nella congruenza dei due poligoni α e β, intieramente fuori la parte comune stessa; e reciprocamente: se avviene che l'ultima delle particelle di γ trovi la sua corrispondente, nell'uno o nell'altro poligono, intieramente fuori della parte comune, l'operazione di suddivisione finisce. L'ipotesi adunque che il numero di tali operazioni sia infinito equivale ad ammettere che non esista particella della intera parte comune ai due poligoni che, nella congruenza dei poligoni medesimi, si stacchi da se stessa, e quindi anche dalla parte comune. La qual cosa non può evidentemente accadere che quando i due poligoni, invece d'essere in parte sovrapposti, sono totalmente sovrapposti; e questo è in assoluta contraddizione coll'enunciato del teorema. Tutto ciò prova, che quello che nel primo libro il Sig. Biasi dice essere succintamente dimostrato, sta bene anche a quel modo. Del resto, se quando fu stampato il primo libro d'Euclide io non volli entrare in particolari a proposito delle nuove dimostrazioni che aggiungevo, ciò fu perchè l'indole del libro stesso non li comportava. E valga a renderlo più manifesto ciò che segue.

Allorchè si tratta di poligoni direttamente uguali, io determino il numero delle operazioni di suddivisione distinguendo i due seguenti casi: 1° i due poligoni α e β si sovrappongono l'uno all'altro con un movimento di traslazione; 2° i due poligoni si sovrappongono con un movimento di rotazione. Nel primo caso è chiaro che i punti d'un poligono per venire a sovrapporsi ai loro corrispondenti nell'altro poligono percorrono segmenti uguali; denoterò con A uno di tali segmenti. Inoltre fra tutti i segmenti paralleli alla direzione del movimento che si possono tracciare nella parte comune γ, ve ne sarà uno *massimo* che chiamerò B. Or bene, il numero delle operazioni domandato è quello stesso che indica quante volte bisogna ripetere A per superare immediatamente B. L'esempio che ho posto nel primo libro a pag. 68 conferma pienamente questa regola. A quell'esempio è facile aggiungerne altri prendendo a considerare anche poligoni concavi.

Nel secondo caso, quando cioè i due poligoni ruotano intorno ad un centro, abbiamo un fatto analogo. I punti d'un poligono si sovrappongono ai loro corrispondenti nell'altro poligono descrivendo archi, i quali corrispondono ad angoli uguali col vertice nel centro di rotazione; denoterò con A uno di tali angoli. Intanto fra tutti gli archi che si potranno tracciare nella parte comune γ col centro nel centro stesso di rotazione, ve ne sarà uno che corrisponde ad un angolo *massimo*; tale angolo chiamerò B. Anche questa volta il numero delle operazioni domandate è quello stesso che indica quante volte bisogna ripetere A per superare immediatamente B. Ciò si verifica assai facilmente considerando p. es. due posizioni differenti di uno stesso triangolo, che ruota attorno ad uno dei suoi vertici.

A questo punto il Prof. Biasi distingue il caso che il centro di rotazione sia interno ai poligoni, da quello in cui il centro stesso è esterno; e afferma che nel primo caso, e *quando l'angolo di rotazione* (ch'io ho chiamato A) è *incommensurabile con quattro retti*, il numero delle operazioni è infinito. Ciò non è vero. Perocchè, quando il centro di rotazione è interno, la sola differenza da quando esso è esterno sta in ciò che l'angolo massimo B può superare quattro retti, oppure otto retti, oppure dodici retti,..... insomma allora B è della forma $4m\frac{\pi}{2}+B'$, dove m è un numero intero e B' è inferiore a quattro retti. Ma qualunque esso sia è certo che si potrà ripetere A tante volte fino ad ottenere un angolo superiore a B; e però il numero delle operazioni è in ogni caso finito, e dipende dal Postulato d'Archimede, come io avevo già dichiarato nella seconda risposta al prof. Lazzeri. Ma l'egregio critico non ha creduto tener conto di ciò, com'era opportuno di fare.

Il Prof. Biasi sbaglia poi quando limita l'idea di angolo a quattro retti, confrontando l'angolo A di rotazione con quattro retti e distinguendo la commensurabilità dall'incommensurabilità di questi due angoli. Egli sbaglia quando dice che la parte corrispondente a se stessa, tanto nella congruenza dei due poligoni come nella loro posizione primitiva, è un circolo, « il cui centro è il centro di rotazione e il cui raggio è la distanza di questo centro dai punti più vicini del contorno dei poligoni » perchè tal parte è invece un poligono regolare avente il centro nel centro di rotazione. E sbaglia anche quando afferma che le parti non comuni ai poligoni hanno per limite due figure (nulle) corrispondenti l'una all'altra nella congruenza; perchè se tali figure (nulle) *o punti limiti* esistessero, essi dovrebbero corrispondere a se stessi, e si ritornerebbe a quello che dicevo in principio cioè: che i due poligoni sarebbero totalmente sovrapposti, avendo fra loro corrispondenti, tanto nella congruenza, come nella posizione primitiva, il centro di rotazione e i due punti limiti suddetti. Che poi il numero delle operazioni sia infinito solamente quando i poligoni sono sovrapposti, è anche confermato dal fatto che le operazioni di suddivisione crescono a misura che i due poligoni tendono a sovrapporsi, ossia a misura che la grandezza B cresce e l'altra grandezza A decresce.

Mi risparmierò ora di entrare in particolari relativamente alla convessità e concavità dei due poligoni dati e della loro parte comune, bastando per la completa difesa del libro ch'io faccia avvertire, che in esso si considerano solamente poligoni convessi. Ad avvalorare poi l'importanza del procedimento contenuto nella dimostrazione della proposizione E, dirò che, essendo esso fondato esclusivamente sulla proprietà che date due grandezze eguali si può sempre dividerne una nel modo stesso secondo cui è già stata divisa l'altra, il medesimo procedimento è indipendente 1°. dalle grandezze che si considerano; 2° dai loro contorni; 3° dalla posizione relativa delle grandezze stesse, e quindi dal movimento che bisogna fare per sovrapporre l'una all'altra. Per la qual cosa la proposizione E può facilmente estendersi alle superficie piane in generale e a tutti i solidi geometrici.

Vengo ora a parlare del concetto d'equivalenza. Il Signor Biasi a questo proposito dice « In una sola cosa il Gremigni potrebbe aver ragione, quando cioè scrive: *allora quello che si renderà necessario di fare, sarà di estendere il concetto d'equivalenza*; ma non insiste su questo concetto, poichè vuole difendere la sua dimostrazione anche per il caso che il numero delle operazioni possa essere infinito, caso che poi nega recisamente, contro il vero ». Quanta ragione avessi di negare questo caso, oramai è abbastanza provato da ciò che precedentemente ho esposto. Quello che mi fa meraviglia è che il Signor Biasi dica, come io non abbia insistito sul concetto d'equivalenza, quando nella seconda risposta al Lazzeri, pag. 3, sono giunto a dimostrare che il concetto stesso è indipendente dal numero di parti rispettivamente uguali, onde due grandezze sono decomponibili. Difatti, in quella risposta scrivo: « È chiaro quindi, che il concetto d'equivalenza dipende esclusivamente dalla corrispondenza univoca di parti rispettivamente uguali, nelle quali due grandezze possono decomporsi; e però il numero di tali parti non deve affatto influire sullo svolgimento ulteriore di tutte le proprietà da esso concetto dipendenti ». Che cosa avrei dovuto dire di più? D'accordo anch'io nel ricercare quelle grandezze equivalenti, le quali sono decomponibili in un numero finito di parti rispettivamente uguali, per distinguerle dalle altre in cui ciò non si avvera, o ci è incognito; ma per me la questione del numero, finito o no, è secondaria, e non deve intralciare quella principale dell'equivalenza. È questo il punto che il Signor Biasi avrebbe dovuto ribattere, ma egli ha preferito citare le mie parole della prima risposta al Lazzeri, facendole passare per parole scritte nella seconda.

Quanto alla dimostrazione della proposizione F (*se un poligono è parte di un altro poligono, essi non saranno equivalenti*) il nostro critico dice che in essa « l'errore è anche più grave » senza precisare veramente in qual punto sia e in che cosa consista. Difatti, dopo di aver riportato alcuni miei periodi, egli aggiunge soltanto queste parole: « Ora sieno μ, ν..... le parti di β che hanno le loro corrispondenti μ', ν'..... internamente a β stesso; affinchè il ragionamento del Signor Gremigni potesse camminare, converrebbe ammettere che μ si sovrapponesse proprio a μ', ν a ν', ecc.; cioè ciascuna alla sua corrispondente. E come andrebbe invece se μ si sovrapponesse a ν', o ν a μ'? » Ora la risposta gliela dà il libro stesso. Infatti, riprendendo il ragionamento della proposizione F dal punto in cui il Biasi l'ha lasciato, nel libro si legge: « onde tutte le parti di β, le quali hanno le loro corrispondenti, nel poligono α, internamente a β stesso, potranno distinguersi in due; sovrapposte e non sovrapposte. Ora le prime, corrispondendosi fra loro, non subiscono suddivisione nella sovrapposizione di β ed α; ma le altre vengono ad essere suddivise: quelle di β, dalle linee che dividono α; e quelle corrispondenti di α, dalle linee che dividono β. Comunque sia però dividendo le prime, come sono suddivise le seconde; e queste, come sono suddivise quelle, si avrà una nuova divisione di parti, per la quale ad ogni parte di β si trova la sua eguale corrispondente in α, situata sempre internamente a β ». Dunque, se, come obietta il Prof. Biasi, μ si sovrapponesse a ν', o ν a μ' si potrà dividere μ', come è stato suddiviso μ dal contorno di ν'; e si potrà dividere μ, come è stato diviso μ' dal contorno di ν o da qualche altro contorno. Dopo ciò μ e μ' sono divise nello stesse numero di parti rispettivamente eguali, e similmente disposte. La stessa cosa vale per ν e ν' e così via. Ora in ciò nulla vi è d'impossibile, e però, il mio ragionamento cammina sempre; mentre parmi che ciò non avvenga per le obiezioni del mio contradditore.

Per far vedere poi che anche la dimostrazione della proposizione F dipende da un numero finito di operazioni fa bisogno ch'io ritorni sul modo di considerare il postulato dell'equivalenza. Parlando di questo postulato il sig. Biasi così si esprime: « D'altronde il postulato dell'equivalenza è negativo, e perciò non si può chiamare in suo soccorso l'esperienza, alla quale non è dato di giudicare in un'infinità di casi ». Tali asserzioni non mi sembrano giuste, non solo perchè l'esperienza qui non ha nulla a che fare, ma anche perchè, se il postulato dell'equivalenza è negativo, ciò è questione più di forma che di sostanza. Difatti, se invece di dire, come ordinariamente si suole, che la parte non può essere equivalente al tutto; si pone la questione nei seguenti termini: *Se due poligoni equivalenti sono sovrapposti, e l'uno ha una parte esterna rispetto all'altro, il secondo dovrà pure avere una parte esterna rispetto al primo;* allora la forma negativa scompare. E però si potrà con un ragionamento diretto, applicabile in tutti i casi, dimostrare la verità della questione stessa. Ecco intanto un cenno del modo col quale si può condurre la cosa: Siano α e β i due poligoni equivalenti, e siano μ_1, μ_2, μ_3, ... μ_n le parti di α, e ν_1, ν_2, ν_3 .... ν_n le corrispondenti, *eguali*, di β: sovrapponiamo β ad α, e supponiamo che nessuna delle parti di β copra, in parte, la sua corrispondente (esamino questo caso soltanto, perchè l'altro caso più generale si fa dipendere da questo mediante la proposizione E); suppongo inoltre che α abbia, per esempio, la parte μ_3 esterna a β; dico che anche β avrà una parte esterna rispetto ad α. Chiamando, in due poligoni uguali, corrispondenti quei punti che coincidono, allorchè i due poligoni si fanno coincidere; e considerando un punto qualunque A della parte μ_3, il suo corrispondente B sarà nella parte ν_3 di β. Si potranno allora fare due ipotesi: B è interno, od esterno ad α. Se B fosse esterno, vorrebbe dire che la ν_3 è, almeno in parte, esterna ad α; e allora il teorema è dimostrato. Se B invece è interno ad α, dovendo cadere in una parte diversa da μ_3, cadrà, per esempio, nella parte μ_8 di α; per conseguenza il suo corrispondente C si troverà nella parte ν_8 di β; e allora si potranno fare le stesse due ipotesi: o C è esterno ad α, e in tal caso la parte ν_8 di β è, almeno in parte, fuori di α; o C è interno, e allora si può continuare il ragionamento fino a che non si sarà trovato un punto M, e quindi una parte di β esterna ad α. La qual cosa è possibile perchè le parti di β sono in numero finito. Dunque è vero che se due poligoni equivalenti sono sovrapposti, ciascun d'essi deve avere una parte esterna rispetto all'altro. Deducesi quindi la proposizione F, cioè che la parte non può essere equivalente al tutto. Se poi si osserva che il punto A per giungere alla posizione M fa un numero finito di *salti*, passando da A in B, da B in C, e così via; e che quello che dicesi per un punto, vale anche per una parte, si conclude che la soluzione della questione dipende sempre da un numero finito di operazioni.

Non posso dunque approvare il Sig. Biasi, quando classifica i poligoni fra le grandezze di terzo genere; sono anzi d'opinione che ciò non debba farsi neppure per i poliedri; ma, per ora, faccio punto, riserbandomi di esporre a questo proposito le mie idee in un'altra occasione. Quello, su cui mi preme di insistere, è che, nonostante le censure de' miei contradittori, potremo d'ora innanzi fare a meno del postulato dell'equivalenza.

Firenze, 15 aprile 1894. M. Gremigni.

Sui numeri primi. — 1. Teorema. *Supposto che* n *sia un numero qualunque della serie:*

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

ogni numero primo > 2 *è di una delle forme lineari:*

$$4nx \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots \pm (2n-1).$$

Infatti: sia r un numero impari qualunque $\leqq (2n-1)$. Se

$$4nx \pm r \gtrless N$$

essendo N un numero primo, per un certo valore intero q di x, sarà:

$$4n(q-1) \pm r < N; \quad \text{e} \quad 4nq \pm r > N$$

o in altri termini: N dovrà essere uguale almeno ad uno dei numeri:

$$4n(q-1)+(r+1),\ 4n(q-1)+(r+2), \ldots 4n(q-1)+(2n-1),$$
$$4n(q-1)+2n = 4nq-2n,\ 4nq-(2n-1), \ldots 4nq-(r+1),$$
$$4nq-r, \ldots 4nq-1,\ 4nq,\ 4nq+1, \ldots 4nq+(r-2),$$
$$4nq+(r-1),$$

quando le disuguaglianze sono verificate considerando i segni superiori; e almeno ad uno dei seguenti:

$$4n(q-1)-(r-1),\ 4n(q-1)-(r-2), \ldots 4n(q-1)-1,$$
$$4n(q-1),\ 4n(q-1)+1, \ldots 4n(q-1)+r,\ 4n(q-1)+(r+1), \ldots$$
$$4n(q-1)+(2n-1),\ 4n(q-1)+2n = 4nq-2n,$$
$$4nq-(2n-1), \ldots 4nq-(r+2),\ 4nq-(r+1),$$

nel caso che le disuguaglianze fossero invece verificate considerando i segni inferiori.

Ma in entrambi i casi, potendo escludere i numeri pari, concludiamo, che ammessa l'impossibilità delle forme: $4nx+r$, e $4nx-r$, deve esser possibile in conseguenza e rispettivamente, almeno una fra le seguenti:

$$4nx-r,\ \pm(r+2),\ \pm(r+4), \ldots \pm(2n-1),$$
$$\pm 1,\ \pm 3, \ldots \pm(r-2);$$

e:

$$4nx+r,\ \pm(r+2),\ \pm(r+4), \ldots \pm(2n-1),$$
$$\pm 1,\ \pm 3, \ldots \pm(r-2);$$

il che dimostra appunto il teorema.

Si dimostrerebbe similmente, seguendo una via analoga alla precedente, che *se* n *è un numero qualunque della serie*

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

ogni numero primo > 3, *è di una delle forme lineari*

$$6nx \pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \ldots \pm (3n-1);$$

e la serie:

$$1,\ 5,\ 7,\ 11, \ldots. (3n-1)$$

si ottiene da quella dei numeri naturali per la soppressione dei termini 2 e 3 coi loro multipli rispettivi.

In generale, che: *se* n *è un numero qualunque della serie:*

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots.$$

ogni numero primo > p (p essendo primo) *è di una delle forme lineari:*

(1) $$2pnx \pm 1, \ldots. \pm (p-2),\ \pm (p+2), \ldots. \pm (pn-1);$$

e la serie:

$$1, \ldots. (p-2),\ (p+2), \ldots. (pn-1)$$

si ottiene da quella dei numeri naturali per la soppressione dei termini 2 e p coi loro multipli rispettivi.

2. Poniamo ora nella (1), $n=1$. Siccome ogni numero primo $> p$ (p primo), è di una delle forme lineari $2px \pm r$, r essendo uno dei termini della serie

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots. (p-2),$$

avremo, elevando a quadrato un numero primo qualunque, messo sotto una tal forma:

(2) $$(2px \pm r)^2 = 4p^2x^2 \pm 4prx + r^2 = 4px(px \pm r) + r^2.$$

Ma r è impari, e tale è anche p, se si esclude il caso di $p=2$. Conseguentemente, essendo il prodotto:

$$x(px \pm r)$$

sempre pari, il 3° membro della (2) ammetterà il fattore $8p$; e potremo concludere il teorema:

Il quadrato di un numero primo più grande di p *è un multiplo di* 8 p *aumentato del quadrato di uno dei numeri appartenenti alla serie:*

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots. (p-2).$$

Fa eccezione il caso di $p=2$; perchè il quadrato di un numero primo più grande di 2 è un multiplo di 8 aumentato di 1.

D'altronde nella dimostrazione precedente abbiamo esclusa l'ipotesi che p fosse pari.

Per mezzo di un ragionamento analogo possiamo ancora enunciare la seguente proposizione più generale:

Essendo n *un numero qualunque della serie:*

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32, \ldots.$$

il quadrato di un numero primo più grande di p *è un multiplo di* 4 p n *aumentato del quadrato di uno dei numeri appartenenti alla serie:*

$$1, \ldots. (p-2),\ (p+2) \ldots. (pn-1)$$

ottenuta da quella dei numeri naturali per la soppressione dei termini 2 *e* p *e dei loro multipli.*

E questa vale anche nel caso in cui $p = 2$.

I teoremi precedenti non sono che la generalizzazione di proposizioni note. Così per esempio:

Ogni numero primo > 2 è di una delle forme lineari $4x \pm 1$. Ogni numero primo > 3 è di una delle forme lineari $6x \pm 1$. Il quadrato di un numero primo > 3 è un multiplo di 24 aumentato dell'unità.

3. Dimostrerò per ultimo il seguente teorema enunciato da Ed. Lucas (*):

Ogni numero $4x + 3$ è primo, o divisibile per un numero impari di numeri primi della stessa forma.

Osservo perciò che qualunque numero è di una delle 4 forme:

$$4x, \quad 4x + 1, \quad 4x + 2, \quad 4x + 3;$$

per conseguenza se $4x + 3$ non è primo, essendo impari, i suoi divisori non potranno essere che delle due seguenti:

$$4x + 1 \quad \text{e} \quad 4x + 3.$$

Ma il prodotto di due numeri delle forme $4x + 1$ e $4x + 3$ è sempre un numero della forma $4x + 3$; epperciò: se un numero di quest'ultima forma ammette un divisore $4x + 1$, ne ammette anche un altro $4x + 3$; onde: qualunque numero $4x + 3$ che non sia primo ammette almeno un divisore della stessa sua forma.

Il numero di tali divisori però, non può essere che impari. Infatti, possiamo sempre immaginare di aver soppresso dal numero dato $(4x + 3)$ i fattori della forma $4x + 1$; e il numero restante $(4X + 3)$ non potrà essere che il prodotto di un numero impari di fattori della stessa sua forma, perchè ogni numero $(4X + 3)$ è anche un numero $(4Y - 1)$.

Finalmente: i divisori di $(4x + 3)$ e della stessa forma, che abbiamo visto essere in numero impari, potrà darsi che sieno primi o composti. Se primi, il teorema è senz'altro dimostrato; se composti basterà osservare, che ragionando analogamente, si concluderebbe che ognuno di essi può scomporsi soltanto in un numero impari di fattori. Tenendo una via analoga, si dimostrerebbe ancora che ogni numero della forma $(6x + 5)$ è primo, o divisibile per un numero impari di numeri primi della stessa forma.

Ma si può vedere, come il Lucas avvertì, che una proposizione analoga non sussiste in generale. Per es. i numeri della forma $(8n + 7)$ possono essere il prodotto di 2 numeri della forma $(8n + 3)$ e $(8n + 5)$; ecc..

Genova, aprile 1894.

G. Musso.

(*) *Théorie des nombres*, pag. 351.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI

126, 176**, 177**, 178*, 179*, 180**, 181*, 182*, 183*, 184**, 185**, 186**, 187** e 188**.

126. *Résoudre en nombres entiers l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2 + 2t^2.$$ (E. FAUQUEMBERGUE).

Risposta del Sig. *D.... (Seminario di Solmona).*

I. Condizioni per la possibilità dell'equazione proposta.

1. I fattori primi di un numero N capace delle due forme $x^2 + y^2$ e $z^2 + 2t^2$ devono essere della forma $8h + 1$;

2. Gli altri fattori (delle forme $8h - 1$ e $8h \pm 3$) possono entrare nel numero N, ma solo a quadrato o a potenza pari;

3. Il 2 a qualsivoglia potenza.

1. Infatti per la forma $x^2 + y^2$ è necessario che ogni fattore primo di N sia della forma $4h + 1$, che si scinde nelle due

$$8h + 1, \quad 8h - 3.$$

Per la forma $z^2 + 2t^2$ è necessario che ogni fattore primo di N sia di una delle due forme

$$8h + 1, \quad 8h + 3.$$

Dunque ogni fattore primo, capace di prendere ad un tempo le due forme $x^2 + y^2$ e $z^2 + 2t^2$, deve essere della forma $8h + 1$.

2. Quindi gli altri fattori ($8h - 1$ e $8h \pm 3$) non possono entrare in N che a potenza pari, cioè come fattori comuni ai quadrati x^2 e y^2, z^2 e t^2.

3. Finalmente il 2 a primo grado può prendere le due forme $x^2 + y^2$ e $z^2 + 2t^2$, essendo $2 = 1^2 + 1^2$, $2 = 0 + 2 \cdot 1^2$; il 2 a potenza pari può entrare in N, come ci entrano gli altri fattori che non sono della forma $8h + 1$; il 2 a potenza impari, decomposto in 2 a primo grado e 2 a potenza pari, vi può entrare come negli altri due casi.

II. In quanti modi si può far prendere al numero N la forma dei due membri, ossia quante sono le soluzioni dell'equazione proposta?

Si scomponga il numero N nei suoi fattori primi. Esso avrà m fattori della forma $8h + 1$, sotto gli esponenti $a_1, a_2, \ldots a_m$; avrà n fattori della forma $8h - 3$, sotto gli esponenti $b_1, b_2, \ldots b_n$, tutti pari; avrà q fattori della forma $8h + 3$, sotto gli esponenti $c_1, c_2, \ldots c_q$, tutti pari. Degli altri fattori, come anche del 2 sotto esponente pari, i quali non contribuiscono per nulla a far prendere l'una o l'altra forma, non si tiene verun conto. Del 2 a primo grado si dirà in fine.

Ora i modi, in cui il numero N può prendere la forma $x^2 + y^2$, sono

$$A = [(a_1 + 1)(a_2 + 1) \ldots (a_m + 1) \times (b_1 + 1)(b_2 + 1) \ldots (b_n + 1)]\, 2^{-1},$$

ovvero

$$A' = [(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_m+1)\times(b_1+1)(b_2+1)\dots(b_n+1)-1]2^{-1},$$

secondo che gli esponenti a non sono tutti o sono tutti pari.

E similmente, secondo questa medesima corrispondenza, i modi, in cui il numero N può prendere la forma z^2+2t^2, sono

$$B = [(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_m+1)\times(c_1+1)(c_2+1)\dots(c_q+1)]2^{-1},$$

ovvero

$$B' = [(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_m+1)\times(c_1+1)(c_2+1)\dots(c_q+1)-1]2^{-1}.$$

La ragione di queste formole sta in ciò: che i modi, onde una potenza α^μ, α numero primo della forma x^2+y^2 ovvero z^2+2t^2, può prendere la stessa forma, sono $\frac{\mu+1}{2}$ o $\frac{\mu}{2}$, secondo che μ è impari o pari; e i modi onde un prodotto $\alpha^\mu\beta^\nu$, β anche numero primo della stessa forma di α, può prendere la stessa forma, sono $(\mu+1)(\nu+1)2^{-1}$ o $[(\mu+1)(\nu+1)-1]2^{-1}$, secondo che μ e ν non sono entrambi o sono entrambi pari.

Siccome poi il fattore 2 a primo grado, moltiplicato per una forma, mantiene nel prodotto la forma, ma non ne raddoppia il modo, così il numero dei modi espresso da A e B, o da A' e B', resta invariato; e solo nel caso che $\frac{N}{2}$ sia un quadrato perfetto si può, se vuolsi, aggiungere al primo membro la forma $\frac{N}{2}+\frac{N}{2}$: il che basta avere accennato senza complicare le formole.

Quindi il numero delle soluzioni dell'equazione proposta è dato dal prodotto AB o dal prodotto $A'B'$.

NOTA. Il Sig. Prof. *E. Fauquembergue* comunica gentilmente alla Redazione le seguenti identità riferentisi a questa quistione:

I. $(2\alpha^2+2\alpha\beta)^2+(2\alpha\beta-\beta^2)^2=(2\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2)^2+2(2\alpha\beta)^2.$

II. $$[2\alpha^2+\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]^2+[2\beta^2+\gamma^2-(\alpha-\beta)^2]^2=$$
$$[2(\alpha+\beta)\gamma]^2+2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2.$$

III. $$(\alpha^2-2\beta\gamma-\delta^2)^2+(\beta^2-\gamma^2\pm 2\alpha\delta)^2=$$
$$(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)^2+2[\alpha(\beta-\gamma)\pm\delta(\beta+\gamma)]^2.$$

Volendo delle soluzioni nelle quali sia $z=1$, si prenderà l'identità:

IV. $$(\alpha^2-1)^2+(\alpha^2+2\alpha)^2=1^2+2(\alpha^2+\alpha)^2.$$

Volendo delle soluzioni in cui sia $t=1$, si prenderà l'identità:

$$(2\alpha^2+1)^2+(4\beta^2-1)^2=(4\alpha\beta)^2+2.1^2,$$

α e β essendo una soluzione qualunque dell'equazione

$$\alpha^2-2\beta^2=-1\ (^*).$$

(*) Volendo delle soluzioni in cui sia od $x=1$ od $y=1$, si prenderà l'identità:

$$1^2+(\alpha^2)^2=(\alpha^2-1)^2+2.\alpha^2.$$

[N. d. Red.].

176.** *Se un triangolo isoscele ha i lati eguali di grandezza costante ed uno fisso di posizione il luogo geometrico del suo ortocentro* H *è una strofoide.*
(G. BELLACCHI).

Dimostrazione del Sig. *L. Perrotti*, studente nella R. Università di Roma (*).

Sia AB il lato fisso di posizione: A il vertice in cui concorrono i lati eguali. Il luogo del terzo vertice C è la circonferenza di centro A e raggio AB. Compio il diametro CAC' e sia H' l'ortocentro del triangolo ABC'. I punti H, H' sono sulla perpendicolare condotta da B al diametro CC'. Tiro il diametro perpendicolare ad AB, che incontra HH' in D. Le AH e AH', bisettrici degli angoli BAC e BAC', sono perpendicolari fra loro e poichè AD divide per metà la striscia formata dalle due parallele CH, $C'H'$, sarà $HD = H'D$, cosicchè dal triangolo rettangolo $H'AH$, risulta

$$DH = DA = DH'.$$

Il luogo geometrico dei punti H, H' è dunque una strofoide retta avente il punto B per polo ed A per punto doppio.

177.** *Dimostrare che, per* n *intero e positivo qualunque, si ha*

$$\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right]^2 = 2^n.$$

(V. CORRENTI).

Dimostrazioni della Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles e del Sig. Prof. *U. Gherardi* a Cortona.

Ponendo $\sqrt{-1} = i$, si ha

$$(1+i)^n = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots + i\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right].$$

Ma $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$, si ha dunque ancora

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n \cdot \cos\frac{n\pi}{4} + i(\sqrt{2})^n \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4},$$

quindi

$$1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots = (\sqrt{2})^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}.$$

Di qui, quadrando e addizionando, risulta

$$\left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right]^2 =$$

$$2^n\left(\cos^2\frac{n\pi}{4} + \operatorname{sen}^2\frac{n\pi}{4}\right) = 2^n \qquad \text{c. d. d..}$$

(*) Dimostrazioni geometricamente semplicissime di questa proposizione pervennero dal Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli e dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles. Il Sig. Prof. *U. Ceretti* inviò all'incontro una dimostrazione analitica.

Dimostrazione del Sig. Prof. G. *Santacroce* a Foggia e del Sig. *L. Perrotti*, studente nella R. Università di Roma.

Pel teorema del binomio, avendo riguardo ai valori delle successive potenze dell'unità immaginaria, si ha:

$$(1+i)^n = \left\{1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots\right\} + i\left\{\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right\}$$

$$(1-i)^n = \left\{1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots\right\} - i\left\{\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right\}.$$

Moltiplicando ora membro a membro risulta la relazione proposta.

Dimostrazione del Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli.

Indicando per brevità con α e β le espressioni fra parentesi che figurano nel primo membro della proposta eguaglianza, mi propongo di dimostrarne la esattezza col metodo di deduzione da n ad $n+1$.

Sia per ipotesi [1] $\alpha^2 + \beta^2 = 2^n$ e si cambi n in $n+1$. A motivo dell'identità

$$\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$$

segue

$$1 - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{4} - \dots = \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right] - \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right] = \alpha - \beta,$$

$$\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{5} - \dots = \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \dots\right] + \left[1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \dots\right] = \alpha + \beta,$$

e perciò la relazione proposta diviene, in seguito alla [1]:

$$(\alpha - \beta)^2 + (\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2) = 2^{n+1},$$

cosicchè essa è vera mutando n in $n+1$. E poichè la relazione stessa si verifica facilmente per $n = 1$ ed $n = 2$, segue che è vera sempre (*).

178'. *Il punto* P *di una sfera di raggio* R *è vertice di un cono che ha per asse il diametro* PQ *della sfera condotto per* P, *e ha per base un cerchio di raggio* R *situato sul piano condotto perpendicolarmente al diametro* PQ *per il suo estremo* Q. *Trovare a quale distanza dalla base dovranno essere tagliati, con un piano parallelo a questa, sì il cono che la sfera perchè le aree delle sezioni circolari fatte nel cono e nella sfera siano fra loro in un rapporto dato* n, *o perchè siano in un rapporto dato* n' *le superficie del tronco di cono e della zona sferica corrispondente; e discutere i risultati.*

(*) Un'altra dimostrazione venne inviata dal Sig. *G. Tirelli*, studente nella R. Università di Catania.

Soluzioni analoghe della Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica; *V. Columbo*, studente a Napoli; *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo; *R. Scozzari*, studente a Palermo; *G. Tirella*, studente a Catania.

Sia $2x$ la distanza del punto Q dal piano segante, R' il raggio della sezione nel cono, R'' il raggio della sezione nella sfera. Si ha subito

$$R' = R - x, \qquad R'' = 2\sqrt{x(R-x)}.$$

1.° L'equazione che dà il valore di x è allora

$$(R-x)^2 = 4nx(R-x).$$

Trascurando la soluzione illusoria $x = R$, si ricava

$$R - x = 4nx \qquad \text{donde} \qquad 2x = \frac{2R}{1+4n}$$

valore accettabile se compreso fra 0 e $2R$. Si deve dunque avere

$$0 < \frac{1}{1+4n} < 1 \qquad \text{o, più semplicemente} \qquad n > 0.$$

2.° Condotta una generatrice qualsivoglia PA del cono che incontri il piano segante in N e chiamato M il punto d'intersezione del diametro PQ con questo piano, dai triangoli simili PMN, PQA si ha $NA : 2x = PA : PQ = R\sqrt{5} : 2R$, cosicchè $NA = x\sqrt{5}$. La superficie del troncò di cono equivale adunque a $\pi(R'+R) \,.\, NA = \pi(2R-x)x\sqrt{5}$ e quella della zona sferica a $4\pi Rx$. Si ha perciò l'equazione

$$(2R-x) \,.\, x\sqrt{5} = 4\pi n' Rx \quad \text{da cui si ricava} \quad 2x = \frac{4R(5-2n'\sqrt{5})}{5}$$

con le condizioni

$$0 < \frac{2(5-2n'\sqrt{5})}{5} < 1.$$

Dalla prima si ricava $n' < \frac{\sqrt{5}}{2}$ e dalla seconda $n' > \frac{\sqrt{5}}{4}$. Ne risulta che n' può variare fra un minimo $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ed un massimo $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

179*. *In un triangolo rettangolo è data la somma* a *dei due cateti* x *ed* y, *e l'altezza* k *relativa all'ipotenusa* z; *determinare i tre lati* x, y, z *del triangolo, e indicare in quali casi il problema è possibile.*

Soluzioni analoghe dalla Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica; *V. Columbo*, studente a Napoli; *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo; *F. Romano* e *G. Tirella*, studenti a Catania; *R. Scozzari*, studente a Palermo.

La quistione si riduce a risolvere il sistema d'equazioni

$$x + y = a, \qquad x^2 + y^2 = z^2, \qquad xy = hz.$$

Quadrando la prima e tenendo conto delle altre due si ha subito

$$z^2 + 2kz - a^2 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad z = -k \pm \sqrt{k^2 + a^2}.$$

Il valore negativo pel radicale non conviene al problema, perchè si avrebbe per esso $z < 0$, l'altro

$$z = -k + \sqrt{k^2 + a^2}$$

è accettabile, giacchè si ha pel medesimo $0 < z < a$.

Per trovare x ed y si ha ora il sistema

$$x + y = a, \qquad xy = -k^2 + k\sqrt{k^2 + a^2},$$

cosicchè

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4k(\sqrt{k^2 + a^2} - k)}}{2}, \quad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4k(\sqrt{k^2 + a^2} - k)}}{2}.$$

Se questi valori sono reali essi sono ambedue positivi e soddisfano alla quistione. L'unica condizione di possibilità del problema è per conseguenza

$$a^2 - 4k(\sqrt{k^2 + a^2} - k) \geqq 0 \qquad \text{o} \qquad a^2 + 4k^2 \geqq 4k\sqrt{k^2 + a^2}.$$

Quadrando e riducendo questa relazione si trasforma in

$$a^2 \geqq 8k^2 \qquad \text{o più semplicemente} \qquad a \geqq 2k\sqrt{2}.$$

La Sig.ª *F. Prime* osserva poi che da questa limitazione si deduce che fra tutti i triangoli rettangoli della medesima altezza quello in cui la somma dei cateti è un minimo è il triangolo isoscele.

Il Sig. *V. Columbo* dà la seguente costruzione geometrica del problema. Descritto un segmento $AB = a$, si conduca dall'estremità B la perpendicolare $BC = k$ e tirata AC si porti su di essa, a partire da C, il segmento $B_1C = BC$. Si tracci il semicerchio di diametro AB_1 e si tagli il medesimo nei punti E, F con una parallela ad AB_1 alla distanza k da questo diametro. I due triangoli AEB_1, AFB_1, eguali, soddisfano alla quistione. Infatti si ha subito $AB_1 = z = \sqrt{k^2 + a^2} - k$ e i triangoli ottenuti oltrechè rettangoli hanno evidentemente l'altezza k.

Perchè il problema abbia soluzione è necessario e sufficiente che $AO = \frac{AB_1}{2} = \frac{\sqrt{k^2 + a^2} - k}{2} \geqq k$, ossia $\sqrt{k^2 + a^2} \geqq 3k$ o finalmente $a \geqq 2k\sqrt{2}$, il che coincide colla condizione trovata prima.

180**. *Data la somma* 2σ *(o la differenza* 2δ*) dei lati di due triangoli sferici equilateri e polari fra loro, determinarli.* (G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. Prof. *V. Carpaneto* ad Acqui (*).

Indicando con a, A ed a', A' il lato e l'angolo del primo e secondo triangolo, si ha intanto

[1] . . . . . $a + A' = 180^\circ, \qquad a' + A = 180^\circ.$

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Uni. di Napoli.

Dalla nota relazione

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A+B-C}{2}}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}},$$

si ricava

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen} A} = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = \frac{1}{2\cos\frac{a'}{2}}.$$

e quindi

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2} = \cos\frac{a+a'}{2} + \cos\frac{a-a'}{2} = 1$$

o finalmente

[2] $$\cos\sigma + \cos\delta = 1.$$

La [2] con la [1] determina i due triangoli. Dalla [2] si deduce che, dovendo essere $\delta < 60^0$, dovrà essere $60^0 < \sigma \leqq 90^0$.

La Sig.ª Ved.ª *F. Prime*, che trattò la stessa quistione, pervenuta alla relazione [2], aggiunge la discussione più particolareggiata che segue:

1.° Data σ, si deve risolvere il sistema

$$a + a' = \sigma, \qquad \cos(a - a') = 2\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}.$$

Bisogna primieramente che $\cos(a-a')$ sia minore di 1, si deve dunque avere $2\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2} < 1$, da cui, siccome $\frac{\sigma}{2}$ è acuto, si deduce $\frac{\sigma}{2} < 45^0$ o $2\sigma < 180^0$. Se questa condizione è soddisfatta si troveranno per $a - a'$ due valori eguali e di segni contrarî e compresi fra -90^0 e $+90^0$. È ben chiaro che questi valori daranno il medesimo sistema di due triangoli equilateri; ma perchè tali triangoli esistano bisogna che si abbia

$$|a - a'| < a + a' \qquad \text{o} \qquad \cos(a - a') > \cos\sigma,$$

(poichè $\sigma < 180^0$) o $4\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2} > 1$, o, poichè $\frac{\sigma}{2}$ è acuto,

$$\frac{\sigma}{2} > 30^0 \quad \text{da cui} \quad 2\sigma > 120^0.$$

Le condizioni di possibilità sono dunque

$$120^0 < 2\sigma < 180^0.$$

2.° Quando è data δ, il sistema a risolvere è

$$a - a' = \delta, \qquad \cos(a + a') = 2\operatorname{sen}^2\frac{\delta}{2}.$$

Una discussione, in ogni punto, analoga alla precedente conduce all'unica condizione di possibilità

$$2\delta < 120^0.$$

181*. *Se due tangenti* BA, BC *di un cerchio si tagliano in* B *ad angolo retto e la parallela a* BC, *condotta pel punto medio della corda* AC *dei punti di contatto, sega il cerchio in* E *ed* F, *le rette* AE, AF *incontrano la tangente* BC *ed il suo prolungamento in due punti* G, H *tali che*

$$\overline{CG}^2 = 2BC.GB, \qquad \overline{HC}^2 = 2BC.HB.$$

(G. Pucciano).

Dimostrazione del Sig. *B. Zurria*, alunno del R. Istituto tecnico di Catania (*).

Si ha subito per note proprietà

$$\overline{GC}^2 = GA.GE = 2\overline{GE}^2, \qquad \overline{HC}^2 = \overline{HA}.\overline{HF} = 2\overline{HF}^2,$$

onde $2\overline{GC}^2 = 4\overline{GE}^2 = \overline{GA}^2$, $2\overline{HC}^2 = 4\overline{HF}^2 = \overline{HA}^2$. Ora pel teorema di Pitagora $\overline{GA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2$ e $\overline{HA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BH}^2$, quindi

$$\overline{GC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2 - \overline{GC}^2, \qquad \overline{HC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{HC}^2$$

e perchè $\overline{GC} = \overline{BC} - \overline{GB}$ e $\overline{HC} = \overline{HB} - \overline{BC}$, risulta

$$\overline{GC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BG}^2 - (\overline{BC}^2 + \overline{GB}^2 - 2\overline{BC}.\overline{GB}) = 2\overline{BC}.\overline{GB},$$

$$\overline{HC}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{HB}^2 - (\overline{HB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}.\overline{HB}) = 2\overline{BC}.\overline{HB} \qquad \text{c. d. d..}$$

Dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Siano O ed R il centro e il raggio della circonferenza, D il punto medio di AC ed I il punto medio di OC; I appartiene alla corda EF la quale non è altro che il lato del triangolo equilatero inscritto nel cerchio O. Si ha dunque $BC = R$ e

$$CG = 2.DE = 2.EI - 2.DI = R(\sqrt{3} - 1),$$
$$HC = 2.DF = 2.IF + 2.DI = R(\sqrt{3} + 1),$$
$$GB = BC - CG = R(2 - \sqrt{3}), \qquad HB = BC + CH = R(2 + \sqrt{3}).$$

Ora è identicamente

$$(\sqrt{3} - 1)^2 = 2(2 - \sqrt{3}) \qquad \text{e} \qquad (\sqrt{3} + 1)^2 = 2(2 + \sqrt{3}).$$

Segue adunque

$$\overline{CG}^2 = 2.BC.GB \qquad \text{e} \qquad \overline{HC}^2 = 2.BC.HB \qquad \text{c. d. d..}$$

Il Sig. *G. Tirella*, studente a Catania, considera il caso più generale in cui le tangenti BA, BC formino un angolo θ qualunque. In questo caso dalla relazione $2\overline{GC}^2 = \overline{AG}$, avendosi

$$\overline{AG}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{BG}.\overline{AB}\cos\theta = \overline{BG}^2 + (\overline{BG} + \overline{GC})^2 -$$
$$2\overline{BG}.\overline{BC}\cos\theta = 2\overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 + 2\overline{CG}.\overline{BG} - 2\overline{BG}.\overline{BC}\cos\theta,$$

(*) Dimostrazioni poco disformi pervennero dai Sigg. *Biagio Armano* (R. Liceo Alessandria); *M. Carmina*, *G. Macaluso* e *G. F. Sinatra* (R. Istituto tecnico Girgenti); *F. Celestri* (R. Istituto tec. Modica); *A. de Benedetti* (R. Ist. tec. Piacenza); *E. Lugaro* (R. Liceo Garibaldi Palermo); *M. Piattelli* (R. Liceo Bari); *L. Perotti*, studente a Roma; *E. G. Ricci* (Bologna); *R. Scozzari* (Palermo).

si deduce $\overline{GC}^2 = 2\,\overline{BG}\,(\overline{BG} + \overline{GC}) - 2\,\overline{BG}\,.\,\overline{BC}\cos\theta$ o finalmente

$$\overline{GC}^2 = 2\,\overline{BG}\,.\,\overline{BC}\,(1 - \cos\theta).$$

Analogamente risulta

$$\overline{HC}^2 = 2\,\overline{HB}\,.\,\overline{BC}\,(1 - \cos\theta).$$

Per $\theta = 60^0,\ 90^0,\ 120^0$ si ha rispettivamente

$$\overline{GC}^2 = \overline{BG}\,.\,\overline{BC}, \qquad \overline{GC}^2 = 2\,\overline{BG}\,.\,\overline{BC}, \qquad \overline{GC}^2 = 3\,\overline{BG}\,.\,\overline{BC};$$
$$\overline{HC}^2 = \overline{HB}\,.\,\overline{BC}, \qquad \overline{HC}^2 = 2\,\overline{HB}\,.\,\overline{BC}, \qquad \overline{GC}^2 = 3\,\overline{HB}\,.\,\overline{BC}.$$

182*. *Di due numeri reali e positivi* x *ed* y *è data la somma* m^2 *dei quadrati, e quella* k *dei rapporti* $\frac{x}{y}$ *e* $\frac{y}{x}$; *trovare questi numeri e discutere i risultati.*

Soluzione dei Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica; *V. Columbo*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Bari; *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo; *R. Scozzari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti; *G. Tirella*, licenziato dal R. Liceo di Modica (*).

Si ha il sistema d'equazioni

$$x^2 + y^2 = m^2, \qquad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = k.$$

Dalla seconda si deduce $2xy = \frac{2m^2}{k}$ e sommando e sottraendo successivamente membro a membro colla prima, risulta

$$(x+y)^2 = \frac{m^2(k+2)}{k}, \qquad (x-y)^2 = \frac{m^2(k-2)}{k},$$

donde

$$x + y = m\sqrt{\frac{k+2}{k}}, \qquad x - y = m\sqrt{\frac{k-2}{k}},$$

potendosi supporre sempre x non minore di y. Di qui segue subito

$$x = \frac{m}{2\sqrt{k}}(\sqrt{k+2} + \sqrt{k-2}), \qquad y = \frac{m}{2\sqrt{k}}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k-2}).$$

I valori di x ed y dovendo essere reali, dev'essere $k - 2 \geqq 0$, ossia $k \geqq 2$ e allora essi sono anche positivi giacchè $\sqrt{k+2} > \sqrt{k-2}$. L'unica condizione di possibilità del problema è dunque $k \geqq 2$. Nel caso di $k = 2$, o del valor minimo di k, i due numeri sono eguali.

183*. *Si conosce la somma* a *delle tangenti di due archi* x *ed* y, *e la tangente* b *della somma degli archi stessi. Trovare questi archi, discutere i risultati, e farne una applicazione numerica al caso di* a = 3, b = 4.

(*) Una soluzione trigonometrica venne inviata dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Soluzioni completamente analoghe dal Sig. *V. Columbo*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Bari, e dal Sig. *G. Tirella*, licenziato dal R. Liceo di Modica (*).

Si tratta di risolvere il sistema d'equazioni

$$\tan x + \tan y = a\,, \qquad \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = b\,.$$

Dalla seconda segue immediatamente $\tan x \tan y = \frac{b-a}{b}$, cosicchè $\tan x$ e $\tan y$ saranno le radici dell'equazione di secondo grado in z

$$bz^2 - abz + b - a = 0$$

ossia si avrà

$$\tan x = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab - 4b^2}}{2b}\,, \quad \tan y = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab - 4b^2}}{2b}\,.$$

Perchè i valori cercati siano reali è necessario e sufficiente che si abbia

$$a^2b^2 + 4ab - 4b^2 \geqq 0\,.$$

Supponendo $b > 0$ da questa relazione si trae $a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+b^2}}{b}$ per modo che deve aversi od $a \geqq \frac{-2+2\sqrt{1+b^2}}{b}$ od $a \leqq \frac{-2-2\sqrt{1+b^2}}{b}$.

Se all'incontro si ha $b < 0$, risulta che a deve soddisfare alla relazione

$$ba^2 + 4a - 4b \leqq 0$$

da cui si deduce per a la doppia limitazione

$$\frac{-2+2\sqrt{1+b^2}}{b} \geqq a \geqq \frac{-2-2\sqrt{1+b^2}}{b}\,.$$

Applicazione numerica. Se $a=3$ e $b=4$, si ha $\tan x = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} = 2{,}91421$ e $\tan y = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} = 0{,}08579$, da cui si ricava

$$\begin{aligned} x &= 71^\circ\,3'\,38'' \pm k\,.\,360^\circ &\quad \text{od} \quad x &= 251^\circ\,3'\,38'' \pm k\,.\,360^\circ,\\ y &= 4^\circ\,54'\,12'' \pm k\,.\,360^\circ &\quad \text{od} \quad y &= 184^\circ\,54'\,12'' \pm k\,.\,360^\circ. \end{aligned}$$

184**. *Se* $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\,;\ \mathrm{a}_0, \mathrm{b}_0, \mathrm{c}_0$ *sono due terne di numeri reali tali che* $\mathrm{a}_0\mathrm{c} + \mathrm{a}\mathrm{c}_0 - 2\mathrm{b}\mathrm{b}_0 = 0$, *e se inoltre è* $\mathrm{b}_0^2 - \mathrm{a}_0\mathrm{c}_0 < 0$, *sarà* $\mathrm{b}^2 - \mathrm{ac} > 0$. *Se è, invece,* $\mathrm{b}_0^2 - \mathrm{a}_0\mathrm{c}_0 > 0$, *sarà* $\mathrm{b}^2 - \mathrm{ac} \lesseqgtr 0$. (A. Del Re).

Dimostrazione del Sig. Prof. *E. Cesàro* a Napoli (**).

Una dimostrazione elementarissima si può subito fondare sull'identità

$$(b^2 - ac)(b_0^2 - a_0c_0) - b_0^2(b^2 - ac) - b^2(b_0^2 - a_0c_0) = (ac_0 - bb_0)(a_0c - bb_0) + bb_0(ac_0 + a_0c - 2bb_0).$$

(*) Un'altra soluzione pervenne dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

(**) Altre dimostrazioni pervennero dalla Sig.ª V.ª *F. Prime* a Bruxelles e dal Sig. *E. G. Ricci* studente nella R. Università di Bologna.

Infatti, quando $a c_0 + a_0 c = 2 b b_0$, i numeri $a c_0 - b b_0$ ed $a_0 c - b b_0$, se non sono nulli, hanno segni opposti, e però

$$(b^2 - ac)(b_0^2 - a_0 c_0) \leqq b_0^2 (b^2 - ac) + b^2 (b_0^2 - a_0 c_0) .$$

È dunque impossibile che i numeri $b^2 - ac$ e $b_0^2 - a_0 c_0$ siano entrambi negativi, o che uno solo di essi sia negativo quando l'altro è nullo.

Ciò si può anche dimostrare osservando che, quando è nullo, come si suppone nell'enunciato, l'invariante simultaneo delle forme

$$\varphi = a x^2 + 2 b x y + c y^2 , \qquad \varphi_0 = a_0 x^2 + 2 b_0 x y + c_0 y^2 ,$$

i cui discriminanti sono $\delta = ac - b^2$, $\delta_0 = a_0 c_0 - b_0^2$, il discriminante di $\varphi + \lambda \varphi_0$ è $\delta + \lambda^2 \delta_0$. Questo non può essere sempre positivo, perchè, data l'arbitrarietà di λ, non ogni forma $\varphi + \lambda \varphi_0$ conserva un segno invariato. Occorre dunque, quando uno dei numeri δ, δ_0 è positivo, che l'altro sia negativo.

È ovvia l'interpretazione geometrica.

185.** *Dedurre dalla relazione*

$$\mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA} = 0,$$

dove A, B, C *sono punti di una retta, l'altra*

$$(\mathfrak{abcd}) + (\mathfrak{acbd}) = 1 ,$$

dove $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ *sono quattro elementi qualunque di una forma fondamentale di 1ª specie* (*). (A. Del Re).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles (**).

Da

$$AB + BC + CA = 0,$$

si ricava

$$\frac{AC}{BC} + \frac{AB}{CB} = 1$$

ossia

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} + \frac{AB}{CB} : \frac{AD}{CD} = 1 ,$$

se D è l'elemento all' infinito della punteggiata ABC.

Quest'ultima relazione è proiettiva, dunque

$$(\mathfrak{abcd}) + (\mathfrak{acbd}) = 1 \qquad \text{c. d. d.}$$

186.** *Di una conica sono noti la posizione degli assi, due rette reciproche ortogonali ed un punto (una tangente). Si domanda la costruzione della conica.* (A. Del Re).

(*) Va inteso che, in questa quistione, non devesi far uso della relazione

$$AB.CD + BC.AD + CA.BD = 0.$$

(**) Soluzioni pure dai Sigg. *E. G. Ricci* (R. Uni. Bologna) e *V. Columbo* (R. Uni. Napoli).

Soluzione del Sig. *G. Scorza*, studente a Firenze.

Siano a e b gli assi della conica, O il centro (noto come intersezione degli assi), p e p_1 le rette reciproche ortogonali, P e P_1 i punti d'intersezione di queste rette con uno degli assi, per es. a. Si sa che per ogni punto P di un asse a di una conica vi è un punto P_1 del medesimo tale che due rette reciproche qualunque passanti per P e P_1 sono perpendicolari tra loro, e che se si fanno corrispondere tra loro due a due i punti così collegati i punti dell'asse a sono accoppiati in involuzione (*).

Di questa punteggiata involutoria il centro della conica è il punto centrale, e i fuochi o ne sono i punti doppii, o la proiettano mediante due fasci di raggi ortogonali.

Dunque conoscendo noi della punteggiata involutoria a una coppia di punti corrispondenti P e P_1 ed il punto centrale O potremo agevolmente costruire i fuochi F ed F_1 della conica in questo modo:

1.° Se P e P_1 sono posti dalla medesima parte di O costruendo le intersezioni dell'asse a col cerchio che ha per centro O e per raggio la tangente tirata da O ad un cerchio condotto per P, P_1.

2.° Se P e P_1 sono situati da parti opposte per rispetto ad O costruendo i punti d'intersezione dell'asse b col cerchio di diametro PP_1.

Ed ora, se è dato un punto M della conica, due sono le coniche che soddisfano al problema e precisamente un'ellisse ed un'iperbole confocali facili ambedue a costruirsi; se invece è data una tangente m secondochè il punto d'intersezione di m con a è dentro o fuori del segmento FF_1 la conica è un'iperbole o un'ellisse, che può costruirsi prima trovando il punto di contatto di m e poi facendo passare per questo punto nel primo caso un'iperbole, nel secondo un'ellisse.

Il punto di contatto di m si può trovare prendendo il simmetrico F' di F rispetto ad m e poi congiungendo F_1 con F'; l'intersezione M di F_1F' ed m risolve il problema, perchè la m risulta in tal modo bisettrice dell'angolo dei raggi vettori FM ed F_1M.

La Sig.ª *F. Prime*, che inviò pure una soluzione di questo problema, considera poi i seguenti casi particolari: 1.° Se P coincide con O, il problema ammette come unica soluzione una circonferenza. 2.° Se b è all'infinito, la conica che risolve il problema è una parabola avente per fuoco il punto medio di PP_1.

187.** *Di una conica è noto un punto con la relativa tangente, sono note due rette reciproche ortogonali e la posizione di un asse; si domanda di costruire la conica. Discutere inoltre il problema.* (A. Del Re).

Soluzione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles (**).

Sia xy la posizione di uno degli assi e siano A, B, C, D i punti in cui xy è incontrata dalle rette coniugate MA, MB, dalla tangente PC e dalla

(*) Reye. *Geometria di posizione*; trad. Faifofer, pag. 145.
(**) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *G. Scorza*, studente a Firenze.

normale PD. Se O è il centro dell'involuzione determinata dalle due coppie (A, B), (C, D), O è il centro della conica; si può quindi determinare la posizione del secondo asse e si è allora ricondotti alla quistione 186.

Diversi casi sono da prevedere:

1.° I quattro punti A, B, C, D sono distinti e il centro di AB non coincide con quello di CD; in questo caso, il punto O sarà a distanza finita e il problema ammetterà una sola soluzione che sarà un'ellisse o un'iperbole secondo che la tangente PC passerà o no esternamente ai fuochi della conica.

2.° Il punto medio di AB è quello di CD. In questo caso, il punto O è all'infinito e la curva cercata è una parabola.

3.° I segmenti AB, CD coincidono. Il problema allora è indeterminato, tutti i punti reali od imaginari armonicamente separati da A e B possono esser presi come fuochi.

4.° I punti B, C coincidono ma A e D sono distinti; il problema ammette come soluzione la circonferenza di centro C e di raggio CP.

188**. *Date due rette ortogonali* OX, OY, *per un punto* P *di una circonferenza descritta col raggio* OP *si tira una trasversale parallela ad una retta fissa ed un'altra ad essa perpendicolare seganti le* OX, OY, *nei punti* M, M′, N, N′; *la somma dei quadrati delle corde* MM′, NN′ *è costante.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazioni completamente analoghe dai Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica; *A. Parsi*, studente a Genova; *G. Scorza*, studente a Firenze e *G. Tirella*, studente a Catania.

Per dato l'angolo $PMO = \alpha$ è costante. Posto $\angle PON = \omega$, si ha: $\angle POM = 180^0 - \omega$, $\angle PN'M' = \alpha$, $\angle PNM = 90^0 - \alpha$, $\angle POM' = 90^0 - \omega$, $PM'O = 90^0 + \alpha$, quindi

$$NP = \frac{PO \,.\, \mathrm{sen}\,\omega}{\cos\alpha}, \quad PN' = \frac{PO \,.\, \cos\omega}{\mathrm{sen}\,\alpha}; \quad PM = \frac{PO \,.\, \mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{sen}\,\alpha}, \quad PM' = \frac{PO \,.\, \cos\omega}{\cos\alpha}.$$

Dopo ciò risulta

$$NN' = NP + PN' = PO\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\omega\cos\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{PO \,.\, \cos(\omega - \alpha)}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha},$$

$$MM' = MP - M'P = PO\,\frac{\mathrm{sen}\,\omega\cos\alpha - \cos\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha} = \frac{PO \,.\, \mathrm{sen}(\omega - \alpha)}{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}.$$

Quadrando e addizionando si ricava

$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 = \frac{\overline{PO}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \textit{costante}.$$

La Sig.ª Ved.ª *F. Prime*, osservando che i quattro punti P, M', O, N sono in una circonferenza di diametro $M'N = \dfrac{PO}{\cos\alpha}$, perviene immediatamente al risultato, giacchè allora si ha

$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 = \frac{\overline{OM'}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha} + \frac{\overline{ON}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha} = \frac{\overline{M'N}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha} = \frac{\overline{PO}^2}{\mathrm{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\overline{PO}^2}{4}\,\mathrm{cosec}^2\,2\alpha.$$

Dimostrazione del Sig. V. *Columbo*, studente a Napoli.

Sia $y = mx + b$ l'equazione della retta fissa e siano α, β le coordinate del punto variabile P della circonferenza. Le equazioni delle due rette MM', NN' saranno

$$y - \beta = m(x - \alpha)\,, \qquad y - \beta = -\frac{1}{m}(x - \alpha).$$

Da queste, facendo successivamente $y = 0$, $x = 0$, si ricava

$$OM = \alpha - \frac{\beta}{m}\,, \quad OM' = \beta - m\alpha\,; \quad ON = \alpha + \beta m\,, \quad ON' = \beta + \frac{\alpha}{m}\,,$$

donde

$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 = (\overline{OM}^2 + \overline{OM'}^2) + (\overline{ON}^2 + \overline{ON'}^2) =$$
$$(\alpha^2 + \beta^2)\left\{2 + m^2 + \frac{1}{m^2}\right\}.$$

Ma poichè $P(\alpha, \beta)$ è un punto della circonferenza di raggio PO, si ha $\alpha^2 + \beta^2 = \overline{PO}^2$, cosicchè

$$\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2 = \overline{PO}^2 . \left\{2 + m^2 + \frac{1}{m^2}\right\} = \textit{costante}.$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

211.** Se, presi ad arbitrio due punti L, M su di una conica φ, si trovano le proiezioni ortogonali H, K, del polo della corda LM, sugli assi a, b di φ, ed il simmetrico M' di M rispetto al centro C, si hanno le proprietà seguenti: 1° il simmetrico di M' rispetto ad a (a b) è allineato con K (con H), e con L; 2° i quattro punti L, M', $HK . \varphi \equiv P$, Q sono su una stessa circonferenza di cerchio.

A. Del Re.

212.** La conica che passa pei vertici di un rettangolo, di cui due lati sono gli assi di una conica φ, e pel punto all'infinito di uno dei diametri coniugati eguali di φ, passa pure pel punto all'infinito dell'altro di questi due diametri, e taglia φ in quattro punti conciclici.

A. Del Re.

213.** Se, sui lati a, b, c di un triangolo $ABC \equiv abc$, si considerano le involuzioni che hanno per punti coniugati i vertici del triangolo situati su essi lati, e per punti centrali i punti medii di questi, i coniugati dei punti nei quali a, b, c sono ordinatamente

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

tagliati da una retta arbitraria del piano, sono proiettati dai vertici opposti secondo tre rette concorrenti (*).

A. Del Re.

214. Il polo di una retta, rispetto ad una conica immaginaria dotata di sistema polare reale, è il coniugato isotomico dell'armonico (polo trilineare) della retta rispetto ad un triangolo autoconiugato che abbia il baricentro nel centro della conica.

A. Del Re.

215.** Dimostrare, elementarmente, che, se α, β, γ, α', β', γ' sono sei numeri reali, tali che almeno una delle quantità $\beta^2 - \alpha\gamma$, $\beta'^2 - \alpha'\gamma'$ sia negativa, si avrà

$$(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma - 2\beta\beta')^2 - 4(\beta^2 - \alpha\gamma)(\beta'^2 - \alpha'\gamma') > 0.$$

La proposizione è evidente quando una soltanto di dette quantità è negativa.

A. Del Re.

216. Se aa', bb' sono due coppie di diametri coniugati di una conica φ, di centro C, tali che si abbia, in grandezza e verso, $\angle aa' = \angle bb'$, e sono M, L' due punti arbitrari di φ, conducendo per M le parallele ad a', b', le quali seghino di nuovo φ, ordinatamente in M_1, M_2, e, ponendo $M_1L'.a' \equiv H$, $M_2L'.b' \equiv K$, si avranno le proprietà seguenti: 1° la retta HK taglierà φ in due punti che, insieme ad M, C ed al simmetrico L di L' rispetto a C, sono su di un' iperbole che ha gli assintoti paralleli ad a', b'; 2° sostituendo a' con a, e b' con b, e, chiamando H', K' i punti che, dopo ciò, vengono a sostituire H, K, il punto $HK.H'K' \equiv S$, rimane fisso quando l'$\angle aa' = \angle bb'$ varia.

A. Del Re.

217*. Nella serie $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n \ldots\ldots$ è costante il rapporto h di ciascun termine alla potenza di grado μ del termine precedente. Esprimere x_n per mezzo di x_1, n, h, μ.

A. Tagiuri.

218*. Determinare il termine generale della serie

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4, \ldots.$$

A. Tagiuri.

219.** Nella serie

$$y_1\ y_2 \ldots\ldots y_n \ldots\ldots$$

(*) Si desidera che la dimostrazione di questa proposizione sia fatta senza ricorrere ai sistemi polari, coi quali si può fare immediatamente.

si ha per $n > 1$

$$y_n = h y_{n-1} + l n + k.$$

Dato il valore a_r di y_r, determinare y_n in funzione di n, h, l, k, a_r.

A. Tagiuri.

220*. Data in un cerchio una corda AC, e, dato un punto K situato in essa, condurre per K un'altra corda BD in modo che il quadrilatero $ABCD$ risulti circoscrittibile.

S. Catania.

221*. In un triangolo ABC determinato per gli elementi a, B, C iscrivere due circonferenze eguali, tangenti a due lati ed esternamente fra loro; si riduca atta al calcolo logaritmico la formola del raggio. Se O ed O' siano i centri dei due cerchi qual condizione deve sussistere fra gli angoli B, C affinchè il triangolo AOO' risulti rettangolo in O'?

G. Bellacchi.

222*. Determinare un triangolo sferico rettangolo data la somma a (o la differenza d) dei cateti e l'altezza h relativa all'ipotenusa.

G. Bellacchi.

223*. Dimostrare che l'espressione

$$3^{4m+1} + 10 . 3^{2m} - 13,$$

per m intero e positivo qualunque, è divisibile per 64.

V. Columbo.

224*. Siano O, O' i centri di due cerchi dati che si segano ortogonalmente nei punti H, K; si tiri per H una retta qualunque che tagli i cerchi O, O' di nuovo in A, B rispettivamente. Le rette AO, BO' si taglino in M. 1° Qual'è il luogo del punto M? 2° Dimostrare che le rette KA, KH, KB, KM formano un fascio armonico.

F. Celestri

225*. Dimostrare che le due progressioni geometriche

$$\div 1 : 2 : 4 : \ldots\ldots \quad ; \quad \div 1 : 3 : 9 : \ldots\ldots$$

godono ciascuna della proprietà che combinando i loro termini, o tutti o in parte, per addizione e sottrazione dal 1° (a_1) fino all'n^{esimo} (a_n), si hanno per risultati i numeri da 1 fino ad $a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$.

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

BERNARDI Dott. GIUSEPPE. — *Soluzionario degli esercizi di trigonometria piana* contenuti nel Trattato di Trigonometria rettilinea e sferica di G. A. SERRET (trad. di A. Ferrucci). Firenze, Succ. Le Monnier, 1894 — Prezzo: L. 1,25.

Gli esercizi in parola sono 29 in tutto (*), ma variati e molto interessanti come sanno tutti coloro, e son molti, i quali conoscono il Trattato di Trigonometria del Serret, che meritamente gode grande riputazione anche fra noi. La lettura di questo soluzionario sarà dunque assai profittevole per gli scolari i quali verranno così ad acquistare famigliarità con quelle vedute e quegli artifizi che sono di guida nella soluzione dei problemi e riescono così utili per l'educazione della mente, tanto più che le soluzioni di cui trattasi sono sviluppate dal Sig. Prof. Bernardi con grande larghezza di particolari, con senso pratico e in modo assai completo avendo egli trasformato, in ogni caso, i risultati in modo da renderli calcolabili per logaritmi.

Non vi ha chi non veda, per la larga diffusione che la Trigonometria del Serret ha nelle nostre scuole, come sarebbe stato desiderabile che una simile pubblicazione non si facesse attendere quasi mezzo secolo dall' apparizione dell' opera originale e quasi otto lustri dalla prima edizione italiana, comunque sta il fatto che, non essendo apparsa finora, il Professor Bernardi ha fatto opera utile nell'eseguirla. Poche e di lieve momento sono le osservazioni critiche da farsi a questo soluzionario: noterò soltanto che nell'Es. IV, Cap. I. le congiungenti 16ª, 17ª, 19ª e 22ª, ossia i doppi dei seni degli angoli di 84°, 78°, 66° e 48°, non sono date nella loro forma più semplice, che nella dimostrazione delle identità dell'Es. V la via seguita non è sempre la più diretta, che, almeno per varietà, si poteva determinare uno dei limiti dei quozienti $\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}$ e $\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$ per $h=0$, trasformando il numeratore in un monomio, come suol farsi nei trattati di calcolo differenziale allora che si tratta di determinare la derivata di sen x e cos x, finalmente che per qualche problema, come ad es. quello di costruire un triangolo equilatero coi vertici su tre rette parallele o tre circonferenze concentriche (Capo III, Es. X), si poteva, *forse*, compenetrare la soluzione trigonometrica con quella sintetica con maggior profitto per il lettore.

Consigliamo la lettura del libro in questione in particolar modo agli studenti del 2° biennio (Sez. Fisico-matematica) degli Istituti tecnici, convinti che di questo consiglio, a fatto compiuto, non potranno essercene che grati.

A. LUGLI.

(*) Alcuni però costituiti da parecchi esempi congeneri che vengono in realtà ad aumentare sensibilmente questo numero.

FITZ-PATRICK (J.) et CHEVREL (G.). — *Exercices d'arithmétique*. Enoncés et solutions, avec une préface de J. Tannery. Gr. in-8°, p. 500. Paris, A. Hermann, 1893. - Prix: 10 fr..

Questi esercizi d'aritmetica, in numero di 500 circa, che hanno avuto l'onore d'una prefazione del chiaro matematico J. Tannery e sono stati giudicati assai favorevolmente in Francia (*Bulletin des Sciences Mathèmatiques* e *Revue générale des Sciences*), non sono da ritenere come una raccolta di vieti problemi sui numeri, ma costituiscono una serie di quistioni, la massima parte del più alto interesse, le cui soluzioni, lungi dall'essere basate sopra artifici più o meno eleganti e inattesi, sono condotte per la via più semplice e naturale, così da raggiungere completo valore didattico.

Ove si consideri che la letteratura scientifica, anche straniera, è scarsa in lavori di questo genere e per quanto io sappia non vi è in Italia che il *Soluzionario degli Esercizi proposti nell'aritmetica di G. Bertrand* con note ed aggiunte del Dott. D. Fontebasso, che un po' vi s' accosti, credo utile di segnalare ai professori di matematica delle nostre Scuole secondarie un' opera la quale può riuscire loro di non poco ausilio nell'insegnamento e che anche per se sola merita studio e considerazione.

Il libro dei Sigg. Fitz-Patrick e Chevrel comprende 16 capitoli, dei quali i primi 14 sono riserbati alle ordinarie divisioni dell'aritmetica. Ciascuno dei medesimi è preceduto da un sommario delle proprietà dei numeri inerenti all'argomento sul quale si svolge, ossia enunciazione di definizioni, regole e teoremi. Il capitolo XV riguarda non poche *quistioni diverse* ed ha sviluppo piuttosto considerevole. L'ultimo capitolo è destinato a delle *nozioni elementari sulla teoria dei numeri*, ma può venir riguardato, più esattamente, come un'introduzione abbastanza estesa a questa teoria. Termina il libro una nota del sig. Matrot, relativa ad una dimostrazione elementare del teorema di Bachet, ossia che « Un intero qualunque è la somma di quattro quadrati al più ».

Fra le *quistioni diverse* vi hanno delle proprietà dei numeri figurati, triangolari, quadrangolari, ecc., e amicabili, non che un saggio della teoria dei numeri perfetti, seguito da talune notizie storiche. E notizie di questa natura si trovano pure qua e là disseminate nel corso dell'opera, nella quale è fatta larga parte all'applicazione del metodo di deduzione da n ad $n+1$.

Dire anche solo degli esercizi più salienti sarebbe troppo grave, basterà accennare che si trovano in questo libro moltissimi caratteri di divisibilità non considerati nei manuali d'aritmetica, alcune quistioni riguardanti il numero delle divisioni a farsi nella ricerca del massimo comun divisore di due numeri, la dimostrazione che un polimonio razionale intero in t, a coefficienti interi, non può rappresentare tutti e solo i numeri primi, due dimostrazioni del teorema di Fermat, oltre a quella che trovasi nell'ultimo capitolo, alcune somme di serie a termini frazionari, le proprietà più caratteristiche delle frazioni decimali periodiche che non figurano nei trattati d'aritmetica, la teoria generale dei caratteri di divisibilità in un sistema di numerazione di base qualunque, finalmente alcune quistioni riguardanti l'approssimazione della radice quadrata.

Fra le nozioni elementari sulla teoria dei numeri si trovano molte proprietà dell' indicatore, alcuni casi di divisibilità di polinomi per polinomi e polinomi per determinati numeri, i teoremi di Fermat e Wilson ed i loro reciproci, non che la generalizzazione di quei teoremi, delle proprietà inerenti a numeri primi di date forme, i teoremi che conducono alla ricerca delle radici primitive d'un numero primo p, dei teoremi affini a questo soggetto ed altro.

Questo rapido cenno mi pare sufficiente a mostrare come il libro in parola meriti effettivamente di essere conosciuto. A. Lugli.

RIBONI Dott. GAETANO. — *Elementi di Geometria* ad uso delle Scuole secondarie superiori. Bologna, N. Zanichelli, 1894. – Prezzo L. 3.

Questo libro può considerarsi come l'ampliazione di un altro pubblicato non è molto dallo stesso A. e destinato alle Scuole secondarie inferiori, del quale fu data notizia in questo periodico (Anno VII, 1892, p. 77). Anche per l'attuale sussistono quei pregi didascalici che mi occorse di rilevare nella prima compilazione e io credo che la nuova operetta possa fare onorevole compagnia ai buoni manuali di geometria pubblicati negli ultimi anni.

Una delle qualità per le quali a parer mio il libro si fa particolarmente raccomandare è la forma stringata seguita dall'A. che gli ha permesso di sviluppare in 253 pag. in 8° pic. tutto ciò che si richiede per l'insegnamento della geometria nelle nostre Scuole mezzane ed anche più di tanto, omettendo però gli esercizi che sogliono accompagnare consimili lavori. Va pure accennato che mentre la planimetria ha sviluppo sufficientemente completo, la stereometria è tenuta in confini piuttosto ristretti.

L'A. non ha creduto di scegliere per definizione dell'equivalenza delle figure quella razionale adottata da parecchi moderni trattatisti, quantunque se ne sia valso nella sostanza, per non incorrere nelle difficoltà che presenta il confronto delle figure, ritenendo come un dettato dell'intuizione che date due linee, due superficie, due solidi finiti, l'estensione dell'uno sia maggiore, uguale o minore di quello dell'altro; e non gli si può dar torto perchè una tale difficoltà ha didatticamente gran peso. Così la teoria delle grandezze proporzionali è basata su quella aritmetica delle proporzioni, premessa la teorica della misura, analogamente a quanto è stato fatto dai Prof. Lazzeri e Bassani nei loro *Elementi di Geometria* e anche qui non si può disapprovare per quelle ragioni che furono tanto bene esposte dal Prof. Bettazzi nella recensione fatta del libro menzionato (V. *Periodico*, Anno VII, p. 155 e seg.). Del resto il libro del Prof. Riboni ha carattere essenzialmente sintetico e mi trovo d'accordo con lui nel ritenere che possa servire come testo anche pei Licei.

Premesso ciò e facendo rilevare a titolo di lode come opportuna l'enunciazione delle proprietà delle grandezze, prima studiate, esposte al n. 74, (fra queste manca però quella simbolicamente espressa da $\frac{1}{m} A \pm \frac{1}{m} B = \frac{1}{m} (A \pm B)$, di cui si fa uso più tardi), estese in seguito ad altre, l'esposizione della teorica delle parallele quasi in principio, ciò che dà presto in mano ai discenti uno strumento assai proficuo per le applicazioni, l'esame di tre *luoghi* che escono dal comune (pp. 65, 66), il teorema reciproco di quello di Pitagora generalizzato (n. 207), che viene ordinariamente omesso, ecc., credo opportuno rilevare alcune mende che vorrebbero tolte.

In primo luogo sarebbe opportuna una più precisa classificazione dei postulati e delle definizioni, che non sempre è fatta nettamente, perchè ciò non si può pretendere dal lettore. Così pure qualche enunciato di proposizioni sarebbe da precisare maggiormente: cito ad es. il corol. 1° a p. 43 e quello a p. 53, il teorema a p. 107, la proprietà esposta al n. 353. Qualche dimostrazione vorrebbe migliorata; tal è quella del teor. al n. 196 in cui bisognava dire che A' ed A si possono pensare in ultimo composti di parti eguali e così B' e B: sono poi da farsi delle suddivisioni, non delle divisioni (da tale difetto va esente la dimostrazione analoga al n. 545); così pure la dimostrazione del 2° comma al n. 239, ove non è provato che fra le grandezze considerate, una ve ne sia minore di una grandezza piccola comunque assegnata; la dimostrazione della nota a p. 105 dalla quale, anche per $p > 2$ non risulta che le frazioni $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m'+1}{n'}$,.... siano decrescenti; quella della proposizione al 2° comma della p. 150 dove alla differenza $r - a_n < \frac{l_n}{2}$ sarebbe opportuno sostituire $r - a_n < l_{2n}$. Finalmente osserverò che il richiamo alla dimostrazione che suol darsi in Aritmetica del teorema che «Se $A:B::C:D$ e $M:B::C:N$ si ha $A:M::N:D$», per estenderlo alle grandezze geometriche, non è corretto per quelle ragioni che sono esposte al n. 255.

Ciò nonostante mi è grato riconoscere un' altra volta che la nostra letteratura scolastica si è accresciuta d'un buon libro di più.

A. LUGLI.

LAISANT (C.-A.), Docteur ès Sciences — *Recueil de problèmes de Mathématiques classés par divisions scientifiques*, contenant les énoncés avec renvoi aux solutions de tous les problèmes posés, depuis l'origine, dans divers journaux: *Nouvelles Annales de Mathématiques, Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales, Mathésis, Nouvelle Correspondance mathématique.* 7 vol. in-8. — Paris, Gauthier-Villars.

Il titolo stesso indica la natura di quest'opera di cui son comparsi finora 4 vol., ossia: I. *Aritmetica. Algebra elementare. Trigonometria* — II. *Geometria piana. Geometria solida. Geometria descrittiva* — IV. *Geometria analitica del piano (e Geometria superiore)* — V. *Geometria analitica dello spazio (e Geometria superiore).*

Considerando come le pubblicazioni periodiche di lunga data divengano per necessità sempre più rare, s'intende la difficoltà di averle sotto mano, oltre al fastidio di lunghe e pazienti ricerche per formarsi un'idea di quanto contengono anche limitatamente ad uno scopo particolare com' è quello dell' indagine delle *quistioni proposte* relative ad un dato argomento. L'opera del Sig. Dott. Laisant non può quindi che riuscire assai utile agli studiosi tanto più che i problemi raccolti sono disposti secondo le divisioni delle diverse parti delle matematiche e rappresentano in qualche modo il riassunto dei lavori di mezzo secolo (cioè dall'apparizione delle *Nouvelles Annales de Math.*, avvenuta nel 1842). Quasi tutti interessanti, alcuni son dovuti a matematici illustri (quali *Chasles*, *Möbius*, *Jacobi*, *Steiner*, ecc.) e meritano l'attenzione non soltanto in se, ma ben anche per ciò che concerne il progresso della scienza pura.

Con opportuni richiami l'A. della raccolta pone il lettore in grado di trovare quella qualsiasi soluzione che volesse studiare ricorrendo alle collezioni delle biblioteche.

I quattro volumi pubblicati contengono 32 problemi d'aritmetica, 138 d'algebra, 161 di trigonometria, 813 di geometria piana elementare e complementare (e di geo. descrittiva), 1183 di geometria analitica a due dimensioni (e geo. superiore), 334 di geometria analitica a tre dimensioni (e geo. superiore).

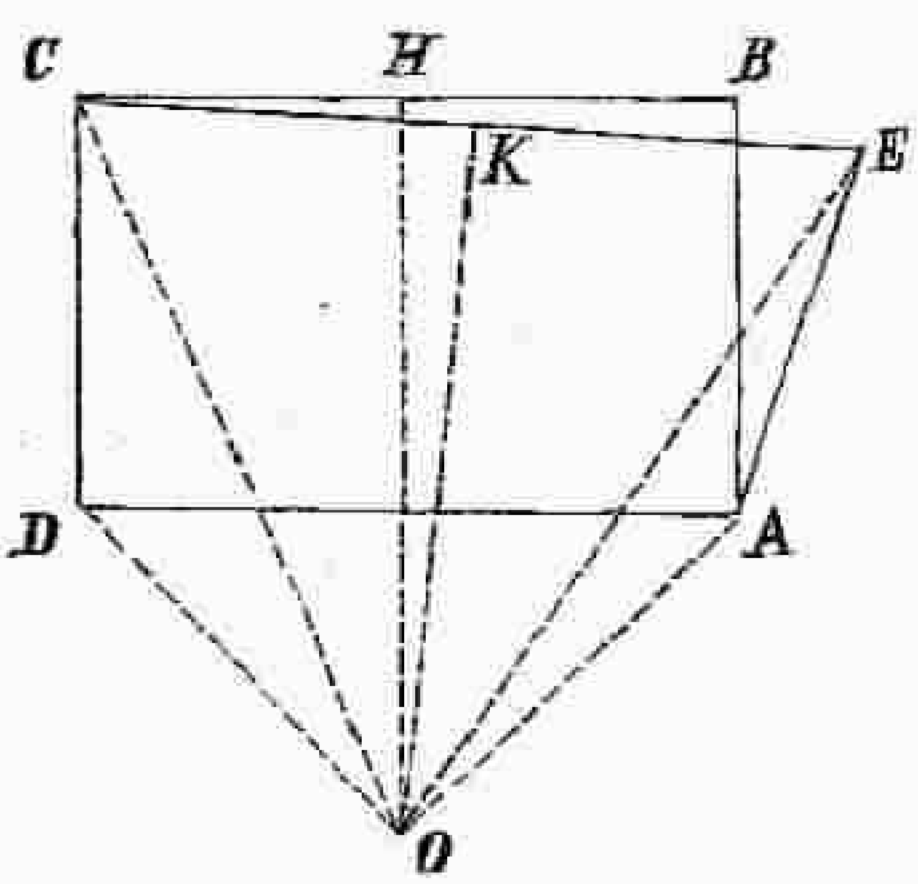
Si potrebbe domandare se non fosse stato utile estendere la raccolta spogliando altri periodici pubblicati in lingua diversa dalla francese, quale ad es. l'eccellente *Zeitschrift für math. u. naturwis. Unterricht* redatta da J. C. V Hoffmann, in cui sono stati pubblicati fin'adesso ben 1284 problemi quasi tutti di grande interesse, ma è certo che così facendo il lavoro già assai lungo di collezionamento sarebbe riuscito ancor più gravoso.

VARIETÀ

Problemi curiosi e paradossi matematici.

(*Continuazione e fine*: *V. pag. 41 e 75*).

38. $ABCD$ è un rettangolo. Si faccia l'angolo DAE ottuso e si prenda $AE = AB$. Siccome le rette CB, CE s'incontrano in C, così le HO, KO ad esse rispettivamente perpendicolari nei loro punti di mezzo H e K, s'incontrano in O. Si traccino le OA, OD, OC, OE; sarà $OA = OD$, $OC = OE$, e saranno quindi eguali i due triangoli ODC, OAE che hanno i tre lati dell'uno rispettivamente eguali ai tre lati dell'altro, e perciò $\angle ODC = \angle OAE$. Ma per essere $OD = OA$, nel triangolo ODA sarà $\angle ODA = \angle OAD$ e sottraendo

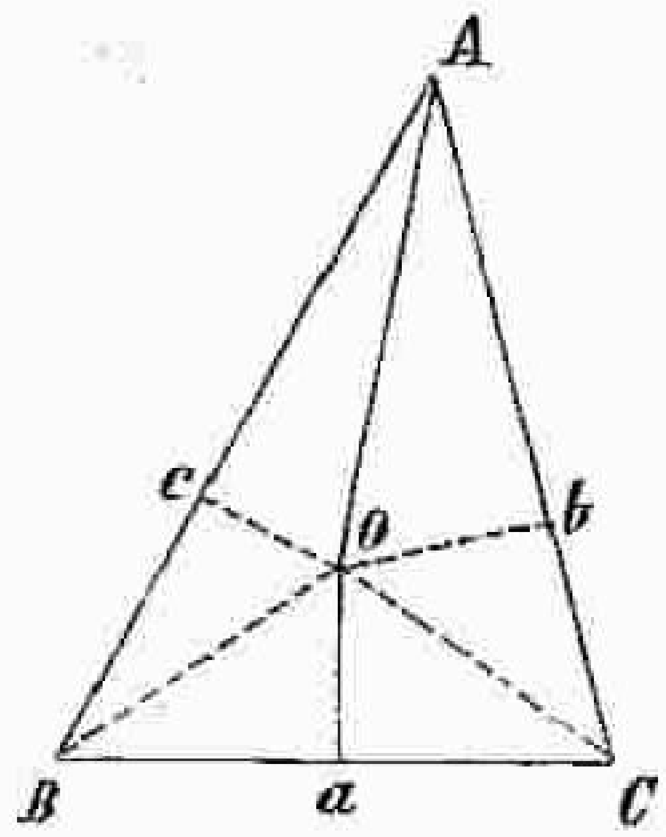


$$\angle ODC - \angle ODA = \angle OAE - \angle OAD$$

ossia $\angle ADC = \angle EAD$

cioè: *un angolo retto può essere eguale ad un angolo ottuso.*

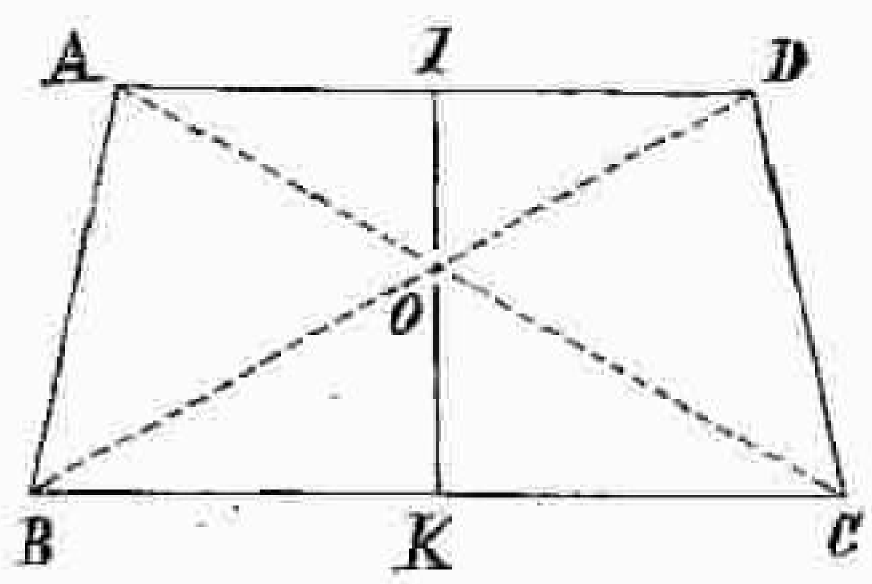
39. *Tutti i triangoli sono isosceli.* Dato un triangolo ABC, consideriamo la bisettrice AO dell'angolo A e la perpendicolare aO nel punto di mezzo di BC (asse di BC). Se la bisettrice è perpendicolare sul lato BC si sa ch' essa si confonde con aO e che $AB = AC$. Se la bisettrice non è perpendicolare al lato BC, dal punto O, in cui essa incontra l'asse aO, abbassiamo le perpendicolari Ob, Oc rispettivamente su AC ed AB. I triangoli AOb, AOc sono eguali, siccome triangoli rettangoli aventi l'ipotenusa AO comune e gli angoli acuti OAb, OAc eguali; dunque $Ab = Ac$ (1) ed $Ob = Oc$. I triangoli rettangoli aOB, aOC sono eguali perchè hanno gli angoli retti in a compresi fra lati eguali, ossia: Oa comune ed $aB = aC$. Dunque $OB = OC$. Infine i triangoli rettangoli ObC, OcB sono eguali perchè hanno le loro ipotenuse OC, OB eguali e i lati Ob, Oc eguali. Ne risulta $bC = cB$ (2). Dalle relazioni (1) e (2) si deduce



$$Ab + bC = Ac + cB,$$

ossia $AC = AB$. Dunque *tutti i triangoli sono isosceli.*

40. *Se un quadrilatero ha due lati opposti* AB *e* CD *eguali, gli altri due sono paralleli.* Dai punti medi I, K dei due lati AD, BC s' innalzino delle perpendicolari che s' incontrino in O e si traccino OA, OB, OC, OD. Allora $OA = OD$, $OB = OC$, e siccome $AB = CD$ per ipotesi, i due triangoli OAB, ODC sono uguali. Gli angoli AOB, COD sono dunque parimenti uguali. Da $\angle IOA = \angle IOD$ e $\angle KOB = \angle KOC$ risulta in tal modo



$$\angle IOA + \angle AOB + \angle BOK = 180^\circ,$$

ossia che IOK è una linea retta: i due lati AD, BC perpendicolari a questa retta sono quindi paralleli.

41. Scomporre un pentagono regolare in sette parti in modo che riunite convenientemente formino un quadrato.

Nota. Come fu altrove avvertito la maggior parte dei problemi o quistioni curiose che precedono è estratta dal libro del Sig. A. Rebière: *Mathématiques et Mathématiciens*. Fanno eccezione il n. **16** che si trova nel libro: Wertheim (G.): *Elemente der Zahlentheorie*, p. 45, il n. **18** che figura quale quistione proposta dal rimpianto E. Lucas nel fas. di Gennaio del nuovo periodico *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, i n. **23** a **27** e il n. **40** che si trovano in *Mathesis* (t XIII, pp. 224-25), come venne già accennato il n. **28** estratto da Laisant et Perrin: *Algèbre*, p. 312, finalmente i n. **38** e **39** levati da W. W. Rouse Ball: *Mathematical Recreations and Problemes of past and present times.*

Nè va taciuto che non poche delle risposte che seguono son proprie del Redattore di questo giornale.

Risposte. — **1.** 29. **2.** Dopo 10 giorni e 9 notti.

3. Giuseppe prese il 16^{esimo} od il 31^{esimo} posto e rimase finalmente con un uomo solo che doveva lasciarsi uccidere a sua volta ma che preferì arrendersi al nemico.

4. Luigi nacque il 16 maggio 1867 e Giovanni il 28 settembre 1864.

5. 20 giorni. **6.** 39 buoi.

7. Il giudice chiamato arriva sul suo cammello, vi sono allora 18 cammelli; il primo dei fratelli ne riceve 9, il secondo 6 e il terzo 2. Il giudice risale sul proprio cammello e rientra sotto la sua tenda. — Si ha infatti: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18}$.

8. Il battelliere prende la capra e la porta all'altra sponda. Ritorna: prende il lupo e lo porta al di là, recando seco la capra nel ritorno. Lascia la capra in cima alla riviera e porta il cavolo all'altra sponda. Finalmente torna vuoto a riprendere la capra.

9. Chiamisi *primo* il vaso della capacità di 12 litri, *secondo* quello capace di 8 l., *terzo* il rimanente. Il modo più semplice per raggiungere l'intento è il seguente: Si riempia col vino che si trova nel 1° vaso il 2°, poi col liquido che si trova in questo il 3°; si versi il contenuto del 3° nel 1°, quello del 2° nel 3° e col liquido del 1° vaso si ricolmi il 2°. Dopo ciò si vengono a trovare nei tre vasi 1 litro, 8 l. e 3 l. di vino. Non rimane quindi che a riempire, col liquido che si trova nel 2° vaso, il 3° ed allora rimangono nel 2° precisamente 6 litri. **10.** 10 ore.

11. La bilancia va supposta a due piatti. I quattro pezzi devono pesare 1, 3, 9, 27 libbre.

12. Si formi il numero $N = 2 . 3 . 4 \ldots m(m+1)$, poi si prendano i numeri $N+2$, $N+3, \ldots . N+m$, $N+m+1$.

13. Sono i quadrati di 7, 67, 667, 6667, ... Ciò proviene dal fatto che quadrando i numeri 7, 67, 667, ... col riguardarli come somma di due numeri $60+7$, $600+67$, $6000+667$, il doppio prodotto di questi numeri ha la forma 840, 80400, 8004000, ...

14. 36: la somma dei primi 36 numeri è 666.

15. $74+25+\frac{3}{6}+\frac{9}{18}$. **16.** 793. **17.** 119.

19. La parte d'un figlio legittimo è

$$\frac{1}{l}-\frac{n}{2\,l(l+1)}+\frac{n}{2^2\,l(l+1)(l+2)}-\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots .3.2.1}{2^n\,l(l+1)\ldots .(l+n)}.$$

21. Litri 46,1568 di vino e l. 3,8432 d'acqua. **22.** 756 salti.

23. L'equazione può scriversi $(x-a)^2-(x-b)^2=0$ o $(b-a)\{x-a+x-b\}=0$. Essa dunque è formata oltre del fattore $b-a$, corrispondente al primo membro dell'equazione $(x-a)-(x-b)=0$, di un altro fattore che posto $=0$ dà la soluzione $x=\frac{1}{2}(a+b)$.

24. Ciò proviene dal fatto che pel valore di x, radice di $\frac{3x-b}{3x-5b}=\frac{3a-4b}{3a-8b}$, che è $x=a-b$, la frazione $\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b}$ assume il valore indeterminato $\frac{0}{0}$.

25. Le radici del sistema d'equazioni $\frac{x-a+c}{y-a+b}=\frac{b}{c}$, $\frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}$ sono $x=a+b-c$, $y=a-b+c$ e per esse i primi membri di $\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{b}{c}$, $\frac{x-a-b+c}{y-a+b-c}=\frac{a+b}{a+c}$ prendono la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

26. La radice dell'equazione è $x=a+b$ e per questo valore le ultime uguaglianze divengono $\frac{0}{a+b+1}=\frac{0}{a+b-1}$ e $\frac{a+b+1}{0}=\frac{a+b-1}{0}$.

27. Dividendo per $a-a$ si divide per 0.

28. Dividendo per $a-b-c$ si divide per 0 poichè per ipotesi $a-b=c$.

29. Siano A e B i dati vertici. Si descrivano due cerchi con centri A e B e raggio AB, che si tagliano in E, e si portino dopo BE, sul cerchio di centro A, due archi EF, FG uguali a BE. Con centri B e G e raggi BF, GE si descrivano due cerchi che si tagliano in H, finalmente cogli stessi centri e con raggio HA altri due cerchi che si taglieranno in D terzo vertice del quadrato.

30. Si divida nel numero dato di parti la circonferenza e si congiunga col centro.

31. Se MN è la corda dell'angolo ACB, che divide il triangolo nel modo cercato, si ha

$$CM=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-\frac{ab}{2}}, \qquad CN=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-\frac{ab}{2}},$$

dove a, b sono i lati dell'angolo ACB e p il semiperimetro del triangolo.

32. h altezza nota. Raggi $\frac{h}{4}(\sqrt{3}-1)$ e $\frac{h}{4}(3-\sqrt{3})$.

33. $2a$ e b base e lato uguale del triangolo dato, $2x$ ed y analoghi elementi del triangolo cercato:

$$2x=\frac{b-a+\sqrt{b^2+6ab-7a^2}}{2} \qquad y=\frac{5a+3b-\sqrt{b^2+6ab-7a^2}}{4},$$

espressioni che si costruiscono facilmente.

34. 5, 12 e 13 oppure 6, 8 e 10.

35. Si divida il quadrato dato in quattro quadrati uguali unendo i punti medî dei lati opposti e altrettanto facciasi per tre di quest'ultimi. Si ottengono così 12 quadrati dei quali il 1°, 2°, 3°, 4° posano su un lato del dato, il 5°, 6°, 7°, 8° posano rispettivamente sui precedenti, il 9° e 10° sul 7° e 8° e l'11° e il 12° sul 9° e 10°. Dopo ciò le quattro parti sono costituite dai quadrati (5°, 1°, 2°), (3°, 4°, 8°), (6°, 7°, 9°), (10°, 12°, 11°).

36. Il quadrato dato sia $ABCD$. 1° Si divida $ABCD$ in quattro quadrati unendo i punti medi dei lati opposti e si conducano tutte le diagonali di quest'ultimi. Ogni coppia di due dei triangoli risultanti dà un quadrato. — 2° Si dividano i lati AB, BC, CD, DA per metà in M, N, P, Q. Si tirino AN, BP, CQ, DM e la divisione è compiuta mediante i quattro triangoli, i quattro trapezi e il quadrato ottenuto. — 3° Si divida AD in tre parti eguali $AM = MN = ND$ e si tirino MP, NQ parallele ad AB, basterà mostrare come possa dividersi il rettangolo MB in parti che riunite diano un quadrato. Si costruiscano su DA ed AB due semicerchi il primo esternamente, il secondo internamente al quadrato: si prolunghi DM fino ad incontrare il semicerchio esterno in R. Si tiri RA e per A la perpendicolare AE ad incontrare MP in E e il semicerchio AB in I. Si congiunga I con B, tagliando MP in F e si tirino per E ed F una parallela ed una perpendicolare ad FB, la prima a tagliare AB in G, la seconda a tagliare EG in H. Il rettangolo MB risulta in tal modo scomposto nel modo voluto in quattro triangoli ed un trapezio (*).

37. A 2^h e $\frac{120}{1427}$ di minuto la lancetta dei secondi è per la prima volta bisettrice dell'angolo formato dalle altre due.

Non è possibile che gli estremi delle 3 lancette formino un triangolo equilatero.

38. L'incoerenza deriva dall'essere l'$\angle\ OAE$ concavo.

39. Se ABC non è isoscele, O cade fuori del triangolo e i piedi delle perpendicolari ai lati sono uno interno l'altro esterno ai lati medesimi.

40. L'inesattezza sta in ciò che il punto O cade fuori del quadrilatero.

41. Sia $ABCDE$ il pentagono regolare. Si prolunghi la diagonale CE di un segmento $EF = EA$ e si tiri AF. Risulta $\Delta\, FEA = DCE$ e trapezio $ABCF =$ pent. $ABCDE$. Per il punto medio G di AF si conduca una parallela a BC a tagliare il prolungamento di BA in H ed EF in I, sarà pent. $ABCDE =$ parallel. $BHIC$. Da H come centro e con raggio eguale alla media proporzionale fra la base e l'altezza di questo parallelogrammo, si descriva un cerchio che tagli CE in L e si tiri LH, che incontra EA in M e AF in N. I tre triangoli ANH, ANM, NHG e il pent. $MNGIE$ sono i quattro pezzi in cui va diviso il triangolo CED. Finalmente se da B si abbassa una perpendicolare su HL si scompone $ABCE$ in tre altri pezzi che insieme ai precedenti risolvono il problema.

(*) Questa costruzione od altra analoga, serve per risolvere il problema generale di dividere un rettangolo qualsiasi in parti tali da comporre un quadrato e quindi può servire a risolvere il problema di scomporre un quadrato in parti che riunite convenientemente diano n quadrati.

Finita la redazione il dì 31 maggio 1894.

SAGGIO ANALITICO

DI INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FRAZIONI (*)

1. Per ora supporremo conosciuti soltanto i numeri interi. Come è noto, dividere un numero a per un numero b significa trovare quel numero che moltiplicato per b dia a. Un tal numero si suol indicare con la *notazione* $a:b$, quando però la divisione è possibile. Preferiamo ora d'indicarlo con la notazione $\frac{a}{b}$; cioè vogliamo porre la seguente *definizione simbolica :*

$$\frac{a}{b} \times b = a \, .$$

Ma se il numero a non è un multiplo del numero b non si trova nessun numero il quale risponda alla *definizione* di $\frac{a}{b}$. Cosicchè in tal caso la divisione dovrà dichiararsi impossibile. Per altro potrà rendersi possibile mediante l'estensione del *campo* dei numeri, ora limitato agl' interi, e l' introduzione di opportune classi di nuovi enti aritmetici chiamati pure numeri.

2. Si dicono *parti aliquote* 1ª, 2ª, 3ª, ... di 1, e si indicano (in accordo con la notazione che ora abbiamo convenuto di adottare) rispettivamente con le scritture $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots,$ dei nuovi enti numerici che diremo anche *unità frazionarie*, e che definiremo con le eguaglianze

$$\frac{1}{1} = 1, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \ldots,$$

ovvero, conforme il noto concetto di ripetizione o moltiplicazione,

$$\frac{1}{1} \times 1 = 1\,, \quad \frac{1}{2} \times 2 = 1\,, \quad \frac{1}{3} \times 3 = 1\,, \ldots$$

In generale, se n esprime uno dei numeri naturali 1, 2, 3, ...,

(*) Nella 2ª edizione del mio *Trattato di Aritmetica razionale* (Padova, 1891) trovasi un cenno di questo metodo analitico. Ma nella nuova edizione, pubblicata in questi di, ho soppresso quel paragrafo, che offro interamente rifatto e assai migliorato ai lettori di codesto *Periodico*, nella speranza di invogliare qualche professore a esporre in iscuola la teoria delle frazioni seguendo la via qui tracciata.

si chiamerà *parte aliquota* n^{ma} *di 1*, e si indicherà con $\frac{1}{n}$, una nuova *unità*, detta *unità frazionaria*, definita dall'uguaglianza

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}=1\,,$$

dove il simbolo $\frac{1}{n}$ è ripetuto n volte; cioè, conformemente a questo concetto di ripetizione, il simbolo $\frac{1}{n}$ è definito dall'uguaglianza

$$\frac{1}{n}\times n=1\,.$$

Qui il segno $+$ di somma e il segno $\times$ di moltiplicazione indicano l'operazione del considerare insieme due o più enti unitarî uguali a $\frac{1}{n}$. Cosicchè il segno $+$ nelle uguaglianze precedenti dovrebbe leggersi *e* piuttosto che *più*; per esempio, l'uguaglianza $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, dovrebbe leggersi $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{3}$ *fanno* 1; più precisamente, come vedremo fra poco, UN TERZO *e* UN TERZO *e* UN TERZO *fanno* UNO. Il segno $\times$ dovrebbe leggersi *ripetuto* anzichè *moltiplicato per;* così, p. es., l'uguaglianza $\frac{1}{3}\times 3=1$ dovrebbe leggersi $\frac{1}{3}$ *ripetuto* 3 *volte fa* 1, e più precisamente UN TERZO *ripetuto* TRE *volte fa* UNO, o anche TRE TERZI *fanno* UNO, o ancora TRE UNITÀ FRAZIONARIE SECONDO IL NUMERO 3 *fanno* UNA UNITÀ INTERA. Ma, per seguire l'uso comune, leggeremo il segno $+$ anche *più*, e il segno $\times$ anche *moltiplicato per*.

Le unità frazionarie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{n}$, ... si leggono rispettivamente *un mezzo, un terzo, un diciasettesimo, un ennesimo*, ...

3. Si chiamerà *numero rotto* o *numero frazionario* o *numero fratto*, o, semplicemente *rotto, frazione, fratto*, una unità frazionaria qualsiasi $\frac{1}{n}$, oppure un'espressione $\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}$ contenente un numero qualsiasi m di unità frazionarie uguali legate fra loro con il segno $+$ di somma; il quale segno $+$, giova dire anche una volta, indica qui l'operazione del considerare insieme quanti enti si vuole tutti uguali a $\frac{1}{n}$. Quest'espressione, conforme sempre al solito concetto di ripetizione o moltiplicazione, potrà indicarsi con $\frac{1}{n}\times m$, e si leggerà *m ennesimi*.

4. La *frazione* $\frac{1}{n} \times m$ si dirà *somma* o *totale* di m addendi tutti uguali all'unità frazionaria $\frac{1}{n}$.

Così la frazione $\frac{1}{3} \times 5$ esprimerà la somma $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, e si leggerà 5 *terzi*.

Anche le unità frazionarie entrano nel tipo $\frac{1}{n} \times m$, e corrispondono a $m = 1$.

In opposizione ai rotti, i numeri naturali 1, 2, 3, ... si dicono interi.

5. D'ora innanzi con la parola numero, senz'altra qualificazione, si dovrà intendere tanto un numero intero quanto un numero frazionario; ma con le lettere dell'alfabeto si designeranno soltanto numeri interi.

6. *I numeri frazionarî definiti in questo modo analitico coincidono con quelli definiti mediante la considerazione di grandezze.*

Per es., una lunghezza rappresentata dal numero frazionario $\frac{1}{7} \times 4$, si ottiene prendendo un segmento uguale alla somma di 4 segmenti uguali ciascuno a *un settimo* dell'unità lineare prescelta, cioè alla parte aliquota secondo il numero 7 di tale unità.

In generale, la frazione $\frac{1}{n} \times m$, cioè *m ennesimi*, di una grandezza è una grandezza che si ottiene *prendendo* o *contando* o *ripetendo* o *sommando* m grandezze tutte eguali a una *parte aliquota secondo il numero n* della grandezza unitaria, e il numero frazionario $\frac{1}{n} \times m$ *rappresenta* appunto la grandezza considerata.

7. Nella frazione $\frac{1}{n} \times m$, il numero intero n determina *quali* siano le unità frazionarie considerate, e *dà il nome* a queste unità medesime, quindi, assai opportunamente, chiamasi il *denominatore* della frazione: invece, il numero intero m determina *quante* siano tali unità frazionarie, esprime cioè quante se ne sono prese, quante se ne sono contate, *numera* cioè tali unità, quindi, molto appropriatamente, si chiama il *numeratore*.

Il numeratore e denominatore si dicono i *termini* della frazione.

Ogni unità frazionaria è da considerarsi come una frazione il cui numeratore è 1.

8. Le frazioni di uguali denominatori si dicono della *stessa specie;* fra esse sono uguali quelle di uguale numeratore, disuguali quelle di numeratore diverso, e fra queste sarà maggiore quella di numeratore maggiore.

Per. es., $\frac{1}{7} \times 8$ è maggiore di $\frac{1}{7} \times 5$, e questa è minore di quella; si esprime ciò scrivendo indifferentemente l' una o l' altra delle seguenti *disuguaglianze:*

$$\frac{1}{7} \times 8 > \frac{1}{7} \times 5 \quad , \quad \frac{1}{7} \times 5 < \frac{1}{7} \times 8 \,.$$

Ciò è sempre conforme al noto concetto fondamentale del contare: e poi, effettivamente, l' aggregato di 8 *unità* (che nel caso attuale sono chiamate *settimi*) è maggiore dell'aggregato di 5 *unità;* 8 *decine* è un aggregato maggiore dell' aggregato 5 *decine*, e così via.

(*Continua*). GIOVANNI GARBIERI.

SU UN TRIANGOLO NOTEVOLE

1.° — Furono studiati, anche su questo Periodico (*), il triangolo i cui vertici dividono secondo uno stesso rapporto i lati di un altro triangolo ABC, e altri triangoli che da questo dipendono. Tutti questi triangoli appartengono ad una unica classe di triangoli che hanno proprietà interessanti.

Indico con M un punto del piano di un triangolo ABC, con M_a, M_b, M_c i piedi delle rette che lo proiettano da A, B, C rispettivamente su BC, CA, AB; e pongo

$$\frac{AM_c}{M_cB} = m\,, \quad \frac{BM_a}{M_aC} = p\,, \quad \frac{CM_b}{M_bA} = q\,, \quad \text{onde } mpq = 1.$$

(*) Anno II, pag. 1, e pag. 65. — Anno V, pag. 106.

Sieno poi P, Q altri due punti analoghi, a cui corrispondono sui lati AB, BC, CA rispettivamente i rapporti

$$\frac{AP_c}{P_c B}=p, \quad \frac{BP_a}{P_a C}=q, \quad \frac{CP_b}{P_b A}=m; \quad \frac{AQ_c}{Q_c B}=q, \quad \frac{BQ_a}{Q_a C}=m, \quad \frac{CQ_b}{Q_b A}=p.$$

E' MQP il triangolo a cui accennava.

Chiamerò i punti M, P, Q *circolarmente associati rispetto ad* ABC. Dato uno di essi, gli altri due restano determinati.

Per avere omogeneità nelle formole porrò $m=\frac{\beta}{\alpha}$, $p=\frac{\gamma}{\beta}$, e quindi $q=\frac{\alpha}{\gamma}$. Allora α, β, γ risultano proporzionali ai triangoli MBC, MCA, MAB e sono le coordinate baricentriche di M rispetto ai lati BC, CA, AB del triangolo fondamentale ABC. Così β, γ, α risultano proporzionali ai triangoli PBC, PCA, PAB e sono le coordinate baricentriche di P rispetto ai lati stessi BC, CA, AB; e γ, α, β risultano proporzionali ai triangoli QBC, QCA, QAB e sono le coordinate baricentriche di Q rispetto ai medesimi lati BC, CA, AB.

Per $\alpha=a^n$, $\beta=b^n$, $\gamma=c^n$, (a, b, c misure di BC, CA, AB), i punti M, P, Q sono punti noti nella Geometria del triangolo; p. e. per $\alpha=a^{-2}$, $\beta=b^{-2}$, $\gamma=c^{-2}$, M, P, Q sono rispettivamente il punto isotomico del punto di Lemoine e i due punti di Brocard.

2.° — Se una delle α, β, γ è zero, p. e. $\alpha=0$, i punti M, Q, P cadono rispettivamente sui lati BC, CA, AB e reciprocamente. *Il triangolo* MQP *diventa allora il triangolo, i cui vertici dividono* BC, CA, AB *nello stesso rapporto* $\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)$.

Se due delle α, β, γ sono nulle, p. e. $\alpha=0$, $\beta=0$, i punti M, Q, P cadono rispettivamente sui punti C, A, B.

Tutte tre le α, β, γ non possono essere nulle.

Se $\alpha=\beta=\gamma$, i punti M, P, Q coincidono col baricentro G di ABC. A valori positivi di α, β, γ corrispondono posizioni di M, P, Q interne ad ABC; onde *per valori positivi di* α, β, γ *il valor minimo di* MQP *è zero e il valor massimo è* ABC.

3.° — Se un lato di MQP, p. e. MQ, passa per un vertice di ABC, p. e. per A, i rapporti che le rette AM, AQ determinano sul lato opposto BC sono eguali $p=m$, e reciprocamente.

Allora anche i lati QP, PM passeranno rispettivamente per B, C, ed MQP sarà circoscritto ad ABC. *Vi sono quindi infiniti triangoli della specie* MQP *circoscritti ad* ABC; *la condizione necessaria e sufficiente perchè un triangolo di tre punti circolarmente associati rispetto ad* ABC *sia circoscritto ad* ABC *è che due dei rapporti corrispondenti a questi punti sieno eguali, ossia che una delle loro coordinate baricentriche sia media proporzionale fra le altre due.* In particolare *se nel triangolo* ABC *è un lato medio proporzionale fra gli altri due, il triangolo dei punti* (a^n, b^n, c^n) (b^n, c^n, a^n) (c^n, a^n, b^n) *è circoscritto ad* ABC *per ogni valore di* n, *e reciprocamente.*

Se MQP deve essere circoscritto ad ABC, dato uno dei rapporti corrispondenti ad M, risultano determinati gli altri e quindi MQP; onde MQP *è determinato dala la direzione di un suo lato,* o anche *dato un punto per cui un suo lato debba passare.*

4.° — *I vertici del triangolo* $M_a Q_b P_c$ *dividono i lati* BC, CA, AB *nello stesso rapporto* p; altrettanto dicasi dei triangoli $M_b Q_c P_a$, $M_c Q_a P_b$.

Ai punti M_1, P_1, Q_1, ove le rette AM_a, BQ_b, CP_c si incontrano, corrispondono rispettivamente sui lati BC, CA, AB i rapporti $\left(\frac{1}{p^2}, p, p,\right)$, $\left(p, p, \frac{1}{p^2}\right)$, $\left(p, \frac{1}{p^2}, p\right)$; onde *il triangolo* $M_1 Q_1 P_1$ *appartiene alla classe dei triangoli* MQP, *ed è inoltre circoscritto ad* ABC. Altrettanto dicasi dei triangoli analoghi $M_2 Q_2 P_2$, $M_3 Q_3 P_3$.

Le rette AP_a, BQ_b, CM_c dividendo rispettivamente BC, CA, AB nei rapporti q, p, m si incontrano in uno stesso punto M', le cui coordinate baricentriche sono quindi ordinatamente $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\gamma}$. Analogamente le AM_a, BP_b, CQ_c si incontrano in uno stesso punto P', le cui coordinate baricentriche sono $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}$, e le AQ_a, BM_b, CP_c si incontrano in uno stesso punto Q', le cui coordinate baricentriche sono $\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}$. Perciò *i punti* M′, P′, Q′ *sono anch'essi circolarmente associati rispetto ad* ABC, *e il triangolo* M′ Q′ P′ *appartiene alla classe dei triangoli* MQP.

Il triangolo MQP *è omologico di* ABC *rispetto a ciascuno dei centri* M′, P′, Q′.

5.° — I punti isotomici di M, P, Q sono pure punti circolarmente associati rispetto ad ABC. Altrettanto dicasi dei loro punti complementari e degli anticomplementari. Così pure il punto $(-\alpha, \beta, \gamma)$ armonicamente associato ad M, il punto $(\beta, \gamma, -\alpha)$ armonicamente associato a P, e il punto $(\gamma, -\alpha, \beta)$ armonicamente associato a Q sono circolarmente associati rispetto ABC, ecc.

6.° — Si ha (*)

$$\frac{CMP}{CM_cP_c} = \frac{CM}{CM_c}\,\frac{CP}{CP_c} = \frac{\beta+\alpha}{\Sigma\alpha}\,\frac{\gamma+\beta}{\Sigma\alpha}$$

$$\frac{CM_cP_c}{CAB} = \frac{M_cP_c}{AB} = \frac{p-m}{(p+1)(m+1)} = \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{(\gamma+\beta)(\beta+\alpha)}$$

onde:

$$\frac{CMP}{CAB} = \frac{\alpha\gamma-\beta^2}{(\Sigma\alpha)^2}, \text{ e così } \frac{AMP}{ABC} = \frac{\beta\alpha-\gamma^2}{(\Sigma\alpha)^2}, \frac{BMP}{BCA} = \frac{\gamma\beta-\alpha^2}{(\Sigma\alpha)^2}.$$

Permutando circolarmente fra le α, β, γ si ottengono le formole corrispondenti ai triangoli CPQ ecc., CQM ecc.; onde si ha:

$$AMQ = BQP = CPM, \text{ ecc.}$$

cioè: *i triangoli che i vertici* A, B, C *formano ordinatamente coi lati del triangolo di tre punti circolarmente associati rispetto ad* ABC *sono equivalenti.*

7.° — Mediante le precedenti relazioni si trova;

$$\frac{MPQ}{ABC} = \frac{CMP+CPQ+CQM}{ABC} = \frac{\Sigma\alpha\beta-\Sigma\alpha^2}{(\Sigma\alpha)^2}$$

ove:

$$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\ \Sigma\alpha\beta = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,$$

onde:

$$(1)\quad \frac{MQP}{ABC} = \frac{\Sigma\alpha^2-\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} = 1 - \frac{3.\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} = 1 - 3m\frac{mp+p+1}{(mp+m+1)^2}.$$

La (1) non muta scambiando fra loro comunque α, β, γ; onde il triangolo dei punti (β, α, γ), (α, γ, β), (γ, β, α) è equivalente ad MQP.

(*) Qui e altrove faccio uso di formole stabilite a pag. 65, anno VIII del Periodico.

Se MQP è inscritto si ottiene dalla (1) la nota formola.

Se MQP è circoscritto ($m = p$) si ha dalla stessa:

$$\frac{MQP}{ABC} = 1 - \frac{3m}{m^2 + m + 1} = \frac{(m-1)^2}{m^2 + m + 1}$$

o anche ($\beta^2 = \alpha\gamma$):

$$\frac{MQP}{ABC} = 1 - \frac{3\beta}{\Sigma\alpha} = \frac{\alpha - 2\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

Per i punti M', P', Q' si ha:

$$\frac{M'Q'P'}{ABC} = 1 - \frac{3\sum\frac{1}{\alpha}\frac{1}{\beta}}{\left(\sum\frac{1}{\alpha}\right)^2} = 1 - \frac{3\alpha\beta\gamma.\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha\beta}$$

la quale formola esprime pure il rapporto ad ABC dell' area del triangolo dei punti isotomici di M, P, Q.

Se μ, π, ρ sono punti circolarmente associati rispetto ad ABC, e sono α', β', γ' le coordinate baricentriche di μ, la condizione perchè sia $MQP = \mu\rho\pi$ sarà:

$$\frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} = \frac{\Sigma\alpha'\beta'}{(\Sigma\alpha')^2}, \text{ ossia } \frac{\Sigma\alpha\beta}{\Sigma\alpha^2} = \frac{\Sigma\alpha'\beta'}{\Sigma\alpha'^2}.$$

Se MQP, $\mu\rho\pi$ sono inscritti in ABC ($\alpha = 0$, $\alpha' = 0$), oppure sono circoscritti ($\beta^2 = \alpha\gamma$, $\beta'^2 = \alpha'\gamma'$), questa condizione si riduce alla $\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\gamma'}{\beta'} = 1$.

8.° — Dalle formole delle distanze MP^2, PQ^2, QM^2 deriva tosto:

$$MP^2 + PQ^2 + QM^2 = \frac{\Sigma\alpha^2 - \Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2}.\ \sum a^2,\ \left(\sum a^2 = a^2 + b^2 + c^2\right);$$

onde per la (1) si ha:

$$\frac{MQP}{ABC} = \frac{MQ^2 + QP^2 + PM^2}{AB^2 + BC^2 + CA^2} \text{ o anche } \frac{MQP}{MQ^2 + QP^2 + PM^2} = \frac{ABC}{AB^2 + BC^2 + CA^2}$$

onde: *il rapporto fra il triangolo* MQP *e la somma dei quadrati dei suoi lati non varia con* M, P, Q.

Poichè fra l'angolo ω di Brocard di un triangolo ABC e i suoi lati passa la relazione:

$$\text{tang}\,\omega = \frac{4.ABC}{AB^2 + BC^2 + CA^2}$$

dalla relazione precedente deriva che: *l'angolo di Brocard di tre punti circolarmente associati rispetto ad ABC non varia con questi punti, ed è eguale all'angolo di Brocard di ABC.*

9.° — Dalle relazioni:

$$(2)\quad \frac{AM}{AM_a}=\frac{BQ}{BQ_b}=\frac{CP}{CP_c}=\frac{\beta+\gamma}{\Sigma\alpha},\ \frac{MM_a}{AM_a}=\frac{QQ_b}{BQ_b}=\frac{PP_c}{CP_c}=\frac{\alpha}{\Sigma\alpha}$$

e poichè esiste il triangolo delle AM_a, BQ_b, CP_c, si deduce che *esistono pure i triangoli* (AM, BQ, CP), (MM_a, QQ_b, PP_c), *e questi triangoli sono simili al triangolo* (AM_a, BQ_b, CP_c), *e hanno quindi lo stesso angolo di Brocard di* ABC *e ciascuno di essi sta alla somma dei quadrati dei suoi lati come* ABC *sta ad* $a^2+b^2+c^2$.

L'area di questi triangoli si avrà dalle relazioni:

$$\frac{(AM, BQ, CP)}{ABC}=\frac{(AM, BQ, CP)}{(AM_a, BQ_b, CP_c)}\ \frac{(AM_a, BQ_b, CP_c)}{ABC}=$$

$$\frac{(\beta+\gamma)^2}{(\Sigma\alpha)^2}\ \frac{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}{(\Sigma\alpha)^2},$$

$$\frac{(MM_a, QQ_b, PP_c)}{ABC}=\frac{(MM_a, QQ_b, PP_c)}{(AM_a, BQ_b, CP_c)}\ \frac{(AM_a, BQ_b, CP_c)}{ABC}=$$

$$\frac{\alpha^2}{(\Sigma\alpha)^2}\ \frac{\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\alpha^2(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2)}{(\beta+\gamma)^2.(\Sigma\alpha)^2}.$$

Permutando circolarmente fra le α, β, γ si hanno le formole corrispondenti agli altri triangoli analoghi (BM, CQ, AP), (MM_b, QQ_c, PP_a), (CM, AQ, BP), (MM_c, QQ_a, PP_b).

Da esse si deduce:

$$\frac{(AM, BQ, CP)+(BM, CQ, AP)+(CM, AQ, BP)}{ABC}=\frac{2\,\Sigma\alpha^2+\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2}=$$

$$2-\frac{3\,\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2}$$

donde per la (1) deriva:

$$(AM, BQ, CP)+(BM, CQ, AP)+(CM, AQ, BP)=MQP+ABC.$$

La quantità $(AM, BQ, CP)+(BM, CQ, AP)+(CM, AQ, BP)-MQP$ non varia con M, P, Q.

10.° — Dalla proporzionalità delle α, β, γ ai triangoli MBC, MCA, MAB e dalla relazione $MBC+MCA+MAB=ABC$ si ottiene:

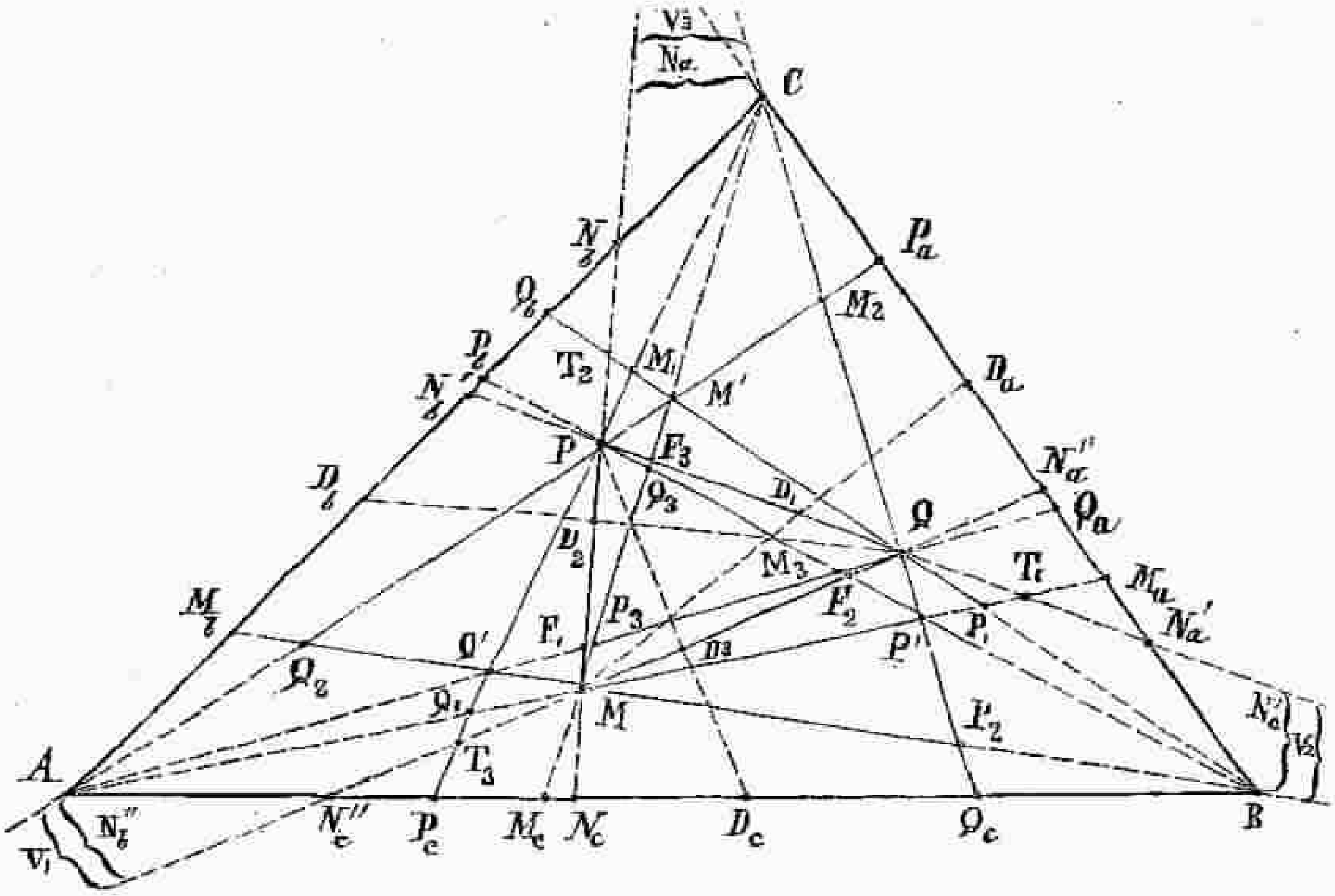
$$(3)\quad MBC=\frac{\alpha.ABC}{\Sigma\alpha},\ MCA=\frac{\beta.ABC}{\Sigma\alpha},\ MAB=\frac{\gamma.ABC}{\Sigma\alpha}$$

e quindi chiamando $M X_a$, $M X_b$, $M X_c$ le distanze di M da BC, CA, AB,

$$(4) \qquad M X_a = \frac{2\alpha . ABC}{a . \Sigma\alpha}, \quad M X_b = \frac{2\beta . ABC}{b . \Sigma\alpha}, \quad M X_c = \frac{2\gamma . ABC}{c . \Sigma\alpha}.$$

Le corrispondenti formole per le distanze $P Y_a$, $P Y_b$, $P Y_c$; $Q Z_a$, $Q Z_b$, $Q Z_c$ dei punti P, Q da BC, CA, AB si ottengono da queste permutando circolarmente fra le α, β, γ; onde chiamando h_a, h_b, h_c le altezze di ABC relative a BC, CA, AB si ottiene:

$$(5) \qquad \begin{array}{l} M X_a + P Y_a + Q Z_a = h_a, \quad M X_b + P Y_b + Q Z_b = h_b, \text{ ecc.} \\ MBC + PBC + QBC = ABC, \text{ ecc.} \end{array}$$



onde: *la somma delle distanze di tre punti circolarmente associati da un lato di* ABC *non varia con questi punti; la somma dei triangoli che i detti punti fanno con un lato di* ABC *non varia con questi punti.*

11.° — Poichè h_a, h_b rappresentano rispettivamente la somma delle distanze di A, B, C da BC, e la somma delle distanze di A, B, C da CA, le prime (5) dimostrano che: *il triangolo di tre punti circolarmente associati rispetto ad* ABC *è isobaricentrico con* ABC.

Ne segue che M, P, Q dividono nello stesso rapporto i lati di ciascuno dei triangoli $M_1 Q_1 P_1$, $M_2 Q_2 P_2$, $M_3 Q_3 P_3$.

Ne segue ancora che i punti complementari di M, P, Q saranno rispettivamente i punti di mezzo di PQ, QM, MP, e i loro punti anticomplementari saranno i vertici del triangolo formato dalle parallele condotte da M, P, Q ai lati di MQP.

12.° — Si prolunghino MQ, QP, PM ad incontrare AB, BC, CA rispettivamente nei punti N''_c, N'_a, N_b. Dai triangoli $CM_c Q_c$, $A Q_a P_a$, $B P_b M_b$ segati rispettivamente dalle rette MQ, QP, PM si ha per il teorema di Menelao:

$$\frac{CM}{MM_c}\,\frac{M_c N''_c}{N''_c Q_c}\,\frac{Q_c Q}{QC}=\frac{AQ}{QQ_a}\,\frac{Q_a N'_a}{N'_a P_a}\,\frac{P_a P}{PA}=\frac{BP}{PP_b}\,\frac{P_b N_b}{N_b M_b}\,\frac{M_b M}{MB}=-1,$$

dalle quali per le relazioni analoghe alle (2) deriva:

$$\frac{M_c N''_c}{N''_c Q_c}=\frac{Q_a N'_a}{N'_a P_a}=\frac{P_b N_b}{N_b M_b}.$$

Essendo $M_c Q_a P_b$, $Q_c P_a M_b$ triangoli inscritti e isobaricentrici con ABC, e poichè i vertici dei triangoli inscritti isobaricentrici con ABC determinano sui lati AB, BC, CA punteggiate simili, queste relazioni dimostrano che il triangolo $N''_c N'_a N_b$ è pure isobaricentrico con ABC. Altrettanto dicasi dei due triangoli analoghi $N''_a N'_b N_c$, $N''_b N'_c N_a$: cioè: *prolungando i lati di un triangolo di tre punti circolarmente associati rispetto ad* ABC *si ottengono tre triangoli inscritti in* ABC *e con esso isobaricentrici.*

Poichè $N''_c N'_a N_b$, $N''_a N'_b N_c$, $N''_b N'_c N_a$ sono isobaricentrici con MQP e sono in questo inscritti, sarà:

$$\frac{MQ}{N''_c N''_a}=\frac{QP}{N'_a N'_b}=\frac{PM}{N_b N_c},\ \text{ecc.}$$

cioè: *esiste il triangolo* $(N''_c N''_a,\ N'_a N'_b,\ N_b N_c)$ *ed è simile al triangolo* MQP; altrettanto dicasi dei triangoli $(N''_a N''_b,\ N'_b N'_c,\ N_c N_a)$, $(N''_b N''_c,\ N'_c N'_a,\ N_a N_b)$.

Quando MQP è circoscritto, uno di questi triangoli diventa il triangolo delle rette che uniscono A, B, C ai vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in ABC.

(Continua). F. FERRARI.

SUI POLINOMII

(*Continuazione, V. pag. 77*).

10. Diremo che *un polinomio è divisibile per un altro,* o che è suo *multiplo,* se è prodotto del medesimo per un polinomio intero; ed in tal caso diremo che il secondo polinomio è *divisore,* o *sottomultiplo,* del primo.

Parlando di divisori e multipli supporremo sempre che i polinomii considerati siano interi.

Diremo che *un polinomio intero è primo,* o *semplice,* od *irreducibile,* se non è divisibile che per sè stesso e pel suo contrario, per $+1$ e per -1. Un polinomio intero non primo lo diremo *composto.*

Diremo che *dei polinomii sono primi fra loro* se non hanno nessun divisore comune diverso da $+1$ e da -1.

11. Diremo *puro polinomio* qualsiasi polinomio, che non sia monomio ed abbia termini primi fra loro.

Ogni polinomio intero è quindi prodotto d'un monomio per un puro polinomio: il fattore monomio è prodotto dal *M. C. D.* dei coefficienti, preso con segno qualsiasi, per le minime potenze delle lettere comuni a tutti i termini.

Teorema. *Il prodotto di due puri polinomi è un puro polinomio.*

Dimostrazione. Siano H e K due puri polinomii: dico che il loro prodotto è un puro polinomio, cioè i suoi coefficienti sono primi fra loro e nessuna lettera è comune a tutti i suoi termini. Infatti, se α è un numero primo od una lettera, α non può dividere nè tutti i termini di H nè tutti quelli di K: siano m ed n i termini supremi di H e K, tra quelli non divisibili per α; indichiamo con M_1 l'insieme dei termini di H superiori e con M_2 l'insieme di quelli inferiori ad m; indichiamo con N_1 l'insieme dei termini di K superiori e con N_2 l'insieme di quelli inferiori ad n. È:

$$HK = [M_1 + (m + M_2)]\,[N_1 + (n + N_2)]$$
$$= M_1\,(N_1 + n + N_2) + N_1\,(m + M_2) + (m + M_2)\,(n + N_2).$$

Essendo m ed n i termini supremi di H e K, tra quelli non divisibili per α, per α son divisibili tutti i termini di M_1 ed N_1: sono per ciò divisibili per α tutti i termini di

$$M_1 (N_1 + n + N_2) + N_1 (m + M_2)$$

e solamente tra essi termini (4) ve ne possono essere di simili ad $m\,n$, che è il termine supremo di $(m + M_2)(n + N_2)$: se α è un numero primo, il coefficiente di $m\,n$, essendo prodotto di due numeri non divisibili per α, non può essere divisibile per α per cui, dopo la riduzione dei termini simili, il coefficiente del termine simile ad $m\,n$ non sarà divisibile per α perchè o sarà lo stesso coefficiente di $m\,n$, o sarà somma del medesimo con soli numeri divisibili per α; se poi α è una lettera, il termine $m\,n$ non può ridursi con nessuno perchè sono da esso dissimili anche gli accennati termini, contenendo essi la lettera α mentre $m\,n$ non la contiene. Nel prodotto $H\,K$ vi è dunque sicuramente un termine non divisibile per α. Nessun numero primo, e nessuna lettera, può dunque dividere tutti i termini del prodotto, il quale per ciò è puro polinomio.

12. Dall'ultimo e dal numero 9 segue immediatamente che: Un polinomio intero si può ridurre in un sol modo al prodotto d'un monomio intero per un puro polinomio, a parte i segni dei fattori.

Se un monomio intero ed un puro polinomio li diciamo il *monomio* ed il *puro polinomio* del polinomio risultante dalla loro moltiplicazione, si ha pure che: Il monomio ed il puro polinomio del prodotto di polinomii interi sono, rispettivamente, prodotto dei monomii e prodotto dei puri polinomii dei fattori, a parte il segno. Il monomio ed il puro polinomio del quoziente della divisione d'un polinomio intero per un suo divisore sono, rispettivamente, i quozienti delle divisioni del monomio e del puro polinomio del dividendo per il monomio ed il puro polinomio del divisore, a parte il segno.

13. Da quanto fu detto negli ultimi numeri segue immediatamente che: Sono *polinomii primi di grado zero* i numeri primi; sono *polinomi primi di primo grado* i puri polinomii di primo grado.

Teorema. *Ogni divisore d'un puro polinomio è un puro polinomio: i divisori alfabeticamente infimi d'un puro polinomio sono primi.*

Dimostrazione. Sia P un puro polinomio, D sia un suo divisore e sia

$$P = D\,Q.$$

Se D non fosse puro polinomio ed m e D_1 fossero il suo monomio ed il suo puro polinomio (12), se cioè fosse $D = m\,D_1$, il polinomio P, uguale ad $m\,D_1\,Q$, sarebbe divisibile pel monomio m, la qual cosa non può essere perchè P è puro polinomio; deve dunque essere puro polinomio anche D. Se D non è primo, sia δ un suo divisore diverso da D, $-D$, 1 -1, e sia $D = \delta\,h$; il polinomio P, uguale a $\delta\,h\,Q$, è divisibile per δ, che è alfabeticamente inferiore a D perchè h non può essere un numero, essendo D un puro polinomio: adunque, se D non è primo, non è neppure tra gli infimi divisori di P. Ne segue che i divisori di P alfabeticamente infimi sono primi.

14. Teorema. *Ogni polinomio composto è prodotto di polinomii primi.*

Dimostrazione. Poniamo il dato polinomio sotto forma di prodotto d'un monomio, m, per un puro polinomio, P: il monomio si decompone facilmente nei suoi fattori primi che sono le sue lettere, prese tante volte quante sono le unità dei rispettivi esponenti, ed i fattori primi del coefficiente, che trovansi con le note regole dell'aritmetica. Trattasi quindi solamente di far vedere che si può decomporre in fattori primi il puro polinomio. Sia p_1 uno dei divisori alfabeticamente infimi di P e sia $P = p_1\,q_1$: p_1 e q_1 sono pure polinomii (13) e p è primo: sia p_2 uno dei divisori alfabeticamente infimi di q_1 e sia $q_1 = p_2\,q_2$: p_2 e q_2 sono puri polinomii e p_2 è primo: continuando così, siccome P non può essere il prodotto d'un numero di puri polinomii maggiore del suo grado (9), si perverrà ad un quoziente primo; sia esso q_{n-1}: poniamo per conformità di notazione

$$q_{n-1} = p_n \quad \text{epperò} \quad q_{n-2} = p_{n-1}\,q_{n-1} = p_{n-1}\,p_n$$

e, decomposto in fattori primi, sarà:

$$P = p_1\,p_2 \ldots p_{n-1}\,p_n.$$

15. Diremo che *un polinomio è ordinato per le potenze di* x se ha la forma:

$$P_0\,x^n + P_1\,x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}\,x + P_n$$

dove $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n$, che diconsi *coefficienti*, siano polinomii indipendenti da x.

Diremo *puro polinomio ordinato per le potenze di* x ogni polinomio intero ordinato per le potenze di x con coefficienti primi tra loro.

Teorema. *Se* A *e* B *sono polinomii interi ordinati per le potenze di* x *ed* A *non è inferiore a* B *in* x, *la divisione per* B *del prodotto di* A *per una potenza del primo coefficiente di* B *d'esponente maggiore del grado di* $\frac{A}{B}$ *in* x *si può continuare, senza introdurre frazioni, fino ad ottenere un resto di grado minore di quello di* B *in* x.

Dimostrazione. Sia n un intero positivo ed m sia od intero positivo o nullo; e siano

$$A = a_0 x^{n+m} + a_1 x^{n+m-1} + \ldots \quad B = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots$$

due polinomii ordinati per le potenze di x.

Il grado in x di $\frac{A}{B}$ è m. Si vuol provare che la divisione di $b_0^k A$ per B, dove sia $k \geqq m+1$, si può continuare senza introdurre frazioni fino ad ottenere un resto inferiore a B in x. È

$$b_0^k A : B = (b_0^k a_0 x^{n+m} + \ldots) : (b_0 x^n + \ldots) = b_0^{k-1} a_0 x^m + \ldots$$

per cui il primo resto è

$$\begin{aligned} b_0^k A - b_0^{k-1} a_0 x^m B &= b_0^{k-1} (b_0 A - a_0 B x^m) \\ &= b_0^{k-1} [(b_0 a_1 - a_0 b_1) x^{n+m-1} + \ldots]. \end{aligned}$$

Il primo resto ha dunque la forma $b_0^{k-1} A_1$; A_1 è un polinomio intero il cui grado in x è tutto al più uguale a quello di A diminuito di 1. Si riconosce similmente che il secondo resto ha la forma $b_0^{k-2} A_2$; A_2 è un polinomio intero il cui grado in x è tutto al più uguale a quello di A diminuito di 2: il terzo resto ha la forma $b_0^{k-3} A_3$, dove A_3 è un polinomio intero il cui grado in x è tutto al più uguale a quello di A diminuito di 3, e così via. Ne segue che o s'otterrà un resto inferiore a B in x dopo meno di m resti superiori a B, oppure i primi m resti saranno superiori a B ed allora il resto $(m+1)^{mo}$ avrà la forma $b_0^{k-m-1} A_{m+1}$; b_0^{k-m-1} è un polinomio intero indipendente da x perchè $k - m - 1$ od è nullo od è intero positivo e b_0 è il primo coefficiente di B; A_{m+1} è un polinomio intero ed è inferiore a B in x perchè il suo grado in x non è maggiore di $(n+m)-(m+1)=n-1$. Si perviene dunque certamente ad un resto inferiore a B in x senza introdurre frazioni.

16. Se A *e* B *sono polinomii ordinati per le potenze di* x, diremo che C *è un resto infimo della divisione di* A *per* B se C sia un polinomio intero inferiore al divisore B in x e sia resto della divisione per B del prodotto di A per un divisore di qualche potenza del primo coefficiente di B.

(*Continua*).

F. Giudice.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ

IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA

alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione: V. pag. 27, 55 e 97*).

Pilsen: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Dividere il numero 1000 in due parti di cui una sia divisibile per 13 e l'altra per 53.

2. Alla nascita di un figlio viene posto a interesse composto una certa somma dalla quale cominciando del suo 19° anno questi deve ricavare per 5 anni una rendita annua di 1000 corone per mantenersi allo studio dell'Università. Quanto importa quella somma se fruttando il $4\frac{1}{2}$ % d'interesse deve bastare a ciò?

3. Il volume di una piramide quadratica retta è V e l'angolo d'inclinazione degli spigoli laterali colla base è α; quali sono gli spigoli?

4. Dal punto $M\left(x_1 = \frac{21}{5}, y_1 = 2\right)$ sono condotte le due tangenti alla iperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$. Si domandano le equazioni delle tangenti e della corda di contatto e la lunghezza di questa.

I. Praga: *i. r. Scuola reale sup. ted.* — 1. Determinare tutti i valori di $\sqrt[5]{-1}$.

2. In quanti anni una persona potrà estinguere un debito di 20000 f. assieme agli interessi del 4,28 % mediante annualità di 2500 f.?

3. Ad un cono retto il cui lato fa un angolo α colla base è inscritta una sfera di raggio ρ; qual'è il volume del tronco di cono compreso fra la base ed il circolo di contatto?

4. Si trovino le coordinate dei punti di contatto delle tangenti guidate dal punto $x_1 = 16$, $y_1 = 11$ al cerchio $x^2 + y^2 = 169$.

II. Praga: *i. r. Scuola reale sup. ted.* — 1. La somma del 4° e 6° termine di una progressione aritmetica è 28, il prodotto del terzo e decimo termine è 232; qual'è il primo termine e quale la differenza?

2. Un capitale di 16582,70 f. che dovrebbe venir pagato subito, viene ammortizzato in 10 rate posticipate; quanto importa ogni rata se si calcola l'interesse del 5,5 %?

3. Il volume di una piramide retta con base quadratica è $V = 58{,}778$ cm³, l'angolo d'inclinazione delle facce laterali colla base $\alpha = 68^0\,9'\,24''$; quali sono gli spigoli alla base e laterali?

4. Sull'asse maggiore dell'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 36$ è descritto un cerchio; dal punto (0,4) si conduca nel primo quadrante a ciascuna delle curve una tangente e si determini l'angolo compreso da queste due tangenti.

Prossnitz: *Scuola reale sup. prov.* — 1. I contributi di tre negozianti in un'impresa comune stanno in progressione aritmetica. Immediatamente avanti la distribuzione del guadagno muore il secondo, in conseguenza di che, in base ad accordo, la sua parte di guadagno va divisa fra i due superstiti in rapporto ai loro contributi. Se il primo riceve di più $m = 700$ f. ed il secondo $n = 1000$ f., quali erano le tre originarie quote di guadagno?

2. Risolvere un triangolo dato il rapporto dei lati $a : b : c = 8 : 15 : 17$ e l'area $s = 540$ m²..

3. Il vano d'un vaso ha la forma di un cono retto col vertice rivolto in basso. La profondità del vaso è $h = 22$ cm. e due lati opposti del cono formano un angolo di 30°. Che quantità d'acqua esce dal vaso colmo immergendovi una sfera di ferro col raggio $\rho = 5$ cm.?

4. Sono costruite tangenti perpendicolari alle diagonali del rettangolo circoscritto ad un ellisse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$. Si determini l'area del quadrilatero formato dalle tangenti.

Teschen: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. L'ascensione retta di α Herculis nel 1870 era $a = 17^h\,8^m\,43^s{,}28$ e la declinazione $d = 14^0\,32'\,26''{,}8$. Quale era la longitudine e la latitudine di questa stella nell'anno 1870?

2. Per il punto $A\,(a, b)$ è condotta una retta che sega l'asse delle x in M e l'asse delle y in N. Quale linea descrive il punto P del segmento MN dato dalla condizione $NP = AM$, se il segmento ruota intorno al punto A?

3. Dare in forma chiusa la frazione continua periodica

$$n-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2n-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{n-2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2n-2+\dots}}}}}}}}$$

4. Da un punto fuori di un piano si devono guidare a questo quattro segmenti di egual lunghezza a sì che formino gli spigoli laterali di una piramide che ha per base un quadrato ed abbia il massimo volume.

TRAUTENAU: *i. r. Scuola reale sup. ted.* — 1. Un tale ha impaccati in una cassa 100 libri che pesano 100 chilog. Ogni volume in-foglio pesa 4 chilog., ogni volume in-4° pesa 2 chilog., ed ogni volume in-8° pesa $\frac{1}{3}$ di chilogramma. Quanti volumi d'ogni specie vi erano nella cassa?

2. Un capitale di 6000 f. deve venire ammortizzato con 25 rate annuali eguali da pagarsi alla fine d'ogni anno; quanto importa ognuna di queste rate calcolando il 4 $^0/_0$ d'interesse?

3. Si domanda la superficie laterale di un cono retto se il suo volume importa 200,85 m^3 e l'angolo al vertice della sezione che passa per l'asse è di 65° 21′?

4. All'ellisse $x^2 + 2y^2 = 2$ sono condotte tangenti dal punto esterno $M\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$, calcolare l'angolo da esse compreso.

TRIESTE: *Scuola reale sup. civica* — 1. Quanto costerà l'asportazione di un terrapieno di forma conica, il quale ha alla base una circonferenza di 190 m., ed un pendio di 11° 52′, se per lo scavare e pel trasporto di ogni carro pieno di terra si pagano soldi 45, e se ogni carro ha la capacità di 0,76 m^3?

2. Data l'equazione di un cerchio $x^2 + y^2 = 4$ ed un punto della periferia $(x_1 = 1,\ y_1 = +\ldots)$, si trovi l'equazione di quella retta che passa per questo punto e taglia il cerchio sotto un angolo di 60°.

3. Si domanda l'annuale pensione da pagarsi ad un individuo per 25 anni consecutivi, in compenso del capitale di fior. 4446 che da lui sarà dato alla fine del nono anno, calcolando il 4 $^0/_0$ d'interesse composto.

4. Qual premio si dovrà pagare ad un istituto d'assicurazioni per un bambino di 5 anni, affinchè questi riceva, all'età di 24 anni, un capitale di 3000 fior., calcolando il 4 $^0/_0$ d'interesse?

TRIESTE: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Alla parabola $y^2 = 4x$ devesi guidare nel punto $x_1 = 2\frac{1}{4}$ una tangente, la quale sia contemporaneamente tangente nello stesso punto ad un cerhio che ha il centro sul lato positivo dell'asse delle x. Qual'è l'equazione della tangente, quale l'equazione del cerchio e che valori hanno i segmenti di contatto?

2. Un tale vuol pagare per 20 anni, al principio di ogni anno, una determinata somma, onde, passato questo tempo, godere per 18 anni, alla fine di ogni anno, una rendita di 1200 f.. Quanto importerà quella somma, se viene calcolato il 5 $^0/_0$ d' interesse composto?

3. Sono date le latitudini dei punti più settentrionale e più meridionale della Monarchia austro-ungarica (51° 18′ e 42° 14′); si determini la differenza dei loro giorni più lunghi.

TROPPAU: *i. r. Scuola reale sup.* — 1. Risolvere l'equazione:

$$2^{2x} - 1025 \,.\, 2^x + 1024 = 0.$$

2. Qualcuno depose per 30 anni al principio d'ogni anno una somma di

129,15 f. in una cassa di risparmio che paga il $3\frac{3}{4}$ % d'interesse. Quale annualità potrà ricevere costui, passato questo tempo, per 20 anni pure al principio di ogni anno?

3. Un triangolo rettangolo ruota prima intorno al cateto a, e poi intorno al cateto b. I corpi di rotazione risultanti hanno i volumi $A = 240\pi$ e $B = 100\pi$. Risolvere il triangolo.

4. La latitudine geogr. di Troppau è di 49° 56′ 24″ N. Quando vi leva o quando vi tramonta il sole ai 16 maggio, se la sua declinazione in questo giorno è $+19^0\,13'$?

ZNAIM: *Scuola reale sup. provinciale.* — 1. Un debito di c fior. deve venire pagato mediante annualità delle quali la prima importa r fior. ed ogni successiva q volte la precedente. In quanto tempo verrà così pagato il debito calcolando il p % d'interesse composto?

$$(c = 1000000, \quad r = 560000, \quad q = \frac{1}{2}, \quad p = 5)$$

2. Costruire e calcolare un triangolo isoscele data la base $a = 10$ dm. e la somma $m = b + h_a = 20$ dm. del lato e dell'altezza.

3. Calcolare la capacità di una caldaia limitata dalla superficie convessa di un tronco di cono e da una calotta sferica tangente al medesimo. Sono dati i raggi $R = 2$ dm. ed $r = 1$ dm. delle basi del tronco e la lunghezza $l = 2$ dm. del lato.

4. Si deve trovare l'equazione centrale di una ellisse, che taglia la parabola $y^2 = 2x$ sotto angolo retto, se l'asse maggiore dell'ellisse, che coincide coll'asse delle x, è uguale al parametro della parabola.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Sulle progressioni per differenza. — Scopo di questa nota si è di stabilire una proposizione molto generale relativa alle progressioni per differenza.

Se m *è pari; e:*

$$M_1 = 2; \quad M_2 = 2(m+2) - 2^2; \quad M_3 = 2\frac{(m+2)(m+1)}{1\,.\,2} - 2^2(m+2) + 2^3;$$

$$M_4 = 2\frac{(m+2)(m+1)m}{1\,.\,2\,.\,3} - 2^2\frac{(m+2)(m+1)}{1\,.\,2} + 2^3(m+2) - 2^4; \;\ldots\ldots;$$

$$M_m = 2\frac{(m+2)(m+1)\ldots.5\,.\,4}{1\,.\,2\ldots.(m-1)} - 2^2\frac{(m+2)(m+1)\ldots.6\,.\,5}{1\,.\,2\ldots.(m-2)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots - 2^{m-2}\frac{(m+2)(m+1)}{1\,.\,2} + 2^{m-1}(m+2) - 2^m;$$

$$M_{m+1} = 2\frac{(m+2)(m+1)\ldots.4\,.\,3}{1\,.\,2\ldots.m} - 2^2\frac{(m+2)(m+1)\ldots.5\,.\,4}{1\,.\,2\ldots.(m-1)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + 2^{m-1}\frac{(m+2)(m+1)}{1\,.\,2} - 2^m(m+2) + 2^{m+1}$$

e si divide la progressione aritmetica che comincia con 1, *e di ragione:*

$$M_1 (p-1)^m n^{m+1} + M_2 (p-1)^{m-1} n^m + M_3 (p-1)^{m-2} n^{m-1} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + M_m (p-1) n^2 + M_{m+1} n$$

in gruppi contenenti rispettivamente 1, $(n+1)$, $(2n+1)$, $(3n+1)$, ... *termini, la somma dei* $[(p-1)n+1]$ *termini del gruppo di rango* p *è uguale a:*

$$[(p-1)n+1]^{m+3}.$$

Infatti: il 1° e l'ultimo termine del gruppo di rango p sono rispettivamente:

$$1 + \left\{M_1 (p-1)^m n^{m+1} + M_2 (p-1)^{m-1} n^m + \ldots + M_m (p-1) n^2 + M_{m+1} n\right\}$$
$$\times \left\{\frac{2+(p-2)n}{2}(p-1)\right\}$$

e

$$1 + \left\{M_1 (p-1)^m n^{m+1} + M_2 (p-1)^{m-1} n^m + \ldots + M_m (p-1) n^2 + M_{m+1} n\right\}$$
$$\times \left\{\frac{2+(p-2)n}{2}(p-1) + pn - n\right\}$$

e la loro semisomma:

$$1 + M_1 \frac{(p-1)^{m+2} n^{m+2}}{2} + (M_2 + 2M_1)\frac{(p-1)^{m+1} n^{m+1}}{2} +$$
$$(M_3 + 2M_2)\frac{(p-1)^m n^m}{2} + \ldots\ldots (M_m + 2M_{m-1})\frac{(p-1)^3 n^3}{2} +$$
$$(M_{m+1} + 2M_m)\frac{(p-1)^2 n^2}{2} + M_{m+1}(p-1)n = s.$$

Ma:

$$M_1 = 2;\; M_2 + 2M_1 = 2(m+2);\; M_3 + 2M_2 = 2 \cdot \frac{(m+2)(m+1)}{1 \cdot 2}; \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots M_m + 2M_{m-1} = 2\,\frac{(m+2)(m+1)\ldots.5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \ldots. (m-1)};$$
$$M_{m+1} + 2M_m = 2\,\frac{(m+2)(m+1)\ldots.4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \ldots. m};$$

e per m pari:

$$M_{m+1} = m+2.$$

In conseguenza: $s = [(p-1)n+1]^{m+2}$.

Questo teorema generale, ne contiene evidentemente una doppia infinità che si ottengono facendo assumere successivamente ad m tutti i valori pari, per ogni valore intero e positivo di n.

In particolare: lasciando ad n la sua generalità, e facendo $m = 0$, potremo enunciare la proposizione seguente:

Divisa la progressione aritmetica che comincia con 1 *e di ragione* 2n, *in gruppi contenenti rispettivamente* 1, $(n+1)$, $(2n+1)$, $(3n+1)$, ... *termini, la somma dei* $[(p-1)n+1]$ *termini del gruppo di rango* p *è uguale a*

$$[(p-1)n+1]^3;$$

la quale è a sua volta la generalizzazione di due teoremi noti (*), che corrispondono ai casi di $n = 1$, e $n = 2$.

Lasciando invece la sua generalità ad m e facendo successivamente $n = 1$, $n = 2$, ... avremo:

1°) *Se* m *è pari, e si divide la progressione aritmetica che comincia con* 1, *e di ragione:*

$$M_1 (p-1)^m + M_2 (p-1)^{m-1} + M_3 (p-1)^{m-2} + \ldots\ldots M_m (p-1) + M_{m+1}$$

in gruppi contenenti rispettivamente 1 . 2 . 3 ..... p *termini, la somma dei termini del gruppo di rango* p *è uguale a* p^{m+3}.

2°) *Se* m *è pari, e si divide la progressione aritmetica che comincia con* 1, *e di ragione:*

$$M_1 (p-1)^m 2^{m+1} + M_2 (p-1)^{m-1} 2^m + \ldots\ldots + M_m (p-1) 2^2 + M_{m+1} 2$$

in gruppi contenenti rispettivamente 1, 3, 5, 7, ... *termini, la somma dei* (2 p — 1) *termini del gruppo di rango* p *è uguale a* $(2p-1)^{m+3}$. Ecc.

Osservo da ultimo, che si può ancora dimostrare direttamente:

1°) *Che se* m *è pari e si divide la progressione aritmetica che comincia con* 1, *e di ragione:*

$$2(p^m + p^{m-2} + p^{m-4} + \ldots\ldots + p^4 + p^2 + 1)$$

in gruppi contenenti rispettivamente 1, 2, 3, ... p *termini, la somma dei* p *termini del gruppo di rango* p *è uguale a* p^{m+3}.

2°) *Che se* m *è pari; e:*

$$M'_1 = 2^{m+2},\ M'_2 = 2^{m+1}(m+2) - 2^{m+2};$$

$$M'_3 = 2^m \frac{(m+2)(m+1)}{1 \,.\, 2} - 2^{m+1}(m+2) + 2^{m+2};$$

$$\ldots\ldots;\ M'_m = 2^3 \frac{(m+2)(m+1)\ldots.4}{1 \,.\, 2 \ldots. (m-1)} - 2^4 \frac{(m+2)(m+1)\ldots.5}{1 \,.\, 2 \ldots. (m-2)} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - 2^m \frac{(m+2)(m+1)}{1 \,.\, 2} + 2^{m+1}(m+2) - 2^{m+2};$$

$$M'_{m+1} = 2^2 \frac{(m+2)(m+1)\ldots.4 \,.\, 3}{1 \,.\, 2 \ldots. m} - 2^3 \frac{(m+2)(m+1)\ldots.4}{1 \,.\, 2 \ldots. (m-1)} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + 2^m \frac{(m+2)(m+1)}{1 \,.\, 2} - 2^{m+1}(m+2) + 2^{m+2}$$

e si divide la progressione aritmetica che comincia con 1, *e di ragione:*

$$M'_1 p^m - M'_2 p^{m-1} + M'_3 p^{m-2} - \ldots. - M'_m p + M'_{m+1}$$

in gruppi contenenti rispettivamente 1, 3, 5, 7, ... *termini, la somma dei* (2 p — 1) *termini del gruppo di rango* p *è uguale a* $(2p-1)^{m+3}$. Ecc..

(*) V. Ed. Lucas, *Théorie des nombres* p. 226 - Es. I e III.

In conseguenza avremo le identità:

$$M_1(p-1)^m + M_2(p-1)^{m-1} + \dots + M_m(p-1) + M_{m+1} = 2(p^m + p^{m-2} + p^{m-4} + \dots + p^4 + p^2 + 1);$$

$$M'_1[p^m - (p-1)^m] - M'_2[p^{m-1} - (p-1)^{m-1}] + \dots \dots$$
$$\dots\dots + M'_{m-1}[p^2 - (p-1)^2 - M'_m = 0;$$

ecc.. G. Musso.

Genova, 13 aprile 1894.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 191, 193**, 194*, 195*, 196* e 197*

191. *Se* m *è divisibile per* 1, 2, 3, ... n, *il minimo multiplo comune ai numeri* m, m + 1, ... (m + n) *è dato da*

$$\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n)}{1.2.3\dots n}.$$

(U. Scarpis).

Dimostrazione della Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles.

Per una nota proprietà del minimo multiplo comune (*), il teorema si riduce a dimostrare che il prodotto

$$D_n = 1.2.3\dots n$$

è il massimo comun divisore dei numeri

$$N_0 = (m+1)(m+2)\dots\dots(m+n)$$
$$N_1 = m(m+2)(m+3)\dots(m+n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$N_n = m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1).$$

Ora m ed $m+1$ essendo primi fra loro il m. c. d. dei numeri N_0 ed N_1 è

$$D_1 = 1.(m+2)(m+3)\dots(m+n).$$

Analogamente $m(m+1)$ ed $m+2$ avendo 2 come solo fattor comune, il m. c. d. di D_1 ed N_2 è

$$D_2 = 1.2.(m+3)\dots(m+n).$$

L'unico fattor comune ai numeri $m(m+1)(m+2)$ e $1.2(m+3)$ è $1.2.3$, dunque il m. c. d. di D_2 ed N_3 è

$$D_3 = 1.2.3.(m+4)\dots(m+n)$$

e così di seguito fino a $D_n = 1.2.3\dots n$.

(*) Il teorema a cui si allude è il seguente: « *Se si formano i prodotti di* n *numeri,* n − 1 *ad* n − 1 *per volta e s'indica con* D *il loro massimo comun divisore, il minimo comune multiplo degli* n *numeri è eguale al loro prodotto diviso per D* ».

[N. d. Red.].

Dimostrazione del Sig. Prof. *A. Tagiuri* a Massa.

I quozienti $\frac{m+r}{r}$ $(r=1,\ 2, \ldots n)$, interi a causa dell'ipotesi, sono primi tra loro due a due.

Infatti il massimo comun divisore δ di $m+r$, $m+t\,(r<t\leqq n)$ è divisore di $t-r$ quindi di m e in conseguenza di r, t: viceversa il m. c. d. di r, t è divisore di $m+r$, $m+t$ e sarà quindi δ. Pertanto si avrà $m+r=\delta a$, $m+t=\delta b$, $r<\delta a_1$, $t=\delta b_1$ e $\frac{m+r}{r}=\frac{a}{a_1}$, $\frac{m+t}{t}=\frac{b}{b_1}$, ma a, b sono primi tra loro, quindi anche $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$.

Ciò premesso pongasi per brevità

$$K=m\,.\,\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdots\frac{m+r}{r}\cdots\frac{m+s}{s}\qquad (s<t)$$

e dimostriamo che il m. c. d. di m, $m+t$ è uguale a quello di K, $m+t$. Sia p un fattore primo comune ai numeri m, $m+t$ e quindi a K, $m+t$. Poichè p è fattore di t, si avrà $m=p^{\alpha}q$, $t=p^{\beta}q_1$ con $\alpha\geqq\beta$ e q, q_1 non divisibili per p, inoltre

$$m+t=p^{\beta}(p^{\alpha-\beta}.q+q_1)=p^{\beta}Q.$$

Se $\alpha>\beta$, Q non ammette il fattore p e sarà p^{β} la più alta potenza di p che comparisce nel m. c. d. di m, $m+t$ ed in quello di K, $m+t$; se invece $\alpha=\beta$, Q potrà contenere il fattore p; se non lo contiene si concluderà come pel caso di $\alpha>\beta$, se invece lo contiene si avrà $Q=p^{\gamma}q_2$ (q_2 non divisibile per p) e $m+t=p^{\alpha+\gamma}.\,q_2$. Pertanto sarà p^{α} la più alta potenza di p contenuta nel m. c. d. di m, $m+t$.

Ora $\frac{m+t}{t}=p^{\gamma}.\,\frac{q_2}{q_1}$, e quindi, per quanto è stabilito in principio, nessun fattore $\frac{m+r}{r}$ di K può contenere p; ne segue che p^{α} è la più alta potenza di p contenuta nel m. c. d. di K, $m+t$. Si aggiunga poi che ogni fattore primo comune a K, $m+t$ è pure comune (per *un* determinato valore di r) ad $\frac{m+r}{r}$, $m+t$ oppure ad m, $m+t$ e quindi in ogni caso ad m, $m+t$, e si potrà concludere che il m. c. d. dei numeri K, $m+t$ è uguale a quello di m, $m+t$ e sarà quindi t. Segue che il minimo multiplo comune di K, $m+t$ è

$$K(m+t):t=\frac{m(m+1)\ldots(m+s)(m+t)}{1\,.\,2\ldots s\,.\,t}.$$

Supponendo in particolare s, t consecutivi ed osservando che $m\frac{(m+1)}{1}$ è il m. m. c. ai numeri m, $m+1$ si ha subito il teorema proposto.

Il Sig. Prof. *U. Ceretti*, che inviò pure una dimostrazione di questo teorema, osserva che il medesimo può venir esteso così: « Se m è divisibile per a, $2a$, $3a, \ldots na$, il m. c. m. dei numeri m, $m + a$, $m + 2a, \ldots m + na$ è

$$\frac{m(m + a)(m + 2a) \ldots (m + na)}{a \,.\, 2a \,.\, 3a \ldots na} \text{ ». } (*)$$

193.** *Risolvere il sistema d'equazioni*

$$x + y = a + b, \quad x^2(y^2 - x^2) = a^2(b^2 - a^2).$$

(A. Lugli).

Risoluzioni completamente analoghe dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles; dal Sig. Prof. *F. Tonelli* a Teramo, e dai Sigg. *V. Columbo*, studente a Napoli; *M. Morale*, studente a Catania; *G. Scorza*, studente a Firenze.

Dividendo membro a membro la seconda equazione per la prima si ha

$$x^2(y - x) = a^2(b - a),$$

la quale per la sostituzione di $a + b - x$ in luogo d'y si riduce a

$$2x^3 - (a + b)x^2 + a^2(b - a) = 0,$$

che si può scrivere

$$(x - a)[2x^2 + (a - b)x + a(a - b)] = 0.$$

Risulta la terna di valori per x

$$x = a \quad x = \frac{a - b \pm \sqrt{(b - a)(b + 7a)}}{4}$$

a cui corrispondono per y i seguenti

$$y = b \quad y = \frac{3a + 5b \mp \sqrt{(b - a)(b + 7a)}}{4}.$$

La soluzione $x = a$, $y = b$ era prevedibile fin dal principio per la simmetria del sistema rispetto ad x ed y, a e b (**).

194.** *Un cono circolare ha il suo vertice in una sfera di raggio* r *e il suo asse passante pel centro. Indicando con* α *il semi-angolo al vertice del cono, dimostrare che il volume della parte di sfera esterna al cono è dato da*

$$\frac{4\pi}{3} r^3 \cos^4\alpha.$$

(A. Lugli.)

Soluzioni analoghe dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles, e dai Signori *M. Carmina*, alunno del R. Ist. tec. di Girgenti; *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo; *D. Rossi*, studente privato a Napoli; *G. Scorza*, studente nel Liceo delle Scuole Pie in Firenze.

(*) Altre dimostrazioni pervennero dal Sig. *L. Perrotti*, studente a Roma e dal Sig. *G. Scorza*, studente a Firenze.

(**) Risoluzioni poco dissimili pervennero dai Sigg. *F. Cecchérini* e *R. Colombo* (alunni del R. Istituto tecnico di Roma); *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica); *M. Piattelli* (R. Liceo Bari) e *G. F. Sinatra* (R. Ist. tec. Girgenti).

Un piano passante per l'asse AO del cono (O centro della sfera) ne sega la superficie lungo due generatrici che incontrano la sfera in due punti C, D simmetrici rispetto all'asse AO. Si conduca CD e sia B il suo punto d'incontro con AO.

La parte di sfera esterna al cono è manifestamente il solido generato dal segmento circolare AC che ruota intorno al diametro passante per A. Il suo volume, come si sa, è

$$V = \frac{1}{6} \pi \overline{AC}^2 \,.\, AB.$$

Ora si ha $AC = 2r \operatorname{sen} CDA = 2r \operatorname{sen}(90° - \alpha) = 2r \cos\alpha$; $AB = AC \cos\alpha = 2r \cos^2\alpha$, quindi sostituendo:

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \cos^4\alpha \text{ (*)}.$$

195*. *Un cilindro circolare di raggio ρ taglia una sfera di raggio r ($r > \rho$) il cui centro cade nell'asse del cilindro, dimostrare che il volume della parte di sfera esterna al cilindro è dato da* $\frac{4\pi}{3}(r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}$.

(A. Lugli).

Soluzioni analoghe dalla Sig.ª Ved.ª *F. Prime* a Bruxelles e dai Signori *M. Carmina*, alunno del R. Ist. tec. di Girgenti; *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo; *D. Rossi*, studente privato a Napoli; *G. Scorza*, studente nel Liceo delle Scuole Pie in Firenze.

Le sezioni fatte nella sfera e nel cilindro da un semipiano condotto per l'asse del cilindro sono un semicerchio MNP di raggio r e un rettangolo aventi per lati ρ e l'asse del cilindro. Essendo $r > \rho$ il lato di questo rettangolo parallelo all'asse incontrerà il semicerchio MNP in due punti A, B: tanto la lunghezza AB come quella della sua proiezione su MP sono eguali a $2(r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}$

Ciò posto la parte di sfera esterna al cilindro sarà il solido generato dalla rotazione del segmento circolare ANB intorno al diametro MP, il volume del quale, come si sa, è dato da

$$V = \frac{\pi}{6} \overline{AB}^3.$$

Avremo quindi pel volume cercato

$$V = \frac{4\pi}{3}\left[2(r^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \frac{4\pi}{3}(r^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \text{ (**)}.$$

(*) Altre soluzioni furono inviate dai Sigg. *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica); *V. Columbo*, studente a Napoli; *M. Morale*, studente a Catania; *A. Panebianco* (R. Ist. nautico Catania); *F. Romano*, studente a Catania.

(**) Altre soluzioni furono inviate dai Sigg. *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica); *R. Colombo* (R. Ist. tec. Roma); *V. Columbo*, studente a Napoli; *D. Faustini* (R. Ist. tec. Piacenza); *G. Giovannelli* a Pavia; *M. Morale*, studente a Catania; *A. Panebianco* (R. Ist. nau. Catania); *A. Parsi*, studente a Genova.

196*. *Dimostrare che*

$$\sqrt[4]{23{,}5 + 10{,}5 \,.\, \sqrt{5}} + \sqrt[4]{23{,}5 - 10{,}5 \,.\, \sqrt{5}} = 3.$$

(A. Lugli)

Dimostrazioni analoghe dalla Sig.a Ved.a *F. Prime* a Bruxelles e dai Signori *C. Montanari*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Livorno e *M. Piattelli*, licenziato dal R. Liceo di Bari (*).

Poichè $(23{,}5)^2 - (10{,}5 \,.\, \sqrt{5})^2 = 1$, è quadrato perfetto, applicando la nota formola

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}},$$

si ha

$$\sqrt{23{,}5 + 10{,}5 \sqrt{5}} = 3{,}5 + \sqrt{11{,}25}$$

e

$$\sqrt{23{,}5 - 10{,}5 \sqrt{5}} = 3{,}5 - \sqrt{11{,}25}.$$

Similmente poichè $(3{,}5)^2 - 11{,}25 = 1$, è quadrato perfetto, segue

$$\sqrt{3{,}5 + \sqrt{11{,}25}} = \sqrt{\frac{3{,}5 + 1}{2}} + \sqrt{\frac{3{,}5 - 1}{2}}$$

$$\sqrt{3{,}5 - \sqrt{11{,}25}} = \sqrt{\frac{3{,}5 + 1}{2}} - \sqrt{\frac{3{,}5 - 1}{2}}$$

laonde

$$\sqrt[4]{23{,}5 + 10{,}5 \sqrt{5}} + \sqrt[4]{23{,}5 - 10{,}5 \sqrt{5}} =$$

$$2 \sqrt{\frac{3{,}5 + 1}{2}} = 2 \,.\, \sqrt{2{,}25} = 3.$$ c. d. d..

197*. *Eliminare* x *dal sistema d'equazioni*

$$a x - b \sqrt{1 - x^2} = 2c\,(2x^2 - 1)$$
$$a \sqrt{1 - x^2} + b x = 4 c x \sqrt{1 - x^2}.$$

(S. Catania).

Soluzione della Sig.a Ved.a *F. Prime* a Bruxelles.

Queste equazioni possono scriversi

$$a \,.\, \cos\varphi - b \,.\, \operatorname{sen}\varphi = 2c \,.\, \cos 2\varphi,$$
$$a \,.\, \operatorname{sen}\varphi + b \,.\, \cos\varphi = 2c \,.\, \operatorname{sen} 2\varphi.$$

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *B. Armano* (alunno del R. Liceo di Alessandria); *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica); *V. Columbo*, studente a Napoli: *A. de Benedetti* (R. Ist. tec. Piacenza); *N. Lugaro* (R. Liceo Garibaldi Palermo); *G. Macaluso* e *G. F. Sinatra* (R. Ist. tec. Girgenti); *M. Morale* e *F. Romano*, studenti a Catania; *A. Panebianco* (R. Ist. nau. Catania); *G. Scorza* (Liceo delle Scuole Pie Firenze).

Basta quindi aggiungerle membro a membro dopo averle innalzate al quadrato, ed allora si ricava

$$a^2 + b^2 = 4c^2.$$

Soluzione dei Sigg. *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo e *A. Panebianco*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Moltiplicando la prima equazione per x, la seconda per $\sqrt{1-x^2}$ e sommando, dopo facili riduzioni, si ricava $x = \frac{a}{2c}$. Sostituendo questo valore in una delle date si ottiene

$$a^2 + b^2 = 4c^2,$$

che è la risultante domandata (*).

QUISTIONI PROPOSTE (**)

226*. Determinare un triangolo rettangolo nel quale la somma dei lati dell'angolo retto sia m, e quella dell' ipotenusa e dell' altezza relativa all'ipotenusa sia n; e indicare le condizioni perchè il problema sia possibile.

227*. In un triangolo sferico ABC, rettangolo in B, il coseno dell'angolo in A è il quadrato del coseno del lato opposto a. Dimostrare che la somma degli altri due lati b e c è $\frac{\pi}{2}$, o $\frac{3\pi}{2}$ secondochè essi sono minori o maggiori di $\frac{\pi}{2}$; e nel primo di questi casi dimostrare anche che, onde il triangolo possa esistere, il lato c dev' essere inferiore a $\frac{\pi}{4}$, e determinare tutti gli elementi del triangolo per mezzo di c (***).

(*) Altre soluzioni vennero inviate dai Sigg. *F. Celesiri* (alunno del R. Istituto tecnico di Modica); *R. Colombo* (R. Ist. tec. Roma); *V. Columbo*, studente a Napoli; *A. de Benedetti* (R. Ist. tec. Piacenza); *G. Macaluso* (R. Ist. tec. Girgenti); *O. Montanari* (licenziato dal R. Ist. tec. Livorno); *A. Parsi*, studente a Genova.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senzà escludere qualsiasi altro studioso.

(***) Le quistioni 226* e 227* sono i temi di matematica dati nel luglio per la licenza dagli Istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*. V. a proposito della q. 227* l'es. 6 a pag. 44 dell'ediz. ital. della *Trig. Sferica* del Todhunter.

228**. Per un punto S, ad un cerchio φ, si conducano le secanti arbitrarie SBC, SMM', e la secante SAD, perpendicolare al diametro che passa per B. Si avrà:

$$\tan\frac{BC}{2}\cdot\tan\frac{BM}{2}\cdot\tan\frac{BM'}{2}-\tan^2\frac{BA}{2}\left(\tan\frac{BM}{2}+\tan\frac{BM'}{2}-\tan\frac{BC}{2}\right)=0.$$

A. Del Re.

229**. La somma dei quozienti incompleti di tutte le frazioni continue che si ottengono sviluppando le $(2^{p-1}-1)$ frazioni irriducibili della serie di Brocot d'indice p, (comprese fra 0 e 1) è uguale a $(p-1)\,2^{p-1}$.

NB. La serie di Brocot di indice 1 si compone dei due termini $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$. Inserendo fra questi la mediante $\frac{1}{1}$, si ottiene la serie omonima di indice 2, e cioè: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{0}$. Inserendo fra i termini di quest'ultima le due medianti $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{1}$, si ottiene quella di indice 3, e cioè: $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{0}$; e così via.

G. Musso.

230*. Dimostrare che si ha

$$1^2+4^2+5^2+8^2+9^2+\dots+(4n)^2+(4n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)(32n^2+28n+3)}{3}.$$

G. Candido.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

OMERO MONTESPERELLI. — *Lezioni elementari di aritmetica pratica* ad uso delle Scuole secondarie; pag. 147. Ditta G. B. Paravia e C. — Prezzo: L. 1.60.

Lezioni elementari di aritmetica teorica ad uso delle Scuole secondarie; pag. 237. Ditta G. B. Paravia e C. — Prezzo: L. 2.60.

In questi due libricini il prof. Montesperelli si è evidentemente proposto lo scopo di esporre con somma chiarezza, non disgiunta a rigore, le teoriche elementari dell'aritmetica. Non novità di metodo adunque, non originalità nella esposizione; ma chiarezza, chiarezza sopratutto. E lo scopo è stato pienamente raggiunto. Poche volte ci fu dato leggere libri così chiari, così precisi, così diffusi in utili applicazioni ed in problemi svariati, così accessibili alle intelligenze dei giovani cui sono destinati. I due libri procedono quasi di pari passo;

sono svolti con metodo e trama identiche. Ma l'A. ha ben fatto a dedicare il primo libro esclusivamente all'aritmetica pratica; è necessario infatti, ed è ben più importante, che il giovane, nei primi passi nello studio dell'aritmetica si eserciti assai più nelle regole del calcolo numerico, che non nelle teoriche astratte dell'aritmetica razionale.

Nei primi quattro capitoli delle «Lezioni elementari di aritmetica teorica» l'A. svolge le regole delle prime quattro operazioni, e, con molta opportunità, insiste nei primi elementi del calcolo letterale, che trovasi quindi sufficientemente sviluppato nel caso particolare che le lettere rappresentino numeri interi. Numerosi e buoni gli esempi; alcuni dei quali forse d'indole troppo algebrica, ma scelti con criterio tra i casi particolari di note identità.

Il capitolo V tratta dei resti delle divisioni dei numeri per alcuni divisori particolari; ed il VI, delle teoriche del M.C.D e del M.M.C, esposte con generalità indipendentemente dalla teoria dei divisori primi di un numero. Nel cap. VII è esposta la teoria dei numeri primi assoluti, con molta diffusione e chiarezza; tra i numerosi esercizi che seguono il capitolo, sono posti alcuni dei teoremi più famosi dell'aritmetica superiore. I cap. VIII e IX sono destinati alla ricerca dei divisori di un numero; alla ricerca del M.C.D e del M.M.C di più numeri per mezzo della decomposizione in fattori primi, e alla teorica dei numeri primi relativi.

Nel cap. X viene dato il concetto di numero frazionario; e qui sarebbe caduto in acconcio mostrare la sua genesi; l'operazione della divisione non è sempre possibile coi soli numeri interi; di qui la necessità di estendere il concetto di numero, introducendo nella aritmetica i numeri frazionari. Ci pare utile che i giovani incomincino a riflettere su queste successive estensioni del concetto di numero, chè troveranno poi minori difficoltà allorchè sarà il caso d'introdurre, nell'aritmetica generale, il concetto di numero negativo, di numero irrazionale, e di numero complesso.

È vero che l'A. fa di questo un fugace accenno nel n. 263; ma non ci sembra troppo esplicito. Le regole del calcolo letterale, dimostrate pei soli numeri interi, sono estese quindi ai numeri frazionari. Buoni anche qui e numerosi gli esempi di calcolo numerico e letterale; dai quali vediamo con piacere banditi i soliti esercizi, veri indovinelli per i giovani digiuni di algebra.

Ci pare però strano che negli esercizi 42 .... 52, l'A. presupponga nei giovani l'idea di limite di una somma di un numero infinito di termini e la conoscenza del teorema che:

$$\lim_{n=\infty} a^n = \infty \qquad (a > 1).$$

Il cap. XI tratta dei numeri decimali, delle loro operazioni e poi delle frazioni periodiche semplici e miste. Non ci sembra del tutto rigorosa la definizione di limite di una serie di numeri data nel n. 302; ad ogni modo l'A. avrebbe dovuta chiarirla (e non gliene sarebbero mancati i mezzi) con numerosi esempi.

L'estrazione di radice quadrata dei quadrati perfetti, della radice quadrata di un numero a meno di un'unità o di $\frac{1}{n}$ è lo scopo del cap. XII. Viene anche accennato alla definizione rigorosa di radice quadrata di un numero, e al concetto di numero irrazionale, generato da estrazioni di radice quadrata.

Finalmente il cap. XIII è destinato alla teorica dei rapporti, alla proporzionalità e problemi relativi. Ci sembra un po' vaga la definizione di limite data nel n. 339 e non sufficientemente corroborata da esempî. Nel n. 341 l'A. definisce esattamente il rapporto di due grandezze nel caso che queste siano incommensurabili; ma anche qui poteva addurre qualche esempio, e l'aritmetica e la geometria potevano fornirgliene di assai semplici. Ad ogni modo dal momento che l'A, come fa benissimo ad osservare esplicitamente, si limita alla considerazione dei soli rapporti razionali, poteva omettere senz'altro questo caso. Seguono infine le applicazioni alla regola del tre semplice e composta, ai problemi d'interesse ecc., sulle quali applicazioni l'A. ha avuto maggior campo di insistere nel corso di aritmetica pratica.

Di questo vogliamo anche accennare che l'A. ha sviluppato notevolmente il sistema metrico decimale, delle origini del quale assai ragionevolmente e con molta erudizione, discorre. Inoltre il libro ha alla fine una raccolta di più di trecento esempî che vertono su tutte le teoriche svolte precedentemente, e tra i quali l'allievo troverà utili e belle applicazioni di fisica e di geometria.

Le mende alle quali abbiamo accennato sono lievi e in parte derivano dal forte desiderio dell'A. di voler essere completo; mende lievissime se si considerano rispetto ai pregî incontrastabili dei due libri che con vero piacere raccomandiamo agli insegnanti delle scuole secondarie.

R. Marcolongo.

DIONISIO Dott. GAMBIOLI — *Raccolta di circa 1500 esercizî di Geometria, di Trigonometria piana e sferica e di Geometria descrittiva* con una breve esposizione dei vari metodi per risolverli e con esempi di applicazione dell'algebra alla geometria, ad uso dei Ginnasi, dei Licei, degli Istituti tecnici e nautici e delle Scuole militari. Milano, Dott. Fr. Vallardi — Prezzo: L. 2,50.

— — Chiave della raccolta di esercizî di Planimetria e Stereometria, di Trigonometria piana e sferica e di Geometria descrittiva con alcune aggiunte. Milano, Dott. Fr. Vallardi — Prezzo: L. 4.

Segnaliamo con piacere agli insegnanti ed allievi delle Scuole secondarie questa raccolta di esercizî, la maggior parte tratti da opere consimili inglesi, colla relativa *chiave;* ai primi perchè potrà riuscire di utile strumento nella scuola, ai secondi perchè vogliano giovarsene aggiungendo alle cognizioni teoriche acquisite la sanzione ben efficace delle esercitazioni.

Il volumetto degli enunciati contiene 1674 esercizi dei quali i primi 30 sono accompagnati da completa soluzione e vengono dati come esempio dei diversi metodi da seguire nella dimostrazione dei teoremi e nella risoluzione dei problemi. Degli esercizi rimanenti 858 riguardano la planimetria, 322 la stereometria, 335 la trigonometria piana, 89 la trigonometria sferica e 40 la geometria descrittiva. L'A. ha dato parte rilevante in questa raccolta ai quesiti metrici, ciò che devesi approvare.

Gli esempi sulla geometria, non di misura, sono classificati in ordine ai libri d' Euclide, che si studiano nelle scuole, quelli di trigonometria non sono che la riproduzione, alquanto ampliata, degli esempi aggiunti ai diversi capitoli della 2ª e 3ª parte della traduzione italiana della *Geometrie des Masses* dello Schlömilch, di cui il Prof. Gambioli fu uno dei traduttori.

La *chiave* poi è lavoro diverso dagli ordinari soluzionari e può riguardarsi per i quesiti più difficili quale una traccia della via da seguire nella dimostrazione o nella soluzione dell'esercizio. Manca qualunque indicazione per gli esercizi più semplici, all'infuori della parola *facile*.

Questo in genere il contenuto del lavoro del Prof. Gambioli, il quale nell'idioma nostro, per quanto io sappia, non ha intimo confronto che in un vecchio libro francese tradotto in italiano nel 1863 (Ritt. (G.) Problemi di geometria e trigonometria). In quanto alla natura degli esercizî è debito riconoscere che si tratta d'una collezione varia ed importante. Gli accenni di dimostrazione o soluzione della *chiave* rispondono bene allo scopo, nella generalità dei casi, ma nel secondo volume, specialmente, sono frequentissimi e talvolta grossolani gli errori di stampa.

Due osservazioni non mi paiono fuor di luogo a proposito del lavoro di cui si tratta. La prima è che una raccolta d' esercizî non si consulta soltanto per levarne tale o tal altro esempio, ma bene spesso anche per cercarvi un esercizio determinato o di specie determinata e la disposizione della raccolta in discorso non facilita abbastanza una ricerca consimile, pur tanto importante. La seconda osservazione da farsi è che dopo il ben noto lavoro del Petersen (Metodi e teorie per la risoluzione dei problemi ecc.) e quello pregevole del Professor Bettazzi (La risoluzione dei problemi numerici e geometrici) si poteva pur tentare qualche cosa di più nel senso teorico della risoluzione dei problemi, di quello che non vi sia nell'introduzione del libro del Prof. Gambioli.

Ma anche com'è, questa raccolta d'esercizi, colla *chiave* corrispondente, mi pare destinata a prestare utili servigi nell' insegnamento elementare della geometria presa in senso lato.

A. Lugli.

VARIETÀ

CONGRÈS DE CAEN DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE
POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES

(Séance du 14 Août 1894)

QUESTION À L'ORDRE DU JOUR.

Etude des moyens qui seraient de nature à assurer un échange de vues plus facile et plus suivi entre les mathématiciens des diverses nations, et qui pourraient contribuer ainsi aux progrès des sciences mathématiques et au perfectionnement des méthodes.

RÉSOLUTION.

Les 1ère et 2e Sections, après une discussion approfondie, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres;

1º — Donnent en principe l'adhésion la plus complète au projet de création de *Congrès mathématiques internationaux* et se déclarent dès-à-présent disposées à apporter tout leur concours aux efforts qui sont ou seront faits dans cet ordre d'idées;

2º — Approuvent absolument l'idée de M.r Mansion, relative à la rédaction de *Vocabulaires mathématiques* et applaudissent au commencement de réalisation que Mr le Commandant Brocard a déjà donné à cette idée, par la préparation d'un vocabulaire mathématique français;

3º — Expriment l'espoir que le projet de M.r Jacques Boyer, concernant l'établissement d'un *Dictionnaire mathématique*, pourra aboutir à un heureux résultat, et en France, et dans la plupart des autres pays;

4º — Croient devoir attirer l'attention sur les remarquables monographies mathématiques qui se publient en ce moment en Allemagne, et dont il serait très désirable de voir publier des traductions dans diverses langues;

5º — Considèrent que les grands efforts faits par M.r le Professeur Peano et plusieurs de ses Confrères pour la propagation de la *Logique mathématique*, et la publication d'un *formulaire mathématique* sont de nature à contribuer puissamment au but qu'il s'agit d'atteindre;

6º — Sont heureuses de constater le degré d'avancement du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*, et, dans le même ordre d'idées, applaudissent à la publication si intéressante due à un groupe de mathématiciens hollandais et entre autres de M.r P. H. Schoute, et qui est intitulée *Revue Semestrielle des Publications mathématiques*;

7º — Estiment que la publication de *l'Intermédiaire des Mathématiciens*, depuis le commencement de 1894, a rendu et est appelée à rendre encore de très grands services, en ce qui concerne les rapports de mathématiciens entre eux; expriment leur reconnaissance aux fondateurs, MM. Laisant et Lemoine, et se félicitent de voir que cette initiative a été due à deux des membres de l'Association française pour l'avancement des sciences;

8º — Prennent en très sérieuse considération les réflexions présentées par M.r Léméray sur la possibilité d'établir des bibliothèques mathématiques, ayant pour objet de mettre des livres à la disposition des travailleurs éloignés des centres scientifique;

9º — Décident que la question, sous la forme générale où elle a été rédigée, sera maintenue à l'ordre du jour des séances pour la session de Bordeaux en 1895.

(Ces diverses résolutions ont été prises à l'unanimité des Membres présents).

Finita la redazione il dì 12 settembre 1894.

SAGGIO ANALITICO

DI INTRODUZIONE ALLO STUDIO DELLE FRAZIONI

(*Continuazione e fine: V. pag. 132*).

9. *Con l'introduzione dei numeri frazionarî tutte le divisioni con numeri interi sono possibili* (purchè il divisore sia diverso da zero).

Siano a e b due interi, e si cerchi il numero che moltiplicato per b dia a. Avendo convenuto di indicare un tal numero, che chiameremo *quoto*, con $\frac{a}{b}$, si ha il teorema:

Il quoto della divisione di due numeri interi a *e* b (b differente da zero) *esiste sempre: esso è uguale alla frazione* $\frac{1}{b} \times a$, *cioè si ha l'uguaglianza*

$$\left(\frac{1}{b} \times a\right) \times b = a,$$

la quale dice che:

Ripetendo b *volte la frazione* $\frac{1}{b} \times a$, *si ha il numero intero* a.

O anche:

La frazione $\frac{1}{b} \times a$ *è un numero che moltiplicato per* b *dà* a.

Infatti, per la proprietà commutativa della moltiplicazione, la quale proprietà è compendiata nell'uguaglianza $a \times b = b \times a$, risulta che:

b *gruppi di* a *enti ciascuno possono considerarsi come* a *gruppi di* b *enti ciascuno.* Si avrà dunque, qualunque sia l'ente E,

$$(E \times a) \times b = (E \times b) \times a,$$

la quale uguaglianza esprime che: *in un prodotto di tre fattori si può cambiare l'ordine dei due ultimi fattori intieri, qualunque sia il fattore* E, purchè a questo fattore o ente E sia applicabile il concetto e l'operazione del ripetere o contare, vale a dire purchè E sia aggregabile a tanti altri E (tutti uguali fra loro) quanti se ne vuole, ossia purchè E possa essere preso come unità di una collezione.

In particolare, il primo fattore E potrà essere una unità frazionaria; quindi, ponendo $\frac{1}{b}$ in luogo di E, si avrà:

$$\left(\frac{1}{b} \times a\right) \times b = \left(\frac{1}{b} \times b\right) \times a \,.$$

Ora per la definizione dell'art. 2, $\frac{1}{b} \times b = 1$; dunque sarà appunto

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{b} \times a\right) \times b &= 1 \times a \\ &= a \,.\end{aligned}$$

Quindi, poichè si è convenuto di indicare con la scrittura $\frac{a}{b}$ il quoto della divisione di a per b, si avrà:

$$\frac{1}{b} \times a = \frac{a}{b} \,.$$

Si noti che qui, come molte altre volte, il segno $=$ ha il significato di una pura affermazione; cioè la relazione precedente piuttostochè leggersi: $\frac{1}{b} \times a$ uguale a $\frac{a}{b}$, dovrebbe leggersi: $\frac{1}{b} \times a$ *è* $\frac{a}{b}$, o più precisamente: *la frazione* $\frac{1}{b} \times a$ *è il quoto della divisione di* a *per* b, o anche, come volevasi dimostrare, *la frazione* $\frac{1}{b} \times a$ *è un numero che moltiplicato per* b *dà* a. Dunque le due scritture $\frac{1}{b} \times a$ e $\frac{a}{b}$ hanno lo stesso significato; ma si preferisce scrivere $\frac{a}{b}$ invece di $\frac{1}{b} \times a$, come faremo sempre. Cosicchè $\frac{a}{b}$ sarà una frazione che ha per denominatore b e per numeratore a.

10. Dopo ciò si può affermare che:

Una frazione è uguale al quoto della divisione del suo numeratore per il denominatore.

O anche:

Moltiplicando una frazione per il suo denominatore, si ottiene per prodotto il numeratore.

Dunque, in generale, la frazione $\frac{a}{b}$ sarà una parte aliquota b^{ma} di a, sarà un b^{mo} di a.

11. *Se il numeratore è un multiplo del denominatore, la frazione esprime un intero.*

Infatti, se fosse a multiplo di b, p. es. $a = b \times c$, la frazione $\frac{b \times c}{b}$, essendo uguale al quoto del numeratore $b \times c$ diviso per il denominatore b, sarà appunto uguale all'intero c.

Inversamente: *un intero può esprimersi con una frazione di dato denominatore. Il numeratore sarà uguale al prodotto del denominatore per l'intero.*

Per es., per esprimere in *quinti* l'intero 8, si ha $8 = (8 \times 5) : 5$. Ma per l'art. precedente, $(8 \times 5) : 5 = \frac{8 \times 5}{5}$; quindi $8 = \frac{8 \times 5}{5}$.

La frazione che rappresenta un numero intero si suole anche chiamare *frazione apparente.*

Ciò mostra che il concetto di numero frazionario è più generale che quello di numero intero, il quale non è che il caso particolare di una frazione avente il numeratore multiplo del denominatore.

12. È facile estendere ai fratti le operazioni eseguite sugli interi. In particolare, le unità frazionarie della medesima specie si potranno aggiungere (*addizionare*) e togliere (*sottrarre*) successivamente. Più generalmente si ha che le operazioni di somma e sottrazione di frazioni della stessa specie sono ricondotte a quelle di interi, i quali sono i numeratori; quindi si possono concepire e definire le operazioni di *addizione* e *sottrazione di frazioni della stessa specie* precisamente come le operazioni di *addizione* e *sottrazione degli interi.*

13. *L'addizione di frazioni della stessa specie è espressa dall'uguaglianza*

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}.$$

La quale uguaglianza si dimostra provando che il quoto di $a + b$ diviso per m è anche uguale a $\frac{a}{m} + \frac{b}{m}$, cioè che è vera l'uguaglianza

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) \times m = a + b.$$

Per dimostrare quest'ultima uguaglianza si osservi che l'uguaglianza

$$(E + F) \times m = E \times m + F \times m,$$

la quale fu dimostrata valida per numeri interi, è vera tutte le volte che l'espressione $(E + F) \times m$ ha un significato determinato in accordo coi soliti concetti di addizione e moltiplicazione, e perciò tutte le volte che gli enti E e F sono aggregabili con altrettanti E e F quanti si vogliono (purchè, cioè, siano aggregabili tanto gli E fra loro e gli F fra loro, quanto ciascun E con ciascun F, come anche i gruppi formati da un E e da un F). In particolare, l'uguaglianza precedente sarà vera anche nel caso che E e F siano numeri frazionarî.

Ciò risulta subito dal solito concetto di ripetizione, e dal considerare il segno $+$ come un *e*, cioè come una congiunzione, vale a dire come indicante l'*operazione* del considerare simultaneamente due o più enti. Poichè, per es., l'aggregato che si ottiene ripetendo 3 volte un gruppo formato coi due enti E e F può essere invece considerato come l'aggregato dei due gruppi che si ottengono rispettivamente ripetendo 3 volte l'ente E e 3 volte l'ente F. Si ha dunque per il nostro caso:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) \times m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m,$$

cioè, per l'art. 10,

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m}\right) m = a + b,$$

quindi, come dovevasi dimostrare,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m};$$

cioè:

Il totale (o la somma) di più frazioni della stessa specie si esprime con una frazione della stessa specie il cui numeratore è la somma dei numeratori delle date.

14. *Sottrarre una frazione* $\frac{b}{m}$ *da una frazione* $\frac{a}{m}$, *significa trovare un numero tale che sommato con* $\frac{b}{m}$ *dia* $\frac{a}{m}$.

Se un tal numero si può trovare, esso chiamasi il *resto* o la *differenza* di $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{m}$, si indica con la scrittura $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$, e si ha:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Infatti, se il numero b non supera a, la scrittura $\frac{a-b}{m}$ esprime un numero. Inoltre si ha, per l'art. precedente,

$$\frac{a-b}{m} + \frac{b}{m} = \frac{(a-b)+b}{m},$$

e quindi:

$$\frac{a-b}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a}{m};$$

sicchè il numero $\frac{a-b}{m}$ sarà, per definizione, il resto cercato della sottrazione $\frac{a}{m} - \frac{b}{m}$.

Dunque, quando b non è superiore ad a, si ha l'uguaglianza

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m},$$

cioè:

Il resto della sottrazione di due frazioni della medesima specie si esprime con una frazione della medesima specie, il cui numeratore è la differenza dei due numeratori delle date.

15. Se qualcuno dei termini della somma o uno dei termini della sottrazione fossero numeri interi, essendo gli altri termini della somma frazioni della stessa specie, si trasformerebbero gl'interi in fratti con il denominatore comune, e così potrebbesi eseguire l'addizione o la sottrazione.

16. Se il numeratore è minore del denominatore, la frazione dicesi *pura* o *propria*, perchè effettivamente è una parte del numero 1, è un *frammento*, un *rotto;* diversamente, la frazione si dice *spuria* o *impropria*.

17. Un'espressione come $9 + \frac{4}{5}$ si suol scrivere, quando non nasca ambiguità, $9\frac{4}{5}$, e si legge 9 e $\frac{4}{5}$; essa chiamasi qualche volta *numero misto* o *espressione mista*, e talvolta anche *espressione fratta* o *frazionaria*.

18. Una frazione impropria può sempre esprimersi o con un numero intero o con un numero misto.

Per es., la frazione $\frac{39}{5}$ equivale al numero misto $7 + \frac{4}{5}$. Qui 7 è il *quoziente* della divisione (divisione in senso lato) di 39 per 5, mentre invece $\frac{39}{5}$ o $7 + \frac{4}{5}$ è il *quoto* della divisione di 39 per 5. Taluno invece chiamerebbe il numero 7 *quoziente incompleto* o *approssimato* o *parte intera del quoto;* e chiamerebbe $7 + \frac{4}{5}$ o $\frac{39}{5}$ *quoziente completo* o *esatto* della divisione di 39 per 5.

Nervi, luglio 1894.

GIOVANNI GARBIERI.

SU UN TRIANGOLO NOTEVOLE

(Continuazione e fine: V. pag. 136).

13.° — Essendo MQP isobaricentrico inscritto in $M_1 Q_1 P_1$, dicendo T_1, T_2, T_3 i punti ove QP, PM, MQ incontrano rispettivamente $Q_1 P_1$, $P_1 M_1$, $M_1 Q_1$, pel teorema precedente sarà:

$$\text{(6)} \qquad \frac{Q\,T_1}{T_1\,P} = \frac{P\,T_2}{T_2\,M} = \frac{M\,T_3}{T_3\,Q}$$

e poichè T_1, T_2, T_3 sono pure i punti d'incontro delle AM, BQ, CP ordinatamente colle QP, PM, MQ si ha il teorema: *le rette che congiungono* A, B, C *ordinatamente con* M, Q, P *incontrano i lati opposti di* MQP *in punti che sono vertici di un triangolo isobaricentrico con* ABC.

Dicendo F_1, F_2, F_3 i punti analoghi a T_1, T_2, T_3 che si ottengono congiungendo A, B, C ordinatamente con $Q, P, M,$ e V_1, V_2, V_3 quelli che si ottengono congiungendo A, B, C ordinatamente con $P, M, Q,$ risultano analogamente:

$$\text{(6)} \qquad \frac{Q\,F_3}{F_3\,P} = \frac{P\,F_1}{F_1\,M} = \frac{M\,F_2}{F_2\,Q}, \quad \frac{Q\,V_2}{V_2\,P} = \frac{P\,V_3}{V_3\,M} = \frac{M\,V_1}{V_1\,Q}$$

e i triangoli $F_1 F_2 F_3$, $V_1 V_2 V_3$ sono isobaricentrici con ABC.

Essendo $\frac{Q\,T_1}{T_1\,P}$, $\frac{P\,F_1}{F_1\,M}$, $\frac{M\,V_1}{V_1\,M}$ i rapporti che le rette che proiettano A da M, Q, P determinano sui lati opposti di MQP; $\frac{Q\,V_2}{V_2\,P}$, $\frac{P\,T_2}{T_2\,M}$, $\frac{M\,F_2}{F_2\,Q}$ quelli che le rette che proiettano B da M, Q, P determinano sui lati opposti di MQP; e $\frac{Q\,F_3}{F_3\,P}$, $\frac{P\,V_3}{V_3\,M}$, $\frac{M\,T_3}{T_3\,Q}$ quelli che le rette che proiettano C da M, Q, P determinano sui lati opposti di MQP, dalle (6) deriva che: *se* M, P, Q *sono circolar. ass. rispetto ad* ABC, A, B, C *sono circolar. ass. rispetto ad* MQP.

Se un triangolo circoscritto ad un altro è con questo isobaricentrico, i vertici di questo secondo divideranno i lati del primo secondo lo stesso rapporto, cioè saranno circolar. ass. rispetto al primo, e allora per ciò che precede i vertici del primo saranno circolar. ass. rispetto al secondo, cioè: *i vertici di un triangolo isobaricentrico circoscritto ad un altro* ABC *sono punti circolar. ass. rispetto ad* ABC. Questo è per il triangolo circoscritto il teorema inverso di quello del n. 11. Il teorema inverso dello stesso per il triangolo inscritto è il noto teorema: i vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in ABC dividono i lati di ABC secondo lo stesso rapporto.

Da questo teorema e da quello del n. 3 deriva una facile risoluzione del problema: costruire i triangoli isobaricentrici con ABC e ad esso circoscritti. Se MQP è circoscritto ad ABC ($m = p$) e μ, π, ρ sono altri punti circolar. ass. rispetto ad ABC e $\mu\pi\rho$ è pure circoscritto ad ABC, la condizione perchè sia $MQP = \mu\rho\pi$ è per la (1) $m\,m' = 1$, essendo m' il rapporto secondo cui $C\mu$ sega AB.

Altrettanto dicasi se MQP, $\mu\rho\pi$ sono entrambi inscritti in ABC. Onde si ha il teorema: *se* MQP *è un triangolo isobaricentrico circoscritto (o inscritto) ad* ABC, *esiste uno e un solo altro triangolo isobaricentrico circoscritto (o inscritto) ad* ABC, *equivalente ad esso, e questo è il triangolo che ha per vertici i punti isotomici dei vertici del primo.*

14.° — Sia $D_1\,D_2\,D_3$ un triangolo isobaricentrico inscritto in MQP e sieno D_a, D_b, D_c i punti in cui le rette MD_1, QD_2, PD_3 incontrano BC, CA, AB rispettivamente. Dai quadrilateri $QP\,N''_a N_a$, $PMN''_b N'_b$,

$MQN'_c N_c$ segati rispettivamente dalle rette MD_a, QD_b, PD_c si ha per il teorema generalizzato di Menelao:

$$(7) \qquad \frac{QD_1}{D_1P}\,\frac{PM}{MN_a}\,\frac{N_aD_a}{D_aN''_a}\,\frac{N''_aM}{MQ} = \frac{PD_2}{D_2M}\,\frac{MQ}{QN''_b}\,\frac{N''_bD_b}{D_bN'_b}\,\frac{N'_bQ}{QP} =$$
$$\frac{MD_3}{D_3Q}\,\frac{QP}{PN'_c}\,\frac{N'_cD_c}{D_cN_c}\,\frac{N_cP}{PM} = 1.$$

Essendo per ipotesi

$$\frac{QD_1}{D_1P} = \frac{PD_2}{D_2M} = \frac{MD_3}{D_3Q},$$

ed inoltre

$$\frac{PM}{MN_a} = \frac{MQ}{QN''_b} = \frac{QP}{PN'_c}, \quad \frac{N''_aM}{MQ} = \frac{N'_bQ}{QP} = \frac{N_cP}{PM}$$

perchè $N_a N''_b N'_c$, $N''_a N'_b N_c$ sono triangoli isobaricentrici inscritti in MQP, dalle precedenti risulta:

$$\frac{N_aD_a}{D_aN''_a} = \frac{N''_bD_b}{D_bN'_b} = \frac{N'_cD_c}{D_cN_c}$$

donde, per essere $N_a N''_b N'_c$, $N''_a N'_b N_c$ triangoli isobaricentrici inscritti in ABC, deriva che anche $D_a D_b D_c$ è un triangolo isobaricentrico inscritto in ABC. Altrettanto dicasi dei due triangoli che si ottengono dai punti d'incontro di MD_1, QD_2, PD_3 ordinatamente con CA, AB, BC e con AB, BC, CA. Cioè: *le rette che uniscono tre punti* M, P, Q *circolar. ass. rispetto ad un triangolo* ABC *coi vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in* MQP, *incontrano i lati di* ABC *in punti che sono vertici di tre triangoli isobaricentrici con* ABC.

E poichè A, C, B sono a loro volta circolar. ass. rispetto ad MQP, si ha pure: *le rette che congiungono* A, C, B, *coi vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in* ABC, *incontrano i lati di* MQP *in punti che sono vertici di tre triangoli isobaricentrici con* MQP *e* ABC.

I due teoremi possono essere generalizzati supponendo che D_1, D_2, D_3 sieno punti circolar. ass. rispetto ad MQP (o ad ABC), poichè le rette che uniscono ordinatamente MQP (od ABC) con questi punti, uniscono anche M, Q, P (od A, B, C) coi vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto con MQP (o con A, B, C) (vedi n. 4).

Facendo $\frac{Q\,D_1}{D_1\,P}=1$, $\frac{Q\,D_1}{D_1\,P}=-1$ si hanno i corollari:

le mediane del triangolo di tre punti M, Q, P *circolar. ass. rispetto ad un triangolo* ABC, *determinano su* ABC *tre triangoli isobaricentrici con* ABC, *e le mediane di* ABC *determinano su* MQP *tre triangoli isobaricentrici con* MQP (*e* ABC),

le parallele condotte dai vertici di detto triangolo ai lati opposti determinano su ABC *tre triangoli isobaricentrici con* ABC, *e le parallele condotte dai vertici di* ABC *ai lati opposti determinano su* MQP *tre triangoli isobaricentrici con* MQP (*e* ABC).

Poichè evidentemente le parallele alle mediane di un triangolo condotte pei vertici determinano sui lati di questo triangolo due triangoli isobaricentrici inscritti, si ha pure:

le parallele alle mediane di MQP *condotte per i suoi vertici determinano su* ABC *sei triangoli isobaricentrici inscritti con* ABC *e le parallele alle mediane di* ABC *condotte per i suoi vertici determinano su* MQP *sei triangoli isobaricentrici inscritti con* MQP.

15°. — Dalle (7) se si suppone $D_a D_b D_c$ triangolo isobaricentrico inscritto con ABC, deriva evidentemente:

$$\frac{Q\,D_1}{D_1\,P}=\frac{P\,D_2}{D_2\,M}=\frac{M\,D_3}{D_3\,Q}$$

onde $D_1\,D_2\,D_3$ è isobaricentrico con MQP (e ABC), ecc., cioè: *le rette che uniscono tre punti* MPQ *circolar. ass. rispetto ad un triangolo* ABC *coi vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in* ABC *determinano su* MQP *tre triangoli e su* ABC *altri sei triangoli isobaricentrici con* MQP (*e* ABC). *e le rette che uniscono* A, B, C *coi vertici di un triangolo isobaricentrico inscritto in* MQP *determinano su* ABC *tre triangoli e su* MQP *altri sei triangoli isobaricentrici con* ABC (*e* MQP).

Se si fa $\frac{B D_a}{D_a C}=-1$ si ha il corollario: *le parallele condotte da* M, Q, P *ai lati di* ABC *determinano su* MQP *ed* ABC *triangoli isobaricentrici con essi;* onde anche: *le parallele condotte da* A, B, C *ai lati di* MQP *determinano su* ABC *ed* MQP *triangoli isobaricentrici con essi.*

16°. Alcune altre proprietà, che derivano immediatamente dalle (3) (4) sono le seguenti:

I. $$M X_a . M X_b . M X_c = P Y_a . P Y_b . P Y_c = Q Z_a . Q Z_b . Q Z_c = \frac{(2 . ABC)^3}{a . b . c} \frac{\alpha\beta\gamma}{(\Sigma\alpha)^3}.$$

II. $$PAB = PBC = QCA$$

cioè: *i triangoli che* M, Q, P *formano ordinatamente coi lati di* ABC *sono equivalenti.*

III. $$M X_a . P Y_a . Q Z_a = \frac{(2 . ABC)^3}{a^3} \frac{\alpha\beta\gamma}{(\Sigma\alpha)^3}$$

onde $$(M X_a . P Y_a . Q Z_a) : (M X_b . P Y_b . Q Z_b) : (M X_c . P Y_c . Q Z_c) = \frac{1}{a^3} : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{c^3}.$$

IV. Poichè la sommma $M X_a + P Y_a + Q Z_a$ non varia con α, β, γ, il prodotto $M X_a . P Y_a . Q Z_a$ per α, β, γ positivi sarà massimo pei valori di α, β, γ per i quali risulti $M X_a = P Y_a = Q Z_a$ cioè per $\alpha = \beta = \gamma$ cioè quando M, P, Q coincidono col baricentro ABC.

17°. Inoltre indicando con L un punto del piano del triangolo ABC della relazione

$$LM^2 = \frac{\alpha . LA^2 + \beta . LB^2 + \gamma . LC^2}{\Sigma\alpha} - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\Sigma\alpha)^2}$$

ed analoghe per LP^2, LQ^2, deriva sommando

(8) $$LM^2 + LP^2 + LQ^2 = LA^2 + LB^2 + LC^2 - \frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} . \sum a^2$$

onde la quantità $(LM^2 + LP^2 + LQ^2) - (LA^2 + LB^2 + LC^2)$ non varia con L, e la quantità $LM^2 + LP^2 + LQ^2 + \frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} . \sum a^2$ non varia con M, P, Q.

Se $\alpha = \beta = \gamma$, la (8) diviene

(9) $$3 . LG^2 = LA^2 + LB^2 + LC^2 - \frac{1}{3} . \sum a^2.$$

Se α, β, γ sono positive e almeno due diverse da zero, la quantità $\frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2}$ è maggiore di zero, onde $LM^2 + LP^2 + LQ^2 < LA^2 + LB^2 + LC^2$; se due delle α, β, γ sono zero, è $\frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} = 0$, onde $LM^2 + LP^2 + LQ^2 = LA^2 + LB^2 + LC^2$, e allora difatti

M, Q, P coincidono con A, B, C. Ne deriva che per valori variabili non negativi di α, β, γ (cieè per M, P, Q non esterni ad ABC) e per L fisso, il valore massimo di $LM^2 + LP^2 + LQ^2$ è $LA^2 + LB^2 + LC^2$.

Essendo sempre $\sum \alpha\beta < \sum \alpha^2$ per α, β, γ non tutte eguali, e invece $\sum \alpha\beta = \sum \alpha^2$ per $\alpha = \beta = \gamma$, sarà sempre $3 . \sum \alpha\beta < (\sum \alpha)^2$, ossia $\frac{\Sigma \alpha\beta}{(\Sigma \alpha)^2} < \frac{1}{3}$, per α, β, γ non tutte eguali, e sarà invece $3 . \sum \alpha\beta = (\sum \alpha)^2$, ossia $\frac{\Sigma \alpha\beta}{(\Sigma \alpha)^2} - \frac{1}{3}$, per $\alpha = \beta = \gamma$; onde per α, β, γ variabili non negative, e L costante, il valor minimo di $LM^2 + LP^2 + LQ^2$ è $LA^2 + LB^2 + LC^2 - \frac{1}{3} . \sum a^2 = 3 . LG^2$.

Così per L variabile ed M, P, Q fissi, il massimo (minimo) di $LM^2 + LP^2 + LQ^2$ corrisponde per la (8) al massimo (minimo) di $LA^2 + LB^2 + LC^2$. Ora dalla (9) deriva che $LA^2 + LB^2 + LC^2$ acquista il valore minimo quando L coincide con G, e il valore massimo (per L non esterno ad ABC) quando L coincide con quello dei vertici di ABC che è opposto al lato minore, perchè allora LG acquista il valore massimo, essendochè, se a è questo lato minore, è $AG > \frac{BG}{CG}$. Onde il valore minimo di $LM^2 + LP^2 + LQ^2$ è $\left(1 - \frac{3\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2}\right) \frac{\Sigma a^2}{3}$ o anche $\frac{1}{3}(MP^2 + PQ^2 + QM^2)$, e il valore massimo è (a il lato minore) $(b^2 + c^2) - \frac{\Sigma\alpha\beta}{(\Sigma\alpha)^2} \sum a^2$.

Dicembre 1893.

F. Ferrari.

SUI POLINOMII

(*Continuazione e fine*: V. *pag.* 77 *e* 144).

17. Teorema. *Un polinomio primo non può dividere il prodotto di due polinomii se non è divisore di almeno uno dei medesimi.*

Dimostrazione. Ammettiamo vero il teorema pei polinomii primi contenenti meno di n lettere e consideriamo un polinomio primo P, che contenga n lettere e non divida nessuno dei polinomii A', B'.

Se un multiplo di P è uguale al prodotto d'un polinomio con meno di n lettere per un polinomio H, questo polinomio H è divisibile per P: infatti, sia L un polinomio, che contenga meno di n lettere, e sia

$$LH = PT$$

dove T sia un polinomio intero. Se L fosse ± 1, questa stessa uguaglianza direbbe chiaramente che H è divisibile per P; se L non è nè 1 nè -1, sia esso prodotto (14) dei fattori primi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, quindi sia

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r\, H = PT \quad \text{epperò} \quad \frac{PT}{\alpha_1} = \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_r\, H.$$

L'ultima eguaglianza mostra che α_1 è divisore di PT ed il quoziente è $\alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_r H$; ma α_1 è polinomio primo e contiene meno di n lettere per cui deve dividere o P o T e precisamente deve dividere T, non potendo dividere P che è primo e diverso da α_1; adunque $\frac{T}{\alpha_1}$ è polinomio intero ed è

$$P \frac{T}{\alpha_1} = \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_r\, H.$$

Ripetendo il già fatto ragionamento si conclude successivamente essere polinomii interi i quozienti

$$\frac{T}{\alpha_1 \alpha_2} \qquad \frac{T}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \qquad \ldots \frac{T}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}$$

per cui resta dimostrato che H è divisibile per P, essendo

$$H = P \frac{T}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}.$$

Osserviamo ancora che, se il prodotto di P per un polinomio, che contenga meno di n lettere e non contenga x, è eguale al prodotto di due polinomii H e K, uno di questi polinomii non contiene x. Infatti, sia

$$HK = IP$$

dove I sia polinomio con meno di n lettere e senza x. Non può essere I uguale ± 1 perchè P, essendo primo, non può essere prodotto di due polinomi; sia esso prodotto (14) dei fattori primi $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, quindi sia:

$$HK = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s P \quad \text{epperò} \quad \frac{HK}{\beta_1} = \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_s P.$$

L'ultima eguaglianza mostra che HK è divisibile per β_1 ed il quoziente è $\beta_2 \beta_3 \ldots \beta_s P$; ma β_1 è primo e contiene meno di n lettere per cui dovrà dividere od H o K. Poniamo

$$\frac{HK}{\beta_1} = H_1 K_1 = \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_s P$$

dove H_1 e K_1 sono $\frac{H}{\beta_1}$ e K, oppure H e $\frac{K}{\beta_1}$, secondo che β_1 è, oppure non è, divisore di H; essi sono polinomii interi per ciò che fu detto. Dall'ultima eguaglianza deducesi che $H_1 K_1$ è divisibile per β_2 ed il quoziente è $\beta_3 \beta_4 \ldots \beta_s P$ per cui β_2, che è primo e contiene meno di n lettere, deve dividere od H_1 o K_1. Poniamo

$$\frac{H_1 K_1}{\beta_2} = H_2 K_2 = \beta_3 \beta_4 \ldots \beta_s P$$

dove H_2 e K_2 sono $H_1 : \beta_2$ e K_1, oppure H_1 e $K_1 : \beta_2$, secondo che β_2 è, oppure non è, divisore di H_1; H_2 e K_2 sono polinomi interi per quanto fu detto. Continuando in questo modo si perverrà ad

$$H_s K_s = P$$

per cui, essendo primo P, uno dei fattori H_s e K_s deve essere ± 1 e l'altro $\pm P$; ma H_s è quoziente della divisione di H per certi fattori β e K_s è quoziente della divisione di K pei rimanenti fattori β per cui, non trovandosi x in nessuno dei fattori $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ perchè il polinomio I non contiene x, H e K sono prodotti di H_s e K_s per polinomii che non contengono x; per ciò, se è H_s uguale a ± 1, H non contiene x; è invece K senza x, se è K_s uguale a ± 1.

Premesso ciò, poniamo che R' ed R'_1 siano infimi resti (16) delle divisioni per P dei polinomii A' e B', ordinati per le potenze della lettera x di P, rispetto alla quale supporremo ordinati tutti i polinomii che ora considereremo: sia precisamente

$$MA' = PQ' + R' \qquad M_1 B' = PQ'_1 + R'_1$$

dove M ed M_1 sono polinomii che, non potendo contenere se non le lettere del primo coefficiente di P, non possono avere più di $n - 1$ lettere; per quanto fu premesso i resti R' ed R'_1 sono quindi necessariamente diversi da zero, non essendo divisibile per P nessuno dei polinomii A' e B'. Se in A' e B' vi sono lettere, che non si trovano in P, diamo ad essi tali valori numerici interi da non ridurre a zero nessuno dei resti R' ed R'_1 (9); indichiamo con A, B, Q, Q_1, R, R_1 ciò che divengono così A', B', Q', Q'_1, R', R'_1; M ed M_1 non vengono mutati perchè contengono solamente lettere di P. Avremo dunque

$$MA = PQ + R \qquad M_1 B = PQ_1 + R_1.$$

Non può essere zero A perchè, se ciò fosse, si avrebbe $PQ = -R + 0$, la quale uguaglianza non può sussistere (9) perchè PQ è per lo meno del grado di P mentre R è inferiore a P in x: per analoga ragione non può esser nullo B.

Se fosse intero $\frac{A'B'}{P}$, sarebbe intero anche $\frac{AB}{P}$ perchè il quoziente della divisione AB per P s' ottiene da quello di $A'B'$ per P attribuendo alle lettere non contenute in P i valori numerici interi che furono a loro attribuite. Se è intero $\frac{AB}{P}$, è intero anche $\frac{RR_1}{P}$, essendo

$$\frac{RR_1}{P} = MM_1 \frac{AB}{P} - MAQ_1 - M_1BQ + PQQ_1.$$

Se R_1 contiene ancora x, sia R_2 resto infimo della divisione di P per R_1; precisamente sia

$$M_2 P = R_1 Q_2 + R_2$$

dove M_2 è polinomio con meno di n lettere, non contenendo x (16): Q_2 invece conterrà x perchè P è superiore ad R_1 in x: per quanto fu premesso non può quindi esser nullo R_2. Dall' ultime eguaglianze deducesi

$$\frac{RR_2}{P} = M_2 R - \frac{RR_1}{P} Q$$

per cui, se è intero $\frac{RR_1}{P}$, è intero anche $\frac{RR_2}{P}$. Se R_2 contiene ancora x, sia R_3 resto infimo della divisione di P per R_2; precisamente sia

$$M_3 P = R_2 Q_3 + R_3 .$$

Il resto R_3 non può esser nullo ed è

$$\frac{RR_3}{P} = M_3 R - \frac{RR_2}{P} Q_3$$

per cui, se è intero $\frac{RR_2}{P}$, è intero anche $\frac{RR_3}{P}$. Continuando, devesi pervenire ad un resto senza x perchè ogni nuovo resto è inferiore al resto precedente in x: sia esso R_k e sia

$$M_k P = R_{k-1} Q_k + R_k .$$

Per quanto fu premesso è diverso da zero R_k; è

$$\frac{RR_k}{P} = RM_k - \frac{RR_{k-1}}{P} Q_k$$

per cui, se è intero $\frac{RR_{k-1}}{P}$, e intero anche $\frac{RR_k}{P}$; ma questo non può essere intero perchè RR_k è inferiore a P in x, essendo R inferiore a P ed R_k senza x. Non può dunque essere intero $\frac{A'B'}{P}$ perchè, se fosse intero, seguirebbe dal fatto ragionamento che anche $\frac{RR_k}{P}$ sarebbe intero. Il polinomio P non può dunque dividere il prodotto di due polinomii, se nessuno dei medesimi è divisibile per P.

Il teorema è dunque vero pei polinomii primi di n lettere, se è vero per quelli, che hanno meno di n lettere; ma è vero per quelli senza lettere, cioè pei numeri (11), quindi è vero pei polinomii primi ad unica lettera, quindi è anche vero per quelli a due lettere, e così via.

18. Dal teorema precedente segue che: *Sussiste pei polinomii primi una teoria identica a quella dei numeri primi,* purchè soltanto si considerino come unico divisore, od unico multiplo, due divisori, o multipli, che differiscano solo pel segno, tali cioè che l'uno s'ottenga moltiplicando l'altro per -1, la qual cosa noi appunto faremo (*). Possiamo così enunciare senz'altro le seguenti proposizioni, che si possono dimostrare con ragionamenti affatto simili a quelli con cui si dimostrano in aritmetica le analoghe proposizioni pei numeri:

Un polimonio si può scomporre in un sol modo in fattori primi.

Perchè un polimonio intero sia divisibile per un altro è necessario e sufficiente che il primo contenga almeno con egual esponente i fattori primi del secondo.

(*) Volendo togliere anche questa ambiguità si può convenire p. es. che i polinomii primi debbano avere termini supremi positivi. V. F. GIUDICE: *Algebra ad uso delle scuole liceali.* Editore Remo Sandron, Palermo, 1887.

Sono divisori comuni di più polinomii interi il prodotto dei loro fattori primi comuni al minimo esponente ed i divisori di tal prodotto.

Sono multipli comuni di più polinomii il prodotto dei loro fattori primi, comuni e non comuni, al massimo esponente ed i multipli di tal prodotto.

19. Dall'ultimo teorema dimostrato segue pure che: Il prodotto di due puri polinomii ordinati per le potenze d'una lettera è un puro polinomio ordinato per le potenze della stessa lettera (11) per cui: *Se il prodotto d'un puro polinomo ordinato per le potenze di* x *per un polinomio indipendente da* x *è divisibile per altro prodotto della stessa forma, il fattore indipendente da* x *del dividendo è divisibile pel fattore indipendente da* x *del divisore ed il fattore in* x *è divisibile pel fattore in* x.

20. Se A, B, C sono puri polinomii ordinati per le potenze della lettera x relativamente alla quale C abbia grado minore di A e di B ed il prodotto di C per un polinomio intero indipendente da x è resto della divisione per B del prodotto di A per un polinomio indipendente da x, diremo che C è *resto principale* della divisione di A per B.

Teorema. *Se sono dati due puri polinomii ordinati per le potenze d'una lettera, un solo polinomio, a parte il segno, è resto principale della divisione d'uno dei polinomii dati per l'altro.*

Dimostrazione. Infatti, siano A e B i due polinomi dati, che supporremo ordinati per le potenze della lettera x: se non sono d'egual grado in x, sia A quello di maggior grado; in questo caso per poter giungere ad un resto inferiore ad A ed a B in x, dovremo dividere A per B: se siano d'egual grado, vi potremo invece giungere tanto dividendo A per B come dividendo B per A. Siano R ed R' resti principali ottenuti dividendo sempre A per B e precisamente sia

$$MA = BQ + NR \qquad M'A = BQ' + N'R'$$

dove R ed R' siano puri polinomii ordinati per le potenze di x mentre M, N, M' ed N' sono indipendenti da x. Togliendo l'ultima eguaglianza moltiplicata per M dalla precedente moltiplicata per M' e scrivendo opportunamente, s'ottiene

$$(MQ' - M'Q)B = M'NR - MN'R'.$$

Deve quindi essere

$$MQ' - M'Q = 0$$

perchè, se così non fosse, il primo membro sarebbe almeno del grado di B in x e sarebbe eguale ad un polinomio di minor grado, R ed R' essendo inferiori a B, la qual cosa non può essere (9). Per ciò è

$$M'NR = MN'R'$$

e deve quindi essere (19)

$$M'N = \pm MN' \qquad R = \pm R'$$

cosicchè R ed R' sono unico resto (18), potendo solamente differire nel segno.

Se A e B sono d'egual grado, siano R ed R' resti principali ottenuti dividendo una volta A per B ed un'altra volta B per A e precisamente sia

$$MA = BQ + NR \qquad LB = AQ' + N'R'$$

dove R ed R' sono puri polinomii ordinati per le potenze di x mentre M, L, N, N' sono indipendenti da x. Siccome B ed A sono d'egual grado in x, è indipendente da x anche Q' per cui basta porre

$$Q' = -M' \qquad L = -Q'$$

per riconoscere, nel modo già usato, dover essere

$$R = \pm R'.$$

Teorema. *I divisori comuni a due puri polinomi ordinati per le potenze d'una lettera sono gli stessi che i divisori comuni ad uno di essi ed al resto principale della loro divisione.*

Dimostrazione. Siano A e B i due polinomi, che supporremo ordinati per le potenze di x; R sia il resto principale della loro divisione e precisamente sia

$$MA = BQ + NR$$

dove M ed N sono polinomi indipendenti da x. Dico che, se C è divisor comune di A e B, esso è anche divisore di R epperò divisor comune di B ed R; e se D è divisor comune di B ed R, esso è anche divisore di A epperò divisor comune di A e B. Infatti; dalla precedente uguaglianza deducesi

$$\frac{NR}{C} = M\frac{A}{C} - Q\frac{B}{C} \qquad \frac{MA}{D} = Q\frac{B}{D} + N\frac{R}{D}$$

per cui C, che è divisore di A e di B, è anche divisore di NR; e D, che è divisore di B e di R, è anche divisore di MA; ma C e D non possono aver divisori indipendenti da x, diversi da ± 1, perchè son divisori di puri polinomi ordinati per le potenze di x; per cui, essendo NR divisibile per C ed MA per D, deve essere R divisibile per C ed A per D (19). Adunque, i divisori comuni di A e B sono gli stessi che i divisori comuni di B ed R: si riconosce parimenti che sono anche gli stessi che i divisori comuni di A ed R.

21. Diremo *Divisor comune supremo*, o massimo comun divisore, di più polinomi interi, e l'indicheremo con $M.\ C.\ D.$, il (18) polinomio che divide ciascuno d'essi polinomi ed è divisibile per ogni divisor comune dei medesimi.

Diremo *Multiplo comune infimo*, o minimo comune multiplo, di più polinomi, e l'indicheremo con $M.\ M.\ C.$, il (18) polinomio che è divisibile per ciascuno d'essi ed è divisore d'ogni multiplo comune dei medesimi.

Il $M.\ C.\ D.$ ed il $M.\ M.\ C.$ di più polinomi, che siano scomposti in fattori primi, si formano subito seguendo le norme stesse che valgono per i numeri, a parte il segno (18). La scomposizione dei polinomi in fattori primi, sebbene sia sempre possibile, è però già complicata pei polinomi ad unica lettera e può dirsi addirittura impraticabile, in generale, pei polinomi a più lettere. Ci occuperemo quindi ancora della ricerca del $M.\ C.\ D.$ di due polinomi per mezzo delle divisioni successive: pur troppo però la ricerca riesce quasi sempre faticosa anche con questo metodo, pur se trattisi di due polinomi ad unica lettera.

La ricerca del $M.\ C.\ D.$ e del $M.\ M.\ C.$ di più polinomi si riducono alla determinazione successiva del $M.\ C.\ D.$ di coppie di polinomi, oltre ad usuali operazioni di minor importanza, ricorrendo agli stessi principi che sono valevoli per i numeri.

22. Per il secondo teorema dimostrato al numero 25 possiamo enunciar subito la regola:

Se sono dati due puri polinomi ordinati per le potenze d'una lettera comune e se ne vuole il M. C. D., *si cerchi il resto principale della loro divisione, poi si cerchi il resto principale della divisione dell'inferiore dei due dati polinomii per il trovato resto principale; poi si calcoli sempre il resto principale della divisione del penultimo resto principale calcolato per l'ultimo: in questo modo, siccome ogni nuovo resto è inferiore al precedente, si perverrà finalmente ad un resto principale, che sarà divisore del precedente: esso è* M. C. D. *dei dati polinomii.* Se il *M. C. D.* è $=\pm 1$, la qual cosa si verifica quando l'ordinario resto dell'ultima divisione fatta sia indipendente dalla lettera ordinatrice, i due dati polinomii sono primi tra loro.

Se si vuole il *M. C. D.* di due polinomii interi qualunque, si pongano entrambi sotto forma di prodotti di puri polinomii ordinati secondo le potenze d'una medesima lettera x per polinomii indipendenti di x: il loro *M. C. D.* è prodotto del *M. C. D.* dei fattori indipendenti da x per il *M. C. D.* dei fattori contenenti x (19).

23. Per quanto fu detto, la ricerca del *M. C. D.* di due polinomii di n lettere richiede solamente delle divisioni, oltre a determinazioni del *M. C. D.* di polinomii aventi meno di n lettere, per cui si sa calcolare il *M. C. D.* di due polinomii qualunque di n lettere, se si sa calcolare quello di due polinomii qualsiansi a meno di n lettere; ma si sa calcolare il *M. C. D.* di due numeri, dunque si sa calcolare quello di due polinomii ad unica lettera, quindi si sa calcolare quello di due polinomii con non più di due lettere, quindi anche quello di due polinomii con non più di tre lettere, ecc..

Siamo dunque in grado di calcolare *M. C. D.* e *M. M. C.* di più polinomii interi; e ciò sappiamo fare operando sempre con polinomii interi, senza introdurre mai frazioni neppure solo provvisoriamente

Genova, gennaio 1894. F. GIUDICE.

TEMI DI MATEMATICA DATI PER L'ESAME DI MATURITÀ
IN GINNASI E SCUOLE REALI SUPERIORI DELL'AUSTRIA-UNGHERIA
alla fine degli anni scolastici 1891-92 e 1892-93

(*Continuazione*: V. *pag.* 27, 55, 97 e 148).

VIENNA: *i. r. Ginnasio Franc. Giuseppe.* — 1. $(2x+1)^{\log(2x+1)} : (2x+1)^5 = 1 : 10000$.

2. Qual è l'11mo termine nello sviluppo di $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^{20}$?

3. Di una piramide tronca è nota l'altezza $h = 48$ cm., la somma delle basi $s = 164$ cm.^{2} ed il volume $v = 3904$ cm.^{3}. Si calcolino le basi del tronco ed il volume dell'intiera piramide; inotre, supposto che il tronco sia quadratico regolare, si calcolino le lunghezze dei suoi spigoli e gli angoli d'inclinazione degli spigoli laterali e delle faccie laterali colla base.

4. $x^2 + y^2 - 72{,}25 = 0$ e $x^2 + y^2 - 21x + 85{,}25 = 0$ sieno le equazioni di due linee in coordinate ortogonali. Si costruiscano queste e si determinino i loro punti d'intersezione e così pure l'area del quadrilatero le cui diagonali sono la centrale e la corda d'intersezione delle due linee.

VIENNA: *i. r. Ginnasio nel III Circ.* — 1. Un capitale di 10000 f. deve venire ammortizzato con una quota annuale di 1001,5 f. pagabile alla fine di ogni anno; in quanti anni si farà ciò calcolando il 4 % d'interesse composto?

2. In un cerchio due diametri si segano sotto un angolo $\gamma = 36^0\,21'\,40''$. Congiungendo i loro estremi una delle corde è di $d = 409$ m. maggiore dell'altra. Quanto è lunga ognuna delle corde e quanto il diametro?

3. Dato il raggio d'una sfera calcolare il volume d'un tronco sferico se una delle due basi passa pel centro e l'altezza è il segmento maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione.

4. L'equazione d'una ellisse è $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; una parabola ha il vertice nel centro di quest'ellisse ed il suo fuoco nel fuoco di questa che giace sul lato positivo dell'asse delle ascisse. Sotto che angolo si tagliano le due curve?

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. nell' VIII Circ.* — 1. $\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} = \frac{x^2 - x}{900}$.

2. La somma di una progressione di tre termini è 97. La differenza fra il 3^{zo} e 2do termine è di 25 maggiore della differenza fra il 2do ed il 1mo termine. Qual è la progressione?

3. Ad una piramide retta che ha per base un quadrato è inscritta una sfera tangente alla base e ad ogni faccia laterale. Qual è il raggio della sfera se il lato della base è $a = 5$ e l'altezza è $h = 6$? In che rapporto viene divisa tanto la piramide quanto la sfera dal piano condotto per i punti di contatto della sfera colle faccie laterali?

4. Qual'è l'equazione della parabola, il cui vertice sta nell'origine delle coordinate, ed il cui asse coincide coll'asse delle ascisse e che è toccata dalla retta $y = ax + b$ $(4y - 3x = 8)$. Dove giace il punto di contatto? Quanto dista il fuoco della parabola dalla retta, e quanto dal punto di contatto?

VIENNA: *i. r. Ginnasio nel IX Circ.* — 1. I. $x + y = \frac{21}{8}$, II. $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{25}{6}$.

2. A che somma ammonta una quota di 300 f. pagata al principio di ogni anno verso il $4\frac{1}{2}\,\%$ d'interesse composto dopo il principio dell' 8^{vo} anno, se per le spese d'amministrazione viene levato alla fine d'ogni anno l' $1\frac{1}{4}\,\%$?

3. Determinare il volume d'un piramide triangolare dati i lati della base $a = 9{,}07$, $b = 8{,}64$, $c = 7{,}6$ se lo spigolo laterale $K = 6{,}2$ fa colla base l'angolo $\alpha = 70^0$.

4. Si determini il luogo geometrico del punto di mezzo di tutte le corde di una parabola che si tagliano nel piede della direttrice.

VIENNA: *i. r. Ginnasio sup. nel XII Circ.* — 1. Un tale può godere per 10 anni una rendita di 700 f. che scade alla fine d'ogni anno; quanto vale essa al momento, calcolando l'interesse del $4\,\%$?

2. Risolvere le equazioni $x^2 + y\sqrt{xy} = 336$ e $x^2 + x\sqrt{xy} = 112$.

3. Un triangolo che ha un lato a e i due angoli adiacenti β e γ ruota attorno a questo lato, qual'è il volume del corpo di rotazione?

(In generale e per $a = 6$, $\beta = 97^0 12'$, $\gamma = 13^0 18'$).

4. Si trovi l'equazione di quella tangente al cerchio $x^2 + y^2 = 25$ che è parallela alla retta $y = -\frac{4}{3}x + 8$.

(Continua).

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Un problema di geometria. — *Dati tre cerchi tangenti ad una retta, condurre una secante tale che determini nei tre cerchi tre corde fra loro eguali.*

LEMMA. I. Se si unisce (V. tavola, fig. 1ª) il punto medio della retta dei centri di due cerchi con un punto H qualunque dell'asse radicale, e per H si conduce una perpendicolare alla congiungente, le corde determinate dai due circoli, saranno eguali.

Infatti essendo H un punto dell'asse radicale, e K e K' i punti di mezzo delle corde, avremo l'eguaglianza

$$HD \,.\, HD' = HC \,.\, HC' \text{ ovvero } HK^2 - KD^2 = HK'^2 - K'C^2.$$

Ma $HK = HK'$ quindi $KD = K'C$ ed anche $DD' = CC'$ c. d. d..

La proprietà reciproca è ugualmente vera e si dimostra nello stesso modo.

Lemma II. Per un punto O si possono condurre due rette in modo che le corde che esse determinano in due dati circoli sieno uguali fra loro.

Infatti (fig. 2ª) basterà descrivere un cerchio avente per diametro OM, essendo M il punto medio della linea dei centri. Se si congiunge il punto dato O con i punti nei quali questo cerchio interseca l'asse radicale, verranno determinate le rette le quali per il lemma antecedente soddisferanno alla condizione richiesta.

Lemma III. Se si conducono tre rette in guisa che le coppie di corde che ciascuna determina in due circoli dati sieno eguali, il circolo circoscritto al triangolo formato da queste rette passa pel punto medio della linea dei centri.

Infatti (fig. 3ª) se H, H', H'' sono i punti nei quali queste rette incontrano l'asse radicale, abbiamo veduto che HM, $H'M$, $H''M$ riescono perpendicolari a queste rette. Quindi il teorema che si vuole dimostrare si riduce al reciproco del teorema seguente: se da un punto di un circolo si abbassano le perpendicolari sui lati di un triangolo iscritto, i piedi stanno in linea retta. Questo teorema è molto noto ed il suo reciproco si dimostra facilmente. Quindi è vero il lemma enunciato.

Lemma IV. Il problema seguente: dati tre circoli, condurre una secante in modo che le tre corde che determinano nei tre circoli sieno uguali fra loro, ammette tre soluzioni. Le tre rette che vi soddisfano formano un triangolo iscritto nel cerchio dei nove punti relativo al triangolo avente per vertici i centri dei circoli dati.

Infatti (fig. 1ª) le rette DC perpendicolari ad MH inviluppano una parabola in cui l'asse radicale dei due circoli è la tangente al vertice ed M il fuoco. Infatti è noto che i piedi delle perpendicolari abbassate dal fuoco di una parabola sopra le tangenti, si trovano sulla tangente nel vertice.

Cioè le rette che determinano in due circoli A e B coppie di corde uguali, inviluppano una parabola il cui fuoco è il punto medio della linea dei centri.

Similmente in due circoli A e C le medesime rette invilupperanno un'altra parabola. Quindi le rette che soddisfano alle condizioni del problema sono le tangenti comuni alle due parabole. Si sa che due parabole hanno tre tangenti comuni senza contare la retta all'infinito. Dunque il problema ha tre soluzioni.

Ora il lemma III ci dice che il triangolo formato da queste tre rette ha il cerchio circoscritto passante per ciascuno dei punti medî dei segmenti che uniscono i centri dei cerchi due a due. Quindi il cerchio circoscritto a quel triangolo è quello passante per i punti medî dei segmenti che uniscono i centri dei cerchi due a due; cioè è il cerchio dei nove punti relativo al triangolo avente per vertici i centri dei dati; c. d. d..

Ciò posto il problema proposto in principio si risolve facilmente. Sieno A, B, C i centri dei cerchi dati (fig. 4ª) tangenti alla retta data MN. Questa retta è una delle tre che soddisfano al problema generale enunciato nel lemma IV, poichè infatti le tre corde sono uguali fra loro, perchè ridotte a zero. Ora il triangolo formato dalle tre rette che soddisfano al problema è iscritto nel cerchio dei nove punti relativo al triangolo avente per vertici i centri dei circoli dati; quindi basterà costruire questo circolo, cioè costruire il circolo che passa per i punti medî A', B', C' dei lati del triangolo ABC. Questo circolo incontrerà la retta data in due punti M ed N. Bisognerà per ciascuno di questi punti condurre le rette che soddisfino alle condizioni del lemma II. Per ciascuno una soluzione sarà la retta MN, e l'altra una delle rette cercate. Così troveremo le due rette m ed n che ne soddisfano al problema.

Corollario. Se si costruiscono quattro circoli tangenti ad una retta e tali che uno dei centri sia il punto d'incontro delle altezze del triangolo formato dagli altri tre, si possono condurre due rette tali che le quattro corde determinate da ciascuna siano uguali.

Infatti si sa che il cerchio dei nove punti passa anche pei punti medî delle rette che uniscono i vertici col punto d'incontro delle altezze. Ed è facile vedere che considerando i dati cerchi tre a tre, le rette che soddisfano al problema coincidono.

Osservazioni. — Al lemma III si può aggiungere un'altra proprietà, che cioè il punto d'incontro delle altezze del triangolo formato da tre rette ecc. si trova sopra una retta parallela all'asse radicale e distante da M di una distanza doppia dalla distanza di M dal medesimo asse radicale. Ciò si deduce dal teorema che la retta di Simson divide per metà la retta che congiunge il punto della circonferenza col punto d'incontro delle altezze del triangolo iscritto.

Da ciò si ricava facilmente una proprietà che si può aggiungere al lemma IV che cioè dati tre cerchi, il segmento che unisce il centro del cerchio circoscritto al triangolo avente per vertici i centri col punto d'incontro delle altezze del triangolo soluzione, ha per punto di mezzo il punto d'incontro degli assi radicali.

Quindi la soluzione del problema principale (trovati che sieno i punti d'incontro M ed N con la retta data tangente ai circoli) si riduce a costruire un triangolo di cui si conosce la base ed il punto d'incontro delle altezze.

A. Sauve.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 198*, 200*, 201* e 204*

198*. *Costruire il triangolo equilatero d'area massima i cui lati passano per tre punti dati non situati in linea retta.*

(G. Candido).

Soluzione del Sig. *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo Garibaldi di Palermo.

Siano M, N, P tre punti dati, non situati in linea retta. Si costruiscano, esternamente al triangolo MNP, gli archi MAN, NBP, PCM, ciascuno capace di un angolo di 60^0; siano Q, R, S rispettivamente i loro centri. Per N, si conduca la ANB parallela a QR. Si tirino le BP, AM, che prolungate si incontreranno in C, formando un angolo ACB di 60^0, per essere $\angle CAB = ABC = 60^0$; C si troverà perciò sull'arco MCP.

Il triangolo equilatero ABC, i cui lati passano rispettivamente per i punti dati, è quello di area massima; in altri termini è di lato massimo.

Essendo AB il massimo segmento che si possa condurre per N e che abbia gli estremi negli archi MAN, NBP (*Euclide*, lib. III, eserc. 9), ci rimane a dimostrare che contemporaneamente sono tali AC e BC, cioè che sono rispettivamente paralleli a QS, SR.

A tal uopo si compiano i tre cerchi: essi passeranno per uno stesso punto O (Kruse: *Geometrie der Ebene*, § 30, art. 4, 1); tirinsi OM, ON che risultano perpendicolari rispettivamente alle SQ, QR. Si ha che i due angoli MAN, SQR, per essere ambidue supplementari all'angolo MON, sono eguali: hanno i lati QR, AB paralleli, quindi sarà $QS \parallel AC$. Similmente per BC.

Il triangolo QRS è equilatero.

Essendo $AB \parallel QR$, l'$\angle ONA$ è retto, epperò OA è diametro del cerchio (Q). A, B, C sono i punti d'incontro delle OQ, OR, OS con i tre archi costruiti (*).

Soluzione del Sig. *V. Columbo*, studente nella R. Università di Napoli.

Tratterò la quistione più generale: *Costruire il massimo triangolo, simile ad un triangolo dato, i cui lati passino per tre punti dati non posti in linea retta.*

1. Abbiansi due circoli O_1, O_2 che si tagliano in H, K e conducansi per H due corde AB, A_1B_1 quali si vogliano. Si ha $\angle AKA_1 = AHA_1 = BHB_1 = B_1KB$; perciò $\angle A_1KB_1 = A_1KA + AKB_1 = AKB_1 + B_1KB = AKB$, onde *se due circoli si tagliano le corde condotte per uno dei punti d'intersezione sono viste dall'altro sotto angòli uguali.*

2. Siano A, B, C i tre punti dati ed α, β, γ tre angoli tali che $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$. Si descriva il triangolo ABC e sul lato $a \equiv BC$, esternamente al triangolo, si costruisca un circolo O_1 capace dell'angolo α e su $b \equiv CA$ un cerchio O_2 capace d'un angolo $= \beta$. Tali archi prolungati s'incontrano nuovamente in H e si ha: $\angle CHB + \alpha = AHC + \beta = 180^0$, e descrivendo un circolo di centro O_3 sopra $c \equiv AB$, capace dell'angolo γ, anche questo passerà per H, giacchè dalla precedenti eguaglianze, e dall'essere α, β, γ i tre angoli d'un triangolo, segue $\angle AHB + \gamma = 180^0$.

Un triangolo i cui lati passino per A, B, C e cogli angoli α, β, γ si ottiene conducendo per A una retta qualunque che incontri i cerchi O_2, O_3 in E_1, F_1, poi tirando E_1C ed F_1B, le quali s'incontrano in un punto D_1 che appartiene evidentemente ad O_1. Ora di tutti i triangoli come $D_1E_1F_1$ il massimo DEF è quello che si ottiene tirando i diametri HO_1D, HO_2E, HO_3F. Infatti, anzitutto i tre punti C, D, E sono per diritto, poichè i tre segmenti HO_1D, HC, HO_2E hanno i loro estremi per diritto e così dicasi delle terne di punti D, B, F; E, A, F cosicchè DEF è un triangolo circoscritto ad ABC e cogli angoli α, β, γ. Dimostriamo che la sua area è *massima*. Per 1) si ha $\angle DHE = D_1HE_1$ ed essendo le corde HD_1, HE_1 minori dei diametri HD, HE consegue

(*) Soluzioni poco dissimili dai Sigg. *B. Armano* (alunno del R. Liceo di Alessandria); *F. Ceccherini* (R. Ist. tec. Roma); *F. Celestri* (R. Ist. tec. Modica), *M. Morale* (R. Ist. tec. Catania).

$\triangle DHE > D_1HE_1$. Analogamente $\triangle EHF > E_1HF_1$, $\triangle FHD > F_1HD_1$ e quindi anche $\triangle DEF > D_1E_1F_1$, c. d. d..

Troviamo ora l'espressione dell'area del triangolo DEF. Si ha $\overline{DE} = 2\,\overline{O_1O_2}$ e $O_1C = \dfrac{a}{2\,\text{sen}\,\alpha}$, $O_2C = \dfrac{b}{2\,\text{sen}\,\beta}$, $\angle O_1CO_2 = (90^0 - \alpha) + C + (90^0 - \beta) = 180^0 - (\alpha + \beta - C)$, come risulta dall'osservare che O_1C, O_2C sono i raggi dei cerchi O_1, O_2 in cui sono inscritte le corde a, b insistenti su angoli uguali ad α, β e dal fatto che tirando O_1L e O_2M perpendicolari a CB ed AC si ha $\angle CO_1L = \alpha$, $\angle O_2CM = \beta$. Posto ciò dal triangolo O_1CO_2 consegue

$$\overline{O_1O_2}^2 = \frac{a^2}{4\,\text{sen}^2\alpha} + \frac{b^2}{4\,\text{sen}^2\beta} - \frac{ab\,.\cos[180^0 - (\alpha + \beta - C)]}{2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}$$

e quindi

$$\overline{DE}^2 = 4\,\overline{O_1O_2}^2 = \frac{a^2}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{b^2}{\text{sen}^2\beta} + \frac{2ab\cos(\alpha + \beta - C)}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}.$$

Ora posto $\triangle DEF = S$, si ha, com'è noto:

$$S = \frac{\overline{DE}^2 .\,\text{sen}\,D\,.\,\text{sen}\,E}{2\,\text{sen}\,(D + E)},$$

onde, ponendo mente che $\angle D = \alpha$, $\angle E = \beta$, segue:

$$S = \frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{b^2}{\text{sen}^2\beta} + \frac{2ab\cos(\alpha + \beta - C)}{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}\right\}\frac{\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\alpha + \beta)} =$$
$$\frac{1}{2\,\text{sen}\,(\alpha + \beta)}\left\{a^2\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha} + b^2\frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} + 2ab\cos(\alpha + \beta - C)\right\}.$$

Osservazione. Il caso di $\alpha = \beta = \gamma$ corrisponde alla quistione 198. Allora H è definito dalla condizione $\angle AHB = BHC = CHA = 120^0$ e, come si sa, la somma delle sue distanze dai tre vertici A, B, C è un *minimo*.

L'area del triangolo rispondente alla quistione è poi

$$\frac{1}{2\,\text{sen}\,120^0}\left\{a^2 + b^2 + 2ab\cos(120^0 - C)\right\} =$$
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^0 + C)\right\} \quad (^*).$$

200*. *Dato un triangolo equilatero* ABC *di centro* O *e d'altezza* h *ed un punto* O′ *del suo piano, tale che il segmento* OO′ *sia eguale a* k, *esprimere in funzione di* h *e* k *l'area del triangolo* DEF *che ha per vertici i piedi delle perpendicolari condotte da* O′ *ai tre lati e dimostrare che il triangolo* DEF *è i* $\frac{3}{16}$ *del triangolo* ABC *pei punti della circonferenza inscritta in questo triangolo.*

(G. Tirella).

(*) Quest'ultimo risultato ci venne comunicato anche dal Sig. G. *Candido*, autore della quistione.

Dimostrazione dei Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica e *M. Morale*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania.

Siano AD', BE', CF' le altezze del triangolo ABC, che s'incontrano in O, e da O' si conducano le perpendicolari $O'L$, $O'M$, $O'N$ rispettivamente su queste tre altezze. Posto $\angle D'OO' = \alpha$ e prendendo come senso positivo dell'angolo α quello pel quale da B si va ad A, poi a C, per ritornare a B, è chiaro che si avrà:

$$O'D = LD' = d = \frac{h}{3} - h\cos\alpha;\quad O'E = ME' = e = \frac{h}{3} + h\,.\cos(60^\circ - \alpha);$$

[1] $$O'F = NF' = f = \frac{h}{3} - h\,.\cos(120^\circ - \alpha) = \frac{h}{3} + h\,.\cos(60^\circ + \alpha).$$

Ora:

[2] . . . $$\triangle DEF = \frac{1}{2}\,(DO'.EO' + EO'.FO' + FO'.DO').\text{sen}\,120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(de + ef + fd),$$

per modo che non rimane che ad esprimere il trinomio $de + ef + fd$ in funzione degli elementi dati.

Valendosi delle [1] si trova subito:

$$de + ef + fd = \frac{h^2}{3} + 2h\,.\,\frac{h}{3}\Big\{-\cos\alpha + \cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)\Big\}$$
$$- h^2\Big\{\cos\alpha\cos(60^\circ - \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)\cos\alpha\Big\}$$

e poichè

$$-\cos\alpha + \cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha) =$$
$$-\cos\alpha + 2\cos 60^\circ.\cos\alpha = -\cos\alpha + \cos\alpha = 0,$$

$$\cos\alpha\,[\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)] - \cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha) =$$
$$\cos^2\alpha - \cos^2 60^\circ\,.\,\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,60^\circ\,.\,\text{sen}^2\alpha =$$
$$\cos^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3\,.\cos^2\alpha}{4} = \frac{3}{4},$$

risulta infine, per la [2]:

$$\triangle DEF = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{3}{4}\,k^2\right).$$

Nel caso che O' sia un punto della circonferenza inscritta in ABC si ha $k = \frac{h}{3}$ e poichè $\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(\text{lato})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2h}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{h^2}{\sqrt{3}}$, consegue:

$$\triangle DEF : \triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{12}\right) : \frac{h^2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{16}\ \text{c. d. d.}$$

Il Sig. *F. Celestri* osserva poi che se i segmenti condotti per O' senz'essere perpendicolari ai lati del triangolo ABC, formassero con questi, nello stesso senso, angoli tutti eguali a β, l'espressione dell'area del triangolo DEF diverrebbe quella precedente divisa per $\operatorname{sen}^2 \beta$, ossia costante nello stesso modo per tutti i punti di una circonferenza concentrica a quella circoscritta al triangolo (*).

201*. AB *e* CD *sono una corda e un diametro perpendicolare d'una circonferenza data; le rette congiungenti i punti* C, D *alle estremità* E, F *d'un diametro qualunque della circonferenza descritta su* AB *come diametro si tagliano in un punto* M.

1° Qual' è il luogo del punto M*?*

2° Dimostrare che le rette MD, MA, MC, MB *formano un fascio isogonale.*

(V.^{va} F. Prime).

Risposta del sig. *E. Lugaro*, alunno del R. Liceo *Garibaldi* di Palermo.

1° Sia O il punto medio di AB; P il coniugato armonico di O rispetto ai due punti C e D; le quattro rette MC, MO, MD, MP formano un fascio armonico. Essendo $OE = OF$, la EF, come si sa, dev'essere parallela alla MP, quindi abbiamo

$$MP : OE = CP : CO,\ MP = \frac{OE \,.\, CP}{CO} = costante.$$

Siccome poi le AC, AO, AD, AP formano pure un fascio armonico e le coniugate AC, AD sono rettangolari, la AD è la bisettrice dell' angolo OAP o del suo supplementare, quindi

$$AP : OA = PD : DO = CP : CO,\ AP = \frac{OA \,.\, CP}{CO} = PM.$$

Il luogo del punto M è, per conseguenza, il cerchio di centro P e raggio PA. Questo cerchio taglia ortogonalmente quello dato, perchè la AB essendo la polare di P rispetto al cerchio dato, è PA tangente a questo cerchio.

2° Essendo PA tangente al cerchio DAB si ha $PC : PA = PA : PD$ e componendo e dividendo $HC : PA = HD : PD$, $CG : PA = GD : PD$, da cui risulta $HC : HD = CG : GD$.

Le quattro rette MC, MG, MD, MH formano quindi un fascio armonico, ma le coniugate MG, GH sono rettangolari, dunque MG è la bisettrice dell'angolo CMD ed MH quella dell'angolo formato da CM e dal prolungamento di DM.

Se ora il punto M si trova sull'arco AB esterno al cerchio O, si vede subito che le coppie di rette MC, MD e MA, MB formano angoli uguali colla bisettrice MG, onde $\angle AMD = BMC$. Se invece M cade nell'arco AB interno al cerchio O, prolungando le DM e MC fino all'incontro del cerchio AH in I, L, essendo MH bisettrice dell'angolo CMI, si ha arco $HI =$ arco HL, quindi anche arco $IA =$ arco LB, donde segue $\angle AMI = LMB$, e perciò le rette MD, MA, MC, MB formano in ogni caso un fascio isogonale.

(*) Risoluzioni di questa quistione dipendenti dal teorema b, dimostrato a pag. 50 ed 80 del Vol. V, di questo *Periodico*, pervennero dai Sigg. *R. Colombo* (R. Ist. tec. Roma), *V. Columbo* (studente a Napoli), *E. Lugaro* (R. Liceo Garibaldi, Palermo).

204*. *I tre punti simmetrici di un punto* M *di un circolo, rispetto a tre rette passanti per il centro di questo, sono vertici di un triangolo che rimane costante nella forma e nella grandezza, al variare di* M *sul circolo.*

(G. Biasi).

Dimostrazione del Signor *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica.

Siano A, B, C i tre punti simmetrici di M rispetto ai tre diametri $X'OX$, $Y'OY$, $Z'OZ$ del cerchio. È anzitutto evidente che i punti A, B, C si trovano nella circonferenza insieme ad M. Inoltre, poichè le rette MA, MB sono perpendicolari ad OX, OY, al variare di M sul circolo l'$\angle AMB$ resterà eguale o supplementare di XOY; risulta da ciò che la corda AB è costante. Nello stesso modo si dimostra che rimangono costanti i lati BC, CA del triangolo ABC onde esso conserva la stessa forma e grandezza qualunque sia la posizione del punto M (*).

Dimostrazione del Sig. *L. Gragnani*, studente a Piombino.

I punti simmetrici di M rispetto a tre diametri fissi del circolo siano A, B, C e scelto un secondo punto M' appartenente allo stesso circolo, si determinino ugualmente i punti simmetrici A', B', C' di M', rispetto ai diametri considerati. I sei punti $A, B, C; A', B', C'$ si troveranno sulla circonferenza.

Le rette MA, $M'A'$ essendo parallele, staccheranno sul circolo gli archi MM', AA' che saranno uguali; altrettanto dicasi per le parallele MB, $M'B'$ ed MC, $M'C'$, le quali danno arc. $MM' = BB'$ e arc. $MM' = CC'$. Risulta quindi arc. $AA' = BB' = CC'$. Inoltre è facile vedere che i tre archi AA', BB', CC' vanno nello stesso senso. Dopo ciò saranno anche eguali gli archi AB e $A'B'$. BC e $B'C'$, CA e $C'A'$, perchè costituiti da parti eguali, e in conseguenza $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$. I due triangoli ABC, $A'B'C'$ avendo i lati rispettivamente eguali, saranno congruenti, ciò che dimostra il teorema enunciato (**).

Il Sig. *V. Columbo*, studente a Napoli, e il Sig. *Celestri* osservano poi che il teorema può essere generalizzato così: *Gli* n *punti simmetrici di un punto* M *di un circolo rispetto ad* n *diametri del medesimo, sono vertici di un ennagono che rimane costante nella forma e nella grandezza al variare di* M *sul circolo.*

QUISTIONI PROPOSTE (***)

231**. Di due fasci proiettivi di raggi (U), (U'), giacenti nello stesso piano, sono noti: il centro di proiettività U'', due punti M, N

(*) Soluzioni analoghe a questa vennero inviate dai Signori *C. Montanari* (licenziato dal R. Ist. tec. di Livorno) e *G. Scorza* (allievo del Liceo delle Scuole Pie in Firenze).

(**) Soluzioni analoghe dai Sigg. *E. Lugaro* (R. Liceo Garibaldi in Palermo), *M. Morale* (licenziato R. Ist tec., Catania), *A. Panebianco* (R. Ist. naut., Catania).

Altre soluzioni dal Sig. *R. Colombo* (R. Ist. tec., Roma), *B. Armano* (lic. dal R. Liceo, Alessandria).

(***) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

per cui passano due raggi corrispondenti, gli angoli θ, θ' che questi formano con le rette $U''U$, $U''U'$, e la retta UU'. Si domanda di costruire i due fasci, e di discutere il problema. A. Del Re.

232**. Una punteggiata (u) ed un fascio di raggi (U'), proiettivi, non sono in uno stesso piano; si vuole, con un piano σ, segare (U') per modo che la sezione (u') abbia con (u) un asse di proiettività inclinato ad u sotto un angolo assegnato θ. Costruire σ, e discutere il problema. A. Del Re.

233**. Di due fasci proiettivi di raggi (U), (U'), giacenti nello stesso piano, sono noti: i centri U, U', il centro di proiettività U'', i punti limiti J, I' di due punteggiate che ne sono sezioni, e l'angolo θ dei sostegni di queste punteggiate. Si domanda di costruire i due fasci, e le due punteggiate. A. Del Re.

234**. Se, intorno ad uno e dei raggi uniti e, f di due fasci proiettivi sovrapposti, si fa muovere l'uno di essi tenendo fermo l'altro, i due fasci saranno, in ogni posizione di quello, prospettivi. Dimostrare che l'asse di prospettiva descrive un cono sezionato secondo circoli dai piani perpendicolari ad e, se non è f perpendicolare ad e; e se è f perpendicolare ad e, detto asse descrive un fascio.
A. Del Re.

235*. In un quadrilatero $ABCD$ inscritto in un cerchio di raggio R, il lato AD è un diametro del cerchio e gli altri lati AB, BC, CD formano una progressione aritmetica e hanno per somma $3a$. Si determinino questi lati e le diagonali AC e BD, e si discutano i risultati trovando le condizioni di possibilità del problema.

236*. Si ha un trapezio nel quale i due lati paralleli sono a e b con $a < b$, e l'altezza è h. Si trovi a quale distanza x dal lato b dovrà condursi una retta y parallela a questo lato per far sì che il trapezio resti diviso in due trapezi tali che quello di cui i lati paralleli sono b e y stia all'altro in un rapporto dato q; e si dia anche la lunghezza della retta y e si discutano i risultati (*).

237*. Dimostrare che l'errore che risulta nel calcolo della radice d'indice qualunque d'un numero maggiore dell'unità è minore dell'errore del radicando. G. Peano.

(*) Le quistioni 235ª e 236ª sono i temi di matematica dati nell'ottobre per la licenza dagli Istituti tecnici nella *Sezione Fisico-matematica*.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GIOVANNI GARBIERI. — *Trattato di Aritmetica razionale* per uso dei Ginnasi superiori e delle scuole secondarie superiori. Terza edizione assai migliorata. Padova, 1894. F. Sacchetto, editore. — Un vol. di 264 pag.. Prezzo: L. 2 (*).

L'autore agli Insegnanti di Matematica.

Questa terza edizione della mia *Aritmetica razionale*, che presento ora accuratamente rifatta, differisce non poco dalla seconda, e si discosta poi assai dagli altri libri analoghi, molti de' quali, con minuzie e lungaggini senza fine, hanno la pretesa di riuscire in tal modo più chiari e di sostituirsi all'insegnante, mentre in verità distolgono piuttosto l'alunno da quella proficua e laboriosa riflessione, che è il fondamento di ogni efficace progresso. Invece, la mia *Aritmetica razionale* ha bisogno anzitutto dell'opera intelligente e solerte del professore, essendo le dimostrazioni esibite in molta parte a guisa di specchio nel modo più conciso possibile; il che giova a porre quasi sotto agli occhi in un tutto armonico i ragionamenti che si devono fare, e che l'alunno, come utile esercizio, potrà svolgere a voce e in iscritto con facilità se, dopo avute le opportune spiegazioni, avrà cura di rivedere gli articoli che di mano in mano sono citati. Per questa via il giovane si abitua a pensare seriamente, e si addestra a risolvere problemi e dimostrare teoremi, educando di buon'ora la sua mente al retto ragionare e a quell'operosità vigorosa e sana che tanto contribuisce alla formazione del carattere, alla quale dovrebbe pur tendere ogni insegnamento nelle scuole. Ora, per raggiungere meglio tutti questi fini, non solo ho insistito sui concetti fondamentali e più difficili, sorvolando sugli altri, ma ho procurato di mettere in rilievo eziandio le proposizioni su cui poggia una data teoria, facendo osservare come le altre siano facili conseguenze di quelle: inoltre, con opportuni richiami e schiarimenti, ho cercato di rendere persuaso l'alunno che la via da seguire nella dimostrazione di un teorema spesso è naturale, e si scopre badando alla proprietà da cui si parte (ipotesi), e avendo in mira quella a cui si deve pervenire (tesi). In conclusione, non mi sono limitato a esporre soltanto le solite proposizioni nei soliti modi, e a rimuovere le difficoltà reali, ma ho voluto dissipare altresì le difficoltà apparenti, come quelle

(*) Pubblicando il presente articolo bibliografico, dovuto all'A. stesso del libro, non intendiamo di elevare la cosa a sistema. Lo facciamo per la stima che portiamo all'A. e perchè conveniamo in massima nei concetti da lui esposti; inoltre ci lusinga la speranza che le sue osservazioni sui metodi da seguire per la maggiore efficacia possibile dell'insegnamento della matematica nelle scuole medie, non passino inosservate, ma da qualcuno raccolte, valgano a generare una discussione, feconda d'utili risultati, della quale il periodico si farebbe volentieri strumento.

che annebbiano spesso o falsano le menti dei giovani. Ho fatto vedere, ad esempio, che certe proprietà, le quali soglionsi dimostrare con lunghi e artificiosi ragionamenti, sono in fondo quasi intuitive; che altre, le quali sogliono essere presentate come affatto nuove, e come tali nuovamente dimostrate, sono in realtà proposizioni già date prima, espresse soltanto con altre parole; che altre scaturiscono da un medesimo principio talvolta semplicissimo; che altre infine si collegano così da rendere le dimostrazioni loro sostanzialmente uniformi e analoghe; e in tutto questo ho poi sempre abbondato in osservazioni, in avvertenze e in rapidi cenni riassuntivi, affine di ordinare e coordinare tutti i concetti in una sintesi breve e lucida, la quale serva alla memoria senza affaticarla inutilmente.

Non aggiungo altre parole sull'orditura e sul concetto del libro, perchè i docenti stessi ne vedranno le intime ragioni: desidero per altro si sappia che mi sono ingegnato di dare al mio lavoro una forma e un'impronta schiettamente italiana; e desidero inoltre di richiamare l'attenzione sulla *teoria dei numeri decimali periodici* la quale si presenta nella nuova edizione sotto forma più rigorosa e compiuta, per opera anche dell'egregio prof. *Enrico De Amicis*, il quale, animato dal nobile desiderio di far cosa maggiormente utile alle nostre scuole, volle accingersi cortesemente alla grave fatica di rivedere tutta la mia *Aritmetica razionale*, contribuendo non poco a migliorarne la nuova edizione; di che mi professo a lui gratissimo. Rispetto poi a questa teoria dei numeri decimali periodici, forse taluno opinerà essere alquanto difficile per giovanetti il metodo dei limiti che qui si è preferito seguire: ma io ritengo invece che il concetto di limite possa essere compreso assai facilmente, purchè il professore proceda adagio sin dalla definizione e svolga per intero gli esempi del testo. E poi, il concetto di numero decimale periodico è per sua natura collegato intimamente con quello di limite, sul quale si può anche stabilire la teoria dei numeri irrazionali: le quali cose tutte mi dovevano indurre a porre la teoria dei limiti come base di quella dei numeri decimali periodici, anticipando talune nozioni che usualmente trovano posto solo nell' Algebra. Però, nell'insegnare questa teoria agli alunni del Ginnasio, converrà ommettere i paragrafi indicati nell'avvertenza che fa seguito alla prefazione.

Prima di chiudere questo cenno bibliografico, voglio esprimere tutto il mio pensiero sull'efficacia dei buoni libri di testo, quando siano commentati giudiziosamente e seguiti fedelmente. Ora accade assai spesso che i professori, nell'intendimento lodevolissimo di riescire più chiari o rigorosi, sono indotti a far lezione senza suggerire alcun libro, ovvero, se pure propongono un testo, non lo seguono, anzi lo modificano e lo rifanno così da costringere in ogni caso l'alunno a prendere note e appunti, coi quali dovrà questi compilare a casa i così detti sunti scolastici. Ma in questo modo si fa perdere ai giovani un tempo prezioso, senza vantaggio alcuno degli studj, anzi con danno gravissimo, poichè, lasciando pur da parte che lo studente, obbligato a scrivere in fretta e furia le parole del maestro, non può prestare la dovuta attenzione, e quindi non può trarre profitto dalla lezione a viva voce, lasciando stare questo, tutti sanno essere cosa assai difficile il prendere note esatte e copiose, ed essere ancora più difficile il compilare sunti chiari, ordinati, precisi, tali cioè da potere essere studiati con profitto. A costo dunque che mi si dica che faccio l'apologia dei libri di testo, perchè autore io stesso di libri scolastici, affermo e sostengo, anche per lunga esperienza personale fatta in ogni grado di scuole e come maestro e come ispettore, affermo recisamente che se un professore, in ispecie di matematica, vuole ottenere il massimo profitto dai suoi alunni, adottato che abbia un buon testo, deve seguire questo fedelmente, letteralmente, deve solo dare gli schiarimenti che vede proprio indispensabili, lasciando che il giovanetto studi da sè ciò che può intendere da sè senza aiuto: insomma, il professore deve lasciar da banda ogni tono cattedratico, discendere fino agli alunni, e, se occorre, far leggere loro il testo in iscuola, e con il libro alla mano limitarsi a pochi commenti, abbondando invece in esempj e applicazioni; procuri sopratutto di fare nel testo solo quelle variazioni che si mostrano assolutamente necessarie: in conclusione, più il professore sacrificherà la sua persona, il suo amor proprio, e si immedesimerà dirò così nell'autore del libro prescelto, e più gli scolari impareranno. Così faceva io quando insegnava nelle scuole elementari e secondarie: un buon libro alla mano; poche parole di spiegazione da parte mia; molto lavoro in iscuola a viva voce da parte degli alunni opportunamente interrogati e diretti; studio moderato a casa sul libro di testo, e convenienti esercizj in iscritto; bandita ogni rettorica di lezioni cattedratiche: bandito ogni dettato o appunto o sunto: i miei alunni, non affaticati da un lavoro manuale ingrato e continuo studiavano con diletto, e ricavavano profitto. Mentre ho conosciuto e conosco insegnanti dotti e zelantissimi, i quali, per la smania dell'ottimo e per il desiderio di mettere in evidenza la propria persona, si affaticano in lunghe e interminabili spiegazioni; obbligano il giovane a prendere note e compilare sunti cui essi medesimi correggono e ricorreggono con ammirabile diligenza; dettano nella scuola teorie intere infiorate di osservazioni critiche, di dubbi, di eccezioni, di sottigliezze; aumentano perfino le ore di lezione: ma, ahimè, tutte queste fatiche approdano a ben poco; e ogni dì si lamenta il sopracarico del lavoro nelle scuole e insieme il diminuire del profitto; e intanto quei genitori che con la guida di un buon libro potrebbero sorreggere i figli negli studj non sanno più raccapezzarsi in quel ginepraio di note, di appunti, di modificazioni e correzioni di testi, spesso fatti comprare senza alcun costrutto ai poveri ragazzi; e così da ogni parte si grida contro ai programmi, contro le scuole, contro i libri.

Per carità, meno pompa di erudizione, meno rettorica di lezioni cattedratiche: ritorniamo alla semplicità dei vecchi, i quali, umili maestri, non si sforzavano di parere gonfi di scienza e di sbalordire con la dottrina i piccoli alunni, ma s'ingegnavano di riuscire chiari e sopratutto utili.

Giovanni Garbieri.

Finita la Redazione il dì 4 novembre 1894.