tangenti, il loro punto d'intersezione, il loro angolo, e l'area del triangolo compreso fra le tangenti e la corda. Costruzione.

Freistadt: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. $4x^2 + 12xy + 9x^2 - 6x = 37$, $3x^2 + 8xy + 5y^2 + 12y = 45$.

2. Un tale paga per 12 anni al principio d'ogni anno un premio di 250 f. onde ricevere esso stesso o i suoi eredi alla fine del 18^0 anno e così per altri 14 anni successivi, una certa rendita; qual è questa rendita se si calcola l'interesse al $4\frac{1}{2}\,^0/_0$?

3. I tre lati d'un triangolo stanno fra loro come $5:8:9$ e l'area dei quadrati costruiti sui lati importa $680\,m^2$. Quali sono i lati e gli angoli del triangolo?

4. Qual è l'equazione riferita al centro, di un'ellisse, la quale riferita ad un altro sistema di assi coordinati è $5x^2 - 4xy + 5y^2 - 48x + 36y + 120 = 0$. Si determini l'eccentricità numerica, il parametro e l'area dell'ellisse.

Radautz: *i. r. ginnasio sup.* — 1.

$$4(\operatorname{tg} x - \cot x) = -3\,\frac{\cot 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x}.$$

2. Trovare l'area d'un triangolo nel quale $\alpha = 50^0\,53'\,45''$, $h_a = 18{,}059$ e $h_b = 15{,}52$.

3. Calcolare l'area del segmento parabolico compreso fra la parabola $y^2 = 8x$ e la corda che congiunge i due punti colle ascisse $x_1 = 2$, $x_2 = -8$.

4. Un bosco che cresce annualmente del $2\frac{1}{4}\,^0/_0$ ha uno stato attuale di 145678 m^3. Quale sarà il suo stato dopo 18 anni, se alla fine di ogni anno vengono tagliati 1175 m^3?

Saaz: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Da un capitale di 4058,22 f. vengono ritirati ogni anno in fine dell'anno 365 f. Dopo quanti anni verrà consumato il capitale, se si calcola l'interesse del $4\,^0/_0$?

2. Un osservatore vede da una certa distanza da una sfera di raggio $R = 30\,cm$. $\frac{1}{5}$ della superficie della stessa. Che dimensioni (r, h, l) ha il cono formato dai raggi visuali estremi ed a quale distanza dal centro si trova l'osservatore?

3. Qual è l'equazione di un cerchio che passa pei tre punti: $(6 - 4)$, $(2, 2)$, $(7, 1)$?

Obreholl abrunn: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Scomporre la frazione $\frac{2199}{1001}$ in tre frazioni, le quali, abbiano per denominatori 7, 11 e 13.

2. Sono dati 18 elementi: quanti elementi si devono cancellare affinchè la differenza fra i numeri delle combinazioni della terza classe, con ripetizione e senza ripetizione dei rimanenti, sia eguale al numero delle variazioni di seconda classe, con ripetizioni, fatte cogli elementi cancellati?

3. In un triangolo sono dati un lato $a = 3\,cm$. e gli angoli adiacenti $\beta = 45^0\,26'\,37''$ e $\gamma = 63^0\,24'\,35''$; qual è il volume del corpo di rotazione che descrive il triangolo girando intorno al lato a?

4. Dal punto A avente le coordinate $x' = 8\frac{1}{5}$, $y' = 2\frac{7}{9}$ vengono condotte le due tangenti al circolo $x^2 + y^2 = 25$. Quale distanza ha il punto A dalla

corda di contatto, e qual è l'area del triangolo formato dalle tangenti e dalla corda di contatto?

SEITENSTETTEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1.

$$\log \sqrt[4]{8x(4x-2)+20(x-10)} - \log \sqrt[4]{x-2} = \frac{1}{2}.$$

2. Si deve dividere l'angolo $\alpha = 60^0$ in due parti, i cui seni stanno fra loro come 4 : 3.

3. Sul vertice d'un colle di forma conica sorge una torre. Per misurare la sua altezza si discende di 100 *m.* sino in A e quindi ancora di 300 *m.* sino in B e si guidano visuali da A e da B tanto al piede che alla sommità della torre. L'angolo formato dalle visuali in A è $\alpha = 10^0\,47'\,8''$, in B è $\beta = 5^0\,9'\,23'',2$. Che altezza ha la torre?

4. Qual è l'equazione di una retta, la quale passa per il punto (1, 3) e taglia dagli assi coordinati un triangolo di area $s = 8$?

IGLAU: *i. r. Ginnasio sup.* — 1.

$$4 \,.\, 2^{2x-3} - 3 \,.\, 2^{y+4} = 320\,; \quad 2 \,.\, 2^{x+1} + 2^{y-2} = 129.$$

2. Qual capitale devesi porre oggi al 4 $^0/_0$, affinchè produca, capitalizzando l'interesse ogni semestre, una rendita di 500 f. pagabile per 10 anni al principio d'ogni semestre?

3. I raggi delle basi di un tronco di cono retto sono $R = 5{,}45$ *m*, $r = 2$ *m*, ed il lato $a = 8{,}97$ *m*. La sezione media di questo tronco deve esser base di un cono il quale ha il vertice nel centro della base minore del tronco. Qual è il volume e la superficie di questo cono?

4 Le coordinate dei vertici di un triangolo sono A_1 ($x_1 = 2$, $y_1 = 1$), B_1 ($x_2 = 4, y_2 = 5$) e C_1 ($x_3 = 20$, $y_3 = 4$). Che distanza ha il centro del cerchio circoscritto dal punto d'intersezione delle rette $y = 2x - 3$ e ($x_4 = 0$, $y_4 = 3$) ($x_5 = -5$, $y_5 = -12$)?

M^A^HR. WEISKIRCHEN: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. In una sfera di raggio $R = 17$ *cm.* vengono condotti ad eguale distanza $d = 8$ *cm.* dal centro, due piani paralleli. Qual è il volume del tronco sferico così ottenuto? Si domanda poi anche il volume del corpo che resta levando da questo tronco il cilindro interno, ed il raggio d'una sfera equivalente a questo corpo.

2. Data la somma $a + b = 121{,}653$ *m.* di due lati di un triangolo, il terzo lato $c = 71{,}9$ *m.* ed il raggio $r = 37{,}8$ *m.* del cerchio circoscritto, si risolva il triangolo.

3. A quanto sale dopo $n = 8$ anni una somma $a = 125$ f. che cresce in progressione aritmetica colla differenza $d = 45$ f. e viene pagata ad una cassa alla fine di ogni anno, calcolando il 4 $^0/_0$ d'interesse?

4. Ad una iperbole, che ha l'asse principale $2a = 10$ e l'asse secondario $2b = 6$, si deve guidare una tangente nel primo quadrante che formi colla direzione positiva dell'asse delle x un angolo $\alpha = 45^0$; si trovino le coordinate del punto di contatto e le equazioni della tangente e della normale in questo punto.

MELK: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Il primo termine di una progressione aritmetica è di 1 maggiore del primo termine di una progressione geometrica; il secondo termine è pure di 1 maggiore del secondo termine della progressione geometrica, i terzi termini sono eguali, il quarto termine della geometrica è però di 3 unità maggiore di quello dell'aritmetica. Quali sono le progressioni?

2. Determinare i due angoli x ed y di un triangolo se $4^{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = 8$ e $16^{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y} = 8$.

3. Il volume di un cono retto è 179,044; i lati fanno colla base l'angolo $\alpha = 67^\circ\, 5'\, 20''$; qual è la superficie laterale?

4. La retta $3y + 4x + 12 = 0$ deve girare intorno a quel suo punto che ha la minima distanza dal centro del circolo $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$, così che divenga tangente; qual è l'angolo di rotazione?

Praga: *i. r. Ginnasio sup. nella Neustadt.* — 1. Un tale pone in un istituto di credito che paga il $4\frac{1}{2}\,^0/_0$ una somma di 6000 *c.*; quanto può egli ottenere per 18 anni alla fine d'ogni anno?

2. Si domanda la superficie laterale di un cono retto il cui lato fa colla base l'angolo $\alpha = 65^0\, 22'$, se il volume del cono è eguale a quello di una sfera di raggio $r = 5{,}95$ *dm.*

3. Le coordinate di tre punti sono $M_1 \begin{pmatrix} x_1 = 7 \\ y_1 = 5 \end{pmatrix}$, $M_2 \begin{pmatrix} x_2 = 13 \\ y_2 = 12 \end{pmatrix}$, $M_3 \begin{pmatrix} x_3 = 14 \\ y_3 = 5 \end{pmatrix}$; qual è l'equazione del cerchio che passa per questi punti, e l'equazione di quella retta che si può condurre pel centro perpendicolarmente alla corda $M_2 M_3$?

Lubbiana: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. *A* offre la sua casa stimata del valore di 50000 f. verso una rendita annuale di 3000 f. percepibile al principio di ogni anno. Per quanti anni godrà egli questa rendita, calcolando il $5\,^0/_0$ d'interesse?

2. In un cilindro di raggio $r = 24{,}35$ è inscritto un prisma triangolare, la cui base ha gli angoli α, β, γ. L'altezza comune dei due corpi è la quarta proporzionale geometrica dopo i tre lati a, b, c della base. Qual è il volume del cilindro e quale quello del prisma? Applicazione al caso: $\alpha = 55^0\, 56'$ $\beta = 44^\circ\, 44'\, 44''$.

3. Si domandano le equazioni delle tangenti che si possono guidare dal punto (5,3) all'ellisse $9x^2 + 25y^2 = 225$.

4. Risolvere l'equazione: $\log \sqrt{3z - 2} + \log \sqrt{4z - 7} = 9{,}11394$.

St. Pölten: *Ginnasio reale sup. provinc.* — 1. La somma, la differenza ed il prodotto dell' 8.° e del 3.° termine di una progressione aritmetica stanno fra loro come 4 : 2 : 25; qual è la progressione?

2. In un pentagono regolare col lato $a = 12$ *cm.* viene inscritto un pentagono regolare, così che i suoi vertici sono i punti di mezzo dei lati del primo. Si domanda il lato dell'iscritto e l'area di ambedue.

3. In una sfera di volume $v = 135\ cm.^3$ è inscritto un cono retto che ha il diametro della base eguale alla sua altezza. Se ne domanda l'altezza, il volume e l'angolo al vertice.

4 Per il punto (3,5) si ha da guidare una retta, così che i segmenti formati sugli assi delle y e delle x stiano fra loro come 2 : 1. Qual è l'equazione di questa retta?

KREMS: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. I due termini medi di una progressione aritmetica di otto termini danno per somma 53; il prodotto del primo e dell'ultimo termine è 102; determinare la progressione.

2. Un tale ha il diritto di ricevere una rendita di 500 f. per 25 anni alla fine d'ogni anno; protraendo il godimento della rendita di 10 anni, di modo che egli riceverà la rendita per la prima volta alla fine dell'11° anno, quanto importerà questa, se dovrà durare solo per 15 anni? (4 %).

3. Lo spigolo laterale di una piramide ottagonale regolare è $b = 42,8$ *cm.* e fa coll'altezza della piramide un angolo $\alpha = 23^0$. Qual è il volume della piramide?

4. Alla parabola $y^2 = 12x$ è condotta una tangente nel punto $x_1 = 3$, $y_1 = ?$; qual è l'area della figura compresa fra la tangente, la parabola e l'asse delle ordinate?

LANDSKRON: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. *A* ha 49 anni e vuole assicurare alla sua morte ai propri eredi un capitale di 4800 f. Quale premio annuale deve pagare ad una società di assicurazioni, se la durata media della sua vita viene ritenuta di 21 anno? (4 %).

2. Una sfera cava di rame (peso spec. $= 8,9$) che pesa 5 *Kg.* galleggia nell'acqua, così che ne sporge dal pelo dell'acqua $\frac{1}{8}$ del diametro. Si calcoli la grossezza del guscio.

3. Si deve determinare sulla retta $y - 2x + 5 = 0$ quel punto, tale che i raggi ad esso condotti dai punti ($x_1 = 9$, $y_1 = 3$) e ($x_2 = 17$, $y_2 = 13$) formino colla retta angoli eguali.

KRUMAU: *i. r. Ginnasio sup.* — 1. Dopo quanti anni verrà estinto un debito di 5000 f. al 4,5 % pagando ogni anno 500 f.?

2. Gli spigoli di un parallelepipedo rettangolare, il quale ha una superficie di 7,36 $m.^2$, stanno fra loro come $2 : 3 : 8$. Che volume ha il parallepipedo?

3. Si ricavi l'equazione della retta che passa per il punto $A(m, n)$ e tocca il cerchio $x^2 + y^2 = r^2$, e si calcoli la lunghezza della tangente.

FELDKIRCH: *i. r. Ginnasio reale sup.* — 1. In una progressione aritmetica la somma del 2° e del 4° termine è 38, la somma del 3° e del 7° è 74; quanti sono i termini la cui somma è 606?

2. In un trapezio isoscele l'angolo formato dalle diagonali i cui segmenti sono lunghi 3 *m.* e 4 *m.*, è 120°; quali sono i lati, gli angoli e l'area del trapezio?

3. Un triangolo coi lati $a = 17$ *cm*, $b = 10$ *cm*, e $c = 21$ *cm.* ruota intorno ad un asse che è perpendicolare al lato c nel suo punto d'intersezione con a; qual è il volume del corpo di rotazione?

4. Un emisfero col raggio $r = 1$ *dm.* ed un cono retto coll'altezza $h = 2$ *dm.* hanno la base comune. Quanto è grande il circolo nel quale la superficie sferica viene tagliata dal cono?

LEOBEN: *Ginnasio sup. provinciale.* — 1. Calcolare l'area ed i lati di un triangolo, se questi sono numeri interi e positivi dati dalle equazioni $8x + 13y = 183$ e $3y - z = 18$.

2. Il volume di una sfera è doppio del volume di un tronco di cono retto, le cui basi hanno i raggi di 6 m. e di 2,5 m. e i cui lati fanno colla base un angolo di 58° 32′ 16″. Qual è la superficie della sfera? (In generale ed in particolare).

3. Calcolare le equazioni delle tangenti che si possono guidare pel punto (3,1) alla curva $5x^2 - 9y^2 = 45$, l'angolo d'inclinazione delle stesse coll'asse delle x ed i segmenti da loro intercettati sugli assi.

Rovereto, giugno 1894.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE (*)

Una bella osservazione del De Paolis. — Mi fu comunicata da lui stesso più anni or sono, quando attendeva ai suoi elementi di geometria. Mi diceva dunque il De Paolis, che, senza far uso delle proporzioni o dell'equivalenza, non è facile dimostrare che le tangenti condotte a due cerchi segantisi in un piano per un punto del loro asse radicale sono eguali. Che a lui, ragionando nel piano, ciò non era riuscito; provassi anch'io, *per maggior sicurezza.* Provai: ma sì! se non era riuscito egli, De Paolis....! Ho detto, *ragionando nel piano;* del resto, usando di considerazioni nello spazio, il De Paolis risolveva la questione in un modo semplicissimo e ingegnosissimo, che citava come esempio dell'efficacia della stereometria anche in questioni puramente planimetriche.

Dopo aver fatto rotare la figura di un angolo diedro qualsiasi intorno alla retta che unisce i punti d'intersezione dei due cerchi, faceva passare per questi una sfera. Basta farla passare pei loro due punti d'intersezione e per due altri punti arbitrariamente presi, uno su ciascun cerchio. Ciò fatto, le due tangenti da dimostrarsi eguali divengono tangenti da un punto ad una sfera, e la loro eguaglianza risulta evidente. Analizzando i principî che servono alla precedente dimostrazione, si trova che essi non appartengono affatto, nè alla teorica dell'equivalenza nè a quella delle proporzioni. Il lettore può persuadersene facilmente da sè, cosicchè l'insistere su questo punto sarebbe inutile. Noterò piuttosto che dell'asse radicale di due cerchi posti in un piano, tanto nel caso delle intersezioni reali come in quello delle intersezioni immaginarie dei medesimi, si può dare la seguente definizione: *quella retta del piano attorno alla quale conviene far rotare i due cerchi, affinchè per le nuove posizioni di essi passi una sfera.* Uno studio dell'asse radicale di due cerchi sulla base di questa definizione sarebbe certo non priva d'importanza.

G. Frattini.

(*) Le questioni da risolversi o risolute, sono rimandate ai prossimi fascicoli.

Poligoni concavi e convessi. — In tutti i libri di geometria che io conosco la convessità e concavità dei poligoni è definita come segue: Se un poligono giace tutto da una banda di qualsiasi suo lato indefinitamente prolungato, esso è convesso: altrimenti è concavo. Senza dire che la suddistinzione dei poligoni concavi in intrecciati e non intrecciati è in generale trascurata, quantunque i secondi limitino una porzione di piano al pari de' poligoni convessi ed abbiano comuni con questi molte proprietà importanti, come il teorema della somma degli angoli interni, mi sembra che la citata definizione non sia punto indicata per l' uso che deve poi farsene in una geometria elementare. E valga il vero: Apro un libro di geometria elementare e leggo: « La somma degli angoli interni di un poligono *convesso* vale tante volte due retti quanti sono i lati del poligono meno due. – Dividendo infatti il poligono, supposto di n lati in $n-2$ triangoli mediante le diagonali uscenti da un suo vertice, ecc. ecc. » Ora io domando: perchè è possibile una tal divisione? Certo, perchè il poligono è convesso. Ma tra l'essere il poligono convesso, il giacere cioè del medesimo tutto da una parte di qualsivoglia suo lato indefinitamente prolungato, e la sua divisibilità in triangoli mediante questo o quel sistema di diagonali, la relazione non è davvero evidente. E fino a che tale relazione non venga messa in chiaro (il che non è agevole) la dimostrazione del citato teorema sarà difettosa in un punto essenziale. Se non che a tutto si rimedierebbe abbandonando l'ordinaria definizione, e ponendo in sua vece queste altre:

Un poligono si chiama convesso quando è divisibile in triangoli mediante le diagonali uscenti da qualsivoglia suo vertice.

Un poligono dicesi concavo non intrecciato quando non è convesso, ma può dividersi in qualche maniera in triangoli mediante le sue diagonali.

Un poligono dicesi concavo intrecciato quando non è divisibile in alcun modo in triangoli mediante le sue diagonali.

Poste queste definizioni, la dimostrazione del teorema relativo alla somma degli angoli interni di un poligono convesso verrà tosto rettificata, e di più verrà esteso il teorema ai poligoni concavi non intrecciati. Come pure, adottando definizioni analoghe per gli angoli e pei solidi poliedri, si porrebbero fuor di censura le dimostrazioni di parecchi importanti teoremi stereometrici.

G. Frattini.

(Dalla *Scuola educatrice*, Periodico per le scuole elementari e normali, diretto dal prof. A. Avòli, anno 1895-96, n. II).

Di un'equazione del 6° grado risolubile per radicali. — Mediante la regola di estrazione della radice quadrata dai polinomi (*), il polinomio generale del 6° grado si può mettere sotto la forma $P_3^2 + P_2$, dove P_3 e P_2 indicano due polinomi, l'uno di 3° e l'altro di 2° grado rispetto alla lettera ordinatrice x. A

(*) Perchè questa regola, che pur getta tanta luce su quella relativa ai numeri e ne è di tanto più facile, viene trascurata nei moderni trattati elementari? Negli antichi, non è così.

sua volta, e nella stessa maniera, si potrà mettere P_2 sotto la forma $P_1^2 + P_0$, essendo P_1 di 1° grado rispetto ad x e P_0 una quantità indipendente da x. L'equazione generale del 6° grado potrà dunque scriversi sotto la forma:

$$P_3^2 + P_1^2 + P_0 = 0.$$

Ciò premesso, ove tra i coefficienti dell' equazione esista la relazione $P_0 = 0$, essa si ridurrà all'altra:

$$P_3^2 + P_1^2 = 0;$$

e decomponendosi nelle due del 3° grado:

$$P_3 + iP_1 = 0$$
$$P_3 - iP_1 = 0,$$

sarà risolubile per radicali. La condizione $P_0 = 0$ e la relativa equazione del 6° grado risolubile algebricamente, mi sembrano meritevoli di uno studio più profondo, che propongo ai lettori del Periodico.

G. Frattini.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

A. NEPPI-MODONA e T. VANNINI. — *Questioni e formule di geometria analitica.* Palermo, tip. Alberto Reber, 1896.

È una pregevolissima raccolta compilata dai distinti ingegneri professori A. Neppi-Modona e T. Vannini col fine di esercitare gli studiosi nell'analisi applicata agli spazi piani e lineari. Come le api van gustando il nettare di fiore in fiore, così dalle famose opere dei geometri Salmon, D'Ovidio, ecc., i giovani autori ebbero cura di scegliere i più attraenti enunciati, e di svilupparne in 319 pagine le soluzioni con i metodi perfezionati da Plücher e Clebsch. Seguono il principio di dualità nel descrivere molti luoghi geometrici dei punti e inviluppi delle rette; adoperano le coordinate baricentriche ed omogenee per svolgere le varie relazioni fra le coppie degli elementi omologhi nelle forme proiettive di 1ª e di 2ª specie, per dedurne le sovrapposte od involutive, i punti ciclici e le rette isotrope. Dalle coordinate trimetriche del punto e della retta fanno discendere le cartesiane, le pluckeriane, le polari, insieme alle diverse trasformazioni delle une nelle altre. Succedono curiose ed utili ricerche sui centri delle distanze proporzionali, sui punti notevoli dei triangoli rettilinei, indi le genesi bipolare e modulare delle coniche, le principali curve algebriche di 3° e 4° grado in coordinate di punti e di tangenti, linee rappresentative delle funzioni trascendenti, esponenziale e circolari, le spirali, le trocoidi a basi retta e ciclica, avvertendo i casi nei quali l'equazioni riduconsi algebriche.

La prima parte di ciascun capitolo è un breve compendio delle proposizioni stabilite nei corsi completi di geometria analitica, a guisa di quadro sintetico, giovevole agli studenti per apparecchiarsi agli esami, e per conoscere gli opportuni teoremi e le formule atte alla risoluzione dei quesiti proposti.

Le figure omografiche, omologiche, le polari reciproche, le podarie delle coniche, sono trattate nel modo più generale; come pure i luoghi dei centri, dei fuochi appartenenti alle coniche soggette a tre o quattro condizioni, gl'inviluppi delle polari, delle normali alle coniche omofocali, i cerchi ortotomici ed isogonali, vengono espressi da equazioni definite per determinanti e funzioni simmetriche. In uno studio speciale per ogni conica si discutono problemi che versano sui triangoli iscritti di area massima o circoscritti di area minima, sopra i diametri coniugati, i circoli osculatori, i quadrangoli ciclici di Ioachimsthal, ecc.

Il capitolo X, ultimo dell'opera, insegna le coordinate proiettive e trilineari, le belle proprietà del quadrilatero completo, i cerchi di Lemoine, di Brocard, ecc., ed investiga diverse locali ed inviluppi di elementi, che dipendono dalle coniche iscritte e circoscritte ai poligoni.

Spero che i valenti autori per il felice esito dell'opera prenderanno animo a proseguirla in un secondo volume, il quale contenga i problemi relativi allo spazio a tre dimensioni. G. Bellacchi.

SOLONE STROMILLO. — *Lezioni elementari di geometria per le scuole secondarie.* Napoli.

L'A. ha diviso il libro in tre parti, nelle quali con buon ordine, con precisione e con chiarezza, svolge le solite teorie di geometria elementare. Il trattato si chiude con alcune lezioni sulle grandezze proporzionali e sulle figure simili, piane e solide. Il metodo seguito dall'A. si accosta più a quello del Legendre che a quello di Euclide; se il suo libro è fatto per le scuole secondarie inferiori, può dirsi ottimo; tale non potrebbe dirsi per le superiori, per insufficienza di materia, per la mancanza del voluto rigore in alcune definizioni e dimostrazioni, per l'abbondanza di postulati, non sempre necessarii. Cito, ad esempio: « Possiamo avere l'immagine di piano in un *forbito specchio* »; volendo dimostrare che due rette intersecantisi determinano un piano, prova invece che è possibile tracciare su un piano due rette che s'incontrano. Mette fra i postulati che ogni segmento rettilineo ha un punto medio, che ogni angolo rettilineo ha una bisettrice, ecc., ed in seguito li dimostra quando dimezza un segmento ed un angolo.

Lo Stromillo ha pure pubblicato alcune lezioni di aritmetica pratica sui numeri complessi, sui rapporti, sulle proporzioni e loro applicazioni, e sulle radici quadrate e cubiche. Questo trattatello, degno di lode per l'accurata e chiara esposizione, ed il precedente, sono prova certa che l'A. è anche un valoroso insegnante.

GIUSEPPE INGRAMI. — *Elementi di algebra ad uso delle scuole secondarie superiori.* Bologna, G. Cenerelli, 1895.

Nella introduzione l'A. definisce i numeri positivi, interi e frazionari, le operazioni dirette ed inverse, e ne dimostra le principali proprietà; così questa introduzione serve opportunamente come anello di congiunzione fra l'aritmetica razionale e l'algebra. Nei successivi sette capitoli si trovano le operazioni con numeri algebrici, con monomii e con polinomi, le frazioni algebriche, le equazioni ed inequazioni di 1° grado con alcune nozioni sull'analisi indeterminata, le radici, alcuni cenni sui limiti, i numeri irrazionali considerati come limiti di una sola serie di numeri, i radicali, le equazioni di grado superiore al primo, le proporzioni, le progressioni aritmetiche, geometriche ed armoniche, le equazioni esponenziali ed i logaritmi. Chiude il libro una buona raccolta di esercizi.

Pregi principali di questa opera sono: la concisione, che ha permesso all'A. di riunire in poche pagine tutte le cognizioni necessarie agli alunni dei licei e degli istituti tecnici; il rigore delle definizioni, dei postulati e delle dimostrazioni; l'uso di termini e metodi che si incontrano negli studi superiori. Le mende sono così lievi che non torna conto rilevarle, e di alcune si è già accorto l'A. che le ha corrette; le altre correggerà nella seconda edizione, che, ne son certo pel valore del libro, non tarderà a rendersi necessaria.

A. Massa.

SAGGIO DI UNA NUOVA TEORIA
DELLE APPROSSIMAZIONI ARITMETICHE

PREFAZIONE.

Pubblicando negli annali del R. Istituto tecnico di Torino (anno 1884) una mia *nuova teoria delle approssimazioni aritmetiche*, più semplice di quelle prima conosciute, ho dovuto rinunciare ad una ulteriore notevolissima semplificazione della parte che riguarda il calcolo delle *funzioni monomie* — cioè dei numeri che dipendono da numeri dati per via di operazioni aritmetiche, esclusa la addizione e la sottrazione — perchè non ero riuscito a dimostrare il teorema fondamentale, che riferisco qui sotto al § 39.

Avendo al fine raggiunto questo intento, offro in esame un breve sunto di quella parte semplificata, allo scopo di provocare qualche autorevole giudizio, che mi conforti a pubblicare una seconda edizione dell'intera teoria.

Torino, aprile 1895 GIUSEPPE MAZZOLA.

Riduzione di una funzione monomia qualunque in un prodotto di potenze de' suoi argomenti.

1. *Se* $f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ *è una funzione monomia degli argomenti* $v_1, v_2, v_3, \ldots,$ *si ha*

$$f(v_1, v_2, v_3, \ldots) = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} v_3^{\alpha_3} \cdots,$$

essendo α_k *l'esponente che si ottiene facendo uguali ad 1, nella funzione data, tutti gli argomenti, eccetto* v_k *e riducendo il risultato in una potenza di* v_k.

2. Data, p. es., la funzione

$$f(7, v, \pi) = v^2 \sqrt[4]{\frac{7v}{\pi}} \sqrt[9]{\frac{\pi^2}{7}},$$

si avrà

$$f(7,1,1) = \sqrt[4]{7}\sqrt[9]{\frac{1}{7}} = 7^{\frac{1}{4}} \,.\, 7^{-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{5}{36}}.$$

$$f(1,v,1) = v^2\sqrt[4]{v} = v^{\frac{9}{4}},$$

$$f(1,1,\pi) = \sqrt[4]{\frac{1}{\pi}}\sqrt[9]{\pi^2} = \pi^{-\frac{1}{36}}.$$

$$f(7,v,\pi) = 7^{\frac{5}{36}} v^{\frac{9}{4}} \pi^{-\frac{1}{36}}.$$

Errori assoluti ed errori relativi.

3. Posto che siano

$v_1, v_2, v_3, \ldots$ gli argomenti veri d'una funzione,

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ i loro valori impiegati nel calcolo della funzione,

A il risultato definitivo di questo calcolo, e

V il valore vero della funzione;

i valori aritmetici delle differenze

$$v_1 - a_1 \qquad v_2 - a_2 \qquad v_3 - a_3 \qquad \ldots \qquad V - A$$

saranno gli *errori assoluti* dei valori $a_1, a_2, a_3, \ldots A$: ed i rapporti di questi errori assoluti agli stessi valori $a_1, a_2, a_3, \ldots A$, saranno i loro *errori relativi*. (*)

4. Supponiamo, p. es., che coi dati

$$V = \pi^2 v : \sqrt[3]{70\pi},$$
$$v = 38,75 \text{ a meno di } 0,005 \text{ per difetto},$$

siasi istituito il calcolo qui sotto indicato:

$3,142^2 = 9,87$ a meno di $0,005$ per difetto,
$9,87 \times 38,75 = 382,4625,$
$70 \times 3,142 = 219,94,$
$\sqrt[3]{219,94} = 6,04$ a meno di $0,005$ per eccesso,
$382,4625 : 6,04 = 63,3$ a meno di $0,05$ per difetto,

(*) Scegliendo per *conseguenti* i valori *approssimati* invece di quelli *veri*, assunti dal Vieille, si semplifica notevolmente la teoria.

e preso, quindi, per risultato definitivo

$$A = 63{,}3.$$

Allora gli errori relativi degli argomenti impiegati nel calcolo, e quello del risultato definitivo, saranno rispettivamente eguali a

$$\frac{v - 38{,}75}{38{,}75} \quad \frac{3{,}142 - \pi}{3{,}142} \quad \frac{70 - 70}{70} \quad \frac{\pm(V - 63{,}3)}{63{,}3},$$

e gli antecedenti di questi rapporti saranno gli errori assoluti.

5. Insieme agli errori degli argomenti intervengono, ed influiscono sull'errore del risultato definitivo, gli errori che si commettono volontariamente nelle singole operazioni, e che chiamerò *errori operativi*.

6. Nella prima delle operazioni qui sopra indicate l'*errore operativo assoluto* è

$$3,\, 142^2 - 9,\, 87,$$

nelle due operazioni seguenti gli errori operativi assoluti sono nulli, e nelle ultime due operazioni sono rispettivamente

$$6{,}04 - \sqrt[3]{219{,}94}\,, \qquad (382{,}4625 : 6{,}04) - 63{,}3.$$

7. Generalmente, se sono a_1, a_2 i due argomenti impiegati in una moltiplicazione, od una divisione, e se a è l'argomento impiegato in una estrazione di radice q^{ma}, gli *errori operativi assoluti* hanno per misura i valori aritmetici delle differenze

$$a_1 a_2 - A, \qquad (a_1 : a_2) - A, \qquad \sqrt[q]{a} - A.$$

8. Ad ogni *errore operativo assoluto* corrisponde un *errore operativo relativo*, eguale al rapporto dell'errore operativo assoluto al risultato dell'operazione.

(Continua).

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(Continuazione: Vedi pagina 81).

CAPITOLO VI.

ORDINAMENTO DEI GRUPPI.

31. Definizione. — Supponiamo che con una legge qualunque, in un gruppo G ad ogni ente a di esso sia collegata una parte del gruppo stesso, che indicheremo per brevità con Sa e diremo gruppo degli enti *seguenti* di a (e che può anche mancare), così definita:

1° Se b è di Sa, a non è di Sb.

2° Se a e b sono enti distinti di G, o a è di Sb, o b è di Sa.

3° Se b è di Sa e c è di Sb, c è di Sa.

Diremo che in tal caso G è un gruppo *ordinato* (*).

Se in G un ente a è di Sb, diremo b *precedente* a; il gruppo dei precedenti di a lo indicheremo con Pa.

Se un ente è di Pb e di Sa, diremo che esso è *compreso* fra a e b, o fra b ed a.

Se b è di Sa, ma nessun ente è compreso fra a e b, diremo b *immediatamente seguente* ad a, ed a *immediatamente precedente* a b, scrivendo $b = \sigma(a)$, $a = \pi(b)$.

Discende immediatamente dalle definizioni date:

4° Se b non è a nè è di Sa, esso è di Pa.

5° Se b è di Pa, a non è di Pb.

6° Se a e b sono distinti, o a è di Pb, o b è di Pa.

7° Se b è di Pa, e c è di Pb, sarà c di Pa.

8° Dati a, b, c distinti, uno di essi deve essere compreso fra gli altri due.

(*) Di un tale concetto di ordine si hanno tracce in BOLZANO l. c. § 7. Vedi poi CANTOR. «Zur Lehre von Transfiniten» pag. 68 e seg., e con maggior precisione VAILATI «Sui principii fondamentali della geometria della retta» Rivista di Matematica, vol. II — BURALI-FORTI «Sulle classi ordinate e sui numeri transfiniti» Rendiconti del Circolo matematico di Palermo T. VIII — VIVANTI «Teoria degli aggregati» — Parte VI del «Formulaire de Mathématiques publié par la Rivista di Matematica» — Cfr. anche VERONESE «Fondamenti di Geometria» Introduzione Cap. I, §§ 5, 6, 9, e la memoria già citata BETTAZZI. «Sulla catena di un ente in un gruppo.

9° In un gruppo ordinato può esistere un solo ente privo di precedenti, ed un solo privo di seguenti.

10° Un ente non potrà avere più di un ente σ (immediatamente seguente) nè più di un ente π (immediatamente precedente).

Osservazione. — Se l'ordinamento di un gruppo si faccia in varie volte con leggi differenti, distingueremo queste leggi una dall'altra, apponendo segni alle lettere S, P, σ, π.

32. Definizione. — Sarà utile distinguere i gruppi ordinati in *limitati* ed *illimitati*, indicando col primo nome quelli in cui esiste un ente senza precedenti ed uno senza seguenti, col secondo quelli in cui ogni ente ha seguenti, o ogni ente ha precedenti, o si hanno i due casi insieme.

33. Definizione. — Un gruppo si dirà *ordinabile*, se sia possibile stabilire una legge con la quale esso sia ordinato.

Corollario. — Una coppia di enti è un gruppo ordinabile: e così gli enti del gruppo composto di una coppia e di un ente, o di una coppia di coppie di enti.

34. Definizione. — Se due gruppi ordinati sono in corrispondenza in modo che rispetto ad essa siano equivalenti, e che in uno di essi l'ente a segua o preceda l'ente b secondochè il corrispondente di a nell'altro segue o precede il corrispondente di b, diremo i due gruppi in *corrispondenza ordinata.*

Due gruppi ordinati che si possono porre in corrispondenza ordinata, devono chiaramente essere entrambi limitati od entrambi illimitati.

35. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad uno ordinabile G, è ordinabile esso pure.

Basta infatti in Γ dire che un ente a è seguente o precedente b secondochè debba dirsi l'una cosa o l'altra dei corrispondenti in G, perchè quando G è ordinato tale sia anche Γ.

Osservazione. Si può in tal caso, come si è già fatto, stabilire fra G e Γ una corrispondenza ordinata (§ 34).

36. Teorema. — Se un gruppo G è ordinabile, tale è ogni sua parte G_1.

Infatti, reso G ordinato, basterà in G_1 di due enti a e b dire b seguente o precedente ad a, secondochè è seguente o precedente ad a in G, perchè chiaramente anche G_1 sia ordinato.

37. Sia G un gruppo ordinato, avente per enti dei gruppi (i gruppi Γ) che due a due non abbiano enti comuni, e ciascuno dei gruppi Γ sia ordinato. Se a e b sono due enti di gruppi Γ, si dica b seguente ad a: 1° nel caso che a e b siano di uno stesso gruppo Γ, se in esso b è seguente di a: 2° nel caso che a e b siano di due distinti gruppi Γ, se b appartiene al gruppo Γ che in G è seguente all' altro. Evidentemente in tal modo il gruppo G è ordinato anche rispetto agli enti dei suoi singoli gruppi.

Definizione. Potremo, quando occorra brevità, indicare un tale ordinamento di G, dicendolo *ordinamento secondo i gruppi parziali* Γ.

Corollario 1° — Un gruppo ordinabile i cui enti siano gruppi ordinabili, è gruppo ordinabile rispetto agli enti di questi gruppi.

Cor. 2° — Se un gruppo si spezza in due gruppi ordinabili, è ordinabile esso pure.

38. Definizione. — Un gruppo G si dirà *bene ordinato* quando:

1° sia ordinato, (§ 31);

2° di ogni ente che ammette seguenti esista l'immediatamente seguente, o risp. di ogni ente che ammette precedenti esista l'immediatamente precedente (gruppo ordinato risp. *secondo il criterio* σ o π).

Tali gruppi, come in generale i gruppi ordinati, potranno essere limitati od illimitati (§ 32).

I primi hanno un ente senza seguente ed uno senza precedente.

I gruppi illimitati ordinati secondo σ in cui esista un ente privo di precedenti e quindi (§ 32) non ve ne sia nessuno privo di seguenti e neppure nessuno privo di ente σ, e così pure quelli ordinati rispetto a π in cui esista un ente privo di seguenti e nessuno privo di ente π, si diranno *gruppi bene ordinati ad un senso*, (se occorre, risp. ordinati secondo σ o π): quelli in cui non vi sono enti privi di seguenti nè enti privi di precedenti, si diranno *gruppi bene ordinati a due sensi* (se occorre, secondo il criterio σ o π, secondochè ogni ente ammette l'ente σ, o ammette l'ente π).

Nei gruppi bene ordinati ad un senso dicesi ente *originario* quello privo di precedenti o di seguenti; in quelli bene ordinati limitati secondo il criterio σ si dice *originario* l'ente privo di precedenti, *finale* quello privo di seguenti: in quelli bene ordinati limitati secondo il criterio π inversamente, *originario* quello privo di ente seguente e *finale* quello privo di precedente.

39. Definizione. — Un gruppo in cui sia possibile stabilire una legge con cui esso sia bene ordinato, si dirà *bene ordinabile.*

Corollario. — È bene ordinabile un gruppo di due enti e quello composto dagli enti di una coppia e di un ente, o di due coppie; ed è bene ordinato, appena esso sia ordinato.

40. Teorema. — Un gruppo I' equivalente ad un gruppo bene ordinabile G, è bene ordinabile esso pure.

Basta infatti, perchè I' divenga bene ordinato, dire un suo ente precedente o seguente un altro, secondochè accade l'uno o l'altro caso nei corrispondenti di G. Chiaramente I' risulterà così limitato, illimitato, secondo il criterio σ o π ecc., quando i casi consimili accadono in G.

41. Teorema. — Un gruppo bene ordinabile i cui enti siano gruppi bene ordinabili, è bene ordinabile rispetto agli enti di questi.

Basta infatti chiaramente, perchè il gruppo sia bene ordinato, fare in esso l'ordinamento secondo i gruppi parziali (§ 37, Corollario 1°) dopo avere resi i criteri di ordinamento tutti σ o tutti π, scambiando fra loro, se occorre, in alcuni dei gruppi il significato di π o di σ.

Corollario. — Se un gruppo si spezza in due bene ordinabili, è bene ordinabile esso pure.

42. In un gruppo bene ordinato secondo il criterio σ e limitato, ogni ente, eccetto uno (il finale), ammette l'ente σ, e ve n' è uno (l'originario) che non è σ di alcuno. Se associamo ad ogni ente che non sia il finale il suo ente σ, ed all'ente finale l'originario, veniamo a costruire una corrispondenza del gruppo con sè stesso nella quale il gruppo equivale o a sè stesso o ad una sua parte propria, secondochè vi è il solo ente originario privo di π o ve ne sono altri. Similmente pel criterio π.

In un gruppo bene ordinato ad un senso secondo σ, associando ad ogni ente il suo σ, si ha una corrispondenza del gruppo con sè stesso. nella quale il gruppo equivale ad una sua parte, che è propria, non contenendo per lo meno l'ente originario. Lo stesso dicasi per il criterio π.

In un gruppo bene ordinato a due sensi secondo σ, associando ancora ad ogni ente il suo σ, si ha una corrispondenza in cui il gruppo equivale a se stesso o ad una sua parte propria, secondochè mancano od esistono enti privi di π. Analogamente per il criterio π.

Definizione. — In ciascuno dei casi anzidetti la corrispondenza ora definita si dirà *corrispondenza ordinatrice* del gruppo.

43. Teorema. — Un gruppo che possa rendersi bene ordinato illimitato, è sviluppabile (§ 12).

Invero, se quando è bene ordinato è ad un senso, nella corrispondenza ordinatrice esso equivale ad una sua parte propria. Se è a due sensi, il gruppo sua parte che è composto di un suo ente a e di Sa è bene ordinato ad un senso, e quindi come si è ora visto, è sviluppabile, e perciò (§ 14) tale è l'intero gruppo.

44. Teorema. — Dato un gruppo G di cui p è un ente, se G è equivalente o a $G-p$ od a sè stesso in una corrispondenza α priva di cicli parziali, esso è bene ordinabile; e dà origine nel 1° caso ad un gruppo ad un senso, nel 2° caso sempre ad uno limitato, e talora anche ad un gruppo a due sensi.

a) « Si può nel gruppo stabilire il concetto di seguente in modo da « soddisfare alle condizioni imposte ad esso nel § 31°. »

Infatti consideriamo nel 1° caso, in cui si ha $(G-p \backsim G)_\alpha$, la corrispondenza completa: nel caso $(G \backsim G)_\alpha$ se p è il corrispondente di q (distinto da p a causa della mancanza di cicli) consideriamo la corrispondenza $(G-p \backsim G-q)_\alpha$.

Se a è un ente di G o di $G-q$, si indichi con σa il suo corrispondente a' in $G-p$, e a si indichi reciprocamente con $\pi a'$. Esisterà il σ di ogni ente di G, tranne al più di q, ed il π di ogni ente di g eccetto di p.

Si definisca allora così il gruppo Sa dei seguenti di un ente qualunque a di G: Sa è il gruppo composto (§ 3) di tutti i gruppi possibili, che accenneremo per brevità con γ_a, formati con enti di G in modo che

1° non contengano a;

2° contengano σa;

3° se contengono un ente di G contengano anche il suo ente σ (quando esiste).

I. Innanzi tutto osserviamo che tali gruppi γ, di cui Sa deve essere composto, non esistono evidentemente per q (privo di ente σ), e quindi non esistono seguenti di q; ma per gli altri enti [e quindi per tutti nel caso $(G-p \sim G)_\alpha$] tali gruppi esistono.

Infatti — 1° Essi esistono per p, essendo evidentemente $G-p$ uno di essi perchè può contenere il σ di ogni suo ente senza contenere p, per la ragione che p non ha ente π, e che quindi non è σ di nessun ente. — 2° Esistono per πq, essendo uno di essi il gruppo del solo ente q. — 3° Se per un ente c che non sia πq esistono, esisteranno pure per σc, giacchè i gruppi γ_c fatti rispetto a c contengono σc, $\sigma(\sigma c)$ (poichè σc non è q e quindi ammette lo ente σ) e sopprimendo in essi il σc (il che può farsi, mancando già in essi c e quindi potendo mancare il σc) divengono altrettanti gruppi γ per σc. Si conclude di qui che se per un ente d che non sia q non esistessero, non esisterebbero neanche per πd (ente che esiste, essendo d diverso da p, poichè d non ha per ipotesi gruppi γ_d, mentre per p esistono invece, come si è visto, i gruppi γ_p). — 4° Se per un ente c che non sia p esistono, esisteranno anche per πc, avendosi da quelli di c altrettanti gruppi γ di πc, coll'aggiungere ad essi l'ente c. Quindi se per un ente d che non sia q non esistono, non esistono neppure per σd, il quale σd esiste e non è q, giacchè se no sarebbe d identico a πq, e per πq i gruppi γ esistono (2°). — 5° Essi devono esistere per tutti gli enti che non sono q. Ed invero se per un ente c diverso da q e naturalmente anche da p (1°) non esistono i gruppi γ, non esisterebbero gruppi γ nè per σc (4°) nè per πc (3°), enti ambedue esistenti: talchè se vi fosse il gruppo degli enti di G diversi da q pei quali non esistono i gruppi γ, in esso se esistesse un ente c esisterebbero anche σc e πc, e quindi un tal gruppo nella corrispondenza proposta corrisponderebbe a sè stesso, ossia sarebbe un ciclo, contro l'ipotesi che cicli non vi siano.

Dunque esistono i gruppi γ_a, e perciò anche il loro gruppo composto Sa, eccetto per q (quando esiste) c. d. d.

Osservazione 1ª. — Il gruppo Sp non è che $G-p$.

Osservazione 2ª. — Si ha chiaramente che

$$S(\sigma a) = Sa - \sigma a$$
$$S(\pi a) = Sa + a$$

Osservazione 3ª. — In un gruppo Sa, se vi è un ente b che non sia σa, vi è anche l'ente πb. Ed invero, se b è di Sa e non è σa, ciò vuol dire che deve esistere almeno un gruppo γ_a di cui fa parte b. Se in esso già non comparisce πb, ad esso aggiungo πb, che non è a, ed ottengo un nuovo gruppo γ_a, del quale πb fa parte. Tale ente πb si troverà perciò nel gruppo composto dei γ_a, e quindi sarà ente di Sa. c. d. d.

Osservazione 4ª. — Nel caso $(G-p \sim G-q)_\sigma$ l'ente q comparisce nel gruppo S di qualunque ente di G, giacchè se in un gruppo γ_a manca q, esso vi si può aggiungere e si ottiene così un nuovo gruppo γ_a, giacchè σq non esiste, e la presenza di q non richiede quindi la presenza di altri nuovi enti perchè il gruppo soddisfi alle condizioni imposte ai gruppi γ. In Sa verrà quindi a comparire anche q.

II. Se b è di Sa, a non è di Sb.

Ed infatti: 1° La proprietà è vera se b è σa: giacchè $Sb = S(\sigma a) = Sa - \sigma a$ (Oss. 2ª) ed Sa non contiene a per definizione, talchè a non è di Sb — 2°. Se la proprietà vale per un ente b vale per σb (quando b non è q), giacchè se b è di Sa, σb lo è pure, e $S(\sigma b) = Sb - \sigma b$, per cui Sb non contenendo a, neppure lo contiene $S(\sigma b)$. — 3° Se vale per b vale per πb, poichè $S(\pi b) = Sb + b$, e in questo gruppo non comparisce a che non è, per ipotesi, in Sb, e non è b. — 4° La proprietà vale se b è q, giacchè q è di Sa (Oss. 4ª) ed Sq non esiste, e quindi a non è di Sq; perciò se per un ente essa non vale, tale ente non è q. — 5° La proprietà è vera per qualunque ente di Sa, giacchè se non valesse per un ente c non varrebbe, per quanto si è ora dimostrato, nè per πc nè per σc, i quali esistono entrambi per i seguenti motivi: il πc non essendo c l'ente privo di π in Sa, il quale ente è σa, giacchè per σa vale la proprietà; il σc perchè c non è q (Oss. 4ª) e ogni ente che non è q ammette il σ in Sa. Allora il gruppo degli enti di Sa per cui la proprietà non vale, equivarrebbe a sè stesso nella corrispondenza fra G e $G - p$ e costituirebebe un ciclo, che invece, per ipotesi, non esiste.

Dunque la proprietà è vera per qualunque ente di Sa.

III. Se a e b sono distinti, o a è di Sb, o b di Sa.

Infatti se b è q esso è di Sa (Oss. 4ª), e ciò prova l'asserto. Sia invece b distinto da q. Se b non è di Sa, neppure lo è σb (Oss. 3ª); ciò prova che in nessun gruppo γ_a si trova σb, ossia che in ogni gruppo che contenga σb deve mancare qualcuna delle condizioni che si danno i gruppi γ_a. Preso ora un gruppo γ_b, esso sarà tale che se contiene un ente c di G, contiene anche σc (quando σc esiste). Ora se tal gruppo conterrà σa (che non è b, essendo b non di Sa) godrà due delle tre proprietà dei gruppi γ_a: e siccome contiene σb, non dovrà, come ora si diceva, godere la terza, cioè *dovrà* contenere a, laonde a sarà di Sb. Se invece quel gruppo non conterrà σa, si potrà comporlo con un gruppo γ_a: siccome b non è di Sa, tale gruppo γ_a non conterrà b, ed il gruppo composto risultante sarà tale che conterrà σb, il σ (se esiste) di ogni ente di G che contiene, e non b, e sarà dunque un gruppo γ_b contenente σa, per il quale si ripeterà il ragionamento precedente, concludendo ancora che a è di Sb, c. d. d.

IV. Se c è di Sb, e b è di Sa, sarà c di Sa.

Dati comunque b ed a, — 1° la proprietà è vera se c è σb, giacchè essendo per ipotesi b di Sa, deve esserlo σb — 2° se è vera per c di Sb, deve esserlo per σc (se esiste) che è pure ente di Sb: giacchè se c è di Sa, deve esserlo anche σc — 3° se è vera per c di Sb (che non sia σb) lo è pure per πc che è pure ente di Sb. Infatti c non è σa, perchè se lo fosse, essendo c e b distinti, b non sarebbe σa e apparterrebbe dunque anche a $Sa - \sigma a$, cioè a $S(\sigma a)$, ossia ad Sc, mentre è c che appartiene ad Sb, e le due ipotesi si escludono (II). Allora c non essendo σa, esiste πc in Sa, se vi esiste c — 4° la proprietà è vera per q (se esiste), essendo q ente di qualunque gruppo $S\,a$, quando a sia un ente del gruppo — 5° la proprietà è vera per qualunque ente Sb; giacchè se non è vera per un ente c (che non dev'essere σb per la 1ª parte di questa dimostrazione nè q per la 4ª), non lo è per πc nè per σc, a causa di ciò che si è già dimostrato (parti 2ª, 3ª) e quindi nel gruppo degli enti di Sb, per cui la proprietà non vale, se comparisce un ente c compariscono πc e σc, cioè quel gruppo equivale a sè stesso nella corrispondenza, ed è un ciclo, contro l'ipotesi. La proprietà è quindi dimostrata.

Resta così provata la parte a) del teorema.

b) Il gruppo è bene ordinabile e può divenire o illimitato ad un senso, o, altrimenti, sempre limitato, e in determinati casi anche a due sensi.

Infatti per la parte a) del teorema si è definito il concetto di seguente, e possiamo ora definire b come precedente ad a (b è di Pa), se a è di Sb.

Inoltre se a è un ente di G, dico essere σa (che è appunto di $S\,a$ e che esiste tranne al più per q) il suo immediatamente seguente. Infatti, se vi fosse un ente c seguente di a precedente σa, avremmo che $\sigma\,a$ è di Sc e c di $S\,a$; ma siccome c non è σa, dovrebbe c, perchè di $S\,a$, appartenere anche a $S(\sigma a)$, e quindi insieme sarebbero σa di Sc e c di $S(\sigma a)$, contro quanto si è dimostrato nella parte a), II. Del pari se a non è p esiste $\pi\,a$, ed è l'immediatamente precedente ad a, giacchè $\sigma(\pi a)$ è a, e $\sigma(\pi a)$ è, come si è visto, l'immediatamente seguente di πa.

Nel caso $(G - p \backsim G)_\chi$ il gruppo è così illimitato e ad un senso secondo il il criterio σ.

Nel caso $(G - p \backsim G - q)_\chi$, cioè $(G \backsim G)_\chi$ non esistendo σq, il gruppo risulta limitato secondo il criterio σ. In questo caso, si costruisca la catena G_0 di p rispetto al criterio σ. Se essa non equivale all'intero gruppo, si dica G_1 il gruppo degli enti di G che non le appartengono. Poichè in G_0, che è catena di p, comparisce l'ente π di ogni suo ente (eccetto p), dovrà mancare in essa l'ente σ di ogni ente che vi manchi, e quindi dovrà in G_1 comparire l'ente σ di ogni proprio ente, eccetto di q, se q vi comparisce: e comparendo in G_0 l'ente σ di ogni suo ente (eccetto di q, qualora q fosse in G_0) comparirà in G_1 l'ente π di ogni suo ente. Se in G_1 non fosse q, allora in esso di ogni ente comparirebbe l'ente σ e l'ente π, e G_1 sarebbe un ciclo, che per ipotesi non deve esistere. Comparirà dunque in G_1 l'ente q, e se un ente anche l'ente π di esso, cioè l'intera catena di q presa rispetto al criterio π. Vi sono dunque in G, e sono senza enti comuni, la catena G_0 di p rispetto a σ, e quella di q rispetto a π. Oltre gli enti di queste due catene non possono esserci altri enti in G, giacchè altrimenti nel gruppo di questi ultimi comparirebbero i loro enti σ e π (i quali se fossero nelle catene obbligherebbero gli enti stessi ad esservi) ed esso costituirebbe un ciclo che non può esservi: così lo stesso G_1 è catena di q rispetto a π. Se in queste catene G_0 e G_1 diciamo q ente π di p e p ente σ di q, evidentemente il loro insieme costituisce una bicatena (§ 23). E dicendo tutti gli enti di G_1 precedenti a tutti quelli di G_m, il gruppo resta, com'è facile a vedersi, un gruppo in cui ogni ente ha precedenti e seguenti, anzi ha l'immediatamente precedente, e l'immediatamente seguente, cioè è un gruppo bene ordinato a due sensi, secondo il criterio σ e quello π.

Il teorema è pienamente provato.

Osservazione 5ª. — Nel caso $(G - p \backsim G)_\chi$, il gruppo bene ordinato ad un senso, secondo il corollario 1º del § 27, è catena aperta illimitata di p, rispetto al criterio σ.

Nel caso $(G \backsim G)_\chi$, fatto l'ordinamento nel modo dato dal teorema, si ha o una catena aperta limitata, od un gruppo che può ridursi ad una bicatena.

Osservazione 6ª. — I due casi in cui si è spezzato il teorema precedente non si escludono a vicenda, potendo un gruppo in una corrispondenza essere equivalente a sè stesso, in un'altra prevalente.

Corollario 1º — Un ciclo semplice è bene ordinabile, e si può rendere bene ordinato, limitato.

Cor. 2º. — Una catena di un ente a, la quale sia aperta ed illimitata, è bene ordinabile (§§ 29, 30): ed è bene ordinata ad un senso, prendendo a per ente originario, e il σ di ogni ente (o risp. il π) come suo immediatamente seguente (o risp. precedente).

Cor. 3º. — Una catena chiusa è bene ordinabile (§§ 30 Corollario, 44 Cor. 1º): ed è un gruppo bene ordinato limitato, prendendo per ente originario un ente qualunque p, e per finale quello q a cui tale ente corrisponde nella corrispondenza χ della catena, quando sia $(G - p \backsim G - q)_\chi$.

Cor. 4º. — Una catena aperta limitata è bene ordinabile (§§ 29-30), ed è un gruppo bene ordinato limitato, prendendo per ente originario il suo ente privo di σ.

Cor. 5º. — Una bicatena è bene ordinabile, e dà un gruppo bene ordinato a due sensi. Essa infatti consta delle due catene opposte di un suo ente qualunque (§ 23), per esempio a: rendendo bene ordinate queste due catene, secondo il Cor. 2º ed il Teorema precedente, e precisamente riducendo quella rispetto al criterio σ in un gruppo bene ordinato ad un senso secondo σ, l'altra in uno bene ordinato ad un senso secondo π, l'intero gruppo diviene bene ordinato, e precisamente bene ordinato a due sensi, tanto secondo σ quanto secondo π.

Considerando poi che la bicatena è un ciclo semplice (§ 30 Corollario), si conclude, anche in base al Corollario 1º, che si può ordinare in modo da essere un gruppo bene ordinato limitato.

Cor. 6º. — È bene ordinabile un gruppo, che in una conveniente corrispondenza si spezza in un gruppo di cicli semplici, rispetto ai quali, presi come enti, sia bene ordinabile (§ 41, § 44 Cor. 1º).

45. Teorema. — Se in una corrispondenza α un gruppo G equivale ad una sua parte propria, e, rispetto ad α, G si spezza in un gruppo di cicli semplici che sia bene ordinabile rispetto a questi cicli presi come enti (gruppo che può anche mancare) ed in una parte Γ necessariamente equivalente ad una relativa parte propria Γ', ed il gruppo $\Gamma - \Gamma'$, inoltre, è bene ordinabile, anche G è bene ordinabile.

Infatti (§ 27, Cor. 2°) il gruppo Γ non è che un gruppo di catene aperte ed illimitate, una per ciascuno degli enti di $\Gamma - \Gamma'$. Ognuna di esse si può rendere bene ordinata ad un senso col criterio dato dalla propria corrispondenza (§ 44, Cor. 2°), ed ognuno dei cicli semplici di G si può esso pure rendere bene ordinato limitato con l'analogo criterio (§ 44, Cor. 1°)

Il gruppo Γ è allora un gruppo bene ordinabile di gruppi bene ordinabili, e quindi (§ 41) è bene ordinabile esso pure rispetto agli enti primitivi. Sarà dunque tale anche il gruppo G dato, che si spezza in Γ e nel gruppo bene ordinabile (§ 41, § 44 Cor. 5) degli enti dei cicli semplici.

Corollario. — È bene ordinabile un gruppo G che in una conveniente corrispondenza privi di cicli equivalga ad una sua parte propria G_1, in modo che il gruppo $G - G_1$ sia bene ordinabile.

Capitolo VII.

CATENE NEI GRUPPI BENE ORDINATI PRINCIPIO D'INDUZIONE.

46. In un gruppo bene ordinato si costruisca la catena (§ 16) di un suo ente a rispetto al criterio σ che serve all'ordinamento. Essa costituirà chiaramente un gruppo bene ordinato, colla stessa legge del gruppo dato, e con a per ente originario.

Teorema. — La catena di un ente a di un gruppo bene ordinato contiene solo enti seguenti di a.

Infatti tale catena contiene chiaramente σa che è di Sa Se contenesse enti di Pa, potremmo sopprimerli — il gruppo restante conterrebbe a, e se contenesse un ente (che è di Sa giacchè quelli di Pa sono soppressi) conterrebbe il suo σ, giacchè questo pure è di Sa, e perciò non di Pa e quindi non soppresso. Dunque tal gruppo sarebbe un gruppo $(a)_\sigma$ parte della catena di a, il che è assurdo (§ 16).

Corollario. — La catena di un ente a di un gruppo bene ordinato è aperta, non esistendo in essa l'ente πa.

47. Teorema. — Se nella catena di un ente a di un gruppo bene ordinato manca un ente b di Sa, mancano anche tutti gli enti di Sb.

Infatti se vi fossero enti di Sb, sopprimendoli tutti resterebbe sempre un gruppo contenente a per ipotesi e contenente il σ di ogni ente che esso contiene; poichè se un ente si è soppresso esso è di Sb, e quindi il suo π o è b che manca per ipotesi, o è un ente di Sb e si è pure soppresso, e quindi manca il π di ogni ente mancante cioè esiste il σ di ogni ente rimasto. Il gruppo restante sarebbe perciò un gruppo $(a)_\sigma$, parte della catena di a, il che (§ 16) non può essere.

Corollario 1. — Se la catena di a in un gruppo bene ordinato contiene un ente c, che è di Sa (§ 46), contiene tutti gli enti compresi fra a e c.

Corollario 2. — Se il gruppo dato è bene ordinato e se la catena del suo ente originario contiene l'ente finale, essa coincide con l'intero gruppo: e quindi se reciprocamente essa non coincide con l'intero gruppo, non contiene l'ente finale ed è perciò illimitata.

48. Teorema. — In un gruppo bene ordinato G se si dimostra una proprietà P per un suo ente a e si prova che se essa è vera per un ente lo è anche per il suo ente σ, tale proprietà resta provata per tutti gli enti della catena di a.

Invero il gruppo degli enti di G che godono la proprietà P contiene a, e se un ente anche il suo ente σ: dunque contiene la catena di a (§ 16).

Corollario. — Se un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, è catena del suo ente originario, una proprietà che si dimostri per il suo ente originario e che, dimostrata per un ente, si provi vera per il suo ente σ, è provata per qualunque ente del gruppo.

Definizione. — Il fatto di cui si è parlato nel Corollario precedente, e che si verifica in certi gruppi bene ordinati, quello cioè che « una proprietà valida per l'ente originario e per l'ente σ di ogni ente per cui vale « è valida per qualunque ente del gruppo » è il fatto, così importante nella matematica, cui si dà il nome di *principio di induzione matematica* (*).

49. È vero anche il reciproco del Corollario del § precedente, cioè:

Teorema. — Se in un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, vale il principio di induzione, esso è catena del suo ente originario.

Infatti se un gruppo qualunque Γ contiene l'originario a del gruppo dato G, l'ente σ di ogni ente di G che contiene, per il principio di induzione supposto in G la proprietà di appartenere a quel gruppo Γ varrà per ogni ente di G: e G apparterrà intero ai gruppi che conten gono a

---

(*) DEDEKIND § 4 N. 59, 60 — VERONESE, l. c. Introd. N. 39, *b*).

e il σ di ogni ente di G che contengono, dei quali quindi sarà il legame. Sarà dunque G, secondo la definizione del § 16, catena di a, c.d.d.

Corollario. — La condizione necessaria e sufficiente in un gruppo bene ordinato, illimitato ad un senso o limitato, affinchè valga in esso il principio d'induzione è che esso sia catena del proprio ente originario.

Capitolo VIII.

GRUPPI SEMPLICI.

50. Definizione. — I gruppi bene ordinati che hanno un ente originario di cui sono catena, si diranno *semplicemente ordinati* (*).

E si dirà *semplice* un gruppo che si possa rendere semplicemente ordinato.

Corollario 1. — I gruppi semplicemente ordinati sono tutte (§ 44 Cor. 2°, 4°) e sole (§ 50 Def.) le catene aperte.

Cor. 2. — Nei gruppi semplicemente ordinati vale il principio d'induzione (§ 48) e, fra i gruppi bene ordinati, vale in essi soli (§ 49).

Dalle proprietà esposte al § 18 per le catene, si deduce poi subito il

Cor. 3. — In un gruppo semplicemente ordinato ogni ente (eccetto l'originario) ne ammette uno immediatamente precedente.

E da questo discende che nella corrispondenza ordinatrice (§ 12) del gruppo semplicemente ordinato, G, di cui sia a l'ente originario, il gruppo G se è limitato equivale a sè stesso, se è illimitato equivale alla sua parte propria $G - a$.

Inoltre si vede dallo stesso Cor. 3° che la corrispondenza ordinatrice è identica alla corrispondenza della catena di a (§ 29), e si ha quindi il

Cor. 4. — La corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplice è priva di cicli (§ 30).

51. Teorema. — Un gruppo Γ equivalente ad un gruppo semplice G è semplice esso pure.

Basta infatti ridurre G in un gruppo semplicemente ordinato e porre poi Γ in corrispondenza ordinata (§ 34) con G, per avere Γ bene ordinato e limitato od illimitato secondochè in un modo o nell'altro è G. In tali condizioni è chiaro che la catena dell'ente originario di Γ coincide col gruppo e che quindi Γ è semplicemente ordinato c. d. d.

52. Teorema. — Se un gruppo bene ordinato limitato non è semplicemente ordinato, esso è un gruppo sviluppabile.

(*) Cfr. Biasi l. c. § 5.

Infatti la catena del suo ente originario a sarà illimitata (§ 46 Cor. 2°) non coincidendo col gruppo per ipotesi. Perciò la catena di a è un gruppo bene ordinato illimitato, e quindi (§ 43) è sviluppabile ed è tale anche l'intero gruppo dato, di cui esso è parte.

53. Teorema. — In un gruppo semplicemente ordinato la catena di un suo ente b consta di b e di tutti i seguenti di b.

Infatti: 1° tale proprietà è vera per l'ente originario a, essendo appunto il gruppo (§ 50) catena di a, e gli enti diversi da a essendo tutti di $S a$; 2° se è vero per un ente b, lo è per σb giacchè la catena di σb differisce da quello di b solo per l'ente b, e $S(\sigma b)$ equivale ad $S b - \sigma b$. Per il principio d'induzione (§ 48) la proprietà è dimostrata per qualunque ente.

Corollario. — Se in un gruppo semplicemente ordinato si dimostra una proprietà per un suo ente b (anche non originario) e si prova che se è vera per un ente lo è per il suo ente σ, tale proprietà resta provata per tutti gli enti seguenti di b, giacchè $Sb + b$ è catena di b, è bene ordinato, e quindi è semplicemente ordinato esso pure e vale per esso il principio d'induzione.

54. Definizione. — Diremo *parte fondamentale* (*parte* Z) (*) di un gruppo semplicemente ordinato il gruppo composto da un ente del gruppo e dal gruppo dei precedenti di quell'ente, il quale ente si dirà *finale* della Z. La parte Z, che ha un speciale ente finale b, si indicherà con Z_b.

In una parte fondamentale un ente si dirà *precedente* o *seguente*, *immediatamente* o no, di un altro, secondochè sia risp. nell'una o nell'altra condizione nel gruppo primitivo.

55. In una parte fondamentale Z_b di un gruppo G se comparisce un ente di G, p. es. c, compariscono pure i precedenti (eccetto, s' intende, per l'ente originario di G) giacchè se c è di Pb e d è di Pc, si ha (§ 31) che d è di Pb.

Se comparisce c (che non sia l'ente finale b) comparisce anche l'immediatamente seguente σc. Infatti: 1° o σc è b, ed allora esso è di Z_b per definizione; 2° o σc non è b, ed allora se σc non fosse di Z sarebbe del gruppo $S b$, nel quale pure si dovrebbe trovare il suo immediatamente precedente c (§ 44 Oss. 3°) essendo σc distinto da σb perchè c è distinto da b; ma c non è di $S b$, dunque è provato quanto si diceva. E perciò si ha il

Teorema. — In una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato se vi è un ente vi è l'immediatamente seguente, tranne per il finale, e vi son tutti i suoi precedenti.

Corollario I. — Se in una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato manca un ente del gruppo, mancano tutti i suoi seguenti.

(*) La notazione è presa dal DEDEKIND che l'usa per i numeri (§ 7. N. 98).

Cor. 2. — Se b è un ente non finale di una parte fondamentale Z di un gruppo, la Z_b dello stesso gruppo è parte propria della prima Z.

Cor. 3. — Di due distinte parti fondamentali di un medesimo gruppo semplicemente ordinato l'una è parte propria dell'altra.

Cor. 4. — Se in un gruppo semplicemente ordinato si sopprime una parte fondamentale, il gruppo restante è ancora semplicemente ordinato.

56. Teorema. — Ogni parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato è catena del proprio ente originario.

Ed invero sia Z_b una parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato G, ed a sia l'ente originario di Z_b e di G. Se la catena di a rispetto al gruppo Z_b fosse parte propria di Z_b, poichè essa contiene a, e se un ente il suo σ, senza eccezione giacchè non può contenere l'ente finale di Z_b (§ 47. Cor. 2°), essa sarebbe un gruppo $(a)_\sigma$ rispetto al gruppo G, e quindi la catena di a in G ne sarebbe parte, e sarebbe perciò parte propria di G, contro l' ipotesi che G sia semplicemente ordinato, e che quindi sia catena di a. Dunque la catena di a in Z_b non è parte propria di Z_b ma coincide con Z_b.

Corollario. — Nella corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato, una parte fondamentale è un gruppo semplicemente limitato.

57. Se di un gruppo semplicemente ordinato prendiamo tutte le parti fondamentali ed associamo ciascuna di essi al proprio ente finale, stabiliamo una corrispondenza fra il gruppo dato G ed il gruppo delle Z nel quale si considerino le Z come enti, ed in tale corrispondenza i due gruppi sono equivalenti.

Se diciamo una Z seguente o precedente di un'altra quando nel gruppo dato l'ente finale della prima è seguente o risp. precedente di quello dell'altra, si vede chiaramente che così risulta il gruppo delle Z ordinato e in corrispondenza ordinata con G, ed esso pure è semplicemente ordinato, limitato o no, secondochè è limitato o no il gruppo G.

Definizione. — Quando diremo *gruppo ordinato* delle Z di un gruppo semplicemente ordinato intenderemo il loro gruppo ordinato nel modo ora detto.

Cor. — Il gruppo ordinato delle Z di un gruppo semplicemente ordinato sodisfa al principio d'induzione.

Capitolo IX. (*)

GRUPPI FINITI.

58. I gruppi semplicemente ordinati sono o limitati od illimitati: i gruppi semplici devono poter dare origine o agli uni od agli altri (§ 50). Senza escludere, almeno per ora, che uno stesso gruppo semplice, possa, diversamente ordinato, dare origine agli uni ed agli altri, studiamo separatamente i due casi.

Definizione. — Diremo *finito* un gruppo semplice quando possa farsi divenire semplicemente ordinato e limitato (**).

Corollario 1. — Esistono gruppi finiti p. es. quello di uno o due enti (§ 39).

Cor. 2. — Un gruppo non ordinabile non è finito.

Cor. 3. — Un gruppo equivalente ad uno finito è finito esso pure.

Cor. 4. — Ogni parte fondamentale di un gruppo semplicemente ordinato è un gruppo finito (§ 56, Cor.)

Cor. 5. — Il gruppo delle parti fondamentali Z di un gruppo finito, considerando le Z come enti, è finito esso pure. (§ 57).

59. Teorema. — In un gruppo finito nessuna parte propria può essere equivalente all' intero gruppo (***).

Si consideri il gruppo G dato semplicemente ordinato (come devesi poter fare per la definizione di gruppo finito) e si consideri il gruppo ordinato delle parti fondamentali (gruppi Z) di G (§ 57). Esso è semplicemente ordinato limitato, e quindi sodisfa al principio d'induzione.

Il teorema è evidentemente vero per l'originario di tali gruppi, che consta di un solo ente. Dimostriamo ora che supposto vero per uno di quei gruppi Z_a, è vero anche per l'immediatamente seguente che si ottiene da esso aggiungendovi un altro ente $b = \sigma a$. Sia Γ una parte di $Z_b = Z_a + b$, e sia, in qualche corrispondenza χ, se è possibile $[\Gamma \backsim \Gamma_b]_\chi$. Allora:

(*) Per questo capitolo vedi Bettazzi: Gruppi finiti ed infiniti di enti (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. Vol. *XXXI*).

(**) V. Cantor *Zur Lehre* ecc. pag. 60. Nota. — Tale autore peraltro non richiede, per lo meno esplicitamente, il principio d'induzione (che qui si dà dicendo il gruppo semplicemente ordinato) sebbene lo usi poi nelle dimostrazioni. Il Dedekind (l. c. § 5 N. 64) dice finiti i gruppi non infiniti (secondo il nostro linguaggio, non sviluppabili); ma pare troppo vasto tale concetto per rispondere a ciò che in pratica si intende per aggregati finiti (Vedi Introduzione) Il nostro gruppo finito corrisponde, quando è semplicemente ordinato e limitato, a quello che il Veronese nei suoi *Fondamenti di Geometria* al N. 35 dell'Introduzione definisce come *serie naturale o limitata di 1. specie*.

(***) Cantor *Zur Lehre* etc. pag. 60, Nota. — Veronese l. c. Introd. N. 48 *f*).

1. o Γ contiene b, ed allora soppresso b in Γ ed in Z_b, si ha facilmente che $\Gamma - b \backsim Z_a$, contro l'ipotesi, essendosi supposto per Z_a che nessuna sua parte sia equivalente a esso, ed essendo $\Gamma - b$ parte di Z_a.

2. o Γ non contiene b; allora Γ è parte anche di Z_a. Sopprimendo b in Z_b, ed in Γ il corrispondente b' di b avremo $\Gamma - b' \backsim Z_a$, il che non può essere, essendo $\Gamma - b'$ parte di Z_a.

Si conclude che Z_b non è mai equivalente ad una sua parte propria.

Per il principio d'induzione tale proprietà sarà vera per tutti gli enti del gruppo della Z, e quindi anche per il suo ente finale, che è il gruppo proposto nel teorema. Il teorema è dunque dimostrato.

Cor. 1. — I due concetti di gruppo finito e di gruppo sviluppabile si escludono a vicenda (§ 12).

Cor. 2. — Nessuna parte di un gruppo finito può essere sviluppabile (§ 14).

60. Teorema. — Le parti di un gruppo finito sono esse pure finite.

Ordinato infatti semplicemente il gruppo dato G in modo che sia limitato (§ 58), se G_1 è una sua parte, si dica in essa un ente precedente o seguente ad un altro quando a questo sia risp. precedente o seguente in G. Il gruppo G_1 sarà allora chiaramente ordinato.

Dico che in tal modo esso è anche bene ordinato. Sia invero un suo ente a_1 (non finale) e si consideri il gruppo degli enti di G, ciascuno dei quali è precedente di tutti gli enti che in G_1 seguono a_1. Tale gruppo parte di G può mancare, ed allora l'ente σa_1 non è di tal gruppo e quindi è non precedente di tutti gli enti che in G_1 seguono a_1, e non potendo essere seguente di alcuno di essi, che sarebbe altrimenti compreso fra a e σa_1, sarà uno di essi, e sarà perciò l'immediatamente seguente di a_1. Se il gruppo degli enti di G ciascuno dei quali precede tutti gli enti di G_1 seguenti di a_1 esiste, esso è chiaramente bene ordinato e non può essere illimitato giacchè altrimenti sarebbe (§ 43) sviluppabile, mentre G non lo è. Allora se b_1 è il suo ente finale, si vede come nel caso precedente che σb_1 è ente di G_1; e precisamente è l'immediatamente seguente ad a_1. Si conclude che G_1 è bene ordinato.

Inoltre G_1 è limitato, altrimenti esso sarebbe sviluppabile (§ 43) ed allora tale sarebbe anche G, che invece è finito.

Ed infine se G_1 non fosse catena dal suo ente originario a', costruita in esso la catena Γ di a', che allora dovrebbe essere illimitata (§ 46 Cor. 2), il gruppo degli enti di G precedenti qualcuno di Γ sarebbe ancora un gruppo (a), parte di G, il che non può essere.

La parte G_1 soddisfa adunque a tutte le condizioni per essere un gruppo finito c. d. d.

Corollario. — Un gruppo che in qualche corrispondenza sia suvvalente ad uno finito è finito esso pure. (§ 58, Cor. 3°).

61. Teorema. — Se un gruppo finito, Γ, è o suvvalente, o equivalente, o prevalente ad un gruppo qualunque G in una speciale corrispondenza, la stessa relazione si avrà in tutte le possibili corrispondenze fra Γ e G

Se infatti con una conveniente corrispondenza α ed un altra qualunque β si avesse

$$(\Gamma < G)_\alpha, \quad (\Gamma \gtrsim G)_\beta,$$

oppure

$$(\Gamma \sim G)_\alpha, \quad (\Gamma \gtrless G)_\beta;$$

oppure

$$(\Gamma > G)_\alpha, \quad (\Gamma \lesssim G)_\beta:$$

nella corrispondenza composta $\beta\alpha$ sarebbe Γ prevalente o suvvalente a sè stesso, e quindi equivalente ad una propria parte, il che non può darsi con Γ finito.

Corollario 1. — Per giudicare la relazione di potenza che lega un gruppo finito ad un'altro gruppo qualunque, basta esaminare che cosa accade in una sola corrispondenza (Cfr. § 9).

Cor. 2. — Le parti proprie di un gruppo finito sono di potenza minore al gruppo, essendo suvvalenti ad esso nella corrispondenza identità.

Cor. 3. — Di due distinte parti fondamentali di un medesimo gruppo semplicemente ordinato una è di potenza minore dell'altra (§ 55 Cor. 3°).

62. Teorema. — In qualunque modo si renda bene ordinato un gruppo finito, esso dovrà essere sempre limitato e semplicemente ordinato.

Infatti se mancasse la prima proprietà sarebbe (§ 45) sviluppabile; e tale sarebbe pure se, verificata questa, il gruppo non fosse semplicemente ordinato (§ 52). In ogni caso quindi (§ 59, Cor. 1°) il gruppo non sarebbe finito.

63. Teorema. — Un gruppo finito se è ordinato è sempre bene ordinato.

Infatti sia G il gruppo finito, e si supponga che esso sia bene ordinato (il che è sempre possibile per lo meno in un modo) (§ 58) e quindi (§ 62) che sia semplicemente ordinato. Si consideri il gruppo ordinato delle sue parti fondamentali Z (§ 57): esso sodisfa al principio d'induzione (§ 57, Cor.) e di esso fa parte G come ente finale. Se dunque si dimostrerà vero il teorema per il gruppo Z ente originario, e per l'immediatamente seguente di un gruppo Z per cui è vero, si sarà provato per ogni gruppo, e quindi anche per G.

1° Il teorema è chiaramente vero per il gruppo originario, formato da un ente.

2° Sia supposto vero il teorema per un gruppo Z_a, e si consideri l'immediatamente seguente Z_b formato da Z e da $b = \sigma\, c$, che è ente di G e non di Z_a.

Se Z_b è ordinato, sopprimendo b e usando gli stessi criteri di seguente e precedente, il gruppo restante Z_a è ancora ordinato, e quindi, secondo la ipotesi, bene ordinato. Gli enti di Z_a precedenti b in Z_b formano un gruppo bene ordinato, il quale, perchè parte di un gruppo finito, è finito, (§ 60) e quindi limitato (§ 62) ed ha dunque un ente finale b'. Di tale ente è immediatamente seguente il b in Z_b. L'ente immediatamente seguente di b in Z_a sarà un certo ente b, che risulterà ora immediatamente seguente di b' in Z_b. E tale ultimo gruppo sarà perciò bene ordinato c. d. d.

Corollario 1. — Un gruppo finito comunque sia ordinato è limitato e semplicemente ordinato (§ 62).

Cor. 2 — Un gruppo finito è sempicemente ordinato anche scambiando le parole *precedente* e *seguente* e quelle *finali* ed *originarie* o brevemente *rovesciando il gruppo* (*)

Cor. 3. — Un gruppo ordinato in cui qualche ente non abbia l'immediatamente seguente non è finito.

64. Si è visto (§ 44, Cor. 1°) che se in una corrispondenza priva di cicli un gruppo G è equivalente a sè stesso, esso è bene ordinabile in modo da essere limitato. Questo ordinamento consiste nel considerare un ente qualunque p del gruppo, nell'indicare con σ di un ente il suo corrispondente nella corrispondenza, eccetto per l'ente q che avrebbe per corrispondente p, e nel prendere come gruppo Sb quello composto di tutti i gruppi che non contengono b, contengono σb, e l'ente σ (quando c'è) di qualunque ente che essi contengono. Ora dico che se il gruppo non è sviluppabile in tale ordinamento, il gruppo è semplicemente ordinato. Infatti, se in questa corrispondenza il gruppo non fosse catena di p, costruita la catena di p, essa, non coincidendo col gruppo, non dovrebbe contenere l'ente q privo di σ (§ 47, Cor. 2°) e quindi essa sarebbe illimitata e perciò costituirebbe un gruppo sviluppabile e tale sarebbe G con-tro l'ipotesi. Si conclude che il gruppo risulta così semplicemente ordinato: ed essendo limitato, sarà finito.

D'altra parte sappiamo che la corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato se il gruppo è limitato fa corrispondere il gruppo a sè stesso (§ 42) ed è priva di cicli (§ 52, Cor.), e quindi si ha il

Teorema. — La condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo non sviluppabile sia finito è che possa stabilirsi una corrispondenza priva di cicli, nella quale il gruppo sia equivalente a sè stesso.

65. Un gruppo di enti è definito quando si possa giudicare se un ente qualunque gli appartiene o no. A tale scopo dovranno esser date leggi colle

(*) Cfr. Veronese, l. c. Introduzione. N. 39. c). Il Cantor, (*Zur Lehre, ecc.*, pag. 61. Nota) dà questo come una *condizione* ad un gruppo per essere finito: secondo questo Corollario essa è inutile.

quali poter fare un simile riconoscimento. Tra queste leggi è utile spesso includere la legge detta « *arbitrio* » la quale fa dipendere la presenza degli enti di un gruppo, soltanto della volontà dell'operatore.

Per disciplinare l'uso di essa in modo anche che si dia immagine di quanto accade nella realtà, converremo che tale legge serva solo pei gruppi finiti, ammettendo il

Postulato (*) 1°: « Non si possono prendere ad arbitrio « enti che costituiscano un gruppo non finito, sia « che si voglian togliere da un gruppo solo (fosse « pur quello di tutti gli enti) sia che debban esser « presi parte da alcuni, parte da altri gruppi.

2°: « Si possono prendere ad arbitrio enti uno per « ciascuna di speciali parti (distinte o no) di un grup- « po, se queste parti, considerate come enti, costi- « tuiscono un gruppo finito.

3°: « Si possono prendere ad arbitrio enti distinti « da un gruppo G, i quali debbono costituire un grup- « po equivalente ad uno qualunque finito dato, che « sia di potenza minore a G.

Corollario. — Si può prendere ad arbitrio un ente di un gruppo qualunque. »

66. Se occorre estrarre da un gruppo una parte che sia sviluppabile, per quanto si soglia usare talora la frase *ad arbitrio*, pure in omaggio al postulato precedente dovrà intendersi che sia data una legge diversa dall'arbitrio colla quale si possano ottenere tutti quegli enti, o almeno tutti all'infuori di quelli di un gruppo finito che siano dati ad arbitrio, cioè una legge colla quale si possa giudicare se un ente del gruppo appartiene alla parte in questione.

Può talora essere utile il considerare una parte di un gruppo non finito G ottenuta prendendo un ente, *che non importa del resto quale sia*, per ciascuna di certe sue parti costituenti esse pure (considerate come enti) un gruppo non finito. Per quanto si è detto, occorrerebbe, perchè un tal gruppo fosse definito, aver nota una legge, applicando la quale a ciascuna di quelle parti ne venga determinato un ente, e ciò qualunque sia quella parte. Non potendo, per la ampiezza che abbiamo nel concetto di gruppo, asserirsi che tale legge possa darsi in generale, si vede chiara l'utilità della distinzione dei gruppi in due categorie. Dicendo *legge di scelta* (**) una legge con la quale in un gruppo si determini *un ente* (del resto qualunque) in *ciascuna* delle sue parti, dovremo distinguere i gruppi per i quali tale legge di scelta è nota, da quelli per i quali essa non è nota.

(*) A tale proposizione, che intendiamo accettare, diamo il nome di Postulato, non essendo tale che, per ora, sembri potersi provare. La cosa sembrerà così rigorosa anche a chi dissentisse dal fare uso di simili proposizioni.

(**) Bettazzi. — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale. - (Rendic. del Circ. Mat. di Palermo. T. IV).

Non si esclude che possano aversi gruppi per i quali esistano leggi di scelta per *speciali* parte di essi. P. es. nei gruppi finiti possiamo dire fin d'ora esistere una legge di scelta, l'arbitrio (§ 65, Post. 2), per i gruppi Z loro parti fondamentali, giacchè questi, considerati come enti, costituiscono un gruppo finito (§ 58, Cor. 5).

CAPITOLO X.

GRUPPI SEMPLICEMENTE SVILUPPABILI.

67. Definizione. — Si dirà *gruppo semplicemente sviluppabile* quel gruppo semplice che si possa ordinare semplicemente in modo da essere illimitato (*). Se un tal gruppo si consideri quando appunto è semplicemente ordinato ed illimitato, si dirà per brevità che si è reso *normale*.

Cor. 1. — Il gruppo di cui si fa parola è sviluppabile (§ 43).

Cor. 2. — Le qualità di gruppo finito e di semplicemente sviluppabile si escludono a vicenda (§ 59, Corollario 1).

Cor. 3. — Un gruppo semplice o è finito o è semplicemente sviluppabile.

Cor. 4. — Un gruppo equivalente ad uno semplicemente sviluppabile, è tale esso pure.

Cor. 5. — Il gruppo delle parti fondamentali Z di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale, quando si considerano le Z come enti è semplicemente sviluppabile esso pure (§ 57) (**).

68 Teorema. — Di ogni gruppo sviluppabile fa parte un gruppo semplicemente sviluppabile (***).

Sia G un gruppo sviluppabile ad α la corrispondenza nella quale G è equivalente ad una sua parte propria G': e sia a un ente di G e non di G'. Si costruisca la catena Γ di a prendendo come ente σ di un ente di G il corrispondente in G': tale catena deve essere illimitata, ogni ente avendo il suo σ, e deve essere aperta non essendo a per ipotesi σ di nessun ente. E siccome nella corrispondenza α una tale catena è bene ordinata illimitata ad un senso (§ 44, Cor. 2), così essa è semplicemente sviluppabile c. d. d.

Corollario. — Esistono dei gruppi semplicemente sviluppabili (§ 12).

(*) DEDEKIND § 6, N. 71. — Cfr. Veronese l. c. Introd. N. 89. Def. III. — Il Dedekind dice tal un gruppo *semplicemente infinito* (Vedi Nota al nostro § 12, Introduzione); questo gruppo corrisponde, quando è ordinato, a quello che il Veronese dice *serie illimitata di 1a specie*.

(**) VERONESE l. c. N. 89 *i*).

(***) DEDEKIND § 6 N. 72.

69. Abbiamo visto (§ 44) che se un gruppo G, di cui p è un ente, equivale a $G-p$ in una corrispondenza priva di cicli, il gruppo G è bene ordinabile, dicendo gruppo dei seguenti Sb di un ente b quello composto dei gruppi i quali non contengono b, contengono σb e contengono l'ente σ di ogni ente che comparisce in essi.

Dico ora che in tale corrispondenza il gruppo è semplicemente ordinato. Infatti, se non lo fosse, la catena Γ del suo ente originario p sarebbe parte propria di G, e gli enti di G non appartenenti a Γ formerebbero un ciclo: giacchè G corrisponde all' equivalente $G-p$, e Γ all'equivalente $\Gamma-p$, e sopprimendo risp. in G e $G-p$ le parti Γ e $\Gamma-p$ corrispondenti, le restanti sarebbero due gruppi identici equivalenti nella corrispondenza e darebbero perciò un ciclo, che invece non deve esistere. Dunque G è semplicemente ordinato, e, perchè illimitato, esso è semplicemente sviluppabile.

D'altra parte si vide (§ 50) come reciprocamente la corrispondenza ordinatrice di un gruppo semplicemente ordinato illimitato fa corrispondere al gruppo G il gruppo $G-p$, dove p è un ente di G, e ciò in una corrispondenza senza cicli. Se ora si osserva che data una corrispondenza senza cicli fra G e $G-p$ scambiando in G l'ente p con un altro qualunque a ed in $G-p$ al posto di a che si sopprime ponendo p si ottiene una nuova corrispondenza senza cicli, si conclude il

Teorema. — La condizione necessaria e sufficiente perchè un gruppo G sia semplicemente sviluppabile è che preso in esso un ente qualunque a, fra G e $G-a$ si possa stabilire una corrispondenza senza cicli, nella quale G e $G-a$ siano equivalenti.

70. Teorema. — Se un gruppo è parte di uno semplicemente sviluppabile, p. es. G, ed è tale che in esso se vi è un ente ve ne siano anche di quelli che siano seguenti in G quando G è semplicemente ordinato, sarà anche Γ semplicemente sviluppabile (*).

Sia infatti G già semplicemente ordinato ed illimitato (§ 67 def). Se, essendo a e b due enti di Γ diciamo a seguente o precedente di b (a è di Sb, risp. a è di Pb) secondochè accade risp. l'un caso o l'altro in G, evidentemente il gruppo Γ è ordinato (§ 31).

Dico inoltre che Γ è così bene ordinato ed illimitato.

1° Invero dapprima ogni ente di Γ ne ammette dei seguenti per le condizioni richieste dal teorema.

2° Ogni ente di Γ ammette in Γ l'immediatamente seguente. Ed invero se ciò non fosse, e per un ente b di Γ accadesse che per ogni ente di $S'b$ ne esistesse uno compreso fra b ed esso, se c di $S'b$ si formi il gruppo G' composto degli enti di Γ che sono seguenti di b e non seguenti di c, e degli altri enti di G che sono compresi fra due qualunque degli ora nominati.

(*) Cfr. Dedekind, § 8, N. 122 — Veronese l. c. N. 39 c). — Cenni anche in Cantor. Acta Math. pag. 313.

In tale gruppo G' se vi sono due enti di G vi sono chiaramente anche tutti quelli di G compresi fra essi. Se in essi vi è un ente, vi è il suo immediatamente precedente in G, giacchè: I. o esso è ente di Γ e quindi di $S'b$ e $P'c$ o ne esiste per ipótesi un altro di Γ che è suo precedente ed è di $S'b$, il quale dunque è ancora in G', ossia ve ne sono in G' dei precedenti quell'ente in G, e quindi vi è anche il suo immediatamente precedente: II. o esso è ente non di Γ ma di G compreso fra due α, β di Γ, ed ammette per ciò solo in G dei precedenti (p. es. α o β) e quindi anche il suo immediatamente precedente Se in G' vi è un ente, che non sia c, vi è anche l'immediatamente seguente essendovi, per ipotesi, tutti gli enti compresi fra esso e c: per c invece non esiste in G' l'immediatamente seguente. I gruppi G' e $G'-c$ sono dunque equivalenti facendo corrispondere ad ogni ente di $G'-c$ il suo immediatamente seguente; dunque G' è sviluppabile, il che invece non può essere, essendo G' parte della Z che ha c per ente finale, la quale è gruppo finito. Si conclude che ogni ente di Γ ammette in Γ l'immediatamente seguente. Sarà Γ dunque un bene ordinato secondo σ.

3° Dico infine che, così, Γ è semplicemente ordinato. Infatti vi è un ente in Γ senza precedenti; giacchè se ogni ente di Γ avesse precedenti e preso un ente qualunque di Γ, si costruisse il gruppo G'' composto degli enti che lo precedono in Γ e di quelli di G compresi fra due di questi, si proverebbe come nel caso precedente che G'' è sviluppabile, il che è impossibile.

Inoltre se a è il suo ente originario, la corrispondenza ordinatrice fra Γ e $\Gamma - a$ non può avere cicli. Se infatti ne avesse, ed uno di essi fosse Γ_0, costruito il gruppo G_0 di tutti gli enti di G tali che ciascuno o è di Γ_0 o è in G compreso fra due enti di Γ_0, sarà G_0 chiaramente tale che per ogni suo ente esistono in essi gli immediatamente seguente e precedente, e quindi G_0 sarà un ciclo nella corrispondenza ordinatrice di G, mentre invece essendo G semplice tale corrispondenza non può contenere cicli (§ 50 Cor. 4°). Sarà dunque priva di cicli anche la corrispondenza ordinatrice di Γ, e Γ sarà perciò semplicemente ordinato (§ 69).

È così provato che Γ è semplicemente sviluppabile esso pure.

Corollario 1. — Il gruppo ottenuto da uno semplicemente sviluppabile, che si sia reso normale sopprimendovi una parte fondamentale, è semplicemente sviluppabile esso pure, ed è semplicemente ordinato nella stessa corrispondenza ordinatrice del primitivo.

Cor. 2. — In ogni parte finita di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale vi è un ente del quale nessun altro è seguente.

71. Teorema. — In ogni parte Γ di un gruppo semplicemente sviluppabile che si sia reso normale, e che sia allora p. es. G, deve esistere un ente tale che in Γ non comparisca nessuno degli enti che sono suoi precedenti in G.

Ed in vero se Γ contiene l'originario di G, questo è l'ente in questione. Se non contiene l'originario di G, che precederà allora tutti gli enti di Γ, si dica G_0 il gruppo (allora esistente) di tutti gli enti di G precedenti tutti gli enti di Γ. Se G_0 contenesse l'ente σ di ogni proprio ente, contenendo l'originario di G, pel principio d'induzione conterrebbe l'intero gruppo G, il che non dev'essere; dovrà dunque contenere almeno un ente a senza il suo σ e quindi nessuno dei seguenti, giacchè se contenesse b seguente di a, essendo a e b per le definizioni di G_0 precedente tutti gli enti di Γ, tale sarebbe anche $\sigma\, a$ compreso fra a e b, e $\sigma\, a$ sarebbe di G_0 contro l'ipotesi. E di tali enti privi di seguenti dev'essercene uno solo, giacchè di due uno sarebbe seguente all'altro, e questo seguente dovrebbe non comparire in G_0. Se a è dunque l'ente in questione, l'ente $\sigma\, a$ deve essere non precedente a tutti quelli di Γ; e non potendo essere seguente a nessuno, giacchè se fosse seguente a b dovrebbe essere b compreso fra a e $\sigma\, a$, il che non può essere, dovrà $\sigma\, a$ essere un ente appartenente a Γ, del quale in Γ non comparisce nessun precedente c. d. d.

È chiaro che di tali enti ne esiste uno solo.

72. Teorema. — Una parte di un gruppo semplicemente sviluppabile è o finita o semplicemente sviluppabile (*).

Ed invero si consideri che il gruppo si sia reso normale. Se Γ è la sua parte: — 1° o sarà tale che esista in essa un ente b del quale in Γ non figura nessun seguente (e di tali enti ve ne dovrà essere al più uno) ed allora Γ è parte (propria o no) della Z che ha b per ente finale, ed è dunque finito; — 2° o non vi è nessun ente nella condizione di b, ed allora per il teorema del § precedente, sarà Γ semplicemente sviluppabile.

Corollario 1. — Le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile sono tutte e sole quelle in cui comparisce un ente, del quale nessuno dei seguenti comparisca nella parte (§ 71).

Cor. 2. — Ogni parte sviluppabile di un gruppo semplicemente sviluppabile è un gruppo semplicemente sviluppabile.

Cor. 3. — Le parti di un gruppo semplice (finito o semplicemente sviluppabile) sono gruppi semplici, (§ 60, 72).

(*) DEDEKIND. § 8. N. 123.

Capitolo XI.

COMPOSIZIONE DEI GRUPPI SEMPLICI.

73. Teorema. — Se G è un gruppo finito ed a un ente che non gli appartiene, è finito anche il gruppo $G + a$ (*).

Infatti G, perchè finito, si può ordinare in modo da essere semplicemente ordinato limitato: se b è il suo ente finale e a si dice seguente a b, il gruppo $G + a$ è chiaramente semplicemente ordinato limitato, e quindi $G + a$ è finito.

74. Teorema. — Il gruppo composto di due gruppi finiti è un gruppo finito (**).

Siano infatti G_1 e G_2 i gruppi e indichi G'_2 il gruppo degli enti di G_2 distinti da quelli di G_1; esso pure sarà finito ed il gruppo composto sarà $G_1 + G'_2$. Se G'_2 non esiste, il teorema è evidente. Se G'_2 esiste si ordini G'_2 e sia a il suoente originario. Allora — 1° essendo finito G_1 tale è $G_1 + a$ (§ 73) — 2° essendo finito il gruppo composto di una Z_b di G'_2 lo sarà il gruppo composto di G_1 e della Z_b immediatamente seguente, che risulta dal precedente gruppo aggiungendovi l'ente σb. Dunque per il principio d'induzione (§ 58, Cor. 5.) sarà finito anche il gruppo composto di G_1 e della Z che ha per ente finale l'ente finale di G'_2 cioè il gruppo $G_1 + G'_2$ *c. d. d.*

75. Teorema. — È finito il gruppo composto di più gruppi finiti, i quali considerati come enti costituiscano un gruppo finito (***).

Si ordini il gruppo di tali gruppi e sia, così ordinato $G_1, G_2, \ldots G_p$. Si formino le parti fondamentali Z_{g_r} di tale gruppo: e si consideri il loro gruppo ordinato. Il suo ente originario $Z_{g_1} = G_1$ è un gruppo finito: e se uno dei suoi enti Z_{g_r} è gruppo finito, tale è il suo immediatamente seguente (§ 74) essendo esso uguale alla somma dei due gruppi finiti di cui uno è Z_{g_r} e l'altro il σ di G_2. Dunque poichè (§ 57 Cor. 5) il gruppo della Z è finito, varrà il principio d'induzione, e sarà finito anche l'ente finale Z_{g_p} che è il gruppo in questione *c. d. d.*

76. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi finiti i quali, considerati come enti, costituiscono un gruppo o finito o semplicemente sviluppabile.

Sia Γ il gruppo dato dei gruppi finiti che si suppongano dapprima non aventi a due a due enti comuni e che si indichino con G_r. Si renda Γ normale considerando enti i gruppi finiti, e si ordinino questi gruppi; se si fa

(*) Dedekind, § 5, N. 70.

(**) Dedekind, § 14, N. 169.

(***) Cfr. Dedekind, § 14, N. 170.

l'ordinamento secondo i gruppi parziali (§ 37), il gruppo composto Γ_0 apparisce ordinato. Esso è anche bene ordinato avendo ogni ente per ente σ o il σ del proprio gruppo parziale o l'originario del gruppo immediatamente seguente.

Inoltre Γ sarà catena del proprio ente originario, e quindi sarà semplicemente ordinato. Ed infatti sia un gruppo G_0 che contenga il suo ente originario ed il σ di ogni suo ente che contiene. Esso contiene tutti gli enti del gruppo G_1 originario nel gruppo semplicemente sviluppabile dei G_r, contenendo il suo ente originario (che si è preso originario in Γ_0) ed il σ di ogni suo ente, ed essendo il gruppo in questione finito. Se poi G_0 contiene un gruppo G_r contiene tutto il gruppo σG_r, giacchè conterrà il σ del finale di G_r, che è l'originario del gruppo σG_r, ed il σ di ogni ente che contiene, e quindi tutto σG_r che è finito. Essendo il gruppo della G_r un gruppo semplicemene ordinato di tali gruppi presi come enti, si conclude che G_0 li contiene tutti, e quindi contiene l'intero Γ_0. Dunque ogni gruppo che contenga l'ente originario di Γ_0 ed il σ di ogni ente che contiene conterrà l'intero Γ_0, e Γ sarà semplicemente ordinato.

È provato così che Γ_0 è semplicemente sviluppabile, c. d. d.

Supponiamo ora che i gruppi G_r possano avere anche degli enti comuni e ad ogni gruppo G_r sostituiamo quello G'_r degli enti di esso non comuni a nessuno dei gruppi G_r che lo precedono in Γ quando è reso normale. Chiaramente il gruppo composto dei gruppi G_r è identico a quello composto dei G'_r. Alcuni dei gruppi G'_r potendo essere nulli e restando così soppressi, il gruppo Γ' dei gruppi G'_r considerati come enti sarà equivalente a Γ o ad una sua parte, e sarà quindi (§ 72) un gruppo finito o semplicemente sviluppabile di gruppi finiti senza enti comuni G_r ed il loro gruppo composto o per il Teor. del § 75 o per la parte già dimostrata dal Teorema attuale, sarà risp. o finito, o semplicemente sviluppabile.

Con ciò il teorema e pienamente dimostrato.

Osservazione. La prima parte della dimostrazione ha provato che un gruppo semplicemente sviluppabile i cui enti sono gruppi finiti i quali non hanno due a due enti comuni, è, rispetto a questi enti semplicemente sviluppabile.

77. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi uno almeno dei quali è sviluppabile, è tale esso pure.

Ed invero (§ 14) una sua parte, è, per ipotesi, un gruppo sviluppabile.

78. Teorema. — È semplicemente sviluppabile il gruppo (sviluppabile (§ 77)) composto di un gruppo semplicemente sviluppabile e di uno finito.

Se G è il gruppo finito è Γ l'altro, supposti dapprima senza enti comuni, si ordini il gruppo composto secondo i gruppi parziali G e Γ (§ 37) essendo G precedente a Γ. Il gruppo composto, che così è bene ordinato, è anche semplicemente ordinato. Infatti si consideri un gruppo G_0 che contenga il suo ente originario, e l'immediatamente seguente di ogni ente che comparisce in essi. Un tal gruppo G_0 contiene l'originario di G e, se un ente, anche l'immediatamente seguente, e valendo il principio d'induzione per il gruppo G chè è finito, si ha che contiene tutti gli enti di G. Inoltre G_0 contenendo il finale di G contiene il suo ente σ, che è l'originario di Γ, e l'ente σ di ogni ente σ di Γ che contenga, e quindi essendo Γ un gruppo semplicemente ordinato, contiene tutto Γ. Dunque G_0 contiene gli enti di G e Γ; perciò il gruppo proposto è comune a tutti gruppi della natura di G_0 ed è quindi catena dell'ente originario, ossia è un gruppo semplicemente ordinato, e, perchè illimitato, è semplicemente sviluppabile.

Se G e Γ hanno enti comuni vale pure il teorema, potendosi sostituire a G il gruppo G' degli enti di G non comuni a Γ, che pure è finito, e per il quale vale la dimostrazione precedente.

79. Teorema. — Il gruppo composto di due gruppi semplicemente sviluppabile è tale esso pure.

Infatti se dapprima tutti gli enti dell'uno G_1 sono distinti da quelli dell'altro G_2, si pongano G_1 e G_2 in corrispondenza ordinata (Cfr. § 34) dopo averli resi normali. Nel gruppo composto G si prenda come originario l'originario di G_1, come immediatamente seguente di esso l'originario di G_2, per σ di questo il σ dell'originario di G_1, ed in generale per σ di un ente di G_1 il corrispondente di G_2, e per σ di un ente di G_2 il σ del corrispondente di G_1 Il gruppo sarà così chiaramente bene ordinato. Inoltre sarà semplicemente ordinato, giacchè se un gruppo Γ contiene il suo originario e, contenendo un suo ente, contiene il suo σ, allora se contiene un ente b p. es. di G_1 deve contenere il σ in G che è il corrispondente di G_2, ed il σ di questo in G che è il σ di b in G_1 — dunque Γ contiene l'originario di G_1, e se un ente di esso il suo σ in G_1, e perciò essendo G_1 semplicemente ordinato, contiene l'intero G_1. Così contiene anche G_2, e quindi l'intero gruppo G; dunque sarà G catena del suo ente originario, e perciò sarà semplicemente ordinato.

Se i due gruppi contengono qualche ente comune, in uno dei due gruppi si sopprimono tali enti e resterà di esso una parte che sarà un gruppo o finito o semplicemente sviluppabile (§ 72). Il gruppo cercato sarà quindi composto o di un gruppo semplicemente sviluppabile e di uno finito o di due semplicemente sviluppabili, e o per il Teorema del § 78 o per la prima parte del Teorema attuale si concluderà che il gruppo cercato è semplicemente sviludpabile, c. d. d.

80. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi semplicemente sviluppabili (considerato ciascuno come un ente) un gruppo finito, è un gruppo semplicemente sviluppabile (*).

Dimostrazione, per induzione analoga a quella del § 75 applicando il Teorema del § 79.

81. Teorema. — Il gruppo composto di più gruppi semplicemente sviluppabili costituenti (considerati cia-

---

(*) Vedi cenni in CANTOR - Acta Math, Vol. II, pagg. 312. 365.

scuno come un ente) un gruppo semplicemente sviluppabile, è esso pure un gruppo sempicemente sviluppabile. (*)

Infatti si suppongano dapprima distinti gli enti di due, comunque presi, dei gruppi dati, che supporremo tutti resi normali e indicheremo dicendoli gruppi G_r e si pongano questi gruppi in corrispondenza ordinata. Il gruppo Γ i cui enti sono i gruppi dati, sia, perchè semplicemente sviluppabili e supposto esso pure reso normale, in corrispondenza ordinata coi gruppi suoi enti, e sia G_1 il suo ente originario, ed a l'ente originario del gruppo G_1. Diciamo *quadrato* di una Z del gruppo G_1 il gruppo parte di Γ costituito dagli enti di una Z di G_1 e dalle corrispondenti Z di tutti i gruppi che in Γ costituiscono la Z corrispondente a quella scelta in G_1. Tali quadrati formano un gruppo, il quale essendo di ugual potenza e quello delle Z di Γ sarà (§ 67 Cor. 5) un gruppo semplicemente sviluppabile, che risulterà semplicemente ordinato se al quadrato di una Z di G_1 si dà per immediatamente seguente quello della Z successiva in G_1. Gli enti di ciascun quadrato costituiscono (§ 75) un gruppo finito, e finito è quindi il gruppo differenza fra due quadrati successivi. Tali differenze costituiscono esse pure un gruppo semplicemente sviluppabile che si rende normale prendendo come originaria la differenza fra il quadrato originario (a), ed il suo immediatamente seguente e come σ di una differenza fra due quadrati la differenza fra i due quadrati che sono σ di quelli. Il gruppo composto di tutte le differenze è identico al gruppo Γ composto dei gruppi dati.

Ogni differenza consta di un ente per ciascuno dei gruppi dati comparenti in essa, eccetto il finale, del quale contiene una Z. Se ne ordinino gli enti, prendendo come originario l'ente del gruppo originario che appartiene ad essa, per σ di un ente l'ente del gruppo σ, eccetto per l'ente del gruppo immediatamente precedente il gruppo finale, del quale si prenderà come σ l'originario della Z del gruppo finale appartenente alla differenza ed anche per gli enti di tale Z dei quali si prenderanno come enti σ gli enti σ nel gruppo stesso finale, meno che per il finale della Z che comparisce nella differenza, che si prenderà come finale della differenza: ad ogni ente finale di una differenza si dia come ente σ l'originario della differenza immediatamente seguente. In tal modo si viene ad avere chiaramente ordinato il gruppo composto.

Esso riuscirà inoltre così semplicemente ordinato. Ed invero se si costruisce un gruppo che contenga il suo ente originario, e che se contiene un ente contenga il suo ente σ, esso se contiene un ente di una differenza li contiene tutti, per il principio di induzione, essendo la differenza in questione gruppo finito: se contiene un ente di una differenza ne contiene anche quello finale, come ora si è detto, e quindi anche il suo ente σ, originario della differenza immediatamente seguente, e quindi tutta questa differenza. Allora esso contiene la differenza originaria e se una differenza

(*) Vedi cenni in CANTOR - Acta Math. pagg. 315, 365.

anche la immediatamente seguente, dunque, poichè il gruppo delle differenze è semplicemente ordinato, le contiene tutte, e perciò contiene tutto il gruppo composto.

Questo gruppo composto è dunque semplicemente sviluppabile.

Se i gruppi dati hanno enti comuni, ad ogni gruppo G_r si sostituisca quello G'_r degli enti che esso ha distinti da tutti i gruppi che lo precedono nel gruppo composto, se questo si considera come gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, di gruppi G_r. Ogni gruppo G'_r sarà o il gruppo nullo, o un gruppo finito, od uno semplicemente sviluppabile (§ 72): il gruppo originario G_1 resterà inalterato, e sarà quindi $G_1' = G_1$ un gruppo semplicemente sviluppabile. I gruppi G_i diversi da G'_1 sopprimendo quelli nulli, costituiranno essi pure, presi come enti, o il gruppo nullo, o un gruppo finito, o uno semplicemente sviluppabile: talchè ricorrendo, secondo i casi, o al Teor. del § 75, o a quello del § 78, o a quello del § 76, o a quello del § 80, o alle parti già dimostrate del Teorema attuale, o a questi Teoremi combinati fra loro, si vedrà che il loro gruppo composto sarà un gruppo nullo, o finito, o semplicemente sviluppabile: e quindi infine il gruppo composto di esso e di G'_1 che è semplicemente sviluppabile, sarà, per gli stessi teoremi un gruppo semplicemente sviluppabile.

Così il Teorema è pienamente dimostrato.

Capitolo XII.

POTENZA DEI GRUPPI SEMPLICI.

82. Teorema. — Se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, sarà $G+a$ di potenza superiore a G.

Infatti, se G è finito, tale è $G + a$ (§ 73) ed allora G, che è sua parte propria, gli è suvvalente (§ 61).

83. Teorema. — I due gruppi finiti G e $G + a$, dove a è un ente non di G, hanno potenze consecutive (*).

Supponiamo infatti che possa esistere un gruppo Γ tale che sia

$$G < \Gamma < G + a:$$

qualunque siano le corrispondenze α e β, possibili rispettivamente fra G e Γ e fra Γ e $G + a$, dovrà essere:

$$(G < \Gamma)_\alpha, (\Gamma < G + a)_\beta.$$

Avremo nella corrispondenza β per lo meno un ente isolato nel gruppo $G + a$, e potremo sempre supporre che uno degli enti isolati sia a, altrimenti potremo scambiare a con uno degli isolati. Sopprimendo a, gli enti di Γ avranno ancora tutti il loro corrispondente nel gruppo restante G, e potremo scrivere $(G < \Gamma)_\alpha$, $(\Gamma \lesssim G)_\beta$ donde $(G < G)_{\beta\alpha}$ (§ 8), vale a dire che nella corrispondenza composta $\beta\alpha$ risulta G prevalente a sè stesso, e

(*) Cfr. Dedekind, § 14. N. 166.

quindi sviluppabile (§ 15 Cor. I) il che non può essere (§ 59 Cor. 1°) essendo G finito. È dunque vero che G e $G+a$ hanno potenze consecutive.

Corollario. — Due Z di uno stesso gruppo semplicemente ordinato, che siano una immediatamente seguente all'altra, hanno potenze consecutive.

84. Teorema — Ogni gruppo finito è equivalente ad una conveniente ed una sola Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, qualunque (*)

Se $Z_1, Z_2 \dots Z_\Gamma$ è il gruppo ordinato delle Z del gruppo finito ordinato dato Γ, sarà Z_1 equivalente a quella Z' del gruppo semplicemente sviluppabile dato, G, la quale consta del suo ente originario: e se Z_s è una Z di Γ che si supponga equivalente ad una conveniente Z'_s di G, l'immediatamente seguente $Z_{\sigma s}$ in Γ sarà equivalente alla $Z'_{\sigma s}$ immediatamente seguente a Z'_s in G, mantenendo associati nella corrispondenza gli enti che lo erano in Z_s e Z'_s, e associando i due enti stati aggiunti a Z_s e Z'_s per cambiarli in $Z_{\sigma s}$ e $Z'_{\sigma s}$. Per il principio d'induzione applicato al gruppo $Z_1, Z_2 \dots Z_\Gamma$ si potrà stabilire una corrispondenza fra $Z_\Gamma = \Gamma$ ed una conveniente Z' di G, che in essa saranno equivalenti. Così è provata la prima parte del Teorema.

Comunque poi si faccia corrispondere un gruppo finito ad una equivalente Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, dovrà sempre corrispondere ad una stessa Z, altrimenti le due Z a cui esso equivalesse dovrebbero essere equivalenti fra loro, il che non può essere (§ 61 Cor. 3°).

Corollario I. — Ogni gruppo finito può essere esso stesso Z di un gruppo semplicemente sviluppabile reso normale, potendosi sostituire alla Z di un gruppo cosiffatto alla quale esso equivalga.

85. Teorema. — Un gruppo finito è necessariamente di potenza o maggiore, o uguale, o minore a quella di un dato gruppo qualunque (**).

Infatti noi possiamo associare all'ente originario di un gruppo finito ordinato G, uno arbitrario del gruppo dato Γ, all'ente σ dell'originario di G uno qualunque di quelli restanti in Γ, e in generale se ad un ente b di G si è associato un ente di Γ, si può associare all'ente σb di G un ente qualunque del gruppo Γ', che si ottiene da Γ sopprimendovi gli enti di esso già associati ai precedenti di b ed a b, se un tal gruppo Γ' esiste Questa associazione, per il principio d'induzione valido in G, è una corrispondenza fra G e Γ, nella quale o G ha per immagine una parte, propria o no, di Γ, oppure una parte propria di G ha per immagine Γ. Lo stesso accadrà quindi in qualunque corrispondenza possibile fra G e Γ (§ 61) e sarà perciò G necessariamente di potenza o maggiore, o uguale, o minore a quella di Γ.

(*) Cfr. Veronese, l. c., N. 45, a).
(**) Bettazzi, Gruppi infiniti ed infiniti di enti.

Corollario 1. — Ogni gruppo finito è paragonabile con qualunque altro gruppo.

Cor. 2. — Due gruppi finiti sono sempre paragonabili.

86. Teorema. — Ogni gruppo che non sia di potenza maggiore a tutte quelle di qualunque gruppo finito è finito esso pure (*).

Ed infatti (§ 85) se il gruppo Γ non è di potenza maggiore a quella di un conveniente gruppo finito p. es. G, dovrà essere o di potenza uguale ad esso, o di potenza minore di esso, e quindi di potenza uguale a quella di una sua parte propria, e perciò in ogni caso di ugual potenza ad un gruppo finito, e finito esso pure.

Corollario 1. — Un gruppo o è finito, o è di potenza maggiore a quella di tutti i gruppi finiti.

Cor. 2. — Ogni gruppo finito è di potenza minore a qualunque gruppo sviluppabile (§ 59 Cor. 1. § 83 Cor. 1).

Cor. 3. — Si possono prendere ad arbitrio enti di un gruppo sviluppabile che debbano costituire un gruppo equivalente ad uno finito qualunque dato (§ 65 Post. 3).

87. Teorema. — Due gruppi semplicemente sviluppabili qualunque G_1 e G_2 sono di ugual potenza (**).

Infatti nei gruppi G_1 e G_2 già resi normali si facciano corrispondere i due enti originari, e gli enti σ di enti già corrispondenti. Allora:

1º Ogni ente di G_1 ha il corrispondente in G_2, per il principio d'induzione, e così ogni ente di G_2 lo ha in G_1.

2º Ogni ente di G_1 corrisponde così ad uno solo di G_2. Ed invero ciò vale per l'ente originario, che non è σ di nessuno, e se è vero per un ente di G_1, lo sarà anche per il suo ente σ, giacchè se questo corrispondesse a più enti di G_2, l'immediatamente precedente dovrebbe corrispondere a più distinti, di cui quelli dovrebbero essere gli enti σ, il che è contro l'ipotesi. Per il principio d'induzione ciò accadrà per ogni ente di G_1. Così dicasi per ogni ente di G_2 rispetto a G_1.

In questa corrispondenza i due gruppi saranno dunque equivalenti, c. d. d.

Osservazione. Quando due gruppi semplicemente sviluppabili si trovano nella corrispondenza esposta nel teorema, sono in corrispondenza ordinata (§ 34).

Corollario. — È sempre possibile porre in corrispondenza ordinata due gruppi semplicemente sviluppabili qualunque.

88. Teorema. — I gruppi semplicemente sviluppabili sono paragonabili con qualunque gruppo sviluppa-

(*) Bettazzi, Gruppi infiniti ed infiniti di enti.
(**) Dedekind. § 10, N. 132. — Veronese. l. c., N. 43. b.

bile, e sono *i gruppi sviluppabili di minima potenza* (*).

Sia G un gruppo sviluppabile, e Γ uno semplicemente sviluppabile. Di G è parte (propria o no) un gruppo semplicemente sviluppabile, p. es. G' (§ 68) il quale in una certa corrispondenza α è equivalente a Γ (§ 87). Conservando gli enti associati di questa corrispondenza e lasciando isolati gli enti di G che non sono di G', se esistono, sarà in tale nuova corrispondenza α', $(\Gamma \lesssim G)_{\alpha'}$.

Se si ha $(\Gamma \backsim G)_{\alpha'}$, Γ è di ugual potenza a G.

Se essendo $(\Gamma < G)_{\alpha'}$ in un'altra corrispondenza β sia $(\Gamma \backsim G)_{\beta}$, avremo ancora la stessa relazione.

Se essendo $(\Gamma < G)_{\alpha'}$ in un'altra corrispondenza β si avesse $(\Gamma > G)_{\beta}$ sarebbe in β il gruppo G equivalente ad una parte propria di Γ, la quale, perchè equivalente a G che è sviluppabile, è tale essa pure, e quindi (§ 72 Cor. 2) dev' essere semplicemente sviluppabile. Allora lo stesso G sarà un gruppo semplicemente sviluppabile (§ 67, cor. 4) e quindi (§ 87) di potenza uguale a Γ.

Se finalmente in qualunque corrispondenza β, anche diversa da α, sia pure $(\Gamma < G)_{\beta}$, sarà allora, secondo la definizione (§ 9), Γ di potenza minore a G.

Il gruppo semplicemente sviluppabile è quindi di potenza uguale o minore a qualunque gruppo sviluppabile, ed il teorema è dimostrato.

89. Teorema. — *Ogni gruppo di potenza minore ad uno semplicemente sviluppabile è finito.*

Ed infatti, dovendo per definizione di potenza equivalere ad una parte propria di un gruppo semplicemente sviluppabile, che sia p. es. G_1, esso non può essere che semplicemente sviluppabile, o finito (§ 72). Non potendo essere nella prima condizione, altrimenti sarebbe equivalente, e non di potenza minore, a G (§ 87), sarà finito c. d. d.

Corollario. — *Una parte di un gruppo semplicemente sviluppabile che sia di potenza minore al gruppo, deve contenere un ente tale che nessun altro ente delle parti gli sia seguente nel gruppo primitivo reso normale*, altrimenti sarebbe sviluppabile (§ 70) e quindi non finito, contro il teorema.

90. In base a quanto si è detto nei precedenti paragrafi, potremo insieme ad ogni gruppo finito introdurre un ente, da dirsi sua *potenza*, non definito in sè, ma nelle sue relazioni di uguale, maggiore o minore cogli altri della sua specie, dicendosi, se α e β sono due potenze, che α è maggiore, uguale o minore di β, secondochè un gruppo cui corrisponda α ha potenza risp. maggiore uguale o minore ad uno cui corrisponda β. Tali potenze di gruppi finiti si diranno potenze *finite*.

(*) Il Cantor (Acta Math., pag. 312) accenna ad una proprietà simile, rispetto ai gruppi che egli dice infiniti; ma non dà la dimostrazione, nè (come si è accennato nell'Introduzione) definisce quali gruppi per lui siano infiniti.

Esiste allora una potenza finita minima, quella del gruppo di un ente solo, mentre non ne esiste una massima, essendo, se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, che ci è lecito supporre esistente, il gruppo $G + a$ di potenza maggiore a quello di G (§ 82).

Poichè ogni gruppo finito ha ugual potenza di una conveniente parte fondamentale (Z) di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale (§ 84), è chiaro come per avere tutte le potenze finite basti considerare quelle di tutte le Z di un cosiffatto gruppo.

Il gruppo delle potenze finite è dunque gruppo ordinabile e semplicemente sviluppabile, essendo simile a quello delle Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, (§ 67 Cor. 5).

Il gruppo delle potenze non maggiori ad una data costituisce allora una Z del gruppo semplicemente ordinato delle potenze, ed è perciò finita (*).

91. Potremo introdurre enti da dirsi *potenze* anche per i gruppi sviluppabili, come si è fatto per quelli finiti, usando le stesse denominazioni. Dovremo dire allora che la potenza dei gruppi semplicemente sviluppabili è, fra le potenze dei gruppi sviluppabili, quella immediatamente superiore a quelle finite, la minima fra quelle della sua specie (§ 88). Essa suol dirsi la *prima potenza* dei gruppi sviluppabili.

I gruppi di prima potenza si dicono anche gruppi *numerabili* (**).

Il gruppo delle potenze finite essendo semplicemente sviluppabile (§ 90) è un gruppo numerabile.

Osservazione. — Non essendo dimostrato che debba ogni gruppo necessariamente essere o finito o sviluppabile, sebbene questi due concetti si escludano a vicenda, non può asserirsi essere la potenza dei gruppi numerabile veramente la prima dopo quelle finite, ma solo essere la prima fra quelle dei gruppi sviluppabili. (*Continua*).

INTORNO A UNA PROPRIETÀ
DELL'EQUAZIONE DI SESTO GRADO

Non so se la proprietà cui si allude nel titolo, sia conosciuta: ma, quand'anche lo fosse, mi sembrerebbe degna di nota la dimostrazione elementarissima che ne do qui appresso.

La proprietà è questa:

(*) Le potenze dei gruppi finiti possono identificarsi cogli enti che nella mia « Teoria delle Grandezze » dissi *simboli di moltiplicità* (§ 10) ed anche coi numeri interi, per quanto convenga tenerle distinte da questi, essendo il concetto generale di potenza più vasto di quello dei numeri interi.

(**) Cantor. Acta Math. Vol. 2. pag. 312.

Se la somma di tre radici di un'equazione del sesto grado è uguale alla somma delle altre tre, l'equazione è risolubile per radicali. (*)

1. Sia l'equazione

$$x^6 + ax^5 + \cdots = 0$$

Si osservi anzitutto che il suo primo membro si può mettere sotto la forma

$$P_3^2 - P_1^2 + P_0, \qquad (1)$$

dove P_3 e P_1 sono polinomi, l'uno di terzo e l'altro di primo grado rispetto ad x, e P_0 è una quantità nota. Inoltre che, salvo il segno di P_3 e di P_1, la riduzione del primo membro dell'equazione alla forma (1) è possibile in una sola maniera.

Se infatti si pone

$$x^6 + ax^5 + \cdots = (x^3 + \mu x^2 + \nu x + \rho)^2 - (\sigma x + \theta)^2 + k,$$

dove μ, ν, ρ, σ, θ, e k sono indeterminate, e poi si eguagliano i coefficienti delle stesse potenze della x nei due membri, si ottiene un sistema di equazioni dotato della proprietà di somministrare (salvo il segno di σ e quello conseguente di θ) uno ed un solo valore per ciascuna delle indeterminate, come il lettore può verificare. Del resto, il modo più semplice per mettere il polinomio $x^6 + \cdots$ sotto la forma (1) è quello di estrarne la parte intera della radice quadrata polinomiale, per iscriverlo prima sotto la forma $P_3^2 - P_2$; estrarre quindi la parte intera della radice quadrata dal resto mutato di se-

---

(*) Detto $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, le radici dell'equazione, e supposto

$$a) \qquad x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 0,$$

il gruppo completo di Galois relativo all'equazione si compone delle 72 sostituzioni, che, o permutano fra loro x_1, x_2, x_3, ed x_4, x_5, x_6, o trasformano l'una terna di radici nell'altra. Se infatti un'altra qualsiasi delle 720 sostituzioni fra le radici, per esempio la $(x_1, x_2)(x_3, x_4, x_5, x_6)$ appartenesse al gruppo dell'equazione, cosicchè fosse

$$x_2 + x_1 + x_4 - x_5 - x_6 - x_3 = 0,$$

sottraendo dalla $a)$ e dividendo per 2, si otterrebbe $x_3 = x_4$. L'equazione ammetterebbe dunque radici eguali, e sarebbe certamente risolubile per radicali, come devesi dimostrare.

Esaminando ora i fattori di composizione del gruppo dell'equazione, si troverebbe facilmente che essi sono numeri primi: o 2, o 3. Per un noto teorema di Galois l'equazione è dunque risolubile per radicali. Così è pure dimostrato (ma non elementarmente) che l'equazione del 6° grado è risolubile per radicali, anche quando fra le radici esiste la relazione

$$x_1 x_2 x_3 = x_4 x_5 x_6$$

oppure l'altra:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2 + x_5^2 + x_6^2$$

e via dicendo. Parimenti quando è nota la differenza fra la somma di tre radici e quella delle altre tre; eccetera.

gno, cioè da P_2, così da avere: $P_2 = P_1^2 - P_0$; d'onde poi:

$$x^6 + a x^5 + \cdots = P_3^2 - P_1^2 + P_0.$$

2. Siano x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 le radici di un'equazione del 6° grado, e si supponga

$$x_1 + x_2 + x_3 = x_4 + x_5 + x_6 \qquad (2)$$

Si formino le due equazioni le cui radici sono x_1, x_2, x_3, e x_4, x_5, x_6. Supponendo i coefficienti di x^3 eguali entrambi all'unità, si dovrà anche supporre, a cagione della (2), che il coefficiente di x^2 sia il medesimo in ambedue le equazioni: cosicchè, determinate convenientemente m ed n, r ed s, le due equazioni si potranno scrivere così:

$$x^3 + p x^2 + (m + n) x + (r + s) = 0$$
$$x^3 + p x^2 + (m - n) x + (r - s) = 0,$$

ovvero

$$(x^3 + p x^2 + m x + r) + (n x + s) = 0,$$
$$(x^3 + p x^2 + m x + r) - (n x + s) = 0.$$

La nostra equazione sarà dunque

$$(x^3 + p x^2 + m x + r)^2 - (n x + s)^2 = 0.$$

Ma questa forma del suo primo membro non è che la (1), alla quale si sa sempre ridurre il primo membro di un'equazione del 6° grado: e propriamente è la forma (1) nel caso particolare $P_0 = 0$. Perciò nell'ipotesi (2) si saprà mettere il primo membro dell'equazione sotto forma di differenza tra due quadrati. La base del primo quadrato sarà la parte intera della radice quadrata polinomiale del primo membro dell'equazione; la base del secondo quadrato sarà la radice quadrata del resto, mutato di segno. E questa radice quadrata si estrarrà esattamente, a cagione della condizione (2), equivalente all'altra: $P_0 = 0$.

Posta così l'equazione sotto forma di differenza tra due quadrati, essa si decomporrà in due fattori del 3° grado, e si potrà quindi risolvere per radicali.

3. *Esempio.* Sia l'equazione

$$x^6 - 6 x^5 - 10 x^4 + 100 x^3 - 111 x^2 - 94 x + 120 = 0,$$

le cui radici sono

$$1, \quad -1, \quad 3, \quad 2, \quad -4, \quad 5.$$

Essendo la somma delle prime tre radici eguale a quella delle altre tre, il primo membro dell'equazione si potrà mettere sotto forma di differenza tra due quadrati noti. A tal fine si estrarrà dal primo membro la radice quadrata, che è

$$x^3 - 3x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{43}{2},$$

col resto

$$-\frac{289}{4}x^2 + \frac{629}{2}x - \frac{1369}{4}.$$

Da questo resto, mutato di segno, si estrarrà la radice quadrata, *necessariamente esatta*. Si troverà

$$\frac{17}{2}x - \frac{37}{2};$$

e l'equazione si potrà scrivere:

$$\left(x^3 - 3x^2 - \frac{19}{2}x + \frac{43}{2}\right)^2 - \left(\frac{17}{2}x - \frac{37}{2}\right)^2 = 0.$$

4. Imitando la dimostrazione del teorema precedentemente esposto, si potrebbe altresì dimostrare che *un'equazione del 10° grado nella quale la somma di cinque radici e dei loro prodotti a due due sono rispettivamente eguali alla somma delle altre cinque radici e dei loro prodotti a due a due, è decomponibile in due fattori del 5° grado, epperò risolubile per funzioni ellittiche.*

Ecc., ecc.

Marino di Roma, settembre 1896.

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 209**, 256**, 260**, 304*, 305*, 307*, 308*, 309** e 315**

209.** *Risolvere l'equazione*

$$x^5 - 5ax^2 - 5bx - \frac{a^4 + b^3}{ab} = 0.$$

(F. Giudice).

Soluzione del Sig. *Luigi Bosi*, professore nel R. Istituto tecnico di Teramo

Si ponga, essendo u, v due arbitrarie,

$$x = u + v,$$

d' onde

$$x^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5,$$

ossia

$$x^5 = 5u^2v\,(u^2 + 2uv + v^2) + 5uv^3\,(u + v) + u^5 + v^5,$$

o infine

$$x^5 - 5u^2v\,x^2 - 5uv^3x - (u^5 + v^5) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Vediamo ora se è possibile determinare u e v in modo che l'equazione [1] coincida con quella data: dev'essere perciò

$$u^2v = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$uv^3 = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

$$u^5 + v^5 = \frac{a^4 + b^3}{ab} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$

Dalle [2] e [3] risulta

$$u = \sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}, \qquad v = \frac{a}{u^2} = a : \left(\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}\right)^2,$$

e sostituendo questi valori nella [4], si vede subito che essa è verificata.

L'equazione [1], che evidentemente è soddisfatta per $x = u + v$, coincide dunque con la data, quando si ponga per u uno qualunque dei valori di $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$ e per v il valore $\frac{a}{u^2}$. Ne viene che le soluzioni della equazione proposta sono date dalla formola

$$x = u + v = u + \frac{a}{u^2}$$

ponendo per u successivamente tutti i valori di $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b}}$.

256**. *Mostrare che, risolvendo le equazioni*

$$\xi' = \xi - \frac{2\,\mathrm{u}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}\,(\mathrm{u}\,\xi + \mathrm{v}\,\eta + \mathrm{w}\,\zeta + 1)$$

$$\eta' = \eta - \frac{2\,\mathrm{v}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}\,(\mathrm{u}\,\xi + \mathrm{v}\,\eta + \mathrm{w}\,\zeta + 1)$$

$$\zeta' = \zeta - \frac{2\,\mathrm{w}}{\mathrm{u}^2 + \mathrm{v}^2 + \mathrm{w}^2}\,(\mathrm{u}\,\xi + \mathrm{v}\,\eta + \mathrm{w}\,\zeta + 1)$$

rispetto alle u, v, w, *si ha*

$$\mathrm{u} = -\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}\,\xi + \mathrm{b}\,\eta + \mathrm{c}\,\zeta + 1} = \frac{2\,(\xi' - \xi)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$\mathrm{v} = -\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}\,\xi + \mathrm{b}\,\eta + \mathrm{c}\,\zeta + 1} = \frac{2\,(\eta' - \eta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\eta'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)}$$

$$\mathrm{w} = -\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}\,\xi + \mathrm{b}\,\eta + \mathrm{c}\,\zeta + 1} = \frac{2\,(\zeta' - \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)},$$

ove si è messo, per brevità,

$$a = 2\,(\xi - \xi')\,\delta^{-2}, \qquad b = 2\,(\eta - \eta')\,\delta^{-2}, \qquad c = 2\,(\zeta - \zeta')\,\delta^{-2}$$
$$\delta^2 = (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2.$$

(A. Del Re).

Soluzione del Sig. *Vincenzo Columbo*, alunno dell'Istituto tecnico di Brindisi. (*)
Dalle equazioni date si ricava:

$$\xi - \xi' = \frac{2u}{u^2 + v^2 + w^2}\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

$$\eta - \eta' = \frac{2v}{u^2 + v^2 + w^2}\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$\zeta - \zeta' = \frac{2w}{u^2 + v^2 + w^2}\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Moltiplicando rispettivamente per 2ξ, 2η, 2ζ e sommando, viene:

$$2\xi\,(\xi - \xi') + 2\eta\,(\eta - \eta') + 2\zeta\,(\zeta - \zeta') =$$
$$= \frac{4\,(u\xi + v\eta + w\zeta)}{u^2 + v^2 + w^2}\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1) = \quad . \quad . \quad . \quad [4]$$
$$= \left(\frac{2\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\right)^2 - \frac{4\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Ora dalle [1], [2] e [3] si ricava ancora:

$$\frac{\xi - \xi'}{u} = \frac{\eta - \eta'}{v} = \frac{\zeta - \zeta'}{w} = \frac{\delta}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{2\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{u^2 + v^2 + w^2},$$

d'onde

$$\delta = \frac{2\,(u\xi + v\eta + w\zeta + 1)}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

e perciò la relazione [4] diventa:

$$2\xi\,(\xi - \xi') + 2\eta\,(\eta - \eta') + 2\zeta\,(\zeta - \zeta') - \delta^2 =$$
$$= -2\,\frac{\xi - \xi'}{u} = -2\,\frac{\eta - \eta'}{v} = -2\,\frac{\zeta - \zeta'}{w}$$

e perciò:

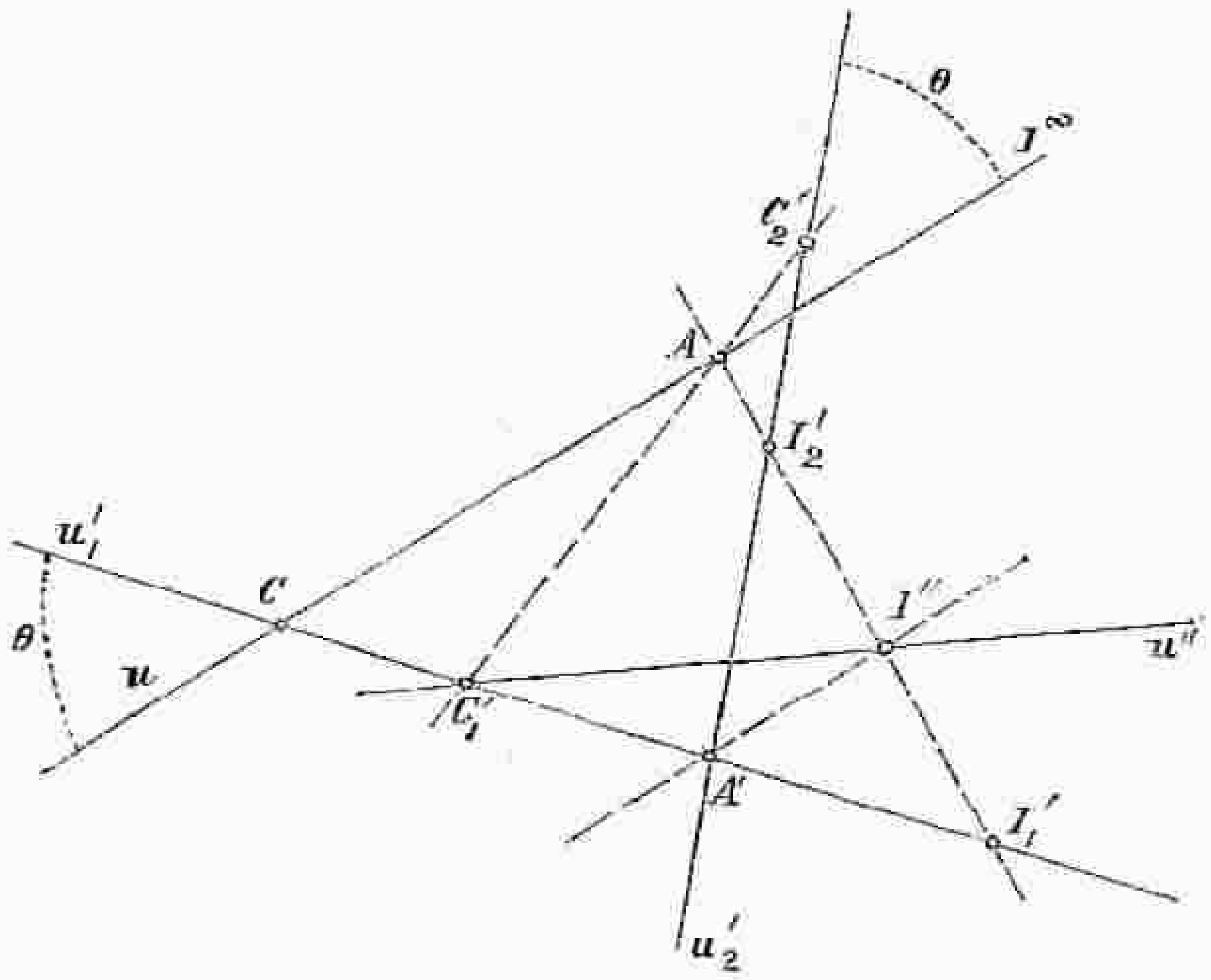
$$u = -\frac{2\,(\xi - \xi')}{2\xi\,(\xi - \xi') + 2\eta\,(\eta - \eta') + 2\zeta\,(\zeta - \zeta') - \delta^2}$$
$$v = -\frac{2\,(\eta - \eta')}{2\xi\,(\xi - \xi') + 2\eta\,(\eta - \eta') + 2\zeta\,(\zeta - \zeta') - \delta^2}$$
$$w = -\frac{2\,(\zeta - \zeta')}{2\xi\,(\xi - \xi') + 2\eta\,(\eta - \eta') + 2\zeta\,(\zeta - \zeta') - \delta^2}.$$

(*) Altre soluzioni dai Sigg. *E. Nannei, V. Retali, G. Vitali.*

Sviluppando queste tre espressioni si ottengono le seconde formole di risoluzione, date per u, v, w,. Invece, dividendo in ognuna di esse ambo i termini per δ^2, ed usando le notazioni indicate nell'enunciato, si hanno le prime formole.

260". *Costruire due punteggiate proiettive* (u), (u'), *conoscendo due punti corrispondenti* A, A', *l'asse di proiettività* u'', *la proiezione* I'', *su* u'', *del punto limite di* (u'), *fatta da* A, *e l'angolo* θ *di* u, u'.

Per θ *diverso da* 0° *e da* 90°, *questo problema ha due soluzioni. Mostrare che le due posizioni* (u'_1), (u'_2) *di* u' *che corrispondono ad esse, sono prospettive, col centro di prospettiva in* A. (A. Del Re).



Soluzione del Sig. Prof. *V. Retali*, a Milano. (*)

Il punto I'' è la proiezione da A' sopra u'' del punto all'infinito I^∞ di u, ossia u è la parallela condotta da A alla retta $|A'I''|$. Pel punto A' possono condursi, se θ è diverso da 0° e da 90°, due rette che fanno con u l'angolo θ, le quali sono le due posizioni u'_1, u'_2 di u'. Le due punteggiate (u'_1) e (u'_2) sono proiettive ed hanno in A' un punto unito, dunque son prospettive: al punto I^∞ di u corrispondono in (u'_1) e (u'_2) rispettivamente le intersezioni I'_1, I'_2 di u'_1, u'_2 con la retta $|AI''|$; per avere il punto C'_2, corrispondente nella (u'_2) a C, basta proiettare da A sopra u'_2 il punto d'intersezione della $|CA'| \equiv u'_1$ con l'asse di proiettività u'', cioè il punto C'_1, corrispondente a C nella (u'_1). Le rette $|C'_1 C'_2|$ e $|I'_1 I'_2|$ che uniscono due coppie di punti corrispondenti delle due punteggiate prospettive (u'_1) e (u'_2) si segano in A, che è perciò il centro di prospettiva.

(*) Altre soluzioni inviarono i Sigg. *V. Colombo*, *G. Gallucci*, *E. Nannei*.

304* *Se* A, B, C *sono i punti simmetrici del centro* O *del circolo circoscritto al triangolo* DEF *rispetto ai lati* EF, FD, DE, *le rette* AD, BE, CF *concorrono in un punto, che è il centro del circolo passante pei punti medi dei lati del triangolo* DEF. (S. Resta).

Dimostrazione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Unisco D con A ed E con B, e queste congiungenti si intersecano in un punto che chiamo M; congiungo poi M con C ed F, e dimostrerò che i segmenti CM, MF sono sulla stessa retta.

Considerando anzitutto i $\triangle$ MDB, MAE, si vede che sono uguali, perchè hanno $DB = EA$, giacchè entrambi uguali al raggio del cerchio circoscritto al triangolo DEF; hanno poi gli angoli MAE, MEA rispettivamente uguali agli angoli MDB, MBD, giacchè i segmenti DB, EA sono paralleli, essendo entrambi paralleli al raggio OF. Da ciò emerge che $MD = MA$ ed $MB = ME$. Considerando poi gli altri due triangoli CMD, MAF, si vede che anch' essi sono uguali, perchè $CD = AF$ (essendo entrambi uguali al raggio del cerchio circoscritto al triangolo DEF), $MA = MD$, e gli angoli CDM, MAF uguali, perchè alterni interni formati dalle parallele CD, AF colla trasversale DA; perciò, per un teorema di geometria piana, CM ed MF stanno per diritto. Con ciò è dimostrata la prima parte del teorema.

Per la 2ª parte del teorema, consideriamo che, unendo il punto M, ossia il punto di mezzo dei tre segmenti AD, CF, EB, coi punti di mezzo dei tre lati del triangolo, otteniamo tre porzioni di rette che, unendo ciascuna i punti di mezzo di due lati di un triangolo, risulteranno metà del terzo lato; così unendo M con N, P e Q (essendo N, P e Q rispettivamente i punti di mezzo dei lati ED, EF, DF) i segmenti MN, MP, MQ risulteranno metà rispettivamente dei lati EA, FB, AF, tutti uguali fra loro, perchè ciascuno è uguale al raggio del cerchio circoscritto al triangolo dato.

305*. *Dimostrare che in un triangolo rettangolo, di cui* C *è l'angolo retto, si ha la relazione:*

$$a\left(1 - \cot^2 \frac{A}{2}\right) + 2b \cot \frac{A}{2} = 0:$$

e in qualunque triangolo rettilineo la relazione:

$$ac \operatorname{sen}(A - B) = (a^2 - b^2) \operatorname{sen} A.$$

(G. Giovanetti).

Dimostrazione del Sig. *Giuseppe Ietta*, alunno del R. Istituto tecnico di Arezzo. (*)

(*) Eguale dimostrazione dal Sig. *Ruggero Ermini*, del R. Istituto tecnico di Arezzo. Altre dimostrazioni, per verificazione, dai Sigg. *Vitaliano Colombo* e *M. Giamba*, studenti nel R. Istituto tecnico di Como; *Emanuele Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Dalla nota formula: $\cot 2A = \dfrac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$, si ricava l'altra:

$$2 \cot A \,.\, \cot \frac{A}{2} - \cot^2 \frac{A}{2} + 1 = 0.$$

Ma:

$$\cot A = \frac{b}{a},$$

quindi:

$$2 b \cot \frac{A}{2} + a \left(1 - \cot^2 \frac{A}{2}\right) = 0.$$

Dalla relazione: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$, si ricava l'altra:

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(A + B) \operatorname{sen}(A - B)}{\operatorname{sen} A}$$

ovvero:

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \frac{\operatorname{sen}^2 A - \operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen} A},$$

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 B}{\operatorname{sen}^2 A}\right) \operatorname{sen} A,$$

$$\frac{c \operatorname{sen}(A - B)}{a} = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) \operatorname{sen} A,$$

$$a c \operatorname{sen}(A - B) = (a^2 - b^2) \operatorname{sen} A. \qquad \text{c. d. d.}$$

307*. *Se* a, b, c *sono le misure dei lati di un triangolo, ed* α, β, γ *le misure delle distanze dei suoi vertici da un punto del cerchio circoscritto, si ha:*

$$(a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(c^2 - \alpha^2 + \beta^2) =$$
$$= (a^2 + \beta^2 - \gamma^2)(b^2 + \gamma^2 - \alpha^2)(c^2 + \alpha^2 - \beta^2).$$

(S. Catania).

Soluzione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Sia ABC il triangolo, ed M il punto preso sulla circonferenza ad esso circoscritta.

Considerando i triangoli BMC, CAM, ABM, possiamo scrivere (Serret *Trigonometria*, § 105, Teorema IV) le tre relazioni:

$$\beta^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos BCM;$$
$$\gamma^2 = b^2 + \alpha^2 - 2b\alpha \cos CAM;$$
$$\alpha^2 = c^2 + \beta^2 - 2c\beta \cos ABM;$$

dalle quali rispettivamente si deducono le seguenti:

$$2a\gamma \cos BCM = a^2 - \beta^2 + \gamma^2;$$
$$2b\alpha \cos CAM = b^2 - \gamma^2 + \alpha^2; \qquad \ldots\ldots \quad [1]$$
$$2c\beta \cos ABM = c^2 - \alpha^2 + \beta^2.$$

Medesimamente, considerando i triangoli precedenti ed applicando il teorema citato, possiamo scrivere le altre relazioni:

$$\gamma^2 = a^2 + \beta^2 - 2a\beta \cos MBC;$$
$$\alpha^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cos MCA;$$
$$\beta^2 = c^2 + \alpha^2 - 2c\alpha \cos BAM;$$

dalle quali:

$$2a\beta \cos MBC = a^2 + \beta^2 - \gamma^2;$$
$$2b\gamma \cos MCA = b^2 + \gamma^2 - \alpha^2; \quad \ldots\ldots \quad [2]$$
$$2c\alpha \cos BAM = c^2 + \alpha^2 - \beta^2.$$

Ora, se nella relazione proposta sostituiamo a ciascun termine il rispettivo valore dato dalle [1] e [2], essa, semplificata, diventa:

$$\cos BCM \,.\, \cos CAM \,.\, \cos ABM = \cos MBC \,.\, \cos MCA \,.\, \cos BAM.$$

Ma $CAM = CBM$ perchè alla circonferenza e insistenti sullo stesso arco; $ABM = ACM$, per la stessa ragione; quindi:

$$\cos BCM = \cos BAM. \ (*)$$

308*. *Essendo dato nello spazio un numero dispari di punti* $O_1, O_2, \ldots O_{2n+1}$ *e preso ad arbitrio un punto* P, *si trovi di questo il simmetrico* P_1 *rispetto ad* O_1, *poi il simmetrico* P_2 *di* P_1 *rispetto al centro* O_2, *e così di seguito, finchè si ottenga* P_{2n+1}, *simmetrico di* P_{2n} *rispetto al centro* O_{2n+1}. *Si ripeta ancora, partendo dal punto* P_{2n+1}, *l'operazione prima fatta partendo dal punto* P; *si otterrà così infine il punto* P_{4n+2}. *Dimostrare che questo punto coincide con* P. (G. Biasi).

Dimostrazione del Sig. *E. Palumbo Todaro*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Girgenti.

Posti i punti $O_1, O_2, \ldots O_{2n+1}$ nello spazio, e costruito il simmetrico P_1 di P rispetto ad O_1, poi il simmetrico P_2 di P_1 rispetto ad O_2 ecc., e ripetuta l'operazione precedente partendo dal punto P_{2n+1}, congiungiamo i punti P e P_{2n+1}, P_1 e P_{2n+2} fra loro, e consideriamo i triangoli $O_1P_1P_{2n+2}$ e O_1PP_{2n+1}. Questi, per avere $O_1P_{2n+2} = O_1P_{2n+1}$, $O_1P_1 = O_1P$ e gli $\angle P_{2n+2}O_1P_1$, $P_{2n+1}O_1P$ uguali, perchè opposti al vertice O_1, sono uguali; quindi i lati PP_{2n+1}, PP_{2n+2} sono uguali non solo, ma anche paralleli.

Congiungendo poi P_2 con P_{2n+3} e considerando i triangoli $O_2P_1P_{2n+2}$, $O_2P_2P_{2n+3}$, per ragioni analoghe alle precedenti, questi risultano uguali; emerge

(*) Fin qui il *Palumbo*. Dall'essere gli angoli BCM e BAM supplementari, egli vuol vuol poi dedurre l'eguaglianza dei loro coseni, ed ha torto. Doveva invece rettificare la enunciazione del teorema, cambiando segno ad uno dei due membri dell'eguaglianza, per esempio così:

$$(a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(c^2 - \alpha^2 + \beta^2) =$$
$$= (-a^2 - \beta^2 + \gamma^2)(-b^2 - \gamma^2 + \alpha^2)(-c^2 - \alpha^2 + \beta^2).$$

(N. D. R.).

Un cenno di dimostrazione riceviamo anche dal Sig. *Guido Fubini*, allievo del R. Liceo M. Foscarini di Venezia, ma ha lo stesso difetto che quella del *Palumbo*.

perciò che $P_1 P_{2n+2}$ è uguale e parallela a $P_2 P_{2n+3}$; ma si è dimostrato precedentemente che $P P_{2n+1}$ e $P_1 P_{2n+2}$ sono uguali e paralleli, quindi $P P_{2n+1}$, $P_1 P_{2n+2}$, $P_2 P_{2n+3}$ sono uguali e paralleli. Continuando di questa guisa si perviene alla conclusione che:

$$P P_{2n+1} = P_1 P_{2n+2} = P_2 P_{2n+3} = \ldots = P_{2n} P_{4n+1}$$

e dippiù sono tutti paralleli fra loro.

Finalmente, unendo O_{2n+1} con P_{4n+1} e con P, e considerando i triangoli $O_{2n+1} P_{2n} P_{4n+1}$, $O_{2n+1} P_{2n+1} P$, si vede che hanno $O_{2n+1} P_{2n} = O_{2n+1} P_{2n+1}$ per costruzione, $P_{2n} P_{4n+1} = P_{2n+1} P$ per dimostrazione, e gli $\angle\, O_{2n+1} P_{2n} P_{4n+1}$, $O_{2n+1} P_{2n+1} P$ uguali, perchè alterni interni fatti dalle parallele $P_{2n+1} P$, $P_{2n} P_{4n+1}$ colla trasversale $P_{2n} P_{2n+1}$; quindi i triangoli in discorso sono eguali, e perciò $O_{2n+1} P = O_{2n+1} P_{4n+1}$ non solo, ma giacciono anche l'una sul prolungamento dell'altra, giacchè gli $\angle\, P_{2n} O_{2n+1} P_{4n+1}$, $P O_{2n+1} P_{2n+1}$ sono uguali. Quindi P è il simmetrico di P_{4n+1} rispetto al centro O_{2n+1}, cioè P_{4n+2} coincide con P, c. d. d.

309.** *Dimostrare che la potenza di un triangolo è uguale alla semisomma delle potenze dei triangoli aventi per vertici i centri dei quadrati costruiti esteriormente ed internamente sui lati del triangolo.* (A. Bozal Obeyero).

Soluzione del Prof. *U. Ceretti* a Rieti.

Sia ABC il triangolo dato di lati a, b, c; siano M, N, P ed M', N', P' i centri dei quadrati costruiti esternamente ed internamente sui lati a, b, c; si ottengono così i due triangoli MNP ed $M'N'P'$. Si congiunga M con B e con C, e P con A e con B; poichè BM e MC sono i cateti del triangolo rettangolo ed isoscele BMC, si ha: $BM = \dfrac{BC}{\sqrt{2}} = \dfrac{BC\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; e per la stessa ragione, dal triangolo BPA, rettangolo ed isoscele, si ha: $BP = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{AB\sqrt{2}}{2} = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$. Inoltre essendo: $MBC = ABP = 45^\circ$, è: $MBP = 90^\circ + CBA$; e però, applicando la nota relazione: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, si ha:

$$\overline{MP}^2 = n^2 = \overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 + 2 \,.\, BM \,.\, BP \cos MBP = \frac{a^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \\ - 2ac\cos(90^\circ + CBA);$$

e ricordando che dalla trigonometria si ha: $\cos(90^\circ + x) = -\operatorname{sen} x$, si ricava:

$$\overline{MP}^2 = n^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} + 2ac \operatorname{sen} CBA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Con analoghe considerazioni si ricavano facilmente le relazioni seguenti:

$$\overline{NP}^2 = m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} + 2bc \operatorname{sen} BAC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2]$$

$$\overline{MN}^2 = p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + 2ab \text{ sen } ACB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3]$$

Si congiunga ora B con M' e con P'; si ha subito: $BP' = BP = \frac{c\sqrt{2}}{2}$, $BM' = BM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, ed anche: $P'BM' = PBP' - PBM' = 90° - - PBM'$; ed essendo: $CBM' = ABP = 45°$, e cioè: $CBA = PBM'$, si ottiene: $P'BM' = 90° - CBA$. Applicando ora al triangolo $P'BM'$ la formola: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, si ha:

$$\overline{M'P'}^2 = n'^2 = \overline{BP'}^2 + \overline{BM'}^2 - 2 \, . \, BP' \, . \, BM' \cos P'BM' =$$
$$\frac{c^2}{2} + \frac{a^2}{2} - 2ca \cos (90° - CBA);$$

e poichè si può scrivere per note relazioni trigonometriche: $\cos (90° - CBA) = \text{sen } CBA$, si ricava:

$$\overline{M'P'}^2 = n'^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - 2ca \text{ sen } CBA, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [1']$$

ed analogamente:

$$\overline{N'P'}^2 = m'^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - 2bc \text{ sen } BAC, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [2']$$

$$\overline{M'N'}^2 = p'^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - 2ab \text{ sen } ACB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad [3']$$

Addizionando termine a termine le [1], [2] e [3] e le [1'], [2'] e [3'] si ha:

$$m^2 + n^2 + p^2 = (a^2 + b^2 + c^2) +$$
$$+ 2 (ac \text{ sen } CBA + bc \text{ sen } BAC + ab \text{ sen } ACB),$$
$$m'^2 + n'^2 + p'^2 = (a^2 + b^2 + c^2) -$$
$$- 2 (ac \text{ sen } CBA + bc \text{ sen } BAC + ab \text{ sen } ACB),$$

dalle quali si ottiene:

$$(m^2 + n^2 + p^2) + (m'^2 + n'^2 + p'^2) = 2 (a^2 + b^2 + c^2),$$

da cui anche:

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2}{2} + \frac{m'^2 + n'^2 + p'^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2,$$

ed infine:

$$\frac{\dfrac{m^2 + n^2 + p^2}{2} + \dfrac{m'^2 + n'^2 + p'^2}{2}}{2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

315.** *L'espressione* $[(n + 1) b - na]^2 a^n - b (b^{n+1} + ab^n - a^{n+1})$ *è divisibile per* $(a - b)^2$; *determinare il quoziente; dedurne in particolare, la somma* $2^{2n} (3n - 1)^2 + 2^{2(n+1)}$ *divisa per 27 dare per resto 5.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo Marco Foscarini di Venezia. (*)

La formola, mutatone il segno, si può scrivere:

$$b^{n+2}+ab^{n+1}-(n+1)^2a^nb^2+\left\{2n(n+1)a^{n+1}-a^{n+1}\right\}b-n^2a^{n+2}. \quad [1]$$

Ponendo in quest'espressione $b=a$, essa si annulla; quindi è divisibile per $(b-a)$.

Col metodo indicato nel § 7 del TODHUNTER (*Teoria delle equazioni*) si ha per quoziente della [1] divisa per $b-a$ l'espressione:

$$b^{n+1}+2ab^n+2a^2b^{n-1}+2a^3b^{n-2}+\ldots+2a^{n-1}b^2+a^n(1-n^2-2n)b+n^2a^{n+1}.$$

Ponendo in questa espressione $b=a$, si ottiene zero; quindi essa è divisibile per $b-a$, e perciò la [1] è divisibile per $(b-a)^2$, e risulta il quoziente

$$b^n+3ab^{n-1}+5a^2b^{n-2}+\ldots+(2n-1)a^{n-1}b-n^2a^n,$$

che si annulla per $b=a$; quindi la [1] è divisibile per $(b-a)^3$, ed il quoziente è $b^{n-1}+4ab^{n-2}+9a^2b^{n-3}+\ldots+n^2a^{n-1}$.

Ponendo $a=4$, $b=1$, la [1] si riduce a

$$(1-3n)^2\,2^{2n}-(5-2^{2(n+1)})$$

che è divisibile per

$$(4-1)^3=3^3=27.$$

Se si aggiunge all'ultima espressione il 5, si ha che

$$2^{2n}(3n-1)^2+2^{2(n+1)}$$

divisa per 27 dà per resto 5.

QUESTIONI DA RISOLVERE (**)

318*. In un triangolo sferico, secondo che $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a$ è uguale, maggiore o minore di $\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$, anche α sarà rispettivamente uguale, maggiore o minore di $\beta+\gamma$; e inversamente.

(*) Analoga soluzione dal Dott. *A. Bassi.*

(**) Le questioni contrassegnate con semplice asterisco sono indirizzate agli alunni delle Scuole secondarie, quelle distinte con due asterischi sono dirette in particolar modo agli studenti delle Scuole superiori, senza escludere qualsiasi altro studioso.

319*. In un triangolo sferico, secondo che $\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$ è uguale, maggiore o minore di $\cos^2 \frac{1}{2} \beta + \cos^2 \frac{1}{2} \gamma$, $a + 180^\circ$ sarà rispettivamente uguale, minore o maggiore di $b + c$; e inversamente.

N. B. Con a, b, c si indicano i lati del triangolo; con α, β, γ gli angoli opposti.

320*. Fra i triangoli sferici i cui lati formano una progressione aritmetica di data ragione, quali hanno un angolo eguale alla somma degli altri due, quali un angolo maggiore della somma degli altri due, quali ciascun angolo minore della somma degli altri due?

Applicazione al caso che la ragione sia 30°.

321*. Fra i triangoli sferici i cui angoli formano una progressione aritmetica di data ragione, quali sono quelli in cui un lato aumentato di 180° è uguale alla somma degli altri due, quali quelli in cui un lato aumentato di 180° è minore della somma degli altri due, quali quelli in cui ciascun lato aumentato di 180° supera la somma degli altri due?

L. Bosi.

322*. Se i lati di un triangolo sono in progressione aritmetica, i raggi dei cerchi ex-inscritti saranno in progressione armonica.

F. P. Paternò.

323**. Dimostrare che, se due circoli eguali si segano sotto un angolo di 60°:

1° I loro quattro punti comuni formano sopra ogni cerchio un gruppo equianarmonico; (*)

2° In ognuno di essi possono inscriversi ∞^1 triangoli circoscritti all'altro;

3° La polare reciproca di un cerchio rispetto all'altro e la polare reciproca di questo rispetto al primo, coincidono in una medesima iperbole H^2, avente per fuochi i centri dei due cerchi, passante pei punti di contatto delle tangenti comuni ai due cerchi, e tangente in questi punti alle tangenti i due cerchi nei loro due punti proprî comuni;

4° Detto r il raggio dei due cerchi, la iperbole ha r per asse traverso e $r : \sqrt{2}$ per asse coniugato;

(*) Tali che i 3 rapporti anarmonici fondamentali sono eguali.

5° Ogni tangente della iperbole sega i due cerchi in quattro punti armonici (due coniugati sopra uno stesso cerchio). Le tangenti condotte ai due cerchi da un punto arbitrario della iperbole, formano un fascio armonico (due raggi coniugati toccano uno stesso cerchio).

V. Retali.

324*. Mostrare che, risolvendo rispetto ad u, v, w le equazioni

$$u' = \frac{\lambda(v^2 + w^2) - 2(\mu v + \nu w)u}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w}$$

$$v' = \frac{\mu(w^2 + u^2) - 2(\nu w + \lambda u)v}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w}$$

$$w' = \frac{\nu(u^2 + v^2) - 2(\lambda u + \mu v)w}{u^2 + v^2 + w^2 - 2\lambda u - 2\mu v - 2\nu w},$$

si hanno, posto $H = \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}$, $K = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$, le seguenti:

$$u = \frac{Hu' \pm K\lambda}{H \pm K}$$

$$v = \frac{Hv' \pm K\mu}{H \pm K}$$

$$w = \frac{Hw' \pm K\nu}{H \pm K}$$

dove i segni superiori e gli inferiori (gli uni separatamente dagli altri) si corrispondono.

325*. Se si pone $\varphi = u^2 + v^2 + w^2$, $\Delta = u\xi + v\eta + w\zeta + 1$, e si eliminano le ξ', η', ζ' fra le equazioni

$$u\xi' + v\eta' + w\zeta' + (u\xi + v\eta + w\zeta + 2) = 0$$
$$u'\xi' + v'\eta' + w'\zeta' + 1 = 0$$
$$\xi' - \xi : \eta' - \eta : \zeta' - \zeta = u : v : w$$

si ha, per equazione risultante,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2\Delta & -\varphi \\ 1 & 0 & 0 & -\xi & u \\ 0 & 1 & 0 & -\eta & v \\ 0 & 0 & 1 & -\zeta & w \\ u' & v' & w' & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(u'\xi + v'\eta + w'\zeta + 1) - 2\Delta(uu' + vv' + ww') = 0.$$

A. Del Re.

326**. Dimostrare che, se p è un numero primo maggiore di 13, e A e λ sono differenti da zero mod. p, la congruenza di quartó grado

$$x^4 - Ay^2 \equiv \lambda \pmod{p}$$

è sempre risolvibile, anche con x ed y differenti da zero mod. p. (*)

G. Frattini.

TEMI DI MATEMATICA
ASSEGNATI DAL MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
PER LA LICENZA D'ISTITUTO TECNICO
(Sezione fisico-matematica)

Sessione estiva 1896. — I. In un angolo sono inscritti due circoli i quali si toccano esternamente nel punto T e toccano lo stesso lato dell'angolo nei punti A ed A'. Chiamando α la metà dell'angolo dato, R ed R_1 i raggi dei due cerchi, e supponendo $R > R_1$, si domanda: 1° Esprimere R_1 mediante R ed α; 2° Esprimere anche, mediante R ed α, i lati del triangolo TAA_1 e verificare che l'angolo ATA_1 è retto. – Applicazione al caso di $\alpha = 30°$.

II. Un triangolo rettangolo rotando intorno all'ipotenusa, descrive un solido che si può considerare come l'insieme di due coni di rotazione aventi la base comune. Supponendo noti il volume totale del solido e l'area del triangolo rettangolo, determinare i lati di questo triangolo.

Sessione autunnale. — I. Si determinino la base x, l'altezza y e gli angoli di un triangolo isoscele nel quale i lati uguali hanno una lunghezza data a, e l'area è uguale a quella di un trapezio nel quale i lati paralleli sono $\frac{1}{2}x$ e y, e l'altezza è h: e s'indichino i casi nei quali il problema è possibile e quello nel quale il triangolo è rettangolo.

II. In un cerchio di raggio r si deve costruire un triangolo ABC che abbia un vertice al centro C del cerchio e gli altri due A e B sulla circonferenza, e la cui area sia uguale alla superficie laterale del cilindro che ha per base il cerchio dato e per altezza una lunghezza data h. Si richiede che si determinino il lato $AB = y$ e la sua distanza x dal centro (altezza del triangolo), e si consideri poi il caso nel quale si voglia anche che il lato AB del triangolo passi per un punto P esterno al cerchio di cui sia data la distanza d da uno dei due punti nei quali il diametro che passa per P taglia la circonferenza; e si discutano i risultati.

(*) L'eccezione fino a $p = 13$ è necessaria. La congruenza $x^4 - y^2 \equiv 1$ (mod. 13), per esempio, non ammette altra soluzione che questa: $y \equiv 5$, $x \equiv 0$.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

P. GAZZANIGA. — *Libro di aritmetica e di algebra elementare.* — Padova, F. Sacchetto, 1896. — Prezzo : L. 3, 25.

Come indica il titolo, il libro è diviso nelle due parti *aritmetica* e *algebra*, la prima delle quali è suddivisa nei 5 capitoli : *i numeri razionali ; lo zero e i numeri razionali negativi ; i numeri reali ; i numeri complessi ;* mentre la seconda è suddivisa negli altri tre : *le eguaglianze identiche ; le equazioni ; applicazioni elementari dell'algebra alla geometria.*

Il libro contiene in sostanza tutto quanto è indicato dai vigenti programmi per i licei e per le prime due classi degli istituti tecnici ; ma l'egregio A., con opportuni spostamenti, ha distribuito la materia con ordine più razionale di quello seguito ordinariamente. Il metodo tenuto dall'A. è essenzialmente analitico, e di ciò gli va tributata lode, perchè se è giusto che in un corso razionale di geometria elementare si debba preferire il metodo euclideo, prendendo ad imprestito dall'aritmetica il meno possibile, sembrerebbe altrettanto giusta la preferenza data al metodo analitico per svolgere gradatamente il concetto di numero. Si muoverà forse qualche obiezione per le difficoltà che gli alunni delle nostre scuole possono incontrare nello studio dei numeri quali enti puramente analitici, ma a ciò si può ben rispondere, per esempio, che le maggiori difficoltà che offre lo studio della geometria secondo il metodo euclideo (la teoria delle proporzioni informi) non impediscono che nei nostri licei essa s'insegni col metodo classico, piuttostochè con quello di LEGENDRE. L'A., accorgendosi del resto di queste difficoltà didattiche, ha pensato bene di far precedere ognuno dei 5 capitoli dell'aritmetica da opportunissime *osservazioni preliminari* su oggetti materiali, dal cui esame scaturiscono i concetti intuitivi delle varie specie di numeri. Fermandosi su di esse quanto è necessario, è certo che gli insegnanti di buona volontà potranno poi svolgere con efficacia le varie parti della materia, uniformandosi al metodo dell'A.

L'opera del prof. GAZZANIGA è ricca di molti pregi, alcuni dei quali sono messi in rilievo nella seguente rapida rassegna del libro.

Parte I. Cap. I. — Sono esposti anzitutto i primitivi concetti dell'aritmetica (*uno, numero, successivo*) senza le solite definizioni, sulla cui esattezza c'è ancora da discutere. (L'A. si schiera coi matematici che sostennero efficacemente la non definibilità del numero intero). Successivamente sono poste le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza tra i numeri interi, e le operazioni relative a questi numeri, di cui son dimostrate con concisione e con sommo rigore (quasi sempre col metodo d'induzione) le proprietà indipendenti dal sistema di numerazione. Nel paragrafo della divisione, dopo un accenno alle congruenze, sono svolte le proprietà del M. C. D., del M. C. M. e dei numeri primi : nei due paragrafi seguenti si parla di potenza e di radice a meno 1, e così, prima che sia esteso il campo dei numeri, si trovano esposte, e ciò è logico, tutte le operazioni sugli interi. Seguono altre proprietà di questi numeri, fra le quali il teorema di FERMAT, quello di WILSON, le formule che danno le somme delle prime, seconde, terze potenze dei primi n interi, e quelle relative alle permutazioni, disposizioni e combinazioni. Chiudono il primo capitolo le proprietà dipendenti dal sistema di numerazione, cioè le regole pratiche per eseguire le varie operazioni, i criterî di divisibilità, la decomposizione dei numeri *piccoli* in fattori primi, la ricerca dei divisori di un numero e la regola per l'estrazione di $\sqrt{\ }$ a meno 1. Il capitolo è svolto in modo veramemente mirabile. C'è soltanto da osservare che, poichè lo *zero* è definito soltanto nel § 9 del Cap. I, esso dovrebbe essere del tutto sconosciuto nei paragrafi precedenti. Tuttavia, in alcuni punti, come ad es. nella ricerca dei quadrati e dei cubi dei numeri da 1 ad n (pag. 43), l'A. ne fa uso implicitamente. Forse sarebbe meglio, secondo me, che lo zero fosse messo in campo un po' più presto di quel che non faccia l'A., tanto più che esso può esser posto tra i numeri interi. Inoltre, il teorema della pag. 37 andrebbe, se non erro, posto così: *se fra i numeri 1, 2, ...* $\mathrm{E}(\sqrt{\mathrm{n}})$ *non v'è alcun divisore primo di* n, *il numero* n *è primo.*

Cap. II. — Dopo le prime proprietà dei numeri frazionari sono esposte, indipendentemente dal sistema di numerazione, le proprietà delle operazioni su questi numeri, compresavi la radice d'indice n a meno di 1, e di $\frac{1}{m}$. Seguono alcune proprietà generali dei numeri razionali, e in particolare delle frazioni continue finite. Chiudono il capitolo le proprietà dipendenti dal sistema di numerazione (le frazioni decimali periodiche, e le regole per tutte le operazioni sui decimali).

Cap. III. — Si entra coi numeri negativi nei programmi dei licei. Colla solita precisione, l'A. estende ai nuovi numeri le proprietà delle diverse operazioni, e definisce le potenze con esponenti nulli e negativi, dimostrandone le proprietà.

Cap. IV. — Viene esposta la teoria degli irrazionali col metodo di Dedekind. Limitandosi, per ragioni didattiche, alla contiguità dei gruppi *aperti*, l'A. introduce i numeri irrazionali, svolgendo con molto rigore e con semplicità le proprietà delle operazioni su questi numeri. Seguono alcune proprietà dei prodotti e delle potenze, con un accenno al teorema binomiale; le radici aritmetiche d'indice n dei numeri reali; le ordinarie proprietà dei radicali aritmetici; le potenze ad esponenti frazionari; la teoria dei logaritmi considerati come esponenti; i rapporti delle grandezze; le progressioni aritmetiche e geometriche, e un cenno sui numeri limiti di successioni di numeri reali.

Cap. V. — Con una esattezza maggiore di quella che si riscontra in altri trattati, è esposta una breve teoria dei numeri complessi. L'A. ne fa una bella applicazione alla dimostrazione della formula di Eulero relativa al prodotto di due somme di quattro quadrati.

Dopo aver così generalizzato il concetto di numero, l'A. si trova in migliori condizioni degli altri autori per svolgere l'algebra propriamente detta.

Parte II. Cap. I. — Sono successivamente esposte le proprietà delle uguaglianze identiche, le definizioni fondamentali dell'algebra, le importanti operazioni di riduzione dei termini simili e di raccoglimento del fattor comune, le operazioni sui polinomi, la regola di Ruffini per il calcolo del quoto e del resto della divisione per $x - a$, le proprietà del M. C. D. e del M. C. M. dei polinomi, e alcune considerazioni sul numero dei valori della variabile indipendente per i quali una funzione intera di 1°, 2°,.... grado acquista un valore determinato, e sui massimi e minimi del trinomio quadratico. Questo capitolo è corredato da una raccolta di interessanti esercizi che l'A. ha tratto, oltre che dalle altre parti della matematica, dalla meccanica e dalla fisica.

Cap. II. — Venendo alle equazioni, l'A. comincia coll'esporne in modo molto esatto i principî fondamentali, e passa quindi successivamente alla risoluzione delle equazioni di 1° e di 2° grado, con accenni a quelle di 3° e di 4°, e all'analisi indeterminata di 1° grado. Le definizioni di *sistemi* di due equazioni con due incognite (pag. 249) e di tre con tre incognite (pag. 262), escludono i casi d'impossibilità e d'indeterminazione. A voler seguire l'A., un complesso di equazioni non potrebbe esser chiamato sistema se non quando sia stato verificato che esso soddisfa alle condizioni richieste dalla definizione. Ora, specialmente per la pratica, ciò non è, a parer mio, conveniente, stante l'abitudine ormai radicata di dare, nella teoria delle equazioni, alla parola sistema un senso più vasto. L'A. stesso, a pag. 260, in alcuni esercizi proposti, dà per inavvertenza il nome di *sistema* a ciascuno dei complessi:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=12\\[2mm] \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=0\,,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=c\\[2mm] \dfrac{x}{d}+\dfrac{y}{e}=f,\end{array}\right.$$

il primo dei quali non rientrerebbe nella definizione posta dall'A., mentre l'altro, per meritare il nome di sistema, dovrebbe soddisfare a qualche condizione. Nel corso del libro, l'A. si attiene peraltro alle definizioni poste, e trova dapprima le condizioni perchè due o tre equazioni di 1° grado con due incognite, tre equazioni di 1° grado con tre incognite,... formino un sistema. In seguito passa alla risoluzione dei sistemi medesimi. Questo capitolo è anch'esso corredato da una raccolta di scelti problemi.

Cap. III. — Pregevolissimo, come tutti gli altri, quest'ultimo capitolo contiene le più elementari applicazioni dell'algebra alla geometria. Vi si trovano, esposte con molta eleganza, le relazioni tra gli elementi lineari d'un triangolo rettangolo, le espressioni dell'area d'un triangolo qualunque, delle bisettrici, delle mediane, dei raggi del cerchio inscritto e del circumcircolo in funzione dei lati, e le costruzioni geometriche delle espressioni algebriche fondamentali. Chiude il libro un completo corso di trigonometria rettilinea, quale può essere sufficiente per la terza classe dei nostri licei. Al capitolo è annessa una serie di ottimi esercizi.

Do termine a questa breve rivista col far rilevare che il prof. Gazzaniga, oltre a dimostrazioni semplici e spesso originali, ha arricchito la sua opera di interessantissime notizie storiche le quali, insieme agli altri pregi del libro, varranno a rendere più attraente lo studio della matematica nei nostri licei. E di ciò v'è pur troppo bisogno.

Corrado Ciamberlini.

Fermo, agosto 1896.

ANNO I. **1896-97.** NUM. 1.

Bollettino dell'Associazione MATHESIS

FRA GLI

INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLE SCUOLE MEDIE

SEDE DELL'ASSOCIAZIONE PER IL BIENNIO 1896-97-98

TORINO

Presso il Presidente del Comitato: Professor **RODOLFO BETTAZZI**, *Corso S. Martino, 1*

STATUTO DELL'ASSOCIAZIONE

Art. I.

Fra gl' insegnanti di matematica nelle scuole secondarie italiane è costituita un'Associazione denominata - MATHESIS - *Associazione per studi fra gl' insegnanti di matematica delle scuole medie*, il cui oggetto è il miglioramento della scuola e il perfezionamento degl' insegnanti, sotto il punto di vista scientifico e didattico.

Art. II.

A raggiungere il proprio scopo l'Associazione:

a) tiene riunioni plenarie e parziali;

b) promuove e favorisce ricerche scientifiche e discussioni didattiche;

c) pubblica sinossi di corsi di matematiche elementari o di speciali teorie, in relazione ai diversi gradi d'insegnamento;

d) cura la formazione di una biblioteca matematica circolante ad uso dei soci.

Art. III.

Saranno di diritto ammessi come soci, dietro semplice loro domanda, i professori di matematica appartenenti al personale insegnante o direttivo delle scuole medie, governative o pareggiate;

quelli delle altre scuole secondarie dovranno ottenere l'approvazione del Comitato direttivo (Art. IV).

Saranno *soci fondatori* coloro che si inscriveranno entro un mese dalla pubblicazione del presente Statuto.

Art. IV.

L'Associazione è retta da un Comitato direttivo composto di 12 soci ed eletto a maggioranza di votanti. Il Comitato elegge nel proprio seno un Presidente ed un Vice-presidente, ed elegge pure, fra i soci, un Segretario-Economo.

Art. V.

L'anno sociale comincia col 1° luglio. Il Comitato è eletto nel mese di giugno, entra in carica colla prima adunanza (Art. VIII) e rimane in funzione due anni.

Art. VI.

Al Comitato direttivo è affidato l'indirizzo scientifico e didattico dell'Associazione, la redazione di un bollettino e la ripartizione dei fondi sociali.

Art. VII.

La città ove risiede il Presidente del Comitato direttivo è, pel biennio (Art. V), sede dell'Associazione.

Art. VIII.

Nelle vacanze autunnali, in sedi da destinarsi anno per anno, si terrà dal Comitato direttivo un'adunanza. In questa adunanza verrà presentato dal Presidente del Comitato il bilancio dell'anno cessato, e verrà deliberata la ripartizione delle spese pel nuovo anno sociale secondo l'entrata.

Il Presidente in carica, sotto la propria responsabilità, curerà che queste spese non siano oltrepassate nè devolte ad altro scopo.

Nella stessa adunanza verrà stabilito il lavoro dell'anno.

Quando tale adunanza ha luogo nell'anno della elezione, i membri del Comitato cessante potranno intervenirvi, ma non avranno voto deliberativo.

Art. IX.

L'Associazione pubblica un bollettino, nel quale si daranno gli atti della Società, si discuteranno questioni relative al miglioramento dei programmi e alla scelta dei libri di testo, si forniranno notizie su tutto ciò che può interessare l'insegnamento delle matematiche nelle scuole medie, e si darà l'elenco dei libri della biblioteca dell'Associazione (Art. II).

Art. X.

I soci sono tenuti al pagamento di una quota annuale di lire SEI (da trasmettere entro il mese di giugno di ciascun anno al Segretario-Economo) e di una tassa d'ingresso di lire QUATTRO.

I soci fondatori (Art. III) sono esenti dalla tassa d'ingresso.

I soci di nuova inscrizione verseranno la stessa somma, qualunque sia, entro l'anno, l'epoca del loro ingresso nella Società.

Art. XI.

Le dimissioni presentate in qualsiasi epoca da un socio, non lo esonerano dal pagamento del contributo relativo all'anno in corso. I nomi dei contravventori alla presente disposizione, od a quella dell'articolo precedente, saranno pubblicati nel bollettino dell'Associazione sotto la rubrica « *Soci morosi* »; però il Comitato direttivo ne darà preavviso agl'interessati.

Art. XII.

Il modo di funzionare del Comitato direttivo sarà fissato da apposito *Regolamento*, redatto dal Comitato stesso.

Roma, 15 ottobre 1895.

Comitato Direttivo per il biennio 1896-97, 1897-98.

BETTAZZI RODOLFO, *Presidente*
FRATTINI GIOVANNI, *Vice-Presidente*
BRAMBILLA ALBERTO
DE AMICIS ENRICO
DE ZOLT ANTONIO
GAZZANIGA PAOLO
LAZZERI GIULIO
PANIZZA FRANCESCO
RETALI VIRGINIO
SFORZA GIUSEPPE
GIUDICE FRANCESCO, *Segretario-Economo.*

ELENCO DEI SOCI FONDATORI
dell' Associazione MATHESIS

Aicardi Vittorio, Liceo Pareggiato, Novi Ligure. — Amaldi Italo, R. Istituto tecnico, Aquila. — Amodeo Federico, R. Istituto tecnico, Napoli. — Andriani Angelo, R. Liceo, Bari — Angeleri Francesco, R. Liceo, Ivrea. — Beggiato Alessandro, R. Liceo, Vicenza — Bernardi Giuseppe, R. Istituto tecnico, Ancona. — Bettazzi Rodolfo, R. Liceo Cavour, Torino. — Bettini Bettino, Liceo Pareggiato, Osimo (Ancona). — Biasi Giovanni, R. Istituto tecnico, Sassari. — Boccardini Giovanni, R. Liceo, Vigevano — Bonciani Guglielmo, Scuola tecnica pareggiata, Viareggio — Bosi Luigi, R. Istituto tecnico, Teramo — Brambilla Alberto, R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Bustelli Anton Maria, R. Provveditore agli studi, Aquila — Carelli Costantino Gregorio, R. Scuola tecnica, Cagliari — Carlini Luigi, R. Scuola tecnica, Udine — Castelli Pietro, R. Istituto tecnico, Piacenza — Catania Sebastiano, R. Istituto nautico, Catania — Ceccaroni Guido, R. Ginnasio, Veroli — Ceretti Umberto, R. Scuola tecnica, Rieti — Certo Luigi, R. Liceo Vittorio Emanuele, Palermo. — Chiari Augusto, Scuola tecnica e Ginnasio pareggiati, Città di Castello — Chini Mineo, R. Scuola allievi macchinisti, Venezia — Ciabò Giorgio, Preside del R. Istituto tecnico, Bergamo — Ciamberlini Corrado, R. Liceo, Fermo — Coen Adolfo, R. Liceo, Mantova — Correale Eugenio, R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Cortevesio Edoardo, Ginnasio pareggiato, Avezzano — Costanzi Giuseppe, R. Liceo, Rieti — Cozza Ettore, R. Scuola tecnica, Perugia — Dainelli Ugo, R. Istituto tecnico, Roma — De Amicis Enrico, R. Istituto tecnico, Brescia — De Vincentiis Giuseppe, R. Ginnasio, Chieti — D'Incà Levis Enrico, R. Istituto tecnico, Teramo — De Zolt Antonio, R. Liceo Parini, Milano — Drago Giovanni, R. Ginnasio, Sciacca — Ducci Enrico, R. Scuola tecnica, Varallo-Sesia — Fabris Vittorio, R. Istituto tecnico, Alessandria — Fazzari Gaetano, R. Liceo, Avellino — Fellini Diego, R. Istituto tecnico, Forlì — Fenoglio Luigi, R. Istituto tecnico, Torino — Ferrari Carlo, R. Scuola tecnica, Como — Ferrari Federico, R. Istituto tecnico, Alessandria — Ferrari Francesco, R. Liceo, Chieti — Ferro Giovanni, R. Ginnasio Cavour, Torino — Fiorentino Gioacchino, R. Ginnasio, Caltanissetta — Foschi Emanuele, R. Scuola tecnica, Casal Maggiore — Franconi Enrico, R. Scuola tecnica, Civitavecchia — Frattini Giovanni, R. Istituto tecnico, Roma — Fucini Catone, R. Istituto nautico, Genova — Gambioli Dionisio, R. Scuola tecnica Lombardini, Milano — Garrone Contardo, R. Liceo, Voghera — Gazzaniga Paolo, R. Liceo, Padova — Giudice Francesco, R. Istituto tecnico, Genova — Gremigni Michele, R. Liceo Galilei, Firenze — Grilli Ruggero, R. Liceo, Treviso — Lazzeri Giulio, R. Accademia navale, Livorno — Legrenzi Giuseppe, R. Ginnasio, Sondrio — Leoncini Michele, R. Ginnasio, Pallanza — Lugli Aurelio (*), R. Istituto tecnico, Roma — Marini Raffaello, R. Istituto tecnico, Arezzo — Mariscotti Luigi, R. Ginnasio, Caltanissetta — Marseglia Natale, R. Liceo, Potenza — Martone Alfonso, R. Liceo Tasso, Roma — Martone Michele, R. Istituto tecnico, Reggio Calabria — Masdea Arturo, R. Istituto nautico, Napoli — Massa Alfredo, R. Ginnasio Ennio Quirino Visconti, Roma — Melis Antonio, R. Scuola tecnica Sammartino, Catania — Michelangeli Nazzareno, R. Liceo, Forlì — Misani Massimo, Preside del R. Istituto tecnico, Udine — Mola Giacomo, R. Liceo, Campobasso — Montesano Potito, R. Liceo, Maddaloni — Morelli Ernesto, R. Ginnasio Umberto, Roma — Moreno Giuseppe, R. Istituto tecnico, Napoli — Moretti Alfonso, R. Liceo, Correggio — Moriconi Creonte, R. Liceo, Senigallia — Morino Paolo, R. Liceo, Cosenza — Murer Vittorio, R. Liceo, Alessandria — Nannei Enrico, R. Istituto tecnico, Bari — Neppi Modona Angelo, R. Istituto tecnico, Girgenti — Orto Carboni Salvatore, R. Istituto tecnico, Piacenza — Palatini Francesco, R. Istituto tecnico, Sondrio — Panizza Francesco, R. Liceo M. Polo, Venezia — Pepoli Alessandro, R. Scuola tecnica Gagini, Palermo — Pesci Giuseppe, R. Accademia Navale, Livorno — Perito Pasquale, R. Scuola tecnica, Penne — Pierantoni Venturino, R. Istituto tecnico, Chieti — Pinna Salvatore, R. Ginnasio, Nuoro — Pirondini Geminiano, R. Istituto tecnico, Parma — Pisciotta Francesco, R. Liceo-Ginnasio Vittorio Emanuele, Napoli — Poinelli Giuseppe, R. Ginnasio, Mondovì — Priolo Luigi, Scuola tecnica pareggiata, Reggio Calabria — Pucci Enrico, Preside del R. Liceo Vittorio Emanuele, Napoli — Racca Giuseppe, R. Scuola tecnica, Savigliano — Retali Virginio, R. Liceo Beccaria, Milano — Riboni Gaetano, R. Istituto tecnico, Milano — Rizzoni Enrico, R. Liceo, Lucera — Romano Salvatore, R. Scuola tecnica, Noto — Rozzolino Gerolamo, R. Liceo, Salerno — Russo Giovanni, Istituto tecnico pareggiato, Catanzaro — Sadun Elcia, R. Istituto tecnico, Roma — Santamaria Gerardo, R. Ginnasio Parini, Milano — Sbrana Silvio, R. Liceo, Pistoia — Scoto Giuseppe, R. Scuola normale e R. Scuola tecnica, Ravenna — Sforza Giuseppe, R. Istituto tecnico, Reggio Emilia — Simoncelli Remo, R. Scuola tecnica, Arcevia — Sola Filippo, R. Liceo, Carmagnola — Stromillo Solone, R. Scuola tecnica S. Rosa, Napoli — Testi M. Giuseppe, R. Istituto tecnico, Macerata — Tremontani Gerolamo, Preside del R. Istituto tecnico, Bologna — Treves Eugenio, R. Scuola tecnica, Badia Polesine — Valeri Demetrio, R. Liceo, Modena.

(*) Morto il 27 maggio 1896.

Corrispondenza coi Soci.

I Soci i cui nomi sono pubblicati nel presente fascicolo, hanno pagata la loro quota per l'anno sociale 1896-97. Questa dichiarazione fa le veci di ricevuta.

VERBALI

La nostra Associazione incominciò a vivere solo col 1° luglio del corrente anno 1896, per cui non potè ancora dar pubblica prova di attività utile pel miglioramento degl'insegnamenti e per il progresso degli studî. Peraltro nell'adunanza ordinaria tenutasi in queste vacanze autunnali, secondo l'esigenza dell'articolo VIII del nostro Statuto, il Comitato dell'Associazione ha preparato un lavoro, che gioverà certamente alla scuola ed alla scienza, se, come ne siamo certi, vi prenderanno parte attiva i non pochi valenti insegnanti, e cultori delle matematiche.

Per tenere i soci al corrente degli atti del Comitato, e per norma di tutti coloro che intendono unire l'opera propria alla nostra, pel bene della scuola, pubblichiamo un estratto del verbale dell'adunanza citata sopra.

Estratto del verbale delle sedute del Comitato Direttivo

tenute a FIRENZE *nei giorni* 24, 25 *e* 26 *Agosto,* 1896.

Il Comitato si riunisce in una sala del R. Liceo Galilei, cortesemente concessa. Sono presenti i membri del Comitato direttivo, professori R. Bettazzi (presidente del Comitato), G. Frattini (vice-presidente), F. Giudice (segretario-economo), E. De Amicis, P. Gazzaniga, G. Lazzeri, G. Sforza. Dei quattro membri rimanenti, non intervenuti alla riunione, il prof. A. De Zolt è ammalato; gli altri tre, cioè i professori A. Brambilla, F. Panizza, V. Retali, giustificando l'assenza, hanno inviate le loro osservazioni sulle questioni poste all'ordine del giorno.

Presiede le adunanze il prof. R. Bettazzi, ne è il segretario il professor E. De Amicis.

Il Presidente legge una lettera della presidenza del Circolo matematico di Palermo, nella quale si esprimono vive condoglianze per la morte del prof. A. Lugli, membro del Comitato dell'Associazione *Mathesis*. I convenuti ne prendono atto ringraziando. E, sollevatasi in proposito la questione della opportunità o meno d'invitare i soci ad una votazione per coprire il posto lasciato vacante nel Comitato dal compianto professore, dietro proposta del Presidente unanimamente si delibera che l'Associazione non debba, per questo primo biennio sociale, nominare un successore all'illustre ed amatissimo estinto, per omaggio alla sua memoria.

Il Presidente dà pure comunicazione di una corrispondenza del professore F. Angeleri, salutante i convenuti, plaudente alla questione, inserita nell'ordine del giorno, del coordinamento delle scuole secondarie con le facoltà di matematica e d'ingegneria, e proponente di discutere intorno alla opportunità di officiare Sua Eccellenza il Ministro della pubblica istruzione affinchè voglia rimettere, fin dall'anno scolastico prossimo, il tema scritto di matematica in tutti gli esami, o almeno nelle due licenze, liceale e ginnasiale. I convenuti prendono tosto in esame la proposta del prof. F. Angeleri, e concludono in proposito, approvando unanimamente la proposta fatta dal prof. P. Gazzaniga, d'incaricare il prof. G. Frattini, residente a Roma e vice-presidente del Comitato, di presentare lo Statuto e gli Atti dell'Associazione *Mathesis* a Sua Eccellenza il Ministro della pubblica istruzione, chiedendo l'appoggio di lui agli intenti didattici e scientifici, che soli costituiscono la ragione d'essere di questa Società d'insegnanti, e raccomandandogli in particolare di voler ripristinare la prova scritta di matematica in tutti gli esami di licenza delle scuole secondarie, non tanto per l'efficacia in sè di queste prove, quanto per il prestigio che così si verrebbe a ridonare alla materia, e la conseguente maggiore attività nello studio, che tali prove hanno sempremai risvegliato nella scolaresca.

Dopo lunga discussione sono approvate, per affidarle allo studio dei soci, sei questioni attinenti ai programmi, ed una (questione VII) d'indole scientifico-didattica; *le risposte relative alle medesime, siano esse di soci o di non soci, dovranno spedirsi al Presidente prof. Bettazzi*, che avrà cura di far pubblicare dei riassunti man mano che ne sarà il caso. Alcune delle risposte date all'ultima, potranno anche venir pubblicate integralmente a titolo di premio.

A proposito della stessa questione ultima, il prof. Giudice dà lettura di una sua comunicazione intorno ad una nuova e semplice maniera di trattare la teoria dell'equivalenza; e, dietro proposta del Presidente, unanimemente accettata, si delibera che essa comunicazione sia inserita negli Atti dell'Associazione.

Si approva la relazione sul bilancio sociale, fatta dal segretario-economo, dalla quale risulta la disponibilità, per questo primo anno, della somma di L. 572,16.

Si passa quindi alla discussione delle due questioni, connesse fra loro: assunzione della pubblicazione del *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario* da parte dell'Associazione *Mathesis*, e pubblicazione, prescritta dallo Statuto, del *Bollettino* contenente gli Atti dell'Associazione medesima. Il Presidente comunica in proposito che, in seguito all'autorizzazione precedentemente ricevuta dal Comitato, di trattare colla famiglia del compianto prof. A. Lugli, già direttore del *Periodico*, egli ha convenuto di continuare per l'anno corrente 1896 la pubblicazione del *Periodico*, a cura ed a carico dell'Associazione, profittando anche dell'offerta di contribuzione pecuniaria da parte dell'autore di un lungo articolo da inserirsi nel *Periodico* medesimo, ed affidandone la direzione al prof. G. Frattini. Il Comitato approva l'operato del Presidente, considerando che il grave sacrifizio pecuniario, al quale così viene a sobbarcarsi l'Associazione, è giustificato specialmente dallo scopo di fare per tal modo cosa giovevole alle scuole secondarie, evitando la soppressione di un giornale sommamente utile tanto a docenti che a discenti.

Le spese del Periodico, comprese le postali, ammontano pel rimanente di quest'anno a circa L. 750, la corrispondente entrata è di circa L. 350; e il Comitato, approvando le proposte fatte in proposito dal Presidente e dal Segretario-economo, dà loro facoltà di valersi del fondo di cassa sociale per coprire il corrispondente disavanzo. Pertanto viene stabilito che l'Associazione *Mathesis* concorra con L. 400 a coprire le spese relative alla pubblicazione dei rimanenti fascicoli del Periodico di quest'anno.

Si stabilisce poi che, per tutto il corrente anno 1896, gli Atti dell'Associazione *Mathesis* siano inseriti negli ultimi tre fascicoli del Periodico, di 32 pagine ciascuno; la parte così occupata nel Periodico dagli Atti medesimi, costituirà per quest'anno il *Bollettino* dell'Associazione. Di questi Atti si faranno tanti estratti quanti occorreranno, e si manderà una copia di tali estratti a tutti i soci di *Mathesis;* e pertanto quelli fra questi che saranno abbonati al Periodico riceveranno pure una copia ciascuno dei predetti fascicoli (completi), mentre i soci di *Mathesis* non abbonati al Periodico, riceveranno solamente una copia degli estratti suddetti.

Si approva inoltre la disposizione seguente: « L'Associazione *Mathesis* ha deliberato, avendo a ciò aderito la famiglia del compianto prof. A. Lugli, di continuare anche dopo l'anno corrente la pubblicazione del Periodico, fino a che questa non sia assunta da un privato. Si procureranno in ogni caso facilitazioni ai soci; e intanto, per l'annata 1897, se tale assunzione privata non avrà avuto luogo, il prezzo d'abbonamento al Periodico sarà ridotto pei soci, mentre rimarrà di L. 6 pei non soci ».

Dietro insistente proposta del prof. G. Frattini, si delibera inoltre che pel 1897, sempre nella ipotesi che l'accennata assunzione privata non sia ancora avvenuta, la direzione del Periodico, pubblicato a cura dell'Associazione *Mathesis*, sia affidata al Presidente del Comitato direttivo, prof. R. Bettazzi, coadiuvato dai singoli membri del Comitato medesimo; al detto Presidente dovranno pertanto dirigersi dal 1° gennaio 1897 in poi, tutte le pubblicazioni e gli scritti concernenti il Periodico.

Si dà facoltà al Presidente del Comitato di provvedere nei limiti del disponibile, alle spese del bollettino dal 1° gennaio al 31 luglio 1897.

Da ultimo, riguardo alla formazione di una *Biblioteca* circolante ad uso dei soci, prescritta dallo Statuto, si delibera di cercare per ora di procurarsi all'uopo una prima raccolta di opere ed opuscoli di matematica e scienze affini, mediante libri offerti in dono dai soci, e da tutti coloro che, quantunque non soci, intendono in questo modo giovare all'Associazione. A tale scopo dovrà pubblicarsi nel bollettino un apposito invito. I libri offerti saranno raccolti dal segretario-economo, il quale ne compilerà l'elenco, pubblicandolo di mano in mano sul bollettino, unitamente ai nomi degli oblatori.

Conclusioni della relazione sul bilancio sociale.

Quote spontanee (di 11 membri del Comitato provvisorio). . .	L. 55,00
» ordinarie (di 106 soci fondatori)	» 636,00
Totale entrata . . .	L. 691,00
Spese circolari stampate, autograf. o poligraf. e di posta . . .	» 118,84
Somma disponibile per il 1896-97. . .	L. 572,16

Seguono le questioni che il Comitato direttivo propone allo studio dei signori Professori, siano essi soci di MATHESIS o no.

Si prega di spedire le risposte alla sede dell'Associazione.

I.

Studiare in quale misura sia opportuno dare l'insegnamento dell'aritmetica razionale nelle scuole secondarie inferiori e superiori, e in quali classi convenga impartirlo, affinchè riesca più proficuo.

II.

Quali modificazioni si possono suggerire nei vigenti programmi per l'insegnamento scientifico delle scuole medie, affinchè quello della matematica riesca maggiormente coordinato con quello delle scienze affini.

(Nel liceo, per esempio, seguendo l'attuale programma di matematica, si tratta la teoria della misura verso la fine del secondo anno, mentre per l'insegnamento della fisica essa occorre assai prima. L'insegnamento della cristallografia attualmente precede quello della stereometria. Il disegno di costruzioni comincia un anno prima dello studio della geometria descrittiva. Nel secondo anno dell'istituto tecnico il professore di computisteria ha bisogno di valersi, quasi fin dal principio, della teoria dei logaritmi, mentre questa costituisce ora l'ultimo capitolo del corrispondente programma di aritmetica e algebra. Ecc.).

III.

Se sia opportuno semplificare e ridurre in alcune parti, e in pari tempo approfondire e perfezionare in altre, l'insegnamento della matematica nelle scuole normali, in modo da ottenere dagli allievi, futuri maestri elementari, rigore nelle nozioni elementari e precisione nel linguaggio.

IV.

Esame della importante questione della fusione delle scuole tecniche con le ginnasiali, specialmente in riguardo alla matematica.

V.

Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell' insegnamento.

VI.

Se e come convenga modificare e completare l'insegnamento della matematica attualmente impartito nelle scuole secondarie, e specialmente nei licei, per ottenere un migliore coordinamento con le facoltà di matematica pura ed applicata; o quanto meno:

a) Quali sarebbero i migliori limiti da assegnarsi all' insegnamento della trigonometria nei licei; in particolare, se convenga restringere la parte goniometrica e ampliare quella della trigonometria propriamente detta.

b) Se per tale coordinamento sia opportuno semplificare nel secondo biennio della sezione fisico-matematica degl'istituti tecnici l'attuale programma di matematica, una parte del quale è poi ripetuta all'università e nei licei non si svolge, allo scopo eziandio di potere con miglior frutto tornare nel secondo biennio sul programma del primo, trasportandovene anche una parte, e così addestrare maggiormente gli alunni del secondo biennio nelle esercitazioni ed applicazioni matematiche, e segnatamente nella risoluzione e discussione dei problemi, e alleggerire al tempo stesso gli alunni del primo biennio, ai quali attualmente si deve svolgere in due anni quello stesso programma di matematiche elementari, per lo svolgimento del quale nelle scuole classiche sono invece assegnati cinque anni (Ginnasio e Liceo).

NB. Il Comitato aveva esso stesso iniziata la discussione di questa questione; e venne, fra le altre, avanzata questa proposta: che, soppressa la sezione fisico-matematica negli Istituti tecnici, venisse istituito un corso di un anno, comune ai licenziati dai Licei e dagli Istituti tecnici, nel quale fosse dato un insegnamento complementare di matematica a quelli fra essi che aspirassero all'inscrizione alle facoltà matematiche universitarie.

Emersi nella discussione i vantaggi, ma insieme ad essi anche le difficoltà di questa soluzione, si pensò di non pregiudicare la questione con una deliberazione, e di proporla allo studio dei professori tutti delle scuole medie.

VII.

Del miglior modo di trattare in iscuola la teoria dell'equivalenza.

Biblioteca dell' Associazione MATHESIS.

I Soci e le persone che, sebbene non soci, s'interessano all'incremento di *Mathesis* sono pregati d' indirizzare al Segretario-Economo, *prof. Francesco Giudice, Corso Ugo Bassi 40, Genova*, i libri e gli opuscoli che intendessero donare all' Associazione per concorrere alla formazione della sua biblioteca circolante.

Dei libri e dei donatori si pubblicherà l'elenco nel bollettino.

Comunicazione di Francesco Giudice.

La questione dell'equivalenza fu molto discussa in questi ultimi anni. Ora, esaminando quanto fu scritto in proposito ed in particolar modo le pubblicazioni più recenti, si riconosce che le difficoltà sorgono sempre quando cresce all'infinito il numero delle divisioni, ossia quello delle parti. Fermando l'attenzione su questo punto capitale, mi sono accorto che la causa prima delle difficoltà incontrate consiste nel non aver separate nettamente le figure finite dalle infinite: (*) facendo questa separazione, s'ottiene subito la semplicità antica ed il rigore moderno, perchè dimostrasi immediatamente che una grandezza finita non può esser eguale ad una sua parte, e questa, come è noto, è la proposizione fondamentale della teoria dell'equivalenza.

Ciò premesso, passo a provare quanto ho asserito, e lo esporrò senza divagare, affinchè ognuno possa apprezzare da sè la semplicità e l'importanza del metodo.

Grandezza finita ed infinita. — Diremo che una grandezza è finita, se non è possibile toglierne una prima parte (formata d'un sol pezzo o risultante della riunione di più pezzi presi arbitrariamente ed arbitrariamente riuniti), indi una seconda (formata d'un sol pezzo o di più pezzi presi arbitrariamente nel resto ed arbitrariamente riuniti), che sia eguale alla prima, poi una terza, anch'essa eguale alla prima, e così via indefinitamente: se invece sia possibile, allora diremo che la grandezza è infinita.

Teorema. *Una grandezza finita non può superar sè stessa.* — Supponiamo infatti che una grandezza F possa superar sè stessa, supponiamo cioè che sia possibile scomporre F in parti e rimettere poi insieme le medesime, in modo da ottenere una grandezza formata d'una parte eguale ad F e di altra parte, che indicheremo con G: togliamo questa parte, e, rimanendo ancora una grandezza eguale ad F, mediante la stessa scomposizione e ricomposizione di prima, riusciremo a togliere G una seconda volta, lasciando come resto ancora una grandezza eguale ad F, cosicchè, operando di nuovo la stessa scomposizione e ricomposizione, potremo togliere G una terza volta, lasciando di resto ancora F, e così via. In questo modo vediamo esser possibile togliere da F una 1ª parte eguale a G, poi una 2ª ed una 3ª e così via indefinitamente. Una grandezza F, che possa superar sè stessa, è

(*) Godo che il valente prof. Giudice sia della mia opinione. (V. un mio articolo pubblicato nel *Periodico di mat.*, Fasc. V-VI, 1895).

G. Frattini.

dunque necessariamente infinita; per cui non è possibile che una grandezza finita superi sè stessa.

Dopo la definizione e il teorema precedente basterà ammettere, per postulato, che sia finita ogni sfera, per poter trattare con semplicità e rigore la teoria dell'equivalenza. Consideriamo infatti un cerchio: ogni volta che pensiamo segnata in esso una parte, pensiamo costruito sulla medesima un cilindro retto di altezza eguale ad un segmento a fissato comunque, e, se pensiamo spostata o soppressa una parte del cerchio, pensiamo spostato o soppresso con la medesima il sovrapposto cilindro: riconosciamo così subito che, se si potessero togliere successivamente infinite parti eguali dal cerchio, si potrebbero pur togliere dalla sfera circoscritta al sovrapposto cilindro retto di altezza a: e, siccome la cosa non è possibile per la sfera, perchè ogni sfera è finita per postulato ammesso, così la cosa non è possibile neppure pel cerchio: i cerchi son dunque finiti. Consideriamo ora un segmento in un piano: se ogni volta che pensiamo spostata o soppressa una sua parte, pensiamo spostato o soppresso con essa un sovrapposto rettangolo di altezza a, riconosciamo che, se si potessero togliere successivamente infinite parti egnali del segmento, si potrebbero pur togliere dal cerchio circoscritto al sovrapposto rettangolo di altezza a; onde si vede che, essendo finiti i cerchi, sono finiti anche i segmenti.

Giovanni Frattini - *Gerente responsabile*

Roma, 1896 — Tip. Elzeviriana.

FONDAMENTI
PER UNA TEORIA GENERALE DEI GRUPPI

DI RODOLFO BETTAZZI

(Continuazione e fine: Vedi pagina 112).

CAPITOLO XIII.

GRUPPI I CUI ENTI SONO PARTI FINITE DI GRUPPI SEMPLICI.

92. Teorema. — In un gruppo finito Γ, i cui enti siano parti finite di un gruppo qualunque G, ve n'è sempre per lo meno uno di potenza non minore a nessuno e per lo meno uno di potenza non maggiore a nessuno.

Infatti il gruppo delle potenze di ciascuna di queste parti è equivalente a Γ, e quindi finito, e finito quello, sua parte, delle potenze distinte di queste parti. Essendo tal gruppo parte di quello numerabile di tutte le potenze finite (§ 90) esisterà in esso una potenza di cui nessuna sarà seguente (§ 72-Cor. 1) ed uno di cui nessuno sarà precedente (§ 71) nel gruppo di tutte le potenze, reso normale col dire seguente la potenza maggiore e precedente la minore. Ciò dimostra il Teorema.

Corollario 1. — In un gruppo finito di Z distinte di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, ve n'è una di potenza massima ed una di potenza minima.

Cor. 2. In un gruppo finito i cui enti sono gruppi finiti, ve n'è per lo meno uno di potenza non maggiore a nessuno degli altri, essendo ogni gruppo finito equivalente ad una Z di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, e valendo il Corollario precedente.

93. Teorema. — In un gruppo Γ di parti prese in un gruppo semplicemente sviluppabile ve n'è sempre per lo meno una di potenza non maggiore a nessuna delle altre.

Se le parti sono tutte sviluppabili, esse sono tutte semplicemente sviluppabili (§ 72) e quindi tutte della prima potenza dei gruppi sviluppabili (§ 91) ed il teorema è provato.

Se alcuna o tutte sono finite, possiamo, se vi sono, trascurare quelle sviluppabili (§ 86, Cor. 2): quelle distinte delle altre saranno allora parte del gruppo di tutte le potenze finite, e quindi (§ 71) di esse una non ne avrà precedenti, il che prova il teorema.

Corollario. — In un gruppo di Z distinte di un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, ve n'è sempre una di potenza minima.

94. Teorema. — Il gruppo di tutte le parti distinte di un gruppo finito, considerate esse come enti, è finito.

Sia G il gruppo finito e Γ il gruppo delle potenze distinte delle sue parti, il quale, dovendo queste parti essere di potenza non maggiore a quella di G, sarà finito (§ 90). Immaginiamo Γ ordinato: il suo ente originario sarà la potenza di ogni gruppo di un ente solo. Allora:

1. Le parti di G di potenza non maggiore della prima sono un gruppo che è finito, essendo costituito dai gruppi di un solo ente, i quali formano il gruppo G, finito per ipotesi.

2. Se sono un gruppo finito le parti di G di potenza non maggiore di una α di Γ, così sarà per quelle di potenza non maggiore alla consecutiva (se vi è in Γ). Ed infatti se G' è una parte di G di potenza non maggiore di una potenza di Γ, sarà $G' + a$ (se a è ente di G e non di G') di potenza consentiva a G' (§ 83). Ora i gruppi del tipo $G' + a$ ottenuti da un determinato G' sono un gruppo finito, tale essendo il gruppo degli enti di G e non di G'; quindi, essendo G' ente di un gruppo finito per ipotesi, i gruppi $G' + a$ sono un gruppo finito di gruppi finiti, e perciò costituiscono un gruppo finito (§ 75) il quale insieme a tutti i gruppi di un solo ente, che non compariscono più nei gruppi $G' + a$, e che costituiscono un gruppo finito, dà un nuovo gruppo finito che contiene (ciascuna più di una volta) tutte le parti finite del gruppo G, aventi potenza non maggiore a quella consecutiva ad α. Dunque tutte le parti di G aventi potenza cosiffatta costituiscono un gruppo finito.

Allora essendo Γ finito e valendo perciò in esso il principio d'induzione, la proprietà varrà anche per il suo ente finale, cioè sarà finito il gruppo delle parti di G di potenza non superiore a quella di G, cioè il gruppo di tutte le parti di G, c. d. d.

Corollario 1. — È finito il gruppo di tutti gli enti che costituiscono tutte le parti di un gruppo finito, anche considerando gli enti di una parte qualunque come distinti da tutti quelli di qualunque altra.

Cor. 2. — In virtù del Post. 2º del § 65 e a causa del Cor. precedente: Nei gruppi finiti è nota una legge di scelta (§ 66) che è l'arbitrio.

Cor. 3. — In un gruppo (necessariamente finito) di parti distinte di un gruppo finito (che sono esse pure finite) ve n'è sempre una di potenza non minore ed una di potenza non maggiore a nessuna delle altre. (§ 93).

95. Teorema. — Le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile, considerate come enti, costituiscono un gruppo semplicemente sviluppabile (*).

Il gruppo Γ delle loro potenze è un gruppo semplicemente sviluppabile (§ 90): lo si supponga reso normale. La dimostrazione si conduce allora simile a quella del § 94, cioè:

1. È numerabile il gruppo delle parti del gruppo dato G aventi un ente solo.

2. Se è numerabile il gruppo delle parti di G di potenza non superiore ad una di Γ, tale è quello dei gruppi di potenza non superiore alla consecutiva, giacchè ogni gruppo può associarsi con un gruppo numerabile di altri, e quindi si ha un gruppo numerabile di gruppi numerabili che è numerabile esso pure (§ 87): in esso vi sono gruppi ripetuti, e quindi i gruppi distinti ne formano una parte, la quale non essendo finita (giacchè contiene per lo meno i gruppi di un ente solo) è numerabile essa pure (§ 72). Pel principio d'induzione la proprietà è vera per qualunque potenza finita. Dunque essendo numerabile il gruppo delle potenze e numerabile il gruppo delle parti di ogni singola potenza, sarà numerabile (§ 81) anche il gruppo totale, c. d. d.

Corollario. — È numerabile il gruppo di tutti gli enti che costituiscono tutte le parti finite di un gruppo semplicemente sviluppabile, anche considerando gli enti di una parte qualunque come distinti da tutti quelli di qualunque altra (§ 76 Oss.).

Capitolo XIV.

GRUPPI INFINITI.

96. Definizione. — Diremo *infinito* ogni gruppo che non sia finito (**).

Cor. 1. — Sono infiniti tutti (Def.) e soli (§ 86) i gruppi di potenza maggiore a quella di qualunque gruppo finito.

Cor. 2. — Un gruppo equivalente ad uno infinito, è infinito esso pure.

Cor. 3. — Ogni gruppo sviluppabile è infinito (§ 86 Cor. 2).

(*) Bettazzi. Sui sistemi di numerazione dei numeri reali. (Periodico di Matematica, Anno VI).

(**) Cfr. Nota al § 12.

Oss. 1. — Non è provata vera la reciproca, che cioè ogni gruppo infinito sia sviluppabile (*).

Cor. 4. — Esistono dei gruppi infiniti (§ 12).

Cor. 5. — Ogni gruppo bene ordinato ad un senso è infinito (§ 43).

Cor. 6. — Se un gruppo bene ordinato limitato non è semplicemente ordinato, esso è infinito (§ 52).

Cor. 7. — Ogni gruppo semplicemente sviluppabile è infinito (Cor. 3).

Oss. 2. — I gruppi semplicemente sviluppabili si dicono anche *semplicemente infiniti* (**).

Oss. 3. — Non è provato se esistono o no gruppi infiniti di potenza minore a quella dei semplicemente sviluppabili (V. Oss. 1. di questo §).

Cor. 8. — Un gruppo è finito od infinito, secondochè equivale o no ad una conveniente parte fondamentale di un qualsivoglia gruppo semplicemente sviluppabile reso normale (***).

(*) Il Dedekind (§ 14, N. 159) crede di provare questo teorema reciproco (enunciato sotto la forma conveniente al linguaggio da lui adoprato); ma alla sua dimostrazione si possono fare delle obiezioni. Ed invero egli (che si riferisce al gruppo dei numeri interi come semplicemente sviluppabile) considera un gruppo Σ (che noi diremmo infinito) tale cioè che ogni sistema Z_n (gruppo dei numeri interi $\leq n$) sia di potenza minore a Σ, e che quindi ad ogni numero n corrisponda una tale corrispondenza α_n cogli enti del gruppo dato, che il gruppo dei corrispondenti sia parte propria di Σ. Egli usa tali corrispondenze per fissare con esse determinati enti di Σ, uno per ciascuna: e ricava da Σ un gruppo di enti così scelti, che è quindi equivalente al gruppo dei numeri interi, ed è quindi infinito nel linguaggio del Dedekind, cioè sviluppabile nel linguaggio nostro, il che prova il suo asserto. Per tale dimostrazione gli occorre dunque per ogni n una determinata corrispondenza α_n, o in altre parole gli occorre un gruppo semplicemente sviluppabile, reso normale, di corrispondenze fra Z_n e Σ, una per ciascun n. Si osservi peraltro che, secondo le ipotesi, si deve dire che essendo ogni Z_n di potenza minore a quella di Σ, per ogni n vi sono corrispondenze fra Z_n e Σ, ma non già una sola: giacchè data una corrispondenza qualunque fra Z_n e Σ, essendo $Z_n < \Sigma$, potremo sempre trasformarla in un' altra distinta associando un ente qualunque di Z_n con uno di quelli che nella corrispondenza data erano isolati in Σ, e isolando l'ente già corrispondente di Z_n. E allora possiamo dire che per ogni n si ha un gruppo Γ_n di corrispondenze fra Z_n e Σ. Per la dimostrazione del Dedekind occorrerebbe prendere una speciale, benchè qualunque, di tali corrispondenze da ciascun gruppo Γ_n, per costituire il gruppo di corrispondenze di cui si parlava prima. Ora non può dirsi che se ne sceglie uno *ad arbitrio* da ciascun gruppo Γ_n (il che se potesse farsi basterebbe allo scopo) giacchè abbiamo ammesso il Post. 1° del § 65 che a ciò si oppone, trattandosi qui di un gruppo non finito di enti da sciegliere: occorrerebbe quindi, per rendere rigorosa le dimostrazione, poter dare una legge con la quale in ciascun gruppo Γ_n si potesse scegliere una corrispondenza determinata, il che non si vede se possa farsi e, quanto meno, il Dedekind non fa.

Tale obiezione cadrebbe se si intendesse di abbandonare il Post. 1° del § 65.

(**) Dedekind. § 6, n. 71.

(***) Il Dedekind (§ 14, N. 160) dà egli pure un teorema così enunciato, ma applicabile ai suoi gruppi infiniti, che sono i nostri gruppi sviluppabili. Tale teorema sotto la forma datagli dal Dedekind, o per lo meno, colla dimostrazione che questi ne dà, non può ritenersi esatto, dipendendo dal precedente suo n. 159 che, come si è detto, non può asserirsi ben provato.

Cor. 9. — Un gruppo che non sia equivalente a nessuna parte fondamentale di un gruppo semplicemente sviluppabile reso normale, è di potenza maggiore a tutte.

97. Teorema. — Ogni gruppo ordinato illimitato è infinito.

Sia Γ un gruppo finito qualunque che supporremo ordinato, indicando con $Z_1, Z_2, \ldots Z_s = \Gamma$ le sue Z: esse costituiscono un gruppo finito, il quale, ordinato, dev'essere limitato (§ 63, Cor 1). Sia G il gruppo ordinato dato, nel quale p. es. ogni ente abbia seguenti. Dico potersi stabilire corrispondenze fra Γ e G, e che in ciascuna possibile corrispondenza Γ è suvvalente a G. Ed invero:

1° Z_1 può mettersi in corrispondenza con G, constando Z_1 di un solo ente: ed in qualunque modo ciò si faccia esisteranno sempre enti isolati in G, perchè G non deve essere di un ente solo.

2° Se la parte fondamentale Z_r di Γ può mettersi in corrispondenza con G e sempre avanzano enti isolati in G, altrettanto deve accadere per la parte fondamentale immediatamente seguente $Z_{\sigma r}$. Infatti se G_r è il gruppo degli enti di G associati a quelli di Z_r in una corrispondenza qualunque, in G_r vi dev'essere un ente A_r tale che nessuno degli altri di G_r gli sia seguente: altrimenti il gruppo G_r sarebbe tale che ogni ente in esso ne possederebbe dei seguenti e sarebbe un gruppo ordinato illimitato, mentre esso è gruppo finito perchè equivalente a Z_r, e quindi se ordinato dev'essere limitato (§ 63, Cor. 1). Il gruppo degli enti di G seguenti ad a_r esiste (essendo G ordinato illimitato) ed è ordinato illimitato; in esso si scelga un ente arbitrario, e questo si unisca al gruppo G_r, associandolo all'ente $Z_{\sigma r}$ che non è in Z_r: avremo un gruppo G'_r equivalente a $Z_{\sigma r}$. in una corrispondenza che è corrispondenza anche fra $Z_{\sigma r}$ e G.

È intanto dunque provato che fra $Z_{\sigma r}$ e G può stabilirsi una corrispondenza. In tale corrispondenza α è $(Z_{\sigma r} < G)_\alpha$. In qualunque altra corrispondenza β che possa stabilirsi fra $Z_{\sigma r}$ e G deve accadere la stessa relazione, a causa del Teor. del § 61. Sarà dunque in *qualunque* corrispondenza $(Z_{\sigma r} < G)_\beta$ che è quanto ora volevasi dimostrare.

Per il principio d'induzione la proprietà sarà vera anche per la Z finale, cioè per $Z_s = \Gamma$, ossia anche Γ può mettersi in corrispondenza con G, e gli è sempre suvvalente.

Ciò prova che G è di potenza maggiore ad un gruppo finito qualunque, ed è dunque infinito.

98. Teorema. — Un gruppo composto di più altri, uno almeno dei quali sia infinito, è infinito esso pure.

Sia G il gruppo composto di quello infinito Γ_1 e di altri gruppi, e sia Γ_1 il gruppo composto degli enti di questi che non sono in Γ: sarà $G = \Gamma + \Gamma_1$. Se P è un gruppo finito qualunque sarà, in ogni corrispondenza α, $(P < \Gamma)_\alpha$ per ipotesi: aggiungendo a Γ gli enti di Γ_1 come enti isolati, avremo altrettante corrispondenze α_1, nelle quali $(P < G)_{\alpha_1}$. Essendo P un gruppo finito, per il Teor. del § 61 ciò basta per provare che G ha potenza maggiore di P e che quindi, essendo P è un gruppo finito qualunque, G è un gruppo infinito.

99. Teorema. — La differenza fra un gruppo infinito G ed una sua parte finita Γ è un gruppo infinito.

Se infatti $G_0 = G - \Gamma$ non fosse infinito sarebbe finito, ed allora sarebbe, contro l'ipotesi, finito anche (§ 74) $\Gamma + (G - \Gamma) = G$. Sarà dunque G di potenza maggiore a qualunque gruppo finito, cioè G sarà infinito.

Capitolo XV.

ALCUNE FRASI IN USO FRA I GRUPPI.

100. Se due gruppi finiti hanno ugual potenza, si dice anche che l'uno contiene *tanti enti quanti* l'altro.

Se hanno disugual potenza, si dice che quello di maggior potenza contiene *più enti* dell'altro e questo *meno enti* del primo.

Possiamo quindi dire che, dati due gruppi finiti, o ciascuno contiene tanti enti quanti l'altro, o dei due l'uno ne contiene di più, l'altro di meno (§ 84, cor. 2) e che una parte di un gruppo finito contiene meno enti che l'intero gruppo (§ 61, cor. 2).

Se un gruppo finito G è composto di due gruppi G_1 e G_2 senza enti comuni, si dirà che G contiene *tanti enti quanti* sono quelli di G_1 *più* quelli di G_2, e G_1 *tanti quanti* sono quelli di G *meno* quelli di G_2.

Così se G è un gruppo finito ed a un ente non di G, potremo dire che $G + a$ contiene *un ente di più* di G, e che non esistono gruppi che contengano meno di un ente più di G (§ 83).

Dato un gruppo finito di gruppi finiti, può dirsi che fra essi ve n'è almeno uno che contiene non meno enti degli altri, ed almeno uno che ne contiene non più degli altri (§ 92, cor. 2).

Poichè un gruppo finito è equivalente a sè stesso nella corrispondenza identità, così accadrà in qualunque altra corrispondenza (§ 61). Se dunque si dice *cambiar l'ordine degli enti* di un gruppo il metterlo in corrispondenza non identica con sè stesso, si può usare la frase che, se si cambia l'ordine degli enti in un gruppo in un modo qualunque, *ogni volta* contiene esso *tanti enti quanto un'altra*.

Di un gruppo infinito si dirà che contiene *più enti* di qualunque gruppo finito (§ 86) (*).

(*) In questo paragrafo vengono ad essere definite e rese rigorose le frasi « tanti.... quanti » « più..- che » ecc. delle quali si fa spesso uso inavvertito senza definirle, e che mi sono sfuggite anche nella citata « Teoria delle Grandezze (Vedi introduzione). Ora esse possono essere rigorosamente usate.

CAPITOLO XVI (*).

ESEMPI DI GRUPPI.

101. Possiamo dare alcuni fra i più notevoli esempi di gruppi, scegliendoli tanto nel mondo materiale come nell'ideale.

I gruppi di oggetti che ci vengono forniti dal mondo esteriore, quando di questi oggetti uno ad uno apprezziamo materialmente l'esistenza, sono gruppi finiti: lo stesso apprezzamento dell'esistenza loro, fatto in tempi necessariamente successivi, ci fornisce gli oggetti in gruppo bene ordinato, limitato, dicendo seguente quello cui si pensa dopo, e in questo ordinamento accadendo che chi voglia pensare all'ente originario ed al seguente di ogni ente cui pensi finirà col pensare a tutti (prescindendo dagli ostacoli di tempo, ecc.) il che ci dice essere il gruppo catena (§ 16) del suo ente originario.

A gruppi infiniti si perviene coll'astrazione. Dicendo che si hanno enti che non finiscono mai si accenna a gruppi di potenza maggiore di qualunque gruppo finito, e quindi infinito; ma così si indica un fatto astratto e si dà al gruppo un carattere ideale.

Una delle più importanti astrazioni più prossime alla realtà è quella dei gruppi di enti i quali, contandoli uno ad uno, uno dopo l'altro, non si possono mai esaurire tutti, ma si può così contando pervenire ad uno qualunque di essi. Tale è p. es. il concetto che possiamo farci dei minuti secondi successivi a partire da uno determinato di essi quando non vogliamo pensare ad un tempo limitato. Essi sono gruppi semplicemente sviluppabili. E siccome i gruppi finiti sono tutti e soli quelli che sono di ugual potenza colle parti fondamentali dei gruppi semplicemente sviluppabili, resi normali, così ne viene che (usando il concetto di tempo) sono gruppi finiti tutti e soli quelli i cui enti si possono cominciare e finire di contare nel tempo, contandoli nel modo ordinario, facendo correre dall'uno all'altro uguali intervalli di tempo.

102. — Fornisce esempi di gruppi la fisica: ogni corpo è un gruppo di atomi, gruppo finito od infinito secondo le varie teorie.

103. — L'aritmetica ci dà notevolissimi gruppi formati coi suoi numeri. Il gruppo dei numeri interi è un gruppo semplicemente sviluppabile che si rende normale dicendo seguente il numero maggiore. È semplicemente sviluppabile anche il gruppo dei numeri razionali (**) e così quelli dei numeri algebrici, e sono quindi bene ordinabili, sebbene non più col concetto

---

(*) In questo e nei successivi paragrafi non s'intende di definire ogni nuovo concetto a cui si abbia ricorso, ma solo di *accennare* esempi di gruppi in speciali argomenti, ai quali qui non è il caso di dare sviluppo.

(**) CANTOR. Acta Math. T. 2. Pag. 319 e 305.

precedente, col quale sono soltanto ordinabili. Il gruppo di tutti i numeri reali invece non è semplicemente sviluppabile, ma è di potenza superiore (*). Esso pure è ordinato, ma non bene ordinato, dicendo seguente il numero maggiore.

104. — Spettano all'Aritmetica anche i gruppi transfiniti del Cantor (**) ottenuti, se indichiamo con n, m ecc. uno qualunque dei numeri interi, considerando il numero ω minimo fra quelli maggiori di tutti i numeri interi, il gruppo dei numeri $\omega + n$, il numero $2\,\omega$ minimo fra i maggiori di tutti gli $\omega + n$, e così $3\,\omega$, $3\,\omega + n$ ecc. il numero ω^2 maggiore di ogni $n\,\omega + m$ ecc.

Tali gruppi sono bene ordinabili, anzi già bene ordinati nel modo con cui vengono definiti. Prendendo tutti i numeri di tal natura dal numero 1 fino ad uno $\geqq \omega$, si hanno gruppi infiniti e sviluppabili.

105. — In Geometria fra gli altri un notevole gruppo di punti è fornito da quelli che costituiscono la linea retta. Questa può definirsi come gruppo di punti in modo rigoroso, p. es. ricorrendo al metodo del professore Peano (***), usando i suoi quattro assiomi I. II, IV, VII e i tre proposti dal dott. Vailati (****) che possono sostituire i suoi restanti sette, e che contengono il concetto di ordine. La retta apparisce allora un gruppo ordinato (non bene ordinato) e perciò un gruppo infinito, senza che con quei soli assiomi si possa asserire se è sviluppabile o no.

Aggiunto il concetto di uguaglianza ed il postulato della continuità, la retta diviene un gruppo sviluppabile, di potenza uguale a quella del gruppo dei numeri reali, e perciò superiore alla prima dei gruppi sviluppabili.

SAGGIO DI UNA NUOVA TEORIA

DELLE APPROSSIMAZIONI ARITMETICHE

(Continuazione: Vedi pagina 109)

9. Se di una grandezza vera v si conosce un valore a, ed un numero λ, che non può essere superato dal suo errore assoluto, questo errore ammette per limite (superiore) il numero λ, e qualunque numero maggiore di λ.

Se intorno alla grandezza vera v non si ha altra nozione, che

(*) Cantor. Acta Math. T. 2. Pag. 305.

(**) Cantor. Acta Math. T. 2. *Zur Lehre* ecc. — Burali-Forti ll. cc.

(***) Peano. Principî di Geometria. Torino (Bocca, 1889) e « Sui fondamenti di geometria » Rivista di Matematica. Vol. IV.

(****) Vailati. « Sui principi fondamentali della Geometria della Retta. » Rivista di Matematica. Vol. II.

quelle qui sopra specificate, λ è il *minimo limite* assegnabile all'errore assoluto del valore a.

Ma se di questo errore si conosce anche il *senso*, il suo limite si può far discendere fino a quest'altro *minimo*: $\frac{1}{2}\lambda$, prendendo in vece del dato valore, a,

$$a + \frac{1}{2}\lambda, \text{ quando l'errore è } \textit{per difetto},$$

$$a - \frac{1}{2}\lambda, \text{ quando l'errore è } \textit{per eccesso}.$$

10. Ogni errore operativo si può assoggettare ad un limite piccolo quanto si voglia.

Rapporti dei valori veri ai valori approssimati.

11. Rappresenterò con

$$\rho_1, \ \rho_2, \ \rho_3, \ \ldots . \ R$$

i rapporti degli argomenti veri v_1, v_2, v_3, ... ai valori a_1, a_2, a_3... impiegati nel calcolo, e del valore vero V della funzione al risultato definitivo A.

12. Fra un rapporto ρ e l'errore relativo corrispondente, e, ha luogo la relazione

$$\rho = 1 + e, \quad \text{oppure} \quad \rho = 1 - e,$$

secondo che l'errore è per difetto, o per eccesso.

E reciprocamente si ha, nei due casi, rispettivamente

$$e = \rho - 1, \quad e = 1 - \rho.$$

13. Per ogni operazione rappresenterò con ω il rapporto, che ha per conseguente il risultato adottato, e per antecedente la funzione semplice (prodotto, o quoziente, o radice), corrispondente all'operazione di cui si tratta, degli argomenti in essa impiegati.

14. Così avremo, nell'esempio del § 4,

$$\omega_1 = \frac{3{,}142^2}{9{,}87}, \quad \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = 1,$$

$$\omega_4 = \frac{\sqrt[3]{219{,}94}}{6{,}04}, \quad \omega_5 = \frac{382{,}4625 : 6{,}04}{63{,}3}.$$

15. In generale avremo, nei tre casi distinti al § 7, rispettivamente

$$\omega = \frac{a_1 a_2}{A}, \quad \omega = \frac{a_1 : a_2}{A}, \quad \omega = \frac{\sqrt[0]{a}}{A}.$$

16. Le proposizioni del § 12 si estendono, naturalmente, agli *errori relativi operativi*, confrontati coi rapporti ω.

17. Un rapporto ρ, od ω è uguale ad **1**, quando l'errore corrispondente, sia relativo, sia assoluto, è uguale a 0.

18. II. *Per qualunque funzione monomia,* $f(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ *si ha*

$$R = R' R'',$$

essendo

$$R' = f(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots)$$

ed R″ *il risultato che si ottiene introducendo nella funzione data, come moltiplicatori delle singole funzioni semplici, da cui essa dipende, i rispettivi rapporti* ω, *e facendo uguali ad* **1** *tutti gli argomenti primitivi.*

19. Volendo applicare questo teorema ad una funzione data, bisognerà *distinguere chiaramente* le singole operazioni occorrenti per il suo calcolo, e le *funzioni semplici* che ad esse corrispondono.

20. Per la funzione calcolata nel § 4 queste operazioni e funzioni semplici sono:

la elevazione al quadrato di π	π^2
la moltiplicazione di π^2 per v	$\pi^2 v$
la moltiplicazione di 70 per π	70π
l'estrazione della radice cubica da 70π . .	$\sqrt[3]{70\pi}$
la divisione di $\pi^2 v$ per $\sqrt[3]{70\pi}$	$\pi^2 v : \sqrt[3]{70\pi}$

Di queste funzioni la prima e la terza sono *semplici assolutamente;* le rimanenti sono ancora *semplici rispetto agli argomenti delle operazioni corrispondenti*, perchè $\pi^2 v$ è semplicemente il *prodotto di* π^2 *per* v, ecc.

21. Per allontanare il pericolo di cadere in qualche confusione, o duplicazione, converrà introdurre ciascuno dei rapporti ω in un posto determinato rispetto agli argomenti della funzione semplice, alla quale si riferisce, e preferibilmente:

dopo il moltiplicando,	quando la f. semplice	è	un prodotto (*),
dopo il quadrato,	»	»	un quadrato,
dopo il dividendo,	»	»	un quoziente,
innanzi al segno radicale	»	»	una radice.

22. Così per la formola proposta nel § 4 avremo

$$R = (\rho_1^2 \rho_2 : \sqrt[3]{\rho_3 \rho_1})\,(\omega_1\,\omega_2\,\omega_3 : \omega_4 \sqrt[3]{\omega_5}),$$

essendo ρ_1, ρ_2, ρ_3 i rapporti ρ corrispondenti, rispettivamente, agli argomenti π, v, 70; ω_1 il rapporto ω corrispondente all'elevazione di π al quadrato, ecc. O più semplicemente, omettendo i rapporti uguali ad 1, relativi all'argomento esatto 70 ed alle operazioni seconda e terza, le quali converrà sempre effettuare esattamente,

$$R = (\rho_1^2 \rho_2 : \sqrt[3]{\rho_1})\,(\omega_1\,\omega_2 : \omega_3).$$

23. Il fattore R' non cambia di valore, se si trasforma la funzione data in un'altra, calcolabile mediante un complesso di operazioni, comunque differente da quello indicato nella funzione primitiva.

L'altro fattore, R'', invece, dipende da questo complesso di operazioni, che pertanto si dovrà stabilire prima di costruire quel fattore.

24. Data, p. es., la funzione

$$V = \pi^{15 + \frac{17}{27}}\, v^{-\left(7 + \frac{7}{8}\right)}$$

la forma più conveniente per il suo calcolo approssimato sarà

$$V = (\pi^2 : v)^8 \sqrt[8]{v} : \sqrt[3]{\pi \sqrt[9]{\pi}}$$

ossia, mettendo in evidenza tutte le operazioni *semplici*,

$$V'' = \left\{ [(v^2 : \pi)^2]^2 \right\}^2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{v}}} : \sqrt[3]{\pi \sqrt[3]{\sqrt[3]{\pi}}}.$$

(*) Di due fattori distinti.

Supposto, pertanto, che il calcolo si voglia effettuare secondo questa ultima espressione, da essa, in vece che della V, si dovrà desumere il fattore R'', che sarà

$$R'' = \left\{ \left[(\omega_1 \, \omega_2)^2 \, \omega_3 \right]^2 \omega_4 \right\}^2 \omega_5 \, \omega_6 \, \omega_7 \sqrt{\omega_8 \sqrt{\omega_9}} \, \omega_{10} : \omega_{11} \sqrt[3]{\omega_{12} \, \omega_{13} \sqrt[3]{\omega_{14}}}$$

Ma l'altro fattore, R', sarà lecito, e conveniente, costruirlo secondo l'espressione primitiva, V.

Proprietà della funzione $\dfrac{x}{1 - xy}$.

25. Questa funzione rappresenterò colla notazione $\psi(x, y)$.

Per $y = 0$ si ha semplicemente $\psi(x, 0) = x$.

Reciprocamente, qualunque numero dato, x, è uguale alla funzione $\psi(x, 0)$.

26. III. *Nei due membri d'una eguaglianza, quando sono della forma* $\psi(x, y)$, *si può aggiungere uno stesso numero qualsivoglia all'argomento* y. Vale a dire che dall'uguaglianza

$$\psi(x, y) = \psi(x', y')$$

consegue l'uguaglianza

$$\psi(x, y + h) = \psi(x', y' + h),$$

essendo h un numero arbitrario.

27. IV. *Per ricavare* x *dall'uguaglianza*

$$\psi(x, y) = \psi(x', y'),$$

basta aggiungere al secondo argomento, in entrambi i membri, $-y$. Si avrà così

$$x = \psi(x', y' - y).$$

Limiti di un prodotto di fattori della forma $1 \pm \psi(x, y)$.

28. Ogni numero rappresentato mediante la lettera d si dovrà intendere che è positivo.

29. V. *Quando i fattori sono tutti maggiori di 1, si ha*

$$1 + \psi(S, y_m) < [1 + \psi(d_1, y_1)][1 + \psi(d_2, y_2)][1 + \psi(d_3, y_3)] \dots$$
$$\dots < 1 + \psi(S, y_M),$$

essendo:

S *la somma* $d_1 + d_2 + d_3, \dots,$

y_m *il minimo fra i numeri* $y_1, y_2, y_3, \dots,$ *se questo minimo è negativo, e 0 nel caso contrario,*

y_M *il massimo fra questi stessi numeri, se è almeno uguale a* $\frac{1}{2}$, *e* $\frac{1}{2}$ *nel caso contrario;*

e sotto la condizione che i denominatori delle frazioni rappresentate mediante la caratteristica ψ *siano tutti positivi.*

30. Questo teorema dà del prodotto

$$1{,}007\,[1 + \psi(0{,}02, 8)][1 + \psi(0{,}03, 6)]$$

il limite inferiore 1,057 ed il limite superiore $1 + \psi(0{,}057, 8)$. Invece, di quest'altro prodotto

$$[1 + \psi(0{,}2, 3)][1 + \psi(0{,}1, 4)]$$

non fornisce alcun limite superiore, ma solo il limite inferiore 1,3.

31. *Se i numeri y sono tutti nulli, si ha*

$$1 + S < (1 + d_1)(1 + d_2)(1 + d_3) \dots < 1 + \psi\left(S, \frac{1}{2}\right),$$

ed ancora quando i fattori sono due soli,

$$1 + d_1 + d_2 < (1 + d_1)(1 + d_2) < 1 + \psi\left(d_1 + d_2, \frac{1}{4}\right),$$

sotto la condizione che il denominatore della frazione rappresentata da $\psi\left(S, \frac{1}{2}\right)$, *o da* $\psi\left(d_1 + d_2, \frac{1}{4}\right)$ *sia positivo.*

32. *La condizione, che i denominatori delle frazioni rappresentate mediante la caratteristica* ψ *siano positivi* dovrà essere adempiuta in tutte le proposizioni seguenti; laonde per evitarne la continua ripetizione, *la riterrò d'ora innanzi come sottintesa.*

33. VII. *Quando i fattori sono tutti minori di 1, si ha*

$$1 - \psi(S, y_M) < [1 - \psi(d_1, y_1)][1 - \psi(d_2, y_2)][1 - \psi(d_3, y_3)] \dots$$
$$\dots < 1 - \psi(S, y_m),$$

essendo:

S *la somma* $d_1 + d_2 + d_3 \ldots,$

y_M *il massimo fra i numeri* y, *se è positivo, e 0 nel caso contrario,*

y_m *il minimo fra i numeri* y, *se questo minimo è tutt'al più uguale a* -1, *e* -1 *nel caso contrario.*

34. VIII. *Se i numeri* y *sono tutti nulli, si ha*

$$1 - S < (1 - d_1)(1 - d_2)(1 - d_3) \ldots < 1 - \psi(S_1, -1);$$

ed ancora, quando i fattori sono due soli,

$$1 - (d_1 + d_2) < (1 - d_1)(1 - d_2) < 1 - \psi\left(d_1 + d_2, -\frac{1}{2}\right).$$

35. I *limiti di prodotti*, determinati secondo i teoremi precedenti, hanno questo di notevole, che *sono sempre della forma* $1 \pm \psi(x, y)$, che *l'argomento* x *è sempre uguale alla somma* S, e che *l'argomento* y *non dipende punto dagli argomenti dati*, d, *ma solamente, e secondo una legge semplicissima, da* $y_1, y_2, y_3, \ldots.$

36. IX. *Per un prodotto di due soli fattori, uno maggiore e l'altro minore di 1, quando l'argomento* y *è, per entrambi, nullo, si ha*

$$(1 + d_1)(1 - d_2) < 1 + d_1 - d_2;$$

cosicchè quel prodotto ammette ancora un *limite superiore*, che gode le proprietà dichiarate nel § precedente.

Ma un tal limite non sussiste più, in generale, quando gli argomenti y, nei fattori, sono differenti da 0.

E in nessun caso il prodotto ammette un analogo *limite*, generale, *inferiore*.

37. I limiti dei prodotto

$$[1 + \psi(d_1, y_1)]\,[1 - \psi[(d_2, y_2)],$$

che non si possano determinare secondo la proposizione precedente, si cercheranno, naturalmente, effettuando la moltiplicazione ordinaria dei due fattori.

38. Quando i fattori sono più di due, e alcuni maggiori e gli altri minori di 1, il prodotto non ammette, in generale, alcun limite analogo ai precedenti, nè superiore nè inferiore.

Si può tuttavia trar partito dei teoremi precedenti, cercando prima i limiti del prodotto dei fattori d'una specie, e poi quelli del prodotto dei fattori dell'altra specie, e moltiplicando quindi fra loro i limiti omonimi.

Teorema relativo alle potenze del binomio $1 + x$.

39. X. *Se la variabile reale* x *cresce da* -1 *fino a* ∞, *la funzione* y, *che è determinata dall'equazione*

$$(1 + x)^n = 1 + \psi(nx, y),$$

[25] *varia sempre in un medesimo senso.*

da $1 - \frac{1}{n}$ *fino a* 0, *se l'esponente* n *è positivo*,

da $-\frac{1}{n}$ *fino a* 1, *se l'esponente* n *è negativo;*

e diviene uguale a $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, *quando* x *diviene uguale a* 0.

S'intende che: 1° *di* $(1 + x)^n$ *si deve prendere in ogni caso solamente il valore reale positivo;* 2° *il valore assegnato alla funzione* y, *per* $x = 0$, *è il limite verso cui essa tende, quando* x *si avvicina indefinitamente a* 0; 3° *quando i valori estremi di* y *divengono uguali, cioè quando l'esponente* n *è uguale a* 1, *e quando è uguale a* -1, *la variazione di* y *è costantemente nulla.*

Limiti delle potenze dei numeri prossimi ad 1.

40. XI. *Per avere un limite inferiore,* l *od un limite superiore,* L *della potenza* $(1 \pm d)^{\pm k}$, *essendo* d *e* k *numeri positivi, basta mettere:*

nella somma $1 + \psi(kd, y)$, *se* d *e* k *hanno lo stesso segno*,

nella differenza $1 - \psi(kd, y)$, *se* d *e* k *hanno segni contrari*,

[25] *i valori indicati nella tavola seguente* [32]:

POTENZE	$k > 1$ per avere l	$k > 1$ per avere L	$k < 1$ per avere l	$k < 1$ per avere L	$k = 1$ per avere l ed L
$(1 + d)^k$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2k}$	0	0
$(1 - d)^{-k}$	0	1	0	$\frac{1}{k}$	1
$(1 + d)^{-k}$	0	-1	0	$-\frac{1}{k}$	-1
$(1 - d)^k$	0	-1	$\frac{1}{k}$	0	0

Calcolo approssimato di una funzione monomia di argomenti prossimi ad 1 conosciuti esattamente.

41. I teoremi precedenti suggeriscono, in certi casi, un procedimento semplice per effettuare questo calcolo, senza eseguire neppure una delle operazioni, che costituiscono la funzione data.

42. Supponiamo, p. es., che questa funzione, ridotta in un prodotto di potenze [1], divenga

$$V = (1 - d_1)^{\frac{27}{8}} (1 + d_2)^{-\frac{17}{9}} (1 + d_3)^{-1}.$$

Combinando fra loro convenientemente i limiti dei fattori, determinati secondo la proposizione XI [40], si avranno del prodotto V i limiti inferiore e superiore,

$$l = \left(1 - \frac{27}{8}\, d_1\right)\left(1 - \frac{17}{9}\, d_2\right)\left[1 - \psi\,(d_3, -1)\right]$$

$$L = \left[1 - \psi\left(\frac{27}{8}\, d_1, -1\right)\right]\left[1 - \psi\left(\frac{17}{9}\, d_2, -1\right)\right]\left[1 - \psi\,(d_3, -1)\right].$$

La proposizione VII [33] dà, del limite l, il limite inferiore

$$l' = 1 - \psi\,(S,\, 0), \qquad S = \frac{27}{8}\, d_1 + \frac{17}{9}\, d_2 + d_3\,;$$

e del limite L il limite superiore,

$$L' = 1 - \psi\,(S, -1).$$

Pertanto saranno l' un limite inferiore, ed L' un limite superiore della funzione data.

E prendendo uno di questi due limiti in vece della funzione data, si farà un errore minore della loro differenza.

Così quando fosse

$$d_1 = 0{,}00022 \qquad d_2 = 0{,}00017 \qquad d_3 = 0{,}00512,$$

si avrebbe

$$0{,}0011836 < S < 0{,}0011837,$$
$$l' > 1 - 0{,}0011837, \qquad l' > 0{,}9988163;$$
$$L' < 1 - \frac{0{,}0011836}{1 + 0{,}0011836}, \quad L' < 1 - 0{,}0011836 + 0{,}0011836^2,$$
$$L' < 0{,}9988179,$$

ed in conseguenza

$$V = 0{,}998817 \quad \text{a meno di} \quad 0{,}000001.$$

(Continua).

SOLUZIONI DELLE QUESTIONI 299**, 311*, 312* e 322*

299.** *Determinare un triangolo isoscele, dati il perimetro* 2p *e l'altezza* h *relativa a ciascuno dei lati eguali. Qual è il minimo valore del rapporto* $\frac{2p}{h}$ *e quali sono gli angoli corrispondenti?* (G. Bellacchi).

Soluzione del prof. *Luigi Bosi* del R. Istituto tecnico di Teramo.

Siano y, $2x$, z le misure dei lati eguali, della base e della corrispendente altezza: si ha il sistema

$$\begin{aligned} y + x &= p \\ y^2 - x^2 &= z^2 \\ 2xz &= hy. \end{aligned}$$

La seconda equazione si può scrivere

$$(y - x)\,p = z^2,$$

e da questa e dalla prima si ricava

$$x = \frac{p^2 - z^2}{2p}, \quad y = \frac{p^2 + z^2}{2p} \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Sostituendo nella terza, si ha

$$z^3 + \frac{h}{2} z^2 - p^2 z + \frac{p^2 h}{2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

e questa, ponendo

$$z = z_1 - \frac{h}{6},$$

si trasforma in

$$z_1^3 - \frac{12 p^2 + h^2}{12} z_1 + \frac{h^3 + 72 p^2 h}{108} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

Si vede con la regola di Cartesio che ciascuna delle equazioni (β), (γ) ha una radice reale negativa e due o nessuna radice reale positiva.

Si formi ora il discriminante della (γ): esso è

$$\frac{p^2}{432}(h^4 + 44 h^2 p^2 - 16 p^4),$$

e ponendo

$$\frac{2p}{h} = \lambda$$

si può scriverlo così

$$\frac{p^2 h^4}{432}(1 + 11\lambda^2 - \lambda^4).$$

Se

$$\lambda^4 - 11\lambda^2 - 1 < 0,$$

la (γ) ha una sola radice reale (quella negativa), e così pure la (β).

Se

$$\lambda^4 - 11\lambda^2 - 1 > 0.$$

la (γ) e la (β) hanno tutte le radici reali, e quindi due radici reali positive.

Se poi

$$\lambda^4 - 11\lambda^2 - 1 = 0,$$

allora ciascuna delle (γ), (β) ha tutte le radici reali e di più ha eguali le due radici positive.

La (γ) e la (β) hanno dunque delle radici reali e positive, se, e soltanto se

$$\lambda^4 - 11\lambda^2 - 1 \geqq 0,$$

cioè se λ, che evidentemente dev'essere sempre positivo, sia maggiore o almeno eguale a $\sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}}$.

Perchè ad un valore reale e positivo di z corrisponda una soluzione del problema, si richiede poi (vedi la 1ª delle formole (α)) che quel valore di z sia minore di p. Ora il primo membro della (β) si può scrivere

$$z(z^2 - p^2) + \frac{h}{2}(z^2 + p^2)$$

ed è evidentemente positivo per ogni valore reale di z eguale o maggiore di p: dunque, quando esistono radici reali e positive della (β), esse sono minori di p e però ad ognuna di esse corrisponde una soluzione del problema.

Dunque, quando

$$\lambda < \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}},$$

il problema non ha soluzione.

Quando

$$\lambda > \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}},$$

il problema ha due soluzioni: ricavati i due valori positivi di z_1 dalla (γ) (per la quale si presenta però il caso irriducibile), si hanno i corrispondenti valori di z dalla

$$z = z_1 - \frac{h}{6},$$

e quindi dalle (α) quelli di x ed y.

Quando poi

$$\lambda = \sqrt{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\delta)$$

il problema ha una soluzione sola.

Occupiamoci ora in particolare di quest'ultimo caso. Intanto dalla (δ) risulta

$$h^2 = 2p^2(5\sqrt{5} - 11). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

E poichè in questo caso la radice positiva della (γ) è una radice doppia, essa apparterrà anche alla derivata prima

$$3z_1^2 - \frac{12p^2 + h^2}{12} = 0,$$

e quindi sarà data dalla formola

$$z_1 = \frac{1}{6}\sqrt{12p^2 + h^2}$$

nella quale ad h^2 si dovrà sostituire il valore ricavato dalla (ε): si ha così

$$z_1 = \frac{p}{6}\sqrt{10\sqrt{5} - 10},$$

e quindi

$$z = z_1 - \frac{h}{6} = \frac{p}{6}\left(\sqrt{10\sqrt{5} - 10} - \sqrt{10\sqrt{5} - 22}\right) = \frac{h}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

Quadrando e riducendo viene

$$z^2 = p^2 (\sqrt{5} - 2),$$

e sostituendo nelle (α)

$$x = \frac{p}{2} (3 - \sqrt{5}), \quad y = \frac{p}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Il coseno dell'angolo alla base del triangolo isoscele è poi dato da

$$\frac{x}{y} = \frac{3 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

ne risulta che tale angolo è circa

$$51^0 \;.\; 49' \;.\; 38''.$$

311*. *Eliminare* x ed y *dal sistema*

$$a^2 y (2rx + dy)^2 = c^2 x^2 (1 + ry^2) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$
$$2a^2 y (2rx + dy) = cx (dx + cy - 2a) \quad \ldots \quad (2)$$
$$c^3 x^3 + 8a^4 y^2 (2rx + dy) = 4a^2 cx (rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay). \quad (3)$$

(G. Frattini).

Soluzione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo « Marco Foscarini » di Venezia.

Moltiplicando (2) per $4a^2 y$ e sottraendo da (3), si ha:

$$c^3 x^3 = 4a^2 cx (rx^2 + dxy).$$

Dividendo per cx^2, si ha:

$$x (c^2 - 4a^2 r) = 4a^2 dy \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Ponendo nella (1) per y il valore dato da (4), si ha:

$$a^2 y^2 \left(2rx + \frac{c^2 - 4a^2 r}{4a^2} x\right)^2 = c^2 x^2 (1 + ry^2).$$

Dividendo per x^2 e sviluppando risulta:

$$y^2 \left(4r^2 a^2 + \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right)^2 + rc^2 - 4a^2 r^2 - rc^2\right) = c^2;$$

donde

$$y^2 \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right)^2 = c^2 \quad \text{ossia} \quad y \left(\frac{c^2 - 4a^2 r}{4a}\right) = \pm c \quad . \quad (5)$$

Pongasi nella (2) per dy e per dx i loro valori ricavati da (4), e si avrà:

$$2a^2 y \left(2rx + \frac{c^2 - 4a^2 r}{4a^2} x\right) = cx \left(\frac{4a^2 d^2}{c^2 - 4a^2 r} y + cy - 2a\right).$$

Dividendo per x, risulta:

$$y\left(4a^2r + \frac{c^2-4a^2r}{2} - \frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} - c^2\right) = -2ac$$

$$y\left(\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} + \frac{c^2}{2} - 2ra^2\right) = 2ac \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Dividendo la (6) per la (5) membro a membro, si ottiene:

$$\left(\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} + \frac{c^2}{2} - 2ra^2\right) : \frac{c^2-4a^2r}{4a} = \pm 2a$$

ossia

$$\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} + \frac{c^2}{2} - 2ra^2 = \pm \frac{c^2-4a^2r}{2}.$$

Se si considera il segno $+$, allora $\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} = 0$ ossia $adc = 0$. Se si considera il segno $-$, allora $\frac{4a^2d^2c}{c^2-4a^2r} + c^2 - 4a^2r = 0$ ossia

$$4a^2d^2c + (c^2-4a^2r)^2 = 0. \quad (*)$$

312*. *Eliminare* x *ed* y *dal sistema*

$$(2arxy + ady^2 - cx)^2 = c^2x^2\left(1 + ry^2 - \frac{cy}{a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$(2arxy + ady^2 - cx)\, 2a = cx\,(dx + cy - 2a) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$c^3x^3 + 8a^3y\,(2arxy + ady^2 - cx) = 4a^2cx\,(rx^2 + cy^2 + 2dxy - 2ay) \quad (3)$$

(G. Frattini).

Soluzione del Sig. *Guido Fubini*, alunno del R. Liceo « Marco Foscarini » di Venezia.

Sottraendo dalla (3) la (2) moltiplicata per $4a^2y$, si ha:

$$c^2x^3 = 4a^2cx\,(rx^2 + dxy)$$

e dividendo tutti i termini per cx^2 risulta:

$$x\,(c^2 - 4a^2r) = 4a^2dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Dividendo la (1) per x^2, si ha:

$$\left(2ary + ady\cdot\frac{y}{x} - c\right)^2 = c^2\left(1 + ry^2 - \frac{cy}{a}\right) \quad . \quad . \quad (5)$$

Ponendo nella (5) invece della frazione $\frac{y}{x}$ il suo valore dato da (4), sviluppando e dividendo per y, si ha

$$y\left(\frac{c^2-4a^2r}{4a}\right)^2 = 2arc - \frac{c^3}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

(*) In questo esercizio e nel seguente il Sig. *Fubini* ha supposto evidentemente che a, d e c, siano differenti da zero. (N. D. R.).

Dividendo la (2) per x, si ha:

$$2a\left(2ary + ady \cdot \frac{y}{x} - c\right) = c\,(dx + cy - 2a)\,. \quad . \quad . \quad (7)$$

Sostituendo nella (7) alla frazione $\frac{y}{x}$ ed al termine dx i valori respettivi dati dalla (4), sviluppando e riducendo, si ottiene:

$$y\left(2a^2r - \frac{c^2}{2} - \frac{4a^2d^2c}{c^2 - 4a^2r}\right) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

quindi, o è nullo il fattore $\left(2a^2r - \frac{c^2}{2} - \frac{4a^2d^2c}{c^2 - 4a^2r}\right)$ ossia

$$8a^2d^2c + (c^2 - 4a^2r)^2 = 0,$$

oppure è nullo y, e quindi per la (6) è nullo

$$2arc - \frac{c^3}{2a}$$

ossia si ha: $c^2 - 4a^2r = 0$.

322'. *Se i lati di un triangolo sono in progressione aritmetica, i raggi dei cerchi ex-inscritti saranno in progressione armonica.* (F. P. PATERNÒ).

Dimostrazione del Sig. *Umberto Bertocchini*, studente nel R. Istituto tecnico di Livorno (*).

Per ipotesi, indicando con a, b, c le misure dei lati del triangolo in ordine crescente o decrescente, si ha: $a - b = b - c$, da cui $\frac{a+c}{2} = b$.

È noto che tre numeri sono in progressione armonica quando i loro inversi sono in progressione aritmetica. Per dimostrare quindi che, nell'ipotesi ammessa, i raggi r_a, r_b, r_c dei cerchi ex-inscritti sono in progressione armonica, basterà dimostrare che le loro inverse sono in progressione aritmetica. Ora, indicando con $\triangle$ e p l'area e il semiperimetro del triangolo, abbiamo:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{\triangle} + \frac{p-c}{\triangle} = \frac{2p-(a+c)}{\triangle}\,;$$

$$\frac{2}{r_b} = \frac{2(p-b)}{\triangle} = \frac{2p-(a+c)}{\triangle}\,;$$

quindi sarà, come dovevamo dimostrare,

$$\frac{2}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}\,.$$

(*) Simile dimostrazione dal Sig. *Gaetano Lami*, studente di IV corso nello stesso Istituto.

Viceversa, se r_a, r_b, r_c, sono in progressione armonica, le inverse saranno in progressione aritmetica. Se infatti

$$\frac{2(p-b)}{\Delta} = \frac{p-a}{\Delta} + \frac{p-c}{\Delta},$$

si deduce che $2b = a + c$: quindi i lati del triangolo sono in progressione aritmetica.

Dimostrazione del Sig. *Francesco Barbagallo*, studente nel R. Istituto tecnico di Catania.

Sieno a, $a+d$, $a+2d$, i lati di un triangolo, e tali che formino una progressione aritmetica di ragione d. Dico che

$$r_1 = \frac{S}{s-a}; \quad r_2 = \frac{S}{s-(a+d)}; \quad r_3 = \frac{S}{s-(a+2d)};$$

cioè i raggi dei cerchi ex-inscritti, saranno in progressione armonica.

Infatti i loro inversi

$$\frac{s-a}{S}; \quad \frac{s-(a+d)}{S}; \quad \frac{s-(a+2d)}{S};$$

sono in progressione aritmetica di ragione

$$-\frac{d}{S}.$$

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

U. SCARPIS — *Teoria dei numeri.* — Manuali Hoepli. Serie scientifica 225.

È un lavoro chiaro, esatto, conciso, e tanto completo quanto lo permette la brevità dello spazio. Si compone di sette capitoli. Nel primo l'A. tratta dei multipli e dei divisori: è notevole per semplicità il metodo col quale ricava le proprietà del minimo comune multiplo; ma forse era meglio evitare le considerazioni geometriche. Si diffonde sulla funzione φ di Gauss, ed E di Legendre, e chiude con una proposizione del chiarissimo prof. Cesàro.

Apre il Capitolo II coll'esporre le proprietà generali delle congruenze. Dati i teoremi della somma, della moltiplicazione e della divisione, viene a dimostrare il teorema di Fermat generalizzato, e poi quello di Wilson. Risolve la congruenza di 1° grado ad una incognita, e il sistema di due congruenze simultanee rispetto a moduli primi fra loro.

Nel IV e nel V Capitolo tratta rispettivamente delle congruenze binomie e dei residui quadratici. A proposito delle prime, si vede che l'A. non ha dimenticato i lavori recenti, come un teorema del Frattini, pubblicato in questo Periodico (anno VII, fasc. III). Ho notato chiarezza e precisione, e numerosi esempi, scelti opportunamente

Qui termina la parte propriamente aritmetica del lavoro. Le applicazioni, che riguardano le equazioni binomie (Cap. VI) e la divisione del cerchio in parti eguali (Cap. VII), sono state ben scelte.

La parte storica è piuttosto difettosa. Intorno alla nota a pag. 114 osservo che il Dott. Zignago non è riuscito a darci una dimostrazione elementare del teorema di Dirichlet; perchè nella Proposizione IV del suo lavoro (Annali di matematica, 1893) invoca, (e accenna appena come si dimostra) la proprietà: Se $K \leq a$, allora

$$\underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}}\ \underset{z=1}{\overset{z=K}{M}} MD\,(b+ay,\,z) = \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}}\ \underset{z=0}{\overset{z=K-1}{M}} MD\,(b+ay,\,z)$$

oppure

$$= \underset{y=0}{\overset{y=a-1}{m}} MD\,(b+ay,\,K)\,;$$

proprietà che non è elementare e non è ridotta ad altra elementare.

Ma in complesso il lavoro dello Scarpis è eccellente e mi auguro che in altro volume l'autore tratti quelle parti che per mancanza di spazio ha dovuto ommettere.

Genova, 5 dicembre 1896.

Professor AUGUSTO CHIARI. — *Elementi di geometria ad uso delle scuole tecniche e normali, con una raccolta di oltre trecento esercizi e problemi, e un sunto di storia della geometria.* — Lapi, Città di Castello, 1896. — Prezzo L. 1,60.

La prefazione dell'autore, con qualche mia annotazione, daranno un'idea del libro. Riporto dunque la prefazione:

« Questo volumetto, destinato agli studenti delle scuole tecniche e normali, ho compilato nella massima parte in conformità dei programmi vigenti.

In alcuni punti ho stimato opportuno sorpassare questi limiti, perchè, se molte notizie non hanno interesse per i giovani che frequentano queste scuole, altre è bene non restino sconosciute. (*) Così, prima d'intraprendere la risoluzione di quei problemi che si trovano d'ordinario in ogni trattato di Geometria, ho creduto utile accennare ai principali metodi di risoluzione, affinchè

(*) O non piuttosto il segno fu oltrepassato perchè si volle fare il libro su due differenti programmi, quello per le scuole tecniche e quello per le normali? Del resto, se è bene che certe notizie non siano ignorate, non è giusto che per far posto ad esse si mettano allo strettoio le nozioni fondamentali, come i concetti di rapporto e proporzione tra grandezze, ai quali l'autore a pag. 77 non dedica più di una dozzina di righe.

il giovane che si accinge a risolvere simili questioni, non proceda a caso, ma abbia una norma da seguire. Del pari, pensando quanto sia deplorevole che gli studenti delle scuole medie ignorino perfino che esiste una storia della Geometria, ho stimato utile aggiungere in appendice un breve sunto di storia di questa parte delle Matematiche, il quale da un lato servirà all' introduzione nell' insegnamento di quell' elemento storico, anche da eminenti scienziati italiani raccomandato; dall'altro contribuirà a render meno arido lo studio di questa disciplina.

Avendo il volumetto carattere elementare, molte verità ho ommesse; di altre, specialmente nella seconda parte, ho dato l'enunciato soltanto, lasciando alla cura dell'insegnante di dimostrare quelle che dalla sua scolaresca possono essere *intese*. (*) Del concetto di *limite*, che anche in un primo studio potrebbe aver posto, non ho tenuto parola; a ciò mi ha spinto la considerazione che il poco tempo assegnato alle lezioni di Geometria, ne renderebbe disagevole l'esposizione.

Nell'impiegare i più comuni simboli della Geometria, ho distinto quello di uguaglianza da quello d' equivalenza, sembrandomi giusto indicare con segni diversi, questi due differenti concetti. (**) In alcuni pochi teoremi e nella raccolta d'esercizi e problemi, ho trascurato di disegnar le figure, le quali, con maggior profitto, potranno esser fatte dallo studente.

Con tali criteri e con il desiderio vivissimo di poter riuscire in qualche modo utile ai giovani che s'iniziano negli studi geometrici, ho compilato questo tenue lavoro. (***)

(*) Disgraziatamente le cose che si lasciano alla cura dell' insegnante sono d' ordinario le più ostiche e difficili!

(**) A proposito dell' equivalenza, l'autore pone a base la definizione di Duhamel, e subito dopo prosegue: « Poichè le figure equivalenti hanno la stessa *estensione di superficie*, ecc. ». Ma allora a che serve la definizione di Duhamel? Non era meglio, tanto più trattandosi di un libriccino per le scuole tecniche, chiamare equivalenti due figure eguali in superficie, salvo a far poi menzione della decomposizione in parti congruenti, come d'un criterio per verificare, *in qualche caso*, la detta eguaglianza?

(***) Ed io spero che lo stesso vivissimo desiderio indurrà l'autore a migliorarlo, non dirò per la sostanza, che in generale è buona, ma per un migliore adattamento al fine.

G. Frattini.

ANNUNZIO BIBLIOGRAFICO

Prof. AURELIO LUGLI. — *Raccolta di temi di matematica redatti dalla Giunta centrale esaminatrice per la licenza d'Istituto tecnico nella sezione fisico-matematica, con soluzioni e risposte.* — Prezzo L. 1,25.

Di questa raccolta, utilissima a professori e studenti, non rimangono che un centinaio di copie. Sono vendibili in Roma presso la Signora Pia Lugli, vedova del compianto professore, Via Agostino Depretis, n. 86.

ANNO I. 1896-97. NUM. 2.

Bollettino dell'Associazione MATHESIS

FRA GLI

INSEGNANTI DI MATEMATICA DELLE SCUOLE MEDIE

SEDE DELL'ASSOCIAZIONE PER IL BIENNIO 1896-97-98

TORINO

Presso il Presidente del Comitato: Professor RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino, 1*

ADUNANZA STRAORDINARIA PARZIALE

dei Soci di MATHESIS

Si avverte che si terrà in Torino nelle vacanze carnevalizie del 1897 una riunione di Soci di *Mathesis*, per discutere verbalmente le questioni proposte nel N. 1 del Bollettino, e qualunque altra, adatta alla natura della Società, piaccia ai convenuti di trattare. Un invito fu diramato in via d'esperimento ai Soci più prossimi a Torino, i quali aderirono in numero soddisfacente; ma l'invito attuale è esteso a tutti i Soci ed a qualunque altro Professore che voglia prender parte ai lavori di *Mathesis*.

L'insegnante, socio o non socio, che aderisca e voglia intervenire a questa riunione, ne mandi avviso al Prof. RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino 1, Torino*, perchè gli si possa comunicare a suo tempo l'epoca precisa ed il luogo della riunione.

Sarebbe desiderabile che di siffatte riunioni se ne tenessero anche altre nei vari centri d'Italia, rendendo così possibile a tutti i Soci di *Mathesis* di parteciparvi o qua o là. Il Bollettino accoglierebbe con piacere le relazioni di queste riunioni, e le decisioni prese.

È lasciata naturalmente piena libertà ai Soci nella convocazione di queste adunanze; ma è desiderabile che chi vuol farsene promotore ne informi prima il Comitato Direttivo, perchè non accadano convocazioni di adunanze contemporanee in città troppo vicine, fatte da due Soci all'insaputa uno dell'altro.

Essendo interesse di tutti il far noto il risultato di queste adunanze, si domanda che ne sia trasmesso al Comitato il verbale, o una parziale relazione su quello che ha rapporti con gli scopi di *Mathesis*.

Risposte alle questioni comparse nel Bollettino N. 1.

Fin qui un numero eccessivamente scarso di Soci ha inviato risposte alle questioni inserite nel N. 1 del *Bollettino*. Si pregano caldamente i Soci di volere studiare essi gli argomenti in quello indicati e di invitare a studiarli anche i non soci, mandando poi le conclusioni al Comitato che deve compilarne e pubblicarne le relazioni riassuntive.

A chi manda risposte a più di una questione, si chiede in cortesia che voglia scriverlo su altrettanti fogli staccati, da potersi così esaminare separatamente.

Ai Soci.

Il Comitato sarebbe lieto se i Soci, prendendo a cuore l'incremento della nostra associazione, gli inviassero essi stessi proposte atte a dare a *Mathesis* vita rigogliosa, efficace ed utile alla scuola e alla scienza. Il dar notizie di altre Società del genere della nostra, il suggerire mezzi di esplicare l'azione di essa, il mandare questioni da studiare od articoli opportuni, sono altrettanti modi di aiutare l'opera del Comitato e di contribuire allo scopo per cui *Mathesis* esiste; i nostri ottimi colleghi vogliano usarne.

In particolare il Comitato chiede ai Soci che contribuiscano a procurargli programmi d'insegnamento della Matematica in scuole secondarie estere ed a segnalargli articoli o libri di qualche importanza per gli studi e per l'insegnamento.

Il Periodico di matematica del Prof. Lugli.

Si annunzia ai Soci che quest'ottimo Periodico, del quale *Mathesis* immediatamente dopo la morte del compianto suo Direttore, si era assunta la continuazione pel presente anno 1896, affine di impedire che finisse, è passato col 1° gennaio 1897 in proprietà del nuovo Direttore Prof GIULIO LAZZERI, al quale *Mathesis* lo ha regolarmente ceduto.

Secondo gli accordi presi, rimarranno invariate l'indole del giornale e le condizioni di abbonamento (L. 6 annue ; ma sarà accordata una riduzione ai Soci di *Mathesis*, nei seguenti termini :

Il prezzo cumulativo della quota annuale di Socio di *Mathesis* per un anno sociale, e di abbonamento al Periodico per l'anno civile, che comincia al 1° gennaio di detto anno sociale, è fissato in L. 10 (oltre, per il primo anno, la tassa d'ingresso di L. 4, art. X) da pagarsi entro il 31 gennaio, al Segretario-Economo dell'Associazione, Prof. FRANCESCO GIUDICE, *Corso Ugo Bassi 40, Genova;* i Soci già in regola col pagamento della loro quota di un anno sociale hanno l'abbonamento ridotto pagando L. 4 alle stesse condizioni.

Trascorso il 31 gennaio, gli abbonamenti non si riceveranno che a prezzo normale (L. 6) e presso il Direttore del Periodico Prof. GIULIO LAZZERI, della R. Accademia Navale, *Via del Porticciolo 2, Livorno*. Per l'anno in corso, il detto termine è prorogato eccezionalmente fino al 15 febbraio.

Per gli arretrati bisogna invece rivolgersi al Segretario-Economo di *Mathesis*.

Nuovi Soci.

BARTOLI PAOLO, Liceo pareggiato di Molfetta. — BUFFA PIETRO, R. Scuola tecnica di Potenza. — Comm. CALDARERA FRANCESCO, Prof. a riposo del R. Istituto tecnico, ed ordinario di meccanica razionale in servizio nella R. Università di Palermo. — CAMELETTI LUIGI, R. Scuola tecnica di Pergola. — CHELOTTI ABIGAILLE, R. Scuola normale femminile di Livorno. — GRASSI FRANCESCO, professore nei Collegi militari. — SCARPIS UMBERTO, R. Liceo di Verona. — VACCARI ANDREA, R. Liceo di Spoleto.

I Soci i cui nomi furono ora pubblicati hanno pagata la tassa d'entrata di L. 4 e la quota per l'anno 1896-97 di L. 6. Questa dichiarazione fa le veci di ricevuta.

Biblioteca.

Alla biblioteca di *Mathesis* pervennero i doni seguenti:

U. Scarpis. - Teoria dei numeri: Manuale Hoepli 225; Milano 1897: L. 1,50.

B. Carrara. - La coincidenza dei due metodi d'approssimazione di Newton e Lagrange nelle radici quadrate irrazionali dei numeri interi: Torino, G. B. Paravia e C, 1889. - Saggio d'introduzione alla teoria delle quantità complesse geometricamente rappresentate: Cremona, tip. Fezzi 1895, L. 2,50.

Diego Fellini. - I poliedri regolari stellati: Forlì, G. B. Croppi, 1895; L. 1,50 (Due copie).

Augusto Chiari. - Elementi di Geometria ad uso delle scuole tecniche e normali: Città di Castello, S. Lapi tip. edit. 1896, L. 1,60.

Rodolfo Bettazzi. - Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili; Pisa, tip. T. Nistri e comp., 1884. — Dei concetti d'integrazione e di derivazione delle funzioni di più variabili; Giornale di Battaglini, XXII. — Sull'impossibilità di certe divisioni e sull'equivalenza delle equazioni: Periodico di Lugli, 1886 — I postulati e gli enti geometrici: Periodico di Lugli 1886. — Sul concetto di numero: Periodico di Lugli 1887. — Sulla derivata totale delle funzioni di due variabili reali e sull'inversione delle derivazioni: Giornale di Battaglini, XXVI. — Sopra una corrispondenza fra un gruppo di punti ed un continuo, ambedue lineari: Pisa, 1888. — Teoria delle grandezze: Opera premiata dalla R. Accademia dei Lincei: Pisa, Spoerri edit., 1890 - L. 6. — Sui sistemi di numerazione per i numeri reali: Periodico di Lugli, 1891. — Sull'insegnamento della geometria nei Licei: Periodico di Lugli, 1891. — Rivista bibliografica (Elementi di geometria di Lazzeri e Bassani): Periodico di Lugli, 1891. — Sull'infinitesimo attuale: Rivista di Matematica, 1891. — Sull'infinitesimo attuale: Rivista di Matematica, 1892. — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1892. — La definizione di proporzione ed il V libro d'Euclide: Periodico di Lugli, 1892. — Il concetto di lunghezza e la retta: Annali di Matematica, 1892. — Sulla definizione della retta: Periodico di Lugli, 1892. — Teoria dei limiti: parte VII del formulario pubblicato dalla Rivista di Matematica, 1894. — Sulla catena di un ente in un gruppo: R. Accademia delle Scienze di Torino, 1895-96. — Gruppi finiti ed infiniti di enti: R. Accademia delle Scienze di Torino, 1895-96.

F. Giudice. — Sulla determinazione delle radici reali delle equazioni a coefficienti numerici reali; un teorema sulle sostituzioni; sulle equazioni irreducibili di grado primo risolvibili per radicali; sopra la determinazione di funzioni d'una variabile, definite per mezzo d'un'equazione con due variabili, ed un'osservazione relativa alla costante che compare negli sviluppi in serie delle funzioni circolari: Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1886-87. — Lemmi per la misura della circonferenza e dell'area del circolo; alcune formule ottenibili semplicemente, che possono servire al calcolo approssimato delle funzioni circolari; sull'estrazione di radice approssimata dai numeri aritmetici: Periodico di Lugli, 1887-88. — Trigonometria rettilinea ad uso delle scuole liceali, Palermo, libreria Carlo Clausen, 1888, L. 1,50. — Una considerazione relativa alle serie a termini positivi: Costanti tra le quali trovasi quella d'Eulero: A proposito della questione 88 proposta dal prof. Cesàro: Giornale di Battaglini, 1889. — Sopra una questione di probabilità: Periodico di Lugli, 1890. — Sulle serie a termini positivi: Giornale di Battaglini, 1890.

I doni alla biblioteca di *Mathesis* si dirigono al Segretario Prof. FRANCESCO GIUDICE, Corso Ugo Bassi, 40, *Genova*.

Per divenire soci di MATHESIS ed abbonati al PERIODICO DI LUGLI, diretto dal prof. Lazzeri.

I professori di Matematica appartenenti al personale insegnante e direttivo delle scuole medie governative o pareggiate, divengono senz'altro soci trasmettendo la tassa d'entrata di L. 4 al Segretario, al quale devesi pure trasmettere la quota annua di L. 6: quelli dell'altre scuole secondarie, che desiderano farsi soci, debbono farne domanda scritta al Presidente professor RODOLFO BETTAZZI, *Corso S. Martino 1, Torino.* (V. nel Bollettino N. 1 gli art. III e X dello Statuto)

Si può divenir socio di *Mathesis* pel 1896-97 (1° Luglio 96 - 30 Giugno 97) ed abbonati al Periodico di Matematica pel 1897 mandando al segretario di *Mathesis*, prima del 31 Gennaio 97, L. 14; delle quali 4 per tassa d'entrata e 10 per quota annua di *Mathesis* ed abbonamento ridotto al Periodico. (V. in questo Bollettino « Il Periodico del Prof. Lugli »).

Premio al socio Pirondini.

Su proposta dei professori *Beltrami*, *Brioschi* e *Cerruti* (relatore) la Reale Accademia dei Lincei, nell'adunanza solenne del 7 giugno 1896, conferiva al Prof. *Geminiano Pirondini*, socio di *Mathesis*, un intero premio ministeriale di lire 1500, pe' seguenti lavori:

1. *Alcune formule relative alle linee tracciate sopra una superficie e loro applicazioni* (st).
2. *Teorema geometrico* (ms).
3. *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (st).
4. *Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio* (st).
5. *Sur une famille remarquable de courbes* (st).
6. *Due problemi geometrici* (ms).
7. *Simmetria ortogonale rispetto a una superficie di rivoluzione* (st).
8. *Quelques propriétés de l'hyperbole* (st).
9. *Sur les surfaces réglées* (st).
10. *Di alcune superficie che ammettono un sistema di linee eguali e un secondo sistema di linee eguali o simili* (st).
11. *Simmetria ortogonale rispetto a una linea qualunque* (ms).

Le nostre congratulazioni al valente collega.

Visita a S. E. il Ministro della pubblica istruzione.

Per incarico avuto nell'adunanza del Comitato direttivo, tenutasi a Firenze nell'agosto passato (v. il n. 1 del Bollettino), il prof. Frattini presentò a S. E. il Ministro della pubblica istruzione lo Statuto e gli Atti della nostra Associazione. Il Ministro accolse il prof. Frattini con grande benevolenza, e mostratosi informato dell'esistenza e degli scopi dell'Associazione, plaudì alla nobile iniziativa de' suoi membri, manifestando vivo il desiderio che l'esempio loro fosse universalmente imitato dagli insegnanti delle scuole medie. In tal modo, soggiunse il Ministro, le amministrazioni o le Commissioni preposte alla cura degli ordinamenti e dei programmi delle scuole medie troverebbero negl' insegnanti delle scuole stesse la guida più naturale e sicura per l'ufficio loro.

In quanto al ripristinamento della prova scritta di matematica negli esami di licenza liceale, il Ministro, pur riconoscendo che la matematica nei licei è ormai ridotta anch'essa a materia *decorativa*, non diede al Frattini affidamento certo; ma gli promise che nello studio della grave questione avrebbe tenuto in gran conto il voto di *Mathesis*. Aggiunse che, quantunque propenso a una nuova riduzione del programma di matematica pei licei, e soprattutto all'abolizione della trigonometria, riconosceva tuttavia la necessità di guarentire lo studio delle matematiche, entro la cerchia di quel programma che si stimerà più conveniente e proporzionato al fine. Terminò congratulandosi novamente coll'Associazione e confermandole l'alto suo compiacimento.

Comunicazione di G. Sforza.

Contributo alla questione sull' EQUIVALENZA, *proposta dal Comitato direttivo di* Mathesis.

La comunicazione sulla teoria dell' equivalenza fatta recentemente dal Prof. Giudice al Comitato direttivo di *Mathesis* ha richiamato la mia attenzione sopra un pregevole articolo del Prof. Frattini, inserito nel Periodico di Matematica del compianto Prof. Lugli (1895, pag. 153) e intitolato: *Intorno al postulato dell'equivalenza.* Ivi il Prof. Frattini, precedendo in ciò il Prof. Giudice, dimostra rigorosamente che il postulato di De Paolis sull'equivalenza è una semplice conseguenza del carattere di *grandezze finite* che hanno le superficie e i voluni ai quali si applica.

Ma, ammesso che il carattere di *grandezza infinita* sia questo, che *da essa può sottrarsi successivamente senza termine qualche sua parte di grandezza invariabile*, come può il Prof. Frattini dedurre che *ogni grandezza infinita può sempre decomporsi in parti, in modo che trascurandone una si possa ricomporre il tutto colle altre;* o in altre parole che OGNI *grandezza infinita* NON *sodisfa al postulato di De Paolis?* Per dimostrare quanto importante sarebbe dar di ciò una rigorosa dimostrazione, io proverò che, *se si sapesse dimostrare che ogni grandezza infinita* NON *sodisfa al postulato di De Paolis, si saprebbe anche dimostrare la proposizione espressa dal Postulato di Archimede relativo ai segmenti.*

Giova anzitutto osservare che vi è perfetta equivalenza fra le due proprietà di un segmento rettilineo di essere finito e di sodisfare al postulato d'Archimede. Infatti, se a è un segmento finito e b una sua parte, non potendosi (per definizione) sottrarre b da a indefinitamente, dopo un certo numero m di sottrazioni bisognerà arrestarsi; e ciò si esprime appunto dicendo che $m+1$ volta b supera a. Se invece si ammette il postulato di Archimede, ciò vorrà dire che un certo multiplo di b supera a, cioè che b non può sottrarsi da a se non un numero finito di volte. Perciò invece di dire che una certa grandezza è finita, potremo anche dire che essa sodisfa al postulato d'Archimede generalizzato.

Ciò posto, supponiamo che l'essere una grandezza infinita abbia per conseguenza che essa NON sodisfa al postulato di De Paolis; ne verrà che ogni grandezza che sodisfi al postulato di De Paolis sarà necessariamente finita (come appunto asserisce il Frattini); in particolare il segmento rettilineo, in quanto è una grandezza che sodisfa al postulato di De Paolis, è finito, cioè sodisfa al postulato di Archimede. Ma pei segmenti la proposizione nota sotto il nome di postulato di De Paolis si dimostra (De Paolis, Elem. di Geom. pag. 42, n. 56), dunque nell'ipotesi fatta, si potrebbe dimostrare la proprietà nota sotto il nome di Postulato di Archimede (Post. X del De-Paolis pag. 290).

Rimane perciò dubbio se soltanto le grandezze finite sodisfino al postulato di De Paolis, e non è indifferente, come è parso a tutta prima al Frattini, l'assumere a fondamento della teoria dell'equivalenza piuttosto il postulato di De Paolis, che quello d'Archimede generalizzato; in quanto che noi siamo certi che quest'ultimo comprende quello di De Paolis, mentre non si sa ancora se quello di De Paolis implichi quello di Archimede generalizzato.

L'utilità di assumere a fondamento il postulato di Archimede generalizzato, piuttosto che quello di De Paolis, sembra poi confermata dall'acuta osservazione del prof. Giudice, che richiede tale postulato soltanto pel solido sferico; in sostanza col solo postulato: « la sfera è un solido finito » si sostituiscono il postulato di Archimede sui segmenti e quello di De Paolis sull'equivalenza delle superficie e dei solidi; cioè tre postulati sarebbero ricavati da uno solo; progresso logico notevolissimo.

Reggio Emilia, li 31 Agosto 1896.

GIOVANNI FRATTINI — *Responsabile.*

Roma, 1897 — Tip. Elzeviriana.

RISOLUZIONE DELL' EQUAZIONE

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

A DETERMINANTE POSITIVO

IN NUMERI INTERI

In questo periodico (anno VI, fasc. 6° - anno VII, fasc. 1° e seg.) mi occupai già della risoluzione dell'equazione

$$x^2 - Dy^2 = \pm N$$

in numeri interi, e dimostrai elementarmente come le infinite soluzioni dell'equazione possano tutte dedursi da certe soluzioni *fondamentali* in numero finito, cioè da quelle soluzioni nelle quali il valore assoluto della y è inferiore a un certo limite, ivi determinato. Stabilii anche un algoritmo, (*) differente da quello della frazione continua, e ad esso preferibile per più rispetti, mediante il quale possono trovarsi speditamente le soluzioni fondamentali, e in generale tutte le soluzioni nelle quali il valore della y è inferiore a un qualsivoglia prestabilito limite. Il problema della risoluzione dell'equazione in numeri interi veniva così completamente risoluto.

Nella nota c) in fondo al lavoro accennai poi che il metodo in esso usato poteva applicarsi alla risoluzione dell'equazione

$$\text{(A)} \qquad ax^2 + bxy + cy^2 = m$$

a determinante positivo. Alludevo così alla seguente regola, dalla quale dipende il modo che, a mio credere, è il più facile e spedito per risolvere la precedente equazione in numeri interi:

Posto: $b^2 - 4ac = D$, *e della* (α, β) *la soluzione minima positiva e* (p, q) *una soluzione qualsiasi dell'equazione*

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

si trovino tutte quelle soluzioni (x_0, y_0) *dell'equazione* (A) *nelle quali il modulo o valore assoluto di* y *è inferiore al limite*

$$\sqrt{\frac{(4\alpha^2 \mp 2 - 2)\ \mathit{mod.}\ a\,m}{D}}.$$

(*) § 8, fino a 20. È la parte più importante di quel mio lavoro.