II. *Se due rette son parallele, esse fanno con una terza, che le incontra, angoli corrispondenti uguali;*
e a tutte e due è applicata la riduzione all'assurdo.

La dimostrazione della I. si basa o sul postulato della retta (*) o sulla proprietà dell'angolo esterno di un triangolo (**). Seguendo il secondo metodo, si può procedere in modo che la riduzione all'assurdo non apparisca. Basta perciò osservare che per ogni punto fuori di una retta non si può condurre più d'una retta che con una direzione assegnata della retta data formi angolo uguale ad uno dato; e quindi, con procedimento analogo al precedente (2, α), mostrare che due rette, che con una terza fanno angoli corrispondenti uguali, non possono incontrarsi.

La dimostrazione della II. dipende immediatamente dalla I. e dal postulato della parallela. Si potrebbe scansare la dimostrazione indiretta, dicendo p. es. come segue:

« Sieno *AB*, *CD* due parallele e la *EF* le incontri in *H*, *K*. Per *H* si con-
« duca la *MN*, così che le due *MN*, *CD* formino con *EF* angoli corrispondenti
« uguali. Allora *MN* è parallela a *CD*, e perciò deve coincidere con *AB*. Ep-
« però le due rette *AB*, *CD* formano con *EF* angoli corrispondenti uguali » (***).

4. Altre proprietà, in cui la riduzione all'assurdo viene spesso applicata, sono le seguenti di geometria solida: per un punto qualunque non si può condurre che un piano (una retta) perpendicolare ad una retta data (piano dato). Per dimostrare queste proprietà in modo diretto, gioverà, tenendo presente la definizione di perpendicolarità d'una retta e di un piano, osservare che se una retta non è perpendicolare ad *una* retta di un piano, essa non è perpendicolare al piano.

Il teorema: *le perpendicolari ad una retta in un medesimo punto giacciono in un piano,* si può dimostrare, scansando la figura mal fatta, nel modo seguente:

« Sieno *BC*, *BD*, *BE* tre perpendicolari alla *AB* nello stesso punto *B*. Poichè
« la *AB* è perpendicolare a *BC*, *BD*, essa è perpendicolare a tutte le rette del
« piano *CBD*, e perciò anche alla comune intersezione dei due piani *ABE*, *CBD*.
« Ma nel piano *ABE*, per il punto *B*, non si può condurre che la *BE* perpen-
« dicolare alla *AB*; perciò la *BE* dev'essere l'intersezione dei piani *ABE*, *CBD*
« e giace quindi nel piano *CBD* ».

5. Tralascio di passare in rassegna altre proprietà geometriche per fermarmi alle due proprietà delle classi *convergenti* di grandezze, di non ammettere due limiti diversi e di non avere contemporaneamente la maggiore un elemento minimo e la minore un elemento massimo, proprietà anche queste che si trovano per solito dimostrate indirettamente. (****).

(*) V. De Paolis o. c. § 41 — Sannia e D'Ovidio o. c. § 49.

(**) V. Faifofer o. c. § 214.

(***) V. Amiot: *Geom. elem.* Le Monnier, 1895, p. 18.

(****) V. De Paolis, o. c., § 385 — Sannia e D'Ovidio, o. c., § 212 — Faifofer, o. c., § 444-445 — Testi, *Corso di mat.*, vol. II, *Algebra* (Giusti, 1892), § 223 — Visalli e Mandes, *Algebra* (Giusti, 1898), § 93.

La prima di esse si potrebbe dimostrare così:

« Sieno M, N due classi convergenti, e λ un loro limite; sia $\lambda' > \lambda$ e si « ponga $\lambda' = \lambda + \delta$. Poichè le due classi M, N sono convergenti, esistono due « loro elementi m_1, n_1 tali che $m_1 - n_1 < \delta$. Allora $n_1 + \delta > m_1$; ma $\lambda > n_1$, « perciò $\lambda + \delta > n_1 + \delta$ e quindi $\lambda' > m_1$; tanto basta perchè λ' non sia « compresa fra le due classi M, N ».

Dimostrazione analoga se fosse $\lambda' < \lambda$.

La seconda può essere dimostrata come segue:

« Sieno M, N due classi convergenti, e la maggiore M abbia un elemento « minimo m_x; dico che preso un elemento qualunque n della classe N, se ne « può trovare in essa uno maggiore. Infatti, si ponga $m_x - n = \delta$, e sieno « m_1, n_1 due elementi delle classi M, N tali che $m_1 - n_1 < \delta$; allora sarà anche « $m_x - n_1 < \delta$, epperò dovrà essere $n_1 > n$ ».

Dimostrazione analoga se la classe minore avesse un elemento massimo.

6. Benchè più rari, gli esempi di dimostrazioni indirette non mancano neppure in aritmetica. Così il teorema: *ogni numero ha un divisore primo*, si trova ordinariamente dimostrato coll'assurdo (*). Si può evitare il metodo indiretto nel modo che segue:

« Se il numero dato non è primo, esso è divisibile per qualche numero « diverso da sè stesso; questo divisore o è primo, o no. Se non è primo « avrà un divisore diverso da sè stesso ....; e siccome la serie dei divisori è « decrescente, essa deve finire o prima o poi con un numero primo ».

Non differente da questo è il metodo di dimostrazione che più tardi si segue per stabilire che un numero non primo si può scomporre in fattori primi (**).

Qualche volta si trovano dimostrati indirettamente i teoremi relativi al *M. C. D* e al *M. C. M* di due sistemi di numeri; però, come ognuno sa, si possono fare le dimostrazioni dirette provando che i due sistemi di numeri hanno gli stessi divisori o gli stessi multipli comuni; e il secondo metodo è da preferirsi al primo.

Una proprietà, fondamentale nell'aritmetica dei numeri primi, è (***): *se un numero primo non divide nessuno dei fattori di un prodotto, esso non divide neanche il prodotto*, di cui si può fare la seguente dimostrazione diretta:

« Il numero primo p non divida nessuno dei due numeri a e b. Si divida « il maggiore dei due numeri a e p pel minore e sia c il resto; si divida p « per c e sia d il resto; poi p per d e sia e il resto ..... Poichè la serie dei « resti c, d, e ..... è decrescente e p è primo, si dovrà arrivare al resto 1. Sup- « poniamo, ad esempio, che ciò avvenga quando si divide p per e. Per un noto « teorema della divisione, possiamo poi dire che dividendo il maggiore dei due « numeri ab, pb pel minore, si ha per resto cb; che dividendo pb per cb si ha « per resto db ... , e da ultimo che dividendo pb per eb, si ha per resto b.

(*) V. Faifofer, *Elem. d'aritm.* (Tip. Emiliana, 1893), § 161 — Testi, o. c., vol. I (Giusti, 1891), § 208.

(**) V. Faifofer, *Aritm.* (1893) § 173 — Testi, o. c., vol. I, § 223.

(***) V. Faifofer, *Aritm.* (1893), § 167-168. Il lemma del § 167 è dimostrato con la riduzione all'assurdo.

« Ora, poichè p divide il dividendo pb ma non il resto b, esso non divide il « divisore eb, e non dividendo eb non dividerà db, . . . , e infine il numero p « non dividerà neppure ab ».

È poi facile estendere il teorema al prodotto di quanti si vogliano fattori.

Fermo, marzo 1895. CORRADO CIAMBERLINI.

Sopra una disposizione particolare dei triangoli simili. — 1. Sieno ABC, $A'B'C'$ (Tav. II, fig. 1ª) due triangoli simili i cui lati omologhi s'incontrano rispettivamente nei punti I_a, I_b, I_c d'una retta i. Chiameremo α e β i cerchi passanti per I_c, A', A, I_b e per I_a, I_c, B, B'. Evidentemente i punti C e C' si troveranno nel medesimo cerchio γ passante per I_a e I_b. È chiaro che qualunque altro triangolo simile ai due dati coi lati omologhi passanti rispettivamente pei medesimi punti I_a, I_b, I_c, ha i vertici omologhi situati nei tre cerchi α, β e γ rispettivamente.

Se diciamo punti corrispondenti i vertici omologhi di due di questi triangoli, ogni punto d'un cerchio troverà il suo corrispondente in ciascuno degli altri due: per es. ad ogni punto B'' di β corrisponde un punto A'' di α ed un punto C'' di γ. Dato B'', per trovare i suoi corrispondenti A'' e C'', basta condurre la $B''I_c$ che incontrerà α in A'', e la $B''I_a$ che incontrerà il cerchio γ in C'': la $A''C''$ dovrà passare per I_b in virtù della costruzione; così α è il luogo dei vertici A, A', A'' . . . ., β dei vertici B, B' B'' . . . ., γ dei vertici C, C', C'' . . . .

2. Supponiamo ora che B_1 coincida con I_c; la B_1I_c sarà allora tangente a β in I_c e incontrerà α in A_1 corrispondente a B_1; la B_1I_a incontrerà γ nel corrispondente punto C_1 coincidente con I_b; dunque A_1C_1 riescirà tangente a γ in I_b. Analogamente, se B_1'' cade in I_a, il corrispondente C_1'' è l'intersezione con γ della tangente a β in I_a, la $B_1''I_c$ interseca α nel corrispondente punto A_1'' coincidente con I_b; $C_1''I_b$ è dunque tangente ad α in I_b. Così pure se A_1' coincide con I_a, il corrispondente B_1' in β è l'incontro con β della tangente ad α in I_c; la $A_1'I_b$ incontra γ nel corrispondente punto C_1' coincidente con I_a; la $B_1'C_1'$ è dunque tangente a γ in I_a.

3. I cerchi α, β e γ passano per uno stesso punto K.

Infatti, supposto che non avessero un sol punto comune K, sia K comune soltanto ad α e β e consideriamolo come appartenente a β. Il suo corrispondente in α è il punto d'incontro di α con KI_c che è ancora K. In K dunque deve coincidere anche il suo corrispondente in γ; ossia KI_b taglia il cerchio γ in un punto che deve coincidere con K. Questo punto adunque rappresenta un triangolo infinitamente piccolo simile ai triangoli ABC, $A'B'C'$, ..., i cui lati omologhi ai lati di questi passano rispettivamente per I_a, I_b e I_c. Ne viene che le direzioni di questi lati sono le KI_a, KI_b, KI_c che indicheremo con a, b e c, e che i tre cerchi formano intorno al loro punto comune K angoli rispettivamente uguali a quelli dei triangoli simili suddetti, dei cui vertici ne sono il luogo. Si ha cioè (BALTZER: *Plan.* § 4, 7)

$$\text{ang}(\alpha, \beta) = \text{ang}(a, b) \quad \text{ang}(\beta, \gamma) = \text{ang}(b, c) \quad \text{ang}(\gamma, \alpha) = \text{ang}(c, a).$$

4 I cerchi circoscritti a tutti quei triangoli simili passano tutti per K.

Infatti consideriamo il cerchio β' circoscritto al triangolo $A\,B\,C$ e sostituiamolo a β; il triangolo $A'_1 B'_1 C'_1$ verrà allora sostituito dal triangolo ABC; il cerchio γ dal cerchio γ' passante per K e tangente in C a BC; la retta i dal lato AC incontrato da γ' in I_b': il lato AC si confonde con una retta i' analoga alla i, ed i cui punti I_c', I_a' (coincidenti in A e C) e I_b' sono analoghi a I_c, I_a, I_b della i. Finalmente il cerchio α verrà sostituito dal cerchio α' passante per A, K e I_b'. Ciò posto, il cerchio β' si trova, rispetto ai cerchi α', γ' ed alla retta i', nelle identiche condizioni di β rispetto ai cerchi α, γ ed alla retta i; e per conseguenza deve passare pel punto comune ad α' e γ' ossia per K. Si ha pure:

$$\text{ang}\,(\alpha', \beta') = \text{ang}\,(a', b') \quad \text{ang}\,(\beta', \gamma') = \text{ang}\,(b', c') \quad \text{ang}\,(\gamma', \alpha') = \text{ang}\,(a', c'),$$

angoli rispettivamente eguali a quelli dei triangoli simili noti.

Le congiungenti i vertici A_1', B_1', C_1' del triangolo $A'_1 B'_1 C'_1$ ai vertici omologhi d'uno qualunque di quei triangoli simili per es. ABC, s'incontrano in un punto di β come risulta dalla semplice ispezione della figura: lo chiameremo centro di similitudine rispetto al triangolo $A_1' B_1' C_1'$. Il cerchio β è dunque il luogo dei centri di similitudine rispetto il triangolo $A_1' B_1' C_1'$ in esso inscritto. Analogamente ciascuno degli altri due cerchi α e γ è il luogo dei centri di similitudine rispetto ai triangoli $A_1B_1C_1$, $A_1'' B_1'' C_1''$ in essi rispettivamente inscritti.

Dalle considerazioni analoghe sui cerchi α', β' e γ', risulta assai facilmente che un cerchio circoscritto ad uno qualunque di quei triangoli per es. ad ABC, è il luogo dei centri S di similitudine rispetto ad esso.

5. Inversamente: Tutti i cerchi passanti pel punto comune K di tre cerchi α, β e γ di cui le altre intersezioni I_a, I_b, I_c sieno allineate, incontrano questi cerchi in punti $A, A', A'' \ldots$; $B, B', B'' \ldots$; $C, C', C'' \ldots$, che sono rispettivamente i vertici di tanti triangoli simili, i cui lati omologhi passano rispettivamente per le intersezioni allineate I_a, I_b, I_c, di quei tre cerchi. Le congiungenti i vertici d'uno qualunque di quei triangoli $A\,B\,C$ ad un punto S del cerchio ad esso circoscritto, incontrano i tre cerchi dati rispettivamente nei punti A', B', C', vertici d'un triangolo simile ad ABC coi lati omologhi passanti per I_a, I_b e I_c.

E. Cominotto.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
142*, 144, 222*, 226*, 227*, 230*, 234**, 235*, 236*, 238, 239** e 240*

142*. *Nel piano d'un cerchio di diametro* AB *sia dato un punto* M, *e coi diametri* MA, MB *si descrivano due cerchi* K *ed* L, *e concentricamente al cerchio* AB *si descriva un altro cerchio* H. *Dimostrare che i cerchi* K *ed* L *tagliano il cerchio* H *in quattro punti, vertici d'un quadrangolo completo di cui un punto diagonale è* M *e un altro cade nella retta* A B.

(S. CATANIA).

Dimostrazione del Sig. *G. Gallucci*, studente a Napoli.

Siano F e D, C e G (Tav II, fig. 2ª) i punti in cui il cerchio H taglia K ed L, dico che le due terne M, C, D; M, F, G sono formate da punti in linea retta.

Infatti condotta MC e supposto che essa incontri H in D' e tirata pure la CB, che taglia H in E, l'$\angle\, MCB$ è retto, sarà quindi retto anche l'$\angle$ adiacente ECD', cosicchè $D'E$ è un diametro del cerchio H. I $\triangle\, AD'H$, BEH avendo allora eguali due lati e l'angolo compreso, danno $\angle\, HAD' = HBE$ e AD' parallela a BE, dopo ciò si può concludere che $\angle\, AD'C = AD'M = BCD' = 90^0$. Così il punto D' oltrechè nel cerchio H si trova pure su K e perciò coincide con D.

Risulta dopo ciò che M è un punto diagonale del quadrangolo $CDGF$. Se poi Q è il punto in cui si tagliano di nuovo i due cerchi K ed L; MQ, DF e CG saranno i tre assi radicali dei cerchi K, L, H, considerati due a due, e così CG, DF si taglieranno in un punto della MQ, secondo punto diagonale del quadrangolo $CDGF$. Il terzo punto diagonale è il polo della MQ rispetto al cerchio H, che si trova sul diametro di H perpendicolare ad MQ, ossia su AB. E con ciò il teorema è completamente dimostrato.

144. *Eliminare* x, y, z *dalle quattro equazioni*

$$\begin{aligned} yz(1-2x) &= \alpha^2(1-x)^2, \\ zx(1-2y) &= \beta^2(1-y)^2, \\ xy(1-2z) &= \gamma^2(1-z)^2, \\ x+y+z &= 1. \end{aligned}$$

(D. BESSO).

Soluzione del Sig. Prof. *E. Fauquembergue* a Parthenay (Francia).

Per ottenere delle equazioni simmetriche in x, y, z formeremo le quantità $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$, $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, che indicheremo rispettivamente con A, B, C; designeremo ancora con P la somma $xy+yz+zx$ e con Q il prodotto xyz (*).

Le prime tre equazioni danno

$$\alpha^2 = yz\left[1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right], \quad \beta^2 = zx\left[1-\frac{y^2}{(1-y)^2}\right],$$
$$\gamma^2 = xy\left[1-\frac{z^2}{(1-z)^2}\right].$$

(*) Nel corso dei calcoli s'incontrano le espressioni Σx^2, Σx^3, Σx^4. Si ottiene rapidamente il loro valore in funzione di P e Q, considerandole come somme di potenze simili dell'equazione $V^3 - V^2 + PV - Q = 0$.

(E. F.).

Se ne deduce, tenendo conto della quarta equazione,

$$A = P - Q\left[\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{y}{(1-y)^2} + \frac{z}{(1-z)^2}\right],$$

o

$$A = P - Q.\frac{PQ - 3P + 5Q + 1}{(P-Q)^2} = \frac{P^3 - 2P^2Q + 3PQ - 5Q^2 - Q}{(P-Q)^2}. \quad [1]$$

Dalle relazioni

$$\frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{Q}\left[x + \frac{x^3}{1-2x}\right], \quad \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{Q}\left[y + \frac{y^3}{1-2y}\right],$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{Q}\left[z + \frac{z^3}{1-2z}\right],$$

si ricava

$$B = \frac{1}{Q}\left[1 + \frac{x^3}{1-2x} + \frac{y^3}{1-2y} + \frac{z^3}{1-2z}\right]$$

o

$$B = \frac{4P^2 - 8PQ - P + Q}{Q(4P - 8Q - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Le equazioni proposte danno ancora

$$C = \frac{x^2y^2z^2(1-2x)(1-2y)(1-2z)}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2} = \frac{Q^2(4P - 8Q - 1)}{(P-Q)^2}. \quad [3]$$

La questione si riduce ora ad eliminare P e Q fra le equazioni [1], [2] e [3]. A questo scopo poniamo

$$P = QR \quad \text{e} \quad 4P - 8Q - 1 = S, \quad \ldots\ldots \quad [4]$$

da cui

$$P = \frac{R(S+1)}{4(R-2)}, \quad Q = \frac{S+1}{4(R-2)};$$

le equazioni [3] e [2] divengono immediatamente

$$S = C(R-1)^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

$$RS + 1 = BS, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [6]$$

da cui, eliminando R,

$$S^3 - (B-1)^2CS^2 + 2(B-1)CS - C = 0. \quad \ldots \quad [7]$$

Per abbassare il grado dell'equazione [1] ed ottenere un'altra equazione in S, mettiamola dapprima sotto la forma

$$P^2(4P - 8Q) + 3Q(4P - 8Q) + 4Q^2 - 4Q = 4A(P-Q)^2,$$

o, tenendo conto di [4], e dividendo i due membri per Q,

$$QR^2(S+1) + 3(S+1) + 4Q - 4 = 4AQ(R-1)^2,$$

$$R^2(S+1)^2 + 12(RS+1) - 4R - 20S = 4A(S+1)(R-1)^2.$$

Dopo aver sviluppato e rimpiazzato RS con $BS - 1$, $(R-1)^2$ con $\frac{S}{C}$ e R con $B - \frac{1}{S}$, si trova l'equazione

$$DS^3 + ES^2 - 6BCS + 4C = 0, \quad \ldots\ldots \quad [8]$$

nella quale

$$D = B^2 C - 4A, \quad \text{e} \quad E = 2(B^2 + 5B - 10)C - 4A + 1.$$

Siamo così condotti ad un problema ben noto ossia: eliminare S fra le due equazioni di terzo grado [7] e [8]. L'eliminazione dei due ultimi termini e quella dei primi due si fanno molto semplicemente e conducono a queste equazioni di secondo grado;

$$(D+4)S^2 + [E - 4C(B-1)^2]S + 2(B-4)C = 0, \quad . \quad . \quad [9]$$

$$[(B-1)^2 CD + E]S^2 - 2[3B + (B-1)D]S + (D+4)C = 0. \quad . \quad . \quad [10]$$

Ora, si sa che la risultante delle due equazioni

$$a S^2 + bS + c = 0,$$
$$a'S^2 + b'S + c' = 0,$$

è

$$(ac' - ca')^2 - (ab' - ba')(bc' - cb') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [11]$$

Possiamo dunque considerare il problema come risoluto.

Osservazione. Nel sistema d'equazioni proposto dal Prof. Besso, α, β e γ sono le bisettrici interne degli angoli d'un triangolo avente per lati x, y, z ed il cui perimetro $2p$ è uguale a 1. Dunque il risultato dell'eliminazione di x, y, z esprime la relazione che esiste fra le lunghezze delle bisettrici degli angoli d'un triangolo il cui perimetro è costante.

222*. *Determinare un triangolo sferico rettangolo data la somma* a *(o la differenza) dei cateti e l'altezza* h *relativa all'ipotenusa* (*).

(G. Bellacchi).

Soluzione del Sig. *C. Montanari*, studente a Pisa.

Indicando con x, y, z rispettivamente i lati dell'angolo retto A e l'ipotenusa BC del triangolo sferico che si considera, si hanno le equazioni

$$x \pm y = a, \quad \cos z = \cos x \cos y, \quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h.$$

Dalla prima si ricava

$$\cos(x \pm y) = \cos a = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

e valendosi delle altre due

$$[1] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos a = \cos z \mp \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h.$$

Per avere z mediante una formola calcolabile per logaritmi, pongasi $\operatorname{sen} h = \tan\varphi$. Segue $\cos a = \dfrac{\cos z \cos\varphi \mp \operatorname{sen} z \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\cos(z \pm \varphi)}{\cos\varphi}$, donde

$$[2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \cos(z \pm \varphi) = \cos a \cos\varphi.$$

Trovata z, se a esprime la somma dei cateti, si calcolerà $x - y$ mediante la formola

$$[3] \quad . \quad . \quad . \quad \cos(x - y) = \cos z + \operatorname{sen} z \,.\, \operatorname{sen} h = \frac{\cos(z - \varphi)}{\cos\varphi},$$

(*) Questa quistione è l'estensione alla sfera di uno dei problemi proposti nella sessione estiva d'esami di licenza dall'Istituto tecnico nella *Sezione Fisico-matematica*. (Cfr. colla quistione 179ª del *Periodico*, anno VIII, p. 63, e anno IX, p. 112).

e se invece è nota la differenza $x - y$ dei cateti si calcolerà la loro somma con la formola
$$\cos(x + y) = \frac{\cos(z + \varphi)}{\cos\varphi}$$
e così in ogni caso conoscendo la somma e la differenza di x ed y si troveranno immediatamente i cateti.

Per avere gli angoli B e C serviranno le formole
$$\operatorname{sen} B = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} z}, \qquad \operatorname{sen} C = \frac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} z}$$
le quali determinano univocamente B e C poichè in ogni triangolo rettangolo ciascun angolo obliquo è della stessa specie del lato opposto.

A decidere quanti siano i valori di z forniti dalla [2], giova esprimere z in funzione degli elementi dati. Si osservi perciò che dalla relazione [1] segue
$\frac{\cos a}{\cos z} = 1 \mp \tan z \operatorname{sen} h$, od anche $\pm \cos a \sqrt{1 + \tan^2 z} = 1 \mp \operatorname{sen} h \tan z$,
da cui quadrando e riducendo si ricava l'equazione quadratica in $\tan z$

[4] . . . $(\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 h) \tan^2 z \mp 2 \operatorname{sen} h \tan z + \operatorname{sen}^2 a = 0$.

Da questa si ha
$$\tan z = \frac{\pm \operatorname{sen} h \pm \cos a \sqrt{\operatorname{sen}^2 h + \operatorname{sen}^2 a}}{\operatorname{sen}^2 h - \cos^2 a},$$
dove per ciascuno dei segni che precedono il 1° termine del numeratore va preso il doppio segno per la radice.

Il problema ammette così due soluzioni poichè i valori di $\tan z$ sono reali e dev'essere $z < 180^0$, sia cognita la somma o la differenza dei cateti.

Per $h = 90^0 \pm a$ una radice della [4] diviene infinita e l'altra vien data da $\tan z = \pm \frac{\operatorname{sen}^2 a}{2 \cos a}$.

I valori analitici di $\operatorname{tang} x$, $\operatorname{tang} y$ si otterranno risolvendo il sistema
$$x \pm y = a, \ \operatorname{tang} x \cdot \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} z \cdot \operatorname{sen} h.$$

Il problema è impossibile per $h = 90^0$ ed $x + y = a$, poichè le equazioni [2] e [3] divengono $\cos z - \operatorname{sen} z = \cos a$, $\cos z + \operatorname{sen} z = \cos(x - y)$ e ne consegue $\cos^2 a + \cos^2(x - y) = 2$ non ammissibile per a ed $x - y$ diversi da 180°. La relazione $\operatorname{sen} h = \operatorname{tang} \varphi$ mostra esser $\varphi < 45^0$ e dalla stessa [3] risulta $\cos(z - \varphi) \leq \cos\varphi$, cioè $z \geq 2\varphi$; nel caso di $h < 90^0$ si osserva la somma dei cateti x, y superare $2h$, onde $\cos a < \cos 2h = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 h$, ovvero la condizione $\operatorname{sen} \frac{a}{2} > \operatorname{sen} h > \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$. Il triangolo rettangolo è isoscele per $z = 2\varphi$ e con la [2] si trova $\cos a = \frac{1 - 3 \operatorname{sen}^2 h}{1 + \operatorname{sen}^2 h}$, altri semplici casi si avrebbero per $a = \frac{\pi}{2}$, π ecc..

Le formule [2] e [3] conducono alla costruzione grafica considerando $z + \varphi$ e $z - \varphi$ quali ipotenuse di due triangoli rettangoli sferici l'uno avente per cateti a, φ e l'altro φ ed $x - y$, così dal primo triangolo si ottiene z e dal secondo l'arco $x - y$.

226*. *Determinare un triangolo rettangolo nel quale la somma dei lati dell'angolo retto sia* m, *e quella dell'ipotenusa e dell'altezza relativa all'ipotenusa sia* n; *e indicare le condizioni perchè il problema sia possibile* (*).

Soluzione del Sig. *E. Lugaro*, studente a Palermo.

La quistione si riduce a risolvere il sistema d'equazioni

$$x+y=m, \quad x^2+y^2=z^2, \quad z+\frac{xy}{z}=n.$$

Elevando a quadrato la prima e tenendo conto delle altre due si ha

$$z^2-2zn+m^2=0 \qquad \text{da cui} \qquad z=n\pm\sqrt{n^2-m^2}.$$

Il valore positivo del radicale non conviene al problema, perchè si avrebbe $z>n$; deve essere $n>m$.

Per trovare x e y si ha ora il sistema

$$x+y=m, \qquad xy=m^2+n\sqrt{n^2-m^2}-n^2,$$

cosicchè

$$x=\frac{m+\sqrt{4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}}}{2},$$

$$y=\frac{m-\sqrt{4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}}}{2}.$$

Questi valori sono reali se

$$4n^2-3m^2-4n\sqrt{n^2-m^2}\geqq 0 \qquad \text{o} \qquad 4n^2-3m^2\geqq 4n\sqrt{n^2-m^2},$$

cioè $n^2\leqq\frac{9}{8}m^2$ o più semplicemente $n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}m$. Quindi dev'essere

$$m<n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Una costruzione del problema, derivante dalla precedente costruzione algebrica, è la seguente: Si faccia il triangolo rettangolo ABC che abbia per ipotenusa $AB=n$, e un cateto $BC=m$; dev'essere perciò $n>m$; sarà $AC=\sqrt{n^2-m^2}$. Si prenda su AB, nella direzione AB, il segmento $AD=AC$ e si costruisca il semicerchio di diametro BD; si conduca una retta EF che lo tagli in E, F ad una distanza da AB uguale ad AD.

I triangoli EDB, FDB, eguali, soddisfano alla quistione, perchè sono rettangoli e hanno, come è facile a verificarsi, la somma dei cateti eguale a m e quella dell'ipotenusa e dell'altezza relativa eguale ad n.

Perchè il problema abbia soluzione è necessario e sufficiente che

$$\frac{DB}{2}=\frac{n-\sqrt{n^2-m^2}}{2}\geqq\sqrt{n^2-m^2} \quad \text{cioè} \quad n\leqq\frac{3}{2\sqrt{2}}m.$$

(*) Le quistioni 226* e 227* sono i temi di matematica dati nel luglio 1894 per la licenza dagli Istituti tecnici nella sezione *fisico-matematica*.

Quindi dev'essere
$$m < n \leqq \frac{3}{2\sqrt{2}} m,$$
che è la condizione trovata prima (*).

227*. *In un triangolo sferico* ABC, *rettangolo in* B, *il coseno dell'angolo in* A *è il quadrato del coseno del lato opposto* a. *Dimostrare che la somma degli altri due lati* b *e* c *è* $\frac{\pi}{2}$, *o* $\frac{3\pi}{2}$ *secondochè essi sono minori o maggiori di* $\frac{\pi}{2}$; *e nel primo di questi casi dimostrare anche che, onde il triangolo possa esistere, il lato* c *dev'essere inferiore a* $\frac{\pi}{4}$, *e determinare tutti gli elementi del triangolo per mezzo di* c (**).

Risposta del Sig. *E. Marchi*, studente a Pisa (***).

Dalla relazione $\cos a \operatorname{sen} C = \cos A$, a motivo dell'ipotesi: $\cos A = \cos^2 a$, si deduce $\cos a = \operatorname{sen} C$ e quindi anche $\operatorname{sen} a = \cos C$.

Giacchè $\cos(b + c) = \cos b \cos c - \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c$, tenendo presente che pel nostro triangolo rettangolo valgono le formole
$$\cos b = \cot A \cot C, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} A}; \quad \operatorname{sen} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A}; \quad \operatorname{sen} c = \frac{\tan a}{\tan A},$$
avremo adunque
$$\cos(b + c) = \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} - \frac{\cos A \operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}^2 A \cos a} = \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} - \frac{\cos A \cos^2 C}{\operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen} C} = 0.$$

Di qui segue
$$b + c = \frac{\pi}{2} \quad \text{o} \quad b + c = \frac{3\pi}{2}$$
secondochè b e c sono minori o maggiori di $\frac{\pi}{2}$. L'ipotesi di $b < \frac{\pi}{2}$ e $c > \frac{\pi}{2}$, o viceversa, non è ammissibile, perchè in un triangolo sferico rettangolo i tre lati sono o tutti minori di $\frac{\pi}{2}$ od uno solo è minore di $\frac{\pi}{2}$, ma qualunque sia C la relazione $\operatorname{sen} C = \cos a$ insegna che è $a < \frac{\pi}{2}$, e così b e c sono insieme acuti od ottusi.

Nel caso di $b + c = \frac{\pi}{2}$, avendosi $b > c$, perchè C è acuto come lo è c, consegue $c < \frac{\pi}{4}$. Inoltre si ha immediatamente
$$\cos b = \operatorname{sen} c, \quad \cos a = \frac{\cos b}{\cos c} = \tan c, \quad \cos A = \cos^2 a = \tan c,$$
$$\operatorname{sen} C = \cos a = \tan c.$$

(*) Soluzioni meno complete di questo problema furono inviate dai Sigg. *B. Armano*, studente a Torino; *E. Jacometti* (R. Istituto tecnico Bari); *E. Marchi* e *C. Montanari*, studenti a Pisa; *A. Panebiano* (R. Istituto tecnico Catania); *F. Levera* e *L. Romano* (R. Istituto tecnico Roma); *A. Parsi*, studente a Genova.

(**) V. la 1ª nota alla q. 226*.

(***) Una risposta poco dissimile pervenne dal Sig. *C. Montanari*, studente a Pisa.

230*. *Dimostrare che si ha*

$$1^2+4^2+5^2+8^2+9^2+\ldots+(4n)^2+(4n+1)^2$$
$$=\frac{(n+1)(32n^2+28n+3)}{3}.$$

(G. CANDIDO).

Dimostrazioni completamente analoghe dai Sigg. *B. Armano*, studente a Torino; *E. Marchi* e *C. Montanari*, studenti a Pisa; *E. Jacometti*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *F. Levera* e *L. Romano*, alunni del R. Istituto tecnico di Roma.

Applicando le note formole

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\quad 1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

si ha

$$4^2+8^2+\ldots+(4n)^2=4^2\left\{1^2+2^2+\ldots+n^2\right\}=\frac{8n(n+1)(2n+1)}{3},$$

$$5^2+9^2\ldots+(4n+1)^2=(4.1+1)^2+(4.2+1)^2+\ldots+(4.n+1)^2=$$

$$4^2\left\{1^2+2^2+\ldots+n^2\right\}+8\left\{1+2+\ldots+n\right\}+n=\frac{n(n+1)\left\{16n+20\right\}+3n}{3},$$

donde

$$1^2+4^2+5^2+8^2+9^2+\ldots+(4n)^2+(4n+1)^2=$$
$$1+\frac{n(n+1)\left\{32n+28\right\}+3n}{3}=\frac{(n+1)\left\{32n^2+28n+3\right\}}{3}.$$

Dimostrazione dei Sigg. *A Parsi*, studente a Genova; *E. Marchi*, studente a Pisa.

Poichè si ha $(4n)^2+(4n+1)^2=32n^2+8n+1$, anzichè sommare la serie data, si potranno addizionare i valori che si ottengono colla sostituzione degli interi da 0 ad n alla lettera n dell'espressione precedente. Rammentando le formule relative alle somme dei primi n numeri naturali e dei quadrati di questi numeri, si avrà allora

$$\frac{32n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{8n(n+1)}{2}+n+1=\frac{(n+1)\left\{32n^2+28n+3\right\}}{3}.$$

Dimostrazione del Sig. *G. Scorza*, studente a Pisa.

Indicando con

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}(a+sr)^2$$

la somma dei quadrati dei primi n termini d'una progressione aritmetica di cui a è il primo termine ed r la ragione, avremo

$$\sum_{s=0}^{s=n-1}(a+sr)^2=na^2+2ar\sum_{s=0}^{s=n-1}s+r^2\sum_{s=0}^{s=n-1}s^2$$

ossia, per essere

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} s = \frac{n(n-1)}{2} \text{ e } \sum_{s=0}^{s=n-1} s^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{2},$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} (a+sr)^2 = na \left\{ a + r(n-1) \right\} + \frac{n(n-1)(2n-1)}{2} r^2.$$

Ed ora si osservi che la somma dell'enunciato si scinde nelle due

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n+1)^2$$
$$4^2 + 8^2 + 12^2 + \ldots + (4n)^2$$

la prima di $n+1$ termini, la seconda di n, e che a queste due può applicarsi la formula trovata.

Applicandola si ha

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + \ldots + (4n+1)^2 = (n+1)(1+4n) +$$
$$\frac{8}{3}(n+1)\,n\,(2n+1) = \frac{16n^3 + 36n^2 + 23n + 3}{3}$$

$$4^2 + 8^2 + 12^2 + \ldots + (4n)^2 = 16n^2 + \frac{8}{3} n(n-1)(2n-1) = \frac{16n^3 + 24n^2 + 8n}{3}$$

e quindi

$$1^2 + 4^2 + 5^2 + 8^2 + 9^2 + \ldots + (4n)^2 + (4n+1)^2 =$$
$$\frac{32n^3 + 60n^2 + 31n + 3}{3} = \frac{(n+1)(32n^2 + 28n + 3)}{3} \; (^*).$$

234**. *Se, intorno ad uno e dei raggi uniti e, f di due fasci proiettivi sovrapposti, si fa muovere l'uno di essi tenendo fermo l'altro, i due fasci saranno, in ogni posizione di quello, prospettivi. Dimostrare che l'asse di prospettiva descrive un cono sezionato secondo circoli dai piani perpendicolari ad* e, *se non è* f *perpendicolare ad* e; *e se è* f *perpendicolare ad* e, *detto asse descrive un fascio.* (A. Del Re).

Dimostrazione del Sig. V. *Columbo*, studente nella R Università di Napoli.

La proiettività nei due fasci è individuata dalle terne $(e\,f\,a)$, $(e\,f\,a')$. Facendo quindi muovere il secondo fascio intorno ad e e indicando con f_1' e a'_1 la nuova posizione di f e a', il fascio $e\,f\,a$ risulterà proiettivo ad $e\,f_1'\,a'_1$, anzi i due fasci avendo unito l'elemento e sono prospettivi e l'asse di prospettiva sarà l'intersezione dei due piani $(f f_1')$, $(a\,a'_1)$.

Ciò posto se f è perpendicolare ad e, il piano $(f f_1')$ è quello perpendicolare ad e nel centro O, cioè è fisso: e siccome l'asse di prospettiva dei due fasci passa per O e giace nel piano $(f f_1')$, descriverà in esso un fascio di centro O.

Se f non è perpendicolare ad e, si conduca per un punto O_1 del raggio e la perpendicolare a questo raggio che incontri f, a, a' rispettivamente in F, A, A' (Tav. II, fig. 3ª). Allorchè il fascio $e\,f\,a'$ ruota intorno ad e, i punti F ed A' descriveranno due cerchi concentrici in un piano perpendicolare ad e passante

(*) Altre generalizzazioni pervennero dal Sig. V. *Columbo*, studente a Napoli e dall'A. stesso stesso della quistione.

per O_1; e in qualunque posizione del fascio mobile le intersezioni F_1', A'_1 di f_1' ed a'_1 con questo piano saranno allineate con O_1.

Ora i due piani $(f f_1')$, $(a a'_1)$ coincidono con $(f F_1')$, $(a A'_1)$; volendo quindi trovare la sezione della superficie conica descritta dall' asse di prospettiva dei due fasci col piano passante per O_1 basterà trovare il luogo descritto nel piano dei due cerchi dal punto in cui s' intersecano AA'_1, FF_1'. Tale luogo, com' è noto (*), è un cerchio, laonde resta dimostrato che l'asse di prospettiva dei due fasci, nel caso che non sia f perpendicolare ad e, descrive un cono di secondo grado, sezionato secondo circoli dai piani perpendicolari ad e.

235*. *In un quadrilatero* ABCD *inscritto in un cerchio di raggio* R, *il lato* AD *è un diametro del cerchio e gli altri lati* AB, BC, CD *formano una progressione aritmetica e hanno per somma* 3a. *Si determinino questi lati e le diagonali* AC *e* BD, *e si discutano i risultati trovando le condizioni di possibilità del problema* (**).

Risoluzioni completamente analoghe dai Sigg. *C. Allioni*, alunno del R. Liceo d'Ivrea e *G. Vitali*, alunno dell'Istituto tecnico di Ravenna.

Poichè i lati AB, BC, CD del quadrilatero formano una progressione aritmetica, la cui ragione s'indicherà con x, ed hanno per somma $3a$, sarà $BC = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a - x + a + x}{2} = a$. Per i teoremi di Pitagora e Tolomeo segue poi

$$BD = \sqrt{4R^2 - (a-x)^2}, \qquad AC = \sqrt{4R^2 - (a+x)^2},$$
$$\sqrt{4R^2 - (a-x)^2}\,\sqrt{4R^2 - (a+x)^2} = 2Ra + (a-x)(a+x).$$

Quadrando e riducendo si ottiene l'equazione

$$4R^3 - 2R(a^2 + x^2) = Ra^2 + a(a^2 - x^2),$$

ossia

$$x^2(2R - a) = 4R^3 - 3Ra^2 - a^3,$$

da cui si ha

$$x = \sqrt{\frac{4R^3 - 3Ra^2 - a^3}{2R - a}} = (2R + a)\sqrt{\frac{R - a}{2R - a}}.$$

Risulta di qui come prima condizione di possibilità del problema, avendosi

---

(*) Eccone una dimostrazione analitica. — Ponendo

$$O_1A = a \quad O_1A' = O_1A'_1 = b \quad O_1F = O_1F_1 = c$$

e chiamando φ l'angolo di cui ha ruotato il raggio O_1F, le equazioni delle rette AA'_1 e FF'_1 saranno rispettivamente:
$\frac{y}{x + a} = \frac{-b\,\mathrm{sen}\,\varphi}{b\cos\varphi + a}$; $\frac{y}{x + c} = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{-\cos\varphi + 1}$, da cui si ricava $\cos\varphi = \frac{x(a+b) + a(b+c)}{b(a-c)}$, $\mathrm{sen}\,\varphi = y\,\frac{a+b}{b(c-a)}$. Quadrando, sommando e riducendo si ha l'equazione del luogo:

$$(x^2 + y^2)(a + b) + 2ax(b + c) + c^2(a - b) + 2abc = 0.$$

(**) Questa quistione e la seguente 236* sono i temi di matematica dati nella sessione d'ottobre 1894 per la licenza dagli istituti tecnici nella Sezione *fisico-matematica*.

$2R > a$, che deve essere $R \geqq a$, altrimenti x sarebbe immaginaria. Supponendo questa condizione soddisfatta, segue

$$AB = a - (2R + a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}, \qquad CD = a + (2R - a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}};$$

$$BD = \sqrt{\left\{\frac{4R^2(R-a) + a^2(R+2a)}{2R-a} + 2a(2R+a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}\right\}},$$

$$AC = \sqrt{\left\{\frac{4R^2(R-a) + a^2(R+2a)}{2R-a} - 2a(2R+a)\sqrt{\frac{R-a}{2R-a}}\right\}}.$$

Perchè anche AB sia reale e diverso da zero, occorre che si abbia

$$a > \sqrt{\frac{4R^3 - 3Ra^2 - a^3}{2R-a}},$$

da cui quadrando e riducendo risulta $5a^2 > 4R^2$ ed infine $a > \frac{2R}{\sqrt{5}}$.

Riassumendo perchè il problema sia possibile è necessario e basta che sia

$$R \geqq a > \frac{2R}{\sqrt{5}}.$$

Nel caso di $R = a$, il quadrilatero si riduce ad un mezzo esagono (*).

236*. *Si ha un trapezio nel quale i due lati paralleli sono* a *e* b *con* a < b, *e l'altezza è* h *Si trovi a quale distanza* x *dal lato* b *dovrà condursi una retta* y *parallela a questo lato per far si che il trapezio resti diviso in due trapezi tali che quello di cui i lati paralleli sono* b *e* y *stia all'altro in un rapporto dato* q; *e si dia anche la lunghezza della retta* y *e si discutano i risultati* (**).

Risoluzioni analoghe dai Sigg. *F. Celestri*, alunno del R. Istituto tecnico di Modica e *C. Allioni*, alunno del R. Liceo d'Ivrea.

Le aree del trapezio dato e di quelli in cui esso dev'essere diviso sono rispettivamente $\frac{a+b}{2}.h$, $\frac{b+y}{2}.x$, $\frac{a+y}{2}(h-x)$. Si ha quindi il sistema d'equazioni

$$(b+y)x + (a+y)h - (a+y)x = (a+b)h$$
$$(b+y)x = q(a+y)(h-x).$$

Dalla prima si ricava $x = \frac{(b-y)h}{b-a}$ e dalla seconda $x = \frac{q(a+y)h}{b+y+qa+qy}$.

Eguagliando i secondi membri e riducendo, risulta

$$y^2(q+1) = qa^2 + b^2, \quad \text{donde} \quad y = \sqrt{\frac{qa^2+b^2}{q+1}},$$

(*) Soluzioni di questa quistione vennero inviate anche dai Sigg. *F. Levera* e *L. Romano* alunni del R. Istituto tecnico di Roma e dal Sig. *E. Marchi* studente a Pisa.

(**) V. la 1ª nota alla quistione 235*.

poichè il segno — pel radicale non è accettabile; e sostituendo nell'una o nell'altra delle due formole che danno il valore di x

$$x = \left[h\left(b - \sqrt{\frac{q a^2 + b^2}{q+1}}\right)\right] : (b-a).$$

Per dato è $b > a$, quindi $q a^2 + b^2 < q b^2 + b^2 = (q+1) b^2$. Segue da ciò che $\sqrt{\frac{q a^2 + b^2}{q+1}} < \sqrt{\frac{(q+1) b^2}{q+1}} = b$, onde senz'aggiungere altre condizioni, a quella data dall'enunciato, il valore di x risulta positivo ed il problema è sempre possibile.

238. *Dimostrare che la somma*

$$\frac{n}{n+1} - 2^k \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + 3^k \frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} - \ldots \pm n^k \frac{n(n-1)\ldots 2.1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$$

è uguale a $\frac{1}{2}$ *per* $k = 0$, *ed è uguale a zero qualunque sia l'intero positivo pari* $k \leq 2n - 2$.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Nonni* a Ravenna.

1° Se $S_{n,k}$ indica la somma data, e u_r l'$r.^o$ termine di $S_{n,o}$, si ha

$$u_r = (-1)^{r-1} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}, \; u_{r-1} = (-1)^{r-2} \frac{n(n-1)\ldots(n-r+2)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)};$$

e quindi

$$\frac{u_r}{u_{r-1}} = -\frac{n-r+1}{n+r},$$

$$n(u_r + u_{r-1}) + r u_r - (r-1) u_{r-1} = 0.$$

Ponendo in questa relazione $r = 2, 3, \ldots, n$, e sommando le eguaglianze che risultano, si trova

$$n(S_{n,o} - u_1 + S_{n,o} - u_n) + n u_n - u_1 = 0;$$

da cui

$$S_{n,o} = \frac{n+1}{2n} u_1 = \frac{n+1}{2n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

2° Si supponga ora $n > 1$, e si rappresentino con t_r e v_r, rispettivamente, i termini $r.^i$ di $S_{n,k}$ e di $S_{n-1,k}$: si avrà

$$t_r = (-1)^{r-1} r^k \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+r)}, \; v_r = (-1)^{r-1} r^k \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-r)}{n(n+1)\ldots(n+r-1)},$$

$$\frac{t_r}{v_r} = \frac{n^2}{n^2 - r^2}, \; n^2 t_r - r^2 t_r = n^2 v_r.$$

Ponendo in questa eguaglianza $r = 1, 2, \ldots, n-1$, e sommando, risulta

$$1^2 t_1 + 2^2 t_2 + \ldots + (n-1)^2 t_{n-1} = n^2 (S_{n,k} - t_n - S_{n-1,k});$$

ossia

$$S_{n,k+2} = n^2 (S_{n,k} - S_{n-1,k}) : \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

relazione che ha luogo per ogni valore intero positivo o nullo di k, purchè n sia maggiore di 1.

Se $k = 0$, la [1] diviene

$$S_{n,2} = n^2(S_{n,0} - S_{n-1,0});$$

ma, per la prima parte dell'enunciato, si ha $S_{n,0} = S_{n-1,0} = \frac{1}{2}$; dunque

$$S_{n,2} = 0 \text{ quando } n > 1.$$

Se $k = 2$, la [1] diviene

$$S_{n,2.2} = n^2(S_{n,2} - S_{n-1,2});$$

ma, per ciò che precede, quando $n - 1 > 1$ si ha $S_{n,2} = S_{n-1,2} = 0$; dunque

$$S_{n,2.2} = 0 \text{ quando } n > 2.$$

Così continuando si trova $S_{n,2.3} = 0$ per $n > 3$, $S_{n,2.4} = 0$ per $n > 4$ ecc. In generale, supponendo $S_{n,2p} = 0$ per $n > p$, dalla [1] si deduce subito che deve essere $S_{n,2(p+1)} = 0$ per $n > p + 1$; dunque la somma $S_{n,k}$ è sempre nulla quando k è un intero positivo pari e n supera la metà di k; vale a dire quando

$$k = 2, 4, 6, \ldots, 2n - 2.$$

In modo analogo si possono trovare delle espressioni di $S_{n,k}$ anche se k è un intero positivo dispari; ma tali espressioni non sono indipendenti da n, come nei casi precedentemente trattati. Si ha per esempio

$$S_{n,1} = \frac{n}{2(2n-1)} \quad \text{e} \quad S_{n,3} = \frac{-n^2}{2(2n-1)(2n-3)}.$$

Lasciamo al lettore la ricerca di queste formole.

239.** *Mostrare che, data l'equazione, a coefficienti reali,*

$$\alpha x y + \beta x + \gamma y + \delta = 0,$$

e, posto $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$, *le coppie di valori di* x, y *che la soddisfano, e che, nello stesso tempo, differiscono di una quantità reale assegnata* h, *sono sempre reali se è* $\alpha^2\Delta \leq 0$; *e se è* $\alpha^2\Delta > 0$, *saranno reali soltanto quando* h *non è compreso fra i valori* $\dfrac{\gamma - \beta \pm \sqrt{-\Delta}}{\alpha}$.

Osservare poi che, nel caso di $\alpha = 0$, *e di* $\beta = -\gamma$, *il problema di determinare dei valori di* x, y *con la condizione voluta è impossibile, o indeterminato.* (A. Del Re).

Dimostrazione del Sig. Prof. V. *Retali* a Milano.

Eliminando y fra le due equazioni

$$\alpha x y + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad x - y + h = 0$$

si ha l'equazione quadratica in x

$$\alpha x^2 + (\alpha h + \beta + \gamma)x + (\gamma h + \delta) = 0$$

le cui radici sono reali se il discriminante

$$D = \alpha^2 h^2 + 2\alpha(\beta - \gamma)h + [(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta]$$

è positivo o nullo. Se le radici di $D=0$, risoluta rispetto ad h, sono imaginarie coniugate, oppure reali ed eguali, cioè se, nell' ipotesi di α diverso da zero, $\alpha\delta-\beta\gamma \leqq 0$, D è sempre positivo; se le radici di $D=0$ sono reali (α diverso da zero) $\alpha\delta-\beta\gamma$ è positivo, e D sarà positivo solo quando si attribuiscano ad h valori non compresi nell' intervallo delle radici, cioè non compresi fra i valori $\dfrac{\gamma-\beta\pm 2\sqrt{\Delta}}{\alpha}$. Se poi $\alpha=0$ il dato sistema diviene di 1° grado, ossia

$$\beta x+\gamma y+\delta=0,\quad x-y+h=0$$

e se ne deduce

$$x=-\frac{h\gamma+\delta}{\beta+\gamma},\quad y=\frac{h\beta-\delta}{\beta+\gamma}.$$

Se poi si ha anche $\beta=-\gamma$ le due equazioni precedenti si riducono ad ad una sola se $\delta=\beta h$, e sono incompatibili se $\delta \gtrless \beta h$.

Osservazione. In generale, per due projettività conlocali a elementi omogenei

$$\alpha xy+\beta x+\gamma y+\delta=0,\quad \alpha_1 xy+\beta_1 x+\gamma_1\delta+\delta_1=0,$$

le coppie comuni di elementi corrispondenti sono reali se

$$D=[(\alpha\delta_1)-(\beta\gamma_1)]^2-4(\alpha\beta_1)(\gamma\delta_1)\geqq 0,$$

dove $(\alpha\beta_1)=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta$, ecc..

Il Sig. *G. Scorza*, che inviò una soluzione del tutto analoga alla precedente, osserva poi che la quistione proposta è l'enunciato analitico del problema seguente di Geometria proiettiva:

« Date sopra una retta due punteggiate proiettive, trovare due punti su questa retta che si corrispondano nelle due punteggiate e nel tempo stesso distino di un dato segmento » (*).

240*. *Dato l'angolo di sezione α di due circonferenze e quello 2θ delle loro tangenti comuni, determinare il rapporto m dei loro raggi; viceversa conoscendo m ed uno degli angoli α, 2θ si cerchi l'altro.*

(G. Bellacchi).

Risoluzioni dei Sigg. *E. Marchi*, studente a Pisa e *G. Somalvico*, alunno del R. Istituto tecnico di Como (**).

Siano O, O' (Tav. II, fig. 4ª) le due circonferenze di raggi R, R'; AA' una loro tangente comune, nei punti A, A', che incontra la linea dei centri OO' in S, finalmente M il punto di loro intersezione situato dalla stessa parte di AA' rispetto alla congiungente i centri. L'angolo OMO' sarà il supplemento di α e se si conduce pel centro O' della circonferenza minore una parallela ad AA' ad incontrare OA in N, risulterà $\angle OO'N=\theta$ e si avrà $ON=OO'\,\mathrm{sen}\,\theta$. Ma d'altra parte dal triangolo OMO' si ha

$$\overline{OO'}^2=R^2+R'^2-2RR'.\cos OMO'=R^2+R'^2+2RR'\cos\alpha,$$

(*) Un'altra risposta alla quistione pervenne dal Sig. *L. de Sanctis*, alunno del R. Istituto tecnico di Teramo.

(**) Una risoluzione venne pure inviata dal Sig. *G. Gallucci*, studente a Napoli.

onde

$$\overline{ON}^2 = (R - R')^2 = (R^2 + R'^2 + 2RR'\cos\alpha)\ \ \operatorname{sen}^2\theta =$$
$$(R^2 + R'^2)\operatorname{sen}^2\theta + 2RR' . \cos\alpha \operatorname{sen}^2\theta.$$

Di qui si deduce facilmente

$$(R^2 + R'^2)\cos\theta = 2RR'(1 + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\theta)$$

e, dividendo per RR':

$$\frac{R}{R'} + \frac{R'}{R} = \frac{2(1 + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\theta)}{\cos^2\theta},$$

da cui, introducendo il rapporto m fra i due raggi, segue

$$m + \frac{1}{m} = \frac{2(1 + \cos\alpha . \operatorname{sen}^2\theta)}{\cos^2\theta}.$$

Considerando in quest'equazione successivamente come incognite m, θ ed α, si ricavano le tre relazioni

$$m = \frac{1 + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} \pm \sqrt{\frac{(1 + \cos\alpha \operatorname{sen}^2\theta)^2}{\cos^4\theta} - 1},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m - 1}{\sqrt{m^2 + 2m\cos\alpha + 1}},$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right)\cot^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta.$$

Per $\alpha = 0$, ossia nel caso che le due circonferenze siano tangenti esternamente, dalla 2ª di queste formole si trae $\operatorname{sen}\theta = \frac{m-1}{m+1}$, donde $m = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$, cosicchè supponendo contemporaneamente $\theta = 0$ o $\theta = 90°$ risulta $m = 1$ od $m = \infty$. Per $\alpha = 180°$, ossia se il contatto è interno, segue $\operatorname{sen}\theta = \frac{m-1}{m-1} = 1$ quind $\theta = 90°$ ed m indeterminato.

L'ipotesi di $\theta = 0$ dà $m = 1$. In questo caso adunque le circonferenze sono eguali.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

268. Qualunque sia l'intero positivo n, si ha

$$1 - \frac{1}{3}\,\frac{n(n+1)}{1^2} + \frac{1}{5}\,\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1 . 2)^2} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{1 . 2 \ldots . 2n}{(1 . 2 \ldots . n)^2} = \frac{1}{2n+1}.$$

D. Besso.

(*) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

269. Qualunque sia l'intero positivo m, si ha

$$\frac{1}{m+n+1}=\frac{1}{n+1}-\frac{m}{(n+1)(n+2)}+\frac{m(m-1)}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\ldots..$$
$$\ldots..+(-1)^m\frac{m(m-1)\ldots.2.1}{(n+1)(n+2)\ldots.(n+m+1)}.$$

G. Musso.

270**. In un' urna si trovano un egual numero di palle rosse e nere. Ne vengono estratte successivamente n rimettendo volta per volta la palla estratta nell'urna. Dimostrare che la probabilità che le n palle estratte presentino una determinata disposizione di colori è data da

$$\frac{1}{2+P_n\Sigma\frac{1}{P_\alpha P_\beta}},$$

in cui $\alpha+\beta=n$ e $P_n=1.2\ldots.n$. F. Verde.

271*. Il trinomio

$$a^{n+1}-(n+1)ab^n+nb^{n+1}$$

è divisibile per $(a-b)^2$; dare l'espressione del quoziente.

Dedurne poi che le espressioni $2^{2n}+15n-1$ e $2^{4n}-15n-1$, per n intero e positivo, sono multiple rispettivamente di 9 e 25.

G. Bellacchi.

272**. Le coniche passanti per un punto e bitangenti sopra una retta fissa alle coniche di un fascio, formano un altro fascio; gli otto punti-base dei due fasci sono in una conica.

V. Retali.

273*. Un cerchio di centro O è segato da un altro cerchio M in due punti opposti A e B: dimostrare che ogni cerchio avente per diametro una corda di M passante per O, sega il primo cerchio nei due termini di un diametro perpendicolare alla corda.

V. Retali.

274*. Due cerchi O e M posti in un medesimo piano si segano ortogonalmente nei punti A e B, e da un punto P preso comunque sopra O si conducono le rette PA, PB a segare ulteriormente l'altro cerchio M in A' e B'. Dimostrare che $A'B'$ è un diametro di M perpendicolare al diametro PP' di O. V. Retali.

275*. Fra i triangoli i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli? L. Bosi.

276*. Fra i triangoli le cui mediane formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono rettangoli, quali acutangoli, quali ottusangoli?

L. Bosi.

277**. Posto

$$u_1 = \frac{7}{2}(c-b)+a,\ u_2 = \frac{7}{2}(u_1-c)+b,\ u_3 = \frac{7}{2}(u_2-u_1)+c,\ \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ u_n = \frac{7}{2}(u_{n-1}-u_{n-2})+u_{n-3},\ \ldots\ldots$$

esprimere u_n in funzione di a, b, c, n.

A. Tagiuri.

278**. Si considerino tutti i triangoli inscritti in una conica aventi un vertice comune e il lato opposto parallelo alla tangente in quel punto. Trovare il luogo del centro del circolo circoscritto a ciascuno di questi triangoli.

G. Scorza.

279**. Si considerino tutte le coniche aventi a comune un fuoco F e la direttrice f corrispondente, F ed f essendo dati.

1° Per ogni punto M del piano passa una ed una sola di queste coniche. Dire in quale regione deve trovarsi il punto M perchè la conica corrispondente sia un' ellisse, una parabola od un' iperbole.

2° Trovare il luogo dei vertici posti sugli assi non focali.

G. Scorza.

280*. Se il triangolo ABC è inscritto in un cerchio di raggio R ed A', B', C' sono i punti in cui le bisettrici interne degli angoli A, B, C incontrano questo cerchio, posto $\triangle A'B'C' = S'$, esagono $AC'BA'CB' = S$ e indicando con $2p$ ed α, β, γ il perimetro e gli angoli del triangolo ABC, dimostrare che

$$1^0 \quad S' = \frac{Rp}{2}, \qquad 2^0 \quad S = 2S',$$

$$3^0 \quad AA' + BB' + CC' = 2R\left[4\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}\cos\frac{\gamma-\alpha}{4} - 1\right].$$

G. Candido.

281*. Due cerchi di centri O, O' si tagliano in A e B. Preso un punto P sul primo e condotte le secanti PA, PB a tagliare il secondo nuovamente in A', B', dimostrare che al muoversi di P sull'arco esterno del cerchio O, rimane costante il rapporto della potenza di P, rispetto ad O', all'area del quadrilatero $ABB'A'$.

G. Gallucci.

282*. Date due circonferenze concentriche di centro O ed un punto S, si tiri SO ad incontrare la circonferenza esterna in A e si congiunga un punto qualunque C di questa circonferenza con A. Condotta CO, che sega la circonferenza interna in B, poi SB, che incontra CA in M, trovare il luogo descritto dal punto M al variare di C sul cerchio.

A. Lugli.

283*. Un pallone sferico è veduto da due punti A e B posti l'uno al sud dell'altro rispetto al pallone, ed alla distanza a, sotto gli angoli 2α e $2\alpha'$. Conoscendo l'angolo d'elevazione β del centro del pallone nel punto A, determinare l'altezza di questo centro e il raggio del pallone.

A. Lugli.

284**. Di un quadrilatero $ABCD$ sono noti i lati $AB = a$, $BC = b$ e gli angoli A, B, C. Dimostrare che l'area del quadrilatero è espressa da

$$\Big\{ ab \Big[\operatorname{sen} B \operatorname{sen}(A+B+C) - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C - \operatorname{sen}(B+C) \operatorname{sen}(A+B) \Big] + a^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(B+C) + b^2 \operatorname{sen} C \operatorname{sen}(A+B) \Big\} : 2 \operatorname{sen}(A+B+C).$$

A. Lugli.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

GINO LORIA. — *Le Scienze esatte nell'antica Grecia* Libro II. Il periodo aureo della geometria greca (pp. 236 in 4^0, con 2 tav.). — Dalle Memorie della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Vol. XI. Serie II.

Con quei criteri medesimi che mi servirono di guida nel dar notizia del I libro del nuovo lavoro storico intrapreso dal Prof. G. Loria (*), mi accingo ora a far parola del II libro di recente apparso. Lasciando in disparte l'attrattiva dell'argomento, tante e così utili sono le cognizioni che anche i docenti delle scuole secondarie possono ricavare dalla lettura di quest'opera e in particolare del libro a cui si allude, mettendole in parte a profitto dell'insegnamento, che mi par doveroso darne pubblico avvertimento. E per citare il giudizio di persona assai autorevole, mi piace riportare quanto scrive il Professore G. Eneström nella sua *Bibliotheca mathematica* a proposito di questa storia delle *Scienze esatte nell'antica Grecia* (**): «... Bien que l'ouvrage de

(*) Cfr. *Periodico*. Vol. IX, 1894, p. 70.
(**) Nouvelle Série. 9, n. 2, 1895.

M. Loria ne contienne guère des pensées parfaitement nouvelles ni des faits inconnus jusqu'à présent (*), il est néanmoins d'un profond intérêt à cause de l'impartialité de l'auteur et grâce à ses lectures très étendues, qui lui ont permis d'y donner une foule de renseignements qu'on ne saurait trouver réunis dans aucun autre livre sur le même sujet. Nous osons dire qu'il y a peu de recherches originales sur la géométrie grecque dont M. Loria n'ait pas pris connaissance, et les rares indications inexactes ou incomplètes qu'on pourrait découvrir dans son ouvrage, semblent être sans aucune importance. . . . »

Ecco in qual modo l'A. incomincia la sua laboriosa trattazione — « Il secondo periodo della storia della geometria greca differisce sostanzialmente da quello che diede materia al I libro dell'opera presente, sia per la natura e l'entità dei documenti che ad esso si riferiscono, sia per la fisonomia intellettuale e le abitudini scientifiche dei personaggi che ad esso appartengono, sia finalmente per la dimora che ebbero coloro ai quali la nostra scienza è debitrice dei più rilevanti progressi che in allora compì » — ed ecco come fa risaltare il carattere assunto dagli studi matematici in questo periodo — « Mentre gli scienziati anteriori ad Euclide non erano di regola specialisti, ma risolvevano questioni di geometria come prendevano parte ad una disputa filosofica o facevano osservazioni di fenomeni naturali, da quelli di cui stiamo per occuparci (eccezion fatta per Eratostene e forse per lui solo) trae origine la numerosa serie di coloro che avvertirono essere la matematica capace e degna di assorbire da sola l'attività intellettuale di un'intera esistenza. Essi furono i fondatori della letteratura matematica dei Greci e debbono essere venerati siccome i nostri progenitori scientifici: onde il conoscerne le opere ha, non solo un valore storico, ma eziandio, in un certo senso, un valore pratico ».

Al Proemio seguono sei capitoli nei quali dopo uno schizzo brevissimo sulla vita di ciascun geometra, vengono esaminate le opere compiute da Euclide e dai pretesi suoi continuatori, da Archimede, da Eratostene, da Apollonio e dai geometri minori del periodo greco-alessandrino quali Nicomede, Diocle, Perseo, Zenodoro.

Viene in ultimo un'appendice nella quale dopo un cenno sull'importanza dell'opera dello Zeuthen, *L'Algebra geometrica degli antichi*, sono messe in luce le principali opere di restituzione o divinazione di scritti perduti degli antichi geometri del periodo greco-alessandrino, cioè la divinazione della Divisione delle figure di Euclide (da L. F. Ofterdinger e altri), quella dei Porismi (Fermat,

(*) Mi par giusto nondimeno osservare, in disaccordo a quest'asserzione, *non fosse altro*, che le indagini dell'A. sui poliedri archimedei hanno l'impronta di una spiccata originalità. Infatti il Prof. Loria non si limita a dar conto delle notizie su questi poliedri date da Pappo nel V libro della *Collezione matematica*, ma entra in una fine discussione nella quale giunge a concludere 1° che è assai probabile che ad Archimede fosse nota quella celebre relazione fra il numero dei vertici, delle facce e degli spigoli di un poliedro convesso, conosciuta sotto il nome d'Eulero, 2° che Archimede, com'era consuetudine degli antichi geometri, non può aver fatto a meno di assegnare la costruzione di tali poliedri, il che si deduce anche dal fatto che in realtà la costruzione di essi riferita da un antico anonimo scoliasta, è da presumere sia stata appresa dall'opera *Sui poliedri* che ad Archimede si attribuisce, 3° che ragionevolmente si deve ammettere in Archimede la conoscenza della legge di derivazione dei poliedri medesimi l'uno dall'altro, legge corrispondente a quel modo di derivazione dei cristalli insegnato ai geometri da Luca Paciolo nel 1509.

Simson e Chasles) (*), le divinazioni tentate da Maurolico e Viviani dei libri V e VI e la restituzione di Halley del libro VIII delle CONICHE di Apollonio, la divinazione dei due libri di Apollonio SULLE INSERZIONI (M. Ghetaldi, Huygens, Horsley) e infine la restituzione dei LUOGHI PIANI pure di Apollonio (Fermat, Schooten, Simson).

L'A. non si limita a dare semplice notizia delle diverse produzioni scientifiche dovute agli antichi geometri di cui ci è giunta memoria, ma, per quelle a noi pervenute, ne esamina minutamente il contenuto. E siccome egli traduce molte delle proposizioni ivi enunciate in linguaggio moderno, le raggruppa a seconda delle analogie che presentano e mostra, quand'è il caso, com'esse possano venir considerate quali scaturigini di teoriche assai più recenti, ciò che sta a dimostrare lo studio profondo da lui fatto sulle opere originali, così il lavoro del prof. Loria riuscirà senza dubbio assai utile a coloro che volessero fare sulle medesime delle indagini anche semplicemente superficiali. Così a mo' di esempio troviamo un esteso riassunto del contenuto dei libri VII, VIII e IX (aritmetica razionale) e del libro X (quantità irrazionali risultanti dalla risoluzione di equazioni biquadratiche) degli *Elementi*, contenuto che oggidì è probabilmente a molti sconosciuto.

Gli sviluppi teoretici sulle cose esposte sono numerosi, citeremo i seguenti che hanno maggiore attinenza al medio insegnamento. Una discussione sui *numeri perfetti* (a proposito della costruzione di questi numeri esposta nella propos. 36ª del libro IX degli *Elementi*), una illustrazione analitica molto estesa, informata alle notazioni dell'algebra moderna, delle proposizioni del X libro e la dimostrazione di due proposizioni del libro XII, all'intento di porre in luce il procedimento logico seguito dagli antichi in quelle quistioni in cui si presenta l'idea d'infinito - la deduzione rapida e completa delle espressioni dei lati, delle superficie, dei volumi e del raggio del circolo circoscritto ad ogni faccia dei poliedri regolari convessi in funzione del diametro della sfera circoscritta, e la dimostrazione di un teorema corrispondente alla 94ª prop. dei *Dati*, altra opera d'Euclide.

Relativamente alle opere d'Archimede troviamo esposta la determinazione dell'area del segmento parabolico — la deduzione della superficie e del volume della sfera non che dell'area del settore di spirale — un'ampia discussione del procedimento che ha servito alla valutazione approssimata del rapporto della circonferenza al diametro — la costruzione dei 13 poliedri archimedei e la derivazione dell'uno dall'altro — e la dimostrazione del teorema, riferentesi alla costruzione di una tangente alla spirale, che segue: « Se si conduce la tangente nell'estremo della prima spira della curva e dal punto origine della spirale si conduce la perpendicolare alla posizione iniziale della retta mobile, questa segherà la tangente in un punto la cui distanza dall'origine della spirale è eguale alla periferia del primo circolo ».

(*) Un lavoro sui porismi d'Euclide che non trovo citato dal prof. Loria, eppure merita considerazione e non sarebbe da passare sotto silenzio, è il seguente: *Settantacinque porismi tratti quasi tutti dall'opera del Chasles intitolata « Les trois Livres des porismes d'Euclide etc. » e dimostrati la maggior parte con metodo che, dietro certe considerazioni, sembra probabile essere stato usato da Euclide*. Memoria del prof. D. Marianini (Soc. ital. delle Scienze, tomo II, serie 2ª, 1866).

Finalmente sono sviluppate le risoluzioni del problema di costruire due medie in proporzione continua fra due date rette, che conduce alla duplicazione del cubo, quali furono esposte da Eratostene (praticamente effettuabile coll'aiuto di uno strumento da Pappo chiamato *mesolabio*) — da Nicomede (col mezzo della *concoide*) — da Diocle (col mezzo della *cissoide*). — Nè manca la risoluzione, probabilmente dovuta a Nicomede, del problema della trisezione dell'angolo servendosi della *concoide*.

A compimento di questa notizia e come sintesi del contenuto del libro in discorso, crediamo opportuno di riportare la seguente parte dell'epilogo. « Il pensiero geometrico, risvegliato negli Ellèni da Talete all'albeggiare della civiltà, trapassa da Mileto nella Magna Grecia, ove si occulta e feconda nei conciliaboli dei Pitagorici, risorge alla libera luce in Atene con la scuola di Platone, si propaga al di fuori per opera di Eudosso e de'suoi discepoli, si associa e corrobora con lo sviluppo della filosofia, e giunge finalmente alla sua massima grandezza con gli scienziati che vissero all'ombra del trono dei Faraoni o con coloro che da questi scienziati ricevettero l'istruzione od almeno lo stimolo all'investigazione delle verità matematiche.

Al modo istesso che la filosofia greca nel suo periodo di più abbagliante splendore trovò in Socrate, Platone ed Aristotele i suoi più eminenti rappresentanti, così nel periodo aureo della geometria greca spiccano giganteggiando Euclide, Archimede ed Apollonio. Per opera del primo di questi geometri il mondo civile arriva in possesso di una raccolta sapientemente ordinata delle proprietà più essenziali dell'estensione figurata, raccolta che per lungo volgere di secoli fu giudicata come un codice d'insuperabile valore e che tuttora impone l'ammirazione ed il rispetto anche a coloro che non ne accettano ciecamente le disposizioni ed i precetti. Il secondo — capo-stipite dei geometri italiani, organizzatore della geometria metrica superiore, precursore di Leibniz e Newton — si palesa di così meravigliosa fecondità nell'immaginare degli espedienti per risolvere, evitando qualunque applicazione del concetto d'infinito, una pleiade di questioni che oggi si riguardano come di stretta pertinenza del calcolo infinitesimale, che lo studio di essi riempie oggi ancora di stupore e induce melanconicamente a domandarsi se l'invenzione dei metodi generali che tanto affaticò gli scienziati moderni non abbia per avventura inaridito la fonte naturale degli espedienti ingegnosi. Meno spontanea sorge forse l'ammirazione in chi oggidì mediti sulle opere di Apollonio, perchè noi siamo così immedesimati negli odierni procedimenti d'indagine, solleciti e generali, che ci riesce malagevole il misurare quale ingente somma di lavoro esigesse il giungere al vero senza invocarne l'aiuto; e con fatica riusciamo a schermirci da un senso di sorpresa che indugia gli entusiasmi; ma ove si pervenga a ciò si è indotti a giustificare pienamente coloro che giudicano Apollonio la più grande mente geometrica che il mondo abbia prodotto prima di Steiner.

Gli sforzi coordinati di questi tre celebri matematici e dei loro immediati discepoli assicurarono delle basi incrollabili a tutto l'edificio geometrico, prepararono il terreno al calcolo infinitesimale, aumentarono a dismisura la sfera di influenza della geometria col condurre sotto il suo dominio delle nuove e interessantissime forme geometriche; essi guidarono a svariate soluzioni dei famosi problemi della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo ed insegnarono a contemplare la questione della quadratura del circolo dall'unico punto di vista che — date le cognizioni algebriche dell'epoca — allora ne permettesse una soluzione; e gettarono i fondamenti tanto dello studio geometrico dei massimi e minimi, quanto della dottrina degli isoperimetri. Da ultimo gli scienziati prelodati, col somministrare i più importanti elementi della collezione conosciuta sotto il nome di *luogo analitico*, cercarono di spianare la via agli investigatori avvenire e di fare in modo che lo spirito d'indagine geometrica non si spegnesse con essi. Ciò non ostante, scomparsi questi illustri campioni, per un complesso di ragioni intrinseche ed estrinseche che ci sforzeremo di mettere in chiaro più innanzi, la geometria greca decade poi definitivamente scompare. »

A. Lugli.

ALFREDO CAPELLI. — *Lezioni di Algebra complementare.* — Napoli, 1895. Edit. Pellerano. — Prezzo: L. 8.

Gli studiosi delle scienze matematiche devono senza dubbio compiacersi del risveglio scientifico che si va accentuando in questi ultimi anni nelle nostre Università dal punto di vista della produzione didattica e per opera di una schiera di giovani intelligenti che all'amore per la scienza ed alla dottrina accoppiano il desiderio di istruire la gioventù.

Ultimo fra i lavori di questo genere, in ordine cronologico, è quello del Prof. Capelli che qui ci proponiamo di esaminare nelle sue linee generali come opera scolastica.

È noto che il Capelli ha collaborato col Prof. G. Garbieri nella pubblicazione del primo volume di *Analisi Algebrica* edito a Padova nell'85 e rimasto incompleto, per motivi che non ci è facile di indagare; ora lo stesso autore pubblicando le sue *Lezioni di Algebra complementare* si è proposto, seguendo evidentemente lo schema del lavoro precedente, di renderlo completo e di ridurlo al tempo stesso alle giuste proporzioni di un libro scolastico. Diciamo che l'autore ha seguito il piano stesso dell'opera, nella quale aveva antecedentemente collaborato, perchè alcuni capitoli, come quelli sugli irrazionali, sulle successioni di numeri, sulle operazioni coi numeri complessi, sull'analisi combinatoria, sulle sostituzioni, sulla divisibilità delle funzioni intere, sono quasi fedelmente riportati, ma in una scala ridotta, nel nuovo testo. E diciamo anche che le intenzioni dell'autore erano quelle di offrire alla gioventù un buon testo su tale materia, poichè tale è la convinzione che nasce in chi esamina attentamente i dieci capitoli in cui è divisa l'opera. Ognuno di questi capitoli è suddiviso in paragrafi, ciascuno dei quali breve e conciso, porta il suo titolo; la mente del lettore ha quindi campo di riposare dopo lo studio di poche pagine e di riordinare con facilità e con profitto le idee apprese.

Un'altra ragione per cui crediamo che l'opera del Capelli sia veramente scolastica, sta nella ricca serie di note aggiunte quasi ad ogni paragrafo; gli esercizi proposti in queste Note sono accessibili all'intelligenza degli studenti e quando potrebbero presentare qualche difficoltà, essa è subito appianata dall'autore stesso con brevi ma chiare considerazioni. Le applicazioni sono varie ed alcune interessanti riguardano problemi di geometria o di meccanica, e servono quindi di utile complemento alle teorie svolte.

In tutta quanta l'opera è degna di lode la chiarezza, la sobrietà ed in alcuni punti anche l'originalità delle teorie introdotte; nuoce però all'effetto generale la poca cura colla quale fu stampata e l'*errata-corrige* alla fine del volume non registra che una piccola parte degli errori disseminati nel testo. Un tale difetto scomparirà nelle successive edizioni, che di cuore auguriamo all'autore.

Esaminiamo ora rapidamente i diversi capitoli e notiamo le nostre impressioni e le nostre divergenze dall'autore.

Stabilita assai opportunamente nella introduzione la classificazione delle funzioni in algebriche e trascendenti, vi si traccia il piano dell'opera e si accenna ai problemi fondamentali che in essa si dovranno risolvere sulle funzioni algebriche.

Nel primo capitolo sugli irrazionali, ci pare che converrebbe far cenno del postulato « esiste un solo irrazionale definito da due classi convergenti ». Nel parag. 3 (*limite di una successione*) assai di spesso si tralascia tanto nella dicitura quanto nella segnatura la parola e il segno del *valore assoluto della differenza*. Chiara ed originale è la dimostrazione dell'esistenza del limite a cui tende una successione di numeri crescenti continuamente ma non indefinitamente, dedotta dal criterio generale di convergenza di una successione di numeri.

Nei parag. 6 e 7 sulle serie reali e a termini positivi si usa qualche volta (vedi pag. 51) della proprietà associativa di una somma infinita senza averne dimostrata la possibilità.

Nel capitolo 2° (Analisi combinatoria) è notevole il paragrafo sulle sostituzioni, nel quale con chiarezza e semplicità sono esposti i fondamenti di tale teoria, i teoremi cardinali sull'ordine di una sostituzione, sull'ordine di un gruppo di sostituzioni e di un sottogruppo. Nei parag. 4 e 6 si dimostrano gli sviluppi di Taylor per le funzioni intere di una o più variabili mediante le potenze del binomio; è notevole in questi sviluppi l'introduzione del calcolo simbolico assai acconcio a rendere uniforme il procedimento e compendiosa la scrittura.

Nel capitolo 3° sono esposti assai sobriamente, ma con chiarezza esemplare, gli elementi della teoria dei determinanti e la loro applicazione alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Forse la teoria dei determinanti meritava in qualche punto uno sviluppo maggiore; ci pare ad esempio che la conoscenza dello sviluppo di un determinante, secondo i minori di una sua matrice, avrebbe resa più facile l'intelligenza del teorema sul prodotto di due determinanti. L'autore non ha creduto di dimostrare questo teorema nel capitolo 3° ma lo ha rimandato al parag. 2, capit. 7° dove espone la teoria delle trasformazioni lineari di un sistema di variabili. A noi sarebbe parso più opportuno averlo incorporato nel capitolo generale sui determinanti, molto più se consideriamo che di un tale sviluppo l'autore fa uso anticipato nel parag. 7, cap. 5°, dove esprime il discriminante di una equazione algebrica sotto forma di determinante. Lo sviluppo del determinante di Wandermond, che serve all'autore per dimostrare che una funzione intera di grado n ad una variabile non può annullarsi per più di n valori distinti di essa, ci pare alquanto prolisso.

Nel cap. 4° (operazioni sui numeri complessi) i primi parag. hanno forse uno sviluppo eccessivo trattandosi di considerazioni assai semplici; nel parag. 5 di questo capit. (serie a termini complessi) l'autore, volendo giustificare la definizione di e^x per x complesso come limite della serie convergente $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots$ dimostra la relazione fondamentale $e^x e^y = e^{x+y}$ mediante il prodotto di due serie convergenti senza aver prima fatto parola su tale delicato argomento; solo in una nota alla fine del parag. ne dà un cenno troppo sommario ed incompleto. Ingegnosa ed elegante è invece la deduzione delle formole di Eulero dalla relazione

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{ib}{n}\right)^n = e^{ib}$$

ricercando il limite del primo membro.

Nel parag. 7 si considerano le serie che procedono secondo le potenze intere di una variabile complessa e si stabiliscono chiaramente le proprietà della loro convergenza incondizionata ed uniforme per ogni valore interno al cerchio di convergenza; alcune di queste dimostrazioni sono state ulteriormente semplificate con una pagina inviata più tardi in aggiunta.

Nel capit. 5° (radici di una equazione di grado n) ci sembrano superflui i teoremi sulle derivate della somma e del prodotto; nel parag. 2 si ammette come postulato l'esistenza di un valore della variabile che rende minimo il modulo della funzione intera $f(x)$ e con ciò si dimostra, come Cauchy, l'esistenza di una radice della $f(x) = 0$. Ma poi nel parag. 3 del capitolo stesso, il postulato precedentemente ammesso, è rigorosamente dimostrato. Ora benchè l'autore dichiari che il parag. 3 può essere ommesso da chi legge la prima volta la sua opera, pure dichiariamo francamente che la dimostrazione di un postulato, che si è creduto poco prima di ammettere, non ci pare corretto; ci sembra che se nel parag. sui limiti (capit. 1°) si fosse aggiunta qualche nozione sui *limiti inferiori e superiori* di una variabile, e se nel 1° parag. del capit. 5° si fosse pure aggiunta qualche proprietà delle funzioni continue, la dimostrazione dell'esistenza di una radice di $f(x) = 0$ si poteva esporre rigorosamente senza ammettere nessun postulato.

Il parag. 8 del capit. 5° è assai notevole ed importante; in esso si mostra, mediante la teoria delle funzioni simmetriche delle radici, come una espressione *radico-razionale* (ottenuta operando su quantità date mediante le quattro operazioni e l'estrazione di radice ad indice intero e positivo) si possa identicamente trasformare in un'altra, nella quale nessun radicale si trovi mai sottoposto ad alcun segno di divisione; si fa poi l'applicazione all'eliminazione dei radicali da una equazione $X = 0$ dove X è una espressione radicale. Il parag. 9 del capitolo non ci pare bene in armonia coi precedenti parag. ed anche in esso l'uso del prodotto di serie convergenti non è sufficientemente giustificato.

Il capit. 6° (teoria della divisibilità delle funzioni intere e dell'eliminazione) è modellato al pari dei primi quattro sui capitoli omologhi dell'opera citata (Capelli e Garbieri). Forse sarebbe stato più opportuno premettere il concetto di *campo di razionalità* a tutte le considerazioni svolte in questo capitolo allo scopo di far meglio risaltare l'importanza dell'algoritmo del *M. C. D.* delle funzioni intere e il concetto di funzioni prime fra loro.

Nel parag. 6 di questo capit. (risultante di due equazioni) è notevole la dimostrazione che il determinante dei coefficienti ottenuto col metodo dialitico di Sylvester, eguagliato a zero, esprime la condizione sufficiente perchè le due equazioni abbiano una radice in comune; tale dimostrazione è fondata su una relazione identica alla quale soddisfano i primi membri delle equazioni date e la loro risultante. Interessanti sono le note a questo parag. nelle quali si espongono altri metodi per la ricerca della risultante di due equazioni (metodo delle funzioni simmetriche e metodo di Eulero).

Nel parag. 7 (risoluzione di un sistema di due equazioni con due incognite) è assai elegante il metodo con cui si determina il grado della risultante ed interessanti le applicazioni geometriche alle intersezioni di due coniche e di due cerchi.

Il parag. 8 sull'eliminazione ci sembra fra i più rimarchevoli; il grado della risultante fra tre equazioni con tre incognite a coefficienti indeterminati, è trovato con un metodo ingegnoso e generale che consiste nel considerare dapprima il caso speciale in cui ciascuno dei primi membri delle tre equazioni sia un prodotto di funzioni lineari a tre incognite a coefficienti liberi. Le note aggiunte a questo parag. sono assai pregevoli; in esse si espongono alcuni metodi per determinare la risultante di più equazioni omogenee con altrettante incognite fondate sul Jacobiano dei primi membri e sulle funzioni simmetriche delle radici.

Nel cap. 7° (trasformazione delle equazioni e risoluzione delle equazioni dei primi quattro gradi) è stabilito nel primo paragrafo assai opportunamente e chiaramente la condizione a cui devono soddisfare i coefficienti di una trasformazione lineare di variabili, affinchè i due sistemi di variabili si corrispondano sempre univocamente senza escludere i valori infiniti di alcune di esse.

Assai interessanti le note al secondo paragrafo, dove si applicano le trasformazioni lineari alla proiettività fra due spazi omogenei ed alla omologia, nonchè allo studio delle proprietà principali delle sostituzioni ortogonali.

Belle le applicazioni al paragrafo 7 (risoluzione generale delle equazioni del 4° grado); vi si studiano i rapporti anarmonici a cui danno luogo le quattro radici dell'equazione del 4° grado, le condizioni affinchè tali rapporti diventino equianarmonici od armonici, ed infine si determina una equazione del 6° grado a cui devono soddisfare i sei rapporti anarmonici formati colle quattro radici dell'equazione del 4° grado; da questa equazione si deduce poi l'invariante assoluto della biquadratica.

Nel paragrafo 8 assai chiaramente si deducono, mediante trasformazione razionale delle radici, tanto la risultante di due equazioni espresse mediante le funzioni simmetriche delle radici, quanto le condizioni affinchè due equazioni abbiano radici in comune.

Nei paragrafi 9 e 10 assai opportunamente si espone il metodo escogitato da LAGRANGE per risolvere le equazioni del 3° e del 4° grado, e la trasformazione di JERARD col mezzo della quale è possibile, colla risoluzione di un'equazione del 3° o del 4° grado, far scomparire da un'equazione il secondo, terzo e quarto termine, oppure il secondo, terzo e quinto.

Nella nota al paragr. 10 si dimostra che una forma quadratica ad h variabili con coefficienti reali, si può sempre decomporre in una somma algebrica di quadrati e in modo assai semplice ed elegante vi si dimostra la legge di inerzia, secondo la quale, qualunque sia la decomposizione della forma data in forme indipendenti, è sempre costante il numero delle forme positive e quello delle negative.

Il capit. 8° (principii della teoria degli irrazionali algebrici) è senza dubbio il più originale dell'opera. Per la prima volta in un lavoro destinato alle scuole compare in modo elementare una tale teoria. Stabiliti i teoremi fondamentali sulle equazioni irriducibili in un dato campo, e determinata la condizione affinchè la $X^p - A = 0$ (con p numero primo) sia riducibile nel campo cui appartiene A, si giunge nel parag. 3 a questa importante conclusione che « se X è un'espressione radicale relativa ad un certo campo C costante e variabile e $F(X) = 0$ è l'equazione algebrica alla quale essa soddisfa, si può sempre, senza introdurre nuovi radicali, dare ad X una forma ridotta tale, che tutti i radicali in essa contenuti appartengano al campo di razionalità $(\Omega, X_1 X_2 \ldots X_n)$, essendo le X_i radici di $F(X) = 0$, ed Ω una radice primitiva dell'unità il cui indice è il prodotto dei numeri primi distinti che si presentano come indici dei radicali ».

Di questa forma ridotta l'autore fa una bella applicazione nel paragr. 4 alla dimostrazione della presenza dei radicali quadratici e cubici nelle formole di risoluzione delle equazioni generali il cui grado sia superiore a 2; e nel parag. 6 alla dimostrazione dell'impossibilità della risoluzione per radicali delle equazioni generali di grado superiore al quarto. Nel parag. 5 l'autore applica brillantemente la teoria esposta alla dimostrazione dell'impossibilità di trisecare un angolo qualunque coll'uso della riga e del compasso; ci piace che un argomento così classico figuri finalmente in un testo di analisi algebrica e vi figuri così degnamente per la semplicità e per la chiarezza.

Nei cap. 9° e 10° si studiano le proprietà generali delle equazioni a coefficienti reali. Di notevole troviamo i paragrafi 3 e 4 del cap. 10°, dove si espongono i principii del calcolo delle differenze finite; in essi si mostra assai opportunamente l'analogia di questo calcolo con quello ordinario riguardo agli sviluppi di potenze e alle regole di derivazione, e si fanno applicazioni alla determinazione approssimata delle radici di una equazione.

Non abbiamo inteso con questa rapida rassegna di fornire allo studioso indicazioni complete su tutti gli argomenti trattati nell'opera del CAPELLI, sapendosi già a priori entro quali limiti deve contenersi un corso di algebra complementare. Le osservazioni che ci siamo permessi di fare, sono in gran parte di natura formale e quindi non scemano il pregio dell'opera. Lo ripetiamo e con vero compiacimento: l'opera da noi esaminata ci sembra, fra le analoghe pubblicate in questi ultimi anni, una di quelle che raccolgono i maggiori pregi come lavoro destinato alle scuole superiori; il volume del CAPELLI, chiaro, sobrio, ordinato, è da annoverarsi fra quelli fortunati e tanto rari in Italia, che si leggono senza difficoltà, con vero piacere e con molto profitto.

Venezia, 10 aprile 1895.

F. PANIZZA.

G. VERONESE. — *Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure* (Atti del R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti. Tomo VI - serie VII - 1894-95).

Il chiarissimo Prof. VERONESE, confermando quanto aveva già dichiarato nei suoi *Fondamenti di Geometria*, che cioè la geometria euclidea può essere dedotta tutta dai postulati da lui ammessi, tra i quali non ne figura uno speciale per l'equivalenza, ha ultimamente dimostrato, nella nota suddetta, che *una figura finita non è equivalente ad una sua parte*, proposizione intorno a cui si è tanto discusso in questi ultimi tempi. L'A., ammettendola per i soli segmenti rettilinei, la estende alle altre *grandezze principali* (settori angolari, poligoni rettilinei, poliedri a faccie piane), e a tutte le figure in modo « geometrico ed elementare ».

L'importante lavoro, relativamente breve, è diviso in quattro parti, precedute da un po' d'introduzione. In questa l'A. accenna ai recenti tentativi del RÉTHY, dello SCHUR, del RAUSENBERGER e d'altri per togliere dalla geometria il postulato dell'equivalenza, e, dopo aver richiamato gli *Elementi di geometria* del DE PAOLIS, in cui, benchè venga ammesso il postulato, sono dimostrate parecchie proposizioni indipendentemente da esso, egli afferma che fu appunto partendo dalla costruzione di un triangolo equivalente ad un altro essendo data l'altezza ed un angolo adiacente alla base eguale ad un angolo dato, e da quella di un tetraedro equivalente ad un altro che abbia la stessa altezza e base equivalente, che gli riuscì di ottenere una dimostrazione completa della proposizione. La breve introduzione termina con alcune definizioni (parte di un segmento, parte poligonale di un poligono, parte poliedrica di un poliedro), e con quella fondamentale di figure equivalenti. Per figure equivalenti l'A. intende *quelle che possono essere divise in parti rispettivamente una ad una uguali* (*non escluso che il loro numero sia anche infinito*) *o sono determinate da somme di parti rispettivamente uguali*.

Nella prima parte l'A., dopo aver fatto osservare che si può indifferentemente ammettere che un segmento non sia equivalente o non sia uguale ad una sua parte, perchè ciascuna delle due proprietà è conseguenza dell'altra, estende la proposizione agli angoli. Ecco come:

« Sieno (ab), (ac) due settori angolari eguali nello stesso verso di un me-
« desimo fascio di raggi di centro O, e si considerino due punti B, C tali che
« $OB \equiv OC$. La retta BC incontra la retta a in un punto A esterno al seg-
« mento BC, essendo ad es. b interno al settore (ac). I triangoli AOB, AOC
« dovrebbero essere uguali per avere due lati e il settore angolare compreso
« uguale, e perciò sarebbe $AB \equiv AC$, il che è assurdo ».

La retta BC può non incontrare la retta a; quindi, se non erro, la dimostrazione dovrebbe essere completata.

Nella seconda parte del lavoro, viene dimostrata la proprietà per i poligoni rettilinei. Il Prof. VERONESE aveva dichiarato nei *Fondamenti* (*) che la retta può essere assunta come elemento fondamentale di costruzione delle figure, e di *riferimento delle grandezze geometriche*. Seguendo questa ultima idea, egli stabilisce appunto una corrispondenza tra i poligoni e i segmenti rettilinei in guisa da ottenere che, qualunque sia la divisione di un poligono in parti poligonali, la somma dei segmenti corrispondenti alle parti sia sempre uguale al segmento corrispondente al poligono. Il più difficile era di fissare una tale corrispondenza; ed ecco come il chiaro A. riesce all'intento. Applicata ad un triangolo qualunque l'ordinaria costruzione per trasformarlo in altro equivalente di data altezza e avente con esso un angolo in comune, assume come corrispondente al triangolo dato la base del nuovo rispetto all'altezza data, e dimostra che, se il triangolo dato è diviso in parti da rette passanti per uno qualunque dei vertici, la somma dei segmenti che, colla stessa costruzione, corrispondono alle parti è uguale al segmento corrispondente all'intiero triangolo. Preso poi un poligono qualunque e fissata in esso una decomposizione in triangoli, egli assume come corrispondente al poligono il segmento somma di quelli che corrispondono ai triangoli in cui esso è stato diviso, e perviene a dimostrare che, qualunque sia la decomposizione di un poligono in parti poligonali, la somma dei segmenti ad esse corrispondenti, secondo la suddetta costruzione, è sempre il segmento corrispondente al poligono. Da questo risultato, coll'aiuto del postulato ammesso pei segmenti, passa facilmente, colla riduzione all'assurdo, alla proposizione: *un poligono rettilineo non è equivalente ad una sua parte poligonale.*

Per stabilire, nel principio, la corrispondenza tra i triangoli e i segmenti, vien premessa la proprietà: due triangoli della medesima base e della stessa altezza sono equivalenti, per la cui dimostrazione, senza far uso del postulato, si può ad es., come l'A. stesso indica, seguire il DE PAOLIS (*Elem. di geom.*, § 356, 357). Inoltre l'A. si basa su qualche proprietà della teoria delle proporzioni; ma in alcune note del suo lavoro, egli accenna un altro metodo che permette di evitare questa teoria.

Analogo al precedente è il procedimento seguito dall'A., nella terza parte del lavoro, per estendere la proprietà ai poliedri a facce piane. Applicando ad un tetraedro la costruzione per trasformarlo in altro equivalente di data altezza e avente col dato un triedro in comune, egli ne deduce che ad un tetraedro si può far corrispondere un segmento per modo che se il tetraedro è diviso in parti con piani passanti per uno qualunque dei suoi spigoli, la somma dei segmenti corrispondenti alle parti è uguale a quello corrispondente all'intero tetraedro. Preso poi un poliedro qualunque e fissata in esso una scomposizione in tetraedri, assume come corrispondente al poliedro la somma dei segmenti corrispondenti ai tetraedri in cui esso è stato diviso, e prova che qualunque sia la divisione del poliedro in parti poliedriche, la somma dei segmenti che a queste corrispon-

(*) *Fond. di geom.* del Prof. G. VERONESE. — Introd. pag. XXXVII.

dono è uguale al segmento corrispondente al poliedro. Da questo risultato, come pel poligono, deduce che *un poliedro a facce piane non è equivalente ad una sua parte poliedrica.*

Per giungere a questi risultati, l'A. premette la proposizione: due tetraedri se hanno basi equivalenti e altezze uguali sono equivalenti, per la cui dimostrazione, indipendentemente dal postulato, si può ancora seguire il De Paolis (*Elem. di geom.*, §§ 369, 370, 371, 396). L'A. fa necessariamente osservare in proposito quanto segue: « Un tetraedro possiamo ritenerlo determinato in modo unico dalla serie di prismi triangolari interni iscritti in esso e colle facce triangolari parallele alla base, e quindi due tetraedri, secondo la data definizione, sono equivalenti se sono divisibili in prismi rispettivamente equivalenti, il che avviene appunto, come d'ordinario si dimostra, quando essi hanno la stessa base e la stessa altezza, senza far uso però del concetto di limite ».

Stabilita così la proposizione fondamentale per le grandezze principali, l'A., nella quarta parte del lavoro, perviene a dimostrarla per tutte le figure limiti di grandezze principali, o di altre figure che alla loro volta sieno limiti di grandezze principali, e perciò per ogni linea, superficie o solido intuitivo finito.

Il Prof. Veronese viene indubbiamente col suo lavoro a portare una gran luce sopra un delicatissimo argomento. La sua dimostrazione elementare della proposizione fondamentale dell'equivalenza sarà introdotta senz'altro nell'insegnamento secondario. Forse, avuto anche riguardo alle figure piuttosto complicate che ne risultano, qualche insegnante troverà un po' lunga e delicata la parte della dimostrazione in cui viene fissata la corrispondenza fra un triangolo (tetraedro) e un segmento, per modo che la somma dei segmenti corrispondenti alle parti triangolari (tetraedriche) sia uguale al segmento che corrisponde al triangolo (tetraedro). Ma per questa parte si potrebbe tentare una semplificazione: vedere, cioè, se per fissare una qualsiasi corrispondenza fra i triangoli (tetraedri) e i segmenti in guisa da giungere ai risultati cui perviene il Professor Veronese, si possa fare a meno di qualunque nozione di equivalenza. Se, per esempio, s'inscrivesse un segmento *costante* α tra i lati di ciascuno degli angoli di un triangolo (o di ciascuno degli angoli delle facce di un tetraedro) parallelamente al lato opposto, e si assumessero come corrispondenti alle parti in cui il triangolo (tetraedro) rimane diviso da rette (piani) passanti per uno qualunque dei suoi vertici (spigoli), i segmenti determinati da quelle rette (piani) sul segmento inscritto; e preso un poligono (poliedro) e fissata in esso una composizione in triangoli (tetraedri), si assumesse come corrispondente al poligono (poliedro) la somma di tanti segmenti uguali ad α quanti sono i triangoli (tetraedri) in cui esso è stato diviso, non si potrebbe poi per tutto il resto, se io non erro, seguire la via tanto bene tracciata dal Prof. Veronese? Non basta che la corrispondenza sia tale che la somma dei segmenti corrispondenti alle parti sia uguale al segmento corrispondente all'intera figura?

Fermo, maggio 1895.

Corrado Ciamberlini.

Finita la Redazione il dì 10 giugno 1895.

SULLA TEORIA DELLA EQUIVALENZA GEOMETRICA

Nota del Prof. G. LAZZERI

(*Continuazione e fine: V. pag. 93*).

III. — Equivalenza dei poligoni sferici

16. Teorema. — *Se un poligono piano o sferico è scomposto in più poligoni, il numero di questi, aumentato del numero dei vertici comuni o non comuni a più poligoni parziali, supera di uno il numero dei lati di questi poligoni.*

Indichiamo con p il numero delle parti in cui è scomposto un dato poligono, con v ed l il numero dei vertici e dei lati comuni o non comuni a queste parti; si deve dimostrare l'egualianza

$$v + p - l = 1.$$

Infatti, se dal poligono dato sopprimiamo una delle sue parti che abbia con esso in comune n lati consecutivi, e perciò anche $n - 1$ vertici, e indi chiamo con p', v', l' i numeri di poligoni, vertici e lati rimanenti, si ha

$$p' = p - 1, \qquad v' = v - (n - 1), \qquad l' = l - n,$$

e quindi

$$v' + p' - l' = v + p - l.$$

La differenza $v + p - l$ dunque non cambia, sopprimendo successivamente una ad una le parti del poligono dato. Quando è rimasto un solo poligono parziale di n lati, si ha $v = n$, $l = n$ $p = 1$, e perciò si ha sempre

$$v + p - l = 1.$$

Se ne deduce

$$v - 1 = l - p.$$

17. Teorema. — *Se un poligono sferico è scomposto in più poligoni sferici, il suo eccesso sferico è eguale alla somma degli eccessi sferici delle sue parti.*

Indichiamo con $m_1, m_2, \ldots, m_p$ i numeri dei lati dei p poligoni, in cui è scomposto un poligono sferico dato, con $S_1, S_2, \ldots, S_p$ le somme degli angoli sferici di questi poligoni, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ i loro eccessi sferici, con π un angolo sferico piatto. Si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\equiv S_1 - (m_1 - 2)\pi \\ \varepsilon_2 &\equiv S_2 - (m_2 - 2)\pi \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_p &\equiv S_p - (m_p - 2)\pi, \end{aligned}$$

e sommando queste uguaglianze

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i - \sum_1^p m_i\pi + 2p\pi.$$

Indichiamo ora con l_1 il numero dei lati che fanno parte del contorno dell'intero poligono, con l_2 quella dei lati interni al medesimo. Siccome ciascuno di questi ultimi lati è comune a due poligoni parziali, mentre ciascuno dei primi appartiene ad un solo di questi poligoni, si ha

$$\sum_1^p m_i = l_1 + 2l_2.$$

e per conseguenza l'eguaglianza precedente diviene

$$\begin{aligned} \sum_1^p \varepsilon_i &\equiv \sum_1^p S_i - l_1\pi - 2l_2\pi + 2p\pi \\ &\equiv \sum_1^p S_i + l_1\pi - 2(l - p)\pi, \end{aligned}$$

essendo $l = l_1 + l_2$. Per il teorema precedente si ha pure

$$\sum_1^p \varepsilon_i \equiv \sum_1^p S_i + l_1\pi - 2(v-1)\pi.$$

Se ora sopprimiamo tutti gli l_2 lati interni all'intero poligono, per ogni vertice soppresso interno al poligono, $\sum_1^p S_i$ e $2(v-1)\pi$ diminuiscono ciascuno di 2π e $l_1\pi$ non cambia, mentre per ogni vertice soppresso, situato sul contorno ma non appartenente all'intero poligono, $\sum_1^p S_i$ e $l_1\pi$ diminuiscono ciascuno di π e $2(v-1)\pi$

di 2π, e quindi in ogni caso il secondo membro dell' eguaglianza precedente non cambia. Ma, così operando, $\sum_1^p S_i$ si riduce alla somma S degli angoli dell'intero poligono, v e l_1 divengono il numero n dei suoi vertici o dei suoi lati, onde si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_1^p \varepsilon_i &\equiv S + n\pi - 2(n-1)\pi \\ &\equiv S - (n-2)\pi \equiv \varepsilon,\end{aligned}$$

indicando con ε l'eccesso sferico dell'intero poligono.

Corollari. — 1° *Se due poligoni sferici sono equivalenti, i loro eccessi sferici sono eguali.*

Due poligoni sferici equivalenti si possono scomporre in parti rispettivamente eguali; e perciò i loro eccessi sferici sono eguali, perchè ambedue non sono altro che la somma degli eccessi sferici delle medesime parti; e questa somma è sempre lo stesso angolo sferico, qualunque sia l'ordine col quale sono riuniti gli eccessi sferici delle singole parti, perchè gli angoli sferici appartenenti ad una data superficie sferica costituiscono una classe di grandezze di prima specie (*G.* § 275).

2° *Se due poligoni sferici* P, P′ *sono scomposti in parti, in modo che* P *contenga parti eguali a tutte quelle di* P′ *insieme ad altre, l'eccesso sferico di* P *è maggiore di quello di* P′.

3° *Se due poligoni sferici si possono scomporre in parti rispettivamente eguali, non è possibile trovare un'altra scomposizione, per la quale uno di essi contenga tutte le parti dell'altro, insieme ad altre parti; e viceversa.*

Sieno P, P' due poligoni sferici, e supponiamo che esista una scomposizione, per la quale P sia equivalente a P', ed un'altra scomposizione, per la quale P contenga tutte le parti di P' insieme ad altre. Allora l' eccesso sferico di P dovrebbe essere contemporaneamente eguale e maggiore di quello di P'; e ciò è assurdo.

18. Teorema. — *Dato un triangolo sferico* ABC, *ed il suo opposto* A′B′C′ (fig. 11ª), *e condotti i circoli minori* c_1, c_2, *che passano l'uno per i punti* A, B, C′, *l'altro per i punti* A′, B′, C, *ed il circolo massimo* c *situato in un piano parallelo a quelli dei circoli* c_1, c_2, *ed equidistante da essi, l'eccesso sferico del triangolo*

ABC *è eguale all'angolo sferico, che ha per vertici* A, A′, *per un lato il semicircolo massimo* ABA′, *e che stacca sul circolo* c *un arco doppio di quello* MN *staccato sullo stesso circolo dall'angolo sferico* ACB.

Se facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare ai piani dei circoli c_1, c_2, c, finchè il punto B, scorrendo sul circolo c_1, prenda la posizione A, il punto A prende una posizione A_1 sul circolo c_1, e C e A' prendono delle posizioni C_1 e A'_1 sul circolo c_2, in modo che gli archi BA, AA_1, CC_1, $A'A'_1$, appartenenti ai circoli c_1 o c_2, sono eguali; il semicircolo massimo ABA' prende la posizione $A_1AA'_1$ in modo che l'arco EE_1 del circolo massimo c compreso fra questi due semicircoli massimi (cioè l'arco percorso dal punto E) sia eguale all'arco NN_1 dello stesso circolo c, compreso fra gli archi di circolo massimo BC, AC_1 (cioè all' arco percorso dal punto N).

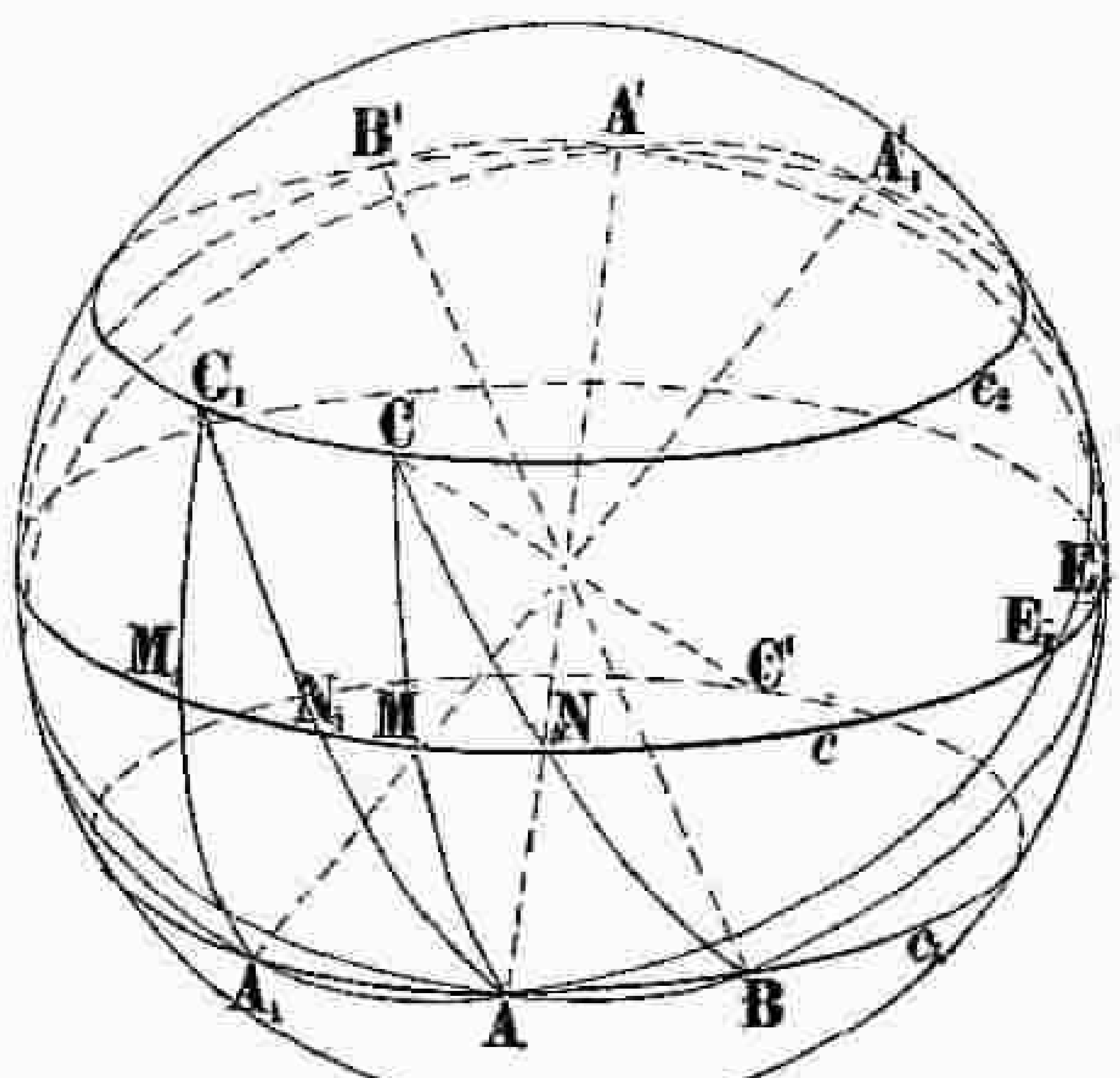


Fig. 11ª.

Conducendo anche l'arco di circolo massimo CC_1, si vede facilmente che il triangolo ABC si può sovrapporre al triangolo CC_1A, e per conseguenza l'arco MN si può sovrapporre all'arco MN_1. Ne segue che EE_1 eguale ad NN_1 è il doppio dell'arco MN. Inoltre si ha

$$\text{ang. } BCA \equiv CAC_1, \quad \text{ang. } ABC \equiv A_1AC_1,$$

e perciò l'angolo sferico, che ha per lati i semicircoli massimi AEA', AE_1A', è eguale alla somma degli angoli sferici del triangolo ABC, diminuita di un angolo sferico piatto, cioè è eguale all'eccesso sferico di questo angolo.

19. Teorema. — *Se c_1, c_2 sono due circoli minori eguali di una sfera, situati in piani paralleli ed equidistanti da quello di un circolo massimo c, tutti i triangoli sferici, che hanno due vertici comuni sul circolo c_1 ed il terzo vertice in un punto qualunque del circolo c_2, sono equivalenti.*

Siano ABC, ABC_1 due triangoli sferici, che abbiano due vertici A, B comuni sul circolo c_1 e i vertici C, C_1 rimanenti sul circolo c_2. Possono darsi tre casi, secondo che l'arco del circolo c_2 limitato dai due punti C, C_1 è minore, eguale o maggiore dell'arco del circolo c_1 limitato dai punti A, B.

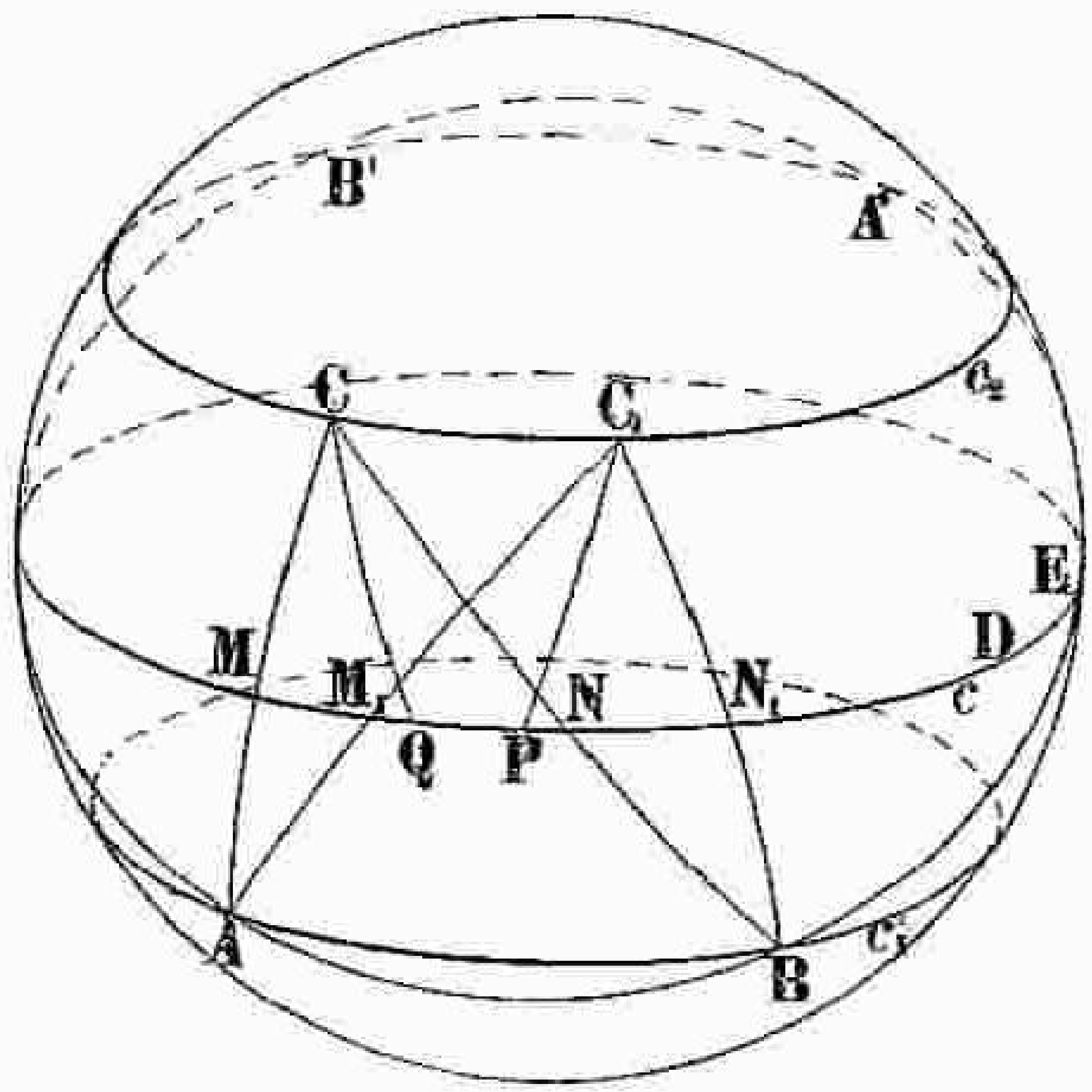


Fig. 12ª.

1° Sia (fig. 12ª) l'arco $CC_1 < AB$, e siano M, N, M_1, N_1 i punti d'incontro del circolo c coi lati AC, BC, AC_1, BC_1 dei due triangoli, ossia i punti di mezzo di questi archi. Facciamo rotare la sfera attorno al diametro perpendicolare al piano del circolo c, finchè il punto C prenda la posizione C_1; allora l'arco CM prende la posizione C_1P interna all'angolo ACB. Facciamo poi rotare la sfera attorno allo stesso diametro, finchè il punto C_1 prenda la posizione C; allora l'arco C_1N_1 prende la posizione CQ interna all'angolo ACB. Coll'uno o coll'altro di questi movimenti, i due triangoli CMQ, C_1PN_1 si portano a coincidere, e perciò sono eguali.

È facile allora vedere che si ha

$$CQ \equiv C_1N_1 \equiv N_1B, \quad CN \equiv NB, \quad QN \equiv NN_1,$$
$$C_1P \equiv CM \equiv MA, \quad C^1M_1 \equiv M_1A, \quad M_1P \equiv MM_1,$$

e per conseguenza

$$MN \equiv M_1N_1.$$

Ne segue

$$CQN \equiv BN_1N$$
$$AMM_1 \equiv C_1PM_1.$$

Inoltre si ha

$$CMQ \equiv C_1PN_1$$
$$AM_1NB \equiv AM_1NB.$$

Sommando queste quattro eguaglianze, si trova

$$ABC \equiv ABC_1.$$

2° Se l'arco $CC_1 \equiv AB$, è facile vedere che i due lati BC, AC_1 si tagliano per metà in un punto N del circolo c e che i due triangoli ANC, C_1NB sono eguali. Ne segue che i due triangoli ABC, ABC_1, che si ottengono sommando il triangolo ANB con quei due triangoli rispettivamente, sono equivalenti.

3° Se l'arco $CC_1 > AB$, si riporti sull'arco CC_1 l'arco AB tante volte quante è possibile. Se $D_1, D_2, \ldots D_n$ sono gli estremi di questi archi, in modo che sia

$$AB \equiv CD_1 \equiv D_1D_2 \equiv \ldots \equiv D_{n-1}D_n \overline{\overline{<}} D_nC_1,$$

per i due casi precedenti si ha

$$ABC \equiv ABD_1 \equiv ABD_2 \equiv \ldots \equiv ABD_n \equiv ABC_1,$$

e quindi

$$ABC \equiv ABC_1.$$

Si osservi che gli archi MN, M_1N_1 del circolo c interni agli angoli ACB, AC_1B sono eguali in tutti i tre casi; viceversa è facile vedere che, se sul circolo c si prende un arco $M_1N_1 \equiv MN$ (supponendo dato il triangolo ABC), i due archi AM_1, BN_1 s'incontrano in un punto C_1 del circolo c_2, e il triangolo ABC_1 è equivalente al triangolo ABC.

Supponendo che il triangolo ABC resti fisso, e che il vertice C_1 dell'altro triangolo ABC_1 prenda la posizione del punto A' opposto ad A, questo triangolo si riduce all'angolo sferico che ha per vertici i punti A, A', che ha per lato il semicircolo ABA', e che stacca sul circolo c un arco eguale ad MN, ossia esso si riduce alla metà dello eccesso sferico del triangolo ABC (V. § 16). Dunque il triangolo ABC è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.

Corollari. — 1° *Ogni triangolo sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

2° *Ogni poligono sferico è equivalente alla metà del suo eccesso sferico.*

20. Teorema. — *Dati due poligoni sferici* P *e* P', *è sempre possibile scomporli in un numero* finito *di parti; in modo che le parti di* P *sieno rispettivamente eguali a quelle di* P', *oppure in modo che* P *contenga le parti di* P' *insieme ad altre, oppure in modo che* P' *contenga le parti di* P *insieme ad altre. Quando si verifica uno di questi casi, non è possibile che esista una scomposizione per la quale si verifichi uno degli altri due.*

Costruiti gli eccessi sferici ε, ε' dei due poligoni P, P', si dovrà dare uno ed uno solo dei seguenti casi: $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, $\varepsilon > \varepsilon'$, $\varepsilon < \varepsilon'$, poichè gli angoli sferici sono grandezze di prima specie.

Se $\varepsilon \equiv \varepsilon'$, eseguendo contemporaneamente la scomposizione, per la quale l'angolo sferico ε si divide in un numero *finito* di parti rispettivamente eguali a quelle del poligono P, e quella per la quale la stessa ε si divide in un numero *finito* di parti eguali a quelle del poligono P', otterremo una terza scomposizione di ε in parti, che sono le parti provenienti da ciascuna delle due scomposizioni suddette, suddivise mediante l'altra scomposizione. Riportando queste suddivisioni sulle parti del poligono P e su quelle del poligono P', questi restano scomposti in parti rispettivamente eguali, e perciò sono equivalenti.

Collo stesso ragionamento si dimostra che, se è $\varepsilon > \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*), in modo che in P si trovino tutte le parti di P' insieme ad altre; e se è $\varepsilon < \varepsilon'$, i due poligoni P, P' si possono scomporre in parti (in numero *finito*) in modo che in P' si trovino tutte le parti di P insieme ad altre.

La seconda parte del teorema è conseguenza immediata dei corollari 1° e 2° del § 4.

Definizioni. — 1° *Se due poligoni sferici* P, P' *si possono scomporre in parti, in modo che in* P *si trovino tutte le parti di* P' *in-*

sieme ad altre, si dice che P *è maggiore di* P′ (P $>$ P′) *oppure che* P′ *è minore di* P (P′ $<$ P).

Il teorema precedente, in seguito a questa, definizione si può enunciare così: *Dati due poligoni sferici* P, P′ *si deve dare uno ed uno solo dei seguenti casi:* P $>$ P′, P $=$ P′, P $<$ P′.

2° *Se un poligono sferico è somma di altri due* B, C, *si dice che ciascuna di queste parti è differenza fra* A *e l'altra parte* (C $=$ A $-$ B, B $=$ A $-$ C)

Corollario. — *Dati due poligoni non equivalenti, esiste sempre la loro differenza. Tutte le differenze che si possono formare sono equivalenti.*

In seguito a quanto ho esposto è facile dimostrare tutti i teoremi relativi alle differenze e ai multipli di poligoni sferici (*G.* §§ 274, 276, 277, 278), fra i quali i più notevoli sono i seguenti:

Sono equivalenti i poligoni sferici differenze di poligoni rispettivamente equivalenti.

Sono equivalenti i poligoni sferici equisummultipli di poligoni equivalenti.

IV. — Equivalenza dei poliedri.

21. Considerando la classe di grandezze costituita da tutti i prismi, è facile dimostrare anche per essa la proprietà ammessa fin qui come postulato.

È noto che si può rigorosamente dimostrare che un prisma è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo, che ha per altezza l'altezza del prisma e per base un rettangolo equivalente alla base del medesimo (*G.* §§ 313, 314, 315, 316). — Ciò posto, si può anche dimostrare che è possibile costruire un parallelepipedo rettangolo di una data serie (che cioè ha due spigoli consecutivi rispettivamente eguali a due segmenti dati a, b), equivalente ad un prisma qualunque P (*G.* § 317). Infatti essendo B e h la base e l'altezza del prisma P, si costruisca un rettangolo equivalente al poligono B, e che abbia due lati opposti eguali al segmento a; gli altri due lati risulteranno eguali ad un segmento *unico e determinato* m (§ 14 cor. 5°), qualunque sia il modo con cui si è ottenuto il rettangolo. Il prisma P è dunque equivalente al parallelepipedo rettangolo dei segmenti a, m, h. Riguardando in questo come altezza a, si può costruire un rettangolo equivalente a quello di m ed h, e che abbia due lati opposti eguali al segmento b; gli altri due lati risulteranno eguali ad un segmento c *unico e determinato*, qualunque sia il metodo seguito per ottenere quest'ultimo rettangolo; ed il dato prisma risulta equivalente al parallelepipedo rettangolo dei segmenti a, b, c, dei quali i primi due sono dati ad arbitrio.

Colle costruzioni precedenti ad ogni prisma viene *associato* un parallelepipedo rettangolo di una data serie determinato ed unico, benchè non resti *a priori* esclusa la possibilità di trovare con altre costruzioni altri parallelepipedi rettangoli della stessa serie equivalenti al medesimo prisma, ma non eguali al parallelepipedo associato. — Questa possibilità poi resta esclusa ripetendo i ragionamenti fatti nei §§ 12 e 13 per i poligoni, e si può completare la teoria dell'equivalenza dei prismi come per i poligoni piani e sferici.

Adottando dunque una definizione da me stabilita nei miei Elementi di geometria (§ 275), potremo dire che la classe di grandezze formata da tutti i poligoni piani, quella formata da tutti i poligoni sferici di una data superficie sferica, e quella formata da tutti i prismi sono di 2ª *specie*.

TRASVERSALI NEI POLIGONI

Nei *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*) furono dimostrati alcuni teoremi che riguardano le tangenti (piani tangenti) condotte dai vertici (lati) di un poligono piano (gobbo) ad una curva (superficie) algebrica di classe m. Per il valore particolare $m = 1$, cioè

(*) Tomo XI e tomo XIV, 3ª serie.

per il caso che la curva o la superficie si riducano ad un punto, le dimostrazioni di quei teoremi si possono fare senza uscire dai limiti della geometria elementare.

Teorema 1. — *Se dai vertici di un poligono piano si conducono le rette che passano per uno stesso punto del suo piano (o parallele alla stessa direzione), il prodotto dei rapporti in cui queste rette segano gli altri lati del poligono è* $+1$.

1° Sia $A_1 A_2 \ldots A_n$ un poligono piano; O un punto del suo piano; $p_1, p_2, \ldots p_n$ i prodotti dei rapporti (**) secondo cui $A_1 O$, $A_2 O, \ldots A_n O$ segano gli altri lati del poligono. Sia inoltre M il punto ove $A_1 O$ sega la diagonale $A_n A_2$ che unisce i vertici adiacenti ad A_1; dal poligono $A_2 A_3 \ldots A_n$, segato dalla $A_1 O$, si ha

$$p_1 \cdot \frac{A_n M}{M A_2} = (-1)^{n-1}.$$

Per un noto teorema si ha in valore assoluto e segno

$$\frac{\text{triang. } O A_1 A_n}{\text{triang. } O A_1 A_2} = \frac{M A_n}{M A_2}, \text{ o anche } \frac{A_n A_1 O}{O A_1 A_2} = \frac{A_n M}{M A_2},$$

onde la precedente diviene

$$p_1 = (-1)^{n-1} \frac{O A_1 A_2}{A_n A_1 O}.$$

Analogamente si trova

$$p_2 = (-1)^{n-1} \frac{O A_2 A_3}{A_1 A_2 O}, \quad p_3 = (-1)^{n-1} \frac{O A_3 A_4}{A_2 A_3 O}, \ldots \ldots,$$
$$p_n = (-1)^{n-1} \frac{O A_n A_1}{A_{n-1} A_n O}.$$

Moltiplicando si ottiene quindi

$$p_1 p_2 p_3 \ldots\ldots p_n = (-1)^{n(n-1)} = +1.$$

2° Nello stesso poligono sieno $A_1 O_1, A_2 O_2, \ldots A_n O_n$ rette del suo piano parallele fra loro, sia ancora p_1 il prodotto dei rapporti in cui $A_1 O_1$ sega i lati del poligono non adiacenti ad A_1, ecc.,

(**) Per rapporto in cui un punto M, posto su di un lato $A_s A_{s+1}$ di un poligono $A_1 A_2 \ldots\ldots A_n$ o sul suo prolungamento, divide il lato stesso, intendo il rapporto positivo o negativo $\frac{A_s M}{M A_{s+1}}$.

M il punto ove $A_1 O_1$ sega $A_n A_2$, e inoltre sieno $d_1, d_2 \dots d_n$ le distanze fra $A_1 O_1$ ed $A_2 O_2$, fra $A_2 O_2$ ed $A_3 O_3$, ... fra $A_n O_n$ ed $A_1 O_1$.

Si avrà ancora $p_1 \frac{A_n M}{M A_2} = (-1)^{n-1}$; ma essendo $\frac{A_n M}{M A_2} = \frac{d_n}{d_1}$, ne deriva

$$p_1 = (-1)^{n-1} \frac{d_1}{d_n}$$

ed analogamente

$$p_2 = (-1)^{n-1} \frac{d_2}{d_1},\ p_3 = (-1)^{n-1} \frac{d_3}{d_2} \dots\dots p_n = (-1)^{n-1} \frac{d_n}{d_{n-1}}.$$

Moltiplicando si ha

$$p_1\, p_2\, p_3 \dots\dots p_n = (-1)^{n(n-1)} = +1.$$

Il teorema inverso è il seguente: *se* n *rette che passano rispettivamente per i vertici di un* n-*gono piano dividono gli altri lati in rapporti, il cui prodotto è* $+1$, *ed* $n-1$ *di queste rette passano per uno stesso punto (o sono fra loro parallele) del suo piano, la* n^{ma} *retta passerà per lo stesso punto (o sarà parallela alle altre)*. Per la dimostrazione vedi *Nouv. Ann.*, Tome XIV.

Per $n = 3$, i due teoremi danno il teorema di Ceva e l'inverso, alquanto generalizzati.

Teorema 2. — *Se da un vertice* (A_1) *di un poligono piano* $A_1 A_2 \dots A_n$ *si conduce una retta che passi per un punto* O *(o parallela ad una data direzione) del suo piano, fino ad incontrare due lati qualunque* ($A_s A_{s+1}$, $A_{n-s+1} A_{n-s+2}$) *del poligono, equidistanti da quel vertice; indi dal vertice successivo* (A_2) *si conduce la retta che passi per lo stesso punto (o parallela alla stessa direzione) fino ad incontrare i due lati successivi* ($A_{s+1} A_{s+2}$, $A_{n-s+2} A_{n-s+3}$)*; e altrettanto si fa per ogni altro vertice, il prodotto di tutti i rapporti, in cui queste rette segano quei lati, è* $+1$:

1° Indicando con α_s, β_{n-s+1} rispettivamente i punti ove $A_1 O$ incontra i lati $A_s A_{s+1}$, $A_{n-s+1} A_{n-s+2}$, con α_{s+1}, β_{n-s+2} i punti ove $A_2 O$ incontra i due lati successivi $A_{s+1} A_{s+2}$, $A_{n-s+2} A_{n-s+3}$, ecc., si avrà:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A_s\,\alpha_s}{\alpha_s\,A_{s+1}} &= \frac{A_s\,O\,A_1}{A_1\,O\,A_{s+1}}\\
\frac{A_{s+1}\,\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}\,A_{s+2}} &= \frac{A_{s+1}\,O\,A_2}{A_2\,O\,A_{s+2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_n\,\alpha_n}{\alpha_n\,A_1} &= \frac{A_n\,O\,A_{n-s+1}}{A_{n-s+1}\,O\,A_1}\\
\frac{A_1\,\alpha_1}{\alpha_1\,A_2} &= \frac{A_1\,O\,A_{n-s+2}}{A_{n-s+2}\,O\,A_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_{s-1}\,\alpha_{s-1}}{\alpha_{s-1}\,A_s} &= \frac{A_{s-1}\,O\,A_n}{A_n\,O\,A_s}
\end{aligned}\right\}[1]
\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{A_{n-s+1}\,\beta_{n-s+1}}{\beta_{n-s+1}\,A_{n-s+2}} &= \frac{A_{n-s+1}\,O\,A_1}{A_1\,O\,A_{n-s+2}}\\
\frac{A_{n-s+2}\,\beta_{n-s+2}}{\beta_{n-s+2}\,A_{n-s+3}} &= \frac{A_{n-s+2}\,O\,A_2}{A_2\,O\,A_{n-s+3}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_n\,\beta_n}{\beta_n\,A_1} &= \frac{A_n\,O\,A_s}{A_s\,O\,A_1}\\
\frac{A_1\,\beta_1}{\beta_1\,A_2} &= \frac{A_1\,O\,A_{s+1}}{A_{s+1}\,O\,A_2}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_{n-s}\,\beta_{n-s}}{\beta_{n-s}\,A_{n-s+1}} &= \frac{A_{n-s}\,O\,A_n}{A_n\,O\,A_{n-s+1}}
\end{aligned}\right\}[2]$$

I numeratori dei secondi membri delle [1] sono eguali ai denominatori dei secondi membri delle [2], e i denominatori ai numeratori; onde moltiplicando le [1], [2] membro a membro, e chiamando P il prodotto dei rapporti, di cui è parola nell'enunciato del teorema, si ha:

$$P = +1.$$

2° Sieno $A_1\,O_1$, $A_2\,O_2$, $\ldots\, A_n\,O_n$ rette fra loro parallele del piano del poligono; α_s, β_{n-s+1} i punti ove $A_1\,O_1$ sega i lati $A_s\,A_{s+1}$, $A_{n-s+1}\,A_{n-s+2}$; α_{s+1}, β_{n-s+2} i punti ove $A_2\,O_2$ sega i lati $A_{s+1}\,A_{s+2}$ $A_{n-s+2}\,A_{n-s+3}$, ecc.; e si indichi inoltre con $d_{m,r}$ la distanza fra $A_m\,O_m$ ed $A_r\,O_r$.

Si avrà

$$\left.\begin{aligned}
\frac{A_s\,\alpha_s}{\alpha_s\,A_{s+1}} &= \frac{d_{s,1}}{d_{1,s+1}}\\
\frac{A_{s+1}\,\alpha_{s+1}}{\alpha_{s+1}\,A_{s+2}} &= \frac{d_{s+1,2}}{d_{2,s+2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_n\,\alpha_n}{\alpha_n\,A_1} &= \frac{d_{n,n-s+1}}{d_{n-s+1,1}}\\
\frac{A_1\,\alpha_1}{\alpha_1\,A_2} &= \frac{d_{1,n-s+2}}{d_{n-s+2,2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_{s-1}\,\alpha_{s-1}}{\alpha_{s-1}\,A_s} &= \frac{d_{s-1,n}}{d_{n,s}}
\end{aligned}\right\}[3]
\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{A_{n-s+1}\,\beta_{n-s+1}}{\beta_{n-s+1}\,A_{n-s+2}} &= \frac{d_{n-s+1,1}}{d_{1,n-s+2}}\\
\frac{A_{n-s+2}\,\beta_{n-s+2}}{\beta_{n-s+2}\,A_{n-s+3}} &= \frac{d_{n-s+2,2}}{d_{2,n-s+3}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_n\,\beta_n}{\beta_n\,A_1} &= \frac{d_{n,s}}{d_{s,1}}\\
\frac{A_1\,\beta_1}{\beta_1\,A_2} &= \frac{d_{1,s+1}}{d_{s+1,2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{A_{n-s}\,\beta_{n-s}}{\beta_{n-s}\,A_{n-s+1}} &= \frac{d_{n-s,n}}{d_{n,n-s+1}}
\end{aligned}\right\}[4]$$

Onde, come prima, moltiplicando tra loro le [3], [4] si ha

$$P = +1.$$

Teorema 3. — *Se dai vertici di un poligono piano di numero dispari di lati si conducono le rette che passano per uno stesso punto (o parallele alla stessa direzione) del suo piano, il prodotto dei rapporti in cui queste rette segano i lati rispettivamente opposti ai vertici da cui sono condotte, è* $+1$.

Se il poligono ha $2m - 1$ lati, il lato opposto al vertice A_1 è $A_m A_{m+1}$; onde i rapporti, di cui è detto nel teorema, si avranno dalle [1] (o dalle [3]) ponendo in esse $n = 2m - 1$, $s = m$. Dopo questa sostituzione il numeratore del secondo membro della prima [1] (o della prima [3]) diventa eguale al denominatore del secondo membro della m^{ma} [1] (o della m^{ma} [3]), il numeratore del secondo membro della seconda al denominatore del secondo membro della $(m+1)^{ma}$, ecc.; onde moltiplicando fra loro le [1] (o le [3]) così trasformate si ha la dimostrazione del teorema.

Il teorema inverso, analogo all'inverso del teorema 1., si dimostra tosto per assurdo.

Combinando i due teoremi 2. e 3. si ottiene una nuova dimostrazione del teorema 1.

Teorema 4. — *Se dai lati di un poligono gobbo si conducono i piani che passano per uno stesso punto (o paralleli ad una stessa retta), il prodotto dei rapporti in cui questi piani segano gli altri lati del poligono (non adiacenti a quello da cui partono) è* $+1$.

1° Sia $A_1 A_2 \ldots A_n$ il poligono, O il punto dello spazio, p_1 il prodotto dei rapporti in cui il piano $O A_1 A_2$ sega i lati del poligono non adiacenti ad $A_1 A_2$, ed M il punto ove $O A_1 A_2$ sega la diagonale $A_n A_3$. Dal poligono di $n - 2$ lati $A_3 A_4 \ldots A_n$ si ha

$$p_1 \frac{A_n M}{M A_3} = (-1)^{n-2}.$$

D'altronde dai tetraedri $O A_1 A_2 A_n$, $O A_1 A_2 A_3$, la cui base comune $O A_1 A_2$ sega $A_n A_3$ nel punto M, si ha, per un noto teorema, in valore assoluto e segno

$$\frac{O A_1 A_2 A_n}{O A_1 A_2 A_3} = \frac{A_n M}{A_3 M} = -\frac{A_n M}{M A_3};$$

onde per la precedente

$$p_1 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_1\,A_2\,A_3}{O\,A_1\,A_2\,A_n}.$$

Analogamente, dicendo p_2 il prodotto dei rapporti in cui il piano $O\,A_2\,A_3$ sega gli altri lati ecc., si avrà

$$p_2 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_2\,A_3\,A_4}{O\,A_2\,A_3\,A_1},\ p_3 = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_3\,A_4\,A_5}{O\,A_3\,A_4\,A_2},\ \ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = (-1)^{n-3} \cdot \frac{O\,A_n\,A_1\,A_2}{O\,A_n\,A_1\,A_{n-1}}.$$

I numeratori sono eguali in valore assoluto e segno ai denominatori; onde moltiplicando si ha

$$p_1\,p_2\,p_3 \ldots\ldots p_n = (-1)^{n(n-3)} = +1.$$

2° Per dimostrare la seconda parte si osservi che la dimostrazione del caso precedente è applicabile anche ad un poligono $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ piano, posto O fuori del suo piano; nel quale caso, poichè i rapporti in cui il piano $O\,A_1\,A_2$ sega i lati del poligono non adiacenti ad $A_1\,A_2$ non sono altro che i rapporti in cui il lato $A_1\,A_2$ sega gli altri lati del poligono non adiacenti ad $A_1\,A_2$, ecc., il teorema diventa il seguente: *il prodotto dei rapporti in cui i lati di un poligono piano segano gli altri lati non adiacenti è* $+1$. Allora se sono $O_1\,A_1\,A_2$, $O_2\,A_2\,A_3 \ldots\ldots O_n\,A_n\,A_1$ piani paralleli ad una stessa retta $P\,Q$ passanti pei lati del poligono gobbo $A_1\,A_2 \ldots A_n$, si proietti la figura su un piano qualunque α parallelamente a $P\,Q$. La proiezione di $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ sarà il poligono piano $A'_1\,A'_2 \ldots A'_n$ formato colle intersezioni di α coi piani $O_1A_1A_2$, $O_2A_2A_3$, ... $O_nA_nA_1$, e i rapporti in cui i piani $O_1A_1A_2$, $O_2A_2A_3 \ldots\ldots O_nA_nA_1$ segano i lati di $A_1\,A_2 \ldots\ldots A_n$ saranno eguali ai rapporti in cui i lati $A'_1\,A'_2$, $A'_2\,A'_3$, ... $A'_n\,A'_1$ del poligono $A'_1\,A'_2 \ldots\ldots A'_n$ segano ciascuno gli altri lati non adiacenti del poligono, e poichè il prodotto di questi ultimi rapporti è $+1$, altrettanto accadrà del prodotto degli altri.

Il teorema inverso, analogo all'inverso del teorema 1., si dimostra come questo.

Febbraio 1895.

F. FERRARI.

ALCUNE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO E DEL QUADRANGOLO

PER IL DOTT. JOSEPH GILLET

Professore alla Scuola Normale di Stato a Verviers (Belgio).

Ci proponiamo in questo piccolo lavoro di mostrare il partito che si potrebbe ricavare dalla simmetria rispetto ad un punto, in geometria piana, e prenderemo per esempio il quadrilatero inscrittibile. In un lemma preliminare, richiameremo i principî della simmetria rispetto ad un punto, e daremo incidentalmente delle soluzioni delle quistioni proposte sotto i numeri 1041 e 1042 in *De Vriend der Wiskunde*, 1894, p. 189.

1. LEMMA. *In due figure simmetriche rispetto ad un punto (centro):*

1° *Due rette omologhe sono parallele.*

2° *Una retta passante pel centro di simmetria è omologa a se stessa.*

3° *Un segmento di retta ha per omologo un eguale segmento.*

4° *Due circonferenze omologhe sono eguali, i loro centri sono punti omologhi, e il loro asse radicale passa pel centro di simmetria.*

5° *Allorchè una circonferenza passa pel centro di simmetria, essa è tangente in questo punto alla sua omologa.*

6° *Ogni circonferenza che ha per centro il centro di simmetria è omologa a se stessa.*

7° *Il centro di simmetria gode delle stesse proprietà nelle due figure.*

2. Consideriamo il triangolo ABC (fig. 1) inscritto nel centro O di raggio R; sia H il suo ortocentro (punto di concorso delle altezze), e prendiamo la figura simmetrica rispetto al punto ω, centro di $O H$.

Il triangolo $A'B'C'$, simmetrico di $A B C$, sarà inscritto nella circonferenza di raggio R, descritta con centro H, ed avrà O per ortocentro. Di più, il circolo d'Eulero (cerchio dei nove punti) del triangolo $A B C$, avente per centro ω, sarà omologo a se stesso in $A'B'C'$; esso è dunque ancora il circolo d'Eulero di questo secondo triangolo. Infine, osservando che $H C = O C'$ per es., si conclude che C' è il simmetrico di O rispetto al lato $A B$; la circonferenza $C'A B$ ha dunque per raggio R, e quindi passa per H. Dunque,

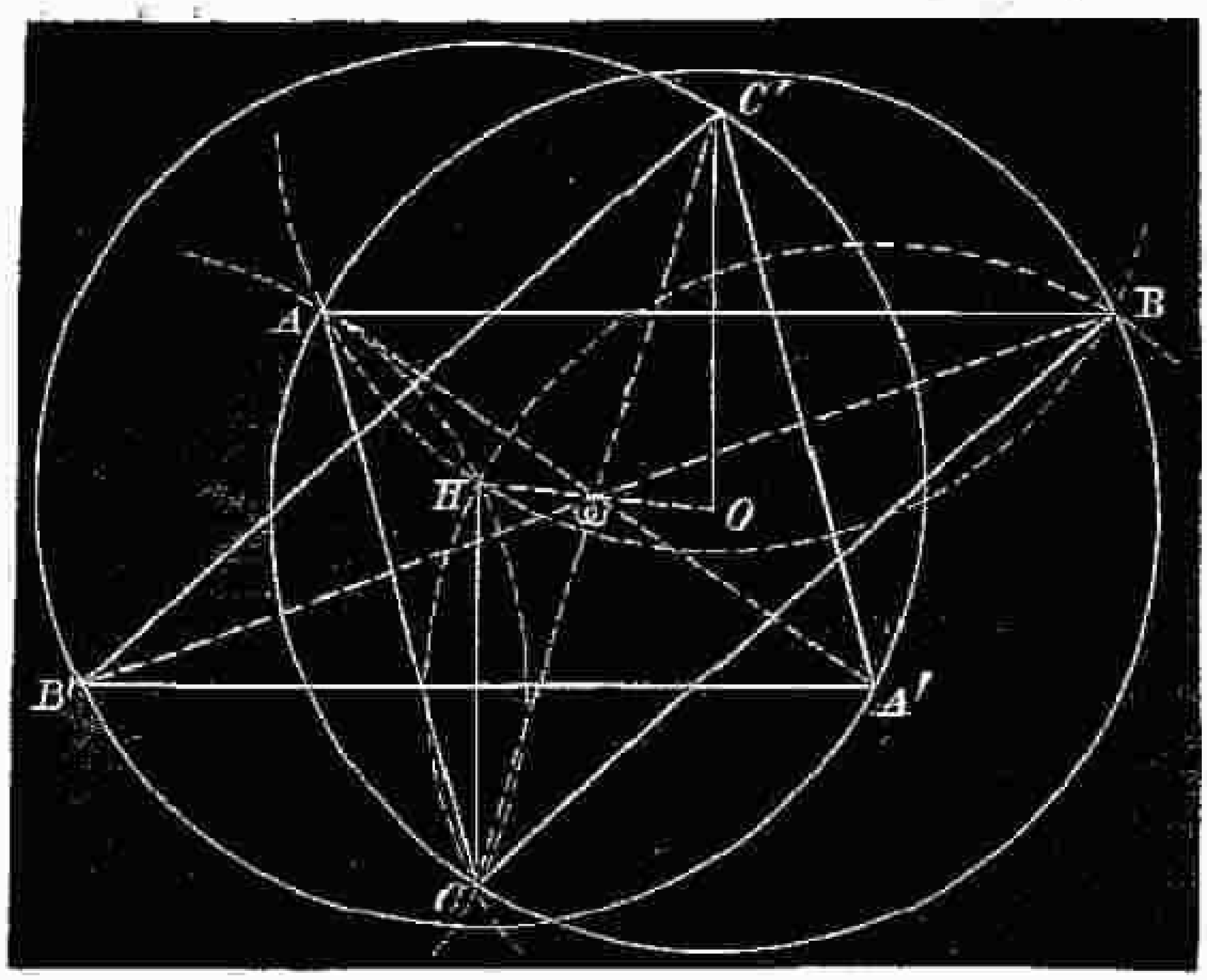


Fig. 1.

se intorno a ciascun lato d'un triangolo si fa ruotare la circonferenza circoscritta, in modo da ribaltarla ogni volta nel piano:

1° *I tre ribaltamenti* A', B', C' *del centro* O *formano un triangolo simmetrico ad* A B C.

2° *Il centro del cerchio circoscritto ad uno dei triangoli* A B C, A'B'C' *è l'ortocentro dell'altro.*

3° *Le circonferenze ribaltate di centri* A', B', C' *passano per* H, *ortocentro di* A B C.

4° *I triangoli* A B C, A'B'C' *hanno il medesimo cerchio di* Eulero.

5° *Le rette* A A′, B B′, C C′ *si tagliano nel medesimo punto, centro di quest'ultimo cerchio.*

3. Abbiasi ora (fig. 2) il quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$ inscritto nel cerchio A, di raggio R; e siano $(A_1 A_2, A_3 A_4)$, $(A_2 A_3, A_4 A_1)$, $(A_1 A_3, A_2 A_4)$ *le tre coppie di lati opposti.* Chiamiamo $O_1, O_2, O_3, \ldots O_6$ i simmetrici del centro A rispetto ai sei lati $A_1 A_2, A_2 A_3, \ldots A_2 A_4$; si vede subito in seguito al § 2 che:

1° *le figure* $(O_1 O_2 O_3 O_4)$, $(O_4 O_5 O_3 O_6)$, $(O_2 O_5 O_4 O_6)$ *i cui*

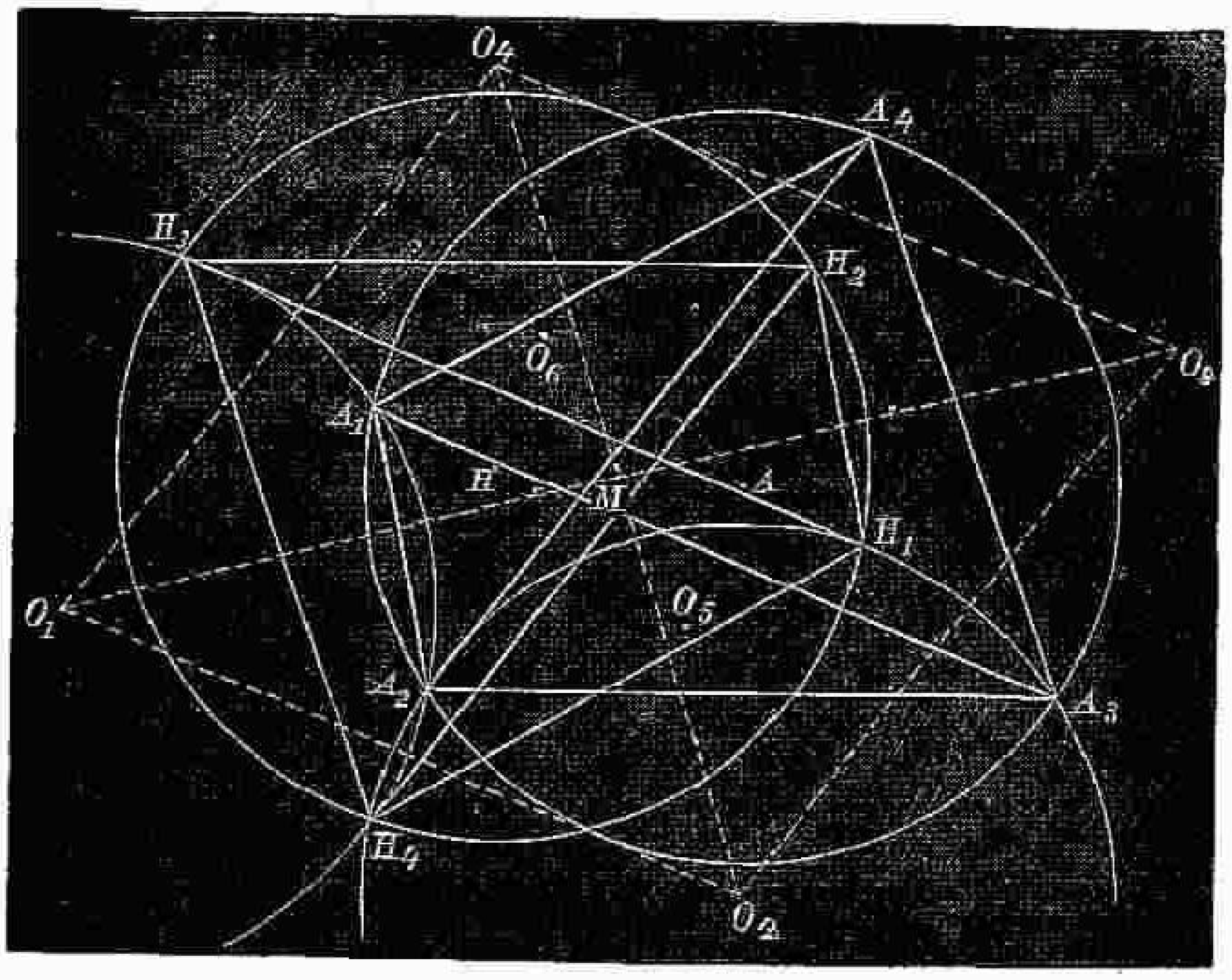


Fig. 2.

vertici sono i simmetrici di A *rispetto a due coppie di lati opposti, sono parallelogrammi;*

2° *questi tre parallelogrammi hanno il medesimo centro* M.

4. Prendiamo M per centro di simmetria (fig. 2), e siano H, H_1, H_2, H_3, H_4 i punti omologhi di A, A_1, A_2, A_3, A_4. Il quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$ essendo inscritto nel cerchio A, il quadrangolo $H_1 H_2 H_3 H_4$ sarà inscritto nel cerchio eguale il cui centro H è l'omologo A.

I punti simmetrici di H e di A rispetto a due lati omologhi, come $A_1 A_2$ e $H_1 H_2$ debbono essere punti simmetrici rispetto ad M; ciò che prova che

3° *i punti simmetrici di* H *rispetto ai lati del quadrangolo* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *sono, in altro ordine, i simmetrici di* A *rispetto ai lati del quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$.

5. Consideriamo, p. es., il punto O_1 (fig. 2) simmetrico di A rispetto ad $A_1 A_2$ e simmetrico di H rispetto ad $H_3 H_4$; la circonferenza descritta da O_1 come centro col raggio R passerà per i punti A_1, A_2, H_4, H_3. Inoltre, la circonferenza descritta da O_2 come centro con lo stesso raggio passa per i punti A_2, A_3, H_4, H_1. Il punto H_4 è dunque l'ortocentro del triangolo $A_1 A_2 A_3$ (§ 2, 3°) e il punto A_2 è l'ortocentro del triangolo $H_4 H_1 H_3$; da cui si conclude che:

4° *il quadrangolo* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *ha per vertici gli ortocentri dei quattro triangoli parziali di* $A_1 A_2 A_3 A_4$ (*); *ed inversamente, i vertici del quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *sono gli ortocentri dei triangoli parziali di* $H_1 H_2 H_3 H_4$.

Due quadrangoli come $A_1 A_2 A_3 A_4$, $H_1 H_2 H_3 H_4$, nei quali i vertici dell'uno sono gli ortocentri dell'altro, potrebbero essere denominati *quadrangoli ortocentrici fra loro.*

6. Prendiamo un punto P qualunque sulla circonferenza A (fig. 3), e sia Q il suo omologo sulla circonferenza H; le proiezioni (ortogonali) di P e di Q sopra due rette omologhe, saranno punti omologhi delle due figure, ossia punti simmetrici rispetto ad M. Segue da ciò che le *rette di* SIMSON di P e Q rispetto a due triangoli omologhi $A_2 A_3 A_4$, $H_2 H_3 H_4$ sono rette omologhe e per conseguenza parallele fra loro (§ 1. 1°). In particolare, se P cade in A_1, Q cadrà in H_1 e le due rette di SIMSON dovendo ambedue passare per il punto medio M di $A_1 H_1$ (teorema noto), coincidono necessariamente. Dunque,

5° *due vertici omologhi come* A_1, H_1 *hanno la medesima retta di* SIMSON S_1 *rispetto ai triangoli parziali* $A_2 A_3 A_4$, $H_2 H_3 H_4$ *omologhi nelle due figure.*

6° *Le quattro rette di* SIMSON A_1 $(A_2 A_3 A_4)$, A_2 $(A_3 A_4 A_1)$, A_3 $(A_4 A_1 A_2)$, A_4 $(A_1 A_2 A_3)$ *d'un quadrilatero iscritto* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *concorrono nello stesso punto* M.

7. Se per il punto M_1 centro di $A_1 A_2$ (fig. 3), si abbassa una

(*) Noi chiamiamo *triangoli parziali d'un quadrangolo* i quattro triangoli che si ottengono combinando i suoi vertici tre a tre.

perpendicolare sopra $A_3 A_4$, questa perpendicolare sarà parallela ad $A_1 H_2$ e a $A_2 H_4$: essa passa dunque pel punto M centro del parallogrammo $A_1 H_2 A_2 H_4$. Similmente le rette condotte pei punti M_2, $M_3, \ldots, M_6$ centri degli altri lati del quadrangolo $A_1 A_2 A_3 A_4$, perpendicolarmente ai lati opposti, passano pure per M.

Inoltre, M essendo il punto d'intersezione delle perpendicolari MM_1, MM_3, p. es., è l'ortocentro del triangolo formato dai punti medî M_1, M_3 e dal punto d'intersezione I_1 dei lati opposti $A_1 A_2$, $A_3 A_4$. Dunque,

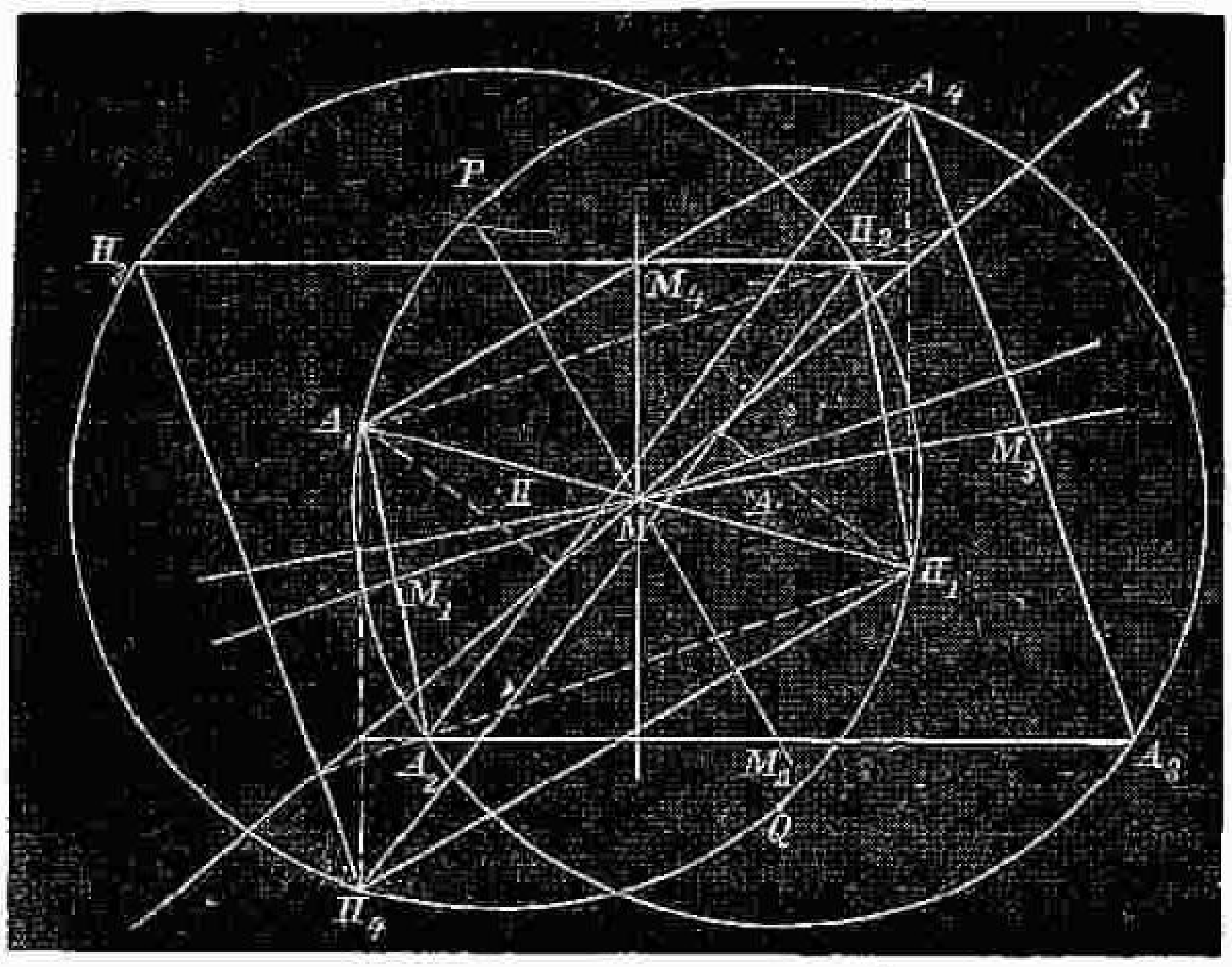


Fig. 3.

7° *se dai punti medi* $M_1 M_2, \ldots M_6$ *dei lati d'un quadrangolo* $A_1 A_2 A_3 A_4$, *si abbassano delle perpendicolari sui lati opposti, le sei rette così ottenute si tagliano in un medesimo punto* M.

8° *Questo punto* M *è l'ortocentro comune ai tre triangoli che hanno per vertici i punti medî di due lati opposti e il punto d'intersezione di questi due lati.*

9° *Il punto* M *essendo l'omologo di se stesso nelle due figure, si trova nelle stesse condizioni tanto in* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *come in* $A_1 A_2 A_3 A_4$.

8. È noto che in ogni triangolo il raggio del cerchio d'EULERO è eguale alla metà del raggio del cerchio circoscritto, donde segue che:

10° *i cerchi d'*EULERO *degli otto triangoli parziali di due quadrilateri ortocentrici inscrittibili sono eguali fra loro.*

Sia C_4, punto medio di AH_4 (fig. 4), il centro del circolo d'EULERO del triangolo $A_1 A_2 A_3$; il suo simmetrico D_4 sarà il centro del cerchio d'EULERO del triangolo $H_1 H_2 H_3$, e si avrà

$$C_4 D_4 = A A_4 = R, \text{ da cui } C_4 M = \frac{1}{2} R.$$

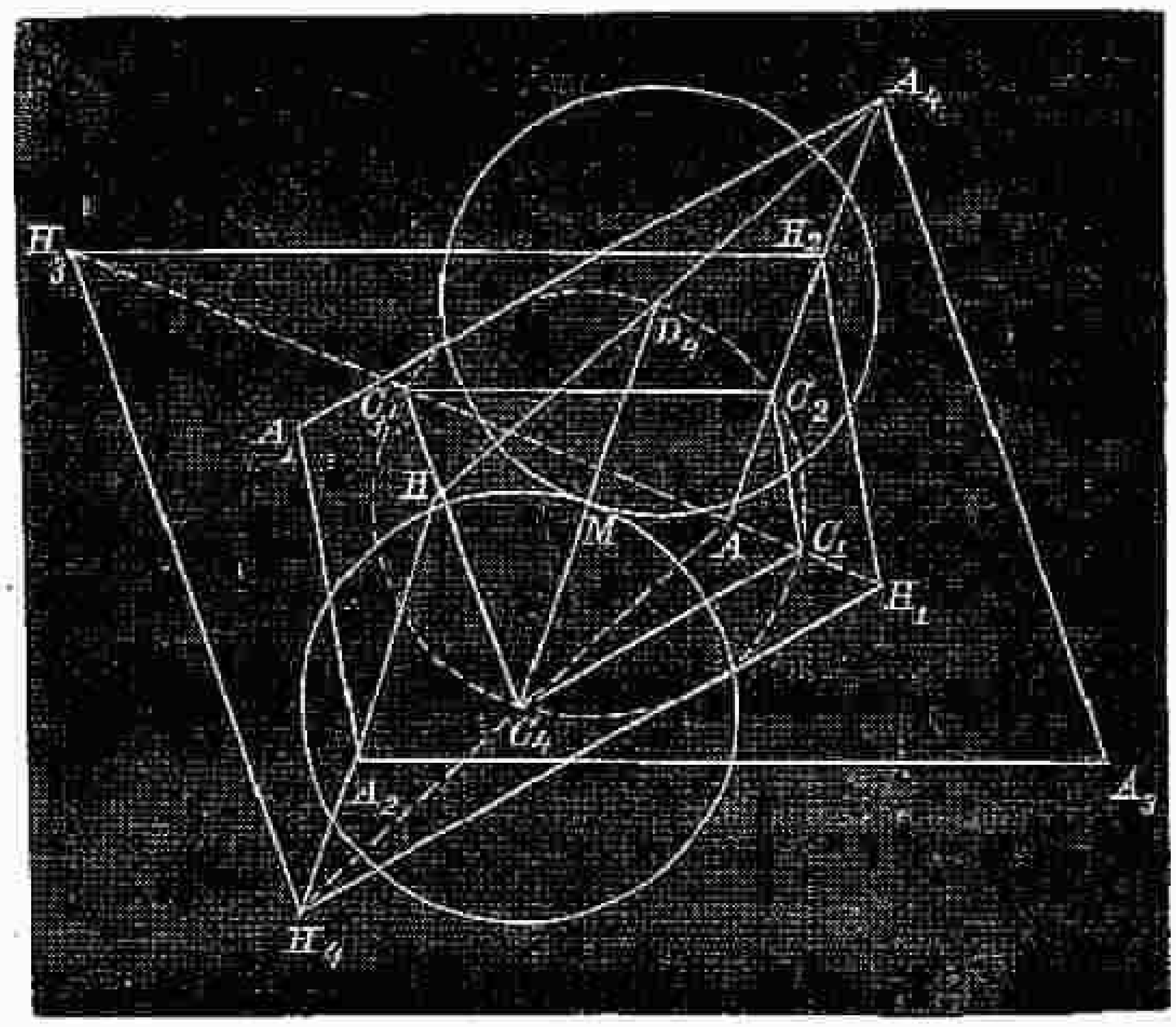


Fig. 4.

Il cerchio C_4 passa dunque per M, e siccome accade lo stesso per tutti i cerchi C_1, C_2, C_3, D_1, D_2, D_3, D_4, si vede che:

11° *in ogni quadrilatero inscritto* $A_1 A_2 A_3 A_4$ *i cerchi d'*EULERO *dei quattro triangoli parziali sono eguali fra loro e passano tutti per lo stesso punto* M.

12° *I centri di questi cerchi appartengono ad una circonferenza eguale, di centro* M. *In altre parole, il quadrangolo* $C_1 C_2 C_3 C_4$ *è inscrittibile e i suoi lati paralleli a quelli di* $H_1 H_2 H_3 H_4$ *ne valgono rispettivamente la metà.*

13° *Se si considerano i quadrangoli ortocentrici inscritti*

$A_1 A_2 A_3 A_4$, $H_1 H_2 H_3 H_4$, *i cerchi d'*EULERO *degli otto triangoli parziali sono eguali fra loro e passano tutti per* M, *in cui sono tangenti due a due* (§ I. 5°)*; gli otto centri appartengono ad una circonferenza eguale avente* M *per centro.*

Osservazione — Qualcuna delle proprietà enunciate sopra sussistono per un quadrilatero qualunque, ma lo stesso metodo di dimostrazione non ci pare applicabile.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Intorno al postulato dell' equivalenza. — Se ne è tanto discusso fin dalla pubblicazione degli Elementi di Geometria dell'illustre De Paolis, che mi sento anch' io invogliato a dire la mia, senza pretensioni e solo per amore della scuola. Sarebbe tempo che tra noi, insegnanti delle scuole medie, corresse qualche intesa circa il modo di trattare questo ed altri argomenti, poichè vediamo i testi scolastici imbottirsi sempre più, a cagione di lunghe e sottili dispute, che, facendo il processo alla verità chiara, assiomatica, come se tra gli uffici della scienza ci fosse quello di mettere giudizio al Giudizio, aduggiano e spauriscono gli scolari. Che se tra costoro anche quelli che più inclinerebbero alla matematica non di rado ne fanno divorzio, ciò avviene perchè, sfiduciati del magistero della natura, proprio quando la fede in esso sarebbe più necessaria, non osano inoltrarsi in un sentiero tutto triboli e sorprese, quale si fece parer loro lo studio delle matematiche.

Venendo all'argomento, io non nego che per stabilire una rigorosa teoria dell'equivalenza sul fondamento della definizione di Duhamel sia mestieri ammettere che una parte di un poligono non può essere equivalente al tutto: solo mi sembra che questa verità non sia dimostrabile, ma sia invece un *necessario* complemento della ordinaria definizione di poligono. Che se il De Paolis le diè il nome di postulato, deve averlo fatto sull'esempio della retta e del piano, i cui postulati non sono che complementi delle loro definizioni.

Per chiarire la mia idea, debbo anzitutto ricordare qual è il naturale carattere che distingue il finito dall' indefinito matematico. Esso può enunciarsi come segue: La ripetuta sottrazione di una parte, che pel finito ha sempre un termine, può, per l' indefinito, non averne alcuno. D'onde il criterio per distinguere la grandezza indefinita dalla grandezza finita. Una grandezza è indefinita se può sottrarsene indefinitamente qualche sua parte; è finita, se la ripetuta sottrazione di qualunque sua parte ha sempre un termine.

Se non che quest'ultimo criterio può facilmente trasformarsi nel seguente: *Se un tutto finito si decompone in parti, non si può, trascurandone una, ri-*

comporre con le altre il tutto medesimo; mentre invece un tutto indefinito si può sempre decomporre in parti in modo che, trascurandone una, sia possibile ricomporre il tutto con le altre. Se infatti si potesse trascurare una parte di un tutto finito, così da ricomporre con le altre il tutto stesso, si potrebbe ancora, ricomposto il tutto, trascurare di nuovo quella parte, e così via, infinite volte, e la sottrazione di una parte non avendo termine, il tutto sarebbe indefinito, contro l'ipotesi. È poi ovvio che si può trascurare qualche parte di un tutto indefinito convenientemente diviso. Così, se per un punto di un lato di un angolo si conduce la parallela all'altro lato, gli angoli corrispondenti sono eguali fra loro, la parte al tutto.

Il postulato di De Paolis (se un poligono si divide in parti, non si può, trascurandone una, ricomporre il poligono con le altre) si applica pertanto, oltrechè al poligono, a tutte le grandezze finite, e serve a distinguerle dalle indefinite.

Premesso ciò, se per poligono deve intendersi, come generalmente s' intende, una porzione di piano chiusa da più segmenti ciascuno dei quali ha un termine comune col precedente e l'ultimo col primo, è chiaro che la figura di più segmenti così disposti, divide il piano in due porzioni, entrambe chiuse dalla figura stessa, (*) ma l'una finita e l'altra indefinita, a ciascuna delle quali, per la posta definizione, si converrebbe egualmente il nome di poligono. Ma poichè tutti chiamano così la porzione *finita*, bisogna ammettere che la proprietà espressa da questo aggettivo faccia parte della definizione di poligono e sia perciò indimostrabile. Dunque il postulato di De Paolis, che, come sopra si è detto, non è se non la traduzione della proprietà di finito attribuita al poligono, è indimostrabile; se pure per dimostrarlo non si faccia uso, almeno tacitamente, di altro postulato equivalente, valido soltanto per le aree finite.

G. Frattini.

A proposito della Nota del prof. Lazzeri sulla teoria dell'equivalenza geometrica (Fasc. III-IV). — Voglio proporre una leggera modificazione all'ingegnosissima dimostrazione del teorema fondamentale n. 12 dell'indicata Nota; questa modificazione, mentre a parer mio toglie ogni dubbio sulla validità del teorema stesso, nulla poi toglie alla trama del pensiero dell'A..

Nel teorema n. 12 si tratta di provare che, *se un triangolo* T *è decomposto comunque in parti triangolari, la somma dei rettangoli di una serie associati alle parti è uguale al rettangolo della serie stessa associato a* T. *Nel caso particolare che le parti siano due o tre il teorema stesso è già stato dimostrato* dall'A. nel n. 10; inoltre nel n. 11 l' A. ha provato che: *le somme dei rettangoli di una serie associati ai triangoli, nei quali un quadrangolo convesso è diviso dalle sue diagonali, sono eguali.*

Il dubbio nasce dall'ipotesi fatta dell'A. che, se O è uno dei nodi della rete

(*) Infatti un punto che si movesse sul piano, per passare dall'interno all'esterno dell'una o dell'altra delle dette due porzioni di esso, dovrebbe attraversarne il comune contorno.

di triangoli in cui è diviso T, due triangoli consecutivi intorno ad O abbiano sempre in comune, oltre ad O, un secondo vertice; mentre l'ipotesi più generale è invece che un vertice dell'un triangolo cada sopra un lato dell'altro. Ora è bensì vero che, staccando da ciascuno dei triangoli che stanno attorno ad O al più una o due parti triangolari, si può (senza introdurre nuovi nodi nè aumentare il numero dei triangoli che stanno attorno ad O) sostituire alla rete primitiva una nuova che soddisfi alla ipotesi dell'A., e ciò senza alterare la somma dei rettangoli della data serie associati alle parti, perchè a ciascuno dei triangoli che sono attorno ad O se ne sono sostituiti tre al più; ma resta poi con ciò possibilmente aumentato il numero delle parti in cui era diviso T; sicchè il procedimento di riduzione dell'A., diretto a dimostrare che le parti possono essere ridotte da n ad $n-3$ od $n-2$, non è più soddisfacente. Esso si può tuttavia con successo applicare a dimostrare che si possono fare sparire i nodi della data rete, e allora potrebbe essere esposto nel seguente modo.

Sia O un nodo intorno al quale stiano p triangoli; sarà lecito supporre, per ciò che si è osservato sopra, che due triangoli consecutivi abbiano sempre in comune un vertice fuori di O e non formino un triangolo.

Sia poi in primo luogo O interno a T; allora, secondochè O sarà vertice di tutti i p triangoli o di tutti meno uno, si avrà intorno ad O un poligono (non intrecciato) di p o $p+1$ lati. Tale poligono avrà in ogni caso almeno tre angoli convessi; siano tali gli angoli LMN, $L'M'N'$, $L''M''N''$ (che potrebbero anche essere consecutivi); se $p > 3$, dei tre angoli LON, $L'ON'$, $L''ON''$ due certamente (per es. LON, $L'ON'$) non avranno parti comuni; perchè, se due qualunque avessero sempre una parte comune, le tre parti comuni riempirebbero l'intero giro intorno ad O e sarebbe quindi $p=3$. Segue da ciò che sarà

$$LON + L'ON' \leqq 2 \text{ piatti},$$

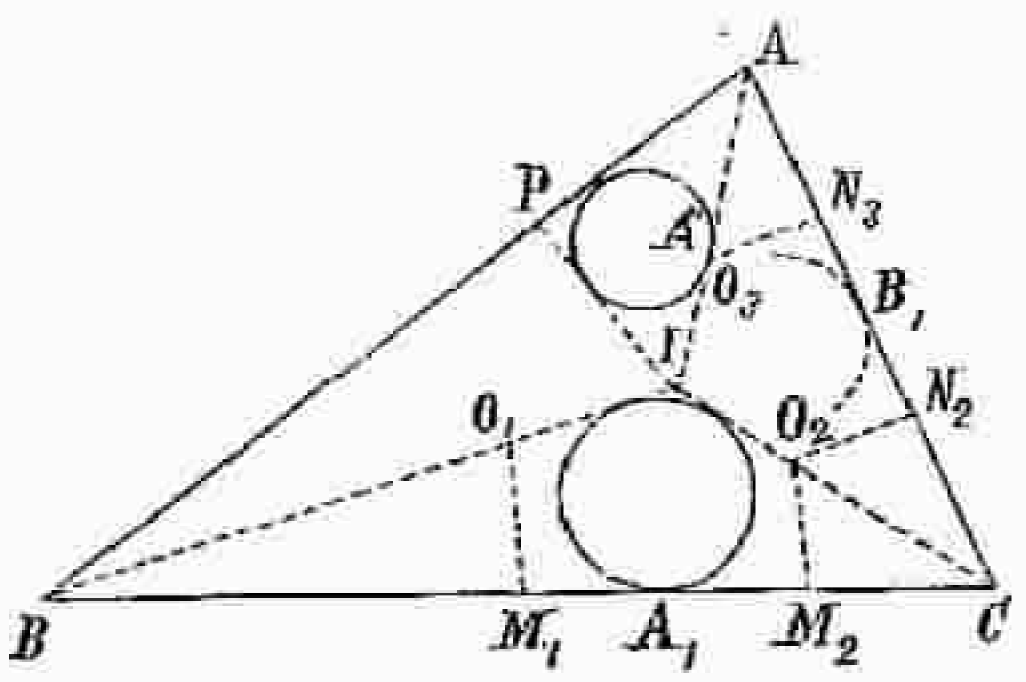
per modo che, potendo (per le ipotesi fatte) uno al più dei due angoli LON, $L'ON'$ essere piatto, uno almeno dei due angoli stessi (per es. LON) sarà convesso. Allora il quadrangolo $OLMN$ è convesso, avendo tutti i suoi angoli convessi; e quindi ai due triangoli OLM, OMN in cui esso è diviso dalla sua diagonale OM si possono (n. 11) sostituire gli altri due LMN, OLN. Dopo ciò i triangoli che sono attorno ad O sono $p-1$. Si può dunque degradare via via il numero dei triangoli che stanno attorno ad O fino a portarlo a due formanti un quadrilatero o a tre formanti un triangolo. Nel primo caso O non è più nodo, e nel secondo O cessa di essere un nodo sostituendo ai tre triangoli il triangolo da essi formato; perciò il procedimento indicato conduce all'ultimo a fare sparire il nodo O senza introdurre nuovi nodi.

Sia in secondo luogo O sopra un lato l di T, ma non in un vertice di T. Qui si dovrà ritenere $p > 2$, perchè due soli triangoli attorno ad O formerebbero nel caso attuale un triangolo, che, per le ipotesi fatte, dovrebbe loro essere sostituito. Allora dei tre o più angoli convessi appartenenti al poligono di $p+1$ lati formato dai p triangoli uno almeno (poniamo LMN) avrà il suo vertice M fuori di l, e l'angolo LON non sarà piatto (altrimenti L ed N starebbero su l e quindi il poligono attorno ad O si ridurrebbe al solo triangolo LMN, cioè sarebbe $p = 2$); d'altronde esso è tutto da quella parte di l ove sta T, dunque LON è convesso. Allora $OLMN$ è un quadrangolo convesso e pel n. 11 i suoi due triangoli OLM, OMN possono essere sostituiti coi due OLN, LMN; in tal modo i triangoli intorno ad O diventano $p - 1$. Si può dunque diminuire il numero dei triangoli che stanno attorno ad O fino a ridurlo ad uno e così far sparire il nodo O senza introdurre nuovi nodi.

Quando si siano fatti sparire tutti i nodi che non cadono nei vertici di T, saranno scomparsi anche quelli che cadevano nei vertici di T (perchè non esiste una rete triangolare con nodi soltanto nei vertici di T) e la rete si sarà ridotta al solo triangolo T; e siccome nelle successive modificazioni della rete primitiva si è sempre proceduto in modo da non alterare mai la somma dei rettangoli della data serie associati alle sue parti, così detta somma eguaglia appunto il rettangolo della stessa serie associato a T.

G. Sforza.

2ª Nota sul Problema del Malfatti. (*Continuazione* v. pag. 93). — Il Prof. Adams in una sua memoria pubblicata a Winterthur (anni 1846-48) indicò questa semplice soluzione: *Iscritti i cerchi nei triangoli* IBC, ICA, IAP *tangenti alle rette* BC, CA, IA *nei rispettivi punti* A_1, B_1, A'', *riportare il segmento* IA'' *dalle parti opposte dell'origine* A_1 *sul lato* BC *e dai termini* M_1, M_2 *condurre le perpendicolari a questo lato fino a segare in* O_1, O_2 *le rette* BI, CI; *i punti* O_1, O_2 *sono i centri ed* O_1M_1, O_2M_2 *i raggi dei due cerchi del Malfatti; abbassando* O_2N_2 *normale ad* AC, *e prendendo il segmento* $B_1N_3 = N_2B_1$, *la parallela tirata da* N_3 *ad* N_2O_2 *determina sulla* IA *il centro* O_3 *ed il raggio* O_3N_3 *del 3° cerchio del Malfatti.*



Poichè detto P il punto di contatto del cerchio r con il lato AB, s'iscriva un circolo nel triangolo IAP e dicasi A'' dove tocca la retta IA; a motivo di $AP = r \cot \frac{A}{2}$, il raggio di quel cerchio sarà $\frac{AP}{1 + \cot \frac{A}{4}} = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang} \frac{A}{4}\right)$ e quindi $IA'' = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang} \frac{A}{4}\right) . \cot\left(45° - \frac{A}{4}\right) = \frac{r}{2}(1 + \alpha)$ con $\alpha = \operatorname{tang} \frac{A}{4}$. Inoltre per le note formole dei raggi r_1, r_2 discendono le espressioni

$$BA_1 = \frac{r}{2}\left(1 - \operatorname{tang} \frac{B}{4} \operatorname{tang} \frac{C}{4}\right) \cot \frac{B}{4} = \frac{r}{2\beta}(1 - \beta\gamma), \quad A_1C = \frac{r}{2\gamma}(1 - \beta\gamma),$$

dalle quali sottraendo il segmento IA'' si ricaveranno i valori

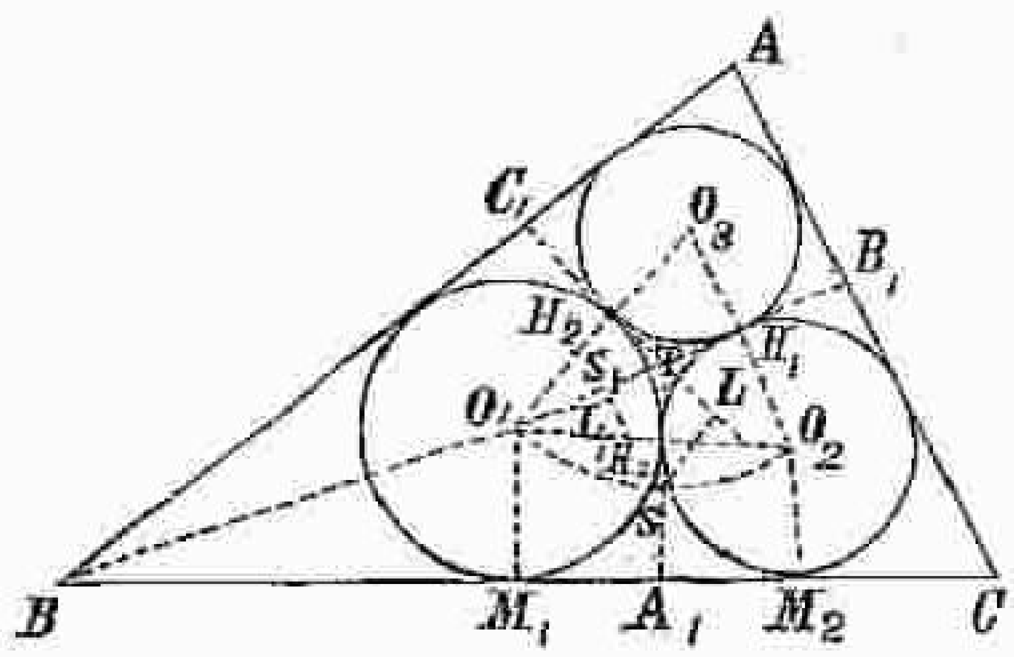
$$BM_1 = \frac{r}{2\beta}(1 - \beta\gamma - \beta\alpha - \beta) = \frac{r}{4\beta}(1 + \alpha)(1 + \gamma)(1 - \beta),$$

$$M_2C = \frac{r}{2\gamma}(1 - \beta\gamma - \alpha\gamma - \gamma) = \frac{r}{4\gamma}(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 - \gamma);$$

a motivo della nota identità $1 - \alpha - \beta - \gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma = 0$. Ne conseguono i raggi $\rho_1 = O_1M_1 = BM_1 \cot\frac{B}{2} = \frac{r}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}$, $\rho_2 = O_2M_2 = M_2C \cdot \cot\frac{C}{2} = \frac{r}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}$ ed i cerchi si toccano esternamente perchè $\sqrt{2\rho_1 \cdot 2\rho_2} = r(1+\alpha) = M_1M_2$, ecc.. A causa di $BA_1 : A_1C = \gamma : \beta$, $CB_1 : B_1A = \alpha : \gamma$, $AC_1 : C_1B = \beta : \gamma$ le congiungenti AA_1, BB_1, CC_1 passano per lo stesso punto.

Un'analisi geometrica della costruzione di Steiner era stata esposta nel 1833 dal Prof. Zornow a Koenisberg, ed inserita nel tomo X del Giornale di Crelle.

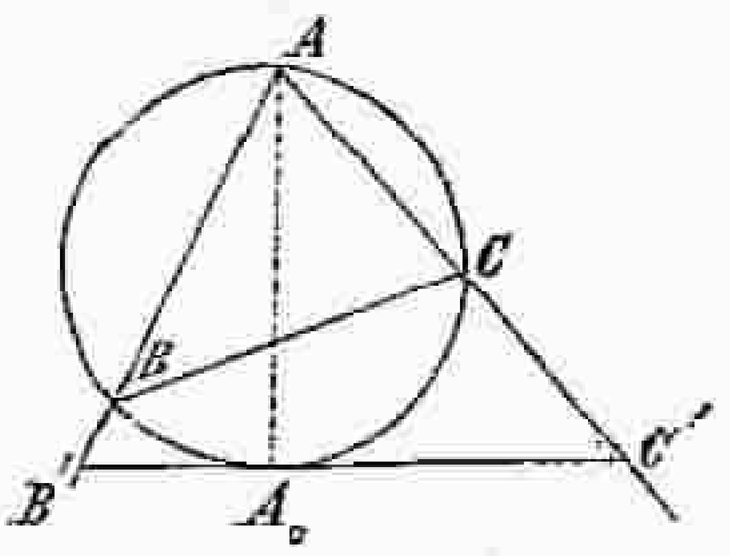
Le tangenti interne comuni ai cerchi del Malfatti concorrono in un punto T di egual potenza rispetto ad essi, e centro del cerchio iscritto nel triangolo $O_1O_2O_3$ avente per vertici i loro centri, e per lati $O_2O_3 = \rho_2 + \rho_3$, $O_3O_1 = \rho_3 + \rho_1$, $O_1O_2 = \rho_1 + \rho_2$. Notando con H_1, H_2, H_3 i rispettivi punti di contatto dei cerchi su questi lati, si trovano $H_1T^2 = H_2T^2 = H_3T^2 = \frac{\rho_1\rho_2\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}$, l'intersezione A_1 della tangente TH_3 con BC è il mezzo del segmento M_1M_2, e perciò $M_1A_1^2 = A_1H_3^2 = A_1M_2^2 = \rho_1\rho_2$. Se a partire dai punti H_2, H_1 sulle tangenti H_2T, H_1T prendiamo le parti H_2L, H_1L_1 eguali ad M_1A_1 le perpendicolari innalzate ad esse dai termini L, L_1 si segheranno in un punto S esterno alla A_1T ed equidistante dalle tangenti e dal lato BC; onde le O_1S, O_2S bisecheranno gli angoli $M_1O_1O_3$, $M_2O_2O_3$ ed a motivo di $LT = TL_1$ le ST, TO_3 giaceranno sulla medesima retta. In virtù dei triangoli simili O_3H_2T, TLS potremo determinare il raggio $x = SL = SL_1 = A_1S$ del cerchio iscritto nel triangolo formato dalle rette C_1T, B_1T, BC; infatti dalla proporzione $SL : O_3H_2 = TL : H_2T$ si deduce $SL + O_3H_2 = O_3H_2\left(\frac{H_2L}{H_2T}\right)$, da cui viene $x^2 = \rho_3(\rho_1 + \rho_2 - 2x)$. Ora dal trapezio birettangolo $O_1M_1A_1S$ si ricava $O_1S^2 = \rho_1\rho_2 + (\rho_1 - x)^2$, dove sostituendo il precedente valore di x^2 si trae $O_1S^2 = (\rho_1 + \rho_3)(\rho_1 + \rho_2 - 2x) = \frac{\rho_1 + \rho_3}{\rho_3}x^2$. Abbassando la perpendicolare SS_1 alla retta BO_1 bisettrice dell'angolo B, si ottengono facilmente le eguaglianze angolari $BO_1M_1 + M_1O_1S + SO_1S_1 = 180^0 = BO_1M_1 + M_1O_1S + C_1O_1H_2$ e quindi ne consegue $C_1O_1H_2 = P_1O_1C_1 = SO_1S_1$, e la similitudine dei triangoli SO_1S_1, $C_1O_1P_1$ dà la proporzione $SS_1 : SO_1 = P_1C_1 : C_1O_1$, che per



essere $P_1 C_1^2 = \rho_1 \rho_3$, $C_1 O_1^2 = \rho_1 (\rho_1 + \rho_3)$ ed il valore surriferito di $O_1 S$ dimostra $SS_1 = SL$; dunque il cerchio descritto col centro S e raggio SL tocca pure le rette BO_1, CO_2, e così è provata la costruzione di Steiner.

A motivo di $A_1 T = A_1 H_3 + H_3 T = \sqrt{\rho_1 \rho_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}}\right)$ e della distanza $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ del punto H_3 da BC, il punto T dista da questo lato del segmento $\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\left(1 + \sqrt{\frac{\rho_3}{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}}\right)$. Plücker osservò come le tangenti $A_1 T$, $B_1 T$, $C_1 T$ formino coi lati del triangolo tre quadrilateri $A_1 C B_1 T$, $B_1 A C_1 T$, $C_1 B A_1 T$ circoscritti ai cerchi del Malfatti, e perciò dian luogo alle relazioni $A_1 T - TB_1 = CA_1 - B_1 C$, $TB_1 - C_1 T = B_1 A - AC_1$, $C_1 T - TA_1 = C_1 B - A_1 B$, onde il punto T è comune a tre iperbole aventi i loro fuochi nei punti A_1, B_1, C_1 presi due a due, e gli assi trasversi pari alle differenze fra i segmenti dei lati compresi fra ciascun vertice e i detti fuochi.

Col metodo d'inversione si estende il problema del Malfatti al triangolo formato da archi circolari; un semplice caso è il supporre due lati BA, AC rettilinei ed il terzo l'arco CA_0B del cerchio ABC. Tirando il diametro $AA_0 = 2R$ e la tangente in A_0 opposto ad A, siano B', C' i punti d'intersezione di $B'C'$ coi lati AB, AC; a causa di $AB \,.\, AB' = AC \,.\, AC' = 4R^2$ si deduce essere $B'C'$ la linea inversa dell'arco BA_0C ed A l'origine d'inversione.



Notando con a, b, c i lati del triangolo ABC, con a', b', c' quelli di $AB'C'$ troviamo $c' = \frac{4R^2}{c} = \frac{2R}{\operatorname{sen} C}$, $b' = \frac{2R}{\operatorname{sen} B}$, $a' = \frac{b'c' \operatorname{sen} A}{2R} = \frac{2R \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}$ opposti ai rispettivi angoli $C' = 180^0 - (A + C) = B$, $B' = 180^0 - (A + B) = C$, $A' = A$; il raggio del cerchio iscritto nel triangolo $AB'C'$ essere $r' = \frac{R \operatorname{sen}\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$ ed il centro I' giacere sulla bisettrice dell'angolo A alla distanza $AI' = \frac{r'}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$.

Si conchiude il cerchio inverso avere il raggio $\rho = \frac{4R^2 r'}{AI'^2 - r'^2} = \frac{4R^2}{r'} \operatorname{tang}^2 \frac{A}{2} = \frac{4R}{\cos^2\frac{A}{2}} \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$, ed il suo centro I distare dall'origine del segmento $AI = \frac{4R^2}{AI'} = 4R \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$. I cerchi del Malfatti iscritti in $AB'C'$ hanno i raggi

$$\rho' = \frac{r'}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\beta)}{1+\gamma}, \quad \rho'' = \frac{r'}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\gamma)}{1+\beta}, \quad \rho''' = \frac{r'}{2} \cdot \frac{(1+\beta)(1+\gamma)}{1+\alpha}$$

(dove per brevità si è posto $\alpha = \text{tang}\,\frac{A}{4}$, $\beta = \text{tang}\,\frac{B}{4}$, $\gamma = \text{tang}\,\frac{C}{4}$), e le distanze dei loro centri O', O'', O''' dal vertice A sono

$$A\,O' = \sqrt{\rho'^2 + \left(c' - \rho' \cot \frac{B'}{2}\right)^2}, \quad A\,O'' = \sqrt{\rho''^2 + \left(b' - \rho'' \cot \frac{C'}{2}\right)^2},$$

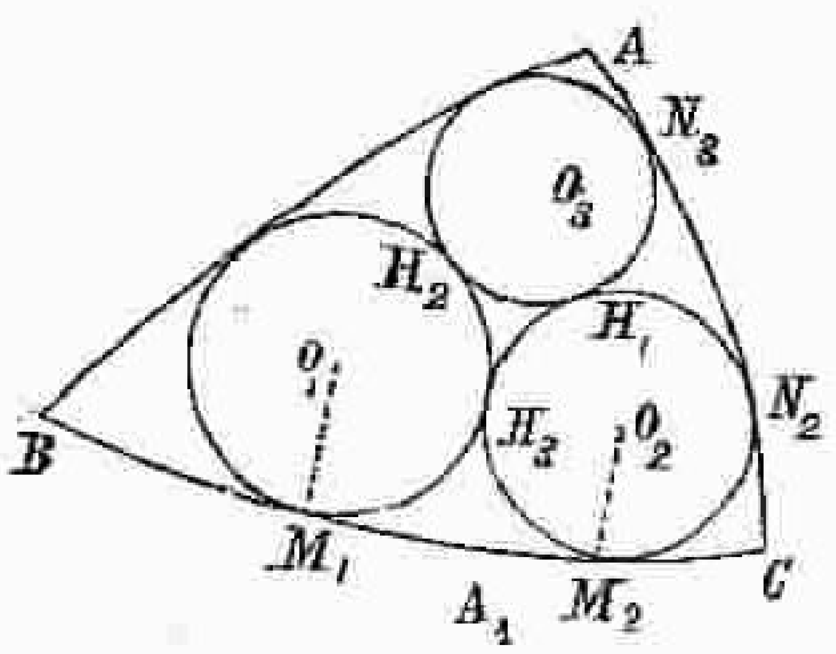
$A\,O''' = \dfrac{\rho'''}{\text{sen}\,\dfrac{A}{2}}$. Il raggio del cerchio inverso a ρ' si calcolerà mediante la formula $\rho_1 = \dfrac{4\,R^2 \rho'}{A\,O'^2 - \rho'^2} = \dfrac{4\,R^2 \rho'}{\left(c' - \rho' \cot \dfrac{B'}{2}\right)^2}$ ed essendo $c' = \dfrac{2\,R}{\text{sen}\,C}$, $B' = C$ con facili riduzioni otterremo i raggi dei tre circoli del Malfatti iscritti nel triangolo mistilineo $A\,B\,A_0\,C$

$$\rho_1 = 2\,\rho \,.\, \cos^2 \frac{A}{2}\, \text{sen}^2 \frac{C}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}{\left[2(1+\gamma)\cos\frac{B}{2} - \text{sen}\,\frac{A}{2}\,\cos\frac{C}{2}(1+\alpha)(1+\beta)\right]^2}$$

$$\rho_2 = 2\,\rho \,.\, \cos^2 \frac{A}{2}\, \text{sen}^2 \frac{B}{2} \cdot \frac{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)}{\left[2(1+\beta)\cos\frac{C}{2} - \text{sen}\,\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}(1+\alpha)(1+\gamma)\right]^2}$$

$$\rho_3 = \frac{2\,\rho\,(1+\alpha)}{(1+\beta)(1+\gamma)}.$$

In un triangolo sferico $A\,B\,C$ rappresentino O_1, O_2, O_3 i centri dei circoli del Malfatti iscritti negli angoli rispettivi B, C, A coi raggi arc. $O_1 M_1 = \rho_1$, $O_2 M_2 = \rho_2$, $O_3 N_3 = \rho_3$. Siano arc. $B\,M_1 = \omega_1$, $M_2 C = C N_2 = \omega_2$, $N_3 A = \omega_3$, le tangenti sferiche comprese fra i vertici B, C, A ed i punti di contatto M_1, M_2, N_3 con i lati BC, CA: se nel punto H_3 comune ai primi due cerchi ρ_1, ρ_2 si tiri la tangente sferica $H_3 A_1$ fino a segare in A_1 il lato $B\,C$, a motivo di arc. $M_1 A_1 = A_1 H_3 = A_1 M_2 = \dfrac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}$ il triangolo rettangolo $O_1 A_1 O_2$ fornisce la relazione $\cos(\rho_1 + \rho_2) = \cos \rho_1 \,.\, \cos \rho_2 \cos^2 \left(\dfrac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}\right)$, che si riduce alla forma



$$\text{(1)} \qquad \text{tang}\,\rho_1\, \text{tang}\,\rho_2 = \text{sen}^2 \left(\frac{a - \omega_1 - \omega_2}{2}\right),$$

ed in simil modo provansi le altre due $\text{tang}\,\rho_2\, \text{tang}\,\rho_3 = \text{sen}^2 \left(\dfrac{b - \omega_2 - \omega_3}{2}\right)$, $\text{tang}\,\rho_3\, \text{tang}\,\rho_1 = \text{sen}^2 \left(\dfrac{c - \omega_3 - \omega_1}{2}\right)$. Si può dedurre un sistema sufficiente a calcolare le ω_1, ω_2, ω_3 in funzione dei lati a, b, c; poichè i triangoli rettangoli BO_1M_1, CO_2M_2 somministrano l'eguaglianze

$$(2) \qquad \operatorname{tang} \rho_1 = \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{tang} \frac{B}{2}, \qquad \operatorname{tang} \rho_2 = \operatorname{sen} \omega_2 \operatorname{tang} \frac{C}{2};$$

onde per la formula (1) e la nota relazione $\operatorname{tang} \frac{B}{2} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p}$ si ottiene $1 - \cos(a - \omega_1 - \omega_2) = \frac{2 \operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} p} \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2$, la quale a motivo di $2 \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 = \cos(\omega_1 - \omega_2) - \cos(\omega_1 + \omega_2)$ si traduce nella

$$(3) \qquad \operatorname{sen} a \cos(\omega_1 + \omega_2 - p) + \operatorname{sen}(p-a)\cos(\omega_1 - \omega_2) = \operatorname{sen} p,$$

ed insieme coesistono le analoghe

$$\operatorname{sen} b \cos(\omega_2 + \omega_3 - p) + \operatorname{sen}(p-b)\cos(\omega_2 - \omega_3) = \operatorname{sen} p,$$
$$\operatorname{sen} c \cos(\omega_3 + \omega_1 - p) + \operatorname{sen}(p-c)\cos(\omega_3 - \omega_1) = \operatorname{sen} p.$$

Introducendo le ignote ausiliarie $\frac{p}{2} - \omega_1 = x$, $\frac{p}{2} - \omega_2 = y$, $\frac{p}{2} - \omega_3 = z$ si ottiene il sistema di Schellbach

$$(4) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - a\right)}{\cos\frac{p}{2}} \cos x \cos y + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - a\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = 1 \\
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - b\right)}{\cos\frac{p}{2}} \cos y \cos z + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - b\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}} \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z = 1 \\
&\frac{\cos\left(\frac{p}{2} - c\right)}{\cos\frac{p}{2}} \cos z \cos x + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{p}{2} - c\right)}{\operatorname{sen}\frac{p}{2}} \operatorname{sen} z \operatorname{sen} x = 1.
\end{aligned}$$

Per brevità notiamo coi simboli a_0, a_1 i numeratori dei coefficienti nella prima equazione, con b_0, b_1, c_0, c_1 gli omonimi nella seconda e terza, con d_0, d_1 i loro denominatori $\cos\frac{p}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{p}{2}$; seguendo il Prof. Mertens (*) ricaveremo $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ dalle due ultime del sistema (4), ed aggiungendone i quadrati otterremo

$$(5) \qquad \begin{gathered}
d_0^2 (c_1 \operatorname{sen} x - b_1 \operatorname{sen} y)^2 + d_1^2 (b_0 \cos y - c_0 \cos x)^2 = \\
(b_0 c_1 \operatorname{sen} x \cos y - b_1 c_0 \cos x \operatorname{sen} y)^2;
\end{gathered}$$

quest'equazione e la prima delle (4) compongono il sistema sufficiente a determinare gli archi x, y. Sviluppando la (5) si trova

(*) Giornale di CRELLE, tomo 76°, pag. 92.

$$(d_0^2 c_1^2 - d_1^2 c_0^2 - b_0^2 c_1^2) \operatorname{sen}^2 x + (d_0^2 b_1^2 - b_0^2 d_1^2 - c_0^2 b_1^2) \operatorname{sen}^2 y + (b_0^2 c_1^2 + b_1^2 c_0^2) \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y - 2 d_0^2 b_1 c_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - 2 d_1^2 b_0 c_0 \cos x \cos y + 2 b_0 b_1 c_0 c_1 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos x \cos y + d_1^2 (b_0^2 + c_0^2) = 0;$$

ora a motivo di $1 = a_0^2 + a_1^2 = b_0^2 + b_1^2 = c_0^2 + c_1^2 = d_0^2 + d_1^2$ è facile verificare le relazioni

$$d_0^2 c_1^2 - d_1^2 c_0^2 - b_0^2 c_1^2 = d_0^2 b_1^2 - b_0^2 d_1^2 - c_0^2 b_1^2 = b_1^2 c_1^2 - d_1^2,$$
$$d_0^2 c_1^2 - d_1^2 c_0^2 + b_1^2 c_0^2 = d_0^2 - b_0^2 c_0^2, \quad d_0^2 c_1^2 + d_1^2 b_0^2 - b_0^2 c_1^2 = d_0^2 b_1^2 c_1^2 + d_1^2 b_0^2 c_0^2$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y - \cos^2 x \cos^2 y;$$

ed in virtù di queste vedere l'antecedente (5) identica all'eguaglianza

$$d_1^2 (\cos x \cos y - b_0 c_0)^2 + d_0^2 (\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - b_1 c_1)^2 = (b_1 c_1 \cos x \cos y - b_0 c_0 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)^2.$$

Ponendo

(6) . . . . $\cos x \cos y = b_0 c_0 + u, \quad \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = b_1 c_1 + v,$

(7) . . . . $\dfrac{a_0 b_0 c_0}{d_0} + \dfrac{a_1 b_1 c_1}{d_1} = h,$

il sistema surriferito delle x, y si trasforma in

(8) $\quad d_1^2 u^2 + d_0^2 v^2 = (b_1 c_1 u - b_0 c_0 v)^2, \quad a_0 d_1 u + a_1 d_0 v = d_0 d_1 (1 - h).$

La prima è quadratica ed omogenea rispetto alle u, v, ed ha per discriminante

$$\delta = d_0^2 b_1^2 c_1^2 + d_1^2 b_0^2 c_0^2 - d_0^2 d_1^2 = (d_0^2 - b_0^2)(d_0^2 - c_0^2) = (d_1^2 - b_1^2)(d_1^2 - c_1^2);$$

a causa di $a_0^2 + a_1^2 = 1$, valore di δ si può scrivere

$$(d_0^2 b_1^2 c_1^2 + d_1^2 b_0^2 c_0^2)(a_0^2 + a_1^2) - d_0^2 d_1^2,$$

oppure

$$\delta = (a_0 b_0 c_0 d_1 + a_1 b_1 c_1 d_0)^2 + (a_0 b_0 c_0 d_1 - a_1 b_1 c_1 d_0)^2 - d_0^2 d_1^2$$

e siccome per la (7) il primo quadrato eguaglia $d_0^2 d_1^2 h^2$, si concluderà

$$a_0 d_0 b_1 c_1 - a_1 d_1 b_0 c_0 = \pm \sqrt{\delta + d_0^2 d_1^2 (1 - h^2)}.$$

Prendendo l'incognita ausiliaria $b_1 c_1 u - b_0 c_0 v = t$, ed unendovi l'equazione lineare del sistema (8), si deducono

$$u = b_0 c_0 \left(\frac{1}{h} - 1\right) + \frac{a_1 t}{d_1 h}, \quad v = b_1 c_1 \left(\frac{1}{h} - 1\right) - \frac{a_0 t}{d_0 h};$$

per i quali valori la quadrica (8) diviene

$$(1 + h) t^2 - 2t (d_0 a_0 b_1 c_1 - d_1 a_1 b_0 c_0) + (1 - h)(d_1^2 b_0^2 c_0^2 + d_0^2 b_1^2 c_1^2) = 0;$$

osservando il suo discriminante equivalere a

$$\delta + d_1^2 d_0^2 (1 - h^2) - (1 - h^2)(\delta + d_0^2 d_1^2) = h^2 \delta,$$

avremo le radici $t = \dfrac{d_0 a_0 b_1 c_1 - d_1 a_1 b_0 c_0 \pm h\sqrt{\delta}}{1 + h}$; onde con semplici riduzioni fatte mediante la (7), le formule (6) si esprimono

$$(9) \; \ldots\ldots \quad \begin{aligned} (1 + h)\cos x \cos y &= a_0 d_0 + b_0 c_0 \pm \frac{a_1}{d_1}\sqrt{\delta}, \\ (1 + h)\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y &= a_1 d_1 + b_1 c_1 \mp \frac{a_0}{d_0}\sqrt{\delta}; \end{aligned}$$

che aggiunte e sottratte membro a membro conducono ai valori di $\cos(x - y)$ e di $\cos(x + y)$.

Premettiamo le note relazioni

$$(10) \quad \delta = \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}, \quad a_0 d_0 + a_1 d_1 = \cos a, \quad a_0 d_0 - a_1 d_1 = \cos(p - a),$$
$$b_0 c_0 + b_1 c_1 = \cos(b - c), \quad b_0 c_0 - b_1 c_1 = \cos(p - a),$$
$$a_0 d_1 + a_1 d_0 = \operatorname{sen}(p - a), \quad a_0 d_1 - a_1 d_0 = \operatorname{sen} a.$$

Moltiplicando a due a due l'eguaglianze $a_0 d_1 = \dfrac{\operatorname{sen}(p - a) + \operatorname{sen} a}{2}$,

$$a_1 d_0 = \frac{\operatorname{sen}(p - a) - \operatorname{sen} a}{2}, \qquad b_0 c_0 = \frac{\cos(b - c) + \cos(p - a)}{2},$$
$$b_1 c_1 = \frac{\cos(b - c) - \cos(p - a)}{2}$$

si troverà

$$a_0 d_1 \cdot b_0 c_0 + a_1 d_0 \cdot b_1 c_1 = \frac{1}{2}[\operatorname{sen} a \cos(p - a) + \operatorname{sen}(p - a) \cdot \cos(b - c)] =$$
$$\frac{1}{4}[\operatorname{sen}(2a - p) + \operatorname{sen}(2b - p) + \operatorname{sen}(2c - p) + \operatorname{sen} p] = \frac{1}{2}\operatorname{sen} p +$$

$\operatorname{sen}(p - a)\operatorname{sen}(p - b)\operatorname{sen}(p - c)$; avendo applicata l'identità goniometrica $\operatorname{sen}(m + n - l) + \operatorname{sen}(n + l - m) + \operatorname{sen}(m + l - n) = \operatorname{sen}(l + m + n) + 4 \operatorname{sen} l \operatorname{sen} m \operatorname{sen} n$ e sostituitovi $l = p - a$, $m = p - b$, $n = p - c$.

Ne segue la relazione

$$\frac{a_0 b_0 c_0}{d_0} + \frac{a_1 b_1 c_1}{d_1} = 1 + \frac{2\operatorname{sen}(p - a)\operatorname{sen}(p - b)\operatorname{sen}(p - c)}{\operatorname{sen} p}$$

ovvero (11) . . . . . $h = 1 + 2\operatorname{tang}^2 r$;

dove r significa il raggio sferico del cerchio iscritto nel triangolo ABC.

Così dalle formule (9) si traggono

$$(12) \quad \cos(x + y) = \cos^2 r \cos(p - a) \pm \cos^2 r \frac{\operatorname{sen}(p - a)}{\operatorname{sen} p} \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} \frac{A}{2} =$$
$$\cos^2 r \cos(p - a) \pm \frac{\operatorname{sen}^2 r}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}}$$

e $$\cos(x-y) = \cos^2 r \cos(p-b)\cos(p-c) \mp \frac{\operatorname{sen}^2 r}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{C}{2}}.$$

Mediante la prima di queste eguaglianze il Prof. Mertens estese la costruzione del Malfatti al triangolo sferico, perchè detti α, β, γ gli archi IA, IB, IC di cerchio massimo congiungenti i vertici A, B, C col polo I del cerchio iscritto si hanno per l'arco α le proprietà $\cos\alpha = \cos r \cos(p-a)$, $\operatorname{sen} r = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\frac{A}{2}$; onde a causa di $x+y = p-\omega_1-\omega_2$ la surriferita equazione (12) diverrà $\cos(p-\omega_1-\omega_2) = \cos\alpha\cos r \pm \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} r$ e si dovrà prendere il segno inferiore, deducendosi dalla figura $p-\omega_1-\omega_2 > p-a > \alpha - r$; dunque sarà $p-\omega_1-\omega_2 = \alpha + r$, e similmente $p-\omega_2-\omega_3 = \beta + r$, $p-\omega_3-\omega_1 = \gamma + r$; dalle quali otteniamo $\omega_1 = \dfrac{p+\beta-r-(\alpha+\gamma)}{2}$, $\omega_2 = \dfrac{p+\gamma-r-(\alpha+\beta)}{2}$, $\omega_3 = \dfrac{p+\alpha-r-(\beta+\gamma)}{2}$.

(*Continua*).

G. Bellacchi.

Sulla simmetria in alcune dimostrazioni della geometria elementare. — 1. Accade spesso in geometria che una stessa proprietà sia relativa a più enti geometrici, i quali entrano nello stesso modo a far parte dell'enunciato della proprietà stessa. Per cosiffatta proprietà si potrebbe, a priori, pretendere che la dimostrazione fosse, in certo modo, equamente distribuita rispetto a quegli enti, cioè tale che in essa gli enti stessi fossero ugualmente considerati. Invece, non di rado avviene che la dimostrazione dia la preferenza a qualcuno di essi; e ciò è artificioso.

2. Per primo esempio, considero il teorema: *la somma degli angoli di ogni triangolo è uguale a due retti*, nel quale appunto succede che i tre angoli di cui si tratta entrano in modo simmetrico nell'enunciato. Questo teorema si dimostra ordinariamente come segue:

« Sia ABC il dato triangolo, e si prolunghi uno dei lati, per es., BC, in D. Poi pel punto C si conduca la semiretta CE ugualmente diretta alla BA, ecc. ».

In questo modo si viene a costruire attorno al punto C la somma degli angoli del triangolo. Ma, nel ragionamento che si fa, gli angoli del triangolo non sono considerati ugualmente; accade cioè che i tre angoli formati attorno al punto C sono uguali a quelli del triangolo per ragioni tutte differenti: l'angolo BCA è uno degli angoli del triangolo; l'angolo ACE è uguale a CAB perchè *alterni interni* rispetto a parallele; e l'angolo ECD è uguale ad ABC perchè *corrispondenti* rispetto alle stesse parallele.

3. Proviamoci a dimostrare il teorema in modo che i tre angoli abbiano la stessa parte nel ragionamento.

Per un punto qualunque D del lato BC si conducano le semirette DE, DF ugualmente dirette alle AB, AC. Allora si viene a costruire attorno al punto D la somma degli angoli del dato triangolo. Ma, poichè si è data la pre ferenza al lato BC, neppure in questo modo la dimostrazione è imparziale. E ciò è tanto vero che per dimostrare che i tre angoli formati attorno al punto D sono rispettivamente uguali a quelli del triangolo, occorre basarsi su principî diversi; dire cioè: $EDB = ABC$, $CDF = BCA$ perchè alterni interni rispetto a parallele; $FDE = CAB$ perchè aventi i lati ugualmente diretti. Non si ottiene dunque una dimostrazione imparziale prendendo il punto D sopra uno dei lati del triangolo.

Prendiamo allora il punto D comunque nel piano ABC, e conduciamo per esso la retta EF parallela alla BC, e le due semirette DH, DK ugualmente dirette alle BA, CA. Otteniamo così attorno al punto D la somma degli angoli del triangolo; ma, neppure in questo modo, la dimostrazione sarà del tutto imparziale. Invero si dovrà dire: $HDF = ABC$, $EDK = BCA$ perchè hanno i lati ugualmente diretti; $KDH = CAB$ perchè hanno i lati diretti in senso contrario.

Per avere una dimostrazione completamente imparziale siamo così condotti, quasi naturalmente, a fare il ragionamento seguente. Per un punto qualunque D del piano ABC si conducano tre rette rispettivamente parallele ai lati del dato triangolo. Si formano così, attorno al punto D sei angoli, di cui tre non consecutivi sono eguali a quelli del triangolo perchè hanno con questi i lati ugualmente diretti, e gli altri tre sono pure essi uguali ai lati del triangolo perchè opposti al vertice dei primi tre. Attorno al punto D c'è quindi il doppio della somma degli angoli del triangolo; ma la somma degli angoli attorno ad un punto è 4 retti, perciò quella degli angoli del triangolo è 2 retti.

4. Se l'ordinaria dimostrazione di questo teorema si pone ora in confronto con l'ultima, si vedrà subito quanto nella prima vi sia d'artificioso. In essa, la costruzione necessaria viene, in certo modo, a rincantucciarsi in un punto particolare del piano, mentre può farsi in un punto qualsivoglia che, se si vuole, può anche essere fuori del piano (*).

Sfogliando qualunque trattato di geometria elementare, il lettore può trovare una quantità di teoremi le cui dimostrazioni, come quella del precedente, non sono equamente distribuite rispetto agli enti che vi entrano ugualmente. Gliene indico alcuni.

5. La dimostrazione del teorema: *ciascun lato di un triangolo è minore della somma degli altri due*, come si trova in Euclide, e in quasi tutti i libri di testo, non è simmetrica. È invece simmetrica la seguente.

Nel triangolo ABC debbasi dimostrare ad es. che $BC < CA + AB$. Conducasi la bisettrice dell'angolo A che incontri in D il lato BC. Essendo $\angle BDA > \angle CAD$ è anche $\angle BDA > \angle DAB$, quindi $BD < AB$. Nello stesso modo si prova che $DC < CA$, quindi $BD + DC < CA + AB$, ossia $BC < CA + AB$.

6. Prop. VI del libro XI d'Euclide: *se due linee rette sono perpendicolari ad un medesimo piano, saranno parallele tra loro.* La dimostrazione d'Euclide,

(*) Nella geometria del De Paolis potrebbe essere posta questa dimostrazione, senza che fosse necessario premettere altro.

che, nella sostanza, si trova riprodotta tale e quale nella maggior parte dei nostri libri di testo, dà la preferenza ad una delle due rette date, mentre queste sono contenute egualmente nell'enunciato.

Ecco ora una dimostrazione simmetrica del teorema.

Si premette: « se dal piede di una perpendicolare ad un piano si conduce « la perpendicolare ad una retta qualunque del piano, quest'ultima retta è per- « pendicolare al piano delle prime due. »

Ciò posto, sieno AB, CD due perpendicolari al piano α nei punti B e D. In *un punto qualunque* E della retta BD si conduca nel piano α la EF perpendicolare a BD. Pel teorema premesso, i due piani ABE, CDE sono perpendicolari alla EF nello stesso punto E, quindi coincidono; epperò le due rette AB, CD giacciono in uno stesso piano. — Esse poi non s' incontrano perchè entrambi perpendicolari a AD (*).

7. Teorema relativo alla *minima distanza* di due rette sghembe. Nella ordinaria dimostrazione di questo teorema, si conduce per una delle due rette date il piano parallelo all'altra. Basta questa costruzione, perchè la dimostrazione non sia equamente distribuita rispetto alle due rette date.

Per fare una dimostrazione imparziale, si potrebbe condurre per *ciascuna* di esse il piano parallelo all'altra; poi proiettare ciascuna retta sul piano passante per l'altra. L'intersezione dei due piani proiettanti è la perpendicolare comune alle due rette.

Oppure, si potrebbe condurre per un punto qualunque il piano parallelo alle due rette sghembe, e proiettarle poi ambedue su questo piano L'intersezione dei due piani proiettanti è ancora la perpendicolare comune alle due rette.

8. *In ogni triangolo, la bisettrice di un angolo interno divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati.* L'ordinaria dimostrazione di questo teorema non è simmetrica.

Eccone una simmetrica.

Nel triangolo ABC, sia AD la bisettrice dell'angolo A. Sieno E, F le proiezioni dei vertici B, C sulla perpendicolare ad AD condotta per A. Pel teorema di Talete:

$$BD : DC = AE : AF;$$

per la simiglianza dei triangoli ABE, ACF:

$$AE : AF = AB : AC;$$

quindi

$$BD : DC = AB : AC.$$

Si potrebbero proiettare i vertici B e C sulla stessa AD e si otterrebbe una dimostrazione poco differente dalla precedente.

(*) Questa dimostrazione fu da me comunicata tempo fa al chiar.mo Prof. A. Faifofer che la introdusse, in luogo di quella d'Euclide, nella sua geometria pei Licei (A. Faifofer: *Geometria ad uso dei Licei.* — Venezia, Tip. Emiliana, 1894).

La proprietà relativa alla bisettrice esterna può essere dimostrata in modo analogo.

9. Avrei potuto indicare altre proprietà, ma bastano le precedenti per richiamare l'attenzione del lettore sopra un argomento il cui studio può, senza dubbio, riuscire molto utile per l'insegnamento.

Fermo, marzo 1895.

CORRADO CIAMBERLINI.

A proposito della quistione 244'. — La quistione 244' è un caso molto particolare del problema seguente: *Determinare l'area del poligono avente per vertici i centri dei poligoni regolari della stessa specie, costruiti sui lati di un poligono qualunque inscritto in un cerchio, esternamente a questo poligono* — che passo a risolvere.

Sia $A_1 A_2 \ldots A_n$ il poligono fondamentale, R il raggio del cerchio O ad esso circoscritto ed R_k il raggio del cerchio O_k circoscritto al poligono costruito sul lato $A_{k-1} A_k$.

Per il punto O si conducano due perpendicolari che sceglieremo per assi coordinati e sia A_0 il punto in cui l'asse OX incontra il cerchio circoscritto al poligono $A_1 A_2 \ldots A_n$. Posto $\angle A_0 O A_1 = \theta_1$, $\angle A_0 O A_2 = \theta_2 \ldots A_0 O A_n = \theta_n$, osservando che gli angoli θ e il numero m dei lati di ciascun poligono esterno a quello primitivo determinano il problema, si hanno intanto le eguaglianze

$$OP = R \cos \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2}, \quad A_k P = R \operatorname{sen} \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2},$$

$$R_k = \frac{R \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}}, \quad O_k P = \frac{R \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} \cos \dfrac{\pi}{m}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}},$$

dove P indica il punto medio del lato $A_{k-1} A_k$.

Se ora si indicano con x_k, y_k le coordinate del punto O_k, dalle relazioni precedenti si trae senza difficoltà

$$x_k = \frac{R \operatorname{sen} \left(\dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \dfrac{\pi}{m} \right) \cos \dfrac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}},$$

$$y_k = \frac{R \operatorname{sen} \left(\dfrac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \dfrac{\pi}{m} \right) \operatorname{sen} \dfrac{\theta_k + \theta_{k-1}}{2}}{\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{m}}.$$

Ma l'area S del poligono avente per vertici i punti $O_1 [x_1, y_1]$, $O_2 [x_2, y_2]$, $\ldots$ $O_n [x_n, y_n]$, com'è noto, è data da

$$S = \frac{1}{2} \sum_1^n {}_k (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k);$$

pperò sostituendo si ricava dopo alcune riduzioni

$$S = \frac{R^2}{2} \operatorname{sen}^{-2} \frac{\pi}{m} \sum_1^n {}_k \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} + \frac{\pi}{m}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2} + \frac{\pi}{m}\right) \operatorname{sen} \frac{\theta_{k+1} - \theta_{k-1}}{2} \quad [1]$$

he è la formola cercata.

Osservazione 1ª. Il procedimento seguito è applicabile, salvo una minore emplicità di risultato, alla risoluzione del problema analogo che risulta dal sup- orre che i poligoni regolari costruiti sui lati del poligono fondamentale non iano tutti della stessa specie.

Osservazione 2ª. È notevole il caso in cui il poligono fondamentale è re- olare e si ha in pari tempo $m = n$. Allora la [1] diviene

$$S = 2 n R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{n},$$

poichè l'area S del poligono fondamentale è

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} n R^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n},$$

isulta infine

$$S = 4 \mathbf{S} \cos^2 \frac{\pi}{n}.$$

G. Candido.

Sui piani che tagliano un triedro qualunque secondo triangoli quilateri. — Alla quistione seguente: *Dato un triedro qualunque determi- are, se è possibile, mediante la geometria elementare la direzione dei piani he taglierebbero il triedro secondo triangoli equilateri*, posta nell'*Intermédiarie es Mathématiciens* (t. I, n° 263, p. 147), è data nel periodico stesso una breve isposta (t. I, p. 223) nella quale viensi a concludere che il problema non am- ıette in generale soluzione nella geometria della riga e del compasso.

Mi propongo in questa piccola nota di esaminare i casi particolari più notevoli ıei quali il problema ha soluzione elementare, partendo appunto dalla soluzione enerale.

1. Su ciascuna delle costole del triedro $V(ABC)$ sia fissato il senso positivo d il senso negativo come se si trattasse di tre assi coordinati coll'origine in V; A, B, C siano tre punti comunque presi sulle tre costole ed l, m, n siano, rispet- ivamente, le loro distanze, positive o negative, dal vertice V.

Le tre facce del triedro siano:

$$BVC = \alpha,\ CVA = \beta,\ AVB = \gamma$$

i tratta di determinare il numero e la posizione dei piani che uscendo da ın punto di una costola tagliano il triedro secondo triangoli equilateri. Visto he due piani paralleli tagliano un triedro secondo triangoli simili e che, evi- lentemente, il problema presenta le stesse fasi qualunque sia la costola su cui i sceglie il punto donde debbono uscire i piani suddetti, è lecito assumere per semplicità $l = 1$ e di considerare i piani che tagliano il triedro nel modo già detto passanti per A.

2. Sia ABC un triangolo equilatero e k sia la lunghezza del suo lato: considerando allora successivamente i triangoli AVB, BVC, CVA, per un noto teorema di trigonometria, si deducono le seguenti equazioni:

$$1 + m^2 - 2m\cos\gamma = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$
$$1 + n^2 - 2n\cos\beta = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$
$$m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha = k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Da queste eliminando k si ottengono due equazioni tra i parametri m ed n individuanti i piani dei quali si va in cerca e dopo ciò il problema può considerarsi risoluto.

Per fare l'accennata eliminazione, nella [3] sostituiamo successivamente i valori di k^2 dati dalla [2] e dalla [4]; consegue il sistema:

$$m^2 - 2mn\cos\alpha + 2n\cos\beta - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1']$$
$$n^2 - 2mn\cos\alpha + 2m\cos\gamma - 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2']$$

Dalla [1′] ricavando il valore di n si ha:

$$n = \frac{m^2 - 1}{2(m\cos\alpha - \cos\beta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Sostituendo questo valore nella [2′] e facendo tutte le riduzioni si arriva alla seguente equazione di 4° grado:

$$(1 - 4\cos^2\alpha)m^4 + 4\cos\alpha(\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\gamma)m^3 - 2(1 + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)m^2$$
$$+ 4\cos\beta(\cos\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma)m + 1 - 4\cos^2\beta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

3. È notevole una certa analogia che questa equazione ha colle equazioni reciproche, giacchè i coefficienti delle potenze di m equidistanti dagli estremi si mutano l'uno nell'altro col semplice scambio delle lettere α e β. La [4] diventa un'equazione reciproca se si suppone $\alpha = \beta$ od anche $\alpha = \beta = \gamma$, quindi *mentre il problema proposto è in generale del 4° grado, si riduce al 2° grado se il triedro ha due facce uguali o tutte e tre le facce uguali.*

Il grado della [4] potrà abbassarsi al secondo anche in altri casi, come p. e. quando siano nulli i coefficienti di m^3 e di m contemporaneamente: perchè questo accada basta che si abbia

$$\cos\alpha = 0, \ \cos\beta = 0, \ \text{cioè} \ \alpha = \beta = 90^0$$

ossia *basta che si tratti di un triedro birettangolo*; oppure basta anche che sia:

$$\cos\beta + 2\cos\alpha\cos\gamma = 0, \ \cos\alpha + 2\cos\beta\cos\gamma = 0$$

il che in generale ha luogo ancora per $\alpha = \beta = 90°$, ma *può aver luogo e in infiniti modi, per valori di α e β diversi da 90°* quando sia:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\cos\gamma \\ 2\cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè: $\cos\gamma = \pm \frac{1}{2}$ e perciò $\gamma = 60^\circ$ o $\gamma = 120^\circ$. Allora dovrà aversi:

per $\gamma = 60^\circ$, $\cos\alpha + \cos\beta = 0$ ossia $\alpha + \beta = 180^\circ$
per $\gamma = 120^\circ$, $\cos\alpha - \cos\beta = 0$ ossia $\alpha = \beta$.

Infine osserveremo che il coefficiente di m^4 si annulla per $\alpha = 60^\circ$ o per $\alpha = 120^\circ$ e che il termine noto della [4] si annulla pur esso per $\beta = 60^\circ$ o per $\beta = 120^\circ$; sicchè in ognuno di questi casi l'equazione si abbassa al 3° grado, ossia ha una radice infinita nel primo caso ed una nulla nel secondo. Che se poi i due casi si verificassero simultaneamente l'equazione si ridurrebbe al 2° grado e si avrebbe una soluzione infinita ed una nulla.

4. I casi in cui il problema è indeterminato corrispondono ai sistemi di valori di α, β e γ pei quali i coefficienti della [4] sono simultaneamente nulli, e perciò dovrà aversi:

$$\cos\alpha = \pm \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \pm \frac{1}{2}, \quad \cos\gamma = \pm \frac{1}{2}.$$

Ma avendo riguardo al coefficiente del termine medio che è $1 + 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ si vede subito che i sistemi di valori possibili per α, β e γ debbono esser tali che dei tre coseni due siano positivi ed uno negativo ovvero siano tutti e tre negativi. Ora nel secondo caso si avrebbe $\alpha = 120^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 120^\circ$ e perciò $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ il che è da escludersi, e nel primo caso si avrebbero due facce del triedro di 60° ed una di 120° il che pure è da escludersi non corrispondendo, come il caso precedente, che al sistema di tre rette concorrenti di un piano. Pertanto giova osservare a questo punto che le [1'] e [2'] e perciò la [4] sono anche atte a risolvere il seguente problema: *Date tre rette concorrenti in un punto e giacenti in un piano e fissato su una di esse un punto determinare i triangoli equilateri con un vertice in questo punto e gli altri due sulle altre due rette.*

Anche questo problema ha evidentemente quattro soluzioni in generale ed i due casi testè accennati sono appunto quelli in cui esso è indeterminato, come può dedursi assai facilmente anche con processo geometrico. Ebbene in tal caso si è condotti al seguente teorema: *Presi, a partire dal vertice, due segmenti qualunque sui lati di un angolo di 120° e un segmento uguale alla loro somma algebrica sulla bisettrice di questo angolo, gli estremi di questi tre segmenti sono sempre i vertici d'un triangolo equilatero.*

F. Mariantoni

Sulla definizione di divisione. — Rammento la ben nota definizione « moltiplicare un numero (moltiplicando) per un altro (moltiplicatore) vuol dire formare col moltiplicando un numero (prodotto), operando nello stesso modo che si è operato con l'unità, per formare il moltiplicatore ». Ora essendo la divisione l'operazione inversa della moltiplicazione, si potrà studiarla partendo dalla seguente

Definizione: *Dividere un numero (dividendo) per un altro (divisore) vuol dire formare con l'unità un numero (quoziente), operando nello stesso modo che si è operato col divisore per ottenere il dividendo* (*).

L'importanza di questa definizione consiste in ciò che essa ci fornisce direttamente le regole della divisione. Dalla posta definizione risulta che il dividendo è formato col divisore nello stesso modo che con l'unità è formato il quoziente. Di qui si ricava il

Teorema I. — *Il dividendo di una divisione è sempre uguale al prodotto del divisore per il quoziente.*

Sia dato p. e. da dividere 13 per 5. Il 13 si ottiene da 5 facendo la somma di $5+5$ e di una *parte* del 5 formata scomponendo questo nelle sue unità (che per definizione sono tutte identiche fra loro), e prendendo 3 di queste. Per poter fare altrettanto con l'unità conviene assumere la seguente

Convenzione. — *L'unità può considerarsi come l' insieme di un qualsiasi numero di parti fra loro eguali*, parti che si chiameranno sedicesimi se sono in numero di 16, ed ognuna di esse si indicherà col simbolo $\frac{1}{16}$, e quindi 7 di esse col simbolo $\frac{7}{16}$ ecc., ecc.. E qui possono sottintendersi le definizioni e le proprietà fondamentali delle frazioni.

Ciò posto il cercato quoziente sarà $1+1+\frac{3}{5}=2+\frac{3}{5}$, ed essendo $1=5$ quinti, ed avendosi per ipotesi $5+5+3=13$, sarà 5 quinti + 5 quinti + 3 quinti $=\frac{13}{5}$, cioè $13:5=\frac{13}{5}$; si ha poi immediatamente $4:7=\frac{4}{7}$. Viceversa $\frac{13}{5}=13:5$, $\frac{4}{7}=4:7$. Quindi il

Teorema II. — *Il quoziente di due numeri interi si può porre uguale ad una frazione avente per numeratore il dividendo e per denominatore il divisore; e viceversa ogni frazione può considerarsi come il quoziente del numeratore per il denominatore.*

Tralasciando qui di parlare di quoziente incompleto, vediamo invece come si possano ricavare le regole della divisione con frazioni. Sia da dividere un numero qualunque m per una frazione $\frac{a}{b}$ (a, b interi), dove supporremo $b=1$

(*). Si può obbiettare che questa definizione così esposta contenga un certo grado d'indeterminatezza. Questa indeterminatezza, che la proposta definizione ha in comune con quella sopra citata per la moltiplicazione, consiste in ciò che non è tracciata la via per la quale devesi intendere prodotto il dividendo mediante il divisore, come nella detta definizione di moltiplicazione non è tracciata la via per la quale si deve intendere prodotto il moltiplicatore mediante l'unità (ed evidentemente partendo dall'unità in più modi, ed anche ben diversi l'uno dall'altro, può formarsi un dato numero). Questa indeterminatezza si può togliere in ambedue i casi, ed anzi potrei far vedere che, tolta quella per la moltiplicazione, rimane facilmente tolta anche l'altra, ma siccome appunto per questo le osservazioni a ciò opportune riguardano prima la moltiplicazione che la divisione, e di più sono tali da condurre a considerazioni d'indole più estesa di quella inerente a questa brevissima nota, che non ha altra pretesa tranne che di porre in evidenza un punto di vista sotto il quale si può considerare la divisione in armonia con un punto di vista sotto il quale in moltissimi trattati viene considerata la moltiplicazione, così credo opportuno di rimandare tali osservazioni ad altra occasione, tanto più che l'indeterminatezza in discorso è soltanto di forma anzichè di sostanza.

QUISTIONI PROPOSTE (**)

285*. Se l'angolo in A del triangolo ABC è di 60° i centri del cerchio circoscritto, del cerchio inscritto, del cerchio ex–inscritto tangente al lato BC, l'ortocentro H e i punti simmetrici di A rispetto a BC, BH e CH, si trovano nel medesimo cerchio passante per B e C.

G. Vitali.

286*. Risolvere il sistema d'equazioni

$$(x+y)(xy+1)=axy$$
$$(x^3+y^3)(x^3y^3+1)=bx^3y^3.$$

F. Cecchérini.

287*. Se a partire dal vertice A di un triangolo ABC si portano sui lati AB, AC i segmenti $AB_2^A = AC_2^A = BC$ e sui prolungamenti degli stessi lati i segmenti $AB_1^A = AC_1^A = BC$, e si opera nello stesso modo per gli altri vertici, dimostrare che i sei punti di ciascuno dei seguenti gruppi: $A_1^B A_1^C B_1^A B_1^C C_1^A C_1^B$, $A_1^B A_1^C B_2^A B_2^C C_2^A C_2^B$, $A_2^B A_2^C B_1^A B_1^C C_2^A C_2^B$, $A_2^B A_2^C B_2^A B_2^C C_1^A C_1^B$ sono in uno stesso cerchio concentrico rispettivamente al cerchio inscritto e a ciascuno dei cerchi ex-inscritti al triangolo ABC.

G. Russo.

288**. Un lato a di un triangolo è medio armonico fra gli altri due b e c; determinare gli angoli B e C in funzione di A ed il limite di quest'angolo.

G. Bellacchi.

289**. Dimostrare che il rapporto della potenza d'un triangolo (*) alla sua area, è uguale al rapporto fra il quadruplo del raggio del circolo d'Eulero e un cateto d'un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il raggio del primo circolo di Lemoine e per altro cateto il raggio del circolo di Brocard del triangolo.

A. Bozal Obejero.

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

(**) Si chiama potenza di un triangolo la quantità $\frac{1}{2}\cdot(a^2+b^2+c^2)$.

290. Un triangolo si deforma conservando un angolo fisso in grandezza e posizione e costante la sua potenza (semisomma dei quadrati dei lati). Trovare l'inviluppo del lato mobile.

JUAN J. DURÁN LORIGA.

291.** Se per un punto M del piano di un triangolo si tracciano delle parallele ai lati e si costruiscono i coniugati armonici di M rispetto ai segmenti intercetti dai lati su queste parallele, i tre punti così determinati stanno in linea retta.

Le rette ottenute colla costruzione precedente per un punto ed i suoi isobarici, o per i tre punti semireciproci di un punto dato, formano un triangolo che è triplamente omologico a quello fondamentale.

JUAN J. DURÁN LORIGA.

292*. Mostrare che le radici dell'equazione quadratica

$$(1-\lambda)x^2 - \left\{a + a' - \lambda(b+b')\right\} x + aa' - \lambda bb' = 0,$$

ove a, b, a', b', λ sono numeri reali, sono sempre reali e distinte se è $\lambda(a-b)(a'-b') \geqq 0$, e se è $\lambda(a-b)(a'-b') < 0$, dette radici possono essere reali e distinte, reali ed eguali o immaginarie coniugate.

A. DEL RE.

293.** Se gli spigoli di un triedro trirettangolo, di vertice O, sono tagliati da un piano arbitrario π nei punti A, B, C, e sono M, M' due punti qualunque simmetrici rispetto a π, si ha la relazione

$$\frac{4\,\overline{MM'}^2}{(\overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2)^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2} \; (*).$$

A. DEL RE.

294. Se a, b, c, d denotano le distanze, di un punto arbitrario dello spazio, dai vertici di un tetraedro regolare di lato l, si ha la relazione

$$3\,(l^4 + \sum a^4) = 2\,(l^2 \,.\, \sum a^2 + \sum a^2 b^2).$$

V. RETALI.

(*) Questa relazione si può dedurre facilmente dalla seconda terna di formule della quistione 256* (A. DEL RE).

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

F. KLEIN. — *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie, ausgearbeitet von* F. TÄGERT. — Leipzig, Taubner 1895, p. V + 66 con 10 fig. nel testo e 2 tav. lit. - 8° (*).

Spesso e non senza ragione viene lamentato il *baratro* che esiste fra la matematica scolastica e la matematica superiore. Ed infatti non si può negare che il futuro insegnante di matematica da studente ascolta assai poco di quello che potrà direttamente sfruttare nel proprio insegnamento e che per converso gli insegnanti universitari scrivono quasi sempre i loro libri pei loro eguali e non sembrano sforzarsi in alcun modo di offrir qualche cosa anche a coloro che non appartengono più alle scuole superiori. Tali inconvenienti sono inevitabili sintantochè le nostre università tedesche (**) rimarranno quello che furono sino ad ora, sintantochè esse non saranno semplici seminari nel senso più alto della parola, ove i futuri docenti non apprendono altro che quello di cui abbisognano nel proprio ufficio. Ma si può tuttavia ottenere che questi inconvenienti siano meno sensibili, e contribuire a ciò è un dovere dal cui adempimento non possono sottrarsi gli insegnanti universitari. Perciò essi devono curare che siano regolarmente tenute delle conferenze inferiori, ove vengano trattati da un punto di vista elevato alcuni temi particolari di matematiche elementari, specialmente i principii della geometria. Essi devono d'altronde anche rendere possibile agli insegnanti di matematica delle scuole secondarie, di avere notizia almeno dei risultati scientifici capaci di gettar nuova luce sulla matematica elementare e sulle questioni che essa presenta.

Da questo punto di vista la presente operetta dev'essere salutata con gioia. Essa deve la vita ad alcune lezioni tenute dapprima dinanzi agli intervenuti ad un corso festivo di lezioni fatto all'università di Gottinga e poi in forma ampliata durante il semestre estivo 1894. Il sig. Tägert, insegnante di grado superiore ad Ems, ha redatte con gran cura tali lezioni per la stampa.

Queste lezioni hanno per tema una serie di questioni le quali si offrono spontaneamente nella geometria elementare, la soluzione delle quali però non può essere ottenuta coi mezzi della geometria elementare stessa. Perciò mentre nell'insegnamento scolastico è forza limitarsi ad accennare a tali questioni, senza esaminarle, si può però oggi esigere da qualsiasi insegnante di matematica che

(*) Crediamo opportuno riferire tradotto il seguente giudizio che un egregio scienziato espresse nella *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* intorno alla più recente opera di F. Klein, per attrarre su di essa l'attenzione dei lettori del nostro *Periodico*. Ci è così offerta una occasione opportuna per annunziare che ben presto la casa editrice Rosenberg e Sellier di Torino ne pubblicherà una traduzione italiana dovuta al nostro collaboratore prof. F. Giudice; a tale traduzione sarà premessa una prefazione del prof. G. Loria.

(**) Altrettanto si può ripetere per le università italiane.

egli abbia delle idee chiare intorno al loro significato ed alla loro soluzione. Ciò gli è reso possibile dalle lezioni di Klein, giacchè queste non presuppongono che i primissimi fondamenti dell'analisi infinitesimale.

I tre problemi: *duplicare un cubo* (problema di Delo), *trisecare un angolo qualunque*, e *trovare la quadratura del circolo* formano in certo qual modo la cornice delle lezioni di Klein. Mentre si trattano e si esaminano d'un tratto delle intere classi di problemi congeneri, si arriva a concludere che questi problemi di antica celebrità non si possono risolvere colla riga ed il compasso.

I due primi fra quei tre problemi conducono tosto alla questione più generale della ricerca delle espressioni algebriche costruibili colla riga e col compasso, e quindi alla questione di determinare le equazioni algebriche risolubili con radici quadrate.

Sciolta quest'ultima questione, si conclude agevolmente l'irresolubilità *regula et circieri* del problema di Delo e della trisezione dell'angolo. A questo tengon dietro le ricerche sulla divisione della circonferenza, in particolare è esposta diffusamente la costruzione del poligono regolare di 17 lati. Finalmente è fatto un rapido cenno delle costruzioni eseguite mediante curve di ordine superiore.

Tale è il contenuto della prima sezione. Nella seconda vien dimostrato, seguendo G. Cantor, l'esistenza di numeri trascendenti; richiamiamo l'attenzione del lettore su queste considerazioni semplici e belle. Dopo uno sguardo storico sulla evoluzione che subì il problema della quadratura del circolo, vien poi dimostrata la trascendenza dei numeri e e π, il che da Hilbert, Hurwitz e Gordan venne reso straordinariamente semplice. Così resta in pari tempo dimostrata l'impossibilità della quadratura del cerchio. In un'*Appendice* è poi brevemente descritto l'apparato inventato da Abdank-Abakanowicz per eseguire delle quadrature meccanicamente.

Come si vede, la materia di queste lezioni di Klein è estremamente attraente ed istruttiva, e poichè esse, come si è già detto, non presuppongono che i primissimi fondamenti dell'analisi infinitesimale, così possono venire caldamente raccomandate a tutti gli insegnanti di matematica. In pari tempo si può desiderare che le legga qualunque studente di matematica.

F. ENGEL.

GIUSEPPE PESCI, Professore nella R. Acc. Navale. — *Trattato elementare di trigonometria piana e sferica* con 2027 esercizi. — Appendice (Parte 1ª: Generalità sui calcoli numerici e sull'uso delle tavole logaritmico-trigonometriche. — Parte 2ª: Uso delle tavole logaritmico-trigonometriche del Caillet). — Libro di testo per la R. Accad. Navale. — Livorno, Raffaello Giusti, 1895 (*).

Questo libro, sebbene modesto negli intenti, è indubbiamente il frutto di accuratissimi studi ed ha un'impronta personale marcatissima sia per l'indirizzo saviamente eclettico, sia pei notevoli contributi originali. Il fine precipuo, che

(*) *Trattato di trigonometria elementare*: L. 4. — *Appendice al Trattato*: L. 1.

è quello di condurre gli allievi al pratico uso della trigonometria, vi è inseguito con ansia amorosa attraverso alle accurate distinzioni e ai graduati esercizi. Nulla vi è trascurato di ciò che la generalità e il rigore scientifico richiedono, ma ciò che non è assolutamente necessario per la risoluzione numerica dei triangoli è stampato in carattere più piccolo in modo da mostrare subito ciò che per la sola pratica si può lasciare.

Nel cap. I dei *Preliminari ed introduzione* troviamo la misura degli archi e degli angoli; nel II sono dimostrate con esattezza le formule $AB + BC + CA = 0$ pei segmenti di una stessa retta e l'altra $(AB) + (BC) + (CA) = 2k\pi$ per gli archi di uno stesso circolo; formule utilissime in seguito, per esempio nella dimostrazione del teorema d'addizione, nelle applicazioni della trigonometria sferica, ecc.

Il cap. III (*Coordinate di un punto*) è un'innovazione coraggiosa nella trattazione odierna della trigonometria in Italia, ed è giustificatissima, perchè, senza presentare difficoltà di nessun genere, permette di dare una definizione assai semplice delle funzioni trigonometriche. La considerazione delle coordinate di un punto sulla sfera, aggiunta dall'A., sarà poi utile nelle importanti applicazioni nautiche della trigonometria sferica.

Nel capitolo IV si indica lo scopo della trigonometria.

Dopo ciò si passa alla Parte I (*Teoria delle funzioni trigonometriche*). Nel cap. I, si definiscono le funzioni trigonometriche col metodo già usato dal Cagnoli, vale a dire: fissato in modo opportuno un sistema di assi Cartesiani ortogonali e indicate con x, y le coordinate dell'estremo dell'arco α e con ρ il raggio del cerchio, i rapporti $\frac{y}{\rho}$, $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{\rho}{y}$, $\frac{\rho}{x}$, $\frac{x}{y}$ si chiamano rispettivamente seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente di α (i casi nei quali x od y sono nulli vengono poi trattati a parte con considerazioni al limite). L'A. dà poi anche (in carattere minuto) la definizione geometrica ordinaria delle linee trigonometriche.

Nel cap. II troviamo la nozione di archi *associati*, cioè di archi i cui estremi cadono nei vertici di un rettangolo inscritto nel cerchio fondamentale e coi lati paralleli agli assi. Questa nozione semplifica sensibilmente la ricerca (sempre laboriosa) delle espressioni generali degli archi aventi una stessa funzione trigonometrica.

Nel cap. III si fa la riduzione al 1° quadrante, si considerano gli archi supplementari e complementari e si finisce colla opportunissima riduzione al primo semiquadrante.

Nel cap. IV sono esposte le relazioni fra le funzioni trigonometriche di uno stesso arco, le quali, grazie alla definizione analitica, possono essere direttamente stabilite fra i valori algebrici (e non soltanto assoluti) delle funzioni stesse.

Il cap. V (tutto in carattere minuto) è dedicato a considerazioni generali, illustrate da esempi, sulle identità, le equazioni trigonometriche, e le eguaglianze trigonometciche subordinate.

Nel cap. VI si dànno le formule relative all'addizione degli archi, deducendole da quella che dà lo sviluppo di cos $(\alpha + \beta)$. La dimostrazione di questa formula è sostanzialmente quella di Cauchy, ma l'A. ha saputo porla sotto una forma che è molto semplice e che vale qualunque siano gli archi α e β, evitando così i lunghi procedimenti di generalizzazione che si devono ordinariamente seguire. Nel § 67, scritto in carattere minuto, ammessa la formula $\cos(\alpha + \beta + \ldots) + i \operatorname{sen}(\alpha + \beta + \ldots) = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta)\ldots$ (la quale del resto si può dimostrare elementarmente cogli sviluppi di $\cos(\alpha + \beta)$ e $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$) l'A. dà gli sviluppi per una somma di quanti si vogliano archi.

Nel cap. VII si dànno e si discutono le formule per la moltiplicazione degli archi per 2 e per 3 e, in carattere minuto, si dà colla formula (ammessa) di Moivre la moltiplicazione per n.

Nel cap. VIII si dànno e si discutono le formule per la bisezione degli archi, accennando in carattere minuto alla divisione per m (forse gli accenni a questo e ad altri analoghi risultati generali potevano senza danno essere tralasciati).

Nel cap. IX sono esposte le trasformazioni in prodotti delle somme e differenze di seni e coseni e i metodi principali per rendere una formula calcolabile coi logaritmi.

Troviamo poi nel cap. X le prime approssimazioni per i valori di seno e coseno per mezzo dell'arco (le quali permettono di accennare alla costruzione di una tavola dei valori naturali delle funzioni trigonometriche); e nel cap. XI un cenno sulle funzioni trigonometriche inverse.

Parte II. *Trigonometria piana.* Comincia con una *Premessa* che riguarda la generalità sulla risoluzione dei triangoli; l'A. giustamente insiste sulla necessità del controllo geometrico prima di ammettere la soluzione data dall'analisi (§ III).

I cap. I e II trattano delle relazioni fra gli elementi di un triangolo rettangolo e della sua risoluzione nei vari casi.

Il cap. III espone le relazioni fondamentali fra gli elementi di un triangolo qualunque in modo da richiamare l'analogia colla trigonometria sferica. Così qui troviamo il teorema dei seni, il teorema delle projezioni ($a = b\cos\gamma + c\cos\beta$, che richiama la relazione fra 5 elementi in trigonometria sferica espressa dalla formola $\operatorname{sen} a \cos c = \operatorname{sen} b \cos\gamma + \operatorname{sen} c \cos\beta \cos a$), il teorema di Carnot ($a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, analogo del teorema d'Eulero $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos\alpha$), il teorema delle cotangenti (espresso da sei formole del tipo $\operatorname{ctn}\alpha = \dfrac{b - a\cos\gamma}{a \operatorname{sen}\gamma}$, le quali corrispondono a quelle del tipo $\operatorname{ctn} a \operatorname{sen} b = \cos b \cos\gamma + \operatorname{sen}\gamma \operatorname{ctn}\alpha$), le espressioni di $\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha$, $\cos\frac{1}{2}\alpha$, ecc. per mezzo dei lati, le formule di Delambre e di Nepero (che sono le corrispondenti delle omonime); e questa cura dell'analogia sembra anche a me (V. la prefazione dell'A.) didatticamente utilissima.

Nel cap. IV si dà la risoluzione di un triangolo qualunque; le formule di soluzione sono sempre discusse analiticamente e poi i risultati così ottenuti sono confermati e interpretati geometricamente.

Nei cap. V, VI, VII vengono date varie espressioni dell'area, del raggio, del cerchio circoscritto, ecc.; e finalmente sono fatte alcune applicazioni della trigonometria piana a problemi di topografia e di nautica.

Se l'A. non si è intrattenuto sopra esempi di risoluzione di triangoli quando i dati non sono tutti lati od angoli, ha però proposti numerosi esercizi di questo genere (V. per es. gli esercizi dal 1046 al 1059, dal 1320 al 1337, ecc.). È notevole la cura colla quale sono disposti i calcoli negli esempi numerici; questa disposizione sarà poi commentata dall'A. nell'Appendice.

Parte III. *Trigonometria sferica* Nella *Premessa I* l'A. espone e dimostra le fondamentali proprietà geometriche dei triangoli sferici. Egli, dopo aver accennato ai triangoli sferici in generale, si limita, conformemente all'uso, ai triangoli sferici i cui lati ed angoli sono minori di 180^0, e credo che questo sacrificio della generalità eviti in seguito confusioni sulla validità di certe formule; per es. le formule di Gauss (Delambre) sono valide soltanto nell'ipotesi restrittiva (Cfr. Baltzer).

La *Premessa II* è analoga alla *Premessa* della trigonometria piana.

Nel cap. I si dimostrano geometricamente le 10 relazioni fra tre elementi di un triangolo sferico rettangolo; e per rammentarle l'A. dà la nota regola di Nepero. È notevole poi il § 186 ove vien brevemente esposto il metodo per dedurre le formule dei triangoli rettangoli piani da quelle degli sferici.

Il cap. II tratta della risoluzione di un triangolo sferico rettangolo nei vari casi, facendo seguire ad ogni caso un'accurata discussione.

Nel cap. III si deducono dapprima dalle formule pei triangoli rettangoli le formule di Eulero per un triangolo qualunque; metodo vantaggioso perchè evita le successive generalizzazioni che occorrono colla diretta dimostrazione (Cfr. Serret). Dal teorema di Eulero si derivano poi nel solito modo quello dei seni, quello delle proiezioni e quello delle cotangenti; ma è interessante vedere che questi tre teoremi vengono anche dimostrati geometricamente. I correlativi sono dapprima derivati direttamente dalle formule dimostrate ed in seguito poi stabiliti anche colla considerazione del triangolo polare. Nel § 219 si dànno le note espressioni di sen $\frac{1}{2}\alpha$, cos $\frac{1}{2}\alpha$, tang $\frac{1}{2}\alpha$ per mezzo dei lati, e le correlative. Nel § 221 si trovano le formule di Delambre, dalle quali si ricavano quelle di Nepero, che sono pure dimostrate in un secondo modo. In fine nel § 223 vengon date le belle formule di Cagnoli. A tutte le formule meno semplici è poi opportunamente aggiunto un sussidio mnemonico (*).

Il cap. IV, dedicato alla risoluzione di un triangolo sferico qualunque, è notevole per la varietà dei metodi, il rigore delle discussioni e la copia di esempi

(*) A questo proposito, senza pretendere di dare un valido sussidio mnemonico, faccio notare che, dando ad $F_m x$ il significato di cos x per m intero pari e di sen x per m intero impari, le quattro formule di Delambre si potrebbero compendiare nell'unica

$$\frac{F_p \frac{1}{2}(\alpha + (-1)^q \beta)}{F_{p+1} \frac{1}{2}\gamma} = \frac{F_q \frac{1}{2}(a + (-1)^p b)}{F_q \frac{1}{2} c},$$

essendo p e q interi arbitrari.

numerici. Uno dei due casi ambigui (a, b, α) è illustrato da una discussione interessante per la sua perfetta analogia con quella relativa al caso corrispondente nel piano.

I cap. V e VI dànno le varie espressioni dell'eccesso sferico, del raggio del cerchio circoscritto, ecc.; ed è notevole il modo semplicissimo col quale le formule relative al circolo circoscritto sono dedotte immediatamente da quelle relative al circolo inscritto.

Finalmente troviamo il notevolissimo cap. VII. Nella prima parte di questo capitolo si studiano con molta cura e generalità le principali quistioni relative alla navigazione per circolo massimo; questa parte può offrire argomento a facili e interessati esercizi anche per chi non segue gli studi nautici. Nella seconda parte poi si dànno le relazioni fra le coordinate orarie e le azimutali di un astro, e con queste si chiude il Trattato.

In fine al Trattato si trova indicata per ogni capitolo una serie numerosa e ben ordinata di esercizi. E in questa sono notevoli le abbondanti raccolte di identità fra gli elementi di un triangolo piano o sferico e di esercizi numerici (con i risultati) per la risoluzione dei triangoli stessi. Gli esercizi aggiunti al cap. VIII della Parte III hanno in gran parte carattere originale e sono applicazioni interessanti della trigonometria sferica alla nautica e alla geografia.

Appendice. — Un punto negletto nelle scuole e nei Trattati è in generale l'uso razionale delle tavole logaritmico-trigonometriche, e il calcolo con numeri approssimati; quest'Appendice è quindi assai opportuna.

Nei primi due capitoli della Parte I si parla dei numeri approssimati e si dànno le regole per le quattro operazioni elementari abbreviate; per ognuna poi di queste operazioni si cercano dei limiti per gli errori che le regole stabilite possono introdurre; ed è stato possibile all'A. fare questa ricerca in generale avendo prima (§ 7, I) esteso, molto opportunamente, il concetto di ordine di una cifra decimale (*).

Nel III cap. si spiega in generale e si applica ad esercizi speciali il principio delle parti proporzionali.

Nel cap. IV (in carattere minuto) vengono discusse le varie specie di errori che si incontrano nella interpolazione semplice, e cioè:

1º l'errore g che proviene dall'ammettere il principio delle parti proporzionali; i limiti di questo errore sono ammessi come un dato della matematica superiore (**);

2º l'errore l che proviene dalla circostanza che i numeri sui quali si opera sono essi stessi approssimati;

3º l'errore m che nasce dalla mancanza in alcune tavole delle cifre decimali dei prodotti parziali dati dalle tavolette ausiliarie;

4º l'errore n che proviene dal fare i calcoli in modo abbreviato.

Credo che la ricerca di un limite per l sia condotta in modo più semplice

---

(*) Cfr. Fasc. I, anno X di questo Periodico.

(**) L'A. ha mostrato come abbia ottenuti questi limiti in una Memoria inserita nella *Rivista Marittima* dello scorso luglio.

del consueto e che i criteri pratici per abbreviare le operazioni che si devono fare per la interpolazione non siano stati dati fin qui da nessuno, mentre è certo che, almeno nella ricerca inversa, sono indispensabili. I limiti trovati per gli errori sono poi modificati dall'A. (§§ 26-29) per adattarli alle tavole del Caillet, nelle quali le tavolette delle parti proporzionali sono calcolate sulle medie di dieci o quindici differenze tabulari consecutive.

I capitoli V e VI dànno le regole per l'uso dei cologaritmi e per le disposizioni da darsi ai calcoli e sono di grande interesse per la scuola. La Parte II tratta diffusamente dell'uso delle tavole del Caillet, ma ciò che ivi è scritto in carattere minuto e che riguarda gli errori prodotti dalla interpolazione nelle varie tavole esaminate si adatta a qualunque tavola.

Questa rivista del lavoro del prof. Pesci spero induca in molti il desiderio di leggerlo e di accoglierlo nei nostri Istituti tecnici.

G. Sforza.

IGINIA MASSARINI, dott. in matematica. — *Teoria delle congruenze di* P. L. Tchebicheff, traduzione italiana con aggiunte e note. — Roma, Ermanno Loescher e C., 1895. — Prezzo L. 6.

La teoria delle congruenze dello Tchebicheff, *opera classica, mirabile per la scelta delle materie di cui tratta, scritta magistralmente* (sono parole del Battaglini) ebbe fra noi una degna traduzione per opera della signorina Massarini.

Chiara ed accurata la versione, opportune le note ad illustrazione dell'originale che, in alcuni posti, e specialmente nell'appendice 3ª (numero dei numeri primi minori di un dato limite), è compendioso più che la difficoltà dell'argomento non consentirebbe. Il lavoro della Massarini riuscirà perciò utile e gradito agli studiosi, come l'autrice si ripromette: ma perchè ai benefici di esso potessero partecipare anche gli studenti delle scuole mezzane, occorrerebbe che un elegante volumetto ne raccogliesse la parte più elementare ed attraente. A ciò l'autrice ha già pensato, e ne dà indizio nella prefazione al suo libro: resta che ci mantenga la grata promessa.

G. Frattini.

Bulletin de mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. B. Niewenglowski, docteur ès sciences, etc.. Rédacteur en chef: L. Gérard, docteur ès sciences, etc.. Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine Dubois, Paris. — Abonnements: un an, 6 fr.

Siamo lieti di annunziare ai nostri lettori l'apparizione di questo nuovo periodico, che per il nome del direttore, ben noto nel campo scientifico come direttore anche del *Bulletin de mathématiques spéciales* ed autore di pregiate opere sulle matematiche superiori, e del redattore, professore al liceo Ampère di Lione, promette uno speciale interesse.

Esso si occupa anche degli elementi delle scienze fisiche.

VARIETÀ

In seguito al voto degli aderenti alla proposta di un'Associazione fra gli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie, risultarono eletti a membri del Comitato provvisorio per la compilazione dello Statuto i Proff. Bettazzi R. — Brambilla A. — De Amicis E. De Zolt A. — Frattini G. — Gazzaniga P. — Giudice F. — Lugli A. — Panizza F. — Retali V. — Sforza G.

Questo Comitato si è adunato in Roma nei giorni 16, 17 e 18 settembre ed ha redatto lo Statuto che segue, il quale è stato diramato a tutti i professori delle scuole mezzane, con annessa scheda di sottoscrizione a titolo di adesione definitiva.

STATUTO DELL'ASSOCIAZIONE *MATHESIS*

Art. I.

Fra gli insegnanti di matematica nelle scuole secondarie italiane è costituita un'Associazione denominata - **Mathesis** - *Associazione per studi fra gli insegnanti di Matematica delle scuole medie*, il cui oggetto è il miglioramento della scuola ed il perfezionamento degli insegnanti, sotto il punto di vista scientifico e didattico.

Art. II.

A raggiungere il proprio scopo l'Associazione:

a) tiene riunioni plenarie e parziali;

b) promuove e favorisce ricerche scientifiche e discussioni didattiche;

c) pubblica sinossi di corsi di matematiche elementari o di speciali teorie, in relazione ai diversi gradi d'insegnamento;

d) cura la formazione di una biblioteca matematica circolante ad uso dei soci.

Art. III.

Saranno di diritto ammessi come soci, dietro semplice loro domanda, i professori di matematica appartenenti al personale insegnante o direttivo delle scuole medie, governative o pareggiate; quelli delle altre scuole secondarie dovranno ottenere l'approvazione del Comitato direttivo (Art. IV).

Saranno *soci fondatori* coloro che si inscriveranno entro un mese dalla pubblicazione del presente Statuto.

Art. IV.

L'Associazione è retta da un Comitato direttivo composto di 12 soci ed eletto a maggioranza di votanti. Il Comitato elegge nel proprio seno un Presidente ed un Vice presidente, ed elegge pure, fra i soci, un Segretario-economo.

Art. V.

L'anno sociale comincia col 1° luglio. Il Comitato è eletto nel mese di giugno, entra in carica colla prima adunanza (Art. VIII) e rimane in funzione due anni.

Art. VI.

Al Comitato direttivo è affidato l'indirizzo scientifico e didattico dell'Associazione, la redazione di un bollettino e la ripartizione dei fondi sociali.

Art. VII.

La città ove risiede il Presidente del Comitato direttivo è, pel biennio (Art. V), sede dell'Associazione.

Art. VIII.

Nelle vacanze autunnali, in sedi da destinarsi anno per anno, si terrà dal Comitato direttivo un'adunanza. In questa adunanza verrà presentato dal Presidente del Comitato il bilancio dell'anno cessato, e verrà deliberata la ripartizione delle spese pel nuovo anno sociale secondo l'entrata.

Il Presidente in carica, sotto la propria responsabilità, curerà che queste spese non siano oltrepassate nè devolte ad altro scopo.

Nella stessa adunanza verrà stabilito il lavoro dell'anno.

Quando tale adunanza ha luogo nell'anno della elezione, i membri del Comitato cessante potranno intervenirvi, ma non avranno voto deliberativo.

ART. IX.

L'Associazione pubblica un bollettino, nel quale si daranno gli atti della Società, si discuteranno questioni relative al miglioramento dei programmi e alla scelta dei libri di testo, si forniranno notizie su tutto ciò che può interessare l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie e si darà l'elenco dei libri della biblioteca dell'Associazione (Art. II).

ART. X.

I soci sono tenuti al pagamento di una quota annuale di lire **sei** (da trasmettere entro il mese di giugno di ciascun anno al Segretario-economo) e di una tassa d'ingresso di lire **quattro**.

I soci fondatori (Art. III) sono esenti dalla tassa d'ingresso.

I soci di nuova inscrizione verseranno la stessa somma qualunque sia, entro l'anno, l'epoca del loro ingresso nella società.

ART. XI.

Le dimissioni presentate in qualsiasi epoca da un socio non lo esonerano dal pagamento del contributo relativo all'anno in corso. I nomi dei contravventori alla presente disposizione, od a quella dell'articolo precedente, saranno pubblicati nel Bollettino dell'Associazione sotto la rubrica « *Soci morosi* »; però il Comitato direttivo ne darà preavviso agl' interessati.

ART. XII.

Il modo di funzionare del Comitato direttivo sarà fissato da apposito *Regolamento* redatto dal Comitato stesso.

Roma, 15 ottobre 1895.

Ora annunziamo con viva compiacenza che le sottoscrizioni avendo raggiunto il centinaio (*), l' Associazione MATHESIS rimane definitivamente costituita e i soci saranno invitati fra breve ad eleggere il comitato direttivo (*Statuto*, art. IV). Il primo anno sociale terminerà col 30 giugno 1896 (Art. V).

Quei colleghi a cui non fosse pervenuta la scheda d'associazione, e intendono far parte della Società, potranno farne richiesta alla redazione del *Periodico*. Essi verranno egualmente iscritti come *soci fondatori*.

(*) Il numero minimo stabilito per la costituzione della Società era stato fissato in 70.

Chiusura della Redazione il dì 16 novembre 1895.