Il Dr. R. Marcolongo, nel Giornale di Battaglini 1887, la dimostra per $n = \frac{1}{m}$ con m intero positivo qualunque. Osserva poi essere

$$\lim . \frac{1^n + 2^n + \ldots . + m^n}{m^{n+1}} = \int_0^1 x^n . dx = \frac{1}{n+1}$$

e dice d'aver così dimostrata quella relazione per n qualunque, escluso $n = -1$, e forse intendeva escludere tutti gli esponenti negativi a principiar da -1 perchè lo stesso integrale ciò rende manifesto, essendo

$$\int_0^1 x^n . dx = \frac{1}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}$$

$$\lim_{x=0} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \infty \text{ per } n < -1.$$

Col presente lavoro resta nuovamente dimostrata elementarmente la relazione, di cui ci occupiamo, per tutti i valori di n maggiori di -1, cioè per tutti i casi in cui sussiste perchè il corollario III appunto è applicabile con questa condizione, essendo

$$\lim . n^{k+1} = \begin{cases} \infty & \text{per } k > -1 \\ 1 & \text{»} \quad k = -1 \\ 0 & \text{»} \quad k < -1 \end{cases}$$

Essendo convergente la serie

$$\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \ldots . .$$

per $k > 1$, si riconosce subito che $\frac{1}{m^{n+1}} \cdot (1^n + 2^n + \ldots . + m^n)$, per $n = -k$ $k > 1$, diviene infinito dell'ordine $k - 1$ relativamente ad m.

Voghera, settembre 1890.

F. Giudice.

ALCUNI TEOREMI SULLE CONICHE

(Continuazione e fine: V. pag. 91).

3. Dopo le considerazioni svolte fin qui siamo ancora autorizzati ad enunciare il teorema seguente: *Condotta una trasversale qualunque* MN *ad una conica data, e tirate quante si vogliono secanti* b, b_1, b_2, ..., *parallele alla tangente in* N, *le quali in-*

contreranno M N *nei punti* S, S_1, S_2, ..., *e congiunto* S_k *coi punti d'incontro della* b_h *con la curva e tirata la congiungente delle due nuove intersezioni della conica con le due rette che così si ottengono, la qual congiungente incontrerà la* b_k *in un punto* O_k, *si ha che tutti i punti* O_k *che così risultano sono in linea retta, e precisamente sulla tangente in* M *alla curva.*

Si può di qui dedurre un modo per costruire, senza ingombrare la figura, la tangente in qualsivoglia punto di una conica, nota la tangente in uno dei punti della medesima. Infatti sia data la retta a tangente in N e vogliasi la tangente in un punto M qualunque. Tiro due secanti qualunque b, c parallele ad a e congiungo A, B, punti d'intersezione di c con la conica, col punto S in cui MN taglia b e si otterranno così due nuovi punti d'intersezione C, D. Conduco poi CD che incontrerà b in un punto O ed OM sarà la cercata tangente. Come si vede, le sole rette che è necessario segnare sono le b, c una volta per sempre.

4. È un'immediata conseguenza del teorema fondamentale quest'altro: *Se due poligoni completi inscritti in una conica sono prospettivi, i punti diagonali omologhi sono in linea retta col centro di prospettiva.*

Questo teorema si potrebbe utilmente applicare alla costruzione di poligoni soggetti a certe condizioni. Si tratti per esempio di dover costruire un pentagono completo, i cui 15 punti diagonali si trovino sulle 15 rette che uniscono un punto dato coi punti diagonali di un pentagono completo dato. Basta costruire la conica determinata dai vertici del pentagono dato; le rette che uniscono questi vertici col punto dato incontrano la conica nei vertici del pentagono domandato. Se si lascia indeterminato il punto col quale devono due a due trovarsi allineati i punti diagonali dei due pentagoni, allora si può assoggettare il pentagono che si vuole costruire ad un'altra condizione, p. es. ad avere due vertici sopra una retta data, punti i quali vengono determinati dalla conica circoscritta al pentagono dato. Se questi due punti sono reali e distinti, allora esistono 20 soluzioni del problema, a seconda della coppia di vertici del pentagono dato a cui si fanno corrispondere i due punti considerati. Se i due punti sono coincidenti, il pentagono cercato si riduce ad un punto, se sono immaginarii non esiste alcuna soluzione reale. Anche nel pentagono dato si potrebbe lasciare qualche indeterminazione, ed allora si potrebbe assoggettare ad altre condizioni il poligono cercato. Come si vede, si potrebbero moltiplicare gli esempi, e non solo per i pentagoni ma anche per qualunque altra specie di poligoni.

Si potrebbero poi avere le costruzioni duali, mediante l'applicazione del teorema duale: *Se due multilateri completi circoscritti ad una conica sono omologici, le rette diagonali omologhe concorrono sull'asse di omologia.*

Un caso particolare del teorema enunciato al principio di questo numero, è: Dati due quadrangoli completi $A\,B\,C\,D$, $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ inscritti in una conica, e tali che le rette $A\,A_1$, $B\,B_1$, $C\,C_1$, $D\,D_1$ concorrano in un punto S, i punti diagonali L, L_1; M, M_1; N, N_1 sono due a due allineati con S. Se poi la conica si scompone per esempio nelle rette $B\,A$, $C\,D$, il teorema stesso si enuncia così: Dato un quadrangolo completo, se si proiettano sopra un lato da un punto S qualunque i due vertici situati sul lato opposto ed i vertici di questo sul primo, si ottiene un nuovo quadrangolo; i due quadrangoli hanno i quattro punti diagonali non comuni posti due a due in due rette passanti per S. Questo teorema si generalizza evidentemente in quest'altro: *Dato un quadrangolo completo, unendone tutti i vertici con un punto dato* S, *e tagliando le congiungenti coi sei lati, si ottengono 12 punti, i quali determinano tre quadrangoli completi tali, che ognuno ha un punto diagonale in comune col dato; quindi abbiamo 9 punti diagonali liberi, i quali sono posti tre a tre sopra tre rette passanti per* S.

Si potrebbero dalle considerazioni fatte dedurre le già note proprietà dei quadrangoli inscritti e di quelli circoscritti ad una conica, ecc. ecc., ma non è opportuno di consumare lo spazio concesso in questo Periodico, per dedurre delle proprietà già conosciute.

Palmi, 18 febbraio 1891.

Prof. Palatini Francesco.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO

NELLA SEZIONE *FISICO-MATEMATICA*

ESTATE 1891, I). — *Si ha un cilindro circolare retto chiuso dalle due parti da due mezze sfere e si sa che in questo solido la superficie esterna è* s, *e che la sezione ottenuta tagliandolo con un piano condotto per l'asse ha per perimetro* 2 p. *Trovare il raggio* r *e l'altezza* h *della parte cilindrica del solido, e discutere i risultati.*

Le equazioni del problema sono evidentemente

$$4\pi r^2 + 2\pi r h = s, \quad 2\pi r + 2h = 2p.$$

Ricavando h dalla seconda e sostituendo il valore ottenuto nella prima, fatte le debite trasformazioni, si giunge all'equazione di 2° grado in r:

$$2\pi(\pi - 2) \cdot r^2 - 2\pi p \cdot r + s = 0,$$

in cui è da osservare che il coefficiente di r^2 è positivo, avendosi $\pi > 2$. Di qui segue

$$r = \frac{\pi p \pm \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s}}{2\pi(\pi - 2)}.$$

Ora perchè r sia reale, conviene che sia $\pi p^2 \geqq 2s(\pi - 2)$, od anche $p^2 \geqq s \,.\, 0{,}72\ldots$, dopo di che si hanno per r due valori positivi, conformi perciò alla natura del quesito, dei quali si vedrà appresso che uno solo è accettabile.

Sostituendo nel valore di h, ricavato dalla seconda delle equazioni fondamentali del problema, il precedente valore di r, si ha

$$h = p - \pi r = \frac{-(4 - \pi)\, p \mp \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s}}{2(\pi - 2)}$$

dei quali due valori quello che si ha prendendo il segno — del radicale è da rifiutare non potendosi supporre negativa l'altezza h, onde resta a scegliere il valore certamente reale di

$$h = \frac{\sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s} - (4 - \pi) \cdot p}{2(\pi - 2)},$$

dietro l'ipotesi che sia $\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \cdot s > (4 - \pi)^2 \cdot p^2$ o $p^2 > \frac{\pi}{4} \cdot s$, equivalente a $p^2 > s \,.\, 0{,}78\ldots$, non essendo il caso di prendere $h = 0$, perchè allora uno degli elementi dati dall'enunciato sarebbe superfluo.

Dopo ciò il raggio r e l'altezza h della parte cilindrica del solido sono dati da

$$r = \frac{\pi p - \sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \,.\, s}}{2\pi(\pi - 2)},$$

$$h = \frac{\sqrt{\pi^2 p^2 - 2\pi(\pi - 2) \,.\, s} - (4 - \pi) \,.\, p}{2(\pi - 2)},$$

con l'unica condizione $p^2 > \frac{\pi}{4} \,.\, s$.

È opportuno osservare che dato p non esiste valor massimo per s e data s non si ha minimo per p.

ESTATE 1891, II). — *Dal vertice* A *di un triangolo* ABC, *i cui lati sono dati, condurre al lato opposto* BC *una retta* AD, *in modo che il quadrato di* AD *sia equivalente al rettangolo dei segmenti* BD, DC *del lato* BC. *Calcolare uno dei segmenti, e discutere i dati e il risultato.*

Soluzione algebrica. — Conducasi da A l'altezza AH relativa al lato BC. Supposto che D sia un punto interno a BC dai due triangoli ABD, ADC, si ha:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \mp 2BD \,.\, DH, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \pm 2DC \,.\, DH.$$

Moltiplicando i due membri della prima uguaglianza per DC, quelli della seconda per BD, poi addizionando segue:

$$\overline{AB}^2 \,.\, DC + \overline{AC}^2 \,.\, BD = \overline{AD}^2(BD + DC) + BD \,.\, DC(BD + DC),$$

$$\overline{AB}^2 \,.\, DC + \overline{AC}^2 \,.\, BD = BC(\overline{AD}^2 + BD \,.\, DC) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

Che se poi fosse D esterno a BC, si avrebbe invece:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \mp 2BD \,.\, DH, \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 \mp 2DC \,.\, DH.$$

Moltiplicando, come dianzi, i due membri della prima uguaglianza per DC e quelli della seconda per BD, poi sottraendo, ricavasi infine:

$$\overline{AB}^2 \,.\, DC - \overline{AC}^2 \,.\, BD = \pm BC(\overline{AD}^2 - BD \,.\, DC) \; (^*) \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

Posto ciò, sia $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e si assuma come incognito il segmento $BD = x$. Dovendo essere, per dato, $\overline{AD}^2 = BD \,.\, DC$, dalla [1] si deduce immediatamente l'equazione di 2° grado

$c^2(a - x) + b^2 x = 2ax(a - x)$ ovvero $2ax^2 + (b^2 - c^2 - 2a^2)x + ac^2 = 0$.

Risolvendo rispetto ad x, si trova, dopo facili trasformazioni

$$x = \frac{2a^2 + c^2 - b^2 \pm \sqrt{[(\sqrt{2} \,.\, a + c)^2 - b^2]\,[(\sqrt{2} \,.\, a - c)^2 - b^2]}}{4a}.$$

Avendosi necessariamente $\sqrt{2} \,.\, a + c > b$, poichè $a + c > b$, perchè x sia reale conviene che sia $\sqrt{2} \,.\, a - c$ numericamente maggiore di b od uguale a b. Quando questa condizione è verificata i valori della x risultano poi positivi:

(*) Le relazioni [1] e [2] esprimono precisamente il teorema di STEWART. — V. BALTZER: *Planimetria*, § 14,22. — BELLACCHI: *Algebra*, vol. I, p. 102. — THIRY: *Applications remarq. du Théorème de Stewart*, p 5 et 6.

Si può osservare che la [2] è deducibile dalla [1] cambiando segno ai segmenti BD o BC.

ed invero in tal caso $(\sqrt{2}\,.\,a - c)^2 \geq b^2$ e quindi $2\,a^2 + c^2 > b^2$: il problema ammette così due soluzioni a cui corrispondono due punti interni a $B\,C$.

Ricorrendo alla relazione [2], questa fornisce l'equazione

$$c^2\,(x \mp a) - b^2\,x = 0 \text{ donde } x = \frac{\pm\,a\,c^2}{c^2 - b^2}.$$

Dei due segni per x è da scegliere il $+$ se $c > b$, il $-$ se $c < b$. Nel 1.° caso D è dalla parte di C, nel 2.° dalla parte di B. Esiste dunque un punto esterno a $B\,C$ ed uno soltanto soddisfacente al problema, a meno che non sia $b = c$.

Osservazione. — Il problema ammette in generale tre soluzioni: due corrispondenti a punti interni di $B\,C$, una ad un punto esterno. Le soluzioni possono ridursi a due, ad una soltanto o a nessuna. Sono due quando $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è in valore assoluto maggiore di b, oppure quando $b \gtrless c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c = 0$, una se $b \lesseqgtr c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è in valore assoluto minore di b, oppure quando $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c = 0$, finalmente nessuna se $b = c$ e $\sqrt{2}\,.\,a - c$ è numericamente inferiore a b.

Soluzione geometrica. — Circoscrivasi un cerchio al triangolo $A\,B\,C$ e da A conducasi una tangente al medesimo ad incontrare $B\,C$ in D, il punto così determinato, esterno a $B\,C$, soddisfa al problema, ed invero si ha evidentemente $\overline{A\,D}^2 = B\,D\,.\,C\,D$. Per trovare poi i punti interni a $B\,C$ che risolvono il quesito, detto O il centro del cerchio $A\,B\,C$ e descritto il cerchio avente per diametro $A\,O$, i punti in cui questo incontra $B\,C$ sono quelli richiesti. È chiaro infatti che il cerchio $A\,O$ è la figura omotetica al cerchio $A\,B\,C$ con centro di similitudine esterna nel punto A e col rapporto di similitudine $1 : 2$, talchè le due corde del cerchio maggiore che passano per A e pei punti d'intersezione rimangono divise da questi punti per metà ed il quadrato dei segmenti che da A vanno a questi punti è equivalente al rettangolo dei segmenti in cui i medesimi dividono ordinatamente $B\,C$.

La tangente per A al cerchio $A\,B\,C$ è parallela a $B\,C$ quando $A\,B = A\,C$. Il problema ha poi due soluzioni, una o nessuna riguardo al cerchio $A\,O$, secondo che questo taglia, è tangente, od esterno a $B\,C$.

A. Lugli.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI PER LA LICENZA LICEALE (*)

1. Inscrivere in un cerchio dato un triangolo di cui son dati un angolo e la lunghezza della bisettrice di quest'angolo.

2. Dimostrare che, affinchè le due equazioni

$$x^3 + px + q = 0, \quad x^3 + p'x + q' = 0$$

(*) La redazione del *Periodico* sarà grata a quei Signori Presidi e Professori di Liceo che vorranno inviarle i temi di matematica proposti per la licenza, per rendere la presente collezione la più completa possibile.

ammettano una radice di comune, è necessario e sufficiente che fra i coefficienti p, q, p', q' abbia luogo la relazione

$$(q - q')^3 = (p - p')^2 (pq' - p'q);$$

e quindi risolvere le seguenti due equazioni

$$x^3 - 19a^2x + 30a^3 = 0, \quad x^3 - 39a^2x + 70a^3 = 0.$$

3. Costruire un triangolo tale che un suo lato e la bisettrice dell'angolo opposto a questo lato siano eguali a due segmenti dati, e che il rapporto degli altri due lati sia eguale a quello di altri due segmenti dati.

4. Si è costruito un tronco di cono circolare retto avente per altezza e per raggi delle sue basi (fra loro parallele) i raggi dei cerchi ex-inscritti corrispondenti rispettivamente all'ipotenusa ed ai due cateti di un triangolo rettangolo. Essendo S l'area di questo triangolo, ed m il rapporto tra il volume del nominato tronco di cono ed il cubo della sua altezza, calcolare i raggi del cerchio inscritto e dei cerchi ex-inscritti al triangolo rettangolo di area S.

Prof. S. Gatti.

5. Se in un triangolo rettangolo si descrivono i due archi che sono tangenti all'ipotenusa e sottendono i cateti, essi archi sono fra loro tangenti e le proiezioni d'un punto qualunque dei medesimi sui tre lati sono vertici d'un altro triangolo rettangolo.

6. La somma dei perimetri d'un quadrato e d'un triangolo equilatero è a m. e la somma dei quadrati degli apotemi dei medesimi è b mq.. Calcolare i lati del quadrato e del triangolo.

7. Costruire un trapezio che abbia l'altezza, le due diagonali e la differenza delle basi eguali, rispettivamente, a quattro segmenti dati.

8. Due sfere dividono il segmento che unisce i loro centri in parti proporzionali ai numeri 6, 9, 11 e la somma delle loro superficie è eguale a quella d'un cerchio che ha raggio di a m.. Calcolare i raggi delle due sfere.

Prof. F. Giudice.

9. Formare una equazione di 2° grado le cui radici siano sestuple di quelle della equazione

$$x^2 - \frac{9}{2}x + 2 = 0.$$

10. In una progressione aritmetica il 12° termine è 40 ed il 22° è 70. Trovare il primo termine, la ragione e la somma dei primi 12 termini.

11. Sia un triangolo equilatero ABC: si divida il lato AB in tre parti eguali AD, DE, EB, il lato BC in tre parti eguali BF, FG, GC, il lato CA pure in tre parti eguali CH, HK, KA, e si tirino DK, HG, FE. Dimostrare che l'esagono $DEFGHK$ è regolare.

12. Sia un triangolo BAC: si divida il lato BC in due parti BD, DC la prima delle quali sia doppia della seconda; si tiri AD e si divida anche AD

in due parti DE, EA la prima delle quali sia doppia della seconda; infine si conduca la retta CE e la parallela ad essa pel punto D e siano F, G i punti in cui queste rette incontrano il lato AB. Dimostrare che dei segmenti BG, GF, FA ciascuno è doppio del seguente.

(*Continua*). Prof. L. Bosi.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un teorema sul triangolo. — Sia $A\,B\,C$ un triangolo qualunque, O il suo ortocentro, A' e B' due punti del suo piano. La perpendicolare ad $O\,B'$ condotta da A', e la perpendicolare condotta da B' ad $O\,A'$ si taglieranno in un punto C' e sarà $A'\,B'\,C'$ un triangolo che avrà lo stesso ortocentro del triangolo $A\,B\,C$.

Come si vede, di questi triangoli ne esistono infiniti, e si deduce molto facilmente che il loro numero deve essere finito, se un vertice è assegnato, e gli altri due devono cadere in due rette date, uno per ciascuna.

Mi propongo, in questo breve lavoro, di determinare quelli di tali triangoli che sono iscritti nel dato triangolo, e di ciascun de' quali un vertice cada nel punto A', piede dell'altezza $A\,A'$.

In tali triangoli il lato $B'\,C'$ risulterà necessariamente perpendicolare ad $A\,A'$, e taglierà $A\,A'$ in un punto H, che io suppongo rispetto ad A' situato dalla banda opposta a quella in cui si trova A.

Pongo

$$H\,B' = x, \quad H\,A' = y, \quad H\,C' = z;$$
$$\text{ang. } B'\,A'\,H = \beta = \text{ang. } O\,C'\,H; \quad \text{ang. } C'\,A'\,H = \gamma = \text{ang. } O\,B'\,H;$$
$$\text{ang. } C\,A\,A' = \alpha, \quad \text{ang. } A'\,A\,B = \alpha'; \quad A\,A' = h, \quad O\,A' = m.$$

Allora si ha:

$$x = y \operatorname{tg} \beta, \quad y + m = z \operatorname{tg} \beta,$$

da cui

$$\frac{x}{y+m} = \frac{y}{z};$$

inoltre

$$x = (y+h) \operatorname{tg} \alpha; \quad z = (y+h) \operatorname{tg} \alpha'.$$

Da queste tre ultime equazioni si deduce:

$$(\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' - 1)\, y^2 + (2\,h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' - m)\, y + h^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = 0.$$

Trasformo questa equazione. Si ha, indicando con R il raggio del cerchio circoscritto al triangolo $A\,B\,C$:

$$O\,A = 2\,R \cos A, \quad O\,A' = m = 2\,R \cos B \cos C, \quad h = 2\,R \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C;$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A'\,C}{h} = \frac{b \cos C}{h}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{c \cos B}{h}, \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' = \frac{b\,c \cos B \cos C}{h^2}.$$

Sostituendo si ottiene:

$$\left(\frac{b\,c\cos B\cos C}{h^2} - 1\right) y^2 + \left(\frac{2\,b\,c\cos B\cos C}{h} - 2\,R\cos B\cos C\right) y +$$
$$b\,c\cos B\cos C = 0.$$

Inoltre

$$b = 2\,R\ \mathrm{sen}\ B, \quad c = 2\,R\ \mathrm{sen}\ C$$
$$\frac{b\,c\cos B\cos C}{h^2} - 1 = \frac{\cos A}{\mathrm{sen}\ B\ \mathrm{sen}\ C}$$
$$\frac{2\,b\,c\cos B\cos C}{h} - 2\,R\cos B\cos C = 2\,R\cos B\cos C.$$

Sostituendo e riducendo risulta

$$\cos A \,.\, y^2 - 2\,R\cos B\cos C\ \mathrm{sen}\,B\ \mathrm{sen}\,C \,.\, y$$
$$- 4\,R^2\ \mathrm{sen}^2 B\ \mathrm{sen}^2 C\cos B\cos C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Questa equazione dà due valori per y, ai quali corrispondono due valori per x e due per z. Così in generale per ogni triangolo $A\,B\,C$ esistono due triangoli iscritti ed iso-ortocentrici col triangolo dato, per ciascun dei quali un vertice cade nel piede A' dell'altezza $A\,A'$. Li dirò *i due triangoli iso-ortocentrici iscritti.*

Cerco in quali casi le due soluzioni ora indicate esistono realmente.

La condizione di realtà delle radici della [1] è:

$$\cos B\cos C\,(\cos B\cos C + 4\cos A) \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

$A = 90°$.

In questo caso il coefficiente di y^2 si annulla; una delle radici diventa infinita, e l'altra si riduce a

$$- 2\,R\ \mathrm{sen}\ B\ \mathrm{sen}\ C = -\,h,$$

cioè i due triangoli iso-ortocentrici iscritti si riducono al triangolo dato e ad un altro triangolo che ha due vertici all'infinito. Così si ha:

Non esiste alcun triangolo iso-ortocentrico con un dato triangolo rettangolo e iscritto in esso, per il quale un vertice cada nel piede dell' altezza relativa all'ipotenusa.

$A < 90°$.

Se B e C sono angoli acuti, la condizione [2] si riduce a

$$\cos B\cos C + 4\cos A \geq 0.$$

Come inequazione essa è sempre soddisfatta, come equazione è impossibile. Si ha così:

Per ogni triangolo acutangolo i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono sempre, e sono distinti. I lati B' C' di questi due triangoli sono sempre da bande opposte rispetto al lato B C.

Quest'ultima proprietà risulta da ciò che in questo caso le due radici della [1] sono di segni contrari.

Se uno degli angoli B o C è ottuso, e questo sia p. es l'angolo B, posto $B = 180 - B'$, la [2] diviene

$$\cos B' \cos C\,(4 \cos A - \cos B' \cos C) \leq 0,$$

cioè

$$4 \cos A - \cos B' \cos C \leq 0,$$

oppure

$$3 \cos B' \cos C + 4 \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C \leq 0$$

che è impossibile.

Se B è retto si perviene alla medesima conclusione.

Si ha perciò:

Per nessun triangolo rettangolo od ottusangolo esistono i due triangoli iso-ortocentrici iscritti, quando il vertice fisso debba cadere nel piede di una delle altezze condotte dai vertici degli angoli acuti.

$A > 90°$.

In questo caso gli angoli B e C essendo necessariamente acuti, la condizione [2] potrà scriversi:

$$\cos B \cos C + 4 \cos A \geq 0,$$

che si riduce a

$$\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \geq \frac{3}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [3]$$

Pongo

$$B + C = M, \quad \operatorname{tg} B = u, \quad \operatorname{tg} M = p.$$

La condizione [3] diviene

$$\frac{pu - u^2}{1 + pu} \geq \frac{3}{4},$$

da cui

$$4u^2 - pu + 3 \leq 0,$$

che si può scrivere

$$\left(u - \frac{p + \sqrt{p^2 - 48}}{8}\right)\left(u - \frac{p - \sqrt{p^2 - 48}}{8}\right) \leq 0 \quad \ldots\ldots \quad [4]$$

Considero la [4] come equazione. Intanto i due valori di y saranno eguali. Se $p = 4\sqrt{3}$, si avrà

$$u = \frac{p}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \operatorname{tg} B$$

e risulterà pure $\operatorname{tg} C = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, cioè:

$$B = C = \text{ang. tg}\ \frac{1}{2}\sqrt{3} = 40°\,53'\,36'' \ldots$$

ed $y = -\frac{12\,R}{7}$. Dunque:

Di tutti i triangoli isosceli ottusangoli ve ne ha un solo per il quale i due triangoli iso-ortocentrici iscritti, aventi il vertice fisso nel punto medio della *base, sono reali e coincidenti, e tale triangolo è quello per il quale la tangente trigonometrica di uno degli angoli alla base sia* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Se è $p > 4\sqrt{3}$, cioè $\operatorname{tg}(B+C) > 4\sqrt{3}$, cioè ancora $B + C > 81^\circ\ 47'\ 12''$, la [4], che si sta considerando come equazione, dà:

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}, \quad \operatorname{tg} B_2 = \frac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}.$$

Calcolando i corrispondenti valori di C si ha:

$$\operatorname{tg} C_1 = \operatorname{tg} B_2, \quad \operatorname{tg} C_2 = \operatorname{tg} B_1.$$

Dunque:

Di tutti i triangoli ottusangoli per i quali sia $B + C > ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *assegnata la somma* $B + C$, *ve ne sono due soltanto per i quali i due triangoli iso-ortocentrici iscritti risultano reali e coincidenti.*

Per valore di y si avrà in questo caso

$$y = \frac{R \cos B \cos C \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos A} = \frac{R \operatorname{sen} 2B \operatorname{sen} 2C}{4 \cos A}.$$

Considero ora la [4] come inequazione.

La condizione $p^2 > 48$ è necessaria. Se essa è verificata, la [4] dà per $\operatorname{tg} B$ la seguente limitazione:

$$\frac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} > \operatorname{tg} B > \frac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8}.$$

Assegnando a $\operatorname{tg} M$ un valore superiore a $4\sqrt{3}$, cioè all' angolo $B + C$ un valore maggiore di $81^\circ\ 47'\ 12''$, la precedente limitazione dà due limiti fra i quali deve essere compreso l'angolo B. Cioè:

Per tutti i triangoli ottusangoli per i quali sia $B + C < ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *i due triangoli iso-ortocentrici iscritti non esistono.*

Vi sono infiniti triangoli ottusangoli per i quali essendo $B + C > ang.\ tg\ 4\sqrt{3}$, *uno di tali angoli si può scegliere ad arbitrio fra due determinati limiti, e per ciascuno di questi triangoli i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono e sono distinti fra loro.*

Raccogliendo quanto fin qui si è detto si ha:

$$A = 90^\circ \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ \text{Nessun triangolo.}$$

$$A < 90^\circ \begin{cases} B < 90^\circ,\ C < 90^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \text{Due triangoli.} \\ B \text{ o } C \geqq 90^\circ \ \ldots\ldots\ldots \ \text{Nessun triangolo.} \end{cases}$$

$$A > 90^\circ \begin{cases} B = C = \text{ang. tg } \frac{1}{2}\sqrt{3} \ \ldots\ldots\ldots \ \text{Un triangolo} \\ B + C < \text{ang tg } 4\sqrt{3} \ \ldots\ldots\ldots \ \text{Nessun triangolo.} \\ B + C = M > \text{ang. tg } 4\sqrt{3} \begin{cases} \operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{tg} M \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} \ \text{Un triangolo.} \\ \dfrac{\operatorname{tg} M + \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} > \operatorname{tg} B > \\ \dfrac{\operatorname{tg} M - \sqrt{\operatorname{tg}^2 M - 48}}{8} \ \text{Due triangoli.} \end{cases} \end{cases}$$

Osservazione. — Se il triangolo ABC è equilatero, l'equazione in y diviene:

$$2y^2 - hy - h^2 = 0$$

che ha per radici $+h$ e $-\frac{h}{2}$. Si può così notare il seguente caso particolare:

Per ogni triangolo equilatero i due triangoli iso-ortocentrici iscritti esistono e sono distinti. Questi due triangoli sono il triangolo ortico, e l'altro ha il lato B′ C′ *distante da* B C *di quanto* A *dista da* B C *stesso, ma dalla parte opposta.*

S. Catania.

E. Lucas. — **Sur les théorémes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen.** (*Mathesis*. Janvier 1891).

Osserva che, se $a\ b\ c \ldots$ sono numeri primi diversi ed $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots$ interi ed è

$$q = a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma \ldots \quad \lambda = \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

il prodotto

$$x^\lambda \cdot \left(x^{\varphi(q)} - 1\right)$$

è divisibile per q tutte le volte che x è intero, $\varphi(q)$ indicando il numero dei numeri primi con q ed inferiori a q. Valendosi di questa sua generalizzazione ulteriore del teorema di Fermat generalizzato da Eulero, dimostra che se è

$$n - \lambda = h \cdot \varphi(q) + r$$

sussiste la

$$x^n \equiv x^{r+\lambda} \pmod{q}$$

per cui analoghe relazioni sussistono tra le differenze, in particolare la

$$\Delta^{q-1} x^n \equiv \Delta^{q-1} x^{r+\lambda} \pmod{q}.$$

Con questa relazione, valendosi anche della nota formola

$$\Delta^{p-1} 0^{p-1} = (p-1)^{p-1} - C^1_{p-1} \cdot (p-2)^{p-1} + \ldots - C^{p-2}_{p-1} \cdot 1^{p-1} + 0^{p-1}$$

dove p è numero primo, dimostra il teorema di Wilson.

Mediante la stessa relazione, valendosi anche della formola conosciuta

$$B_n = -\frac{\Delta_1}{2} + \frac{\Delta_2}{3} - \frac{\Delta_3}{4} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{\Delta_n}{n+1}$$

dove è $\Delta_q = \Delta^q 0^n$, dimostra la relazione di Staudt e Clausen

$$B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \ldots - \frac{1}{l}$$

dove n deve prendere il valore 1 e tutti i valori, positivi, pari cioè tutti i valori per i quali è diverso da zero B_n, numero n^{mo} di Bernoulli; 2 b c .... l sono tutti i numeri primi che diminuiti di 1 danno divisori di n. E A_n è un intero.

F. Giudice.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

80, 81*, 82*, 83, 85, 86*, 87*, 88*, 89 e 90*

80. *Risolvere l'equazione*

$$x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

(D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *E. Sadun.*

Poichè la somma algebrica dei coefficienti nel polimonio $P^{(6)}$, che ne costituisce il primo membro, è uguale a zero, $P^{(6)}$ è divisibile per $x - 1$. Ma si può riconoscere facilmente se il polimonio stesso è divisibile per $x^2 - 1$, $x^3 - 1$, ecc.. (*V.* la mia nota: *Condizioni di divisibilità......* Periodico: Anno III, pag. 129).

Se si dispongono i coefficienti su due linee, come appresso, scrivendoli ordinatamente in colonne contenenti due termini

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & -4 & -2 \\ 4 & -4 & -4 & 3 \end{array}$$

dall'osservare che la somma algebrica dei coefficienti di ciascuna linea è *diversa da zero*, si conclude che $P^{(6)}$ non è divisibile per $x^2 - 1$ (ciò che potrebbe dedursi anche dal notare che il polimonio non è divisibile per $x + 1$). Disponendo invece i coefficienti su tre linee nel modo seguente

$$\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 3 \\ 4 & -4 & . \\ 2 & -2 & . \end{array}$$

si verifica che la somma algebrica dei coefficienti di ogni linea è *zero* e questo prova che $P^{(6)}$ *è divisibile* per $x^3 - 1$. Fatta la divisione risulta

$$P^{(6)} = (x^3 - 1)(x^3 + 4x^2 + 2x - 3).$$

Osservando poi che $x^3 + 4x^2 + 2x - 3$, ammette il divisore $x + 3$, si ha infine

$$P^{(6)} = (x^3 - 1)(x + 3)(x^2 + x - 1) = (x - 1)(x + 3)(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1).$$

Le radici dell'equazione proposta sono in conseguenza

$$1, \quad -3, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Soluzione del Sig. Prof. *G. Rozzolino.*

Poichè la somma dei coefficienti è 0, l'equazione ammette la radice 1. Dividendo per $x - 1$, si ha

$$x^5 + 5x^4 + 7x^3 - 3x^2 - x - 3 = 0.$$

Evidentemente questa non ammette per radice 1 nè -1, come si vede facilmente cambiando x in $-x$. Perciò le sole radici razionali da provare sono ± 3. Provando $+3$, si ha successivamente $-3 : 3 = -1$, $-1 - 1 = -2$, che non essendo divisibile per 3, prova che $+3$ non è radice; tentando con -3, si ha lo schema

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 5 & 7 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & +1 & \\ \hline 0 & 3 & 6 & 3 & 0 & -3 \end{array},$$

donde si vede che -3 è radice, e che l'equazione che rimane a risolvere è

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

Facciamo sparire da quest'ultima, come si usa, il 2° termine, ponendo $x = y - 0{,}5$. Col metodo di Horner si ha il seguente schema

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ & -0{,}5 & -0{,}75 & -0{,}125 & 0{,}0625 \\ \hline 1 & 1{,}5 & 0{,}25 & -0{,}125 & \mathbf{-0{,}9375} \\ & -0{,}5 & -0{,}5 & 0{,}125 & \\ \hline 1 & 1 & -0{,}25 & \mathbf{0} & \\ & -0{,}5 & -0{,}25 & & \\ \hline 1 & 0{,}5 & \mathbf{-0{,}5} & & \\ & -0{,}5 & & & \\ \hline 1 & \mathbf{0} & & & \end{array}$$

donde l'equazione $y^4 - 0{,}5y^2 - 0{,}9375 = 0$, ovvero

$$16y^4 - 8y^2 - 15 = 0,$$

il cui discriminante è $8^2 + 4 \,.\, 16 \,.\, 15 = 16^2 \,.\, 4$, e perciò $y = \pm \sqrt{\frac{8 \pm 16 \,.\, 2}{32}}$ $= \pm \frac{\sqrt{1 \pm 4}}{2}$. Così si ha infine $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.

Si vede di qui che il 1° membro dell'equazione proposta è decomponibile nei quattro fattori razionali $x-1$, $x+3$, x^2+x+1, x^2+x-1 (*).

Soluzione del Sig. *G. Santorelli*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli.

Il primo membro della proposta equazione può successivamente trasformarsi nel modo seguente:

$$x^6+3x^5+x^5+3x^4-x^4-3x^3-x^3-3x^2-x^2-3x+x+x+3=$$
$$x^5(x+3)+x^4(x+3)-x^3(x+3)-x^2(x+3)-x(x+3)+x+3=$$
$$(x+3)(x^5+x^4-x^3-x^2-x+1)=(x+3)[x^3(x^2+x-1)-(x^2+x-1)]=$$
$$(x+3)(x^3-1)(x^2+x-1)=(x+3)(x-1)(x^2+x+1)(x^2+x-1):$$

perciò l'equazione stessa si scinde nelle altre:

$$x+3=0,\qquad x-1=0,\qquad x^2+x+1=0,\qquad x^2+x\,1-=0,$$

le cui radici sono rispettivamente

$$-3,\qquad 1,\qquad \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},\qquad \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\ (^{**}).$$

81*. *Verificare l'eguaglianza*

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \text{tang } 10^\circ.$$

(D. BESSO).

Dimostrazione del Sig. *A. Ognissanti*, alunno del R. Liceo di Bari.

Si ha:

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \frac{2 \text{ sen } 20^\circ \,.\, \text{sen } 40^\circ}{2\cos 20^\circ \,.\, \cos 40^\circ} = \frac{\cos 20^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 20^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{2\cos 20^\circ - 1}{2\cos 20^\circ + 1},$$

si ha perciò:

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} \,.\, \frac{2\cos 20^\circ - 1}{2\cos 20^\circ + 1} =$$
$$\frac{2 \text{ sen } 30^\circ \cos 20^\circ - \text{sen } 30^\circ}{2\cos 30^\circ \cos 20^\circ + \cos 30^\circ} = \frac{\text{sen } 50^\circ + \text{sen } 10^\circ - \text{sen } 30^\circ}{\cos 50^\circ + \cos 10^\circ + \cos 30^\circ} =$$
$$\frac{\text{sen } 10^\circ + 2 \text{ sen } 10^\circ \cos 40^\circ}{\cos 10^\circ + 2\cos 10^\circ \cos 40^\circ} = \frac{\text{sen } 10^\circ (1+2\cos 40^\circ)}{\cos 10^\circ (1+2\cos 40^\circ)} = \text{tang } 10^\circ.$$

Dimostrazione del Sig. *S. Marcasi*, allievo della R. Accademia Navale di Livorno.

(*) Soluzioni di questa questione pervennero anche dai Sigg. Prof. *S. Catania*, *A. Giuffra*, *L. Mariscotti*, *F. Palatini*, *G. Riboni*, *G. Russo*, *F. Viaggi*.

(**) Soluzioni sostanzialmente analoghe vennero inviate da *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *A. Ceci* e *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli), *F. Mariantoni* (R. Università Roma), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro).

zione [2] nelle quali il valore della y non supera $\sqrt{N}$, *soluzioni fondamentali.*

Teorema. — *Il valore di* y *nella soluzione minima dell'equazioni* [1] *e* [2] *non supera il limite* $\sqrt{N}$.

L'applicazione che di questo teorema può farsi alla risoluzione dell'equazione [1] è evidente. Si daranno alla y dell'equazione i successivi valori 0, 1, 2, 3, ecc., non superando $\sqrt{N}$. Se uno di tali valori renderà $(a^2+1)y^2+N$ quadrato perfetto, e sarà il primo che soddisferà a questa condizione, si avrà in esso il valor di y per la soluzione minima della [1]. Se no, si concluderà che l'equazione è impossibile in numeri interi. Similmente dicasi per l'equazione [2].

Ecco pertanto la dimostrazione del teorema. — Sia (x_0, y_0) la soluzione minima dell'equazione [1]. Evidentemente, $x_0 > ay_0$; ed è facile verificare che il valore positivo $Y_0 = x_0 - ay_0$ conviene, come valore di y, all'equazione [2]. Si distinguano pertanto i due casi:

$$x_0 \geq (a+1)\,y_0; \quad x_0 < (a+1)\,y_0.$$

Nel primo caso si avrà: $y_0 \leq \sqrt{\frac{N}{2a}}$. Nel secondo caso si può dimostrare che Y_0, valore di y per l'equazione [2], non supera il limite $\sqrt{N}$ e che, per conseguenza, il valore di y nella soluzione minima dell'equazione [2] non oltrepassa il limite medesimo. Infatti, se Y_0 superasse $\sqrt{N}$, detta (X_0, Y_0) quella soluzione dell'equazione [2] nella quale $y = Y_0$, sarebbe $X_0 > aY_0$, perchè questa condizione equivale all'altra: $Y_0 > \sqrt{N}$. Per conseguenza $X_0 - aY_0$ sarebbe quantità positiva. Ma, com'è facile verificare, essa è anche valore di y in una soluzione della [1]. D'altra parte, $X_0 < (a+1)\,Y_0$, perchè questa disuguaglianza si traduce nell'altra: $(a+1)^2\,Y_0^2 + N > (a^2+1)\,Y_0^2$, evidentemente vera. Perciò $X_0 - aY_0$, quantità minore di Y_0, sarebbe valore di y in una soluzione della [1]. Quest'equazione ammetterebbe dunque un valore di y minore di Y_0, cioè minore di $x_0 - ay_0$. Ma, per ipotesi, $x_0 - ay_0 < y_0$. Per conseguenza, quel valore di y sarebbe anche minore di y_0. Dunque l'equazione [1] avrebbe una soluzione nella quale il valore di y sarebbe minore di y_0, e perciò (x_0, y_0) non ne costituirebbe la soluzione minima, contro l'ipotesi.

Rimane così dimostrato che, quando il valore di y nella soluzione minima della [1] supera il limite $\sqrt{\frac{N}{2a}}$, il valore di y nella soluzione minima della [2] non supera $\sqrt{N}$.

Intanto ne risulta che, in ogni caso, il valore di y nella soluzione minima dell'equazione [1] non supera $\sqrt{N}$. Infatti ciò è evidente quando il detto valore non supera $\sqrt{\frac{N}{2a}}$. Supposto ch'esso superi questo limite, dicasi (x'_0, y'_0) la soluzione minima della [2]. Si è già dimostrato che $y'_0 \leq \sqrt{N}$. Si consideri pertanto la formola $ay'_0 - x'_0$. È facile verificare che, per essere $y'_0 \leq \sqrt{N}$, essa rappresenta un numero positivo o nullo, e che inoltre questo numero è valore della y in una soluzione dell'equazione [1]. Ora:

$$a y'_0 - x'_0 < \sqrt{N},$$

perchè questa disuguaglianza si traduce nella

$$y'^2_0 + 2 x'_0 \sqrt{N} > 0,$$

evidentemente vera. Si è adunque accertato che il valore di y nella soluzione minima della [1] non supera mai $\sqrt{N}$.

Resta a dimostrare che anche il valore di y nella soluzione minima della [2] non supera $\sqrt{N}$.

Sia (x_0, y_0) la soluzione minima della [1]. Il numero positivo $x_0 - a y_0$, valore di y in una soluzione dell'equazione [2], non supera $\sqrt{N}$. Perchè la condizione

$$x_0 - a y_0 \leq \sqrt{N}$$

equivale all'altra:

$$y_0^2 \leq 2 a y_0 \sqrt{N},$$

la quale è soddisfatta, perchè $y_0 \leq \sqrt{N}$, come fu già dimostrato.

Per ciò che concerne le formole generali di risoluzione delle equazioni [1] e [2], occorre premettere le seguenti osservazioni.

1.° *I valori della* y *appartenenti a soluzioni dell'equazione* [1] *si derivano dalle soluzioni* (x', y') *della* [2] *mediante la formola* $y = a y' \pm x'$, *se* y' *non supera* $\sqrt{N}$, *e mediante la formola* $y = a y' + x'$, *se* y' *supera* $\sqrt{N}$.

Sia infatti (x_1, y_1) una soluzione dell'equazione [1]. Si ponga: $x_1 = ay_1 + h$, essendo h positivo, perchè $x_1 > ay_1$. Sarà identicamente:

$$(a y_1 + h)^2 - (a^2 + 1) y_1^2 = N.$$

Dalla quale:

$$y_1 = ah \pm \sqrt{(a^2 + 1) h^2 - N}.$$

Essendo y_1 un numero intero, la quantità sotto radice dovrà essere un quadrato intero k^2. Perciò

$$y_1 = ah \pm k,$$

detta (k, h) una soluzione dell'equazione [2]. Naturalmente, dovendo y_1 risultar positiva, se k supererà $a h$, se cioè sarà $h > \sqrt{N}$, farà mestieri scegliere il segno positivo pel secondo termine. Ma se k non supererà $a h$, se cioè sarà $h \leq \sqrt{N}$, o che si scelga il segno positivo o il negativo, la formola $ah \pm k$ darà sempre il valore di y in una soluzione della [1].

2.° *I valori* y' *della* y, *appartenenti a soluzioni* (x', y') *della equazione* [2], *e per i quali* $x' \geq a y'$, *si derivano dalle soluzioni* (x_1, y_1) *della* [1] *mediante la formola*

$$y' = a y_1 + x_1.$$

Si tralascia la dimostrazione, perchè analoga a quella che valse a stabilire il principio precedente.

Teorema. — *Intendendo per* (x'_1, y'_1) *una soluzione fondamentale qualunque dell'equazione* [2], *ossia una soluzione nella quale* y'_1 *non supera* $\sqrt{N}$, *e per* k *un intero positivo o nullo, tutte le soluzioni* (x, y) *dell'equazione* [1] *saranno date dall'eguaglianza*

$$y \sqrt{a^2 + 1} + x = (y'_1 \sqrt{a^2 + 1} \pm x'_1) (\sqrt{a^2 + 1} + a)^{2k+1},$$

quando si uguaglino fra loro le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{a^2 + 1}$ *de' suoi due membri.*

Sia infatti (x_1, y_1) una soluzione qualunque dell'equazione [1]. Per la prima delle osservazioni fatte dianzi, si potrà porre: $y_1 = a y' \pm x'$, essendo (x', y') soluzione della [2]. Ciò premesso, è facile ricavare quest'altra uguaglianza:

$$y_1 \sqrt{a^2 + 1} + x_1 = (y' \sqrt{a^2 + 1} \pm x') (\sqrt{a^2 + 1} + a).$$

Pertanto, se x' non supera ay', se cioè y' non supera $\sqrt{N}$, il teorema è dimostrato. Nel caso contrario, non si dovrà porre il segno negativo innanzi alla x' del secondo membro, perchè y_1 non potrà avere la forma $ay' - x'$. Di più, per la seconda delle osservazioni che furono premesse, si avrà: $y' = a y_2 + x_2$, essendo (y_2, x_2) soluzione della [1]. E conseguentemente:

$$y' \sqrt{a^2+1} + x' = (y_2 \sqrt{a^2+1} + x_2)(\sqrt{a^2+1} + a).$$

D'altra parte, per la prima osservazione, $y_2 = a y'_1 \pm x'_1$, ovvero:

$$y_2 \sqrt{a^2+1} + x_2 = (y'_1 \sqrt{a^2+1} \pm x'_1)(\sqrt{a^2+1} + a),$$

essendo (x'_1, y'_1) soluzione della [2]. Dunque:

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_1 \sqrt{a^2+1} \pm x'_1)(\sqrt{a^2+1} + a)^3.$$

Se x'_1 non supera $a y'_1$, il teorema è dimostrato, perchè $y'_1 \leq \sqrt{N}$. Nel caso contrario, si dedurrà ancora che

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_2 \sqrt{a^2+1} \pm x'_2)(\sqrt{a^2+1} + a)^5,$$

essendo (x'_2, y'_2) soluzione della [2]. Ecc.. — La potenza dispari di $\sqrt{a^2+1} + a$, moltiplicatrice nel secondo membro, non potendo crescere indefinitamente, perchè il primo membro è finito, dovrà finalmente aversi:

$$y_1 \sqrt{a^2+1} + x_1 = (y'_i \sqrt{a^2+1} \pm x'_i)(\sqrt{a^2+1} + a)^{2k+1},$$

essendo (x'_i, y'_i) tal soluzione della [2], nella quale $x'_i \leq a y'_i$ o, ciò ch'è lo stesso, $y'_i \leq \sqrt{N}$ (*).

Osservazione. — Siano

$$(x'_1, y'_1)\ (x'_2, y'_2)\ \ldots\ldots\ (x'_m, y'_m)$$

le soluzioni fondamentali dell'equazione [2], disposte in ordine crescente per rispetto ai valori della x e della y. Per ottenere le successive soluzioni dell'equazione [1] disposte in ordine crescente, nella

(*) Che poi la x_1 e la y_1 fornite da questa uguaglianza costituiscano una soluzione dell'equazione [1], si dimostra col noto espediente di moltiplicare l'eguaglianza stessa per quella che se ne deriva cambiando il segno del radicale.

formola

$$y\sqrt{a^2+1}+x=(y'_i\sqrt{a^2+1}\pm x'_i)(\sqrt{a^2+1}+a)^{2k+1}$$

si porrà prima $k=0$ e si daranno successivamente alla i i valori m, $m-1$, $m-2$, ... 1, *calcolando col segno* — *davanti alla* x'_1. Poscia si daranno alla i i successivi valori 1, 2, 3, ... m, *calcolando col segno* + *davanti alla* x'_i. Si porrà in seguito $k=1$, e quanto alla i, si seguirà la stessa norma che per $k=0$. Ecc.

Esempio. — Debbasi risolvere l'equazione

$$x^2-26y^2=209.$$

Le soluzioni fondamentali dell'equazione

$$x^2-26y^2=-209,$$

quelle cioè per le quali $y\leq\sqrt{209}$, sono (5, 3) e (21, 5). Pertanto le soluzioni dell'equazione proposta, disposte in ordine crescente per rispetto ai valori delle incognite, verranno date dalle formole

$$(5\sqrt{26}-21)(\sqrt{26}+5)^{2k+1};\ (3\sqrt{26}-5)(\sqrt{26}+5)^{2k+1}$$
$$(3\sqrt{26}+5)(\sqrt{26}+5)^{2k+1};\ (5\sqrt{26}+21)(\sqrt{26}+5)^{2k+1},$$

facendo in esse successivamente $k=0, 1, 2$, ecc.. Saranno adunque:

(25, 4) (53, 10) (103, 20) (235, 46) (2315, 454) ecc.

Teorema. — *Intendendo per* (x'_i, y'_i) *una soluzione fondamentale qualunque dell'equazione* [2] *e per* k *un intero positivo o nullo, tutte le soluzioni* (X, Y) *dell'equazione* [2] *si ricaveranno per mezzo dell'eguaglianza*

$$Y\sqrt{a^2+1}+X=(y'_i\sqrt{a^2+1}\pm x'_i)(\sqrt{a^2+1}+a)^{2k}.$$

Questo teorema è una conseguenza immediata del precedente. Perchè tra le soluzioni (x, y) dell'equazione [1] e le soluzioni (X, Y) della [2] esiste la relazione:

$$y\sqrt{a^2+1}+x=(Y\sqrt{a^2+1}+X)(\sqrt{a^2+1}+a),$$

com'è facile verificare.

G. Frattini.

ALCUNI TEOREMI SULLE CONICHE

1. Teorema: *Data una conica e due fasci di raggi coi centri rispettivi nei punti* O, S, *se congiungiamo i punti, in cui ciascun raggio di uno dei fasci* (p. e. di quello col centro in O) *incontra la conica, col centro* (S) *dell'altro, ed uniamo fra loro i secondi punti d'incontro della curva con ogni coppia di raggi che così si ottiene, risulta un altro fascio di raggi che ha il centro* O' *situato sulla retta* SO *e che è prospettivo al fascio che ha il centro in* O.

Dimostrazione. — Sia PQ un raggio del fascio O, RT il raggio da esso dedotto mediante la costruzione indicata nell'enunciato del teorema; questi due raggi, per un notissimo teorema, si incontrano in un punto M della polare HK del punto S rispetto alla data conica. Tiriamo MS e consideriamo i quattro raggi MP, MK, MR, MS. Se si pensa ora che RQ, PT s'incontrano in un punto G di HK e si tien presente la costruzione ordinaria, per la quale, dato un raggio di un fascio, si determina il raggio che è da quello armonicamente separato mediante due altri raggi, si vede tosto che MP, MK, MR, MS formano un gruppo armonico. Ne viene che, fissato un punto O della PQ, facendo ruotare intorno ad esso questa retta, quella che le corrisponde in base alla nostra costruzione incontra SO costantemente nel punto O', che è separato armonicamente da O mediante il punto S ed il punto in cui SO incontra la polare di S, cioè descrive un fascio col centro in O'. È poi evidente che i fasci O, O' sono prospettivi.

Per dualità abbiamo: *Se da un punto qualunque* X *si conducono le due tangenti ad una conica e se dai due punti in cui esse tagliano una retta assegnata* s *si tirano le tangenti ancora possibili alla conica data, queste s'incontrano in un punto* Y *che, al variare di* X *sopra una retta* o, *ha per luogo una retta passante per* os.

2. Immaginiamo ora, riferendoci al primo teorema, di fissare la retta SO, che sia una segante della data conica in A, A', e sopra di essa fissiamo il punto S e vediamo come varia O' al variare di O sulla SO. Intanto quando O è in A, O' è in A' e viceversa. Allontanandosi O dalla curva sul raggio $A\infty$, se QN è un diametro conjugato alla SO, quando O arriva in B, punto in cui SO è tagliata dalla tangente in M, che è il secondo punto di incontro della SN con la conica, allora O' cade all'infinito. Infatti tirando il raggio BM, considerato come un raggio uscente da O, in M cadono i suoi punti d'intersezione con la curva, e tirando poi la SM, questa vale per i due raggi del fascio S corrispondenti al raggio BM del fascio O, quindi in N coincidono i secondi punti d'incontro di quei due raggi con la conica. Ne segue che O' è sulla tangente in N, la quale è parallela ad SO, quindi O' cade all'infinito.

Se poi si tira per B la seconda tangente BP, allora la SP incontrerà la curva in Q. Difatti per la ragione esposta sopra, la tangente nel secondo punto d'incontro della curva con la SP deve contenere O'; ma questo è il punto all'infinito della SO e perciò il secondo punto d'incontro della curva con la SP deve cadere precisamente in Q.

Queste considerazioni ci forniscono adunque il teorema: *Se nei punti d'incontro di una conica con una segante* MN *si conducono le tangenti, ad una delle quali* (p. e. a quella che tocca la curva in N) *si guida la parallela da un punto* S *qualunque della segante, e se dal punto* B *d'incontro di questa parallela con l'altra tangente si conduce la seconda tangente* BP, *la* SP *passa per il secondo estremo del diametro determinato da* N, *il quale è conjugato alla* SB.

Se poi da S conduciamo anche la parallela alla tangente in M, facendo le stesse costruzioni indicate dal teorema precedente, chiamando C il punto in cui l'ultima parallela taglia la tangente in N e D il punto d'incontro delle due tangenti in M, N, abbiamo quest'altro teorema: *Dato un parallelogrammo* BDCS *con due lati* DB, CD *tangenti ad una conica in* M, N *ed il vertice* S *nella*

M N, *tirando da* B, C *le due tangenti ancora possibili* B P, C T, *ed unendo i due punti di contatto con* S, *si ottengono sulla conica due punti* Q, R, *i quali con* M, N *formano i vertici di un parallelogrammo, le cui diagonali sono conjugate alle coppie di lati del parallelogrammo dato.*

Generalizzando mediante projezione della figura data dall'ultimo teorema, da un punto qualunque dello spazio in un piano qualunque, abbiamo:

Se un quadrilatero completo ha due coppie di vertici opposti conjugati rispetto ad una conica che tocca i lati uscenti da uno di questi quattro vertici, i punti di contatto dei lati uscenti da tale vertice coi punti che vengono determinati sulla conica dalle rette che congiungono il vertice opposto coi punti nei quali la curva è toccata dalle due tangenti che ancora si possono condurre per la terza coppia di vertici opposti, formano due coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo, i vertici della terza coppia del quale sono conjugati rispetto alla conica e posti sulla retta che unisce la seconda coppia di vertici conjugati del quadrilatero dato, e le coppie di lati uscenti da questi ultimi due vertici del quadrilatero dato sono conjugate alle diagonali di quel quadrangolo semplice appartenente al quadrilatero derivato, il quale è inscritto nella conica.

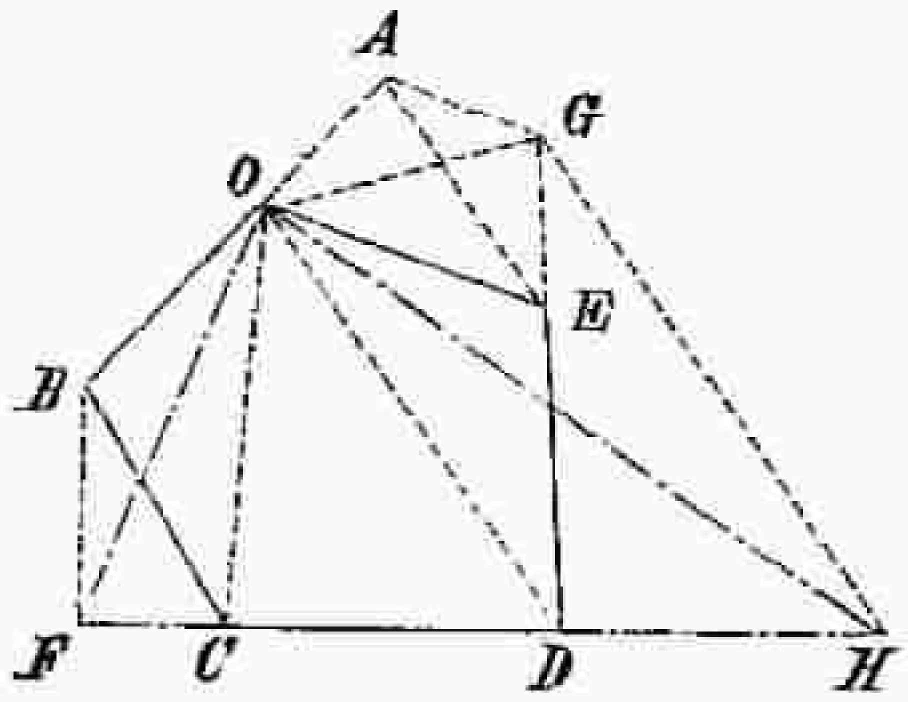
Lasciamo alla cura del lettore il ricavare il teorema duale.

Palmi, 18 febbraio 1891.

(Continua). Prof. PALATINI FRANCESCO.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Alcuni problemi relativi alla divisione d'un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati, da far parte di un corso di disegno geometrico. — 1. Sia $ABCDE$ un poligono convesso, O un punto del lato AB e proponiamoci di trasformare il poligono dato in un triangolo equivalente di vertice O e base nel lato CD, cosicchè la parte di esso che rimane a sinistra della trasversale OC sia equivalente ad OCB e quella che rimane a destra di OD sia equivalente ad $ODEA$. Si tirino OC, OD, OE quindi $BF \parallel OC$, a tagliare CD in F, $AG \parallel OE$, a tagliare DE in G, $GH \parallel OD$, a tagliare CD in H, sarà evidentemente OFH il triangolo richiesto.

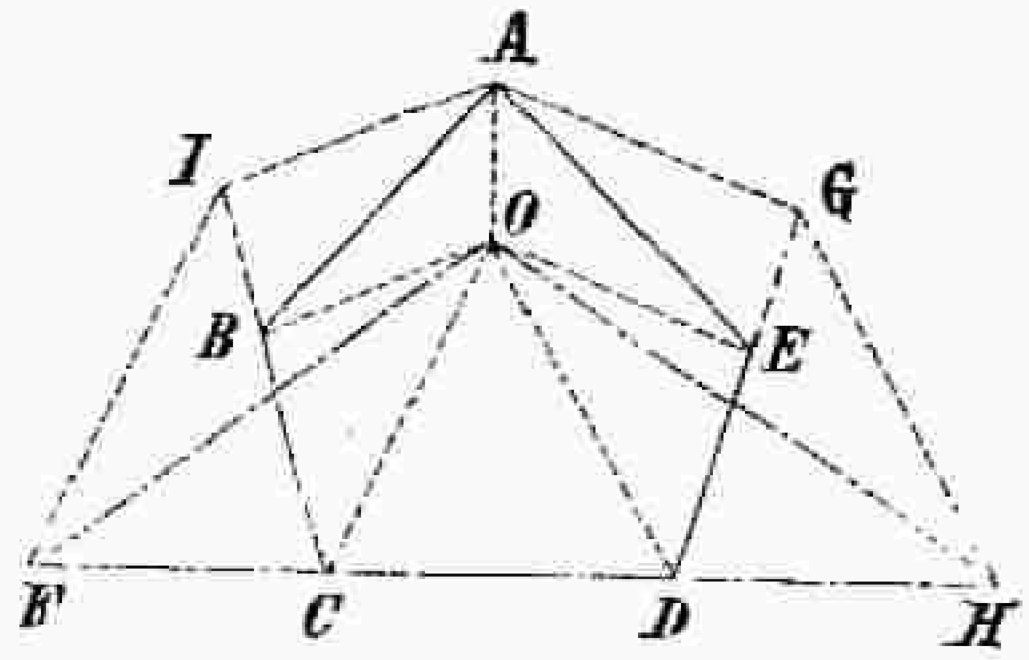


2. Posto ciò vogliasi *dividere il poligono dato, mediante corde uscenti da* O, *in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p, ... *e in un verso prestabilito.* Dividendo FH nel senso assegnato in parti che stiano fra loro come $m : n : p : \ldots\ldots$, se i punti di divisione cadono in C e D o nell'interno di CD, le congiungenti O con questi punti risolvono il problema, altrimenti resteranno giustamente collocate soltanto quelle corde uscenti da O che finiscono a punti di CD. Per completare la soluzione in questo caso e posto che qualche punto di divisione cada nell'interno di FC e qualche altro entro DH, basterà trasformare il poligono $ABCDE$ prima in un triangolo equivalente di vertice O e base BCI, quindi operare sulla base di questo come si fece su FH, e si troveranno le corde che risolvono il problema relative a BC, e in appresso trasformare ancora il poligono dato in due altri triangoli equivalenti pel primo de' quali la base cada nel lato DE, nel modo stesso come si è fatto per CD, e per l'altro la base sia LEA ed effettuare su questi le operazioni di divisione eseguite per i due precedenti e si troveranno così le corde che risolvono il problema rispetto ai lati DE, EA.

Come ognuno vede questo metodo di soluzione è generale cosicchè il problema propostoci può considerarsi completamente risoluto.

3. Trattisi ora dello stesso problema, scegliendo per origine dei segmenti che devono dividere il poligono convesso $ABCDE$, ed in senso prestabilito, in parti proporzionali a più segmenti dati $m, n, p, \ldots\ldots$, un punto O interno al poligono dato, con la condizione che la divisione debba effettuarsi partendo dal segmento OA.

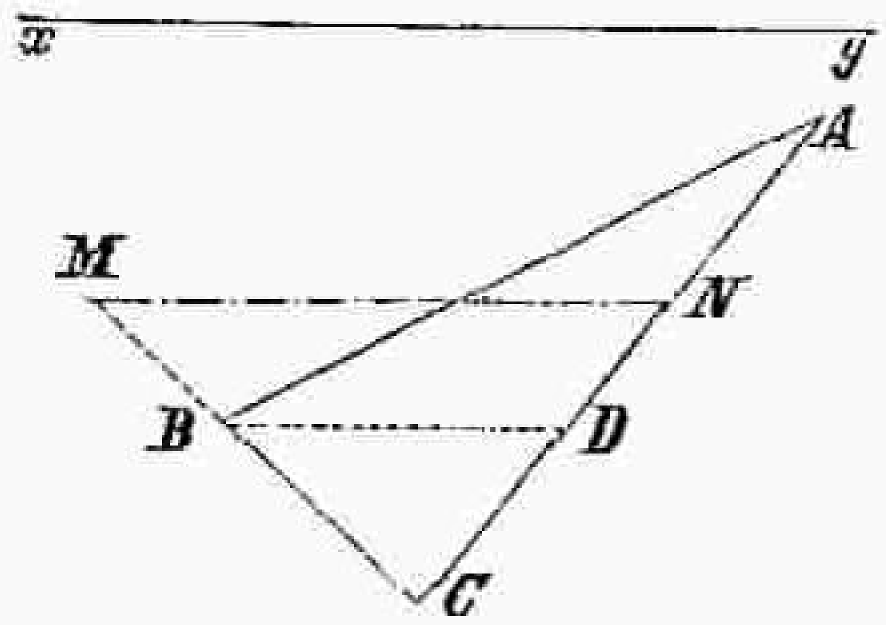
Basterà indicare la costruzione colla quale il poligono stesso può trasformarsi in un triangolo equivalente di vertice O e base nella direzione di un lato qualunque, ad es. CD, sempre in modo che la parte del triangolo richiesto che rimane a sinistra di OCD sia equivalente ad $OCBA$ e quella a destra ad $ODEA$, non restando poi ad applicare che un processo analogo a quello esposto nel numero precedente.



Conducansi le OA, OB, OC, OD, OE e per A la $AG \parallel OE$ ad incontrare DE in G e per G la $GH \parallel OD$ ad incontrare CD in H. Similmente nel verso opposto tirisi $AI \parallel OB$ ad incontrare CB in I e per I la $IF \parallel OC$ a tagliare DC in F, sarà evidentemente OFH un triangolo equivalente al poligono dato e soddisfacente alla posta condizione. Si divida ora FH nel senso stabilito in parti proporzionali ai dati segmenti e congiungendo i punti di divisione che cadono in CD con O, si avranno i segmenti che risolvono il problema rispetto al lato CD. Ripetendo la costruzione accennata, prendendo per base dei triangoli equivalenti ad $ABCDE$ gli altri singoli lati del poligono, si troveranno i segmenti uscenti da O relativi a questi altri lati che completano la divisione richiesta, e così resta interamente risoluto anche il problema: *Dividere un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati* m, n, p, ..., *in senso prestabilito, con segmenti uscenti da un punto* O *interno al poligono.*

4. Proponiamoci ora di dividere un triangolo ABC in parti proporzionali a più segmenti dati in un ordine assegnato, con rette di data direzione (parallele ad xy).

Indicheremo la costruzione a farsi per trasformare il dato triangolo in altro a lui equivalente con un angolo in comune ad un angolo di ABC, ad es. quello di vertice C, e avente la base parallela ad xy.



Dei rimanenti vertici di ABC sia C quello più distante da xy, ed allora tirisi per esso $BD \parallel xy$. Chiamata MN la retta che risolve il problema si avrà per teoremi noti $MC : BC = NC : DC$, $MC \cdot CN = BC \cdot AC$, da cui $\overline{NC}^2 = AC \cdot DC$, sicchè il segmento NC è facilmente costruibile. Ed ora, seguendo un processo che trovasi svolto in quasi tutti i manuali di geometria elementare, si potrà dividere il triangolo NMC in parti proporzionali ai segmenti dati e nell'ordine stabilito con rette parallele ad MN quindi anche ad xy.

Queste risolveranno interamente il problema se tutte partono da punti di BC, ma se ciò non accade e le estremità delle trasversali, dalla parte di MC, tutte o in parte cadono entro il segmento MB, dovrà allora trasformarsi il triangolo ABC in altro equivalente avente con ABC in comune l'angolo A e la base $\parallel xy$, dopo di che si avranno le trasversali che completano la soluzione del problema e vanno a cadere coi loro estremi nei tratti AB, AD.

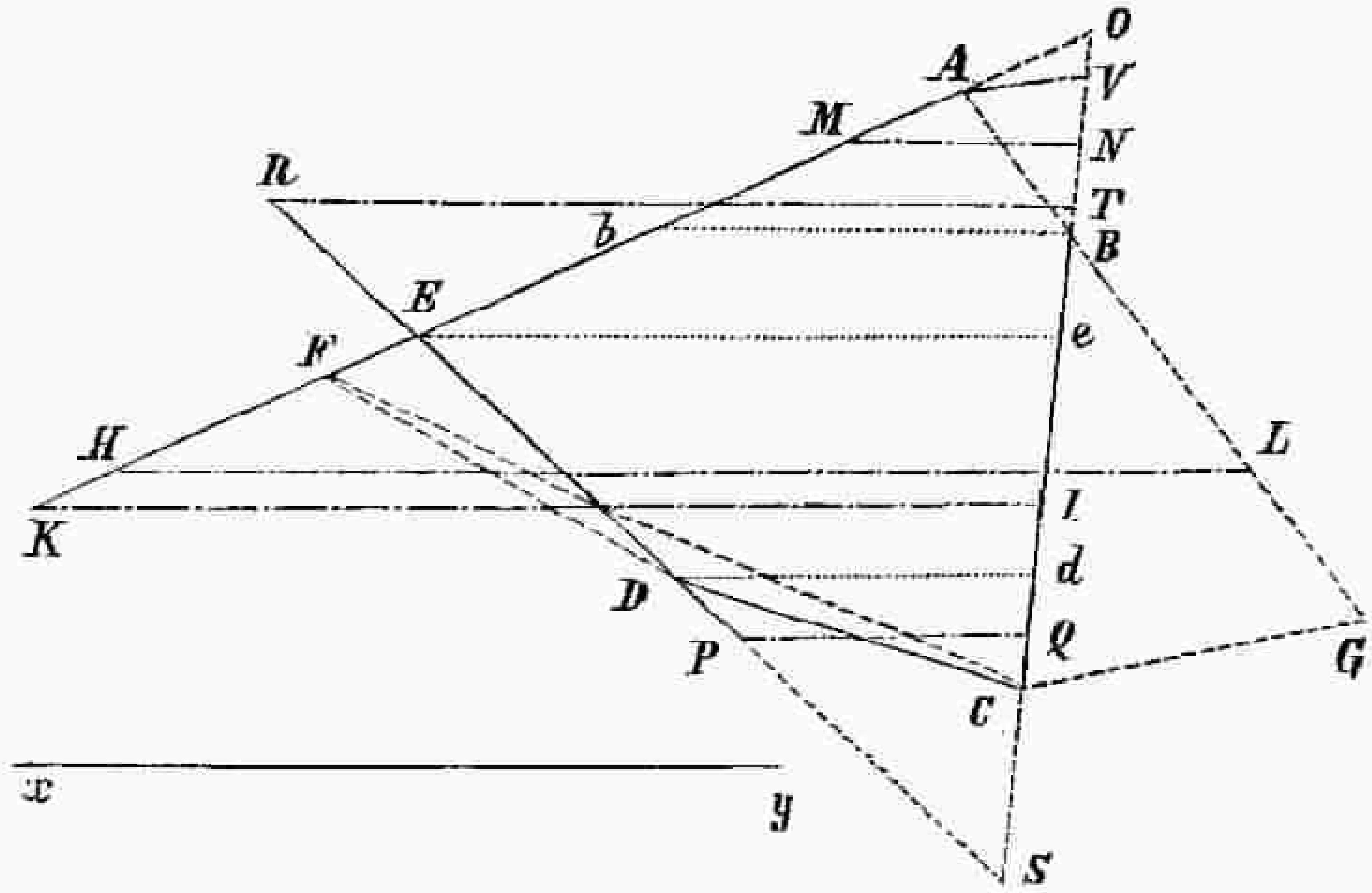
5. La costruzione precedente congiunta a quella che risolve il noto problema dividere un trapezio in parti proporzionali a più segmenti dati con rette parallele alle basi (*), conduce alla soluzione del problema più generale:

Dividere un poligono convesso in parti proporzionali a più segmenti dati m, n, p, ..., *in un senso prestabilito, con rette di direzione assegnata.*

Sia xy questa direzione, $ABCDE$ il dato poligono e dei suoi vertici A il più distante e C il più prossimo ad xy. Conducansi per gli altri vertici B, D, E le parallele Bb, Ee, Dd ad xy ad incontrare il contorno del poligono in b, e, d, poi si prolunghino EA, CB fino ad incontrarsi in O e BC, ED fino ad incontrarsi in S. Si tratta di determinare le costruzioni mediante le quali possono

(*) V. p. es. questo *Periodico*, Anno IV, p. 182.

giustamente collocarsi le trasversali che cadono nei tratti Ab, AB; bE, Be; ED, ed; DC, dC.



Per ottenere quelle relative ai due primi, conducasi EC, per D la $DF \parallel EC$ a tagliare AE in F, (*) poi congiunto F con B si tiri $CG \parallel FB$ fino a tagliare AB in G: sarà evidentemente AFG un triangolo equivalente al poligono dato avente con questo in comune l'angolo A. Si trasformi il medesimo in altro triangolo AHL, equivalente ed AFG, in modo che due lati siano nelle direzioni AE, AB e sia la base $HL \parallel xy$ (**4**). Dividendo AHL in parti proporzionali ai dati segmenti m, n, p, . . ., nell'ordine prestabilito, le trasversali che hanno i loro estremi in punti di Ab, AB resteranno giustamente collocate. Con costruzione analoga potranno situarsi in modo definitivo le trasversali le cui estremità sono punti di DC, dC. Ed ora per ottenere quelle i cui termini cadono nei tratti bE, BE si trasformi prima il triangolo OAB in altro equivalente OMN con l'angolo MON in comune con l'angolo O del primo triangolo e colla base $MN \parallel xy$ ed il triangolo OFC pure in altro equivalente OKI con due lati secondo OF, OB e colla base $KI \parallel xy$, poi si divida il trapezio $MKIN$, equivalente al poligono dato, in parti proporzionali ai dati segmenti, sempre nel senso stabilito. Finalmente condotta EB e per A la $AV \parallel EB$ ad incontrare CB in V, e tirata EV, si trasformi il triangolo ESV in altro equivalente con due lati nelle direzioni ES, VS e colla base $RT \parallel xy$, e il triangolo DSC in altro equivalente colla base $PQ \parallel xy$ e terminata ai lati dell'angolo DSC: il trapezio $RPQT$ equivarrà al poligono dato e se lo si divide, nell'ordine assegnato, cioè nel senso RT a PQ, in parti proporzionali ad m, n, p, ..., si metteranno a posto le trasversali i cui estremi cadono nei tratti ED, ed, dopo di che resterà completata la divisione del poligono dato in parti proporzionali ai segmenti dati, nell'ordine prestabilito.

(*) Per semplicità sono omesse nella figura alcune linee della costruzione che non nuocono alla intelligenza della dimostrazione.

È facile riconoscere che la costruzione ora effettuata si adatta con opportune modificazioni a qualunque poligono convesso, talchè anche l'ultimo problema può considerarsi come completamente risoluto, soltanto chi voglia rendersi ragione dei dettagli della costruzione comunque venga scelto il poligono dato e la retta data converrà che ricorra alla effettiva grafica rappresentazione.

A. Lugli.

E. DUPORCH. — **Sur la somme des puissances semblables des n premiers nombres.** (*Nouvelles Annales de Mathématiques.* Décembre 1890).

Pone

$$f(x) = \frac{1}{(n+1)!} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \vdots & n & x^n \\ 1 & n+1 & \binom{n+1}{2} & \vdots & \binom{n+1}{2} & x^{n+1} \end{vmatrix}$$

e trova

$$1^n + 2^n + \ldots\ldots + (x-1)^n + x^n = f(x+1).$$

Credo opportuno rilevare che dalla precedente relazione si ricava subito il numero B_n, n^{mo} numero di Bernoulli o coefficiente di x nello sviluppo di $1^n + 2^n + \ldots\ldots + x^n$ secondo le potenze di x, e se ne deducono facilmente le note relazioni simboliche

$$(B+1)^p - B^p = p \qquad (B+1)^p - B^p = 0$$

dovute al Prof. E. Cesàro, la prima, ed al Prof. E. Lucas, la seconda; infatti si ricava immediatamente, come coefficiente di x in $f(x+1)$ ossia in $x^n + f(x)$,

$$B_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 3 & 3 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & n & \binom{n}{2} & \vdots & n \\ 1 & (n+1) & \binom{n+1}{2} & \vdots & \binom{n+1}{2} \end{vmatrix}$$

e per le precedenti relazioni simboliche, convenientemente applicate, si ha

$$\begin{array}{l|l} 1 = B_0 & -1 = 2B' \\ 2 = B_0 + 2B_1 & -1 = 3B' + 3B_2 \\ 3 = B_0 + 3B_1 + 3B_2 & -1 = 4B' + 6B_2 + 4B_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n+1 = B_0 + (n+1)B_1 + \binom{n+1}{2} & B_2 - 1 = (n+1)B' + \binom{n+1}{2} B_2 + \\ + \ldots\ldots + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + (n+1) & B_n \ldots\ldots + \binom{n+1}{2} B_{n-1} + (n+1) B_n \end{array}$$

dalle quali, coll'uso dei determinanti, ricavansi per B_n, $n > 1$, valori che si riconoscono subito eguali a quello dato sopra.

Le relazioni simboliche ricordate danno valore diverso per B_1 e B' soltanto, ovvero rispettivamente i valori $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Dalle ultime scritte delle equazioni dedotte dalle relazioni simboliche, ponendo per B_0 il suo valore 1, si ricava mediante sottrazione

$$n+2 = 1 + (n+1)(B_1 - B')$$

la quale relazione, essendo $B_1 = \frac{1}{2}$, $B' = -\frac{1}{2}$, mostra anch'essa l'accordo e l'equivalenza delle due espressioni simboliche.

F. Giudice.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 74*, 75*, 77*, 78* e 79*

74*. *Sia* ABCD *un quadrilatero inscritto in una circonferenza di centro* O. *Sopra il lato* AB, *preso come corda, si descrivano le due circonferenze che hanno i loro centri sulla circonferenza* O; *questi centri, che saranno i punti di mezzo dell'arco* BCDA *e dell'arco* AB, *si indichino con* P *e con* P' *rispettivamente. Si operi egualmente sui lati* BC, CD, DA, *si avranno così altre sei circonferenze, i cui centri, con notazioni analoghe alle precedenti, s'indicheranno con* Q *e* Q', *con* R *ed* R', *e con* S *ed* S'. *Dimostrare:*

1.° *che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze* P', Q', R', S' *sono vertici di un rettangolo;*

2.° *che gli altri quattro punti in cui si tagliano le circonferenze* P, Q, R, S *sono pure vertici d'un rettangolo;*

3.° *che la congiungente dei centri di questi due rettangoli è bisecata dal punto* O. (G. Pesci).

Soluzione del Sig. *G. M. Nobile* allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La somma degli archi $P'S'$, $R'Q'$ equivale ad una semicirconferenza; quindi $P'R'$ ed $S'Q'$ si tagliano ad angolo retto in un punto T'. I quadrangoli $PQRS$, $P'Q'R'S'$ sono simmetrici rispetto ad O, quindi PR ed SQ si tagliano ad angolo retto in un punto T, simmetrico di T' rispetto ad O. Risulta intanto che O è punto medio di TT'. I circoli P' e Q' (P e Q) che già si tagliano in B s'incontrano un'altra volta in b' (b); così, le seconde interesezioni dei circoli Q' ed R', R' ed S', S' e P' (Q ed R, R ed S, S e P) sieno c', d', a' (c, d, a). I cerchi P' e Q' (P e Q) tagliansi in B e b' (B e b), è quindi $P'Q'$ (PQ) bisettrice interna dell'angolo $BP'b'$ (BPb); ed essendo Q' (Q) punto medio dell'arco BC (supplemento di BC), $P'Q'$ (PQ) è pure bisettrice interna (esterna) dell'angolo $BP'C$ (BPC); dunque le direzioni $P'b'$, $P'C$ coincidono (Pb, PC sono opposte). Analogamente dimostrasi che le direzioni $P'a'$, $P'D$ coincidono (Pa, PD sono opposte); e poichè $P'R'$ (PR) biseca l'angolo $DP'C$ (DPC), biseca anche l'angolo $a'P'b'$ che coincide con esso (aPb che gli è opposto al vertice) e divide dunque per metà e ad angolo retto $a'b'$ (ab), essendo il triangolo $P'a'b'$ (Pab) isoscele. — Estendendo l'ultima conseguenza, si conchiude che due lati opposti del quadrangolo $a'b'c'd'$ $(abcd)$ sono dimezzati ad angolo retto da $P'R'$ (PR) e gli altri due da $S'Q'$ (SQ): dunque per l'osservazione posta a principio, risulta che $a'b'c'd'$ $(abcd)$ è un rettangolo ed ha per centro T' (T).

Che O sia punto medio di TT' è stato dimostrato.

75'. *Dimostrare che se* A_1, B_1, C_1, *sono punti dei lati* BC, CA, AB *d'un triangolo così situati che, posto* $\frac{BA_1}{BC} = h$, $\frac{CB_1}{CA} = k$, $\frac{AC_1}{AB} = l$, *abbia luogo la relazione*

$$(2h-1)a^2 + (2k-1)b^2 + (2l-1)c^2 = 0,$$

le perpendicolari ai lati BC, CA, AB, *condotte dai punti* A_1, B_1, C_1, *passano per uno stesso punto.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *P. Marano*, studente privato a Catania.

Indicando con a, b, c i numeri che misurano i lati del triangolo rispettivamente opposti ai vertici A, B, C, dall'essere $\frac{BA_1}{BC} = h$, $\frac{CB_1}{CA} = k$, $\frac{AC_1}{AB} = l$, si ricava $BA_1 = ah$, $CB_1 = bk$, $AC_1 = cl$. Tiro le perpendicolari ai lati BC, CA dai punti A_1 e B_1, che si tagliano in un punto O. Unisco O con A, B e C e dico x, y, z i numeri che misurano i segmenti OA, OB, OC. Allora per un noto teorema di geometria si ha:

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2b \,.\, B_1C, \quad y^2 = x^2 + c^2 - 2c \,.\, AC_1',$$
$$z^2 = y^2 + a^2 - 2a \,.\, A_1B,$$

dove C_1' è il piede della perpendicolare abbassata da O su AB, e CB_1, BA_1, AC_1' si intendono considerati in valore e segno. Sostituendo a CB_1 e BA_1 i valori trovati e posto $AC_1' = cl'$ deve provarsi che $l' = l$.

Intanto il sistema diventa:

$$x^2 = z^2 + b^2 - 2b^2k, \quad y^2 = x^2 + c^2 - 2c^2l', \quad z^2 = y^2 + a^2 - 2a^2h.$$

Sommando membro a membro si ha:

$$a^2(1-2h) + b^2(1-2k) + c^2(1-2l') = 0,$$

che paragonata con la relazione indicata nel teorema ci dice appunto che $l' = l$, cioè che la perpendicolare condotta ad AB dal punto C_1, essendo C_1 il punto che insieme con A_1 e B_1 soddisfa alla relazione data, passa per O. E ciò è quanto volevasi dimostrare.

Osservazione 1. — Se $h = k = l = \frac{1}{2}$ la relazione proposta è identicamente verificata, e si ricade nel noto teorema di geometria che: Le perpendicolari innalzate dai punti di mezzo de' lati di un triangolo concorrono in un punto.

Osservazione 2. — Se dal vertice A si abbassa la perpendicolare $A A_1$ sul lato opposto, si ha:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \,.\, A_1 B \quad \text{da cui} \quad \left(2 \frac{A_1 B}{a} - 1\right) a^2 = c^2 - b^2.$$

Le espressioni analoghe per le altre altezze sono $b^2 - a^2$, $a^2 - c^2$. La somma di queste tre quantità essendo identicamente nulla, la relazione proposta è verificata da' piedi delle altezze di un triangolo, ciò che dimostra il teorema anche noto che: Le altezze di un triangolo concorrono in un punto.

Dimostrazione del Sig. *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La condizione necessaria e sufficiente, affinchè la perpendicolari innalzate ai lati nei punti A_1, B_1, C_1 concorrano in uno stesso punto, è che si verifichi la eguaglianza:

$$\overline{BA_1}^2 - \overline{A_1 C}^2 + \overline{CB_1}^2 - \overline{B_1 A}^2 + \overline{AC_1}^2 - \overline{C_1 B}^2 = 0$$

(cf. BALTZER, *Plan.* § 14, 2).

Essa può trasformarsi nella seguente:

$$BC\,(BA_1 - A_1 C) + CA\,(CB_1 - B_1 A) + AB\,(AC_1 - C_1 B) = 0;$$

e questa nell'altra:

$$BC\,(2BA_1 - BC) + CA\,(2CB_1 - CA) + AB\,(2AC_1 - AB) = 0.$$

Ora, tenendo presente che $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ e che $BA_1 = ha$, $CB_1 = kb$, $AC_1 = lc$, l'ultima eguaglianza può scriversi:

$$a^2\,(2h - 1) + h^2\,(2k - 1) + c^2\,(2l - 1) = 0:$$

e così resta dimostrato ciò che si domandava (*).

77*. *Dare un metodo per la risoluzione del sistema d'equazioni*

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Ay^2 + Dx + Dy + E &= 0 \\ A_1 x^2 + B_1 xy + A_1 y^2 + D_1 x + D_1 y + E_1 &= 0. \end{aligned}$$

(B. CARRARA).

Soluzione dei Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *A. Perna*, *F. Grillo* (R. Ist. tec. Napoli), *R. Catani* (R. Ist. tec. Roma, *E. Goti*, *A. Mucci*, *G. Paoli* (R. Ist. tec. Arezzo), *F. Mariantoni* (R. Univer-

(*) Altre soluzioni furono inviate dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Istituto tecnico Bari), *G. Candido* (R. Liceo Lecce), *G. Fumanti* (R. Istituto tecnico Roma).

sità Roma), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *P. P. Rizzuti* (Ist. tec. Catanzaro), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Il sistema proposto proposto può scriversi:

$$A(x^2+y^2)+D(x+y)+Bxy+E=0,$$
$$A_1(x^2+y^2)+D_1(x+y)+B_1xy+E_1=0,$$

e poichè $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, esso può ancora trasformarsi in

$$[1] \ldots \left\{\begin{array}{l} A(x+y)^2+D(x+y)+(B-2A)xy+E=0 \\ A_1(x+y)^2+D_1(x+y)+(B_1-2A_1)xy+E_1=0. \end{array}\right.$$

Eliminando xy, si ottiene:

$$(AB_1-A_1B)(x+y)^2+\{(DB_1-D_1B)-2(DA_1-D_1A)\}(x+y)+$$
$$\{(EB_1-E_1B)-2(EA_1-E_1A)\}=0.$$

Quest'equazione, che combinata con una delle [1] dà luogo ad un sistema equivalente a quello dato, fornisce per $x+y$ due valori p_1, p_2, i quali sostituiti in una delle [1] dànno per xy i valori ad essi corrispondenti q_1, q_2. Chiamando adunque (z_1, z_2), (v_1, v_2), rispettivamente, le radici delle equazioni

$$z^2-p_1z+q_1=0, \qquad v^2-p_2v+q_2=0,$$

si hanno come soluzioni del proposto sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x=z_1 \\ y=z_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=z_2 \\ y=z_1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=v_1 \\ y=v_2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x=v_2 \\ y=v_1. \end{array}\right.$$

78'. *Dimostrare la regola: un numero è divisibile per 17 se lo è la somma algebrica dei prodotti che si formano scomponendo, cominciando da destra, il numero in periodi di quattro gruppi di due cifre ciascuno, e moltiplicando ordinatamente il numero di ciascun gruppo per 1, 2, 4, 8 con tal legge per i segni da avere, incominciando dal positivo, tre variazioni ed una permanenza.*

(B. Carrara).

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

Le cifre del numero proposto, lette da destra verso sinistra, siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ed esprimiamo che questo numero è multiplo di 17 secondo m:

$$a_1+10a_2+10^2a_3+\ldots\ldots+10^{n-1}a_n=17m. \quad \ldots\ldots [1]$$

Ora supponiamo la condizione di divisibilità posta nella forma seguente:

$$A_1(a_1+10a_2)+A_2(a_3+10a_4)+A_3(a_5+10a_6)+\ldots=17m'. \quad [2]$$

ove i coefficienti A sono da determinarsi e dove la serie degli indici delle A stesse potrà spingersi fino ad $\frac{n}{2}$ o ad $\frac{n+1}{2}$ secondo che n è pari o dispari; in corrispondenza di questi due casi l'ultimo termine del primo membro della [2] potrà avere o il coefficiente $A_{n:2}$ o l'altro $A_{(n+1):2}$ e se le [1] e [2] sono come si suppone subordinate l'una a l'altra, e sussistono contemporaneamente, la differenza dei loro primi membri è multipla anch'essa di 17 secondo un intero m'', onde potremo scrivere:

$$\begin{aligned}(1 - A_1)(a_1 + 10a_2) + (10^2 - A_2)(a_3 + 10a_4)\\ + (10^4 - A_3)(a_5 + 10_6) + \ldots. = 17m''\end{aligned} \quad \ldots\ldots. [3]$$

Nella [3] l'ultimo termine del primo membro potrà avere una delle due forme seguenti:

$$(10^{n-2} - A_{n:2})(a_{n-1} + 10a_n) \quad \text{od anche} \quad (10^{n-1} - A_{(n+1):2})\,a_n$$

secondo che n è pari o dispari, ma ciò non ha influenza sul ragionamento che faremo poichè in esso considereremo termini qualunque.

Intanto esaminando la [3] si vede che essa contiene implicitamente le seguenti condizioni:

$$\frac{1 - A_1}{17} = x \text{ (intero)}, \quad \frac{10^2 - A_2}{17} = x, \quad \frac{10^4 - A_3}{17} = x, \ldots\ldots..$$

cioè $A_1, A_2, A_3, \ldots..$ debbono essere rispettivamente uno qualunque dei resti di $\frac{1}{17}, \frac{10^2}{17}, \frac{10^4}{18} \ldots\ldots$ od anche di $\frac{1}{17}, \frac{100}{17}, \frac{100^2}{17} \ldots\ldots$

Ora ricordando (Baltzer: *Aritm. gener.* § 13, 20) che se a diviso pel modulo k dà un resto r, a^m diviso per k ha un resto r^m, e che dato r od r^m, tutti gli altri resti che si ottengono col modulo k nel primo o nel secondo caso, sono della forma generale $r \pm yk$, $r^m \pm yk$ ove y è un intero qualunque, potremo formare il seguente sistema:

resti di $\frac{1}{17}$	ovvero	valori	di A_1	sono	1	$\pm 17y$
» » $\frac{100}{17}$	»	»	» A_2	»	-2	$\pm 17y$
» » $\frac{100^2}{17}$	»	»	» A_3	»	$(-2)^2$	$\pm 17y$
. . . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
» » $\frac{100^s}{17}$	»	»	» A_{s+1}	»	$(-2)^s$	$\pm 17y$

i primi quattro dei quali per $y = 0$, danno $A_1 = 1$, $A_2 = -2$; $A_3 = 4$, $A_4 = -8$.

Ora secondo il teorema i valori delle A debbono riprodursi periodicamente di quattro in quattro con segni opposti in due quaterne consecutive, e debbono essere in valore assoluto quelli ottenuti pel primo periodo, cioè 1, 2, 4, 8.

Riflettendo un poco sullo schema precedente si vede subito che affinchè A_s sia il primo coefficiente di una quaterna o *periodo*, esso dev'essere della forma $A_s = (-2)^{4m} \pm 17y$ ove m indica l'ordine di successione del periodo accresciuto di 1.

Pertanto due periodi consecutivi saranno adunque:

$$A_s = (-2)^{4m} \pm 17y, \quad A_{s+1} = (-2)^{4m+1} \pm 17y,$$
$$A_{s+2} = (-2)^{4m+2} \pm 17y, \quad A_{s+3} = (-2)^{4m+3} \pm 17y \quad \ldots [\alpha]$$

$$A_{s+4} = (-2)^{4m+4} \pm 17y, \quad A_{s+5} = (-2)^{4m+4+1} \pm 17y,$$
$$A_{s+6} = (-2)^{4m+4+2} \pm 17y, \quad A_{s+7} = (-2)^{4m+4+3} \pm 17y \quad . [\beta]$$

Supponiamo per fissare le idee che il periodo (α) sia di ordine pari, e quindi m sia dispari; allora vediamo se sono possibili i valori $A_s = 1$, $A_{s+1} = -2$, $A_{s+2} = 4$, $A_{s+3} = -8$. Essi sono possibili per m dispari, poichè le relazioni:

$$16^m \pm 17y = 1, \quad -2 \cdot 16^m \pm 17y = -2,$$
$$4 \cdot 16^m \pm 17y = 4, \quad -8 \cdot 16^m \pm 17y = -8$$

sono soddisfatte per valori interi di y (Baltzer: *l. c.*).

Se nella stessa ipotesi consideriamo il periodo (β), per le stesse ragioni sono soddisfatte per valori interi di y le relazioni

$$16^{m+1} \pm 17y = -1, \quad -2 \cdot 16^{m+1} \pm 17y = 2,$$
$$4 \cdot 16^{m+1} \pm 17y = -4, \quad -8 \cdot 16^{m+1} \pm 17y = 8$$

dunque nel caso di m pari i coefficienti A di due periodi consecutivi si succedono nel modo seguente:

$$1, \ -2, \ +4, \ -8, \ -1, \ +2, \ -4, \ +8 \ \ldots\ldots$$

Non offre ora difficoltà il provare che per m dispari quei segni sono mutati. Ma quel che abbiamo detto basta per provare completamente il teorema, poichè per il primo periodo $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ si hanno i valori $1, -2, 4, -8$ onde, in forza della dimostrazione precedente, pel secondo periodo deve aversi $A_5 = -1$, $A_6 = 2$, $A_7 = -4$, $A_8 = 8$, e pel terzo che è di ordine dispari dovranno ritornare i valori $1, -2, 4, -8$ e così di seguito.

79'. *Dimostrare: 1. che le perpendicolari condotte dai vertici di un triangolo a ciascuno dei lati, incontrandosi, determinano un esagono inscrittibile in un cerchio; 2. che gli angoli ed i lati opposti di questo esagono sono rispettivamente fra loro eguali; 3. che quest'esagono è equivalente al doppio del triangolo considerato.*

Questa proposizione può estendersi a qualunque triangolo?

(S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. A. *Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia (*).

(*) Dimostrazioni, sostanzialmente analoghe alla presente, vennero inviate dai Sigg. *M. Cunei* (alunno del R. Ist. tec. di Chieti), *C. Cesari* (R. Liceo Modena), *P. Marano* (studente privato a Catania), *F. Mariantoni* (R. Università Roma), *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli); altre dimostrazioni meno complete pervennero poi dai Sigg. *A. Baldassarre* (R. Ist. tec. Bari), *R. Catani* e *G. Fumanti* (R. Ist. tec. Roma), *G. Paoli* (R. Ist. tecnico Arezzo), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Sia ABC il triangolo dato che supporremo dapprima acutangolo; A', B', C' i punti di incontro delle perpendicolari condotte ai lati dai loro estremi e da bande tali che questi punti risultino rispettivamente interni agli angoli A, B, C.

Il quadrangolo $ABA'C$ è inscrittibile avendo due angoli opposti retti, quindi il cerchio circoscritto al triangolo dato passa per A' e similmente si dimostra che passa per B' e per C'.

Le diagonali AA', BB', CC' dell'esagono si intersecano nel centro O del cerchio e, per conseguenza, i lati opposti, p. es. AC' e $A'C$, sono eguali e sono pure eguali gli angoli opposti, p. es. $AB'C$, $A'BC'$, perchè iscritti in archi eguali.

Dalle equivalenze di triangoli:

$$AOC = AC'O, \quad BCO = BC'O, \quad ABO = AB'O,$$
$$CBO = CB'O, \quad BAO = BA'O, \quad CAO = CA'O,$$

si ricava sommando:

$$2 \,.\, \text{triangolo } ABC = \text{esagono } AB'CA'BC'$$

Se, mantenendo fissi il lato AB e la direzione del lato AC del triangolo primitivo, si fa muovere C sulla circonferenza O verso A sinchè l'angolo C diventi retto, il punto B' si confonde al limite con A ed A' con B. L'esagono primitivo si riduce allora ad un rettangolo pel quale il teorema sussiste evidentemente.

Seguitando il punto C ad avvicinarsi ad A nella direzione primitiva di CA, il triangolo diventa ottusangolo in C e le perpendicolari condotte da C ai lati CA, CB incontrano quelle condotte dai punti A, B al lato AB dalla parte opposta di C rispetto ad AB. La figura $AB'CA'BC'$ è allora un esagono intrecciato pel quale sussistono le prime due parti del teorema e le equivalenze precedenti, con la stessa dimostrazione.

In quanto alla 3ª parte, se dalla somma della 1ª, 2ª, 4ª e 6ª equivalenza si tolgono la 3ª e la 5ª, si ha, riducendo:

$$2\Delta\ ABC = \text{parallelog } CYC'X - \text{triang } AB'X - \text{triang } A'BY$$

ove X e Y indicano i *nodi* del perimetro dell'esagono in cui si tagliano le coppie di lati AC', $B'C$; CA', $C'B$.

Osservazione. — Se c_1, c_2 .... sono i coefficienti delle singole caselle delle quali è costituito un poligono a perimetro intrecciato, ed A_1, A_2 .... le aree di queste, si definisce come *area* di quel poligono la somma algebrica:

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 + \ldots\ldots = \Sigma.$$

(V. Baltzer: *Plan.* § 9).

Nel caso nostro, percorrendo il poligono nel senso $AB'CA'BC'$ ed il triangolo dato nel senso ACB, i coefficienti dei triangoli $AB'X$, $A'BY$ sono eguali a -1 e quello del parallelogrammo $CYC'X$ è $+1$, quando si assumano come positive le rotazioni da sinistra a destra.

Possiamo dunque dire anche adesso:

2 . triangolo $ACB =$ esagono $AB'CA'BC'$.

Il teorema proposto è dunque vero in generale.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **91***. dal Sig. *G. Calvitti, G. Candido, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, A. Gandolfi, S. Lopriore, P. Marano, A. Ognissanti, R. Palma, A Perna, E. G. Ricci, P. Taverna, G. Trapani*; **92***. *G. Bartoli, G. Calvitti, G. Candido, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, A. di Bello, A. Gandolfi, S. Lopriore, L. Manfredonio, P. Marano, A. Ognissanti, A. Perna, E. G. Ricci, M. Salvadori, G. Santorelli, P. Taverna, G. Trapani*; **93***. *G. Calvitti, L. Catelli, A. Dal Buono Sidoli, A. Ognissanti, R. Palma, G. Trapani*; **94**. *S. Catania, F. Palatini*; **96**. *U. Scarpis*; **98.*** e **99***. *G. Ascoli, A. Dal Buono Sidoli, D. de Blasi, G. Floridia, S. Lopriore, L. Manfredonio, P. Marano, A. Ognissanti, E. G. Ricci, P. P. Rizzuti, P. Taverna, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

100. Dimostrare che, quando n tende all'infinito si ha

$$\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}+\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

101*. A quale relazione devono soddisfare i coefficienti a, b, c affinchè il polimonio $x^4+ax^3+bx^2+cx+m$ si possa mettere nella forma $\left(x^2+\frac{a}{2}x+p\right)^2$?

E, nell'ipotesi che quella relazione sia soddisfatta, risolvere la equazione

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0. \text{ (**)}$$

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Un'equazione particolare di questa classe, cioè l'equazione

$$x^4+2x^3+3x^2+2x=81600$$

è stata risolta da *Luca Pacioli*.

102. Indicando col simbolo $\binom{h}{r}$ il numero delle combinazioni di h elementi presi r ad r, dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k} \binom{m+i}{m} = \binom{m+k+1}{m+1}$$

e farne applicazione a mostrare che

$$\sum_{i=0}^{i=k} (1+2+\ldots+i) = \binom{k+2}{3}, \quad \sum_{i=1}^{i=k} i^2 = \binom{k+2}{3} + \binom{k+3}{3}.$$

C. MARSENGO BASTIA.

103*. In un tetraedro, se i coseni delle facce d'un triedro sono proporzionali alle lunghezze degli spigoli opposti, le altezze del tetraedro passano per uno stesso punto: reciprocamente se le altezze d'un tetraedro passano per uno stesso punto, in ciascun triedro i coseni delle facce sono proporzionali agli spigoli opposti.

G. RIBONI.

104*. Indicare la costruzione mediante la quale può dividersi un poligono convesso $ABCDE\ldots$ in parti proporzionali a più segmenti dati $m, n, p, \ldots$, in un verso assegnato, ad es. $ABC\ldots$, mediante segmenti uscenti da un punto O interno al poligono, a partire da un segmento OX che termina ad un punto X di un lato, ad es. AB.

A. LUGLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

C. ARZELÀ. — *Trattato di Algebra elementare ad uso dei Licei.* 2ª edizione. — Firenze. Successori Le Monnier, 1891. Prezzo L. 4.

Lo scopo, che si propone quella parte della matematica elementare che ordinariamente si comprende sotto il nome di Algebra, è chiaramente indicato dall'A. nel primo paragrafo del capitolo primo. Tutta la tela del libro è magistralmente esposta in quelle poche pagine, e l'A., in tutta l'opera, non perde mai di vista il problema fondamentale dell'Algebra che egli formula così: « non conoscendosi « il valore dei numeri sui quali si opera, non si può sapere quando una certa « operazione è possibile, e quando è impossibile, e così di una *espressione algebrica* « non si potrà sempre dire che essa abbia significato; a meno che, intorno ai

« valori da potersi attribuire alle lettere, che entrano in essa, non si facciano
« le ipotesi e le restrizioni necessarie affinchè e le operazioni ivi indicate e
« quelle altre, che possono essere occorse per pervenire alla data *espressione* e
« delle quali in esse non è rimasta traccia, siano sempre possibili: la qual cosa
« ognun vede quanto intralcerebbe i ragionamenti e quanto limiterebbe il signi-
« ficato delle espressioni algebriche.

« È dunque importante togliere le impossibilità di certe operazioni, che sopra
« abbiamo messe in evidenza ».

Posto così il problema l'A. nelle varie parti del libro passa in rassegna tutte le operazioni che si possono fare sui numeri e, ogniqualvolta il risultato non è esprimibile con numeri appartenenti alla categoria di quelli sui quali si opera, introduce nuovi enti numerici pei quali stabilisce l'esistenza di tutti i concetti e di tutte le proprietà, che l'aritmetica attribuisce ai numeri ordinari. E siccome i nuovi numeri possono alla loro volta essere oggetto del calcolo, l'A. esplica come debbano intendersi le operazioni che vogliamo effettuare su di essi.

In seguito a ciò l'A. tratta prima di tutte operazioni e problemi che, come quello delle equazioni di 1° grado ad una e più incognite, e come quello delle disuguaglianze di 1° grado, non richieggono altra distinzione dei numeri, che quella di positivi e negativi. Poscia, venendo all'operazione di estrazione di radice, è mestieri estendere vieppiù il concetto di numero e l'A. si occupa di conseguenza dei numeri irrazionali ed immaginari. Per definire i primi egli si serve del concetto di limite di una grandezza variabile, che pone ogni cura di stabilire con precisione con esempi numerici e geometrici. E, per mezzo dei teoremi fondamentali sui limiti che dimostra con tutto il rigore possibile, dice come debbano intendersi tutte le operazioni sui numeri irrazionali, ai quali può così estendere con dimostrazioni rigorose tutti i corrispondenti teoremi, che già si sono visti valevoli per i numeri razionali. E poichè l'A. richiama i principali teoremi sulla misura delle grandezze, può considerare questi numeri non solo come enti astratti, ma altresì come veri rappresentanti dei valori di grandezze concrete. E questo, valendosi della rappresentazione dell'unità immaginaria su una direzione ortogonale a quella delle unità reali, gli permette di stabilire, anche per i numeri immaginari, quelle più semplici proprietà che sono indispensabili per poter sempre interpretare i valori delle radici di una equazione di 2° grado. Preparato così tutto il materiale, che può essere necessario, l'A. è in grado di trattare ciascuno degli argomenti dell'Algebra colla maggior generalità ed è così che la teoria delle proporzioni, delle equazioni di 2° grado, della funzione esponenziale e dei logaritmi, delle progressioni sono svolti con tutto il rigore desiderabile.

La teoria delle equazioni, come quella delle disuguaglianze, è fatta in modo, che essa si collega sempre col concetto fondamentale del libro; e ponendo, come base di essa, il concetto di funzione di una o più variabili, che l'A. stabilisce confortandolo con esempi opportunamente scelti dalla Geometria, vien fatta discendere dal problema di cercare il valore della variabile, o delle variabili per il quale la funzione acquista un determinato valore che sia maggiore o minore di un numero dato.

Anche la parte pratica del calcolo algebrico, della risoluzione e discussione dei problemi è trattata dell'A. con gran cura, e in modo da avviare i giovani a tutti gli artifizi, che possono semplificarne i procedimenti, e condurre più rapidamente e con maggior sicurezza al risultato. Così è notevole il modo con cui egli procede perchè, nel far sparire i divisori da una equazione, non vengano introdotte soluzioni estranee alla medesima.

Il libro termina con una nota sulla rappresentazione delle funzioni per mezzo di curve, ove in poche pagine il metodo cartesiano è esposto con eccezionale sobrietà e chiarezza, e, senza uscire dal campo elementare, è applicato alle funzioni di 1° e 2° grado, in modo da renderne facilissima l'intelligenza e, nello stesso tempo, in modo da dare una idea chiara e precisa della portata e dell'uso del metodo stesso.

Pregio principale di questo libro, di cui mi sono sforzato di dare un'idea è l'ordine logico, rigoroso e naturale, con cui le varie parti si collegano, dimodochè tutta la materia si svolge così in un tutto organico, retto da un' idea fondamentale, che lo guida dalla prima all'ultima pagina. Inoltre nell'ordine elementare l'A. segue lo stesso procedimento dell' analisi algebrica superiore, nello studio di ogni funzione, dimodochè i giovani, che proseguiranno negli studi matematici, non dovranno, nelle parti più elevate della scienza, trovarsi alle prese con concetti e metodo affatto nuovi.

Ora non mi resta che esprimere il desiderio che agli insegnanti dei Licei, ai quali il libro è destinato, sia dato modo di svolgere il loro insegnamento secondo gli intendimenti del chiarissimo autore. Ma questo non sarà possibile finchè si creda conveniente di proseguire col presente ordinamento, e nelle condizioni in cui attualmente è posto l'insegnamento della matematica nei nostri istituti classici.

Anche lo studio dell'Algebra può mirare, come ha detto il prof. Frattini nella Rivista bibliografica del fascicolo I, anno VI di questo Periodico a proposito di un libro d'Aritmetica (*), a due fini principali. Primo di questi, l'agile maneggio delle proprietà algoritmiche delle espressioni algebriche, l'altro, lo studio delle loro proprietà *chimiche* in quanto che esse possono rappresentare numeri nel significato più generale della parola. Il prof. Arzelà senza perdere di vista il primo di questi problemi dell'insegnamento algebrico elementare, imprimendo al suo libro un indirizzo altamente rigoroso e scientifico, dà pure un ampio svolgimento al secondo problema, quale non si trova in nessun trattato di Algebra elementare, e senza dubbio come meglio difficilmente si potrebbe fare.

Ma cogli ordinamenti attuali dei Licei è possibile raggiungere l'uno e l'altro scopo? Ai giovani, agli insegnanti, sono dati i mezzi di conseguirli? Con sole tre ore settimanali di lezione, possono con un tal indirizzo svolgere tutto il programma? È possibile ottenere sufficiente agilità nei calcoli, quando manca il tempo per opportuni esercizi, manca lo stimolo dell'esame scritto, manca spesso pel numero notevole di alunni, il modo di fare frequenti interrogazioni? D'altra

(*) Prof. S. Pincherle. — *Gli elementi dell'aritmetica ad uso delle scuole secondarie inferiori.* — Bologna, N. Zanichelli, 1891.

parte, finchè avremo un solo programma che deve servire indistintamente per i futuri medici, i futuri avvocati, i futuri naturalisti, i futuri ingegneri, i futuri matematici si potrà ragionevolmente da tutti pretendere uno studio dell'Algebra fatto con quella larghezza e con quel rigore di metodo con cui giustamente l'intende il chiarissimo prof. Arzelà?

E giacchè questa quistione non tocca i bilanci, speriamo che una buona volta si metta mano a dare alla nostra istruzione secondaria classica e tecnica un assetto definitivo, e più opportuno e conveniente per il buon andamento degli studi scientifici in generale e in particolare dei matematici, i quali, se non mi fa velo agli occhi, l'essere essi i miei preferiti, più degli altri hanno bisogno di urgente riforma.

Demetrio Valeri.

P. VISALLI e G. MANDES. — *Trattato di Algebra* ad uso degli alunni della R. Accademia navale, delle Scuole militari e secondarie. — Livorno, R. Giusti libraio-editore, 1890. Prezzo L. 3, 75.

Il libro, lungamente meditato, è armonico nell'insieme ed accurato nei particolari: preciso negli enunciati dei teoremi e delle regole, sobrio e rigoroso nelle dimostrazioni.

Leggendolo ci si sente qua e là come l'ispirazione di questo o quell'altro dei pregevoli trattati che corrono per le nostre scuole; cosa che forse non poteva evitarsi ma che, ad ogni modo, gli egregi A. non han tenuto a dissimulare. Pur non di rado ci s'imbatte in qualcosa d'originale e citerò ad esempio lo sviluppo ampio della teoria delle ineguaglianze ed inequazioni condotta simmetricamente a quella delle eguaglianze ed equazioni; e la teoria dei numeri irrazionali. In questa svolta col metodo del Dedekind, gli elementi della classe minore si suppongono disposti in ordine crescente e in ordine decrescente quelli della maggiore, e tra gli elementi delle due classi, chiamate perciò serie dagli A., è stabilita una corrispondenza univoca: il che toglie un pochino all'estetica del metodo, ma credo lo renda più accessibile all'intelligenza degli alunni. In questa teoria è corsa una svista, vero *lapsus calami*: come quoziente degl'irrazionali (A, A'), (B, B') è definito $\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}\right)$ invece di $\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$.

Qualche appunto di lieve momento si potrebbe muovere al libro, ma non mette conto notarlo; il meno lieve mi sembra questo, che nell'introduzione del numero negativo gli A. hanno tentennato tra la via tenuta dal Bertrand nella sua Algebra, e quella tracciata dal Betti in una nota alla stessa; in vero dopo la definizione puramente formale: « Chiameremo numeri negativi gli ordinari « numeri dell'Aritmetica preceduti dal segno — », e la definizione, in conseguenza, dei positivi, si legge quanto segue: « Formeremo i numeri negativi con « la stessa legge con la quale si formano i positivi; cioè formeremo il nu-

« mero —2 contando un'*unità negativa* dopo un'altra unità negativa, ecc. »; ora questa seconda parte non può riguardarsi, o io m'inganno, nè come chiosa nè come corollario della prima, ma presuppone la nozione del contare in doppio senso.

Chiude il volume una buona raccolta d'esercizi.

F. VIAGGI.

DOTT. OSKAR SCHLÖMILCH. — *Elementi di Geometria metrica.* - Parte I: L. 2,40. - Parte II: L. 2. - Parte III: L. 4. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891.

Mentre non posso convenire nel giudizio espresso dagli egregi traduttori, nella prefazione alla prima parte, riguardo agli Elementi di matematica del Baltzer, che secondo essi sarebbero assolutamente inadatti qual libro di testo nelle scuole mezzane, chè anzi è doveroso debito di giustizia riconoscere essere i medesimi un'opera di gran lunga fuori del comune e che ha arrecato all'insegnamento secondario in Italia segnalati servizi, nuovo titolo di benemerenza, se ve ne fosse bisogno, per l'illustre suo traduttore, il Prof. Cremona, sono lieto per altro di poter francamente affermare che i signori Prof. D. Gambioli e V. Bernardi hanno fatto opera assai commendevole voltando nel nostro idioma la *Geometrie des Maasses* del Dott. Oskar Schlömilch, noto ed insigne redattore di molte opere didattiche e scienziato di fama non comune nelle discipline matematiche.

La Geometria della misura dello Schlömilch comprende tre parti: Planimetria - Trigonometria piana - Stereometria, Trigonometria sferica e Geometria descrittiva — che i traduttori hanno pubblicato in tre distinti volumi. Per ora mi limito a riferire sulla seconda parte che ha tratto alla trigonometria piana.

Carattere spiccato della medesima è quello di non dar corpo agli accessori delle diverse teoriche che contiene, raggiungendosi notabile brevità, pur nondimeno senza ommissione del necessario, ciò che accresce efficacia al libro, rendendolo specialmente utile alle nostre scuole causa la ristrettezza del tempo inerente allo sviluppo dei programmi. L'A. non parte dalla considerazione dei rapporti trigonometrici degli archi com'è fatto nella Trigonometria del Serret e seguaci, ma studia i medesimi prima per l'angolo supposto acuto, quindi per l'angolo ottuso o per qualsiasi altro angolo maggiore, valendosi della considerazione delle proiezioni principale e secondaria d'una retta, ciò che, a mio giudizio, ha il vantaggio di non snaturare l'argomento. Singolarmente felice è poi la sua trattazione quando mostra (§ 9) come possa effettuarsi il calcolo delle funzioni trigonometriche, in quanto col procedimento da lui seguito si entra in modo così piano, e senza il sussidio di cognizioni ulteriori, nel concetto delle approssimazioni che si ottengono pel seno e coseno di un piccolo angolo fino ad un certo limite, da rendere di facile intelligenza per gli alunni un soggetto che di per sè presenta rilevanti difficoltà.

Oltre allo sviluppo delle proprietà delle funzioni trigonometriche ed alle applicazioni di queste alla risoluzione del triangolo, ciò che forma l'oggetto dei capitoli 1. e 2., l'A. nel cap. 3. si occupa della risoluzione del quadrilatero qualunque e in particolare di quello inscrittibile, dei rapporti trigonometrici delle linee spezzate e delle formole fondamentali della poligonometria, che lo conducono alla determinazione dell'area dell'n^{gono}, e nel cap. 4. considera le più ovvie ed ordinarie applicazioni della trigonometria ai problemi geodetici. In appendice trovansi svolti poi un metodo diretto pel calcolo del seno e coseno di un angolo qualunque fondato sulle formole che danno la somma dei seni e coseni di n angoli in progressione aritmetica e sulla relazione:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^h + 2^h + \dots + n^h}{n^{h+1}} = \frac{1}{h+1}$$

e conseguentemente la rettificazione grafica degli archi circolari, l'analisi di una costruzione appressimata dei poligoni regolari, finalmente la determinazione del poligono regolare di 17 lati.

Questo rispetto all'opera originale. Riguardo alla traduzione è da elogiare l'aggiunta fatta a ciascun capitolo in questa, come nella prima e terza parte, di una serie numerosa di variati esercizi e l'appendice dei traduttori nella quale si tratta della costruzione delle tavole dei logaritmi delle funzioni circolari, della riduzione a formole calcolabili con logaritmi di espressioni non monomie, sono dati esempi numerici di risoluzione dei triangoli, finalmente sono risolute alcune equazioni trigonometriche, argomenti tutti che fan parte degli ordinari programmi di trigonometria per le nostre scuole e nell'opera originale hanno sviluppo manchevole o nullo. Da segnalare nell'ultima appendice, per la sua grande utilità pratica, una tabella in cui son raccolti i valori dei 5 elementi di 12 differenti triangoli rettangoli e dei 6 spettanti a 12 triangoli obliquangoli.

Il mio giudizio non sarebbe peraltro completo ove passassi sotto silenzio un grave inconveniente, comune anche alla prima e terza parte, ossia i molteplici errori di stampa e talvolta l'imperfezione del periodo. Ora a me pare che se cosa di tale natura è grave per qualsiasi libro e qualunque sia l'argomento a cui si riferisce, più lo sia in un libro destinato a scolari i quali sempre dubbiosi di sè possono così esser tratti a false interpretazioni del soggetto che li interessa (*).

Terminerò col manifestare l'opinione che la Trigonometria piana dello Schlömilch, colle aggiunte arrecatevi dai signori traduttori, è un libro che si adatta assai bene come testo per lo studio di questa parte della matematica nei nostri Istituti tecnici.

A. Lugli.

(*) Per debito di giustizia debbo dichiarare che avendo confrontata la traduzione col testo tedesco, ho potuto verificare che diversi degli errori notati nelle formole esistono pure in questo.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico (*)

Bellacchi (G.) — *Lezioni di algebra elementare.* Vol. 3° - Parte II: Teoria delle equazioni. — Firenze, Tip. Barbèra, 1891. - Prezzo: L. 3.

Biffignandi (A.) — *Le principali proprietà delle grandezze proporzionali*, novamente esposte. — Acireale, Tip. V. Micale, 1891.

Carrozzini (A.) — Sette lezioni di trigonometria dal punto di vista delle coordinate cartesiane. — Lecce, R. Tip. Salentina, 1891. - Prezzo: L. 1,20.

Cesàro (E.) — Sul calcolo della dilatazione e della rotazione nei mezzi elastici. (Rend. R. Istituto Lom., 1891, Serie II, Vol. XXIV).

De Amicis (E.) — Introduzione alla teoria matematica della propagazione del calore (nei corpi solidi atermani). — Torino, E. Loescher, 1891. - Prezzo: L. 3.

de Longchamps (G.) — Sur les déterminants troués. (Journal de Mathématiques spéciales, Paris, 1891). = Intégration de l'équation de Brassine au moyen des fonctions hyper-bernoulliennes. (Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Limoges, 1890).

de Kerbedz (E.) — *Sophie de Kowalevski.* (Rend. Cir. mat. Palermo, Tomo V, 1891).

Giudice (F.) — Dott. G. Petersen: *Teoria delle equazioni algebriche.* (Rivista di matematica. Anno I, 1891).

Gob (A.) — Sur quelques transformations des figures. (Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de Limoges, 1890).

Lazzeri (G.) e Bassani (A.) — *Elementi di geometria.* Libro di testo per la R. Accademia navale. — Livorno, R. Giusti edit.-lib., 1891. - Prezzo: L. 6.

Loria (G.) — Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. (Bibl. math. di G. Eneström, Nou. Série, Vol. V, 1891).

Millosevich (E). — Sulle maree. (Neptunia, Anno I, 1891).

Palatini (F). — Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a quattro dimensioni fondata sopra una corrispondenza univoca dei punti reali ed immaginari di R_2 coi punti reali di R_4. — Palmi, Tip. Lopresti, 1891.

Rosadi (O.) — *Compendio di aritmetica elementare*, corredato di oltre 1900 esercizi e problemi graduati. — Firenze, Tip. dei Minori corrigendi, 1891.

Thiry (C.) — Le troisième livre de Géométrie à l'usage de l'Enseignement moyen et de l'Enseignement normal. — Gand, Ad. Hoste. - Prix: fr. 1.

— — Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre. — Gand, Ad. Hoste. - Prix: fr. 2.

— — Distances des points remarquables du triangle. (Bullettins de l'Académie royale de Belgique, 1891).

(*) Per deficenza di spazio si rimanda al fascicolo venturo l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute dalla chiusura del II fascicolo.

Chiusura della redazione il dì 24 maggio 1891.

SULL'INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA NEI LICEI

La recente pubblicazione di un nuovo trattato di geometria, quello dei sigg. Prof. Lazzeri e Bassani (*), mi suggerisce un'osservazione sul modo con cui si impartisce l'insegnamento della matematica nei nostri Licei. Già su questo giornale (Anno V, fasc. 2-3) il Prof. Valeri si occupò di tale questione, rilevando principalmente l'insufficienza del numero delle ore di fronte all'ampiezza del programma; io intendo qui considerarla sotto un altro punto di vista.

Il metodo di trattazione della geometria elementare, col quale svolgesi contemporaneamente la geometria piana e la solida, va prendendo sviluppo fra noi, giacchè dopo il trattato del De Paolis, che trapiantò fra noi l'idea altrove già nata, ne sono apparsi in Italia altri due (che io sappia), quello del Prof. Andriani e l'altro citato in principio, che hanno seguite le sue norme. Si discusse sul nome di fusione dato a questa contemporaneità dei due rami della geometria, e che realmente non è il più adatto, consistendo esso il più spesso in un ravvicinamento di teoremi simili nel piano e nello spazio; nonostante non si può negare che, sia o non sia fusione, essa presenta vantaggi non dubbi. Sarei dunque ben contento se, seguendo il consiglio dato dai miei ottimi amici Lazzeri e Bassani nella prefazione del loro libro, potessi nel mio insegnamento liceale adottare quella fusione. Ma faccio osservare ad essi che, come hanno detto poco prima nella stessa prefazione, tale fusione « a causa dei programmi restrittivi del Ministero della Pubblica Istruzione non ha ancora potuto essere attuata nei nostri licei » e che quindi il loro consiglio pur troppo non si può seguire.

O perchè non dev'essere possibile tentare nell'insegnamento classico officiale un metodo che da più d'uno è tanto caldamente raccomandato? Il guaio sta nei programmi, e sono appunto quelli che io propongo di modificare.

(*) G. Lazzeri e A. Bassani. — *Elementi di Geometria ecc.* — Livorno, Giusti, 1891.
Segnalo all'attenzione dei miei colleghi quest'opera scritta con serietà d'intendimenti e con lodevolissimo rigore. Dell'opera stessa il lettore troverà più oltre una recensione.

Se si pensa allo sconcio notato nella predetta prefazione, che cioè « i giovani del liceo arrivano al terzo anno senz'avere nessuna nozione « di geometria solida, mentre assai prima il professore di fisica e quello « di scienze naturali hanno bisogno di presupporre tali nozioni special- « mente nella cosmografia e nella cristallografia », si vede che, adottando nei licei la fusione delle due geometrie col mantenere la divisione dell'insegnamento in tre anni di studio, si scanserebbe il guaio accennato, per cadere forse nell'altro di veder trattate le teorie delle proporzioni, della similitudine e della misura in terzo corso, mentre occorrono certamente prima al professore di fisica. Io penserei che si potesse provvedere a tutto dividendo il corso di matematiche nei soli primi due anni di liceo, assegnando, ben inteso, ad essi tutte le 9 (*) ore che l'orario liceale dà alle matematiche. Sento già muovermi l'obiezione che l'insegnamento delle matematiche è così gravoso nel liceo, da non dover pensare a peggiorarlo condensandolo in un minor numero di anni; ma io rispondo che la mia riforma vorrei accompagnata da un'altra da cui mi ripromettere molto bene. Io credo (e non sono persona sospetta, come insegnante di matematiche) che l'attuale programma si possa alquanto ridurre per il maggior numero dei giovani del liceo, quelli che devono dedicarsi ad altri studi. Come me la pensa il Prof. Valeri (vedi articolo citato) e so che così la pensano altre persone autorevoli; certo è che meglio dell'attuale programma costretto a mala pena nelle 9 ore settimanali del liceo varrà un programma più modesto, ma svolto con cura nelle stesse ore. D'altra parte non può chi debba seguire all'Università i corsi di matematiche contentarsi della preparazione che oggigiorno riceve nel liceo, la quale è di per sè officialmente incompleta, e riesce incompletissima per il modo con cui è fatta a scolaresche generalmente avverse agli studi scientifici. Penso dunque che si potrebbe nei primi due anni di liceo impartire a tutti gli alunni un insegnamento di matematiche più breve dell'attuale, lasciando da parte la trigonometria tutta, in algebra i logaritmi e le progressioni e magari i numeri irrazionali, e restringendo la geometria al puro necessario.

(*) Mentre correggo le bozze di stampa apprendo con piacere che un'opportuna modificazione dell'On. Villari porta da 9 ad 11 le ore settimanali per le matematiche nei Licei.

L'esame di matematiche per la licenza si potrebbe dare al secondo anno (*), e nel terzo, per quei soli alunni che fossero destinati alle facoltà scientifiche dell'Università, si potrebbero completare gli insegnamenti propri dei corsi secondari, preparandoli a seguire con frutto le lezioni universitarie: il che non è possibile con l'attuale ordinamento, com'è universale lagnanza.

I giovani del terzo anno, che sarebbero certamente i migliori nelle scienze perchè destinati a quelli studi superiori che generalmente non s'impongono ma vengono scelti per inclinazione naturale, seguirebbero con prontezza nel suo corso il professore, e questi potrebbe con minore sforzo e maggior rapidità insegnare quel che ordinariamente richiede gran tempo e gran fatica e non dà frutto. Due o tre ore settimanali credo basterebbero allo scopo.

Con questa proposta l'intero insegnamento della geometria (ristretto nel modo indicato) si farebbe nei primi due anni di liceo. Ho detto *intero* perchè, secondo me, il primo libro d'Euclide (almeno così solo) non è al suo posto nel ginnasio superiore. Infatti i giovani che si trovano nel primo corso liceale provengono da diversi ginnasi e da istruzione privata, e si sono quindi preparati su testi differenti; o, se anche hanno studiato tutti sul medesimo libro, questo può non essere quello preferito dal professore di liceo. Ne viene, come osserva il Professor Valeri e come pur troppo fa il sottoscritto nel suo insegnamento, che il professore di liceo è costretto a ripetere anche il primo libro d'Euclide, perchè l'insegnamento sia dato con uniformità (**).

L'intero corso di geometria si potrebbe dividere in modo da assegnare parte della piana e parte della solida tanto in primo che in second'anno, talchè fosse possibile all'insegnante sia di tenere anno per anno il solito metodo della divisione della geometria piana dalla solida, sia di adottarne la fusione.

(*) se pure non fosse meglio adottare l'idea già espressa da altri (mi pare dal Prof. Mestica) di dare l'esame di licenza al secondo anno, dividendo il terz'anno in due, letterario e scientifico, a seconda dell'indirizzo degli studi universitari degli alunni.

(**) Quand'anche non ci fossero altre ragioni, mi pare che basterebbe a richiedere che venisse modificato il programma di Geometria nel ginnasio superiore il fatto che il primo libro di Euclide non contiene un complesso determinato e completo di teorie che possano stare da sè. Il nome augusto del Geometra greco non basta a rendere i suoi diversi libri di geometria adattabili uno per ogni anno d'insegnamento. L'inconveniente citato fa sì che i più dei professori, per non ingannarsi circa l'estensione da darsi all'insegnamento su un altro libro di testo, sono costretti a servirsi degli elementi d'Euclide, anche se non corrispondono ai loro desideri didattici; il professore di liceo che succede ad essi si trova pure imbarazzato da questa scelta già fatta.

Posto tang $60^\circ = A$ e tang $20^\circ = x$, l'equazione che dà x in funzione di A è (V. SERRET: *Trig.* Lib. 2°, § 71):

$$x^3 - 3Ax^2 - 3x + A = 0;$$

ma quest'equazione ha tre radici le quali oltre il valore di tang 20°, dànno anche i valori di tang 80° e tang $140^\circ = -$ tang 40°, e si sa dall'Algebra che il prodotto di queste tre radici è uguale al termine noto cambiato di segno diviso pel coefficiente del primo termine, dunque:

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 80^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \text{tang } 60^\circ,$$

da cui

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \cot 10^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \cot 30^\circ$$

e finalmente

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \text{tang } 10^\circ, \qquad \text{c. d. d..}$$

Dimostrazione dei Sigg. *P. Marano* (studente privato a Catania), *C. Lavarella* (alunno del R. Istituto tecnico di Porto Maurizio), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania), *G. Calvitti, A. Ceci, A. Perna, G. Santorelli* (R. Ist. tec. Napoli).

Sviluppando tang $20^\circ =$ tang $(30^\circ - 10^\circ)$ e tang $40^\circ =$ tang $(30^\circ + 10^\circ)$ e sostituendo per tang 30° il suo valore $\frac{1}{\sqrt{3}}$, si ha:

$$\text{tang } 20^\circ = \frac{1 - \sqrt{3} \,.\, \text{tang } 10^\circ}{\sqrt{3} + \text{tang } 10^\circ}; \qquad \text{tang } 40^\circ = \frac{1 + \sqrt{3} \,.\, \text{tang } 10^\circ}{\sqrt{3} - \text{tang } 10^\circ}.$$

Inoltre:

$$\text{tang } 30^\circ = \text{tang } (3 \,.\, 10^\circ) = \frac{3 - \text{tang}^2\, 10^\circ}{1 - 3\,\text{tang}^2\, 10^\circ} \cdot \text{tang } 10^\circ.$$

Moltiplicando membro a membro le tre ultime eguaglianze e riducendo si ha appunto

$$\text{tang } 20^\circ \,.\, \text{tang } 30^\circ \,.\, \text{tang } 40^\circ = \text{tang } 10^\circ.$$

82*. *Dimostrare che* log 2 (base 10) *è compreso fra* $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{13}$. *Trovare mediante queste limitazioni, il numero delle cifre della potenza* 64ª *di* 2.

(D. BESSO).

Soluzioni dei Sigg. *G. Calvitti, A. Ceci, A. Perna* (alunni del R. Istituto tecnico di Napoli), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia), *G. Federici* (Ist. tec. Spezia), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari).

Posto $\log 2 = x$, si ha: $10^x = 2$, con $x < 1$. Si potrà porre adunque $x = \frac{1}{y}$, dove $y > 1$, quindi:

$$10^{\frac{1}{y}} = 2, \qquad \text{ossia} \qquad 10 = 2^y.$$

Da qui risulta $3 < y < 4$, cioè $y = 3 + \frac{1}{z}$, dove $z > 1$.

Sostituendo ricavasi:

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}} = 8 \,.\, 2^{\frac{1}{z}}, \qquad \text{da cui:} \qquad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^z$$

e perciò $3 < z < 4$.

Riassumendo si ha:

$$\frac{1}{3+\frac{1}{3}} < x < \frac{1}{3+\frac{1}{4}}$$

e riducendo:

$$\frac{3}{10} < x < \frac{4}{13}.$$

Moltiplicando i membri delle disuguaglianze precedenti per 64, risulta:

$$64 \,.\, \frac{3}{10} < 64x < 64 \,.\, \frac{4}{13}$$

o finalmente, poichè $64\,x = 64 \log 2 = \log 2^{64}$:

$$\frac{192}{10} < \log 2^{64} < \frac{256}{13}.$$

La parte intera di queste due frazioni essendo 19, tale sarà pure la parte intera di $\log 2^{64}$, ossia 2^{64} avrà 20 cifre.

83. *Dimostrare che, se* $\varphi_1, \varphi_2; \ldots\ldots \varphi_n$ *sono funzioni lineari a coefficienti interi delle* n *incognite* $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$; *e se le lettere* a, *le* b, *le* μ *e le* A *significano numeri interi, dei quali* μ_1 *è primo con* A_1, μ_2 *primo con* A_2, *ecc., il sistema delle* n *congruenze di 1° grado con* n *incognite*:

$$\begin{aligned} a_1\,\varphi_1 &\equiv b_1 - \mu_1\, x_1 \ (mod.\ A_1) \\ a_2\,\varphi_2 &\equiv b_2 - \mu_2\, x_2 \ (mod.\ A_2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\,\varphi_n &\equiv b_n - \mu_n\, x_n \ (mod.\ A_n) \end{aligned}$$

è sempre risolubile quando una potenza di a_1 *sia divisibile per* A_1; *una potenza di* a_2 *sia divisibile per* A_2; *e via così.* (G. FRATTINI).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Supponiamo dimostrato il teorema pel caso di $n-1$ congruenze con $n-1$ incognite e dimostriamo che esso pure sussiste per n congruenze con altrettante incognite.

Ponendo

$$\varphi_1 = \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \ldots. + \alpha_n' x_n + \alpha_{n+1}',$$

la prima congruenza del sistema proposto diventa:

$$(a_1\,\alpha_1' + \mu_1)\, x_1 + a_1\,(\alpha_2' x_2 + \ldots. + \alpha_n' x) \equiv b_1 - a_1\,\alpha_{n+1}' \ (\text{mod. } A_1) \ [1].$$

Poichè per ipotesi esiste un potenza di a_1 che è divisibile per A_1, a_1 sarà divisibile per tutti i fattori primi che compongono A_1; essendo inoltre μ_1 primo con A_1 il coefficiente $(a_1\alpha_1' + \mu_1)$ sarà primo con A_1 e quindi la [1] si potrà sempre risolvere rispetto ad x_1 qualunque sieno i valori che si possono attribuire ad $x_1, x_2, \ldots. x_n$. Avremo allora, indicando con $\varphi(A_1)$ quanti sono i numeri inferiori ad A_1 e primi con A_1, la seguente espressione per x_1:

$$x_1 = \left\{ b_1 - a_1\alpha_{n+1}' - a_1\left(\alpha_2' x_2 + \ldots. + \alpha_n' x_n\right)\right\}\left(a_1\alpha_1' + \mu_1\right)^{\varphi(A_1)-1}$$

la quale per semplicità si può porre nella forma:

$$x_1 = B_2 x_2 + B_3 x_3 + \ldots. + B_n x_n + B_{n+1}$$

essendo $B_2, B_3, \ldots. B_{n+1}$ numeri interi.

Sostituendo ora tale espressione di x_1 nelle successive congruenze si ottiene il sistema di $n-1$ congruenze con $n-1$ variabili:

$$\begin{aligned} a_2\psi_1 &\equiv b_2 - \mu_2 x_2 \pmod{A_2} \\ a_3\psi_2 &\equiv b_3 - \mu_3 x_3 \pmod{A_3} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\psi_{n-1} &\equiv b_n - \mu_n x_n \pmod{A_n} \end{aligned}$$

nel quale $\psi_1, \psi_2, \ldots. \psi_{n-1}$ rappresentano funzioni lineari a coefficienti interi di $x_2, x_3, \ldots. x_n$, il quale sistema essendo simile al dato è per ipotesi risolubile. Risolto quest'ultimo sistema e determinati così i valori di $x_2, x_3, \ldots. x_n$ ne ricaveremo subito il valore di x_1, e quindi sarà così risolto anche il proposto.

Consideriamo ora il sistema:

$$\begin{aligned} a_1\left(\alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3'\right) &\equiv b_1 - \mu_1 x_1 \pmod{A_1} \\ a_2\left(\alpha_1'' x_1 + \alpha_2'' x_2 + \alpha_3''\right) &\equiv b_2 - \mu_2 x_2 \pmod{A_2} \end{aligned}$$

e dimostriamo che esso è solubile nell'ipotesi che una potenza di a_1 sia divisibile per A_1, una potenza di a_2 sia divisibile per A_2 e che μ_1, μ_2 sieno rispettivamente primi con A_1, A_2. Infatti dalla prima congruenza si ha:

$$x_1 = \left(b_1 - a_1\alpha_3' - a_1\alpha_2' x_2\right)\left(a_1\alpha_1' + \mu_1\right)^{\varphi(A_1)-1} = B_2 x_2 + B_3$$

e sostituendo nella seconda:

$$\left(a_2\alpha_1'' B_2 + a_2\alpha_2'' + \mu_2\right)x_2 \equiv b_2 - a_2\alpha_3'' - a_2\alpha_1'' B_3 \pmod{A_2}$$

ed essendo il coefficiente di x_2 primo con A_2 in quanto che a_2 è divisibile per tutti i fattori primi di A_2, e μ_2 primo con A_2, quest' ultima congruenza è sempre solubile e ci somministrerà il valore di x_2 dal quale ricaveremo poi quello di x_1. Essendo quindi solubile un tale sistema di due congruenze con due variabili, sarà pure solubile, per quanto abbiamo da principio dimostrato, un sistema di tre congruenze con tre variabili e così di seguito.

85. *Determinare i numeri di due cifre tali che i loro valori siano multipli del prodotto delle loro rispettive cifre.* (S. Gatti).

Soluzione del Sig. Prof. *F. Viaggi.*

Sia x la cifra delle decine ed y quella delle unità d'un numero; si vuole determinare x, y in modo che

$$\frac{10}{y} + \frac{1}{x} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad [\alpha]$$

sia numero intero.

Si tenga presente che la somma di due frazioni irreducibili non può essere numero intero, se le frazioni non hanno lo stesso denominatore.

Ciò posto possiamo fare tre ipotesi su y, che è < 10:

1ª: y primo con 10, quindi $y = x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{11}{x}$$

che non può essere intero se non quando è $x = 1, = 11$, donde $y = 1, = 11$; la seconda soluzione è da rifiutare;

2ª: y è divisibile per 2, quindi $y = 2x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{6}{x}$$

che è intero per $x = 1, = 2, = 3, = 6$, donde è $y = 2, = 4, = 6, = 12$; la quarta soluzione è da rifiutare;

3ª: y è divisibile per 5, quindi $y = 5x$, e la $[\alpha]$ diventa

$$\frac{3}{x}$$

che non può essere intero se non quando è $x = 1, = 3$, donde $y = 5, = 15$; la seconda soluzione è da rifiutare.

Riassumendo: 11, 12, 24, 36, 15 sono i numeri domandati (*).

86*. *Dimostrare che esistono due soli triangoli isosceli, tali che il punto medio della retta che congiunge il vertice del triangolo col punto di concorso delle altezze, e i piedi delle medesime, sono i vertici d'un quadrato.*

(G. Russo).

Soluzione dei Sigg. *A. Perna, A. de Falco* alunni del R. Istituto tecnico di Napoli.

Sia il triangolo ABC isoscele per avere eguali i lati AB, AC; sieno AA', BB', CC' le altezze, O il loro punto d'incontro, M il punto medio di OA.

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. Prof. *S. Catania, F. Palatini, G. Riboni, G. Russo*, e dagli alunni *G. Calvitti, A. Cesi, A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli).

Risponderemo alla quistione, dimostrando che la condizione necessaria e sufficiente affinchè il quadrilatero $MC'A'B'$ sia un quadrato è che l'angolo BAC sia $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$ di angolo retto.

Tale condizione è necessaria. In effetti, supponiamo che $MC'A'B'$ sia quadrato. L'angolo BAC non può essere retto, giacchè altrimenti i punti B', C', O, M si confonderebbero con A, e non potrebbe esistere il quadrato. Esso angolo dunque è o acuto, od ottuso. Nel caso che sia acuto, MB', come mediana dell'ipotenusa nel triangolo rettangolo $AB'O$ è uguale ad MA, dunque il triangolo MAB' è isoscele, e l'angolo MAB' è metà dell'angolo esterno OMB', cioè è $\frac{1}{4}$ di retto, quindi l'angolo BAC doppio di MAB' è $\frac{1}{2}$ retto. Nel caso che BAC sia ottuso la stessa dimostrazione prova che l'angolo $B'OC'$ è $\frac{1}{2}$ retto, quindi: $BAC = B'AC' = 2 \text{ retti} - B'OC' = \frac{3}{2}$ di retto.

La condizione è sufficiente. Infatti sia $BAC = \frac{1}{2}$ retto, l'angolo OMB' risulta anch'esso $\frac{1}{2}$ retto, e quindi $C'MB'$ è retto. Nel triangolo rettangolo $BB'C$ la mediana $A'B'$ dell'ipotenusa è uguale ad $A'C$, quindi il triangolo $A'B'C$ è isoscele, e avendo un angolo alla base di comune con ABC è ad esso equiangolo, perciò l'angolo $B'A'C = BAC = \frac{1}{2}$ retto, quindi $MA'B'$, complemento di $B'A'C$ è anch'esso $\frac{1}{2}$ retto, perciò nel triangolo $B'A'M$ si ha: $B'A' = B'M$. Similmente si dimostra $C'A' = C'M$; d'altra parte $C'M = B'M$, perchè ambedue eguali ad MA, dunque il quadrilatero $MB'A'C'$ è equilatero, ed avendo un angolo retto è quadrato. Se si suppone l'angolo $BAC = \frac{3}{2}$ di retto nel triangolo BOC del pari isoscele, l'angolo $BOC = \frac{1}{2}$ retto, ed il quadrilatero $MB'C'A'$ è quadrato.

Così resta provato interamente l'enunciato (*).

87*. *Si assegnino in modo generale i due limiti del numero delle cifre del quoziente di* a b c .... l *per* a' b' c' .... l', n *ed* n' *essendo il numero dei fattori di ciascun prodotto,* α, β, γ .... λ *ed* α', β', γ' .... λ' *i numeri delle cifre dei differenti fattori.*

(B. Carrara).

(*) Hanno risoluto la medesima quistione i Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *G. Calvitti, A. Ceci, E. La Fianza, P. Viscidi* (R. Ist. tec. Napoli), *C. Chigiotti* (R. Ist. tec. Chieti), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec Reggio Emilia), *C Ghetti* (R. Liceo Sinigallia), *E. Goti* e *G. Paoli* (R. Ist. tecnico Arezzo, *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *P. Marano* (studente privato a Catania), *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari).

Soluzione del Sig. *M. Appugliese*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Pongo per semplicità

$$\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda=\sigma, \qquad \alpha'+\beta'+\ldots\ldots+\lambda'=\sigma'.$$

Il più piccolo numero di α cifre è l'unità seguita da $\alpha-1$ zeri, il più grande è formato da α cifre uguali a 9; quindi un numero qualunque di α cifre è uguale o maggiore di $10^{\alpha-1}$, eguale o minore di $10^{\alpha}-1$; perciò possiamo scrivere le disuguaglianze

$$10^{\alpha}>a\geqq 10^{\alpha-1}, \quad 10^{\beta}>b\geqq 10^{\beta-1}, \quad \ldots\ldots \quad 10^{\lambda}>l\geqq 10^{\lambda-1},$$

dalle quali, moltiplicando membro a membro, deducesi la limitazione

$$10^{\sigma}>abc\ldots\ldots l\geqq 10^{\sigma-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

In guisa analoga si ottiene l'altra limitazione

$$10^{\sigma'-n'}\leqq a'b'c'\ldots\ldots l'<10^{\sigma'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Se si divide membro a membro la limitazione [1] per la [2], si ha l'altra

$$10^{\sigma-\sigma'+n'}>\frac{a\ b\ c\ldots\ldots l}{a'b'c'\ldots\ldots l'}>10^{\sigma-\sigma'-n}$$

quindi il numero delle cifre della parte intera di $\dfrac{abc\ldots\ldots\ l}{a'b'c'\ldots\ldots l'}$ non potrà essere minore di $\sigma-\sigma'-n+1$, nè superiore di $\sigma-\sigma'+n'$: ossia non potrà essere minore di

$$(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda)-(\alpha'+\beta'+\ldots\ldots+\lambda')-n+1$$

nè maggiore di

$$(\alpha+\beta+\ldots\ldots+\lambda)-(\alpha'+\beta'+\ldots\ldots+\lambda')+n'.$$

Con qualche esempio numerico è agevole mostrare che sia l'uno, sia l'altro limite può essere raggiunto: così con l'aiuto dei logaritmi si trova che $\dfrac{9999^7}{10^7}$ ha nella parte intera 21 cifre, e $\dfrac{100000^7}{9999^7}$ ne ha 8 (*).

88. *In un cerchio di raggio* R *si tiri un diametro* AB, *sul quale si prenda un punto* H *in modo che sia* $HA=\dfrac{1}{3}AB$. *Da* H *si conduca la corda* CD *perpendicolare ad* AB, *e dal punto medio* G *di* HD *tirisi la corda* EF *perpendicolare a* CD. *Calcolare le diagonali e l'area del quadrangolo convesso* CEDF, *e dimostrare che i lati* FC, ED *sono i cateti d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è il diametro.* (S. Catania).

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* alunno del R. Istituto tecnico Bari), *A. Ceci* e *A. Perna* R. Istituto tecnico Napoli), *A. Longo* (R. Liceo Acireale).

Soluzione del Sig. *N. Bottini*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

La corda CD è divisa per metà in H dal diametro perpendicolare AB e CH è cateto del triangolo rettangolo CHO (O centro del cerchio), di cui la ipotenusa ed un cateto sono misurate da R ed $\frac{R}{3}$, quindi

$$CD = 2 \,.\, CH = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\, R.$$

Il segmento HG, quarta parte di CD, è misurato da $\frac{\sqrt{2}}{3} R$; esso rappresenta la distanza fra il diametro AB e la corda EF, e quindi anche la distanza della corda dal centro, perciò

$$EF = 2\sqrt{R^2 - \overline{HG}^2} = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\, R\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{3}\, R.$$

Poichè le due diagonali del quadrangolo sono perpendicolari fra loro, l'area del quadrangolo è uguale al semiprodotto di queste due diagonali, ossia

$$CEDF = \frac{1}{2}\, CD \times EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{3}\, R \,.\, \frac{2\sqrt{7}}{3}\, R = \frac{4\sqrt{14}}{9}\, R^2.$$

Dal punto E tiriamo la parallela a CD, che incontri di nuovo in S la circonferenza; l'angolo FES è retto e però SF è un diametro.

Il triangolo rettangolo FCS, che ha l'ipotenusa eguale al diametro e per cateto CF un lato del quadrangolo, ha il secondo cateto SC eguale al lato ED: infatti, le corde SC, ED sottendono archi eguali come quelli che sono compresi fra corde parallele (*).

89. *Dimostrare la disuguaglianza*

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right\} > \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots\ldots > \frac{1}{n}.$$

(F. Giudice).

Dimostrazioni identiche dai Sigg. Prof. *F. Viaggi* e *G. Riboni*.

Dalla nota identità

$$a - 1 = \frac{a^m - 1}{a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots.. + a + 1}$$

(*) Mandarono soluzioni di questa questione anche i Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari); *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *E La Fianza*, *A. Verna*, *T. Rebollo*, *O. Scilla*, *P. Viscidi* (alunni del R. Ist. tec. Napoli); *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia); *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza); *E. Goti*, *A. Mucci*, *G. Paoli* (R. Ist. tec. Arezzo ; *N. Leo* e *G. Rocchetti* (R. Ist. tec. Foggia); *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), *P. Marano* (studente privato a Catania); *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro); *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

si deducono, nell'ipotesi $a > 1$, le disuguaglianze

$$a - 1 < \frac{a^m - 1}{m} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [\alpha]$$

$$a - 1 > \frac{a^m - 1}{m a^{m-1}} > \frac{a^m - 1}{m a^m} \ldots\ldots\ldots\ldots [\beta]$$

Dalla $[\alpha]$, ponendo $a = \sqrt[m]{\frac{m+1}{m}}$. si ottiene

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 < \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right)$$

e da questa ponendo $m = n,\ n+1,\ \ldots\ldots,\ n+h$, e addizionando

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots\ldots < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+h} - \frac{1}{n+h+1}\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)$$

e così è dimostrata la 1ª disuguaglianza.

Dalla $[\beta]$ ponendo pure $a = \sqrt[m]{\frac{m+1}{m}}$, si deduce

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 > \frac{1}{m\,(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

e quindi

$$\sqrt[m]{\frac{m+1}{m}} - 1 = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + \varepsilon$$

e da questa ponendo successivamente $m = n,\ n+1,\ \ldots\ldots,\ n+h$, si deduce

$$\left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) + \left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}} - 1\right) + \ldots + \left(\sqrt[n+h]{\frac{n+h+1}{n+h}} - 1\right) > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+h+1} + \varepsilon:$$

ora col crescere di h verrà momento in cui $\frac{1}{n+h+1} < \varepsilon$, e quindi è dimostrata la seconda diseguaglianza.

90*. *Se* A, B, C, D, E *sono punti d'una circonferenza e con centri rispettivamente in* B, C, D, E *e raggi* BA, CA, DA, EA *si descrivano altrettante circonferenze, dimostrare che i punti in cui queste s'intersecano sono tre a tre in linea retta.*

(A. Lugli).

Dimostrazione del Sig. *L. Pece*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Le sei intersezioni sono i vertici di un quadrilatero completo.

Per dimostrare ciò, considero tre delle circonferenze costruite, quelle p. es. che hanno i centri in B, C, D; esse, che già passano per A, s'incontrano a due a due di nuovo in altri tre punti, che sono simmetrici di A rispetto ai lati del triangolo BCD: tali punti sono per diritto, perchè i punti medi dei segmenti che li congiungono con A, in virtù del teorema di Simson (Cfr. Baltzer: *Plan.* § 4, 8), sono in linea retta (*).

Dimostrazione dei Sigg. *A. Ceci* e *G. Calvitti*, alunni del R. Istituto tecnico di Napoli.

Siano F, G, H rispettivamente gli ulteriori punti d'incontro delle coppie di circonferenze (BA, CA), (BA, DA), (CA, DA). In virtù del teorema sull'angolo inscritto, e poichè F ed H sono simmetrici ad A rispetto a BC e CD ordinatamente, gli angoli AGF, AGH sono eguali agli angoli esterni del quadrilatero inscritto $ABCD$, aventi rispettivamente per vertici B, D; quindi quelli come questi sono supplementari e i punti F, G, H stanno per diritto, il che prova il teorema enunciato.

Il Sig. *A. Ognissanti* (R. Liceo Bari), che inviò pure una dimostrazione del quesito, osserva che: In generale se si prendono n punti su una circonferenza e si descrivono, con centri in questi punti, uno eccettuato, $n-1$ circonferenze con raggi eguali alle rispettive loro distanze da questo, i punti d'intersezione delle circonferenze ultime, presi tre a tre sono in tante rette la cui totalità è $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3}$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: questione **91**', **92**', **93**', **98**' e **99**'. dal Sig. *A. Baldassarre*; **94**. *S. Catania, F. Palatini*; **96** e **97**. *U. Scarpis*; **100**. *F. Mariantoni*; **101**'. *A. Baldassarre, G. Candido, A. Dal Buono Sidoli, P. Marano*; **102**. *G. Bernardi, L. Bosi, S. Catania, F. Mariantoni, M. Martone*; **103**' e **104**'. *G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

(*) Soluzioni sostanzialmente analoghe pervennero dai Sigg. *C. Lararelto* (alunno del R. Ist. tec. di Porto Maurizio), *A. Longo* (R. Liceo Acireale), *C. Margreth* (R. Ist. tec. Reggio Emilia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

105. Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.

S. Catania.

106*. Dimostrare che se a, b sono due interi qualunque primi tra loro ed n è pure un intero primo con a, le due serie

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b, & \ldots\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3, & \ldots\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

U. Scarpis.

107*. Se n è una potenza intera di 2 se cioè $n = 2^k$, la somma delle prime n potenze di un numero qualsivoglia a, la potenza zero inclusavi, è data dal prodotto dei k fattori

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})(1+a^{2^3})\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}}).$$

F. P. Paternò.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. Lazzeri e A. Bassani Professori nella R. Accademia Navale. – *Elementi di Geometria*. – Libro di testo per la R. Accademia Navale. — Livorno. Tip. di R. Giusti, 1891.

1. Ecco un libro ben fatto. Sebbene gli autori lo presentino come testo per la R. Accademia Navale, nonostante io credo che gli sarà fatto buon viso anche in altre scuole, e stimo quindi non inutile il dirne qualche parola in questo periodico destinato all'insegnamento secondario.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

Liberi gli autori di seguire l'ordine delle materie da essi preferito, e incoraggiati, come essi dicono, dall'esperienza di 4 anni d'insegnamento, hanno (e con ragione) scelta la trattazione simultanea della geometria piana con la solida; le linee generali del libro sono quindi naturalmente quelle stesse del magistrale lavoro del De Paolis, le più razionali, a mio credere, e le più logiche, accettato che sia quel metodo. Dicendo così non voglio accusare gli autori di mancanza di originalità; e d'altronde un libro di testo per essere stimato non occorre che sia un'accolta di cose nuove, bastando che in esso siano accettate le buone idee di altri e messe a frutto migliorandole, perchè lo si debba ritenere un lavoro interessante. Nell'opera dei professori Lazzeri e Bassani si trova questo e meglio ancora, alcune sue parti avendo realmente impronta di originalità; essa è dunque di un'importanza non ordinaria.

I pregi di questo lavoro si avvertono facilmente. I postulati sono stati scelti con maggior cura che altrove e minore è il numero di quelli tacitamente ammessi; la fusione della geometria piana con la solida è più intima che nei libri consimili; e finalmente la teoria delle proporzioni è resa più facile col trattarla dal punto di vista aritmetico, che, come dicono gli autori stessi, è l'unico che ne riveli l'essenza.

Poichè sono queste le caratteristiche più salienti del libro, mi si permetta di intrattenermivi un poco.

Dei postulati già ho detto come siano stati scelti con cura: per altro è d'uopo aggiungere che quelli citati non sono tutti i necessari, e che alcuni di essi si appoggiano a parole il cui significato, non esplicitamente definito, deve tacitamente essere attinto all'esperienza. Ne faremo forse un grave carico agli egregi autori? Chiunque per poco abbia meditato sui fondamenti della geometria capirà come, su tale argomento, la perfezione sia davvero un ideale, tanto più quando un libro è destinato alle scuole, dove mille esigenze impongono limiti assai ristretti. Del resto gli autori stessi non pretendono (è una loro frase), « di aver detto l'ultima parola su questa questione »; ed io credo che l'ultima parola potrà dirsi solamente dopo che sia stato dimostrato quali sono i postulati scientificamente necessari e sufficienti per svolgere l'intera geometria elementare, questione che, se studiata già con amore (*), non può dirsi ancora completamente risoluta. Tolta questa sicura base scientifica, s'intende come la scelta dei postulati assuma carattere pratico, e dipenda dalla natura dell'insegnamento e dall'indole dei giovani a cui questo è rivolto. I postulati scelti dai nostri autori mi sembrano prestarsi assai bene ad una facile intuizione da parte degli scolari; essi non presentano quell'eccessiva minuziosità, la quale nelle scuole medie va sempre scansata anche, io credo, a spese di un po' di rigore, trattandosi di un tale argomento.

Quanto alla fusione della geometria piana con la solida, stimo inutile mostrarne i vantaggi: se non foss'altro, l'autorità delle persone che l'hanno accolta e diffusa e l'asserzione di chi ha potuto farne prova nell'insegnamento, devono togliere ogni dubbio anche a coloro che, per rigore di regolamenti e di pro-

(*) V. p. es. i lavori di PASCH, PEANO.

grammi, non l'hanno potuta giudicare nella scuola. Gli autori si sono studiati di cavare da questa fusione il massimo frutto, ed hanno realmente ottenuto qualche notevole risultato nuovo: cito, come un esempio, il teorema del § 144, nel quale le considerazioni stereometriche permettono di fare a meno della teoria delle proporzioni.

Non bisogna nascondere per altro che questa fusione della geometria piana colla solida consiste spesso unicamente in un ravvicinamento di teoremi simili nel piano e nello spazio; in tal caso, invece di costituire un vero passo dal punto di vista scientifico, non è che un artifizio didattico, col quale per altro si abbrevia il tempo e la fatica, lasciando tracce più profonde nella mente dei giovani e dando alla trattazione un certo aspetto di eleganza. I nostri autori ne hanno opportunamente profittato unendo addirittura i teoremi analoghi per il piano e per lo spazio e dando loro un enunciato unico: ma devo dire che qualche volta si sono lasciati trascinare da questo desiderio, dirò così, di condensazione, unendo teoremi che per loro natura sono alquanto differenti. Cito per esempio il § 189 relativo ai punti comuni a due circonferenze o a due superficie sferiche, nel quale l'analogia fra i due punti e la circonferenza comuni mi sembra un po' artificiosa.

Un'innovazione del libro in questione o, per dir meglio, una cosa che lo distingue dai trattati che intendono informarsi al metodo euclideo, sta nell'avervi esposte le proporzioni col metodo aritmetico.

Gli autori spiegano nella prefazione perchè si siano attenuti a questo. Per essi le proporzioni dipendono essenzialmente dal concetto di numero, ed i risultati possono essere espressi completamente solo con l'idea di rapporto, che trae seco quella del numero. È un fatto che se si potessero trattare le proporzioni con mezzi puramente geometrici, spogliandole dalla difficoltà di cui le circonda Euclide e mettendone a nudo l'essenza, sarebbe preferibile svolgerle con un tal metodo, innegabilmente più educativo dell'altro. Ma è un fatto altresì, che allo stato attuale della geometria e nonostante le semplificazioni che i moderni hanno portato alla definizione d'Euclide (p. es. De Paolis, Faifofer) gli alunni male si fanno un'idea del fatto geometrico a cui alludono le proporzioni; e di più rimane così gravoso lo svolgimento della loro teoria, da obbligare spesso l'insegnante (si ritenga pur questa una confessione di chi scrive) a passar sopra alle dimostrazioni dei teoremi più complicati. Trovo quindi come sia accettabile l'idea di trattare numericamente le proporzioni, tanto più in quelle scuole nelle quali poi della geometria metrica dovrà farsi largo uso.

Si consideri inoltre che la differenza fra i metodi geometrico ed aritmetico di trattare le proporzioni consiste essenzialmente in questo: che nel 1° non si definisce il rapporto in sè, ma solo l'uguaglianza o disuguaglianza di due rapporti, il che equivale a dare il nome di rapporto ad un *nuovo* ente, del quale con le proporzioni si stabiliscono le relazioni coi suoi consimili, cioè l'uguaglianza o la disuguaglianza, mentre nel 2° esso si definisce dando quel nome ad un ente già noto, il numero. Ma il processo tenuto nel 2° metodo per le proporzioni, non per esse soltanto comparisce in geometria. Per esempio il segmento si definisce ordinariamente come una parte di retta, cioè come un certo ente già noto, mentre per farne la teoria basterebbe, allo stesso modo che Euclide fa per i rapporti, definire l'uguaglianza o disuguaglianza di due segmenti come la possibilità o impossibilità di portare a coincidere il gruppo dei loro estremi. Così per l'angolo, la cui definizione è così controversa, si può fare la teoria definendo in modo consimile l'uguaglianza o disuguaglianza del gruppo di due rette, senza curarsi di attribuire a tal gruppo il significato di un ente a sè: e lo stesso si ripeta per i diedri, le striscie, gli strati ecc.. Se si concede allo scolare di aiutare la propria mente a concepire l'uguaglianza o disuguaglianza dei gruppi formati da due punti, o da due rette convergenti ecc. con l'unire ai loro concetti quelli a lui già noti di parte di retta o di parte di piano ecc., perchè non si potrà concedergli di aiutarsi a concepire i rapporti o le ragioni di due grandezze associandovi l'idea a lui già famigliare di numero? Ogni concetto nuovo è una nuova fatica per l'alunno; se la difficoltà dell'argomento richiede che si scansi, non c'è motivo di farne assoluta proibizione. Piuttosto, a corso terminato, si potrà (anzi sarà utile il farlo) accennare come sia possibile fare a meno di molti enti già definiti (segmenti, rapporti ecc.) e mostrare allora come un'altra definizione della proporzione (quella euclidea) conduca agli stessi risultati. Sarebbe questo un degno coronamento del corso di geometria: esso aprirebbe ai giovani più vasti orizzonti (*).

Del resto la trattazione aritmetica delle proporzioni può unicamente combattersi per la introduzione che essa fa del concetto di numero, giudicato come estraneo alla geometria. Ma io osservo che il concetto di numero non è da ritenersi come tale; giacchè se per *estraneo* s'intende *non conciliabile*, si dice cosa evidentemente falsa: se s'intende *inutile*, è chiaro che tale idea è inesatta per l'importanza che ha l'applicazione dell'algebra alla geometria e per il fatto che il numero serve, per mezzo dei rapporti, delle proporzioni e delle misure, a mettere in luce proprietà importanti delle figure geometriche: se poi s'intende *non necessario*, si osservi che almeno il concetto di numero intero (se non si voglia dire anche di frazione) è indispensabile per parlare di multipli e di sottomultipli, ed è poi necessario il concetto completo di numero nella teoria della misura. Altri concetti si usano in geometria, e da certi punti di vista sarebbero pure da dirsi estranei ad essa; mi limito a citare fra gli altri quello del moto. Secondo me la discussione non è da portarsi sull'introduzione del numero in geometria fatta prima o dopo, ma sul modo rigoroso o no con cui il numero viene introdotto. Se l'ammissione di tale concetto è fatta esattamente, le ragioni didattiche possono avere un gran peso per compierla in un momento piuttosto che in un altro (**).

2. Le osservazioni che ho fatte fin qui mostrano chiaro come io approvi senza restrizioni la struttura generale del libro: quanto allo svolgimento di esso non esito a dirlo lodevolissimo, e questa lode è tanto più apprezzabile, in quanto in Italia egregi autori ci hanno oramai abituati a trattati eccellenti per rigore

---

(*) C. in proposito il mio articolo « *Sul concetto di un numero* » (questo Giornale, Anno II) e la mia « *Teoria delle grandezze* » (Pisa, 1890).

(**) Mi si vorrà perdonare la troppo lunga digressione: l'importanza dell'argomento mi ha condotto ad esporre le mie idee, il che del resto era anche necessario per discutere quelle degli autori.

e per purezza di concetti. Nel libro di cui parlo gli argomenti sono trattati in modo completo, esponendovisi all'occorrenza teoremi raramente dati nei trattati (p. es. §§ 168, 346 e segg.) o altrove dati inesattamente (p. es. teor. del § 154 sui prismi parallelepipedi): dei teoremi, quand'è possibile, si danno gli inversi, usando spessissimo, e con sommo vantaggio della brevità e dell'efficacia, la legge delle inverse, sulla quale opportunamente s'insiste nei primi paragrafi. Alcuni teoremi sono originali o dimostrati in modo originale (*V.* p. es. quelli dei §§ 52, 142, 143, 144, 358 ecc.): fra essi si vogliono particolarmente citare quelli che, per la fusione della geometria piana con la solida o per l'opportuna disposizione delle materie, possono esser dimostrati con un numero di principii minore dell'ordinario. Per esempio la teoria dell'omotetia, quella dei piani, assi e centri radicali, che di solito si trattano con le proporzioni e con l'equivalenza, sono qui svolte indipendentemente da questa e da quelle con evidente vantaggio teorico. Debbo per altro confessare, giacchè ho parlato di vantaggio teorico, che io sono convinto come in un libro destinato all'insegnamento, stabilito quali sono le teorie da svolgersi ed i concetti da introdurre nell'intero corso, si debba cercare non di dimostrare i teoremi col minor numero di principii, ma con la maggior semplicità e facilità possibili, anche a costo di ricorrere a teorie non strettamente necessarie, visto che di quelle prima o poi si dovrà fare uso. Si osservi che ho detto « un libro per l'insegnamento », essendo una dimostrazione *teoricamente* tanto più apprezzabile quanto minore è il numero di principii che invoca; mentre l'insegnamento dal quale, per quanto è compatibile col rigore assoluto, devesi allontanare la eccessiva complicazione, richiede che le dimostrazioni sieno le più semplici, le più accessibili, quelle che meglio rivelano l'essenza dei teoremi. Per ragioni consimili non incontrò favore l'idea già da alcuni accolta di ritardare nella geometria più che si possa l'ammissione del postulato d'Euclide, col dimostrare dapprima tutti i teoremi che ne sono indipendenti, parendo nell'insegnamento inopportuno lo sdegnare il sussidio che viene alle dimostrazioni di varii teoremi da quel postulato che, non potendosi bandire dalla geometria, devesi prima o poi ammettere: e fecero quindi bene i nostri autori che quel postulato enunciarono fin da principio, profittandone all'occorrenza.

Mi sembra ben condotta la teoria della similitudine, che è presa da un punto di vista generale e comune alle figure piane e solide: per quanto io stimi che essa, strettamente connessa com'è alle proporzioni sulle quali essenzialmente si fonda, sia in un insegnamento secondario più efficace se trattata del tutto indipendentemente dall'omotetia. Questa essendo un'opinione mia, non toglie menomamente valore al bel capitolo del libro, che torno sinceramente ad approvare. Solo mi domando perchè, mentre, dopo aver trattato in generale la similitudine, si danno per i poligoni teoremi che li dimostrano simili quando sono soddisfatte certe condizioni, che sono quelle che sogliono costituire le ordinarie definizioni dei trattati (§§ 389, 390), non si faccia poi altrettanto per i poliedri, come avrebbe richiesto, se non altro, l'analogia.

Lodo gli autori per l'interessante capitolo sull'equivalenza del circolo e dei corpi rotondi, dove le ricerche sono fatte con tutta generalità, riferendosi esse alle superficie ed ai volumi generati dalla rotazione di linee e superficie semplici quando rotano di un angolo qualunque α, invece del solo intero giro di 360°, come si fa ordinariamente. E faccio plauso anche, vedendo in tal capitolo inclusa la superficie ed il volume del toro, dell'anello solido poligonale e dei loro settori; giacchè tali figure rientrano evidentemente nel dominio della geometria elementare, e completano la serie di quelle ottenute facendo rotare attorno ad un asse le figure tutte che studia la geometria piana, cioè segmenti, spezzate, circoli.

Fra i pregi del libro va annoverata la ricca ed importante collezione di problemi e di esercizi da svolgere, la quale fa nascere il desiderio che gli egregi autori, dovendo fare un'altra edizione del libro, vi aggiungano un capitolo sulla soluzione dei problemi geometrici, argomento tanto più interessante in quanto non esiste un metodo generale per detta risoluzione.

Nelle dimostrazioni trovo usata giusta sobrietà di esposizione. Talora, per altro, giudico che questa sia eccessiva: perchè se di cose di dimostrazione facile, sì, ma non breve si dica, come fanno talora i nostri autori: *è facile vedere ecc.*, temo che i giovani prendano l'abito non lodevole di sopprimere le dimostrazioni, troppo spesso appagandosi di quello che all'occhio mostra la figura.

L'amore di una certa brevità, che in giusta misura è da ritenersi come un pregio, ha condotto gli autori a citare dei corollarî, appartenenti a teoremi assai lontani dal luogo ove quelli sono esposti, senza convenienti singoli richiami o qualche parola di legame. Ne risultano lunghe liste di corollarii (come p. es. al § 383) che per qualche alunno potranno sembrare aride enumerazioni le quali lo tentino ad impararle solo macchinalmente. È vero per altro che un abile insegnante potrà evitare un tale sconcio; come è vero che tutto il libro per il rigore e l'ampiezza d'idee che lo informa dev'essere affidato all'opera di un professore intelligente ed esperto, perchè dia i frutti che se ne possono giustamente aspettare.

3. I tre argomenti principali del libro, cioè i postulati, la teoria dell'equivalenza, e quella delle misure, hanno gli autori seriamente meditati e di essi hanno intesa l'importanza: ed infatti si trovano esposti in modo ordinariamente rigoroso, benchè fra i tre il terzo, quello delle misure, mi sembri condotto meno robustamente. In questioni così capitali e delicate era per altro inevitabile che qualche cosa sfuggisse agli egregi autori: e mi permetto di esporre brevemente le mie osservazioni in proposito, alcune delle quali sono frutto di vedute mie personali e non accennano perciò a censura del libro.

Quanto ai postulati già ne ho detto qualche cosa in generale; e, anche per le ragioni allora esposte, non credo dover fare singole analisi minute. Mi limito a poche idee.

I postulati del moto (II, III, VIII) hanno la forma più comune e più intuitiva e, dal punto di vista didattico, sono ottimi. Ma è bene avvertire come in essi interviene (in modo, se si vuole un po' velato) un elemento davvero estraneo alla geometria, il tempo, se almeno non si abbia cura di definire opportunamente la parola percorrere (*) che, interpretata nel senso ordinario, richiama

(*) P. es. esprimendosi così: « Dire che un punto si muove da una posizione A ad una posi« zione B percorrendo una linea di cui A e B sono gli estremi o descrivendo questa linea, signil'idea di momenti successivi, idea, oltrechè non geometrica, difficile a mettere in chiaro.

Vedo con piacere citato in modo esplicito il postulato IV, che fin qui si soleva ammettere tacitamente: soltanto esso non appare completo, come si nota al momento di applicarlo ai teoremi dei §§ 76 ed 81 nei quali si dimostra che i contorni dei poligoni sono linee complete, ed altri simili. Infatti al § 76 (poligoni convessi) si dice che la linea incompleta suddivide la superficie in *due* parti, ciò che non è richiesto nel postulato. Ed al § 81, dove si tratta dei poligoni qualunque, considerando le due spezzate come formanti una linea sola, resta dubbio circa al numero di queste parti. Che se al § 81 s'intende di applicare il postulato prima per una spezzata e poi per l'altra, ne è legittima l'applicazione per la prima, non per la seconda. Osservazioni analoghe si facciano per i corrispondenti teoremi sugli angoloidi, sui poliedri ecc. Per altro è da ascrivere a merito degli autori l'aver riconosciuto come il fatto che i contorni dei poligoni o le superficie degli angoloidi ecc. sono completi sia da enunciarsi esplicitamente e da tentare di dimostrarlo, quando non si ritenga opportuno di prenderlo come un postulato esso stesso (*).

Noto l'aspetto che assume in questo libro il postulato d'Euclide (post. X) il quale, fuso con quello dello scorrimento del diedro, prende una forma assai semplice ed intuitiva.

Il postulato XIII (postulato della continuità) è ammesso per tutte le grandezze sotto la forma che si usa in tutti i trattati. A me sembra che sarebbe conveniente l'ammetterlo o solo per i segmenti, o almeno solo per essi e per le altre grandezze elementari (angoli, striscie, strati, diedri): prima di tutto perchè si dimostra poi facilmente per le altre grandezze, secondariamente poi perchè per le grandezze non elementari (superficie, solidi) si afferra male l'esistenza di un tal limite, eccetto per serie speciali di variabili che pure si possono ricondurre al caso dei segmenti. Per esempio, prendendo due variabili convergenti formate da convenienti poligoni in cui il numero dei lati vada continuamente crescendo e non siano regolari, il loro limite non si immagina bene quale possa essere, se prima non si trasformano in triangoli o parallelogrammi di eguale altezza, nel qual caso l'esistenza del limite risulta dimostrata solo che si applichi il postulato alle serie convergenti dei segmenti delle basi.

4. Passando alla teoria dell'equivalenza, la quale è condotta in modo simile a quello della Geometria del De Paolis, credo dover notare che le condizioni citate nel § 270 come caratteristiche per le classi di grandezze non sono sufficienti, perchè da esse discendano tutte le altre (**). Di più per le classi che sono prive della seconda e terza proprietà caratteristica non può asserirsi, come è detto nello stesso paragrafo a pag. 249, che *perciò solo* non godono neanche

---

« fica considerare insieme il punto A e questa linea ». Così per le superficie e per i solidi. In tal modo i due postulati II, III sono suppliti da una definizione. Il postulato VIII resta postulato e diviene: « Una retta può scorrere in modo che ciascun suo punto descriva un suo segmento ». Noto per altro che questo modo di considerare il movimento come accompagnato da un ente generato non è, a mio credere, il più opportuno in geometria.

(*) Come fanno i professori Sannia e d'Ovidio nell'edizione 8ª della loro *Geometria*.

(**) Cfr. la mia « *Teoria delle grandezze* ».

le altre proprietà: poichè se queste si dimostrano mediante quelle, non può dirsi *a priori* che non si possono dimostrare anche senza. Circa la proprietà citata nel § 273 (quella che per due grandezze A, B si verifica necessariamente uno dei tre casi $A \gtreqless B$) è sfuggita agli autori la frase « che essi dimostreranno « che tale proprietà non vale per certe classi, p. es. per i poliedri », mentre in seguito non solo ciò non si dimostra, ma di più con le definizioni ampliate di equivalente, maggiore e minore si prova che le classi dei poliedri la godono esse pure.

Così non trovo opportuna la distinzione delle grandezze nelle tre classi del § 275, giacchè grandezze della terza specie sono dette quelle per le quali fino al punto in cui si classificano come tali non si sa se sono o no della prima o della seconda specie: e quindi mentre sono determinate le proprietà che servono a caratterizzare una classe come di prima o di seconda specie, non è data la proprietà che da esse distingua quelle di terza specie, altro che sotto forma di una proprietà negativa ed accidentale. Anzi può darsi (diremo di più che realmente succede così quando si ampliano i concetti di equivalenza ecc. per mezzo dei limiti) che, in seguito, le grandezze che in un certo momento si chiamano di terza specie, si possano chiamare almeno di seconda godendo tutte le proprietà di esse, quando almeno queste proprietà si ritengono esposte come nella definizione 2ª del § 275. Si vede infatti in seguito, per le grandezze limiti di serie convergenti (quelle che aggiunte alla classe di seconda specie cambiano questa in una di terza specie) che date due qualunque di esse, o una di esse ed una delle grandezze di seconda specie, A e B, si ha sempre anche per esse uno ed uno solo dei tre casi $A \gtreqless B$. Su questo argomento preferisco come più corretta la distinzione fatta nella *Geometria* dei professori Sannia e D'Ovidio (§ 215, 8ª edizione); ma devo osservare che forse l'inesattezza ch'io rilevo ha la sua base unicamente nella definizione delle grandezze di seconda specie, nella quale non è al certo resa completa l'idea degli autori.

5. Due parole sulla teoria delle proporzioni e della misura.

La definizione del rapporto di A a B (§ 373) come « il numero che si ricava « dall'unità per mezzo delle operazioni mediante le quali dalla grandezza B si « può ricavare una grandezza equivalente ad A » mi sembra incompleta; giacchè bisognerebbe indicare la natura delle operazioni che sole in questa questione sono lecite per ottenere A da B (somme, multiple, summultiple, limiti di variabili convergenti) e mostrare che esse ed il loro ordine di successione sono determinati o almeno che la loro diversa scelta non influisce sul risultato, perchè non si movesse a questa definizione l'obiezione che si fa all'ordinaria definizione di prodotto (*). Tale insufficienza si riflette naturalmente sul teorema del § 376: « Dati i rapporti di una prima grandezza ad una seconda e di questa ad una « terza, il rapporto della prima alla terza è uguale al prodotto dei due rapporti dati ». Inoltre la dimostrazione di quest'ultimo teorema si fonda su un circolo vizioso. Infatti: che se r_1 è il rapporto di A a B ed r_2 il rapporto di B a C, per

(*) Com'è riferita nel libro stesso al § 376 (Cfr. PEANO. *Rivista Matematica* Fasc. 4. e 5. dell'anno I).

eseguire su C le operazioni per mezzo delle quali si passa da 1 ad $(r_2 \times r_1)$ *basti* eseguire prima su C le operazioni con cui da 1 si ottiene r_2 (avendosi così B) e poi su B le operazioni con cui da 1 si ottiene r_1, ossia che il risultato della operazione $(r_2\, r_1)$ fatta su una grandezza sia uguale al risultato delle successive operazioni r_2 ed r_1 fatte su di essa, mi sembra un teorema che deve essere dimostrato e che, se si guarda bene, equivale a quello proposto.

Perchè il concetto di rapporto fosse poi stabilito senza ambiguità ed apparisse uniforme per il caso delle grandezze commensurabili od incommensurabili, occorreva che gli autori avessero aggiunto il teorema che « se una grandezza B, « commensurabile o no con un altra A, è limite di due variabili convergenti, « il rapporto di B ad A è il limite delle serie (che risultano convergenti) dei « rapporti ad A delle variabili convergenti ». Così si sarebbe stabilito con esattezza che ad una certa grandezza data ogni altra grandezza non ha che un rapporto solo, da cui discende l'unicità della misura rispetto ad una data unità.

Circa poi alle misure, sebbene il dire (come fanno gli autori) che sono rapporti includa che godono le proprietà di questi, sarebbe stato utile di mettere in evidenza che le misure della somma, della differenza, dei multipli ecc. di grandezze si ottengono sommando, sottraendo, moltiplicando ecc. le singole misure.

Taccio di altre poche osservazioni di importanza secondaria, facili a farsi da chiunque, e che non alterano in nulla il rigore generale.

6. Al termine di questa rassegna del libro, credo dovere accennare che la minuzia delle osservazioni fatte depone in suo favore, poichè solo nei lavori ben fatti colpiscono i piccoli difetti. Ci auguriamo che esso sia studiato ed apprezzato da quanti s'interessano agli studi geometrici: e che, resa possibile dai programmi la fusione della geometria piana con la solida in tutte le nostre scuole secondarie (*), l'ottima opera possa entrare in queste a recarvi i frutti che un insegnamento robusto e rigoroso deve necessariamente dare.

È giusto poi dire che, a renderla più pregevole, contribuiscono come fattori non trascurabili così la bella stampa e la buona scelta dei diversi caratteri che agevolano il compito dello studioso, come le accuratissime figure, molte delle quali, specialmente nella parte stereometrica, hanno una chiarezza ed una eleganza alla quale pur troppo gli editori italiani non ci hanno abituati. Anche all'egregio tipografo livornese sia dunque data la lode che si merita.

Torino, maggio 1891.

RODOLFO BETTAZZI.

DOTT. GIUSEPPE M. TESTI. — *Corso di Matematiche.* – Vol. I: *Aritmetica razionale.* — Livorno, Giusti, 1891. L. 2,50.

Con questo primo volume di un *Corso di Matematiche* il Dott. Testi dà non dubbie prove di possedere eccellenti disposizioni, sussidiate da forti ed accurati studi, per riuscire ottimo autore di opere scolastiche.

(*) V. l'altro mio art. *Sull'insegnamento della geometria nei Licei* a pag. 113.

Egli comincia col definire *collezione* e poi dimostra tre importanti teoremi relativi: uno allo scambio di due oggetti in una stessa collezione, e gli altri due all'indipendenza dall'ordine, nell'esaurirsi assieme, ovvero no, gli oggetti di due collezioni che si fanno corrispondere due a due: espone convenientemente il concetto di grandezza discreta e quello di eguaglianza e di diseguaglianza tra due grandezze discrete omogenee, e, relativamente a queste, dimostra con molta opportunità le proposizioni che negli altri trattati appariscono sotto il nome di assiomi.

Osservato in seguito che le relazioni, considerate sulle grandezze discrete, sussistono indipendentemente dalla natura intrinseca degli oggetti che formano le grandezze stesse, passa a dare il concetto di *numero intero* riguardandolo come la collezione di elementi astratti (*unità*), e quindi gradatamente estende ai numeri interi le proprietà dimostrate per le grandezze discrete.

Parla poi della numerazione decimale, dimostrando nella numerazione scritta cinque proposizioni le cui verità sono in quasi tutti gli altri trattati *solo tacitamente ammesse*.

Appoggiate su basi così salde, non recherà meraviglia che io dica che tutte le teorie seguenti procedono senza sottintesi e col massimo rigore. E sebbene l'A. si riservi di trattare delle funzioni e dei limiti in altro volume del suo *Corso di Matematiche*, nondimeno, anche senza il sussidio di queste nozioni, egli è riuscito a svolgere convenientemente ciò che riguarda le generatrici dei numeri decimali, ricorrendo (dopo aver definito che cosa s'intenda per *ridotte successive* d'un numero periodico) ai seguenti due teoremi:

1° *La differenza fra una data frazione ordinaria e le ridotte successive del numero periodico corrispondente è minore, quando è maggiore il numero d'ordine delle ridotte considerate.*

2° *Ogni numero decimale periodico ha una sola generatrice.*

che naturalmente ha prima dimostrati.

Caratteristiche, che si notano in tutto il corso dell'*Aritmetica razionale* del Dott. Testi, sono: *unità di metodo, chiarezza di esposizione, logica sempre rispettata in ciò che si riferisce ad ordine, induzione e deduzione; linguaggio preciso ed in giusta misura, e procedimento nelle dimostrazioni sempre informato al debito rigore.*

Tuttavia mende non mancano, ma sono di così poca entità e di tal genere da non togliere pressochè nulla all'importanza ed al valore del libro. Passiamole in rassegna.

Trattandosi di Aritmetica razionale, mi sembrano superflue la tavola di Pitagora e la regola per servirsene, non che le regole in esteso per eseguire le quattro operazioni sui numeri interi.

Noto che nella regola 73, pag. 42: « *Per togliere da un numero un altro, del quale le cifre sono tutte minori di quelle dello stesso ordine del primo, si scrive il secondo numero sotto il primo per modo ecc. Si sottraggono poi ordinatamente dalle cifre del primo quelle del secondo (cominciando da quelle delle unità) e si scrivono ecc.* » che la parte racchiusa fra parentesi è perfettamente inutile, giacchè, per *il caso contemplato*, torna indifferente il cominciare da sinistra o da destra ecc.

Vorrei più chiaro l'enunciato del teorema 94, pag. 53, il quale, com'è, mi sembra possa lasciar dubbio se nel dover moltiplicare, per es. 708000 per 15, basti il moltiplicare 708 per 15 e quindi scrivere alla destra del prodotto tre zeri, oppure moltiplicare 78 per 15, scrivendo poi alla destra di tale prodotto quattro zeri.

Inoltre, rispetto all'ordine, esso dovrebbe essere posposto ai n. 95, 96, 97 nei quali si tratta rispettivamente della moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di una cifra sola; di un numero di più cifre per un altro composto da una cifra significativa seguita da zeri, o di due numeri di più cifre.

Ometterei altresì la proposizione 268, pag. 254: « *Di due unità frazionarie di differente denominatore è minore quella che ha denominatore maggiore,* MAGGIORE L'ALTRA », la quale, evidentemente, è inclusa in quest'altra n. 269, pag. 155: *Di due frazioni che hanno eguale numeratore e diseguale denominatore, è minore quella che ha il denominatore maggiore,* MAGGIORE L'ALTRA. In entrambe poi è a notarsi che è perfettamente inutile l'espressione *maggiore l'altra* con cui esse terminano.

Quanto agli esercizi proposti in fin del libro, osservo che sono tutti ben adatti. Solo vanno corretti i due ai n. 53 e 93, i quali, per errori tipografici, così, come sono enunciati, non possono stare. Nel primo di questi bisogna scrivere tra *L'ho pensato* e *Aggiungici*, quest'altra espressione: *Raddoppialo. – L'ho raddoppiato*; e nel secondo: *Dimostrare che il prodotto* n (n — 1), *dove* n *rappresenta un numero intero maggiore di 2, è sempre divisibile per 6,* bisogna scrivere $n\ (n^2 - 1)$ al posto di $n\ (n - 1)$, e sostituire l'espressione *non minore di 2* all'altra *maggiore di 2.*

Come ognun vede, le mende da me notate sono poche, lievi e facili a farsi scomparire in altre edizioni; mentre invece i pregi sono molti e tali che, a giudizio mio, l'*Aritmetica razionale,* di cui scrivo, merita di essere classificata fra quei lavori che si possono davvero dire *ben pensati ed ottimamente compiuti.*

Mi auguro intanto di vedere presto gli altri volumi, oltre al secondo già pubblicato, del *Corso di Matematiche* intrapreso dall'egregio Dott. Testi, e che il volume di cui ho parlato abbia nei nostri istituti classici e tecnici diffusione pari a' suoi meriti.

STEFANO GATTI.

Prof. STANISLAO TAMBURINI. — *Guida pratica di Disegno geometrico,* esposta a tavole sinottiche ad uso delle Scuole tecniche, normali, professionali, ecc.. — Parte I, L. 1. 25; parte II, L. 1. 25; parte III, L. 1. 25. Antonio Vallardi, editore, Milano.

Questa *Guida pratica* consta di XXXII tavole, delle quali dieci spettano alla 1ª parte, dieci alla 2ª e le rimanenti alla 3ª. Delle tavole appartenenti a ciascuna parte alcune sono dedicate alla soluzione grafica di problemi, altre alle applicazioni. Accompagna le tavole un breve *Testo complementare* in cui sono descritte le costruzioni dei problemi graficamente rappresentati in quelle, il che è senza dubbio opera utile, quantunque nomenclatura per le singole figure considerate ed accenni alle costruzioni medesime si trovino in ciascuna tavola. Ecco il principale contenuto della *Guida:*

I PARTE. — Problemi relativi a tracciamento di parallele e perpendicolari, divisione in parti uguali di segmenti ed angoli, costruzione di quadrangoli e rettangoli, soddisfacenti a determinate condizioni, e di poligoni regolari. Descrizione di fascie ornamentate o meandri, di rosoni, soffitti e pavimenti.

II PARTE. — Inscrizione e circoscrizione di poligoni regolari e poligoni semplici e qualche trasformazione di figure, divisione della circonferenza in 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 10 parti uguali e divisione approssimata della medesima in qualsivoglia numero di parti uguali, costruzione d'un poligono regolare qualunque datone il lato, descrizione d'un cerchio tangente a rette o circonferenze date. Raccordamento degli archi circolari, costruzione dell'evoluta, delle ovali e degli ovoli; ancora fascie, rosoni, soffitti e pavimenti variamente ornamentati e di più difficile esecuzione di quelli considerati nella 1ª parte: ruote dentate, inferriate, anfore e vasi di svariata forma, colonnette per balaustra, spirali, ecc.

III PARTE. — Tracciamento delle sezioni coniche, della cicloide e dell'elica: sviluppo di solidi geometrici, rappresentazione su due piani ortogonali di solidi e delle loro sezioni. Le applicazioni riguardano la costruzione della vite a pane triangolare, delle scale metriche e della meridiana orizzontale e verticale.

Varie, di difficoltà graduale e di molto buon gusto le applicazioni le quali, considerate le scuole a cui la *Guida* è particolarmente destinata, nè teoriche, nè d'arti e mestieri, mi sembrano tenute in giusta misura. Quasi tutte le tavole illustrative dell' opera sono a più tinte, ciò che dà risalto al disegno ed è stimolo ed insegnamento ai giovanetti per lo studio dell'acquerello, sicchè per la parte applicativa la *Guida* stessa parmi opera perfettamente riuscita.

Ma rispettando anche le esigenze richieste dallo sviluppo graduale delle applicazioni, non può dirsi altrettanto bene della parte teorica, relativa cioè alla scelta dei problemi trattati, poco ordinata e manchevole. Il breve testo complementare alla *Guida* è poi redatto con linguaggio pratico sì ma altrettanto scorretto.

Il problema della fig. 1ª, tav. XI è sbagliato, in quanto la figura che si ottiene non è un triangolo *equilatero* ma isoscele. Tutte le altre costruzioni, verificate una per una, anche col sussidio dell'analisi, sono esatte. Per me trovo inutili certe costruzioni complicate, di discutibile utilità pratica, quale ad es. quella della fig. 6ª, tav. XI, relativa all'inscrizione d'un pentagono regolare in un triangolo equilatero: vorrei maggiormente estesi i problemi riguardanti la trasformazione delle figure rettilinee in altre equivalenti e mi piacerebbe veder introdotte alcune delle costruzioni che richiedono l'uso della sola riga, che si studiano nella geometria proiettiva, almeno quelle elementarissime relative al tracciamento delle polari di un punto rispetto a due date rette e ad una circonferenza o ad una conica data (giacchè l'A. insegna a costruire le coniche con moto continuo), non foss'altro come utile esercizio di disegno manuale.

Meglio che la costruzione data dall'A. per la divisione approssimata della circonferenza in n parti uguali, varrebbe citare per $n > 5$ la seguente: Dividasi il diametro in n parti uguali, si descriva il raggio perpendicolare ad esso e si prolunghino diametro e raggio di $\frac{1}{n}$ del diametro stesso. Congiunti i due punti così ottenuti si ottiene una retta segante il cerchio in due punti, il segmento congiungente quello dei due punti maggiormente prossimo al diametro col 3° punto di divisione del diametro stesso è con grande approssimazione il lato del poligono regolare inscritto di n lati. L'errore che si commette con tale costruzione nell'angolo al centro, corrispondente all'ennesima parte del cerchio, non arriva a 3′ pei poligoni regolari inscritti di 7, 13, 15, 17, 19, 21,..... 101 lati ed a 4′ per l'ennagono e l'undecagono (*) dunque non raggiunge in ogni caso $\frac{1}{1350}$ del quadrante, errore di molto inferiore a quello che si ha dall'esecuzione manuale, comunque accurata. A giustificazione del mio asserto basterà notare che colla costruzione insegnata dall'A. per la divisione del cerchio in 9 parti uguali (fig. 23ª della tav. XIII), si ha un errore nell'angolo al centro, corrispondente al lato dell'ennagono, alquanto superiore ad 1° 2′, dunque presso a poco 16 volte tanto l'errore proveniente dalla costruzione sopra riportata.

Chiuderò col notare che la divisione della *Guida* in tre parti, che si vendono separatamente, e su per giù rispondenti ai programmi da svolgersi nei tre corsi di studio tecnico e normale, rende l'opera più adatta per le scuole alle quali è particolarmente destinata.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série. 5. N. 1 et 2. Stockholm, 1891.

Giornale di Matematiche, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Volume XXVIII. Gennaio-Giugno 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 3ᵉ Série, XV année. N. 3, 4, 5, 6, 7; Mars à Juillet. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 15ᵉ année. Nombres 12 à 20. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome I. Mars à Septembre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo V, Fasc. III, IV e V. Maggio-Ottobre 1891.

Rendiconti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. V. Fasc. 2° a 6°. Febbraio-Giugno 1891.

(*) V. Schlömilch: *Plani.* § 30, *Trig.* App. III.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. N. 7 à 11. Avril-Août 1891. — Paris, Librairie Nony e C., 17 rue des Écoles.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXII Jahrgang. 2, 3, 4 Heft. — Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Rivista di matematica diretta da G. PEANO. Fasc. 4°, 5°, 6° e 7°. Aprile-Luglio 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

CARRARA (B.) — Un' applicazione della teoria dei numeri alle frazioni decimali periodiche. — Cremona, Tip. e Lit. Fezzi, 1891.

— — Lezione sui massimi e minimi delle funzioni di 2° grado. — Cremona, Tip. e Lit. Fezzi, 1891.

ENESTRÖM (G.) — Om måttet för dödligheten inom en bestämd åldersklass (Öfversigt. af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891. Stockholm).

GIUDICE (F.) — Geometria solida ad uso dei ginnasi e licei. — Palermo, R. Sandron, 1891. - Prezzo: L. 2.

— — Sulle successioni. - Sui prodotti infiniti a fattore generale sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\frac{1}{n}$. (Rendic. Circ. mat. di Palermo, tomi IV e V).

KÜNSSBERG (H.) — Gino Loria. *Il periodo aureo della Geometria greca. Saggio storico*. (Biblioth. math. di G. Eneström, 1891).

MARTONE (M.) — Sulla risoluzione delle equazioni numeriche. — Catanzaro, C. Maccarone, 1889.

— — La funzione Alef di Hoënè Wronski. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

— — Sulle radici comuni a più equazioni. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

— — I determinanti Wronskiani e la legge suprema. — Catanzaro, C. Maccarone, 1891.

MATTEUCCI (A.) — Nozioni di fisica elementare, coordinate in conformità dei programmi pei Licei del Regno. - Parte prima: Cinematica, Statica, Dinamica, Elasticità dei solidi. Milano, F. Vallardi, 1891. - Prezzo: L. 1.

MURER (V.) — Nozioni di aritmetica pratica per il 1° e 2° corso elementare. — Spezia, Tip. Matuella, 1890. - Prezzo: L. 1.

— — Nozioni di geometria intuitiva per il 3° e 4° corso elementare. — Spezia, Tip. Matuella, 1890. - Prezzo: L. 1,20.

PADELLETTI (D.) — Sul movimento del pendolo semplice quando si tien conto dell' effetto della rotazione terrestre. (Rend. Acc. Scienze fisiche e mat. Napoli, 1891).

PALAZZO (L.) — Misure magneto-telluriche eseguite in Italia negli anni 1888 e 1889 ed osservazioni relative alle influenze perturbatrici del suolo. (Rend. R. Acc. dei Lincei, 1891).

SCARPIS (U.) — Il problema della divisione della circonferenza. — Savona, Tip. Bertolotto e C., 1891).

RETTIFICAZIONE. — I Signori Prof. P. Visalli e G. Mandes avvertono la Redazione che l'errore segnalato dal Signor Prof. F. Viaggi, a pag. 109 di questo *Periodico*, nella recensione del loro *Trattato d'Algebra*, pel quale come quoziente degli irrazionali (A, A'), (B, B') è definito $\left(\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}\right)$ invece di $\left(\frac{A}{B'}, \frac{A'}{B}\right)$, vero *lapus calami*, trovasi corretto nell' *errata* in fondo del Trattato stesso.

Chiusura della redazione il dì 30 agosto 1891.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

Con questo scritto mi propongo di trattare in maniera affatto elementare, e sopratutto senza ricorrere alla teoria delle frazioni continue periodiche, il problema capitale dell'analisi indeterminata di secondo grado, preparando gli elementi principali d'un capitolo che, nei libri d'algebra per uso delle scuole secondarie, potrebbe far seguito a quello che suol dedicarsi all'analisi indeterminata di primo grado. Non tacerò che il presente lavoro, pur non guardando al suo fine didattico e al metodo seguito, mi sembra contenere qualche cosa di nuovo sul vecchio tema, che fu diletto ai sommi matematici: Eulero, Lagrange, Legendre, Gauss, Dirichlet. Veggansi su tale proposito le note in fine.

Il problema principale dell'analisi indeterminata di secondo grado a due incognite x ed y consiste nella risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ in numeri interi e positivi (le lettere D ed N indicano numeri interi e positivi). Perchè, quando per risolvere in numeri interi l'equazione generale di secondo grado a due incognite x ed y e a coefficienti interi, siasi trovato il valore d'una incognita per mezzo dell'altra, occorre anzitutto imporre a questa seconda incognita la condizione di rendere quadrato perfetto la quantità sotto radice. S'incontra così un'equazione della forma $x^2 \pm Dy^2 = \pm N$, da risolversi in numeri interi, e possiamo dire, osservando la forma dell'equazione per rispetto alle incognite, in numeri interi e positivi. Se il coefficiente della y^2 è $+D$, possono darsi due casi. O il secondo membro è $-N$, e l'equazione non ha soluzioni. O esso è $+N$, e l'equazione si riguarda come risoluta, perchè, non potendo il valore della y superare il limite $\sqrt{\frac{N}{D}}$, le soluzioni dell'equazione possono trovarsi con un numero più o meno grande, ma limitato, di tentativi (*). Quando il coefficiente di y^2 è $-D$, la cosa procede altrimenti.

(*) V. p. es. Legendre: *Théorie des nombres*, tome I, pag. 105.

Il numero delle soluzioni, se non è nullo, è infinito: epperò non è possibile accertare per mezzo di tentativi l'impossibilità dell'equazione, o trovarne con lo stesso mezzo tutte le soluzioni. Tuttavia si comprende la possibilità di assegnare alla y dell'equazione che si vuol risolvere un limite superiore B (dal quale conseguirà un limite superiore anche per la x) e di assegnarlo in maniera, che l'insieme delle soluzioni (x, y) nelle quali $y < B$ oppure $y \leq B$, formi un sistema *fondamentale*, vale a dire così fatto, che ogni soluzione dell'equazione proposta possa esprimersi per mezzo di quelle del sistema, senza che alcuna soluzione si ripeta. Cognito che sia il limite superiore B, in un con la formola che esprime tutte le soluzioni dell'equazione proposta per mezzo di quelle del sistema fondamentale, è chiaro che il caso del coefficiente $-D$ si ridurrà, quanto a difficoltà, al caso del coefficiente $+D$. Basterà infatti trovare per tentativi quelle soluzioni che soddisfano la condizione $y < B$, o la $y \leq B$, il numero delle quali è limitato.

Dicendo (α, β) una soluzione dell'equazione Pelliana $x^2 - Dy^2 = 1$ e supponendo β diversa da 0, il limite superiore sopra detto è

$$\beta \sqrt{N}, \text{ per la } y \text{ dell'equazione } x^2 - Dy^2 = N;$$

ed è

$$\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}, \text{ per la } y \text{ dell'equazione } x^2 - Dy^2 = -N.$$

Di più, detta (K, H) una soluzione appartenente al sistema fondamentale (nella quale, come si vedrà, il valore H della y deve essere minore del primo limite sopra assegnato, se il secondo membro dell'equazione è N, e non maggiore dell'altro, se il secondo membro dell'equazione è $-N$) le formole generali di risoluzione sono:

$$x + y\sqrt{D} = (K + H\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m.$$
per l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$

e

$$x + y\sqrt{D} = (\pm K + H\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m.$$
per l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$.

Ponendo nella prima formola consecutivamente $m = 0, 1, 2$, ecc., e per ogni valore dato ad m eguagliando fra loro le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ dei due membri, con l'avvertenza di estendere il procedimento a tutte le soluzioni fondamentali (K, H), si otterranno tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, comprese le fondamentali, senza che alcuna soluzione si ripeta. Similmente si ricaveranno dalla seconda formola (*) tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$. - Questo è ciò che sarà dimostrato qui appresso. Per le applicazioni pratiche occorrerà tuttavia conoscere una soluzione (α, β) dell'equazione Pelliana, e di preferenza la minima. Quantunque il *Canon Pellianus* del Degen e la tavola X unita al 1° volume della *Théorie des nombres* di Legendre forniscano quest'ultima fino a grandi valori del coefficiente D, tuttavia assegnerò anche un metodo per la ricerca d'una soluzione e generalmente di tutte le soluzioni dell'equazione Pelliana. Tale metodo, in una trattazione elementare, può supplire l'altro, notissimo, che discende dalla teorica delle frazioni continue periodiche. Come corollario delle cose esposte dimostrerò infine il seguente teorema di Tchebicheff: *Se α è il valore della* x *nella soluzione minima dell'equazione di* Pell, *il valore della* x *nella soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$ *non può superare il limite*

$$\sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2}}. \ (^{**})$$

1. La risoluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = N \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [1]$$

dipende, come vedremo, da quella dell'equazione

$$x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = N. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ [2]$$

Si consideri adunque quest'equazione. Sia (x_1, y_1) una sua soluzione qualsiasi. Si avrà identicamente:

$$x_1^2 - a^2 y_1^2 = N - y_1^2.$$

(*) Per $m = o$ e solo per $m = o$ bisogna rifiutare il segno — davanti alla K della formola. Per ogni altro valore di m bisogna calcolare tanto col + quanto col — davanti alla K.

(**) V. la memoria « *Sur les formes quadratiques* » nel *Journal de mathématiques pures et appliquées*, anno 1851.

Supponendo che y_1 non sia minore di $\sqrt{N}$, dovrà aversi: $x_1 \leq a y_1$ e si potrà porre:

$$x_1 = a y_1 - h,$$

intendendo per h un numero positivo o nullo. Dall' identità

$$(a y_1 - h)^2 - (a^2 - 1)\, y_1^2 = N$$

si ricava:

$$y_1 = a h \pm \sqrt{(a^2 - 1)\, h^2 + N}.$$

Essendo y_1 un intero, la quantità sotto radice nel secondo membro dovrà essere un quadrato intero k^2, ed oltre a ciò:

$$y_1 = a h \pm k.$$

Ora si avverta che, avendosi

$$k^2 - (a^2 - 1)\, h^2 = N, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [3]$$

(k, h) è una soluzione della [2] in numeri interi e positivi. Si osservi ancora che il segno negativo davanti alla k della penultima uguaglianza non è ammissibile. Prendendo infatti il detto segno, dalle uguaglianze

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h - k$$

seguirebbe:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (h \sqrt{a^2 - 1} - k)\,(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Questa uguaglianza è assurda, perchè il suo secondo membro è negativo ($k > h \sqrt{a^2 - 1}$, per virtù della [3]) mentre il primo è positivo. Si avrà dunque, semprechè y_1 non sia minore di $\sqrt{N}$,

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h + k;$$

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k + h \sqrt{a^2 - 1})\,(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ora, poichè (k, h) è soluzione dell' equazione [2], se h non è minore di $\sqrt{N}$, si avrà anche:

$$k + h \sqrt{a^2 - 1} = (k' + h' \sqrt{a^2 - 1})\,(a + \sqrt{a^2 - 1}),$$

essendo (k', h') una nuova soluzione della [2]. Moltiplicando fra loro le due formole precedenti e semplificando, risulta:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (k' + h' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^2.$$

Se h' non è minore di $\sqrt{N}$, detta (k'', h'') un'altra soluzione della [2], sarà ancora:

$$k' + h' \sqrt{a^2-1} = (k'' + h'' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1}),$$

epperò:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (k'' + h'' \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^3.$$

E via così. – Se fra i numeri h, h', h'' ecc. non se ne trovasse finalmente uno più piccolo di $\sqrt{N}$, il secondo membro dei successivi valori del binomio $x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1}$ supererebbe ogni limite, nonchè il valore del binomio stesso, conclusione assurda. Indicando dunque con (K, H) una particolare soluzione della [2] (particolare perchè soggetta alla condizione $H < \sqrt{N}$) e con m un numero intero e positivo oppur nullo, dovrà sussistere l'eguaglianza:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2-1} = (K + H \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^m.$$

Si è così dimostrato che ogni soluzione intera e positiva (x, y) della [2] soddisfa l'equazione

$$x + y \sqrt{a^2-1} = (K + H \sqrt{a^2-1})(a + \sqrt{a^2-1})^m,$$

nella quale K ed H sono gli elementi di una particolare soluzione, scelta fra quelle nelle quali $H < \sqrt{N}$.

2. Passando all'equazione [1] ricorderemo che l'equazione di Pell: $x^2 - D y^2 = 1$, oltre alla soluzione evidente $(1, 0)$, ammette infinite soluzioni intere e positive (teorema celebre di Lagrange) (*). Sia (α, β) una di cotali soluzioni, cosicchè sussista l'identità: $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$. L'equazione [2], moltiplicata per β^2, potrà scriversi così:

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1) y^2 = N \beta^2;$$

(*) Supporremo che D non sia quadrato perfetto, e noteremo che questo richiamo del teorema di Lagrange non infirma l'indole elementare del presente lavoro, perchè, nelle *Vorlesungen ueber Zahlentheorie* (Supp. VIII), Dirichelet dimostra il teorema suddetto, avendo cura di evitare qualunque ricorso alla teorica delle frazioni continue.

e per ciò che si è concluso nel numero precedente, si avrà:

$$\beta x + y \sqrt{\alpha^2 - 1} = (\beta K + H \sqrt{\alpha^2 - 1})\,(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1})^m,$$

indicando con (K, H) una tal soluzione della penultima equazione (o della [1] che le è equivalente), nella quale si verifichi la condizione: $H < \beta \sqrt{N}$. L'ultima eguaglianza, divisa per β, diventa:

$$x + y \sqrt{D} = (K + H \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^m \;.\;.\;.\;.\;. \quad [4]$$

Si ottiene così per l'equazione [1] la formola annunziata nell'esordio di questa nota. Naturalmente, per ottenere le soluzioni (x, y), basterà eguagliare le parti razionali dei due membri, nonchè i coefficienti dell'irrazionale $\sqrt{D}$. Che poi così facendo si ottengano vere soluzioni dell'equazione [1], qualunque siano il valore dell'intero m e la soluzione particolare (K, H) che si sceglie, si dimostra moltiplicando membro a membro la formola [4] e quella che se ne deriva cambiandovi $\sqrt{D}$ in $-\sqrt{D}$.

3. Le soluzioni particolari (K, H) sono, non che sufficienti, necessarie per la risoluzione dell'equazione [1], e però costituiscono un sistema fondamentale. Per chiarir questo punto, mostreremo che se alla m della formola [4] si danno consecutivamente i valori 0, 1, 2 ecc., e se per ogni valore che si dà alla m si ha cura di sostituire nella formola le soluzioni (K, H) dalla minima alla massima, il valore del binomio $x + y \sqrt{D}$ andrà crescendo. Col valore del binomio crescerà ancora la soluzione (x, y), epperò non saranno possibili le soluzioni ripetute.

Che per ogni valore m_1 attribuito alla m il binomio cresca col crescere della soluzione particolare (K, H), è evidente. Siano dunque (K', H'), (K'', H'') le soluzioni particolari minima e massima. Si dovrà dimostrare che il valor massimo che il binomio prende quando $m = m_1$, è più piccolo del valor minimo ch'esso prende quando $m = m_1 + 1$. Ossia che:

$$(K'' + H'' \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1} < (K' + H' \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1 + 1},$$

ovvero:

$$K'' + H'' \sqrt{D} < (K' + H' \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Ora, poichè dalla $H'' < \beta \sqrt{N}$ discende: $K'' < \alpha \sqrt{N}$ e conseguentemente

$$K'' + H'' \sqrt{D} < \sqrt{N}\,(\alpha + \beta \sqrt{D}),$$

basterà dimostrare che

$$\sqrt{N} \leq K' + H' \sqrt{D}.$$

Poichè

$$N = (K' + H' \sqrt{D})\,(K' - H' \sqrt{D}),$$

si trova che la disuguaglianza da dimostrarsi si risolve in una proposizione evidente.

4. Rimane a trattarsi un caso alquanto più difficile: quello dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = - N. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [5]$$

Incominciando come per la [1], si consideri dapprima l'equazione

$$x^2 - (a^2 - 1)\,y^2 = - N \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [6]$$

e si chiami (x_1, y_1) una soluzione di questa. È opportuno premettere, lasciandone al lettore la verificazione, che, posto

$$L = \sqrt{\frac{N}{2\,(a-1)}},$$

sarà:

$$y_1 \lesseqgtr L, \quad \text{secondochè} \quad x_1 \lesseqgtr (a-1)\,y_1\,;$$

e viceversa.

Se $y_1 \leq L$, non discuteremo più oltre. Ma se $y_1 > L$, essendo per virtù della [6] $x_1 < ay_1$, si ponga: $x_1 = ay_1 - h$ (h positiva). Sostituendo nella [6] e risolvendo per rispetto alla y_1 l'identità risultante, si otterrà:

$$y_1 = ah \pm \sqrt{(a^2 - 1)\,h^2 - N}.$$

Dovendo il secondo membro essere un intero, come il primo, bisogna che la quantità sotto radice sia un quadrato intero k^2. Scrivasi adunque:

$$y_1 = ah \pm k,$$

e quanto ai numeri k ed h, si noti che essi forniscono una soluzione della [6]. Se $h \leq L$, dalle formole

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h \pm k$$

si dedurrà:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (\pm k + h \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ma se $h > L$, come la y_1, nelle formole precedenti dovrà rifiutarsi il segno negativo davanti alla k. Perchè, se fosse

$$x_1 = a y_1 - h; \qquad y_1 = a h - k,$$

sarebbe ancora:

$$x_1 - (a - 1) y_1 + k - (a - 1) h = 0,$$

eguaglianza assurda, perchè da $y_1 > L$ ed $h > L$ segue: $x_1 > (a-1) y_1$ e $k > (a - 1) h$. Se dunque $h > L$, si avrà:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k + h \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1}).$$

Ancora:

$$k + h \sqrt{a^2 - 1} = (\pm k' + h' \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

e dovrà rifiutarsi il segno negativo davanti alla k', se h' sarà maggiore di L. In questa supposizione:

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (k' + h' \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})^2.$$

Ecc., ecc. – La serie delle soluzioni (x_1, y_1), (k, h), (k', h') ecc. procederà verso una soluzione (K, H) nella quale si avveri la condizione $H \leq L$. Se non fosse così, il secondo membro dei successivi valori del binomio $x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1}$ crescerebbe indefinitamente, e ciò è assurdo. Si conclude che si deve finalmente arrivare a una eguaglianza della forma

$$x_1 + y_1 \sqrt{a^2 - 1} = (\pm K + H \sqrt{a^2 - 1})(a + \sqrt{a^2 - 1})^m,$$

nella quale K ed H sono i valori della x e della y in una soluzione della [6], e di più: $H \leq L$.

5. Applicando l'ultima conclusione alla [5], dopo averla scritta sotto la forma

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1)\, y^2 = - N \beta^2,$$

e procedendo come nel n. 2, si ottiene per la [5] la seguente formola di risoluzione:

$$x + y \sqrt{D} = (\pm K + H \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [7]$$

Per K el H dovranno intendersi i valori della x e della y in una soluzione soggetta alla condizione

$$H \leq \beta \sqrt{\frac{N}{2(\alpha - 1)}} = \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [8]$$

6. Per dimostrare che le soluzioni (K, H) nelle quali

$$H \leq \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}}$$

sono fondamentali per ciò che riguarda la risoluzione della [5], basterà accertare che la [7] non comprende soluzioni ripetute. Così accade per l'appunto, eccetto il caso limite in cui nella precedente disuguaglianza debba prendersi, oltre al segno di minoranza, anche quello di eguaglianza, vale a dire il caso in cui la limitazione superiore

$$\sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}}$$

sia essa stessa valore della y in una soluzione della [5]. Infatti il valore del secondo membro della [7] cresce col crescer della m, e, per ogni singolo valore di m, col crescere del valore algebrico della quantità $\pm K$. Per ben fissare questo secondo punto, basterà provare che il valore del binomio $H\sqrt{D} - K$ cresce al diminuire di K, che cioè, dette (K', H'), (K'', H'') due soluzioni della [5], e supposta la seconda maggiore della prima,

$$H' \sqrt{D} - K' > H'' \sqrt{D} - K''.$$

Ciò risulta dall'identità

$$(H' \sqrt{D} + K')\,(H' \sqrt{D} - K') = (H'' \sqrt{D} + K'')\,(H'' \sqrt{D} - K''),$$

nellá quale

$$H' \sqrt{D} + K' < H'' \sqrt{D} + K''$$

e conseguentemente

$$H' \sqrt{D} - K' > H'' \sqrt{D} - K''.$$

Resta da dimostrare che il massimo valore che il secondo membro della [7] prende quando $m = m_1$, è minore del minimo valore che esso prende quando $m = m_1 + 1$. Dicendo (K_1, H_1) la massima delle soluzioni che verificano la [8], si tratta adunque di dimostrare che

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1} < (-K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})^{m_1 + 1},$$

ossia che:

$$K_1 + H_1 \sqrt{D} < (-K_1 + H_1 \sqrt{D})(\alpha + \beta \sqrt{D})$$

od anche:

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})^2 < N(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Ora, escludendo il caso in cui

$$H_1 = \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}},$$

si ha sempre:

$$H_1 < \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2D}},$$

e conseguentemente:

$$K_1 < \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2}}.$$

Dalle ultime due disuguaglianze si ricava per l'appunto:

$$(K_1 + H_1 \sqrt{D})^2 < N\left(\sqrt{\frac{\alpha + 1}{2}} + \sqrt{\frac{\alpha - 1}{2}}\right)^2 = N(\alpha + \beta \sqrt{D}).$$

Osservazione. — Si riconosce facilmente che nel caso limite poco fa escluso, la massima tra le soluzioni fornite dalla [7] per $m = m_1$ coincide con la minima di quelle che se ne ottengono per $m = m_1 + 1$. Nel calcolo pratico, trascurando o l'una o l'altra, si eviteranno le soluzioni ripetute.

6. Esempi: *a*). Debbasi risolvere l'equazione

$$x^2 - 12y^2 = 52.$$

Relativamente alla soluzione [7, 2] dell'equazione $x^2 - 12y^2 = 1$, si ottiene $2\sqrt{52}$, come limitazione superiore per la y delle soluzioni fondamentali, la quale perciò non supera 14. Le soluzioni fondamentali si ottengono con pochi tentativi, e sono le quattro seguenti:

$$(8, 1) \quad (10, 2) \quad (22, 6) \quad (32, 9)$$

Il secondo membro della [4] prende quattro valori, che sono:

$$(8+\sqrt{12})(7+2\sqrt{12})^m; \quad (10+2\sqrt{12})(7+2\sqrt{12})^m;$$
$$(22+6\sqrt{12})(7+2\sqrt{12})^m; \quad (32+9\sqrt{12})(7+2\sqrt{12})^m.$$

Facendo consecutivamente $m = 0, 1, 2$, ecc., si ricaveranno a quattro a quattro, e schierate in ordine per ragion di grandezza, tutte le soluzioni della equazione proposta.

b) Debbasi risolvere la

$$x^2 - 13y^2 = -12.$$

Relativamente alla soluzione (649, 180) della $x^2 - 13y^2 = 1$, si ottiene $\sqrt{\frac{12 . 650}{2 . 13}}$, come limitazione superiore per la y delle soluzioni fondamentali. In queste la y non può adunque superare 17. Da ciò risulta che le soluzioni fondamentali sono: (1, 1); (14, 4); (25, 7). Il secondo membro della [7] prende 6 valori, e questi sono:

$$(-25+7\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m;$$
$$(-14+4\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m;$$
$$(-1+\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m;$$
$$(1+\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m;$$
$$(14+4\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m;$$
$$(25+7\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^m.$$

Ponendo $m = 1, 2, 3$, ecc., si ricaveranno a sei a sei, in ordine per ragion di grandezza, tutte le soluzioni dell'equazione proposta (escluse le fondamentali, già trovate).

c) L'equazione proposta sia

$$x^2 - Dy^2 = -1.$$

Supponendola possibile, se ne dica (a, b) la soluzione minima. La soluzione minima della $x^2 - Dy^2 = 1$ sarà $(2a^2 + 1, 2ab)$. Relativamente a questa, il limite della y per le soluzioni fondamentali della proposta è $\sqrt{\frac{a^2+1}{D}}$, cioè b, valore della y esso stesso. Le formole di risoluzione per l'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$ sarebbero:

$$x + y\sqrt{D} = (-a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m$$
$$x + y\sqrt{D} = (\ \ a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m.$$

Ma poichè la soluzione che viene dalla seconda formola quando vi si fa $m = m_1$ coincide con quella che viene dalla prima per $m = m_1 + 1$, per l'osservazione fatta nel n. 5, le due formole si riducono all'unica

$$x + y\sqrt{D} = (a + b\sqrt{D})(2a^2 + 1 + 2ab\sqrt{D})^m.$$

(Continua). G. FRATTINI.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI POLINOMI PER IL BINOMIO $x^r - a^r$ e per il polinomio $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \dots\dots + a^{m-1}x + a^m$

(Continuazione e fine: V. pag. 123).

3.

Ai caratteri di divisibilità per $x^r - a^r$ possono sempre essere ridotti quelli della divisibilità di un polinomio per $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \dots + a^{m-1}x + a^m$, in virtù del seguente teorema:

La condizione necessaria e sufficiente affinchè un polinomio P *sia divisibile per* $\mathrm{x^m + a\,x^{m-1} + a^2\,x^{m-2} + \dots + a^{m-1}\,x + a^m}$ *è che dividendo* P *per* $\mathrm{x^{m+1} - a^{m+1}}$ *si abbia per resto* $\mathrm{C\,(x^m + a\,x^{m-1} + \dots + a^{m-1}\,x + a^m)}$, *indicando con* C *una quantità che non dipende dalla* x.

Infatti, se P è divisibile per $x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^{m-1} x + a^m$, si potrà porre:

$$P = Q (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$$

donde

$$P (x - a) = Q (x^{m+1} - a^{m+1})$$

e per conseguenza

$$\frac{P (x - a)}{x^{m+1} - a^{m+1}} = Q.$$

Di qui rilevasi, — essendo Q un polinomio intero —, che la divisione del prodotto $P (x - a)$ per $x^{m+1} - a^{m+1}$ deve farsi esattamente. Ora, supposto m intero e maggiore di zero, il resto della divisione di $x - a$ per $x^{m+1} - a^{m+1}$ è $x - a$ stesso e perciò se R è il resto della divisione di P per $x^{m+1} - a^{m+1}$ dovrà, (n° 1. teor. II), $R (x - a)$ esser divisibile per $x^{m+1} - a^{m+1}$ e quindi aversi:

$$R (x - a) = C (x^{m+1} - a^{m+1})$$

ossia:

$$R = C (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^{m-1} x + a^m)$$

con C indipendente dalla x, perchè R dev'essere di grado inferiore a $m + 1$.

Reciprocamente se la condizione imposta dal teorema è soddisfatta e si ha perciò

$$P = Q_1 (x^{m+1} - a^{m+1}) + C (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m),$$

sostituendo $(x - a) (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$ in luogo di $x^{m+1} - a^{m+1}$, si trova:

$$P = [Q_1 (x - a) + C] (x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m)$$

e questa uguaglianza dimostra che P è divisibile per $x^m + a x^{m-1} + \ldots + a^m$.

In particolare, e nell'ipotesi di $a = 1$, *il polinomio*

$$p = x^{n^{(m)}} + x^{n^{(m-1)}} + \ldots + x^{n^{(2)}} + x^{n^{(1)}} + x^{n^{(0)}}$$

che ha $m + 1$ *termini e tutti i coefficienti positivi e uguali all'unità è divisibile per* $x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$ *se gli* $m + 1$ *numeri*

$$n^{(m)}, n^{(m-1)}, \ldots n^{(2)}, n^{(1)}, n^{(0)}$$

costituiscono un sistema completo di numeri incongrui rispetto al numero (modulo) $m+1$.

Infatti, ciò significando che i numeri $n^{(h)}$ $(h=0, 1, 2, \ldots m)$ divisi per $m+1$ danno resti uguali a *tutti* i numeri interi inferiori ad $m+1$, la divisione successiva dei singoli termini di p per $x^{m+1}-1$ riprodurrà come resti (n. 2), in un ordine qualunque, *tutti* i termini del polinomio $x^m + x^{m-1} + \ldots + x + 1$.

Come esempi notevoli di classi di numeri $n^{(h)}$ si possono citare:

1°) i numeri

$$mk, (m-1)k, \ldots\ldots 3k, 2k, k, 0$$

k ed $m+1$ essendo numeri primi tra loro;

2°) i numeri

$$g^{m-1}, g^{m-2}, \ldots g^2, g, 1, 0$$

supposto che $m+1$ sia un numero primo e g una sua *radice primitiva*. (*)

4.

Non essendosi fatta nessuna restrizione circa al segno di a, è naturale altresì che i caratteri di divisibilità d'un polinomio P per $x^m - a x^{m-1} + a^2 x^{m-2} - \ldots \mp a^m$ (dove il segno negativo dell'ultimo termine si riferisce al caso di m dispari e il positivo a quello di m pari) siano riducibili, nel modo espresso dal teorema dimostrato, ai caratteri di divisibilità per $x^{m+1} - a^{m+1}$ se m è dispari e per $x^{m+1} + a^{m+1} = x^{m+1} - (-a)^{m+1}$ se m è pari.

Nell'ipotesi di $a = -1$ ed essendo ancora

$$n^{(m)}, n^{(m-1)}, \ldots n^{(1)}, n^{(0)}$$

un sistema completo di numeri incongrui rispetto al modulo $m+1$, determiniamo i casi particolari in cui il polinomio

$$p_1 = \pm x^{n^{(m)}} \pm x^{n^{(m-1)}} \pm \ldots \pm x^{n^{(1)}} \pm x^{n^{(0)}}$$

(*) Gli enunciati dei teoremi che si riferiscono a questi due casi speciali, si trovano negli esercizi 1° e 2° dell'*Algebra* del BERTRAND (trad. del prof. BETTI) a pag 170. Ma l'ultima linea del 2° esercizio va corretta, ed invece che: *è divisibile per* $1-x^p$, vi si deve leggere: *è divisibile per* $1+x+x^2 \ldots + x^{p-1}$.

è divisibile per

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \dots + x - 1$$

se m è dispari; o per

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \dots - x + 1$$

se m è pari. Pongasi

$$n^{(h)} = (m+1)\, q^{(h)} + r^{(h)} \qquad (h = 0, 1, 2 \dots m) \; . \; . \; . \; [1]$$

indicando con $q^{(h)}$ il quoziente e con $r^{(h)}$ il resto della divisione di $n^{(h)}$ per $m+1$. I resti $r^{(h)}$, qualunque sia m, non possono differire in altro che nell'ordine dai numeri $0, 1, 2, \dots m$.

I Se m è dispari, e conseguentemente $m+1$ è pari, si dovrà cercare il resto della divisione di p_1, per $x^{m+1} - 1^{m+1}$. Ora è facile vedere (n. 2, 2°) che $x^{n^{(h)}}$ diviso per $x^{m+1} - 1^{m+1}$ dà di resto $x^{r^{(h)}}$. Affinchè dunque il resto della divisione di p_1 per $x^{m+1} - 1^{m+1}$ sia $x^m - x^{m-1} + \dots + x - 1$, o questo polinomio cambiato di segno (*), vale a dire *affinchè* p_1 *sia divisibile per* $\mathrm{x}^m - \mathrm{x}^{m-1} + \dots + \mathrm{x} - 1$, *è necessario e sufficiente che i termini dei quali l'esponente* $\mathrm{n}^{(h)}$ *diviso per* $\mathrm{m}+1$ *dà di resto un numero pari della serie* $0, 1, 2, \dots \mathrm{m}$, *abbiano segno contrario a quelli di cui l'esponente diviso per* $\mathrm{m}+1$ *dà di resto un numero dispari della stessa serie.*

La [1] pone in chiaro che la metà degli $m+1$ numeri $n^{(h)}$ sarà pari e l'altra dispari, e che dovranno avere lo stesso segno quelli della medesima specie.

II. Se m è pari, e perciò $m+1$ è dispari, il resto della divisione di p_1 per $x^{m+1} - (-1)^{m+1}$ deve essere $C\,(x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \dots - x + 1)$, e poichè (n. 2, 2°) $x^{n^{(h)}}$ diviso per $x^{m+1} - (-1)^{m+1}$ dà per resto $(-1)^{(m+1)\,q^{(h)}}\, x^{r^{(h)}}$, si trova che dev'essere $C = \pm 1$ e si conclude che *affinchè* p_1 *sia divisibile per* $\mathrm{x}^m - \mathrm{x}^{m-1} + \mathrm{x}^{m-2} - \dots - \mathrm{x} + 1$, *è necessario e sufficiente che i termini i quali hanno per esponente un numero* $\mathrm{n}^{(h)}$ *pari, abbiano segno contrario a quelli che hanno per esponente un nu-*

(*) In tal caso, infatti, la quantità C del teorema generale avrebbe il valore -1.

mero dispari. Dalla [1] rilevasi, in questo caso, che non v'ha alcun legame necessario tra il numero dei termini aventi lo stesso segno e quello dei termini che hanno il segno contrario, e che perciò è anche possibile che tutti i termini di p_1 abbiano uno stesso segno, per essere gli esponenti o tutti pari o tutti dispari.

Una serie speciale di numeri $n^{(h)}$, per il caso I (m dispari) è data, per esempio, dai numeri

$$m\,k,\ (m-1)\,k,\ (m-2)\,k \ldots.\ 2\,k,\ k,\ 0$$

nell'ipotesi che k ed $m+1$ siano numeri primi fra loro.

Questa serie vale anche per il caso II (m pari) supponendo che k sia un numero *dispari* e primo con $m+1$. Infine, nello stesso caso II, possono essere presi per esponenti $n^{(h)}$ i numeri

$$\begin{gathered}(m+1)\,k+(m+2)\,m,\ (m+1)\,k+(m+2)\,(m-1),\\ (m+1)\,k+(m+2)\,(m-2), \ldots.\ (m+1)\,k+(m+2)\,.\,2\\ (m+1)\,k+(m+2),\ (m+1)\,k\end{gathered}$$

dove k è un numero intero qualunque; ed in corrispondenza di queste serie sussistono i teoremi:

1.° *Se* m *è dispari e i numeri* k *ed* m + 1 *sono primi fra loro, il polinomio*

$$x^{m\,k}-x^{(m-1)\,k}+x^{(m-2)\,k}-\ldots.-x^{2\,k}+x^k-1$$

è divisibile per il polinomio

$$x^m-x^{m-1}+x^{m-2}-\ldots.-x^2+x-1$$

2.° *Se* m *è pari e* k *è un numero dispari e primo con* m + 1, *il polinomio*

$$x^{m\,k}-x^{(m-1)\,k}+x^{(m-2)\,k}-\ldots.+x^{2\,k}-x^k+1$$

è divisibile per il polinomio

$$x^m-x^{m-1}+x^{m-2}-\ldots.+x^2-x+1.$$

3.° *Se* m *è pari e* k *è un numero intero qualunque, il polinomio*

$$\begin{gathered}x^{(m+1)\,k+(m+2)\,m}+x^{(m+1)\,k+(m+2)(m-1)}+x^{(m+1)\,k+(m+2)\,(m-2)}\\ +\ldots.+x^{(m+1)\,k+(m+2)\,.\,2}+x^{(m+1)\,k+(m+2)}+x^{(m+1)\,k}\end{gathered}$$

è divisibile per il polinomio

$$x^m - x^{m-1} + x^{m-2} - \dots + x^2 - x + 1.$$

I teoremi 1° e 2° combinano con due dei teoremi dimostrati per altra via dal signor prof. *Gatti.* (*)

Roma, aprile 1891.

ELCIA SADUN.

TEMI D'ESAME

1. Un corpo percorre una distanza con velocità costante. Se la velocità si aumenta di 6 metri, il corpo percorrendo la medesima distanza impiega due secondi di meno. Se la velocità si diminuisce di 10 metri impiega 6 secondi di più. Trovare la velocità e lo spazio percorso dal mobile.

2. Divisi per metà gli angoli esterni di un quadrato, le quattro bisettrici formano un altro quadrato le cui diagonali sono parallele ai lati della prima figura e la cui superficie è doppia di quella del quadrato dato.

Prof. A. MOTTA.

3. In una progressione geometrica a termini positivi, il primo termine è 5 e la somma del secondo e del terzo termine è 100. Trovare la ragione.

4. Nella equazione $x^2 - 6px + 5p^2 = 0$, determinare p in modo che la somma dei quadrati delle radici sia eguale a 104.

5. In un triangolo isoscele dal punto di mezzo di uno dei lati eguali si conduce la perpendicolare alla base. Dimostrare che la base resta divisa in due parti una tripla dell'altra.

6. In un cerchio si conduce una corda AB e dal punto di mezzo di uno degli archi in cui la circonferenza è divisa dalla corda si conduce un'altra corda CD che tagli la prima in un punto E, indi si tirano AD, BD. Dimostrare che si ha la proporzione $AE : EB :: AD : DB$.

Dott. L. BOSI.

7. Col calcolo algebrico e senza ricorrere alle tavole trigonometriche, trovare gli angoli acuti pei quali ha luogo la proprietà che la somma della tangente e della cotangente sia 4.

Risposta: 15° e 75°.

8. Si ha un tronco di cono retto nel quale l'apotema è uguale alla somma dei raggi r e R delle due basi. Dimostrare che la metà dell'altezza del tronco

(*) V. Anno I, fasc. VI, pag. 191, teoremi II e III.

è media proporzionale fra i due raggi r e R, e il volume del tronco è il prodotto della sua superficie totale per il sesto dell'altezza; e conoscendo l'angolo (acuto) che l'apotema fa con una delle basi, trovare il rapporto fra i due raggi R e r e quello fra l'apotema e uno di questi raggi.

Risposte: detto α l'angolo acuto fra l'apotema a e una delle basi si ha $R : r = \cot^2 \frac{\alpha}{2}$; $a : r = \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2}$.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulle somme delle combinazioni dei numeri naturali. — 1. Indico con K_p^n la somma delle combinazioni (prodotti) dei primi n numeri naturali a p a p e la dico dell'ordine p^{esimo}. Così p. es.:

$$K_3^5 = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.2.5 + 1.3.4 + 1.3.5 + 1.4.5 + 2.3.4 + 2.3.5 + 2.4.5 + 3.4.5.$$

Somme di 1° ordine:

$$K_1^1 = 1 \qquad = \binom{2}{2}$$

$$K_1^2 = 1 + 2 \qquad = \binom{3}{2}$$

. . . .

$$K_1^n = 1 + 2 + 3 \ldots\ldots n \qquad = \binom{n+1}{2}$$

Somme di 2° ordine:

$$K_2^2 = 1.2 \ldots\ldots\ldots\ldots = 2 K_1^1$$

$$K_2^3 = 1.2 + 1.3 + 2.3 \ldots\ldots\ldots = K_2^2 + 3 K_1^2$$

. . . .

$$K_2^n = 1.2 + 1.3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = K_2^{n-1} + n K_1^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_2^n = 2 K_1^1 + 3 K_1^2 + 4 K_1^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n K_1^{n-1}$$

Somme di 3° ordine:

$$K_3^3 = 1.2.3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 3 K_2^2$$

$$K_3^4 = 1.2.3 + 1.2.4 + 1.3.4 + 2.3.4 = K_3^3 + 4 K_2^3$$

. . . .

$$K_3^n = 1.2.3 + 1.2.4 + \ldots\ldots\ldots\ldots = K_3^{n-1} + n K_2^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_3^n = 3\,K_2^2 + 4\,K_2^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, n\,K_2^{n-1}$$

E in generale poi:

Somme del p^{esimo} *ordine* (p < n):

$$K_p^p = 1\,.\,2\,\ldots\,p \ldots\ldots\ldots\ldots = p\,K_{p-1}^{p-1}$$
$$K_p^{p+1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = K_p^p + (p+1)\,K_{p-1}^p$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$K_p^n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = K_p^{n-1} + n\,K_{p-1}^{n-1}$$

Sommando e riducendo:

$$K_p^n = p\,K_{p-1}^{p-1} + (p+1)\,K_{p-1}^p + \ldots\ldots\ldots\ldots\, n\,K_{p-1}^{n-1}.$$

Le quali relazioni permettono di calcolare la somma di un certo ordine mediante quelle dell'ordine precedente.

2. Applicando le formole ora trovate, che si compendiano nella $K_p^n = K_p^{n-1} + n\,K_{p-1}^{n-1}$, si trova il seguente prospetto dei valori delle somme di 1°, 2°, 3°.... ordine. La prima riga di unità è posta per dedurre anche le somme di 1° ordine colla stessa legge con cui si deducono le altre: ogni numero cioè si ottiene aggiungendo al precedente della riga il prodotto del numero immediatamente superiore a questo pel numero d'ordine della colonna: così p. es. $735 = 225 + 85 \times 6$.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . .
1° ordine .	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	. . .
2° ordine . . .		2	11	35	85	175	322	546	870	1320	. . .
3° ordine			6	50	225	735	1960	4536	9450	18150	. . .
4° ordine				24	274	1624	6769	22440	63273	157773	. . .
5° ordine					120	1764	13132	67284	269325	902055	. . .
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

3. La serie $K_1^1\, K_1^2 \ldots\, K_1^n$ è una progressione aritmetica di 2° ordine, la cui 2ª differenza è 1: perciò la serie: $2\,K_1^1\;\; 3\,K_1^2\;\; 4\,K_1^3 \ldots\ldots n\,K_1^{n-1}$ è una progressione aritmetica di 3° ordine, la cui 3ª differenza è $3\,.\,1 = 3$ (*).

Se ne deduce che la serie:

$$2\,K_1^1\;\; \left(2\,K_1^1 + 3\,K_1^2\right)\;\; \left(2\,K_1^1 + 3\,K_1^2 + 4\,K_1^3\right) \ldots\ldots \left(2\,K_1^1 + \ldots\ldots n\,K_1^{n-1}\right)$$

cioè la serie

$$K_2^2 \qquad K_2^3 \qquad\qquad K_2^4 \qquad \ldots\ldots \qquad K_2^n$$

è una progressione aritmetica del 4° ordine, la cui 4ª differenza è ancora 3: infatti le prime differenze di questa serie non sono altro che i termini della progressione di 3° ordine considerata prima (eccetto il 1° termine).

(*) V. Baltzer: *Elementi di matematica.* (Traduz. Cremona). *Aritmetica generale.* (1875). § 2°, n. 9.

Collo stesso ragionamento si prova che la serie: $K_3^3\ K_3^4 \dots K_3^n$ è una progressione aritmetica del 6° ordine la cui 6ª differenza è $5 \,.\, 3 = 15$. Similmente la serie: $K_4^4\ K_4^5 \dots K_4^n$ è una progressione aritmetica dell'8° ordine, la cui 8ª differenza è: $7 \,.\, 15 = 105$: ed in generale la serie: $K_p^p\ K_p^{p+1} \dots K_p^n$ è una progressione dell'ordine $(2p)^{\text{esimo}}$, la cui $(2p)^{\text{esima}}$ differenza è: $(2p-1)\, d_{2(p-1)}$; dove $d_{2(p-1)}$ è l'ultima differenza della progressione precedente.

4. Si possono avere delle formole che dieno direttamente il valore di queste somme. Così: $K_1^n = \binom{n+1}{2}$.

Per avere K_2^n si sostituiscano nelle formole trovate i valori di $K_1^1\ K_1^2 \dots$ e si avrà: $K_2^n = 2\binom{2}{2} + 3\binom{3}{2} + \dots n\binom{n}{2}$.

Ma (come si è osservato) i termini di questa somma formano una progressione aritmetica di 3° ordine, di cui il 1° termine è 2 e le differenze iniziali 7, 8, 3; perciò la somma degli $(n-1)$ termini considerati (*) è data da:

$$K_2^n = 2(n-1) + 7\binom{n-1}{2} + 8\binom{n-1}{3} + 3\binom{n-1}{4}$$

la quale con facili trasformazioni diventa:

$$K_2^n = \binom{n+1}{4} + 2\binom{n+2}{4}$$

ove si tenga conto della formola: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Così per K_3^n si sostituiscano nella formola trovata i valori di $K_2^2,\ K_2^3, \dots K_2^{n-1}$ dedotti da quest'ultima e si avrà:

$$K_3^n = 3\left\{2\binom{4}{4}\right\} + 4\left\{\binom{4}{4} + 2\binom{5}{4}\right\} + \dots n\left\{\binom{n}{4} + 2\binom{n+1}{4}\right\}.$$

Ma i termini di questa somma formano una progressione aritmetica del 5° ordine, di cui il primo termine è 6 e le differenze iniziali sono: 38, 93, 111, 65, 15; perciò la somma degli $n-2$ termini considerati è data da:

$$K_3^n = 6(n-2) + 38\binom{n-2}{2} + 93\binom{n-2}{3} + 111\binom{n-2}{4} + 65\binom{n-2}{5} + 15\binom{n-2}{6}$$

che con facili trasformazioni diventa:

$$K_3^n = \binom{n+1}{6} + 8\binom{n+2}{6} + 6\binom{n+3}{6}.$$

(*) Id. Id., n. 7.

Con analogo procedimento si troverebbe:

$$K_4^n = \binom{n+1}{8} + 22\binom{n+2}{8} + 58\binom{n+3}{8} + 24\binom{n+4}{8}$$

e così di seguito per le altre somme.

G. Riboni.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 91*, 92*, 93*, 94, 98* e 99*

91*. *Dimostrare che* $13453^7 - 13452^7 - 1$ *è divisibile per* 180969757.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. *D. de Blasi*, alunno del R. Liceo di Lecce.

Si ha successivamente

$$a^7-(a-1)^7-1 = 7a^6 - 21a^5 + 35a^4 - 35a^3 + 21a^2 - 7a =$$
$$7a(a^5-1) - 21a^2(a^3-1) + 35a^3(a-1) =$$
$$7a(a-1)\left\{a^4 - 2a^3 + 2a^2 + a^2 - 2a + 1\right\} = 7a(a-1)\left\{a(a-1)+1\right\}^2.$$

Sostituendo ad a il numero 13453, poichè allora $a^7-(a-1)^7-1$ riducesi all'espressione data, devesi dimostrare che

$$7 \,.\, 13453 \,.\, 13452 \,.\, (13453 \,.\, 13452 + 1)^2$$

è divisibile per 180969757. Ora questo numero è primo con 7, con 13452 e con 13453, per cui esso deve dividere l'altro fattore $(13453 \,.\, 13452 + 1)^2$. Si trova infatti che $180969757 = 13453 \,.\, 13452 + 1$. (*)

Il Sig. *P. Marano* ad una soluzione algebrica della quistione fa seguire la seguente osservazione.

Che $\dfrac{a^7-(a-1)^7-1}{a(a-1)+1}$ rappresenti un intero, qualunque sia l'intero a, può mostrarsi ancora come segue.

Si ha:

$$a(a-1)+1 = a^2 - a + 1 =$$
$$\left\{a - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}\right)\right\}\left\{a - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,\sqrt{-1}\right)\right\} =$$
$$\left\{a - (\cos 60^\circ + i \,\mathrm{sen}\, 60^\circ)\right\}\left\{a - (\cos 60^\circ - i \,\mathrm{sen}\, 60^\circ)\right\}.$$

(*) Dimostrazioni sostanzialmente analoghe alla presente pervennero dai Sigg. *A. Baldassarre* (alunno del R. Ist. tec. Bari), *G. Calvitti* e *A. Perna* (R. Ist. tec. Napoli), *G. Candido* e *R. Palma* (R. Liceo Lecce), *A. Dal Buono Sidoli* (R. Ist. tec. Reggio Emilia), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *D. Taverna* (R. Liceo Catanzaro), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Posto $a = \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ$, quindi $a - 1 = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ$, pel teorema di Moivre, risulta

$$\begin{aligned} a^7 - (a-1)^7 - 1 &= \cos 7.60^\circ + i \operatorname{sen} 7.60^\circ - \cos 7.120^\circ - i \operatorname{sen} 7.120^\circ - 1 \\ &= \cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ + \cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ - 1 = 0: \end{aligned}$$

dunque $a^7 - (a-1)^7 - 1$ è divisibile per $a - (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$.

Si dimostra similmente che la stessa espressione è divisibile per $a - (\cos 60^\circ - i \operatorname{sen} 60^\circ)$, quindi sarà divisibile per il prodotto delle due ultime espressioni che è $a(a-1)+1$.

Il quoziente che è un polinomio intero in a, darà un valore numerico intero per a intero.

92*. *Risolvere l'equazione*

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

(D. Besso).

Soluzione dei Sigg. *L. Manfredonio*, alunno del R. Liceo di Foggia; *G. Bartoli* e *M. Salvadori*, alunni della R. Accademia di Livorno; *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce; *A. Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *P. Marano*, studente a Catania; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *D. Taverna*, alunno del R. Liceo di Catanzaro; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Poichè la somma dei coefficienti è 0, l'equazione ammette la radice 1. Dividendo per $x - 1$, si ha:

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0.$$

Quest'equazione, per la medesima ragione, ammette la radice 1, e dividendo di nuovo per $x - 1$, si ha

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

il cui discriminante è $6^2 - 4.9 = 0$, e perciò $x_1 = x_2 = -\frac{6}{2} = -3$. Quindi l'equazione proposta ha due coppie di radici eguali ad 1 e -3.

Soluzione dei Sigg. *A. Ognissanti* ed *E. G. Ricci*, alunni del R. Liceo di Bari.

Pongasi $x = y - 1$. Fatte le debite sostituzioni e riduzioni si ottiene l'equazione biquadratica

$$y^4 - 8y^2 + 16 = 0,$$

le cui radici sono $+2$, $+2$, -2, -2. Dalla posizione fatta per x si ricavano conseguentemente come radici dell'equazione proposta i quattro valori 1, 1, -3 e -3.

Soluzione dei Sigg. *A. di Bello*, *G. Calvitti*, *A. Ceci*, *A. Perna*, *G. Santorelli*, alunni del R. Istituto tecnico di Napoli; *A. Baldassarre*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *G. Candido* e *D. de Blasi*, alunni del R. Liceo di Lecce.

L'equazione proposta può scriversi successivamente

$$
\begin{gathered}
x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x^3 - 12x^2 + 6x + 9x^2 - 18x + 9 = \\
x^2(x^2 - 2x + 1) + 6x(x^2 - 2x + 1) + 9(x^2 - 2x + 1) = \\
(x^2 + 6x + 9)(x^2 - 2x + 1) = (x + 3)^2 (x - 1)^2 = 0,
\end{gathered}
$$

perciò essa ammette due radici eguali a -3 e due eguali ad 1.

Soluzione dei Sigg. *A. Gandolfi*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza e *S. Lopriore*, studente privato a Capurso.

Dividendo per x^2 tutti i termini della data equazione e raccogliendo secondo le potenze della x, si avrà

$$x^2 + \frac{9}{x^2} + 4\left(x - \frac{3}{x}\right) - 2 = 0.$$

Ora facendo $x - \dfrac{3}{x} = y$, risulta $x^2 + \dfrac{9}{x^2} = y^2 + 6$, talchè sostituendo si giunge all'equazione

$$y^2 + 4y + 4 = 0,$$

le cui radici sono -2 e -2. Sostituendo questi valori di y nella $x - \dfrac{3}{x} = y$ si ottiene due volte l'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$, che ha per radici $+1$ e -3. Le radici della proposta equazione sono per conseguenza $1, 1, -3$ e -3.

93*. *Se* A, B, C *indicano gli angoli d'un triangolo*, m, m', m'' *le sue mediane, e si pone* tang A : tang B : tang C = p : q : r *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{t}$, *dimostrare che si ha:*

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) \cdot \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

(A. LUGLI).

Soluzioni sostanzialmente analoghe da *A. Ognissanti*, alunno del R. Liceo di Bari; *A. Baldassarre*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *G. Bartoli*, alunno della R. Accademia di Livorno; *G. Calvitti*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli; *L. Catelli*, alunno del R. Istituto tecnico di Como; *A. Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *R. Palma*, alunno del R. Liceo di Lecce; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Indicando rispettivamente con a, b, c i lati relativi alle mediane m, m', m'' del triangolo ABC, si ha:

$$
\begin{gathered}
4m^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2, \quad 4m'^2 = 2c^2 + 2a^2 - b^2, \\
4m''^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.
\end{gathered} \quad \ldots . [1]
$$

Da $a = b\cos C + c\cos B$, si ricava l'uguaglianza $a^2 = ab \operatorname{sen} C \cot C + ac \operatorname{sen} B \cot C = 2S(\cot C + \cot B)$, dove S rappresenta l'area del triangolo.

Similmente $b^2 = 2S(\cot A + \cot C)$, $c^2 = 2S(\cot B + \cot A)$. In conseguenza

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2S(4\cot A + \cot B + \cot C) = \\ 2S\left\{3\cot A + (\cot A + \cot B + \cot C)\right\} \quad \ldots\ldots [2]$$

con due relazioni analoghe.

Dall'ipotesi $\tan A : \tan B : \tan C = p : q : r$, deducesi $\cot A = \frac{1}{p\alpha}$, $\cot B = \frac{1}{q\alpha}$, $\cot C = \frac{1}{r\alpha}$, avendo posto $\tan A : p = \alpha$, onde si ha:

$$3\cot A + \cot A + \cot B + \cot C = \\ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) \quad \ldots\ldots [3]$$

con due relazioni analoghe.

Dalle [1], [2] e [3] segue poi immediatamente:

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

94. *Se nel piano di una conica di centro* O *sono dati due punti* M *ed* N, *e* P *e* Q *sono rispettivamente i punti d'incontro delle polari di* M *ed* N *coi diametri* N O *ed* M O, *i triangoli* M O P *ed* N O Q *sono equivalenti.*

(G. Rozzolino).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Palatini.*

Ricordiamo che due triangoli reciproci rispetto ad una conica sono omologici (Chasles: *Sections coniques*). Ora MON è, nella figura definita dalla questione, il triangolo reciproco, rispetto alla data conica, al triangolo formato dalle RS, UV, polari rispettive di M, N, e dalla retta all'infinito del piano, polare di O; perciò, indicando con h_∞ la retta all'infinito del piano, si trovano in linea retta retta i punti

$$(MO, UV) \equiv Q, \quad (NO, RS) \equiv P, \quad (MN, h_\infty).$$

Dunque la retta PQ è parallela alla MN, perciò i due triangoli MPO, NQO sono equivalenti perchè sono tali i triangoli PQM, PQN costruiti sulla stessa base PQ e compresi fra le stesse parallele PQ, MN.

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Sforza.*

Siamo M, N i punti dati nel piano della conica di centro O e P, Q le intersezioni di MO, NO rispettivamente con le polari m, n di M, N. Dico intanto che $OP \,.\, ON = OQ \,.\, OM$. Infatti, sia p la polare di P; allora p ed n saranno parallele, perchè P ed N sono sul medesimo diametro. Se M', Q' sono le intersezioni del diametro PN con p, n rispettivamente, saranno (M', P), (Q', N) coppie di punti coniugati di una involuzione di centro O, e perciò sarà

$$OM' \,.\, OP = OQ' \,.\, ON.$$

Ma i due triangoli MOM', QOQ' sono simili e si ha

$$\frac{OM}{OQ} = \frac{OM'}{OQ'},$$

dunque sarà anche

$$OP \,.\, OM = OQ \,.\, ON.$$

Segue da ciò che i due triangoli OPM, OQN saranno equivalenti, c. v. d.

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania.*

Se M descrive il diametro OM, la sua polare descriverà un fascio proiettivo alla punteggiata (M), il quale fascio taglierà il diametro ON in una punteggiata (P) prospettiva ad esso, e quindi proiettiva ad (M). Quando M cade in Q, P cadrà in N, perchè la polare di N passando per Q, viceversa, la polare di Q passerà per N. L'inviluppo delle rette analoghe alle MP ed NQ è perciò una conica, della quale OM ed ON sono tangenti. Questa conica è un'iperbole, perchè quando M coincide con il punto all'infinito di OM, il punto corrispondente P cadrà in O, perchè OM è un diametro, e quando N cade all'infinito su ON, allora Q cadrà pure in O. Pertanto i punti contatto delle tangenti OM, ON sono all'infinito, e quella conica è un'iperbole della quale OM ed ON sono gli assintoti. E allora, per un noto teorema di Apollonio, è costante l'area dei triangoli analoghi ad OMP, ed in particolare sono equivalenti i due triangoli OMP, ONQ, che è quanto volevasi dimostrare.

Soluzione del Sig. *C. Aiello*, studente nella R. Università di Napoli.

Sia $OM = m$ e $ON = n$ e siano ON e OM gli assi delle x e delle y rispettivamente. È chiaro che l'equazione della curva riferita a questi assi è

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0$$

e quelle delle polari di M e N, rispettivamente, sono

$$hmx + bmy + c = 0 \quad \text{e} \quad anx + hny + c = 0.$$

La parte che la polare di M taglia sull'asse delle x, cioè OQ, è data dalla prima di queste equazioni facendovi $y = 0$ e similmente dalla seconda facendo $x = 0$ si ottiene OP, e propriamente si ha che $OQ = -\dfrac{c}{hm}$ e $OP = -\dfrac{c}{hn}$.

Ora si sa che i triangoli aventi un angolo in comune stanno fra loro come i rettangoli dei lati che comprendono l'angolo comune, dunque

$$\Delta MQO : \Delta NPO = OM \,.\, OQ : ON \,.\, OP = m\frac{c}{hm} : n\frac{c}{hn} = 1,$$

e perciò $\Delta MQO = \Delta NPO$.

98* e **99***. *Verificare che ponendo* $x = \frac{m}{2}(m^2 + 3)$ $\quad y = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$ *si soddisfa all'equazione*

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = -1 \quad (*).$$

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

Verificare che ponendo $x = \frac{m^2 - m + 2}{2}$ $y = \frac{m-1}{2}$ *si soddisfa all'equazione*

$$x^2 - (m^2 + 4)\, y^2 = m \quad (*).$$

(G. FRATTINI).

Soluzioni dei Sigg. *G. Ascoli*, alunno del R. Liceo di Ancona; *A. Baldassarre*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *A. Dal Buono Sidoli*, alunno del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia; *D. De Blasi*, alunno del R. Liceo di Lecce; *G. Floridia*, studente a Ragusa; *S. Lopriore*, studente privato a Capurso; *L. Manfredonio*, alunno del R. Liceo di Foggia; *P. Marano*, studente privato a Catania; *A. Ognissanti*, alunno del R. Liceo di Bari; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *P. P. Rizzuti*, studente privato a Catanzaro; *P. Taverna*, alunno del R. Liceo di Catanzaro; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Si ha invero:

$$\left[\frac{m}{2}(m^2+3)\right]^2 - (m^2+4).\left[\frac{1}{2}(m^2+1)\right]^2 =$$
$$\frac{(m^6 + 6\,m^4 + 9\,m^2) - (m^6 + 6\,m^4 + 9\,m^2 + 4)}{4} = -1$$

e

$$\left(\frac{m^2 - m + 2}{2}\right)^2 - (m^2+4)\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 =$$
$$\frac{(m^4 - 2\,m^3 + 5\,m^2 - 4\,m + 4) - (m^4 - 2\,m^3 + 5\,m^2 - 8\,m + 4)}{4} = m.$$

Se m è intero e dispari m^2+3, m^2+1, $m^2 - m + 2$ ed $m-1$ sono evidentemente pari, onde

$$\frac{m}{2}(m^2+3), \quad \frac{1}{2}(m^2+1), \quad \frac{m^2 - m + 2}{2} \quad e \quad \frac{m-1}{2}$$

sono numeri interi.

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **102**. dal Sig. *G. Rozzolino;* **105**. *R. Bettazzi, F. Palatini;* **106**. *N. Bottini, G. Trapani;* **107**. *G. Candido, C. Chigiotti, D. de Blasi, P. Marano, R. Palma, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

108*. Se in un quadrangolo, le cui diagonali sono perpendicolari l'una all'altra, è inscritto un quadrato coi lati paralleli a queste diagonali, il doppio del lato del quadrato è medio armonico fra le diagonali del quadrangolo.

A. Baldassarre.

109*. Se dal vertice d'un triangolo si tirano alla base le due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: un poligono costruito sulla base sta alla somma dei poligoni simili e similmente descritti sugli altri due lati, come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli, che giacciono su di essa. (**)

I. Amaldi.

110*. Posto

$$b_n = 2^n + \binom{n-1}{1} . 2^{n-2} + \binom{n-2}{2} . 2^{n-4} + \ldots\ldots,$$

dove il 2° membro finisce col termine 1 se n è pari e con $\frac{n+1}{2} . 2$ se n è dispari, dimostrare che si ha:

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n}.$$

111. Posto

$$\alpha_n = (2a)^n + (n-1)(2a)^{n-2} . b + \frac{(n-2)(n-3)}{1 . 2}(2a)^{n-4} . b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 . 2 . 3}(2a)^{n-6} . b^3 + \ldots,$$

con $a > 0$ e $b > 0$, dove il secondo membro deve finire col termine $b^{\frac{n}{2}}$ se n è pari e col termine $\frac{n+1}{2} . 2a . b^{\frac{n-1}{2}}$ se n è dispari, si ha:

$$\sqrt{a^2 + b} = a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b . \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Questa proposizione può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Pitagora. Già una generalizzazione del teorema stesso trovasi in Pappo, nel libro IV delle sue *Collezioni matematiche*. Questo teorema di Pappo viene riportato anche dal Commandino nel suo *Euclide* in una nota alla prop. XXXI del VI libro. Vedi a questo proposito gli *Elementi di matematica* del Baltzer. Plan. § 9,7.

e la differenza tra $\sqrt{a^2+b}$ ed $a-1+\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\alpha_n+b\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ è minore di $\dfrac{b^n}{\alpha_{n-1}\cdot\alpha_n}$.

F. GIUDICE.

112. Se a, b, n sono interi qualunque ad a, b primi tra loro, e si indica con $D(x, y)$, $\varphi(x)$ rispettivamente il massimo comun divisore di x, y ed il numero degli interi minori di x e primi con esso, il numero dei valori interi di z, minori di n, che rendono il binomio $az+b$ primo con n, è dato da

$$d_1 d_2 \dots d_m \cdot \varphi\left(\frac{n}{d_1 d_2 \dots d_m}\right)$$

essendo $d_1 = D(n, a)$, $d_2 = D\left(\frac{n}{d_1}, d_1\right)$, $d_3 = D\left(\frac{n}{d_1 d_2}, d_2\right)$ .... $d_m = D\left(\frac{n}{d_1 d_2 \dots d_{m-1}}, d_{m-1}\right)$ e posto che sia $d_{m+1} = 1$.

U. SCARPIS.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

CLÉMENT THIRY. — *Applications remarquables du théorème de Stewart et théorie du barycentre.* — Gand, Ad. Hoste; Paris, Gauthier-Villars; 1891. — Prix: 2 fs.

Il teorema di Stewart stabilisce, com'è noto, una relazione fra tre punti A, B, C in linea retta ed un punto qualunque O. Tenendo conto dell'identità di Eulero, ossia: $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}=0$, esso è espresso dall'eguaglianza

$$\overline{OA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{OB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{OC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0.$$

Le parole che l'illustre Chasles scriveva a proposito del medesimo fin dal 1837: « cette propriété, qui est à peu près inconnue de nos jours, mériterait « bien de prendre place dans les éléments ou au moins dans les compléments « de géométrie » (*) non cessano dall'avere il pregio dell'attualità e il libro del signor prof. Thiry è la migliore giustificazione possibile da darsi alle medesime, in quanto, anche tacendo dell'opportunità di trovar svolto in modo elementare la teoria del baricentro con numerosi particolari ed applicazioni, l'A. valendosi quasi esclusivamente degli elementi della geometria, con esposizione facile ed ordinata, è riuscito a mostrare nel modo il più felice di quale possente ausilio sia questo teorema nella trattazione di questioni moltoplici e come serva mirabilmente alla deduzione di numerose relazioni metriche.

(*) CHASLES: *Aperçu historique*, pp. 175-176.

Il libro consta di sei capitoli i cui titoli sono: — Diverse forme del teorema di Stewart. Ordinarie conseguenze classiche di questa proposizione. — Applicazioni diverse relative al triangolo. — Applicazioni relative al quadrilatero ed al trapezio. — Applicazioni relative al circolo. — Luoghi geometrici. — Baricentro o centro delle distanze proporzionali.

Da notarsi, fra i molti particolari degni d'interesse, nel

I Cap.: quattro differenti dimostrazioni del teorema di Stewart due delle quali proprie dell'A.; le applicazioni al calcolo della bisettrice, della mediana e della simediana d'un triangolo in funzione dei lati; nel

II. Cap.: la formola $\sum_{1}^{n-1} \alpha_i^2 = \frac{n-1}{2}\left[b^2 + c^2 - \frac{a^2(n+1)}{3n}\right]$ che dà la somma dei quadrati delle $n-1$ rette α_i congiungenti il vertice A di un triangolo ABC coi punti del lato opposto che dividono questo lato in n parti uguali; le proprietà che risultano dalla considerazione delle congiungenti i vertici di un triangolo coi punti che dividono i lati opposti nello stesso rapporto e in particolar modo il calcolo delle distanze dei punti notevoli del triangolo, quali il centro del cerchio inscritto, il circumcentro, il baricentro, l'ortocentro, il punto di Lemoine, i punti di Brocard, distanze derivanti tutte da una formola generale, che l'A. propone di chiamare *omniformola metrica del triangolo,* che dà la distanza d'un punto qualunque P al punto d'intersezione K_n delle rette dividenti i lati del triangolo nel rapporto delle potenze n^{esime} dei lati adiacenti, ossia

$$\overline{PK}_n^2 = \frac{a^n \cdot \overline{PA}^2 + b^n \cdot \overline{PB}^2 + c^n \cdot \overline{PC}^2}{a^n + b^n + c^n} - \left(\frac{abc}{a^n + b^n + c^n}\right)^2 \left\{a^{n-2}b^{n-2} + b^{n-2}c^{n-2} + c^{n-2}a^{n-2}\right\},$$

e diverse applicazioni fra le quali la soluzione del problema: condurre pel vertice d'un triangolo ABC una tal retta AD che determini due triangoli ABD, ADC di uguali cerchi inscritti. Questo capitolo va considerato quale un contributo assai felice a profitto della recente geometria del triangolo.

III Cap.: Espressioni delle diagonali del trapezio in funzione dei lati, ottenute con grandissima semplicità, come pure la soluzione del problema: date quattro circonferenze concentriche tagliarle con una segante in modo che il segmento staccato dalle prime due uguagli quello determinato dalle rimanenti.

Da notarsi nel cap. V, fra gli otto luoghi studiati, quelli dei punti M pei quali le distanze da due punti fissi A e B soddisfano alle relazioni $m\overline{MA}^2 + n\overline{MB}^2 = K^2$ e nel cap. VI la dimostrazione di carattere puramente geometrico del teorema di Lagrange (*).

Termina il libro una raccolta di 34 esercizi a risolvere, alcuni dei quali accompagnati da un cenno di soluzione.

Vogliamo sperare che questa breve rassegna invoglierà molti colleghi a prender cognizione dell'importante lavoro del signor prof. Thiry, convinti che

(*) Mém. de Berlin 1878, p. 290.

vi troveranno materia da trasportarsi nella scuola qualunque sia il grado d'insegnamento da essi impartito.

NOTA. Il teorema di Stewart trovasi dimostrato nelle *Lezioni d'Alge. ele.* del Prof. Bellacchi (vol. 1°, p. 101) e negli *Elementi di Mat.* del Baltzer (Pla. § 14, 22, p. 201). Nella prima di queste opere l'A. ne fa applicazione al calcolo delle lunghezze delle bisettrici interna ed esterna di un triangolo e della mediana. Il luogo corrispondente alla formola $m \cdot \overline{MA}^2 + n \cdot \overline{MB}^2 = K^2$ è considerato tanto dal prof. Bellacchi (vol. 3°, p. 43), quanto dal Baltzer (Pla. § 14, 23, p. 201). L'applicazione del sig. Thiry alle proprietà che scaturiscono dalla considerazione delle rette congiungenti i vertici dal triangolo $A\,B\,C$ ai punti che dividono i lati opposti nello stesso rapporto, si può leggere ampliata nell'articolo del professor Besso: *Di alcune proprietà del triangolo*, pubblicato in questo *Periodico* (vol. II, p. 1 a 6). Si può osservare, cosa del resto notata altresì dal signor Thiry, che la *omniformola* sopra citata non è che un caso particolare dell'altra

$$m_1 \cdot \overline{MA}_1^2 + m_2 \cdot \overline{MA}_2^2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots) \cdot \overline{MX}^2 + \frac{m_1 m_2 \cdot A_1 A_2 + m_1 m_3 \cdot A_1 A_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

che stabilisce una relazione fra la distanza del baricentro X d'un sistema di punti A_1, $A_2, \ldots$, gravati delle masse m_1, $m_2, \ldots$, ad un punto qualunque M e le distanze dei punti A fra di loro e di M da questi punti, ed invero è facile vedere che K_n non è in ultima analisi che il centro di gravità di tre masse applicate ai vertici del triangolo $A\,B\,C$ proporzionali ad a^n, b^n, c^n. Ciò non toglie per altro all'A. il merito d'aver stabilito la sua formola indipendentemente da ogni concetto di centro di gravità, in maniera facile e spedita, e di averne fatte applicazioni originali degne di particolare elogio.

A. LUGLI.

PROF. AUGUSTO BIFFIGNANDI. — *Le principali proprietà delle grandezze proporzionali novamente esposte.* — Acireale, Tip. V. Micale. 1891.

Tra il metodo, che chiamasi *puro*, adottato da Euclide e dai suoi seguaci nella trattazione dell'importante argomento delle grandezze proporzionali, ed il metodo del Legendre e dei suoi imitatori, quello del Prof. Biffignandi tiene un posto a mio parere pressochè intermedio.

Se infatti da una parte l'A. segue il Legendre nel ricavare le principali relazioni di proporzionalità non operando direttamente sulle grandezze stesse, ma bensì invece su loro rappresentazioni convenzionali; dall'altra però se ne allontana e con notevole vantaggio poichè, rappresentando le grandezze con segmenti di rette invece che con numeri, non ha bisogno di alcun sussidio dall'aritmetica e si vale all'uopo opportunamente delle più elementari proposizioni di Planimetria che in tutti i trattati sogliono precedere il capitolo delle proporzioni.

Il lavoro in questione nel suo complesso è ben condotto, l'esposizione ne è chiara e mostra nell'A. piena conoscenza dell'argomento: venendo ai particolari mi limiterò ad osservare che il Teorema 2° non si può, a mio credere, far dipendere unicamente dal Teorema 1°, ma che esso ha pure bisogno dell' 11° al quale senza inconvenienti può essere posposto. Sotto l'aspetto didattico non mi sembrerebbe utile, a dir il vero, seguire nell'insegnamento della teoria delle grandezze proporzionali un tal nuovo indirizzo; e ciò non perchè manchi di chiarezza ma, al contrario, perchè rende pressochè intuitive certe verità che è preferibile vengano conquistate dai giovani anche con uno sforzo ma mediante i soli strumenti della Logica.

Questa mia opinione però non toglie che un Trattato di Geometria nel quale la teoria delle proporzioni fosse svolta secondo le idee del Prof. Biffignandi, presenterebbe su molti altri compilati ad imitazione del Legendre, il vantaggio della omogeneità e sarebbe convenientissimo per quelle scuole nelle quali lo studio della Matematica non è esclusivamente considerato come una ginnastica intellettuale e come parte di un'educazione filosofica.

U. Scarpis.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. Eneström. Nouvelle série. 5. N. 3. Stockholm, 1891.

El Progreso matemático. Director Don Zoel G. de Galdeano. Año I. N. 1° á 9°. Enero á Septiembre de 1891. Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXIX. Luglio-Agosto 1891. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 3° Série, XV année. N. 8, 9, 10; Août, Septembre, Octobre 1891. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 16° année. Nombres 1, 2. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome I. Octobre 1891. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. V. Fasc. 7° e 8°. Luglio e Agosto 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 1re année N. 12 Septembre; 2e année, N. 1: Octobre 1891. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica diretta da G. Peano. Fasc. 8° e 9°. Agosto e Settembre 1891. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXII Jahrgang. 5, 6, 7 Heft. — Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Amanzio (D.) — *Trattato di algebra elementare.* — Napoli, B. Pellerano, 1892. — Prezzo: L. 4,50.

Bernardi (G.) — Alcuni teoremi di poligonometria rettilinea e sferica. (Gior. di Mat. di Battaglini, Vol. XXIX, 1891).

Bettazzi (R.) — Osservazioni sopra l'articolo del Dott. G. Vivanti: *Sull'infinitesimo attuale.* (Rivista di Matematica, Anno I, 1891).

Bosi (L.) — Solution de la question 1587. (Nouvelles Ann. de Mathé. 3ᵉ série. Tome X, 1891).

De Galdeano (Z. G.) — *Problemas de aritmética y álgebra* con las nociones correspondientes de crítica algorítmica. Toledo, de Fando, 1885. – Precio: 4 pesetas.

— — *Crítica y síntesis del álgebra.* — Toledo, J. Peláez, 1888. – Precio: 6 pesetas.

— — *Estudios críticos sobre la generación de los conceptos matemáticos.* — Madrid, de Fortanet, 1890. – Precio: 2,50 pesetas.

Del Re (A.) — Sulle coppie di forme bilineari ternarie. (R. Acc. Lincei, 1891). — Di cinque superficie del 5° ordine con rette semplici e doppie ed una retta tripla (id., id.). — Su una superficie del 5° ordine dotata di una retta tripla, di rette doppie e di rette semplici (id., id.).

Eneström (G.) — Ett par formler för beräkning af mortaliteten inom pensionskassor eller andra slutna sällskap. (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1891, Stockholm). — Om de befolkningsstatistiska formlerna för beräkning af dödligheten under första lefnadsåret. (id., id.).

Fiore (V.) — Primi elementi di geometria. — Napoli, L. Chiurazzi, 1892. – Prezzo: L. 2,50.

Giudice (F.) — Rivista bibliografica. (Riv. di mat., An. I, 1891). = Prodotti infiniti. — Palermo, C. Clausen, 1891. = Sulla corrispondenza tra due iperspazii. (Gior. di Mat. di Battaglini, Vol. XXIX, 1891).

Lebon (E.) — Sur l'arrête de rebroussement d'une développable. (Bullettin de la Société Mathé. de France, t. VIII; 1880). — Note sur l'intersection d'une droite et d'une quadrique de révolution. — Mémoire sur l'épaisseur des berceaux horizontaux. — Note sur l'intégration des équations différentielles de la forme $F(p, px - y) = 0$. (Bulletin des anciens Élèves de l'École de Cluny; 1884). — Sur l'angle des lits oblique et normal de la vis Saint-Gilles. (Nouv. Ann. de Mathé., 3ᵉ série, t. III; 1884). — Construction nouvelle des points d'intersection d'une droite et d'une conique. (Nouv. Ann. de Mathé., 3ᵉ série, t. IV; 1885). — Sur le calcul de quelques intégrales. (Journal de Mathé. spéciales, 1888). — Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube. (Jour. de Mathé. spéciales, 1889). — Sur les demonstrations de quelques propriétés métriques du triangle. (Mathesis, t. IX; 1889). — Solution du Problème de Malfatti. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. III; 1889). — Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. IV; 1890).

Loria G. — Cenni intorno a la vita e le opere di Felice Casorati. (Rend. Cir. mat. Palermo, t. V; 1891). — Il teorema fondamentale della teoria delle equazioni algebriche. Contributo alla Storia critica dell'Algebra. (Rivista di mat., An. I; 1891).

Nannei (E.) — *Elementi di Geometria.* Parte 1ª: Planimetria. — Milano, Dottor F. Vallardi, 1891. – Prezzo: L. 3.

Riboni (G.) e Gambioli (D.) — *Elementi di Geometria,* a uso delle Scuole secondarie inferiori, corredati da una raccolta di circa seicento esercizi. — Bologna, N. Zanichelli, 1892. – Prezzo: L. 2.

Testi (G. M.) — *Corso di aritmetica,* con numerosi esercizi e problemi, ad uso degli alunni delle scuole tecniche e dei ginnasi inferiori, secondo gli ultimi programmi governativi. 3ª edizione. — Livorno, R. Giusti; 1891.

— — *Elementi di Geometria,* con una raccolta di 510 esercizi e problemi, ad uso degli alunni delle Scuole tecniche e normali, secondo gli ultimi programmi governativi. 2ª edizione. — Livorno, R. Giusti, 1891.

Chiusura della redazione il dì 15 novembre 1891.