18. Nel paese classico dell'associazione quest'idea doveva trovare un terreno favorevole ed infatti il 17 gennaio 1871 nell'*University College* di Londra ebbe luogo sotto la presidenza di T. Archer Hirst, un'adunanza ove vennero gettate le fondamenta del nuovo istituto, di cui primo e principale scopo fu « di promuovere il progresso dell'insegnamento geometrico e anzitutto di fare tutti gli sforzi per indurre i direttori degli esami, a cui dovevano presentarsi dei giovani usciti da differenti scuole, a formulare le domande in modo indipendente dall'uso di un particolare libro di testo ». Per ciò dietro proposta del presidente, il sodalizio si chiamò *Association for the Improvement of geometrical Teaching* (o brevemente A. I. G. T.) non *for the Reform*, poichè il *progresso* è indefinito mentre la *riforma* è transitoria [1]. Per raggiungere tale intento si decise di raccogliere delle notizie sull'insegnamento della geometria nel continente e preparare, con la collaborazione di alcuni ed i consigli di tutti i socii, un programma (*Syllabus*) della geometria elementare da sottoporsi al giudizio dei capi delle Università di Cambridge, Oxford e Londra, rimandando a miglior tempo il deliberare se esso dovesse considerarsi come schema di un futuro trattato di geometria.

Durante il primo anno di vita il numero dei soci dell'A. I. G. T. crebbe da 61 a 89 [2] e la Commissione incaricata di formulare delle proposte concrete sull'indirizzo da darsi all'insegnamento degli elementi della geometria le riassumeva in diciotto proposizioni le quali, sottoposte all'Assemblea, dopo breve discussione, raccoglievano l'unanimità delle approvazioni [3]. L'Assemblea stessa nominava in pari tempo una Commissione per redigere un *Syllabus* in base a queste proposizioni e tenendo conto delle altre idee che erano state espresse durante la discussione. E infatti nell'adunanza successiva (15 gennaio 1873) il progettato *Syllabus* venne presentato e discusso, e gl'intervenuti decisero [4], che, dopo essere stato modificato nel

(1) *Association for the Improvement of Geometrical Teaching. I General Report* (o brevemente I. G. R.) 1871, p. 14.

(2) Questo numero crebbe quasi costantemente di poi, come risulta dal seguente prospetto: Anno 1873, membri 102; 1874, 105; 1875, 105; 1877, 107; 1878, 116; 1881, 113; 1882, 120; 1883, 123; 1884, 138; 1885, 136; 1886, 153; 1887, 173; 1888, 191; 1891, 189.

(3) II G. R. 1872, p. 18-20.

(4) III G. R. 1873, p. 28.

modo che alcuni di essi avevano consigliato, esso venisse sottoposto alla Commissione (1) a cui l'Associazione britannica per l'avanzamento della scienza aveva affidato il còmpito di studiare la possibilità di far progredire i metodi in uso per insegnare la geometria elementare. Sembra però che quest'ultima parte della deliberazione fosse intempestiva, perchè la detta Commissione, pure esprimendo la propria simpatia e la propria benevolenza per l'A. I. G. T., rimandava il giudizio sul *Syllabus* al momento in cui questo fosse stato completato (2). Tale risposta doveva servire di eccitamento ai componenti dell'A. I. G. T. a continuare nella via in cui si erano messi; ed infatti noi li troviamo occupati durante le due adunanze annuali successive a discutere certi punti controversi ed in particolare intenti allo studio della teoria delle proporzioni (3). I buoni frutti ottenuti con questi sforzi collettivi sono dimostrati dalla relazione fatta all'Associazione britannica nel 1876 dalla Commissione competente (4), la quale « non esitò a constatare, come risultato dell'esame da essa fatto del *Syllabus* nel suo insieme, che esso era stato redatto con tanta cura e tali riguardi alle condizioni essenziali del problema, da rendere estremamente desiderabile venisse studiato a fondo da alcuni delegati delle Università e degli altri grandi corpi esaminatori del Regno unito, coll'intento di decidere se si dovesse adottarlo — dopo averlo forse modificato nel modo che quello studio speciale dimostrerebbe necessario — come testo per gli esami di geometria elementare » (5).

Per agevolare l'effettuazione di quanto veniva così saggiamente suggerito, l'anno seguente l'A. I. G. T. decideva di inviare il *Syllabus* in esame alle più cospicue autorità universitarie, accompagnandolo da una lettera ove fossero dichiarati gl'intenti dell'Associazione e riportato il giudizio surriferito (6). Le risposte ottenute durante

---

(1) Composta di Sylvester, Cayley, Hirst, Price, Smith, Spottinswood, Hayward, Salmon, Townsend, Fuller, Kelland, Wilson e Clifford.

(2) *Report of the XLIII Meeting of the British Association* (Bradford, 1873), p. 459-60. Cfr anche IV G. R. 1874, pag. 11-13.

(3) Veggasi il IV e il V G. R.

(4) Era la stessa di prima, coll'aggiunta di Henrici e Glaisher.

(5) *Report of the XLVI Meeting of the British Association*, Glasgow 1876, p 8-13. Cf. *Association for the Impr. of Geom. Teach., Report of Committee, January* 1877, p. 11.

(6) Citato *Report of Committee*, p. 13-16.

il 1878 furono poco numerose e mediocremente soddisfacenti (1): Oxford si dichiarò favorevole alla conservazione di Euclide e Cambridge contraria ai fini dell'A. I. G. T., Londra evasivamente avvertiva che essa non aveva mai imposto un testo speciale e Duham rispondeva in modo non definitivo. Nell'attesa di altre e migliori risposte, l'A. I. G. T. fissò (2) l'attenzione dei corpi esaminatori sulla necessità che i candidati fossero tenuti a dar prova di abilità nel risolvere dei facili problemi di geometria, ed in pari tempo volgeva la mente ad allargare il suo campo di azione fino a comprendere la geometria solida, la geometria superiore e le coniche geometriche (3). Non deve recar meraviglia se l'A. I. G. T. dimostrava con i fatti di non lasciarsi abbattere dalla opposizione che incontrava nelle più eccelse autorità scolastiche, perchè la simpatia di cui si sentiva circondata (4) la incoraggiava a perseverare, simpatia dimostrata dai giudizii che sul *Syllabus* venivano pronunciati da molte persone che lo avevano adoperato (5), dalla richiesta sempre maggiore di esso (che aveva avuto l'onore di una traduzione in giapponese (6)) e dal fatto che « la geometria non veniva più considerata come un ramo di scienza già da tempo perfetto, non più collocata, ad esempio, allo stesso livello dei cinque ordini d'architettura, che uno non può toccare senza venire riprovato (7) ».

19. Coll'adunanza annuale del 1878 riteniamo chiusa la prima èra dell'A. I. G. T.; pensiamo così perchè allora ebbe luogo un cambiamento nel presidente (all'Hirst succedette l'Hayward) e venne deciso di estendere l'azione della Società al di là dei confini dell'insegnamento elementare. E questa deliberazione non fu che il primo sintomo di un'affezione che palesemente manifestossi quando, nell'adunanza del 7 gennaio 1881, venne fatta la proposta di occuparsi, oltre che di geometria, anche delle altre parti della matematica (aritmetica e meccanica) le quali avevano altrettanto bisogno delle cure di un sodalizio

(1) VI G. R., 1878, p. 18-19.
(2) Ib., p. 24-30.
(3) VI G. R., p. 30-34.
(4) II G. R., p. 17, III G. R., p. 10, *Report of Committee*, p. 12, ecc..
(5) V. ad es. nel VI G. R. (p. 20-21) un confronto dei risultati ottenuti in una scuola femminile addottando prima Euclide, poi il *Syllabus*.
(6) XV G. R., p. 19.
(7) VI G. R., p. 12.

che non fosse di « geometri fanatici [1] ». La discussione che ne seguì, non portò subito ad una conclusione, ma preparò il terreno alla deliberazione, che fu presa l'anno veniente [2], di ritenere che la parola *geometrical* che entrava nel nome dell'associazione dovesse prendersi nel senso di *mathematical* allo stesso modo che i francesi interpretano *géomètre* nel senso di *mathématicien*.

Però questa tendenza all'espansione non rese tiepidi i sentimenti dell'A. I. G. T. verso la geometria in senso stretto. Infatti sino dal 1881 essa si propose di munire di dimostrazioni ed esercizii il *Syllabus* di geometria piana e nell'anno seguente decideva di porsi all'opera [3] e in pari tempo proseguiva la redazione dei *Syllaba* per l'insegnamento delle altre parti della geometria,

Nella medesima direzione l'A. I. G. T. continuò a procedere durante gli anni seguenti animata a far ciò dal sapere i suoi libri scelti come testi in Inghilterra [4] e nelle colonie [5], le sue idee influire sulla composizione di opere didascaliche [6], la sua opera apprezzata anche da coloro che non ne approvavano incondizionatamente gli atti [7] e l'Università di Cambridge scendere a più miti consigli [8]. Al conseguimento di questi risultamenti avranno per fermo contribuito le pubbliche conferenze che, a partire dal 1883, si tennero in occasione delle riunioni annuali e colle quali persone competenti spesso iniziavano uno scambio di idee su qualche importante argomento matematico: e si noti che i lettori non venivano scelti esclusivamente fra i membri della Società o fra quelli che ne approvavano il modo di procedere, ma eziandio fra coloro che professavano idee differenti [9].

Intanto una petizione (sottoscritta da 186 persone di cui soltanto 82 appartenevano all'A. I. G. T.) veniva diretta nel 1887 alle principali autorità universitarie per far concedere agli insegnanti la libertà

(1) VII G. R., 1881, p. 12-15.
(2) VIII G. R., 1882, p. 15.
(3) VII G. R., p. 23-27, VIII G. R , p. 17-29.
(4) X G. R., 1884, p. 38-9.
(5) XI G. R., 1885, p. 21, XII G. R., 1886, p. 23, XVI G. R., 1890, p. 6.
(6) XII G. R., p. 24.
(7) X G. R., p. 23-9.
(8) XII G. R., p. 24.
(9) Cfr., XVII G. R., 1891.

di adottare come testo un libro differente dagli *Elementi* di Euclide. Ed il consiglio direttivo dell'A. I. G. T. l'inoltrava accompagnandola da una lettera ove si definivano i fini che essa erasi proposta, si descrivevano i mezzi usati per raggiungerli, si dava il catalogo delle opere pubblicate sotto il suo patrocinio e si proponevano delle conferenze per discutere e chiarire i punti per avventura ancora oscuri (1). In conseguenza l'Università di Oxford consentì a sostituire ad Euclide delle opere composte con lo stesso metodo (2); e quella di Cambridge, dopo una conferenza avuta coi capi dell'A. I. G. T., si espresse in modo non dissimile (3).

Allora la presidenza dell'Associazione fece nuove istanze per ottenere che si recedesse dall'esigere fosse rispettato l'ordine euclideo nella successione delle proposizioni, ma non fu esaudita (4), onde si tenne paga del risultato ottenuto (5), che riuscì anzi ad estendere ad altre Università (6).

Finalmente chiese una riforma per ovviare ad un grave difetto esistente nel Regolamento per le *Oxford Pass Examinations Papers in Geometry*, ma ricevette una nuova risposta negativa (21 aprile 1891 (7)).

20. Se si misurano i risultati ufficialmente constatati che ottenne l'A. I. G. T. in più di vent'anni di vita, è forza constatare che essi non sono di grande entità. Taluno potrà attribuire questo non brillante successo ai mezzi adoperati (8); tutti però dovranno riconoscere che il pubblico sul quale essa operava si componeva in gran parte di

---

(1) XIII G. R., 1887, p. 21-2.

(2) XIV G. R., 1888, p. 23

(3) Ib., p. 23-4.

(4) Ib., p. 24-6.

(5) XV G. R., 1889, p. 11, XVI G. R., 1889, p. 5.

(6) XV G. R., p. 12-13, XVI G. R., p. 6.

(7) Lo stesso inconveniente è segnalato in un articolo, intitolato *Oford « Pass »*, inserito nella *Nature* del 20 marzo 1889.

(8) Infatti chi vuole ottenere una riforma nel metodo d'insegnare la geometria ha a propria disposizione due metodi di procedere. Egli può analizzare minuziosamente gli *Elementi di Euclide*, additarne i difetti e suggerire il modo di correggerli. Oppure può prescindere affatto dal metodo euclideo, fissare quali teorie debbano formar parte di un trattato elementare ed esporle a modo suo. Come si vedrà tra poco, è il primo di questi modi che preferì l'A. I. G. T. e forse non poteva fare altrimenti, chè il secondo può difficilmente essere adottato quando trattisi di un lavoro collettivo.

ammiratori di Euclide (1), i quali, da questi educati, non vedevano altrove nessuna via di salute (2). D'altronde l'avere modificato l'ambiente coll'introdurvi degli elementi ad essa favorevoli non era forse preparare il terreno a un cambiamento di coltura?

E poichè testè abbiamo fatta una breve analisi dei mezzi che l'A. I. G. T. adoperò, dobbiamo completarne il catalogo mediante l'esame delle pubblicazioni ad essa dovute.

Quello che deve di preferenza fissare la nostra attenzione è il *Syllabus of Plane Geometry corresponding to Euclid, Books I-VI* (3), il quale, dopo che gli enunciati vennero muniti di dimostrazioni ed esercizii divenne *The Elements of plane Geometry* (4). Che questi *Elementi* siano somigliantissimi a quelli di Euclide si vede subito rilevando che anche ivi la figura donde si prendono le mosse è il punto e che la teoria delle proporzioni è una riproduzione dell'antica. Che però delle innovazioni non insignificanti siano state fatte si scorge osservando che il libro si apre con un *Syllabus of geometrical constructions*, destinato a rendere famigliare il giovane con i concetti più importanti della geometria ed alcuni dei risultati a cui essa giunge, al quale segue un'introduzione destinata a porgere quelle nozioni di logica che trovano incessante applicazione nella geometria. Di più le definizioni vengono distribuite nel corpo di ogni libro e poi riassunte al termine, i problemi sono disgiunti dai teoremi e si trova una speciale sezione sui luoghi; il postulato d'Euclide viene surrogato con quello che afferma l'esistenza di una sola retta parallela ad un'altra e passante per un dato punto; finalmente nuove proposizioni e nuove dimostrazioni vengono aggiunte alle euclidee. I nuovi *Elementi* sono dunque un rimaneggiamento degli antichi, ma nessuna idea schiettamente originale dà loro nuova vita, sicchè, se il primo studio degli

(1) Basti citare fra questi il maggiore astro della matematica inglese, il CAYLEY, che non vuole a nessun costo abbandonare Euclide (XV G. R., p. 21) e in particolare ritiene il V libro degli *Elementi* come la migliore trattazione della teoria delle proporzioni (*Reports of the British Association*, 1876, p. 12).

(2) Però così non pensava il CLIFFORD (come risulta dalla terza delle sue bellissime conferenze (*On the Philosophy of pure Science*, Lectures and Essays, London 1882, I, p. 295-323) nè l'HENRICI, il quale, in un discorso che citeremo fra poco, notava fra l'altro: « The chief progress in geometrical teaching has to be sought in the introduction of modern ideas and methods into the very elements, and modern teaching ought to take ful account of this ».

(3) New Edition, London Macmillan 1889.

(4) Part I, 1884; Part II, second edition 1885, London, W. Swan Sonnenschein and Co.

antichi fece a Sylvester odiare la geometria, di amore per fermo non l'avrebbe infiammato lo studio dei nuovi.

Questa stessa mancanza di coraggio di abbandonare i sistemi didattici in uso si nota in chi compilò il *Syllabus of Elementary Geometrical Conics* (1) ove queste celebri curve sono definite prima separatamente mediante le loro proprietà focali e poi insieme come sezioni di un cono rotondo (2) e il *Syllabus of Modern Plane Geometry* (3) di cui già discorremmo in questo *Periodico* (4) e sul quale con maggior diffusione esporremo altrove le nostre idee. Notiamo da ultimo che l'A. I. G. T., dando prova di sentimenti onorevoli ed elevati, curò la ristampa di due discorsi nei quali, fra l'altro, si criticavano i sistemi da essa preferiti per raggiungere il proprio intento (5) e provocò una nuova edizione della versione inglese fatta da G. B. Halsted delle celebri *Geometrische Untersuchungen zur Therie der Parallellinien* di Lobatschèwsky (6).

21. Malgrado il fine modesto che fin dall'origine erasi proposto l'A. I. G. T., malgrado il rispetto che i suoi membri pubblicamente professavano per Euclide, e malgrado l'esiguità dei risultati da essa indiscutibilmente raggiunti, pure vi fu chi credette necessario scendere in campo per combattere la direzione in cui essa progrediva.

Primo fra questi avversari è il Todhunter (7) e della difesa da lui fatta di Euclide come libro di testo bisogna tenere grandissimo conto sia perchè dovuta a persona di altissima fama didattica, sia perchè le idee da lui espresse, per quanto vengano dall'autore dichiarate sua proprietà, sono però quelle che in Cambridge raccoglie-

---

(1) London, Swan Sonnenschein, Lowrey and Co. 1887.

(2) Mi sembra opportuno riportare a questo proposito la seguente giustissima osservazione del Todhunter (*Essays* citati, p. 178-9): « One great drawback to our present systhem of mathematical instruction and examination is the monotony which prevail in many parts. When a mathematical subject has been studied so far as to master the essential principles, little more is gained by pursuing these principles into almost endless applications. On this account we may be disposed to regard with slender satisfaction the expenditure of much time on geometrical conics sections; the student seems gain only new facts, but no fresh idea or principles ».

(3) London, Macmillan and Co. 1889.

(4) T. IV, 1889, p. 125.

(5) *Reprint of Presidential Adresses to Section A of the British Association by Prof.* Henrici (1883) *and Prof.* Chrystal (1885) (Bedford 1887).

(6) Del *Syllabus of Elementary Dinamics* pubblicato da W. N. Stocker (London, Macmillan 1889) sotto gli auspici dell'A. I. G. T. non occorre far qui più di una rapida menzione.

(7) Si vegga il lavoro *Elementary Geometry* facente parte degli *Essays* già citati.

vano e raccolgono l'approvazione della maggioranza per non dire della totalità degl'insegnanti. Ora, comunque si sia disposti a giudicare la tesi sostenuta dal Todhunter, non v'ha dubbio che con piena ragione egli si opponeva alla sostituzione di Euclide con un trattato meno rigoroso e al decretare il bando di questi prima di possedere un degno sostituto (1), e dava agli oppositori di Euclide il consiglio di dimostrare coi fatti la superiorità di altri metodi per insegnare la geometria. Nè si dovranno giudicare cattive, per la massima parte, le ragioni con cui egli s'industria a dimostrare infondate le accuse mosse agli *Elementi* per la mancanza di vita, di freschezza e di suggestività, per l'eccesso di proposizioni e l'assenza di *costruzioni ipotetiche* (2), per il metodo sillogistico e la teoria delle proporzioni. Ma quello in cui a noi non sembra lodevole il Todhunter è di avere trattata in modo troppo ristretto l'ampia questione dell'insegnamento della geometria elementare. E della stessa labe è macchiato l'altro assertore convinto che in tempi a noi vicini Euclide trovò in Inghilterra, C. L. Dodgson. Il quale in un brillante libretto (3) ha vagliate con insolito acume le critiche mosse al metodo euclideo in generale ed in particolare al modo con cui sono esposte le materie dei due primi libri, dimostrandole in gran parte infondate (4), indicando però le lievi modificazioni di cui il testo ha bisogno e concludendo che colmate le lacune che gli *Elementi* offrono (perchè Euclide ammise come evidente l'eguaglianza di tutti gli angoli retti e l'impossibilità di un segmento comune a due rette e tacque i teoremi concernenti la perpendicolare e le oblique con-

---

(1) Credo bene riferire anche le seguenti parole: « In conclusion I will say that no person can be a warmer advocate than I am for the *improvement of geometrical teaching*; but I think that this may be attained without hazardous experiments of rejecting methods, the efficacy of which a long experience has abundantly demonstrated ». L. c. p. 192.

(2) A sostegno della necessità di insegnare negli elementi il modo di eseguire qualunque operazione adoperata, il Todhunter a ragione osserva (p. 186): perchè un principiante non dovrebbe ammettere possibile il far passare un circolo per quattro punti?

(3) *Euclid and his Moderns Rivals.* 2ª ed. (London 1885).

La forma di dialogo prescelta dall'autore è conveniente, non soltanto perchè rende meno tediosa l'esposizione, ma anche perchè permette di togliere a certe asserzioni troppa rigidità, di ribattere delle obbiezioni secondarie e di fare concessioni di pari entità.

(4) Le critiche concernono: la miscela dei problemi con i teoremi, l'eccesso di proposizioni, la definizione di retta, la teoria delle parallele, i postulati e lo stile di Euclide. Sulle difese notiamo 1º che il Dodgson trova che la definizione di retta adottata da Euclide non è inferiore a quella prescelta dagli altri geometri, 2º che il postulato delle parallele di Euclide supera i congeneri perchè porge un mezzo facile e sicuro per riconoscere se due date rette siano parallele.

ducibili da un punto a una retta) si ottiene un'opera superiore a tutte le altre conosciute [1]. Importa notare che l'autore giunse a questa conclusione: 1° senza combattere coloro che biasimano Euclide per avere sagrificata la logica distribuzione delle materie trattate a una rigorosa concatenazione delle varie conclusioni, 2° senza analizzare dei libri seguenti il secondo (in particolare senz'occuparsi della teoria dell'equivalenza la quale soltanto in tempi vicini a noi raggiunse il desiderato grado di perfezione [2]), il che è deplorevole specialmente perchè un sistema geometrico deve essere considerato nel suo insieme, una parte di esso potendo essere eccellente senza che tale sia il tutto.

22. Tuttavia, ammesso pure per un momento che la perfezione che il Dodgson si sforzò di porre in luce nei primi due libri di Euclide si trovi anche in tutti gli altri e che i suoi *Elementi* siano superiori, non soltanto alle opere congeneri da lui conosciute, ma a tutte quelle oggi esistenti, la questione sul metodo d'insegnare la geometria non sarebbe ancora definitivamente risolta a favore di Euclide. Si potrà dire che, conservando il piano degli *Elementi* e seguendo nelle sue linee generali il modo di procedere euclideo, non è possibile fare opera ad essi *Elementi* superiore (tranne, ben inteso, in pochi punti isolati). Ma con ciò non si esclude che battendo altre vie non si possa giungere ad un risultato da ritenersi *oggi* superiore a quello conseguito da Euclide. Dico *oggi* perchè il fine a cui tende un trattato elementare varia a seconda dell'epoca in cui è scritto; ora quello di Euclide mirava a preparare allo studio di opere elevate quali sarebbero le trattazioni delle curve di second'ordine che hanno per

---

(1) Quelle citate ed esaminate dall'autore sono:

A. M. Legendre, *Éléments de géométrie*, XIV ed. 1860. — W. D Cooley, *Elements of Geometry, simplified and explained*, 1860. — Cuthbertson *Euclidian Geometry*, 1874. — O. Henrici, *Elementary Geometry: Congruent Figures*, 1879. — Wilson, *Elementary Geometry*, II ed 1869. — B. Pierce, *An Elementary Treatise on plane and solid Geometry*, 1872. — W. A. Willock, *The Elementary Geometry of Right Line and Circle*. 1875. — W. Chauvenet, *A Treatise on Elementary Geometry*, 1870. — E. Loomis, *Elements of Geometry. A revised Edition*, 1876. — J. R. Morell, *Euclid simplified, compiled from the most important french Works, approved by the University of Paris and the Minister of Public Instruction*, 1868. — R. P. Wright, *The Elements of plane Geometry*, II ed. 1871 (cfr. *Parole del Prof. Hirst sull'Introduzione agli Elementi di geometria del Prof. Wright*, Giornale di Matematiche, T. VI, 1868. p. 369-70) — *Syllabus of the Association for the Improvement of geometrical Teaching*, 1878. — J. W. Wilson, *Elementary Geometry*, 1878.

(2) Cfr. Duhamel, op. cit., p. 445 e seg.; De Zolt, *Principii dell'eguaglianza di poligoni (equivalenza di poligoni)* e *Principii dell'eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici* (Milano 1881 e 1883), nonchè gli autori ivi citati; finalmente le opere precitate di Sannia e d'Ovidio, Faifofer e De Paolis.

archetipo le *Coniche* di Apollonio, e quello scopo fu raggiunto così bene che io mi spiego perfettamente il conservatorismo dell'Inghilterra, ove la geometria più elevata si concepisce nello stile del geometra Pergeo. Convengo anche con l'Höuel (1) quando asserisce che la geometria d'Euclide può benissimo servire di testo per preparare allo studio di tutti i principii fondamentali dell'analisi moderna e somministrare ad un giovane intelligente un'ottima preparazione per lo studio della geometria analitica e del calcolo infinitesimale. Ma questo frutto dell'insegnamento geometrico è ancora troppo poco nutriente! La geometria infatti non è più (come pensava forse a ragione Lagrange sulla fine del secolo scorso) una lingua morta che *si deve* studiare nelle opere di Euclide; essa all'opposto è una lingua viva per imparare la quale fa mestieri meditare le opere immortali di Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Staudt e Cremona, all'intelligenza delle quali non si giungerà mai se si rimane eternamente attaccati agli scritti di Euclide; ostinandosi a far ciò sarebbe quanto suggerire a chi volesse imparare l'italiano l'unico studio di Ciullo d'Alcamo e Frate Jacopone da Todi (2)! Fa mestieri dunque che invece l'insegnamento elementare prepari allo studio della geometria projettiva e alle applicazioni che essa riceve nella geometria descrittiva e nella statica grafica; verrà in tal maniera ovviato al grave inconveniente che il giovane, nel suo entrare all'università, riceva l'impressione di trovarsi in un paese geometrico agli antipodi di quello nel quale gli fu guida Euclide.

23. Ora per raggiungere tale intento, non potendosi pensare ad aggravare i programmi delle scuole secondarie (3), si può o adoperare negli inizii della geometria projettiva dei metodi di dimostrazione per quant'è possibile somiglianti a quelli di Euclide, oppure introdurre nell'insegnamento elementare sotto forma rudimentale quei concetti e quei modi di ragionare destinati a trovare il loro pieno

(1) Op. cit. p. 86.

(2) Si aggiunga che noi siamo frammenti vivi di una lunga storia di molti secoli, onde il sottoporre i nostri studenti allo stesso regime didattico di quello adottato nell'Accademia di Alessandria, varrebbe quanto negare le modificazioni subite dalla razza umana durante duemila anni, di continuo perfezionamento.

(3) Come vorrebbe il Günther: cfr. Reidt, l. c. p. 67.

svolgimento nell'insegnamento superiore. Al primo espediente sembrano essersi appigliati parecchi autori tedeschi (1), ma noi esitiamo a ritenere e per definitivo il conseguente metodo poggiando questo più su un ingegnoso artifizio che sulla vera natura delle cose. Appigliandosi al secondo partito fa d'uopo riordinare completamente il piano degli elementi (2).

Bisogna anzitutto togliere la vieta separazione della planimetria dalla stereometria, al che non si oppone nessuna seria difficoltà scientifica (cfr. n. 10) nè (come l'esperienza dimostra (3)) didattica, e potrebbe essere generalmente adottata purchè i programmi governativi avessero una elastità sufficiente (4).

In secondo luogo converrebbe far conoscere ai giovani al più presto possibile il concetto governatore della matematica superiore, cioè quello di *corrispondenza* (5); e poichè il concetto generale è forse troppo astratto per essere abbracciato fin dal principio, seguendo l'ordine naturale dal particolare al generale, converrebbe svolgerlo ed applicarlo in casi speciali notevoli, quali sarebbero la simmetria, la similitudine ecc., come fecero alcuni trattatisti citati nelle pagine precedenti (n. 7 e 16).

Per dare alla trattazione di certe teorie la massima generalità bisognerebbe poi parlare dei segni delle figure (cfr. n. 16).

Lascio pel momento irresoluta la questione se sia opportuno introdurre presto la legge di dualità (la quale negli elementi trova scarse applicazioni) e seguire il consiglio di chi (6) vorrebbe introdurre nell'insegnamento mezzano la geometria non-euclidea. Rilevo invece la necessità di una teoria della proporzionalità ove, senza rinunciare a presentarla come parte integrante della geometria, siano poste in

---

(1) HENRICI e TREUTLEIN, (v. n. 16) e il KÜPPER (*Einleitung in die projektivischen Geometrie der Ebene, bearb. von* K. BOBEK, Leipzig 1889).

(2) In ciò che segue non pretendo certamente di assegnare completamente le riforme, ma intendo soltanto di indicarne alcune.

(3) Si vegga LAZZERI e BASSANI, *Elementi di geometria* (Livorno 1891), opera che mi è nota soltanto dietro le bibliografie fattene dal Prof. GIUDICE nel T. I (p. 160-162) della *Rivista di Matematica* e dal Prof. Bettazzi nel Vol. VI (p. 155-163) di questo *Periodico*.

(4) Cfr. BETTAZZI, *Sull'insegnamento della Geometria nei Licei*, questo *Periodico*, Vol. VI, p. 113-116.

(5) Forse verrà un giorno in cui si sarà costretti ad accompagnarlo con quello di *gruppo*. Intanto venne già da tempo propugnata l'introduzione del concetto di *funzione*; v. BASSO *Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare* (*Giornale di Matematiche*, T. VII, 1869).

(6) SPITZ, *Die ersten Sätze vom Dreiecke und den Parallelen nach Bolyais Grundsätze bearbeitet* (Leipzig). Cfr. anche n. 16.

evidenza le relazioni che passano fra essa e la teoria aritmetica delle quantità irrazionali e la teoria generale delle grandezze; nè vuol tacersi la grande utilità che deriverebbe dal tenere sempre innanzi agli occhii della mente gli *Elementi di Euclide* come modello insuperato di logica concatenazione delle parti, ove si aspiri che il nuovo sistema abbia un'influenza educatrice dell'intelligenza non meno buona di quella che ebbe sempre quello euclideo.

Per assicurare poi al nuovo edificio tutta la desiderabile solidità converrebbe enunciare esplicitamente tutte le proposizioni tolte dall'esperienza, riducendole al loro numero minimo (cfr. n. 15) e mettere in chiaro la loro connessione con i teoremi dedottine. Le notizie storiche (1) e le applicazioni pratiche opportunamente presentate (cfr. n. 16) servirebbero a raccogliere sulla geometria quella poca luce di diletto che vi può splendere.

24. Ma (affrettiamoci a convenirne noi per i primi) un insegnamento costruito su un simile piano non potrebbe venire impartito a chi fosse completamente digiuno dei rudimenti della geometria. Sarebbe quindi indispensabile farlo precedere da un insegnamento preparatorio (accompagnato forse da esercizii di disegno geometrico) che rendesse il giovane famigliare con le figure geometriche e loro più ovvie proprietà. Tale propedeutica fu consigliata dall'Höuel (2), dal Fiedler (3) e dai commissarii che riferirono all'Associazione britannica sul tema che ci occupa (4); la sua utilità è generalmente riconosciuta in Germania (5), essa è imposta e giustificata dagli eccellenti Regolamenti pubblicati dai governi dell'Austria (6) e della Danimarca (7). All'adozione generale di essa si oppone forse la mancanza di un buon testo (8) ma l'ostacolo che così nasce non è insuperabile, tanto più che esistono libri che possono essere consultati con profitto e collezioni di modelli capaci di servire quali efficacissimi ausiliarii (9).

(1) Cfr. l'opuscolo di P. Treutlein da noi analizzato in questo *Periodico* (T. V, pag. 59-61). La stessa questione è stata trattata dall'Heppel in un discorso (*The Use of History in Teaching Mathematics*) letto il 14 gennaio 1893 dinanzi all'A. I. G. T., ma non ancora pubblicato.

(2) L. c. p. 81 e seg.

(3) Si vegga l'articolo dianzi citato.

(4) Si vegga la prima delle *Relazioni* dianzi (n. 18) nominate.

(5) Reidt, l. c. p. 167-173.

(6) Cfr. l'*Instruction* di cui già parlammo nel n. 11.

(7) Cfr. *Samling of Eksamenbestemmelser vedrørende det højere Skolevaesen* (Kjøbenhavn 1891).

(8) Reidt l. c. p. 170.

(9) Ib. p. 171-174.

Se, come sembra, tale istruzione geometrica preparatoria rendesse possibile dirigere la prora dell'insegnamento geometrico elementare verso quei nuovi continenti che è gloria del secolo attuale di avere scoperto, converrebbe affrettarsi a introdurlo dappertutto. Sarebbe forse allora reso possibile il raggiungimento di quegli ideali che, più o meno schiettamente, sono dichiarati dai più eminenti rappresentanti di tutte le nazioni civili e di cui i punti di contatto e le dissomiglianze noi ci siamo proposti di dimostrare con le pagine precedenti, nella fiducia che dalle essenziali analogie esistenti fra essi risulti giustificata e possa trasfondersi nel lettore la convinzione nostra che è debito di ogni geometra contribuire nella misura delle proprie forze, con le opere, i consigli o gl'incoraggiamenti, a che essi vengano avvicinati e, se è possibile, raggiunti.

Genova, febbraio 1893.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. p. 25 e 57 di questo Vol. e p. 81, 113, 169 del Vol. VII).

Per il centro O (Tav. I, fig. 7ª) di un cubo iscritto nella sfera $A\,A'$ si tirino i semiassi $OM = ON = OP = a$, congiungenti O con i centri delle faccie contigue, e si prolunghino delle parti $MX = NY = PZ = x$ segmento aureo di a; nei piani MON, NOP, POM si descrivano sopra MX, NY, PZ i quadrati dalle due parti di ciascun asse; i sei vertici E, F, G, H, I, L dei quadrati posti sulle rette passanti per X, Y, Z, insieme ai loro punti simmetrici E', F', G', H', I', L', rispetto ad O, ed agli otto vertici A, B, C, D, A', B', C', D' del cubo sono i venti vertici di un dodecaedro regolare iscritto nella sfera, avente per diametro la diagonale del cubo. Infatti chiamando I_0 la proiezione ortogonale di I sul quadrato $ABCD$ e V il mezzo di BC, i triangoli rettangoli II_0V, VMX sono simili a motivo della proporzione $a - x : x = x : a$ identica ad $I_0V : I_0I = MX, VM$; dunque risultando complementari gli angoli I_0VI, XVM i tre punti I, V, X giacciono in linea retta e la figura $ICFEB$ è un pentagono piano; di più equilatero, attesochè $(IB) = (II_0) + (BI_0) = (x) + (a - x) + (a) = 4\,(x)$ per la (3); onde $IB = 2x = EF$ e parimente si prova $BE = EF$. Inoltre dalle $(OI) = (OZ) + (ZI) = (a + x) + (x) = 3\,(a) = (OB)$ si deduce esser i vertici del pentagono equidistanti da O e giacere sopra una stessa circonferenza; dunque *il lato del dodecaedro regolare pareggia il segmento aureo del lato di un cubo iscritto nella medesima sfera*. Le faccie sono due a due simmetriche rispetto ad O; ai vertici del pentagono $IBEFC$ corrispondono i punti opposti $I'B'E'F'C'$; gli altri vertici del dodecaedro costituiscono i pentagoni regolari e simmetrici $LHD'A'G'$, $L'H'DAG$ giacenti in piani paralleli alle suddette faccie. I raggi ρ', ρ dei cerchi circoscritti ai pentagoni $LHD'A'G'$, $IBEFC$ hanno la ragione $a : x$ dei loro lati $LH = BC$ ed IB; quindi $\rho' : \rho = \rho : \rho' - \rho$, ovvero $\rho' - \rho$ è il segmento aureo di ρ ed eguaglia il lato del decagono regolare convesso iscritto nel cerchio $IBEFC$. Sia $\delta = II_1$ la distanza del punto I dal piano $LHD'A'G'$ per il triangolo rettangolo LII_1 si ha $(LI) = (LI_1) + (II_1)$ e siccome LI ed $LF_1 = \rho' - \rho$ sono i respettivi lati del pentagono e decagono regolari iscritti nel cerchio ρ si conchiude $\delta = II_1 = \rho$. Indicando con δ' la distanza fra i piani paralleli $LHD'A'G$, $L'H'DAG$ si vedrà come $\delta' : \delta$ eguagli la ragione delle distanze di A dalle parallele LH, IB; cioè $\delta' : \rho = IV : VX = II_0 : VM = x : a = \rho : \rho'$, da cui si ha $\delta' = \rho' - \rho$; onde il diametro della sfera iscritta nel dodecaedro regolare pareggia $\rho + \rho'$. La proiezione ortogonale delle due faccie opposte $IBEFC$, $I'B'E'F'C'$ sopra un piano a queste parallelo si compone di due pentagoni regolari iscritti nel cerchio ρ e tali che i vertici dell'uno siano i mezzi degli archi sottesi dai lati dell'altro; i rimanenti vertici del dodecaedro hanno la loro proiezione sulla circonferenza concentrica alla prima ρ e disegnata col raggio ρ' pari al lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ (*).

(*) Indicando con i l'angolo diedro del dodecaedro regolare, dal triangolo rettangolo VMX, si ricava $\tan\frac{i}{2} = \frac{VM}{MX} = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

La costruzione dell'icosaedro è semplice e diretta; in una semicirconferenza massima ABA' della sfera OA (fig. 8ª) s'iscriva il quadrato $BMM'N$, tirando in A la tangente $AT = 2\,OA = d$, e la OT segante la circonferenza in B, la corda AB è il lato l dell'icosaedro. Nelle sezioni sferiche MB, $M'N$ normali al diametro AA' s'iscrivano i pentagoni regolari $BCDEF$, $B'C'D'E'F'$ simmetrici al centro O della sfera, i loro dieci vertici insieme ai punti A, A' costituiscono i dodici vertici del poliedro regolare. Infatti ponendo $M'M = MB = x$, $MA = y = \frac{d-x}{2}$ per il triangolo rettangolo OMB si ottengono $\left(\frac{d}{2}\right) = (x) + \left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} + y\right)$, cioè $(x) = \frac{1}{5}(d)$, $(y) = (x, x - y)$; dunque MA è il segmento aureo di MB, od il lato del decagono regolare convesso iscritto nel cerchio minore MB, e siccome per il triangolo AMB si ha pure $(AB) = (AM) + (MB)$ si deduce $AB = BC = l$, così le faccie eguali ABC, ACD, ADE, AEF, AFB e le loro simmetriche $A'B'C'$, $A'C'D'$ ..... sono triangoli equilateri. Inoltre le congiungenti i vertici B, C, D, E, F con i punti N, ... mezzi degli archi sottesi dalle corde $D'E'$, $E'F'$, $F'B'$ ..... sono perpendicolari al piano del cerchio $M'N$, ed eguali i triangoli BNE', $E'CP$, ... risultano congrui a BMA e per conseguenza $AB = BC = BE' = E'C = ...$; i dieci triangoli $BE'C$, $E'CF'$, $CF'D$, $F'DB'$, $DB'E$, $B'EC'$, $EC'F$, $C'FD'$, $FD'B$ sono congrui ad ABC e la superficie del poliedro si compone di venti triangoli equilateri (*). Ad una faccia qualunque ABC è opposta la $A'B'C'$ simmetrica rispetto al centro O della sfera; gli altri sei vertici giacciono in piani paralleli ad ABC e costituiscono due triangoli equilateri $DE'F$, $D'EF'$ pur simmetrici rispetto ad O; ogni loro lato $DF = l'$ è diagonale del pentagono regolare $BCDEF$ e perciò con il lato l soddisfa alla proporzione $l' : l = l : l' - l$. Chiamando

(*) Se dai vertici B, D si abbassino le BH, DH normali allo spigolo AC l'angolo $BHD = i$, misurerà ciascun diedro dell'icosaedro e dal triangolo isoscele BHD si deduce sen $\frac{i_1}{2} = \frac{BD}{2\,BH} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{3}}$; da cui si trae tang $\frac{i_1}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \text{tang}^2 \frac{i}{2}$, essendo i l'angolo diedro del dodecaedro regolare.

ρ, ρ' i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli ABC, $DE'F$ si ha pure $\rho' : \rho = l' : l = \rho : \rho' - \rho$; onde ρ' è il lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ. La distanza δ fra i piani ABC, $DE'F$ è il cateto di un triangolo rettangolo avente gli altri lati eguali a $\frac{3}{2}\rho$, $\rho' - \frac{1}{2}\rho$; ovvero $(\delta) = \left(\frac{3}{2}\rho\right) - \left(\rho' - \frac{1}{2}\rho\right) = 9\left(\frac{\rho}{2}\right) - 5\left(\frac{\rho}{2}\right) = (\rho)$, cioè $\delta = \rho$. La distanza fra i piani $DE'F$, $D'EF'$ si ottiene conducendo la normale comune $E'E_0 = \delta'$, ed osservando che il piede E_0 cade sulla circonferenza ρ' circoscritta a $D'EF'$ e nel mezzo dell'arco $F'D'$, onde $E_0F' = \rho'$ e dal triangolo rettangolo $E'E_0F'$ si ricava $(\delta') = (l) - (\rho') = 3(\rho) - (\rho') = (\rho' - \rho)$; ne consegue $\delta' = \rho' - \rho$ e il diametro della sfera iscritta nel solido pareggiare $\rho + \rho'$. Il dodecaedro e l'icosaedro regolare sono poliedri correlativi; e se il medesimo cerchio ρ sia circoscritto ad una faccia di entrambi, avranno comuni le due sfere iscritte e circoscritte; proposizione di Aristeo contemporaneo di Euclide, e riferita pure dal Prof. Loria alla pagina 70 della sua Memoria.

(Continua). G. Bellacchi.

SOPRA ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE DI PRIMO GRADO.

(Continuazione e fine, V. pag. 29).

3. Facendo nella (A) $p = 4$ si ottiene:

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} s_{m-4k,3}\,.$$

Mutando nella $(1)'$ m in $m - 4k$, e sostituendo in quest' ultima formola si ha:

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(m-4k+3)^2 - r^2_{m-k}}{12} + \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(-1)^m + (-1)^{r_{m-k}}}{8}$$

che si riduce a

$$s_{m,4} = \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \frac{(m-4k+3)^2}{12} + \frac{(-1)^m}{8}\left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1\right] - \frac{1}{24}\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)}\left[2r^2_{m-k} - 3(-1)^{r_{m-k}}\right].$$

Ed applicando al primo termine del secondo membro la formola per la somma delle progressioni aritmetiche di ordine superiore, si trova eseguendo calcoli

$$s_{m,4} = \frac{1}{24} \left\{ \left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1 \right]_1 \left[2(m+3)^2 + 3(-1)^m \right] - \right.$$

$$16 \left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1 \right]_2 (m+1) + 64 \left[\left(\frac{m}{4}\right) + 1 \right]_3 -$$

$$\left. \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \left[2 r_{m-k}^2 - 3(-1)^{r_{m-k}} \right] \right\}.$$

Ricordando ora che r_{m-k} è il resto della divisione di $m-k$ per 3, denotiamo con n_0, n_1, n_2 rispettivamente il numero delle r_{m-k} $\left[k = 0, 1, 2, \ldots \left(\frac{m}{4}\right)\right]$ uguali a 0, 1, 2. Sarà :

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} r_{m-k}^2 = n_1 + 4 n_2, \quad \sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} (-1)^{r_{m-k}} = n_0 - n_1 + n_2,$$

$$\sum_{0\,k}^{\left(\frac{m}{4}\right)} \left(2 r_{m-k}^2 - 3(-1)^{r_{m-k}} \right) = 5(n_1 + n_2) - 3 n_0,$$

e per la determinazione in funzione di m della quantità $\sum_k \left(2 r_{m-k}^2 - 3(-1)^{r_{m-k}} \right)$ conviene ora distinguere vari casi :

I. $m \equiv 0 \pmod{3}$.

Dei numeri k della serie 0, 1, 2 .... $\left(\frac{m}{4}\right)$ si formino tre gruppi che soddisfino le congruenze

$$k_0 \equiv 0, \quad k_1 \equiv 1, \quad k_2 \equiv 2 \pmod{3}$$

ne segue

$$m - k_0 \equiv 0, \quad m - k_1 \equiv 2, \quad m - k_2 \equiv 1$$

ed i numeri n_0, n_2, n_1 saranno uguali rispettivamente al numero delle soluzioni di queste congruenze pei valori delle K non maggiori di $\left(\frac{m}{4}\right)$. E considerando ora tre sottocasi distinti a seconda che è $\left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0, 1, 2$, si trova con facilità :

$$1.^\circ \ \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0 : n_0 = \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3} + 1, \quad n_1 = \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3}, \quad n_2 = \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{3}$$

onde

$$\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)-9}{3}.$$

2.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 1$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)-1}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 2$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+7}{3}$.

Gli altri casi si trattano in modo analogo, e si troverà adunque:

II. $m\equiv 1 \pmod{3}$.

1.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 0$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+15}{3}$.

2.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 1$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)-1}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 2$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+7}{3}$.

III. $m\equiv 2 \pmod{3}$.

1.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 0$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+15}{3}$.

2.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 1$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+23}{3}$.

3.° $\left(\frac{m}{4}\right)\equiv 2$; $\sum_k\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]=\frac{7\left(\frac{m}{4}\right)+7}{3}$.

L'ispezione dei valori trovati per la quantità $\sum\left[2r^2_{m-k}-3(-1)^{r_{m-k}}\right]$ mostra che essi si riducono a cinque differenti, sostituendo nell'ultima espressione trovata per $s_{m,4}$ si ottiene:

$$s_{m,4}=\frac{1}{24}\left\{\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_1\left[2(m+3)^2+3(-1)^m\right]-\right.$$
$$\left.16\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_2(m+1)+64\left[\left(\frac{m}{4}\right)+1\right]_3-\frac{7}{3}\left(\left(\frac{m}{4}\right)+\alpha\right)\right\} \quad . \; . \; (4)$$

dove si ha:

$$\left.\begin{array}{lll}
\alpha = 1 & \text{quando } m \text{ è } \textit{qualunque} \text{ ed} & \frac{m}{4} \equiv 2 \\
\alpha = -\frac{1}{7} & \text{»} & \left(m \equiv 0, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1\right) \text{ ovv. } \left(m \equiv 1, \frac{m}{4} \equiv 1\right) \\
\alpha = -\frac{9}{7} & \text{»} & \left(m \equiv 0, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right) \\
\alpha = +\frac{15}{7} & \text{»} & \left(m \equiv 1, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right) \text{ » } \left(m \equiv 2, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 0\right) \\
\alpha = +\frac{23}{7} & \text{»} & \left(m \equiv 2, \left(\frac{m}{4}\right) \equiv 1\right)
\end{array}\right\} (\text{mod. } 3)$$

Ponendo $p = 4$ nella (B) e nella (C) si avrà:

$$s'_{m,4} = s_{m-4,4}\,, \qquad s''_{m,4} = s_{m-10,4}$$

e per la (4) si ricaverà:

$$(5) \qquad s'_{m,4} = \frac{1}{24}\left\{\left(\frac{m}{4}\right)_1 \left[2(m-1)^2 + 3(-1)^m\right] - 16\left(\frac{m}{4}\right)_2 (m-3) + 64\left(\frac{m}{4}\right)_3 - \frac{7}{3}\left[\left(\frac{m}{4}\right) - 1 + \alpha'\right]\right\},$$

$$(6) \qquad s''_{m,4} = \frac{1}{24}\left\{\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_1 \left[2(m-7)^2 + 3(-1)^m\right] - 16\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_2 (m-9) + 64\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 1\right]_3 - \frac{7}{3}\left[\left(\frac{m-2}{4}\right) - 2 + \alpha''\right]\right\}$$

dove α' ed α'' si determinano nei singoli casi colla stessa tabella che fornisce i valori delle α, quando vi si muti rispettivamente m in $m-4$ ed in $m-10$.

4. Mostreremo finalmente come si possa determinare il numero delle soluzioni delle equazioni

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = m\,, \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = m.$$

Denotando con S_m^3, S_m^4 i numeri cercati si ha dalla formola (9) della mia nota citata

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad S_m^3 = s'_{m+3,3}\,, \qquad S_m^4 = s'_{m+4,4}$$

e per tutto quanto precede i secondi membri di queste eguaglianze sono perfettamente conosciuti.

Roma, 1892.

Alberto Tagiuri.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Regole d'analogia nel triangolo o trasformazione continua, e trasformazione analitica corrispondente. (*Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, T. CXVI. N.° 1, 1893). — Chiamando A, B, C, a, b, c, p, $p-a$, $p-b$, $p-c$, S, R, r, r_a, r_b, r_c, δ, δ_a, δ_b, δ_c, ... gli angoli, i lati, il semiperimetro, le quantità $\frac{b+c-a}{2}$, $\frac{c+a-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, la superficie, il raggio del cerchio circoscritto, i raggi dei quattro cerchi inscritto ed ex-inscritti, le quantità $4R+r$, $4R-r_a$, $4R-r_b$, $4R-r_c$, ...

Se, in una formola fra gli elementi del triangolo, si cambiano queste quantità rispettivamente in $-A$, $\pi - B$, $\pi - C$, a, $-b$, $-c$, $-(p-a)$, $-p$, $(p-a)$, $(p-b)$, $-S$, $-R$, r_a, r, r_c, r_b, $-\delta_a$, $-\delta$, $-\delta_c$, $-\delta_b$, si avrà una formula esatta.

Se, per esempio, è stata dimostrata la formola

$$\Sigma\,(b-a)^2\,(c-a)^2 = (p^2 - 3\,r\,\delta)^2,$$

se ne deduce

$$(b+a)^2(c+a)^2 + (b+a)^2(b-c)^2 + (c+a)^2(b-c)^2 = [(p-a)^2 + 3\,r_a\,\delta_a]^2,$$

che sarebbe stato impossibile indovinare *a priori*.

E. LEMOINE.

Nota della Red. — Per maggiori particolari sull'argomento si possono consultare: un articolo dell'A. nel *Bulletin de la Société mathématique de France* (1891, pp. 136-141), le seguenti note del medesimo: 1° *Étude sur une nouvelle méthode de transformation dite transformation continue* (*Mathesis*, 1892, pp. 58-64, 81-92) — 2°. *Sur les transformations systématiques des formules relatives au triangle. Transformation continue* (*Association française p. l'avan. des Sciences, Annuaire* de 1891, pp. 118–130) — 3°. *Règle des analogies dans le triangle. Transformation continue* (*Journal de Mathé. élém.* de M. DE LONGCHAMPS, 1892, pp. 103-106) — 4°. *Une règle d'analogies dans le triangle et la spécification de certaines analogies à une transformation dite « transformation continue »* (*Nou. Annales de Mathé.*, 1893, pp. 20-36); come pure la nota del Sig. A. POULAIN col titolo *Transformation des formules du triangle* (*J. de Mathé. élem.*, 1892, pp. 110-113, 136-139, 151-153).

Sopra una soluzione della Quistione 113. — Potendo il metodo analitico da me seguito nella ricerca della radice doppia dell'equazione proposta nella q. 113 essere oggetto di alcune critiche, espongo qui la stessa ricerca con metodo rigoroso, credendo di giovare ai giovani studenti col porgere loro occasione di rivedere la poco curata teoria della divisibilità dei polinomi (Vedasi p. es. BERTRAND - *Algebra*, traduz. di Betti, Cap. XIII).

La quistione era: « *Dimostrare che l'equazione*

$$A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

in cui è $A_4 = m^5 - l m^3 n + m^2 l^4$, $A_3 = 4 m^4 n - 31 m^2 n^2 - 11 m^3 l^3 + 2 m n l^4$, $A_2 = 6 m^3 n^2 - 3 m n^3 l + 64 m^4 l^2 - 49 l^3 n m^2 + n^2 l^4$, $A_1 = 4 m^2 n^3 - n^4 l + 128 m^3 n l^2 - 65 m n^2 l^3$, $A_0 = m n^4 + 64 m^2 n^2 l^2 - 27 l^3 n^3$, *ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzione di* l, m, n. (D. Besso) ».

Pongasi

$$f(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 ;$$

allora la prima derivata di $f(x)$ sarà

$$f'(x) = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1 .$$

Osservo intanto che

$$A_4 = m^2 A_4' , \quad \text{ove} \quad A_4' = m^3 - lmn + l^4 ;$$

ora A_4' non può essere risoluto in fattori razionali di cui uno sia di 1° grado rispetto ad m, perchè quest'ultimo sarebbe della forma $m - p$, essendo p un divisore intero di l^4, e allora A_4' si annullerebbe per un valore di m indipendente da n, il che per l'arbitrarietà di n è chiaramente impossibile. Ma A_4' non è divisibile nemmeno per un polinomio che contenga le sole lettere l ed n, perchè tale polinomio dovrebbe dividere i singoli termini di A_4'; dunque A^4 è primo (irriducibile in fattori).

Ciò posto, si osservi che A_4' non divide A_0, perchè A_0 è di 2° grado in m, mentre A_4' è di 3° grado in m; inoltre m non divide A_0, dunque A_4 è primo con A_0. Segue di qui che non esiste un divisore dei cinque coefficienti A_4, A_3, A_2, A_1, A_0 di $f(x)$, cioè che A_4 *è primo con* $f(x)$.

Sia ora α la radice doppia di $f(x) = 0$; sappiamo che, se le rimanenti due radici β e γ di $f(x) = 0$ sono distinte, $x - \alpha$ sarà il massimo divisore di $\frac{f(x)}{A_4}$ ed $\frac{f'(x)}{4 A_4}$, e perciò α sarà razionale; potremo dunque porre $\alpha = \frac{r}{s}$, indicando con r ed s due polinomi in l, m, n primi fra loro.

Allora sarà

$$f(x) = A_4 \left(x - \frac{r}{s} \right)^2 (x - \beta)(x - \gamma) ,$$

da cui

$$s^2 f(x) = A_4 (s x - r)^2 (x - \beta)(x - \gamma) .$$

Dividendo dunque il polinomio a coefficienti interi $s^2 f(x)$ per l'altro a coefficienti interi $A_4 (s x - r)^2$, si otterrà il quoziente di 2° grado $(x - \beta)(x - \gamma) = x^2 + p x + q$ (poniamo); e quindi p e q saranno espressioni razionali in l, m, n, e si potrà supporre che p e q siano rappresentati da due frazioni aventi lo stesso *minimo* denominatore; sicchè, posto $p = \frac{b}{a}$, $q = \frac{c}{a}$, avremo

$$x^2 + p x + q = \frac{a x^2 + b x + c}{a} ,$$

ed a, b, c non avranno alcun divisore comune. Allora avremo

$$a s^2 f(x) = A_4 (s x - r)^2 (a x^2 + b x + c) .$$

Ora as^2 divide il 1° membro di questa equazione, dunque dividerà anche il secondo. Ma as^2 è primo con $ax^2 + bx + c$, poichè a, b, c non hanno alcun divisore comune, ed è primo con $sx - r$ e quindi anche con $(sx - r)^2$; dunque as^2 divide A_4. Inoltre A_4, dividendo il secondo membro della medesima equazione, ne dividerà anche il primo membro $as^2 f(x)$; ma abbiamo già provato che A_4 è primo con $f(x)$, dunque A_4 divide as^2. Sicchè A_4 ed as^2 sono ciascuno un divisore dell'altro, dunque $A_4 = as^2$. Avremo perciò

$$f(x) = (sx - r)^2 (ax^2 + bx + c).$$

Ora, confrontando i coefficienti dei due membri, si trova in particolare $A_0 = cr^2$; dunque s ed r debbono essere fattori doppi rispettivamente di A_4 e di A_0.

D'altronde si ha

$$A_0 = n^2 A_0', \quad \text{ove} \quad A_0' = mn^2 + 64 m^2 l^2 - 27 l^3 n;$$

dico che A_0' è primo. Intanto il discriminante di A_0', essendo

$$n^4 + 4 \cdot 64 \cdot 27 l^5 n,$$

non è un quadrato, e quindi A_0' non è decomponibile in fattori razionali rispetto ad m; inoltre, essendo i coefficienti di m^2, m, m^0 in A_0' primi fra loro, A_0' non è divisibile nemmeno per un fattore razionale che non contenga m, e quindi A_0' è primo; dunque $\pm n$ e ± 1 sono i soli fattori doppi di A_0. Siccome si ha $A_4 = m^2 A_4'$ e si è già osservato che A_4' è primo, si conclude anche che $\pm m$ e ± 1 sono i soli fattori doppi di A_4.

Segue di qui che, se α è radice doppia razionale di $f(x) = 0$, non può essere che

$$\alpha = \pm \frac{n}{m}, \quad \alpha = \pm n, \quad \alpha = \pm \frac{1}{m}, \quad \alpha = \pm 1,$$

cioè α è indipendente da l. Ma facendo $l = 0$ si trova subito

$$f(x) = m(mx + n)^4,$$

dunque, se α è razionale, deve essere

$$\alpha = -\frac{n}{m}.$$

Non resta dunque che verificare; e la verifica dà facilmente

$$f\left(-\frac{n}{m}\right) = 0, \qquad f'\left(-\frac{n}{m}\right) = 0,$$

cioè $\alpha = -\frac{n}{m}$ è effettivamente una radice doppia.

Palermo, gennaio 1893.

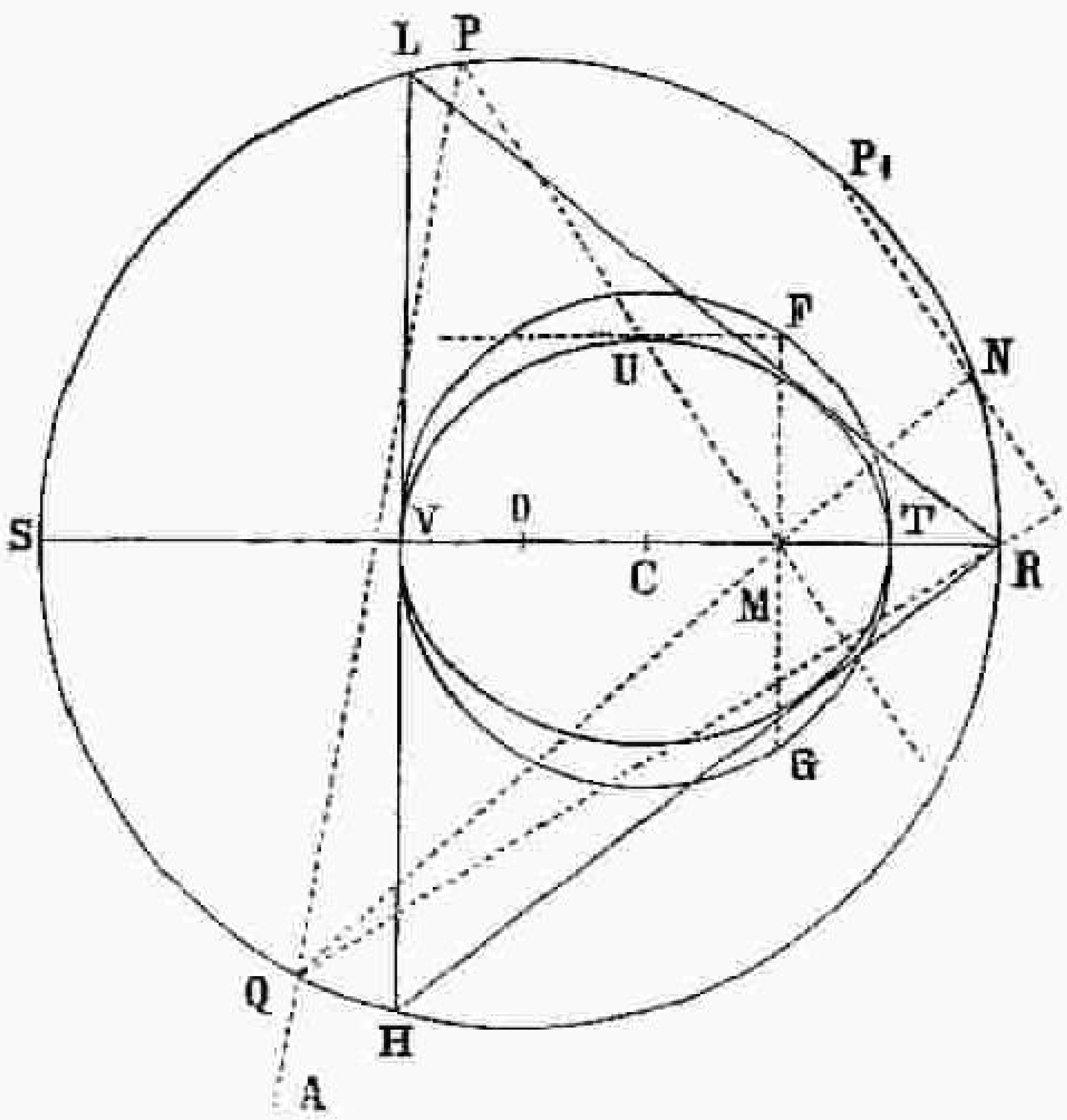
G. Rozzolino.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
118, 132, 133, 145**, 146*, 147*, 148* e 151** (*)

118. *L' inviluppo dei lati dei triangoli iso-ortocentrici e iscritti in un dato cerchio è una conica concentrica e bitangente alla circonferenza dei nove punti, comune a tutti quei triangoli, e avente un fuoco nel comune ortocentro, e l'altro fuoco nel centro del dato cerchio.* (S. Catania).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Palatini* a Venezia.

Sia A un punto qualunque del piano, e vediamo quanti dei lati dei triangoli in discorso passano per esso. Fissiamo un punto P sul cerchio dato di centro O e tiriamo AP, la quale taglierà il cerchio ulteriormente in Q; tiriamo PM (M comune ortocentro dato) e da Q la perpendicolare ad essa, la quale taglierà il cerchio dato ancora in N; tiriamo QM ed a questa la perpendicolare da N, la quale taglierà ancora il cerchio O in un punto P_1; se P_1 cadesse in P, il triangolo PNQ sarebbe uno dei triangoli della quistione. Ora essendo che ad ogni punto P corrisponde un punto P_1 e ad ogni P_1 un P, le coincidenze sono due, e perciò due sono i raggi in discorso passanti per A. Dunque l' inviluppo che stiamo esaminando è una conica K, ed i triangoli della quistione sono gl' infiniti triangoli contemporaneamente circoscritti a K ed inscritti in O. È chiaro che la K dev'essere simmetrica rispetto ad $RMOS$ che adunque contiene un asse della medesima.



Ora per ognuno dei nostri triangoli esiste un cerchio dei nove punti col centro in C, punto di mezzo di OM (V. p. es. Baltzer. *Plan.* § 12, 8), ed è evidente che due di tali triangoli XYZ, $X'Y'Z'$, simmetrici rispetto ad RS, hanno il medesimo cerchio dei nove punti, che dimezza MX, MY, ... , MZ'. Ma il

(*) La risposta alla quistione 143 viene rimandata al fascicolo venturo, in causa del notevole sviluppo che richiede.

luogo dei punti di mezzo dei segmenti che uniscono M coi punti di O è una conica (perchè ha due punti sopra ogni retta per M senza passare per questo punto), la quale ha dunque sei punti in comune col cerchio ultimamente considerato. Dunque tutti i cerchi dei nove punti dei nostri triangoli coincidono in un unico cerchio C che si può definire: 1° come il luogo dei punti di mezzo dei segmenti che uniscono M coi punti di O; 2° come la podaria di M rispetto a K; 3° come il luogo dei punti di mezzo delle corde che il cerchio O intercetta sulle tangenti di K. Ora prendendo il triangolo HLR è chiaro che C tocca HL in V, cioè la K in V ed analogamente in T; ossia il cerchio dei nove punti comune ai nostri triangoli tocca la K in due vertici, ed è quindi ad essa concentrico.

Se M è interno ad O e quindi a C, la perpendicolare da M ad RS incontra C in due punti reali F, G; conducendo p. e. da F la parallela ad RS, essa è tangente a K (è chiaro che la K può anche definirsi come l'inviluppo delle perpendicolari alle rette uscenti da M nei punti in cui queste incontrano C) in un vertice (reale) U dell'asse diverso da TV, il che prova che K è un'ellisse; ed essendo $MU = CF = CT$, vuol dire che M è uno dei fuochi reali della curva, e quindi O l'altro.

Se M è fuori del cerchio O e quindi di C, conducendo da M una tangente a C, MD (D punto di contatto), la CD che è perpendicolare ad MD in D è tangente a K, della quale sarà dunque un assintoto reale; perciò in questo caso la K è un'iperbole. E poichè la perpendicolare condotta da M all'assintoto CD taglia su questo un segmento CD eguale al semi-asse CT, vuol dire che M è uno dei fuochi reali della curva, e quindi O l'altro.

Se infine M cade sulla circonferenza O, i triangoli della quistione sono tutti rettangoli col vertice dell'angolo retto in M e coll'ipotenusa ruotante intorno ad O, ed il nostro inviluppo si riduce a due fasci di raggi coi centri M, O.

132. *Risolvere l'equazione*

$$x^7 - 7(x-1)^2 \cdot x \cdot (x+1)^2 = a. \qquad (*)$$

(F. Giudice).

Risoluzione del Sig. Prof. *M. Martone* a Reggio Calabria.

Sviluppando e ordinando si ha l'equazione

$$x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x - a = 0$$

che per $x = z + \frac{1}{z}$ [1], dove z indica una nuova incognita, si muta nell'equazione trinomia

$$z^{2 \cdot 7} - az^7 + 1 = 0 \qquad [2],$$

(*) Come avverte il Sig. Prof. *S. Catania* ponendo $a = -b$, l'equazione proposta si riduce a $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + b = 0$, che non è se non un caso particolare ($a = -1$), dell'equazione $x^7 + 7ax^5 + 14a^2x^3 + 7a^3x + b = 0$ considerata nella q. 52 (Cfr. *Periodico*, an. V, pp. 27, 142). Tuttavia stante la qualche diversità del processo di risoluzione seguito appresso in confronto a quello della soluzione della q. 52, diamo posto alla risposta inviataci.

da cui si ricava

$$z^7 = y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{4} \qquad [3].$$

Ora sono da esaminare tre casi:

1° $a^2 - 4 = 0$, cioè $a = \pm 2$. Risulta $z^7 = \pm 1$. Quindi

$$z = \cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

o

$$z = \cos\frac{(2k+1)\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

e perciò per la [1], le radici della proposta equazione saranno date da

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{7} \quad \text{od} \quad x = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{7} \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

2° $a^2 - 4 > 0$. Indicando in questo caso con b_1 e b_2 le due radici [3], saranno da risolvere le due equazioni binomie $z^7 - b_1 = 0$, $z^7 - b_2 = 0$, le quali dànno

$$z = \sqrt[7]{b_1}\left[\cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7}\right], \quad z = \sqrt[7]{b_2}\left[\cos\frac{2k\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{7}\right]$$

e tali valori sostituiti alla lor volta in [1], facendo $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, forniscono le radici dell'equazione proposta.

3° $a^2 - 4 < 0$ quindi $a < 2$ in valore assoluto. Pongasi

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} = \cos\beta \pm i \operatorname{sen}\beta,$$

donde $a = 2\cos\beta$. L'equazione [2] diviene in tal caso

$$z^{2 \cdot 7} - 2\cos\beta \,.\, z^7 + 1 = 0,$$

che ha per radici i quattordici valori

$$z = \cos\frac{2k\pi + \beta}{7} \pm i \operatorname{sen}\frac{2k\pi + \beta}{7} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Sostituendo questo valore di z in [1], segue poi

$$x = 2\cos\frac{2k\pi + \beta}{7} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Dalla discussione precedente risulta che nel 1° e nell' ultimo caso le radici dell'equazione proposta sono tutte reali, nel 2° una è reale e le altre sei sono immaginarie.

133. *Se il triangolo* ABC *ruota attorno ad un punto* K *del suo piano ed è* A'B'C' *una nuova sua posizione, e se inoltre* α, β, γ *sono i punti d'incontro rispettivamente di* BC *con* B'C', *di* CA *con* C'A' *e di* AB *con* A'B', *si ha che:*

1° se K *è il punto di Lemoine (o punto d' incontro delle simediane) del triangolo* ABC, *è anche il baricentro del triangolo* αβγ;

2° se K è un punto di Brocard del triangolo ABC, *è pure un punto di Brocard del triangolo* $\alpha\beta\gamma$, *il quale è simile ad* ABC.

(G. Riboni).

Risposta del Sig. Prof. *S. Catania* a Catania.

1° Dico E, F, G i piedi delle perpendicolari condotte da K rispettivamente ai lati BC, CA, AB del triangolo ABC, ed E', F', G' i punti analoghi per il triangolo $A'B'C'$; risulteranno $KG = KG'$, $\gamma G = \gamma G'$. Detto δ l'angolo di cui è rotato il triangolo ABC, ed x, y, z le distanze KE, KF, KG, si avrà $K\gamma = z : \cos\frac{1}{2}\delta$.

Ora, essendo K il punto di Lemoine del triangolo ABC, si ha

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2\Delta}{a^2+b^2+c^2} = Q,$$

dove a, b, c, Δ rappresentano i lati e l'area del triangolo stesso. Si deduce $z = c\,.\,Q$ e $\dfrac{K\gamma}{c} = \dfrac{Q}{\cos\frac{1}{2}\delta}$, e per conseguenza

$$\frac{K\alpha}{a} = \frac{K\beta}{b} = \frac{K\gamma}{c} \quad \text{ovvero} \quad \frac{K\alpha}{x} = \frac{K\beta}{y} = \frac{K\gamma}{z} \qquad (1).$$

I triangoli $KE\alpha$, $KF\beta$ essendo rettangoli, e per le (1) essendo $K\alpha : KE = K\beta : KF$ (2), detti triangoli saranno eziandio simili, e sarà l'angolo $\alpha KE = \beta KF$; posto in comune l'angolo $FK\alpha$, risulterà l'angolo $\beta K\alpha = FKE$. E siccome inoltre ha luogo la (2), i triangoli $K\alpha\beta$, KEF saranno simili fra loro. Si dimostra in modo analogo che sono simili i triangoli $K\beta\gamma$, KFG, e i triangoli $K\gamma\alpha$, KGE.

I triangoli EFG, $\alpha\beta\gamma$ essendo composti dello stesso numero di triangoli simili e similmente situati, saranno simili, e K sarà omologo di sè stesso. Ora è noto (J. Casey, *A sequel to Euclid*, pag. 172, 1888 - G. Bellacchi, *Algebra*, vol. 3°, pag. 58) che essendo K il punto di Lemoine del triangolo ABC, è anche il baricentro del triangolo podario EFG relativo al punto K e al medesimo triangolo, quindi K è pure il baricentro del triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Oss. 1.ª Dalla dimostrazione precedente risulta che *due triangoli analoghi al triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *sono simili fra loro e simili al triangolo* EFG.

Oss. 2.ª Si ha da tale similitudine

$$T.\alpha\beta\gamma : T.EFG = \overline{K\gamma}^2 : z^2 = 1 : \cos^2\frac{1}{2}\delta,$$

cioè: *due triangoli analoghi al triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *sono fra loro in ragione inversa dei quadrati dei coseni delle metà delle corrispondenti rotazioni.*

Oss. 3.ª Si può esprimere l'area del triangolo $\alpha\beta\gamma$ in funzione di a, b, c e δ. Infatti, essendo $\frac{3}{2}x$, $\frac{3}{2}y$, $\frac{3}{2}z$, cioè $\frac{3}{2}Q\,.\,a$, $\frac{3}{2}Q\,.\,b$, $\frac{3}{2}Q\,.\,c$ le mediane del triangolo EFG, la sua area sarà espressa, come è facile verificare, da $3Q^2\,.\,\Delta = \dfrac{12\Delta^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}$, e sarà quindi $T.\alpha\beta\gamma = \dfrac{12\Delta^3}{(a^2+b^2+c^2)^2\cos^2\frac{1}{2}\delta}$.

2° Dico Ω e ω rispettivamente il punto positivo e l'angolo di Brocard relativi al triangolo ABC; saranno Ω ed ω il punto positivo e l'angolo di Brocard relativi al triangolo $A'B'C'$. Essendo ang. $\Omega B\alpha = \Omega B'\alpha$, e ang. $\alpha B\gamma = \alpha B'\gamma$, i cinque punti Ω, α, γ, B, B' saranno conciclici, e risulterà ang. $\Omega\gamma\alpha = \omega$. Si dimostra similmente che ang. $\Omega\alpha\beta = \Omega\beta\gamma = \omega$, e perciò Ω è il punto positivo di Brocard relativo al triangolo $\alpha\beta\gamma$. Inoltre, dal pentagono iscrittibile $\Omega\alpha BB'\gamma$ si ha ang. $\Omega\alpha\gamma = \Omega B\gamma$, e quindi ang. $\gamma\alpha\beta = ABC$. Si dimostra similmente che ang. $\beta\gamma\alpha = CAB$ e ang. $\alpha\beta\gamma = BCA$. Così il triangolo $\alpha\beta\gamma$ è simile al triangolo ABC. Si noti però che ai lati $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ del primo sono omologhi nel secondo i lati BC, CA, AB.

Oss. 1.ª Si può determinare anche qui l'area del triangolo $\alpha\beta\gamma$. Infatti, si ha $T.\alpha\beta\gamma : T.ABC = \overline{\Omega\gamma}^2 : \overline{\Omega A}^2$. Detta m la perpendicolare condotta da Ω ad AB si ha: $m = \Omega\gamma . \cos\frac{1}{2}\delta = \Omega A \operatorname{sen}\omega$: quindi

$$T.\alpha\beta\gamma = \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\delta}.\Delta.$$

E si può enunciare un teorema analogo a quello della precedente 2ª Oss..

Oss. 2.ª Del teorema 2° esiste pure l'inverso, che si può enunciare nel seguente modo: *Se il triangolo* ABC *ruota attorno a un punto* K *del suo piano ed è* A'B'C' *una nuova sua posizione, e se inoltre* α, β, γ *sono i punti d'incontro rispettivamente di* BC *con* B'C', *di* CA *con* C'A' *e di* AB *con* A'B', *e il triangolo* $\alpha\beta\gamma$ *è simile al triangolo* BCA, *allora* K *è un punto di Brocard del triangolo* ABC. La dimostrazione è facile, perchè dalle ipotesi fatte risultano conciclici i gruppi di punti α, B, B', γ e B, B', γ, Ω, cioè risultano conciclici i cinque punti B, B', γ, Ω, α, e sarà ang. $\Omega\gamma\alpha = \Omega BC$. Inoltre ang. $AB\Omega = \gamma\alpha\Omega$; sarà perciò ang. $\Omega\alpha\beta = \Omega BC = \Omega\gamma\alpha$. Di qui è ovvio dedurre che Ω è un punto di Brocard tanto del triangolo $\alpha\beta\gamma$, quanto del triangolo ABC.

Rimane anche risoluto il seguente problema: *Determinare nel piano d'un triangolo* ABC *un punto* K *in modo che sieno verificate le condizioni espresse nel teorema dell'ultima osservazione.*

145.** *Posto*

$$a_1 = \frac{a+b}{2},\ a_2 = \frac{b+a_1}{2},\ a_3 = \frac{a_1+a_2}{2},\ \ldots.\ a_n = \frac{a_{n-2}+a_{n-1}}{2},$$

esprimere a_n *in funzione di* a, b, n, *e trovare il limite a cui tende* a_n *quando* n *tende all'infinito.*

(D. Besso).

Soluzione della Sig.ra V.va *F. Prime* a Bruxelles e del Sig. *C. Aiello*, studente nella R. Università di Napoli.

Sopra l'asse Ox, prendiamo, nella stessa direzione, $OA = a$, $OB = b$ e sia A_1 il punto medio del segmento AB, A_2 il centro del segmento A_1B, A_3 il centro del segmento A_1A_2, ... A_n il centro del segmento $A_{n-2}A_{n-1}$.

È chiaro che a_1 rappresenta il segmento OA_1; a_2 il segmento OA_2, ... a_n il segmento OA_n. E quindi

$$a_n = b - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2^2} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{b-a}{2^n} =$$

$$b - \frac{b-a}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = b - \frac{b-a}{3} + (-1)^n \cdot \frac{b-a}{3.2^n}$$

e

$$a_\infty = b - \frac{b-a}{3} = \frac{2b+a}{3}.$$

Si vede da ciò che, tendendo n all'infinito, il punto A_n tende verso il punto che divide AB nel rapporto $2:1$.

Soluzione del Sig. *E. Ghisi*, studente nella R. Università di Catania.

Ponendo

$$\alpha_k = 2^k - 2^{k-1} + 2^{k-2} - \ldots (-1)^k 2^0 \qquad [1]$$

è facile verificare che $\alpha_{k+2} = \alpha_{k+1} + 2\alpha_k$ [2]. Ciò posto, si trova

$$a_2 = \frac{a\alpha_1 + b\alpha_2}{2^2}, \qquad a_3 = \frac{a\alpha_2 + b\alpha_3}{2^3}.$$

Dico che in generale $a_i = \dfrac{a\alpha_{i-1} + b\alpha_i}{2^i}$. Infatti ammettiamo che la legge di formazione delle a espressa da questa formola valga per le due consecutive a_k ed a_{k+1}: si avrà per dato e in seguito alla [2]

$$a_{k+2} = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{a\alpha_{k-1} + b\alpha_k}{2^k} + \frac{a\alpha_k + b\alpha_{k+1}}{2^{k+1}}\right] =$$

$$= \frac{a(\alpha_k + 2\alpha_{k-1}) + b(\alpha_{k+1} + 2\alpha_k)}{2^{k+2}} = \frac{a\alpha_{k+1} + b\alpha_{k+2}}{2^{k+2}},$$

sicchè la legge, che è vera per a_2 e a_3, è vera sempre.

Ora osservando che i termini del secondo membro della [1] sono in progressione geometrica di ragione -2, α_k, che ne è la somma, prende anche la forma $\dfrac{2^{k+1} + (-1)^k}{3}$, cosicchè sarà

$$a_n = \frac{a\alpha_{n-1} + b\alpha_n}{2^n} = \frac{a\left[2^n + (-1)^{n-1}\right] + b\left[2^{n+1} + (-1)^n\right]}{3.2^n} =$$

$$= \frac{2b+a}{3} + (-1)^n \frac{b-a}{3.2^n}$$

e

$$\lim_{n=\infty} a_n = \frac{2b+a}{3} \quad (*).$$

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *G. Candido* (studente nella R. Università di Pisa), *V. Colombo* (R. Ist. tec. Bari), *E. de Vito* (R. Univ. Roma) e *G. Marotta* (R. Univ. Catania).

146*. *In un dato triangolo isoscele costruire tre circoli fra loro eguali, ciascuno dei quali sia tangente a due lati del triangolo, e in modo che quello tangente ai due lati eguali tocchi ciascuno degli altri due.*

Soluzione analoga dai Sigg. *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *L. Luigi Mucci*, R. Liceo Lucera; *M. Piattelli*, R. Liceo Bari; *C. Scarponi*, R. Scuola tecnica Osimo; dalla Sig.ª V.ᵛᵃ *F. Prime* e dalle Sig.ⁿᵉ *Luisa Polverini*, *Ada Sciava*.

Sia ABC $(AB = AC)$ il triangolo isoscele considerato e siano AI, BI, CI le bisettrici dei suoi angoli. I centri α, β, γ dei circoli cercati si troveranno su queste rette e poichè $\alpha\beta$ dista da AB d'un segmento $= \alpha\beta : 2$, la quistione sarà ridotta ad inscrivere nel triangolo BIA un rettangolo col lato parallelo ad AB doppio dell'altro lato. Chiamando $\alpha\beta\gamma\delta$ un tale rettangolo è chiaro che il suo vertice γ si troverà nell'intersezione di AB col luogo dei punti pei quali le distanze a BI, valutate perpendicolarmente ad AB, sono le metà delle distanze dei corrispondenti punti β ad AI, prese parallelamente ad AB medesimo. Un tal luogo, che è una retta passante per I, può costruirsi immediatamente determinandone un punto così: Si innalzi ad AB la perpendicolare $DB = AB : 2$ e tirisi DI. Il punto d'incontro γ di DI con AB è un vertice del rettangolo cercato e per completare la soluzione del problema, basterà condurre da γ la perpendicolare ad AB ad incontrare BI in β, tirare da β la parallela $\beta\alpha$ ad AB fino che incontri AI in α e da α la parallela ad AC finchè incontri CI in γ. I punti α, β, γ saranno i centri dei circoli richiesti.

È facile dimostrare *a posteriori* l'esattezza della costruzione precedente. Dalle coppie di triangoli simili DBI, $\gamma\beta I$; ABI, $\alpha\beta I$, si ha:

$$DB : \gamma\beta = BI : \beta I \quad ; \quad AB : \alpha\beta = BI : \beta I$$

onde $DB : \gamma\beta = AB : \alpha\beta$ e quindi $\gamma\beta : \beta\alpha = DB : BA = 1 : 2$.

Il Sig. *T. Mari*, alunno del R. Istituto tec. di Napoli, dà una soluzione di carattere analitico. Egli indicata con ρ la distanza, da considerarsi nota, di I da AB, e con R il raggio comune dei tre cerchi, osserva, come precedentemente, che si ha:

$$AB : 2R = \rho : \rho - R,$$

da cui

$$R = \frac{AB \cdot \rho}{AB + 2\rho},$$

onde conclude che il raggio dei cerchi cercati è una quarta proporzionale dopo le tre lunghezze $AB + 2\rho$, AB e ρ. Determinato R è poi agevole costruire i circoli medesimi.

147*. *Sia* ABCD *un rettangolo e sia, sul prolungamento del lato* AB, *il punto* P *così situato che il rapporto* $\frac{AB}{AD}$ *sia il cubo del rapporto* $\frac{BP}{AD}$: *se la* PC *incontra in* R *il prolungamento della* AD, *i punti* R *e* P *saranno equidistanti dal punto d'incontro delle diagonali del rettangolo.*

Soluzione dei Sigg. *A. Parsi* a Genova, *E. de Vito* a Roma, *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari e *G. Mazza*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza.

Chiamando O il punto d'incontro delle diagonali, conducansi le perpendicolari OM, ON ai lati AD, AB del rettangolo e si tirino RO, OP.

Dai triangoli ROM, PON si ha subito

$$\overline{RO}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{RM}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{DR}^2 + AD \cdot \overline{DR}, \qquad [1]$$

$$\overline{OP}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{BP}. \qquad [2]$$

Ma dai triangoli simili RDC, CBP segue $\overline{RD} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{\overline{BP}}$, onde $\overline{DR}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DR} = \frac{\overline{AB}^2 \cdot \overline{AD}^2}{\overline{BP}^2} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}^2}{\overline{BP}}$ e introducendo la condizione $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BP}^3}{\overline{AD}^3}$ che equivale a $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BP}^2} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}}$ oppure a $\frac{\overline{AD}^2}{\overline{BP}} = \frac{\overline{BP}^2}{\overline{AB}}$, si ricava infine

$$\overline{DR}^2 + \overline{AD} \cdot \overline{DR} = \overline{AB} \cdot \overline{BP} + \overline{BP}^2,$$

ciò che mostra come i secondi membri delle [1] e [2] siano equivalenti. Si ha dunque $\overline{RO} = \overline{OP}$ c. v. d.. (*)

148*. *Dati i raggi delle basi di due coni retti di egual volume e di eguale superficie totale, calcolare le loro altezze.*

Soluzioni analoghe della Sig.ra V.va *F. Prime* a Bruxelles e del Sig. *V. Columbo*, allievo del R. Istituto tecnico di Bari.

Siano r, R i raggi delle basi, h, H le altezze dei coni considerati; le quantità r, R sono note e le quantità h, H incognite.

I volumi dei coni essendo uguali, si ha

$$[1] \qquad r^2 h = R^2 H \qquad \text{o} \qquad h : H = R^2 : r^2;$$

le superficie totali essendo uguali, si ha ancora

$$[2] \qquad r \cdot \sqrt{r^2 + h^2} + r^2 = R \cdot \sqrt{R^2 + H^2} + R^2.$$

Ponendo $\frac{h}{H} = \frac{R^2}{r^2} = k^2$, l'equazione [1] dà $h = k^2 H$ ed $R = kr$ e la [2] diviene

$$\sqrt{r^2 + k^4 H^2} - k\sqrt{k^2 r^2 + H^2} = r(k^2 - 1).$$

Poniamo ancora $k^2 r^2 + H^2 = Y^2$ e saremo infine condotti a risolvere l'equazione

$$\sqrt{r^2 + k^4 Y^2 - k^6 r^2} = r(k^2 - 1) + kY,$$

rispetto ad Y.

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sig. *U. Gerra* (R. Istituto tec. Piacenza), *M. Giordano* (R. Istituto tec. Napoli) e dalla Sig.a V.a *F. Prime* a Bruxelles.

Ora, elevando al quadrato e trasformando, quest'equazione, dopo aver diviso per $k(k^2-1)$, diviene

$$kY^2 - 2rY - r^2 k(k^2+2) = 0,$$

da cui la soluzione accettabile

$$Y = r \cdot \frac{k^2+2}{k}.$$

Risulta da ciò che

$$H = 2\frac{r}{R}\sqrt{R^2+r^2} \qquad \text{e} \qquad h = 2\frac{R}{r}\sqrt{R^2+r^2}.$$

La Sig.ra *Prime* conclude osservando come questa soluzione si traduca nel seguente elegante enunciato: Le ipotenuse BC, CE, EG dei triangoli rettangoli simili ABC, DCE, FEG essendo poste consecutivamente su di una retta, se $AC = CD$ e $DE = EF$, il cono il cui raggio di base uguaglia AC e l'altezza $2EG$ ha lo stesso volume e la stessa superficie totale di quello il cui raggio di base è EF e l'altezza $2BC$.

Il Sig. *V. Columbo* osserva che il problema ha sempre una soluzione qualunque siano i raggi r, R e le altezze cercate sono quarte proporzionali dopo grandezze note.

151.** *Risolvere un triangolo sferico rettangolo, il cui perimetro è un quadrante, ed è pur dato un angolo obliquo.*

(G. Bellacchi).

Risoluzione della Sig.ra V.va *F. Prime*, a Bruxelles.

Sia B l'angolo noto; l'ipotesi $a+b+c = 90^0$ trasforma le relazioni relative al triangolo sferico rettangolo $(A = 90^0)$

$$\cos a = \cos b \cos c \quad , \quad \tan c = \tan a \cdot \cos B$$

in

$$\operatorname{sen}(b+c) = \cos b \cos c \quad , \quad \tan c = \frac{1-\tan b \tan c}{\tan b + \tan c} \cdot \cos B.$$

La prima di queste formule dà $\tan b + \tan c = 1$, ciò che permette di scrivere la seconda

$$\cos B \cdot \tan^2 c - (1+\cos B) \cdot \tan c + \cos B = 0.$$

Di qui si ricava

$$\tan c = \frac{\cos^2\frac{B}{2} \pm \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \sqrt{\frac{1+3\cos B}{2}}}{\cos B}.$$

Il problema, ammette quindi, in generale, due soluzioni.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

159. Se dagli estremi di un segmento che scorre sopra una tangente di un cerchio (in generale di una conica qualunque) si conducono le coppie di tangenti alla curva, i loro punti d'incontro descrivono una conica, avente un contatto quadripunto col cerchio dato. Al variare della lunghezza del considerato segmento, le coniche corrispondenti formano un fascio, cui appartiene il cerchio dato e la tangente a questo (contata due volte) nel punto opposto al punto di contatto con la tangente data.

Applicazione. Dato un triangolo vi sono quattro coppie di tangenti (non necessariamente tutte reali) al cerchio inscritto, ognuna delle quali sega sui tre lati tre segmenti uguali.

F. PALATINI.

160.** Risolvere l'equazione

$$x^5 - 3 = 3x^2(2x^2 - 3).$$

F. GIUDICE.

161*. In un triangolo ABC, indicati con H l'ortocentro e con G il baricentro, si conoscono le distanze $AH = \alpha$, e $GH = l$ insieme all'angolo i di queste rette: esprimere le tangenti degli angoli A, B, C e le condizioni affinchè la GH sia parallela a ciascuno dei tre lati.

G. BELLACCHI.

162*. In un cono obliquo detta α l'inclinazione della retta centrale $OV = l$ sulla base circolare OMA, ed ω l'angolo del raggio $OM = r$ di questa con la proiezione della OV, provare che la generatrice $g = VM$ fa con la tangente MT alla circonferenza OM l'angolo θ determinato per la formola $\cos\theta = \frac{l}{g}\cos\alpha \operatorname{sen}\omega$.

G. BELLACCHI.

163*. Dimostrare che l'equazione

$$x^2 - 168921\,y^2 = 382291$$

ammette una sola soluzione in numeri interi e positivi. Qual'è questa soluzione?

A. TAGIURI.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

164*. Nella serie $x_1, x_2, \ldots . x_n, \ldots .$ si ha per $n \geq 2$

$$x_n = h\,x_{n-1} + l.$$

Dato il valore a_r di x_r esprimere x_n per mezzo di h, l, n, a_r.

A. Tagiuri.

165**. Dimostrare che il prodotto di tutti i quozienti completi della frazione continua generata dalla frazione ordinaria irriducibile $\frac{P}{Q}$, è uguale a P.

A. Tagiuri.

166*. Descrivere un cerchio che passi per due punti dati e sia diviso diametralmente da un cerchio dato.

P. Morino.

167*. Dimostrare che il limite della somma delle successive ed infinite parti auree delle parti auree di un segmento è uguale al segmento stesso aumentato della sua parte aurea (*).

G. Pucciano.

168**. Dimostrare che l'espressione

$$\left\{\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}\right\} : \left\{1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\right\}$$

è un numero intero se n è pari.

V. Correnti.

169*. Se in un triangolo rettangolo il semicerchio descritto sul cateto maggiore con diametro uguale al cateto minore, tangenzialmente a questo cateto, è tangente all'ipotenusa, i lati del triangolo stanno fra loro come 5 : 4 : 3.

M. Piattelli.

170**. Trovare tre numeri continuamente proporzionali dei quali la somma sia 20 e la somma dei quadrati 140.

(Dall'*Arithmetica universalis* di Newton).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Riccardo Mazzola. — *Elementi di aritmetica*. Livorno, R. Giusti, editore, 1892. — Prezzo L. 3. 20.

Fra i trattati di aritmetica usciti alla luce in questi ultimi tempi e che meritano il favore del pubblico, è da annoverare quello del prof. R. Mazzola della R. Accademia navale.

(*) Si preferisce una dimostrazione geometrica (*N. d. Red.*).

Son nove capitoli, seguiti (meno il settimo) da esercizi in buon numero, che contengono le ordinarie teorie prescritte da' programmi di aritmetica per le nostre scuole: numeri interi, frazionari, decimali, radici quadrate e cubiche, numeri irrazionali, misura delle grandezze, sistema metrico, rapporti, proporzioni e grandezze proporzionali.

Benchè il titolo non lo dica, pure la trattazione è quale s'addice all'aritmetica detta razionale.

È notissimo come la teoria del massimo comun divisore si faccia indipendentemente da quella de' numeri primi. E seguendo il consiglio e l'esempio del direttore di questo periodico (anno 1888, pag. 62), l'autore dimostra la formola che dà il m. m. c. senza la teoria de' numeri primi (*).

Anche la conversione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa è trattata bene, come, del resto, ne aveva dato l'esempio il prof. Amanzio nel suo volume d'aritmetica teorica pubblicato nel 1887, e del quale il direttore del periodico parlò tanto favorevolmente e meritamente (anno 1888, pag. 60). Ed è opportuna la distinzione che si fa della frazione in quanto essa è generatrice della periodica ed in quanto è poi il numero limite di questa.

I capitoli VII ed VIII trattano dei numeri irrazionali e della misura della grandezza e sono inspirati ai concetti che ormai si hanno in quelle teorie (Ved. per es. gli *Elementi di geom.* di SANNIA e D'OVIDIO, DE PAOLIS, ecc.).

Auguro all'amico prof. R. Mazzola che egli stampi la 5ª edizione del suo libro, donde, se gli parrà, potrà far scomparire qualche inesattezza ch'io v'ho notata, e delle quali alcune mi permetto di segnalare:

1° Nella « Numerazione » invece della definizione del numero, sempre difficile, preferirei si dicesse che la riunione di due o più cose si esprime con numeri, come pur fanno alcuni buoni trattati.

2° A pag. 94 e 95. In questa esposizione c'è qualche cosa che bisognerebbe modificare a proposito delle frazioni eguali. Perchè se prima leggo « Un « numero frazionario si dice *minore*, *eguale* o *maggiore* di un altro, se, rife- « rendoli ad una determinata unità, l'insieme delle parti indicate dal primo co- « stituisce un tutto minore, eguale o maggiore di quello costituito dalle parti « indicate dal secondo », trovo poi inutile il teorema I del § 122: « Se si au- « menta ecc. », o, almeno, esso è la stessa definizione. La quale, secondo me dovrebbe esser meglio ed in altro modo stabilita.

3° A pag. 197 si afferma, senz'altro, che p essendo un numero qualunque si può prendere n abbastanza grande in modo che sia

$$\frac{2}{10^n} < p$$

laddove questo è un teorema che dovrebbe essere dimostrato.

Roma, aprile 1893.

G. PITTARELLI.

(*) Vedansi anche a questo proposito le belle *Lezioni di aritmetica* dei proff. SADUN e BOSCHINO, altro libro degno di considerazione uscito quest'anno. (Cfr. *Periodico*, a. VII, pp. 197-199).

G. PEANO. — *Lezioni d'Analisi infinitesimale.* — Tip. Editrice G. Candeletti, Torino, 1893.

Non credo inopportuno accennare rapidamente, in questo Periodico, al volume I delle lezioni di Analisi infinitesimale del Prof. G. Peano recentemente pubblicate, pel rigore a cui sono sempre informate e per l'abbondanza d'esercizi analitici e geometrici svolti contemporaneamente alla teoria e proposti alla fine d'ogni argomento. Non si può fare a meno di riconoscere che esse sono grandemente adatte al loro scopo e quindi raccomandabili, sotto ogni aspetto, agli studiosi.

Questo primo volume contiene le regole di derivazione e le proprietà delle derivate; gli sviluppi di TAYLOR e MACLAURIN, le formule d'interpolazione di LAGRANGE e di NEWTON e gli sviluppi speciali del binomio, delle funzioni esponenziali e circolari e della lunghezza dell'ellisse; le regole d'integrazione per parti, per sostituzione e per serie e le regole speciali per le funzioni razionali ed irrazionali, pei differenziali binomii e per le trascendenti: contiene inoltre le proposizioni più notevoli sugli integrali definiti, con importanti regole d'integrazione per approssimazione e formule di quadratura, poi un capitolo speciale sulle serie, a termini costanti e variabili, dove è dato anche l'importante criterio di convergenza di CAUCHY, ed è provato con un esempio, relativo al logaritmo integrale, che le serie semiconvergenti possono riescire molto utili per calcoli numerici; vi sono pur dati criterii di convergenza e divergenza poi prodotti infiniti.

Molti teoremi, dopo d'esser enunciati nei termini usuali, sono enunciati anche in simboli e ciò costituisce pure un pregio non trascurabile perchè, riescendo a rendere generale l'uso dei simboli logici, si guadagnerebbe in semplicità e chiarezza d'enunciati e si faciliterebbe la rapida propagazione dei risultati nuovi togliendo, o diminuendo almeno, le difficoltà cagionate dalla varietà delle lingue.

Ancorchè ritenga inutile fermarmi ulteriormente a porre in evidenza i molti pregi del libro del quale ho riferito rapidamente, essendo troppo noto il rigore con cui l'Autore del medesimo usa trattare la Matematica, non posso terminare senza segnalare in modo speciale la originale trattazione della sviluppabilità delle funzioni secondo le potenze ascendenti d'una variabile, a cui l'Autore diede una generalità, che prima non aveva (*)

F. GIUDICE.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico. (**)

AGAMENNONE (G.) — Il tromometro a registrazione fotografica (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

BARDELLI (G.) — Su un problema di dinamica di G. Saladini generalizzato da A. Serret (Rend. R. Ist. Lom. Se. II, Vol. XXVI).

(*) V. anche G. PEANO: *Sulla formula di Taylor*; R. Acc. delle Scienze di Torino, 1891.

(**) Per deficienza di spazio, l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute, dalla chiusura del II fas., viene rimandato al fascicolo venturo.

BETTAZZI (R.) — *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici.* Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893 — Prezzo: L. 2.

BRAMBILLA (A.) — Nella geometria degli iperspazi. Nota 1ª. Napoli, L. Pierro, editore, 1893.

CARRARA (B.) — *Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate.* Cremona, Tip. Fezzi, 1893 — Prezzo: L. 2,50.

CHISTONI (C.) — Magnetometro unifilare dei seni (Mem. R. Acc. Sc. Lett. ed Arti di Modena. Vol. IX, Se. II).

DEL RE (A.) — Sulla superficie del 4° ordine a conica doppia (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

FRATTINI (G.) — Di un doppio isomorfismo nella teorica generale delle sostituzioni (Rend. R. Acc. Lincei, Vol. II, Se. 5ª, 1893).

GAMBIOLI (D.) — *Raccolta di circa 1500 esercizii di Geometria, di Trigonometria piana e sferica e di Geometria descrittiva,* con una breve esposizione dei varî metodi per risolverli e con esempi di applicazione dell'algebra alla geometria, ad uso dei Ginnasi, Licei, degli Istituti tecnici e nautici e delle Scuole militari. F. Vallardi, editore, Milano; 1893 — Prezzo: L. 2,50.

GIOVENALE (G.) — Perfezionamento della macchina pneumatica a mercurio (Atti Acc. Pontificia de' Nuovi Lincei, To: XLVI, 1893).

GIUDICE (F.) — Sulla risoluzione algebrica delle equazioni (Atti R. Acc. del. Sc. Torino, Vol. XXVIII, 1893).

GRILLIÈRES (L.) — Étude des modifications apportées par la rotation diurne de la terre aux lois de l'équilibre et du mouvement des corps pesants. Paris, Librairie Nony et Cie, 1893.

GUCCIA (G. B.) — Due proposizioni relative alle involuzioni di specie qualunque, dotate di singolarità ordinarie (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893).

LORIA (G.) — L'odierno indirizzo e gli attuali problemi della Storia delle scienze esatte. Relazione fatta al Quinto Congresso Storico Italiano. Genova, Tip. R. Istituto Sordo-muti, 1893.

MARCOLONGO (R.) — Intorno ad un punto della teoria della rotazione di un corpo (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893) — Sulla ricerca dei centri di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura mobile (Idem., idem.).

MILLOSEVICH (E.) — Sull'anno che serve di origine delle olimpiadi (Mem. Società Spettroscopisti ital., Vol. XXII, 1893). — Sull'eclisse di Archiloco e sulla iconografia al Canone degli eclissi di sole di Oppolzer (Idem., idem.).

PADOVA (E.) — Commemorazione di Enrico Betti (Atti R Istituto Veneto di scien., lett. ed arti. Tomo IV, Se. VII, 1892-93).

PALAZZO (L.) — Sopra un caso osservato a riguardo dell'influenza di considerevoli masse di ferro sulle misure magneto-telluriche (Mem. Società Spettroscopisti ital., Vol. XXII, 1893).

PIRONDINI (G.) — Alcune formule relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni (Ann. di mat. pura ed app., Serie II, to. XXI, 1893).

PITTEI (C.) — *Dell'origine, diffusione e perfezionamento del sistema metrico decimale.* Firenze, Loescher & Seeber, 1892 — Prezzo: L. 1.

PORTA (F.) — Discussioni delle equazioni generali delle coniche e delle quadriche in coordinate cartesiane. Torino, Tip. G. Candeletti, 1893.

REBIÈRE (A.) — *Mathématiques et mathématiciens.* Pensées et Curiosités. 2.me édition. Paris, Librairie Nony, 1893 — Prix: 5 fr..

VIVANTI (G.) — Sull'applicazione della funzione ellitica *pu* alla teoria dei poligoni di Poncelet (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893). — Sulle serie di potenze i cui coefficienti dipendono da una variabile (Ann. di mat. pura ed app., Serie II. to: XXI, 1893).

Chiusura della redazione il dì 12 maggio 1893.

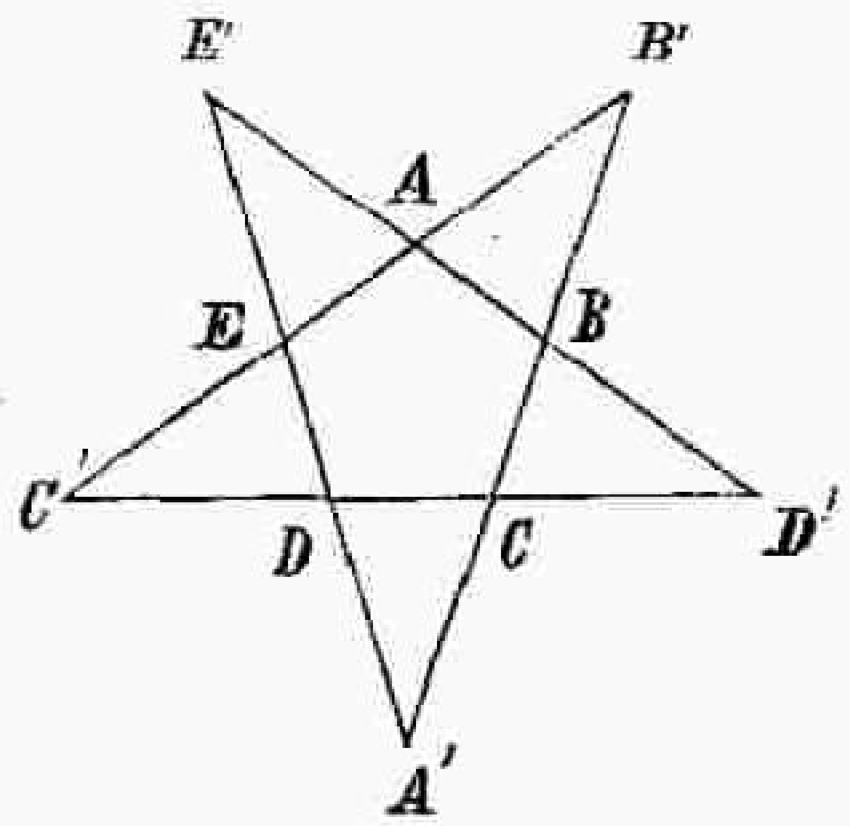
A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

Continuazione e fine,
V. pag. 25, 57 e 113 di questo Vol. e pag. 81, 113, 169 del Vol. VII.

V.

Il pentagono stellato fu l'emblema dei pitagorici, od il segno di riconoscimento e di mutua assistenza fra i discepoli e gli adepti della virtuosa Scuola italo-greca.

Prolungando tutti i lati del pentagono regolare convesso $ABCDE$ si trova lo stellato $A'B'C'D'E'$: la retta AA' congiungente i vertici opposti dei due angoli $BAE = \frac{3}{5}\pi$, $A' = \frac{\pi}{5} = DAC$ è loro bisettrice comune; i triangoli isosceli ADC, $A'DC$ sono congrui $AC = CA'$ e BC pari al segmento aureo di $A'C$. La piramide costruita con la base $ABCDE$ e con le faccie laterali ABB', BCD', CDA', DEC', EAE' ha i diedri dell'angolo al vertice congrui a quelli del dodecaedro platonico e gli altri supplementari.



Nell'opera la *Divina proportione* di Luca Pacioli stampata a Venezia l'anno 1509, si ammirano disegnati dalla maestra mano di Leonardo da Vinci alcuni poliedri a stella aventi per nucleo uno qualunque dei cinque solidi platonici, sulle cui faccie prese per basi erigonsi altrettante piramidi regolari; onde l'esterna superficie viene a comporsi di triangoli isosceli. Indicando con f, v, s i respettivi numeri delle faccie, vertici, spigoli del nucleo, quelli dei poliedri stellari del Pacioli evidentemente saranno $f' = nf$, $v' = v + f$, $s' = s + nf$, dove n rappresenta quanti lati formino il perimetro di ogni faccia del nucleo. Supponendo i triangoli isosceli giacere n' ad n' in uno stesso piano, gli s spigoli del solido platonico divenire diagonali delle nuove faccie ed i rimanenti nf disporsi due a due in linea retta, i suddetti numeri si ridurrebbero ad $f' = \frac{n}{n'} f$, $v' = f$, $s' = \frac{n}{2} f$.

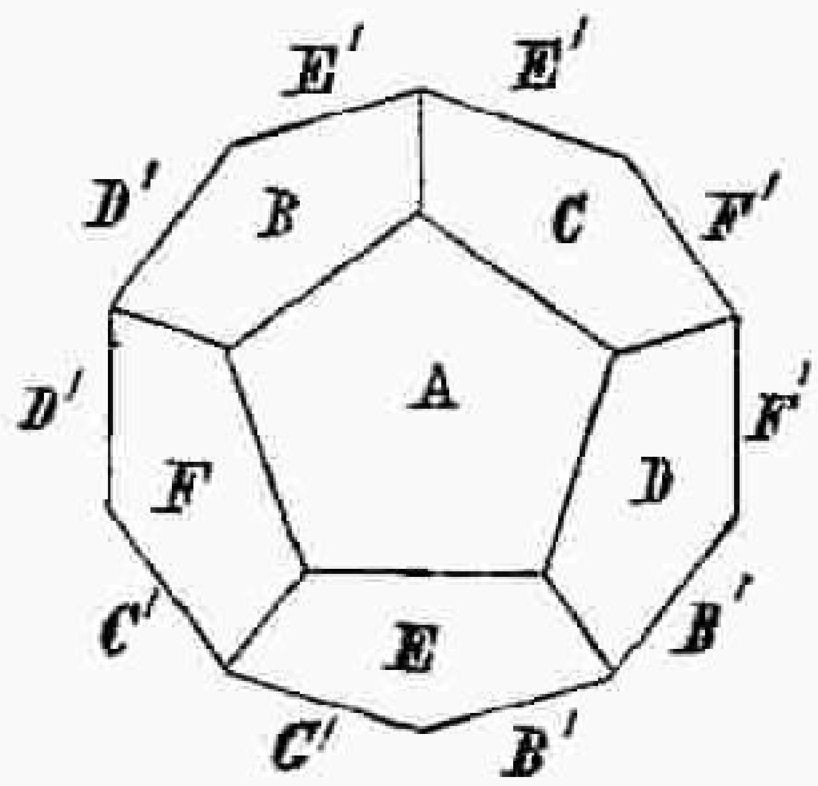
Il sommo Kepler nel 1° libro dell'*Harmonices mundi, Lincii Austria 1619* (*) discorrendo sopra le segrete relazioni degli astri coi numeri, i ritmici suoni, e le figure geometriche, svolge le varietà dei poligoni regolari stellati iscritti in una circonferenza, cominciando da quelli che si possono costruire con gli elementi di Euclide; poi analizzando le proprietà derivanti dal cerchio supposto diviso in sette parti eguali e preso il raggio per unità di misura prova esistere tre ettagoni con i lati corda $\frac{2\pi}{7} = x$, corda $\frac{4\pi}{7} = x\sqrt{4 - x^2} = y$, corda $\frac{6\pi}{7} = x(3 - x^2) = z$, radici dell'equazione $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0$. Il quale asserto si può agevolmente verificare eliminando x, fra la precedente eguaglianza e ciascuna delle variabili y, z, poichè si deducono $x^2 = \frac{7 - 3y^2}{2 - y^2}$, $x = z\left(\frac{z^2 - 3}{z^2 - 2}\right)$; mediante le sostituzioni di queste formule si ottengono due equazioni l'una in y l'altra in z identiche alla sestica surriferita evidentemente riducibile al terzo grado.

Kepler si occupò eziandio di formare alcuni reticoli piani per aggruppamenti di poligoni regolari diversi, e nel 2° libro del medesimo trattato descrisse e delineò i poliedri di Platone e di Archimede enumerandone le faccie e gli angoli solidi.

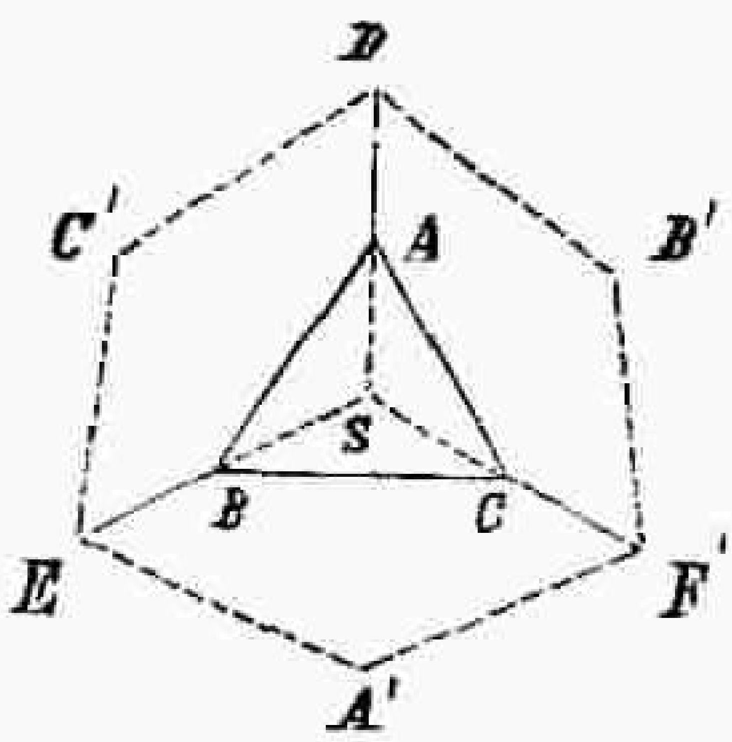
Alla proposizione 26^{sima} indica, disegnandoli, due nuovi poliedri regolari a stella K_1, K_2 contenuti da dodici pentagoni stellati che nel primo foggiano dodici angoli pentaedri convessi e nel secondo venti angoli triedri. Il dodecaedro K_1 nasce dal prolungare tutti gli spigoli del dodecaedro platonico, o dal costruire sopra ogni faccia di questo solido una piramide regolare, in cui il lato l della base eguagli il segmento aureo dell'altro spigolo l'; significando con ρ il raggio del cerchio circoscritto alla base e con h l'altezza della piramide si trova $(l') = (\rho) + (h)$; ora essendo l' il lato del pentagono regolare a stella iscritto nel cerchio ρ, si conchiude h identico al lato ρ' del decagono regolare a stella iscritto nel medesimo cerchio ρ. Inoltre le faccie del dodecaedro platonico sono simmetriche rispetto al suo centro O e distano fra loro del segmento

(*) JOANNIS KEPLERI. *Opera omnia*, volumen V; edizione curata dal Dott. Carlo Frisch a Francoforte negli anni 1858-73.

$\rho + \rho'$, il vertice A di K_1 ha per simmetrico un altro vertice A' rispetto ad O; ne consegue il diametro della sfera circoscritta al primo dodecaedro di Kepler pareggiare $\rho + 3\rho'$. Nelle formule trovate per i poliedri del Pacioli facendo $f = 12$, $n' = n = 5$ si deducono per K_1 i numeri $f' = v' = 12$, $s' = 30$; perocchè i venti vertici del nucleo spariscono e vengono sostituiti da quelli delle faccie pentagonali stellate aggruppantisi 5 a 5 per comporre ciascun angolo solido. Simboleggino A, B, C, D, E, F sei vertici del poliedro K_1 situati sopra i raggi che dal centro O proiettano i centri delle faccie adiacenti nel semidodecaedro platonico, ed A', B', C', D', E', F' siano i loro punti simmetrici; dai pentagoni convessi $BCDEF$, $CAFD'E'$, $ABE'F'D$, $CAEB'F'$, $DAFC'B'$, $BAEC'D'$, risultano gli stellati $BDFCE$, $CFE'AD'$, $AE'DBF'$, $CEF'AB'$, $DFB'AC'$, $BED'AC'$ che insieme con i loro simmetrici $B'D'F'C'E'$, $C'F'EA'D$, $A'ED'B'F$, $C'E'FA'B$, $D'F'BA'C$, $B'E'DA'C$ costituiscono le dodici faccie di K_1.



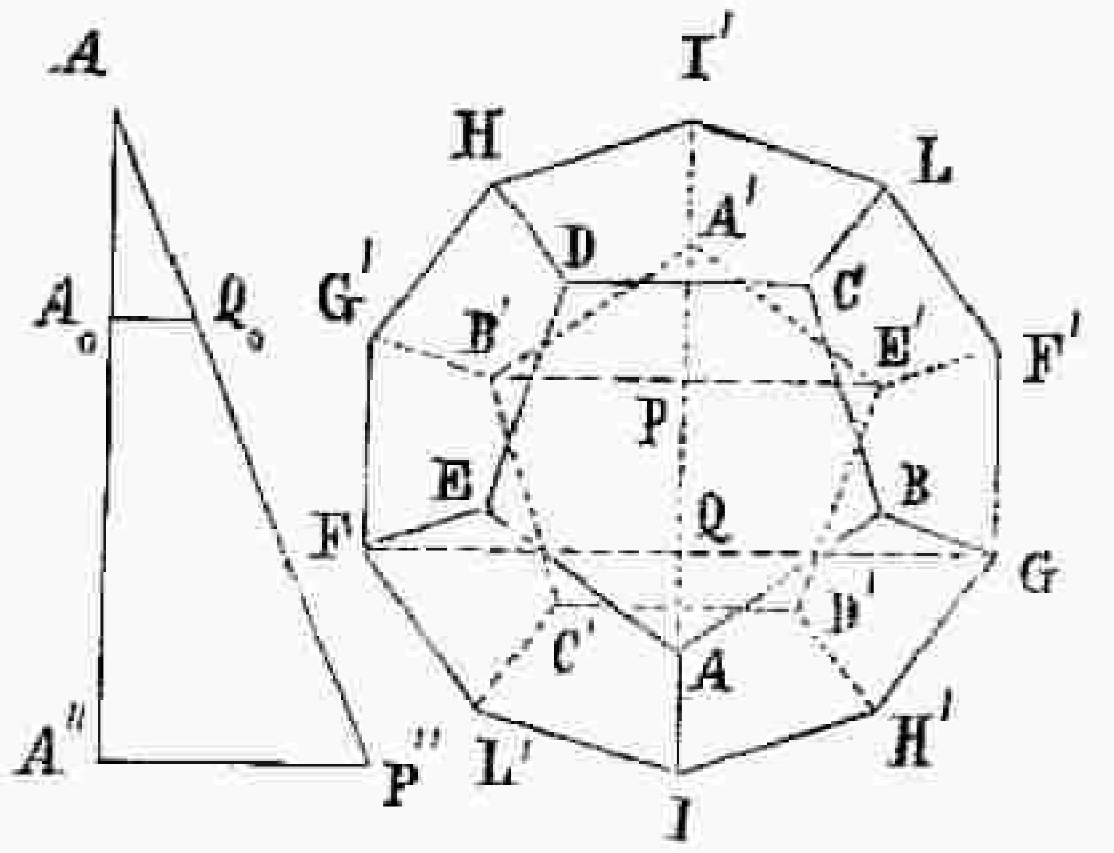
L'altro dodecaedro K_2 si ricava dall'icosaedro platonico prolungando gli spigoli BE, CF', AD terminanti ai vertici di ciascuna faccia ABC ed aventi l'inclinazione $\frac{2}{5}\pi$ sui due lati AB, BC della medesima; ne risultano così tante piramidi regolari $ABCS$ quante sono le faccie del nucleo ed il lato AB della base eguaglia il segmento aureo dello spigolo AS. Il punto S è vertice comune ai pentagoni stellati che si deducono col prolungare i lati dei pentagoni regolari convessi $ABEC'D$, $ACF'B'D$, $BCF'A'E$ esistenti sulla superficie del nucleo. Adunque il poliedro K_2 è della specie dei solidi stellati del Pacioli e ponendo $f = 20$, $n = 3$, $n' = 5$ si trovano i numeri $f' = 12$, $v' = 20$, $s' = 30$; infatti i vertici di K_2 sono 20 giacendo sui raggi proiettanti i centri delle faccie dell'icosaedro convesso dal suo centro O, e ad ogni vertice S di K_2



concorrono tre pentagoni stellati onde se i triedri fossero disgiunti si avrebbero 3.20 pentagoni; ma sul poliedro K_2 i vertici di ogni faccia appartenendo a cinque triedri, ne consegue esser $3.20 : 5 = 12$ il numero delle faccie distinte e $3.20 : 2 = 30$ il numero degli spigoli, attesochè ciascuno di questi unisce i vertici di due triedri. Rappresentando ρ il raggio del cerchio circoscritto al triangolo $A\,B\,C$, ρ' il lato del decagono regolare iscritto nel cerchio ρ, h l'altezza della piramide $S\,A\,B\,C$, l, l' i respettivi spigoli $A\,B$, $A\,S$ deduconsi le relazioni $(l) = 3\,(\rho)$, $l' = 3\,(\rho')$, $(h) = 3\,(\rho') - (\rho) = (\rho + \rho')$; quindi si trae $h = \rho + \rho'$. E poichè le faccie parallele $A\,B\,C$, $A'B'C'$ dell'icosaedro platonico distano fra loro del segmento $\rho + \rho'$, ne risulta il diametro della sfera circoscritta al dodecaedro K_2 di Kepler esser triplo di quello della sfera iscritta nel suo nucleo.

Il Professore Giuseppe Bertrand ricavò questo poliedro stellato dal dodecaedro platonico unendone cinque a cinque i vertici, e la sua memoria è inserita nel volume XLVI dei *Comptes Rendus*, anno 1858.

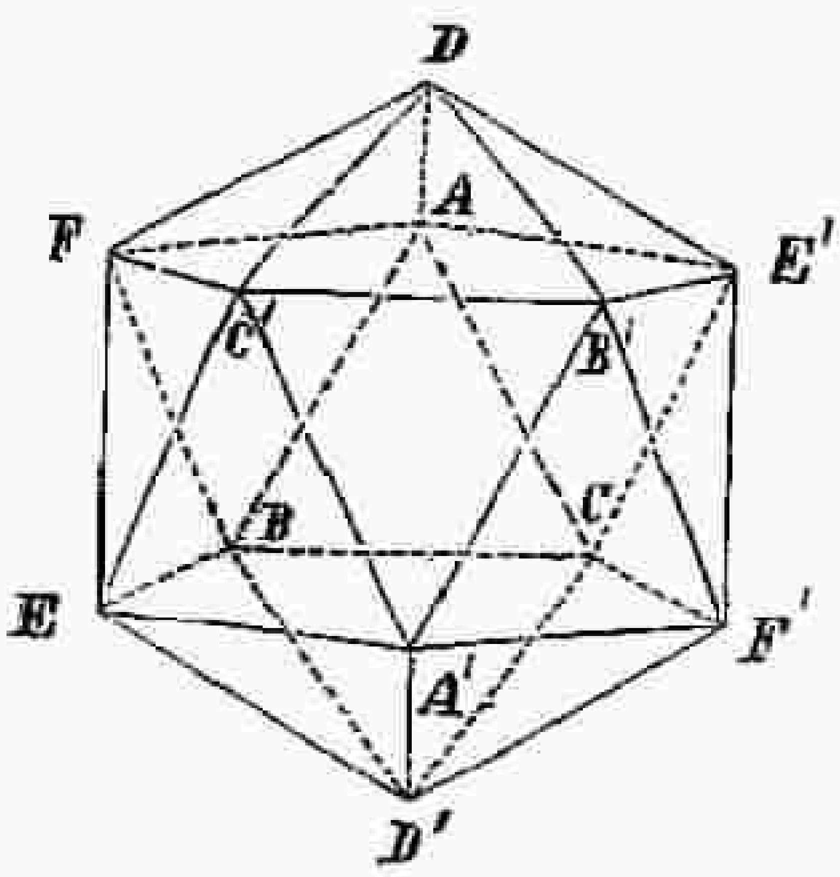
Fa mestieri dimostrare che il pentagono $A\,F\,B'\,E'\,G$ è regolare; infatti la normale $A\,A''$ abbassata dal vertice A sulla faccia opposta $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$ eguaglia il diametro $\rho + \rho'$ della sfera iscritta ed il piede A'' cade nel mezzo dell'arco sotteso dalla corda $C'D'$ nella circonferenza ρ e la distanza $A''\,P''$ pareggia il segmento $A\,P$ terzo proporzionale in ordine ad $A\,A' = 2\rho$ ed $A\,B' = \rho'$: onde a motivo della relazione $\rho : \rho' = \rho' : \rho + \rho'$ si ottiene $A\,P = \frac{\rho + \rho'}{2}$. La medesima normale $A\,A''$ sega il piano del pentagono $F\,I\,G\,L\,H$ in un punto A_0 tale che $A\,A_0 = \rho$ distanza di questo piano dal parallelo $A\,B\,C\,D\,E$, or condotta la perpendicolare $A_0\,Q_0$ alla diagonale $F\,G$ si vedrà $A_0\,Q_0$ esser identica alla proiezione $A\,Q = I\,I' - (I\,A + Q\,I') = \rho + \rho' - Q\,I'$;



il segmento QI' terzo proporzionale in ordine a $2\rho'$ ed FI' lato del decagono regolare stellato iscritto nel cerchio ρ'; perciò dalle relazioni $\rho' : FI' = FI' : FI' + \rho'$, $\rho' : \rho = \rho : \rho' - \rho$ ne discendono l'eguaglianze $FI' = \rho + \rho'$, $QI' = \frac{FI' + \rho'}{2} = \rho' + \frac{1}{2}\rho$, $A_0 Q_0 = \frac{1}{2}\rho$. Sussiste dunque la proporzione $AA'' : A''P'' = AA_0 : A_0 Q_0$, i triangoli rettangoli AA_0Q_0, $AA''P''$ sono simili, il vertice A giace nel piano delle parallele FG, $B'E'$ ed il pentagono convesso $AFB'E'G$ è regolare. Così ogni vertice A del dodecaedro platonico è pure vertice dei tre pentagoni regolari convessi $AFB'E'G$, $ADI'E'H'$, $ACI'B'L'$, che hanno per lati le diagonali delle faccie e gli altri vertici coincidono con quelli del poliedro. Da questi pentagoni si deducono gli stellati $AB'GFE'$, $AI'H'DE'$, $AI'L'CB'$ segantisi due a due per i lati AB', AE', AI' e perciò componenti un triedro A con gli angoli piani uguali a $\frac{\pi}{5}$. Aggiungendovi i poligoni $A'BG'F'E$, $A'IHD'E$, $A'ILC'B$ simmetrici dei primi rispetto al centro O del dodecaedro, si vedrà esistere fra i detti sei pentagoni stellati soltanto due col vertice B segantisi per il lato BA', e poichè gli altri lati concorrenti in B sono BG', BC' si troverà il nuovo pentagono stellato $BG'H'DC'$ che interseca i primi due lungo le rette BG', BC' e determina con essi il triedro B congruo ad A. E costruendo il suo simmetrico $B'GHD'C$ risultano insieme ai precedenti otto pentagoni stellati, dei quali due soli hanno il vertice comune C e si segano per il lato CB'; siccome gli altri due lati coi termini in C sono CD', CL' si deduce il pentagono stellato $CL'F'ED'$ formante coi primi due il triedro C congruo ad A e B. Descrivendo il simmetrico $C'LFE'D$ si ottengono coi surriferiti, dieci pentagoni stellati, fra i quali tre compongono il triedro D, altri il triedro E, ma due soli hanno comuni il vertice F ed il lato FE', e poichè i loro lati adiacenti sono FG, FL si vedrà doversi aggiungere il poligono $FGHIL$ per formare il triedro F; ed insieme al suo simmetrico $F'G'H'I'L'$ completano l'intera superficie del poliedro stellato K_2.

Ai due solidi Kepleriani K_1, K_2 sono respettivamente correlativi il dodecaedro P_1 e l'icosaedro P_2 stellati, nel 1810 invenuti dal geometra Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique, 10e cahier*); ai cinque vertici di ogni faccia del poliedro K_1 corrispondono cinque piani formanti un angolo pentaedro stellato in P_1, e viceversa alle cinque faccie componenti ogni angolo pentaedro convesso di K_1 corrispondono i vertici di un pentagono regolare convesso faccia del solido P_1. E poichè in due poliedri correlativi indicati con f, v, s i numeri delle faccie, vertici e spigoli dell'uno, risultano v, f, s i rispettivi numeri dell'altro, si conchiude *il dodecaedro* P_1 *di Poinsot esser costituito da dodici faccie pentagone regolari convesse, dodici angoli pentaedri stellati e trenta spigoli.* Ragionando in simil guisa per il solido K_2, composto di venti angoli triedri, dodici faccie pentagonali stellate e trenta spigoli, si vedrà *l'icosaedro* P_2 *di Poinsot contenere venti faccie triangolari equilatere, dodici angoli pentaedri stellati e trenta spigoli.*

Il professor Bertrand ricavò i poliedri P_1, P_2 dall'icosaedro platonico; infatti ogni vertice A di questa figura è comune ai cinque pentagoni convessi $ABEC'D$, $ADB'F'C$, $ACD'EF$, $AFC'B'E'$, $AE'F'D'B$ situati sulla superficie dell'icosaedro, e che hanno un lato coincidente con ciascuno spigolo dell'angolo solido A, secondo i quali si segano due a due i suddetti poligoni; i termini di questi spigoli cadono nei vertici del pentagono stellato $BE'FCD$ che è pure una faccia di P_1 ed insieme con le altre $A'B'E'CD'$, $A'EFDB'$, $A'F'CBE$, $A'C'DE'F'$, $A'D'BFC'$, $B'EF'C'D'$ simmetriche delle prime compongono la superficie del dodecaedro stellato di Poinsot. Parimenti ogni vertice A dell'icosaedro platonico è comune ai cinque triangoli equilateri $AF'E$, AEB', $AB'D'$, $AD'C'$, $AC'F'$, descritti col lato pari alla diagonale del pentagono regolare convesso $ACF'B'D$: i suddetti triangoli segansi due a due lungo i lati AE, AB', AD', AC', AF' aventi gli estremi nei vertici del pentagono stellato $EB'D'C'F'$. Aggiungendo i trilateri $A'FE'$, $A'E'B$, $A'BD$, $A'DC$, $A'CF$ simmetrici dei primi cinque si ottiene la metà della superficie del poliedro P_2.



Fra questi dieci triangoli esistono due sole faccie col vertice B segantisi per il lato BA' onde si dovranno unire ad essi i triangoli $BE'C'$, $BC'F'$, $BF'D$ per comporre il pentaedro stellato B congruo ad A. Costruendo i loro simmetrici $B'EC$, $B'CF$, $B'FD'$ è facile osservare come per le sedici faccie precedenti esistano quattro sole col vertice comune C e perciò doversi aggiungere il triangolo CED per ottenere il pentaedro stellato C congruo ad A e B. Presa la figura $C'E'D'$ simmetrica di CED si vedrà come fra i diciotto triangoli surriferiti vi siano soltanto quattro col vertice comune D, e vi occorra la faccia $DF'E$ per comporre il pentaedro stellato D congruo ad ABC. Aggiungendovi la simmetrica $D'FE'$ si avranno determinate le venti faccie dell'icosaedro stellato P_2.

Per un poliedro contenuto da faccie tutte n-latere e da angoli solidi tutti m-edri sussistono le relazioni (1') $nf = mv = 2s$. Proiettando le faccie di un poliedro regolare dal suo centro sulla superficie sferica in esso iscritta o circoscritta, ottengonsi poligoni sferici equiangoli ed equilateri aventi i loro vertici sovra circonferenze minori. Significando con a la misura di ogni angolo sferico referita all'angolo retto, la somma degli angoli intorno a ciascun vertice di questi poligoni si esprime per (2') $ma = 4\sigma$; dove σ rappresenta la *specie* dell'angolo solido, pari al numero dei giri che l'arco di cerchio massimo, proiezione di uno spigolo, deve eseguire attorno al vertice percorrendo tutti gli m angoli sferici successivi. Se indichiamo con P il centro sferico (o polo) del cerchio minore circoscritto al poligono $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-1} A_n$ proiezione di una faccia del poliedro, l'area di ciascuno dei detti triangoli sferici isosceli $PA_1 A_2$, $PA_2 A_3$, ... $PA_n A_1$ referita al trirettangolo verrà misurata dall'eccesso sferico $\alpha - 2$, e perciò l'area di tutto il surriferito poligono eguaglia $n\alpha - 2n$, ovvero $na + 4\varphi - 2n$; perchè la somma $n\alpha$ degli angoli si compone degli angoli interni ai vertici del poligono e di φ volte quattro retti; essendo φ la specie di questa figura, od il numero dei giri compiuti dal raggio sferico PA_1, quando l'estremo A_1 abbia descritto il perimetro $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ Supponendo esistere f poligoni eguali ricuoprenti e volte la superficie sferica avremo (3') $(na + 4\varphi - 2n)f = 8e$; il qual numero e chiamasi la *specie del poliedro*. Il geometra Poinsot nella sua memoria introdusse gli angoli solidi concavi stabilendo la formula (2′) e considerò solo poligoni convessi dando la (3′) col valore $\varphi = 1$. Il sommo Cayley generalizzò il teorema Euleriano in un breve scritto pubblicato nel 17esimo volume del *Philosophical Magazine,* anno 1859, mostrando la relazione $\varphi f + \sigma v = s + 2e$ per i poliedri a faccie stellate ed angoli solidi concavi: come è facile verificarla per i poliedri regolari eliminando a, m, n per le precedenti eguaglianze (1′), (2′), (3′). Da queste ricavasi la serie delle identiche ragioni (4′) $\frac{e}{2(m\varphi + n\sigma) - mn} = \frac{f}{4m} = \frac{v}{4n} = \frac{s}{2mn}$; scambiandovi m con n, σ con φ rimangono invariabili i numeri e ed s, i poliedri sono correlativi, il numero delle faccie (o vertici) dell'uno pareggia il numero dei vertici (o faccie) dell'altro. Così attribuendo nella (4′) ad n, φ, m, σ i respettivi valori 5, 2, 3, 1 (oppure 3, 1, 5, 2) risultano per e, f, v, s le più piccole soluzioni 7, 12, 20, 30 (oppure 7, 20, 12, 30), che danno il dodecaedro K_2 e l'icosaedro P_2 della settima specie, e nella stessa serie (4′) posto $m = n = 5$, $\varphi = 2$, $\sigma = 1$ (oppure $\varphi = 1$, $\sigma = 2$) si traggono per e, f, v, s numeri proporzionali ai rispettivi 1, 4, 4, 10, e moltiplicati questi per 3 danno i numeri 3, 12, 12, 30, che forniscono i due dodecaedri stellati K_1, P_1 della terza specie. Ad ogni maniera di decomporre la superficie sferica in poligoni regolari eguali corrisponderebbe un poliedro regolare circoscritto alla sfera; sibbene l'eguaglianze (1′), (2′), (3′) risultano necessarie ma non sono sufficienti a determinare la cercata decomposizione.

G. Bellacchi.

SUI NUMERI DATI

MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI

L'uso di gruppi di numeri per la determinazione di altri numeri è ormai affatto comune: tuttavia ci pare che il collegamento di detta maniera di determinazione ai primi concetti di limite si possa migliorare e semplificare: appunto questo ci proponiamo ora di fare.

Considereremo sempre insiemi formati di soli numeri razionali, sebbene questa limitazione non sia necessaria, per non complicare la dicitura senza conseguire nessun utile nè teorico nè pratico.

I.

Definizioni e proposizioni fondamentali sugli insiemi di numeri.

Anzitutto ci occuperemo della determinazione d'un numero per mezzo di due insiemi limitrofi e stabiliremo, pei numeri determinati in tal modo, i concetti d'eguale, maggiore e minore, concetti che per numeri razionali son quelli che si danno negli elementi d'aritmetica.

1. *Definizione* (D.). Si dice che *un numero è razionale* se il medesimo può esser dato da una frazione ordinaria, a termini interi.

Si sa dall'aritmetica che un numero razionale si può sempre esprimere, ed in un sol modo, o con un intero o con una frazione irreducibile.

2. D. 1. Si dice che dei numeri formano un *insieme*, od un *gruppo*, od una *classe* per significare che i medesimi sono tutti i numeri aventi certe assegnate proprietà.

Dicesi che *un insieme è finito*, od *infinito*, secondo che consta d'un numero finito, od infinito, di numeri.

D. 2. Si dice che un numero d'un gruppo è un *massimo*, od un *minimo*, se il medesimo non è minore, o non è maggiore, di nessun numero del gruppo.

Teorema (T.). *Un insieme, che non contenga un massimo ed un minimo, è infinito.*

Dimostrazione (R.). Infatti; se un insieme privo di massimo contiene il numero a_1, devesi trovare nell'insieme un numero a_2 maggiore di a_1, e, siccome a_2 non è massimo, vi si deve trovare un numero a_3 maggiore di a_2; similmente, non potendo a_3 essere un massimo, vi sarà un numero a_4 maggiore di a_3: continuando così si riconosce la presenza nell'insieme di infiniti numeri $a_1\ a_2\ a_3\ a_4 \ldots$ ciascuno dei quali supera il precedente. Se l'insieme fosse privo di minimo, si riconoscerebbe in modo simile la presenza di infiniti numeri osservando che, dopo d'aver fissato un numero dell'insieme, se ne potrà sempre fissare uno più piccolo.

Corollario (C.). *Ogni insieme finito contiene un massimo ed un minimo.*

Esempio (E.) 1. L'insieme (21, 23, 5, 9, 17) è finito: ha il minimo 5 ed il massimo 23.

E. 2. L'insieme dei numeri razionali non minori di 2 e minori di 5 è infinito: contiene il minimo 2 e non ha massimo.

E. 3. L'insieme dei numeri razionali maggiori di 3 aventi quadrato minore di 11 è infinito e non contiene nè massimo nè minimo.

E. 4. L'insieme dei numeri razionali non minori di 3 e non maggiori di 7 è infinito e contiene il minimo 3 ed il massimo 7.

3. D. 1. Si dice che *un insieme è superiore ad un altro* se ogni numero del primo insieme è maggiore di ciascuno del secondo: allora dicesi pure che il secondo insieme è *inferiore* al primo.

D. 2. Si dice che *due insiemi sono limitrofi* se uno è inferiore all'altro ed ogni numero razionale positivo dato arbitrariamente è più grande che la differenza di due numeri presi convenientemente nell'insieme inferiore l'uno e nel superiore l'altro.

E. 1. L'insieme dei numeri razionali minori di 10 non è nè inferiore nè superiore a quello dei numeri ottenibili da $\frac{8n^2-15}{3n+4}$ attribuendo ad n i valori 1, 2, 3, . . . , 100.

E. 2. L'insieme dei numeri razionali minori di 2 è inferiore a quello dei numeri razionali compresi fra 7 e 9: i due insiemi non sono limitrofi.

E. 3. L'insieme dei numeri razionali compresi fra 3 e 5 e quello dei numeri razionali maggiori di 5 sono limitrofi.

E. 4. L'insieme dei numeri ottenibili da $\frac{5n-1}{7n}$ e quello dei numeri ottenibili da $\frac{5n+3}{7n}$, dando ad n tutti i valori interi positivi, sono limitrofi.

E. 5. L'insieme dei numeri razionali x soddisfacenti la diseguaglianza $x+x^3<1$ e quello dei numeri razionali y soddisfacenti la $y+y^3>1$ sono limitrofi.

4. T. *Se è dato un insieme di numeri razionali tutti minori, o maggiori, d'un dato numero razionale, l'insieme dei numeri razionali maggiori, o minori, d'ogni numero dell'insieme dato ed il dato sono limitrofi.*

R. Sia (X) un insieme di numeri razionali ed h sia un numero maggiore d'ogni numero di (X). Si componga un insieme (Y) con tutti i numeri razionali maggiori d'ogni numero di (X), tra i quali sonvi per ipotesi h ed i maggiori di h. Il gruppo (Y) è manifestamente superiore ad (X): dico inoltre che ogni numero razionale positivo, ε, è maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente, l'uno in (X) e l'altro in (Y). Infatti; si fissi un intero n maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$ per cui sarà $\varepsilon > \frac{1}{n}$; si prenda poi in (Y) la minima frazione di denominatore n, la quale per quanto fu supposto non sarà maggiore di $\frac{hn}{n}$ ossia di h; tale minima frazione sia $\frac{m}{n}$: la frazione $\frac{m-1}{n}$ non sarà dunque in (Y) epperò non supererà tutti i numeri di (X): in questo gruppo prendiamo appunto un numero x', che non sia minore di $\frac{m-1}{n}$: sarà così $\frac{m}{n} > x' \overline{\overline{>}} \frac{m-1}{n}$, per cui sarà

$$\frac{m}{n} - x' < \frac{m}{n} - \frac{m-1}{n} \text{ ossia } \frac{m}{n} - x' < \frac{1}{n}$$

per cui, essendo $\frac{1}{n} < \varepsilon$, sarà con più ragione minore di ε la differenza tra il numero $\frac{m}{n}$ di (Y) ed il numero x' di (X). Resta così provato che i gruppi (X) ed (Y) sono limitrofi.

Si dimostra nello stesso modo il teorema per l'insieme dei numeri razionali minori di quelli d'uno dato e quest'insieme dato.

E. 1. L'insieme dei numeri razionali minori, o maggiori, d'ogni numero ottenibile da $\frac{8n-1}{3n^2}$ dando ad n i valori interi positivi minori di 1000 e l'insieme dei 999 numeri, ottenibili come fu detto, sonò limitrofi.

E. 2. Il gruppo dei numeri ottenibili da $\frac{1-n^2}{n}$, dando ad n ogni valore intero positivo, è limitrofo all'insieme dei numeri positivi. Non esiste nessun numero minore d'ognuno di quelli ottenibili nel detto modo.

5. D. Si dice *successione* un insieme di numeri corrispondenti univocamente ai valori interi positivi di n: il numero corrispondente al valore p di n dicesi p^{mo} numero della successione.

Si dice che una successione non è *mai decrescente* se nessun suo numero è più piccolo del precedente: si dice che non è *mai crescente* se nessun suo numero è maggiore del precedente. Si dice che una successione è *sempre crescente* se ogni suo numero è maggiore del precedente; si dice che è *sempre decrescente* se ogni suo numero è minore del precedente. Diconsi *monotone* le successioni mai crescenti, o mai decrescenti; si dicono *oscillanti* quelle non monotone.

T. *Se il numero* n$^{\text{mo}}$ *d'una successione mai decrescente di numeri razionali è minore, qualunque sia* n, *del numero* n$^{\text{mo}}$ *d'una mai crescente ed ogni numero razionale positivo è maggiore della differenza dei numeri* n$^{\text{mi}}$ *delle due successioni, per opportuni valori di* n, *le due successioni sono limitrofe.*

R. Siano x_n y_n i numeri n^{mi} di due successioni di numeri razionali, (X) ed (Y); e supponiamo che sia, per tutti i valori di n,

$$x_n \leqq x_{n+1} \qquad y_n \geqq y_{n+1} \qquad x_n < y_n\,.$$

Sia x_p un numero qualunque di (X) ed y_q uno qualunque di (Y): siccome i numeri x non decrescono mai ed i numeri y non crescono mai, è

$$x_p \leqq x_{p+q} \qquad y_q \geqq y_{p+q}$$

per cui, ricordando ancora essere $x_{p+q} < y_{p+q}$, si riconosce che è:

$$x_p \leqq x_{p+q} < y_{p+q} \leqq y_q$$

da cui segue dover essere $x_p < y_q$. Ogni numero di (X) è dunque minore di qualsiasi numero di (Y); ma, per ipotesi, ogni numero razionale positivo è maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente l'uno nell'una e l'altro nell'altra successione per cui le due successioni sono limitrofe.

E. 1. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{3n-7}{5n} \qquad y_n = \frac{3n+11}{5n}$$

sono limitrofe.

E. 2. Le successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = 1 + \frac{3}{2!} + \frac{5}{4!} + \ldots + \frac{2n+1}{(2n)!} \qquad y_n = x_n + \frac{1}{(2n)!}$$

sono limitrofe.

6. T. 1. *Se due insiemi di numeri razionali sono limitrofi e tutti i numeri razionali compresi fra un numero dell'inferiore ed uno del superiore appartengono all'uno od all'altro insieme e non si trova un massimo nell'insieme inferiore nè un minimo nel superiore, allora non esiste un numero razionale, che non sia minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non sia maggiore di nessuno del superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali e supponiamo che ogni numero razionale compreso fra un certo numero x' di (X) ed uno y' di (Y) appartenga ad uno dei due insiemi. Dico che, se non conterrà un massimo il gruppo inferiore (X) nè un minimo il superiore (Y), non potrà esistere un numero razionale che non sia minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non sia maggiore di nessuno del superiore. Infatti, se vi fosse un numero con queste proprietà, non essendo il medesimo minore di x' nè maggiore di y', dovrebbe appartenere ad uno dei due gruppi: se appartenesse al gruppo inferiore, sarebbe un massimo del medesimo, non essendo minore di nessun numero dello stesso: se invece appartenesse al gruppo superiore, sarebbe un suo minimo, non superando nessun numero del medesimo.

T. 2. *Se due insiemi di numeri razionali sono limitrofi, od esiste un sol numero razionale che non è minore di nessun numero dell' insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore, o non ne esiste alcuno. In quest'ultimo caso non può avere un massimo l'insieme inferiore nè un minimo il superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali e supponiamo che esista un numero razionale a che non sia minore di nessun numero del gruppo inferiore (X) nè maggiore d'alcuno del superiore (Y). Se è dato un numero razionale b maggiore di a, essendo limitrofi (X) ed (Y) e numero positivo $b - a$, si possono prendere un numero in (X) ed uno in (Y) tali che la loro differenza sia più piccola di $b - a$: siano x' ed y' tali numeri; sia cioè:

$$y' - x' < b - a \qquad \text{epperò} \qquad b > y' + (a - x').$$

Per l'ultima diseguaglianza, essendo positivo o nullo $a - x'$, è $b > y'$. Adunque, ogni numero maggiore di a è maggiore di qualche numero di (Y). In simil modo si riconosce che ogni numero razionale minore di a è minore di qualche numero di (X) per cui nessun altro numero, oltre ad a, gode la proprietà di non esser minore di nessun numero del gruppo inferiore (X) e di non esser maggiore di nessuno del superiore (Y). Ora un numero, che fosse un massimo del gruppo inferiore od un minimo del superiore, non sarebbe minore di nessun numero del gruppo inferiore nè maggiore d'alcuno del superiore per cui segue che: se un numero razionale con queste proprietà non esiste, non può esservi un massimo nel gruppo inferiore nè un minimo nel superiore.

E. 1. Non esiste un numero razionale, che non sia minore di nessun numero razionale avente quadrato minore di 3 nè sia maggiore d'alcuno avente quadrato maggiore di 3.

E. 2. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{4n - 1}{2n} \qquad y_n = \frac{4n + 1}{2n}$$

sono limitrofe. Il numero razionale 2, ed esso solo, non è minore di nessun numero x e non è maggiore di nessun numero y.

(*Continua*).

F. Giudice.

LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA

Il problema che forma oggetto della presente nota fu già trattato in questo *Periodico* (*), ed altrove (**), ma nè l'una nè l'altra trattazione ci sembra completa, ed è per ciò che crediamo opportuno ritornare sull'argomento, non tanto per il problema in se stesso, quanto per determinare i limiti ai quali, a nostro avviso, deve giungere la trattazione completa di un problema geometrico di secondo grado o riducibile al secondo grado.

Desideriamo specialmente porre in evidenza che la trattazione geometrica di un problema deve contenere, oltre alla soluzione, la discussione geometrica completa, *dei dati e dei risultati*, senza limitarsi ad accennare alla possibilità o meno che il problema ammetta una o più soluzioni, e che la trattazione algebrica di un problema geometrico deve giungere alle *identiche* conclusioni non solo, ma contenere la rappresentazione grafica delle incognite, senza di che un

(*) Anno VI, 1891, pag. 135.

(**) Dott. Ing. Federico Occella: *Alcune questioni di Matematica elementare* — Casale, Tip. e Lit. C. Cassone, 1892, pag. 18.

problema geometrico non si può dire risolto. È ben vero che, cercando tale rappresentazione, raramente si giunge alle semplici ed eleganti costruzioni che costituiscono la risoluzione geometrica, ma ciò potrà formare oggetto di studio. Crediamo utile infine che faccia seguito tanto alla risoluzione geometrica, quanto alla risoluzione algebrica, la ricerca del come possano variare i dati del problema, rimanendo invariate alcune soluzioni di esso.

A chiarire il nostro concetto varrà l'esposizione compendiata del problema in discorso.

Problema. — *Dal vertice* A *di un triangolo* ABC, *i cui lati sono dati, condurre al lato opposto* BC *una retta* AD, *in modo che il quadrato di* AD *sia equivalente al rettangolo dei segmenti* BD, DC *del lato* BC. *Calcolare uno dei segmenti, e discutere i dati e il risultato.*

Risoluzione geometrica. — Posta la condizione che il punto D debba trovarsi fra B e C, sia O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo. I punti comuni al lato BC ed alla circonferenza che ha per diametro OA risolvono il problema; infatti tale circonferenza è il luogo geometrico dei punti di mezzo di tutte le corde condotte per A nella circonferenza circoscritta al triangolo. Si potranno così avere due, una o nessuna soluzione; ed è condizione necessaria e sufficiente per la possibilità del problema che la perpendicolare MN abbassata dal punto di mezzo M del raggio OA sul lato BC sia minore od uguale ad MO.

Se l'angolo A del triangolo dato è ottuso, si ha $MN < MO$, ed il problema ammette due soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo ottusangolo in A, sia isoscele, i due punti D che risolvono il problema, e che chiameremo D_1, D_2, sono ad uguale distanza dai vertici B e C, ed i segmenti AD_1, AD_2 sono uguali.

Se l'angolo A è retto, si ha pure in generale $MN < MO$: il problema ammette due soluzioni, ed uno dei punti D coincide col punto di mezzo di BC, mentre l'altro è il piede dell'altezza corrispondente a BC; infatti uno degli angoli aventi il vertice in tale punto risulta inscritto in mezza circonferenza.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo rettangolo in A, sia isoscele si ha $MN = MO$, ed il problema ammette una sola soluzione determinata dal punto di mezzo di BC.

Se l'angolo A è acuto, può essere $MN \gtreqless MO$. Per determinare in questo caso a quali condizioni debbano soddisfare gli elementi dati, ossia i lati del triangolo, affinchè il problema sia possibile, supponiamo che la circonferenza di centro M e di raggio MO sia tangente al lato BC nel punto $D_{1.2}$, e tagli i lati AB ed AC rispettivamente nei punti P e Q loro punti di mezzo. Condotti i segmenti $AD_{1.2}$, $PD_{1.2}$, $QD_{1.2}$ e PQ, il triangolo $PQD_{1.2}$ è isoscele, quindi $AD_{1.2}$ è la bissettrice dell'angolo A, e si ha perciò:

$$\overline{AD}^2_{1.2} + BD_{1.2} \,.\, CD_{1.2} = AB \,.\, BC \quad \text{ossia} \quad 2BD_{1.2} \,.\, CD_{1.2} = AB \,.\, BC. \quad (1)$$

Ma si ha pure:

$$\overline{BD}^2_{1.2} = BP \,.\, BA \qquad \text{e} \qquad \overline{CD}^2_{1.2} = CQ \,.\, CA$$

ossia:

$$\overline{BD}^2_{1.2} = \frac{\overline{AB}^2}{2} \qquad \text{e} \qquad \overline{CD}^2_{1.2} = \frac{\overline{AC}^2}{2},$$

quindi, sommando membro a membro queste due relazioni e la (1) insieme:

$$\overline{BD}^2_{1.2} + \overline{CD}^2_{1.2} + 2\,BD_{1.2}\,.\,CD_{1.2} = \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{AC}^2}{2} + AB\,.\,BC,$$

ossia:

$$2\,\overline{BC}^2 = (AB + AC)^2\,.$$

Se invece la circonferenza di centro M e raggio MO taglia il lato BC in due punti, prendendo sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC un punto A_1 tale che, condotto il raggio OA_1, la circonferenza di centro M_1 (punto di mezzo di OA_1) e raggio M_1O risulti tangente al lato BC, si ha per la dimostrazione precedente:

$$2\,\overline{BC}^2 = (A_1B + A_1C)^2\,,$$

ma (*):

$$A_1B + A_1C > AB + AC,$$

dunque:

$$2\,\overline{BC}^2 > (AB + AC)^2\,.$$

Se infine la circonferenza di centro M e di raggio MO nè tocca, nè taglia il lato BC, preso il punto A_1, come sopra si è detto, si ha ancora:

$$2\,\overline{BC}^2 = (A_1B + A_1C)^2,$$

ma (*) in questo caso:

$$A_1B + A_1C < AB + AC,$$

(*) LEMMA. — *Se due triangoli aventi un lato in comune sono inscritti nello stesso cerchio, la somma degli altri due lati è maggiore in quel triangolo che ha maggiore l'altezza corrispondente al lato comune.*

DIM. — Siano ABC, A_1BC i due triangoli, che potremo ritenere situati dalla stessa parte del lato comune BC, e sia ad es. ABC quello che ha maggiore l'altezza corrispondente al lato BC; si vuol dimostrare che

$$AB + AC > A_1B + A_1C.$$

È manifesto che se:

$$BA_1 < BA, \qquad \text{si ha:} \qquad CA_1 > CA,$$

e se invece:

$$BA_1 > BA, \qquad \text{si ha:} \qquad CA_1 < CA;$$

per fissare le idee supponiamo che si verifichi la prima ipotesi, allora al dimostrare che:

$$AB + AC > A_1B + A_1C$$

equivarrà il dimostrare che;

$$AB - A_1B > A_1C - AC.$$

Sui lati BA e CA_1 a partire da B e da C si prenda rispettivamente $BP = BA_1$ e $CP_1 = CA$, e, condotti i segmenti AA_1, A_1P, AP_1, si noti che i due triangoli AA_1P, AA_1P_1 hanno uguali gli angoli opposti al lato comune AA_1 perchè supplementari degli angoli alla base dei triangoli isosceli BA_1P, CAP_1 che hanno uguali gli angoli al vertice; si può dunque descrivere una circonferenza per i punti A, A_1, P, P_1. Si noti inoltre che nei due triangoli AA_1P, AA_1P_1 l'angolo A_1AP del primo è minore dell'angolo AA_1P_1 del secondo, sarà quindi l'angolo AA_1P del primo maggiore dell'angolo A_1AP_1 del secondo, e perciò nel cerchio AA_1PP_1 sarà la corda AP maggiore della corda A_1P_1, c. v. d..

dunque:

$$2\overline{BC}^2 < (AB + AC)^2 .$$

Sulla posizione reciproca della circonferenza di centro M e raggio MO e del lato BC non si possono fare altre ipotesi, d'altra parte le ipotesi fatte hanno condotto a conclusioni che si escludono a vicenda, dunque sono vere le proposizioni inverse, cioè: Se sussiste la disuguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 > (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza di centro M e raggio MO taglia in due punti il lato BC, ed il problema ammette due soluzioni. Se sussiste l'uguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 = (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza tocca il lato BC, il punto di contatto è sulla bissettrice dell'angolo A, ed il problema ammette una sola soluzione. Se sussiste infine la disuguaglianza:

$$2\overline{BC}^2 < (AB + AC)^2 ,$$

la circonferenza nè taglia, nè tocca il lato BC, ed il problema non ammette soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo acutangolo in A, sia isoscele, il problema è manifestamente impossibile, ed in conseguenza è pure impossibile se il triangolo è equilatero.

Posta la condizione che il punto D debba trovarsi sul prolungamento di BC, esso sarà determinato su tale prolungamento dalla tangente condotta in A alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC. Perchè il problema sia possibile, è quindi necessario e sufficiente che i lati AB ed AC siano disuguali; ed il punto che risolve il problema, e che chiameremo D_3, sarà dalla parte di B o di C, secondo che si avrà $AC \gtrless AB$.

(Continua). Diego Dott. Fellini.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sull'area delle figure piane limitate da linee rette (Dai *Sitzungsberichten der Dorpater Naturforscher Gesellschaft.* Jhrg. 1892). — Un problema così semplice come quello della misura delle aree piane limitate da linee rette non fu ancora trattato, per quanto risulta dai lavori che io conosco, con tutto il rigore e tutta la chiarezza possibili. A tacere dell'introduzione di procedimenti illimitati, vengono a torto usati assiomi generali concernenti le grandezze, assiomi immediatamente evidenti solo quando le grandezze considerate sono segmenti rettilinei, quando cioè il confronto fra esse si può fare mediante sovrapposizione. Uno di tali assiomi generali sulle grandezze, che viene applicato in tutti i trattati a me noti di geometria elementare per dimostrare l'equivalenza di due parallelogrammi aventi egual base ed eguale altezza, è ad es. quello che « grandezze eguali tolte da grandezze eguali danno differenze fra loro eguali ». Se infatti i lati dei parallelogrammi opposti alla base comune hanno comune una parte od almeno un punto, i due parallelogrammi si possano immediatamente decomporre in parti tali che ogni parte dell'uno corrisponde ad una parte ad essa eguale nell'altro. Ma nel caso in cui quei due lati non hanno alcuna parte comune si credette dovere abbandonare quel metodo di dimostrazione, insuperato e fondato su una definizione precisa, e com'è noto lo si sostituì con altro ove ciascuno parallelogrammo si considera come la differenza fra uno stesso trapezio e due triangoli congruenti. Ma sinchè non si sia riusciti a misurare mediante segmenti le aree piane, il che è reso possibile appunto e solo coll'aiuto del teorema da dimostrare, è illegittima l'applicazione del precedente assioma sulle grandezze.

Questo metodo di dimostrazione si deve dunque rigettare, con tanta maggiore ragione perchè in ogni caso ognuno dei due parallelogrammi aventi la stessa base ed eguale altezza può venir decomposto, in modo semplice ed intelligibile a qualunque scolaro, in un certo numero di parti tali che ad ogni parte dell'un parallelogrammo corrisponda nell'altro una parte congruente. Esso si trova esposto ad es. nella I parte (p. 75 e seg.) delle *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* dello Stolz (Leipzig 1885). Questo metodo può anzi un po' semplificarsi col diminuire il numero delle parti in cui si fa la decomposizione (*).

Si considerino infatti gli estremi contigui dei lati dei parallelogrammi opposti alla base comune e per ciascuno si conduca la parallela ai lati del parallelogrammo a cui quel vertice non appartiene e si prolunghi fino ad incontrare i lati estremi dei due parallelogrammi. La congiungente dei due estremi così ottenuti è parallela alle due basi e stacca dai due parallelogrammi dati due nuovi parallelogrammi immediatamente decomponibili in due coppie di triangoli a due a due congruenti. Se i due parallelogrammi residui hanno per lati opposti alla base comune due segmenti non aventi alcun punto comune, si operi su di essi come prima e così dopo un numero finito di prove si giungerà ad una coppia di parallelogrammi a cui è applicabile il consueto ragionamento. Se le distanze degli anzidetti vertici contigui dei lati opposti alla comune base è maggiore di n volte la base, ma non maggiore di $n + 1$ volte la base stessa, allora ogni parallelogrammo resta decomposto in un trapezio (o per eccezione un triangolo) tre triangoli ed n parallelogrammi, e ad ogni sua parte ne corrisponde una congruente nell'altro parallelogrammo.

Ora se in generale si chiamano equivalenti due figure piane rettilinee quando ciascuna può essere decomposta in un numero finito di parti per modo che ogni parte dell'una figura corrisponda ad una parte congruente dell'altra, si può, come si legge in Stolz l. c., dimostrare con pieno rigore che ad ogni figura dell'anzidetta specie si può associare un rettangolo equivalente avente per uno dei suoi lati un dato segmento ed allora la superficie di essa figura è realmente rappresentata dall'altro lato di quel rettangolo. Però così si è tacitamente pas-

(*) Cfr. anche: De Paolis, *Elementi di Geometria*, p. 293 — Faifofer, *Ele. di Geo.*, 7ª ediz., p. 187 ed esercizio 501 p. 212 — Sannia e D'Ovidio, *Ele. di Geo.*, 8ª ediz., p. 278 — Lazzeri e Bassani, *Ele. di Geo.*, p. 259; ecc. (*N. d. R.*).

sati sopra la questione se questo rettangolo sia determinato univocamente, se cioè decomponendo altrimenti la figura in triangoli – è questo in fatto il punto di partenza – non si ottenga un altro rettangolo. Tale silenzio non può essere giustificato che escludendo la possibilità che un rettangolo sia equivalente ad una sua parte in base all'assioma generale delle grandezze che dice « non potere essere la parte eguale al tutto » : ed in fatto Stolz nel c. l. alla citata definizione di equivalenza aggiunge la condizione: « Un poligono è maggiore di un altro se contiene, oltre alle parti di questo, delle altre ancora ». Ma è chiaro che colla precedente definizione precisa dell'equivalenza questa proposizione non è in alcun modo chiara di per sè, ed un primo tentativo per dimostrarla conduce ad un metodo di esaustione il quale anzi, prescindendo dal procedimento illimitato ivi adoperato, non sembra nemmeno condurre allo scopo. Eppure anche qui si può, con mezzi semplicissimi e senza introdurre alcun postulato, raggiungere completo rigore entro i limiti della scelta definizione di equivalenza.

Basta a tale scopo partire da ciò che: 1° ad ogni triangolo si può associare un rettangolo equivalente avente un dato lato, cosa che non esige molte spiegazioni; 2° ogni poligono può in un modo determinato venire decomposto in triangoli. Come modo di decomposizione si presenta spontaneamente quello adoperato da Möbius (*Ges. Werke*, vol. II, pag. 485 e seg.) e nel quale si prende come vertice comune di tutti quei triangoli un punto posto nell' interno o sul perimetro del poligono e come basi i lati del poligono stesso. In tal modo per ogni posizione del vertice è associato al poligono un rettangolo determinato, quello cioè che nasce riunendo i rettangoli equivalenti ai triangoli componenti ed aventi tutti per un lato un dato segmento, ed è agevole dimostrare (cfr. Möbius l. c.) (*) che il rettangolo ottenuto ha un'area indipendente dalla posizione assunta per il vertice. Questo rettangolo che corrisponde univocamente al poligono può considerarsi per rappresentante dell'area di questo, ove si ritenga che uno dei lati di questo rettangolo sia dato una volta per tutte. Si vede allora subito che ai due poligoni risultanti dal segare un poligono con una retta che va da un punto all'altro del contorno, corrispondono due rettangoli la cui somma è il rettangolo che corrisponde all'intero poligono; per persuadersene basta scegliere come vertice un punto di quella trasvesarle. Se quindi si decompone un poligono in poligoni parziali conducendo rette qualisivogliano, si potrà proseguire la suddivisione mediante rette congiungenti ciascuna due punti del contorno dei poligoni componenti finchè tutto il poligono risulti diviso in poligoni parziali mediante rette congiungenti ciascuna due punti del contorno del poligono primitivo epperò anche dei poligoni parziali. Donde emerge finalmente che i rettangoli corrispondenti ai singoli poligoni parziali formano insieme il rettangolo corrispondente al poligono primitivo; e così è compiuta la desiderata dimostrazione che il rettangolo associato ad un poligono, equivalente a questo ed avente un dato lato, è indipendente dal modo in cui il poligono stesso viene decomposto in triangoli.

F. Schur.

(*) Oppure cfr. Cremona, *Elementi di Calcolo grafico*, n. 19 - Baltzer, *Plani.* § 9,9 (*N. d. R.*).

Quistione di massimo o minimo. (*Lettera al Redattore*). — Egregio Sig. Professore: — I problemi di massimo e minimo furono conservati negli ultimi programmi di Matematica della sezione fisico-matematica di Istituto tecnico molto opportunamente, perchè offrono all' insegnante un campo assai svariato per esercitare gli alunni in quistioni interessanti, non solamente di matematica, ma anche di meccanica generale e di fisica.

Non dovendosi però uscire dagli elementi, i problemi che si possono trattare hanno sostanzialmente per punto di partenza la ricerca dei valori massimi e minimi di una funzione $\varphi(x)$ nei casi in cui, posto

$$y = \varphi(x),$$

quest'equazione resulti di secondo grado, o si scinda in equazione di secondo grado, rispetto ad x, dalla cui discussione dipende la determinazione dei valori massimi o minimi, quando esistono.

Ora nei libri di testo, tranne in qualche caso particolare, si ritiene, o si lascia supporre, che la forma più generale della funzione $\varphi(x)$ sia quella di una funzione algebrica razionale a termini interi e non eccedenti il secondo grado rispetto ad x. Molte altre funzioni algebriche, non razionali, godono della detta proprietà, ad esempio le seguenti:

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{a_1x+b_1},$$

$$ax+b+\sqrt{a_1x^2+b_1x+c_1},$$

$$\frac{\sqrt{ax+b}}{a_1x+b_1}, \ldots\ldots$$

in cui i radicali si possono considerare biformi; e siccome non pochi problemi conducono a funzioni analoghe, così mi è parso che possa giovare il proporre ai lettori del *Periodico di Matematica* lo studio e la discussione dell'equazione

$$y = \varphi(x)$$

in tutti quei casi in cui i valori massimi o minimi della $\varphi(x)$ possano dedursi da una equazione o da equazioni di secondo grado.

Con stima mi creda

Milano, 1 aprile 1893.

*Suo Dev.*mo

G. Bardelli.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 143, 149*, 153** e 154*

143. *Dimostrare il seguente teorema di Giamblico (IV Sec. dell'E. v.) « Dati tre numeri consecutivi della serie dei numeri naturali, il massimo dei quali divisibile per tre, se ne faccia la somma; si addizionino poi le cifre del numero così ottenuto, altrettanto facciasi per questo nuovo numero, e così via. Si* *arriverà così finalmente al numero 6 ». E cercare se in sistemi di numerazione a base diversa da 10 esista un'analoga proposizione.*

(G. LORIA).

Dimostrazione del Sig. Prof. *R. Bettazzi* a Torino.

Prendansi i tre numeri consecutivi $p, p+1, p+2$, la cui somma S è $3p+3$; poichè p è di una delle tre forme $3k$, $3k+1$, $3k+2$, sarà S di una delle tre forme $9k+3$, $9k+6$, $9k+9$ rispettivamente. Facendo in ogni caso la somma delle cifre di S, poi quella delle cifre della somma così ottenuta, e così di seguito, si giunge ad un numero di una cifra che in ciascuno dei tre casi è sempre 3, o 6, o 9: e quindi si trova sempre lo stesso numero. Il caso del teorema di Giamblico corrisponde ai valori di p della forma $3k+1$, nel quale caso 6 è il numero al quale finalmente si arriva.

Ma il teorema può ulteriormente generalizzarsi considerando una base qualunque. Sia b la base qualunque d'un sistema di numerazione e pongasi $b-1 = a$, siccome il resto della divisione per a di un numero qualunque è uguale a quello della divisione per a della somma delle cifre del numero, anche in tale sistema si ha che sommando le cifre di un numero, quelle della somma ottenuta e così via, si arriva ad un numero d'una cifra che è il resto della divisione per a del numero dato, od è a stesso se il numero è divisibile per a.

Pongasi $a = \alpha c$ (potendo essere $c = 1$). Presi α numeri consecutivi $p, p+1, \ldots p+\alpha-1$, la loro somma sarà $S = p\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Ora distinguendo i vari valori di p rispetto al modulo c, sarà $p = ct + c'$ ($c' < c$), quindi

$$S = (ct + c')\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = at + c'\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$$

donde si vede che il resto della divisione di S per a, sarà quello stesso della divisione per a di $c'\alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$. Questo numero non dipende da t ma solo da c' ed è lo stesso per tutti i numeri p che hanno un medesimo c'. Si ha dunque il teorema cercato:

Se la cifra massima a di un sistema di numerazione si spezza in due fattori α, c e si prendono α numeri consecutivi qualunque purchè il primo sia sempre congruo collo stesso numero rispetto al modulo c, fatta la somma di essi, sommate le cifre di questa somma, poi quelle del numero ottenuto, ecc., si perviene ad un numero di una cifra che è sempre lo stesso.

Per $\alpha = a$, $c = 1$, poichè i numeri p sono congrui fra loro rispetto al modulo 1, il teorema dà il corollario:

Sommando a numeri consecutivi, poi le cifre della somma, ecc., si giunge sempre allo stesso numero di una cifra qualunque siano gli a numeri scelti.

Se a è dispari questo numero finale è a stesso: infatti la somma degli a numeri è $S = ap + \frac{a(a-1)}{2}$ ed S è divisibile per a, giacchè $\frac{a-1}{2}$ è un numero intero.

Dimostrazione del Sig. *F. Mariantoni*, studente nella R. Università di Roma.

1° Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ le cifre, da destra a sinistra, di un numero N in un sistema di numerazione qualsiasi di base x, è chiaro che per $x \equiv 1 \pmod{n}$ ($n < x$) e solo in questo caso, le due congruenze

$$N = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \equiv 0 \quad \text{o} \quad a_0 + a_1 + \ldots + a_m \equiv 0 \pmod{n}$$

sono l'una conseguenza dell'altra, giacchè si ha allora:

$$N \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_m \pmod{n}.$$

In tutti i sistemi di numerazione, eccetto il binario e il ternario, per $n = x - 1$ o per n divisore di $x - 1$ ha dunque luogo la proprietà che N è divisibile per n quando è tale la somma delle cifre di N.

2° Sia $r < n$ ed n divisore di $x - 1$. Si consideri il numero $kn + r$, ove k è un intero qualunque. Per ciò che precede se σ indica la somma delle cifre di questo numero $\sigma \equiv r \pmod{n}$, onde o $\sigma = r$ o $\sigma = k_1 n + r$: in questo secondo caso si avrà pure che la somma σ_1 delle cifre di σ od è r o $k_2 n + r$, ecc.. Così proseguendo si giunge necessariamente al numero r. Quindi il teorema: « Se n è un divisore di $x - 1$, $r < n$ e k intero, facendo la somma delle cifre di $kn + r$, la somma delle cifre del risultato e così di seguito, si arriva al numero r ».

3° Sia n impari e prendiamo in ordine crescente gli n numeri consecutivi

$$\mu n - (p - 1),\ \mu n - (p - 2), \ldots,\ \mu n,\ \mu n + 1, \ldots\ \mu n + n - p$$

dei quali il p^{esimo} è multiplo di n. La somma di questi numeri, divisibile per n, è

$$S = \mu n^2 + \frac{n(n+1)}{2} - pn.$$

Ora supposto che n^2 sia divisore di $x - 1$, perchè $\frac{n(n+1)}{2} - pn < n^2$ in valore assoluto, facendo la somma delle cifre di S, la somma delle cifre del risultato e così di seguito, si giungerà (2°) ad un numero d'una sola cifra ν tale che

$$\nu \equiv \frac{n(n+1)}{2} - np \pmod{n^2}.$$

Così, lasciando da parte il caso privo d'interesse che non sia n^2 divisore di $x - 1$, si ha questo teorema generale: « In qualunque sistema di numerazione a base x (escluso $x = 1, 2$) tale che $x - 1$ ammetta un divisore quadratico dispari n^2, presi n numeri consecutivi qualunque in ordine crescente, de' quali il p^{esimo} è quello multiplo di n, facendo la loro somma, la somma delle cifre del risultato e così via si arriverà finalmente ad un numero d'una sola cifra congruo con $\frac{n(n+1)}{2} - pn \pmod{n^2}$ ».

Di qui discende come corollario che: « Nel sistema di numerazione decimale presi tre numeri consecutivi in ordine crescente, facendo la loro somma, la somma delle cifre del risultato, ecc., si arriva al numero 3 o 9 o 6 secondo che nella terna il numero multiplo di 3 è il minore, il medio od *il maggiore* ($p = 1, 2, 3$) ». (*).

149'. *Per un punto* P *distante del segmento* a *dal centro* O *di un cerchio descritto col raggio* r, *condurre una trasversale* PMM', *in modo che le tangenti* MT, TM' *agli estremi della corda intercetta formino un dato angolo* θ; *esprimere la distanza* PT, *il perimetro del triangolo* MTM' *in funzione della* a, r, θ *e dare il valore di* θ *nel caso di angolo* OPM = MTM'.

(G. Bellacchi).

Soluzione dei Sigg. *Barbieri* e *Veneziali*, alunni del R. Liceo di Campobasso.

La corda MM', divisa in modo qualunque dal punto P, dà la relazione $MP \,.\, M'P = r^2 - a^2$ [1] e perchè MM' è corda anche del circolo che ha per raggio TM, si avrà pure $MP \,.\, M'P = \overline{MT}^2 - \overline{TP}^2$, donde $\overline{MT}^2 - \overline{TP}^2 = r^2 - a^2$ e $\overline{TP}^2 = \overline{MT}^2 - r^2 + a^2$.

Ma nel triangolo rettangolo OMT, nel quale l'angolo in T è eguale a $\frac{\theta}{2}$, si ha $TM = r \cot \frac{\theta}{2}$, onde, sostituendo e riducendo, risulta:

$$TP = \sqrt{\frac{r^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right) + a^2 \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sqrt{r^2\cos\theta + a^2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Per dare il valore di θ, nel caso che angolo $MPO = MTM'$, osserviamo che nel triangolo $OM'P$ se si pone l'angolo esterno $MPO = \theta$, essendo $OM'P = \frac{\theta}{2}$, sarà $POM' = \frac{\theta}{2}$, e però $OM' = r = 2a\cos\frac{\theta}{2}$: dunque il valore di θ sarà dato dalla relazione

$$\theta = 2 \,.\, \operatorname{ang}\left(\cos = \frac{r}{2a}\right).$$

Il perimetro del triangolo MTM' è formato dalla corda $MM' = 2r\cos\frac{\theta}{2}$ [2]. e dalle due tangenti MT e $M'T$, eguali ciascuna a $r\cot\frac{\theta}{2}$, onde:

$$Perimetro = 2r\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right) = 4r\cot\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\pi-\theta}{4}.$$

(*) Altre interessanti risposte alla quistione ci sono pervenute dai Sigg. *G. Marotta*, studente nella R. Università di Catania, Dott. *U. Ceretti*, Prof. *U. Fazzini*, *U. Scarpis*, *F. Ferrari*. Quella inviata da quest'ultimo è notabilmente diversa delle due pubblicate e molto elaborata ed estesa; ne vieta la pubblicazione deficienza di spazio.

Si potrebbe anche domandare la distanza del punto T dal centro O; il triangolo rettangolo OMT dà a tale scopo:

$$\overline{TO}^2 = r^2 + \frac{r^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{da cui} \quad TO = \frac{r}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} .$$

Infine per mostrare quale relazione debba esistere tra a e l'angolo θ, perchè il problema sia solubile, troviamo i valori di MP e $M'P$, dei segmenti cioè della corda: le formule [1] e [2] ce ne dànno il prodotto e la somma: onde questi segmenti saranno le radici dell'equazione

$$x^2 - 2 r \cos \frac{\theta}{2} x + (r^2 - a^2) = 0 ,$$

che, risoluta, dà:

$$x = r \cos \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{a^2 - r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} ,$$

onde i valori dei due segmenti saranno reali solo quando è

$$a \geqq r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} .$$

Posto $a < r$, nel caso particolare

$$a = r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} ,$$

i due segmenti sono eguali, la corda è perpendicolare ad a, ed θ è il massimo angolo che possano formare tra loro le due tangenti. Posto $a > r$, il problema è sempre solubile, qualunque sia il valore di θ, compreso tra 0^0 e 180^0: per $\theta = 0^0$ la trasversale passa pel centro, e per $\theta = 180^0$ essa è tangente.

Per risolvere geometricamente il problema, basta descrivere su OP un segmento di cerchio capace dell'angolo $\frac{\theta}{2}$, perchè le due coppie di tangenti menate agli estremi delle due corde che passano per P e per i punti d'intersezione di questo segmento di cerchio col cerchio dato formano un angolo eguale a θ. (*)

153''. *Se convertendo la frazione* $\frac{1}{\mathrm{p}}$, *con* p *numero primo, in decimali, risulta un numero periodico il cui periodo ha un numero dispari di cifre, i resti della divisione* 1 : p *corrispondenti alle singole cifre del periodo, due a due, non sono mai complementari cioè tali che la loro somma sia uguale a* p.

(A. LUGLI).

(*) Soluzioni di questa questione pervennero anche dai Sigg. *C. Aiello* (studente a Napoli), *U. Gerra* e *G. Mazza* (R. Ist. tec. Piacenza), *M. Giordano* (R. Ist. tec. Napoli) e dalla Sig. V.a *F. Prime* a Bruxelles.

Dimostrazione della Sig.ra V.va *F. Prime* a Bruxelles.

Sia $2k+1$ il numero delle cifre del periodo di $\frac{1}{p}$ e supponiamo che possa aversi

$$10^i \equiv r \ (\text{mod. } p) \qquad \text{e} \qquad 10^j \equiv r' \ (\text{mod. } p)$$

con le ipotesi $i < j < 2k+1$ ed $r + r' = p$. Risulterebbe

$$10^i(10^{j-i}+1) \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad \text{da cui} \quad 10^{s+1}+1 \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad [1],$$

avendo posto $j - i = s + 1$.

Ma la generatrice della frazione decimale periodica avendo per denominatore un numero formato da $2k+1$ cifre 9, lasciando in disparte il caso $p = 3$ che dà una frazione avente una sola cifra al periodo, p dovrà dividere il numero $111\ldots 1$ formato da $2k+1$ cifre 1. Se dunque indichiamo con N_x il numero formato da x cifre uguali all'unità, avremo anche

$$10 \,.\, N_{2k} + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \qquad [2]$$

Sottraendo, membro a membro, le congruenze [1] e [2] e dividendo per 10, verrebbe

$$N_{2k} - 10^s \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \quad \text{o} \quad 10^{s+1}.N_t + N_s \equiv 0 \ (\text{mod. } p) \qquad [3],$$

avendo posto $2k - s - 1 = t$ [4].

Ma tenendo conto di [1] la congruenza [3] si ridurrebbe a

$$N_s - N_t \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

od anche, dividendo per 10^t, a

$$N_{s-t} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p)$$

ciò che permetterebbe di convertire $\frac{1}{p}$ in frazione decimale avente $s - t$ cifre al periodo, dunque meno di $2k+1$.

Osservazione. Ciò suppone s diversa da t, ma è chiaro che l'ipotesi $s = t$ è inammissibile poichè se potesse essere $s = t$, dalla relazione [4] si avrebbe $2k - 1 = 2s$.

154*. *Dato l'angolo* BOA $= 2\alpha$, *si descriva con centro* O *e raggio arbitrario un cerchio a tagliare i lati dell'angolo in* A *e* B, *poi con diametri* AB, OB *due semicerchi, il secondo dei quali passa pel punto medio* H *di* AB *e il primo taglia* OH, *dalla parte del vertice* O *dell'angolo, in* C. *Condotta* CB *poi tracciato il cerchio di centro* B *e raggio uguale alla metà di* BC *fino a tagliare l'arco* BH *in* P, *dimostrare che prendendo l'angolo* BOP *uguale alla terza parte dell'angolo dato, si commette un errore che è espresso da*

$$\frac{2\alpha}{3} - ang\left(sen = \frac{sen\,\alpha}{\sqrt{2}}\right).$$

Dimostrazione della Sig.[ra] V.[va] *F. Prime*, a Bruxelles.

Il triangolo rettangolo OPB, supponendo $OB = 1$, dà

$$\operatorname{sen} BOP = BP.$$

Ma l'angolo BCH uguagliando 45°:

$$BP = \frac{BC}{2} = \frac{BH}{\sqrt{2}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}},$$

da cui

$$\operatorname{ang} BOP = \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}}\right)$$

e quindi

$$\frac{2\alpha}{3} - BOP = \frac{2\alpha}{3} - \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}}\right).$$

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **150''** e **152''** dalla Sig.[a] Ved.[va] *F. Prime*; **156''** dal Sig. *E. de Vito*; **159**. *S. Catania, E. de Vito, F. Mariantoni*; **160''**. *F. Mariantoni*, M.[me] *F. Prime, V. Sferra*; **162'**. *E. de Vito, U. Gerra, G. Mazza*, M.[me] *F. Prime, R. Scozzari*; **163'**. *M. Piattelli*, M.[me] *F. Prime*; **164'**. *E. de Vito*, M.[me] *F. Prime, R. Scozzari*; **165''**. *M. Piattelli*, M.[me] *F. Prime, R. Scozzari*, *V. Sferra*: **166'**. M.[me] *F. Prime*; **167'**. *U. Ceretti, G. Pucciano, G. Tirella*; **168''**. *E. de Vito, F. Mariantoni*, M.[me] *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **169'**. *B. Armono, E. de Vito, U. Gerra, E. Lugaro, G. Mazza*, M.[me] *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella*; **170''**. *V. Correnti, E. de Vito, F. Mariantoni, M. Piattelli.*

QUISTIONI PROPOSTE (*)

171*. La retta $B'C'$ tirata per i piedi delle altezze BB', CC' del triangolo ABC incontri in A'' il lato BC e si conduca AA''' perpendicolare ad AA''. Dimostrare che le rette AA''', BB''', CC''' si tagliano in un punto.

V.[va] F. Prime.

172*. Dato un triangolo ABC, siano B' e C' i punti in cui le perpendicolari innalzate sul lato BC nei vertici B, C incontrano i lati AC, AB. Dimostrare che la retta $B'C'$ è perpendicolare alla retta che unisce il centro del cerchio circoscritto col punto medio dell'altezza relativa al vertice A.

V.[va] F. Prime.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

173**. In un triangolo isoscele di base costante 1° il luogo geometrico dei centri delle circonferenze ex-inscritte è un' iperbole equilatera, 2° il luogo geometrico incontro della mediana di uno dei lati eguali con l'altezza dell'altro è un'ellisse; che ha per asse maggiore la base del triangolo.

G. Bellacchi.

174**. Ad un dato triangolo rettangolo circoscrivere una parabola 1° con l'asse normale all'ipotenusa, 2° con il vertice coincidente con quello dell'angolo retto.

G. Bellacchi.

175**. Per i vertici A, B della base di un triangolo isoscele si può sempre descrivere una parabola, il cui fuoco giaccia nell'ortocentro H; quali devono essere gli angoli $A = B$ del triangolo isoscele affinchè la parabola passi pure per C?

G. Bellacchi.

176**. Se un triangolo isoscele ha i lati eguali di grandezza costante ed uno fisso di posizione il luogo geometrico del suo ortocentro H è una strofoide.

G. Bellacchi.

177**. Dimostrare che, per n intero e positivo qualunque, si ha

$$\left[1-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots\right]^2+\left[\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots\right]^2=2^n.$$

V. Correnti.

178*. Il punto P di una sfera di raggio R è vertice di un cono che ha per asse il diametro PQ della sfera condotto per P, e ha per base un cerchio di raggio R situato sul piano condotto perpendicolarmente al diametro PQ per il suo estremo Q. Trovare a quale distanza dalla base dovranno essere tagliati, con un piano parallelo a questa, sì il cono che la sfera perchè le aree delle sezioni circolari fatte nel cono e nella sfera siano fra loro in un rapporto dato n, o perchè siano in un rapporto dato n' le superficie del tronco di cono e della zona sferica corrispondente; e discutere i risultati.

179*. In un triangolo rettangolo è data la somma a dei due cateti x ed y, e l'altezza k relativa all'ipotenusa z; determinare i tre lati x, y, z del triangolo, e indicare in quali casi il problema è possibile (*).

(*) Le quistioni 178* e 179* sono i temi di matematica dati nel luglio per la licenza dagli istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. PEANO. — *Lezioni d'Analisi infinitesimale: Vol. II.* — Tip. G. Candeletti, Torino, 1893.

Abbiamo già detto rapidamente in questo Periodico del vol. I delle *Lezioni d'Analisi infinitesimale* del Prof. G. Peano: ora diremo pure molto brevemente del vol. II, non occorrendo spendere molte parole per metterne in evidenza i pregi, essendo conosciuto lo zelo con cui il valente autore si occupa dell'insegnamento.

Dopo d'aver posta qualche definizione generale sui complessi d'ordine n, tratta in modo particolare dei vettori e dei numeri immaginari: poi stabilisce le principali proposizioni relative alle forme geometriche di 1ª, 2ª, 3ª e 4ª specie, alle operazioni sulle medesime, alla loro riduzione ed alle loro coordinate; ritrova così, come forme di prima specie, i vettori con le loro proprietà. Passa poi ai sistemi di complessi; per una classe u definisce la Cu, o classe u resa chiusa, e la classe derivata Du e per esse classi dà alcune proposizioni importanti e generali, fra cui il teorema di Cantor: *Se* u *è una proprietà distributiva dei campi di punti, e se un campo* s *ha la proprietà* u, *e questo campo è limitato, allora esiste un punto* x *del campo* s *reso chiuso tale che ogni sfera di centro* x *ha la proprietà* u. Dopo tratta dei limiti, considerando tanto i complessi in generale quanto le speciali forme geometriche studiate precedentemente, e valendosi sovente delle proposizioni stabilite già sui sistemi di complessi. Accenna alle serie a termini complessi qualsiansi, dà il teorema sulla moltiplicazione di due serie assolutamente convergenti a termini immaginarii: considera in particolare la funzione esponenziale, e le logaritmica e circolari che ne dipendono. Dice poi rapidamente della derivazione dei complessi. Dà la direzione della tangente ad una curva ed il differenziale dell'arco. Estende la formola di Taylor ai complessi ed alle forme geometriche di prima specie, funzioni d'una variabile numerica, ed alle funzioni di più variabili (pag. 85, 139, 153). Tratta del piano osculatore, delle curvature, del cerchio osculatore, dell'evoluta e della sfera osculatrice d'una linea. Parla dell'integrazione dei complessi: mostra come l'uso degli immaginari può semplificare il calcolo di integrali. Sviluppa secondo le potenze ascendenti di n

$$\int_0^{\pi} (1 + 2\, n \cos x + n^2)^p \, dx \qquad\qquad n^2 < 1$$

e ne deduce una formula per il calcolo della lunghezza dell'ellisse. Passando a trattare delle funzioni di più variabili, parla delle derivate parziali ed, incidentalmente, delle approssimazioni. Si occupa delle funzioni implicite e delle omogenee. Considerando sempre funzioni di più variabili, dice dei massimi e minimi delle medesime. Parla del piano tangente ad una superficie. Definisce il parametro differenziale di primo ordine di un numero funzione della posizione d'un punto e lo applica alla costruzione di normali a curve ed alla ricerca di massimi e minimi. Tratta degli inviluppi di linee e di superficie e della curvatura delle superficie. Si occupa degli integrali multipli, delle aree e dei volumi. Tratta delle equazioni differenziali lineari, omogenee e non omogenee: s'occupa pure delle equazioni differenziali in generale: parla prima particolarmente di quelle nelle quali si possono separare le variabili, delle riducibili alla forma omogenea $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$; delle equazioni di BERNOULLI, RICCATI, CLAIRAUT: s'occupa anche dei sistemi d'equazioni differenziali: sviluppa in serie l'integrale dell'equazione lineare omogenea del 2° ordine. In ultimo tratta del calcolo delle variazioni, prendendo in considerazione anche il caso in cui nell'integrale, che si considera, comparisca un qualsiasi numero complesso funzione d'una variabile x. Nelle applicazioni delle diverse teorie sono presi in considerazione le linee e superficie ed i solidi principali: *asteroide, parabole, cicloide, trocoide, trattrice, elica, logaritmica, ovali, spirali, geodetiche, linee e superficie di livello, superficie rigate, superficie e solidi di rivoluzione.* .... Nelle questioni geometriche, le quali formano la maggior parte del libro, è quasi sempre introdotto il punto generatore con le sue derivate, approfittando per ciò di quanto fu premesso sulle forme geometriche e sulla loro derivazione.

Il libro del Prof. Peano « destinato ad esser guida agli allievi per apprendere i fondamenti dell' Analisi » (*) è veramente pregevole così per il rigore di tutte le dimostrazioni, come per l'uso dei metodi nuovi nella trattazione dei varii argomenti: esso è quindi molto raccomandabile a quegli studenti, che desiderano abituarsi allo stretto rigore con metodi moderni.

Genova, luglio 1893.

F. GIUDICE.

B. CARRARA. — *Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate.* Cremona, Tip. Fezzi, 1893. — Prezzo: L. 2.50.

Questo saggio è un lavoro diligente di compilazione che ha il pregio d'una introduzione storica in cui è delineato lo sviluppo raggiunto dalla teorica delle quantità complesse sotto il rispetto d'una rappresentazione geometrica dalla origine di siffatta rappresentazione la quale sembra dovuta al geometra E. Kühn. Vi sono inoltre, nel testo, molte note illustrative accompagnate da indicazioni storiche.

Il libro del Sig. Prof. Carrara è diviso in due parti, la prima elementare, la seconda di carattere più elevato.

Nella prima parte l'A. dopo aver stabilito con molta chiarezza il significato geometrico dell'espressione $a + ib$ ed accennato alle altre notazioni per le quantità complesse, passa a svolgere l'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radice per queste quantità allorchè si considerano sotto l'aspetto geometrico (quantità geometriche), accennando alle più importanti proprietà che ne derivano e svolgendo anche qualche applicazione allo scopo di mostrare di quale potente ausilio riescano nel calcolo. Chiude questa parte la risoluzione compendiosa delle equazioni binomie e la considerazione delle radici dell'unità.

(*) G. PEANO. *Lez. d'Anal.*: Vol. II, Note.

La seconda parte contiene i seguenti argomenti distribuiti in paragrafi:

1. *Delle serie a termini complessi o quantità geometriche.* Vi si trova la definizione di serie anche quando i termini non sono indipendenti da $\sqrt{-1}$ ed il carattere di convergenza per tali serie.

2. *Nuova espressione delle quantità geometriche e formole che se ne deducono.* Dimostrazione dell'identità $e^{ip} = \cos p + i \operatorname{sen} p$ con alcune applicazioni.

3. *Esempi d'applicazione delle quantità geometriche ad alcuni risultati di Geometria Analitica.* Dimostrazione di una nota relazione fra i lati e gli angoli d'un triangolo. Equazioni del cerchio in coordinate cartesiane ed equazione dell'ellisse in coordinate polari.

4. *Serie trigonometriche.* Sviluppo in serie di $\cos x$, $\operatorname{sen} x$, e^{ix} e dimostrazione della formola $x = \tan x - \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} - \ldots.$

5. *Sopra una serie logaritmica ed una formola speciale logaritmico-trigonometrica.* Sviluppo in serie di $\operatorname{Log}(1 + x)$ e dimostrazione dell'identità $2ix = \operatorname{Log} \frac{1 + i \tan x}{1 - i \tan x}$.

6. *Variabili geometriche o complesse.* Concetto di variabile per una quantità geometrica complessa z e continuità di essa. Differenza del modo di comportarsi d'una quantità reale rispetto ad una complessa nel passaggio da un valor z ad un altro z'. Differenziale di z.

7. *Funzioni di variabili geometriche o complesse. Applicazioni ed esempi.* Concetto generale di funzione (molto chiaramente esposto) e concetto di funzione per quantità complesse. Una funzione w della variabile $z = x + iy$ è in generale della forma $u + iv$. Funzioni *monodrome* e *polidrome*. Condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione complessa monodroma $w = u + iv$ (con u e v funzioni reali di x ed y) sia funzione di $z = x + iy$. Dimostrazione del teo.: « Se w è una funzione della variabile complessa z, la derivata $\frac{dw}{dz}$ è indipendente da dz ossia ha lo stesso valore per ogni direzione dell'elemento dz ». Definizione *riemanniana* d'una funzione di variabile complessa. Proprietà delle derivate di w. Conservazione della similitudine nelle parti infinitesime per le due rappresentazioni delle quantità geometriche w e z, quando w è funzione monodroma di z ed applicazioni di tale similitudine od isogonalità.

8. *Principii e* (tre) *dimostrazioni del teorema fondamentale sulle equazioni.*

9. *Teorema secondo.* Ogni equazione algebrica $f(z) = 0$ del grado m ammette precisamente m radici.

10. *Variazioni speciali dell'argomento d'una funzione.* Dimostrazione della proposizione seguente: Se la variabile z descrive una linea in due sensi opposti la funzione w descrive essa pure una linea in due sensi opposti; l'argomento di w prova dunque due variazioni uguali e di segno contrario.

11. *Teorema terzo.* Il numero delle radici d'un polinomio intero comprese in un'area piana data è uguale alla variazione che subisce l'argomento del polinomio quando la variabile descrive il contorno dell'area, questa variazione divisa per 2π.

12. *Definizioni e proprietà degli integrali di funzioni di variabili complesse.* Differenza che parebbe manifestarsi in un integrale sia esso preso fra limiti reali o fra limiti complessi. Dimostrazione della proposizione che il valore di $w = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ è una funzione dei limiti come nel caso che questi limiti siano reali.

13. *Sugli integrali doppi.* Concetto e determinazione di $\iint \frac{\partial U}{\partial y} dx\, dy$ quando U è una funzione *reale* e monogena di x ed y per tutti i punti di un'area A (e converrebbe aggiungere $\frac{\partial U}{\partial y}$ ha un valore finito per tutti i punti di quest'area), l'integrale doppio essendo esteso all'area A. Dimostrazione della proprietà (dovuta a Riemann) $\int (U\, dx + V\, dy) = \iint \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dx\, dy$ in cui l'integrale semplice è esteso al contorno di A e quello doppio ad A.

14. *Teorema fondamentale. Applicazione.* Se il cammino d'integrazione della variabile complessa $z = x + iy$ consiste in una curva chiusa, dentro il cui limite $f(z)$ è una funzione finita e continua: l'integrale di $f(z)\, dz$ è uguale a zero. Nella applicazione è mostrato poi con un esempio preso dal *Compendio di analisi superiore* dello Schlömilch, come il precedente teorema possa servire a trovare i valori di integrali definiti.

Gli schiarimenti da me aggiunti ai titoli dei diversi paragrafi mi sembrano sufficienti a formarsi un'idea del contenuto del libro del Sig. Prof. Carrara, libro che tra per la natura di parte della materia che contiene, difficile a rinvenirsi altrove, tra pei numerosi dati storici e critici presentati al lettore in modo da invogliarlo a maggiori studii, riuscirà di molto giovamento ai giovani studenti delle nostre Università ai quali l'A. più particolarmente sembra indirizzarlo.

A. Lugli.

AIRY (Sir G. Biddel). *Gravitazione.* Londra 1834. Traduzione italiana di Francesco Porro. Manuali Hoepli. Milano 1893. — Prezzo L. 1.50.

Il libretto « Gravitazione » del celebre Sir Giorgio Biddel Airy, del quale si hanno due edizioni inglesi, una tedesca ed ora una italiana mercè le cure dell'astronomo Francesco Porro, è un monumento nel suo genere. Evitare l'analisi e ad un tempo rendere conto con mirabile sintesi geometrica, o meglio con puro ragionamento, dei precipui effetti della gravitazione, porgendo nozioni abbastanza precise sulle perturbazioni degli elementi delle orbite e sulla natura della forza, che perturba un pianeta od un satellite, prodotta dall'attrazione di altri corpi; farne l'applicazione alla teoria della luna e a quella, giammai tentata da alcuno, dei satelliti di Giove; offrire un saggio delle perturbazioni periodiche e secolari nella teoria dei pianeti, prima quando il perturbante è nel piano del perturbato, poi in piani diversi; esporre da ultimo l'effetto dello schiacciamento dei pianeti sul moto dei loro satelliti; tale è il mirabile lavoro di Airy, nel quale non si trova neppur una notazione algebrica.

Per trovare qualche cosa, che ricordi il libro suddetto, conviene ricorrere o al celebre capitolo undecimo dei Principii di Newton, o al trattato di Giovanni Herschel, locchè prova che solo agli uomini di genio e profondi nella scienza la più elevata, è concesso tentare con felice esito mirabili sintesi adatte al massimo numero di lettori.

Il libro di Airy, tradotto in italiano dal Porro, può rendere eminenti servigi *anche* a coloro che pur sarebbero in caso di leggere e studiare quegli argomenti esposti coi metodi completi dell'alta analisi.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Bardelli (G.) — Su un problema di dinamica di G. Saladini generalizzato da A. Serret (Aggiunta alla nota :). (Rend. R. Ist. Lom. Vol. XXVI, 1893).

Biddel Airy (G.) — *Gravitazione.* Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare. Traduzione italiana con note ed aggiunte di F. Porro. Milano, U. Hoepli, 1893 — Prezzo : L. 1,50.

Caldarera (G.) — Sviluppo delle differenze finite in funzione delle derivate e viceversa (Atti Acc. Gioenia di Scie. Nat. in Catania. Vol. VI, Serie 4ª, 1893).

Carlini (L.) — Saggio d'una teoria generale delle progressioni aritmetiche. Treviso, Tip. Luigi Zoppelli.

Catania (S.) — La proporzione matematica ed il suo uso nel saggio critico del Diritto Penale di Giovanni Bovio (Rivista Etnea, 1893) — Sul concetto di condizione a cui devono soddisfare gli elementi di una figura nella Geometria elementare (Riv. di Matematica, Vol. III, 1893).

Del Re (A.) — Sopra un sistema di rette (3, 4) (Rend. R. Acc. Lincei. Vol. II, 1893) — Sopra i sistemi di rette cremoniani (Idem, idem).

Giudice (F.) — Sulla soluzione dell'equazione algebrica di 5^0 grado con l'aggiunta dell'irrazionalità icosaedrale (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, Vol. XXVIII, 1893).

Millosevich (E.) — Sugli eclissi totali di sole del 1900 V 28 e del 1905 VIII 30 (Memorie Società Spettroscopisti italiani, Vol. XXII, 1893).

Miraglia (M.) — *Questioni vive di riforma scolastica.* Lettere aperte a S. E. il prof. F. Martini Ministro di P. Istruzione. Torino, G. Scioldo, editore, 1893 — Prezzo : L. 1.

Neppi Modona (A.) — Un'applicazione della trasformazione funzionale di Laplace e della sua inversa. Bologna, Tip. Gamberini e Parmeggiani, 1893.

Paternò (F. P.) — Un teorema sulle h dei piani di un certo fascio e le sue applicazioni in un sistema generale di assi obliqui. Palermo, Tip. M. Amenta, 1887 — Sulla determinazione diretta dei piani bisettori di un angolo diedro (Atti Coll. Ing. e Arch., Palermo, An. XII, 1889).

Riccardi (P.) — Sopra un codice ebraico contenente alcuni scritti matematici ed astronomici (Bib. math. di Eneström, To. 7, 1893).

Tagiuri (A.) — Sulla integrazione dell' equazione $\psi(n) = h\psi(n-1) + k\psi(n-2) + l$. (Gior. di mat. di Battaglini, Vol. XXXI, 1893).

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 7. N. 1, 2. — Stockholm, 1893.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Septième année. N. 6-10. Mars-Juillet, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año III, N. 26-32. Febrero-Agosto de 1893 — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXXI. Gennaio e Febbraio, Marzo e Aprile 1893. — Napoli, B. Pellerano.

(*Continua*).

Chiusura della redazione il dì 12 settembre 1893.

SUL CAMBIAMENTO SIMULTANEO DEI PIANI DI PROJEZIONE.

NOTA dell'Ing. F. P. PATERNÒ

1. Invece del consueto cambiamento, volta a volta, di un solo de' piani di projezione (p. di pr.) può, in taluni casi, convenire quello simultaneo di due di essi, facendone rotare il sistema attorno al loro asse comune: giacchè, dopo d'aver projettato sui nuovi piani, nel supporli poscia ricondotti alla posizione iniziale, viensi ad ottenere, abbenchè a scapito quasi sempre della chiarezza nel disegno, un collegamento, se non più semplice, certo più diretto fra le antiche e le nuove projezioni; le quali, riferendosi ad un punto, saranno allineate colle prime perpendicolarmente alla linea di terra che, com'è ovvio, non cambia.

2. Importa rilevare che le ragioni di tale variante risiedono essenzialmente sulla possibilità di condurre per una data retta (la linea di terra) un piano, ed un solo, parallelo o perpendicolare, rispettivamente, ad una retta o ad un piano dati. Per altro il metodo suddetto, di riportare cioè le nuove projezioni sugli antichi piani, applicato al cambiamento semplice di un solo di essi, p. es. il verticale, differisce dal risaputo in ciò: che, invece di ribaltarlo sul piano orizzontale, lo si ribalta su quel piano, parimenti verticale, che ne indica la primitiva posizione.

3. Indipendentemente dal principio delle rotazioni, può anche esser utile, in altri casi, il cambiamento simultaneo traslatorio dei piani fondamentali, supponendo che ciascuno si sposti parallelamente a sè stesso. Si mettono così in rilievo le maggiori risorse e l'importanza de' metodi di trasformazione in Geometria Descrittiva, come sarà meglio chiarito dalle seguenti applicazioni.

4. Si ottiene p. es. un'altra soluzione del problema sulla minima distanza di due rette g ed h non situate nello stesso piano, operando come appresso (Tav. I di questo fasc., fig. 1ª):

a) Dopo d'aver condotto per una di esse, p. es. per la g, il piano **S** parallelo all'altra h, si faccia rotare dell'angolo ω, attorno alla linea di terra, il sistema de' primi due p. di pr., fino a che il piano orizzontale diventi perpendicolare al suddetto piano **S**.

b) Costruite indi le novelle projezioni delle date rette, è ovvio che quelle orizzontali ${}_1g'$ ed ${}_1h'$ debbono risultare fra loro parallele; e che, inoltre, una di esse, la ${}_1g'$, coinciderà colla nuova prima traccia del piano **S**.

c) Si cambii, infine, il piano verticale, rendendolo parallelo alle due date rette; e, dopo averne segnate le nuove projezioni verticali ${}_2g''$ ${}_2h''$, se dal loro punto comune R si conduce la perpendicolare $R\,12$ alla direzione delle ${}_1g'$ ed ${}_1h'$, e dai punti *1* e *2*, ov'essa rispettivamente le taglia, le perpendicolari all'antica linea di terra sino alle antiche projezioni, saranno *12* la minima distanza n richiesta ed $1'\,2'$. $1''\,2''$ le sue prime due projezioni n' ed n''.

Verificano l'esattezza del tracciato, oltre i risaputi caratteri di perpendicolarità fra retta e piano e le note relazioni metriche fra la vera grandezza e le projezioni di un segmento rettilineo, il parallelismo fra la linea di terra e la congiungente i punti ${}_1 1''$ e ${}_1 2''$, ottenuti rispettivamente sulle ${}_1g''$ ed ${}_1h''$ come indica la figura. (*)

5. Un cambiamento rotatorio di 45° del sistema di due de' piani fondamentali, p. es. del *1°* e *2°* fa determinar subito due dei punti $\mathfrak{H}_i$ di una retta, nel nostro caso $\mathfrak{H}_x$ ed $\mathfrak{H}_{x'}$ e le nuove projezioni di essa: (Tav. II, fig. 2ª) ciò per le facili relazioni che allora si manifestano fra due delle sue traccie (*1ª* e *2ª*) e le projezioni omonime degli anzidetti suoi punti. Ed è ovvio che, riferendosi alternativamente a due posizioni distinte del sistema, cioè all'iniziale ed allo spostato, una fra le tracce della retta e due fra le projezioni dei suoi punti $\mathfrak{H}_i$, convenientemente scelti, debbonsi trovare allineati perpendicolarmente alla linea di terra; e che inoltre il rapporto fra le loro distanze da questa è quanto $\sqrt{2} : 1$, come facilmente si deduce dalle costruzioni segnate nella tavola.

6. La distanza n da un punto A ad un piano **S** (Tav. II, fig. 3ª)

(*) Pertanto è bene si noti, come una rotazione eguale e di senso contrario a quella già considerata del sistema delle due rette, attorno la linea di terra, condurrebbe del pari alla soluzione del problema; ma è facile accorgersi che, malgrado trattisi della più semplice tra le figure non piane (un sistema di due rette) occorrerebbe determinare, fra le generatrici delle due iperboloidi coassiali che esse, rotando, rispettivamente descrivono, quelle che, sopra un dato piano, si projettano parallele: problema che non è certamente così elementare come quello da noi posto.

può determinarsi in vera grandezza e nelle due projezioni, conducendo per A il piano perpendicolare al dato ed a quello verticale, e considerandolo come un cambiamento rotatorio di questo attorno alla traccia verticale del primo; ma, invece di ribaltarlo, come ordinariamente suol farsi, attorno alla sua traccia orizzontale, lo si ribalti attorno a quella verticale e sul piano omonimo: eseguite ivi le operazioni del caso, si ottiene dapprima la distanza richiesta, e, ricondotto indi l'anzidetto piano alla posizione iniziale, le relative projezioni.

Sono facili verifiche dell'esattezza del disegno la nota perpendicolarità fra le suddette projezioni e le omonime tracce del piano considerato, non che il confronto colla rotazione attorno la verticale del punto A, sino a divenire perpendicolare al piano verticale. (*)

7. La rotazione attorno ad un suo punto, e nel suo piano, della figura costituita da projezioni e tracce relative ad una data quistione di Geometria Descrittiva, può utilizzarsi a far cadere entro il campo del quadro elementi dapprima inaccessibili, operando sui quali e riconducendo poscia la figura alla posizione primitiva, mediante rotazione eguale e contraria a quella già eseguita, si ottiene la soluzione richiesta. Ciò s'interpreti come un cambiamento rotatorio attorno al loro asse comune di due de' p. di pr., supposto che formi sistema con essi, epperò simultaneamente ruoti, la figura ai quali è riferita: ed è superfluo aggiungere come tal metodo possa, per casi analoghi, estendersi anche a semplici quistioni di Geometria pura.

8. La figura 4ª (Tav. III) rappresenta l'intersezione di due piani, nel caso che cada fuori il quadro il punto d'incontro delle loro tracce verticali; la rotazione ha luogo attorno l'asse delle y, e la sua grandezza α è, per maggior semplicità, quanto l'angolo che la perpendicolare OH alla prima traccia HR di uno de' piani dati, fa colla linea di terra.

9. Ecco, infine, un'applicazione del cambiamento simultaneo di semplice traslazione dei p. di pr., anch'esso utile nel caso di ele-

(*) Può, talvolta, conferire alla più facile intelligenza del tracciato, l'uso di numeri progressivi e di frecce convenientemente apposti nelle sue parti principali, onde meglio fissarne l'ordine e il senso delle costruzioni: del che è un saggio nella figura.

menti inaccessibili nei dati del problema: trattisi p. es. di determinare (Tav. III, fig. 5ª) l'intersezione i dei due piani L e T, nel caso che i punti comuni alle loro tracce omonime cadano entrambi fuori il campo del quadro. Si spostino allora parallelamente a sè stessi, e nel senso indicato, il piano verticale di y e quello orizzontale di z: la loro intersezione LT, nuova linea di terra, individua colla primitiva LT il piano α, il quale taglierà la retta i nel punto C, centro di omotetia de' due tetraedri che i piani L e T rispettivamente determinano cogli antichi e coi nuovi piani di projezione; d'onde il seguente tracciato:

Condotte le $L''T''$ ed $L'T'$ parallele alla LT ed alle stabilite distanze da questa, si costruiscono i parallelogrammi $L2(L)1$ e $2'T1'(T)$, dei quali i lati e le diagonali convenientemente prolungati, determinano il quadrilatero $S_2(T)S_1(L)$ e il punto (C), centro di riduzione omotetica nel piano del quadro, ecc. Del resto le numerose costruzioni sussidiarie ivi segnate, le quali a vicenda si verificano, rendono superflui ulteriori schiarimenti.

10. Il tracciato precedente diviene assai più semplice ed utile in pratica, se sono eguali gli spostamenti dei due p. di pr.; giacchè, allora, le prime due projezioni della nuova linea di terra saranno equidistanti dall'antica LT, sulla quale cadranno sia il ribaltamento della prima che l'anzidetto centro di riduzione (C).

Palermo, agosto 1893.

SUI NUMERI DATI
MEDIANTE INSIEMI DI NUMERI RAZIONALI

(*Continuazione e fine, V. pag. 144*).

7. D. Si dice *numero irrazionale* ogni numero non razionale che separi tutti i numeri razionali in due classi.

Postulato. Si ammette che: *Se tutti i numeri razionali sono divisi in due classi e quelli d'una sono tutti minori di quelli dell'altra, esiste uno ed un solo numero irrazionale maggiore d'ogni numero della classe inferiore e minore di ciascuno della superiore* *allora e soltanto allora che non contiene un massimo la classe inferiore e non contiene un minimo la superiore.*

T. 1. *Due numeri, razionali od irrazionali, distinti sono sempre separati da infiniti numeri razionali.*

R. Consideriamo prima due numeri p e q razionali: essi sono separati dagli infiniti numeri, razionali, che s'ottengono da $p+m.(q-p)$ ponendovi per m le infinite frazioni proprie, positive. Consideriamo ora un numero razionale p con uno irrazionale u e supponiamo che p sia minore di u: per il precedente postulato, p non può essere massimo dei numeri razionali minori di u, per cui potremo fissare un numero razionale q, che sia maggiore di p e minore di u: gli infiniti numeri razionali, che separano i due numeri razionali p e q, separano anche p ed u. In modo simile si riconosce che sono separati da infiniti numeri razionali un numero irrazionale ed uno razionale che lo superi. Se infine i due numeri sono irrazionali, per esser distinti determineranno una diversa divisione in classi dei numeri razionali, per l'ammesso postulato, per cui si potrà fissare un numero razionale p maggiore dell'uno e minore del rimanente dei due numeri irrazionali: questi sono quindi separati da p e dagli infiniti numeri razionali separanti uno di essi da p.

D. 2. *Due numeri sono eguali* se nessun numero razionale è minore dell'uno e maggiore dell'altro.

D. 3. Un numero è *maggiore* d'un altro, che dicesi *minore* del primo, se qualche numero razionale è minore del primo numero ed è maggiore del secondo.

C. *Due numeri, razionali od irrazionali, o sono eguali o sono diseguali. Se sono diseguali, uno è maggiore dell'altro.*

Se con a, b, c indichiamo tre numeri, razionali od irrazionali:

da	$a=b$	e	$b\geqq c$	segue	$a=c$
»	$a\geqq b$	»	$b>c$	»	$a>c$
»	$a\leqq b$	»	$b<c$	»	$a<c$.

T. 2. *Due insiemi limitrofi di numeri razionali individuano sempre un numero, che non è minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore.*

R. Siano (X) ed (Y) due insiemi limitrofi di numeri razionali. Dividiamo tutti i numeri razionali in due classi, ponendo tutti quelli che non sono maggiori di qualche numero di (X) in una classe, che diremo (X'), ed i rimanenti nell'altra classe, che diremo (Y'); questa conterrà quindi tutti i numeri di (Y) e sarà formata di numeri tutti maggiori di quelli di (X'). Esiste certamente un numero che non è minore di nessun numero della classe inferiore e non è maggiore di nessuno della superiore perchè o v'è un numero massimo nella classe inferiore o ve n'è uno minimo nella superiore ed allora tal numero ha, manifestamente, la dichiarata proprietà; oppure non ha massimo la classe inferiore nè minimo la superiore ed allora, pel postulato precedentemente ammesso, esiste un numero irrazionale colla detta proprietà. Ora dico che un sol numero non è minore di nessun numero dell'insieme inferiore e non è maggiore di nessuno del superiore, cosicchè tal numero resta individuato dai due insiemi: infatti; se due diversi numeri possedessero l'accennata proprietà, gli infiniti numeri razionali separanti essi numeri, per l'ultimo teorema, dovrebbero separare anche i due insiemi; ma ciò non può avverarsi perchè s'è visto che due insiemi limitrofi di numeri razionali non possono esser separati da più numeri razionali. (6, T. 2).

E. 1. Le due successioni aventi per numeri n^{mi}

$$x_n = \frac{11n - 3}{5n + 8} \qquad\qquad y_n = \frac{11n + 4}{5n - 1}$$

individuano il numero 2, 2.

E. 2. L'insieme dei numeri x e quello dei numeri y definiti dalle

$$x^2 < 5 \qquad\qquad y^2 > 5$$

individuano un numero irrazionale.

E. 3. *Frazione periodica.* Il gruppo dei numeri

$$0{,}37 \qquad 0{,}3737 \qquad 0{,}373737 \qquad \ldots$$

e quello dei numeri

$$0{,}38 \qquad 0{,}3738 \qquad 0{,}373738 \qquad \ldots$$

individuano la frazione $\frac{37}{99}$.

$$\left[\frac{37}{99}=\frac{3700}{9900}=\frac{370000}{990000}=\ldots=\frac{3700+37}{9900+99}=\frac{370000+3737}{990000+9999}=\ldots\right.$$

$$\left.\frac{1}{1}>\frac{1+3737}{1+9999}>\frac{3737}{9999} \qquad \frac{3738}{10000}>\frac{3737}{9999}>\frac{3737}{10000} \text{ ecc.}\right]$$

E. 4. *Base Neperiana.* Le due successioni aventi per numeri

$$x_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\,.\,2}+\ldots+\frac{1}{n!} \qquad y_n=x_n+\frac{1}{n!}$$

individuano un numero irrazionale.

[Qualsiasi frazione di denominatore n o non è maggiore di x_n o non è minore di y_n per cui od è minore di x_{n+1} od è maggiore di y_{n+1}. Si ricordi anche il teorema del n. 5].

II.

Limiti inferiore e superiore d'un insieme. Limite d'una successione.

Dopo quanto fu detto s'intuisce facilmente che il numero individuato da due insiemi limitrofi di numeri razionali resta pure individuato da un solo dei due insiemi (4, T.), Porremo ciò in evidenza occupandoci ora del limite inferiore e del limite superiore d'un insieme. Ci occuperemo pure del limite d'una successione nel senso usuale. Queste tre specie di limiti le definiremo servendoci solo di quanto qui fu detto, indipendentemente quindi da qualsiasi conoscenza d'operazioni con numeri irrazionali.

8. T. *Se un insieme è formato di numeri razionali tutti minori d'uno fisso, esiste un numero ed uno solo, irrazionale o razionale, che non sia minore di nessun numero dell'insieme e non sia maggiore di nessun numero razionale che superi tutti quelli dell'insieme. Se i numeri d'un insieme sono tutti maggiori d'uno fisso, esiste un numero ed uno solo, che non sia maggiore di nessun numero dell'insieme e non sia minore di nessun numero razionale, che sia minore di tutti quelli dell'insieme.*

R. Sia (X) un insieme di numeri razionali tutti minori d'uno fisso. Il numero individuato dall'insieme (X) con quello di tutti i numeri razionali maggiori d'ogni numero di (X), ed esso solo, non è minore di nessun numero di (X) e non è maggiore di nessun numero razionale che superi tutti quelli di questo insieme (7, T. 2; 4, T.). In modo simile si riconosce la verità del teorema relativamente ad un insieme di numeri tutti maggiori d'uno fisso.

D. Si dice *limite superiore* d'un insieme di numeri, tutti minori d'uno fisso, il numero che non è minore di nessun numero dell'insieme e non è maggiore di nessuno che superi tutti quelli dell'insieme. Si dice *limite inferiore* d'un insieme di numeri, tutti maggiori d'un fisso, il numero che non è maggiore di nessun numero dell'insieme e non è minore di nessuno, che sia minore di tutti quelli dell'insieme. Per significare che un insieme contiene numeri maggiori d'ogni dato numero positivo, o minori di ognuno negativo, si usa dire che il medesimo ha l'*infinito positivo, o negativo, per limite superiore, od inferiore.*

C. *Il limite superiore, od inferiore, d'un insieme può appartenere o non appartenere al medesimo: se gli appartiene, è un suo massimo o minimo.*

E. 1. Il gruppo dei numeri ottenibili da $\frac{2n}{5n+1}$, dando ad n tutti i valori interi positivi, ha il limite inferiore $\frac{1}{3}$ ed il superiore 0,4: soltanto il limite inferiore appartiene all'insieme.

E. 2. L'insieme dei numeri ottenibili da $\frac{5m+3n}{2m+4n}$, dando ad m ed n tutti i valori interi positivi, ha il limite superiore 2,5 e l'inferiore 0,75; nessuno dei due limiti appartiene all'insieme.

E. 3. L'insieme dei numeri non minori di 2 e non maggiori di 7 contiene i suoi limiti inferiore e superiore, che sono 2 e 7.

9. D. 1. Diremo che *una relazione sussiste tra un numero dato ed i termini lontani d'una data successione* se sia possibile fissare n abbastanza grande perchè tale relazione sussista tra il numero dato ed ognuno dei termini che seguono il termine n^{mo} nella data successione.

E. Poniamo

$$(X) = \left(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{3}{4}, 5, \frac{5}{6}, 7, \frac{7}{8}, \dots\right)$$

indichiamo cioè con (X) la successione, che ha per termini $(2n-1)^{mo}$ e $(2n)^{mo}$ i numeri $2n-1$ e $\frac{2n-1}{2n}$. Ogni data frazione propria è minore dei termini lontani: nessun numero è maggiore dei termini lontani della successione (X). Non è possibile fissare n abbastanza grande perchè qualsiasi frazione propria sia poi minore d'ogni termine seguente il termine n^{mo} nella successione (X).

D. 2. Si dice che *una successione tende ad un limite* l se i termini lontani della successione sono maggiori d'ogni numero razionale, che sia minore di l, e sono minori d'ognuno, che sia maggiore di l.

T. *Una successione non può tendere a due limiti.* (*)

R. Sia x_n il numero n^{mo} d'una successione, che tenda al limite l; e sia h un numero minore di l. Indichiamo con r un numero razionale maggiore di h e minore di l (7, T. 1). Siccome la successione tende ad l ed r è un numero razionale minore di l, i termini lontani della successione sono maggiori di r. La successione non può dunque tendere ad h come limite perchè i termini lontani della medesima non sono minori di r, che è un numero razionale maggiore di h. In modo simile si riconosce che la successione non può tendere ad un limite maggiore di l: quindi è vero che, se la medesima tende al limite l, essa non può tendere ad alcun altro limite.

10. T. *Perchè una successione di numeri tenda ad un limite è sufficiente e necessario che per ogni numero razionale positivo prefissato si possa assegnare ad* n *un valore abbastanza grande perchè le differenze tra il termine* n^{mo} *della successione ed i termini successivi siano tutte minori di quel numero positivo.*

R. Consideriamo la successione

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad \ldots$$

e supponiamo che, per ogni numero razionale positivo ε dato, si possa fissare per l'indice n un valore m tale che sia minore di ε ogni differenza tra a_m ed i termini successivi ad a_m, cosicchè sarà:

$$a_{m+p} - \varepsilon < a_m < a_{m+p} + \varepsilon \text{ per } p = 1, 2, 3 \ldots$$

da cui ricavasi:

$$a_m - \varepsilon < a_{m+p} < a_m + \varepsilon.$$

(*) Per uno studio di limiti d'una successione, in senso più largo, V. una mia nota nel Tomo V dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, anno 1891, pag. 280.

Diamo successivamente ad ε i valori $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... e fissiamo relativi valori di m i quali indicheremo con $m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots$: corrispondentemente potremo stabilire le diseguaglianze:

$$a_{m_1} - \frac{1}{1} < a_{m_1+p} < a_{m_1} + \frac{1}{1}$$
$$a_{m_2} - \frac{1}{2} < a_{m_2+p} < a_{m_2} + \frac{1}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m_n} - \frac{1}{n} < a_{m_n+p} < a_{m_n} + \frac{1}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

per $p = 1, 2, 3, \ldots$

Poniamo:

$$(X) = \left(a_{m_1} - 1\,,\ a_{m_2} - \frac{1}{2}\,,\ a_{m_3} - \frac{1}{3}\,,\ \ldots\right),$$
$$(Y) = \left(a_{m_1} + 1\,,\ a_{m_2} + \frac{1}{2}\,,\ a_{m_3} + \frac{1}{3}\,,\ \ldots\right).$$

Proveremo che questi due gruppi sono limitrofi.

Prendiamo in (X) un numero qualunque $a_{m_k} - \frac{1}{k}$ ed in (Y) uno qualunque $a_{m_i} + \frac{1}{i}$: siccome il numero $a_{m_k} - \frac{1}{k}$ è minore di ciascuno dei numeri a_{m_k+p} ed $a_{m_i} + \frac{1}{i}$ è maggiore di ciascuno dei numeri a_{m_i+p}, è

$$a_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{m_k+m_i} < a_{m_i} + \frac{1}{i}$$

epperò è

$$a_{m_k} - \frac{1}{k} < a_{m_i} + \frac{1}{i}.$$

Ogni numero di (X) è dunque minore d'ogni numero di (Y). Sia ora α un numero positivo dato arbitrariamente: si fissi un intero n maggiore di $\frac{2}{\alpha}$; sarà così α maggiore di $\frac{2}{n}$, che è la differenza tra il numero $a_{m_n} + \frac{1}{n}$ di (Y) ed il numero $a_{m_n} - \frac{1}{n}$ di (X): ogni numero positivo dato è dunque maggiore della differenza di due numeri presi convenientemente nell'insieme superiore (Y) l'uno e nell'inferiore (X) l'altro.

Resta così provato che i due insiemi (X) ed (Y) sono limitrofi

(3, D. 2): indichiamo con l il numero che i medesimi individuano (7, T. 2). Sia b un numero razionale minore di l, quindi minore d'ogni numero di (Y) ed inoltre minore di qualche numero di (X) perchè solamente l non è maggiore di nessun numero di (Y) e non è minore di nessuno di (X); un numero di (X) maggiore di b sia $a_{m_s} - \frac{1}{s}$; essendo:

$$a_{m_s} - \frac{1}{s} < a_{m_s + p} \qquad \text{per } p = 1, 2, 3, \ldots$$

ancora b, che è minore di $a_{m_s} - \frac{1}{s}$ sarà minore di ciascuno dei numeri a_{m_s+1}, a_{m_s+2}, a_{m_s+3}, ... Il numero b è dunque minore dei termini lontani della successione $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Si riconosce nello stesso modo che ogni numero, che sia maggiore di l, è maggiore dei termini lontani della successione. La successione tende adunque ad l come limite, per cui resta provato che la condizione enunciata nel teorema è sufficiente.

Ammettiamo ora che la successione

$$a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \qquad \ldots$$

tenda ad un limite l; e supponiamo dato arbitrariamente un numero positivo ε. Fissiamo l'intero positivo k più grande che $\frac{2}{\varepsilon}$ per cui sarà $\varepsilon > \frac{2}{k}$. Dei numeri

$$\ldots \quad -\frac{1}{k} \quad \frac{0}{k} \quad \frac{1}{k} \quad \frac{2}{k} \quad \frac{3}{k} \quad \ldots$$

sia $\frac{h-1}{k}$ il maggiore di quelli più piccoli di l per cui $\frac{h}{k}$ non sarà minore ed $\frac{h+1}{k}$ sarà maggiore di l. I termini lontani della nostra successione saranno quindi maggiori di $\frac{h-1}{k}$ e minori di $\frac{h+1}{k}$, cioè potremo fissare due interi n' ed n'' abbastanza grandi perchè i numeri $a_{n'+1}$ $a_{n'+2}$ $a_{n'+3} \ldots$ siano maggiori di $\frac{h-1}{k}$ ed i numeri $a_{n''+1}$ $a_{n''+2}$ $a_{n''+3} \ldots$ siano minori di $\frac{h+1}{k}$. Indicando con n un intero, che superi ciascuno dei numeri n' ed n'', p. es. $n'+n''$, avremo dunque:

$$\frac{h-1}{k} < a_{n+p} < \frac{h+1}{k} \quad \text{per } p = 0, 1, 2, \ldots$$

Essendo minore di $\frac{h+1}{k}$ e maggiore di $\frac{h-1}{k}$ ciascuno dei numeri

$$a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2} \quad a_{n+3} \quad \dots$$

sarà minore di $\frac{h+1}{k} - \frac{h-1}{k}$, ossia di $\frac{2}{k}$ epperò con maggior ragione di ε, la differenza di due qualunque dei medesimi numeri, ed in particolare sarà minore di ε ciascuna delle differenze

$$a_n - a_{n+1} \quad a_n - a_{n+2} \quad a_n - a_{n+3} \dots$$
$$a_{n+1} - a_n \quad a_{n+2} - a_n \quad a_{n+3} - a_n \dots$$

Avendo ammesso che la successione

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots$$

tenda ad un limite, siamo così giunti alla necessaria conseguenza che, dopo aver dato arbitrariamente un numero positivo ε, sia possibile fissare n in modo che fossero minori di ε le differenze tra il termine a_n e ciascuno dei successivi. È dunque vero che la condizione enunciata nel teorema è anche necessaria.

Genova, novembre 1892.

F. Giudice.

LA RISOLUZIONE COMPLETA DI UN PROBLEMA

(*Continuazione e fine*, V. *pag.* 150).

Risoluzione algebrica. — Posta la condizione che il punto D debba essere fra B e C, indicando con a, b, c i lati opposti rispettivamente agli angoli A, B, C, con x il segmento BD, con y il segmento AD, e con z la proiezione di AD su BC, si avrà il sistema:
$b^2 = y^2 + (a-x)^2 \pm 2(a-x)z$, $c^2 = y^2 + x^2 \mp 2xz$, $y^2 = x(a-x)$,
ed eliminando y e z:

$$b^2 x + c^2(a-x) = 2ax(a-x) ,$$

ossia:

$$2ax^2 - (2a^2 - b^2 + c^2)x + ac^2 = 0 , \quad \dots\dots \quad (2)$$

da cui:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2 + c^2)^2 - 8a^2c^2}}{4a} .$$

Affinchè le radici dell'equazione (2) siano soluzioni del problema, dovranno essere positive e reali; il loro prodotto è positivo, quindi saranno ambedue positive quando si abbia:

$$2a^2 + c^2 \geqq b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

In tale ipotesi le radici saranno anche reali se:

$$2a^2 - b^2 + c^2 \geqq 2ac\sqrt{2} \text{ ossia } 2a^2 - 2ac\sqrt{2} + c^2 \geqq b^2 .$$

L'ultima relazione si può porre sotto la forma:

$$(a\sqrt{2} - c)^2 \geqq b^2 ,$$

e, ponendo la condizione:

$$a\sqrt{2} > c ,$$

si avrà pure:

$$a\sqrt{2} - c \geqq b ,$$

ossia:

$$a\sqrt{2} \geqq b + c ;$$

evidentemente in quest'ultima condizione è compresa la precedente, che si potrà quindi trascurare. Perciò le radici saranno reali quando

$$2a^2 \geqq (b+c)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Qualora sia soddisfatta la (4), lo è, a più forte ragione, anche la (3), quindi la (4) esprime l'unica condizione per la possibilità del problema.

Se l'angolo A del triangolo dato è ottuso, e perciò $\cos A < 0$, si ha:

$$2a^2 = 2(b^2 + c^2) - 4bc\cos A$$

ossia:

$$2a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2 - 4bc\cos A,$$

quindi:

$$2a^2 > (b+c)^2,$$

ed il problema ammette due soluzioni.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo ottusangolo in A, sia isoscele, posto $b = c$, si ha:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2c^2}}{2},$$

e quindi:

$$x_1 = a - x_2 ;$$

vale a dire che i punti D_1 e D_2 sono ad uguale distanza dai vertici B e C, ed i segmenti AD_1, AD_2 sono uguali.

Se l'angolo A è retto, si ha:

$$2a^2 = 2(b^2 + c^2)$$

ossia:

$$2a^2 = (b+c)^2 + (b-c)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

e quindi, in generale:

$$2a^2 > (b+c)^2 .$$

Il problema ammette due soluzioni, e si ha:

$$x = \frac{b^2 + 3c^2 \pm (b^2 - c^2)}{4a}$$

ossia:

$$x_1 = \frac{a}{2} \qquad \text{ed} \qquad x_2 = \frac{c^2}{a},$$

vale a dire che i punti D_1 e D_2 sono i piedi della mediana e dell'altezza corrispondenti all'ipotenusa.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo rettangolo in A, sia isoscele, la (5) diviene:

$$2a^2 = (b + c)^2;$$

il problema ammette una sola soluzione, e si ha:

$$x = \frac{b^2}{a} = \frac{c^2}{a},$$

onde si ricava:

$$2x = \frac{b^2 + c^2}{a}, \text{ ossia: } 2x = a, \; x = \frac{a}{2};$$

vale a dire che il punto $D_{1.2}$ è il punto di mezzo del lato a.

Se l'angolo A è acuto, si ha:

$$2a^2 = (b + c)^2 + (b - c)^2 - 4bc \cos A \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6),$$

quindi:

$$2a^2 \gtreqless (b + c)^2,$$

ed il problema ammette due, una, o nessuna soluzione. Quando sia:

$$2a^2 = (b + c)^2$$

si ha:

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2}{4a}, \text{ ossia: } x = \frac{c(b + c)}{2a}$$

$$a - x = \frac{2a^2 - c(b + c)}{2a}, \text{ ossia: } a - x = \frac{b(b + c)}{2a},$$

quindi:

$$\frac{x}{a - x} = \frac{c}{b};$$

vale a dire che il punto $D_{1.2}$ appartiene alla bissettrice dell'angolo A.

Nel caso speciale che il triangolo, essendo acutangolo in A, sia isoscele, la (6) diviene:

$$2a^2 = (b + c)^2 - 4bc \cos A,$$

quindi:

$$2a^2 < (b + c)^2;$$

il problema è impossibile, ed in conseguenza è pure impossibile se il triangolo è equilatero.

Riprendendo la formula

$$x = \frac{2a^2 - b^2 + c^2 \pm \sqrt{(2a^2 - b^2 + c^2)^2 - 8a^2c^2}}{4a}$$

proponiamoci di trovare graficamente i segmenti x_1 ed x_2 per mezzo dei lati del triangolo. Giova scrivere:

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c^2}{4a} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{4a} + \frac{c^2}{4a}\right)^2 - \frac{c^2}{2}};$$

rappresentando con h_1 il segmento terzo proporzionale dopo $4a$ e b, e con h_2 il segmento terzo proporzionale dopo $4a$ e c, si ha:

$$x = \frac{a}{2} - h_1 + h_2 \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2} - h_1 + h_2\right)^2 - \frac{c^2}{2}},$$

e, posto $\frac{a}{2} - h_1 + h_2 = h_3$, se indichiamo con h_4 il cateto di un triangolo rettangolo avente l' ipotenusa uguale ad h_3 e l'altro cateto uguale a $\frac{c}{\sqrt{2}}$, si ha infine:

$$x = h_3 \pm h_4 .$$

Posta la condizione che il punto D debba trovarsi sul prolungamento di BC, e continuando ad indicare con x, y, z rispettivamente i segmenti BD, AD, e la proiezione di AD su BC, secondo che il punto D sarà dalla parte di B o dalla parte di C, si avrà il primo od il secondo dei seguenti sistemi di equazioni:

$$\begin{cases} b^2 = y^2 + (x+a)^2 \pm 2(x+a)z \\ c^2 = y^2 + x^2 \pm 2xz \\ y^2 = x(x+a) \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = y^2 + (x-a)^2 \pm 2(x-a)z \\ c^2 = y^2 + x^2 \pm 2xz \\ y^2 = x(x-a). \end{cases}$$

Eliminando y e z, si ha dal primo sistema:

$$b^2 x - c^2 x = a c^2 \qquad \text{ossia:} \qquad x = \frac{ac^2}{b^2 - c^2}$$

e dal secondo:

$$-b^2 x + c^2 x = a c^2 \qquad \text{ossia:} \qquad x = \frac{ac^2}{c^2 - b^2}.$$

Se dunque $b > c$ il punto, che chiameremo D_3, si trova dalla parte di B; se $b < c$, si trova invece dalla parte di C; se $b = c$ il problema è impossibile.

Per rappresentare graficamente il segmento x dato dalla formula:

$$x = \pm \frac{ac^2}{b^2 - c^2}$$

giova scrivere:

$$x = \pm \frac{a}{b+c} \cdot \frac{c^2}{b-c};$$

indicando con l il segmento terzo proporzionale dopo $(b-c)$ e c, ovvero il segmento terzo proporzionale dopo $(c-b)$ e c, si avrà:

$$x = \frac{al}{b+c},$$

e non rimarrà che a prendere il segmento quarto proporzionale dopo $(b+c)$, a ed l.

Considerazioni. — Essendo D_1, D_2 i punti interni e D_3 il punto esterno corrispondenti rispettivamente alle soluzioni x_1, x_2, x_3 del problema ed ai segmenti AD_1, AD_2, AD_3, che indicheranno con y_1, y_2, y_3, è chiaro che avranno una soluzione in comune col triangolo dato tutti i triangoli aventi due vertici in B ed in C ed il terzo vertice in un punto qualunque delle circonferenze descritte con centro D_1, D_2, D_3 e rispettivamente con raggio y_1, y_2, y_3.

Volendo esprimere algebricamente la relazione esistente fra i lati del triangolo dato, e quelli di uno qualunque avente col dato in comune una delle soluzioni x_1, x_2, premetteremo che, affinchè due equazioni della forma:

$$x^2 + p\,x + q = 0 \qquad\qquad x^2 + p_1\,x + q_1 = 0$$

abbiano una radice comune, deve esistere fra i coefficienti la relazione seguente:

$$(q_1 - q)^2 = (p_1 - p)\,(p\,q_1 - p_1\,q).$$

Ciò posto, se chiamiamo a, b_1, c_1 i lati del nuovo triangolo, mentre pel triangolo dato si ha:

$$2\,a\,x^2 - (2\,a^2 - b^2 + c^2)\,x + a\,c^2 = 0,$$

si avrà pel nuovo triangolo:

$$2\,a\,x^2 - (2\,a^2 - b_1^2 + c_1^2)\,x + a\,c_1^2 = 0;$$

dunque nel caso attuale:

$$p = \frac{-2\,a^2 + b^2 - c^2}{2\,a}, \quad q = \frac{c^2}{2}, \quad p_1 = \frac{-2\,a^2 + b_1^2 - c_1^2}{2\,a}, \quad q_1 = \frac{c_1^2}{2},$$

e. sostituendo questi valori nella precedente relazione, fatte le opportune operazioni e riduzioni, si ottiene:

$$2\,a^2\,(b_1^2 - b^2)\,(c_1^2 - c^2) = (c_1^2\,b^2 - c^2\,b_1^2)\,(b_1^2 - b^2 - c_1^2 + c^2) \quad . \quad (7)$$

che è la relazione cercata. Inoltre, perchè i due triangoli abbiano in comune la soluzione x_1, che per fissare le idee, supporremo essere la maggiore, dovrà essere:

$$x_1 + y_1 > c_1 > x_1 - y_1, \qquad y_1 + (a - x_1) > b_1 > y_1 - (a - x_1),$$

e perchè abbiano invece in comune la soluzione x_2, dovrà essere:

$$y_2 + x_2 > c_1 > y_2 - x_2, \qquad (a - x_2) + y_2 > b_1 > (a - x_2) - y_2.$$

Fra tutti i triangoli che hanno col dato in comune una delle soluzioni x_1, x_2 ve n'è uno che, oltre all'avere in comune col dato il lato a, è inscritto con esso nella stessa circonferenza. Per questo speciale triangolo, che è equivalente al dato, ed ha l'angolo opposto al lato a supplementare all'angolo A del triangolo dato, si ricava facilmente:

$$b_1\,c_1 = b\,c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

Questa relazione trasforma la (7) nella seguente:

$$b_1^2 + c_1^2 + b^2 + c^2 = 2\,a^2 : \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

e, risolvendo infine rispetto a b_1 e c_1 il sistema costituito dalle (8) (9), si ricava:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2 - (b-c)^2} \pm \sqrt{2a^2 - (b+c)^2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2a^2 - (b-c)^2} \mp \sqrt{2a^2 - (b+c)^2}\right).$$

Volendo esprimere algebricamente la relazione esistente fra i lati del triangolo dato e quelli di uno qualunque avente col dato in comune la soluzione x_3, continueremo ad indicare con a, b_1, c_1 i lati del nuovo triangolo. Avendosi pel triangolo dato:

$$x = \pm \frac{a c^2}{b^2 - c^2},$$

si avrà pel nuovo triangolo:

$$x = \pm \frac{a c_1^2}{b_1^2 - c_1^2},$$

e quindi dovrà essere:

$$\frac{c_1^2}{b_1^2 - c_1^2} = \frac{c^2}{b^2 - c^2} \qquad \text{ossia} \qquad b c_1 = b_1 c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Inoltre, se $b > c$, dovrà essere:

$$y_3 + x_3 > c_1 > y_3 - x_3, \qquad (a + x_3) + y_3 > b_1 > (a + x_3) - y_3,$$

e se $b < c$:

$$x_3 + y_3 > c_1 > x_3 - y_3, \qquad y_3 + (x_3 - a) > b_1 > y_3 - (x_3 - a).$$

Fra tutti i triangoli, che hanno col dato in comune la soluzione x_3, ve n'è uno che, oltre all'avere in comune col dato il lato a, è inscritto con esso nella stessa circonferenza. Per questo speciale triangolo, che ha l'angolo opposto al lato a supplementare all'angolo A del triangolo dato, detta S_1 la sua superficie si ha:

$$16 S_1^2 = 4 b_1^2 c_1^2 - (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2, \qquad \text{ed anche} \qquad S_1^2 = \frac{b_1^2 c_1^2 \operatorname{sen}^2 A}{4},$$

mentre pel triangolo dato si ha:

$$16 S^2 = 4 b^2 c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2, \qquad \text{ed anche} \qquad S^2 = \frac{b^2 c^2 \operatorname{sen}^2 A}{4};$$

onde avremo la relazione:

$$\frac{4 b_1^2 c_1^2 - (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2}{4 b^2 c^2 - (-a^2 + b^2 + c^2)^2} = \frac{b_1^2 c_1^2}{b^2 c^2},$$

ossia:

$$b^2 c^2 (-a^2 + b_1^2 + c_1^2)^2 = b_1^2 c_1^2 (-a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Da ultimo, risolvendo rispetto a b_1 e c_1 il sistema costituito dalle (10) (11), si ricava:

$$b_1 = \frac{a b}{\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}} \qquad c_1 = \frac{a c}{\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}}.$$

Forlì, Marzo 1893.

DIEGO Dott. FELLINI.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

A proposito del teorema di Lehmus (*). — Non mi pare inutile far notare alcuni teoremi, dei quali noti teoremi sulle mediane e sulle bissettrici sono casi particolari.

1. In un triangolo ABC chiamo A', B', C' i punti che dividono rispettivamente i lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ nel rapporto delle potenze n^{me} (n qualunque) dei lati adiacenti, cosicchè

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c^n}{b^n}, \qquad \frac{CB'}{B'A} = \frac{a^n}{c^n}, \qquad \frac{AC'}{C'B} = \frac{b^n}{a^n};$$

chiamo $K^{(n)}$ il punto comune delle AA', BB', CC'; rette $k^{(n)}$ opposte ad a, b, c rispettivamente i segmenti AA', BB', CC'; raggi $k^{(n)}$ opposti ad a, b, c i segmenti $AK^{(n)}$, $BK^{(n)}$, $CK^{(n)}$; rettangoli corrispondenti ad a, b, c i rettangoli $\overline{BA'.A'C}$, $\overline{CB'.B'A}$, $\overline{AC'.C'B}$.

Per $n = 0, 1, 2, -1, -2$ le rette $k^{(n)}$ sono rispettivamente le mediane, le bissettrici, le simediane, le isotomiche delle bissettrici e delle simediane.

Teorema. — Per n qualunque a lati eguali si oppongono rette $k^{(n)}$ eguali: per $0 \leq n \leq 2$ al lato maggiore si oppone la retta $k^{(n)}$ minore; per $0 \leq n \leq 2$ sono vere le reciproche.

Mediante il teorema di Stewart si trova

$$(1) \quad \overline{AA'}^2 = \frac{b^n c^2 + b^2 c^n}{b^n + c^n} - \frac{a^2 b^n c^n}{(b^n + c^n)^2}, \quad \overline{BB'}^2 = \frac{c^n a^2 + c^2 a^n}{c^n + a^n} - \frac{b^2 c^n a^n}{(c^n + a^n)^2}$$

che si possono anche scrivere così:

$$(2) \quad \overline{AA'}^2 = \frac{c^2 + \frac{c^n}{b^{n-2}}}{1 + \frac{c^n}{b^n}} - \frac{a^n b^n c^n}{a^{n-2}(b^n + c^n)^2}, \quad \overline{BB'}^2 = \frac{\frac{c^n}{a^{n-2}} + c^2}{\frac{c^n}{a^n} + 1} - \frac{b^n c^n a^n}{b^{n-2}(c^n + a^n)^2}.$$

Le (1) mostrano che se $a = b$ è $AA' = BB'$ per n qualunque; le (2) mostrano che se $a > b$ è $AA' < BB'$ per ogni valore di n che soddisfa alle $0 \leq n \leq 2$, perchè per questi valori è $a^n \geq b^n$, $b^{n-2} \geq a^{n-2}$, quindi

$$\frac{c^2 + \frac{c^n}{b^{n-2}}}{1 + \frac{c^n}{b^n}} < \frac{\frac{c^n}{a^{n-2}} + c^2}{\frac{c^n}{a^n} + 1}, \qquad \frac{a^n b^n c^n}{a^{n-2}(b^n + c^n)^2} > \frac{b^n c^n a^n}{b^{n-2}(c^n + a^n)^2}.$$

Onde reciprocamente per $0 \leq n \leq 2$ da $AA' = BB'$ deriva $a = b$, e da $AA' < BB'$ deriva $a > b$.

Teorema. — Per n qualunque a lati eguali si oppongono raggi $k^{(n)}$ eguali; per n positivo al lato maggiore si oppone il raggio $k^{(n)}$ minore; per n positivo sono vere le reciproche.

(*) *Periodico*, anno VII, pag. 147 e 187; anno VIII, pag. 31.

Si ha (*)

(3) $AK^{(n)2} = [(b^n + c^n)\, c^n\, b^2 + (b^n + c^n)\, c^2\, b^n - b^n\, c^n\, a^2] \div (a^n + b^n + c^n)^2$

che, ponendo $\Sigma a^n = a^n + b^n + c^n$, $\Sigma a^{n-2}\, b^{n-2} = a^{n-2}\, b^{n-2} + b^{n-2}\, c^{n-2} + c^{n-2}\, a^{n-2}$, si può trasformare così:

$$A\,K^{(n)2} = \frac{b^n\, c^2 + b^2\, c^n}{\Sigma\, a^n} - a^2\, b^2\, c^2\, \frac{\Sigma\, a^{n-2}\, b^{n-2}}{(\Sigma\, a^n)^2}\,.$$

Allo stesso modo

$$B\,K^{(n)2} = \frac{c^n\, a^2 + c^2\, a^n}{\Sigma\, a^n} - a^2\, b^2\, c^2\, \frac{\Sigma\, a^{n-2}\, b^{n-2}}{(\Sigma\, a^n)^2}$$

dalle quali deriva subito il teorema.

Osservazione. — Per n negativo $= - m$ da $a > b$ deriva $A\,K^{(n)} \gtreqless B\,K^{(n)}$ secondochè

$$b^{-m}\, c^2 + b^2\, c^{-m} \gtreqless c^{-m}\, a^2 + c^2\, a^{-m}$$

ossia secondochè

$$c^{m+2} \gtreqless a^m\, b^m\, \frac{a^2 - b^2}{a^m - b^m}\,.$$

Ad esempio per $n = -2$, da $a > b$ deriva $A\,K^{(n)} \gtreqless B\,K^{(n)}$ secondochè $c \gtreqless \sqrt{a\,b}$.

Corollario. — Da $a = b$ deriva ang. $K^{(n)}A\,B = K^{(n)}B\,A$ per n qualunque; da $a > b$ deriva ang. $K^{(n)}AB > K^{(n)}B\,A$ per n positivo; onde per n positivo sono vere le reciproche,

TEOREMA. — Per n qualunque a lati eguali corrispondono rettangoli eguali; per $-2 \leq n \leq 2$ al lato maggiore corrisponde il rettangolo maggiore; per $-2 \leq n \leq 2$ sono vere le reciproche.

Dalla $\dfrac{B\,A'}{A'\,C} = \dfrac{c^n}{b^n}$ componendo si ha $\dfrac{B\,C}{B\,A'} = \dfrac{b^n + c^n}{c^n}$, $\dfrac{B\,C}{A'\,C} = \dfrac{b^n + c^n}{b^n}$, donde

(4) $$B\,A'.\,A'C = \frac{a^2\, b^n\, c^n}{(b^n + c^n)^2} = \frac{a^n\, b^n\, c^n}{a^{n-2}\,(b^n + c^n)^2}\,;$$

e così

$$C\,B'.\,B'A = \frac{b^2\, c^n\, a^n}{(c^n + a^n)^2} = \frac{b^n\, c^n\, a^n}{b^{n-2}\,(c^n + a^n)^2}\,.$$

Dalle quali segue che se $a = b$ è pure $\overline{B\,A'.\,A'C} = \overline{C\,B'.\,B'A}$ per ogni valore di n; e che se $a > b$ è $\overline{B\,A'.\,A'C} > \overline{C\,B'.\,B'A}$ per ogni valore di n che soddisfa alla $0 \leq n \leq 2$, perchè per questi valori è $a^n > b^n$, $b^{n-2} > a^{n-2}$, e quindi anche per ogni valore di n che soddisfa alla $-2 \leq n < 0$ perchè i rettangoli $\overline{B\,A'.\,A'C}$ ecc. non variano mutando n in $-n$.

Perciò sono vere le reciproche per $-2 \leq n \leq 2$.

(*) *Periodico*, anno VIII, pag. 66, formole 6).

Osservazione. — Per $n > 2$ da $a > b$ deriva $BA'.A'C \gtreqless CB'.B'A$ secondochè

$$a^{n-2}(b^n + c^n)^2 \lesseqgtr b^{n-2}(c^n + a^n)^2$$

ossia secondochè

$$a^{\frac{n-2}{2}}(b^n + c^n) \lesseqgtr b^{\frac{n-2}{2}}(c^n + a^n)$$

ossia secondochè

$$c^n \lesseqgtr (ab)^{\frac{n-2}{2}} \frac{a^{\frac{n+2}{2}} - b^{\frac{n+2}{2}}}{a^{\frac{n-2}{2}} - b^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Ad esempio per $n = 4$ è $\overline{BA'.A'C} \gtreqless \overline{CB'.B'A}$ secondochè è

$$c^4 \lesseqgtr ab(a^2 + ab + b^2).$$

Teorema. — Le rette $k^{(n)}$ opposte a lati eguali sono divise in rapporti eguali; la retta $k^{(n)}$ opposta al lato maggiore è divisa nel rapporto minore o maggiore secondochè è $n \gtrless 0$; sono vere le reciproche per n diverso da zero.

Ciò deriva tosto dalle formole

$$(5) \qquad \frac{AK^{(n)}}{K^{(n)}A'} = \frac{b^n + c^n}{a^n}, \qquad \frac{BK^{(n)}}{K^{(n)}B'} = \frac{c^n + a^n}{b^n}.$$

Per $n = 0$ è sempre $\quad \dfrac{AK^{(n)}}{K^{(n)}A'} = \dfrac{BK^{(n)}}{K^{(n)}B'}.$

Proprietà analoghe valgono per i rapporti $\dfrac{AK^{(n)}}{AA'}, \ldots\ldots, \dfrac{AA'}{K^{(n)}A'} \ldots\ldots$

2. Indicando con A'', B'', C'' i punti che dividono i lati BC, CA, AB rispettivamente nei rapporti negativi $-\dfrac{c^n}{b^n}$, $-\dfrac{a^n}{c^n}$, $-\dfrac{b^n}{a^n}$, per le rette AA'', BB'', CC'' i teoremi precedenti non sono più veri in generale.

Noto il seguente caso particolare. Mutando nella prima (1) c^n in $-c^n$, e nella seconda (1) a^n in $-a^n$, si ha

$$(6) \qquad AA''^2 = \frac{b^n c^2 - b^2 c^n}{b^n - c^n} + \frac{a^2 b^n c^n}{(b^n - c^n)^2},$$

$$BB''^2 = \frac{c^n a^2 - c^2 a^n}{c^n - a^n} + \frac{b^2 c^n a^n}{(c^n - a^n)^2}.$$

Per $n = 2$, AA'', BB'', CC'' sono tangenti in A, B, C al cerchio ABC; per esse si ha

$$AA''^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b^2 - c^2)^2}, \qquad BB''^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{(c^2 - a^2)^2};$$

donde se $a = b$ deriva $AA'' = BB''$; se $a > b$ deriva AA'' diverso da BB''

ove sia $c^2 \gtrless \frac{a^2+b^2}{2}$, e $AA''=BB''$ ove sia $c^2=\frac{a^2+b^2}{2}$. Onde si ha reciprocamente:

se due tangenti al circumcircolo (porzioni comprese fra i vertici del triangolo e i lati opposti) sono diseguali, i lati opposti sono diseguali;

se due tangenti al circumcircolo sono eguali o i lati opposti sono eguali, o se no il lato compreso c soddisfa alla relazione $c^2=\frac{a^2+b^2}{2}$.

Osservo a proposito di queste tangenti la proprietà: se ABC è scaleno ed è p. es. $a>b>c$ si ha in valore assoluto

$$AA''=\frac{abc}{b^2-c^2}, \qquad BB''=\frac{abc}{a^2-c^2}, \qquad CC''=\frac{abc}{a^2-b^2},$$

onde

$$\frac{1}{BB''}=\frac{1}{CC''}+\frac{1}{AA''},$$

od anche

$$\overline{CC''}.\overline{AA''}=\overline{AA''}.\overline{BB''}+\overline{BB''}.\overline{CC''}=\overline{BB''}.\overline{CC''}+\overline{AA''}.$$

3. Se nelle formole (1), (3), (4), (5) si muta a in a_1 si hanno le corrispondenti relazioni per un triangolo i cui lati sieno a_1, b, c, e ne risultano chiaramente i seguenti teoremi:

in due triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali e i terzi lati diseguali 1° al lato maggiore si oppone la retta $k^{(n)}$ minore (n qualunque) – 2° al lato maggiore si oppone il raggio $k^{(n)}$ minore (n positivo) – 3° al lato maggiore corrisponde il rettangolo maggiore (n qualunque) – 4° la retta $k^{(n)}$ opposta al lato maggiore è divisa nel rapporto minore o maggiore secondochè $n \gtrless 0$;

reciprocamente in due triangoli che hanno due lati rispettivamente eguali 1° se le rette $k^{(n)}$ opposte ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali, alla maggiore si oppone il lato minore – 2° se i raggi $k^{(n)}$ opposti ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali, al maggiore si oppone il lato minore (n positivo) – 3° se i rettangoli corrispondenti ai terzi lati sono eguali, questi sono eguali; e se sono diseguali al maggiore corrisponde il lato maggiore – 4° se le rette $k^{(n)}$ opposte ai terzi lati sono divise nello stesso rapporto ($n \gtrless 0$), questi lati sono eguali, e se sono divise in rapporti diseguali è maggiore il lato opposto a quella divisa nel rapporto minore o il lato opposto a quella divisa nel rapporto maggiore secondochè $n \gtrless 0$.

A risultati analoghi si giunge considerando le rette che dividono a, a_1 nei rapporti negativi delle potenze n^{me} dei lati adiacenti.

F. Ferrari.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
150^{**}, 152^{**}, 155^{*}, 156^{**}, 157^{**}, 160^{**}, 162^{*}, 163^{*} e 164^{*}

150.** *Determinare un triangolo sferico equilatero, la cui superficie sia il complemento del suo perimetro.* (G. BELLACCHI).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Siano A, a l'angolo e il lato di questo triangolo, si ha

$$3A - \pi = \frac{\pi}{2} - 3a \qquad \text{donde} \qquad A + a = \frac{\pi}{2}. \qquad [1]$$

Ma è noto che nel triangolo ABC

$$\cos b \cos C = \cot a \operatorname{sen} b - \cot A \operatorname{sen} C;$$

le quantità a, A verificano perciò l'equazione $\cos x \operatorname{sen} x = \pm(\cos x - \operatorname{sen} x)$; od anche, elevando i due membri al quadrato

$$\operatorname{sen}^2 2x + 4 \operatorname{sen} 2x - 4 = 0. \qquad [2]$$

L'unica radice accettabile di quest'equazione è

$$\operatorname{sen} 2x = -2 + \sqrt{8} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} 2x = 4\sqrt{2} \,.\, \operatorname{sen}^2 22^\circ\, 30'.$$

Si trova, dalle tavole delle funzioni circolari, che $2x = 55^\circ\, 56'\, 15''$ o $124^\circ\, 3'\, 45''$ e così

$$a = 27^\circ\, 58'\, 7'',5 \qquad \text{e} \qquad A = 62^\circ\, 1'\, 52'',5.$$

La soluzione $A = 27^\circ\, 58'\, 7'',5$ con $a = 62^\circ\, 1'\, 52'',5$ non può essere accettata perchè $3A$ dev'essere compreso fra 2 e 6 retti.

152.** *Dati gli angoli di un triangolo sferico* ABC, *determinare l'arco* AD *verificante la relazione*

$$\operatorname{sen}^2 \mathrm{AD} = \operatorname{sen} \mathrm{BD} \,.\, \operatorname{sen} \mathrm{DC},$$

cercando in quali casi è possibile. (G. BELLACCHI).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Indichiamo con α l'angolo BAD e con β l'angolo CAD, si ha, nel triangolo BAD, $\operatorname{sen} AD : \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} BD : \operatorname{sen}\alpha$, e nel triangolo CAD, $\operatorname{sen} AD : \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} CD : \operatorname{sen}\beta$.

Moltiplicando queste relazioni membro a membro e tenendo conto dell'ipotesi $\operatorname{sen}^2 AD = \operatorname{sen} BD \,.\, \operatorname{sen} CD$, risulta

$$\operatorname{sen}\alpha \,.\, \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \qquad \text{o} \qquad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$$

Casi differenti da considerare:

1.° L'arco AD è nell'angolo BAC; in questo caso $\alpha + \beta = A$ e gli angoli α, β, e in conseguenza la posizione di AD, sono determinati dalle due equazioni

$$\alpha + \beta = A, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Perchè l'arco AD esista è necessario e sufficiente che la seconda equazione dia $|\alpha - \beta| < A$; ciò avrà luogo se

$$-1 \leqq \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, si troveranno per $\alpha - \beta$ due valori uguali e di segno contrario, vi saranno quindi due archi AD soddisfacenti alla quistione, simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo A.

2.° Essendo C_1 il secondo vertice del fuso C, l'arco AD cada nell'angolo C_1AB. In questo caso $\beta - \alpha = A$ e si ha da considerare il sistema

$$\beta - \alpha = A, \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza dell'arco AD sono

$$-1 \leqq \cos A - 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1$$

poichè se queste condizioni sono soddisfatte, la seconda equazione darà per $\alpha + \beta$ un valore maggiore di A. Il problema non avrà che una sola soluzione, poichè il valore negativo di $\alpha + \beta$ dovrà esser messo in disparte.

3.° Il punto B_1 essendo il secondo vertice del fuso B, sia l'arco AD nell'angolo CAB_1. I valori di α e β son quelli trovati per β e per α nel secondo caso. Essi determinano quindi un arco di cerchio massimo simmetrico dell'arco trovato nell'angolo BAC_1 rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC.

4.° L'arco AD cada entro l'angolo B_1AC_1. In questo caso il sistema a risolvere è

$$\alpha + \beta = 2\pi - A, \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C.$$

Qui, come nel primo caso, si deve avere $|\alpha - \beta| < A$, ciò che richiede che si abbia

$$-1 \leqq \cos A + 2 \operatorname{sen} B \,.\, \operatorname{sen} C \leqq 1.$$

Se queste condizioni sono soddisfatte, si troveranno due archi AD simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC. Inoltre questi archi si troveranno nel prolungamento degli archi trovati nel 1° caso, ciò che d'altronde era prevedibile poichè la relazione $\operatorname{sen}^2 AD = \operatorname{sen} BD \,.\, \operatorname{sen} CD$ non è alterata sostituendo agli archi AD, BD, DC i loro supplementari.

Le condizioni di possibilità trovate nei diversi casi non sono contradditorie poichè addizionandole membro a membro dànno

$$-1 \leqq \cos A \leqq 1.$$

Ne risulta che il problema può ammettere otto soluzioni, quattro, due o nessuna.

155*. *Dato il triangolo* ABC *e le rette* AH, BH, CH *passanti per lo stesso punto* H, *inscrivere in* ABC *un triangolo* A′B′C′ *in modo che* A′ *cada in* BC, B′ *in* CA, C′ *in* AB, *ed i lati* B′C′, C′A′, A′B′ *siano bisecati rispettivamente da* AH, BH, CH.

Dimostrare poi che le rette AA′, BB′, CC′ *passano per uno stesso punto.*

(L. Merante).

Risposta della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

1.° I segmenti limitati ai lati dell'angolo BAC e che AH divide per metà, sono paralleli alla direzione α, coniugata armonica di AH nell'angolo BAC. Si è quindi condotti ad inscrivere in ABC un triangolo $A'B'C'$ i cui lati sono rispettivamente paralleli a tre direzioni date α, β, γ. La soluzione di questo problema è nota; si conduce, nell'angolo BAC, la retta $B''C''$ parallela ad α e si compie il triangolo $A''B''C''$ i cui lati $A''C''$, $A''B''$ sono paralleli alle direzioni β, γ. La retta $A''A$ determina su BC il vertice A', determinato A' si ha immediatamente B' e C'.

2.° Le rette AH, BH, CH passano per i centri dei lati del triangolo $A'B'C'$, H è il centro della conica circoscritta ad $A'B'C'$ ed inscritta in ABC; allora le rette AA', BB', CC' si tagliano in uno stesso punto.

Si può dimostrare questo teorema indipendentemente dalla teoria delle coniche. Se A_1 è il punto d'intersezione delle rette $B'C'$, BC, A_1 è su BC il coniugato armonico di A'; allora pel teorema di Menelao si ha

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{BC'.B'A}{CB'.AC'} \quad \text{da cui} \quad \frac{A'B.CB'.AC'}{A'C.BC'.B'A} = 1$$

la quale eguaglianza prova, come si sa, che le rette AA', BB', CC' sono concorrenti.

156.** *Se in un triangolo* ABC *è inscritto un triangolo* A′B′C′ *tale che le rette* AA′, BB′, CC′ *passino per uno stesso punto, le simediane dei triangoli* AC′B′, BA′C′, CB′A′, *corrispondenti ai lati* C′B′, A′C′, B′A′, *passeranno per uno stesso punto; e viceversa se nei triangoli* AC′B′, BA′C′, CB′A′ *le simediane corrispondenti ai lati* C′B′, A′C′, B′A′ *concorrono in uno stesso punto, anche le rette* AA′, BB′, CC′ *passeranno per uno stesso punto.*

(L. Merante).

Prima dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Conducasi AA'' antiparallela a $B'C'$ nell'angolo ABC a tagliare BC in A'' e altrettanto facciasi pei vertici B e C; si sa che AA'' è, rispetto all'angolo ABC, la coniugata armonica della simediana tirata da A nel triangolo $C'AB'$. Se le simediane considerate nell'enunciato sono concorrenti, i tre punti A'', B'', C'' sono in linea retta e reciprocamente. Ora i triangoli $A''AB$, $A''AC$ dànno

$$\frac{A''B}{A''A} = \frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} B}, \qquad \frac{A''A}{A''C} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A''AC};$$

se ne ricava

$$\frac{A''B}{A''C} = \frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} A''AC} \cdot \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}.$$

Ma

$$\frac{\operatorname{sen} A''AB}{\operatorname{sen} A''AC} = \frac{\operatorname{sen} AB'C'}{\operatorname{sen} AC'B'} = \frac{AC'}{AB'} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} = \frac{AB}{AC},$$

si ha dunque $\frac{A''B}{A''C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC'}{AB'}$; analogamente si trova $\frac{B''C}{B''A} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA'}{BC'}$ e $\frac{C''A}{C''B} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB'}{CA'}$. Ne risulta che

$$\frac{A''B \,.\, B''C \,.\, C''A}{A''C \,.\, B''A \,.\, C''B} = \frac{AC' \,.\, BA' \,.\, CB'}{AB' \,.\, BC' \,.\, CA'}$$

e così, se i punti A'', B'', C'' sono in linea retta, le rette AA', BB', CC' concorrono e reciprocamente.

Seconda dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Le rette AA', BB', CC' essendo concorrenti, le congiungenti i vertici di ABC coi punti medi dei lati di $A'B'C'$ concorrono nel centro P della conica tangente in A', B', C' ai lati del triangolo ABC. Allora le simediane considerate nell'enunciato si tagliano nel punto P' che nel triangolo ABC è il coniugato isogonale di P.

Dimostrazione del Sig. *E. de Vito*, studente nella R. Università di Roma.

Siano AD, BE, CF le simediane dei triangoli $AC'B'$, $BA'C'$, $CB'A'$ intersecanti i lati opposti ad A, B, C rispettivamente in D', E', F'. Si ha

$$\frac{BD'}{\operatorname{sen} BAD'} = \frac{AB}{\operatorname{sen} AD'B}, \qquad \frac{C'D}{\operatorname{sen} BAD'} = \frac{AC'}{\operatorname{sen} C'DA},$$
$$\frac{CD'}{\operatorname{sen} CAD'} = \frac{AC}{\operatorname{sen} AD'C}, \qquad \frac{B'D}{\operatorname{sen} CAD'} = \frac{AB'}{\operatorname{sen} ADB'}$$

da cui, dividendo membro a membro la prima e seconda eguaglianza e la terza e quarta, ricavasi

$$\frac{BD'}{C'D} = \frac{AB}{AC'} \cdot \frac{\operatorname{sen} C'DA}{\operatorname{sen} AD'B}, \qquad \frac{CD'}{B'D} = \frac{AC}{AB'} \cdot \frac{\operatorname{sen} ADB'}{\operatorname{sen} AD'C},$$

e da queste, nuovamente dividendo membro a membro, deducesi $\frac{BD' \,.\, B'D}{C'D \,.\, CD'} = \frac{AB \,.\, AB'}{AC' \,.\, AC}$. Ora, per la nota proprietà delle simediane che $\frac{B'D}{C'D} = \frac{\overline{AB'}^2}{\overline{AC'}^2}$, l'ultima relazione diviene

$$\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC'}{AB'}.$$

In modo analogo si deduce

$$\frac{CE'}{AE'} = \frac{BC}{BA} \cdot \frac{BA'}{BC'}, \qquad \frac{AF'}{BF'} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB'}{CA'}.$$

Moltiplicando membro a membro le tre ultime relazioni si ottiene

$$\frac{BD'}{CD'} \cdot \frac{CE'}{AE'} \cdot \frac{AF'}{BF'} = \frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'}$$

da cui segue che se le simediane considerate nell'enunciato concorrono nello stesso punto altrettanto avviene per le rette AA', BB', CC' e viceversa.

157.** *Se in un triangolo* A B C *i punti* H′, H″ *sono coniugati isogonali ed in esso s' inscrivono due triangoli* A′B′C′, A″B″C″ *tali che i lati* A′B′, B′C′, C′A′; A″B″, B″C″, C″A″ *siano bisecati rispettivamente dalle rette* CH′, AH′, BH′; CH″, AH″, BH″, *i sei punti* A′, B′, C′, A″, B″, C″ *appartengono ad uno stesso cerchio e ciascuno dei detti triangoli è prospettivo al triangolo* A B C. (L. MERANTE).

Dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Sia dato soltanto il punto H e si costruisca il triangolo $A'B'C'$ che gli corrisponde; si sa (quistione 155) che questo triangolo è prospettivo al triangolo ABC. Sia $A''B''C''$ il triangolo formato coi secondi punti d'intersezione del circolo circoscritto ad $A'B'C'$ coi lati di ABC. Le rette $B'C'$, $B''C''$ sono antiparallele nell'angolo A, AH' è perciò una delle simediane del triangolo $B''AC''$ e la mediana corrispondente è simmetrica di AH' rispetto alla bisettrice dell'angolo BAC. Si vede da ciò che le rette AH'', BH'', CH'', condotte dai vertici di ABC ai centri dei lati di $A''B''C''$, passano per il punto H'' coniugato isogonale di H' nel triangolo ABC.

160.** *Risolvere l'equazione*

$$x^6 - 3 = 3x^2(2x^2 - 3).$$

(F. GIUDICE).

Risoluzioni analoghe dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Sigg. Prof. *V. Sferra* e *F. Mariantoni*.

Ponendo $y = x^2$, quest'equazione diviene

$$y^3 - 6y^2 + 9y - 3 = 0$$

o

$$(y-2)^3 - 3(y-2) - 1 = 0 \qquad [1].$$

La [1] ha le tre radici reali poichè il suo primo membro muta segno da $y - 2 = -1$ ad $y - 2 = 0$ e da $y - 2 = \sqrt{3}$ ad $y - 2 = 2$, essa appartiene quindi al caso irreducibile delle equazioni cubiche. Per risolverla facciasi $y - 2 = 2\cos z$; si è così condotti all'equazione

$$8\cos^3 z - 6\cos z - 1 = 0,$$

che dà $\cos 3z = \frac{1}{2}$, poichè $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$.

Allora $3z = \pm 60^0 + k \, . \, 360^0$ ed y può prendere i tre valori $y_1 = 2(1 + \cos 20^0) = 4\cos^2 10^0$, $y_2 = 2(1 + \cos 140^0) = 4\cos^2 70^0$, $y_3 = 2(1 + \cos 260^0) = 4\cos^2 50^0$, donde i sei valori di x:

$$x_1 = \pm 2\cos 10^0, \qquad x_2 = \pm 2\cos 70^0, \qquad x_3 = \pm 2\cos 50^0$$

o

$$x_1 = \pm 1{,}96961, \qquad x_2 = \pm 0{,}68404, \qquad x_3 = \pm 1{,}28557,$$

162*. *In un cono obliquo detta α l'inclinazione della retta centrale* OV = l *sulla base circolare* OMA, *ed* ω *l'angolo del raggio* OM = r *di questa con la proiezione della* OV, *provare che la generatrice* g = VM *fa con la tangente* MT *alla circonferenza* OM *l'angolo* θ *determinato per la formola* $\cos\theta = \frac{l}{g} \cos\alpha \operatorname{sen}\omega$.

(G. Bellacchi).

Risposta dei Sigg. *R. Scozzari*, alunno dei R. Istituto tecnico di Girgenti; *U. Gerra* e *Mazza*, alunni del R. Istituto tecnico di Piacenza; *E. de Vito*, studente a Roma e della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Sia B la proiezione di V sul piano della base del cono e C la proiezione di B su MT, indicando T il punto in cui la tangente in M alla circonferenza OM incontra OB. Per un noto teorema C sarà pure la proiezione di V sopra MT e poichè finalmente M è la proiezione di O sulla stessa MT, si avrà ad un tempo dal triangolo VMC e da quello che risulta tirando per O una parallela ad MC ad incontrare CB:

$$MC = VM \cos VMC = g \cos\theta \quad \text{e} \quad MC = OB \cos OTM = OB \operatorname{sen}\omega.$$

Di qui, uguagliando, si ricava $OB = g\cos\theta : \operatorname{sen}\omega$; ma dal triangolo VOB si ha anche $OB = OV \cos VOB = l\cos\alpha$, perciò infine

$$g\cos\theta = l\cos\alpha \operatorname{sen}\omega.$$

163*. *Dimostrare che l'equazione*

$$x^2 - 168921\, y^2 = 382291$$

ammette una soluzione in numeri interi e positivi. Qual' è questa soluzione?

(A. Tagiuri).

Soluzione identica dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles e dal Sig. *M. Piattelli*, alunno del R. Liceo di Bari.

L'equazione data può scriversi

$$(x - 411\,y) \,.\, (x + 411\,y) = 7 \,.\, 13 \,.\, 4201$$

e poichè 4201 è un numero primo, bisogna considerare soltanto i tre sistemi

$$\begin{cases} x - 411y = 7 \\ x + 411y = 54613, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 411y = 13 \\ x + 411y = 29407, \end{cases} \quad \begin{cases} x - 411y = 91 \\ x + 411y = 4201 \end{cases}$$

poichè gli altri sistemi darebbero $x + 411\,y < 411$.

Il terzo di questi sistemi è il solo che ametta soluzioni intere e queste sono;

$$x = 2146 \qquad \text{e} \qquad y = 5.$$

164*. *Nella serie* $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ *si ha per* $n \geqq 2$

$$x_n = h x_{n-1} + l.$$

Dato il valore a_r *di* x_r *esprimere* x_n *per mezzo di* h, l, n, a_r.

(A. Tagiuri).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Le $n-r$ relazioni

$$\begin{aligned} x_n &= h\,x_{n-1}+l, \\ x_{n-1} &= h\,x_{n-2}+l, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+2} &= h\,x_{r+1}+l, \\ x_{r+1} &= h\,a_r \quad +l \end{aligned}$$

moltiplicate rispettivamente per $1, h, h^2, \ldots . h^{n-r-1}$, poi addizionate membro a membro, dànno

$$x_n = h^{n-r}\,a_r + l\,\frac{h^{n-r}-1}{h-1}. \qquad [1]$$

Questa formola suppone però $n > r$; per dedurre quella relativa al caso di $n < r$, permutiamovi le lettere n, r, cambiamo a_n in x_n ed x_r in a_r. Avremo così

$$x_n = a_r\,h^{-(r-n)} - l\,\frac{1-h^{-(r-n)}}{h-1}.$$

Ora questa relazione è identica alla [1], la quale è perciò applicabile in tutti i casi, anche per $r=n$, poichè, allora, essa riducesi ad $x_r = a_r$. (*).

Risposte a quistioni alle quali rimane a dare evasione. Quistione **159** dal Sig. *S. Catania, E. de Vito, F. Mariantoni;* **165****. *M. Piattelli,* M.me *F. Prime, R. Scozzari, V. Sferra;* **166***. M.me *F. Prime;* **167***. *U. Ceretti, G. Pucciano, G. Tirella;* **168****. *E. de Vito, F. Mariantoni,* M.me *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella;* **169***. *B. Armano, E. de Vito, U. Gerra, E. Lugaro, G. Mazza,* M.me *F. Prime, R. Scozzari, G. Tirella;* **170****. *V. Correnti, E. de Vito, F. Mariantoni, M. Piattelli,* M.me *F. Prime;* **172***. *B. Armano;* **173****. *U. Ceretti,* M.me *F. Prime;* **175****. M.me *F. Prime;* **176****. *U. Ceretti,* M.me *F. Prime;* **177****. M.me *F. Prime, G. Santacroce, G. Tirella;* **178***. M.me *F. Prime;* **179***. M.me *F. Prime, G. Tirella.*

QUISTIONI PROPOSTE (**)

180**. Data la somma 2σ (o la differenza 2δ) dei lati di due triangoli sferici equilateri e polari fra loro, determinarli.

G. Bellacchi.

(*) Soluzione analoga dal Sig. *E. de Vito*, studente nella R. Università di Roma. — Un'altra soluzione mandata dal Sig. *R. Scozzari* verrà pubblicata nel fas. 1, 1894.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

181*. Se due tangenti BA, BC di un cerchio si tagliano in B ad angolo retto e la parallela a BC, condotta pel punto medio della corda AC dei punti di contatto, sega il cerchio in E ed F, le rette AE, AF incontrano la tangente BC ed il suo prolungamento in due punti G, H tali che

$$\overline{CG}^2 = 2BC.GB \qquad , \qquad \overline{HC}^2 = 2BC.HB.$$

G. PUCCIANO.

182*. Di due numeri reali e positivi x e y è data la somma m^2 dei quadrati, e quella k dei rapporti $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$; trovare questi numeri e discutere i risultati.

183*. Si conosce la somma a delle tangenti di due archi x e y, e la tangente b della somma degli archi stessi. Trovare questi archi, discutere i risultati, e farne una applicazione numerica al caso di $a = 3$, $b = 4$ (*).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. HUMBERT. — *Traité d'arithmétique avec des complements.* Paris, Librairie Nony et C^{ie}, 1893. Prix: 5 fr..

Di questo libro, che porta una dotta e brillante prefazione del Sig. J. Tannery, già si occuparono con parole di non comune encomio parecchi periodici stranieri. Io pure reputo opportuno dirne motto, persuaso di far cosa utile ai lettori di questo giornale che non ne conoscessero l'esistenza o la sostanza.

Per ciò che riguarda la parte sostanziale si tratta di un libro d'aritmetica redatto con molto rigore e da considerarsi completo in quanto vi figurano oltre alle nozioni sui numeri, alle quattro operazioni su di essi, alle ordinarie proprietà dei numeri primi e composti, alle teoriche del m. c. d. e del m. c. m., alle proprietà dei numeri frazionari e decimali, anche le estrazioni delle radici quadrata e cubica, le proprietà e le operazioni sui numeri irrazionali, i rapporti e le proporzioni, le regole del tre d'interesse, ecc., l'esposizione del sistema metrico decimale e una succinta teoria degli errori. Alla fine delle diverse teoriche trovansi esercizi in buon numero e l'A. ha voluto giustamente dedicare pure un capitolo allo svolgimento di alcuni problemi e teoremi interessanti.

Ma se è un pregio del libro la lucida e rigorosa esposizione dell'A. per le ordinarie teoriche dall'aritmetica, maggior pregio per me è quello d'averlo arric-

(*) Le quistioni 182* e 183* sono i temi di matematica dati nell'ottobre per la licenza dagli Istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*.

chito di complementi in cui, per la maggior parte, sono sviluppate, con altrettanta chiarezza e precisione, le proprietà dei numeri che servono d'introduzione a quella che è chiamata *teoria dei numeri* e sarebbe forse meglio designare col nome d'*aritmetica superiore*, cosicchè l'opera del sig. prof. Humbert servirà molto opportunamente e in modo facile a coloro che vogliono riandare sul passato per chiarir meglio concetti che un primo studio non illumina mai abbastanza od iniziarsi nelle teorie complementari dell'aritmetica senza ricorrere alle opere sistematiche sull'argomento, o ricorrendovi solo più tardi: quindi assai bene ai giovani delle classi superiori delle nostre scuole secondarie o delle prime classi delle Università. Gli argomenti svolti in tali complementi e che mette conto riportare sono: Numeri interi negativi e loro proprietà - Somme algebriche - Prodotto di due numeri interi positivi o negativi - Moltiplicazione di una somma algebrica per un numero intero positivo e negativo - Moltiplicazione di due somme algebriche - Divisione di due numeri interi positivi o negativi - Qualche proprietà relativa alle somme algebriche - Osservazioni sulle uguaglianze - Sistemi di numerazione - Resti negativi - Resti dei numeri negativi - Carattere di divisibilità per 7 - Carattere di divisibilità per un numero qualunque positivo A - Carattere di divisibilità in un sistema di numerazione qualunque - Resti delle potenze d'un numero, relativi ad un modulo primo dato - Esponente al quale appartiene un numero rispetto ad un modulo primo p - Teorema di Fermat - Calcolo dei resti ottenuti nella ricerca del m. c. d. di due numeri, in funzione di questi numeri - Uso dell'uguaglianza $\pm\,\delta = bu - av$ - Risoluzione dell'equazione $ax + by = c$ in numeri interi - Numeri congrui od equivalenti - Idea delle congruenze intere - Caratteri di divisibilità - Congruenze di primo grado - Teorema di Fermat - Numeri associati rispetto ad un modulo primo p - Teorema di Wilson - Sul numero dei numeri primi con un numero dato e non superiori a questo numero - Numeri frazionari negativi - Insieme dei numeri razionali - Ineguaglianze - Resti delle potenze d'un numero a rispetto ad un modulo qualunque b, primo con esso - Teorema di Fermat generalizzato - Numero dei termini del periodo dello sviluppo d'un numero frazionario in decimale - Residui e non residui quadratici - Residui dei moduli primi - Del residuo -1. Residuo minimo - Criterio d'Eulero e di Gauss - Teorema di Bachet - Numeri irrazionali negativi - Segmenti - Rappresentazione dei numeri mediante segmenti - Differenza fondamentale esistente fra l'insieme dei numeri razionali e l'insieme totale dei numeri - Eguaglianze - Ineguaglianze.

In causa dello spazio limitato in cui sono costretto a tenere questa rivista, osserverò solo che l'A. ha rispettato la consuetudine svolgendo la numerazione in principio del libro, ha premesso i processi per effettuare le prime quattro operazioni allo svolgimento *sistematico* delle proprietà inerenti alle medesime ed ha ricorso con qualche frequenza a rappresentazioni segmentarie (frazioni e numeri irrazionali). Si potrebbe a questo proposito obbiettare, volendo fare della critica ad ogni costo, che in un libro di aritmetica rigorosa: 1° la numerazione, come ne è stato dato esempio in due opere recenti pubblicate fra noi (*), ha la

(*) E. Sadun e C. Soschino: *Lezioni d'aritmetica.* — C. Burali Forti: *Aritmetica razionale.*

sua vera sede dopo l'esposizione delle proprietà inerenti alle quattro prime operazioni, che le servono di fondamento; 2° che i processi di operazioni sono la traduzione pratica di proprietà relative alle medesime e completano queste proprietà; 3° che ciascuna teoria per essere stabilita senza eccezione non dovrebbe valersi di enti estranei alla propria natura, ma conviene pur considerare che la scuola ha delle esigenze alle quali non è dato impunemente di venir meno.

La teoria dei numeri irrazionali è sviluppata ampiamente e con eccezionale scrupolosità d'esattezza e l'A. non manca di mostrare come *si potrebbe fare a meno del concetto di lunghezza* per stabilirla, valendosi d'operazioni effettuate su numeri razionali, continuate senza fine. A. Lugli.

Dott. RODOLFO BETTAZZI. — *La risoluzione dei problemi numerici e geometrici.* Ditta G. B. Paravia e Comp., 1893. — Prezzo: L. 2.

L'operetta, oggettivamente considerata, fa buona compagnia agli altri noti lavori del valente autore. E sebbene questi dichiari nella prefazione di aver tratto partito dalle opere congeneri del Serret, del Duhamel, del Petersen e di altri, pure gli è dovuta lode per molte novità di sostanza e di forma, tutte confacenti allo scopo del libro, che è il guidare gli studenti dei Licei e degli Istituti tecnici nella risoluzione dei problemi di matematica. Quanto alla ragione didascalica dell'opera, è fuor di dubbio che un professore di matematica, cui piacesse seguire l'usanza del Bettazzi, e distribuire la materia dei programmi così, da potersi soffermare a mezzo il corso liceale, per costituire in piccol corpo di dottrina metodi ed accorgimenti già noti ai suoi discepoli, per l'uso fattone in questioni particolari, troverebbe nel libro del nostro autore la miglior guida per il suo ufficio. Gli scolari poi, avrebbero nel libro medesimo un epilogo delle lezioni di metodo udite dal professore, epilogo che invano cercherebbero negli ordinarî trattati scolastici. Un solo consiglio mi fo lecito di dare all'autore: che cioè, quando ristamperà il lavoro, asperga ancora più « di soave licor gli orli del vaso » confortando a più brevi intervalli le teorie generali con esempî illustrativi: amerei anzi che appunto da questi s'incominciasse il libro. La parte prima, generale ed astratta quanto l'argomento suo comporta, sarebbe così framezzata da qualche riposo o diletto pei giovani. Inoltre alcune frasi ostiche ai principianti, come quella di « problema conseguenza di un altro », otterrebbero la spiegazione che domandano: e finalmente questa egregia pubblicazione, mentre non fallirebbe a nessuno degli scopi particolari che l'autore si è prefisso, conseguirebbe ad esuberanza il più arduo: quello cioè di spianare la via ai giovinetti che, per inveterato pregiudizio, si credessero negati alle scienze matematiche. Giovanni Frattini.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico.

Arzelà (C.) e Ingrami (G.) — *Aritmetica razionale* ad uso delle Scuole secondarie. Bologna, N. Zanichelli, 1894. — Prezzo: L. 3.

Cesàro (E.) — Su talune erronee « riflessioni » del Prof. Arminio Nobile. (Rivista di matematica, Anno III, 1893).

de Galdeano (Z. G.) — El Congreso de Besanzon (Diario de Avisos, agosto 1893).

Garbieri (G). — Sulla teoria della eliminazione fra due equazioni (Atti Acc. Gioenia di Scien. Nat. in Catania, Vol. VI, Serie 4ª, 1893).

Guccia (G. B.) — Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche piane, dotati di singolarità ordinarie (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VII, 1893).

— — Una definizione sintetica delle curve polari (idem, idem).

Loria (G.) — Le scienze esatte nell'antica Grecia. Libro I. I geometri precursori di Euclide; pp. 168 con 2 tav. (Memorie R. Acc. Scienze, Lett ed Arti di Modena, Vol. X, serie II, 1893).

Marotta (G.) — Grandezze proporzionali e regole del tre. Acireale, Tip. V Micale, 1893.

Matteucci (A.) — Strumenti ottici (Enciclopedia delle Arti e Industrie, 1893).

Riboni (G.) — *Elementi di geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori. Bologna, N. Zanichelli, 1894 — Prezzo: L. 3.

Sadun (E.) — Alcune proprietà dei coefficienti polinomiali dedotte dalla divisibilità di vari polinomi per $x^m + a\,x^{m-1} + a^2\,x^{m-2} + \ldots + a^{m-1}\,x + a^m$ (Giorn. di Matematiche di Battaglini, Vol. XXXI, 1893).

Vivanti (G.) — Sulle serie di potenze (Estratto d'una lettera al Prof. S. Pincherle) (Annali di matematica. Serie II. tomo XXI).

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 7. N. 3. — Stockholm, 1893.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. — Huitième année. N. 1. Octobre, 1893. Félix Alcan, éditeur. Paris.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y aplicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año III, N. 32-33. Septiembre-Octubre de 1893 — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXXI. Maggio e Giugno 1893. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4ᵉ Série, XVII année. N. 3-9, Mars-Octobre, 1893. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 17ᵉ année. N. 12-20. 18ᵉ année. N. 1, 2, 3 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17, rue des Écoles, 1893.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome III. Mars-Octobre, 1893. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VII, Fasc. I, II, III-IV e V, Gennaio-Ottobre 1893.

Rendiconto dell'Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli. — Serie 2ª; Vol. VII, Fasc. 3° a 7°. Marzo a Luglio 1893.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. Niewenglowski. 3ᵉ année. N. 6-12, Mars-Septembre 1893. 4ᵉ année. N. 1, Octobre 1893 — Paris, Librairie Nony et C.ie, 17, rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. Peano. Vol. III, Fasc. 4° a 10°. Aprile ad Ottobre 1893.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. Hoffmann. XXIV Jahrgang: 2, 3, 4, 5, 6-7 Heft, 1893. — Leipzig, G. B. Teubner.

Chiusura della redazione il dì 8 novembre 1893.