare i seguenti: di esser generalissi
così da valere per ogni numero scritto in qualsivoglia sistema
numerazione: di esser vario nella sua unità, in quanto che è susc
tibile di varie forme corrispondenti alle varie forme sotto le qu
si pongono i numeri: di esser molteplice, in quanto si presta a f
nire variati criteri per un medesimo numero: di esser facile, poi
fondamentalmente si riduce al calcolo di un binomio di cui cias
termine consta di 2 fattori: di non richiedere tavole di moltipli
tori fissi: e nemmeno tavole degli esponenti cui appartiene la b
del sistema di numerazione rispetto a diversi moduli: e di con
nere in germe, e più che in germe tutti i diversi criteri di div
bilità che soglionsi spiegare nelle scuole secondarie.

Criterio di divisibilità.

10. Sia N un numero intero e Δ un altro numero intero (N >
Ci proponiamo di stabilire criteri di divisibilità di N per Δ.

A tal uopo si introduca un terzo numero D, che sia multiplo d

Si decompongano N e D della somma di due parti second
uguaglianze seguenti:

$$\mathrm{N} = \mathrm{B} \,.\, 10^m + a$$

$$\mathrm{D} = \mathrm{P} \,.\, 10^m + q$$

---

[1] *Boll. di Mat.*, nn. 10-11-12 (1914-15) anno XIII.

dove a e q sono i numeri formati dalle m cifre a destra; e B, P sono i numeri formati dalle cifre rimanenti, tolte le parti a e q.

Si osservi che se Δ è primo con q, deve esser primo anche con P.

Teorema. — **Se Δ è primo con P ovvero con q, la condizione necessaria e sufficiente perchè N sia divisibile per Δ è che il binomio $aP - Bq$ sia divisibile per Δ, ossia**

$$aP - Bq = \text{mult } \Delta.$$

Infatti si moltiplichino ambo i membri di (1) per P; e quelli di (2) per B, e si avrà:

$$NP = BP \,.\, 10^m + aP \tag{3}$$

$$DB = BP \,.\, 10^m + Bq. \tag{4}$$

Si tolga membro a membro (4) da (3) e si otterrà:

$$NP - DB = aP - Bq \tag{5}$$

e se poniamo

$$aP - Bq = M_1$$

sarà pure

$$NP - DB = M_1 \,. \tag{6}$$

Ora, è evidente che se Δ è un divisore di N, deve essere divisore anche di M_1: e con ciò è dimostrato che la condizione è necessaria: che la condizione sia sufficiente si vede tosto osservando che se Δ divide M_1, deve dividere anche NP, e poichè Δ è primo con P, dovrà dividere N.

c. d. d.

11. Osservazione I. — Il binomio $aP - Bq$ può esser preso nel suo valore assoluto; il teorema continua a valere.

12. Osservazione II. — Il teorema vale anche se a e q sono numeri maggiori dei detti: purchè B e P rappresentino sempre unità intere dell'ordine $(m+1)^{\text{esimo}}$ ed N e D conservino la forma

$$N = B \,.\, 10^m + a \qquad D = P \,.\, 10^m + q.$$

13. Osservazione III. — Applicato ad N una volta il criterio di divisibilità suesposto ed ottenuto M_1, si può applicare lo stesso criterio ad M_1 ed ottenere un altro binomio M_2.

A tal uopo conviene porre M_1 sotto la forma (simile a quella di N e di D)

$$M_1 = B_1\, 10^m + a_1 \,.$$

Nel qual caso si ha

$$M_2 = a_1\, P - B_1\, q\,;$$

e così di seguito.

14. Osservazione IV. — Posto che N non sia divisibile per Δ, e posto che $M_1 = aP - Bq$ si prenda tenendo conto anche del segno, il resto della divisione di N per Δ si può calcolare secondo la seguente relazione

$$NP \equiv M_1 \text{ mod } (\Delta).$$

Ossia per avere da M_1 il resto di cui si parla converrà aggiu gere ad M_1 un multiplo di Δ, che dia una somma divisibile per Fatta la divisione e trovato il quoziente, questo quoziente sarà co gruente con N rispetto al modulo Δ; ed esso quoziente potrà co durre al resto cercato.

Similmente da M_2 si potrà avere il resto della divisione di per Δ osservando che

$$PM_1 \equiv M_2 \bmod (\Delta)$$

e che per conseguenza

$$NP^2 \equiv M_2 \bmod (\Delta)$$

e così di seguito.

15. Osservazione V. — Per semplificare la scrittura e il l guaggio si porrà lo zero fra i multipli di Δ: la qual cosa ha ver in questo senso che lo zero diviso per Δ dà per resto zero.

16. Del teorema dimostrato si possono fare applicazioni a num determinati. Diamone alcuni esempi.

Sia $\Delta = 7$. Per formulare criteri di divisibilità di un numero per il numero 7 si ricorre ad un multiplo qualsiasi di 7.

$$D = 14, 21, 28, 35, \ldots, 112, \ldots, 1001, \ldots.$$

Si decompone questo multiplo in uno dei modi indicati risp denti ai varî valori di m ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Così per es. 1001 si decomporre nei modi seguenti:

$$1001 = 100 \,.\, 10 + 1; \qquad 1001 = 10 \,.\, 10^2 + 1; \qquad 1001 = 1 \,.\, 10^3 +$$

In corrispondenza al modo di decomporre D si decompone anche e quindi si costruisce il binomio

$$M_1 = aP - Bq$$

il quale posto uguale ad un multiplo di 7 esprime la condizione divisibilità per 7.

Così: preso $D = 14$; e fatto $m = 1$; $P = 1$; $q = 4$

$$N = B \,.\, 10 + a \quad (a \text{ unità semplici, B decine}$$
$$D = 1 \,.\, 10 + 4 \,.$$

La condizione di divisibilità di N per 7 sarà

$$a - 4B = \text{mult } 7$$

la quale si interpreta: *Un numero è divisibile per 7 se la differe fra il quadruplo delle decine e la cifra delle unità è divisibile per*

Preso $D = 21$ e fatto $m = 1$; $P = 1$; $q = 1$

$$N = B \,.\, 10 + a$$
$$D = 2 \,.\, 10 + 1$$

(¹) Si avverta che B non è la sola cifra delle decine, ma è l'intero numero di decine c nute in N: e così pure si avverta che in seguito dicendo le decine, le centinaia... di un nu si intende l'intero numero di decine, di centinaia contenute nel numero.

la condizione di divisibilità di N per 7 sarà

$$2a - B = \text{mult } 7.$$

Preso $D = 1001$ e fatto $m = 1$; $P = 100$; $q = 1$

$$N = B \,.\, 10 + a \quad (a \text{ cifra delle unità, B decine})$$
$$D = 100 \,.\, 10 + 1$$

la condizione di divisibilità per 7 sarà

$$100\, a - B = \text{mult } 7.$$

Fatto invece $m = 2$; $P = 10$; $q = 1$

$$N = B \,.\, 10^2 + a \quad (a \text{ classe binaria a destra, B centinaia})$$
$$D = 10 \,.\, 10^2 + 1$$

la condizione di divisibilità per 7 sarà

$$10\, a - B \text{ mult } 7.$$

Fatto finalmente $m = 3$; $P = 1$; $q = 1$

$$N = B \,.\, 10^3 + a \quad (a \text{ classe ternaria a destra, B migliaia})$$
$$D = 1 \,.\, 10^3 + 1$$

la condizione di divisibilità di N per 7 sarà

$$a - B = \text{mult } 7.$$

Esempio. — $N = 1876$.

Fatto $m = 1$; la condizione di divisibilità per 7 è

$$6 \,.\, 100 - 187 = 413 = \text{mult } 7.$$

Fatto $m = 2$; la condizione di divisibilità è

$$76 \,.\, 10 - 18 = 742 = \text{mult } 7.$$

Fatto $m = 3$ la condizione è

$$876 - 1 = 875 = \text{mult } 7.$$

* * *

17. Il numero D, multiplo di Δ, può esser messo sotto la forma di differenza nel modo seguente

$$D = P \,.\, 10^m - q$$

dove q è il complementare del numero composto delle ultime m cifre a destra di D, e dove P rappresenta unità dell'ordine $(m+1)^{\text{esimo}}$.

Per esempio si può porre 8765 sotto le forme seguenti:

$$9 \,.\, 10^3 - 235 \quad \text{ovvero} \quad 88 \,.\, 10^2 - 35 \quad \text{ovvero} \quad 877 \,.\, 10 - 5.$$

Ciò posto, dati i numeri N, Δ, D, si stabilisce il criterio di d
sibilità di N pei Δ nel seguente:

Teorema. — **La condizione necessaria e sufficiente perchè**

$$N = B \cdot 10^m + a$$

sia divisibile per Δ divisore di

$$D = P \cdot 10^m - q$$

con Δ primo con P ovvero q, è

$$N_1 = aP + Bq = \text{mult } \Delta.$$

Infatti si moltiplichino ambo i membri di (1) per P ed am
membri di (2) per B e si sottraggano membro a membro e si

$$NP - DB = aP + Bq$$

ossia

$$NP - DB = N_1.$$

Ora è evidente che se Δ divide N, deve dividere anche N_1;
tal modo è dimostrato che la condizione è necessaria; vicev
se Δ divide N_1, deve dividere anche NP, e poichè è primo co
dovrà pure dividere N, e così è dimostrato che la condizione è
ficiente.

18. Applicazioni particolari.

Sia $\Delta = 7$, si prenda $D = 1 \cdot 10 - 3$; $m = 1$; $P = 1$; $q = 3$

$$N = B \cdot 10 + a \quad (a \text{ cifra delle unità, B de}$$
$$D = 1 \cdot 10 - 3$$

la condizione di divisibilità per 7 sarà

$$a + 3B = \text{mult } 7.$$

Sia $\Delta = 19$ e si prenda $D = 20 - 1$; $m = 1$; $P = 2$; $q = 1$

$$N = B \cdot 10 + a \quad (a \text{ cifra delle unità, B de}$$
$$D = 2 \cdot 10 - 1$$

la condizione di divisibilità di N per 19 sarà

$$2a + B = \text{mult } 19.$$

Sia $\Delta = 37$ e si prenda $D = 999$; $m = 3$; $P = 1$; $q = 1$

$$N = B \cdot 10^3 + a \quad (a \text{ classe ternaria a destra, B mig}$$
$$D = 1 \cdot 10^3 - 1$$

la condizione di divisibilità di N per 37 sarà

$$a + B = \text{mult } 37.$$

E così si possono stabilire i criteri di altri numeri ad arbitric

In particolare si possono dimostrare i criteri di divisibilità per 2, 4, 5, 8, 25, 125 che soglionsi spiegare nelle scuole secondarie.

Sia $\Delta = 2$ e si prenda $D = 8 = 1 \,.\, 10 - 2$; $m = 1$; $P = 1$; $q = 2$

$$N = B \,.\, 10 + a \quad (a \text{ cifra delle unità sempl., } B \text{ decine})$$
$$P = 1 \,.\, 10 - 2$$

la condizione di divisibilità di N per 2 sarà

$$a + 2B = \text{mult } 2.$$

Se si osserva che 2B è sempre divisibile per 2 si conclude che *Un numero è divisibile per 2 quando la cifra delle unità semplici è 0 o è divisibile per 2.*

Per dimostrare il criterio di divisibilità di N si prende: per 4, $D = 1 \,.\, 10^2 - 4$; per 5, $D = 1 \,.\, 10 - 5$; per 8, $D = 1 \,.\, 10^3 - 8$; per 25, $D = 1 \,.\, 10^3 - 25$; per 125, $D = 1 \,.\, 10^3 - 125$, e si ragiona come dianzi.

* * *

19. Il numero N si può mettere sotto la forma di un polinomio nel modo seguente

$$N = g \,.\, 10^{lm} + f \,.\, 10^{(l-1)m} + \ldots + d \,.\, 10^{3m} + c \,.\, 10^{2m} + b \,.\, 10^{m} + a$$

dove a, b, c, d, f, g sono le classi successive di ordine m che trovansi nel numero M.

Se Δ è divisore di

$$D = P \,.\, 10^{m} - q$$

ed è primo con P, si ha il criterio di divisibilità di N per Δ nel seguente

Teorema. — **La condizione necessaria e sufficiente perchè N sia divisibile per Δ è:**

$$N_1 = aP^l + bP^{l-1} q + c \,.\, P^{l-2} q^2 + \ldots + f \,.\, Pq^{l-1} + gq^l = \text{mult } \Delta.$$

Infatti si ponga

$$N = (g \,.\, 10^{(l-1)m} + f \,.\, 10^{(l-2)m} + \ldots + d \,.\, 10^{2m} + c \,.\, 10^{m} + b)\, 10^{m} + a.$$

Per il teorema precedente (17) la condizione di divisibilità di N per Δ sarà

$$N_1 = aP + (g \,.\, 10^{(l-1)m} + f \,.\, 10^{(l-2)m} + \ldots + d \,.\, 10^{2m} +$$
$$+ c \,.\, 10^{m} + b)\, q = \text{mult } \Delta.$$

Si ordini N_1 nel modo seguente

$$N_1 = (gq \,.\, 10^{(l-2)m} + fq \,.\, 10^{(l-3)m} + \ldots + dq \,.\, 10^{m} + cq)\, 10^{m} + (bq + aP).$$

Si applichi ad N_1 il medesimo teorema, e si avrà che la con-
zione di divisibilità di N e di N_1 per Δ sarà:

$$N_2 = (aP + bq)P + (gq \cdot 10^{(l-2)m} + fq \cdot 10^{(l-3)m} + \ldots + dq \cdot 10^m + cq)\, q = \text{mult}\ \Delta$$

Si ordini N_2 come segue

$$N_2 = (gq^2 \cdot 10^{(l-3)m} + f \cdot q^2 \cdot 10^{(l-4)m} + \ldots + d \cdot q^2)\, 10^m + (aP^2 + bPq + cq^2)$$

E si applichi ad N_2 il medesimo teorema, e si avrà che la co-
dizione di divisibilità di N, N_1, N_2 per Δ sarà

$$N_3 = (aP^2 + bPq + cq^2)P + (g \cdot q^2 10^{(l-3)m} + f \cdot q^2 10^{(l-4)m} + \ldots + d \cdot q^2)\, q = \text{mult}\ \Delta$$

ossia

$$N_3 = g \cdot q^3 \cdot 10^{(l-3)m} + f \cdot q^3 10^{(l-4)m} + \ldots + (aP^3 + bP^2q + cPq^2 + dq^3) = \text{mult}$$

Dopo $l-1$ applicazioni del teorema, si avrà

$$N_{l-1} = g \cdot q^{l-1} 10^m + (aP^{l-1} + bP^{l-2} q + cP^{l-3} q^2 + \ldots + f \cdot q^{l-1})$$

e dopo l applicazioni si avrà che la condizione di divisibilità
N, N_1, $N_2, \ldots N_{l-1}$ per Δ sarà

$$N_l = aP^l + bP^{l-1} q + cP^{l-2} q^2 + \ldots + f \cdot Pq^{l-1} + g \cdot q^l = \text{mult}\ \Delta.$$

c. d

20. Applicazioni.

Si faccia $m=1$ e si ponga

$$N = g \cdot 10^l + f \cdot 10^{l-1} + \ldots + d \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + b \cdot 10 + a$$

($a, b, c, \ldots, f, g$ sono le singole cifre di N).

Sia $\Delta = 3$, 9 e si prenda

$$D = 9 = 1 \cdot 10 - 1; \qquad P = 1; \qquad q = 1$$

la condizione di divisibilità di N per 3, 9 sarà

$$a + b + c + \ldots + f + g = \text{mult}\ 3,\ 9.$$

Sia $\Delta = 2$, 4, 8 e si prenda

$$D = 8 = 1 \cdot 10 - 2; \qquad P = 1; \qquad q = 2$$

e la condizione di divisibilità di N per 2, 4, 8 sarà

$$a + 2b + 2^2c + 2^3d + \ldots + 2^{l-1} f + 2^l g = \text{mult}\ 2,\ 4,\ 8.$$

Come ulteriore conseguenza facilmente si intende che la co
zione di divisibilità di N per 2, 4, 8 è che

$$a, \qquad a + 2b, \qquad a + 2b + 4c$$

sieno divisibili rispettivamente per 2, per 4, per 8.

Si faccia $m=2$ e si ponga

$$N=g\,.\,10^{2l}+f\,.\,10^{2(l-1)}+\ldots+d\,.\,10^{6}+c\,.\,10^{4}+b\,.\,10^{2}+a$$

(a, b, c, ..., f, g sono le classi binarie di N).

Sia $\Delta=11$ e si prenda

$$D=99=1\,.\,10^{2}-1\,;\quad P=1\,;\quad q=1$$

e la condizione di divisibilità di N per 11 sarà

$$a+b+c+\ldots+f+g=\text{mult } 11.$$

Si faccia $m=3$ e si ponga

$$N=g\,.\,10^{3l}+g\,.\,10^{3(l-1)}+\ldots+d\,.\,10^{9}+c\,.\,10^{6}+b\,.\,10^{3}+a$$

(a, b, c, d, ..., f, g sono le classi ternarie di N).

Sia $\Delta=3$, 9, 27, 37, 111, 333, 999 e si prenda

$$D=999=1\,.\,10^{3}-1\,;\quad P=1\,;\quad q=1,$$

la condizione di divisibilità di N per 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999 sarà

$$a+b+c+d+\ldots+f+g=\text{mult } 3,\ 9,\ 27,\ 37,\ 111,\ 333,\ 999.$$

***

21. Cambiando nel teorema precedente q in $-q$ si ha il seguente

Teorema. — **La condizione necessaria e sufficiente perchè il numero**

$$N=g\,.\,10^{lm}+f\,.\,10^{(l-1)m}+\ldots+d\,.\,10^{3m}+c\,.\,10^{2m}+b\,.\,10^{m}+a$$

sia divisibile per Δ divisore di

$$D=P\,.\,10^{m}+q$$

(dove Δ è primo con P ovvero con q) è

$$a\,.\,P^{l}-b\,.\,P^{l-1}q+c\,.\,P^{l-2}q^{2}-d\,.\,P^{l-3}q^{3}+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{l-1}f\,P\,.\,q^{l-1}+(-1)^{l}g\,.\,q^{l}=\text{mult } \Delta.$$

22. Osservazione. — Il valore di P dal caso del teorema precedente al caso del presente subisce una variazione per l'aumento di una unità.

Per esempio: se pongasi $37=3\,.\,10+7$ sarà $P=3$; e se si ponga $37=40-3=4\,.\,10-3$ sarà $P=4$. Per altro questa variazione nel valore di P non toglie alcun valore alla dimostrazione fatta nel teorema precedente. Del resto si può dare di quest'ultima proposizione la dimostrazione direttamente.

23. Applicazione. — Sia

$$N = 156 = 1 \,.\, 10^2 + 5 \,.\, 10 + 6$$
$$\Delta = D = 12 = 1 \,.\, 10 + 2$$

la condizione di divisibilità di 156 per 12 è

$$6 - 5 \,.\, 2 + 1 \,.\, 2^2 = \text{mult } 12$$

la quale è verificata. Se ne conclude che 156 è divisibile per 12

24. Corollario I. — *Supposto che il numero delle cifre di* P *superi quello delle cifre di* q, *supposto* N *sia divisibile per* Δ *con*

$$aP^l - bB^{l-1} q + c \,.\, P^{l-2} q^2 - \ldots (-1)^{l-1} fPq^{l-1} + (-1)^l gq^l = 0$$

anche il numero

$$N' = a \,.\, 10^{lm} + b \,.\, 10^{(l-1)m} + \ldots + f \,.\, 10^m + g$$

è divisibile per Δ' *divisore di* $D' = q \,.\, 10^m + P$.

Infatti la condizione di divisibilità di N' per Δ' è

$$g \,.\, q^l - f \,.\, q^{l-1} P + \ldots + (-1)^{l-1} bq P^{l-1} + (-1)^l aP^l = \text{mult } \Delta'$$

la quale, per l'ipotesi fatta, è verificata per il valore zero.

Esempio. — Si è visto che 156 è divisibile per 12 con

$$6 - 5 \,.\, 2 + 1 \,.\, 2^2 = 0.$$

Ne segue che 651 è divisibile per 21 e per ogni divisore di

25. Corollario II. — Ancora *nell'ipotesi che le cifre di* P *superino quelle di* q, *se il numero*

$$N = g \,.\, 10^{lm} + f \,.\, 10^{(l-1)m} + \ldots + b \,.\, 10^m + a$$

è divisibile per i numeri $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ *divisori rispettivi di*

$$D_1 = P_1 10^m + q_1 ; \qquad D_2 = P_2 \,.\, 10^m + q_2 ; \qquad D_3 = P_3 \,.\, 10^m + q_3 ,$$

con

$$aP_i^l - b \,.\, P_i^{l-1} q_i + \ldots + (-1)^{l-1} f\, P_i q_i^{l-1} + \\ + (-1)^l g \,.\, q_i^l = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots$$

anche

$$N' = a \,.\, 10^{lm} + b \,.\, 10^{(l-1)m} + \ldots + f \,.\, 10^m + g$$

è divisibile per i numeri $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3 \ldots$ *divisori rispettivi di*

$$D'_1 = q_1 10^m + P_1 ; \qquad D'_2 = q_2 10^m + P_2 ; \qquad D'_3 = q_3 10^m + P_3 .$$

Esempio. — Sia il numero 1560.

Esso è divisibile per 12 con

$$0 - 6 \,.\, 2 + 5 \,.\, 2^2 - 1 \,.\, 2^3 = -12 + 20 - 8 = 0.$$

È pure divisibile per 13 con

$$0 - 6 \,.\, 3 + 5 \,.\, 3^2 - 1 \,.\, 3^3 = -18 + 45 - 27 = 0.$$

Ne segue che 0651 è divisibile per 21 e per 31, e difatti

$$651 = 21 \times 51.$$

26. Aggiungiamo alcune applicazioni particolari del teorema precedente.

Sia $m = 1$ e si ponga

$$\mathrm{N} = g \,.\, 10^l + f \,.\, 10^{l-1} + \ldots + c \,.\, 10^2 + b \,.\, 10 + a\,.$$

(a, b, c, ... f, g sono le singole cifre di N).

Sia $\Delta = 11$ e si prenda

$$\Delta = \mathrm{D} = 11 = 1 \,.\, 10 + 1\,; \qquad \mathrm{P} = 1\,; \qquad q = 1.$$

La condizione di divisibilità di N per 11 sarà

$$a - b + c - d + \ldots \pm f \mp g = \text{mult } 11.$$

Un numero è divisibile per 11 quando la differenza fra la somma delle cifre d'ordine dispari e quella delle cifre di ordine pari è divisibile per 11.

Sia $\Delta = 12$ e si prenda

$$\mathrm{D} = 12 = 1 \,.\, 10 + 2\,; \qquad \mathrm{P} = 1\,; \qquad q = 2.$$

La condizione di divisibilità di N per 12 sarà

$$a - 2b + 2^2 c - \ldots \pm 2^{l-1} f \mp 2^l g = \text{mult } 12.$$

Sia $m = 2$ e si ponga

$$\mathrm{N} = g 10^{2l} + f \,.\, 10^{2(l-1)} + \ldots + c \,.\, 10^4 + b \,.\, 10^2 + a$$

(a, b, c, ... f, g sono le classi binarie di N).

Sia $\Delta = 101$, e si prenda

$$\mathrm{D} = 101 = 1 \,.\, 10^2 + 1\,; \qquad \mathrm{P} = 1\,; \qquad q = 1.$$

La condizione di divisibilità di N per 101 sarà

$$a - b + c - d + \ldots \pm f \mp g = \text{mult } 101.$$

Sia $\Delta = 7$, 11, 13, 77, 91, 143, 1001 e si prenda

$$\mathrm{D} = 1001 = 10 \,.\, 10^2 + 1\,; \qquad \mathrm{P} = 10\,; \qquad q = 1.$$

La condizione di divisibilità di N per Δ, sarà

$$a \,.\, 10^l - b \,.\, 10^{l-1} + c \,.\, 10^{l-2} - \ldots \pm f \,.\, 10 \mp g = \text{mult } \Delta.$$

Esempio. — Sia

$$\mathrm{N} = 123580245789 \qquad \text{e} \qquad \mathrm{D} = 1001 = 10 \,.\, 10^2 + 1.$$

La condizione di divisibilità di N per Δ sarà

$$89 \,.\, 10^5 - 57 \,.\, 10^4 + 24 \,.\, 10^3 - 80 \,.\, 10^2 + 35 \,.\, 10 - 12 = \text{mult } \Delta$$

ossia

$$8924350 - 578012 = 8346338 = \text{mult } \Delta.$$

La condizione di divisibilità di 8346338 per Δ è

$$38 \,.\, 10^3 - 63 \,.\, 10^2 + 34 \,.\, 10 - 8 = 38340 - 6308 = 32032 = \text{mult } \Delta.$$

Quella di 32032 per Δ è

$$32 \,.\, 10^2 - 20 \,.\, 10 + 03 = 3203 - 200 = 3003 = \text{mult } \Delta.$$

Finalmente quella di 3003 per Δ è

$$03 \,.\, 10 - 30 = \text{mult } \Delta.$$

Quest'ultima è verificata perchè $30 - 30 = 0$. Se ne conclude c
il numero proposto è divisibile per ognuno dei valori di Δ suindica

* * *

27. Si pongano i numeri D ed N sotto le forme seguenti:

$$D = g' \,.\, 10^{\lambda m} + f' \,.\, 10^{(\lambda-1)m} + \ldots + c' \,.\, 10^{2m} + b' \,.\, 10^m + a'$$

$$N = k \,.\, 10^{(l+\lambda)m} + h \,.\, 10^{(l+\lambda-1)m} + \ldots + g \,.\, 10^{\lambda m} + f \,.\, 10^{(\lambda-1)m} + \ldots$$
$$\ldots + c \,.\, 10^{2m} + b \,.\, 10^m +$$

Essi sono ordinati secondo le potenze decrescenti di 10^m ed i co
ficienti $(a, b, \ldots a', b' \ldots)$ sono le classi di ordine m che si posso
formare in D ed in N da destra verso sinistra ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

Teorema. — **La condizione necessaria e sufficiente perchè
sia divisibile per Δ (divisore di D e primo con a' ovvero
coefficiente di 10^m raccolto a fattor comune in D) è che sia**

$$M_1 = (-ka')\, 10^{(l+\lambda-1)m} + (-ha')\, 10^{(l+\lambda-2)m} + \ldots$$
$$\ldots + (g'a - ga')\, 10^{(\lambda-1)m} + \ldots + (c'a - ca')\, 10^m + (b'a - ba') = \text{mult}$$

Infatti si raccolga in D ed in N il fattore comune 10^m

$$D = (g'\, 10^{(\lambda-1)m} + f' \,.\, 10^{(\lambda-2)m} + \ldots + c' \,.\, 10^m + b') \,.\, 10^m + a'$$

$$N = (k\, 10^{(l+\lambda-1)m} + \ldots + g \,.\, 10^{(\lambda-1)m} + \ldots + c \,.\, 10^m + b) \,.\, 10^m +$$

Si ricordi che per i numeri N e D posti sotto la forma

$$N = B \,.\, 10^m + a \qquad D = P \,.\, 10^m + q$$

la condizione di divisibilità di N per Δ è

$$M_1 = aP - Bq = \text{mult } \Delta.$$

Allora nel nostro caso la condizione di divisibilità sarà

$$M_1 = a\,(g'\, 10^{(\lambda-1)m} + f' \,.\, 10^{(\lambda-2)m} + \ldots + c' \,.\, 10^m + b') -$$
$$-(k 10^{(l+\lambda-1)m} + h 10^{(l+\lambda-2)m} + \ldots + g \,.\, 10^{(\lambda-1)m} + \ldots + c \,.\, 10^m + b$$

ossia

$$M_1 = (-ka')\,10^{(l+\lambda-1)m} + (-ha')\,10^{(l+\lambda-2)m} + \dots$$
$$\dots + (g'a - ga')\,10^{(\lambda-1)m} + \dots + (c'a - ca')\,10^{m} + (b'a - ba') = \text{mult}\,\Delta.$$

c. v. d.

28. Esempio. — Sia

$$N = 6\;2\;1\;8\;1\;6$$
$$\Delta = D = 4\;7\;8\;3\;2.$$

Fatto

$$m = 1; \qquad \lambda = 4; \qquad l + \lambda = 5$$

sarà

$$M_1 = (-2\,.\,6)\,10^4 + (4\,.\,6 - 2\,.\,2)\,10^3 + (7\,.\,6 - 1\,.\,2)\,10^2 +$$
$$+ (8\,.\,6 - 8\,.\,2)\,10 + (3\,.\,6 - 1\,.\,2)$$
$$= -120000 + 20000 + 4000 + 320 + 16 = -95664.$$

Ripetasi il calcolo per

$$-M_1 = 95664$$
$$D = 47832$$

e sarà

$$M_2 = (4\,.\,4 - 9\,.\,2)\,10^3 + (7\,.\,4 - 5\,.\,2)\,10^2 + (8\,.\,4 - 6\,.\,2)\,10 + (3\,.\,4 - 6\,.\,2)$$
$$= -2000 + 1800 + 200$$
$$= 0.$$

Se ne conclude che 621816 è divisibile per 47832.

29. Quest'ultima condizione di divisibilità si può presentare nel modo seguente, nel quale si introduce l'uso delle matrici dei determinanti.

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & a' \\ k & a \end{vmatrix} 10^{(l+\lambda-1)m} + \begin{vmatrix} 0 & a' \\ h & a \end{vmatrix} 10^{(l+\lambda-2)m} + \dots \begin{vmatrix} g' & a' \\ g & a \end{vmatrix} 10^{(\lambda-1)m} + \dots$$
$$\dots + \begin{vmatrix} c' & a' \\ c & a \end{vmatrix} 10^{m} + \begin{vmatrix} b' & a' \\ b & a \end{vmatrix} = \text{mult}\,\Delta.$$

Se si applica ad M_1 il medesimo criterio di divisibilità si arriva ad

$$M_2 = \begin{Vmatrix} 0 & a' \\ \begin{vmatrix} 0 & a' \\ k & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b' & a' \\ b & a \end{vmatrix} \end{Vmatrix} 10^{(+\lambda-2)m} + \dots + \begin{Vmatrix} b' & a' \\ \begin{vmatrix} c' & a' \\ c & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b' & a' \\ b & a \end{vmatrix} \end{Vmatrix} = \text{mult}\,\Delta$$

ossia

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & a' & 0 \\ 0 & b' & a' \\ k & b & a \end{vmatrix} 10^{(l+\lambda-2)m} + \begin{vmatrix} 0 & a' & 0 \\ 0 & b' & a' \\ h & b & a \end{vmatrix} 10^{(l+\lambda-3)m} + \dots$$
$$\dots + \begin{vmatrix} b' & a' & 0 \\ c' & b' & a' \\ c & b & a \end{vmatrix} = \text{mult}\,\Delta.$$

E così di seguito si possono calcolare $M_3, M_4, \dots, M_l$.

Per il caso particolare dei due numeri

$$D = b' 10^m + a'$$

$$N = d \,.\, 10^{3m} + c \,.\, 10^{2m} + b \,.\, 10^m + a$$

si ha

$$M_1 = \begin{vmatrix} 0 & a' \\ d & a \end{vmatrix} 10^{2m} + \begin{vmatrix} 0 & a' \\ c & a \end{vmatrix} 10^m + \begin{vmatrix} b' & a' \\ b & a \end{vmatrix} = \text{mult } \Delta$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & a' & 0 \\ 0 & b' & a' \\ d & b & a \end{vmatrix} 10^m + \begin{vmatrix} b' & a' & 0 \\ 0 & b' & a' \\ c & b & a \end{vmatrix} = \text{mult } \Delta$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} b' & a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & a' & 0 \\ 0 & 0 & b' & a' \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \text{mult } \Delta.$$

Quest'ultima si sviluppa in

$$ab'^3 - bb'^2 a' + cb'a'^2 - da'^3 = \text{mult } \Delta$$

la quale coincide con altra trovata precedentemente (n. 21).

30. Osservazione I. — Dalle cose dette e dagli esempi appo risulta come si possono formulare criterî di divisibilità per ogni mero, e come per ogni numero se ne possono preparare div Basta ricordare i vari criterî di divisibilità per 7 i quali furono biliti a modo di esercizio.

Vero è che non tutti i criterî sono della medesima semplic pratica utilità: ma in essi trovansi di quelli il cui uso si può utilmente senza laboriose operazioni.

Osservazione II. — Fra i tanti criterî di divisibilità sono presi a modo di casi particolari tutti quelli che sogliono inseg nelle scuole secondarie, i quali in questo criterio generale stu nelle sue diverse forme nel presente lavoro trovano il loro le e il loro principio comune dal quale come conseguenze partic procedono.

Osservazione III. — Questo criterio generale di divisibilità il modo con cui è svolto, può esser applicato con leggerissime tazioni ai numeri scritti in un sistema di numerazione divers sistema decimale. Basta mutare la base 10 e le sue potenze base (β) del sistema di numerazione che si creda di eleggere, e sue potenze. Così sono evidenti, ad esempio, le seguenti proposiz

La condizione necessaria e sufficiente perchè il numero

$$N = B \,.\, \beta^m + a$$

sia divisibile per Δ *divisore di*

$$D = P \,.\, \beta^m \pm q$$

(Δ *piano con* P *ovvero* q) *è*

$$aP \mp Bq = \text{mult } \Delta.$$

La condizione necessaria e sufficiente perchè il numero

$$N = g \,.\, \beta^{lm} + f \,.\, \beta^{(l-1)m} + \ldots + c \,.\, \beta^{2m} + b \,.\, \beta^{m} + a$$

sia divisibile per Δ *divisore di*

$$D = P \,.\, \beta^{m} - q$$

è

$$aP^{l} + bP^{l-1}q + cP^{l-2}q^{2} + \ldots + f \,.\, P \,.\, q^{l-1} + g \,.\, q^{l} = \text{mult } \Delta.$$

Così, ad esempio, nel sistema ottonario ($\beta = 8$) la condizione di divisibilità di

$$N = g \,.\, 8^{l} + f \,.\, 8^{l-1} + \ldots + c \,.\, 8^{2} + b \,.\, 8 + a$$

per $7 = 8 - 1$ è

$$a + b + c + \ldots + f + g = \text{mult } 7$$

e perchè sia divisibile per $9 = 8 + 1$ è

$$a - b + c - \ldots \pm f \mp g = \text{mult } 9$$

e perchè sia divisibile per $\Delta = 2 \,.\, 8 - 1$ è

$$a \,.\, 2^{l} + b \,.\, 2^{l-1} + c \,.\, 2^{l-2} + \ldots + f \,.\, 2 + g = \text{mult } (2 \,.\, 8 - 1)$$

e così di seguito.

Osservazione IV. — Dato un numero N scritto nel sistema decimale si divida per β (base di un altro sistema di numerazione) e si dica B il quoziente intero ed a il resto: si avrà

$$N = B \,.\, \beta + a$$

e B rappresenterà le unità di secondo ordine di N nella base β ed a le rimanenti unità semplici.

Il criterio di divisibilità di N per $\beta - 1$, che nel sistema a base β è

$$a + B = \text{mult } (\beta - 1)$$

dà luogo alla seguente proposizione valevole per i numeri scritti nella base 10:

La condizione necessaria e sufficiente perchè il numero N (*base 10*) *sia divisibile per* $\beta - 1$ (*base 10*) *è che fatta la divisione di* N *per* β *la somma del quoziente intero e del resto sia divisibile per* ($\beta - 1$).

Così la divisibilità di N per 11 si avrà se, diviso N per 12, la somma del quoziente intero e del resto sia divisibile per 11.

Esempio. — $165 = 12 \,.\, 13 + 9$; ossia 165 diviso per 12 dà il quoto 13 e il resto 9. Ora, $13 + 9 = 22 =$ mult 11. Se ne deduce che 165 è divisibile per 11.

Così pure, il criterio di divisibilità del numero

$$N = B\beta + a$$

per il numero

$$\Delta = D = 2\beta - 1$$

è

$$2a + B = \text{mult } (2\beta - 1).$$

Allora si avrà per i numeri scritti nella base 10:

La condizione necessaria e sufficiente perchè il numero N sia di sibile per $\beta - 1$ (base 10) è che diviso N per β, la somma del quozie e del doppio del resto sia divisibile per $2\beta - 1$.

Per esempio: un numero N è divisibile per 23 se diviso per la somma del quoziente intero e del doppio del resto sia divisib per 23.

Il numero 345 diviso per 12 dà il quoto intero 28 e il resto Ora si ha:

$$28 + 2 \,.\, 9 = 46 = \text{mult } 23.$$

Se ne conclude che 345 è divisibile per 23.

G. M. PERSICO.

DIVISIBILITÀ DI ESPRESSIONI NUMERICHE

1. Nei trattati di aritmetica razionale fra gli esercizii che si propongono a studiosi a risolvere si trovano formule numeriche del tipo delle seguenti

$$3 \,.\, 5^{2n+1} + 2^{3n+1}; \qquad 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}.$$

Esse constano della somma o della differenza di due o più termini, ciasc dei quali contiene numeri determinati elevati ad esponenti interi positivi: e propone di dimostrare la divisibilità di ciascuna di tali formule per numeri terminati.

Per esempio: dimostrare che

$$3 \,.\, 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ (per } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

è divisibile per 17.

Ora mi propongo di dimostrare alcuni teoremi i quali servono assai u mente allo scopo.

Mi pongo nel campo dei numeri interi con segno e degli esponenti int positivi.

* * *

2. Siano le espressioni binomie, sotto forma di differenza,

$$D_1 = A_1 - B_1; \quad D_2 = A_2 - B_2, \ldots; \quad D_{n-1} = A_{n-1} - B_{n-1}; \quad D_n = A_n - B_n$$

dove A_i e B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sono primi fra loro, e sia l'espressione binomia, pure sotto la forma di differenza,

$$M_n = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n - B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n$$

della quale il primo termine è il prodotto dei primi termini, ed il secondo termine o sottraendo è il prodotto dei sottraendi delle date differenze binomie. Sia Δ un numero intero che divida $D_1, D_2, \ldots D_{n-1}$: esso sarà primo con A_i e con B_i ($i = 1, 2, \ldots n-1$).

Si dimostra il seguente

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè M_n sia divisibile per Δ è che D_n sia divisibile per Δ.*

Si consideri dapprima il caso di $n = 2$.

Siano allora le due differenze

$$D_1 = A_1 - B_1 \tag{1}$$

$$D_2 = A_2 - B_2 \tag{2}$$

e sia

$$M_2 = A_1 A_2 - B_1 B_2 .$$

Si supponga che Δ divida D_1, e si dimostra che la condizione necessaria e sufficiente perchè M_2 sia divisibile per Δ è che D_2 sia divisibile per Δ.

Si osservi anzitutto che Δ è primo con A_1 e con B_1.

Si moltiplichino ambo i membri di (1) per A_2 e quelli di (2) per B_1 e si sommino membro a membro i risultati, e si avrà:

$$D_1 A_2 + D_2 B_1 = A_1 A_2 - B_1 B_2$$

ossia

$$D_1 A_2 + D_2 B_1 = M_2 .$$

Ora è evidente che se Δ (divisore di D_1) divide M_2, deve dividere anche $D_2 B_1$, e poichè è primo con B_1, dividerà D_2: e la condizione è necessaria.

Reciprocamente: se Δ (divisore di D_1) divide D_2, dividerà anche M_2: e la condizione è sufficiente.

Generalizzazione. — Si dimostra che se la proposizione è vera per M_{n-1} è vera altresì per M_n.

Siano le differenze

$$M_{n-1} = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} - B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$$

$$D_n = A_n - B_n$$

$$M_n = A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n - B_1 B_2 \ldots B_{n-1} B_n .$$

Per ipotesi Δ è divisore di $D_1, D_2, \ldots D_{n-1}$ ed è primo con $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ e con $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$. Ne segue che Δ divide M_{n-1} ed è primo con i prodotti

$$(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}), \qquad (B_1 B_2 \ldots B_{n-1}),$$

ed allora, applicando la conclusione della prima parte del presente teorema, si avrà per dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente perchè M_n sia divisibile per Δ, è che D_n sia divisibile per Δ.

3. Corollario I. — *$A^n - B^n$ è divisibile per $A - B$ per tutti i valori di n (> 0).*

Infatti

$$A^n - B^n = A \, . \, A \ldots A - B \, . \, B \ldots B .$$

Ora gli n binomi $A - B$, ottenuti prendendo per ordine un fattore del nuendo ed un fattore del sottraendo, sono divisibili per $A - B$. Dunque $A^n -$ è divisibile per $A - B$ per tutti i valori di n.

4. Corollario II. — $A^n + B^n$ *non è divisibile per* $A - B$ *per alcun va di* n *se non nei casi di* $A - B = 1$; $A - B = 2$.

Infatti

$$A^n + B^n = A . A \dots A . A - B . B \dots B . (-B) .$$

I primi $(n-1)$ binomi $A - B, A - B, \dots, A - B$ sono divisibili per $A -$ ed $A - B$ è primo con A^{n-1} e con B^{n-1}; e l'ultimo binomio è

$$A - (-B) = A + B .$$

Ne segue che $A^n + B^n$ non è divisibile per $A - B$ se non nel caso che A (l'n^{esimo} binomio) sia divisibile per $A - B$.

Osservando che

$$(A - B) + (A + B) = 2A$$

si capisce che $A - B$ divide $(A + B)$ soltanto nei casi in cui $A - B$ divida e poichè $A - B$ è primo con A, si conclude che $A - B$ divide $A + B$ solt nei casi in cui $A - B$ divida 2, i quali sono $A - B = 1$; $A - B = 2$.

5. Corollario III. — $A^n - B^n$ *è divisibile per* $A + B$ *soltanto se* n *è pa*

Infatti se n è pari si ha

$$A^n - B^n = A . A \dots A - (-B) (-B) \dots (-B) .$$

Gli n binomi

$$A - (-B), \quad A - (-B), \dots, \quad A - (-B)$$

sono divisibili per $A + B$. Dunque $A^n - B^n$ è divisibile per $A + B$.

Se n è dispari si ha

$$A^n - B^n = A . A \dots A . A - (-B) (-B) \dots (-B) B .$$

I primi $(n-1)$ binomi

$$A - (-B), \quad A - (-B), \dots, \quad A - (-B)$$

sono divisibili per $A + B$; l'ultimo binomio $A - B$ non è divisibile per A ognivolta che $A + B$ sia somma di due numeri del medesimo segno.

Adunque $A^n - B^n$ è divisibile per $A - B$ soltanto se n è pari.

6. Corollario IV. — $A^n + B^n$ *è divisibile per* $A + B$ *soltanto se* n *è dis*

Infatti se n è dispari si ha

$$A^n + B^n = A . A \dots A - (-B) (-B) \dots (-B) .$$

Tutti gli n binomi

$$A - (-B), \quad A - (-B), \quad A - (-B)$$

sono divisibili per $A + B$.

Dunque $A^n + B^n$ è divisibile per $A + B$.

Al contrario, se n è pari si ha

$$A^n + B^n = A . A \dots A . A - (-B) (-B) \dots (-B) B .$$

I primi $n - 1$ binomi

$$A - (-B), \quad A - (-B), \dots, \quad A - (-B)$$

sono divisibili per $A + B$; l'ultimo binomio $A - B$ non è divisibile per A dunque $A^n + B^n$ è divisibile per $A + B$ soltanto se n è dispari.

7. Esercizi. — 1°. Verificare che

$$M_2 = 5^{2n} . 3^{3m} - 2^{2m+n} \text{ (per } m = 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2 \ldots)$$

è divisibile per 23.

Si ponga

$$M_2 = 5^{2n} . 3^{3m} - 2^n . 2^{2m}.$$

Si osservi che

$$5^{2n} - 2^n \quad \text{è divisibile per} \quad 5^2 - 2 = 23$$

e che

$$3^{3m} - 2^{2m} \quad \text{è divisibile per} \quad 3^3 - 2^2 = 23$$

e se ne conclude che l'espressione data è divisibile per 23.

2°. Verificare che

$$M_2 = 6^{2n+1} + 5^{n+2} \text{ (per } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

è divisibile per 31.

Si ponga

$$M_2 = 6^{2n} . 7 - 5^n (-5^2)$$

e si osservi che

$$6^{2n} - 5^n \quad \text{è divisibile per} \quad 6^2 - 5 = 31$$

e similmente che

$$6 - (-5^2) = 31 .$$

Se ne conclude che l'espressione data è divisibile per 31.

* * *

8. Sia data una espressione numerica della forma

$$N = Bh^r + Ak^s \tag{1}$$

dove A, B, h, k sono numeri determinati interi, r ed s sono esponenti interi positivi. Sia

$$D = Ph^r - Qk^s \tag{2}$$

una espressione consimile all'altra, e sia Δ un divisore di D primo con k e con P ovvero con h e con Q. Si dimostra il seguente

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè* N *sia divisibile per* Δ *è che sia*

$$AP + BQ = \text{mult } \Delta.$$

Supponiamo dapprima che Δ sia primo con k e con P.

Si moltiplichino ambo i membri di (1) per P; ed ambo i membri di (2) per B e si ha

$$NP = BPh^r + APk^s$$

$$DB = BPh^r - BQk^s .$$

Sottraendo membro a membro si ricava

$$NP - DB = (AP + BQ)\, k^s.$$

Ora: se Δ (divisore di D) divide N, deve pure dividere $(AP + BQ)\, k^s$, e poichè è primo con k, dovrà dividere $AP + BQ$: e la condizione è necessaria.

Reciprocamente: se Δ (divisore di D) divide $(AP + BQ)$ dovrà dividere NP, e poichè è primo con P dovrà dividere N: e la condizione è sufficiente.

In modo simile si dimostra il teorema nel caso che Δ sia primo con h e con Q.

9. Esercizi. — 1°. Verificare che

$$N = 3 \,.\, 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ (per } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

è divisibile per 17.

Si osservi che

$$\Delta = 17 = 5^2 - 2^3 \quad \text{è divisore di} \quad D = 5^{2n} - 2^{3n}.$$

Si ponga

$$h^r = 5^{2n};\quad k^s = 2^{3n};\quad A = 2;\quad B = 3 \,.\, 5;\quad P = 1;\quad Q = 1.$$

Si ha:

$$AP + BQ = 2 \,.\, 1 \,.\, 1 + 3 \,.\, 5 \,.\, 1 = 2 + 15 = 17.$$

Se ne deduce che

$$3 \,.\, 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$$

è divisibile per 17.

2°. Verificare che

$$N = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1} \text{ (per } n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

è divisibile per 23.

Si ponga

$$N = 5 \,.\, 5^{2n} + 2^{n+1}(2^3 + 1) = 5 \,.\, 5^{2n} + 2 \,.\, 9 \,.\, 2^n.$$

Si osservi che

$$\Delta = 23 = 5^2 - 2 \quad \text{è divisore di} \quad D = 5^{2n} - 2^n.$$

Si ponga

$$h^r = 5^{2n};\quad k^s = 2^n;\quad A = 2 \,.\, 9;\quad B = 5;\quad P = 1;\quad Q = 1.$$

Si ha:

$$AP + BQ = 2 \,.\, 9 \,.\, 1 + 5 \,.\, 1 = 18 + 5 = 23.$$

Se ne conclude che

$$5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$$

è divisibile per 23.

Similmente si può verificare che

$5^{4n+2} + 3^{2n}$ è divisibile per 13 (per $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$)
$7^{2n+1} + 6^{n+2}$ " " " 43 " " " "
$9^{2n+1} + 8^{n+2}$ " " " 73 " " " "

ecc. ecc.

***

10. Sia l'espressione numerica

$$N = gh^{lr} + fh^{(l-1)r} \,.\, k^s + \ldots + dh^{3r} k^{(l-3)s} + ch^{2r} k^{(l-2)r} + bh^r k^{(l-1)s} + ak^{ls}.$$

Sia Δ un divisore intero di

$$D = Ph^r - Qk^s$$

e sia Δ primo con P e con k (ovvero con Q e con h) si dimostra il seguen

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè* N *sia divisibile p*
è che sia

$$aP^l + bP^{l-1} Q + cP^{l-2} Q^2 + \ldots + fPQ^{l-1} + gQ^l = \text{mult } \Delta.$$

Pongasi

$$N = (gh^{(l-1)r} + fh^{(l-2)r} k^s + \ldots + dh^{2r} k^{(l-3)s} + ch^r k^{(l-2)s} + bk^{(l-1)s})\, h^r + ak^{(l-1)}$$

e fatti A e B (n. 8) rispettivamente uguali ai coefficienti di k^s e di h^r si avrà che la condizione di divisibilità di N per Δ sarà la seguente:

$$ak^{(l-1)s}\,P + (gh^{(l-1)r} + fh^{(l-2)r}\,k^s + \dots + dh^{2r}\,k^{(l-3)s} + ch^r\,k^{(l-2)s} + bk^{(l-1)s})\,Q = \text{mult } \Delta.$$

ossia

$$gQh^{(l-1)r} + fQh^{(l-2)r}\,k^s + \dots + dQh^{2r}\,k^{(l-3)s} + cQh^r\,k^{(l-2)s} + (aP + bQ)\,k^{(l-1)s} = \text{mult } \Delta.$$

Pongasi questo polinomio aritmetico sotto la forma seguente

$$(gQh^{(l-2)r} + fQ^{(l-3)r}\,k^s + \dots + dQh^r\,k^{(l-3)s} + cQk^{(l-2)s})\,h^r + (aP + bQ)\,k^{(l-2)s}\,.\,k^s,$$

ed applicando la medesima proposizione (n. 8) si avrà che la condizione di divisibilità di questo polinomio (e di N) per Δ sarà la seguente:

$$(aP + bQ)\,k^{(l-2)s}\,.\,P + (gQh^{(l-2)r} + fQh^{(l-3)r}\,k^s + \dots + dQh^r\,k^{(l-3)s} + cQk^{(l-2)s})\,Q = \text{mult } \Delta$$

ossia

$$gQ^2h^{(l-2)r} + fQ^2h^{(l-3)r}\,k^s + \dots + dQ^2\,h_r\,k^{(l-3)s} + (aP^2 + bPQ + cQ^2)\,k^{(l-2)s} = \text{mult } \Delta.$$

Così procedendo, dopo $(l-1)$ applicazioni della medesima proposizione (n. 8), si avrà che la condizione di divisibilità di N per Δ sarà la seguente:

$$gQ^{l-1}\,h^r + (aP^{l-1} + bP^{l-2}\,Q + cP^{l-3}\,Q^2 + \dots + f\,.\,Q^{l-1})\,k^s = \text{mult } \Delta$$

e dopo un'altra applicazione ancora, si avrà che la condizione di divisibilità di N per Δ sarà

$$aP^l + bP^{l-1}\,Q + c\,P^{l-2}\,Q^2 + \dots + fPQ^{l-1} + gQ^l = \text{mult } \Delta.$$

11. Esercizio. — Verificare che

$$N = 2^{12n+1} + 2^{9n+2} + 2^{6n+2} + 2^{6n} + 2^{3n+1} + 1 \text{ (per } n = 0, 1, 2, \dots)$$

è divisibile per 7.

Si ponga

$$N = 2\,.\,2^{12n} + 4\,.\,2^{9n} + 5\,.\,2^{6n} + 2\,.\,2^{3n} + 1.$$

Si osservi che

$$\Delta = 7 = 2^3 - 1 \quad \text{è divisore di} \quad D = 2^{3n} - 1.$$

Si faccia

$$P = 1;\ Q = 1;\ h^r = 2^{3n};\ k^s = 1;\ a = 1;\ b = 2;\ c = 5;\ d = 4;\ e = 1$$

e la condizione di divisibilità diventa la seguente

$$2 + 4 + 5 + 2 + 1 = \text{mult } 7$$

la quale è verificata.

In modo simile si può verificare che

$$N = 2^{16n} + 2^{12n+1}\,.\,3^{n+1} + 2^{8n+1}\,.\,3^{2n+1} + 2^{8n}\,.\,3^{2n} - 2^{4n+1}\,.\,3^{3n} - 2^{4n}\,.\,3^{3n} + 2\,.\,3^{4n}$$

(per $n = 0, 1, 2, \dots$) è divisibile per 13.

G. M. Persico.

Alcune proprietà delle progressioni aritmetiche d'ordine superi

1. In una Nota pubblicata in questo Periodico (v. ultimo fascic
Sopra alcuni determinanti di differenze e di somme, dimostrai che: d
una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione d,

$$\frac{n}{\cdot}\!\cdot\ a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

si ha che la successione

$$a_1,\quad a_{1+s},\quad a_{1+2s},\ldots, a_{1+rs},\ldots$$

forma una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $s^n d$.

Da questa proprietà si deduce facilmente che:

Data una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione d

$$(1)\qquad \frac{n}{\cdot}\!\cdot\ a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

la successione

$$(2)\qquad \sum_{t=1}^{t=s} a_t\,,\quad \sum_{t=1}^{t=s} a_{s+t}\,,\quad \sum_{t=1}^{t=s} a_{2s+t}\,,\ldots,\ \sum_{t=1}^{t=s} a_{rs+t}\ldots$$

forma una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione s^{n+1}

Infatti formiamo la successione delle prime somme s ad s dell
che dà una progressione di ordine n e di ragione sd. Con ter
di questa formiamo una successione prendendo in essa il primo
mine, quello di posto $s+1$, quello di posto $2s+1$, ecc., che
quella di cui tratta il teorema che si vuol dimostrare. Per la
prietà ricordata al numero 1 essa forma una nuova progres
aritmetica di ordine n e di ragione

$$s^n sd = s^{n+1} d.$$

La proprietà poteva essere dimostrata anche osservando c
successione (2) si può ottenere sommando termine a termine l
guenti s progressioni d'ordine n e di ragione $s^n d$ che si po
ricavare dalla (1):

$$\frac{n}{\cdot}\!\cdot\ a_1 \,.\, a_{1+s} \,.\, a_{1+2s} \ldots\ldots a_{1+rs} \ldots\ldots$$

$$\frac{n}{\cdot}\!\cdot\ a_2 \,.\, a_{2+s} \,.\, a_{2+2s} \ldots\ldots a_{2+rs} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n}{\cdot}\!\cdot\ a_s \,.\, a_{s+s} \,.\, a_{s+2s} \ldots\ldots a_{s+rs} \ldots\ldots$$

Formando coi termini della (2) un determinante ortosimmetrico di Hankel d'ordine $n+1$ (v. *Nota citata*) si ha che il suo valore è eguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{(n+1)^2} d^{n+1}.$$

2. Sottraendo dalla progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $s^{n+1} d$

$$(3) \qquad \overset{n}{\div} \sum_{t=1}^{t=s} a_t \,.\, \sum_{t=1}^{t=s} a_{s+t} \ldots\ldots \sum_{t=1}^{t=s} a_{rs+t} \ldots\ldots$$

termine a termine la progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $s^n d$

$$\overset{n}{\div} a_s \,.\, a_{s+s} \,.\, a_{s+2s} \ldots\ldots a_{s+rs} \ldots\ldots$$

si ottiene, per una proprietà nota, una nuova progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $s^{n+1} d - s^n d = (s-1) s^n d$

$$\overset{n}{\div} \sum_{t=1}^{t=s-1} a_t \,.\, \sum_{t=1}^{t=s-1} a_{s+t} \ldots\ldots \sum_{t=1}^{t=s-1} a_{rs+t} \ldots\ldots$$

Sottraendo da questa termine a termine la progressione aritmetica

$$\overset{n}{\div} a_{s-1} \,.\, a_{(s-1)+s} \,.\, a_{(s-1)+2s} \ldots\ldots a_{(s-1)+rs} \ldots\ldots$$

d'ordine n e di ragione $s^n d$ si ottiene una nuova progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $(s-1) s^n d - s^n d = (s-2) s^n d$

$$\overset{n}{\div} \sum_{t=1}^{t=s-2} a_t \,.\, \sum_{t=1}^{t=s-2} a_{s+t} \ldots\ldots \sum_{t=1}^{t=s-2} a_{rs+t} \ldots\ldots$$

In generale: data una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione d

$$\overset{n}{\div} a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

la successione

$$\sum_{t=1}^{t=s-v} a_t, \quad \sum_{t=1}^{t=s-v} a_{s+t}, \ldots\ldots \sum_{t=1}^{t=s-v} a_{rs+t}, \ldots$$

$v = 0, 1, 2 \ldots, s-1$ forma una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione $(s-v) s^n d$.

Formando coi termini della (3) un determinante ortosimmetrico di Hankel di ordine $n+1$ (v. *Nota citata*) si ha che il suo valore è eguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (s-v)^{n+1} s^{n(n+1)} d^{n+1}.$$

3. Consideriamo la progressione aritmetica d'ordine n, della classe m e di ragioni $d_1, d_2, \ldots d_m$

$$(4) \qquad m \overset{n}{\div} a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

ponendo

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_m = S,$$

per una proprietà nota (v. *Nota citata*) si ha che la successione

$$a_1, \quad a_{1+m}, \quad a_{1+2m}, \ldots, a_{1+rm}, \ldots$$

forma una progressione della prima classe d'ordine n e di ragione m^{n-}

Con dimostrazioni analoghe a quelle fatte nel numero precede è facile provare che:

1°. La successione ricavata dalla (4)

$$(5) \qquad \sum_{t=1}^{t=m} a_t, \quad \sum_{t=1}^{t=m} a_{m+t}, \ldots, \sum_{t=1}^{t=m} a_{rm+t}, \ldots$$

forma una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione m^n S.

2°. La successione ricavata dalla (4)

$$(6) \qquad \sum_{t=1}^{t=m-v} a_t, \quad \sum_{t=1}^{t=m-v} a_{m+t}, \ldots, \sum_{t=1}^{t=m-v} a_{rm+t}, \ldots$$

$(v = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$ forma una progressione aritmetica d' dine n e di ragione

$$(m - v)\, m^{n-1}\, S.$$

Formando per la successione (5) un determinante ortosimmet di Hankel di ordine $n+1$ si ha che il suo valore è

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\, m^{n(n+1)}\, S^{n+1}$$

per la (6) ha il valore

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\, (m-v)^{n+1}\, m^{(n-1)(n+1)}\, S^{n+1}.$$

ALBANIA, febbraio 1917.

L. TENCA.

TEOREMA DI WILSON E TEOREMA DI FERMAT

Le dimostrazioni che qui presento sono suggerite da un es della ordinaria tavola pitagorica: e sono così semplici che sono dotto a pensare che gli scopritori dei due celebri teoremi ne abbi tratta l'ispirazione da un accurato esame di questo quadro mer glioso.

I. Consideriamo un numero primo p e costruiamo una tavola tagorica di $p-1$ righe e di $p-1$ colonne. Ogni colonna, o r contiene i multipli dei numeri interi inferiori a p fino al mult $(p-1)$-esimo; in conseguenza in ciascuna di esse si trova unc un sol termine che diviso per p dà di resto *uno*. Ora per la prima colonna, o riga, questo termine è manifestamente $1 . 1$ e per l'ultima colonna, o riga, è $(p-1) . (p-1)$ perchè $(p-1)^2 = p . (p-2) + 1 =$ multiplo di $p+1$. Ed è facile vedere che nella diagonale principale del quadro non vi sono, oltre questi, altri termini che divisi per p danno di resto *uno*; giacchè se $h . h$ fosse uno di tali numeri (h diverso da 1 e da $p-1$), h^2-1 sarebbe multiplo di p e quindi p dovrebbe dividere o $h-1$ o $h+1$ che sono entrambi minori di p.

Consideriamo ora la colonna [1] seconda e sia $a . 2$ (con a diverso da 2) l'*unico* termine che diviso per p dà di resto *uno*: poichè tal termine figura anche nella colonna a-esima, potremo associare tanto la colonna seconda come la colonna a-esima al termine $a . 2$. Questo procedimento di associazione potrà continuarsi per la colonna terza (se a non è uguale a 3) e per un'altra di quelle rimaste e così di seguito fino ad esaurire completamente il quadro: ciò è possibile perchè esso contiene un numero *pari* di colonne.

Verremo così ad ottenere, oltre ai prodotti $1 . 1$ e $(p-1) . (p-1)$, dei prodotti come

$$(a . b),\ (c . d) \ldots \text{ecc.}$$

— dove $a, b, c, d \ldots$ sono numeri *disuguali* della successione:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5 \quad p-3,\ p-2,\ p-1$$

che divisi per p danno di resto *uno*. Moltiplicando fra loro avremo nel prodotto un numero che diviso per p dà di resto *uno*: avremo cioè:

$$\{1 . 2 . 3 \ldots\ (p-2) . (p-1)\} . (p-1) = \text{multiplo di } p+1.$$

Aggiungendo $1 . 2 . 3 \ldots (p-2) . (p-1)$ ad ambo i membri troveremo:

$$p . \{1 . 2 . 3 \ldots (p-2) . (p-1)\} = \text{multiplo di } p + \{1 . 2 . 3 \ldots (p-2)(p-) + 1\}$$

da cui si ricaverà che l'espressione:

$$1 . 2 . 3 \ldots \quad (p-2) . (p-1) + 1$$

è divisibile per p.

Pel teorema reciproco vale l'ordinaria dimostrazione.

Corollario. — Qualunque sia n, purchè intero e positivo, si ha che

$$\{1 . 2 . 3 \ldots (p-2)(p-1)\}^{2n},$$

divisa per p dà di resto 1.

2. Nel paragrafo precedente ci siamo limitati a considerare il solo resto *uno*; riferendoci in questo a un resto r differente da *uno* e da p e tenendo conto del teorema di Wilson, perverremo a quello di Fermat.

Avendo sempre presente il solito quadro, osserviamo che nelle colonne *prima*, r-esima, $(p-1)$-esima, $(p-r)$-esima, trovansi risp.:

---

(1) È indifferente riferirsi alle colonne o alle righe.

i quattro prodotti $r.1$, $1.r$, $(p-r).(p-1)$ e $(p-1).(p-r)$ divisi per p danno di resto r. Quanto alla diagonale principal non c'è alcun termine in essa che diviso per p dia di resto r succede, per es., quando $p=13$, $r=2$), o, se ve n'ha uno $h.h$, n'ha necessariamente un altro $(p-h).(p-h)$.

Ciò posto, consideriamo una colonna qualunque, per es. la m-esi e sia $a.m$ l'unico termine di essa che diviso per p dà per rest se a è diverso da m, tal termine figurerà un'altra sola volta n colonna a-esima, se a sarà uguale ad m, alla m-esima colonna ve associata la $(p-m)$-esima colonna. E anche qui, con questo pro dimento di associazione, il quadro verrà esaurito.

Immaginiamo segnato per ogni colonna il termine che diviso pe dà di resto r e moltiplichiamo fra loro tutti questi termini che s in numero di $p-1$.

Avremo:

$$\{1.2.3\ldots(p-2).(p-1)\}^2 = \text{multiplo di } p + r^{p-1}.$$

Per il corollario del teorema di Wilson da questa relazi segue:

$$r^{p-1} = \text{multiplo di } p+1.$$

Qui r è supposto differente da *uno* e da p, ma la formula pre dente vale pure quando $r=1$ e anche se ad r si aggiunge un n tiplo di p.

Si ponga invero:

$$s = r + p.h \qquad (h \text{ intero positivo}).$$

Si avrà successivamente:

$$r = s - p.h,$$
$$(s-ph)^{p-1} = \text{multiplo di } p+1,$$
$$s^{p-1} + \text{multiplo di } p = \text{multiplo di } p+1$$

e infine:

$$s^{p-1} = \text{multiplo di } p+1.$$

con che il teorema di Fermat è completamente dimostrato.

E. Piccioli.

IL TEOREMA DI TOLOMEO PER IL PENTAGONO GOBBO INSCRITTIB

Dati in S_3 cinque punti indipendenti A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 cons riamo i cinque tetraedri $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_3A_5$, $A_1A_2A_4A_5$, $A_2A_3A_4$ $A_1A_3A_4A_5$: vogliamo dimostrare che se si moltiplica la misura di di questi, per esempio di $A_1A_2A_3A_4$, rispetto al cubo che ha per l'unità di misura u, per il numero che misura rispetto al quadrato di lato u, la potenza di A_5 rispetto alla sfera determinata da $A_1A_2A_3A_4$ e per il prodotto $(A_5A_1).(A_5A_2).(A_5A_3).(A_5A_4)$ delle misure dei segmenti che congiungono A_5 con ciascuno dei rimanenti punti, si ottiene un numero che non cambia, quando al tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ si sostituisce uno dei rimanenti, per es. $A_1A_2A_3A_5$, al punto A_5, il punto A_4 e all'espressione $(A_5A_1).(A_5A_2).(A_5A_3).(A_5A_4)$ l'altra

$$(A_4A_1).(A_4A_2).(A_4A_3).(A_4A_5)$$

e così via.

Consideriamo infatti la superficie sferica determinata da $A_1A_2A_3A_4$ e per A_5 conduciamo le semirette A_5A_1 A_5A_2 A_5A_3 A_5A_4 a incontrare detta superficie rispettivamente in $B_1B_2B_3B_4$.

Indicando con p^2 la misura della potenza di A_5 rispetto a questa sfera avremo:

$$(1) \qquad p^2=(A_5A_1).(A_5B_1)=(A_5A_2).(A_5B_2)=(A_5A_3).(A_5B_3)= \\ =(A_5A_4).(A_5B_4).$$

Inoltre dalla similitudine dei triangoli $A_5A_1A_2$, $A_5B_1B_2$ segue, tenendo conto delle (1):

$$(2) \qquad (B_1B_2)=p^2.\frac{(A_1A_2)}{(A_5A_1).(A_5A_2)}$$

per cui, da questa e analoghe seguirà:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{(A_1A_2)}{(A_5A_1).(A_5A_2)}:\dfrac{(A_2A_3)}{(A_5A_2).(A_5A_3)}:\dfrac{(A_2A_4)}{(A_5A_2).(A_5A_4)}: \\ \dfrac{(A_1A_3)}{(A_5A_1).(A_5A_3)}:\dfrac{(A_1A_4)}{(A_5A_1).(A_5A_4)}:\dfrac{(A_3A_4)}{(A_5A_3).(A_5A_4)} \\ =(B_1B_2):(B_2B_3):(B_2B_4):B_1B_3):(B_1B_4):(B_3B_4) \end{cases}$$

ossia, ponendo:

$$(4) \qquad \begin{cases} l_{12}=(A_1A_2).(A_5A_3).(A_5A_4) \\ l_{13}=(A_1A_3).(A_5A_2).(A_5A_4) \\ l_{14}=(A_1A_4).(A_5A_2).(A_5A_3) \\ l_{23}=(A_2A_3).(A_5A_1).(A_5A_4) \\ l_{24}=(A_2A_4).(A_5A_1).(A_5A_3) \\ l_{34}=(A_3A_4).(A_5A_1).(A_5A_2), \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} l_{12}:l_{23}:l_{24}:l_{13}:l_{14}:l_{34}= \\ \qquad =(B_1B_2):(B_2B_3):(B_2B_4):(B_1B_3):(B_1B_4):(B_3B_4). \end{cases}$$

Queste provano l'esistenza di un tetraedro $L_1L_2L_3L_4$ simile a $B_1B_2B_3B_4$ i cui lati sono misurati da

$$l_{12} \quad l_{13} \quad l_{14} \quad l_{23} \quad l_{24} \quad l_{34}.$$

Poniamo:

$$(6) \qquad q^4=(A_5A_1).(A_5A_2).(A_5A_3).(A_5A_4);$$

le (2) divengono:

$$(7)\qquad (B_1B_2) = \frac{p^2 \, . \, l_{12}}{q^4}$$

e analoghe.

I due tetraedri $B_1B_2B_3B_4$, $L_1L_2L_3L_4$, simili, avendo i lati omolo ghi nel rapporto $\frac{p^2}{q^4}$, staranno nel rapporto $\left(\frac{p^2}{q^4}\right)^3$, avremo:

$$(8)\qquad \frac{(B_1B_2B_3B_4)}{(L_1L_2L_3L_4)} = \frac{p^6}{q^{12}}.$$

Facciamo, d'altra parte, ricordo a una formula di *Staudt* che l'estensione della nota formula di geometria piana

$$4RS = a \, . \, b \, . \, c;$$

applicando questa ai due tetraedri $A_1A_2A_3A_4$ e $B_1B_2B_3B_4$ che son inscritti nella medesima sfera, avremo:

$$(9)\qquad \frac{(A_1A_2A_3A_4)}{(B_1B_2B_3B_4)} = \frac{(T)}{(T')}$$

rappresentando (T) e (T') le misure dei triangoli i cui lati sono m surati da

$$(A_1A_2) \, . \, (A_3A_4), \quad (A_1A_3) \, . \, (A_2A_4), \quad (A_1A_4) \, . \, (A_2A_3)$$

e

$$(B_1B_2) \, . \, (B_3B_4), \quad (B_1B_3) \, . \, (B_2B_4), \quad (B_1B_4) \, . \, (B_2B_3).$$

Ma dalle (7) si trae:

$$(10)\qquad (B_1B_2) \, . \, (B_3B_4) = \frac{p^4}{q^8} \, . \, (l_{12} \, . \, l_{34}).$$

E poichè sussistono anche le (4), ricaveremo ancora

$$(11)\quad \begin{cases} (B_1B_2) \, . \, (B_3B_4) = \dfrac{p^4}{q^8} \, . \, (A_1A_2) \, . \, (A_3A_4) \, . \, (A_5A_1) \, . \, (A_5A_2) \, . \, (A_5A_3) \, . \, (A_5A \\ \qquad\qquad\qquad\quad = \dfrac{p^4}{q^4} \, . \, (A_1A_2) \, . \, (A_3A_4). \end{cases}$$

Dunque i triangoli T, T' sono simili e quindi:

$$(12)\qquad (T) : (T') = p^8 : q^8.$$

Segue di qua che:

$$(13)\qquad \frac{(A_1A_2A_3A_4)}{(B_1B_2B_3B_4)} = \frac{q^8}{p^8}.$$

Moltiplicando questa e la (8) membro a membro

$$(14)\qquad \frac{(A_1A_2A_3A_4)}{(L_1L_2L_3L_4)} = \frac{1}{p^2 \, . \, q^4}$$

da cui:

$$(15)\qquad p^2 \, . \, q^4 \, . \, (A_1A_2A_3A_4) = (L_1L_2L_3L_4).$$

E siccome il secondo membro è una funzione di A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 ch non muta scambiando questi punti fra loro, resta dimostrato quan si voleva.

Corollario. — Supponiamo che sia:

$$(L_1L_2L_3L_4) = 0 ;$$

allora è o $p = 0$, ovvero $q = 0$, oppure:

$$(A_1A_2A_3A_4) = 0$$

per la (15). Ma non è $q = 0$ perchè i cinque punti dati sono distinti e neppure $(A_1A_2A_3A_4) = 0$ per essere i cinque punti indipendenti, per cui dev'essere $p = 0$: viceversa, dall'essere $p = 0$ segue

$$(L_1L_2L_3L_4) = 0 ,$$

dunque:

" Condizione necessaria e sufficiente perchè cinque punti A_1 A_2 " A_3 A_4 A_5 siano consferici è che sia di volume nullo il tetraedro " i cui spigoli sono misurati dalle (4) ".

Ricordando quindi l'espressione del volume di un tetraedro per le misure degli spigoli, sotto forma di determinante, detta condizione sarà:

$$\text{(16)} \qquad \begin{vmatrix} 2l_{12} \,.\, l_{13} \,.\, l_{14} & l_{12} \,.\, D_{24}^2 & l_{14} \,.\, D_{23}^2 \\ l_{12} \,.\, D_{34}^2 & 2l_{12} \,.\, l_{13} \,.\, l_{14} & l_{13} \,.\, D_{24}^2 \\ l_{14} \,.\, D_{23}^2 & l_{13} \,.\, D_{24}^2 & 2l_{12} \,.\, l_{13} \,.\, l_{14} \end{vmatrix} = 0$$

dove

$$\text{(17)} \qquad \begin{cases} D_{34}^2 = l_{13}^2 + l_{14}^2 - l_{34}^2 \\ D_{23}^2 = l_{12}^2 + l_{13}^2 - l_{23}^2 \\ D_{24}^2 = l_{12}^2 + l_{14}^2 - l_{24}^2 \end{cases}$$

sempre avendo le l_{ik} il significato espresso dalle (4).

Alla (16) si può anche dare la forma:

$$\text{(18)} \qquad 4l_{12}^2\, l_{13}^2\, l_{14}^2 + D_{23}^2 \,.\, D_2{}^2 \,.\, D_{34}^2 = l_{14}^2 \,.\, D_{23}^4 + l_{13}^2 \,.\, D_{24}^4 + l_{12}^2 \,.\, D_{34}^4 ,$$

essa corrisponde al teorema di *Tolomeo* relativo al quadrilatero inscritto in un cerchio e può rappresentare il *teorema di Tolomeo esteso al pentagono gobbo* inscritto in una sfera di S_3.

Facciamo l'ipotesi che i punti $A_1A_2A_3A_4$ siano i vertici del tetraedro regolare inscritto e poniamo

$$(A_1A_2) = (A_1A_3) = (A_1A_4) = (A_2A_3) = (A_2A_4) = (A_3A_4)$$
$$(A_5A_1) = d_1 \quad (A_5A_2) = d_2 \quad (A_5A_3) = d_3 \quad (A_5A_4) = d_4 :$$

avremo nella

$$\begin{vmatrix} 2d_2\, d_3\, d_4 & d_2 \,.\, (d_3^2 + d_4^2 - d_1^2) & d_3 \,.\, (d_2^2 + d_4^2 - d_1^2) \\ d_2 \,.\, (d_3^2 + d_4^2 - d_1^2) & 2d_2\, d_3\, d_4 & d_4 \,.\, (d_2^2 + d_3^2 - d_1^2) \\ d_3 \,.\, (d_2^2 + d_4^2 - d_1^2) & d_4 \,.\, (d_3^2 + d_3^1 - d_1^2) & 2d_2\, d_3\, d_4 \end{vmatrix} = 0$$

la formula corrispondente a quella nota di geometria piana

$$d_1 + d_3 = d_2 .$$

Il teorema che abbiamo dimostrato è l'estensione di uno dov a GIORGIO C. C. VON STAUDT, pubblicato nell'annata 1857 del *Gio di Crelle*: il suo enunciato si può trovare, colla relativa dimost zione, negli *Elementi di Matematica* di BALTZER. Parte IV, Pla metria, pag. 208.

E. PICCIOLI.

BIBLIOGRAFIA

UMBERTO CONCINA E ANGELO NEPPI-MODONA. — 1°. *Trigonometria pi e sferica, ad uso degli Istituti tecnici, con 75 figure e 1000 eserci: problemi*, pagg. 335. Torino, Casa Editrice G. B. Petrini di G vanni Gallizio; 1917. — L. 4.

2°. *Trigonometria piana, ad uso dei Licei, con 50 figure e 809 eser e problemi, estratto dall'opera degli stessi Autori: — Trigonome piana e sferica ad uso degli Istituti tecnici,* — pagg. 256. Torino 1917. — L. 3.

Questi libri — compilati dai nostri egregi Colleghi U. CONCINA del Lice Spezia, e A. NEPPI-MODONA dell'Istituto tecnico di Alessandria — sono m pregevoli, sia dal punto di vista scientifico, che da quello didattico, e meri giustamente favorevolissima accoglienza. Convinto di compiere un'opera utile le nostre scuole, io parlerò di essi (benchè sappia che si tratta di opere conosciute e lodate da molti insegnanti), lieto se potrò contribuire ad una maggiore diffusione.

Com'è avvertito nella prefazione, il volume per i licei classici e moderni estratto di quello per gl'istituti tecnici, dal quale è stata soppressa la trig metria sferica, lasciando invariato tutto il resto.

Il volume completo, destinato agl'istituti tecnici, è diviso in quattro parti: *liminari; teoria delle funzioni circolari; trigonometria piana; trigonometria sfe*

Gli A. si sono attenuti ai programmi ufficiali delle suddette scuole, d però un maggior sviluppo ad alcune parti, affinchè nulla mancasse d'impor o di molto notevole.

Nei *preliminari* e nel cap. XVII si trovano riassunte alcune nozioni n sarie di Geometria (sui segmenti, angoli, diedri e triedri) e di Algebra (variabili e funzioni) che gli alunni possono aver già appreso in altri cor matematica elementare, ma che, per ragioni suggerite agli A. dalla pratica l'insegnamento, si è trovato opportuno di esporre egualmente, in forma sint e conforme al punto di vista dell'insegnamento della trigonometria. Si tro effettivamente, in questa *introduzione* tutte le premesse necessarie per gli gimenti successivi. Con sobrietà, con chiarezza, con precisione, gli A. tratt varî argomenti, insistendo specialmente sui sistemi diversi per la misura degli angoli (*sessagesimale, centesimale* e *circolare*); sugli angoli e sugli *congruenti*; sulle coordinate dei punti di una retta o di una circonferenza; coordinate cartesiane ortogonali e polari sul piano o sulla sfera; sulle fun di una variabile indipendente, sulla loro rappresentazione grafica, e sui *punti all'infinito*. V'è anche un breve cenno sulla *periodicità* in generale di alcune funzioni e sulle proprietà principali delle *funzioni reciproche*.

La *teoria delle funzioni circolari* viene svolta seguendo quest'ordine: *generalità sulle funzioni circolari* (definizioni; funzioni di archi associati e complementari; periodicità); le *funzioni seno e coseno e loro applicazioni* (variazioni; grafica; archi aventi un dato seno o coseno; relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo; teoremi dei seni, delle proiezioni e del coseno; cenno sulla cosecante e sulla secante); le *funzioni tangente e cotangente* (variazioni; archi aventi una data tangente o cotangente; applicazione ai triangoli rettangoli); *determinazione dei valori delle funzioni circolari* (riduzione al primo semiquadrante; espressioni di cinque funzioni per mezzo della sesta; funzioni di $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{10}$ ec.; (1) uso delle tavole); *identità ed equazioni trigonometriche* (identità ed equazioni, illustrate da esempi molto bene scelti); *formule per l'addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, per la trasformazione di somme o differenze in prodotti; metodo per rendere logaritmiche le formule*. Questa parte si chiude con breve cenno relativo all'ordinario procedimento per determinare approssimativamente il seno e il coseno di un dato argomento.

Ottimo è questo ordine seguito dagli A. Quelle generalità sulle funzioni circolari, poste fin dal principio, permettono di svolgere con grande semplicità i capitoli successivi. Così, per es., nello studio delle variazioni, per il teorema relativo alla periodicità (n. 75), basta limitarsi all'intervallo $(0, 2\pi)$ trattandosi del seno e del coseno (n. 78) e all'intervallo $(0, \pi)$ per la tangente e per la cotangente.

Perchè " meno esatte e quindi anche meno importanti " (n. 93) gli A. hanno trattato brevemente, e hanno fatto bene, le proprietà della *secante* e della *cosecante*. Io sarei stato anche più *radicale* a questo riguardo. In nessuna delle relazioni che legano gli elementi lineari e angolari d'un triangolo piano o sferico figurano la secante e la cosecante; nelle applicazioni queste funzioni non compariscono affatto; le tavole trigonometriche dànno i valori di *sen*, *cos*, *tg* e *cotg* d'un arco compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, o dei loro logaritmi decimali, ma non contengono quelli della secante e della cosecante. Dopo essere state studiate nelle parti fondamentali, queste funzioni sono completamente abbandonate più tardi. E allora perchè perder tempo in uno studio inutile? Lo studio della trigonometria non presenta generalmente difficoltà ai nostri alunni, salvo, se mai, quella causata dal gran numero di formule che si sottopongono al loro studio. Le relazioni che intercedono tra le funzioni circolari di archi opposti, o differenti tra loro di π o di $\frac{\pi}{2}$, o supplementari, o complementari, sono ordinariamente espresse da gruppi di *sei* formule ciascuno. Bandendo dall'insegnamento lo studio della secante e della

(1) Ritengo opportuno che i valori delle funzioni di $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{10}$ sieno dati appena definite le funzioni circolari. Si disporrebbe così, fin dal principio, d'un materiale adatto per fare le opportune esemplificazioni nelle relazioni che intercedono tra le funzioni di archi particolari. Così, dopo aver parlato di archi supplementari si potranno fare gli esempi:

$$\text{sen } 135^0 = \text{sen } 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}; \qquad \cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}; \text{ ec.}$$

(Cfr. con Pesci, *Trigonometria*, 2ª edizione).

cosecante, si ridurrebbe di $\frac{1}{3}$ il numero di queste formule, e, in generale, si alleg gerirebbe notevolmente il bagaglio, pesante abbastanza, che si deve portare finch non si giunge alla risoluzione del problema trigonometrico, con l'evidente vantaggi di poter intensificare lo studio delle parti che rimangono ([1]).

Per completare le premesse necessarie o utili per lo svolgimento futuro, gli A definiscono nel n. 49 la *periodicità* in generale di alcune funzioni esprimendo così: " esistono funzioni le quali hanno la proprietà di conservare, nell'intervall " in cui sono definite, il valore che assumono per qualsivoglia valore della va " riabile indipendente x, quando a questo si aggiunga una costante ω, tali cio che per ogni valore x_1 di x si abbia

$$f(x_1 + \omega) = f(x_1).$$

" Tali funzioni si dicono periodiche, e la costante ω dicesi *periodo* ". S questa definizione di periodicità mi pare non vi sia nulla da osservare; ma, s non erro, una piccola lacuna si presenta per quanto si riferisce al *periodo*. Infatt dalla definizione, così com'è posta, segue subito che se una funzione $f(x)$ è periodic e ω è un periodo, tutte le costanti $k\omega$, con k intero positivo o negativo, son pure periodi. Una funzione periodica avrebbe così infiniti periodi; la costante sarebbe non *il* ma *un* periodo. Occorrerebbe dunque completare la definizion dicendo, per es., che si chiama *periodo* il più piccolo valore positivo che god della proprietà della costante ω ([2]); senza di che il teorema relativo alla peri dicità delle funzioni circolari, nel n. 75: " le funzioni circolari sono periodich " il seno e il coseno (la cosecante e la secante) hanno *il* periodo 2π; la ta " gente (e la cotangente) *il* periodo π ", e la relativa dimostrazione rimarrebbe difettosi.

* * *

Proseguendo nell'esame del libro, entriamo subito nella parte avente per t tolo *trigonometria piana*. Qui gli A. cominciano col richiamare i criterî di egu glianza dei triangoli rettilinei, e si fermano sui corrispondenti casi di determin zione d'un triangolo, sullo scopo della trigonometria piana, sull'analisi del relazioni *indipendenti* che risolvono il problema trigonometrico, e danno ut avvertenze per quanto specialmente si riferisce al calcolo degli angoli per mez delle loro funzioni circolari. Passano poi alla risoluzione dei triangoli rettango e dei triangoli in generale, completando per questi le formule relative, ferma dosi in ogni caso sulle *discussioni*, sulle *verificazioni* e su *esempi numerici*, c cenno alle principali applicazioni (misurazione di distanze *inaccessibili*, problen di Pothenot). Proseguono col dare le varie formule per il calcolo dell'area d triangolo, dei raggi dei cerchi circoscritto, inscritto ed ex-inscritti, e dei pri cipali elementi d'un quadrangolo inscrittibile, e col presentare cinque belli esem di risoluzione di triangoli, nel caso in cui i dati non siano tutti lati o ango dove alla risoluzione trigonometrica aggiungono quella geometrica, a conferm dell'esistenza del triangolo.

([1]) Cfr. con quanto dice il prof. Peano nel *Formulaire* (a. 1901, pag. 183) dopo aver defini le funzioni *sen, cos, tg*: *Nous n'introduirons pas les autres fonctions trigonométriques cotang, se cosec qu'on remplace par* $\frac{1}{tng}, \frac{1}{cos}, \frac{1}{sen}$.

([2]) Cfr. per es. con quanto dice in proposito il prof. Pesci (*Trigonometria*, 2ª edizione, pag. nella nota).

Lo svolgimento di tutta questa parte non potrebbe esser fatto in modo più chiaro e più esatto. Una semplice osservazione mi permetto di fare a proposito di quegli ultimi cinque problemi. Io preferirei che le due risoluzioni trigonometrica e geometrica, invece di essere indipendenti, avessero maggior nesso tra loro: più precisamente, che la risoluzione geometrica fosse dedotta da quella trigonometrica. In un libro di trigonometria è importante mostrare l'utilità del procedimento trigonometrico, e, in particolare, far vedere come esso possa aiutarci a risolvere i problemi di Geometria. — Così, per es., prendendo in esame il problema del n. 227: *risolvere un triangolo, essendo dati i due lati* b *e* c *e la bisettrice* l *dell'angolo compreso*, dopo aver mostrato come, dal lato trigonometrico, esso venga risolto dalla formula

$$\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{(b+c)l}{2bc},$$

si farà osservare come da questa si possa subito ricavare la costruzione.

Invero, da essa si deduce

$$\frac{l}{2} = \frac{bc}{b+c}\cos\frac{1}{2}\alpha,$$

e quindi, costruito il 4° proporzionale m dopo $b+c$, b, c, e poi il triangolo rettangolo che ha per ipotenusa m e un cateto eguale ad $\frac{1}{2}l$, l'angolo acuto adiacente al cateto sarà eguale ad $\frac{1}{2}\alpha$.... E si trova precisamente la costruzione indicata dagli A. — Così, ancora, esaminando il problema del n. 230: *risolvere un triangolo, dati due lati* b, c *e l'area* $\Delta = k^2$, dalla formula

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{2k^2}{bc}$$

si deduce subito la costruzione. Si trovi il terzo proporzionale m dopo b e k (o, ciò che è lo stesso, si trasformi k^2 in un rettangolo di base b, e si prenda l'altezza m); sarà allora

$$2m = c\,\text{sen}\,\alpha.$$

Quindi, costruito il triangolo rettangolo che abbia per ipotenusa c, e un cateto eguale a $2m$, l'angolo opposto a questo cateto sarà eguale ad α, o al suo supplemento.

* * *

Con gli stessi criteri, con la stessa esattezza, viene svolta la *trigonometria sferica*, ultima parte del libro. Nelle nozioni preliminari (cap. XVII) vengono richiamate le principali proprietà dei diedri, dei triedri, dei triangoli e poligoni sferici. Si passa subito alle relazioni fondamentali (d'*Eulero*) che legano i tre lati con un angolo e se ne deducono (col triangolo polare) quelle che legano i tre angoli con un lato; quindi il teorema dei seni, le relazioni tra quattro elementi consecutivi, e in particolare quelle che si riferiscono ai triangoli rettangoli e rettilateri. Senz'altro, si passa subito alla risoluzione dei triangoli sferici, dapprima nei casi particolari, e quindi in generale, con applicazioni relative al volume di un parallelepipedo, alla riduzione dell'angolo all'orizzonte, alla distanza sferica di due punti terrestri di cui siano date le coordinate geografiche, e al calcolo di alcuni elementi dei cinque poliedri regolari. L'ultimo capitolo contiene altre for-

mule notevoli di trigonometria sferica, e cioè le formule di DELAMBRE e di N
PERO, quelle relative all'eccesso sferico (formule del CAGNOLI e del LHUILIER
all'area del triangolo sferico.

Chiude l'ottimo volume una raccolta ricchissima di *esercizi* e *problemi* (1000;
cui 809 per la trigonometria piana) alcuni dei quali furono temi d'esame di
cenza d'Istituto tecnico (con qualche lieve modificazione perchè fossero meg
adattati alla risoluzione trigonometrica). Questi esercizi graduati, ordinati, c
rispondenti ai vari *Capitoli* in cui è diviso il libro, mettono in grado l'insegna
di fare utilissime applicazioni in ogni parte del Corso.

Quanto alle notazioni, mi pare che gli A. abbiano seguito quelle di uso p
comune. Dico *mi pare* perchè, nella grande varietà dei segni abbreviativi che
adoprano, non è facile orizzontarsi.

Per es. per la *tangente* si trova:

tan (PESCI; LAZZERI; BASSI; ec.); **tg** (FAIFOFER); **tng**, o **t** (PEANO);

per la *cotangente*:

ctn (PESCI; BASSI); **cot** (LAZZERI); **cotg** (FAIFOFER);

per *logaritmo decimale*:

L (PESCI); **log** (LAZZERI; FAIFOFER; ec.).

È da lamentare vivamente che non si sia ancora conseguito il desiderato
cordo per la unificazione dei segni abbreviativi, e della terminologia! (1)

* * *

Termino col far rilevare un altro pregio importante del libro; quello *ti
grafico*. Ancora una volta, con la stampa di quest'opera, la Casa editrice G. G
lizio di Torino ha confermato la sua buona fama (2). I *tipi* grandi, chiari; le *li*
ben distanziate; le formule collocate, separatamente, sempre in mezzo ad og
riga agevolano la lettura del libro. Le figure sono tutte bene eseguite; la ca
è ottima; la veste del volume è elegante. Per quanto scrupolosamente abl
cercato, non ho potuto trovarvi nessuna svista, nessuna imperfezione tipografi

C. CIAMBERLINI.

OPERE MATEMATICHE DI LUIGI CREMONA — pubblicate sotto gli auspi
della R. Accademia dei Lincei — Hoepli, Milano — Tomo secon
(con fototipia del monumento eretto all'Autore nella R. Scuo
d'Applicazione per gli Ingegneri di Roma) 1915 — Tomo ter
(con notizie della vita e delle opere dell'Autore e con indi
alfabetico per materie), 1917.

Nel fascicolo IV dell'Anno XXIX di questo *Periodico* il Prof. F. Enriqu
trattò ampiamente di questa importante raccolta di tutte le opere matematic
di Luigi Cremona, in occasione della stampa del primo volume fatta nel 191

---

(1) Com'è noto, la questione, posta fin dal 1898 dall'*Associazione "Mathesis"* al Congresso
Torino, non ha fatto alcun passo verso la sua soluzione.

(2) Edite dalla stessa Casa editrice sono, come tutti sanno, queste altre importanti opere
Matematica: F. PALATINI, *Aritmetica ed Algebra* ad uso delle scuole medie superiori; C. BURAL
FORTI, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva* per gli allievi della R. Accademia Militare; C. BURAL
FORTI e R. MARCOLONGO, *Omografie vettoriali con applicazioni alle derivate rispetto ad un punto
alla fisica-matematica*.

" La pubblicazione (così egli scriveva) già da questo primo volume, promette di riuscire sotto ogni riguardo degna del Maestro, che il concorde amore dei discepoli vuole far rivivere in mezzo alle più giovani generazioni scientifiche, e degna insieme della nostra Accademia che — onorando l'insigne geometra — ha felicemente espressa la gratitudine nazionale verso uno degli uomini che più hanno contribuito alla redenzione spirituale della nuova Italia ".

Il secondo e terzo volume hanno più che mantenuta la promessa; e la grande opera ormai compiuta è veramente degna del maestro, della R. Accademia dei Lincei, e torna ad onore sopratutto dell'illustre Prof Eugenio Bertini, il quale diresse la pubblicazione con scienza e coscienza mirabili, con affetto filiale di discepolo e di amico, col fermo proposito di erigere al maestro venerato il più duraturo, il più bello dei monumenti.

Hanno preso parte alla revisione delle 114 Memorie e Note raccolte nei tre volumi, oltre il professor Bertini, i professori Amaldi, Berzolari, Bianchi, Castelnuovo, Ciani, Fano, Lazzeri, Loria, Maggi, Martinetti Montesano, Niccoletti, Pittarelli, Pizzetti, Rosati, Scorza, Segre, Severi, Terracini, Togliatti, Torelli, Veronese.

I criteri fondamentali seguiti in questa pubblicazione sono stati due. Prima di tutto che si dovessero pubblicare tutte le pubblicazioni di Cremona, anche gli esercizi, gli articoli bibiografici e le commemorazioni, per presentare compiutamente l'opera scientifica dell'insigne geometra, tralasciando soltanto il *Calcolo Grafico* e la *Geometria Proiettiva*, che sono opere essenzialmente didattiche. In secondo luogo che si dovesse rispettare, sia per la sostanza sia per la forma, la redazione originale, raccogliendo in note alla fine dei rispettivi volumi le rettificazioni e gli schiarimenti che i revisori credettero indispensabile comunicare ai lettori.

Il terzo volume è preceduto da un bello articolo del Prof. Bertini, nel quale vengono esposte brevemente le vicende della vita del maestro ed è fatta una profonda sintesi dell'opera scientifica di lui. L'articolo è così interessante, così denso di notizie e di idee che ci piacerebbe di riprodurlo per intero, ma poichè lo spazio non lo consente, ci piace spigolare largamente in esso.

Gaudenzio Cremona, impiegato comunale a Pavia, discendente da una distinta famiglia di Novara, venuta in strettezze finanziarie, sposò in seconde nozze Teresa Andreoli e da essa ebbe quattro figli, il primo dei quali è il nostro Luigi, nato in Pavia il 7 dicembre 1830, l'ultimo è il rinomato pittore Tranquillo. A 12 anni Luigi Cremona perdè il padre, ma potè, non senza stenti, continuare gli studi nella sua città natale: li interruppe nel 1848 per partecipare come volontario alla guerra dell'indipendenza. Militò per 18 mesi e prese parte ai principali combattimenti dell'eroica difesa di Venezia, distinguendosi per disciplina e coraggio, tanto da esser proposto " a modello di virtù civili e militari ".

Durante la guerra ebbe il dolore di perdere la madre, e nel 1849 fu tratto quasi in fin di vita da un gravissimo tifo, di cui aveva portato il germe dalla guerra. Guarito terminò nello stesso anno gli studi classici, ed entrò nell'Università di Pavia, ove ebbe maestri il Bordoni e il Brioschi e conseguì, nel 1853, la laurea di ingegnere civile ed architetto. A Pavia rimase fino al 1856 prima come ripetitore privato di matematiche, poi come supplente professore nel Ginnasio; passò poi come professore ordinario al Ginnasio di Cremona e nel 1869 al Liceo S. Alessandro (oggi Beccaria) di Milano e finalmente nel 1860 fu chiamato alla cattedra di Geometria Superiore nella Università di Bologna, ove insegnò anche Geometria Descrittiva, Geometria Analitica e Meccanica razionale. Nel 1866 trasferitosi a Milano, insegnò Statica grafica nel Politecnico e Geometria Supe-

riore nella Scuola Normale, che il Brioschi aveva annesso al Politecnico st
con l'intendimendo di formare professori per gli Istituti tecnici.

Nel 1873 passò a Roma come direttore della Scuola degli Ingegneri, ch
costitui ed ordinò con singolare perfezione, e vi insegnò Statica grafica; dal
in poi conservò la direzione della scuola degli ingegneri e continuò l'inse
mento della geometria superiore nella facoltà di scienze fino alla sua morte
venuta il 10 Giugno 1903.

I primi lavori di Cremona, che rivelarono la forza, l'eleganza e l'accuratezza
sua mente, sono in gran parte ispirati alle opere di Chasles, delle quali dimost
o completano o accrescono vari risultati. Ma con insuperabile energia e costan
lavoro ben presto Cremona s'impadronì dei metodi e delle ricerche della scuola
sca, e il suo spirito si volse verso i metodi geometrici puri, spogli di qualunque
ritmo, ai quali doveva dare una impronta personale genialissima ed insupe

La *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane*, pubblicata p
prima volta nel 1862, tradotta poi in tedesco e in boemo, è la prima opera pode
in cui si manifestano le qualità eminenti del Cremona. In numerose memorie,
blicate fra il 1862 e il 1865, egli applicò i metodi generali della Introduzione a su
ficie e linee speciali notevolissime, nel 1866-67 estese gli stessi concetti allo sp
in un'altra poderosa opera: *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*

Uno degli argomenti studiati più profondamente dal Cremona è quello
trasformazioni geometriche e delle rappresentazioni piane delle superficie
prima Nota delle trasformazioni piane (è la 40ª della raccolta) è del 1863,
seconda (N. 62) del 1864. Il contributo di Cremona fu così importante, ch
dette trasformazioni furono chiamate e sono universalmente conosciute col
di *Trasformazioni di Cremona*, sebbene dei casi particolari fossero stati es
nati precedentemente da altri, segnatamente dal Jonquieres e dal Mag
Nel 1871 furono pubblicate le importanti *Note sulle trasformazioni razionali*
spazio (N. 91, 92), alle quali si collegano altre notevoli applicazioni e casi
ticolari, fino alla Nota *Sopra una trasformazione birazionale, del sesto grado*
spazio a tre dimensioni, la cui inversa è del quinto grado (1884) con la quale
mina l'attività scientifica del Cremona.

Il terzo volume della raccolta si chiude con la commemorazione del Sen
Prof. Beltrami (1900).

L'attività del Cremona si manifestò non solo nel campo della scienza ma a
nella scuola. Fu Ministro della Pubblica Istruzione per pochi giorni solam
(dal 1º al 29 giugno 1898), ma la sua autorità era così grande, indipendentem
dalle cariche politiche, che i suoi consigli erano sempre e dovunque ascolta

Si deve a lui lo impulso agli studi geometrici in Italia, la creazione di
vera scuola geometrica Italiana, che vanta ora valorosi cultori, i quali in g
rale si sono scostati dalle direttive del capo scuola. Si deve a lui l'introdu
dei corsi di Geometria proiettiva e di Statica Grafica nelle nostre Unive
corsi che dopo avere prosperato per qualche lustro, vanno ora rapidamente s
parendo, non sappiamo con quanto beneficio della scienza e della scuola.

Forse l'entusiasmo dei neofiti aveva portato a qualche esagerazione, fo
richiedeva dai futuri ingegneri troppa scienza pura; ma la soppressione tota
quei corsi non è certamente un progresso. K

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 Aprile 1917

Su alcuni determinanti di differenze e di somme [1]

I. Nel vol. 26 del *Giornale di Matematiche* nella nota " Un teorema sui determinanti di differenze " R. Raimondi dimostrò che: data una progressione aritmetica della prima classe d'ordine n

$$(1) \qquad \overset{n\,.}{\div}\ a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

di ragione d, se si forma lo specchietto

$$(2) \qquad \begin{cases} d \quad , \; d \quad , \; d \quad , \ldots\ldots d \quad , \ldots \\ d_{1,n-1}, \; d_{2,n-1}, \; d_{3,n-1}, \ldots\ldots d_{n+1,n-1}, \ldots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d_{1,1} \; , \; d_{2,1} \; , \; d_{3,1} \; , \ldots\ldots d_{n+1,1} \; , \ldots \\ a_1 \quad , \; a_2 \quad , \; a_3 \quad , \ldots\ldots a_{n+1} \quad , \ldots \end{cases}$$

dove in generale $d_{r,s}$ indica la r^{ma} delle differenze s^{me}, si ha che se si prendono $n+1$ verticali successive per formare un determinante, questo ha il valore costante d^{n+1}.

È importante osservare che tali determinanti (a meno del segno) sono eguali a determinanti ortosimmetrici di Hankel di ordine $n+1$ formati con termini successivi della (1) (v. *I Determinanti* di E. Pascal, pag. 88 e seguenti).

Infatti se si considera il determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_{n+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n+1} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots\ldots & a_{2n+1} \end{vmatrix},$$

sottraendo dagli elementi della seconda colonna i corrispondenti della prima, da quelli della terza colonna i corrispondenti della seconda, ecc.;

---

[1] Questo articolo doveva essere pubblicato prima dell'altro che già è comparso nel fascicolo III; i richiami in quello contenuti si riferiscono a questo. (*Nota della Direzione.*)

poi nel determinante ottenuto sottraendo dai termini della terza c
lonna i corrispondenti della seconda, da quelli della quarta i cor
spondenti della terza, ecc.; poi nel nuovo determinante ottenuto
gliendo dai termini della quarta colonna quelli corrispondenti de
terza, da quelli della quinta i corrispondenti della quarta, ecc.
così via, si ha:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & d_{1,1} & \ldots\ldots d \\ a_2 & d_{2,1} & \ldots\ldots d \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & d_{n,1} & \ldots\ldots d \\ a_{n+1} & d_{n+1,1} & \ldots\ldots d \end{vmatrix}$$

ed anche

$$D = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} d & d & \ldots\ldots d \\ d_{1,n-1} & d_{2,n-1} & \ldots\ldots d_{n+1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{1,1} & d_{2,1} & \ldots\ldots d_{n+1,1} \\ a_1 & a_2 & \ldots\ldots a_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} d^{n+1}.$$

La dimostrazione fatta sussiste anche se le a non formano u
progressione aritmetica, perciò un determinante di differenze di qu
siasi ordine ricavato da una successione qualsiasi e da quelle de
differenze successive formando uno specchietto come è formato il
e prendendo m colonne successive delle prime m linee è eguale
meno del segno) al determinante di Hankel di ordine m che si
tiene dalla successione data prendendo come primo termine l'ulti
termine della prima colonna del determinante di differenze stess

2. Data una progressione aritmetica di ordine n e di ragione

$$(1) \qquad \frac{n}{\cdot}\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

se si considera la successione

$$(2) \qquad a_1\,,\quad a_{1+s}\,,\quad a_{1+2s}\,,\ldots\ldots a_{1+rs}\,,\ldots\ldots$$

formata con termini della data, partendo dal primo (o da uno qu
siasi) e prendendo i seguenti separati fra loro da $s-1$ termini d
stessa, si ha che questa nuova successione forma una progressi
d'ordine n e di ragione $s^n d$.

Per le progressioni di primo ordine la proprietà è evidente,
si può dimostrare facilmente anche per una progressione di ord
qualsiasi. Infatti formiamo la successione delle differenze pri
della (2):

$$(3) \qquad (a_{1+s} - a_1)\,,\quad (a_{1+2s} - a_{1+s})\,,\quad (a_{1+3s} - a_{1+2s})\,,\ldots$$

evidentemente:

$$
\begin{array}{l}
a_{1+s} - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (a_{1+s} - a_s) \\
a_{1+2s} - a_{1+s} = (a_{1+s+1} - a_{1+s}) + (a_{1+s+2} - a_{1+s+1}) + \ldots + (a_{1+2s} - a_{2s}) \\
\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

cioè il primo termine della (3) è eguale alla somma delle prime s differenze prime della progressione data, il secondo è eguale alla somma delle successive s differenze prime della progressione stessa, ecc.

Se ora formiamo le differenze seconde della successione (2), una qualunque di queste, per l'osservazione fatta prima, risulta somma di s differenze fra due differenze prime della (1) separate da $s-1$ differenze nella successione delle differenze prime della (1) stessa, perciò le differenze seconde della successione (2) risultano somme di s^2 differenze seconde di (1), e così via; poichè in generale le differenze r^{me} di (2) risultano formate nello stesso modo dallo stesso numero di differenze r^{me} di (1) in modo che ad ogni differenza r^{ma} di (1) contenuta in una differenza r^{ma} di (2) ne corrisponde una della differenza r^{ma} successiva che è separata dalla prima nella successione delle differenze r^{me} di (1) da $(s-1)$ termini, ne viene che le differenze $(r+1)^{me}$ risultano somme di s^{r+1} differenze di (1). Quindi in particolare le differenze ennesime di (2) risultano somme di s^n differenze ennesime di (1), ma queste sono tutte eguali a d perciò le differenze n^{me} di (2) hanno il valore costante $s^n d$.

Applicando allora alla progressione

$$\frac{n\,.}{.}\; a_1 \,.\, a_{1+s} \,.\, a_{1+2s} \ldots\ldots a_{1+rs} \ldots\ldots$$

una proprietà ricordata al numero **1**, si ha

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_{1+s} & \ldots\ldots a_{1+ns} \\
a_{1+s} & a_{1+2s} & \ldots\ldots a_{1+(n+1)s} \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot \\
a_{ns} & a_{1+ns} & \ldots\ldots a_{2ns} \\
a_{1+ns} & a_{1+(n+1)s} & \ldots\ldots a_{1+2ns}
\end{vmatrix}
= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{n(n+1)} d^{n+1}.
$$

3. Data una progressione aritmetica di ordine n e di ragione d

(1) $$\frac{n\,.}{.}\; a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots\ldots a_r \ldots\ldots$$

formiamo la successione delle prime somme s ad s della progressione data, cioè la successione che si ottiene addizionando al primo termine di (1) gli $s-1$ successivi, al secondo gli $s-1$ successivi, ecc.

essa formerà una progressione aritmetica d'ordine n e di ragione s
perciò

$$\begin{vmatrix} \sum_{q=1}^{q=s} a_q & \sum_{q=1}^{q=s} a_{1+q} & \dots\dots\dots\dots & \sum_{q=1}^{q=s} a_{n+q} \\ \sum_{q=1}^{q=s} a_{1+q} & \sum_{q=1}^{q=s} a_{2+q} & \dots\dots\dots\dots & \sum_{q=1}^{q=s} a_{(n+1)+q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{q=1}^{q=s} a_{n+q} & \sum_{q=1}^{q=s} a_{(n+1)+q} & \dots\dots\dots\dots & \sum_{q=1}^{q=s} a_{2n+q} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{n+1} d^{n}$$

La successione delle prime somme s ad s della successione del
prime somme della data si dice la successione delle seconde somm
della data, la successione delle prime somme della successione del
seconde somme della data si dice la successione delle terze somm
della data, ecc.

È facile verificare che in generale la successione delle r^{me} somme
ad s della data forma una progressione aritmetica d'ordine n e
ragione $s^r d$, perciò se formiamo un determinante in modo analog
al precedente per tale progressione, esso sarà eguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} s^{r(n+1)} d^{n+1}.$$

4. Consideriamo ora una progressione aritmetica dell'ordine n
della classe m

(1) $$m \frac{n}{\cdot} a_1 . a_2 . a_3 \dots\dots a_r \dots\dots$$

di ragioni

$$d_1, \quad d_2, \quad d_3, \dots, d_m,$$

la cui somma indicheremo con S. Se si considera la successione

(2) $$a_1, \quad a_{1+m}, \quad a_{1+2m}, \dots, a_{1+rm}, \dots,$$

formata con termini della data, partendo dal primo (o da uno qua
siasi) e prendendo i seguenti separati fra loro da $m-1$ termi
della stessa, si ha che questa nuova successione forma una progre
sione d'ordine n e di ragione $S . m^{n-1}$.

Per le progressioni di primo ordine la proprietà è evidente, ma
può facilmente dimostrare anche per una progressione di ordine qua
siasi. Infatti formiamo la successione delle differenze prime della (2)

(3) $$(a_{1+m} - a_1), \quad (a_{1+2m} - a_{1+m}), \quad (a_{1+3m} - a_{1+2m}), \dots$$

evidentemente

$$
\begin{array}{l}
a_{1+m} - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots\dots\dots\dots + (a_{1+m} - a_m) \\
a_{1+2m} - a_{1+m} = (a_{2+m} - a_{1+m}) + (a_{3+m} - a_{2+m}) + \dots + (a_{1+2m} - a_{2m}) \\
\cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot
\end{array}
$$

cioè la prima delle differenze prime di (2) è eguale alla somma delle prime m differenze prime di (1), la seconda è eguale alla somma delle successive m differenze prime di (1), ecc.

Facilmente risulta poi che: la prima delle differenze seconde di (2) è eguale alla somma delle prime m somme m ad m delle differenze seconde di (1), la seconda è eguale alla somma delle m successive prime somme m ad m delle differenze seconde di (1), ecc.; la prima delle differenze terze di (2) è eguale alla somma delle prime m seconde somme m ad m delle differenze terze di (1), la seconda è eguale alla somma delle m successive seconde somme m ad m delle differenze terze di (1), ecc.; in generale la prima delle differenze r^{me} di (2) è eguale alla somma delle m prime $(r-1)^{me}$ somme m ad m delle differenze r^{me} di (1), la seconda è eguale alla somma delle m successive $(r-1)^{me}$ somme m ad m delle differenze r^{me} di (1), ecc.

In particolare la prima delle differenze n^{me} di (2) è eguale alla somma delle m prime $(n-1)^{me}$ somme m ad m delle differenze n^{me} di (1), la seconda è eguale alla somma delle m successive $(n-1)^{me}$ somme m ad m delle differenze n^{me} di (1), ecc., ma ricordando la legge di formazione delle $(m-1)^{me}$ somme m ad m delle differenze n^{me} di (1) e ricordando pure che la somma di m differenze n^{me} successive di (1) è costante e eguale a S, si ha che le differenze n^{me} di (2) sono tutte eguali ad $S \cdot m^{n-1}$.

Applicando allora alla progressione

$$\frac{n\,.}{.}\ a_1 \,.\, a_{1+m} \,.\, a_{1+2m} \,.\,.\,.\,.\,.\, a_{1+rm} \,.\,.\,.\,.$$

una proprietà ricordata al numero 1, si ha

$$
\begin{vmatrix}
a_1 & a_{1+m} & \dots\dots & a_{1+nm} \\
a_{1+m} & a_{1+2m} & \dots\dots & a_{1+(n+1)m} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{nm} & a_{1+nm} & \dots\dots & a_{2nm} \\
a_{1+nm} & a_{1+(n+1)m} & \dots\dots & a_{1+2nm}
\end{vmatrix}
= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} m^{(n-1)(n+1)} S^{n+1}.
$$

5. Consideriamo una progressione aritmetica dell'ordine m e della classe m

$$m \frac{n\,.}{.}\ a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \,.\,.\,.\,.\,.\, a_r \,.\,.\,.\,.$$

e siano $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_m$ le ragioni della progressione, la cui som
indicheremo con S.

Formiamo la successione delle prime somme m ad m, essa ci
una progressione aritmetica d'ordine n e della prima classe la
ragione è eguale a S (in generale la successione delle s^{me} somme
ad m, ci dà una progressione aritmetica d'ordine n e della pri
classe di ragione m^{s-1} S). Ne viene quindi che se formiamo un det
minante di Hankel di ordine $n+1$ per la progressione ottenuta, si h

$$\begin{vmatrix} \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q} & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+1} & \ldots\ldots & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+n} \\ \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+1} & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+2} & \ldots\ldots & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+n} & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+n+1} & \ldots\ldots & \sum_{q=1}^{q=m} a_{r+q+2n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} S^{n}$$

qualunque sia il valore di r.

Formando la successione delle prime somme tm a tm della pr
gressione data si ha una progressione aritmetica d'ordine n e
ragione tS (in generale la successione delle s^{me} somme tm a tm,
dà una progressione aritmetica d'ordine n e della prima classe di r
gione $m^{s-1} t^s$ S) e un determinante formato in modo analogo al pr
cedente sarà eguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} t^{n+1} S^{n+1}.$$

L. Tenca.

UN PROBLEMA SULLE FORME QUADRATICHE BINARI
a determinante negativo

1. Com'è ben noto [1], data una forma quadratica binaria a coe
ficienti interi:

$$f = (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

[1] Dirichlet, *Zahlentheorie*, vol. 1°, cap. IV.

eseguendo sulle variabili la sostituzione lineare a coefficienti interi:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha x_1 + \beta y_1 \\ y = \gamma x_1 + \delta y_1 \end{cases}$$

essa si trasforma nella:

$$f_1 = a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 y_1 + c_1 y_1^2$$

i cui coefficienti dipendono da quelli della data, e dalle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ secondo le relazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} a_1 = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b_1 = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c_1 = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2. \end{cases}$$

Qualora il determinante $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ della sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sia eguale, in valore assoluto, all'unità, i determinanti di f, f_1:

$$D = b^2 - ac, \qquad D_1 = b_1^2 - a_1 c_1,$$

essendo legati dalla relazione:

$$D_1 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 . D,$$

risultano tra di loro eguali, ed in questo caso le due forme si dicono *equivalenti propriamente* od *impropriamente* secondochè:

$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = \pm 1.$$

L'equivalenza di due forme, se propria, obbedisce alle leggi caratteristiche dell'eguaglianza come si riconosce subito dalle (1) (2).

Notando che nell'ipotesi $D < 0$, i coefficienti estremi devono aver segni eguali, ne viene che ad ogni forma (a, b, c) si associa la $(-a, -b, -c)$, per cui si può limitarsi a considerare solo quelle in cui a, c sono entrambi positivi.

Due forme quali (a, b, c); $(c, -b, a)$ deducibili l'una dall'altra mediante la sostituzione propria $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e quindi equivalenti, diconsi *complementari*.

Risulta immediatamente dalle (1), (2) che, se eseguendo sopra una f una determinata sostituzione $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ propria, si ottiene la f_1, da questa si ritorna alla prima mediante l'inversa $\begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$, essa pure propria; ed inoltre che l'eseguire sopra una f successivamente due sostituzioni proprie $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ produce lo stesso effetto della sostituzione prodotto

$$\begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix}.$$

Indicando con $\sigma(k)$ la:

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove k è un intero qualunque positivo, nullo o negativo, si trov subito:

$$\sigma(k) \,.\, \sigma(h) = \sigma(h) \,.\, \sigma(k) = \sigma(k + h)$$
$$\sigma(k) \,.\, \sigma(-k) = \sigma(0) = 1$$

e quindi:

$$\sigma(-k) = \sigma(k)^{-1}.$$

Ne viene che se f è una forma qualsiasi ed f_1 il risultato cui pervieno operando su di essa la $\sigma(k)$, dall'eguaglianza:

$$f_1 = f \,.\, \sigma(k)$$

si ricava:

$$f_1 \,.\, \sigma(-k) = f \,.\, \sigma(k) \,.\, \sigma(-k) = f.$$

Ciò premesso, detta f una forma qualsiasi, immaginiamo eseguite s di essa tutte le possibili $\sigma(k)$: si ottiene così un sistema di infini forme

(3) $$f \,.\, \sigma(k) = (a,\ ax + b,\ ak^2 + 2bk + c) = \mathrm{S}$$

tra loro tutte equivalenti, con il primo coefficiente in comune e nell quali i medi risultano congrui (mod a).

Le forme di S si dicono *parallele*.

Se f_1 è una qualsiasi forma di S per cui $f_1 = f \,.\, \sigma(k)$, si ha pur $f = f_1 \,.\, \sigma(k)^{-1}$, per cui il sistema stesso si può pensare generat dalla f_1 applicando ad essa le sostituzioni $\sigma(k)^{-1} \,.\, \sigma(k)$ il cui insiem coincide con quello delle $\sigma(k)$.

Notiamo inoltre che, data una qualsiasi f, mediante una $\sigma(k)$ op portunamente scelta, si potrà sempre trasformarla in una equiva lente:

$$f \,.\, \sigma(k) = (a,\ ak + b,\ ak^2 + 2bk + c)$$

in modo che si abbia:

$$a \geqslant 2 \,.\, |\, ak + b \,|$$

A tal uopo basterà sempre attribuire a k un segno convenient e come valore assoluto quello di $\dfrac{b}{a}$ se intero, e diversamente il quo ziente a meno di un'unità per difetto o per eccesso di $\dfrac{|b|}{a}$.

Oltre a ciò, chiamando *ridotta* una $f = (a, b, c)$ qualora sia

$$c \geqslant a \geqslant 2\,|\,b\,|$$

si dimostra che il numero delle forme ridotte tra quelle di dato de terminante negativo è finito; e che gli unici casi nei quali due form ridotte non identiche si equivalgono, sono i seguenti:

I $\left(a, \frac{a}{2}, c\right)$ ed $\left(a, -\frac{a}{2}, c\right)$

II (a, b, a) ed $(a, -b, a)$

Segue che, essendo ogni forma equivalente ad una ridotta, tutte quelle di dato determinante negativo (— D) si possono distribuire in *classi* di forme equivalenti a base di ciascuna delle quali viene a trovarsi in generale un'unica ridotta ed eccezionalmente due [illegible] loro equivalenti. (1)

2. Premesso, per comodo del lettore, questa rapida rassegna delle proprietà classiche delle forme di determinante negativo, passiamo ad esporre lo scopo di questa breve nota.

Consideriamo una classe qualunque H di forme equivalenti, fra quelle in numero finito nelle quali si distribuiscono le forme di dato determinante negativo (— D).

Convenendo di chiamare *sezione* Σ *l'insieme* di quelle tra le H che hanno lo stesso primo coefficiente, e sistema S la totalità di quelle tra le Σ che sono tra loro parallele, mostreremo da prima che le forme di H si possono ordinare in sezioni composte ciascuna di uno o più sistemi, in modo che i primi coefficienti che sono costanti in ciascuna sezione si succedano nelle sezioni in ordine di grandezza, ed in fine verrà indicato il procedimento mediante il quale, costruite le prime n sezioni, si potrà determinare l'$(n+1)^{ma}$.

3. Sia $f = (a, b, c)$ una forma ridotta tra quelle di determinante (— D) tale cioè che:

$$c \geqslant a \geqslant 2\,|\,b\,|.$$

Faremo vedere intanto che non può essere $p < a$.

Ammessa infatti l'esistenza di forme equivalenti ad f e col primo coefficiente $< a$, sia $\varphi = (p, q, r)$ quella in cui p è il più piccolo e trasformiamola mediante una $\sigma(k)$ nella parallela $\varphi_1 = (p_1, q_1, r_1)$ in modo che $p \geqslant 2\,|\,q_1\,|$.

Si vede subito che non potrà essere $r_1 < p$; poichè se ciò fosse, la complementare $(r_1, -q_1, p)$, sempre equivalente ad f, avrebbe allora il suo primo coefficiente $r_1 < p$ e ciò contro l'ipotesi.

D'altra parte, non può essere nemmeno $r_1 \geqslant p$, poichè allora la φ_1 e la f sarebbero entrambe ridotte equivalenti coi primi coefficienti disuguali, la qual cosa è impossibile.

Non esiste quindi una φ equivalente ad f col primo coefficiente $p < a$: sostituendo alla φ la sua complementare, si prova subito che lo stesso vale per il terzo coefficiente r.

---

(1) DIRICHLET, § 65-66-67.

Dopo ciò, facciamo vedere che il sistema:

$$S = f \cdot \sigma(k) = (a,\ ak + b,\ ak^2 + 2bk + c)$$

comprende tutte le equivalenti ad f col coefficiente iniziale a.

Sia infatti (a, q, r) equivalente ad f, ed (a, q_1, r_1) la parallela c $a \geqslant 2 \mid q_1 \mid$.

Non può essere $r_1 < a$ poichè allora $(r_1, -q_1, a)$ sarebbe p equivalente ad f con $r_1 < a$, cose che si è dimostrata impossibi d'altra parte se $r_1 \geqslant a$, la $(a\ q_1, r_1)$ sarebbe ridotta e quindi $r_1 =$ e $q_1 = b$ ed eventualmente $q_1 = -b$ qualora fosse $a = 2 \mid b \mid$ ed insie ad (a, b, c) esistesse pure la ridotta ad essa parallela $(a, -b, c)$.

Poichè (a, q, r) è parallela ad (a, q_1, r_1) e quest'ultima coinci con (a, b, c) od eccezionalmente con la $(a, -b, c)$ parallela ad $(a, b,$ resta assodato che in ogni caso (a, q, r) fa parte di S.

Rimane ancora a provarsi la non esistenza di forme (p, q, r) eq valenti ad f, per le quali:

$$a < p < c \qquad (\text{oppure } a < r < c).$$

Posto che $\varphi = (p, q, r)$ sia una di quelle soddisfacenti a tale con zione, ed in cui p è il più piccolo possibile, sia $\varphi_1 = (p, q_1, r_1)$ la s parallela con $p \geqslant 2 \mid q_1 \mid$. Non potrà essere $r_1 \geqslant p$ poichè φ_1 sareb essa pure ridotta equivalente ad f il che è impossibile; e se $r_1 <$ la complementare $(r_1, -q_1, p)$ sarebbe equivalente ad f col pri coefficiente $< p$, e quindi, in virtù dell'ipotesi, necessariamente egu ad a.

Ma se ciò fosse, la $(a, -q_1, p)$ come equivalente ad f, per qua si è dimostrato, farebbe parte di S, e p verrebbe dato dal trinom

$$ak^2 + 2bk + c$$

che essendo $a \geqslant 2 \mid b \mid$ assume sempre valori $\geqslant c$ per cui, contro l'ip tesi, sarebbe $p \geqslant c$.

Riassumendo si ha il

Teorema " Se (a, b, c) è ridotta e (p, q, r) è un'equivalente qu siasi, non possono presentarsi che i seguenti casi.

a) Le due forme non hanno coefficienti estremi in comune, allora p ed r sono entrambi $> c$, e di conseguenza $\mid q \mid > \mid b \mid$.

b) Le due forme hanno in comune uno degli estremi, ed allor rimanenti coefficienti di (p, q, r) non sono inferiori, in valore as luto, ai corrispondenti di (a, b, c). (1)

---

(1) Di questa proprietà delle forme ridotte, in virtù della quale si può dire che tra le eq valenti sono quelle che hanno i minimi coefficienti, non si fa cenno alcuno nell'opera class del Dirichlet e nemmeno in altre posteriori come " Die elemente der zahlentherie del Bachman " Elements de la Théorie des nombres del Cahen ". Non vi si allude neanche nel Fascicol Tomo 1°, Vol. 3° dell'Encyclopedie redatto da Wahlen e Cahen.

4. Passiamo ora alla risoluzione del problema cui si è accennato al § 2.

Sia $f_0 = (a_0, b_0, c_0)$ l'unica ridotta che sta a base di una classe H di forme equivalenti per cui sarà $c_0 > a_0$ ed $a_0 > 2 \mid b_0 \mid$.

Con lo stesso ragionamento seguito nella dimostrazione del Teorema del § 3, proveremo intanto che il sistema

$$S_0 = f_0 \,.\, \sigma(k) = (a_0,\ a_0 k + b_0,\ a_0 k^2 + 2b_0 k + c_0)$$

di forme parallele, esaurisce senza ripetizione, tutte quelle di H col primo coefficiente a_0. Posto per brevità:

$$a_0 k + b_0 = t_0(k); \qquad a_0 k^2 + 2b_0 k + c_0 = u_0(k)$$

il sistema S_0 si rappresenterà con

$$S_0 = f_0 \,.\, \sigma(k) = (a_0,\ t_0(k),\ u_0(k))$$

e costituirà la prima sezione Σ_0 di H.

L'intero che segue immediatamente a_0 quale primo coefficiente di una forma di H è c_0, poichè in H esiste la $(c_0, -b_0, a_0)$ e nessuna il cui coefficiente iniziale sia $< a_0$, o compreso tra a_0 e c_0 come risulta dal Teorema del § 3.

Posto $c_0 = a_1$, $-b_0 = b_1$, $a_0 = c_1$, con la $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$ si costruisca il sistema:

$$f_1 \,.\, \sigma(k) = (a_1,\ t_1(k),\ u_1(k)) = S_1$$

e proviamo che esso esaurisce tutte le forme di H col primo coefficiente $a_1 = c_0$.

Sia infatti (a_1, q, r) in H ed (a_1, q_1, r_1) la sua parallela con $a_1 \geqslant 2 \mid q_1 \mid$.

Non può essere $r_1 \geqslant a_1$ poichè allora (a_1, q_1, r_1) sarebbe una ridotta in H diversa da f_0: sarà quindi $r_1 < a_1 = c_0$ e necessariamente $r_1 = a_0$. Per ciò:

$$(a_1, q_1, r_1) = (a_1, q_1, a_0) = (c_0, q_1, a_0)$$

e di qui: $q_1 = \pm b_0$.

Ma (c_0, q_1, a_0) essendo in H, equivale ad (a_0, b_0, c_0) e così pure a $(c_0, -b_0, a_0)$ e se fosse $q_1 = b_0$ si equivarrebbero le:

$$(c_0, b_0, a_0); \qquad (c_0, -b_0, a_0)$$

e del pari le complementari:

$$(a_0, -b_0, c_0); \qquad (a_0, b_0, c_0)$$

entrambe ridotte, il che è impossibile perchè (a_0, b_0, c_0) è l'unica ridotta tra le infinite forme equivalenti che costituiscono H.

Sarà allora $q_1 = -b_0$ e di conseguenza:

$$(a_1, q, r)\ \sigma(k) = (a_1, q_1, r_1) = (a_1, -b_0, a_0) = (a_1, b_1, c_1)$$

vale a dire:

$$(a_1, q, r) = (a_1, b_1, c_1)\ \sigma(k)^{-1}$$

e la data forma fa parte di S_1 che viene così a costituire la Σ_1.

Per scoprire il coefficiente che segue a_1 si cerchino i minimi valori interi $> a_1$ che per valori interi di k assumono le funzioni

$$u_0(k) = a_0k^2 + 2b_0k + c_0$$
$$u_1(k) = a_1k^2 + 2b_1k + c_1$$

notando che questi minimi che indicheremo con $u_0(k_0)$ ed $u_1(k_1)$, nor potranno venir assunti dalle $u_0(k)$ $u_1(k)$ che per un unico valore intero di k.

Indicando con a_2 il minore dei due numeri $u_0(k_0)$, $u_1(k_1)$ se disuguali od il loro valore comune se eguali, proviamo che a_2 sarà i coefficiente iniziale della terza sezione. Che in H vi sieno form (a_2, q, r) è manifesto: poichè se p. e: $a_2 = u_1(k_1)$, in S_1 trovasi la:

$$(a_1, t_1(k), u_1(k_1))$$

e con essa appartiene ad H la complementare equivalente

$$(u_1(k_1), -t_1(k_1), a_1) = (a_2, -t_1(k_1), a_1).$$

Non possono però esistere in H forme il cui coefficiente inizial sia compreso tra a_1 ed a_2.

Ammesso infatti che nella (p, q, r) di H fosse

$$a_1 < p < a_2$$

e che non ve ne fossero altre rispondenti alla stessa condizione co primo coefficiente $< p$, detta (p, q_1, r_1) la parallela con $p \geqslant 2 \mid q_1 \mid$ non potendo essere $r_1 \geqslant p$, e nemmeno $r_1 < p$ e contemporaneament $r_1 > a_1$, poichè allora la $(r_1, -q_1, p)$ urterebbe contro l'ipotesi relativa al primo coefficiente, ne seguirebbe necessariamente $r_1 = a_1$ oppure $r_1 = a_0$ e con ciò $(r_1, -q_1, p)$ apparterebbe ad S_0 od S_1, e in questo caso una delle due funzioni $u_0(k)$, $u_1(k)$ sarebbe suscettibil del valore $p < a_2$.

5. Determinato così il coefficiente a_2 che caratterizza la terza sezione, per quanto si è precedentemente osservato in S_0 od in S_1 o in entrambi esisteranno una od al più due forme a terzo coefficiente a_2. Supponiamo che ne esista una in ciascuno e sieno

$$(a_1, t_0(k_0), u_0(k_0)) = (a_0, t_0(k_0), a_2)$$
$$(a_0, t_1(k_1), u_1(k_1)) = (a_1, t_1(k_1), a_2)$$

e se ne considerano le complementari che supponiamo non parallele

$$f'_2 = (a_2, -t_0(k_0), a_0); \qquad f''_2 = (a_2, -\text{[illegible]}$$

con le quali costruiamo i sistemi:

$$S'_2 = f'_2 . \sigma(k); \qquad S''_2 = f''_2 . \sigma(k)$$

Dico, in primo luogo, che i due sistemi non hanno forme in comune.

Sia infatti (p, q, r) in entrambi. Sarà

$$f'_2 . \sigma(k') = (p, q, r)$$
$$f''_2 . \sigma(k'') = (p, q, r)$$

e di qui:

$$f'_2 = f''_2 . \sigma(k'') . \sigma(k')^{-1} = f''_2 \sigma(k'' - k')$$

ed f'_2 e f''_2 sarebbero parallele.

Oltre a ciò, S'_2, S''_2 comprendono tutte le forme di H del tipo (a_2, p, q).

Sia infatti (a_2, p, q) in H, ed (a_2, p', q') la parallela con $a_2 \geqq 2 \mid p' \mid$, per cui $q' < a_2$ e quindi $q' = a_0$, oppure $q' = a_1$. Sia p. e.: $q' = a_0$, cioè:

$$(a_2, p', q') = (a_2, p', a_0).$$

La $(a_0, -p', a_2)$ è in S_0 e perciò $-p' = t_0(k_0)$ e la

$$(a_2, p', a_0) = (a_2, p', q')$$

coincide quindi con $(a_2, -t_0(k_2), a_0) = f'_2$ alla quale (a_2, p, q) è quindi parallela. Resta con ciò dimostrato che (a_2, p, q) è in S'_2.

Se f'_2, f''_2 fossero parallele, i due sistemi si fonderebbero in un unico S_2.

6. È facile ora mostrare come, costruito le prime n sezioni, si possa costruire l'$(n+1)^{\text{esima}}$.

Sieno

$$\Sigma_0 = S_0, \ \Sigma_1 = S_1; \qquad \Sigma_2 = S'_2, \ S''_2 \ldots; \ldots \Sigma_{n-1} = S'_{n-1}, \ S''_{n-1}$$

le prime n sezioni caratterizzate dai coefficienti iniziali $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$, e si determini il minimo valore intero $> a_{n-1}$ che assumono per valori interi della variabile k le funzioni:

$$u_0(k); \ u_1(k); \ u'_2(k), \ u''_2(k) \ldots;$$
$$u'_{n-1}(k), \ u''_{n-1}(k) \ldots$$

che potrà venir raggiunto da una o più delle $u(k)$.

Detto a_n questo minimo, si proverà che esistono in H forme a primo coefficiente a_n, ma che non ne esistono con coefficiente iniziale minore, e diverso da $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$.

Dopo ciò, si considerino tutte le possibili forme appartenenti ai stemi delle varie sezioni aventi a_n come terzo coefficiente e se ne fo mino le complementari: avremo così tutte le possibili forme di del tipo (a_n, p, a_i) dove a_i è uno dei numeri: $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$.

Se due o più di tali forme risultano parallele se ne tenga una si escludano le altre, per cui rimarrà un complesso di forme, d qualunque delle quali non saranno parallele:

$$f'_n = (a_n, b'_n\, c'_n); \qquad f''_n = (a_n, b''_n, c''_n); \ldots$$

con le quali costruiremo i sistemi:

$$S'_n = f'_n \cdot \sigma(k); \qquad S''_n = f''_n \cdot \sigma(k) \ldots .$$

Con l'identico ragionamento si proverà che $S'_n, S''_n \ldots$ non han elementi comuni, e che inoltre ogni forma (a_n, p, q) di H apparte ad uno dei predetti sistemi i quali vengono così a formare la Σ_n

7. Il problema enunciato rimane così risolto: ricordiamo però c per maggior chiarezza nella ridotta (a_0, b_0, c_0) si sono esclusi i c $a_0 = 2 \mid b_0 \mid$ ed $a_0 = c_0$.

Nei casi eccezionali, non muta però l'andamento della soluzio

Se $a_0 = 2 \mid b_0 \mid$, $a_0 \neq c_0$, la Σ_0 consta di un solo sistema S_0; ma seconda sezione ne comprende due, poichè le forme:

$$(c_0, -b_0, a_0); \qquad (c_0, b_0, a_0)$$

sono bensì equivalenti come le due ridotte:

$$(a_0, b_0, c_0); \qquad (a_0, -b_0, c_0)$$

ma non parallele, essendo $c_0 > a_0 = 2 \mid b_0 \mid$.

Se $a_0 > 2 \mid b_0 \mid$, $a_0 = c_0 = n$, le due prime sezioni si riuniscono una la quale consta di due sistemi, poichè le due ridotte

$$(n, b, n); \qquad (n, -b, n)$$

sono equivalenti, ma non parallele.

Se in fine $a_0 = 2 \mid b_0 \mid$, $a_0 = b_0 = n$, le due ridotte sono equiv lenti e parallele, e le due prime sezioni si fondono in una costitu da un unico sistema.

U. Scarpis.

SOPRA LA TRATTAZIONE ELEMENTARE DELLA TEORIA DEI MASSIMI E MINIMI

delle funzioni razionali intere

---

1. Nei corsi elementari, quando non si studino gli elementi della teoria dei limiti, la ricerca dei massimi e dei minimi o si fa col metodo della funzione inversa (quando la determinazione di x in funzione di y dipende o si può far dipendere da un'equazione di secondo grado), o, per le funzioni razionali intere, si fa col metodo dei moltiplicatori indeterminati.

Il metodo porta a risultato certo solamente quando la funzione di cui si vogliono cercare i massimi e i minimi è decomposta in fattori lineari.

Orbene mi pare opportuno di far vedere come, svolto il metodo dei moltiplicatori indeterminati, si può giungere al metodo della derivata, senza alcun bisogno di considerarla limite del rapporto incrementale.

Espongo qui la trattazione come può farsi nella Scuola.

2. Supponiamo d'avere una funzione razionale intera di grado n a coefficienti reali, la quale sia decomposta nel prodotto di n fattori lineari; essa può sempre mettersi sotto la forma

$$y = a\,(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Basta manifestamente cercare i massimi e i minimi di

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n),$$

perchè questi saranno i massimi e i minimi di y, se $a>0$, o i minimi e i massimi rispettivamente, se $a<0$.

Consideriamo allora la funzione

$$y = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n).$$

Eseguendo le moltiplicazioni indicate nel secondo membro, sarà

$$y = x^n + c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n,$$

ove è c_p la somma dei prodotti di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ combinati a p a p presa col segno $(-1)^p$.

Ci sarà utile nel seguito osservare che se indichiamo con y_k la funzione razionale intera di grado $n-1$, $\frac{y}{x-\alpha_k}$, si avrà

$$y_k = x^{n-1} + c_{1,k}x^{n-2} + c_{2,k}x^{n-3} + \ldots + c_{n-2,k}x + c_{n-1,k}$$

ove con $c_{p,k}$ intendiamo la somma dei prodotti dei numeri

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_n$$

combinati a p a p, presa con il segno $(-1)^p$.

Orbene si stabiliscono facilmente le relazioni

$$\sum_{k=1}^{n} c_{p,k} = c_p(n-p). \tag{1}$$

Scriviamo infatti sopra n orizzontali n volte la somma dei prodotti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ combinati p a p; poi cancelliamo nella prima orizzontale tutti gli addendi che contengono α_1, nella seconda tutti gli addendi che contengono $\alpha_2 \ldots$ nell'ultima tutti gli addendi che contengono α_n. È chiaro che nella orizzontale k-esima avremo $(-1)^{p-1} c_{p,k}$. In ognuna delle verticali gli elementi cancellati sono p, i rimanenti $n-p$; se sommiamo i rimasti, abbiamo $n-p$ volte l'intera prima orizzontale.

Seguendo il metodo dei moltiplicatori indeterminati si scrive

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}\, y = (\lambda_1 x - \lambda_1\alpha_1)(\lambda_2 x - \lambda_2\alpha_2) \ldots (\lambda_{n-1}x - \lambda_{n-1}\alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$$

e si stabiliscono le n equazioni

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + 1 = 0 \\ &\lambda_1(x-\alpha_1) = x - \alpha_n \\ &\lambda_2(x-\alpha_2) = x - \alpha_n \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda_{n-1}(x-\alpha) = x - \alpha_n. \end{aligned}$$

Risolvendo le $n-1$ ultime equazioni per le λ, si ha

$$\lambda_i = \frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

e sostituendo nella prima

$$\frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_1} + \frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{x-\alpha_n}{x-\alpha_{n-1}} + 1 = 0$$

od anche, per le fatte posizioni,

$$\frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n}{y} = 0.$$

L'equazione che ha per radici i valori $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, in cui y ha i massimi ed i minimi, è pertanto

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + y_n = 0, \tag{2}$$

la quale ordinata per le potenze di x diventa

$$nx^{n-1} + x^{n-2}\sum_{k=1}^{n} c_{1,k} + x^{n-3}\sum c_{2,k} + \ldots + x\sum c_{n-2,k} + \sum c_{n-1,k} = 0,$$

ossia per la (1)

(3) $nx^{n-1} + (n-1)c_1x^{n-2} + (n-2)c_2x^{n-3} + \dots + 2c_{n-2}x + c_{n-1} = 0.$

Il primo membro della (3) si ottiene dalla funzione data y, moltiplicando ogni termine per l'esponente di x e diminuendo poi questo di un'unità: esso dicesi *derivata* di y e si indica con y'.

Se si possono determinare le $n-1$ radici $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, per decidere se in x_i la y ha massimo o minimo non importa calcolare i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{n-1}$ e vedere il segno del prodotto $\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_{n-1}$. Supposte le radici $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ ordinate in ordine crescente, basta osservare i valori $f(x_i)$, $f(x_i + \varepsilon)$ con $|\varepsilon| < x_{i+1} - x_i$, $|\varepsilon| < x_i - x_{i-1}$: sarà $f(x_i)$ un massimo od un minimo a seconda che sarà

$$f(x_i) > f(x_i + \varepsilon) \qquad \text{o} \qquad f(x_i) < f(x_i + \varepsilon).$$

È a notarsi che il procedimento di cercare le radici della derivata e il modo di verificare se in una radice la funzione ha massimo o minimo è legittimamente applicabile alle funzioni razionali intere di cui si sappia *a priori* che le radici sono reali distinte, anche se non si conoscono.

3. Osserviamo che il primo membro della (2) rappresenta la derivata di $y = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$; d'onde una facile regola per costruirla.

Da essa si deduce che per la funzione

$$y = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_n)^{r_2} \dots (x - \alpha_p)^{r_p}$$

ove siano $r_1, r_2, \dots r_p$ numeri positivi interi (non esclusi che siano uguali ad 1) la derivata è data da

$$\begin{aligned} y' &= r_1y_1 + r_2y_2 + \dots r_py_p = \\ &= r_1(x - \alpha_1)^{r_1-1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_p)^{r_p} + \\ &\qquad + r_2 (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2-1} \dots (x - \alpha)^{r_p} + \dots \\ &\qquad\qquad \dots + r_p (x - \alpha)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_p)^{r_p-1} \end{aligned}$$

cioè dalla somma di p prodotti ciascuno dei quali ha $p-1$ fattori uguali a quelli di y ed il rimanente sostituito dal prodotto dell'esponente per la potenza del binomio di esponente diminuito di un'unità.

Vogliansi ora cercare i massimi ed i minimi della funzione

$$y = (x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \dots (x - \alpha_p)^{r_p}.$$

Col metodo dei coefficienti indeterminati si cerca di rendere costante la somma

$$\lambda_1(x - \alpha_1) + \lambda_2(x - \alpha_2) + \dots + \lambda_{p-1}(x - \alpha_{p-1}) + x - \alpha_p$$

e soddisfatte le relazioni

$$(4) \qquad \frac{\lambda_1(x - \alpha_1)}{r_1} = \frac{\lambda_2(x - \alpha_2)}{r_2} = \dots \frac{\lambda_{p-1}(x - \alpha_{p-1})}{r_{p-1}} = \frac{x - \alpha_p}{r_p}.$$

sono rispettivamente divisibili *soltanto* per p^{c+d} e p^b, mentre ciascuno degli altri termini è divisibile almeno per p^{2d}. Quindi, se la tesi fosse falsa, se cioè " $2d$ " fosse maggiore del minore m fra i numeri b e " $c+d$ " (che per ipotesi sono fra loro diversi), allora tutti i termini del primo membro della (2) sarebbero divisibili almeno per p^{m+1} tranne uno solo dei due ultimi, divisibile *soltanto* per p^m; il che è assurdo.

Nota. — Simmetricamente, l'*Oss. I* vale anche riferendone l'ipotesi ad a_0, a_1, s anzichè ad a_n, a_{n-1}, r.

3. *Esempio I.* — Per quanto si è detto nel § 1, se l'equazione

$$x^4-12x^3-828x^2+829x-840=0 \tag{3}$$

ammette una radice razionale, essa è intera e va ricercata soltanto fra i divisori (positivi o negativi) di $840=2^3.3.5.7$, i quali (tenendo conto del duplice segno di ciascuno) sono 64.

Ma, per quanto si è detto nel § 2, questo numero viene dimezzato a priori.

Invero, per $p=2$, si ha $b=3$ e $c=0$; perciò $d=0$ ovvero $d=b-c=3$.

Dunque, se la (3) ammette una radice razionale, il suo valore assoluto è uno dei numeri

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 15 & 21 & 35 & 105 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 120 & 168 & 280 & 840 \end{matrix}\right\} \tag{4}$$

Nella prima riga stanno i divisori assoluti di " $3.5.7$ " e nella seconda i medesimi moltiplicati per 8; si risparmia così, nonchè di sperimentare, anche soltanto di scrivere i prodotti dei numeri della prima riga per 2 o per 4.

4. *Esempio II.* — Per quanto si è detto nel § 1, se l'equazione

$$360x^4-423x^3-346x^2+112x+49=0 \tag{5}$$

ammette una radice razionale " $r:s$ ", allora r è un divisore (positivo o negativo) di $49=7^2$, mentre s è un divisore (positivo) di $360=2^3.3^2.5$.

Ciascuno dei 6 valori di r va associato a ciascuno dei 24 valori di s (perchè in questo caso essi sono necessariamente primi fra loro) sicchè i numeri da sperimentare sono $6\times 24=144$.

Ma, per quanto si è detto nel § 2, questo numero viene ridotto a $4\times 8=32$.

Invero, badando ad r, per $p=7$, si ha $b=2$ e $c=1$; perciò $d=0$ ovvero $d=1$ (se $d=b-c$, è ancora $d=1$). Quindi i valori di r da sperimentare sono soltanto

$$1,\ 7,\ -1,\ -7. \tag{6}$$

Ed ora, badando ad s [2 Nota], per $p=2$, si ha $b=3$ e $c=0$ perciò $d=0$ ovvero $d=b-c=3$, sicchè s o non è divisibile per o è divisibile per 8. Invece, per $p=3$, si ha [illegible] $d=0$ (se $d=b-c$, è ancora $d=0$) ovvero $d=1$, [illegible] è divisibile per 3 ovvero è divisibile per 3 ma non per 9. [illegible] i valori di s da sperimentare sono

$$1, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 15, \quad 24, \quad 40, \quad 120. \tag{7}$$

5. *Osservazione II.* — Designando con $f(r, s)$ il primo membro della (2), se a e b sono numeri interi tali che $f(a, b) \neq 0$, allora, affinchè $f(r, b) = 0$ ovvero $f(a, s) = 0$, è necessario che $f(a, b)$ sia rispettivamente divisibile per " $r - a$ " ovvero per " $s - b$ ".

Invero, designando con $A(r, s)$ ed $R(s)$ il quoziente ed il resto di $f(r, s)$ per " $r - a$ ", da

$$f(r, s) = (r - a)\, A(r, s) + R(s)$$

segue

$$f(a, s) = R(s)$$

sicchè

$$f(r, b) = (r - a)\, A(r, b) + f(a, b). \tag{8}$$

Analogamente, designando con $B(r, s)$ il quoziente di $f(r, s)$ per " $s - b$ ", risulta

$$f(a, s) = (s - b)\, B(a, s) + f(a, b). \tag{9}$$

Dalle (8) (9) segue la tesi.

Nota. — Quando $a_0 = 1$ anche $s = 1$. In tal caso, $f(x, 1)$ è il primo membro della (1), che si può designare più brevemente con $F(x)$. Ed allora, se $F(a) \neq 0$, affinchè $F(x) = 0$, è necessario che $F(a)$ sia divisibile per " $r - a$ ".

6. *Esempio I.* — Proseguiamo lo studio della (3), il cui primo membro designamo con $F(x)$.

Poichè $F(1) = -850$, abitualmente ci si contenta di concludere che 1 non è radice della (3). Ma qui possiamo soggiungere che [§ 5 Nota] affinchè uno degli altri numeri (4) sia radice della (3) è necessario che, diminuito di 1, sia un divisore di $850 = 2 \times 5^2 \times 17$.

I soli valori *positivi* di r che soddisfino a tale condizione sono 3 e 35.

Mediante la regola di Ruffini, si trova $F(3) = -6048$ ed $F(35) = 0$, sicchè 35 è una radice della (3). Si trova in pari tempo l'equazione residua

$$x^3 + 23x^2 - 23x + 24 = 0 \tag{10}$$

che non ammette la radice 35 (perchè 35 non è un divisore di 24). Dopo ciò, ogni altra radice razionale della (10) dev'essere *negativa* e il suo *valore assoluto* può essere soltanto un divisore di 24 che già si trovi nel prospetto (4), cioè uno dei numeri

$$-1, \quad -3, \quad -8, \quad -24. \tag{11}$$

Ma, designando con $\varphi(x)$ il primo membro della (10), si ha $\varphi(1)=25$ e quindi [§ 5 Nota] affinchè uno dei numeri (11) sia radice della (10) è necessario che, diminuendolo di 1 (cioè aumentando di 1 il suo valore assoluto), si ottenga un divisore di 25.

Il solo valore *negativo* di r che soddisfi a tale condizione è " -24 ".

Mediante la regola di Ruffini, si trova $\varphi(-24)=0$ e l'equazione residua

$$x^2-x+1=0$$

che si risolve. Dunque, le radici della (3) sono:

$$35, \quad -24, \quad \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

7. *Esempio II.* — Proseguiamo lo studio della (5), dividendone il primo membro per " $x-r$ ", dove r assume separatamente ciascun valore del prospetto (6).

	360	-423	-346	112	49	
1	360	-63	-409	-297	$-248=$	$f(1, 1)$
7	360	2097	14333	100443	$703150=$	$f(7, 1)$
-1	360	-783	437	-325	$374=$	$f(-1, 1)$
-7	360	-2943	20255	-141673	$991760=$	$f(-7, 1)$

Poichè ciascun resto è diverso da zero, la (5) non ammette alcuna radice intera.

Trascriviamo i valori di s del prospetto (7), tranne 1, diminuiti di 1 [§ 5]:

$$2,\quad 4=2^2,\quad 7,\quad 14=2.7,\quad 23,\quad 39=3.13,\quad 119=7.17.$$

Di questi: soltanto il 2 è un divisore di $f(1, 1)$
soltanto 2, 7, 14 sono divisori di $f(7, 1)$
soltanto il 2 è un divisore di $f(-1, 1)$
soltanto 2, 7, 14, 23 sono divisori di $f(-7, 1)$.

E così dei 32 valori di " $r:s$ " accennati nel § 4 rimangono da sperimentarne soltanto 9 e cioè:

$$\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{7}{8}, \frac{7}{15}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{8}, -\frac{7}{15}, -\frac{7}{24}. \qquad (12)$$

Si noti che ora il minimo multiplo m dei denominatori è 120 anzichè 360, il che rende più agevole la trasformazione della (5) cui si ricorre abitualmente, ponendo " $x=y:m$ " e moltiplicando per x^{m-1}.

Ma prima, allo scopo di ridurre eventualmente m a 24, val la pena di sperimentare le frazioni a denominatore 15. Per quanto concerne