SULL'IMPOSSIBILITA' DI CERTE DIVISIONI E SULL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

NOTA

DI RODOLFO BETTAZZI

I.

1. La proprietà espressa dalla relazione $a \times 0 = 0$ qualunque sia il numero a, rende com'è noto, privo di qualunque significato il simbolo di operazione $\frac{m}{0}$, dove $m \gtrless 0$, e privo di significato determinato l'altro $\frac{0}{0}$. Questa circostanza ci costringe a considerare l'operazione $\frac{m}{n}$ come possibile *soltanto in generale* (*), dovendosi dire che essa ha un vero significato solo quando sia $n \gtrless 0$. Ogni qualvolta quindi nell'Algebra occorrerà eseguire una divisione, dovremo ammettere esplicitamente o implicitamente questa condizione e limitarci a concludere che, se $n = 0$, il simbolo è privo di vero significato, o perchè non ne ha alcuno, o perchè rappresenta qualunque valore. Comprenderemo i due casi dicendo che il simbolo di operazione è *illusorio.*

Di questa condizione limitativa bisogna (il che pur troppo non sempre si fa anche in qualche trattato) tener conto e fare menzione esplicita in certi teoremi i quali appunto si fondano sulla divisione. Dal trascurarla dipende che i teoremi che si sogliono dare sull'equivalanza delle equazioni non sono tutti (almeno finchè si riferiscono alle equazioni generali) enunciati col necessario rigore.

Mi propongo quindi di dare un cenno di poche osser-

(*) Diremo che un'operazione è possibile (o un'eguaglianza è vera) *soltanto in generale*, quando cessa di esserlo *solo* per valori speciali delle quantità cui essa si riferisce.

vazioni da farsi su questi simboli che possono divenire illusori. Esse si sogliono generalmente omettere nell'Algebra elementare; ma sono indispensabili per passare da un'equazione ad un'altra, la quale (anche se non è equivalente a quella data) serva alla sua *completa* risoluzione.

2. È intanto evidente che non si può eseguire nessuna operazione sopra una espressione illusoria, nè quindi applicare *senz'altro* ad essa nessun teorema; perciò, quando in una formula comparisce un'espressione che per qualche valore delle lettere che la compongono diviene illusoria, bisogna aver cura di escludere dalle operazioni quei casi in cui appunto ciò avvenga.

Così, mentre se a, b rappresentano due numeri, si può sempre scrivere, qualunque essi siano

$$a + b - b = a,$$

se fosse $b = \frac{1}{x - \alpha}$ dovremmo dire che

$$a + \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha} = a$$

escluso il caso $x = \alpha$, perchè allora b diviene illusorio. E così, mentre in generale, se a, b, m, n sono numeri, si ha

$$a + mb + nb = a + (m + n)\, b,$$

se fosse ancora $b = \frac{1}{x - \alpha}$ dovremmo dire che

$$a + \frac{m}{x - \alpha} + \frac{n}{x - \alpha} = a + (m + n)\ \frac{1}{x - \alpha}$$

eccetto quando $x = \alpha$, a meno che non conveniamo di dire *equivalenti* due espressioni le quali hanno in generale il medesimo valore e per certi valori speciali delle lettere che le compongono divengono illusorie *ambedue*. Allora l'ultima equivalenza sarebbe sempre vera, ma non già la prima:

$$a + \frac{1}{x - \alpha} - \frac{1}{x - \alpha} = a$$

perchè per $x = \alpha$ il primo membro diviene illusorio, mentre il secondo ha sempre un significato.

Per lo scopo speciale a cui sono destinate queste osservazioni, converremo di dare alle parole *espressioni equivalenti* il significato anzidetto.

3. Il teorema « Quando tutti i termini di un polino-
» mio hanno un fattore comune questo può mettersi in evi-
» denza » si suole estendere un poco per poter giungere a mettere in evidenza un fattore che sia comune ad alcuni e non a tutti quei termini; e si può, nel suo senso più generale, ennuciare così « Un polinomio (a termini interi o
» frazionari) è equivalente al prodotto di un fattore qua-
» lunque per un altro polinomio (a termini generalmente
» frazionari) che si forma da quello dato dividendone ogni
» termine per il fattore anzidetto ».

Qui è conveniente notare che il teorema è vero *in generale,* tranne per quei certi valori che rendono illusorio o qualcuno dei termini del secondo polinomio, o il fattore che si pone in evidenza. Così, p. es: scrivendo:

$$(x-\alpha)\,a + (x-\alpha)\,b + c = (x-\alpha)\left(a + b + \frac{c}{x-\alpha}\right)$$

si scrive un'equivalenza vera per tutti i valori di $x, \alpha, a, b, c,$ tranne per $x = \alpha$, poichè in tal caso $\frac{c}{x-\alpha}$ e quindi tutto il secondo fattore, divengono illusori.

Più generalmente, quando un' espressione algebrica M si decompone in più fattori A, B, C . . . . L seguendo regole che siano valide in generale, esclusi cioè *al più* speciali valori per le lettere che compariscono, può dirsi che l'equivalenza

$$M = A \,.\, B \,.\, C \,.\,.\,.\,.\, L$$

è vera soltanto in generale, anche tenendo conto della definizione più ampia da noi data di espressioni equivalenti. E infatti per valori speciali tutti i fattori del secondo memloro possono avere un significato e può essere contemporaneamente illusorio M, oppure viceversa può avere un significato M ed essere illusorio qualcuno dei fattori A, B, C,... L.

Così, p. es., quando fosse

$$M = \frac{x}{x}, \quad A = \frac{m}{n}, \quad B = \frac{n}{p}, \quad C = \frac{p}{m}$$

se, m, n, p sono numeri sempre diversi da zero, si ha in generale

$$\frac{x}{x} = \frac{m}{n} \cdot \frac{n}{p} \cdot \frac{p}{m}$$

purchè non sia $x = 0$, nel qual caso M è illusorio, e tale non è nessuno dei fattori. E del pari, se fosse, come precedentemente,

$$M = (x - \alpha) a + (x - \alpha) b + c, \quad A = x - \alpha, \quad B = a + b + \frac{c}{x - \alpha}$$

avremmo l'equivalenza

$$M = A \,.\, B$$

vera soltanto in generale, poichè, come si è notato, per $x = \alpha$ l'espressione M ha un significato e B è illusorio.

Si vede dunque che, decomponendo una espressione M in fattori secondo le *ordinarie* regole dell'Algebra, l'equivalenza delle due espressioni può soffrire eccezione per quei valori delle lettere per i quali o sia illusoria M senza che lo sia nessuno dei fattori, o sia illusorio qualcuno dei fattori senza che lo sia M (poichè il caso rimanente in cui siano illusori insieme M ed alcuno dei fattori rientra per noi in quello dell'equivalenza).

La decomposizione in fattori di un'espressione qualunque *può* quindi *creare* o *sopprimere* dei casi di mancanza di significato.

4. Nella riduzione delle frazioni algebriche alla più semplice espressione si deve tener conto delle osservazioni precedenti.

Sia la frazione $\frac{M}{N}$ i cui termini sieno espressioni qualunque, e supponiamo che si abbia, almeno in generale,

$$M = CA, \quad N = CB.$$

Finchè queste equivalenze sono vere, o perchè tutte le espressioni che in esse compariscono abbiano un significato, o perchè se in una (o in ambedue) di esse è illusorio il primo membro sia tale anche il secondo, potremo porre:

$$\frac{M}{N} = \frac{CA}{BC}$$

anche se N e CB siano nulli, per il significato che si è convenuto di attribuire alla parola equivalenti (e quindi al segno =) L'equivalenza ora scritta sarà quindi vera *in generale*, tranne al più in casi speciali; cioè quando sia illusoria una o più delle espressioni, C, A, B senza che tale sia M o N e senza che sia zero N, giacchè allora $\frac{M}{N}$ ha un significato e non lo ha $\frac{CA}{CB}$, e quando sia illusorio M od N senza che lo siano nè C, nè A, nè B, e nè C nè B siano nulli, perchè allora ha un significato $\frac{CA}{CB}$ e non lo ha $\frac{M}{N}$.

Potremmo esser sicuri che l'equivalenza precedente valesse in ogni caso quando M, N, C, A, B, non divenissero mai illusori, come p: es: se fossero espressioni intere rispetto a tutte le lettere che li compongono, o espressioni come $\frac{1}{x^2+1}$ ecc. finchè almeno ci limitiamo ai valori reali delle quantità su cui si opera.

Sappiamo poi che, almeno in generale, le due frazioni $\frac{CA}{CB}$ e $\frac{A}{B}$ sono equivalenti. Vediamo anche qui quali possono essere i casi di eccezione. Una frazione è un quoziente: può quindi essere illusoria: 1.° se per certi valori delle lettere che in essa compariscono uno dei suoi termini od ambedue divengono illusori; 2.° se per certi valori di quelle lettere il suo denominatore si annulli. — Se per i valori che si considerano C non è illusorio nè nullo, le due frazioni o hanno insieme un significato, o sono ambedue illusorie, sia perchè sono zero i denominatori B, CB, sia perchè è illusorio qualcuno dei loro termini: le due frazioni sono quindi in tal caso sempre equivalenti. Se per certi valori il fattore C è zero od illusorio, per quei valori stessi $\frac{A}{B}$ può avere un significato, $\frac{CA}{CB}$ non lo ha mai.

L'equivalenza (nel senso nostro)

$$\frac{CA}{CB}=\frac{A}{B}$$

è quindi sempre vera, tranne *al più* nel caso in cui C divenga nullo od illusorio.

Ravviciniamo ora i due risultati e vediamo quando sono equivalenti le due frazioni $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$.

Avendo osservato che si ha

$$\frac{M}{N}=\frac{CA}{CB}$$

tranne *sempre*

1.° se C, o A, o B sono illusori e non lo sono M ed N e di più $N \gtrless 0$;

2.° se M od N sono illusori e non lo sono nè C, nè A, nè B e di più $C \gtrless 0$, $B \gtrless 0$;

e che

$$\frac{CA}{CB}=\frac{A}{B}$$

tranne *al più* quando C è 0 od illusorio, si può concludere che l'equivalenza (nel senso nostro)

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{B}$$

è vera *in generale*, fatta eccezione per valori speciali delle lettere che vi compariscono: e questo può avvenire per quei valori che rendono nullo od illusorio il fattore C, od anche per quelli che, pur non rendendo nè nullo nè illusorio C, rendono illusoria la sola $\frac{M}{N}$ o la sola $\frac{A}{B}$. È peraltro da osservarsi che mentre, in questo secondo caso, l'uguaglianza precedente non è *certamente* verificata quando $C=0$, o quando C è illusorio, può esserlo, sia perchè $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ hanno un significato ambedue, sia perchè sono ambedue illusori; e può non esserlo, quando sia illusoria una sola delle due frazioni.

Che nel caso in cui C sia nullo od illusorio e nonostante M, N, A, B abbiano un significato e $N \gtrless 0$, $B \gtrless 0$, sia vera l'uguaglianza precedente, non si può concludere dalle precedenti osservazioni, non essendo allora

$$\text{nè}\quad \frac{M}{N}=\frac{CA}{CB}, \qquad \text{nè}\quad \frac{CA}{BC}=\frac{A}{B},$$

ma si dedurrà da facili considerazioni sui limiti e sulla continuità; perchè essendo le espressioni dell'algebra elementare (quando non perdono il significato) sempre continue, ed essendo i valori, pei quali perdono il significato o si annullano, soltanto valori speciali, nel caso di cui è parola si può dare alle quantità che fanno nullo od illusorio il C un aumento piccolissimo: le uguaglianze precedenti sussisteranno allora sotto la forma

$$\frac{M_1}{N_1}=\frac{C_1A_1}{C_1B_1},\quad \frac{C_1A_1}{C_1B_1}=\frac{A_1}{B_1}\quad \text{per cui}\quad \frac{M_1}{N_1}=\frac{A_1}{B_1}$$

non essendo zero nè N_1 nè B_1, e C_1 non essendo nullo od illusorio; allora, per la continuità di tutte le precedenti espressioni ed essendo $N \gtrless 0$, $B \gtrless 0$, avremo anche

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

5. Per meglio chiarire quanto precede daremo degli esempi di tutti i casi che si possono presentare quando la soppressione di un fattore nullo od illusorio altera o mantiene l'equivalenza, e di quelli in cui l'equivalenza è alterata anche sopprimendo un fattore che, per i valori che si considerano, non è nè nullo nè illusorio.

1° caso. — Per certi valori speciali il fattore C per cui si dividono M ed N sia zero.

È allora intanto impossibile che $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ abbiano insieme significato; perchè, essendo in generale $N = CB$, se (avendo $\frac{A}{B}$ un significato) è $B \gtrless 0$ e C è 0, il prodotto N o è illusorio, o, se ha un significato, ha il valore 0; e in ambedue i casi $\frac{M}{N}$ non avrebbe significato.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{(x-\alpha)\, a + b}{(x-\alpha)\, m + n} \quad \text{e si prende } C = x - \alpha$$

si trova

$$\frac{A}{B} = \frac{a + \dfrac{b}{x-\alpha}}{m + \dfrac{n}{x-\alpha}}$$

e per $x = \alpha$, C è nullo, $\frac{M}{N}$ ha significato e $\frac{A}{B}$ è illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{ax - a\alpha}{bx - b\alpha} \quad \text{e si prende } C = x - \alpha$$

si ha

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b};$$

e per $x = \alpha$, $b \gtrless 0$, C è nullo, $\frac{M}{N}$ è illusorio, ed $\frac{A}{B}$ ha significato. Lo stesso si avrebbe con

$$\frac{M}{N} = \frac{x}{x} \text{ e } C = x$$

quando $x = 0$, avendosi sempre $\frac{A}{B} = \frac{1}{1}$

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{ax - a\alpha}{(x - \alpha)\, x - (x - \alpha)\alpha} \quad \text{con } C = x - \alpha$$

si ha

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{x - \alpha}$$

e per $x = \alpha$ è nullo C e sono illusori tanto $\frac{M}{N}$ che $\frac{A}{B}$.

2° *Caso.* — Per certi valori speciali C sia illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{2x}{2(x - 1)}$$

notando che si ha in generale

$$2x = \frac{2x}{x}\, x, \quad 2(x - 1) = \frac{2x}{x}\, (x - 1)$$

possiamo prendere $C = \frac{2x}{x}$ ed avremo

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{x - 1}$$

e per $x = 0$ C è illusorio, ma tali non sono $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$ che risultano uguali.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{a + x}{m + y} \quad \text{e si prende } C = \frac{x}{y}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a\dfrac{y}{x} + y}{m\dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x}}$$

e quando $x = 0$, $y = 0$, $m \gtrless 0$, si ha che C è illusorio, $\frac{M}{N}$ ha un significato, $\frac{A}{B}$ è illusorio.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{\dfrac{a}{x}}{\dfrac{m}{x}} \quad \text{e si prende } C = \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{m}$$

e per $x=0$, $m \gtrless 0$, sono illusori C ed $\frac{M}{N}$, ed ha significato $\frac{A}{B}$.

— Se

$$\frac{M}{N} = \frac{\dfrac{a}{x}}{\dfrac{2x}{x}} \quad \text{e si prende ancora } C = \frac{1}{x}$$

si ottiene

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{2x}$$

e per $x = 0$ sarà illusorio C e tali saranno insieme $\frac{M}{N}$ e $\frac{A}{B}$.

3.° *Caso.* — Per i valori che si considerano C non sia nè nullo nè illusorio (caso generale)

In generale saranno allora $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$ o ambedue con significato ed equivalenti, od ambedue illusori, e quindi, colla nostra definizione, equivalenti ancora. Quest'ultimo caso avverrebbe quando fosse, p. es.

$$\frac{M}{N} = \frac{xy}{xz} \quad \text{con } C = x\,;$$

sarà

$$\frac{A}{B} = \frac{y}{z}\,;$$

e per $x \gtrless 0$, $y = 0$, $z = 0$, saranno illusori $\frac{M}{N}$ ed $\frac{A}{B}$. Ma vi sono dei casi in cui l'equivalenza non sussiste, quando cioè divengano illusorie l'una o l'altra soltanto delle due frazioni.

Se p: es:

$$\frac{M}{N} = \frac{n}{n(m-1)} \quad \text{con } C = n$$

osservando che, in generale,

$$n = n.\, \frac{m}{m}$$

potremo porre

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{m}{m}}{m-1}\,;$$

ed allora per $n \gtrless 0$, $m = 0$ si ha che C non è nè nullo nè illusorio, $\frac{M}{N}$ ha un significato ed è illusorio $\frac{A}{B}$.

Se p. es.

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{n}} \quad \text{e si prenda } C = \frac{1}{n},$$

si può osservare che (almenò in generale)

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$$

e quindi possiamo avere

$$\frac{A}{B} = \frac{n}{m};$$

e per $x = 0$, $n \gtrless 0$, $m \gtrless 0$ non sarà C nè zero nè illusorio, sarà illusorio $\frac{M}{N}$ ed avrà invece un significato $\frac{A}{B}$.

Gli esempi citati in questo 3° caso hanno, come si vede, poco valore in pratica; ma essi devono certamente considerarsi in una teoria generale.

6. Da quanto si è detto fin qui si rileva che quando, coi procedimenti ordinari, si trovi che si ha *in generale*

$$M = CA, \quad N = CB,$$

l'equivalenza

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

sarà vera *in generale*, ma potrà non esserlo per certi valori *speciali* delle lettere che in essa compariscono — e precisamente *non sussiste* quando, pur non essendo nullo nè illusorio C, sia illusoria la sola $\frac{M}{N}$ o la sola $\frac{A}{B}$: e *può* non sussistere per quei valori speciali che rendono nullo od illusorio C, i quali quindi devono essere esaminati a parte.

Le osservazioni precedenti non debbono mai tralasciarsi quando, per semplificare una frazione, se ne dividano i due termini per un medesimo fattore.

7. Considerazioni analoghe si possono ripetere quando si moltiplicano per un medesimo fattore C i due termini A e B di una frazione $\frac{A}{B}$. Si otterrà in tal caso $\frac{CA}{CB}$, la quale frazione, per quanto si è visto al § 4, è equivalente (nel senso più lato da noi definito) ad $\frac{A}{B}$ tranne *al più* per quei

valori che rendono C nullo od illusorio. Se poi eseguendo qualche operazione (che si ridurrà ordinariamente a nuove trasformazioni di frazioni) si abbia *in generale*

$$CA = M, \quad CB = N,$$

allora può scriversi *in generale*

$$\frac{A}{B} = \frac{M}{N}$$

tranne, come già si è detto, quando soltanto una di queste due frazioni divenga illusoria, e tranne al più quando C è nullo od illusorio.

Del resto, considerando che la moltiplicazione per un fattore C equivale ad una divisione per il fattore $\frac{1}{C}$, quanto è accennato in questo § può dedursi da quello che si disse al § 4: osservando che i casi in cui C sia nullo od illusorio sono tutti quelli e soltanto quelli in cui avvenga che o sia zero o sia illusorio $\frac{1}{C}$.

8. Se il termine M fosse *già dato* sotto la forma CA ed N sotto la forma CB, allora la frazione data essendo *già* sotto la forma $\frac{CA}{CB}$, la divisione per C dei due termini equivale senz'altro ad una semplice soppressione di un fattore: ed allora, per le osservazioni fatte al § 4, si vede che la frazione $\frac{A}{B}$ a cui si giunge è equivalente alla data finchè C è diverso da zero e non è illusorio, ed in tal caso di più ha un significato quando lo ha la frazione data. Oltre a ciò $\frac{A}{B}$ può avere un significato anche se $C = 0$ o se C è illusorio, nei quali casi non lo ha certamente $\frac{CA}{CB}$.

Questo prova che nella frazione $\frac{CA}{CB}$ la soppressione di un fattore C lascia la frazione inalterata in tutti i casi in cui essa ha un significato; e di più può darle un significato anche in qualche caso in cui quella ne sia priva, quando C sia nullo od illusorio.

Nel passare da $\frac{CA}{CB}$ ad $\frac{A}{B}$ sono quindi da esaminare a parte i valori per cui $C = 0$ o C è illusorio; cioè fra i valori per cui $\frac{A}{B}$ ha un significato sono da escludersi (quando si voglia studiare la frazione primitiva) quelli che annullano C o lo privano di significato.

Nel passaggio più generale da $\frac{M}{N}$ ad $\frac{A}{B}$ può darsi, come si è visto, che si *acquistino* ed anche si *perdano* dei casi di significato della frazione.

9. I casi che in pratica sono più frequenti sono quelli in cui le espressioni M, N, C, A, B non divengono illusorie per nessun valore delle lettere che in esse compariscono, o di quelle almeno che si considerano come variabili, quando si supponga di dare alle altre, che sono costanti, valori che non rendano nulle od illusorie nessuna delle espressioni che si vogliono adoperare. Siamo in questo caso quando M, N, C, A, B siano tutte intere rispetto alle quantità che possono assumere diversi valori. Allora sarà sempre

$$CA = M, \quad CB = N$$

e quindi

$$\frac{CA}{CB} = \frac{M}{N}:$$

perciò dovremo dire che l'equivalenza

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{B}$$

è vera tranne al più per quei valori che annullano C, per i quali è privo di significato $\frac{M}{N}$ e può non esserlo $\frac{A}{B}$. Quindi la soppressione di uno di tali fattori mantiene inalterato il significato quando questo esiste, può crearlo in qualche altro caso.

10. Prima di passare a studiare l'equivalenza delle equazioni, esaminiamo se, quando si ha un'espressione algebrica che contenga somme o differenze di frazioni, essa possa in qualche caso alterarsi quando si riducano le frazioni allo stesso denominatore.

Essendo infiniti i comuni denominatori che si possono dare a più frazioni (anzi potendo scegliersi un' espressione qualunque per comune denominatore) e consistendo la riduzione di ogni singola frazione nella moltiplicazione dei suoi due termini per un medesimo fattore, quand'anche questa moltiplicazione si accenni senza eseguirla passando così da una frazione $\frac{A}{B}$ all'altra $\frac{CA}{CB}$, può darsi, per quanto già si è visto, che la nuova espressione algebrica (pure essendo in generale equivalente alla prima) sia illusoria in qualche caso di più, quando cioè sia nullo od illusorio qualcuno dei fattori per cui si sono moltiplicati i due termini delle varie frazioni. Eseguendo poi queste moltiplicazioni potrebbe di più aversi un significato in qualche caso in cui prima non si aveva (§ 7).

Peraltro se la riduzione al medesimo denominatore si fa nei modi usuali e le moltiplicazioni da farsi ai termini delle frazioni si accennano semplicemente, l'espressione risultante rimarrà sempre equivalente (nel senso nostro) a quella data. Infatti nelle ordinarie riduzioni allo stesso denominatore si moltiplicano i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei rimanenti denominatori. Lasciando questo prodotto semplicemente accennato, esso sarà nullo od illusorio solo quando tale sia qualcuno dei fattori, cioè qualcuno dei denominatori, nel qual caso è illusoria anche qualcuna delle frazioni e quindi tutta l'espressione data. E siccome la nuova espressione poteva *al più* (§ 7) essere illusoria (oltre i casi in cui lo è quella data) quando diviene nullo od illusorio qualcuno di quei fattori, ne viene che sarà illusoria *sempre* e *soltanto* quando lo sarà quella data — che è quanto volevamo concludere.

Se il prodotto dei denominatori o i prodotti dei termini delle frazioni per i corrispondenti fattori si eseguissero in modo da porre un'espressione unica M dove c'è un prodotto A . B . C . . . L, oppure se si riducesse ad un denominatore che non fosse il prodotto (accennato soltanto e non eseguito) dei denominatori, quando anche esso fosse il minimo comune multiplo dei denominatori (la ricerca del quale suppone la decomposizione in fattori dei denominatori) può darsi che passando dall'espressione data all'altra si acquisti o si perda qualche caso di significato.

Se i denominatori, come avviene nei casi ordinari, sono interi rispetto alle quantità da cui dipendono, allora è chiaro che si può prendere per comune denominatore un'espressione multipla dei denominatori e di grado non superiore a quello del loro prodotto, la quale in ogni caso risulterà dal prodotto di fattori interi dei denominatori stessi, ed il prodotto che in essa è accennato potrà anche essere eseguito.

Se saranno interi anche i numeratori si potranno anche eseguire le moltiplicazioni dei termini delle frazioni per i rispettivi fattori.

In questi ultimi casi, che sono i casi della pratica, seguendo i processi soliti non si introduce quindi nessun caso di eccezione — purchè il comune denominatore sia o il prodotto di tutti i denominatori o un suo summultiplo.

(Il seguito nel prossimo fascicolo).

FRAZIONI DECIMALI PERIODICHE
E LORO GENERATRICI

I.

Dalla regola per la conversione di una frazione ordinaria in decimale (finita o no) risultano i seguenti teoremi:

1. *Il resto, che si ottiene nella conversione di una frazione ordinaria in decimale, dopo calcolato un numero qualunque di cifre decimali, rappresenta unità dello stesso ordine dell'ultima cifra calcolata.*

2. *La frazione decimale, limitata ad un numero qualunque di cifre, è minore della generatrice e ne differisce meno di una unità dell'ordine della sua ultima cifra.*

II.

Possiamo ora dimostrare i seguenti teoremi:

3. *Due frazioni ordinarie equivalenti generano la medesima frazione decimale* (finita o no).

Sieno le frazioni equivalenti $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{14}$, di cui la prima generi la frazione decimale 0,428.... Ogni frazione decimale, la cui cifra dei decimi fosse maggiore o minore di 4, supererebbe (2) la frazione $\frac{3}{7}$, e quindi anche la sua equivalente $\frac{6}{14}$, o differirebbe da ciascuna di esse di più di $\frac{1}{10}$. In nessun caso questa frazione decimale potrebbe essere generata dalla frazione $\frac{6}{14}$. Altrettanto ripetasi per qualunque altra cifra decimale e della parte intera. D'altra parte esiste un processo per convertire qualunque frazione ordinaria in decimale (finita o no); resta adunque dimostrato che le due frazioni $\frac{3}{7}$ e $\frac{6}{14}$ generano la medesima frazione decimale 0,428...

4. *Due frazioni generatrici d'una medesima frazione decimale* (finita o no) *sono equivalenti.*

Sieno, se è possibile, due frazioni $\frac{37}{54}$ e $\frac{26}{54}$ (che potremo supporre ridotte (3) allo stesso denominatore) disuguali e generatrici d'una medesima frazione decimale 0,685... La frazione 0,68, limitata a tante cifre decimali, quante sono quelle del comune denominatore, sarebbe (2) minore di ciascuna delle due $\frac{37}{54}$, $\frac{26}{54}$ e differirebbe da entrambe meno di $\frac{1}{100}$. Ma, essendo $\frac{37}{54}$ maggiore di $\frac{26}{54}$, ne seguirebbe che la differenza fra queste due, che è $\frac{37-26}{54}$, sarebbe minore di $\frac{1}{100}$. Ciò è assurdo, perchè il denominatore di $\frac{37-26}{54}$ ha una cifra di meno di quello di $\frac{1}{100}$, e il numeratore non è minore di 1. Il teorema è così dimostrato.

5. *Ogni numero ammette un multiplo eguale alla differenza di due potenze di* 10.

Sia un numero qualunque, p. es. 42, e si dividano per questo le successive potenze di 10. I resti, che si otterranno, dovendo essere tutti minori del divisore 42, non saranno diversi dai numeri 0, 1, 2, 3..... 41; sicchè, eseguendo 43 divisioni, almeno due di esse daranno resti eguali. La differenza dei rispettivi dividendi sarà un multiplo del divisore 42; c.d.d.

Corollario. = *Qualunque frazione può ridursi ad avere per denominatore la differenza di due potenze di* 10.

III.

6. *Se una frazione ordinaria pura* (*ridotta ad avere per denominatore la differenza di due potenze di* 10) *sia*

convertita in decimale, il numero formato da tante cifre decimali, quanti sono i 9 del denominatore, che segue quello di tante cifre, quanti sono gli zeri del denominatore, è periodico. La differenza fra i numeri, formati da tante cifre decimali, quante sono le unità contenute negli esponenti delle dette potenze di 10, è uguale al numeratore.

Sia data una frazione ordinaria pura; poichè due frazioni equivalenti generano (3) la medesima frazione decimale, potremo ridurla ad avere (5, Cor.) per denominatore la differenza di due potenze di 10. La frazione data sia allora $\frac{38453}{10^5-10^2}=\frac{38453}{99900}$; avremo

$$(a)\quad \frac{38453}{99900}=\frac{38453}{999}\cdot\frac{1}{10^2}=\left(38+\frac{491}{999}\right)\cdot\frac{1}{10^2}=0{,}38+\frac{491}{999}\cdot\frac{1}{10^2}.$$

Ma

$$\frac{491}{999}=\frac{491.1000}{999.1000}=\frac{491.999+491}{999.1000}=0{,}491+\frac{491}{999}.\frac{1}{10^3},$$

perciò la (a) diviene

$$(b)\ \frac{38453}{99900}=0{,}38+\left(0{,}491+\frac{491}{999}\cdot\frac{1}{10^3}\right)\frac{1}{10^2}=0{,}38491+\frac{491}{999}.\frac{1}{10^5}.$$

Le (a), (b) si possono scrivere anche

$$\frac{38453}{99900}=0{,}38+\frac{49100}{99900}.\frac{1}{10^2},\quad \frac{38453}{99900}=0{,}38491+\frac{49100}{99900}.\frac{1}{10^5}.$$

Dall'ispezione di queste due eguaglianze risulta (1) che il resto ottenuto dopo avere calcolato due cifre decimali (tante quanti sono gli zeri del denominatore) è uguale a quello, che si ottiene dopo averne calcolate cinque (tante quante sono le cifre del denominatore), perciò la 6^a cifra decimale e, per conseguenza, la 7^a, l'8^a... saranno rispettivamente eguali alla 3^a, 4^a, 5^a..., cioè il numero 491 si ripeterà periodicamente; come era detto nella prima parte del teorema.

Inoltre dalla (a) si ha

$$\frac{38453}{99900}=\frac{38.999+491}{99900}=\frac{38.1000+491-38}{99900}=\frac{38491-38}{99900},$$

da cui

$$38491 - 38 = 38453.$$

Il teorema è così completamente dimostrato.

7. *La generatrice d'una periodica mista, minore di 1, è uguale ad una frazione, che ha per numeratore la differenza fra il numero, che precede il secondo periodo, e l'antiperiodo; ed ha per denominatore la differenza di due potenze di 10, i cui esponenti sono rispettivamente eguali ai numeri delle cifre decimali, che precedono il secondo e il primo periodo.*

Infatti una periodica mista, minore di 1 è generata (6) da una così fatta frazione. Ogni altra frazione differente da questa non può generare (4) la medesima frazione decimale.

IV.

I due teoremi precedenti comprendono anche il caso in cui la frazione decimale sia periodica semplice, non che quello in cui sia finito. Infatti nel primo caso basterà riguardare come antiperiodo il primo periodo; e nel secondo, preso per antiperiodo il numero formato dalle cifre decimali, basterà riguardare il periodo come costituito da uno o più zeri.

Dagli stessi teoremi discendono per tanto i seguenti:

8. *La generatrice d'una periodica semplice, minore di 1, è uguale ad una frazione, che ha per numeratore il periodo e per denominatore il numero scritto con tanti 9, quante sono le cifre del periodo.*

La generatrice della periodica semplice 0,27.27.27..., se si considera il primo periodo 27 come antiperiodo, è (7)

$$\frac{2727 - 27}{9900} = \frac{2700}{9900} = \frac{27}{99}; \text{ c. d. d.}$$

9. *Ogni frazione pura irreducibile, il cui denominatore sia primo con 10, è generatrice d'una periodica semplice. Il numero delle cifre del periodo è uguale alla differenza degli esponenti delle più piccole potenze di 10, che, divise pel denominatore, danno resti uguali.*

Sia $\frac{19}{21}$ una frazione pura irreducibile, il cui denomina-
ore sia primo con 10. Sieno inoltre 10^1, 10^7 le più piccole otenze di 10, che, divise per 21, danno resti eguali; allora $0^7 - 10^1 = 999999.10$ sarà divisibile per 21, e lo sarà anche il umero 999999, perchè 21 è primo con 10. Potremo per tanto idurre la frazione $\frac{19}{21}$ ad avere per denominatore il nu-
mero 999999, con che si otterrà $\frac{19}{21} = \frac{904761}{999999}$. Questa frazione sarà generatrice (8) della periodica semplice 0,904761.904761..., nella quale il numero delle cifre del periodo è uguale alla differenza degli esponenti delle suddette potenze di 10. Si potrebbe sospettare che il periodo, così formato, non fosse in realtà che l'insieme di più periodi. Se ciò fosse vero e la frazione $\frac{19}{21}$ generasse, per es. la periodica semplice 0,904.904, allora sarebbe (8) $\frac{19}{21} = \frac{904}{999}$; cioè 999, e quindi anche $9990 = 10^4 - 10$, sarebbe un multiplo di 21, che è quanto dire che 10^1 e 10^4, divise per 21, darebbero resti eguali. Essendo ciò contrario all'ipotesi, il teorema risulta dimostrato.

10. *Ogni frazione pura irreducibile, il cui denominatore, non primo con* 10, *ammetta qualche divisore primo diverso da* 2 *e da* 5, *è generatrice d'una periodica mista. Il numero delle cifre dell'antiperiodo è uguale al maggiore degli esponenti delle potenze di* 2 *e di* 5, *che dividono il denominatore; il numero delle cifre del periodo è uguale alla differenza degli esponenti delle più piccole potenze di* 10, *che, divise pel denominatore, danno resti eguali.*

Sia la frazione $\frac{173}{1320} = \frac{173}{3.11.2^3.5}$, che soddisfi alle condizioni del teorema; essa non può generare una frazione decimale finita, nè una periodica semplice, perchè il suo denominatore non è divisibile esclusivamente pei fattori primi 2 e 5, nè è (8) primo con 10. Dunque genera una periodica mista. Supponiamo che il periodo di questa sia di due cifre, il denominatore della generatrice sarà (7) eguale al prodotto di 99 per una potenza di 10. Il numero 99 conterrà i fattori primi 3.11, non contenuti in quella potenza, e siccome 10^3 contiene gli altri fattori $2^3.5$, così il prodotto $99.10^3 = 10^5 - 10^3$ sarà un multiplo del denominatore della proposta. Ridotta la frazione data ad avere per denominatore questo multiplo, si vedrà allora che l'antiperiodo della periodica mista non ha (6) più di tre cifre. D'altra parte non può averne di meno, perchè allora il denominatore della generatrice (7) non conterrebbe il fattore 2^3; dunque il numero delle cifre dell'antiperiodo è precisamente eguale al massimo degli esponenti delle potenze di 2 e di 5 contenute nel denominatore della proposta.

Inoltre osserviamo che non esistono due potenze di 10 minori delle 10^3, 10^5, che, divise pel denominatore 1320, danno resti eguali. Infatti la prima non può essere minore di 10^3, per ciò che si è detto di sopra, e la seconda non può essere minore di 10^5, perchè il numero delle cifre del periodo non sarebbe (7) quello ammesso dall'ipotesi.

C. Moriconi.

Urbino, 10 aprile 1886.

SULL'ERRORE NEL CALCOLO DEL SENO D'UN ANGOLO COLLE TAVOLE E SOPRA UN NOTO TEOREMA DI GONIOMETRIA

Nei miei *Elementi di trigonometria piana* (N.i 36, 37, 38) ho assegnato, in modo elementare, una limitazione dell'errore che si commette nel calcolo del seno, applicando l'ordinaria interpolazione. Ma si può pervenire in modo più semplice ad una limitazione d'un poco inferiore a quella, come espongo nella prima parte di questo articolo, ove incomincio col rammentare la dimostrazione d'un noto teorema, che è il primo di quelli dimostrati al N. 36 dell'opera citata, e del quale sono esposti, nella seconda parte, due notevoli corollari.

I.

1. Il rapporto $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ diminuisce al crescere di a quando a cresce da 0 a 180°.

Indicando con a e $b > a$ le misure di due angoli acuti, e con α e β i rapporti degli archi corrispondenti al raggio, si ha

$$\operatorname{sen} a > \alpha \cos a,$$

quindi

$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-a) > \alpha \cos a \operatorname{sen}(b-a),$$

e a fortiori

$$(\beta-\alpha) \operatorname{sen} a > \alpha \cos a \operatorname{sen}(b-a).$$

Se ora a questa diseguaglianza si addiziona l'altra

$$\alpha \operatorname{sen} a > \alpha \operatorname{sen} a \cos(b-a),$$

si ottiene

$$\beta \operatorname{sen} a > \alpha \operatorname{sen} b,$$

ossia

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen} b}{\beta},$$

e questa equivale alla

$$\frac{\operatorname{sen} a}{a} > \frac{\operatorname{sen} b}{b}.$$

È poi evidente che, quando a cresce da 90° a 180°, il rapporto $\frac{\operatorname{sen} a}{a}$ diminuisce.

2. Sia data una tavola di seni dei multipli dell'angolo d; sieno a e $a+d$ i multipli consecutivi di d fra i quali è compreso l'angolo del quale si cerca il seno, e s'indichi

quest'angolo con $a + h$. Quando si calcola sen $(a + h)$ colla proporzione

$$\frac{\operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a} = \frac{h}{d},$$

cioè ponendo

$$\operatorname{sen}(a+h) = \operatorname{sen} a + \frac{h}{d}\left(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\right),$$

si commette un errore che è composto di due parti distinte. Una di queste è la differenza

$$E = \operatorname{sen}(a+h) - \operatorname{sen} a - \frac{h}{d}\left(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\right),$$

mentre l'altra dipende dal grado di approssimazione dei seni della tavola. Se questi sono approssimati a meno di g, l'errore nel calcolo della formola

$$\operatorname{sen} a + \frac{h}{d}\left(\operatorname{sen}(a+d) - \operatorname{sen} a\right),$$

ossia della

$$\left(1 - \frac{h}{d}\right) \operatorname{sen} a + \frac{h}{d} \operatorname{sen}(a+d),$$

è minore di

$$\left(1 - \frac{h}{d}\right) g + \frac{h}{d} g,$$

cioè di g.

Per trovare una limitazione della differenza E, si trasformino le differenze di seni in prodotti, e, sostituendo ad $\frac{h}{d}$ il rapporto eguale $\frac{h_1}{d_1}$, in cui h_1 e d_1 significano i rapporti al raggio degli archi h e d, si troverà:

$$E = h_1 \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}}\right\} + h_1 \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}}\left(\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{d}{2}\right)\right)$$

uesta prova, in forza del teorema rammentato al N. 1, er essere $h < d$, che la differenza E è sempre positiva.

Ora dalle disuguaglianze

$$1 - \frac{h_1^2}{16} < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}} < 1, \quad 1 - \frac{d_1^2}{16} < \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}} < 1,$$

ricava

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h_1}{2}} - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{d}{2}\right)}{\frac{d_1}{2}} < \frac{d_1^2}{16},$$

perciò sarà

$$E < \frac{h_1 d_1^2}{16} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) + h_1 \left(\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{d}{2}\right)\right).$$

Si ha poi

$$\cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{d}{2}\right) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{d-h}{4}\right) \operatorname{sen}\left(a + \frac{d+h}{4}\right) < \frac{1}{2}(d_1 - h_1) \operatorname{sen}(a+d),$$

in conseguenza

$$E < \frac{d_1^3}{16} \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2} h_1 (d_1 - h_1) \operatorname{sen}(a + d)$$

d anche

$$E < \frac{d_1^3}{16} + \frac{d_1^2}{8} \operatorname{sen}(a+d),$$

perchè il prodotto $h_1 (d_1 - h_1)$ è al più eguale a $\frac{d_1^2}{4}$. *)

Così, p. e., per $d = 10'$ si ha

$$E < \frac{2}{10^9} + \frac{106}{10^8} \operatorname{sen}(a + d).$$

II.

3. Se con A e B s'indicano due angoli compresi fra 0 e 180° si ha (1)

*) Posto $h_1 = \frac{d_1}{2} \pm k$ si ha $h_1 (d_1 - h_1) = \frac{d_1^2}{4} - k^2 \leqq \frac{d_1^2}{4}$.

$$\frac{\text{sen A}}{\text{sen B}} \gtrless \frac{\text{A}}{\text{B}}$$

secondo che A è minore o maggiore di B. Di qui risulta il teorema:

In ogni triangolo il rapporto di un lato ad un altro lato è maggiore o minore del rapporto dell'angolo opposto al primo lato all'angolo opposto al secondo, quando il primo lato sia rispettivamente minore o maggiore del secondo.

4. Sieno A e B due punti d'una superficie sferica di raggio R, AB l'arco di circolo massimo, minore di 180° che unisce quei due punti, e AHB l'arco, minore di 180°, di uno qualunque dei circoli minori che passano per A e B. Indicando con a e b i numeri di gradi degli archi AB, AHB, con r il raggio del circolo minore, e con c la corda AB, si ha:

$$c = 2\text{R sen}\left(\frac{a}{2}\right) = 2r\text{ sen}\left(\frac{b}{2}\right),$$

dalla quale risulta:

$$b > a.$$

Perciò, indicando con α e β i rapporti degli archi AB, AHB ai raggi dei rispettivi circoli, sarà (1)

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)}{\alpha} > \frac{\text{sen}\left(\frac{b}{2}\right)}{\beta},$$

ossia

$$\frac{\text{R sen}\left(\frac{a}{2}\right)}{\text{R}\alpha} > \frac{r\text{ sen}\left(\frac{b}{2}\right)}{r\beta},$$

e in conseguenza:

$$\text{R}\alpha < r\beta,$$

cioè il noto teorema:

L'arco di circolo massimo, minore di 180°, che unisce due punti d'una superficie sferica, è minore di qualunque arco di circolo minore che unisce gli stessi due punti.

D. Besso.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA (2) PROPOSTO A PAG. 99. *)

(2) *Se da un punto qualunque della superfice d'un triangolo sferico trirettangolo si conducono tre archi di circonferenze massime perpendicolari ai suoi lati, il perimetro del triangolo sferico, che ha per vertici i piedi dei tre archi, è eguale alla metà d'una circonferenza massima.* (F. Nicoli)

Dimostrazione di *Ignazio Beyens*, Capitano del Genio a Cadice.

Sia ABC un triangolo sferico trirettangolo ed O un punto qualunque della sua superficie: se da O si conduce l'arco di circolo massimo OA' perpendicolare al lato BC, la circonferenza a cui esso appartiene dovrà passare pel vertice A, perchè questo punto è polo dell'arco BC. Similmente l'arco di circolo massimo OB', perpendicolare ad AC, si troverà sopra una circonferenza passante per B, e l'arco di circolo massimo OC', perpendicolare ad AB, si troverà sopra una circonferenza passante per C. Perciò, e per una nota proprietà del triangolo sferico, si avrà la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} AC'}{\operatorname{sen} C'B}\cdot\frac{\operatorname{sen} BA'}{\operatorname{sen} A'C}\cdot\frac{\operatorname{sen} CB'}{\operatorname{sen} B'A}=1$$

Si prenda ora, sul prolungamento del lato AB, l'arco $BC'' = C'B$; sarà $\operatorname{sen} AC' = \operatorname{sen} AC''$, e la precedente relazione diverrà

$$\frac{\operatorname{sen} AC''}{\operatorname{sen} C''B}\cdot\frac{\operatorname{sen} BA'}{\operatorname{sen} A'C}\cdot\frac{\operatorname{sen} CB'}{\operatorname{sen} B'A}=-1$$

la quale prova che i punti C'', A', B' sono situati sopra una stessa circonferenza massima. Indicando con C''' il secondo punto di incontro di questa circonferenza con quella alla quale appartiene il lato AB', si avrà $C'''A + AB + BC'' = 180°$, ossia $C'''A = 90° - BC'' = AC'$; epperciò dai triangoli $C'''AB'$, $C'AB'$ risulterà $B'C''' = B'C'$. Inoltre dai triangoli $A'BC''$, $A'BC'$ si ricava: $C''A' = C'A'$; perciò l'eguaglianza

$$C''A' + A'B' + B'C''' = 180°$$

si trasforma nella

$$C'A' + A'B' + B'C' = 180°,$$

che è quanto volevasi dimostrare.

*) In un prossimo fascicolo saranno pubblicate le dimostrazioni dei teoremi (1) e (3) che sono state inviate dai Sig.ri J. Beyens e G. Riboni.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N.° 2.

L'Eco della Associazione nazionale fra gli insegnanti delle scuole secondarie. Anno III, n. 15 e 16. Torino, 1886.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV. Marzo e Aprile 1886. Napoli, Benedetto Pellerano, editore.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lèvy* Directeur des études à l'Ecole preparatoire de Sainte-Barbe 2ᵉ série. Dixième année. N. 5 e 6 Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élèmentaires publié par *H. Vuibert*. 10ᵉ Année. N. 16, 17, 18. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième, Mai et Juin 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVII. N. 7, 8, 9, 10, 11. Firenze, 1886.

C. Arzelà. — Sui prodotti infiniti (1886).

V. Cerruti. — Sulla deformazione d'una sfera omogenea isotropa (1886).

G. Giuliani. — Dell'integrabilità di una serie di funzioni (1885).

Q. Grandi. — Sull'insegnamento dell'Aritmetica (1865). — Definizioni e regole di Aritmetica (1869). — Il primo libro di Euclide o introduzione alla Geometria (1871). — L'utile delle scienze ridotto a poche pagine per il popolo ovvero trattato sintetico di scienze naturali (1873).

G. De Longchamps. — Intégration de certaines suites récurrentes (1885. — Notice nécrologique sur S. Realis (1886). — Le centre de la conique de Kiepert (1886).

G. Loria. — Rappresentazione su un piano delle congruenze $[2,6]_2$ e $[2,7]$ (1886).

V. Mazzanti. — Il capitano di lungo corso e di gran cabotaggio: Svolgimento dei nuovi programmi governativi per gli esami pratici degli aspiranti ai gradi nella marina mercantile. Trapani, 1883.

E. de Montel. — Operazioni di Borsa e di Commercio. Reggio Emilia (1886).

J. Neuberg. — Sur les surfaces anallagmatiques (1885). — Sur quelques systèmes de tiges articulées; tracé mécanique des lignes. Liège, 1886.

J. M. Rodrigues. — Movimento do solido liver. Lisboa, 1886.

A. Tartinville. — Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré a une inconnue. Paris, 1886.

SULL'IMPOSSIBILITÀ DI CERTE DIVISIONI E SULL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI

NOTA

DI RODOLFO BETTAZZI

II.

11. Quanto si è esposto nel capitolo precedente trova la sua naturale applicazione nei teoremi relativi all'equivalenza delle equazioni. (*)

Principiando dall' osservazione fatta al § 2, si noti che si suole in ciascun membro di una equazione (come in generale in un'espressione qualunque) sopprimere due termini uguali e di segno contrario che vi compariscano; poi si dimostra il principio che un'equazione non si altera (frase inesatta alla quale si deve sostituire l'altra: dà origine ad un'equazione equivalente) aggiungendo o togliendo una medesima espressione ai due suoi membri; e come corollario, da questo principio e dalla riduzione precedente si conclude che si può trasportare un termine da un membro all'altro cambiandogli segno, il quale ultimo corollario vale quindi finchè valgono i due principii precedenti.

Le osservazioni del § 2 mostrano peraltro che devesi fare qualche restrizione per il caso in cui i termini da sopprimere in un membro o da aggiungere ad ambedue perdano il loro significato. Ora finchè i termini sopra cui si opera non contengono l'incognita, dimodochè si possano a priori escludere per le lettere che in essi compariscono i valori che li rendono illusori, non ha luogo nessuna osservazione speciale; ma quando essi termini contengono l'incognita, non potendosi a priori escludere per essa nessun valore, si vede che queste operazioni possono effettivamente introdurre o togliere delle radici. — E così l'equazioni:

(*) Per semplicità del linguaggio mi limiterò in quello che segue al caso delle equazioni ad un'incognita sola; ma s'intende che può ripetersi lo stesso per l'equazioni a più incognite.

$$A \pm C = B \pm C \quad e \quad A = B$$

o le altre

$$A + C - C = B \quad e \quad A = B$$

possono non essere equivalenti; e precisamente ciò accadrà quando C perde il significato per qualche valore dell'incognita che sia radice dell'equazione $A = B$, poichè tal valore non appartiene allora evidentemente come radice ad $A \pm C = B \pm C$, o ad $A + C - C = B$; onde in questa riduzione *può darsi* che si *acquisti* qualche radice. Se quindi sia da risolvere l'una o l'altra di queste ultime equazioni, risoluta l'equazione che se ne è dedotta $A = B$, sono da escludere quelle fra le sue radici che rendono illusorio C.

Se C non diviene *mai* illusorio, o almeno non lo diviene per nessuna di quelle radici, le due equazioni sono equivalenti.

Così p: es: l'equazione

$$3x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + x^2 = 4x$$

non è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x$$

(ottenuta dalla precedente sopprimendo i termini $\frac{1}{x-1}$, $-\frac{1}{x-1}$) perchè questa ha le radici, $x = 0$, $x = 1$ delle quali la seconda rende illusoria l'espressione $\frac{1}{x-1}$ e quindi non è radice della prima equazione.

Invece l'equazione

$$3x + x^6 + x^2 = 4x + x^6$$

è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x$$

perchè x^6 non perde mai il suo significato.

E finalmente l'equazione

$$4x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-2} + x^2 = 4x$$

è ancora equivalente alla solita

$$2x + x^2 = 4x$$

perchè sebbene il termine soppresso $\frac{1}{x-2}$ possa divenire illusorio, pure non lo diviene nè per $x = 1$, nè per $x = 0$, che sono le radici della seconda equazione.

12. Le considerazioni svolte nei §§ 3 e segg: danno origine ad osservazioni anche più importanti.

Abbiasi un'equazione qualunque ed in uno dei suoi membri, p: es: nel primo, comparisca una frazione $\frac{m}{n}$, talchè l'equazione possa scriversi così:

$$(1) \qquad \frac{m}{n} + p = q$$

Supponiamo che si abbia *in generale*

$$m = ca, \quad n = cb$$

e che quindi sia, ancora in generale $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$; dall' equazione precedente si passerà all'altra

$$(2) \qquad \frac{a}{b} + p = q$$

colla semplificazione della frazione $\frac{m}{n}$. Se il fattore c non contiene l' incognita x, dovremo fare le osservazioni dei §§ 4 e segg: circa l'equivalenza delle due frazioni; ma esclusi per le quantità note i valori che dànno luogo ad eccezione, per gli altri le due equazioni sono equivalenti.

Ma se il fattore c non contiene l' incognita x, la soppressione di c può avere influenza sulle radici. Sappiamo infatti (§ 6) che si ha $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ tranne *certamente* per quei valori che, senza rendere nullo ed illusorio c, privano di significato $\frac{m}{n}$ soltanto o soltanto $\frac{a}{b}$: e *al più* per quei valori che rendono nullo od illusorio c. Una radice $x = \alpha$ della equazione (1), la quale non annulli nè renda illusorio c, sarà quindi anche radice della (2) se non renderà illusorio $\frac{a}{b}$; e viceversa una radice $x = \beta$ della (2) che pur non annulli o renda illusorio c è radice della (1) purchè non renda illusorio $\frac{m}{n}$. Passando quindi dall'equazione (1) alla (2) si ritrovano almeno tutte le radici della (1) che non rendono nullo od illusorio il fattore soppresso c, eccetto quelle che rendono illusorio $\frac{a}{b}$; e viceversa le radici di (2) che non annullano nè rendono illusorio c sono altrettante radici della (1), tranne quelle che rendono illusorio $\frac{m}{n}$.

Se ora una radice $x = \alpha$ della (1) rende illusorio o nullo c, può essere che non sia $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$ e quindi che essa non sia radice della (2), e può essere pure che lo sia (§ 6); e altrettanto dicasi delle radici della (2) rispetto alla (1).

Passando quindi dalla (1) a (2) *può avvenire* che si *perdano* quelle fra le sue radici che annullano o rendono illusorio c e che viceversa si *acquistino* delle radici di questo genere, le quali non siano radici della (1): e di più si *acquistano certamente* quelle fra le radici di (2) che rendono illusorio $\frac{m}{n}$ (se ve ne sono) e si *perdono certamente* (qualora ne esistano) quelle di (1) che rendono illusorio $\frac{a}{b}$.

P: es: se dall'equazione

$$\frac{2(x-3)+4}{(x-3)+1} - 4 = 0$$

si passa all'altra

$$\frac{2 + \dfrac{4}{x-3}}{1 + \dfrac{1}{x-3}} = 4$$

sopprimendo nella frazione del primo membro il fattore $x-3$, si perde la radice $x = 3$, la quale annulla il fattore soppresso e sodisfa all'equazione data; ma non alla seconda.

Passando dalla seconda alla prima, colla divisione quindi per $\dfrac{1}{x-3}$, invece si acquista la radice $x = 3$ che rende illusorio questo fattore.

Se dall'equazione

$$\frac{x-1}{2(x-1)} + x^2 \quad \frac{3}{2}$$

si passa all'altra

$$\frac{1}{2} + x^2 = \frac{3}{2}$$

sopprimendo il fattore $c = x - 1$, siccome questa ha per radici $x = +1$, $x = -1$, si acquista la radice $x = 1$ la quale rende nullo il fattore c ecc., ecc.

Se quindi vorremo, (nel caso generale) servirci della (2) per risolvere la (1), risoluta che sia la (2) rigetteremo quelle frà le sue radici che rendono illusorio $\dfrac{m}{n}$: poi cercheremo quali sono i valori di x che rendono illusorio $\dfrac{a}{b}$ e di essi aggiungeremo alle radici quelle che la verificazione diretta mostra radici di (1). Da questo insieme di valori toglieremo quelli che annullano o rendono illusorio c, i quali *possono* (non *debbono*) non essere radici di (1): le rimanenti sono certamente tutte radici di (1). Esaminati poi a parte (colla verificazione diretta) i valori di x che rendono nullo od illusorio c, riterremo quelli che sodisfano la (1): e queste, insieme colle precedenti radici, daranno la soluzione completa dell'equazione (1).

13. Nel paragrafo precedente si è esposto il processo generale per dedurre le soluzioni della (1) da quelle della (2); nei casi particolari esso potrà generalmente essere abbreviato da osservazioni speciali.

Se p: es: nell'equazione data i termini m ed n della frazione $\frac{m}{n}$ sono *dati già decomposti* talchè l'equazione sia proposta sotto la forma

$$\frac{ca}{cb} + p = q,$$

ricordando che (§ 8) il passaggio da $\frac{ca}{cb}$ ad $\frac{a}{b}$ non altera in generale la frazione e *al più* può darle un significato quando c sia nullo od illusorio, si vede che l'equazione derivata (2) possiede tutte le radici di quella data, e *può* possedere di più quelle che annullano o rendono illusorio c. E quindi, risoluta la (2), basterà rigettare quelle fra le sue radici che, rendendo c nullo od illusorio, verificate direttamente non sodisfano la equazione data.

Se poi, come avviene nei casi ordinari, m, n, c, a, b sono tutte espressioni intere rispetto alla x, e quindi non possono mai divenire illusorie, sarà *sempre* $m = ca$, $n = cb$; talchè se $c = 0$, è ancora $m = 0$, e quindi $\frac{m}{n}$ è illusorio, per cui un valore che annulla c non può essere mai radice della equazione (1). Passando quindi da (1) a (2) si acquistano quelle radici di (2) che annullano il fattore c: onde, risoluta la (2), avremo solo da rigettare assolutamente quelle fra le radici di (2) che annullano c.

14. Tutte le considerazioni dei due §§ precedenti possono ripetersi in particolare quando l'equazione sia o si riduca (restando equivalente a sè stessa) ad essere della forma

$$\frac{M}{N} = D.$$

$$M = CA\ , \qquad N = CB$$

l'equazione precedente non può generalmente ritenersi come equivalente all' altra

$$\frac{A}{B} = D$$

anche se M ed N siano già *dati* sotto la forma CA e CB (§§ 12, 13).

Quest' osservazione mostra inesatto il seguente metodo che suol darsi anche in alcuni dei migliori trattati di Algebra, per mandar via da un'equazione i denominatori trasformandola in una equivalente. Il metodo è questo: « Si portino tutti in un membro i termini che contengono la x nel denominatore e nell' altro i rimanenti: si riducano i primi al medesimo denominatore, e se ne faccia la somma algebrica, talchè l'equazione proposta venga ad assumere la forma $\frac{M}{N}=D$: si sopprimano i fattori comuni ad M e ad N, e si abbia $\frac{A}{B}=D$: si risolva infine l' equazione $A = BD$ che si dimostra equivalente all'equazione precedente $\frac{A}{B}=D$ ». —

Innanzi tutto il trasporto di certi termini tutti in un membro può dare origine alle osservazioni del § 11; ma quando pure tali osservazioni non avessero luogo, o si tenesse conto di esse, e quando pure la riduzione al medesimo denominatore si facesse com' è accennato al § 10 per evitare alterazioni di radici, resta il fatto che l'equazione cui si giunge $\frac{M}{N} = D$ non può, come si è notato, ritenersi equivalente alla $\frac{A}{B} = D$: e che la $\frac{A}{B} = D$ non è equivalente alla $A = BD$ che a condizione che non si eseguisca, ma si lasci accennato il prodotto BD.

Si può osservare che questo metodo viene indicato per risolvere le equazioni in cui A, B, D, C sono espressioni intere, nel qual caso la $\frac{M}{N} = D$ è certo equivalente all' equazione data, e $\frac{A}{B} = D$ è equivalente ad $A = BD$; ma per quanto si è notato nel § 12, il passaggio dall' equazione $\frac{M}{N} = D$ all'altra $\frac{A}{B} = D$ *può* introdurre le radici che annullano c: onde risoluta l' equazione $A = BD$ sono da rigettare quelle fra le sue radici che annullano c. Così p: es: l' equazione

$$\frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 6x + 8} = -6$$

che può scriversi

$$\frac{(x-2)(x^2+3x+2)}{(x-2)(x-4)} = -6,$$

ridotta all' altra

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x - 4} = -6$$

come indicherebbe il metodo precedente, cioè colla soppressione del fattore comune $x - 2$, avrebbe per radici $x = 2$, $x = -11$; delle quali la prima, che annulla il fattore $x - 2$ deve essere esclusa. E infatti il valore 2 dato ad x renderebbe privo di significato il primo membro dell'equazione data.

15. Quando si ha un' equazione $A = B$, e se ne moltiplicano i due membri per una medesima espressione m, risulta l' equazione

$$mA = mB$$

(dove intenderemo per ora (Cfr. § 17) i prodotti mA, mB semplicemente *accennati* e non eseguiti), la quale può non essere equivalente alla prima. Una radice della prima equazione è evidentemente radice anche della seconda, purchè non renda illusorio m; viceversa una radice della seconda, che quindi non rende illusori nè A, nè B, nè m, lo è anche della prima, tranne *al più* se annulla m, nel qual caso può anche non esserlo. Col passare quindi dalla prima equazione alla seconda *si perdono* quelle fra le radici che rendono illusorio m, e se ne *possono acquistare* altre che rendano nullo m. Risoluta quindi la seconda equazione, vedremo se fra le sue radici ve ne sono alcune che annullano m: queste, potendo essere radici della seconda senza esserlo della prima, si riterranno solo quando, sostituite direttamente, la verifichino. Dopo cercheremo quali sono i valori di x che rendono illusorio m: e questi, che possono essere radici trascurate, li sostituiremo direttamente nella prima, ritenendo quelle che la verificano e rigettando le altre.

16. Il risultato precedente non ha, sotto quella forma, che poca o nessuna importanza (Cfr. § 17): ma è assai più utile quando si applichi al caso in cui data a risolvere un'equazione che è *già* sotto la forma

$$mA = mB$$

o vi si possa porre senza (§ 3) alterarne le radici, si divida per m, passando all'altra, in generale di più facile risoluzione

$$A = B.$$

Allora, risoluta questa seconda equazione, si vede che sono da aggiungere le radici che così non si siano trovate, e che rendano nullo m senza rendere illusori nè A nè B, e da togliere, se ce ne sono, quelle che rendano illusorio m.

Così in particolare quando si divide tutta un'equazione per $ax + b$ (che compaia a fattore comune), siccome questo divisore si annulla per $x = -\frac{b}{a}$, così si viene a togliere all'equazione la radice $x = -\frac{b}{a}$, tranne se questo valore di x renda illusori A o B.

In questo modo passando p: es. dall'equazione

$$3x^2 - 2x = 4x^3$$

all'altra

$$3x - 2 = 4x^2$$

si perde la radice $x = 0$: tale radice invece non si perde passando dall'equazione

$$1 + 2x = 3$$

all' altra

$$\frac{1}{x} + 2 = \frac{3}{x}$$

Passando dall'equazione

$$\frac{8(x-2)}{x-4} + \frac{7(x^2 - 6x + 8)}{x-4} = \frac{2x^2 - 2x}{x-4},$$

che può scriversi, senza alterarne le radici,

$$\frac{x-2}{x-4}\left[8 + 7(x-4)\right] = 2x\frac{x-2}{x-4},$$

all' altra

$$8 + 7(x-4) = 2x$$

colla divisione per $\frac{x-2}{x-4}$, si perde la radice $x = 2$ che annulla il fattore che si moltiplica e si acquista la radice $x = 4$ che rende illusorio questo fattore.

17. Come necessario complemento al § 15, il quale, come si è detto, sotto quella forma non ha importanza, osserviamo ora che quando l'equazione $A = B$ si moltiplica per un'espressione m, ciò si suol fare non per giungere all'equazione $mA = mB$ che presenta (finchè resta sotto questa forma) le medesime difficoltà dell'equazione data; ma per poter giungere ad avere *almeno in generale*

$$mA = C, \qquad mB = D$$

dove C e D sono nuove espressioni, e risolvere così l'equazione $C = D$ invece di quella data. È da vedersi peraltro se l'equazione $C = D$ è o no equivalente alla $A = B$.

Confrontiamo innanzi tutto l'equazione C = D coll'altra mA = mB. Tutte le radici della prima, per quanto si è detto al § 3, apparterranno chiaramente alla seconda, eccetto quelle che rendono illusorio m, o A, o B: e viceversa tutte quelle della seconda appartengono alla prima, tranne se rendono illusorio C o D. Per risolvere quindi l'equazione mA = mB basterà risolvere la C = D: dalle radici trovate rigettare quelle che rendono illusorio m, o A, o B e aggiungere quei valori di x che, rendendo illusori C o D, verificano, sostituite direttamente, l'equazione mA = mB. Così si ottengono le radici di questa: per avere da queste quelle di A = B seguiremo il metodo indicato al § 15, secondo il quale dovremo, avute le radici di mA = mB, scartarne quelle che rendono nullo il fattore m: indi, ritenute le rimanenti radici, aggiungere a queste quelle che si trovano sostituendo direttamente in A = B i valori di x che rendono nullo od illusorio il fattore m.

Riunendo i due risultati si deduce che passando dall'equazione data A = B all' altra C = D basterà risolvere questa: dalle sue radici separare (non perchè siano tutte da rigettarsi, ma per avere metodo più regolare), quelle che annullano o rendono illusorio m, oppure che rendono illusorio A o B; poi cercare tutti i valori di x che rendono illusorio C o D, oppure che annullano o rendono illusorio m, e ritenere come radici quelli che, sostituiti direttamente nella equazione data, la verificano.

Nei casi ordinari tanto m che C e D sono espressioni intere nella x, nè possono quindi divenire mai illusori; allora il metodo precedente si riduce a risolvere l' equazione C = D: a separare dalle sue radici quelle che rendono illusorio A o B o annullano m (queste ultime non perchè siano necessariamente da rigettarsi, ma solo, essendo poi considerate di nuovo, per semplicità nell'esposizione del metodo); ed aggiungere come radici quei valori di x, verificati direttamente colla sostituzione in $A = B$, che annullano m e sono radici dell'equazione data.

Uno dei casi frequenti in pratica è quello in cui tutta l'equazione sia intera rispetto ad x, tranne un solo termine, che contenga un denominatore m, intero anch'esso rispetto ad x. Si suole allora moltiplicare l'intera equazione per m, e ridurla a forma intera, con che si ricade nel caso trattato ora. Ma osservando che, per le ipotesi fatte, ora A o B divengono illusori quando è nullo m e viceversa, il metodo precedente si riduce a risolvere l'equazione $C = D$ e rigettare quelle fra le sue radici che annullano m, le quali non sono al certo radici di quella data, perchè, come si è detto, rendono illusorio A o B.

Se i termini non interi in x fossero più di uno, occorre allora tener conto delle osservazioni fatte al § 14.

18. Le osservazioni esposte fin qui farebbero sembrare singolarmente complessa la risoluzione di un'equazione qualunque, quando almeno si fondi sui principii ordinari; ma nei casi della pratica, oltrechè si presenterà generalmente la condizione (che, come si è visto caso per caso, semplifica molto i metodi) di avere da fare con frazioni i cui termini sono già polinomi interi, la semplicità dei fattori soppressi ed aggiunti mostrerà immediatamente quali sono le radici aggiunte o tolte, le quali talora mancheranno affatto.

Nonostante, tutte le osservazioni precedenti sono *teoricamente* necessarie. Esse sono generalmente trascurate nei trattati, più che altro perchè in essi si suppone di avere a fare con espressioni sempre intere; ma questa condizione deve essere avvertita esplicitamente, almeno per far notare, che, quando le espressioni non siano intere, sono necessarie discussioni più minute. In ogni modo, anche in questi casi semplici, il metodo di cui è parola al § 14, si suole, come si è mostrato, esporre un poco inesattamente.

19. Tutte le discussioni dei precedenti §§ prendono origine dall'esistenza di alcune impossibilità nella divisione, per cui restano senza significato i simboli $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$. Si è visto infatti che, quando si ha da operare su espressioni intiere (le quali quindi non divengono mai illusorie) i risultati ed i metodi si esprimono sotto forma semplicissima. Sarebbe quindi conveniente cercare di ridurre piccolo, per quanto è possibile, il numero dei casi in cui i simboli sono illusori, attribuendo, quando ciò possa farsi, un significato ai simboli, in alcuni almeno dei casi in cui sono illusori. Questo si riscontra fatto in alcuni trattati di algebra (Baltzer, Faifofer, Raiola Pescarini, Garbieri,...). Nel trattato di quest' ultimo autore è osservato che le espressioni $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$ non vogliono dir niente, la prima perchè non rappresenta nessun numero, la seconda perchè può rappresentarli tutti. Per il secondo simbolo possiamo fra gl'infiniti valori cui corrisponde sceglierne uno conveniente ed attribuirlo ad esso come significato: per il primo simbolo possiamo introdurre nuovi numeri definiti da esso, come s'introducono i numeri negativi, i frazionari, ecc., per avere i rappresentanti di risultati di sottrazioni, di divisioni, ecc. altrimenti impossibili.

Si può stabilire che, se per un certo valore di x l'espressione analitica di una funzione perde il suo significato ed il valore della funzione in quel punto non è definito in altro modo (come sono i casi ordinari) e se in esso la funzione tende ad un valore limite finito, si prenda per valore in quel punto questo valore limite. Se avvicinandosi a quel punto la funzione cresce invece oltre ogni limite conservando sempre il medesimo segno + o –, diremo che il valore in quel punto è $+\infty$ o $-\infty$, dove $+\infty$ e $-\infty$ sono nuovi numeri. Talchè (per quanto più particolarmente interessa l'algebra Elementare) con queste due convenzioni sarà $\frac{a}{\infty} = 0$,

$\dfrac{a}{\dfrac{1}{x}} = 0$, $\dfrac{x}{x} = 1$, $\dfrac{(a+x)x}{(b+x)x} = \dfrac{a}{b}$ ecc. anche per $x = 0$, ecc.

Così i simboli $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, ecc. avranno un significato se provengono da funzioni che hanno un limite: se provengono da funzioni che non hanno limite saranno ancora simboli illusori.

Per questi nuovi simboli e numeri sarebbe da vedere quali regole di calcolo valgono: ma, per l'algebra elementare, basta limitarsi a poche considerazioni per le quali rimando alla citata Algebra del Prof. Raiola Pescarini, bastandomi l'aver dato un cenno della possibilità di avere in molti casi un significato.

Citerò solo, per mostrare come talora l'estensione anzidetta possa essere opportuna, alcuni esempi.

L'espressione $\infty - \infty$, che sarebbe illusoria, se proviene da un'espressione la quale per valori di x diversi da quello che si considera è sempre $= P$ (dove P è un'espressione che ha un significato anche per quel valore di x) potrà porsi essa pure $= P$. Per es: l'espressione

$$a + \frac{1}{x} - b - \frac{1}{x}$$

per $x = 0$ diviene (coi nuovi simboli) $\infty - \infty$; ma fuori di $x = 0$ è sempre equivalente ad $a - b$, perciò si prenderà uguale ad $a - b$ anche per $x = 0$. L'equazione

$$a + \frac{1}{x} - b - \frac{1}{x} = x$$

sarà quindi da ritenersi equivalente all'altra

$$a - b = x\,.$$

E, coi nuovi simboli, l'equazione

$$3x + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-1} + x^2 = 4x$$

è equivalente all'altra

$$3x + x^2 = 4x,$$

sebbene al § 11 queste due equazioni si dicessero non equivalenti a causa dei termini $\frac{1}{x-1}$, $\frac{1}{x-1}$ che divenivano illusori quando $x = 1$.

Così l'espressione

$$\frac{c}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}$$

per $x = 0$ è uguale a $\infty - \infty$; ma fuori di quel valore è uguale a $\frac{c}{x+1}$, che per $x = 0$ non è illusorio, quindi la prenderemo uguale a questa espressione anche per $x = 0$, cioè la prenderemo allora $= c$. L'equazione

$$\frac{c}{x+1} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = c$$

é quindi equivalente all'altra

$$\frac{c}{x+1} = c$$

che ha per radice $x = 0$, mentre senza l'introduzione dei nnuovi numeri questa radice sarebbe da rigettarsi perchè renderebbe illusorio il primo membro dell'equazione data.

I pochi cenni dati in questo capitolo non rendono inutili le osservazioni del capitolo precedente; ma, diminuendo il numero dei casi in cui una espressione si può presentare sotto forma illusoria, rendono possibile l'applicazione piu frequente dei più semplici dei metodi indicati nei precedenti paragrafi.

Lucca, Marzo 1886.

SULLA PROIEZIONE STEREOGRAFICA

1. In questa nota esporremo le nozioni fondamentali sulla *proiezione stereografica*, quella proiezione che rappresenta la superficie della sfera come la vedrebbe un osservatore il cui occhio si trovasse in un punto della medesima. L'immagine di un punto della sfera sarà l'intersezione del raggio visuale di questo punto col piano di proiezione (*quadro*), il quale è scelto sempre perpendicolare al raggio visuale che congiunge l'occhio col centro della sfera, e quella d'una curva aperta o chiusa, tracciata nella superficie di essa, l'intersezione d'una superficie conica avente per vertice il punto d'osservazione (*centro*) e per direttrice la curva, col quadro. Da ciò consegue che se P è un punto d'una curva C tracciata sulla superficie della sfera e PQ la tangente a C in P e s'immagina il piano passante pel centro o di proiezione e PQ, il quale, com'è noto, è il piano tangente alla superficie conica proiettante la curva C lungo la generatrice OP, la retta d'intersezione *pq* di questo col quadro riescirà tangente alla curva *c*, proiezione sul quadro di C, nel punto *p*.

L'argomento che qui ci occupa è così poco moderno da dovere la sua origine ad Ipparco (come afferma Sinesio nel suo libro: *De dono astrolabii*), il quale immaginò questo genere di rappresentazione 150 anni circa innanzi l'era volgare, quantunque l'epiteto di *stereografica*, dato a questa proiezione, sia relativamente recente e dovuto al gesuita Francesco D'Aguillon che a lei lo assegnò sul principio del secolo XIV. Il desiderio di divulgare ancor più questo sistema di proiezione con un'esposizione elementare ci ha indotti a stendere queste poche pagine, nelle quali il lettore troverà anche qualche novità di trattazione.

2. Def. Se per l'asse di un cono circolare obliquo s'immagina un piano perpendicolare alla base, le sezioni del cono con due piani non paralleli fra loro, perpendicolari alla se-

zione ottenuta e formanti con le generatrici giacenti in questa degli angoli uguali, diconsi *antiparallele*.

3. Teo. 1.º *Se esiste un piano che intersechi un dato cono circolare obliquo, lungo una circonferenza, ne esisterà anche un altro (antiparallelo al primo) ed ogni altro piano intersecherà il cono lungo una circonferenza, solo quando sia parallelo a uno dei primi due.* (1)

Teo. 2.º *Due sezioni circolari antiparallele di un cono sono in una sfera.* (2)

Cor. Se da un punto dell'intersezione dei piani di due sezioni antiparallele, si tirano delle tangenti a queste sezioni, le parti delle tangenti comprese fra questo e i punti di contatto saranno uguali. Infatti esse sono le tangenti tirate dallo stesso punto ad una medesima sfera.

4. Rappresenti il cerchio OACB (fig. 1ª) la sezione della sfera da proiettare col piano della figura, e si collochi il quadro perpendicolare al raggio Oc nel punto c: sarà xcy la traccia di esso col piano menzionato. Ad ogni punto P della sfera, escluso O, corrisponderà un punto p del quadro, quel punto nel quale la retta OP incontra il quadro, ed in particolare ai punti dell'emisfero ACB corrisponderanno nel quadro punti posti nell'interno del cerchio il cui diametro è AB, ed ai punti dell'altro emisfero corrisponderanno punti esterni al cerchio medesimo, mentre i punti della circonferenza AB corrisponderanno a loro stessi. È facile poi riconoscere che ad ogni cerchio minore passante per O corrisponde la retta indefinita intersezione del piano di questo cerchio col quadro, ad ogni circonferenza massima passante ugualmente per O corrisponde una retta indefinita passante per c, e ad ogni circonferenza il cui polo sia O, una circonferenza di centro c intersezione col quadro del cono retto circolare

---

(1) Questo teo. è un caso particolare dell'altro: *Le sezioni antiparallele di un cono sono figure simili*, dovuto ad Apollonio.

(2) Reputo inutile riportare la dimostrazione di questi teo: perchè trovasi anche in libri scolastici. V. ad es: Sannia e D'Ovidio « *Elementi di Geometria* » all'art.: Sezioni antiparallele del cono e del cilindro.

che ha per vertice O e per direttrice o base la circonferenza obbiettiva.

Teorema. *Ad ogni cerchio della sfera che non passa per il centro di proiezione, corrisponde nel quadro un cerchio come proiezione stereografica, e viceversa ad ogni cerchio del quadro corrisponde ugualmente un cerchio della sfera.*

Scelgasi il piano del cerchio perpendicolare a quello della figura e DE ne rappresenti il diametro. S'immagini il cono circolare che ha per vertice O e per direttrice la circonferenza DE, dico che la superficie di questo taglia il quadro, in un cerchio di diametro *de*.

Infatti si tiri per O la retta OT parallela ad xy, sarà l'angolo dOT uguale all'angolo Ode; ma i due angoli DOT, DEO sono uguali (Euclide libro 3°, prop. 32), sono tali adunque anche gli angoli Ode e DEO. Il piano perpendicolare a quello della figura e passante per *de* determina quindi nella superficie conica proiettante una sezione antiparallela alla circonferenza DE, questa sezione sarà quindi un circolo.

Viceversa si consideri nel quadro un cerchio di cui *de* sia il diametro. Si suppongano tirate OdD e OeE e tracciata la corda DE. Essendo gli angoli Ode, DEO uguali, condotto un piano perpendicolare a quello della figura e passante per DE, questo taglierà la superficie conica che ha per vertice O e per direttrice la circonferenza *de* in un'altra circonferenza la quale apparterrà evidentemente anche alla sfera.

Cor. I. Il centro del cerchio *de* cadrà naturalmente nel punto medio v di *de*; per vedere a qual punto corrisponda v, conducansi per D ed E le tangenti TV$'$ e V$'$T$'$ le quali s'incontrano in V$'$ e tagliano la tangente per O in T e T$'$, poi tirisi per V$'$ la E$'$D$'$ parallela ad xy e finalmente si prolunghino le OD, OE finchè incontrino questa retta in E$'$, D$'$. Così operando è chiaro che si avrà TO = TD, T$'$O = T$'$E, e per essere i triangoli DE$'$V$'$, EV$'$D$'$ rispettivamente simili ai triangoli OTD, ET$'$O, risulterà altresì: E$'$V$'$ = V$'$D, V$'$D$'$ = V$'$E:

ma $DV' = V'E$, dunque ancora $E'V' = V'D'$, talchè V' è il punto medio di $E'D'$ e in conseguenza OV' incontrerà xy in punto medio del segmento de parallelo a $E'D'$. Il punto V' in tal modo ottenuto coincide evidentemente col vertice del cono circoscritto alla sfera lungo la circonferenza DE.

Cor. II. Suppongasi adesso che sia da rappresentare una circonferenza massima FG: è chiaro che la superficie circoscritta alla sfera lungo la medesima riducesi ad un cono col vertice all'infinito, ossia ad una superficie cilindrica le cui generatrici sono perpendicolari al piano di FG. Il centro del cerchio fg, proiezione di FG, si troverà perciò nel punto u in cui la perpendicolare tirata da O ad FG incontra la traccia xy del quadro.

Cor. III. Prolungando il piano del cerchio DE finchè incontri il piano del quadro, l'intersezione sarà una retta hi perpendicolare al piano della figura nel punto h. Segue poi che le porzioni delle tangenti condotte da un punto qualsiasi i di questa retta alle due circonferenze DE, de, che sono sezioni della medesima sfera con la superficie conica proiettante DE (n.° 3, corol.), comprese fra i e i punti di contatto, saranno uguali fra loro.

Scolio. È utile osservare che l'ultimo corollario è indipendente dai due precedenti.

5. Teorema. *L'angolo di due curve sferiche e quello delle loro proiezioni stereografiche, sono eguali.*

Siano C_1, C_2 (fig. 2ª) due curve, passanti per P, tracciate sulla superficie della sfera, che primieramente supporremo circolari, e c_1, c_2 le loro proiezioni, tagliantisi in p, sul quadro. Si prolunghino i piani C_1, C_2 finchè incontrino il quadro, e in questi piani si tirino le tangenti in P alle C_1, C_2, poi s'immaginino i piani che passano per OP e per queste tangenti: questi (n.° 1) intersecheranno il quadro nelle rette pi, pi' le quali saranno rispettivamente tangenti alle c_1, c_2 e incontreranno le corrispondenti tangenti passanti per P nei punti i, i'. Per il corol. III del n.° precedente sarà: $pi = Pi$ e $pi' = Pi'$, sicchè tirata nel quadro la retta ii' i triangoli ipi', iPi' risulteranno uguali. Segue quindi: angolo $iPi' = ipi'$, e poichè questi angoli sono rispettivamente quelli delle curve obbiettive e delle loro proiezioni, nel caso prescelto il teorema è dimostrato.

In secondo luogo suppongasi che le curve C_1, C_2 non siano circolari e allora non saranno tali neppure le c_1, c_2 (n.° 4, teo.). Prendansi sopra ciascuna delle prime due punti assai prossimi a P, e, segnati nelle c_1, c_2 i punti che a questi corrispondono, s'immaginino le due circonferenze che passano per P e per le due prime coppie di punti, e le circonferenze passanti per p e le corrispondenti coppie di punti su c_1, c_2 le quali corrisponderanno rispettivamente alle precedenti. Si supponga ora che i punti in prossimità di P sempre più s'avvicinino a P, dal che segue che le loro proiezioni sul quadro s' avvicineranno a p, le circonferenze menzionate tenderanno verso certe circonferenze limiti (circonferenze *osculatrici* delle curve) che hanno nei punti P e p, come può anche concepirsi, le stesse tangenti delle curve menzionate; perciò, sussistendo il teorema per queste circonferenze, l'angolo delle curve C_1, C_2 sarà quello stesso delle curve c_1, c_2.

Scolio. La proiezione stereografica gode adunque dell'importante proprietà della conservazione degli angoli, od in altre parole è di tale natura che ad ogni triangolo o poligono corrisponde un triangolo o poligono in cui gli angoli sono rispettivamente uguali a quelli dell'obbiettivo e viceversa. Essa appartiene perciò a quella classe di rappresentazioni che si appellano *ortomorfe*, *isogoniche* o *conformi* il cui carattere è di conservare la similitudine nelle parti infinitamente piccole (*). Ed infatti considerando un punto p del-

(*) Fondandosi sopra questa particolarità il celebre geometra francese *M. Chasles* dedusse in modo assai semplice la proprietà esposta nel corol. 1 del n.° 4 e infatti basta osservare che le generatrici V'R, V'Q,.... (fig. 2ª) del cono circoscritto alla sfera lungo la circonferenza DE sono normali a questa l'immagine e delle linee c_1, c_2, c_3, ... partenti da p, quindi il punto corrispondente P della sfera e le linee corrispondenti C_1, C_2, C_3, ... uscenti da P, se sopra queste s'immaginano dei punti M_1, M_2, M_3, ..., i triangoli PM_1M_2, PM_2M_3, ... e i loro corrispondenti pm_1m_2, pm_2m_3, ..., saranno equiangoli, i primi però a lati sempre curvilinei e i secondi rettilinei, mistilinei o curvilinei; ma quando gli archetti PM_1, PM_2, PM_3, ... siano infinitesimi, si potranno senz'errore apprezzabile considerare come rettilinei tanto gli uni quanto gli altri triangoli e perciò saranno rispettivamente simili: risulta così che il poligono infinitesimo $m_1m_2m_3$..... e il suo corrispondente $M_1M_2M_3$.... sono pure simili e il rapporto $\frac{pm_1}{PM_1}$ di due elementi corrispondenti è indipendente dalla direzione di pm_1.

(Il seguito nel prossimo fascicolo).

ESERCIZI PER LA SCUOLA

GEOMETRIA

Rapporti di angoli. – Angoli adiacenti.
Angoli opposti al vertice.

1. Dati due angoli costruire un terzo angolo eguale alla loro somma.
2. Costruire due angoli tali che il primo sia la metà del secondo.
3. Costruire due angoli tali che il primo sia la terza parte del secondo
4. Un angolo A è la somma di 7 angoli eguali ad M, un altro angolo B è la somma di 15 angoli eguali ad M; qual'è il rapporto dell'angolo A all'angolo B? qual'è il rapporto dell'angolo B all'angolo A?

circonferenza e che le loro proiezioni vr, vq sul quadro s'incontrano nell'immagine v di V' restando normali alla proiezione dre della circonferenza DRE, dunque nel centro della proiezione di quest'ultima circonferenza.

5. Costruire due angoli tali che il primo sia $\frac{5}{6}$ del secondo.

6. Da un punto M d'una retta AB parte una retta MC la quale forma colla AB due angoli uno dei quali è $\frac{8}{9}$ dell'angolo retto; se esso è diviso in tre parti eguali, quante di queste saranno contenute nell'altro angolo?

7. Due angoli che hanno il vertice comune, un lato comune, e il secondo lato dell'uno sul prolungamento del secondo lato dell'altro, sono di tale grandezza che, se il maggiore è diviso in sette parti eguali, il minore contiene tre di quelle parti: trovare il rapporto del maggiore dei due angoli all'angolo retto.

8. Da un punto M della retta MA e dalle due bande di questa partono due rette MB, MC tali che l'angolo AMB è $\frac{5}{12}$ dell'angolo retto, e l'angolo AMC è $\frac{19}{12}$ dell'angolo retto; si domanda se il punto M è interno od esterno al segmento che unisce un punto della MB con un punto della MC?

9. Dal vertice M d'un angolo retto si guida, fuori dell'angolo, una retta MA che forma con uno dei suoi lati un angolo semiretto, ed un'altra retta MB, pure esterna a quell'angolo retto, che forma coll'altro suo lato un angolo semiretto, poi pel punto M si tira una retta qualunque DMD'; quale relazione ha luogo fra i due angoli DMB, AMD'?

10. In un segmento AC è un punto M, da una banda di esso il punto H e dall'altra il punto H', così situati che l'angolo HMC risulta eguale all'angolo AMH'; date le lunghezze HM, HH', trovare la MH'.

11. Nell'interno d'un angolo AMC, eguale ad $\frac{11}{6}$ d'angolo retto, è condotta una retta MB in modo che l'angolo BMA risulta eguale a $\frac{3}{5}$ dell'angolo BMC; se MB' è il prolungamento della MB, esterno all'angolo AMC, si domanda: 1) il rapporto di ciascuno dei due angoli AMB', CMB' all'angolo retto; 2) il rapporto dell'angolo AMB' all'angolo CMB'.

12. Da un punto M d'una retta AB, e da una stessa banda di essa, partono le tre rette MR, MC, MS, così che la MR è dentro l'angolo AMC e la MS dentro l'angolo BMC; se i due angoli AMR, RMC sono eguali fra loro, e se

anche i due angoli CMS, SMB sono fra loro eguali, qual'è il rapporto dell' angolo RMS alla somma dei quattro angoli AMR, RMC, CMS, SMB?

13. Sieno AOC e COB due angoli adiacenti, e la OL divida per metà l'angolo AOC; provare che, se la OH è perpendicolare alla OL, gli angoli HOC, HOB, sono fra loro eguali.

14. Sono disegnati l' uno accanto all'altro, col vertice comune, cinque angoli eguali a $\frac{7}{12}$ d'angolo retto: trovare la misura dell'angolo formato dal secondo lato del quinto angolo col primo lato del primo.

15. Sono disegnati l'uno accanto all'altro col vertice comune, tre angoli, e il primo lato del primo coincide col secondo lato del terzo; se il primo dei tre angoli aumenta o diminuisce, ed il secondo non varia, cosa avviene del terzo?

TEMI PER LAVORI SCOLASTICI (*)

Ad un circolo è circoscritto un triangolo isoscele in cui l'angolo al vertice è di 25°37'; calcolare il rapporto dell'area del triangolo all'area del circolo, ed assegnarne il grado di approssimazione.

1) Dimostrare che si può dare ad x un valore così piccolo che il quoziente

$$\frac{(1 + x)^8 - (1 - x)^8}{x^2}$$

sia maggiore di 1000 000 000.

2) I perimetri delle basi d'un tronco di piramide sono nel rapporto di 3 a 100; calcolare il rapporto del volume del tronco al volume di quel prisma, d'eguale altezza, l'area della cui base è la semisomma delle aree delle basi del tronco.

Nel triangolo ABC sono dati: $b = 3a$, $A = 17^0 42' 35''$; calcolare l'angolo B e il rapporto $\frac{c}{a}$.

(*) Questi temi sono estratti dalla raccolta di quelli proposti per la promozione dalla terza alla quarta classe nell'Istituto tecnico di Roma.

1) Trovare il numero x sapendo che il coefficiente di x^{n-1} nello sviluppo del prodotto

$$(x + a)\,(x + 2a)\,(x + 3a) \ldots (x + na)$$

è eguale a $45a$.

2) Provare che la differenza fra la lunghezza dell'arco di 1° e quella della corda corrispondente è minore di $\frac{1}{2}$ millionesimo del raggio.

Calcolare il rapporto delle aree dei due segmenti nei quali un circolo è diviso dalla corda che sottende l'arco di $103^\circ\ 47'\ 50''$.

Quanti sono i triedri distinti tali che in ciascuno di essi i seni dei tre angoli piani sieno rispettivamente $\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{4}{25}$?

Il triangolo ABC è diviso in due parti equivalenti da una retta HL che unisce un punto H del lato AB ad un punto L del lato AC. Dati $AB = 5$, $BC = 7$, $\text{ang}ABC = 30^\circ 20'$, $AH = 4$, trovare la lunghezza del segmento AL.

Sieno SA, SB, SC tre spigoli contigui d'un parallelepipedo retto rettangolo e sia SM la diagonale passante per S; dati gli angoli MSA, MSB, assegnare le formole pel calcolo dei rapporti $\frac{SA}{SB}, \frac{SC}{SB}$, ed eseguire i calcoli nel caso particolare: $\text{ang}MSA = 35^\circ 27' 13''$, $\text{ang}MSB = 60^\circ$.

Il lato BC del triangolo BAC è diviso in tre segmenti BD, DE, EC in modo che gli angoli BAD, DAE, EAC risultano eguali fra loro. Calcolare i rapporti di quei tre segmenti nel caso di $A = 51^\circ 24'$, $B = 30^\circ$.

Un tronco di cono, nel quale il rapporto del raggio della base minore al raggio della base maggiore è eguale ad m, viene diviso in due parti equivalenti con un piano parallelo alle basi: esprimere in funzione di m il rapporto della distanza di quel piano dalla base minore all'altezza del tronco, e calcolare questo rapporto per $m = \frac{3}{5}$.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Dott. Vittorio Murer. — *Primi elementi di Geometria proiettiva e descrittiva* ad uso degli istituti tecnici del Regno — pag.e 100 con 8 tavole litogra.e — G. B. Paravia e C.° — L. 3, 50.

Il libro che abbiamo dinanzi è notevole sotto punti di vista molteplici. È notevole per l'ordine logico secondo cui succedonsi le diverse teorie e proposizioni, per la scelta degli argomenti, per la forma fluida ed efficace, e per un certo sapore di originalità nella trattazione di cose che da tempo entrano nel dominio delle geometriche discipline. Al lettore inesperto potrà forse, sul momento, riuscirne arida la lettura anzichè nò, ma avrà presto ragione di persuadersi che si tratta di una impressione fugace. Il libro stesso è diviso in due parti, la prima riguarda la geometria proiettiva, l'altra la descrittiva, delle quali soltanto la prima è corredata di esercizi, generalmente molto elementari, succedentesi nell'ordine delle materie del testo. La revisione che segue potrà forse esser trovata soverchiamente minuta, ma tale è stata dettata dal desiderio di far meglio conoscere agli insegnanti un libro che, sotto forme modeste, merita, a giudizio nostro, tutta quanta la loro attenzione.

Nel capitolo I, che serve d'introduzione, l'A. enumera le diverse forme elementari facenti soggetto di studio nella geometria proiettiva e dà ragione della loro classificazione in ordine all'infinità degli elementi che le costituiscono, il che è bene. Mette in rilievo la distinzione fra spazio costituito da punti e piani e spazio costituito da rette, mostrando nel primo caso che l'infinità degli elementi che si considerano è soltanto triplice, mentre è quadruplice nel secondo. I concetti svolti in questo capitolo potranno difficilmante esser compresi a dovere dal principiante, ma conviene pure riconoscere che ai medesimi non crea difficoltà la chiara esposizione dell' A. Nella nota di carattere storico che termina il cap. questi dimentica di citare, fra coloro che hanno contribuito all'incremento della geometria proiettiva, l'italiano *Bellavitis* che a noi pare singolarmente degno di menzione. Brevi note storiche trovansi ancora qua e là nel corso del libro, intese a designare i creatori della nuova geometria e l'origine dei vocaboli nella medesima adoperati.

Nel successivo capitolo trattasi della proiettività e prospettività delle forme fondamentali di 1ª e 2ª specie e dei loro elementi all'infinito. In rapporto a questo capitolo abbiamo da osservare che l'A. avrebbe ben fatto ad illustrare con una figura gli elementi a distanza infinita per due sistemi piani prospettivi, nel modo istesso ch'egli fa per due punteggiate prospettive, nell'intento di chiarire maggiormente il soggetto.

Nel cap. III. l'A., al fine di ottenere semplicità, comincia a definire come rapporto anarmonico di quattro raggi di un fascio, il rapporto semplice dei tre punti d'intersezione di una parallela al quarto raggio, coi primi tre, considerando anche il caso del rapporto armonico. Dimostra quindi che per le medesime quattro rette del fascio, tale rapporto è indipendente dalla posizione della parallela, perciò costante. Costruisce in seguito il raggio che forma con altri tre dati un rapporto anarmonico assegnato, poi, dopo aver provato che proiettando quattro punti d'una punteggiata da un centro qualsiasi si ha un fascio di quattro raggi il cui rapporto anarmonico è costante, dà la seguente definizione: « si dirà rapporto anarmonico di quattro punti di una punteggiata, presi in un ordine determinato, il rapporto anarmonico costante dei quattro raggi (preso nello stesso ordine dei rispettivi punti) che li proiettano da un punto qualunque. » L'A. a proposito di questa sua definizione ha creduto bene dimostrare in una nota, che essa accorda con quella degli ordinari trattatisti ed ha bene operato. Salvo che il suo ragionamento sarebbesi potuto semplificare se dopo aver scelto i quattro punti A, B, C, D, quindi immaginato il fascio (a, b, c, d) che li proietta da un centro qualunque S, avesse condotto non da B, ma da C una parallela al quarto raggio d. Ciò gli avrebbe risparmiato due scambi di elementi che nuocono non all'esattezza ma alla chiarezza della dimostrazione.

Per rapporto anarmonico di quattro piani d'un fascio egli prende analogamente quello dei quattro raggi secondo cui sono segati da un piano, oppur quello dei quattro punti in cui sono segati da una retta qualunque, e ciò dopo aver dimostrato la costanza del primo rapporto e quindi anche del secondo. L'A. giunge così al principio fondamentale della geometria proiettiva, cioè che « il rapporto anarmonico non varia con proiezioni e sezioni » da cui segue che « in due forme di 1ª specie proiettive, quattro elementi corrispondenti hanno lo stesso rapporto anarmonico e la proiettività fra due forme fondamentali è individuata da tre coppie di elementi corrispondenti ».

Nei nᵢ seguenti, di questo capitolo, l'A. dà la costruzione con cui passare da un elemento di una forma fond. al suo corrispondente di un altra forma, dopochè sonosi fatti corrispondere tre elementi dell'una a tre elementi a piacere dell'altra e ne ricava le debite conseguenze. Finalmente considera il caso in cui taluni di questi elementi sono uniti, essendo così ridotto alla considerazione delle punteggiate, dei fasci di raggi e dei fasci di piani prospettivi.

Il cap. IV è riserbato all'esposizione della legge di dualità con accompagnamento di proposizioni correlative. Vi sono esaminati i soliti teoremi sul triangolo e sul quadrangolo completo. Abbiamo osservato che gli esercizi relativi a questo capitolo sono particolarmente elementari.

Il cap. V verte sulle forme armoniche. Esaminando la costruzione del quarto raggio di un fascio dopo tre raggi dati in un ordine determinato, nel caso particolare che il rapporto anarmonico dei quattro raggi debba essere uguale a 2, ossia, quando questi formano un fascio armonico, secondo la definizione data precedentemente, l'A. giunge a concludere che « scambiando in un fascio armonico di raggi due elementi coniugati, oppur anche le due coppie di elementi coniugati, si ottiene ancora una forma armonica ». Egli insegna appresso a costruire il quarto armonico dopo tre elementi dati col sussidio della sola riga, fondandosi sopra due note proprietà del quadrangolo e quadrilatero completo quivi dimostrate. Nota le proprietà delle bisettrici di un angolo e del suo adiacente, espone alcune relazioni metriche fra gli elementi d'una punteggiata armonica, finalmente in base a queste chiude il capitolo dimostrando che « tutti i cerchi del piano passanti per due punti A e C sono tagliati ad angolo retto dal cerchio per il quale gli estremi del diametro sono i punti B e D che dividono armonicamente il segmento AC » e la proposizione reciproca.

Nel cap. VI, l'A. comincia col mostrare che se in due forme riferite proiettivamente un elemento percorre con continuità la prima di esse, altrettanto avviene dell' elemento corrispondente per la seconda, da cui segue che trattandosi di due fasci (da supporsi nello stesso piano, ciò che è dimenticato dall'A.), i punti d'intersezione degli elementi corrispondenti si succedono con continuità. L'A. dimostra quindi che i fasci non essendo prospettivi la linea luogo dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti è una curva segata da qualunque retta in due punti al più, ossia una curva di 2° ordine o conica. In seguito egli prova che « per cinque punti presi ad arbitrio si può sempre far passare una conica; la quale per altro è da essi individuata », nota che fra le coniche è compreso il cerchio e dimostra che « segando con un piano un cono qualunque avente per base un cerchio, si ha una conica », quindi passa a distinguere una conica in iperbole, parabola od ellisse, secondochè essa sega la retta all' infinito del piano o in due punti o in uno solo o in nessuno, o in un sistema di due rette intersecantisi. Viene appresso la definizione di serie rigata e quadrica gobba e l'esposizione dei due sistemi di generazione di una quadrica gobba. L'A. esaminando la sezione d'una quadrica con un piano osserva che: « Un piano qualunque sega la quadrica gobba in una conica. Una retta la sega in due punti al più; se la sega in tre, la sega in infiniti, e giace per intero sulla superficie ». Il capitolo termina con qualche particolarità sui piani tangenti ad una quadrica.

Forse avrebbe ben fatto l'A. a toccare più di volo le serie rigate, estendendosi maggiormente sulle curve di 2° ordine, considerandole cioè come l'inviluppo delle congiungenti i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive nello stesso piano. È vero ch'egli in una nota ha sentito il bisogno di aggiungere qualche cenno intorno a ciò, ma sarebbe stato giovevole farlo nel testo e con ampiezza maggiore. Inoltre pare a noi che l'A. avrebbe bene operato insegnando a costruire la conica di cui son dati cinque punti, col mezzo della sola riga, facendo osservare che le punteggiate determinate sopra due rette u, u_1 passanti per uno qualunque dei punti sezione di due raggi corrispondenti dei fasci generatori S, S_1, sono prospettive. Si tratta invero d'una costruzione di grande utilità pratica. In complesso era desiderabile una maggiore estensione sulle coniche, nè vi ripara quel poco che sulle medesime si ritrova nel capitolo che tratta dell' omologia.

Nel cap. VII, ultimo della prima parte, l'A. tratta delle forme fondamentali in involuzione. Prima di dare la definizione delle forme involutorie, egli premette come lemma la proposizione: « Se A, B, C, D sono quattro elementi di una forma fond., la forma ABCD è proiettiva a CDAB », in seguito alla quale risulta che « se in due forme fond. proiettive (sovrapposte) due coppie di elementi si corrispondono in doppio modo, lo stesso avverrà per due altre coppie qualunque », dopo di che viene la definizione: « due forme proiettive si diranno in involuzione se tutte le coppie di elementi corrispondenti si corrispondono in doppio modo ». Dimostra in seguito che « due coppie di elementi corrispondenti individuano un involuzione » e che « gli elementi doppi d' una involuzione sono separati armonicamente da una coppia di elementi coniugati » e distingue le involuzioni in quelle dotate di due elementi doppi e in quelle che ne son prive. Esaminando il caso delle punteggiate costruisce queste involuzioni mostrando per quale particolarità quelle d'una specie si contraddistinguono da quelle dell'altra specie. Il problema di cui è parola gli fornisce poi il mezzo di dare le proprietà involutorie dei fasci di cerchi e occasione di distinguere le due sorta di involuzioni in positive e negative.

Prima di passar oltre osserveremo che un capitolo, conforme ai precedenti, sui poli e sulle polari, sarebbe venuto a nostro giudizio molto opportuno.

Ed ora siamo alla seconda parte del libro.

Nel cap. I, definita l'omologia piana, l'A. insegna a costruire gli elementi corrispondenti di essa, dato l' asse e il centro d'omologia e una coppia di punti corrispondenti; esamina poi, nel n° 86, il caso in cui ad un punto del piano considerato come appartenente ai due sistemi corrisponda il medesimo punto, ossia il caso dell' involuzione, secondo la definizione già da noi riportata; salvo che la sua esposizione alla fine di questo n° è piuttosto oscura e manchevole, e difatti, detti A_1, A_2 due punti corrispondenti nei due sistemi σ_1, σ_2 ed M_2 quel punto che corrisponde ad M_1, tanto lo si consideri come appartenente a σ_1, quanto a σ_2, egli osserva che in forza di ciò le rette M_2A_1 e M_1A_2 debbono incontrarsi sull'asse s d'omologia e perciò si forma necessariamente un quadrilatero nel quale due coppie di lati opposti concorrono in A_1 e A_2 e quindi le due diagonali intersecano la $A_1A_2 = u$ in due punti o ed us che sulla u separano armonicamente A_1A_2. L'A. costruisce in seguito le rette limiti mostrando come siano parallele all'asse s e tali che la distanza di una dall'asse è uguale a quella dell'altra dal centro d'omologia. Dimostra quindi che « due curve omologiche sono dello stesso ordine » e che « la figura omologica d'un cerchio (o d'una conica) è una conica e precisamente un'ellisse, un'iperbole od una parabola a seconda che il cerchio sia esterno, tangente o segante la retta limite del sistema a cui questo si considera appartenente ». È invero da osservare che questi ultimi argomenti sono toccati assai di volo e non sarebbe stato inopportuno che l'A. vi si fosse fermato maggiormente, insegnando anche a costruire la figura omologica ad un cerchio nei singoli casi, porgendo occasione agli alunni di fare un'interessante applicazione grafica dell'omologia.

Dall'omologia piana passa poi l'A. al caso importante dell'affinità, giungendo a dimostrare il teo: generale: « In due sistemi affini le aree di poligoni corrispondenti hanno un rapporto costante, eguale poi al rapporto delle distanze che due punti corrispondenti hanno dall'asse d'affinità », considerandone due corollari; di poi al caso dell'omotetia (trattata assai brevemente); finalmente termina il cap. facendo osservare come, sotto uno speciale punto di vista, possa la geometria elementare considerarsi come un caso speciale della geometria proiettiva, e precisamente della geometria dei sistemi piani.

Nel cap. II l'A., esposto lo scopo che si propone la geometria descrittiva, passa a mostrare come dato nello spazio un punto, una retta o un piano, per determinarne la posizione basta riferirli opportunamente a tre piani fissi nello spazio, comunque inclinati, quindi esamina il caso particolare delle proiezioni ortogonali e le più elementari proprietà a cui vanno soggette la icnografia e ortografia del punto, della retta e del piano, e nel capitolo seguente risolve i più semplici problemi sulle rette e sui piani, non escluso quello di « costruire la perpendicolare comune a due rette date », attenendosi al metodo di *Monge*. Osserveremo qui, quantunque si tratti di cosa di piccol momento, che la convenzione fatta dall' A. di rappresentare a tratti le linee che sono nella parte del piano non ordinaria (posteriore dell'orizzontale, inferiore del verticale) e a punti le rette proiettanti e le altre costruzioni ausiliarie, non è quella generalmente seguita, giacchè d' ordinario si rappresentano, nella geometria descrittiva, con linee continue le parti delle figure date e cercate, visibili per un osservatore posto a distanza infinita dai due piani di proiezione, e a punti quelle invisibili, mentre si segnano a tratti tutte le altre.

Nel cap. IV l'A. introduce con molta opportunità, l'asse d'affinità di un' piano, ossia quella retta le cui proiezioni coincidono, insegnando immediatamente a costruirlo date le traccie del piano. Osserva quindi che l' ortografia e l' icnografia d'un sistema piano sono sistemi affini, secondo la definizione da lui data nella prima parte al n° 91, il cui asse d'affinità è il precedente asse d'affinità del piano in cui il sistema esiste, e con ciò è condotto ad un nuovo metodo per la rappresentazione del piano, metodo che, com'egli giustamente osserva, è molto importante anche dal lato che fa vedere la stretta relazione fra le due geometrie proiettiva e descrittiva. Mostrato quindi come data l'icnografia (o l'ortografia) d'un sistema piano, possa ottenersi l'ortografia (o l'icnografia) l'A. risolve due problemi in cui i piani son dati per mezzo di un punto e dell'asse d'affinità, scegliendoli fra quelli diversamente trattati nel capitolo III, ciò che pone in rilievo, in un caso particolare, dove diversifichino e dove accordino i due metodi dianzi accennati.

Nel cap. V, ultimo del libro, vengono considerati i più semplici ed usuali problemi metrici, risolventisi col ribaltamento sul piano di proiezione, di figure opportunamente scelte; di poi, considerato che qualunque trasporto d' una figura nello spazio riducesi sempre ad una traslazione e ad una rotazione (intorno ad un determinato asse), l'A. risolve, coi metodi della geometria descrittiva ordinaria, il problema di costruire le proiezioni di un punto, d'una retta o d'un piano da posizioni date a quelle in cui pervengono dopo una determinata traslazione o rotazione intorno ad un asse assegnato.

Consideri l'A. se non fosse stato opportuno trattare il problema della rappresentazione di un cono retto e delle corrispondenti sezioni di esso con un piano variamente posto, facendone il ribaltamento sul piano ortografico, ciò che avrebbe fornito un altro mezzo per la costruzione delle curve del 2° ordine.

A. LUGLI.

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALLA DIREZIONE DEL PERIODICO

Bibliotheca mathematica rédigée par *Gustav Eneström*. Stockholm, 1886. N.° 3.

Giornale di Matematiche pubblicato per cura del professore *G. Battaglini*. Volume XXIV, Maggio e Giugno 1886. Napoli, Benedetto Pellerano editore.

Iornal de sciencias mathematicas e astronomicas publicado pelo *D.r F. Gomes Teixeira*. Professor na Escola Polytechnica do Porto. Vol. VII, n. 4. Coimbra, 1886.

Journal de mathématiques élémentaires à l'usage de tous les candidats aux écoles du gouvernement et des aspirants au baccalauréat ès sciences, publié sous la direction de MM. *J. Bourget*, Recteur de l'Academie de Clermont, *de Longchamps*, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, *Lucien Lévy* Directeur des études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. 2e série. Dixième année. N. 7, 8 e 9. Paris, 1886.

Journal de Mathématiques élémentaires publié par *H. Vuibert*. 10e Année. N. 18, 19. Paris, M. Nony, 17. Rue des Écoles.

Mathesis recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par *P. Mansion* Professeur à l'Université de Gand, et *J. Neuberg* Professeur à l'Université de Liège. Tome sixième. Mai et Juin 1886.

Rivista scientifico-industriale compilata da *Guido Vimercati*. Anno XVIII. N. 13, 14. Firenze, 1886.

CASSANI (P.) — Un teorema generale sulle linee normali degli spazi dispari (1886).

CLIFFORD (G. K.) — Il senso comune nelle scienze esatte. Milano, Dumolard, 1886.

COLASANTI (G.) e MENGARINI (G.) — Il fenomeno spettrale fisiologico. — Roma, 1886.

FRATTINI (E.) — Sui numeri irrazionali. Roma, 1886.

GIULIANI (G.) — Elementi di Algebra. Torino, Loescher, 1887.

DE LONGCHAMPS (G.) — Sur un nouveau cercle remarquable du plan d'un triangle. Paris, 1886.

LORIA (G.) — Remarques sur la Géométrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4e ordre. (1886).

MILLOSEVICH (E.) — Determinazione della latitudine del R. Osservatorio del Collegio romano. Roma, 1886.

RICOTTI (M.) — I primi elementi della Aritmetica. Torino, Loescher, 1886.

... PROIEZIONE STEREOGRAFICA

6. Suppongasi che si debbano rappresentare in proie-
ne stereografica i meridiani e paralleli dell' emisfero che
per centro di simmetria il punto antipodo a quello d'os-
vazione, il quadro passando sempre pel centro della sfera.
ondo che l'occhio è situato in un polo, in un punto del
uatore o in altro punto intermedio, la rappresentazione
ume diversi aspetti e si chiama *polare* od *equatoriale*,
ridiana, *orizzontale*. Il tracciamento della rete dei me-
iani e paralleli può in ogni caso conseguirsi con l'appli-
ione delle costruzioni e dei teoremi precedentemente es-
sti. Nel n.° seguente indicheremo brevemente le opera-
ni grafiche da farsi in ogni caso, daremo le formole che
rimono i raggi dei cerchi immagini di un meridiano di
gitudine λ e d'un parallelo di latitudine α, non che quelle
rimenti alcuni altri importanti elementi.

7. Volendo limitare la rappresentazione a mezza sfera è
iaro che l'immagine sarà circoscritta da un cerchio di rag-
o r uguale a quello della sfera (*cerchio limite* o *contorno*).
esto cerchio sarà ogni volta assunto come cerchio di ri-
ltamento del primo meridiano e come immagine secondo che
ò riescirà opportuno. Nel primo meridiano supporremo poi
tuato il centro della proiezione.

Proiezione polare. — L'occhio trovandosi in un polo le
nmagini dei meridiani saranno rette passanti per la proie-
one c dell'altro polo C, proiezione che cade nel centro del
rchio limite AODC (fig. 3ª). Il primo meridiano avrà poi
er immagine la retta AB, ogni altro meridiano di longitu-
ine λ si otterrà tirando il diametro del cerchio contorno che
rma con AB (nel senso fissato) un angolo uguale a λ. Il
ontorno corrisponderà evidentemente all'equatore.

I paralleli sono rappresentati da cerchi concentrici di
entro c (n.° 4). Supponendo che NS rappresenti la sezione

nel primo meridiano di un parallelo di latitudine $AN = \alpha$, se ne otterrà il raggio cn trovando l'interaezione n del raggio visuale NO con la traccia AB del quadro e si avrà:

$$nc = r \tang \frac{90^\circ - \alpha}{2} \text{ (considerando il } \Delta \text{ rett. } Onc \text{ in cui ang} cOn = \frac{90^0 - \alpha}{2}\text{)}.$$

Proiezione meridiana. – Nel caso di questa proiezione il primo meridiano sarà rappresentato nel quadro dal diametro CO e l'equatore dal diametro AB perpendicolare a questo. Coincidendo i poli con le loro proiezioni in C ed O, la proiezione di ogni altro meridiano di longitudine λ passerà per questi due punti e avrà il centro nella retta xy (fig. 3ª). Per tracciare questa proiezione, basterà costruire l'angolo $HcA = \lambda$, tirare OH che taglia xy in h, quindi descrivere l'arco circolare ChO: per segnare invece il parallelo di latitudine α converrà, preso l'angolo $ZcA = \alpha$, tirare ZB che incontra CO in z, quindi tracciare l'arco circolare ZzZ_1 che ha il centro nel prolungamento di CO, e passa per Z e z. I centri di questi due archi circolari possono poi ottenersi facilmente, per il primo tirando OI perpendicolare ad HJ e prolungandola finchè incontri xy in I (n° 4, corol. II) (OI riesce perpendicolare alla retta tirata per O formante colla tangente in questo punto al cerchio limite un'angolo $= \lambda$) per il secondo conducendo una tangente alla circonferenza limite nel punto Z fino all'incontro z' col prolungamento di CO (giacchè i paralleli tagliando ad angoli retti i meridiani della sfera i due archi AZC, ZzZ_1 dell'immagine sono necessariamente normali). Finalmente gli altri punti j, z_1 in cui le circonferenze degli archi accennati incontrano rispettivamente le xy, CO potranno aversi conducendo OJ, BZ_1.

Dopo ciò si osservi che l'angolo $IOC = \lambda$ e l'angolo $z'cZ = 90^0 - \alpha$, talchè (osservando il ΔIOc rettangolo) sarà: $OI = r.\sec\lambda$ e (osservando il $\Delta cZz'$ rettangolo) $Zz' = r \cot\alpha$. Le distanze dei punti h, I, j; z, z', z_1, dal centro c dell'immagine risultano poi le seguenti:

$hc = r\,\mathrm{tang}\frac{90^0-\lambda}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Ohc \text{ nel quale ang} cOh = \frac{90^0-\lambda}{2}\right)$,

$Ic = r\,\mathrm{tang}\lambda$ (dal Δ rettangolo IOc),

$jc = r\,\mathrm{tang}\,\frac{90^0+\lambda}{2}$ (dal Δ rettangolo jOc in cui ang$jOc = \frac{90^0+\lambda}{2}$,

perchè complemento dell'angcOH),

$zc = r\,\mathrm{tang}\frac{\alpha}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Bcz \text{ in cui ang} zBc = \frac{\alpha}{2}\right)$,

$z'c = r\,\mathrm{cosec}\alpha$ (dal Δ rettangolo $Zz'c$),

$z_1c = r\cot\frac{\alpha}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } Bcz_1 \text{ in cui ang} z_1Bc = 90^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

Proiezione orizzontale. – Il cerchio AOBC (fig. 4ª) rappresentando come al solito il primo meridiano, la retta xy passante pel centro c e perpendicolare al diametro OC, sarà la traccia del quadro nel piano di esso e i due diametri EE′, PP′ perpendicolari l'uno all'altro rappresenteranno le sezioni dell'equatore e del cerchio di 90° di longitudine col primo meridiano. Tirando OP, OP′ OE, OE′ e trovando i punti d'incontro p, p', e, e' di queste rette con xy, si avranno in questi punti le proiezioni sul quadro dei due poli e delle estremità del diametro dell'equatore che giacione nel primo meridiano e le immagini di un altro meridiano qualsiasi verranno naturalmente a passare per p e p'. I cilindri tangenti alla sfera lungo i singoli meridiani hanno le loro generatrici tutte perpendicolari all'asse PP′, laonde tutte le parallele a queste generatrici passanti per O determineranno un piano perpendicolare a questo asse la cui traccia sul quadro si troverà conducendo la OL perpendicolare a PP′ fino ad incontrare xy in L, poi per questo punto descrivendo la TU perpendicolare ad xy: sarà TU il luogo dei centri di tutti i meridiani della sfera (n° 4 corol. II) ed è chiaro che L risulterà il punto medio di pp'. Per tracciare l'immagine d'un meridiano qualunque di longitudine λ, basta ora ricorrere alla proprietà caratteristica della proiezione stereografica (n. 5). Poichè AB è l'immagine nel quadro del primo meridiano, si tiri per p' una retta formante con xy (nel senso assegnato) un angolo $=\lambda$ (che è nello stesso tempo l'angolo formato dal primo meridiano e da quello considerato) e condotta a questa retta una perpendicolare si prolunghi finchè incontri TU, il punto U così ottenuto sarà il centro della circonferenza cercata.

Per avere poi l'immagine dell'equatore basta evidentemente descrivere l'arco che passa pei tre punti O, e, C il cui centro può facilmente trovarsi tirando OM perpendicolare ad EE' fino al suo punto d'intersezione con xy, oppure trovando il punto medio di ee', se e' non cade fuori del foglio del disegno, finalmente per ottenere quella d'un parallelo di latitudine α basterà osservare che prendendo l'angolo $\mathrm{N}c\mathrm{E}=\alpha$, l'intersezione del parallelo considerato col primo meridiano sarà la corda NS perpendicolare a PP' e le immagini di N ed S saranno i due punti n, s in cui le visuali ON, OS incontrano xy. Il centro di questo parallelo può ottenersi tanto dividendo ns per metà, quanto conducendo le tangenti NV', SV' alla circonferenza AOBC e trovando l'immagine v del punto V' di loro intersezione, su xy (n° 4, corol. I).

Chiamando ora φ la latitudine del centro O dei raggi visuali è chiaro che si avrà: $\mathrm{L}c=r\tan\varphi$ (dal Δ rettangolo $\mathrm{OL}c$ in cui ang$c$ OL $=\varphi$). I raggi Up', eM, nv dei tre archi considerati, come pure le distanze dei nove punti p, p', e, e' n, s, M, v, L dal centro del contorno si ottengono poi con la facile analisi riassunta nelle formole seguenti.

$c\mathrm{M}=r\cot\varphi$ (dal Δ rettangolo $\mathrm{O}c\mathrm{M}$ in cui ang $\mathrm{MO}c=90°-\varphi$),

$$ce=r\,\mathrm{tang.}\frac{\varphi}{2}\left(\text{dal }\Delta\text{ rettangolo } cOe \text{ in cui ang}cOe=\frac{1}{2}\,\mathrm{C}c\mathrm{E}=\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$ce'=r\cot\frac{\varphi}{2}\left(\text{dal}\Delta\text{rettangolo } e'Oc \text{ in cui ang}\mathrm{E}'\mathrm{O}c=90°-c\mathrm{OE}=90°-\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$cp'=r\,\mathrm{tant}\frac{90°-\varphi}{2}\left(\text{dal}\Delta\text{rettangolo } p'Oc \text{ in cui ang} p'Oc=\frac{1}{2}\mathrm{P}'c\mathrm{C}=\frac{90°-\varphi}{2}\right),$$

$$Lp' = Lc + cp' = r\left(\tang\varphi + \tang\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right) = r\left\{\frac{2\tang\frac{\varphi}{2}}{1-\tang^2\frac{\varphi}{2}} + \frac{1-\tang\frac{\varphi}{2}}{1+\tang\frac{\varphi}{2}}\right\}$$

$$= r\frac{1+\tang^2\frac{\varphi}{2}}{1-\tang^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{\text{sen}\,(90^\circ-\varphi)} = \frac{r}{\cos\varphi}$$ (*) (dal che risulta che Lp' è l'ipotenusa d'un triangolo rettangolo che ha un cateto $= r$ e l'angolo acuto adiacente $=\varphi$, o nella figura che la $p'O'$ perpendicolare ad OL è $= r$).

$Up' = \dfrac{Lp'}{\text{sen}\lambda} = \dfrac{r}{\cos\varphi\ \text{sen}\lambda}$ (dal Δ rettangolo ULp' in cui ang$p'UL = \lambda$),

$cp = r\tang\dfrac{90^0+\varphi}{2}$ (dal Δ rettangolo pcO in un cui ang$cOp = 90^0 -$
$\frac{1}{2}(90^0-\varphi) = \dfrac{90^0+\varphi}{2}$),

$$cM = \tfrac{1}{2}(ec + ce') = \frac{r}{2}\{\tang\varphi + \cot\varphi\} = r\ \frac{\text{sen}^2\frac{\varphi}{2} + \cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\text{sen}\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{r}{\text{sen}\varphi},$$

(di qui risulta che la retta eH tirata da e perpendicolarmente ad OM è $= r$),

$cn = r\tang\dfrac{\alpha-\varphi}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } nOc \text{ in cui ang} nOc = \dfrac{\alpha-\varphi}{2}\right)$,

$cs = r\cot\dfrac{\alpha+\varphi}{2}\left(\text{dal } \Delta \text{ rettangolo } sOc \text{ in cui ang} sOc = 90^0-\alpha+\dfrac{\alpha-\varphi}{2}\right.$
$\left. = 90^0 - \dfrac{\alpha+\varphi}{2}\right)$,

$$n\nu = \frac{ns}{2} = \frac{cs-cr}{2} = \frac{r}{2}\left\{\cot\frac{\alpha+\varphi}{2} - \tang\frac{\alpha-\varphi}{2}\right\} = \frac{r\cos\alpha}{\text{sen}\alpha + \text{sen}\varphi},$$

(*) Questo valore di Lp' poteva anche trovarsi osservando che: $Lp' = \frac{1}{2}(pc+cp')$.

$$cv = cn + nv = r\tan\text{g}\frac{\alpha-\varphi}{2} + \frac{r}{2}\left\{\cot\frac{\alpha+\varphi}{2} - \tan\text{g}\frac{\alpha-\varphi}{2}\right\} = \frac{r}{2}\left\{\tan\text{g}\frac{\alpha-\varphi}{2} + \cot\frac{\alpha+\varphi}{2}\right\}$$

$$= \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi}.$$

Sarà pure utile nel seguito conoscere gli elementi seguenti:

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}c + cv = r\tan\text{g}\varphi + \frac{r\cos\varphi}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi} = r\frac{1 + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)},$$

$\mathrm{UL} = \dfrac{\mathrm{L}p'}{\tan\text{g}\lambda} = \dfrac{r}{\cos\varphi\,\tan\text{g}\lambda} = \dfrac{r\cos\lambda}{\cos\varphi\,\operatorname{sen}\lambda}$ (dal Δ rettangolo $\mathrm{UL}p'$ in cui ang$p'\mathrm{UL} = \lambda$).

8. Congiungasi il punto m del quadro in cui s'intersecano le immagini del parallelo di latitudine α e del meridiano di longitudine λ coi centri v ed U (fig. 4ª) di queste immagini, è facile convincersi che le due rette mv, mU saranno rispettivamente tangenti all'immagine del meridiano e parallelo considerati e perpendicolari fra loro. Invero poichè i meridiani e i paralleli sulla sfera sono normali l'uno all'altro, saranno pure tali (n. 5) le curve che li rappresentano ed essendo queste delle circonferenze le loro tangenti in m coincideranno coi raggi mv, mU.

Posto ciò ci occuperemo di determinare le distanze $mm_1 = \mathrm{Y}$, $m_1c = \pm\mathrm{X}$ del punto m da $x\gamma$ e da CO (*ordinata* ed *ascissa* del punto), in funzione delle coordinate α, λ di M e di φ, ciò che ci condurrà alle formole generali relative alla proiezione stereografica che gli autori dei trattati sulle *carte geografiche* assegnano ricorrendo a considerazioni di matematica non elementare. Col sussidio di tali formole si renderà poi possibile la determinazione dei punti del quadro o della carta, mediante una rete di rette perpendicolari l'una all'altra.

Essendo il triangolo Umv rettangolo, si avrà:

$$\mathrm{U}v^2 = \mathrm{U}m^2 + mv^2 = \mathrm{U}p'^2 + nv^2$$

$$= \frac{r^2\cos^2\alpha}{(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2} + \frac{r^2}{\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}^2\lambda} = r^2\frac{\cos^2\alpha\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\lambda + (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2}{\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\lambda\,(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\varphi)^2}$$

$$= \frac{r^2\{1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda\}\ \{1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda\}}{\cos^2\varphi\,\text{sen}^2\lambda\,(\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi)^2}$$

Ora, condotta mm_2 perpendicolare a UT, si osservi che i triangoli $m_1m\nu$, mUm_2 essendo simili e rettangoli, si ha:

$$\text{sen}m\text{UL}_1 = \text{sen}m\nu m_1 = \text{sen}(\nu\text{UL}-\nu\text{U}m) = \frac{\nu\text{L}}{\text{U}\nu}\cdot\frac{\text{U}p'}{\text{U}\nu} - \frac{\nu n}{\text{U}\nu}\cdot\frac{\text{UL}}{\text{U}\nu}$$

$$= \frac{1}{\text{U}\nu^2}\left[\frac{r(1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi)}{\cos\varphi(\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi)}\cdot\frac{r}{\cos\varphi\text{sen}\lambda} - \frac{r\cos\alpha}{\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi}\cdot\frac{r\cos\lambda}{\cos\varphi\text{sen}\lambda}\right]$$

$$= \frac{1}{\text{U}\nu^2}\ \frac{r^2\,(1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi-\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda)}{\cos^2\varphi\,\text{sen}\lambda\,(\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi)},$$

quindi sostituendo ad $\text{U}\nu^2$ il valor precedente:

$$\text{sen}m\nu m_1 = \frac{\text{sen}\lambda\,(\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi)}{1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda};$$

talchè sarà:

$$mm_1 = \text{Y} = m\nu\,.\,\text{sen}m\nu m_1 = \frac{r\cos\alpha}{\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi}\cdot\text{sen}m\nu m_1$$

$$= r\,\frac{\cos\alpha\,\text{sen}\lambda}{1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Per determinare l'ascissa basterà osservare che:

$$cm_1 = mm_2 - \text{L}c = -\text{X} = \text{U}p'.\ \text{sen}m\text{UL} - r\text{tang}\varphi =$$

$$\frac{r}{\cos\varphi\ \text{sen}\lambda}\,\text{sen}m\text{UL} - \frac{r\,\text{sen}\varphi\cos\lambda}{\cos\varphi\ \text{sen}\lambda} = \frac{r}{\cos\varphi\ \text{sen}\lambda}\{\text{sen}m\text{UL}-\text{sen}\varphi\text{sen}\lambda\}$$

$$= \frac{r}{\cos\varphi}\cdot\frac{\text{sen}\alpha+\text{sen}\varphi-\text{sen}\varphi\,(1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda)}{1+\text{sen}\alpha\,\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}$$

$$= r\,\frac{\text{sen}\alpha\cos\varphi-\text{sen}\varphi\cos\alpha\cos\lambda}{1+\text{sen}\alpha\text{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Quando dunque la direzione positiva per le ascisse è quella da c verso A per le ordinate da c verso C (com'è nella consuetudine), le formole che servono, nella proiezione *orizzontale*, a determinare i punti del quadro mediante rette parallele ad AB e CO sono:

$$X = r\frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\alpha\cos\lambda - \operatorname{sen}\alpha\cos\varphi}{1 + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda},\quad Y = r\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda}{1+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\cos\lambda}.$$

Le formole analoghe per le due altre proiezioni possono dedursi (senza ricorrere ad una speciale analisi), facendo nelle precedenti $\varphi = 90^0$ e $\varphi = 0^\circ$, e sono: per la proiezione *polare* od od *equatoriale*:

$$X = r\,\frac{\cos\alpha\cos\lambda}{1 + \operatorname{sen}\alpha},\quad Y = r\,\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda}{1 + \operatorname{sen}\alpha};$$

per la proiezione *meridiana*:

$$X = -r\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha\cos\lambda};\quad Y = r\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\lambda}{1+\cos\alpha\cos\lambda} = -X\operatorname{sen}\lambda\cot\alpha.$$

La somma $X^2 + Y^2$ sarà poi in ogni caso il quadrato della distanza del punto m del quadro dal centro di esso.

9. Per completare quanto si riferisce alla parte analitica della proiezione stereografica ci rimane a determinare la diversa dilatazione degli elementi lineari, corrispondenti ad archetti infinitesimi presi sulla sfera, dipendentemente dalla distanza della origine di questi dal centro sferico dell'emisfero rappresentato. A tal uopo si rammenti che già al n° 5 fu osservato come il rapporto di più elementi infinitesimi uscenti da uno stesso punto della sfera ai loro corrispondenti sul quadro, fosse indipendente dalla direzione dei medesimi; determinato perciò il rapporto di due archetti circolari infinitamente piccoli MM', mm' (fig. 2ª) i cui centri cadano nel diametro CO, in H e c, sarà questo nello stesso tempo il rapporto fra ogni archetto uscente da M ed il suo corrispondente. Ponendo ora arc$CM = z$ (distanza *zenitale* del punto M), è chiaro che si avrà arcmm' : arc$MM' = cm : HM$; ma osservando i due triangoli rettangoli cOm, HcM, risulta :

$$cm = r\operatorname{tang}\frac{z}{2},\quad HM = r\operatorname{sen}z,\ \text{quindi :}$$

$$\frac{\operatorname{arc} mm'}{\operatorname{arc} MM'} = \frac{r \tang \frac{z}{2}}{r \operatorname{sen} z} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{z}{2}}.$$

Il rapporto poi fra le aree di due poligoni infinitamente piccoli corrispondenti che circoscrivano i punti m, M, poligoni che, come fu già osservato (n° 5), sono simili, sarà per conseguenza espresso dalla frazione:

$$\frac{1}{4\cos^4 \frac{z}{2}}.$$

Nella proiezione orizzontale la relazione che lega z ad α e λ (coordinate del punto M) ed a φ, può ottenersi considerando (fig. 4ª.) il triangolo sferico P'MC (la cui proiezione nel piano della figura stessa è il triangolo P'mC), in cui l'angolo $CP'M = \lambda$, il lato $MP' = 90° - \alpha$, il lato $P'C = 90° - \varphi$ e il lato $MC = z$, e ricorrendo alla relazione fondamentale della trigonometria sferica che nel nostro caso dà:

$$\cos z = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\varphi + \cos\alpha \cos\varphi \cos\lambda.$$

Vediamo finalmente esaminando la formola $\dfrac{1}{2\cos^2 \frac{z}{2}} = \varepsilon$, quali conseguenze possono ricavarsi riguardo alla deformazione della rappresentazione. Intanto crescendo z, poichè il coseno diminuisce, cresce pure ε ed i valori da esso assunti sono per

$z =$	0°	30°	45°	60°	90°
$\varepsilon =$	0,5	0,5359	0,5858	0,6666	1,

sicchè per le piccolissime figure intorno ai punti del contorno non solo la rappresentazione è simile, ma anche uguale alla figura rappresentata, però altrettanto non accade nel centro in cui le aree dell' immagine sono semplicemente $\frac{1}{4}$ di quello che siano nella realtà. È ovvio poi che scegliendo il quadro non già passante pel centro della sfera, ma pel punto antipodo al centro di visione, la qual posizione del quadro nulla altererebbe di quanto è stato precedentemente esposto, le cose riescirebbero diverse giacchè in tal caso ε assumerebbe il valore $\frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}}$, ed allora intorno al centro le immagini delle figure infinitesime sarebbero uguali a quelle obbiettive, e nei punti del contorno quadruple.

10. La proiezione stereografica è molto usata in geografia per rappresentare i due emisferi in cui la terra è divisa dal meridiano che passa per l'*Isola del Ferro* (nel qual caso è meridiana), così pure per rappresentare gli emisferi delle maggiori masse di terra e d'acqua, e gli emisferi d'illuminazione della terra ai solstizi ed agli equinozî, non che grandi porzioni della superficie terrestre la cui forma sia molto allungata (ed allora è orizzontale). Peraltro queste non sono le sole sue applicazioni.

A. LUGLI.

I POSTULATI E GLI ENTI GEOMETRICI

Di fronte alla cura lodevole colla quale si cerca oggi di porre su solide basi la Geometria, mi sembra che si soglia nei trattati mettere poco in rilievo l'arbitrarietà che regna nella scelta dei postulati, tantochè i giovani facilmente crederanno che senza i postulati che loro s'insegnano non sia possibile la Geometria. Trovo anche che poco s'insiste sulla pura idealità degli enti geometrici, tenendo così la mente dello studioso troppo legata agli enti reali con cui quelli ideali non hanno una *necessaria* relazione.

Nell'enunciare i postulati si suol dire che essi sono verità accertate dall'esperienza, le quali non si possono dimostrare, facendo così una strana confusione fra quanto si osserva nei corpi realmente esistenti, e quanto si vuol supporre negli enti geometrici puramente ideali. Questo difetto va scomparendo nei trattati più moderni: ma anche in questi, per quanto mi sembra, non ci si trattiene abbastanza nè completamente sulle ragioni che guidano la scelta dei postulati e l'introduzione degli enti geometrici.

Giudico perciò non inutili le poche osservazioni seguenti, per mostrare come, a mio credere, dovrebbesi nell'insegnamento insistere sopra quei punti fondamentali interessantissimi.

Una scienza è l'insieme delle verità relative ad una o più cose: ed esse devono essere dimostrate, cioè dedotte logicamente da altre verità delle quali in un modo qualunque siamo già convinti. È quindi necessario partire in ogni scienza da alcune verità che in essa non si possono dimostrare, ma che o sono vere per necessità logica (assiomi), o si devono assumere come primitive.

Se di queste ultime verità prendiamo le *n* indipendenti fra loro, esse formano una categoria a parte di verità che non sono teoremi nè assiomi e che si dicono *postulati*.

Non essendo esse logicamente necessarie (poichè se ne sono esclusi gli assiomi), ne viene che in una scienza la quale, senza nessuno scopo pratico, si occupi di dedurre logicamente delle verità relative a certe cose, la loro ammissione è perfettamente arbitraria e si fa solo per una specie di convenzione. Soltanto, queste verità devono essere logicamente possibili, cioè non contradittorie agli assiomi o fra loro; stabilite che siano, potremo coi ragionamenti trarne delle conclusioni, che saranno, a rigore di logica, giuste e costituiranno col loro insieme una scienza esatta. Se la scienza in questione ha per oggetto degli enti ideali, essa sarà assolutamente giusta: se ha per oggetto degli enti veri e reali, sarà sempre logicamente giusta, ma sarà *praticamente* esatta o no, secondochè i postulati ammessi siano o no conformi a ciò che l'osservazione ci mostra avvenire in quegli enti. Così p: es: si può fare una scienza partendo tanto dall'uno che dall'altro dei postulati « I corpi sono pesanti » o « I corpi non sono pesanti »: ambedue potranno dirsi esatte, e, come scienze astratte, sono ambedue vere: la prima sarà vera anche praticamente, la seconda no.

La scelta dei postulati si vede quindi che dipende dall'arbitrio: solo, nelle scienze che hanno per oggetto enti della realtà, la scelta di essi deve essere fatta conforme a ciò che dice l'esperienza: e nelle scienze che hanno per oggetto enti ideali può talora esser conveniente che quella scelta sia fatta in modo da corrispondere a certi fatti che realmente accadono, quando gli enti ideali abbiano qualche riscontro con quelli reali, e il loro studio voglia farsi servire come ausiliario dello studio di questi.

I postulati di una scienza devono essere scelti in modo da essere indipendenti e non contradittori. Se, stabiliti che siano in modo da sembrarci che sodisfino a queste condizioni, si giungesse in seguito a provare che qualcuno di essi è conseguenza logica degli altri, esso deve essere tolto dalla categoria dei postulati e posto in quella dei teoremi: il conservarlo fra i postulati sarebbe non già inutile ma bensì erroneo, apparendo esso verità arbitraria mentre è verità necessaria. Se invece si provasse che uno contraddice ai rimanenti, quel postulato dovrebbe essere soppresso, e con esso tutti i teoremi che sono sua conseguenza.

La scelta dei postulati deve quindi esser fatta con somma cura, e limitandosi al minor numero possibile. Nelle scienze che, come la Geometria, mirano a scopo pratico, il numero dei postulati strettamente necessari è dato da quelli che bastano a rendere più che sia possibile simili le conclusioni di esse a quelle della pratica. Ciò mostra che se, teoricamente parlando, il numero dei postulati è arbitrario, praticamente non lo è; e neanche è assegnabile con precisione quale ne sia il numero più opportuno.

I postulati hanno talora dei punti di somiglianza colle definizioni, ma non sono da confondersi mai con queste; giacchè queste assegnano un nome ad enti o a proprietà che per dimostrazione si sanno esistenti, e quelli o introducono enti non potuti riconoscere esistenti per dimostrazione, o assegnano a certi enti delle proprietà impossibili (fino a quel punto) ad essere dimostrate.

Limitiamoci ora a quanto riguarda l'estensione, intendendo con questa parola la proprietà che hanno i corpi di occupare uno spazio. La Geometria è la scienza che studia l'estensione, o meglio quella proprietà ideale, che, per le considerazioni che seguono, si sostituisce all'estensione.

Osserviamo che i corpi sono enti realmente esistenti, e ad essi dovrebbe rivolgersi lo studio della scienza dell'estensione. Ma i corpi tali quali sono non possono essere l'oggetto di questa scienza di ragionamento, per la incompleta determinazione di ciò che influisce sulla loro estensione. Sono infatti per noi incerti i loro limiti a causa delle nostre non esatte cognizioni sulla costituzione dei corpi e dell'imperfezione dei nostri sensi e dei nostri mezzi di osservazione, i quali non ci permettono di stabilirli esattamente (Hoüel). Il perfezionarsi dei mezzi di osservazione porta a scoprire sempre nuove accidentalità in questi limiti, rendendo quindi sempre variabile l'oggetto dei nostri studi.

I corpi tali quali sono non possono perciò essere gli enti di una scienza di ragionamento che ne studi l'estensione: la Geometria non può studiare oggetti reali. Dovrà quindi crearsi degli enti ideali; soltanto, poichè la proprietà che deve studiare in essi ha da servire allo studio dell'estensione, che è una proprietà dei corpi reali, è conveniente scegliere questi enti colla massima analogia con quelli reali, perchè anche in essi, dal modo con cui si sono introdotti, si possa riconoscere una proprietà simile a quella detta per i corpi *estensione*, e che seguiteremo a chiamare con tal nome anche per i nuovi enti ideali.

Dovremo quindi, disponendo di quell'arbitrarietà accennata in generale, incominciare coll'ammettere un ente che rappresenti quello della realtà che diciamo spazio: e le proprietà arbitrarie che gli attribuiremo (postulati) le sceglieremo in modo da rendere più esattamente che sia possibile immagine di quelle che, dentro i limiti della nostra osservazione, si riscontrano nell'ente reale corrispondente. E osservando lo spazio reale, almeno sin dove giungono le nostre misure ed esperienze, e notando che quella porzione di esso che è inaccessibile ai nostri strumenti ed all'osservazione diretta non sappiamo non considerarlo come dotato delle stesse proprietà di quella porzione che ci è accessibile, ne risulta che sarà da ammettersi in Geometria un ente mediante il seguente:

Postulato 1.° « Esiste un ente (ideale) geometrico che si » concepisce senza interruzioni, illimitato, immobile, costi- » tuito dappertutto ugualmente. Esso si dirà *spazio* ».

Potremmo non ammettere questo spazio, od ammetterlo con altre proprietà e fare un'altra Geometria; ma se si vuole una scienza con cui si possano studiare le proprietà che si riscontrano per i corpi entro il campo delle nostre osservazioni, deve introdursi lo spazio con tutte le condizioni enunciate nel postulato precedente.

Questo solo ente non basta per la geometria, la quale deve studiare le relazioni di esso con altri enti che richiamino quelli dalla cui considerazione sorge in pratica l'idea dello spazio reale.

I corpi reali occupano tutti uno spazio (reale) il quale per certi corpi (che si dicono solidi) è, o approssimativamente si ritiene, invariabile: quindi l'opportunità di enti ideali che godano di una proprietà simile: essi si introducono effettivamente col nome di solidi, dicendo: *Solido* è una porzione qualunque di spazio considerata come staccata dal rimanente spazio. — Il concetto di solido fa sorgere naturale l'idea di un altro ente (che, come il solido, s'introduce e si definisce per nostro arbitrio) il quale corrisponda a certi corpi che in pratica godono proprietà speciali (p. es. i fogli di carta sottilissimi, i veli liquidi, gli strati di tinta che ricuoprono i corpi, ecc.): lo diremo *superficie* e lo introdurremo come quel limite che separa un corpo dal rimanente spazio. Queste superficie le riterremo decomponibili in parti; a ciascuna di queste parti daremo ancora il nome di superficie, e fra esse alcune potranno concepirsi come limite di qualche solido, altre no. — Proseguendo in questa introduzione arbitraria si definisce la *linea* (al cui concetto siamo condotti dall'osservazione di corpi speciali, p. es. fili molto sottili, raggi di luce, spigoli di oggetti, in generale oggetti di lunghezza molto grande in confronto alla larghezza ed altezza), come un ente limite di quelle superficie che non si ritengono come limiti completi di solidi; riterremo essa pure decomponibile in parti, ed a ciascuna parte daremo ancora il nome di linea. Di queste parti alcune potranno essere limiti di superficie, altre no. Finalmente si definisce il *punto* (corrispondente agli enti piccolissimi della realtà) come uno degli enti limiti di una linea la quale non si ritenga come limite completo possibile di nessuna superficie. Il punto si ritiene indecomponibile in parti (*).

(*) La definizione che suol darsi talora della superficie come limite fra due parti consecutive di un solido e della linea come limite fra due parti consecutive di una superficie, non mi sembra opportuna. Astrattamente parlando, simili definizioni, introdotte con postulato, sono perfettamente legittime, non

Tutti questi enti sono ideali; la loro introduzione, sempre arbitraria, è spiegata dalla somiglianza che essi hanno con certi corpi reali considerati in relazione collo spazio reale. Lo studio di questi enti non sarà quindi lo studio dei corpi della natura; ma questo potrà, con approssimazione sempre sufficiente in pratica, ricondursi a quello.

L'introduzione di questi enti essendo, come si è già notato, arbitraria (*), la loro esistenza è una di quelle verità che siamo liberi di ammettere o no: e quindi deve essere enunciata mediante postulato, il che ordinariamente non si suol fare. Dovremo quindi dire che

Postulato 2.° « Esistono parti dello spazio (quello spazio
» che si è ammesso col postulato 1.°) che si dicono *solidi*.

» Esistono enti limiti dei solidi e le parti di questi enti.
» Gli uni e le altre non sono solidi e si dicono *superficie*.

» Esistono limiti di quelle superficie che non si conce-
» piscono come limiti completi di solidi, e le loro parti. Gli
» uni e le altre non sono solidi nè superficie, e si dicono
» *linee*.

» Esistono limiti di quelle linee che non si concepiscono
» come limiti completi di superficie, e non hanno parti. Essi
» non sono nè solidi, nè superficie, nè linee e si dicono
» *punti*.

» In ogni solido esistono infinite superficie, in ogni su-
» perficie infinite linee, in ogni linea infiniti punti.

» Enti che non siano nè spazio, nè solidi, nè superficie,

---

essendo, od almeno non sembrando, contraddittorie. Ma seguendo quelle, non ci si uniforma del tutto a ciò che si osserva in pratica; giacchè vi sono nella realtà dei corpi che si possono pur dire consecutivi e che sono separati da enti cui in geometria dovremmo far corrispondere linee o punti, e vi sono superficie materiali separate da punti materiali (es. due oggetti rassomiglianti a cubi aderenti per uno spigolo o per un vertice, due oggetti sottilissimi circolari tangenti, ecc.). Allora per questi enti reali, che invero somigliano a linee ed a punti, avremmo dalla Geometria le proprietà che invece competono a superficie ed a linee. Potremmo evitar ciò definendo un significato speciale da attribuirsi alle parole « superficie e solidi consecutivi » per modo da escludere gli anzidetti casi di eccezione; ma per questo occorre forse ricorrere al concetto di moto e di punto, mentre invece il punto si vuol definire per mezzo delle linee e delle superficie.

(*) Niente infatti mostra la *necessità* che lo spazio, concepito come richiede il postulato 1.° sia da considerarsi divisibile in parti: che il solido (che allora apparisce ente non necessario) sia limitato da un nuovo ente che è la superficie, la superficie dalla linea, la linea dai punti. Almeno possiamo dire che sino a questo punto questa necessità non è stata provata, e quindi quelle verità sono sino ad ora tutti postulati.

» nè linee, nè punti, nè insieme qualunque di questi enti
» non esistono in Geometria ». —

La parola « esistono » usata nell'enunciato di questo e del postulato precedente non accenna ad un fatto che per essa venga accertato, ma ad un'esistenza dipendente solamente dalla nostra volontà.

Esprimendo il postulato sotto questa forma, si possono definire i solidi e le superficie consecutivi, dicendo: Due solidi che non hanno comune nessun solido, ma hanno comune una parte delle superficie che li limitano (o, se si vuole, anche una sola linea od un punto di questa) si dicono *consecutivi*; e *consecutive* pure si dicono due superficie che non hanno comune nessuna superficie, ma hannocomune una parte delle linee che le limitano (o, se si vuole, anche solo un punto di questa); e due linee quando, senza avere a comune nessuna linea, hanno a comune una parte dei punti che le limitano.

Per studiare questi enti geometrici ora introdotti si sogliono disegnare delle figure che aiutino la nostra mente a concepirli, richiamando quegli oggetti reali che hanno servito a destare in noi quei puri concetti che sono gli enti ideali. Ma queste figure non sono indispensabili, dovendo il ragionamento esser fondato *solo* sulle proprietà attribuite agli enti ideali mediante i postulati. Per tale ragione le figure possono anzi essere talora nocive, giacchè abituano a contare troppo nel ragionamento sull'aiuto di quegli enti reali e quindi possono condurre talora ad assumere inavvertentemente come note certe verità che a noi sembrano evidenti perchè tali sono negli enti della realtà, e che invece o possono essere dimostrate o, se pensiamo ai soli enti geometrici, debbono essere ammesse come postulati, qualora se ne voglia tener conto. C'è quindi sempre da dubitare che i postulati che si sogliono ammettere nella Geometria non siano tutti quelli necessari, perchè altri forse se ne ammettono tacitamente o sotto forma di assiomi nel riferirsi che facciamo alle figure rappresentative.

Agli enti che si sono fin qui introdotti (a tutti o ad alcuno) possiamo proseguire ad attribuire proprietà speciali ed arbitrarie, purchè, come si notò in generale, siano compatibili fra loro e con quelle già introdotte. Al solito, sia nell'attribuire agli enti già introdotti ulteriori proprietà, sia nello scegliere fra essi degli enti speciali, terremo conto dello scopo pratico della geometria e ci lasceremo guidare dall'analogia coll'esperienza e coll'osservazione.

Intanto in pratica si vede che, in massima, supposti rimossi tutti gli ostacoli, è possibile il movimento dei corpi, e che questi si muovono restando sempre gli stessi (senza deformarsi) o, più esattamente, restando tali da potere ricevere il medesimo nome che loro si attribuiva prima. È quindi naturale che, pur potendo quando si voglia considerare gli enti geometrici privi di una proprietà che somigli a quella del moto, o dotati di essa ma con deformazione, si debba utilmente considerare possibile anche in Geometria una specie di moto simile a quello reale. E, per stare nella massima generalità, dicendo *figura* un insieme qualunque di enti geometrici (all'infuori dello spazio) enunceremo il postulato:

« Ammettiamo possibile che una figura geometrica, re-
» stando quella che è, possa cambiare posizione nello spa-
» zio geometrico, cioè un suo punto possa prendere la po-
» sizione di altri punti dello spazio o, in altre parole,
» che si possa concepire l'essenza di una figura come indi-
» pendente dalla posizione speciale che occupa ogni suo punto.
» Questo cambiamento di posizione si dirà *moto* ».

Questo postulato, che, come già si è notato in casi consimili, non è riconoscimento di un fatto ma ammissione arbitraria di una proprietà, può anche esprimersi così:

« Una figura geometrica può muoversi nello spazio geo-
» metrico ».

Credo inutile ed inesatto l'aggiungere, come si suole ordinariamente, la frase « senza deformazione » che è solo tollerabile in pratica. Perchè se dico che una figura si deforma, ciò vuol dire che perde alcuna delle sue proprietà, onde non è più la figura primitiva; e ciò non è conciliabile coll'idea di moto dato in geometria, che è, come si è detto, la possibilità di cambiamento di posizione di una figura che *rimane la medesima*. Anche in pratica, a rigore, essendo la forma un attributo dei corpi, la parola deformazione equivale a cambiamento di un corpo in un altro, e quindi non dovrebbe essere usata in tali casi; ma restando le stesse tutte le altre proprietà del corpo ed essendo queste deformazioni ordinariamente tali da cambiare il corpo in un altro non troppo dissimile da quello che era prima, se non esatto, è almeno tollerabile il ritenere che il nuovo corpo sia quello di prima, ed è giustificata la frase « muoversi con o senza deformazione ».

Per esprimere fatti simili a quelli che si osservano in realtà è conveniente anche distinguere più specie di moto possibile; onde possiamo come segue enunciare i postulati del moto delle figure:

Postulato 3.° « Ogni figura può muoversi nello spazio.

» Nel moto un ente può giungere ad occupare la posi-
» zione occupata *simultaneamente* da un altro ente o da una
» sua parte (*).

« Il movimento può avvenire 1° senza che nessuno dei
» punti della figura stia fermo, 2.° restando fermo uno dei
» suoi punti, 3.° restando immobile qualche sua linea (spe-
» ciale) ».

» Una figura non può muoversi restando fisso un suo so-
» lido o una sua superficie ».

Da questo postulato discende immediatamente come teorema che:

« Se una figura si muove, quelli fra i suoi enti che pos-
» sono stare immobili devono essere linee o punti ».

Ammessi questi postulati sul moto, è da osservarsi che, per studiare più comodamente le linee e le superficie è utile separare quelle dalle superficie, queste dai solidi che servono a definirle: onde si ammette il postulato, corrispondente del resto a fatti osservati nella realtà:

Postulato 4.° « Una linea può concepirsi come l'insieme
» di tutte le posizioni di un punto che si muove. — Si pos-
» sono concepire *certe* superficie come l'insieme di tutte
» le posizioni di una linea che si muove (restando inalte-
» rata) e *certi* solidi come l'insieme di tutte le posizioni di
» una superficie che si muove (restando inalterata) »,

che si potrebbe sotto forma alquanto più generale enunciare anche così:

(*) Questa proprietà non ha, a dire il vero, riscontro nella pratica, essendo i corpi della realtà impenetrabili; ma non nuoce alle altre analogie della geometria coll'esperienza e serve utilmente nell'uso del mezzo migliore che si ha per riconoscere e definire l'uguaglianza delle figure, cioè la sovrapponibilità.

« Una linea può esser concepita come l'insieme di tutti » i suoi punti; una superficie come l'insieme di una categoria speciale di sue linee; un solido come l'insieme di » una categoria speciale » di sue superficie ».

Con questo postulato, meglio che col solo postulato 2°, si concepisce l'esistenza di superficie o linee infinite.

— I postulati esposti fin quì sono quelli che, sotto questa od altra forma, si sogliono enunciare per gli enti generali della geometria e che, come si vede, riassumono le principali proprietà simili a quelle che si riscontrano nei corpi, avuto riguardo solo alla loro estensione.

Veniamo ora ad introdurre qualche ente speciale. Proseguendo col medesimo metodo, quello cioè di attingere i fondamenti della geometria nell'osservazione e nell'esperienza, ci si presentano subito due categorie importantissime di oggetti reali, aventi per tipo la prima un filo sottilissimo teso, la seconda la superficie (nel senso volgare della parola) delle acque stagnanti. Si vede quindi la convenienza di introdurre degli enti (ideali) che col loro studio servano in pratica allo studio degli enti reali corrispondenti; e di scegliere il primo nella categoria delle linee (dicendolo *retta*) ed il secondo in quella delle superficie (dicendolo *piano*). Ma la loro introduzione effettiva presenta delle difficoltà, per essere essi ordinariamente i primi enti speciali che si studiano nella geometria, nè potendo allora ricondursi ad altri.

Questa introduzione può farsi in due modi: o colla definizione di quegli enti, mediante altri enti già noti, o immediatamente con postulati. Comunemente si usa questo secondo metodo; ma si hanno esempi anche del primo, che è stato usato dal Bolyai. Questi incomincia dall'introdurre la sfera: e, per giungere ad essa, definisce l'uguaglianza di due distanze fra punti, senza definire la linea che li congiunge, fondandosi sul concetto di punti invariabilmente collegati. Allora, se A è un punto fisso, egli dice *sfera* l'insieme di tutti i punti dello spazio ugualmente distanti da A. Poi, prese due sfere con centri differenti fissi e raggi uguali, e fatti variare indefinitamente i loro raggi, considera il luogo geometrico delle linee comuni a queste coppie di sfere, e lo dice piano; e il luogo geometrico dei punti di questo piano che stanno immobili quando il piano si rovescia e lo dice retta;

e dimostra per questi elementi piano e retta tutte le proprietà che per essi siamo soliti assumere come primitive. Questo metodo, anche sviluppato con esattezza, ha il vantaggio di esser fondato sopra un piccolo numero di postulati.

L' altro metodo è ormai consacrato dall' uso, ed ha dal suo lato il vantaggio di essere più intuitivo (mi si permetta l'espressione) introducendo nella Geometria direttamente degli enti, che, per la somiglianza stretta con quelli che abbiamo continuamente in uso, si prestano bene ad una facile concezione, tanto che per lungo tempo le loro proprietà sono state date appena con definizioni o come proprietà evidenti, e si sono spesso perfino sottintese, applicandole in modo tacito, quasi fosse impossibile ammettere il contrario. E in una scienza che sia destinata a scopo pratico questo è vantaggio non trascurabile, tanto più che anche questo secondo metodo è, dal lato teorico, rigorosamente esatto.

Sul modo con cui si applica comunemente questo secondo metodo faremo alcune poche osservazioni.

Alcuni autori cominciano col dire che « la linea più semplice è la linea retta ». Questa frase la credo da bandire, potendosi domandare che cosa voglia dire linea più semplice, a meno che con questa parola non si voglia accennare che essa corrisponde agli oggetti che in pratica si sogliono dire più semplici. Del resto poi, quanto alla definizione, la linea retta è forse in geometria la più complicata. Di più sogliono aggiungere : « Tutti hanno un concetto esatto della retta (De Paolis, Sannia e D'Ovidio, . . .) e delle sue proprietà rivelate continuamente dai sensi e verificate coll' esperienza. Si domanda perciò la concessione delle sue proprietà più ovvie necessarie e sufficienti per individuarla (De Paolis) ». Innanzi tutto, se quelle proprietà fossero necessarie e sufficienti per individuarla, esse costituirebbero (Duhamel, De Paolis stesso) la definizione della retta, mentre la retta con questo metodo non si può definire. E infatti l'*esistenza* di questo ente deve essere ammessa come postulato. E ancora non è esatto il dire che i sensi e l' esperienza ci rivelano continuamente le proprietà della retta, essendo la retta un ente ideale; ma devesi dire che ci rivelano certe proprietà per certi corpi sottilissimi (fili tesi, ecc.) i quali si vogliono studiare in geometria mediante l'analogia che ha con loro l'ente ideale, arbitrario, introdotto col nome di retta. Altrimenti, fra le altre inesattezze, l'introduzione di questo ente apparirebbe come necessaria invece che come volontaria. È pure inesatto il dire che tutti abbiamo un concetto esatto della retta e quindi si sa che cosa essa sia, perchè essa non esiste in realtà: e il voler sufficienti per sapere che cosa essa sia quelle leggiere astrazioni che ci avvezziamo a fare fino da piccoli vedendo gli oggetti che le rassomigliano e raggruppandoli attorno ad un tipo unico che, per dir così, comprende in modo astratto le loro proprietà, è cosa troppo vaga e può forse talora in questo od in casi consimili indurre in errore. In conclusione si viene così a supporre che si sia fatta colla mente un'operazione colla quale i vari oggetti della natura ci hanno condotto a crearci un tipo ideale cui si riportano, e il quale in seguito ci hanno insegnato che si chiama retta; ma allora è meglio riprendere questo processo intellettuale e porlo a base dell'introduzione esatta del coneetto di retta.

Il metodo da seguirsi è quindi quello di esaminare le proprietà caratteristiche degli oggetti per studiare i quali si introduce questo ente *retta*: trasformare queste proprietà nelle corrispondenti proprietà ideali di enti geometrici: scegliere quelle che sono indipendenti e, fino a questo momento, si possono ritenere come non contraditiorie: fra i diversi gruppi possibili di verità indipendenti e compatibili scegliere quello che si crede più opportuno: ed enunciarle come postulati arbitrari di un nuovo ente cui si dà il nome di *retta*.

Stabilito tutto ciò, vediamo se i postutati che si sogliono ammettere sono i più opportuni, e quali sono quelli che si potrebbero loro sostituire.

La proprietà principali dei fili tesi ecc. essendo quella che quando ne sono fissati due punti non si possono muovere più, e che, supposti lunghi convenientemente, si possono appoggiare su due punti qualunque, è opportuno che per il nuovo ente si abbia (ammessa o dimostrata) la proprietà che per due punti passa sempre una retta ed una sola, espressa comunemente dalla proposizione « Una retta è individuata » da due dei suoi punti. »

Questa proprietà si suol porre fra i postulati e vi si suole unire l'altra « Rotando attorno ad un suo punto una » data retta può condursi a passare per un punto qualun-

» que dato. » Ma il primo postulato può modificarsi leggermente nell'altro (Frattini) « Per due punti dati può sempre condursi a passare una *data* retta e non vi passa che » quella » e allora esso, per le applicazioni che se ne fanno, può benissimo tener luogo del 2° postulato « Rotando ecc. »; mentre viceversa questo 2° postulato conduce alla prima parte del primo, giacchè (Faifofer) presa una retta, si fa rotare attorno ad un suo punto, e passare per un punto dato A: poi attorno ad A e si fa passare per un secondo punto dato B: e così si *dimostra* che per due punti passa sempre una data retta. Ne viene che considerando il primo postulato modificato ed il secondo (Rotando ecc.), la prima parte del primo è conseguenza del secondo, ed il secondo del primo; onde o il secondo postulato o la prima parte del primo sono da togliersi dai postulati e porsi fra i teoremi. Del primo postulato resta sempre peraltro la seconda parte. « Per due punti passa una retta sola »; ma non la credo esposta sotto la sua forma migliore, essendo essa una proprietà che fa venire alla mente il pensiero di altre rette prima che ben si sappia che cosa è una di esse, ed essendo necessario appunto quel postulato per sapere che cos'è una di queste rette.

Per evitar questo, potremmo stabilire i postulati della retta come segue.

Si osserva nei corpi reali che, se rotano attorno a due loro punti, stanno fermi in generale altri loro elementi, i quali all'occhio sembrano costituire come una striscia sottilissima del corpo, che lo traversa da parte a parte: che questo succede per quanto sia grande il corpo e siano lontani i punti: che presi due punti qualunque dello spazio possiamo avere od almeno immaginare un corpo che ruoti attorno ad essi, e vediamo quindi o ci immaginiamo la solita striscia sottilissima immobile passante per quei due punti ecc. Tutti questi fatti sono facilissimi ad osservare; e sono quelli che prenderemo per dedurne le corrispondenti proprietà che, come è in nostro arbitrio, attribuiremo all'ente da definire. Ricordando che nel postulato 3° si è ammesso che « una figura può muoversi stando ferme al» cune sue linee » enunceremo così il postulato della retta:

Postulato 5° « Esiste una linea tale che quando fa parte » di una figura la quale si muove stando fermi due dei » punti di quella linea, essa linea è immobile e tutte le

» linee di cui nel postulato 3°, se non coincidono con essa, » ne sono parti (cioè essa sola sta ferma).

» Essa è divisa in due parti consecutive da ogni suo » punto (e quindi, per le definizioni date in conseguenza » del postulato 2°, essa è indefinita e non interrotta).

» Una *data* di tali linee si può condurre a passare per » due punti qualunque dati.

» Tale linea si dirà *retta*. »

Si deduce come corollario che quando una figura ruota attorno a due punti per cui passa una retta stanno fermi solo i punti della retta: e quindi per due punti passa una retta sola; giacchè se ne passassero due a, b, fatto rotare il loro insieme attorno a quei due punti, dovrebbe star ferma, p. es. a ed a sola, mentre starebbe ferma anche b come retta che passa per quei due punti; e quindi viene dimostrata una delle proprietà che si sogliono dare come primitive.

Si ha di più come corollario un'altra proprietà che in alcuni trattati è data come postulato: che cioè per fissare una figura è necessario e sufficiente fissare tre dei suoi punti non situati in linea retta. Poichè fissati tre punti A, B, C non in linea retta, se la figura potesse muoversi, allora, stando fermi A, B, starebbe per il postulato precedente, ferma l'intera retta A B, ed essa sola, e quindi non il punto C, contro l'ipotesi. E viceversa: tre punti non in linea retta sono necessari per fissare una figura, perchè stando fermi anche tutti i punti di una linea retta la figura può muoversi.

Del resto sarebbe facile dimostrare che reciprocamente ammesso come postulato che « per due punti passa una retta » sola », e che « tre punti non in linea retta sono neces- » sari e sufficienti per fissare una figura » viene come conseguenza quello che io ho ammesso come postulato, cioè che « quando una figura si muove stando fermi due dei suoi » punti, sta ferma tutta una linea (retta) passante per quei » punti e quella sola ».

Le altre proprietà che si sogliono ammettere come postulati per la retta e quelle che si hanno pel piano mi sembra che non diano luogo a nessuna osservazione, purchè siano esposte completamente e col rigore che si riscontra nei più recenti trattati.

Pisa, Ottobre 1886. RODOLFO BETTAZZI.

SULLA DIVISIBILITA' DI ALCUNI POLINOMI

1. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque, e sono* n *ed* (m + 1) *due numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1) \quad a^{mn} + a^{(m-1)n} + a^{(m-2)n} + \dots\dots + a^{3n} + a^{2n} + a^{n} + 1$$

rappresenta un numero multiplo di quello rappresentato da quest'altra espressione

$$(2) \quad a^{m} + a^{m-1} + a^{m-2} + \dots\dots + a^{3} + a^{2} + a + 1.$$

Infatti, ogni numero n, primo con $(m + 1)$, si può mettere sotto la forma

$$p(m + 1) + r$$

nella quale p ed r denotino due numeri di cui il primo, che può anche essere nullo, indica il quoziente della divisione $\dfrac{n}{m+1}$, ed il secondo, che è primo con $(m + 1)$, rappresenta il resto di questa stessa divisione ed è perciò minore di $(m + 1)$.

Designando poi con π il prodotto $p(m + 1)$, l'espressione (1) potrà scriversi

$$(1') \quad a^{m\pi} . a^{mr} + a^{(m-1)\pi} . a^{(m-1)r} + a^{(m-2)\pi} . a^{(m-2)r} + \dots\dots$$
$$+ a^{3\pi} . a^{3r} + a^{2\pi} . a^{2r} + a^{\pi} . a^{r} + 1.$$

Ora il teorema « *Se* a *è primo con* b, *e le quantità* a, 2a, 3a, . . . (b – 1)a *si dividono per* b, *i resti saranno tutti differenti* » mostra che dividendosi gli m prodotti

$$mr,\ (m-1)r,\ (m-2)r, \dots,\ 3r,\ 2r,\ r$$

per $(m + 1)$, si devono ottenere m resti tutti fra loro differenti, giacchè in questo caso r designa appunto un numero primo con $(m + 1)$. Laonde dalle m divisioni, testè accennate, deriveranno come resti i seguenti numeri

$$m,\ m-1,\ m-2, \dots\dots,\ 3,\ 2,\ 1;$$

e quindi l'espressione (1') può scriversi in quest'altro modo

$$(1'')\ a^{\pi_1}.a^m+a^{\pi_2}.a^{m-1}+a^{\pi_3}.a^{m-2}+\ldots+a^{\pi_{m-2}}.a^3+a^{\pi_{m-1}}.a^2+a^{\pi_m}.a+1\,;$$

essendosi qui voluti indicare colle lettere π_1, π_2, π_3, ..., π_{m-2}, π_{m-1}, π_m dei multipli differenti di $(m+1)$ facili d'altronde a determinarsi secondo i varii valori particolari che s'intendono attribuire ad m ed n.

Fa d'uopo ancora osservare che, per essere l'espressione (2) eguale ad

$$\frac{a^{m+1}-1}{a-1}$$

si ha che $(a^{m+1}-1)$ è divisibile per tale polinomio e quindi, se indichiamo con S il valore della somma (2) e con b la differenza $(a-1)$, si dovrà avere

$$a^{m+1}=b\mathrm{S}+1.$$

Ma sappiamo eziandio che a^{π_1}, a^{π_2}, a^{π_3}, ..., $a^{\pi_{m-2}}$, $a^{\pi_{m-1}}$, a^{π_m} rappresentano delle potenze di a^{m+1} con esponenti interi e positivi; e d'altra parte un notissimo teorema di aritmetica insegna che quando un numero diviso per un altro dà per resto 1, anche qualsiasi potenza (con esponente intero e positivo) di detto numero, divisa per lo stesso divisore, deve dare per resto 1, dunque, chiamando ordinatamente b_1, b_2, b_3, ..., b_{m-2}, b_{m-1}, b_m i quozienti delle divisioni

$$\frac{a^{\pi_1}}{\mathrm{S}},\ \frac{a^{\pi_2}}{\mathrm{S}},\ \frac{a^{\pi_3}}{\mathrm{S}},\ \ldots\ldots,\ \frac{a^{\pi_{m-2}}}{\mathrm{S}},\ \frac{a^{\pi_{m-1}}}{\mathrm{S}},\ \frac{a^{\pi_m}}{\mathrm{S}},$$

il polinomio (1'') si potrà ancora scrivere così

$$(1''')\ (b_1\mathrm{S}+1)\,a^m+(b_2\mathrm{S}+1)\,a^{m-1}+(b_3\mathrm{S}+1)\,a^{m-2}+\ldots\ldots$$
$$+(b_{m-2}\mathrm{S}+1)\,a^3+(b_{m-1}\mathrm{S}+1)\,a^2+(b_m\mathrm{S}+1)\,a+1.$$

Ricordando per ultimo che S rappresenta il valore dell'espressione (2), s'intenderà assai facilmente che il polinomio (1''') equivale al seguente prodotto

$$(b_1a^m+b_2a^{m-1}+b_3a^{m-2}+\ldots\ldots+b_{m-2}a^3+b_{m-1}a^2+b_ma+1)\,\mathrm{S},$$

e che in conseguenza il polinomio (1) è divisibile per il polinomio (2).

2. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque e sono* 2m *ed* n *numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1)\, a^{(2m-1)n} - a^{(2m-2)n} + a^{(2m-3)n} - \ldots\ldots - a^{(2m-2h)n} + a^{(2m-2h-1)n} - \ldots\ldots$$
$$+ a^{3n} - a^{2n} + a^n - 1$$

rappresenta un numero divisibile per quello rappresentato dall'espressione

$$(2)\, a^{2m-1} - a^{2m-2} + a^{2m-3} - \ldots\ldots + a^{2m-2h-1} - \ldots . + a^3 - a^2 + a - 1.$$

Invero, posto mente che il binomio $a^{2m} - 1$ è uguale al prodotto del polinomio (2) per il binomio $a + 1$ e quindi che

$$a^{2m} = bP + 1,$$

ove P indica il polinomio (2) ed è $b = a + 1$; e posto ancora mente che

$$n = 2mq + r,$$

dove q ed r rappresentano rispettivamente il quoziente ed il resto della divisione $\frac{n}{2m}$, q potendo anche essere nullo, mentre dev'essere r primo con $2m$ e minore di $2m$, con processo analogo a quello tenuto nel dimostrare la proposizione precedente, si trasformerà il polinomio (1) in un altro di questa forma

$$(1''')\quad (*)\ a^{\pi_1}. a^{2m-1} - a^{\pi_2}. a^{2m-2} + a^{\pi_3}. a^{2m-3} - \ldots .$$
$$- a^{\pi_{2h}}. a^{2m-2h} + a^{\pi_{2h+1}}. a^{2m-2h-1} - \ldots\ldots$$
$$+ a^{\pi_{2m-3}}. a^3 - a^{\pi_{2m-2}} a^2 + a^{\pi_{2m-1}}. a - 1,$$

(*) Per intendere che i segni del polinomio (1'') devono essere tali quali sono stati in esso scritti, basta considerare due termini successivi qualunque del polinomio (1), per esempio i due termini $-a^{(2m-2h)n}$, $+a^{(2m-2h-1)n}$ i quali, per essere $n = 2mq + r$, si mutano rispettivamente in questi altri

(3) $\quad -a^{(2m-2h)2mq} \times a^{(2m-2h)r}$, $+a^{(2m-2h-1)2mq} \times a^{(2m-2h-1)r}$

Chiamando ordinatamente q'' ed r'' il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h-1)r}{2m}$, e q', r' il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h)r}{2m}$ si dovrà avere $(2m-2h-1)r = 2mq'' + r''$, $(2m-2h)r = 2mq' + r'$, da cui segue, per essere r primo con $2m$, che r'' è un numero impari, ed r' è un numero pari. Frattanto, se indichiamo con $\pi_{2m-r'}$, $\pi_{2m-r''}$ i multipli di $2m$ dati dalle espressioni $(2m-2h)\,2mq + 2mq'$, $(2m-2h-1)2mq + 2mq''$ i termini (3) si riducono a questi altri $-a^{\pi_{2m-r'}}. a^{r'}, + a^{\pi_{2m-r''}}. a^{r''}$, dei quali si vede che è negativo quello che contiene il secondo fattore a con esponente pari ($r' < 2m$), e positivo l'altro che contiene il secondo fattore a con esponente impari ($r'' < 2m$). Altrettanto si dica degli altri termini del polinomio (1').

in cui π_1, π_2, π_3, ..., π_{2h}, π_{2h+1}, ..., π_{2m-3}, π_{2m-2}, π_{2m-1} rappresentano dei multipli di $2m$; e quindi il polinomio $(1'')$ si potrà scrivere

$$(1''')\ (b_1P+1)\,a^{2m-1}-(b_2P+1)\,a^{2m-2}+(b_3P+1)\,a^{2m-3}-\dots$$
$$-(b_{2h}P+1)\,a^{2m-2h}+(b_{2h+1}P+1)\,a^{2m-2h-1}-,\dots$$
$$+(b_{2m-3}P+1)\,a^3-(b_{2m-2}P+1)\,a^2+(b_{2m-1}P+1)\,a-1;$$

essendo b_1, b_2, b_3, ..., b_{2h}, b_{2h+1}, ..., b_{2m-3}, b_{2m-2}, b_{2m-1} i quozienti incompleti delle divisioni

$$\frac{a^{\pi_1}}{P},\ \frac{a^{\pi_2}}{P},\ \frac{a^{\pi_3}}{P},\dots,\frac{a^{\pi_{2h}}}{P},\ \frac{a^{\pi_{2h+1}}}{P},\dots,\frac{a^{\pi_{2m-2}}}{P},\ \frac{a^{\pi_{2m-1}}}{P}.$$

Il polinomio (1) equivale cioè a questo prodotto

$$P.(b_1a^{2m-1}-b_2a^{2m-2}+b_3a^{2m-3}-\dots-b_{2h}a^{2m-2h}+b_{2h+1}a^{2m-2h-1}-\dots$$
$$+b_{2m-3}\,a^3-b_{2m-2}\,a^2+b_{2m-1}\,a+1),$$

il quale dimostra appunto quanto si è asserito nel teorema [N° 2].

3. Teorema. *Se* a *è un numero intero qualunque e sono* $4m+2$ *ed* n *due numeri primi fra di loro, l'espressione*

$$(1)\ a^{2mn}-a^{(2m-1)n}+a^{(2m-2)n}-\dots+a^{(2m-2h)n}-a^{(2m-2h-1)n}+\dots$$
$$-a^{3n}+a^{2n}-a^n+1$$

rappresenta un numero divisibile per quello rappresentato dall'espressione

$$(2)\ a^{2m}-a^{2m-1}+a^{2m-2}-\dots+a^{2m-2h}-a^{2m-2h-1}+\dots-a^3+a^2-a+1.$$

Infatti, indicando rispettivamente con q ed r il quoziente ed il resto della divisione $\dfrac{n}{4m+2}$, si dovrà avere

$$n = (4m + 2)q + r,$$

r essendo un numero primo con $(4m + 2)$, ossia primo con 2 e con $(2m + 1)$, e q un numero intero ovvero anche zero.

Designati poscia con P_{2m}, P_{2m-1}, P_{2m-2}, ..., P_{2m-2h}, $P_{2m-2h-1}$, ... P_3, P_2, P_1 i prodotti di $(4m + 2)q$ rispettivamente per $2m$, $2m-1$, $2m-2$, ..., $2m-2h$, $2m-2h-1$, ..., 3, 2, 1, il polinomio (1) potrà scriversi

$$(1')\left\{\begin{array}{l} a^{P_{2m}}.a^{2mr} - a^{P_{2m-1}}.a^{(2m-1)r} + a^{P_{2m-2}}.a^{(2m-2)r} - \ldots + a^{P_{2m-2h}}.a^{(2m-2h)r} \\ - a^{P_{2m-2h-1}}.a^{(2m-2h-1)r} + \ldots - a^{P_3}.a^{3r} + a^{P_2}.a^{2r} - a^{P_1}.a^{r} + 1 \end{array}\right\}$$

Giova frattanto osservare che essendo r primo con $2m + 1$, i $2m$ prodotti

$$2mr,\ (2m-1)r,\ (2m-2)r,\ \ldots (2m-2h)r,\ (2m-2h-1)r,\ \ldots,\ 3r,\ 2r,\ r$$

divisi per $2m + 1$ devono dare $2m$ resti differenti, e siccome questi resti non possono essere superiori a $2m$, così essi, scritti per ordine decrescente, sono

$$(3)\quad 2m,\ 2m-1,\ 2m-2, \ldots,\ 2m-2h,\ 2m-2h-1,\ \ldots,\ 3,\ 2,\ 1.$$

Consideriamo ora due termini successivi del polinomio (1′), per esempio

$$(4)\quad + a^{P_{2m-2h}}.\ a^{(2m-2h)r} \quad \text{e} \quad - a^{P_{2m-2h-1}}.\ a^{(2m-2h-1)r};$$

siano rispettivamente q_1 ed r_1 il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h)r}{2m+1}$, e q_2, r_2 il quoziente ed il resto della divisione $\frac{(2m-2h-1)r}{2m+1}$; sarà perciò

$$(2m - 2h)r = (2m + 1)q_1 + r_1;\quad (2m - 2h - 1)r = (2m + 1)q_2 + r_2,$$

e quindi i due termini (4) si muteranno in

$$(5)\quad + a^{P_{2m-2h} + (2m+1)q_1} \times a^{r_1} \quad \text{e} \quad - a^{P_{2m-2h-1} + (2m+1)q_2} \times a^{r_2}.$$

Essendo $(2m - 2h)r$ un numero pari; $(2m - 2h - 1)r$ e $(2m + 1)$

due numeri impari, segue che i numeri q_1 ed r_1 o sono entrambi pari, ovvero entrambi impari; mentre invece uno dei numeri q_2, r_2 è pari e l'altro è impari.

Chiamando q''_1, r''_1 i valori di q_1 ed r_1 quando questi due numeri sono pari, e q'_1, r'_1 i valori di questi stessi numeri q_1, r_1 quando essi sono impari; q''_2, r'_2 i valori di q_2, r_2 quando il primo di questi numeri è pari e l'altro è impari, e q'_2, r''_2 i valori di questi stessi numeri q_2, r_2 quando l'uno è dispari ed il secondo pari, e ponendo

$$\pi''_{2h} = P_{2m-2h} + (2m+1)q''_1, \quad \pi'_{2h} = P_{2m-2h} + (2m+1)q'_1,$$

$$\pi''_{2h-1} = P_{2m-2h-1} + (2m+1)q''_2, \quad \pi'_{2h-1} = P_{2m-2h-} + (2m+1)q'_2$$

avremo che π''_{2h} e π''_{2h-1} rappresentano due multipli di $(4m+2)$, e che π'_{2h}, π'_{2h-1} rappresentano due numeri impari entrambi multipli di $(2m+1)$.

Segue perciò che il primo dei termini (5) è uguale a

$$+\, a^{\pi''_{2h}}.\, a^{r''_1} \quad \text{ovvero a} \quad +\, a^{\pi'_{2h}}.\, a^{r'_1},$$

ed il secondo termine è uguale a

$$-\, a^{\pi''_{2h-1}}.\, a^{r'_2} \quad \text{ovvero a} \quad -\, a^{\pi'_{2h-1}}.a^{r''_2}.$$

Sappiamo poi che $(a^{2m+1}+1)$ è uguale al prodotto del polinomio (2) per il binomio $(a+1)$; scaturisce quindi che a^{2m+1} rappresenta un multiplo del polinomio (2) diminuito tale multiplo di 1; ossia se indichiamo con A il valore del polinomio (2) e con k un numero intero tale che $(k-1)A$ esprima il massimo multiplo di A che sia contenuto in a^{2m+1}, si dovrà avere

$$a^{2m+1} = kA - 1.$$

Sarà perciò a^{4m+2} un multiplo di A aumentato di 1, e per conseguenza qualunque potenza di a^{4m+2} dev'essere eguale ad un multiplo di A aumentato di 1. Mentre invece qualunque potenza impari di a^{2m+1} dev'essere eguale ad un multiplo di A diminuito di 1. Sarà cioè

$$a^{\pi''_{2h}} = \lambda_1 A + 1,\; a^{\pi'_{2h}} = \mu_1 A - 1,\; a^{\pi''_{2h-1}} = \lambda_2 A + 1,\; a^{\pi'_{2h-1}} = \mu_2 A - 1,$$

dove λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 designano numeri interi.

Laonde potremo scrivere

$$(6)\qquad a^{\pi'_{2h}}.a^{r''_1} = \lambda_1 A a^{r''_1} + a^{r''_1}, \qquad a^{\pi'_{2h}}.a^{r'_1} = \mu_1 A a^{r'_1} - a^{r'_1},$$

$$(7)\qquad -a^{\pi''_{2k-1}}.a^{r'_2} = -\lambda_2 A a^{r'_2} - a^{r'_2}, \quad -a^{\pi'_{2k-1}}.a^{r''_2} = -\mu_2 A a^{r''_2} + a^{r''_2}$$

Rammentiamo che r'_1, r'_2 rappresentano due numeri impari della serie (3), e che r''_1, r''_2 rappresentano due numeri pari di questa stessa serie; ricordiamo altresì che i $2m$ prodotti $2mr$, $(2m-1)r, \ldots, 2r$, r divisi per $(2m+1)$ dànno tutti resti differenti, e sarà facile il comprendere che come dai termini (4) si è addivenuti ai secondi membri delle eguaglianze (6) e (7), così con processo perfettamente identico si viene a scomporre ognuno dei primi $2m$ termini del polinomio (1') in due altri di cui uno sarà multiplo di A e l'altro sarà una potenza di a con esponente eguale ad uno dei numeri della serie (3). Tutte queste $2m$ potenze di a avranno esponenti differenti e quelle di esse che sono affette da esponenti pari, vanno prese positivamente, mentre le altre aventi esponenti impari vanno prese negativamente.

In tal modo coi primi $2m$ termini del polinomio (1') si ottiene la somma di due polinomi composti ciascuno di $2m$ termini, di cui i termini dell'uno sono tutti multipli di A ed i termini dell'altro sono gli stessi $2m$ primi termini del polinomio (2) scritti rispettivamente cogli stessi segni che hanno in tale polinomio. Aggiunto quindi alla somma di codesti due polinomi l'ultimo termine del polinomio (1'), avremo che il polinomio (1') si trasforma nella somma di due polinomi dei quali i $2m$ termini dell'uno sono tutti multipli di A, ed il valore dell'altro è appunto A. Dunque il polinomio (1') e per conseguenza ancora il suo equivalente espresso dal simbolo (1) è divisibile per il polinomio espresso dal simbolo (2), il che prova appunto quanto ci eravamo proposti di dimostrare.

4. È noto che se una funzione intera di grado m si annulla per $m+1$ valori della variabile, essa è identicamente nulla. Da ciò segue che se tre funzioni intere d'una stessa variabile, φ, ψ, θ, sono tali che, per ogni valore intero attribuito alla variabile, il valore corrispondente di φ sia eguale al prodotto dei valori corrispondenti di ψ e θ, sarà identicamente $\varphi = \psi\,\theta$. Perciò dai teoremi dimostrati risulteranno i seguenti:

I. *Se gli interi* n *ed* m + 1 *sono primi fra loro il polinomio*

$$x^{mn} + x^{(m-1)n} + x^{(m-2)n} + \ldots + x^{2n} + x^{n} + 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{m} + x^{m-1} + \ldots + x^{2} + x + 1. \qquad ^{*)}$$

II. *Se gli interi* 2m *ed* n *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{(2m-1)n} - x^{(2m-2)n} + x^{(2m-3)n} - \ldots\ldots + x^{3n} - x^{2n} + x^{n} - 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{2m-1} - x^{2m-2} + x^{2m-3} - \ldots + x^{3} - x^{2} + x + 1$$

III. *Se gli interi* 4m + 2 *ed* n *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{2mn} - x^{(2m-1)n} + x^{(2m-2)n} - \ldots - \ldots - x^{3n} + x^{2n} - x^{n} + 1$$

è divisibile pel polinomio

$$x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-2} - \ldots - x^{3} + x^{2} - x + 1.$$

Prof. STEFANO GATTI.

(*) Questo teorema si trova fra gli esercizi proposti nell' Algebra del Bertrand al Cap. XII.