Si osservi che il lato AY dev'essere perpendicolare ad OX, e quindi che

$$Y - A = yi(O - X) \tag{3}$$

dove y è un numero reale conveniente, esso pure da determinarsi. Poichè $O - X = (O - A) - (R - A) - (X - R)$, tenendo conto di questi tre vettori già trovati, si ha: $O - X = I - (\alpha + i\beta)I - t(h + ik)I$: e quindi, sostituendo nella precedente formola (3),

$$\begin{aligned} Y &= A + yi(I - \alpha I - \beta i I - thI - tkiI) \\ &= A + y(\beta + tk)I + y(1 - \alpha - th)iI. \end{aligned} \tag{4}$$

La (2) e la (4) rappresentano entrambe Y, e quindi devono fornire per esso uguali coordinate, essendo lo stesso il punto di riferimento A; sarà dunque:

$$th + \alpha = y(\beta + tk), \qquad x + tk + \beta = y(1 - th - \alpha),$$

equazioni che ci danno x ed y in funzione di numeri dati e di t variabile. Ricavando la x si ha:

$$x = \frac{(th + \alpha)(1 - th - \alpha) - (tk + \beta)^2}{tk + \beta},$$

e questo valore di x posto nella (2) dà:

$$Y = A + (th + \alpha)I + \frac{(th + \alpha)(1 - th - \alpha)}{tk + \beta} iI. \tag{5}$$

Ponendo $A_1 = A + \alpha I$, punto noto, e sviluppando,

$$Y = A_1 + htI + \frac{-h^2t^2 + (1 - 2\alpha)ht + (\alpha - \alpha^2)}{tk + \beta} iI. \tag{6}$$

Questa relazione, facendo variare t, dà per Y un luogo di 2° ordine, che si vede facilmente essere un' iperbole, una parabola, o una retta.

Le intersezioni di tale luogo colla retta l_2 su cui deve trovarsi Y, danno le posizioni di questo vertice. Vi sono dunque in generale due e non più di due triangoli che soddisfano alle condizioni volute: eccetto se il luogo (6) è una retta che coincida con l_2, nel qual caso sono infiniti.

Osservazione. È facile vedere che il caso della parabola si ha quando la (6) assume la forma $Y = P + tI_1 + t^2 I_2$, con I_1 ed I_2 vettori non paralleli, r ed s numeri costanti, il che avviene per $k = 0$, cioè quando AO è parallela ad l_1. Il caso della retta si ha quando la (6) è del tipo $Y = Q + f(t)(rI + siI)$, con r ed s ancora costanti, per il che occorre: - 1° che il coefficiente di iI sia di 1° grado in t, e quindi sia il numeratore divisibile per il denominatore; ciò accade quando $\beta = \dfrac{(\alpha - 1)h}{k}$ nel qual caso il punto O è su l_1: — 2° o che sia $h = 0$, cioè che AO sia perpendicolare ad l_1. Ciò si ottiene con facilità anche direttamente.

106.* *Dimostrare che se* a *e* b *sono due interi qualunque primi tra loro ed* n *è pure un intero primo con* a, *le due serie*

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b,\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3,\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

(U. Scarpis).

Dimostrazione del sig. *N. Bottini*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Due numeri della prima serie divisi per n, non danno resti uguali; infatti se $ha+b$, $ka+b$, dessero resti uguali (essendo $0<h<k<n+1$), la loro differenza $(k-h)a$ sarebbe divisibile per n, e quindi, poichè a è primo con n, $k-h$ divisibile per n, il che è impossibile a motivo di $k-h<n$.

Perciò se i numeri della prima serie, divisi per n, danno rispettivamente i resti

$$r_1,\ r_2,\ r_3,\ldots\ r_n$$

dovendo essere questi minori di n e a due a due disuguali, saranno i numeri

(1)
$$0,\ 1,\ 2,\ldots\ n-1.$$

Ora poichè r_h è resto della divisione di $ha+b$ per n, se $ha+b$ ed n sono primi fra loro, sono tali anche n ed r_h e reciprocamente, perchè i divisori comuni dell'una coppia di numeri sono anche i divisori dell'altra.

Perciò rimane dimostrato che tanti numeri primi con n si trovano nella prima serie quanti se ne trovano nella serie (1) e quindi anche in quella proposta.

Il sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, ad una analoga soluzione, aggiunge la seguente osservazione. Poichè nella dimostrazione non si tien conto che a sia primo con b, la quistione proposta può enunciarsi più generalmente così: se a e b sono due interi ed a è primo con n, le due serie

$$\begin{array}{ccccc} a+b, & 2a+b, & 3a+b,\ldots, & na+b \\ 1, & 2, & 3,\ldots, & n \end{array}$$

contengono lo stesso numero di termini primi con n.

107.* *Se* n *è una potenza intera di* 2, *se cioè* $n=2^k$, *la somma delle prime* n *potenze di un numero qualsivoglia* a, *la potenza zero inclusavi, è data dal prodotto dei* k *fattori*

$$(1+a)(1+a^2)(1+a^{2^2})(1+a^{2^3})\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}}).$$

(F. P. Paternò).

Dimostrazione dei Sigg. *C. Chigiotti*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti; *G. Candido* e *D. de Blasi*, alunni del R. Liceo di Lecce; e *R. Palma*, studente nella R. Università di Napoli.

Moltiplicando membro a membro le seguenti identità:

$$\frac{1-a^2}{1-a}=1+a\,,\quad \frac{1-a^4}{1-a^2}=1+a^2\,,\ldots\ldots\frac{1-a^{2^k}}{1-a^{2^{k-1}}}=1+a^{2^{k-1}}\,,$$

e semplificando la frazione che si presenta al 1° membro, si ottiene:

$$\frac{1-a^{2^k}}{1-a}=(1+a)\,(1+a^2)\,\ldots\ldots(1+a^{2^{k-1}})\,,$$

e poichè il primo membro è anche eguale a

$$1+a+a^2+\ \ldots\ldots+a^{2^k-1}\,,$$

risulta così dimostrato il teorema (*).

108'. *Se in un quadrangolo, le cui diagonali sono perpendicolari l'una all'altra, è inscritto un quadrato coi lati paralleli a queste diagonali, il doppio del lato del quadrato è medio armonico fra le diagonali del quadrangolo.*

(A. Baldassarre).

Dimostrazione del Sig. *E. Colonna*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sieno d e d' le diagonali del quadrangolo, l il lato del quadrato iscritto; sia AB un lato del quadrangolo, e C il vertice del quadrato situato su questo lato. Da due coppie di triangoli simili nascono le proporzioni:

$$\frac{l}{d}=\frac{AC}{AB}\,,\qquad \frac{l}{d'}=\frac{CB}{AB}\,;$$

dalle quali, addizionando:

$$\frac{l}{d}+\frac{l}{d'}=\frac{AC+CB}{AB}=1\,;$$

e quindi

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d'}=\frac{2}{2\,l}\,,$$

la quale uguaglianza dimostra il teorema (**).

Nota della R. — Se il quadrangolo dato, $ABCD$, ha le diagonali uguali, il centro di AB è vertice del quadrato inscritto. Se invece le diagonali sono disuguali e si tagliano in O, ed è $DB > AC$ ed $AO < OD$, ciò che può sempre supporsi, si prenda su DB il segmento $DE = AC$, su OA il segmento $OF = OD$ e per F si conduca FG parallela a DB, a tagliare DA in G, GE sega AB nel punto che è vertice del quadrato inscritto.

Da questa semplice costruzione e dalla proprietà enunciata nella quistione, risulta una facile soluzione del problema: *Costruire il segmento medio armonico fra due segmenti dati.*

(*) Altre soluzioni pervennero dal Sig. *P. Marano*, studente a Catania e *G. Trapani*, alunno del R. Ist. nautico Catania.

(**) Soluzioni di questa quistione vennero pure inviate da *F. Columbo* (R. Istituto tec. Foggia), *E. G. Ricci* (R. Liceo Bari), *G. Russi Ruggi* (R. Istituto tec. Foggia), *G. Trapani* (R. Istituto nautico Catania).

109*. *Se dal vertice d'un triangolo si tirano alla base le due rette formanti con essa angoli uguali a quello al vertice, si hanno due triangoli simili fra loro e al dato: un poligono costruitò sulla base sta alla somma dei poligoni simili e similmente descritti sugli altri due lati, come la base sta alla somma dei due lati dei due nuovi triangoli, che giacciono su di essa* (*).

(I. AMALDI).

Soluzioni analoghe da *G. Facciolli*, alunno del R. Istituto tecnico di Chieti; *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce; *V. Columbo* ed *E. G. Ricci*, alunni del R. Liceo di Bari; *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Sia il triangolo ABC: si costruisca in A l'angolo BAA_1 eguale a C, dalla stessa banda del triangolo rispetto alla retta AB; AA_1 incontrerà la BC nella direzione BC in un punto A_1; i due triangoli BAA_1, BCA sono equiangoli, quindi l'angolo AA_1B è eguale all'angolo BAC, ossia AA_1 è una delle rette delle quali parla il quesito. Dalla similitudine dei triangoli si ha:

$$BC : BA = BA : BA_1. \qquad (1)$$

Se con modo analogo si costruisce la seconda retta AA_2, la quale incontri in A_2 la BC, si conchiude che i triangoli CAA_2, CBA sono simili e

$$BC : AC = AC : A_2C. \qquad (2)$$

Sieno P, Q, R i poligoni simili costruiti su BC, BA, AC presi come lati omologhi.

Ora, poichè un poligono sta a un poligono simile come un lato del primo sta alla terza proporzionale dopo quel lato e il suo omologo, da (1) e (2) deducesi

$$P : Q = BC : BA_1 \quad , \quad P : R = BC : A_2C$$

o anche

$$\frac{Q}{P} = \frac{BA_1}{BC} \quad , \quad \frac{R}{P} = \frac{A_2C}{BC},$$

dalle quali addizionando

$$\frac{Q+R}{P} = \frac{BA_1 + A_2C}{BC},$$

che dimostra il teorema (**).

Sono pervenute inoltre le soluzioni seguenti: quistione **111**. dal Sig. *S. Catania*; **118**. *F. Palatini*; **120***. *L. Perrotti*; **121***. *F. Slerca*; **124***. *L. Perrotti*; **125***. *G. Onesti, A. Perrucci, F. Slerca*; **126**. *G. Santacroce*; **127**. *S. Catania, D...., F. Mariantoni, F. Palatini, G. Santacroce*; **128***. *G. Candido, V. Co-*

(*) Questa proposizione può considerarsi come una generalizzazione del teorema di Pitagora. Già una generalizzazione del teorema stesso trovasi in PAPPO, nel libro IV delle sue *Collezioni matematiche*. Questo teorema di Pappo viene riportato anche dal COMMANDINO nel suo *Euclide* in una nota alla prop. XXXI del VI libro. Vedi a questo proposito gli *Elementi di matematica* del BALTZER. Plan. § 9,7. (I. AMALDI)

(**) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. *A. Baldassarre*, studente nella R. Università di Napoli.

lumbo, E. de Vito, L. Perrotti, F. Restucci, E. G. Ricci, G. Russi Ruggi, G. Trapani ; **129***. G. Candido, E. de Vito, G. F. Farruggio, L. Perrotti, E. G. Ricci, G. Trapani;* **130***. E. de Vito;* **131***. G. Candido, V. Columbo, G. F. Farruggio, D. Pacilli, L. Perrotti, E. G. Ricci, G. Trapani* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei fascicoli venturi.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

132. Risolvere l'equazione

$$x^7 - 7(x-1)^2 \,.\, x \,.\, (x+1)^2 = a.$$

F. Giudice.

133. Se il triangolo ABC ruota attorno ad un punto K del suo piano ed è $A'B'C'$ una nuova sua posizione, e se inoltre α, β, γ sono i punti d'incontro rispettivamente di BC con $B'C'$, di CA con $C'A'$ e di AB con $A'B'$, si ha che:

1° se K è il punto di Lemoine (o punto d'incontro delle simediane) del triangolo ABC, è anche il baricentro del triangolo $\alpha\beta\gamma$;

2° se K è un punto di Brocard del triangolo ABC, è pure un punto di Brocard del triangolo $\alpha\beta\gamma$, il quale è simile ad ABC.

G. Riboni.

134*. Eliminare u e v dalle tre equazioni

$$\frac{z\sqrt{2}}{1-z^4} = \frac{1}{u}\sqrt{1-\sqrt{1-u^4}}$$

$$\frac{u\sqrt{2}}{1-u^4} = \frac{1}{v}\sqrt{1-\sqrt{1-v^4}}$$

$$v^2 + z^2 + v^2 z^2 = 1.$$

D. Besso.

135*. Se in un triangolo rettangolo si descrive un cerchio che sia tangente all'ipotenusa e sottenda un cateto, il triangolo che ha per vertice un punto qualunque del cerchio e per base il cateto sotteso, è equivalente al triangolo che ha per vertici le proiezioni del medesimo punto sui tre lati del triangolo rettangolo (**).

P. Morino.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) Vedi a proposito di questa questione il tema n. 5 a pag. 137 del *Periodico*, An. VI, 1891.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

G. Z. REGGIO. — *Complementi di Geometria* proposti come libro di testo pel secondo biennio degli Istituti tecnici e come avviamento ai corsi superiori ai giovani licenziandi dei Licei e degli Istituti. — Treviso, L. Zoppelli, 1891. L. 3.

Da molto tempo si sentiva il bisogno di avere un libro come questo, che raccogliesse cioè da molti libri le varie teorie complementari di geometria prescritte dai programmi dei nostri Istituti tecnici (2° biennio); e perciò quando l' A. promise questa pubblicazione, tutti l'attesero con vivo interesse.

E innanzi tutto osservo che la compilazione di un tal libro presenta serie difficoltà, sia per svolgere i programmi vigenti senza invadere troppo il campo dell' insegnamento universitario, sia per dare una certa unità di metodo a un libro che tratta così disparati argomenti. Con tutto ciò il ch°. A. ha saputo svolgere con giusta misura e abilmente condurre il lavoro, allargando talvolta opportunamente i limiti imposti dai programmi. Per es. tutto il libro 1° « Relazioni segmentarie » tratta di argomenti estranei ai programmi, ma che compendiano nozioni elementari assai utili come introduzione allo studio della geometria projettiva che i giovani dovranno fare all'Università. Vi trovo infatti il « Principio dei segni » relativi ai segmenti di una stessa retta, e in seguito i teoremi di Menelao, di Ceva e quello di Desargues sui triangoli prospettivi, non che il concetto di forma armonica, il quale è esposto nel § 3 « Rapporto armonico »; in questo stesso § trovo anche un cenno del rapporto anarmonico di 4 punti qualunque di una retta, cenno che poteva essere forse sviluppato maggiormente, visto che l'A. ha ricavato la dimostrazione che qualunque projezione di una forma armonica è una forma armonica, dal carattere projettivo del rapporto anarmonico. Il § 4 « Trasversali nel cerchio – Asse radicale » quantunque non abbia nesso coi §§ precedenti, è opportuno; anzi sarebbe stato desiderabile avesse avuto più ampio sviluppo mettendo in evidenza i fasci e le reti di cerchi. Perchè poi l'A. a proposito di relazioni segmentarie non ha dato anche il fecondo teorema di Stewart? Noto però con piacere che i molti esercizi relativi a questo libro suppliscono in gran parte alle lacune che vi si possono trovare.

Il libro 2° « Figure eguali, simmetriche, simili, prospettive e inverse » quanto agli argomenti risponde ampiamente ai programmi, i quali non richiederebbero lo studio della prospettività e dell' inversione; però non so comprendere perchè nella teoria dell'eguaglianza delle figure piane l'A. abbia considerato le figure inversamente eguali soltanto nel caso della simmetria rispetto ad una retta. Mi spiego invece perchè l'A. abbia dovuto accennare appena all'eguaglianza delle figure nello spazio, osservando che questa teoria richiede quella dell'eguaglianza delle figure sferiche, la quale, secondo il piano dell'opera, non poteva trovar posto che nel libro 4°. La similitudine nel piano (specialmente la diretta e il suo caso particolare l'omotetia) è trattata abbastanza diffusamente e con belle applicazioni; mentre, per la solita ragione, la similitudine nello spazio è limitata al caso dell'omotetia. Il § 5 « Figure prospettive » è una preparazione alla teoria delle coniche e alla geometria descrittiva. E a proposito della geometria descrittiva noto che l'A. non ha creduto di svolgere le poche nozioni richieste dai programmi; il che è da deplorarsi, anche perchè, a parer mio, manca un trattatello opportuno su questa materia, essendo ormai i Manuali Hoepli dell'Aschieri e i « Primi Elementi di Geometria projettiva e descrittiva » del Murer non conformi agli ultimi programmi. Ritornando al libro 2°, debbo lodare l'A. per aver trattato delle « Figure inverse » tanto utili nella risoluzione di molti ed importanti problemi.

Il libro 3° « Descrizione di coniche » mi sembra nella sua brevità pienamente rispondente alle poche esigenze dei programmi: i due ultimi §§ di questo libro « Coniche simili » e « Curvatura di una linea piana » sono forse superflui.

Il libro 4° « Figure sferiche » svolge il comma 2° del programma di geometria della IV classe; vi è di superfluo il § 10 « Concetto di curvatura di una linea sferica » e forse fuori posto il § 11 « Piano radicale ».

L'A. non ha creduto di svolgere i comma 3° (aree e volumi di figure sferiche) e 4° (poliedri) del programma di geometria della IV classe, forse perchè si trovano sviluppati negli ordinari trattati di geometria elementare.

Il volume termina con una raccolta di 56 esercizi, che sono bellissimi ed un necessario complemento alle teorie trattate; però avrei desiderato che questi fossero stati distribuiti per libri, onde facilitare all'insegnante la loro scelta appropriata alla materia svolta. Se gli esercizi sulle coniche, in numero di due, potranno parere scarsi, io non sarei per farne appunto all'A., perchè l'argomento è di secondaria importanza negli Istituti tecnici, e la stessa trattazione elementare limita grandemente le quistioni che si possono proporre su questo soggetto.

In previsione di una 2ª edizione di questi bei *Complementi di Geometria*, credo far cosa grata al ch°. A. richiamando la sua attenzione sopra alcune lievi dimenticanze incorse nell'enunciato di qualche esercizio. Per es. nell'esercizio 8 non è detto espressamente ciò che s'intende per polo e polare rispetto ad un cerchio; e nell'esercizio 16 non è detto che il punto m deve stare sulla retta dei segmenti dati, ciò che è necessario per la validità del teorema (*).

(*) L'esercizio cui accenno è il seguente: « Quando sono dati su una retta tre segmenti aa', bb', cc' e i loro punti di mezzo, che rispettivamente indicheremo con α, β, γ, indicando con m un punto si avrà la relazione

$$ma.ma'.\beta\gamma + mb.mb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\alpha\beta = \text{cost., ecc.»} \qquad (1)$$

Ora questa relazione è valida se m è sulla retta dei segmenti, tenuto conto beninteso dei segni di ma, ma' ecc.. Se m fosse qualunque, la relazione da sostituirsi alla (1), e di cui la (1) è un caso particolare, sarebbe

$$ma.ma'.\cos ama'.\beta\gamma + mb.mb'.\cos bmb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\cos cmc'.\alpha\beta = \text{cost.}, \qquad (2)$$

che si ricava facilmente dal teorema di Stewart applicato ai punti α, β, γ, m e dalle relazioni $\overline{m\alpha}^2 = \frac{\overline{aa'}^2}{4} + ma.ma'.\cos ama'$ e simili.

Se le (1) e (2) potessero coesistere per qualunque posizione di m, si dovrebbe avere anche $ma.ma'.\text{sen}^2\frac{1}{2}ama'.\beta\gamma + mb.mb'.\text{sen}^2\frac{1}{2}bmb'.\gamma\alpha + mc.mc'.\text{sen}^2\frac{1}{2}cmc'.\alpha\beta = \text{cost.}$: ma facendo $b \equiv b'$, $c \equiv c'$, si avrebbe

$$ma.ma'.\text{sen}^2\frac{1}{2}ama'.\beta\gamma = \text{cost.};$$

relazione manifestamente assurda, giacchè per $ama' = 0$, si trova $\text{cost.} = 0$, ciò che non può essere per ama' diverso da 0. Dunque la (1) non sussiste per una posizione arbitraria di m nello spazio.

Credo che gli Egregi Professori dei nostri Istituti tecnici, adottando questo libro come testo, troveranno molto agevolato il loro compito.

G. Rozzolino.

Dott. UMBERTO SCARPIS. — *Il problema della divisione della circonferenza esposto elementarmente.* — Savona, Tip. Bertolotto, 1891.

In questo lavoro il Dott. Scarpis si è proposto di svolgere in modo elementare e di rendere quindi accessibile alle menti dei giovani studiosi il problema della divisione della circonferenza in parti eguali, problema che forma uno dei capitoli più interessanti ed originali delle *Disquisitiones Arithmeticae* di Gauss e che è sviluppato ampiamente anche dal Bachmann nella sua opera *Die Lehre von der Kreistheilung.*

Lodevole invero è lo scopo propostosi dall'autore tanto più se si riflette che un tal problema va annoverato fra i più interessanti nella storia della matematica, come uno di quelli che misero maggiormente in luce la potenza dell'analisi nello studio di questioni geometriche.

Se l'autore sia completamente riuscito nel suo intento, non crederei di poterlo con sicurezza affermare, tanto più che il lavoro contiene frequenti errori di stampa e risente alquanto i difetti di una frettolosa compilazione; certo però è meritevole di elogio e conforme alle intenzioni sue, quella prima parte del lavoro, in cui si prepara il materiale per la risoluzione dell'equazione binomia $x^p = 1$, essendo p un numero primo.

Il lavoro si compone di quattro capitoli esposti in 72 pagine, e di questi sono particolarmente notevoli i primi due e parte del 3°; inquantochè i risultati contenuti in essi, benchè noti quasi tutti, sono spesso ottenuti con metodo originale.

Nel primo capitolo, stabilite le proprietà delle somme di potenze e dei prodotti ad r ad r dei numeri

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots . p - 1$$

dove p denota sempre un numero primo, l'autore arriva all' importante conclusione che il più piccolo esponente n pel quale le potenze n^{me} dei numeri (1) sono congrue all'unità (mod. p) è precisamente $p - 1$. I teoremi di Wilson e quello di Fermat sono dedotti come casi particolari di tali somme e prodotti.

Nel secondo capitolo – Congruenze binomie – l'autore fondandosi sulle somme di potenze studiate nel capitolo precedente, dimostra con metodo semplice ed ingegnoso che la congruenza $x^n \equiv 1$ (mod. p) ha δ radici incongrue essendo δ il *M. C. D.* di n e $p - 1$, e che i differenti residui delle potenze 1^n, 2^n, 3^n ..... $(p - 1)^n$, divise per p, sono in numero di $\frac{p-1}{\delta}$ e costituiscono le radici della congruenza $x^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1$ (mod. p). A questi residui estende le proprietà delle somme di potenze e dei prodotti ad r ad r già stabilite per i numeri della serie (1).

È ancor degna di nota in questo capitolo la forma della funzione $\varphi(n)$ di Gauss, stabilita coll'aiuto delle radici primitive della congruenza $x^n \equiv 1$ (mod. p); limitata dapprima al caso di n divisore di $p - 1$ e poi estesa nel capitolo successivo ad un intero n qualunque.

Nel capitolo terzo – Equazioni binomie – l'autore studia le proprietà dei numeri complessi z_k ($k = 1, 2, 3, \ldots v$) definiti dall'eguaglianza

$$z_k = \cos k \frac{2\pi}{v} + i \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{v},$$

e, stabilite anche per essi proprietà analoghe a quelle trovate per i residui di potenze, dimostra che l'equazione $z^v = 1$, qualunque sia il suo esponente, ammette sempre v e v sole radici rappresentate dai numeri complessi z_k.

È notevole in questo capitolo il perfetto parallelismo stabilito fra la teoria delle congruenze binomie e quella delle equazioni binomie sia riguardo al modo di risoluzione, come al numero delle loro radici ed in particolare a quello delle radici primitive.

Il capitolo secondo e la prima metà del terzo costituiscono il pregio principale del lavoro; in essi si scorge la cura dell'autore di arrivare con metodi semplici a risultati importanti; le dimostrazioni sono rigorose.

Nella seconda metà del capitolo terzo l'autore espone il metodo di Gauss per la risoluzione dell'equazione binomia $x^p = 1$; nel riassunto, forse troppo conciso, egli segue fedelmente alcuni capitoli dell'opera citata del Bachmann, e lo dichiara esplicitamente in una nota; credo quindi, tanto per il metodo seguito, quanto per le applicazioni ad alcuni casi particolari della divisione del cerchio in parti eguali (per es. in 17 parti), che formano l'oggetto dell'ultimo capitolo, di potermi dispensare dai commenti, essendo l'opera del Bachmann troppo nota agli studiosi di questo argomento.

Io mi auguro che il professore Scarpis, continuando i suoi studii su questo interessante soggetto, sappia apportare anche nella risoluzione dell'equazione $x^p = 1$, quella semplicità, di cui ha dato prova nei primi capitoli del suo lavoro.

F. Panizza.

GIOVANNI GARBIERI. *Trattato di aritmetica razionale*, 2ª edizione. — Padova, tip. Sacchetto, 1891. Prezzo: L. 2.

Il libro del prof. Garbieri, è senza dubbio uno dei migliori del genere pubblicati in Italia negli ultimi tempi. È diviso in due parti; nella prima è svolta la teoria dei numeri interi, nella seconda quella dei numeri frazionari.

Notevolissimo il primo capitolo della prima parte, nel quale, con molta chiarezza, con precisione e con rigore l'A. dà ed estende il concetto di numero, che è considerato dapprima come la esatta espressione della quantità delle cose di una collezione (e l'A. persiste a chiamarlo *numero concreto*), poi come *ente ideale (numero astratto)*. In seguito, considerando il numero come risultamento della misura di una grandezza (la quale è definita così: *tutto ciò che si può misurare*), l'A. passa agevolmente dal concetto di numero intero a quello di numero frazionario; ed infine, osservando giustamente che in pratica non si presenta altro concetto di numero all'infuori di quello acquistato con la operazione naturale del contare, cioè di numero intero e frazionario, perviene al concetto puramente teoretico di numero irrazionale.

Chiude il capitolo affermando che *il calcolo aritmetico comprende quattro* *operazioni fondamentali, due di composizione,* ADDIZIONE *e* MOLTIPLICAZIONE, *e due di scomposizione,* SOTTRAZIONE *e* DIVISIONE; non si comprende bene adunque perchè nello svolgere la teoria e le proprietà delle quattro operazioni non abbia seguito l'ordine col quale ce le ha presentate, o non abbia fatto almeno cenno della corrispondenza di quelle proprietà.

Nella addizione molto logicamente ed opportunamente fa precedere la definizione di addizione da quella di somma; perchè non ha fatto analoga cosa per le altre operazioni?

Seguendo il metodo sintetico, enuncia e non dimostra la proprietà commutativa e quella associativa della somma (che impropriamente dice proprietà della addizione). Nella sottrazione ammette come *assioma* il teorema: *se due numeri sono decomposti in parti tali che quelle del maggiore non sieno inferiori alle corrispondenti del minore, la differenza dei due numeri potrà ottenersi sommando le differenze delle parti corrispondenti;* poi l'altro: *la differenza di due numeri non cambia aumentando l' uno e l'altro egualmente,* asserendo, forse troppo arbitrariamente, che *anche questo principio appartiene a quelli che si renderebbero meno chiari cercando di spiegarli.* Considera i teoremi relativi alla sottrazione di somme come *intuitivi* e finalmente dà la dimostrazione del teorema relativo alla sottrazione di una differenza da un numero.

L'A. dimostra la proprietà commutativa del prodotto servendosi della proprietà distributiva, e, dopo alcune nozioni sulle potenze, introduce l'uso delle lettere.

Nella divisione afferma, e non dimostra, che il resto è minore del divisore e che se è $a = b \times q + r$ e $r < b$, q ed r sono rispettivamente quoto e resto della divisione di a per b. La regola di questa operazione non è abbastanza rigorosamente spiegata.

Il capitolo terzo contiene la teoria dei divisori e multipli, esposta con chiarezza, ordine e parsimonia di dimostrazioni, tutte semplici e brevi, e talvolta anche originali, come quella relativa al modo di ottenere speditamente il resto della divisione, per un numero qualunque, di un prodotto di due o più fattori.

Nel § primo della seconda parte dà molto opportunamente la definizione *simbolica* di frazione e ne mostra la coincidenza colla definizione data nella prima parte mediante la considerazione delle grandezze. Questo primo paragrafo, dato dall'A. come saggio del metodo analitico, è una novità nelle aritmetiche elementari. Rappresentando con $\frac{1}{b} \cdot a$ la frazione che ha per numeratore a e per denominatore b, l'A. deduce con facilità, con rigore e con evidenza conseguenze importanti; come la estensione del concetto di somma e differenza, di multiplo e summultiplo ai numeri frazionari; e non ommette di far vedere come $\frac{1}{b} \cdot a$ rappresenti il quoto della divisione di a per b.

La teoria della trasformazione delle frazioni e quella dei numeri periodici sono seguite da brevi nozioni sui limiti, che avrebbero trovato più acconciamente il loro posto nella appendice. L'A. dimostra, e fa cosa ottima, l'eguaglianza $7.\overline{42} = 7 + 0.\overline{42}$, poi estende ai numeri periodici il concetto di somma, differenza, prodotto e quoto, e infine prova che ciascun numero è il limite di un numero decimale periodico.

Le regole per l'estrazione di radice dai quadrati e dai cubi sono dimostrate in modo così elementare e chiaro, e insieme rigoroso, da rendere più vivo il desiderio che questa importante parte della aritmetica sia di nuovo introdotta nei programmi pei ginnasi.

Il libro si chiude con una appendice di cinque §§ relativi ai numeri irrazionali, dei quali è appena fatto un cenno, ai numeri proporzionali (?), alle grandezze proporzionali (dove l'A. non considera che rapporti interi o frazionari), alla legge delle inverse e ai vari sistemi di numerazione; colla legge delle inverse dimostra anche il seguente principio: *Si facciano su un soggetto tutte le ipotesi possibili che conducano ad altrettante proprietà distinte fra loro e dalle ipotesi; si potranno così formare altrettanti teoremi. Tutti questi teoremi potranno essere invertiti.*

Le diverse teorie sono seguite da numerosi esercizi, quasi sempre buoni, se non nuovi.

Qua e là possono scoprirsi facilmente delle mende di sostanza, di forma e di distribuzione della materia, che per la piccola loro importanza non mette conto citare; non pertanto il libro del Garbieri è buono, per ordine, per chiarezza, per precisione e per la semplicità delle dimostrazioni, e diverrà ottimo se l'A. avrà la pazienza di riempire qualche lacuna, di curare meglio lo sviluppo di alcune dimostrazioni, come ad es. quella del primo teorema fondamentale per la ricerca del m. c. d. di due numeri, quella relativa alla ricerca del m. c. m. di due numeri mediante il loro m. c. d., e, per chiudere come si è principiato, il libro stesso, va considerato, a mio giudizio, come una delle migliori aritmetiche ultimamente apparse.

Roma, 20 febbraio 1892.

A. Massa.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 1. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. Sixième année. N. 4, 5, 6, 7. A. Colin et C., éditeurs. — Paris, 1892.

El Progreso matemático, periódico de matemáticas puras y applicadas. Director D. Zoel G. de Galdeano. Año II. N. 13, 14, 15, 16; Enero, Febrero, Marzo, Avril de 1892. — Zaragoza.

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. Battaglini. Vol. XXIX. Novembre-Dicembre 1891. Vol. XXX. Gennaio-Febbraio 1892. — Napoli, B. Pellerano.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. de Longchamps. 4ᵉ Série, XVI année. N. 1, 2, 3, 4; Janvier Février, Mars, Avril 1892. — Paris, Librairie Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert. 16ᵉ année. Nombres 7-15. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1892.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. Mansion et J. Neuberg. Deuxième série. Tome II. Janvier, Février, Mars, Avril 1892. — Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo VI, Fasc. I e II. Gennaio-Febbraio e Marzo-Aprile 1892.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società reale di Napoli). Serie 2ª. Vol. V, Fasc. 9° a 12°, Settembre a Dicembre 1891; Vol. VI, Fasc. 1° a 3°, Gennaio a Marzo 1892.

Revue de mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. 2ᵉ année. N. 4, 5, 6, 7. Janvier à Avril 1892. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Rivista di matematica, diretta dal Prof. G. PEANO, Fasc. 1° e 2°. Gennaio e Febbraio 1892. — Torino, Fratelli Bocca.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXII Jahrgang: 8 Heft, 1891; XXIII Jahrgang: 1. Heft, 1892.

BARDELLI (G.) — Dell'uso delle coordinate obliquangole nella teoria dei momenti d'inerzia (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXV, Fasc. VI).

BERTACCHI (C.) — Vade-mecum dello studente: Memoriale scientifico. — Ditta G. B. Paravia e C., 1890. — Prezzo: L. 2.50.

BROCARD (H.) — Le trifolium (Journal de mathématiques spéciales, 1891).

CASTRILLI (C.) — Proiezione stereografica orizzontale di un emisfero terrestre, metodo di costruzione (Gior. di Battaglini, Vol. XXX, 1892).

CERTO (L.) — *Teoria elementare dei numeri reali* (litog.). — Palermo 1891.

CESÀRO (E.) — Costruzioni baricentriche (Rivista di matematica, Anno 1892).

FONTANA (R.) — Saggio sul riordinamento delle matematiche. — Genova, Stab. tipo-lit. forense, 1890.

FRATTINI (G.) — Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica (Rend. R. Acc. Lincei, Vol 1°, 1892).

LONGCHAMPS (G. DE) — Développements sur les paraboles de M. Artzt (El Progreso matemático. 1891) — Exposition de la théorie des intégrateurs (id. id.). — Le calcul des séries convergentes (id. id, 1892). — Les sommets dans les courbes planes (Assoc. p. l'avancement des Sciences, Congrès de Marseille, 1891).

MANSION (P.) — Bibliographie: *Traité de Géométrie* par E. ROCHÉ et CH. DE COMBEROUSSE. (Revue des questions scientifiques, 2ᵉ Série, T. I, 1892).

MATTEUCCI (A.) — Appunti di trigonometria piana, ad uso degli alunni dei Licei e degli Istituti tecnici del Regno. — G. B. Paravia e Comp., 1892. — Prezzo: L. 1.

MILLOSEVICH (E.) — Osservazioni astronomiche, riduzioni relative e calcoli fatti negli anni 1886-87 nel R. Osservatorio Astronomico del Collegio Romano (Ann. Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica. Parte V, Vol. IX, 1887) — Orbita ellittica del pianetino (303) Josephina, dedotta dalle osservazioni della prima opposizione (Memorie Società Spettroscopisti ita., Vol. XX, 1891).

— e CERULLI (V.) — Catalogo di 1291 stelle australi fino a 9.3 inclusivo (Memorie R. Oss. Collegio Romano, Vol. I, Serie III, 1892).

MOSNAT (E.) — Problèmes de Géométrie analytique. Tome II: Géométrie à deux dimensions. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

OGNISSANTI (A.) — La scienza è dolore. Conferenza tenuta nel R. Liceo Cirillo di Bari il 13 giugno 1891. — Bari, Tip. Cannone.

PALATINI (F.) — Saggio di un metodo utile per lo studio delle trasformazioni geometriche. — Palermo, 1892.

TESTI (G. M.) — Corso di matematiche: Vol. II, Algebra elementare con molti esercizi. — Livorno, Tip. R. Giusti, 1892. — Prezzo: L. 5.

VERONESE (G.) — A proposito di una Lettera del Prof. Peano (Rend. Circolo mat. Palermo, Tomo VI. 1892.

Chiusura della redazione il dì 10 maggio 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

(Continuazione, V. pag. 81).

II.

Il Prof. Loria (*) con grande amore ha meditate le opere critiche degli alemanni Hankel, Heiberg e Cantor, del britanno Allman, del francese Tannery...., che dopo i nostri Commandino, Tartaglia, Flauti, corressero gli errori degli arabici volgarizzamenti, restituirono le proposizioni all'originale purezza e sottilmente indagarono l'architettura del multisecolare edificio. Eudosso di Cnido, astronomo e matematico, anteriore ad Euclide, si occupò di paragonare le grandezze omogenee e di stabilire generali relazioni fra i segmenti lineari, le superficie ed i volumi dei solidi: egli scoprì i prismi e i cilindri esser tripli delle piramidi o dei coni descritti con le medesime basi ed altezze; ideò la stupenda teorica delle proporzioni da Euclide nel V libro distesa ed alle figure geometriche applicata nei libri ulteriori. Di quella teorica Galileo, nell'estreme giornate di sua vita, ai discepoli dilucidava i passi oscuri, dettando graziosi dialoghi all'affezionatissimo Torricelli, ed illustrando le acute argomentazioni con rettangoli e cerchi, e con esempi tratti dall'equabile moto.

L'addizione delle m grandezze identiche ad a genera il multiplice $a\,.\,m$, e la somma delle n grandezze pari alla b è il multiplice $b\,.\,n$; dove m, n significano interi positivi. La somma $a.m + a'.m + a''.m + \ldots$ è multipla della somma $a + a' + a'' + \ldots$ secondo m. Le coppie dei molteplici $a\,.\,m$, $a'\,.\,m$, $a\,.\,n$, $a'\,.\,n$, $a\,.\,p$, $a'\,.\,p$, ... aggiunte rispettivamente, forniscono le grandezze $a\,.\,(m + n + p + \ldots.)$, $a'\,.\,(m + n + p + \ldots.)$ multiple delle

(*) L'indefesso cultore di storia delle matematiche Dott. Gino Loria recentemente ha pubblicato negli Atti della R. Università di Genova una preziosa Memoria sopra *Nicola Fergola e la Scuola dei matematici che lo ebbe a duce*; ancor commendevole per il patriottico pensiero di far conoscere agli studiosi dell'Italia superiore e centrale i progressi dei geometri napoletani nel periodo 1791-1850; tanto per le ricerche di analisi moderna, quanto per l'invenzione dei metodi sintetici

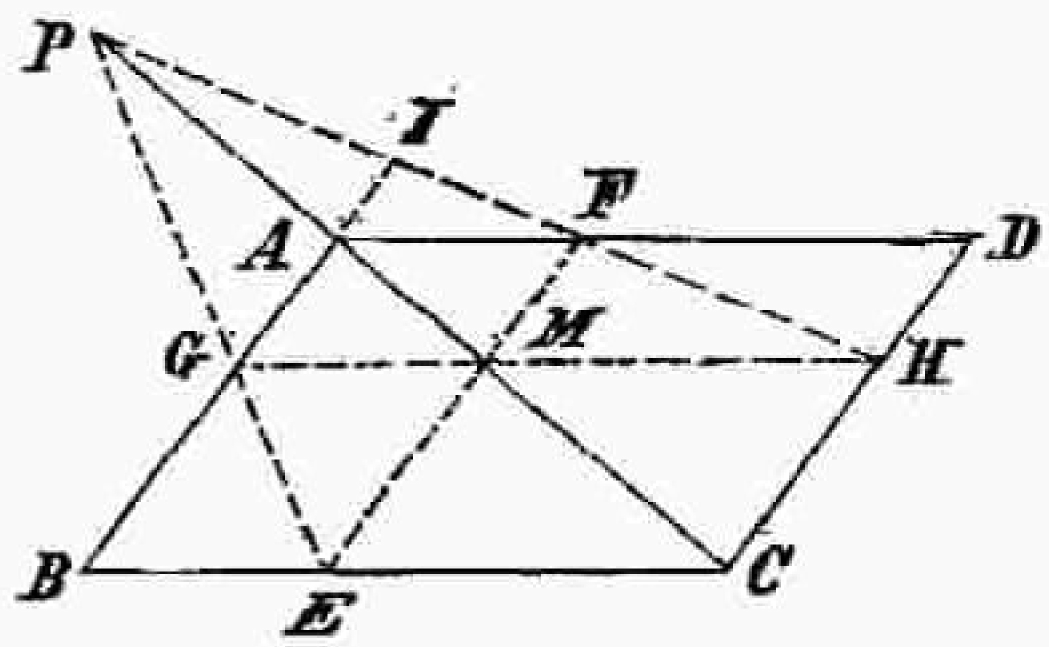
a, a' secondo $m + n + p + \ldots$; e se tutte le h coppie siano identiche alla prima risulta, le molteplici delle $a \cdot m$, $a' \cdot m$ secondo h esser equimultiple delle a, a' secondo $m \cdot h$. Così pure la differenza fra le $a \cdot m$, $a' \cdot m$ eguaglia la differenza fra le a, a' moltiplicata per m.

Nel cercare la ragione delle grandezze geometriche a, a' Euclide non adoperava le lor parti aliquote o summultiple, attesochè, ad eccezione dei segmenti rettilinei, non sempre si possono costruire per intersezioni di rette e cerchi; onde per l'elemento a di una figura determinò solamente il summultiplo $\frac{a}{2^n}$, perchè il suo metodo logico era fondato nel provare l'esistenza del subietto innanzi di svolgerne le varie deduzioni. La ragione delle grandezze omogenee a, a' disse eguale a quella delle omogenee b, b' quando prese le coppie equimultiple $a \cdot m$, $b \cdot m$ delle antecedenti e le $a' \cdot n$, $b' \cdot n$ delle conseguenti, sussistano le concordi relazioni $a \cdot m > a' \cdot n$, $b \cdot m > b' \cdot n$, oppure $a \cdot m < a' \cdot n$, $b \cdot m < b' \cdot n$, ovvero $a \cdot m = a' \cdot n$, $b \cdot m = b' \cdot n$, con gl'interi m, n diversi o identici. In virtù di questa definizione dimostra nel VI libro i parallelogrammi $(a, b)_\alpha$, $(a, b')_\alpha$ aver la ragione dei lati b, b', ed i settori circolari descritti con lo stesso raggio esser proporzionali agli archi intercetti. Indicando con d la diagonale del quadrato costruito sul segmento a, per le diseguaglianze $(a, d) \cdot m > (a) \cdot m$, $d \cdot m > a \cdot m$ si conchiude la proporzione $(a, d) : (a) = d : a$, mentre si dichiara assurda l'eguaglianza $d \cdot m = a \cdot n$, essendo a, d irrazionali fra loro. Dalla proporzione $a : c = b : c$ si trae $a = b$, perchè ammettendo $a > b$ esisterebbe la grandezza $a \cdot m - b \cdot m$ multipla di $a - b$ e maggiore della c, quindi $b \cdot m + c < a \cdot m$: e rappresentando con $c \cdot (n - 1)$ l'ultima delle molteplici di c non superanti $b \cdot m$ si troverebbe $b \cdot m < c \cdot n < a \cdot m$ diseguaglianze contrarie all'ipotesi delle eguali ragioni.

Se fra i multipli delle grandezze qualunque a, a', b, b' si abbiano le relazioni discordanti $a \cdot m > a' \cdot n$, $b \cdot m \leq b' \cdot n$ le grandezze sono sproporzionali, e la ragione $a : a'$ supera $b : b'$; infatti queste differiscono fra loro a motivo delle relazioni supposte, ed inoltre se $a : a'$ fosse minore di $b : b'$ si porrebbe $a : a' = b - h : b'$ con $h < b$, e dovrebbero sussistere le $a . m > a' . n$, $(b - h) . m > b' . n$ relazioni contrarie all'ipotesi, a motivo di $(b - h) . m < b . m \leq b' . n$; il qual principio di Galileo prova esser $a : c > a' : c$ nel caso di $a > a'$ e c qualunque.

La 2ª proposizione del VI libro, dovuta a Talete, dimostra la parallela ad un lato di un triangolo segare gli altri lati in parti proporzionali, e dà origine alla similitudine, che è un metodo universale per l'analisi geometrica, e il più antico di derivazione per l'inventiva delle proprietà metriche e descrittive delle figure.

Così tirando in un parallelogrammo da un punto M della diagonale AC le rette EF, GH parallele ai lati AB, BC e ponendo $BE = a_1$, $EC = a_2$, $BG = b_1$, $GA = b_2$ si ottiene la serie $b_2 : b_1 = AM : MC = a_1 : a_2$; cioè i parallelogrammi equivalenti $(a_1, b_1)_\alpha$, $(a_2, b_2)_\alpha$ hanno i lati reciprocamente proporzionali: viceversa la proporzione $a_1 : a_2 = b_2 : b_1$ conduce all'equivalenza dei due parallelogrammi equiangoli $(a_1, b_1)_\alpha$, $(a_2, b_2)_\alpha$. In particolare alla proporzione $a : b = b : a - b$ corrisponde



l'eguaglianza dei rettangoli $(b) = (a,\ a - b)$, ovvero b è il segmento aureo di a. La congiungente FH seghi in I il lato AB ed in P la diagonale AC, ne risultano $AI : HD = AF : FD = a_1 : a_2 = b_2 : b_1$ e siccome $HD = b_2$ si dirà AI terza proporzionale in ordine a BG, GA; inoltre avendosi $AI : MF = GA : EM$ le diagonali HF, EG dei surriferiti parallelogrammi concorrono in uno stesso punto P della CA, le GF, EH sono parallele a BD, e si deduce la proporzione continua $PA : PM = PM : PC$. Dei quattro termini $CB : CE = EF : BG$, supposto CB il maggiore, sarà BG il minore, e per i triangoli simili AGM, MEC si ricava $MG > GA$, ai quali aggiungendo $CE + BG$ si ottiene $CB + BG > CE + EF$; dunque in ogni proporzione la somma dei due termini massimo e minimo supera quella dei rimanenti.

Il parallelogrammo $(a', b')_\alpha$ è trasformabile in un altro equiangolo e con un lato eguale al segmento b, poichè essendo $BC = a'$, $CH = b'$, ang. $BCH = \alpha$, sulla CH si prenda $CD = b$, e costruiti i parallelogrammi $BCDA$, $BCHG$, dal punto M comune alle AC, GH tirando EF parallela a CD si avrà $ECDF$ equivalente a $BCHG$, ovvero $(a', b')_\alpha = (a'', b)_\alpha$ in cui $a'' = EC$; ne conseguono le proporzioni $(a, b)_\alpha : (a', b')_\alpha = a : a''$, $b : b' = a' : a''$. Ora è la ragione $a : a'' = (a : a')\,(a' : a'') = (a : a')\,(b : b')$; dunque i parallelogrammi equiangoli stanno in ragion composta delle ragioni dei loro lati, che è il teorema 23$^{\text{esimo}}$ del VI libro; quando poi sussista la proporzione $a : a' = b : b'$ i parallelogrammi divengono simili e stanno nella ragione $(a : a')^2$, o duplicata dei lati omologhi.

L'artificio degli antichi geometri per determinare le incognite si fondava su certe trasformate delle proporzioni; così dalla ipotesi $a : b = a' : b'$ Euclide ricava le seguenti $b : a = b' : a'$ (convertendo), $a : a' = b : b'$ (permutando), $a - b : b = a' - b' : b'$ (dividendo), $a + b : b = a' + b' : b'$ (componendo) e in generale dalla serie $a : b = a' : b' = a'' : b'' = \ldots.$ deduce $a + a' + a'' + \ldots. : b + b' + b'' \ldots. = a : b$. Le proposizioni 28, 29 del VI libro hanno per oggetto « con un punto interno (od esterno) dividere il segmento $2a$ nelle parti $a + x$, $a - x$ (od $x - a$), tali che il parallelogrammo $(a - x, y)_\alpha$ sia simile ad $(a, b)_\alpha$ e l'altro $(a + x, y)_\alpha$ equivalga al dato $(c, b)_\alpha$ »: dalle proporzioni corrispondenti $a - x : a = y : b$, $c : a + x = y : b$, si ricava $a - x : a = c : a + x$; a cui corrisponde $(a, c)_\alpha = (a + x, a - x)_\alpha = (a)_\alpha - (x)_\alpha$ per un teorema già veduto; si deduce $(x)_\alpha = (a)_\alpha - (a, c)_\alpha = (a, a - c)_\alpha$ e quindi la proporzione $a : x = x : a - c$, cioè l'ignoto x medio proporzionale fra i segmenti a, $a - c$, come il Torricelli costruì nella sua sintetica soluzione che si legge nell'Euclide commentato dal Viviani, e da questo geometra edito a Firenze l'anno 1718 (*).

(*) Alla pagina 87 del precedente fascicolo mi sfuggì lo avvertire, come l'osservazione del Borelli sul principio delle figure inverse fosse tolta dal 1° libro dei luoghi piani di Apollonio. Anche la prova della congruenza dei triangoli aventi i tre lati eguali si riferisce ad autori più antichi del Borelli, e dal Clavio si attribuiva alla scuola di Philone. È da ricordarsi il *Commento di Pietro Antonio Cataldi ai primi dieci libri di Euclide*, stampato a Bologna negli anni 1620-21; vi si trova costruita la media proporzionale fra due segmenti rettilinei per i tre modi che s'insegnano dai moderni trattati; pure si dimostra come la somma degli angoli esterni di un poligono convesso pareggi quattro retti, e la somma degli angoli interni di un pentagono stellato equivalga a due retti; la qual proposiziona sembra doversi al Campano di Novara, che da un testo arabo tradusse l'Euclide e vi aggiunse un suo pregevolissimo commento pubblicato per la prima volta a Venezia nel 1482 e poi nel 1509 dal Pacioli con proprie spiegazioni.

Si noti con (a, b, c) il parallelepipedo descritto con gli spigoli eguali ai segmenti a, b, c ed inclinati fra loro secondo gli angoli piani $a, b = \alpha$, $b, c = \beta$, $c, a = \gamma$; per la proposizione 25$^{\text{esima}}$ dello XI libro si hanno le identità $(na, b, c) = n(a, b, c)$, $(na, n_1 b, n_2 c) = n\, n_1\, n_2 (a, b, c)$ essendo n, n_1, n_2 interi positivi; è pur facile osservare che $(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$ eguaglia la somma di otto solidi ad esso equiangoli $(a_1, b_1, c_1), (a_1, b_2, c_1), \ldots$.

Il parallelepipedo (a', b', c') si trasforma in un altro avente gli stessi angoli e con due spigoli dati b, c; poichè riducendo la base $(a', b')_\alpha$ all'equivalente $(a'', b)_\alpha$ sussisterà la proporzione (1) $b : b' = a' : a''$; nel nuovo solido (a'', b, c') eguale in volume al primo, per il teorema 31$^{\text{esimo}}$ del libro XI, presa per base la faccia $(a'', c')_\gamma$ e ridotta all'equivalente $(a''', c)_\gamma$, si avrà la proporzione (2) $c : c' = a'' : a'''$ ed il parallelepipedo (a''', b, c) conserverà il volume del primo; ne risulta $(a, b, c) : (a', b', c') = a : a''' = (a : a')(a' : a'')(a'' : a''') = (a : a')(b : b')(c : c')$ a motivo delle (1), (2): dunque due parallelepipedi equiangoli stanno in ragion composta delle ragioni degli spigoli, e quando si abbia la serie $a : a' = b : b' = c : c'$ i solidi sono simili e stanno nella ragione $(a : a')^3$, o triplicata di $a : a'$. Rispetto a due parallelepipedi qualunque (a, b, c), (a_1, b_1, c_1) si assumano per basi le faccie $B = (a, b)_\alpha$, $B_1 = (a_1, b_1)_{\alpha_1}$, e siano h, h_1 le rispettive altezze; trasformando B nel parallelogrammo $(a, b_2)_{\alpha_1}$, si costruisca il parallelepipedo (a, b_2, c_2) equiangolo ad (a_1, b_1, c_1) e con lo spigolo c_2 determinato dalla proporzione $h_1 : h = c_1 : c_2$; i due solidi (a, b, c), (a, b_2, c_2) hanno lo stesso volume e quindi $(a, b, c) : (a_1, b_1, c_1) = (a, b_2, c_2) : (a_1, b_1, c_1) = (a : a_1)(b_2 : b_1)(c_2 : c_1) = (B : B_1)(h : h_1)$; ovvero due parallelepipedi qualunque stanno in ragion composta delle ragioni delle loro basi ed altezze.

In virtù della proposizione 28$^{\text{esima}}$ dell' XI libro il piano condotto per gli spigoli opposti di un parallelepipedo in due prismi triangolari equivalenti lo decompone, congrui se è retto, altrimenti riducibili a due congrui con i medesimi spigoli laterali dei prismi obliqui e con le basi eguali alle lor sezioni rette. E questo secondo caso non fu considerato dagli antichi, ma introdotto da Adriano Maria

Legendre nei suoi *éléments de géométrie*, Paris 1794, originandone la teoria delle figure simmetriche nello spazio. Indicando con B la base di un prisma e con l un suo spigolo laterale in grandezza e direzione, si può notare il prisma col simbolo (B, l) e sono evidenti le identità $(B_1, l) + (B_2, l) + (B_3, l) + \ldots = (B_1 + B_2 + B_3 + \ldots, l)$, $(B, nl) = (nB, l) = n(B, l)$, $\frac{1}{n}(B, l) = \left(\frac{B}{n}, l\right) = \left(B, \frac{l}{n}\right)$ ecc., dove n rappresenta un'intero positivo.

Simboleggino t_i e p_i il tetraedro e il prisma aventi la stessa base ed un medesimo spigolo laterale in grandezza e direzione, dal teorema 3° del XII libro si traggono (1) $t = 2t_1 + 2p_1$, $t_1 < \frac{t}{4}$; operando la stessa decomposizione per t_1 si ottengono (2) $t_1 = 2t_2 + 2p_2$, $t_2 < \frac{t_1}{4} < \frac{t}{4^2}$; parimenti proseguendo (3) $t_2 = 2t_3 + 2p_3$, $t_3 < \frac{t_2}{4} < \frac{t}{4^3}, \ldots\ldots t_{n-1} = 2t_n + 2p_n$, $t_n < \frac{t}{4^n}$. Col moltiplicare la (2) per 2, la (3) per 2^2, ... e l'ultima per 2^{n-1}, risulta $t = 2p_1 + 2^2 p_2 + 2^3 p_3 + \ldots + 2^n p_n + \varepsilon_n$, dove $\varepsilon_n = 2^n t_n < \frac{t}{2^n}$ diviene piccolissimo se n continuamente cresca e superi qualunque numero finito. Per la similitudine delle basi dei prismi p_i, chiamando θ la base ABC del tetraedro $ABCD = t$ ed l lo spigolo laterale AD si deducono $p_1 = \left(\frac{\theta}{4}, \frac{l}{2}\right)$ $p_2 = \left(\frac{\theta}{4^2}, \frac{l}{2^2}\right) \ldots\ldots p_n = \left(\frac{\theta}{4^n}, \frac{l}{2^n}\right)$ e la precedente somma, per l'identità $n(B, l) = (B, nl)$, diviene $t = \left(\frac{\theta}{4}, l\right) + \left(\frac{\theta}{4^2}, l\right) + \ldots + \left(\frac{\theta}{4^n}, l\right) + \varepsilon_n = \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta}{4^2} + \ldots + \frac{\theta}{4^n}, l\right) + \varepsilon_n$; per $n = \infty$ si trova $t = \left(\frac{\theta}{3}, l\right)$. Infatti nel triangolo ABC siano A_1, B_1, C_1 i punti medi dei suoi lati BC, CA, AB, A_2, B_2, C_2 quelli del triangolo AB_1C_1, A_3, B_3, C_3 i mezzi dei lati di AB_2C_2 ecc., la superficie θ è la somma dei quattro triangoli eguali ad $A_1B_1C_1$, oppure del trapezio $BCB_1C_1 = \frac{3\theta}{4}$ e del triangolo AB_1C_1; decomponendo questo nel trapezio $C_1B_1C_2B_2 = \frac{3\theta}{4^2}$ e nel triangolo AB_2C_2 e così successivamente seguitando si giunge all'identità $\frac{3\theta}{4} + \frac{3\theta}{4^2} + \ldots + \frac{3\theta}{4^n} + \frac{\theta}{4^{n+1}} = \theta$; da cui $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3 . 4^{n+1}} = \frac{1}{3}$.

(Continua)

G. BELLACCHI.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(Continuazione, V. pag. 88).

17. A compimento della trattazione, e mirando all'uso pratico della [7], che è la formola risolutiva dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, accenneremo sommariamente due metodi per la ricerca delle soluzioni di questa equazione: inquantochè i due metodi, come quelli esposti nei numeri 8 e 13, applicati alla determinazione delle soluzioni fondamentali dell'equazione, forniscono tutte le coppie di valori per le incognite H e K che compariscono nella [7]. Come nel caso della equazione $x^2 - Dy^2 = N$, il primo dei due metodi vuol esser preferito quando $\sqrt{D}$ è più prossima ad $m+1$, suo valore a meno di un'unità in eccesso, che non ad m; l'altro nel caso contrario.

Quando $\sqrt{D}$ sarà più vicina ad $m+1$ che non ad m, considereremo il sistema

$$\begin{aligned} x^2 - Dy^2 &= -N \\ x^2 - Dy^2 &= -N(2m+1-n) \\ x^2 - Dy^2 &= -N(2m+1-n)^2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad [C]$$

E poichè, detta in generale (x, y) una soluzione di qualsivoglia equazione del sistema, si ha $x < (m+1)y$, diremo che la soluzione è *singolare* quando, oltre alla condizione precedente, si verificherà l'altra: $x \leq my$.

Affinchè la soluzione (x, y) sia singolare, è necessario e sufficiente che y non superi la radice del secondo membro della relativa equazione, positivamente preso e diviso per n.

Sia (x_1, y_1) una soluzione della prima equazione del sistema [C], ossia dell'equazione proposta. Se (x_1, y_1) non è singolare, si ponga: $x_1 = (m+1)y_1 - h$ (h positiva); e si avrà:

$$y_1 = \frac{h(m+1) \pm k}{2m+1-n},$$

denotando con (k, h) una soluzione della seconda equazione del sistema $[C]$. Se (k, h) non sarà singolare, il segno — davanti alla k della precedente formola dovrà rifiutarsi. Perchè dalle uguaglianze

$$x_1 = (m+1)\, y_1 - h\,; \quad y_1 = \frac{h\,(m+1) - k}{2\,m + 1 - n}$$

si ricaverebbe

$$(x_1 - m\,y_1) + (k - m\,h) = (n - 2\,m)\, y_1\,.$$

Il primo membro di quest'ultima eguaglianza è positivo, perchè $x_1 > m\,y_1$ e $k > m\,h$, per ipotesi. Dunque sarebbe positivo anche il secondo. Invece questo è negativo o nullo, perchè $2\,m + 1 - n > 0$, e conseguentemente $n - 2\,m \leq 0$. Si avrà dunque, qualora (k, h) non sia singolare,

$$x_1 = (m+1)\, y_1 - h\,; \quad y_1 = \frac{h\,(m+1) + k}{2\,m + 1 - n}\,.$$

Conseguentemente

$$x_1 + y_1 \sqrt{D} = \left(\frac{m + 1 + \sqrt{D}}{2\,m + 1 - n}\right) (k + h\,\sqrt{D}).$$

Stabilito questo principio, si può applicare senza difficoltà il solito ragionamento e concludere che, detta (x, y) una soluzione qualsiasi dell'equazione $x^2 - D\,y^2 = -N$ e detta (x', y') una soluzione singolare della $(\lambda + 1)^a$ equazione del sistema $[C]$,

$$x + y\,\sqrt{D} = \left(\frac{m + 1 + \sqrt{D}}{2\,m + 1 - n}\right)^{\lambda} (\pm\, x' + y'\,\sqrt{D}). \quad (^*)$$

18. Un ragionamento analogo a quello fatto nel n. 14 dimostrerà che, se la soluzione singolare (x', y') dalla quale si deriva una certa soluzione (x, y) dell'equazione proposta sarà stata ottenuta dopo λ passaggi $(\lambda > 0)$ da un equazione del sistema $[C]$ alla succedanea, il rapporto $y : y'$ risulterà maggiore dell'unità. Inoltre che

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(m + 1 - \sqrt{D})^{\lambda - 1}}\,.$$

Essendo $m + 1 - \sqrt{D} < \frac{1}{2}$, il rapporto $y : y'$ crescerà rapidamente al crescer di λ: la qual cosa, come al solito, dimostra la

(*) Supponendo $D = a^2 - 1$ e conseguentemente $m = a - 1$, $n = 2\,(a - 1)$, $2\,m + 1 - n = 1$, si ritrova quanto si disse nel n. 4 relativamente all'equazione $x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = -N$.

convenienza di derivare le soluzioni della proposta equazione dalle soluzioni singolari delle successive equazioni del sistema [C].

Non ci dilungheremo in deduzioni ed osservazioni che il lettore può fare da sè, tenendo conto dei casi più distesamente trattati nei n. 8 e 13.

19. Volendo risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ con metodo più conveniente al caso in cui $\sqrt{D}$ sia più vicina ad m che non ad $m+1$, basterà considerare il sistema

$$\begin{array}{ll} x^2 - Dy^2 = -N & \\ x^2 - Dy^2 = Nn & \\ x^2 - Dy^2 = -Nn^2 & \qquad [D] \\ x^2 - Dy^2 = Nn^3 & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

e chiamare *singolari* le soluzioni (x, y) delle equazioni ond'esso è composto, quando, trattandosi di equazioni di posto dispari, si verifichino nel medesimo tempo le condizioni $x < (m+1)y$, $x \leq my$; e le condizioni $x > my$, $x \geq (m+1)y$, trattandosi di equazioni di posto pari.

Per la singolarità di una soluzione occorrerà che in essa il valore della y non superi la radice del secondo membro diviso per n e positivamente preso, se la relativa equazione occuperà posto dispari; oppure la radice del secondo membro diviso per $2m + 1 - n$, se l'equazione occuperà posto pari.

Con dimostrazione in tutto simile a quella che si legge nel n. 13, si proverà che

$$x + y\sqrt{D} = \left(\frac{m+\sqrt{D}}{n}\right)^{\lambda} (\pm x' + y'\sqrt{D}),$$

significando (x, y) una soluzione qualsiasi della 1ª equazione del sistema [D], ed (x', y') una certa soluzione singolare della $(\lambda+1)$ª equazione del sistema medesimo. Dalla dimostrazione risulterà ancora che, per λ dispari, bisogna rifiutare il segno negativo davanti alla x' della precedente formola. Di più, ragionando come nel n. 13, si concluderà che, se per trovare (x', y') saranno occorsi λ passaggi

($\lambda > 0$) da equazione ad equazione del sistema [D], il rapporto $y : y'$ sarà maggiore dell'unità; e che inoltre tale rapporto cresce rapidamente al crescer di λ, avendosi

$$y > \frac{m + \sqrt{D}}{m + \sqrt{D} + 1} \cdot \frac{y'}{(\sqrt{D} - m)^{\lambda - 1}}.$$

II.

Alcune conseguenze teoretiche.

20. Non ci dilungheremo in altre applicazioni numeriche dei metodi sopra assegnati (n. 8, 13, 17, 19) per la risoluzione della equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$, nei quattro casi: a) il secondo membro positivo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad $m + 1$ che non ad m; b) il secondo membro positivo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad m che non ad $m + 1$; c) il secondo membro negativo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad $m + 1$ che non ad m; d) il secondo membro negativo, e $\sqrt{D}$ più prossima ad m che non ad $m + 1$. Dette applicazioni non sono indispensabili, potendo servire di modello per tutte l'esempio trattato nel n. 16. Quanto alle conseguenze teoretiche delle cose dette, e specialmente delle formole [4] e [7], esse sarebbero parecchie e svariate: ci limiteremo a due soltanto. La prima è il teorema di Tchebicheff, enunciato nell'esordio di questo scritto. La seconda si riferisce al noto principio di Eulero: *se* (x_0, y_0) *è una soluzione dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$ *in numeri interi (positivi o no), e se* (μ, ν) *è una soluzione intera dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$, *la* X *e la* Y *fornite dall'eguaglianza*

$$X + Y\sqrt{D} = (x_0 + y_0\sqrt{D})\,(\mu + \nu\sqrt{D})$$

daranno una nuova soluzione intera della prima equazione (*).

Pertanto il teorema di Eulero dà nascita alla questione: *quali soluzioni dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$ *conviene combinare con tutte le soluzioni dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$, *e come la combinazione dev'essere regolata per rispetto ai segni dei valori delle incognite, affinchè la regola di* Eulero *possa fornire, senza ripetizione alcuna, tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione*

(*) È facile verificare.

$x^2 - Dy^2 = \pm N$? Una risposta a tale domanda è data dai due teoremi che chiudono il presente lavoro.

21. *Teorema di* Tchebicheff. — *Se* (α, β) *indica la soluzione minima* [*] *dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$, ed (x_0, y_0) *la soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = \pm N$, *sarà*

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2}} \quad ; \quad y_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha \pm 1)}{2D}} .$$

Risulta infatti dal n. 5 che, se l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ è possibile, essa deve ammettere alcune soluzioni con y non maggiore di $\sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}}$, tali essendo le soluzioni fondamentali relative ad (α, β). Fra esse sarà compresa la soluzione minima (x_0, y_0) dell'equazione. Perciò

$$y_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2D}} \text{ e conseguentemente } x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2}} .$$

Dimostrato così il teorema per l'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, passiamo a dimostrarlo per l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$. A tal fine consideriamo dapprima l'equazione $x^2 - (a^2 - 1)\, y^2 = N$. Risulta dal n. 1 che fra le soluzioni di essa ve n'ha alcune (le soluzioni fondamentali) nelle quali il valore della y è minore di $\sqrt{N}$. Se dunque (x_0', y_0') è la soluzione minima dell'equazione, si avrà $y_0' < \sqrt{N}$. Ora, poichè

$$x_0'^2 - a^2 y_0'^2 = N - y_0'^2,$$

potremo porre $x_0' = a y_0' + h$ (h positiva). Dal n. 1 risulta ancora che h è valore della y in una certa soluzione dell'equazione. Conseguentemente, poichè il minimo valore della y è y_0', dovrà aversi $h \geq y_0'$. Da questa disuguaglianza e dall'uguaglianza $x_0' = a y_0' + h$ si ricava: $x_0' \geq (a+1)\, y_0'$, e perciò

$$y_0' \leq \sqrt{\frac{N}{2(a+1)}} .$$

Ponendo l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ sotto la forma

$$(\beta x)^2 - (\alpha^2 - 1)\, y^2 = N \beta^2$$

e applicando la conclusione precedente, si avrà

$$y_0 \leq \sqrt{\frac{N\beta^2}{2(\alpha+1)}} = \sqrt{\frac{N(\alpha-1)}{2D}} ,$$

[*] Diversa, beninteso, dalla soluzione evidente (1, 0).

e conseguentemente

$$x_0 \leq \sqrt{\frac{N(\alpha+1)}{2}}.$$

È poi facile verificare che il teorema di TCHEBICHEFF, tanto nel caso dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, quanto in quello dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, si può compendiare nell'unica disuguaglianza

$$x_0 + y_0 \sqrt{D} \leq \sqrt{N} \sqrt{\alpha + \beta \sqrt{D}}.$$

(*La fine al prossimo fascicolo*). G. FRATTINI.

SULLA PARTIZIONE DEI NUMERI

(*Continuazione e fine, V. pag. 93*).

3. Per giungere ora a due altre relazioni a cui soddisfano rispettivamente le quantità $s_{m,p}$, $s'_{m,p}$ osserviamo che poichè le partizioni s' non sono altro che quelle tra le s che non appartengono all'elemento zero si avrà:

$$s'_{m,p} = s_{m,p} - s_{(m,p)_0} \quad \text{ovvero} \quad s'_{m,p} = s_{m,p} - s_{m,p-1}$$

dalla quale, attribuendo a p successivamente i valori 1, 2, 3, ... p e sommando, si ricava:

$$s_{m,p} = s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

D'altra parte operando nello stesso modo sulla (5) si ricava

$$s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} = s_{m-1,1} + s_{m-2,2} + \ldots\ldots + s_{m-p,p}$$

onde

$$s_{m,p} = s_{m-1,1} + s_{m-2,2} + \ldots\ldots + s_{m-p,p} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Confrontando invece la (6) con la (5) si ha:

$$s'_{m+p,p} = s'_{m,1} + s'_{m,2} + \ldots\ldots + s'_{m,p} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

alla quale può darsi la forma

$$s'_{n,p} = s'_{n-p,1} + s'_{n-p,2} + \ldots\ldots + s'_{n-p,p} \;(*) \quad \ldots \quad (7')$$

Le (7) (7') sono le relazioni cercate.

(*) Questa proprietà del numero delle soluzioni comuni alle equazioni del tipo (3) è stata data per altra via dal Prof. E. SADUN nella sua nota: *Sulla risoluzione in numeri positivi*, ecc. (V. Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, tomo XV, pag. 209).

4. Se nella (8) si pone $p = m$ si ha, avendo riguardo alla prima delle (j):

$$s'_{2m,m} = s'_{(2m,m)_1} + s'_{(2m,m)_2} = s'_{2m-1,m-1} + 1 = s'_{m,1} + \\ s'_{m,2} + s'_{m,3} + \ldots\ldots + s'_{m,m}$$

e quindi osservando ora l'ultima espressione si avrà:

« Il numero dei modi nei quali un intero m può essere formato di parti intere uguali o disuguali (diverse da zero) è uguale a quello dei modi nei quali $2m - 1$ può essere formato di $m - 1$ parti uguali o disuguali (diverse da zero) più uno —, ed è uguale anche a quello dei modi nei quali $2m$ può essere formato di m parti » (*).

Dalla (8) invece si ha:

« Vi sono tanti modi di formare un numero m con somme di $1, 2, \ldots\ldots p$ $(p < m)$ termini quanti di formare $m + p$ con somme di p termini ».

5. Passiamo ora a considerare quelle partizioni dell'intero m, formate da elementi non maggiori di un dato numero $n < m$. Indichiamone con S_m^n il numero, e per mostrare la connessione che esse hanno colle altre specie di partizioni studiate premettiamo il seguente lemma:

« Il numero delle soluzioni dell'equazione

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots\ldots + nx_n = m \qquad (n < m)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots\ldots + nx_n = n + m$$

in cui x_n *è diverso da zero* ».

Infatti se $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ è una soluzione qualunque della prima si verifica subito che $x'_1, x'_2, \ldots (x'_n + 1)$ è una soluzione della seconda con $x'_n + 1$ diverso da zero: viceversa se $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ è una soluzione della seconda con $y'_n = z + 1$ diverso da zero, si verifica che $y'_1, y'_2, \ldots, (y'_n - 1)$ è soluzione della prima. E poichè risulta anche che a soluzioni diverse di una delle due corrispondono diverse per l'altra, la proprietà resta dimostrata.

(*) Uguali o disuguali e diverse da zero.

Ciò essendo stabilito, si ha da un noto teorema (*) che il numero delle soluzioni considerate dell'equazione $1 \cdot x_1 + 2x_2 + \ldots\ldots + nx_n = n + m$ è uguale a quello delle soluzioni comuni alle (3) quando si cangi p in n ed m in $m + n$; ne consegue (teorema IV) che:

« Il numero delle soluzioni dell'equazione

$$1 \cdot x_1 + 2x_1 + \ldots\ldots + nx_n = m \qquad (n < m)$$

è uguale a quello delle soluzioni dell'equazione

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_n = n + m$$

in numeri diversi da zero ».

Aggiungiamo ora che il numero delle soluzioni della penultima equazione altro non rappresenta che il numero delle partizioni di m in parti non maggiori di n, quindi il teorema che precede dà luogo al seguente di Eulero (**):

« Il numero dei modi nei quali un intiero m può generarsi per somma di termini uguali o disuguali non maggiori di n, è uguale a quello dei modi nei quali il numero $n + m$ può generarsi per somma di m termini uguali o disuguali ».

Osservazione. Da quanto precede risulta la formola

$$S_m^n = s'_{n+m,\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

6. Chiuderemo queste considerazioni generali accennando brevemente ad un'altra classe di partizioni dell'intero m in p elementi, e precisamente a quelle formate da elementi diversi tra loro e da zero (***). Le diremo partizioni s'' e denoteremo con $s''_{m,p}$ il loro numero. Fissato p è evidente che il minor numero che ammetta cotali partizioni è $\frac{p(p+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + p$. Quindi è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza delle s'' pel numero m che sia $m \geqq \frac{p(p+1)}{2}$. Ne segue in ogni caso $m > \frac{p(p-1)}{2}$; ciò verificato si determineranno le partizioni s' del numero $m - \frac{p(p-1)}{2}$, indi dopo avere di-

(*) V. SADUN. — Nota citata, pag. 213

(**) V. EULERO. — *Introductio in Analysin infinitorum.* — « *De partitione numerorum* ».

(***) La ricerca delle partizioni di un numero in elementi diversi tra loro, non escluso lo zero, non differisce sostanzialmente da questa.

sposto gli elementi di ciascuna in ordine crescente si aggiungerà 1 al *secondo* elemento, 2 al terzo, ecc., $p - 1$ all'ultimo; si otterranno, come si vede subito, *tutte* le partizioni s'' del numero m in p elementi disuguali ed avremo quindi:

$$s''_{m,p} = s'_{m-\frac{p(p-1)}{2},\,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

onde:

Il numero dei modi nei quali un intero m può generarsi per somme di p termini *disuguali* è uguale a quello dei modi nei quali $m - \frac{p(p-1)}{2}$ può generarsi per somma di p termini *eguali e disuguali* ». (Teorema di EULERO. V. Opera citata).

Le partizioni s'' di m in p elementi possono anche dedursi così: Si determinino le partizioni s del numero $m - \frac{p(p+1)}{2}$, indi, dopo avere disposto gli elementi nel solito modo, si aggiunga 1 al *primo* termine, 2 al secondo, ecc. e p all'ultimo. Sarà analogamente:

$$s_{m-\frac{p(p+1)}{2},\,p} = s''_{m,p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Da queste formole e da tutto quanto precede si comprende che si potrà facilmente trovare per la quantità $s''_{m,p}$ relazioni e proprietà analoghe a quelle stabilite per le $s_{m,p}$ ed $s'_{m,p}$.

Le applicazioni annunciate in principio relativamente alla determinazione effettiva del numero delle soluzioni di alcune particolari equazioni saranno date in una prossima nota.

Roma, dicembre 1891.

ALBERTO TAGIURI.

SULLA DIVISIONE DEI POLINOMI INTERI

Stanno a base delle seguenti considerazioni gli stessi teoremi esposti nel n.° 1 della Nota precedente (*), dei quali riportiamo qui gli enunciati, perchè si ha necessità di richiamarli. Essi sono:

Teor. I. - *Il resto della divisione d'una somma di polinomi*

(*) Anno VI, pag. 123.

per un altro polinomio D, *è uguale alla somma dei resti ottenuti dividendone per* D *i singoli termini.*

Teor. II. - *Il resto della divisione per* D *d'un prodotto di polinomi, è uguale al resto della divisione per* D *del prodotto dei resti trovati col dividerne per* D *i singoli fattori.*

1.

Sia

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$

il dividendo, e, supposto $r \leq n$, sia

$$D^{(r)} = x^r - b_1 x^{r-1} - b_2 x^{r-2} - \ldots\ldots - b_{r-1} x - b_r$$

il divisore (**).

Una potenza x^s, di grado $s < r$, divisa per $D^{(r)}$ dà evidentemente per resto la potenza stessa: se $s = r$, il resto è invece

$$b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots\ldots + b_{r-1} x + b_r :$$

e se infine si ha $s > r$ e precisamente

$$s = tr + s' \qquad (s' < r),$$

ponendo

$$x^s = (x^r)^t \cdot x^{s'}$$

il resto della divisione di x^s per $D^{(r)}$ è quello stesso (teor. II) che vien dato dal prodotto

$$(b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots\ldots + b_{r-1} x + b_r)^t \cdot x^{s'}$$

diviso per $D^{(r)}$. Ora, questo polinomio è del grado $t(r-1) + s'$, inferiore ad s di t unità, e non v' ha dubbio (a causa dei teoremi I e II) che si potrà applicare lo stesso procedimento per abbassare il grado di ognuno dei suoi termini quando esso è maggiore di r, fino a che si ottenga un polinomio di grado inferiore ad r, che sarà il

---

(**) Il caso più generale in cui si ha

$$D = B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots\ldots + B_{r-1} x + B_r$$

può essere sempre ridotto a questo; giacchè dall'essere

$$P = DQ + R = \frac{D}{B_0}(B_0 Q) + R$$

si deduce che: *Se invece di dividere un polinomio* P *per* D, *si divide per* $\frac{D}{B_0}$, *il resto* R *non si altera e il quoziente* Q *viene moltiplicato per* B_0.

resto della divisione di x^s per $D^{(r)}$. Questo metodo che in sostanza si riduce a successivi sviluppi di potenze d'un polinomio, rende conto segnatamente della *specie* e del *valore* dei coefficienti *numerici* che debbonsi ritrovare preposti a quelli *letterali* delle singole potenze della x, quando si determini in altri modi il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$.

Volendo, per esempio, trovare il resto della divisione di

$$P^{(4)} = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$$

per

$$D^{(2)} = x^2 - b_1 x - b_2\,,$$

osservato che $b_1 x + b_2$ è il resto della divisione di x^2 per $D^{(2)}$, se ne deduce che $x^3 = x^2 \,.\, x$ diviso per $D^{(2)}$ dà lo stesso resto di

$$(b_1 x + b_2)\,x = b_1 x^2 + b_2 x$$

e che questo resto è

$$b_1 (b_1 x + b_2) + b_2 x = (b_1^2 + b_2)\,x + b_1 b_2\,.$$

Così pure avendosi $x^4 = (x^2)^2$, x^4 diviso per $D^{(2)}$ darà un resto uguale a quello che trovasi dividendo per $D^{(2)}$

$$(b_1 x + b_2)^2 = b_1^2 x^2 + 2\,b_1 b_2 x + b_2^2\,.$$

Ma questo resto altro non è che

$$b_1^2 (b_1 x + b_2) + 2\,b_1 b_2 x + b_2^2 = (b_1^3 + 2\,b_1 b_2)\,x + (b_1^2 b_2 + b_2^2)$$

e si conclude perciò (teor. II e I) che $P^{(4)}$ diviso per $D^{(2)}$ dà per resto

$$a_0 [(b_1^3 + 2\,b_1 b_2)\,x + (b_1^2 b_2 + b_2^2)] + a_1 [(b_1^2 + b_2)\,x + b_1 b_2] +$$
$$a_2 (b_1 x + b_2) + a_3 x + a_4 =$$
$$[a_0 (b_1^3 + 2\,b_1 b_2) + a_1 (b_1^2 + b_2) + a_2 b_1 + a_3]\,x +$$
$$[a_0 (b_1^2 b_2 + b_2^2) + a_1 b_1 b_2 + a_2 b_2 + a_4]\,.$$

Se, in generale, indichiamo con

$$(1) \qquad b_1^{(h)} x^{r-1} + b_2^{(h)} x^{r-2} + \ldots + b_{r-1}^{(h)} x + b_r^{(h)}$$

il resto della divisione di x^{r+h} per $D^{(r)}$, dimodochè, essendo n il grado del polinomio da dividersi, il resto di x^n sia espresso da

$$b_1^{(n-r)} x^{r-1} + b_2^{(n-r)} x^{r-2} + \ldots + b_{r-1}^{(n-r)} x + b_r^{(n-r)}\,,$$

il resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$ sarà:

$$R = a_0(b_1^{(n-r)} x^{r-1} + \dots + b_r^{(n-r)}) +$$
$$a_1(b_1^{(n-r-1)} x^{r-1} + \dots + b_r^{(n-r-1)}) + \dots\dots\dots +$$
$$a_{n-r-1}(b_1^{(1)} x^{r-1} + \dots + b_{r-1}^{(1)}) + a_{n-r}(b_1 x^{r-1} + \dots + b_r) +$$
$$a_{n-r+1} x^{r-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

oppure:

$$(2) \qquad R = \left.\begin{array}{l} a_0 b_1^{(n-r)} \\ +a_1 b_1^{(n-r-1)} \\ + \dots \\ +a_{n-r-1} b_1^{(1)} \\ +a_{n-r} b_1 \\ +a_{n-r+1} \end{array}\right| x^{r-1} + \left.\begin{array}{l} a_0 b_2^{(n-r)} \\ +a_1 b_2^{(n-r-1)} \\ + \dots \\ +a_{n-r-1} b_2^{(1)} \\ +a_{n-r} b_2 \\ +a_{n-r+2} \end{array}\right| x^{r-2} + \dots + \left.\begin{array}{l} a_0 b_{r-1}^{(n-r)} \\ +a_1 b_{r-1}^{(n-r-1)} \\ + \dots \\ +a_{n-r-1} b_{r-1}^{(1)} \\ +a_{n-r} b_{r-1} \\ +a_{n-1} \end{array}\right| x + \begin{array}{l} a_0 b_r^{(n-r)} \\ +a_1 b_r^{(n-r-1)} \\ + \dots \\ +a_{n-r-1} b_r^{(1)} \\ +a_{n-r} b_r \\ +a_n \end{array}$$

volendolo ridotto alla forma ordinaria di

$$c_0 x^{r-1} + c_1 x^{r-2} + \dots + c_{r-2} x + c_{r-1}.$$

2.

Sebbene col metodo ora esposto possa trovarsi il resto della divisione per $D^{(r)}$ di una potenza qualsiasi x^{r+h}, non è superfluo tuttavia stabilire le relazioni mediante le quali i suoi coefficienti $b_1^{(h)}, b_2^{(h)}, \dots b_r^{(h)}$ si deducono dai coefficienti $b_1^{(h-1)}, b_2^{(h-1)}, \dots, b_r^{(h-1)}$ del resto relativo alla potenza precedente x^{r+h-1}; tanto più che tali relazioni riescono opportune per calcolare i coefficienti del resto (2), indicati con $c_0, c_1, \dots c_{r-1}$, quando sono espressi in numeri i valori di n, di r e dei coefficienti di $P^{(n)}$ e di $D^{(r)}$, e per ottenere altresì la forma generale di R corrispondente a valori numerici assegnati di n e di r, quando non si voglia ricorrere agli sviluppi di potenze d'un polinomio, di cui è parola nel numero precedente.

Osserviamo, a tal effetto, che se r_m è il resto della divisione di x^m per $D^{(r)}$, e si pone $x^{m+1} = x^m . x$, il resto r_{m+1} che si ottiene dividendo x^{m+1} per $D^{(r)}$, sarà uguale (teor. II) al resto della divisione per $D^{(r)}$ del prodotto $r_m x$.

Ciò premesso, se s'indica il resto della divisione di x^{r+h-1} per $D^{(r)}$ con

$$b_1^{(h-1)} x^{r-1} + b_2^{(h-1)} x^{r-2} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x + b_r^{(h-1)},$$

moltiplicando questo resto per x, il polinomio

$$(3) \qquad b_1^{(h-1)} x^r + b_2^{(h-1)} x^{r-1} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x^2 + b_r^{(h-1)} x$$

e la potenza x^{r+h} divisi per $D^{(r)}$ danno lo stesso resto. Ma, da quanto è stato stabilito nel numero precedente, il resto della divisione del polinomio (3) per $D^{(r)}$ è

$$(4) \qquad \begin{aligned} & b_1^{(h-1)} (b_1 x^{r-1} + b_2 x^{r-2} + \ldots . + b_{r-1} x + b_r) + \\ & \quad b_2^{(h-1)} x^{r-1} + \ldots . + b_{r-1}^{(h-1)} x^2 + b_r^{(h-1)} x \end{aligned}$$

per cui anche il resto di x^{r+h} diviso per $D^{(r)}$ è dato dal polinomio (4), o, sotto altra forma, da

$$\begin{aligned} & (b_1^{(h-1)} b_1 + b_2^{(h-1)}) x^{r-1} + (b_1^{(h-1)} b_2 + b_3^{(h-1)}) x^{r-2} + \\ & \quad \ldots . + (b_1^{(h-1)} b_{r-1} + b_r^{(h-1)}) x + b_1^{(h-1)} b_r . \end{aligned}$$

I suoi coefficienti, già indicati nella (1) con $b_1^{(h)}, b_2^{(h)}, \ldots . , b_{r-1}^{(h)}, b_r^{(h)}$, sono dunque collegati ai coefficienti $b_1^{(h-1)}, b_2^{(h-1)}, \ldots , b_r^{(h-1)}$ del resto di x^{r+h-1}, dalle relazioni:

$$(5) \quad \begin{aligned} & b_1^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_1 + b_2^{(h-1)}, \quad b_2^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_2 + b_3^{(h-1)}, \ldots . , \\ & \qquad b_{r-1}^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_{r-1} + b_r^{(h-1)}, \quad b_r^{(h)} = b_1^{(h-1)} b_r . \end{aligned}$$

Da queste, facendo $h = 1$ e sostituendo al simbolo $b_s^{(0)}$ il suo valore b_s, si hanno i coefficienti del resto che si ottiene dividendo la potenza x^{r+1} per $D^{(r)}$, espressi dalle formule

$$(6) \qquad \begin{aligned} & b_1^{(1)} = b_1 b_1 + b_2, \qquad b_2^{(1)} = b_1 b_2 + b_3, \quad \ldots . , \\ & \qquad b_{r-1}^{(1)} = b_1 b_{r-1} + b_r, \qquad b_r^{(1)} = b_1 b_r . \end{aligned}$$

Successivamente poi, posto $h = 2, 3, \ldots . ,$ si possono avere dalle (5) i coefficienti dei resti di x^{r+2}, x^{r+3}, ..., finchè per $h = n - r$ (donde $r + h = n$) vi si traggono i coefficienti

$$(7)\quad b_1^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_1 + b_2^{(n-r-1)},\quad b_2^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_2 + b_3^{(n-r-1)},$$
$$\ldots\ldots,\quad b_{r-1}^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_{r-1} + b_r^{(n-r-1)},\quad b_r^{(n-r)} = b_1^{(n-r-1)} b_r$$

che appartengono al resto di x^n.

Così si hanno gli elementi per la tabella

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{lllll} b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{r-1} & b_r \\ b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1^{(n-r-1)} & b_2^{(n-r-1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r-1)} & b_r^{(n-r-1)} \\ b_1^{(n-r)} & b_2^{(n-r)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r)} & b_r^{(n-r)} \end{array}\right.$$

e moltiplicando tutti i termini dell'ultima linea per a_0, quelli della penultima per a_1 ecc., quelli della seconda e prima per a_{n-r-1} e a_{n-r} rispettivamente; sommando poi per colonne, cominciando da sinistra e dal basso, ed aggiungendo alla prima somma il coefficiente a_{n-r+1}, alla seconda a_{n-r+2} ecc., alla penultima a_{n-1} ed all'ultima a_n, si ritrovano i coefficienti c_0, c_1, ..., c_{r-2}, c_{r-1} in quella forma ch'è loro assegnata nella espressione (2).

Tutte queste operazioni per effettuare il calcolo delle c_s vengono immediatamente chiarite osservando la (2) e completando la tabella (8) nel modo seguente:

$$(9)\quad \begin{array}{l|lllll|} & a_{n-r+1} & a_{n-r+2} & \ldots\ldots & a_{n-1} & a_n \\ \hline a_{n-r} & b_1 & b_2 & \ldots\ldots & b_{r-1} & b_r \\ a_{n-r-1} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(1)} & b_r^{(1)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & b_1^{(n-r-1)} & b_2^{(n-r-1)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r-1)} & b_r^{(n-r-1)} \\ a_0 & b_1^{(n-r)} & b_2^{(n-r)} & \ldots\ldots & b_{r-1}^{(n-r)} & b_r^{(n-r)} \\ \hline & c_0 & c_1 & \ldots\ldots & c_{r-2} & c_{r-1} \end{array}$$

(*Continua*). E. Sadun.

UN TEOREMA SULLE CONICHE E COROLLARI RELATIVI

1. Fissato un triangolo ABC ed un punto O fuori dei suoi lati, se consideriamo p. es. i raggi AO, AB, AC, esiste un raggio ed uno solo del fascio col centro in A, che coi tre raggi fissati, presi in un ordine stabilito, determini un rapporto anarmonico dato, e questo raggio taglia BC in un punto N, e la retta ON taglia i lati AB, AC rispettivamente nei punti L, M, i quali con O, N determinano, presi nell'ordine voluto, un rapporto anarmonico eguale a quello determinato dai rispettivi raggi del fascio (A). Di qui si vede che dato un triangolo e un punto fuori dei suoi lati, per questo punto O si può guidare una ed una sola retta, tale che su essa O ed i punti d'incontro coi lati del triangolo, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico dato.

Fissato un triangolo ABC ed un punto O del suo piano, e condotta una trasversale OM, si costruisca il punto X che con quelli d'incontro della retta coi lati del triangolo, presi in un dato ordine, determina un rapporto anarmonico dato. Al variare di OM intorno ad O, il punto X descrive un luogo che ha in O (per le considerazioni svolte sopra) un solo punto, quindi è un luogo del secondo ordine. Questo luogo passa evidentemente per i vertici del triangolo dato, e la retta che passando per O taglia i lati del triangolo in tre punti che con O, presi nell'ordine stabilito, determinano il dato rapporto anarmonico, è la tangente alla conica in O.

Sia data una conica K e su essa cinque punti A, B, C, O, S. Tirata la OS, essa incontra i lati del triangolo ABC nei punti L, M, N, e sia $(LMNS) = m$. Tutti i punti X che sulle rette uscenti da O determinano coi punti d'intersezione dei lati del triangolo ABC, presi nell'ordine considerato sopra, un rapporto anarmonico eguale ad m, sono in una conica passante per A, B, C, O, S, cioè sulla K. Dunque: *Sopra ogni retta uscente da un punto* O *di una conica il secondo punto d'incontro con la curva ed i tre punti d'incontro coi lati di un triangolo inscritto nella curva,* *presi in un ordine fisso, determinano un rapporto anarmonico costante.*

Dualmente: *Per ogni punto d'una tangente di una conica, la seconda tangente alla curva ed i tre raggi che lo congiungono coi vertici di un triangolo circoscritto alla conica, presi in un ordine fisso, determinano un rapporto anarmonico costante.*

Questi due teoremi ci indicano un modo di costruzione di una conica, dati cinque punti, e delle tangenti nei punti della curva, come pure di un inviluppo della seconda classe, date cinque tangenti, e dei punti di contatto delle rette inviluppanti.

2. Se la conica data è un'iperbole, e se il triangolo inscritto ha un lato all'infinito, possiamo dire: *Sopra ogni raggio uscente da un punto qualunque di un'iperbole, il secondo punto d'incontro con la curva e i due punti d'incontro con due rette fisse uscenti da un punto della conica parallelamente agli assintoti, presi in un ordine fisso, determinano due segmenti di rapporto costante.*

3. Fissato un triangolo inscritto in una conica, possiamo proporci il problema di determinare quel punto O della curva, tale che i raggi uscenti da esso taglino ognuno i lati del triangolo e ulteriormente la conica in quattro punti, i quali, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico dato. Perciò prendiamo ad arbitrio sulla curva un punto M, per il quale conduciamo (n. 1) quel raggio che taglia i lati del triangolo in tre punti, i quali con M, presi nell'ordine voluto, determinano il rapporto anarmonico dato, raggio che incontrerà ulteriormente la curva nel punto O cercato. Di qui discende: *Dato un fascio di coniche a punti base distinti, i punti* O *delle medesime tali che rispetto ad un triangolo inscritto comune le rette da essi uscenti tagliano i lati del triangolo e le rispettive curve in quadruple di punti che presi in un ordine fisso determinino sempre lo stesso rapporto anarmonico, sono in una retta passante per il quarto punto base* M *del fascio.*

4. Indichiamo con a, b, c, p (con accenti ed indici quando occorra) i punti in cui una retta uscente da un punto O di una conica taglia i lati di un triangolo inscritto ed ulteriormente la curva.

Fissiamo ora una corda BC della conica e dal punto O si tiri un raggio che tagli BC in N. Fissato sulla curva un punto X, si tiri BX; allora si avrà un raggio BY tale che sia

$$(BC,\ BY,\ BX,\ BP) = m$$

essendo P l'ulteriore punto d'incontro di ON con la curva. Il raggio BY taglia ON in un punto R e la CR taglia ancora la conica in un punto X_1. Siccome ad ogni punto X corrisponde un punto X_1 e viceversa, così si hanno due coincidenze. Ma quando il punto X cade in P anche Y e quindi anche X_1 cade in P, perciò essendo reale una delle due coincidenze, dev'essere reale pure l'altra. Ma la coincidenza P va naturalmente esclusa dalle nostre considerazioni dipendendo unicamente dalla speciale posizione della trasversale arbitraria ON, per cui possiamo concludere: *Sopra ogni corda di una conica si può, fissato un punto* O *della curva, costruire un triangolo, tale da avere* $(a\,b\,c\,p) = m$. Analogamente un triangolo esisterà sopra BC tale da avere $(abpc) = m$, ecc. Dunque: *Fissato un punto* O *di una conica vi sono* ∞^2 *triangoli inscritti, insistenti 6 a 6 sulle* ∞^2 *corde della curva, tali che i rapporti anarmonici determinati sopra ogni trasversale passante per* O *dai punti d'incontro coi lati di ognuno di essi e con la curva, hanno gli stessi valori dei rapporti anarmonici determinati allo stesso modo da qualunque altro di essi.*

Siano ora sopra una corda AB due triangoli ABC, ABC_1 tali da avere rispettivamente

$$(a\,b\,c\,p) = m, \quad (b_1\,a_1\,c\,p) = m.$$

Si conduca quella trasversale che unisce O col punto d'incontro di AC, BC_1, per cui sarà $b \equiv a_1$ e perciò $(b_1\,b\,c\,p) = m$ e quindi $a \equiv b_1$, cioè la considerata trasversale passa anche per il punto d'incontro di BC, AC_1. Altrettanto dicasi per la coppia di triangoli $(a\,c\,b\,p) = m$, $(a\,c\,p\,b) = m$, come pure per la coppia $(a\,p\,b\,c) = m$, $(a\,p\,c\,b) = m$. Dunque: *I sei triangoli insistenti sopra una corda di una conica, appartenenti all'infinità doppia considerata nell'ultimo teorema, sono divisi in tre coppie tali, che i due punti d'in-*

contro dei lati di due triangoli di una coppia sono allineati con O. I rapporti anarmonici relativi a due triangoli di una coppia, presi nello stesso senso, sono l'uno reciproco dell'altro.

Abbiansi ora due triangoli inscritti qualunque tali che sia $(a b c p) = m$, $(a_1 b_1 c_1 p) = m$. Supponiamo che i punti $(BC, B_1 C_1)$, $(AC, A_1 C_1)$ siano in linea retta con O, per cui per quella retta si ha $a \equiv a_1$, $b \equiv b_1$, quindi $(a b c_1 p) = m$ e perciò $c \equiv c_1$. Dunque: *Se due qualunque degli ∞^2 triangoli inscritti considerati nel penultimo teorema sono tali che due coppie di lati omologhi s'incontrino in due punti allineati col punto O, anche il punto comune alla terza coppia si trova sulla medesima retta.*

5. Abbiamo visto (n. 3) che fissato un triangolo inscritto in una conica, un solo punto O esiste sulla curva tale che ogni trasversale uscente da esso tagli i lati del triangolo ed ulteriormente la curva in quattro punti a, b, c, p che, presi in un ordine stabilito, determinino un rapporto anarmonico di valore assegnato m. Mantenendo fisso l'ordine dei punti a, b, c, p, e prendendo successivamente come valore del rapporto anarmonico da essi determinato $\frac{1}{m}$, $1 - m$, $\frac{1}{1-m}$, $\frac{m}{m-1}$, $\frac{m-1}{m}$., otteniamo corrispondentemente altri cinque punti O, per cui possiamo concludere: *Fissato un triangolo inscritto in una conica, esistono sulla curva sei punti O, i quali sono tali, che ogni retta uscente da uno di essi taglia i lati del triangolo e la curva in quattro punti, i cui sei rapporti anarmonici sono uguali a quelli determinati dai punti in cui la curva ed i lati del triangolo sono tagliati da ogni retta uscente da qualunque altro di quei punti O.*

Fra le proprietà note che derivano immediatamente dal nostro teorema fondamentale abbiamo questa: *Se due triangoli sono inscritti in una conica, essi sono circoscritti ad un'altra conica.*

Palermo, 1892.

Prof. PALATINI FRANCESCO.

TEMI DI MATEMATICA

per la licenza nei Licei di Francia

(Sessione di luglio 1891).

1. Risolvere un triangolo conoscendo un lato, l'angolo opposto A e la superficie S. Si daranno le formule che permettono di calcolare le incognite b e c, poi B, C.

Si effettuerà il calcolo prendendo $a = 613^m, 57$, $A = 60°$, $S = 133074^{mq}$.

(Algeri).

2. 1°. Un circolo avente per centro O e per raggio $OA = R$, è tangente esternamente ad un altro circolo O' di raggio $O'A = r$. Per il punto di contatto A è condotta una secante AM che incontra il cerchio O' in M e tale che l'angolo $MAO' = \alpha$. Si conduca inoltre dal punto A una perpendicolare ad AM che incontri il cerchio O in N, e si indichi con P il punto in cui la retta MN incontra la linea dei centri OO'.

Trovare in funzione dei dati (R, r, α), le lunghezze PA, PM, PN. Enunciare sotto forma di teorema la proprietà che risulta dal calcolo di PA.

2°. Applicazione numerica al caso di $R = 2$, $r = 1$, $\text{sen}\ \alpha = \frac{1}{3}$.

3°. Supponendo che nella questione proposta R ed r siano le sole incognite, determinare l'angolo α in modo che PA sia media proporzionale fra PM e PN.

(Besançon).

3. Due circonferenze O ed O', di raggi r ed r', hanno per corda comune AA'. Per l'estremità A di questa corda comune si conduca una retta qualunque e si indichino con B e B' gli altri due punti in cui essa incontra le circoferenze O ed O'. Pongasi inoltre ang. $A'AB = \psi$.

1° Si forma il triangolo $A'BB'$ e si domanda di quali proprietà gode questo triangolo quando si fa variare l'angolo ψ da 0 a 2π.

2°. Condotti pel punto A i diametri AD, AD' dei due cerchi e prolungati rispettivamente fino ai punti C', C in cui ciascuno di essi incontra l'altra circonferenza, dedurre, da ciò che precede, la relazione esistente fra le lunghezze dei due archi AC ed AC'.

3°. Trovare l'espressione della superficie del triangolo $A'BB'$ in funzione dell'angolo variabile ψ, dei due raggi r ed r' e degli angoli α e α' che fanno con OO' i due raggi OA ed $O'A$. Semplificare l'espressione di quest'area e trovare per quale valore di ψ essa è la maggiore possibile. Trovare ancora i valori di ψ pei quali area $A'BB'$ = area OAO'.

La soluzione di quest'ultima quistione non poteva essere preveduta senza calcolo?

(Besançon).

4. È dato un semicerchio AMB di raggio $OA = a$. Per le estremità A e B del diametro AB, si innalzano sul piano del semicerchio due perpendicolari sulle quali si prendono le lunghezze $AP = 2a$, $BQ = a$. Determinare sul semicerchio un punto M, mediante la lunghezza $AM = x$ della corda AM, in modo che il prodotto delle distanze del punto M ai punti P e Q abbia un valore dato k^2.

Mostrare che il problema è possibile solo se k^2 è compreso fra $2\sqrt{2}\,a^2$ e $\frac{9}{2}a^2$.

Determinare in particolare i punti M rispondenti all'ipotesi $k^2 = \frac{9}{2}a^2$, $k^2 = 2\sqrt{5}\,a^2$, $k^2 = 2\sqrt{2}\,a^2$. (*Besançon*).

5. In un trapezio si indicano con $2a$ e $2b$ le lunghezze dei due lati paralleli e con h l'altezza. Si domanda di dividere l'area del trapezio in due parti equivalenti con una parallela ai due lati $2a$ e $2b$. Interpretare le soluzioni che si presentano. (*Besançon*).

6. A, B, C essendo i vertici d'un triangolo dato, in quale rapporto debbono essere le masse che bisogna applicare in questi punti affinchè il centro di gravità coincida: 1° con il punto d' incontro delle altezze del triangolo; 2° con il centro del cerchio inscritto nel triangolo. (*Bordeaux*).

7. Sopra una circonferenza di cerchio, di cui il raggio è uguale all'unità e di cui il centro è il punto O, si prenda un arco AB di 22 gradi e mezzo; si conduca la tangente AT al cerchio, si prolunghi il raggio AO al di là del centro, d'una lunghezza OC doppia del raggio, e si tiri la retta CB fino al suo incontro in M colla tangente AT. Calcolare, con tutta l'esattezza che comporta l'uso delle tavole, la lunghezza AM; dare un limite superiore dell'errore relativo che si commetterebbe prendendo questa lunghezza per quella dell'arco AB. (*Caen*).

8. È dato un cerchio di centro O, di raggio R e di cui uno dei diametri è AB; sul raggio OB si porta una lunghezza $OS = h$, poi per S si conduce una perpendicolare SX su AB. Sia MON un diametro qualunque e si conducano le rette AM ed AN che tagliano rispettivamente SX in P e Q. Si domanda: 1° di determinare l' angolo $\varphi = MOB$ in modo che si abbia $MP.\,NQ = 2l^2$, l essendo noto. Discussione; 2° d'esaminare il caso particolare in cui $h = 2R$, $l^2 = \frac{5R^2\sqrt{3}}{2}$, e di calcolare in questo caso i lati e le diagonali del quadrilatero $MNPQ$; 3° di dimostrare che il quadrilatero $MNPQ$ è inscrittibile e che il cerchio circoscritto a questo quadrilatero taglia la retta AB in due punti fissi. (*Clermont*).

9. Sapendo che si ha

$$x + y + z = a, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b^2; \qquad x^3 + y^3 + z^3 = c^3,$$

si domanda di calcolare il prodotto xyz. (*Digione*).

10. È data una circonferenza di raggio r e di centro O, ed una retta D che non incontra la circonferenza. Si domanda di trovare sulla perpendicolare abbassata dal punto O sulla retta D un punto C tale che la circonferenza descritta su OC come diametro tagli la retta D e la circonferenza O in due punti A e B tali che la retta AB sia parallela ad OC.

S' indicherà con a la distanza data OI del punto O alla retta D. (*Digione*).

11. Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in un semicerchio il cui diametro dato $AD = 2R$; è noto il lato $BC = a$ che ha i suoi due vertici fuori del diametro e la somma $AB + CD = 2a$. Si domandano i due lati AB e CD, che si potranno rappresentare con $a - x$ ed $a + x$. Cos'è necessario affinchè il quadrilatero esista con questi dati? (*Grenoble*).

12. Calcolare i raggi delle due basi di un tronco di cono conoscendo l'apotema a e sapendo: 1° che la superficie totale uguaglia m volte quella di un cerchio di raggio $\frac{a}{2}$; 2° che l'apotema fa colla base maggiore un angolo di 60°.

Discussione supponendo che m riceva diversi valori. (*Grenoble*).

13. In un parallelogrammo $ABCD$ è dato l'angolo acuto $A = \alpha$ e le lunghezze $DE = a$, $EC = b$ delle rette congiungenti i vertici D e C al centro E di AB; si domandano i lati del parallelogrammo. Quanti parallelogrammi vi sono che rispondono alla quistione e che cosa è necessario affinché esistano?

Applicazione al caso particolare: $A = 60°$, $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $CE = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

(*Grenoble*).

14. Due mobili partono nello stesso istante da due punti A e B camminando sulla retta AB nel senso AB. Gli spazi percorsi dal primo mobile nei successivi tempi sono di metri a, $a + \alpha$,.... $a + (n - 1)\alpha$, quelli percorsi dal secondo b, $b + \beta$,.... $b + (n - 1)\beta$. Si domanda dopo quanti secondi i due mobili s'incontreranno, sapendo che la distanza $AB = p$.

Si discuterà la soluzione trovata. In particolare, il problema è sempre possibile? Qual significato può attribuirsi alle soluzioni negative? A quale relazione debbono soddisfare a, α, b, β e p perchè il problema non ammetta che una soluzione?

Applicazione. — Si calcolerà il numero dei secondi e la distanza AD del punto d'incontro D dal punto A, sapendo che $a = 1^m$, $\alpha = 2^m$, $b = 3^m$, $\beta = 1^m$, $p = 75^m$. (*Lione*).

15. È dato un triangolo isoscele ABC nel quale i lati uguali sono AB e AC; sia M il centro di BC, I il centro di BM. Si domanda di determinare la parallela PQ al lato BC, che incontra AB in P ed AC in Q, in modo che la somma $\overline{IP}^2 + \overline{IQ}^2$ uguagli una quantità data m^2.

Si rappresenterà con $4a$ la lunghezza del lato BC, con h l'altezza AM del triangolo, e si discuterà la posizione del punto P rispetto ad A e B. — Prendere per incognita la distanza x di BC e PQ. (*Montpellier*).

16. Risolvere l'equazione

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2} \qquad (\textit{Nancy}).$$

17. Un triangolo rettangolo isoscele ABC nel quale $AB = AC = b$, ruota intorno ad un asse Bx situato nel suo piano, passante pel vertice B e che non attraversa la superficie del triangolo. Calcolare il volume generato da questo triangolo in funzione dell'angolo α che l'ipotenusa BC fa con l'asse Bx.

Determinare α in modo da rendere questo volume massimo. (*Parigi*).

18. In un triangolo $A\,B\,C$ è data la base $B\,C = a$ e l'altezza h condotta da A. Si conduca la retta $B'\,C'$, parallela a $B\,C$, ad una distanza x da $B\,C$, e si congiungano i punti B' e C' ad un punto A' di $B\,C$. Si domanda di calcolare il volume V generato dal triangolo $A'\,B'\,C'$ ruotando intorno a $B\,C$. — Massimo di V. (*Parigi*).

19. Dati due punti A e B, studiare la variazione dell'angolo $A\,M\,B$ sotto il quale è veduto da un punto M il segmento $A\,B$, quando questo punto M si sposta sopra una retta $D\,D'$ data, perpendicolare ad $A\,B$, che incontra $A\,B$ in C. È dato $A\,C = a$, $B\,C = b$; si prenderà $M\,C = x$ come variabile. (*Parigi*).

20. Tagliare una sfera con un piano P in modo che il volume di uno dei segmenti ad una base così ottenuti abbia un rapporto dato m al volume del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza del segmento. (*Parigi*).

21. Su di una retta indefinita sono dati due punti A, B separati dalla distanza c. Un'altra retta indefinita $x\,y$ si sposta parallelamente a se stessa, facendo colla prima un angolo dato θ, e, in ciascuna delle sue posizioni, si abbassano su di essa, dai punti A e B, le perpendicolari $A\,A' = \alpha$, $B\,B' = \beta$. Indicando con a e b due coefficienti positivi costanti, si domanda:

1° di determinare il punto d'intersezione O delle due rette in modo che sia

$$a\,\alpha^2 + b\,\beta^2 = (a + b)\,m^2\,;$$

2° di trovare il valor minimo della quantità $a\,\alpha^2 + b\,\beta^2$ e la posizione corrispondente del punto O;

3° quale sarà allora la definizione geometrica di questo punto? (*Rennes*).

Risposte.

1. $$b = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4\,S\,(\cos A + 1)}{\operatorname{sen} A}} + \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4\,S\,(\cos A - 1)}{\operatorname{sen} A}}\right\}$$

$$c = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4\,S\,(\cos A + 1)}{\operatorname{sen} A}} - \sqrt{\frac{a^2 \operatorname{sen} A + 4\,S\,(\cos A - 1)}{\operatorname{sen} A}}\right\}.$$

2. 1°) $P\,A = \dfrac{2\,R\,r}{R - r}$, $\quad P\,M = \dfrac{2\,r\,\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + r^2\cos^2\alpha}}{R - r}$,

$P\,N = \dfrac{2\,R\,\sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2\alpha + r^2 \cos^2\alpha}}{R - r}$; 2°) $P\,A = 4$, $\quad P\,M = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$,

$P\,N = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; $\quad \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{r}{R + r}}$.

3. 1°) Il triangolo $A'\,B\,B'$ si conserva costantemente simile al triangolo $A\,O\,O'$.

2°) Gli archi $A\,C$ ed $A\,C'$ sono proporzionali ai raggi r ed r'.

3°) $S = 2\,r\,r' \operatorname{sen}(\alpha + \alpha') \,.\, \operatorname{sen}^2\psi$. Il massimo di S si ha per $\psi = 90°$ e $270°$. Area $S = A\,O\,O'$ quando $\psi = \pm 30°$ o $\pm 150°$.

4. L'equazione del problema è $x^4 - a^2 x^2 + h^4 - 20\,a^4 = 0$.

5. La lunghezza della retta che divide il trapezio nel modo richiesto è espressa da $\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

6. 1°) Le masse debbono essere proporzionali alle tangenti degli angoli corrispondenti; 2°) Le masse debbono essere proporzionali ai lati opposti.

7. $AM = 3 . \tan 7^\circ . 27' . 59'', 3 = 0{,}39264$. Limite superiore $\frac{2}{10000}$.

8. 1°) L'equazione del problema è $R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \pm l^2 \operatorname{sen} \varphi + h^2 - R^2 = 0$; 2°) $\varphi = 60^\circ$, $MP = R\sqrt{3}$, $NQ = 5R$, $PQ = 4R\sqrt{3}$, $MQ = R\sqrt{39}$, $NP = R\sqrt{13}$.

9. $xyz = \frac{2c^3 - 3ab^2 + a^3}{6}$. **10.** $-\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + r^2}$.

11. $x = \sqrt{\frac{a^3 + 3a^2R - 4R^3}{a - 2R}}$. Perchè il quadrilatero esista è necessario che sia $\frac{2R}{\sqrt{5}} < a \leqq R$.

12. Le equazioni del problema sono $x - y = \frac{a}{2}$, $8y^2 + 12ay - (m-3)a^2 = 0$, dev'essere $m \geqq 3$.

13. $\sqrt{\frac{(b^2 + a^2)\cos^2\alpha \pm \sqrt{(b^2 + a^2)^2 \cos^4\alpha - (b^2 - a^2)^2 \cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha}}$. Vi sono due parallelogrammi se $b \geqq a \geqq b \tan\frac{\alpha}{2}$. Applicazione: $2, \frac{1}{2}$; $1, 1$.

14. Detto x il numero dei secondi cercato; x è radice di $(\alpha - \beta)x^2 + (\beta - \alpha + 2a - 2b)x - 2p = 0$. Il problema ammette una soluzione unica quando $p = \frac{(\beta - \alpha + 2a - 2b)^2}{8(\beta - \alpha)}$. Applicazione: $x' = -10$, $AD' = -100^m$; $x'' = 15$, $AD'' = 225^m$.

15. L'equazione del problema è $2(4a^2 + h^2)x^2 - 16a^2hx + h^2(10a^2 - m^2) = 0$.

16. 0 o $\frac{63a}{65}$. **17.** $\frac{\pi}{3}\frac{b^3}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha)$; massimo per $\alpha = \operatorname{ang}\left(\operatorname{sen} = \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$: nel caso in cui BC cada entro l'angolo ABx. E $\frac{\pi}{3}\frac{b^3}{\sqrt{2}}(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)$, col massimo per $\alpha = 45^\circ$, qualora AB cada entro l'angolo CBx. **18.** $V = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{a}{h} x^2 (h - x)$. Massimo: $\frac{8}{81}\pi a h^2$.

19. Equazione $\operatorname{sen}^2\alpha . x^4 + [(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\alpha - (a - b)^2]x^2 + a^2b^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 0$; $\operatorname{sen}\alpha \leqq \frac{a-b}{a+b}$. **20.** Altezza segmento $= \frac{3R(2m-1)}{3m-1}$.

21. 1°) Posto $AO = x$, si ha $(a+b)\operatorname{sen}^2\theta . x^2 - 2bc\operatorname{sen}^2\theta . x + bc^2 \operatorname{sen}^2\theta - (a+b)m^2 = 0$; 2°) Minimo $= \frac{abc^2\operatorname{sen}^2\theta}{a+b}$; 3°) $AO : OB = b : a$.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Variazioni e limiti dei triangoli isobaricentrici e iscritti in un dato cerchio. — 1. Dato un cerchio K, di centro O e raggio R, e dato un punto G nel suo interno, si hanno infiniti triangoli aventi in G il comune baricentro, e iscritti nel cerchio K. I punti medi dei lati di questi triangoli giacciono in una circonferenza L, di centro N, che passa pure per i piedi delle altezze dei triangoli medesimi, ed è la circonferenza dei nove punti comune a quei triangoli, ed anche la figura omotetica inversa di K rispetto al centro di omotetia G, e la figura omotetica diretta di K rispetto al punto H, ortocentro comune di tutti quei triangoli (*). Di guisachè assegnato in K un punto A_1, e condotte le rette A_1H, A_1G, queste taglieranno L rispettivamente nei punti A'_1, M_1, e la retta A'_1M_1 taglierà K in due punti B_1, C_1, e sarà $A_1B_1C_1$ un triangolo iscritto in K, e avente in G il baricentro (**).

Mi propongo di studiare la variazione ed i massimi ed i minimi del triangolo $A_1B_1C_1$, quando A_1 si muove nella circonferenza K, senza ricorrere però al calcolo differenziale, del quale, a primo aspetto, pare che non si possa fare a meno, trattandosi, come più sotto si vedrà, di una funzione di 3° grado. E coglierò, a questo proposito, l'occasione di far conoscere ai giovani studenti che in questo giornale fanno le loro prime armi, un teorema da essi forse ignorato, e che è molto utile nello studio della variazione delle grandezze, specialmente in certe quistioni di geometria, in cui i metodi ordinarii sono poco adatti.

2. Se il cerchio L non taglia K, cioè è tutto interno a K, la precedente costruzione dà due triangoli isosceli isobaricentrici iscritti, ABC, $A'B'C'$ (***).

Ponendo $OG = m$, si ha $OH = 3m$, $ON = \frac{3m}{2}$, $OM = MN - ON = \frac{1}{2}(R - 3m)$, $MG = OM + OG = \frac{1}{2}(R - m)$, $AM = 3MG = \frac{3}{2}(R - m)$, quindi $\overline{MB}^2 = R^2 - \overline{OM}^2 = \frac{3}{4}(R - m)(R + 3m)$, e

$$16(\Delta ABC)^2 = 27(R - m)^3(R + 3m).$$

Similmente si trova

$$16(\Delta A'B'C')^2 = 27(R + m)^3(R - 3m),$$

onde

$$(\Delta ABC)^2 - (\Delta A'B'C')^2 = 27Rm^3,$$

cioè il triangolo ABC è maggiore del triangolo $A'B'C'$.

(*) Baltzer. — *Planim.*, § 12,8.

(**) Le rette A_1H, A_1G tagliano K in quattro punti; ma è facile verificare che una sola delle rette che congiungono questi quattro punti soddisfa alla quistione.

(***) Il lettore è pregato di farsi le figure. In queste figure io suppongo che G sia al disotto di O, che A sia il termine più basso del diametro OG, e A' il termine opposto. I lati BC, $B'C'$ risultano perpendicolari ad OG, ed è $BC > B'C'$. In queste figure M ed M' sono rispettivamente i punti medi dei lati BC, $B'C'$, N è il centro del cerchio L, il quale centro è il punto medio di OH.

Se il cerchio L taglia il cerchio K, il triangolo $A'B'C'$ non esisterà più; e se risulta tangente, il triangolo $A'B'C'$ avrà i vertici B', C' coincidenti.

3. Considero ora un triangolo qualunque $A_1B_1C_1$ iscritto in K, e avente in G il suo baricentro. Dico a_1, b_1, c_1 i numeri che misurano i suoi lati, S_1 la sua area. Si hanno le equazioni:

$$a_1 b_1 c_1 = 4RS_1, \qquad m^2 = R^2 - \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}{9},$$

$$16 S_1^2 = 4 b_1^2 c_1^2 - (b_1^2 + c_1^2 - a_1^2)^2.$$

Eliminando b_1 e c_1, dopo brevi riduzioni, si ha:

$$4S_1 = \frac{a_1 [9(R^2 - m^2) - 2a_1^2]}{\sqrt{4R^2 - a_1^2}};$$

ovvero, essendo $a_1 = 2R$ sen A_1:

$$4S_1 = 4R^2 \operatorname{sen} 2A_1 + (R^2 - 9m^2) \operatorname{tg} A_1.$$

Si può notare che se nella formola ora scritta si suppone $b_1 = c_1$, si deduce quella ricavata per altra via nel numero precedente.

4. Suppongo $\frac{R}{2} < ON < \frac{3R}{2}$, cioè (2): $\frac{R}{3} < m < R$. Allora i cerchi K ed L si taglieranno in due punti, A_2, A_3, il primo alla sinistra di AA', il secondo alla destra. Le rette A_2G, A_3G tagliano di nuovo K nei punti C_2, C_3 rispettivamente, e se si pone $A_2 \equiv B_2$, $A_3 \equiv B_3$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ si dovranno riguardare come due triangoli isobaricentrici iscritti di area nulla. I punti C_2, C_3 determinano l'arco C_3C_2 (*), in cui non cadono vertici degli infiniti triangoli isobaricentrici iscritti (**).

Se ora A_1 cade nell'arco AA_2, B_1 cadrà nell'arco A_2C_1 e C_1 nell'arco C_2B (B è alla destra di C); e se A_1 cade nell'arco A_2C, B_1 cadrà nell'arco AA_2, e C_1 nell'arco C_2B. Se A_1 cade nell'arco CC_3, avviene nell'arco BA_3A ciò che accadeva nell'arco AA_2C. Basterà quindi studiare la variazione del triangolo $A_1B_1C_1$, quando A_1 varia nell'intervallo AA_2. Ora si noti che il punto M in questo caso cade fra O ed A, perchè dall'essere $R < 3m$, risulta $3R - 3m < 2R$, cioè $\frac{3}{2}(R - m) < R$, cioè ancora (2), $AM < R$. E allora B_1C_1, che taglia L in M_1 ed A'_1, sarà minore di BC, perchè è $OM_1 > OM$, ed M_1 è il punto medio di B_1C_1. Inoltre è manifestamente $A_1A'_1 < AM$, e quindi il triangolo $A_1B_1C_1$ è minore del triangolo ABC. Di più, siccome avvicinandosi A_1 ad A_2, anche B_1 si avvicina ad A_2, segue che variando A_1 da A ad A_2, il triangolo $A_1B_1C_1$ decresce fino a zero, per poi crescere di nuovo, quando A_1 oltrepassa il punto A_2. Ove si noti infine che nel passaggio del punto A_1 per il punto A_2 l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ cambia di segno, si può enunciare il seguente teorema:

(*) Seguo la consuetudine di leggere un arco in modo che dal termine primo letto al secondo si proceda nel senso del movimento delle lancette dell'orologio.

(**) Si intende dei triangoli reali.

Se il punto A_1 *si muove nella circonferenza* K, *partendo da* C_2, *l'area del triangolo* $A_1B_1C_1$, *dapprincipio nulla, acquista un valore, che io suppongo positivo, e cresce. Nel punto* B *quell'area tocca un massimo, rappresentato dall'area del triangolo isoscele* ABC, *e poi decresce, fino ad annullarsi di nuovo nel punto* A_3. *Quivi cambia di segno, e algebricamente decresce fino al punto* A, *in cui ripiglia il valore dell'area del triangolo* ABC, *che va attualmente riguardato come un minimo. Da* A *algebricamente cresce fino ad annullarsi nel punto* A_2, *dove di nuovo cambia di segno, cresce fino in* C, *dove raggiunge il primitivo massimo, e infine decresce sino a zero nel punto* C_3.

Si può in particolare enunciare il seguente teorema:

Se di tutti i triangoli isobaricentrici e iscritti in un dato cerchio, ve ne è un solo isoscele, questo avrà l'area massima.

5. Se $ON = \frac{R}{2}$, se cioè (2), $R = 3m$, i cerchi L e K risulteranno tangenti internamente. In questo caso la costruzione indicata nel n. 1 mostra che tutti i triangoli isobaricentrici iscritti sono rettangoli, e il vertice dell'angolo retto cade per ciascuno nel punto $H \equiv A$. In quest'ipotesi si ha perciò:

Se A_1 *si muove da* A′ verso B, $A_1B_1C_1$ *cresce, toccando un massimo in* B; *poi decresce fino a zero in* A; *quivi cambia di segno, e in valore assoluto cresce fino in* C, *d'onde poi, sempre in valore assoluto, decresce fino a ritornare a zero nel punto* A′.

6. Se $m < \frac{R}{3}$, il cerchio L sarà tutto interno al cerchio K. In questo caso non riesce agevole, col metodo precedente, studiare la variazione di S_1. Adoprerò il metodo indicato in principio, che è fondato sul seguente teorema:

« Se Y è una funzione continua, in un dato intervallo, della variabile in-
« dipendente x, e che può essere messa sotto la forma d'una somma o d'una
« differenza di due funzioni U, V della x stessa, le quali restino positive in
« quell'intervallo, allora, se, nel primo caso, per un accrescimento positivo h
« di x, l'una delle funzioni aumenta di k, e l'altra diminuisce di l, e se, nel
« secondo caso U e V prendono gli accrescimenti k ed l, vi sarà accrescimento
« o diminuzione di Y secondochè il limite del rapporto $\frac{k}{l}$, per $h = 0$, sarà
« più grande o più piccolo di 1; e i massimi e i minimi della funzione avranno
« luogo quando il limite di quel rapporto sarà eguale all'unità (*) ».

Ciò posto considero l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ sotto la forma (3)

$$4S_1 = 4R^2 \operatorname{sen} 2A_1 + (R^2 - 9m^2) \operatorname{tg} A_1.$$

Ora dei tre angoli del triangolo $A_1B_1C_1$ uno almeno sarà maggiore di 45°, e questo sia A_1. Allora $2A_1$ sarà maggiore di 90°, e crescendo A_1, $4R^2 \operatorname{sen} 2A_1$ decrescerà. Inoltre, come è facile verificare, i triangoli isobaricentrici iscritti in questo caso risultano tutti acutangoli, e tang A_1 sarà positiva. Così $4S_1$ è messa sotto la forma d'una somma di due funzioni della variabile A_1, le quali ri-

(*) Desboves. — *Questions de Géométrie élémentaire.* — Troisième édition, Paris, 1880. Pag. 117.

mangono positive nel totale movimento di A_1. Di queste due funzioni, quando A_1 prende un accrescimento positivo, la prima diminuisce e la seconda cresce, onde è il caso di applicare il teorema rammentato (*).

A questo scopo pongo $A_1 + h$ invece di A_1. Allora $(R^2 - 9m^2)\operatorname{tg} A_1$ aumenta di

$$(R^2 - 9m^2)\,[\operatorname{tg}(A_1 + h) - \operatorname{tg} A_1] = \frac{(R^2 - 9m^2)\operatorname{sen} h}{\cos(A_1 + h)\cos A_1}$$

e $4R^2 \operatorname{sen} 2A_1$ diminuisce di

$$4R^2\,[\operatorname{sen} 2A_1 - \operatorname{sen}(2A_1 + 2h)] = -\,8R^2 \operatorname{sen} h \cos(2A_1 + h).$$

Il rapporto fra l'aumento e la diminuzione sarà:

$$-\frac{R^2 - 9m^2}{8R^2} \cdot \frac{1}{\cos(A_1 + h)\cos A_1 \cos(2A_1 + h)},$$

il cui limite, per $h = 0$, è

$$\frac{9m^2 - R^2}{8R^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 A_1 \cos 2A_1}.$$

Eguagliando questo limite ad 1, si ottengono i valori di A_1 che rendono massima o minima l'area S_1. Si ha l'equazione

$$2\cos^4 A_1 - \cos^2 A_1 - \frac{9m^2 - R^2}{8R^2} = 0,$$

da cui

$$\cos^2 A_1 = \frac{R \pm 3m}{4R}.$$

Prendendo $\cos^2 A_1 = \dfrac{R + 3m}{4R}$, si avrà, dopo alcune riduzioni:

$$\operatorname{sen}^2 2A_1 = \frac{3(R - m)(R + 3m)}{4R^2}, \qquad \operatorname{tg}^2 A_1 = \frac{3(R - m)}{R + 3m}$$

$$16S_1^2 = 27(R - m)^3(R + 3m) = 16(\Delta\,.\,ABC)^2.$$

Prendendo $\cos^2 A_1 = \dfrac{R - 3m}{4R}$, risulta:

$$16S_2^2 = 27(R + m)^3(R - 3m) = 16(\Delta\,.\,A'B'C')^2.$$

E si sa dal n. 2 che $ABC > A'B'C'$. Se si osserva inoltre che il detto limite per $A_1 = B$ diviene (2) $\dfrac{R^2 - 9m^2}{8R^2} \cdot \dfrac{16R^2}{R^2 - 9m^2} = 2$, il che significa che quando il punto A_1 si muove, in un senso o nell'altro, ed è prossimo a B, l'area del triangolo $A_1B_1C_1$ cresce, e quindi decresce nel caso contrario, e che

(*) Con A_1 ora indico un punto, ed ora un angolo. Con ciò però non viene ad ingenerarsi confusione alcuna.

una simile osservazione si faccia in B' ed in A, osservazione che si ommetta per brevità, si deduce il seguente teorema:

Se di tutti i triangoli isobaricentrici iscritti in un dato cerchio ve ne sono due isosceli, e questi sieno ABC, A'B'C', *l'area d'un qualsivoglia triangolo isobaricentrico iscritto* $A_1B_1C_1$, *quando un suo vertice* A_1 *si muove nella circonferenza del dato cerchio, varierà in modo continuo, mantenendosi sempre del medesimo segno, e passerà, in un intero giro del punto* A_1, *tre volte per un massimo, e ciò avverrà quando* A_1 *coinciderà con* B, A, C, *e tre volte per un minimo, e ciò avverrà, quando* A_1 *coinciderà con* B', C', A'. *I tre massimi sono uguali fra loro, e sono rappresentati dal triangolo* ABC, *i tre minimi sono pure eguali fra loro, e rappresentati dal triangolo* A'B'C'.

Si ha anche:

Se dei triangoli isobaricentrici iscritti in un cerchio ve ne sono due isosceli, di essi uno è massimo, ed è quello che ha la base maggiore, e l'altro è minimo.

Prof. Seb. Catania.

Nota sulla Quistione 105. — La quistione 105 (*), della quale, nel fascicolo precedente di questo Periodico, si dà una soluzione analitica, offre un bell'esempio dell'eleganza che spesso si raggiunge coi metodi di geometria pura.

Dinotino A e B' rispettivamente il vertice e l'ortocentro dati, l_1 ed l_2 le due rette date ed R il punto ove esse si tagliano. Se A_1 ed A_2 sono gli altri due vertici del triangolo cercato, cioè quei vertici che appartengono ordinatamente alle rette l_1 ed l_2, è chiaro che il lato A_1A_2 è perpendicolare ad AB', ed A_2B' è perpendicolare ad AA_1. E viceversa: se AA_1A_2 è un triangolo nel quale A_1A_2 è perpendicolare ad AB' ed A_2B' è perpendicolare ad AA_1, esso risolve il problema.

Inoltre, se X è il punto d'incontro delle rette AA_1 ed A_2B', noto X, il triangolo AA_1A_2 si può facilmente costruire; quindi il problema si può ridurre alla ricerca del punto X.

Omettendo nel problema la condizione che A_2B' sia perpendicolare ad AA_1 e tenendo ferme le altre, il triangolo non è determinato. E poichè evidentemente, al variare di esso, i vertici A_1 ed A_2 segnano sulle rette l_1 ed l_2 due punteggiate proiettive, i fasci, che proiettano queste punteggiate da A e da B' ordinatamente, sono proiettivi e determinano sulla circonferenza di diametro AB' due serie proiettive di punti; ed i punti uniti di queste serie sono chiaramente le posizioni del punto cercato X.

Per costruire con facilità tre coppie di punti corrispondenti delle due serie proiettive sulla circonferenza, si conducano ad essa le tangenti in A e B' e sieno P_1, P_2; Q_1, Q_2 i punti d'incontro di ciascuna delle tangenti con le rette l_1, l_2 ordinatamente, e si disegnino le rette AR e $B'R$. È facile vedere che nei fasci

(*) Cioè: *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

proiettivi di centri A e B' sono corrispondenti i raggi: AP_1 e $B'P_2$, AQ_1 e $B'Q_2$, AR e $B'R$, dai quali raggi si deducono le coppie di punti corrispondenti delle due serie e da questi punti si deduce la retta che taglia la circonferenza nei punti cercati X.

È utile osservare che quest'ultima retta, nel caso che A, B' ed R sono per diritto, è la P_1Q_2, e quindi il problema in questo caso si costruisce con grandissima semplicità.

Napoli, giugno 1892. T. Fuortes.

Alcuni teoremi affini di geometria. — *Se due corde d'un angolo, segantisi sulla bisettrice dell'angolo, sono uguali, esse sono ugualmente inclinate a questa bisettrice.*

Sia $ACB = 2\alpha$ l'angolo, CO la sua bisettrice, AOD una corda dell'angolo e pongasi $CO = c$, $AO = a$, $OD = a'$, ang. $COA = \beta$.

Dalla trigonometria si ha subito

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}[\pi - (\beta + \alpha)]} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)},$$

$$\frac{a'}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}[\pi - (\pi - \beta + \alpha)]} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)},$$

onde

$$[1] \qquad m = a + a' = c \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\beta + \alpha)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}\right).$$

Riducendo a forma intera si ottiene successivamente:

$$c \operatorname{sen}\alpha\,[\operatorname{sen}(\beta + \alpha) + \operatorname{sen}(\beta - \alpha)] - m \operatorname{sen}(\beta + \alpha)\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = 0$$

$$2c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\beta - m(\operatorname{sen}^2\beta \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\beta) = 0$$

$$\operatorname{sen}^2\beta - \frac{2c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{m} \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}^2\alpha = 0,$$

equazione di 2° grado rispetto a $\operatorname{sen}\beta$. Osservando che le sue radici sono reali, avremo dunque:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{c \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{m} + \sqrt{\frac{c^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha}{m^2} + \operatorname{sen}^2\alpha},$$

dove si è preso il solo segno $+$ pel radicale essendo da considerare $\beta < \pi$ e positivo.

Quando c ed m sono assegnati, così che il 2° membro della precedente eguaglianza non superi l'unità, il valore che può avere $\operatorname{sen}\beta$ è dunque unico e i due valori dell'angolo, corrispondenti, sono: $\beta\left(\leq \frac{\pi}{2}\right)$ e $\pi - \beta$, ossia « se due corde passanti per lo stesso punto della bisettrice di un angolo hanno la stessa lunghezza m e non coincidono, gli angoli che esse formano colla bisettrice (nello stesso senso) saranno supplementari » (*).

Corollario. — *Se in un triangolo due bisettrici sono uguali, il triangolo è isoscele, con uguali i lati su cui cadono queste bisettrici.*

Nel triangolo ABC siano uguali le bisettrici AD, BE degli angoli A e B e chiamisi O il punto d' incontro di AD, BE, per O passa la bisettrice dell'angolo C. Il teorema precedente ci permette di concludere che saranno pure uguali gli angoli AOC, COB e perciò uguali i triangoli AOC, COB, ossia $AC = CB$ c. d. d..

M. Sacchi.

Teorema. *Se un triangolo ha due angoli disuguali, la bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Nel triangolo ABC (fig. 1ª e 2ª) sia l'angolo C maggiore dell'angolo B e siano CH e BD rispettivamente le loro bisettrici. Suppongasi dapprima (fig. 1ª) l'angolo A non minore dell' angolo B e facciasi l' angolo BCE

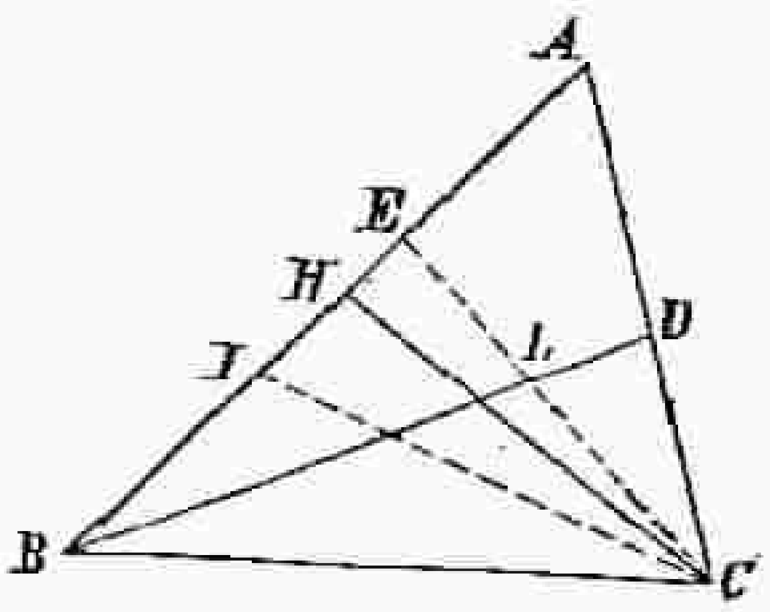


Fig. 1.

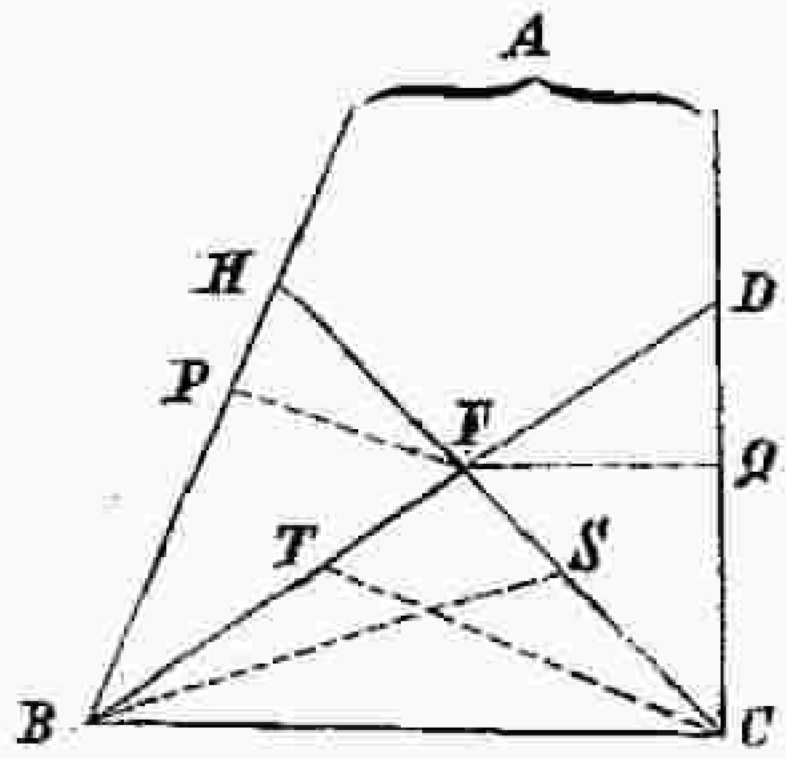


Fig. 2.

uguale all'angolo B e conducasi la bisettrice CI dell' angolo BCE, sarà $CI = BL$, perchè il triangolo EBC è isoscele. Nel triangolo HIC sarà poi: ang. $HIC = B + \frac{B}{2}$ ed ang. $IHC = A + \frac{C}{2}$ e quindi: ang. $IHC >$ ang. HIC e $CI > CH$, $BL > CH$ e $BD > CH$.

Suppongasi ora (fig. 2ª) l' angolo A minore dell' angolo B. Si avrà: ang. $BHC = A + \frac{C}{2}$ ed ang. $BDC = A + \frac{B}{2}$ e quindi: ang. $BHC >$ ang. BDC; inoltre questi due angoli sono acuti. Infatti, facciasi ang. $SBC =$ ang. $TCB = A$; ne risulteranno internamente al triangolo ABC i due trian-

(*) Osservando che la [1] può anche scriversi

$$m = \frac{2c \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{c \operatorname{sen} 2\alpha}{\operatorname{sen}\beta - \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\beta}}$$

si deduce che dato c, m può variare dal valor minimo $2c \tan\alpha$ all'infinito. Infatti per $\beta = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\beta$ ha il massimo valore e $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$ il minimo, onde m assume il valor minimo.

goli HBS e TCD isosceli sui lati HS e TD rispettivamente perchè è: ang. $HSB = A + \frac{C}{2} = BHS$ ed ang. $DTC = A + \frac{B}{2} = CDT$. Si conducano ora dal punto F d'intersezione delle bisettrici le perpendicolari FP ad AB ed FQ ad AC, si otterranno i due triangoli rettangoli FPH ed FQD cogli angoli acuti BHC e BDC. In questi triangoli rettangoli per essere ang. $PHF >$ ang. FDQ ed $FP = FQ$ sarà $FD > FH$; nel triangolo FBC è poi $BF > CF$ per essere ang. $FCB >$ ang. FBC. Onde infine: $BF + FD > CF + FH$, ossia $BD > CH$.

Corollario. Si deduce per assurdo che « se un triangolo ha due bisettrici uguali, gli angoli corrispondenti sono uguali e perciò il triangolo è isoscele ».

V. Carpaneto.

Teorema. *In ogni triangolo al lato maggiore è opposta bisettrice minore.*

1ª Dimostrazione. Nel triangolo ABC, siano BD, CE le bisettrici degli angoli B e C, dico che se $AB > AC$, sarà $CE < BD$.

Per un noto teorema si ha $AB : BC :: AD : DC$ e $AC : BC :: AE : EB$ e componendo:

$$AB + BC : BC :: AC : DC \quad , \quad AC + BC : BC :: AB : BE,$$

da cui uguagliando i valori di BC

$$\frac{(AB + BC) \cdot DC}{AC} = \frac{(AC + BC) \cdot BE}{AB}.$$

Ora essendo per ipotesi $AB + BC > AC + BC$ ed $AC < AB$ segue $\frac{AB + BC}{AC} > \frac{AC + BC}{AB}$, sicchè dall'eguaglianza precedente deducesi $DC < BE$.

Dalle stesse proporzioni si ricava poi

$$AB \cdot BC : \overline{BC}^2 :: AD \cdot DC : \overline{DC}^2 \quad \text{e} \quad AC \cdot BC : \overline{BC}^2 :: AE \cdot EB : \overline{EB}^2$$

ed avendosi per un altro teorema noto

$$AB \cdot BC = \overline{BD}^2 + AD \cdot DC \quad \text{e} \quad AC \cdot BC = \overline{CE}^2 + AE \cdot EB,$$

sostituendo nelle ultime proporzioni, consegue

$$\overline{BD}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{DC}^2 :: AB \cdot BC : \overline{BC}^2 :: AB : BC$$

e

$$\overline{CE}^2 : \overline{BC}^2 - \overline{BE}^2 :: AC : BC$$

e finalmente dividendo termine a termine

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{CE}^2} = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2} \cdot \frac{AB}{AC}.$$

Ma si è dimostrato $DC < BE$ e per ipotesi si ha $AB > AC$, quindi

$$\frac{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}{\overline{BC}^2 - \overline{BE}^2} > 1 \quad , \quad \frac{AB}{AC} > 1$$

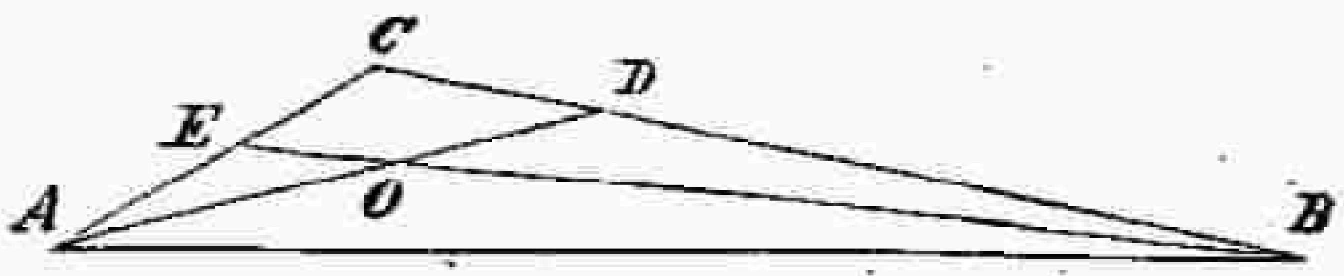
dunque finalmente $\overline{BD}^2 > \overline{CE}^2$ e $BD > CE$, c. d. d.. A. Lugli.

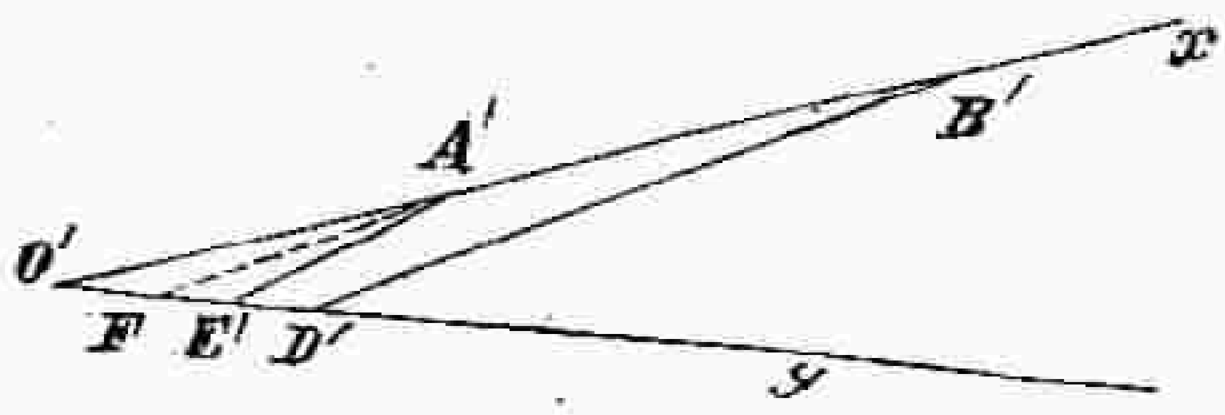
2^a *Dimostrazione.* Sia il triangolo ABC, nel quale il lato BC è maggiore di AC; dico che la bisettrice BE dell'angolo B supera la bisettrice AD dell'angolo A.

Essendo O il punto d'incontro delle bisettrici, bisogna dimostrare la relazione

$$BO + OE > AO + OD. \qquad [1]$$

In causa di $BO > AO$, quest'eguaglianza sarebbe evidente quando si avesse $OE > OD$. Supponiamo dunque che si verifichi il contrario.





Sui lati d'un angolo $xO'y$ uguale a BOD, prendiamo $O'A' = OA$, $O'B' = OB$, $O'D' = OD$, $O'E' = OE$, e tiriamo le rette $A'E'$, $B'D'$. Gli angoli $A'E'y$, $B'D'y$, rispettivamente uguali a BEC, ADC, hanno per valori $A'E'y = A + \frac{1}{2}B$, $B'D'y = B + \frac{1}{2}A$, dunque

$$A'E'y > B'D'y. \qquad [2]$$

D'altro lato, a motivo di $2\ \text{Retti} > A + B$, si ha $2\ \text{Retti} - B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}A$ ed a più forte ragione $2\ \text{Retti} - B - \frac{1}{2}A > \frac{1}{2}B$. Conseguentemente

$$O'B' > O'D'. \qquad [3]$$

Conduciamo $A'F$ parallela a $B'D'$; l'ineguaglianza [2] prova che il punto F è situato fra i punti O' ed E'; ma in causa dell'ineguaglianza [3], si ha ancora, com'è facile riconoscere, $A'B' > FD'$, dunque a maggior ragione $A'B' > D'E'$ o $O'B' - O'A' > O'D' - O'E'$, ciò che equivale all'ineguaglianza [1] (*).

Corollario. A delle bisettrici uguali sono opposti dei lati uguali.

Teorema. *Se le bisettrici di due angoli d'un triangolo sono uguali esso è isoscele.*

Nel triangolo ABC siano α e β le bisettrici degli angoli A e B. Si ha, com'è noto:

$$\alpha^2 = \frac{bc\,(b + c - a)\,(a + b + c)}{(b + c)^2}\quad,\quad \beta^2 = \frac{ca\,(c + a - b)\,(a + b + c)}{(c + a)^2}.$$

(*) Questa dimostrazione è presa letteralmente dall'opera: E. Catalan. *Théorèmes et Problèmes de Géométrie Élémentaire.* 5e édition. Paris, Dunod éditeur, 1872. Abbiamo stimato opportuno aggiungerla per l'interesse che presenta la proposizione alla quale si riferisce.

V. un'altra dimostrazione nel Baltzer, *Plan.* p. 99 della 3a ediz..

Nel venturo fascicolo verranno pubblicate ancora altre dimostrazioni di questa proposizione e del teorema seguente.

Suppongasi ora $\alpha = \beta$, sarà:

$$bc\,(b + c - a)\,(c + a)^2 = ca\,(c + a - b)\,(b + c)^2\,,$$

ossia sviluppando e raccogliendo:

$$(a - b)\,[c^3 + (a + b)\,c^2 + 3\,abc + (a + b)\,ab] = 0\,,$$

e poichè il secondo fattore di questo prodotto è una quantità essenzialmente diversa da zero e positiva, così per l'annullarsi del prodotto stesso dev'essere $a - b = 0$, ovvero $a = b$ (*).

Tema di matematica per la licenza dagli Istituti tecnici. — *Le bisettrici degli angoli interni di un triangolo* ABC *incontrino i lati* BC, CA, AB *rispettivamente nei punti* A′, B′, C′. *Supposti conosciuti i lati* BC = a, CA = b, AB = c, *trovare i valori dei segmenti* BA′, A′C, CB′, B′A, AC′, C′B *e il rapporto fra le aree dei triangoli* ABC, A′B′C′.

Dalla notissima proprietà espressa dalla proporzione $CB' : B'A = a : c$, si ha $CB' = \dfrac{ab}{a + c}$, $B'A = \dfrac{bc}{a + c}$ e permutando circolarmente:

$$AC' = \frac{bc}{b + a}\,, \quad C'B = \frac{ca}{b + a}\,; \qquad BA' = \frac{ca}{c + b}\,, \quad A'C = \frac{ab}{c + b}\,.$$

Osservando che i triangoli ABC, $AB'C'$ hanno un angolo eguale, si deduce che $\Delta ABC : \Delta AB'C' = bc : \dfrac{bc}{b + a} \cdot \dfrac{bc}{a + c} = \dfrac{(a + c)\,(b + a)}{bc}$, onde

$$\Delta AB'C' = \frac{bc\,.\,\Delta}{(a + c)\,(b + a)}\,,$$

indicando con Δ il triangolo ABC. Similmente

$$\Delta BC'A' = \frac{ca\,.\,\Delta}{(b + a)\,(c + b)}\,, \qquad \Delta CA'B' = \frac{ab\,.\,\Delta}{(c + b)\,(a + c)}\,.$$

Dopo ciò si ha

$$\Delta A'B'C' = \Delta\left(1 - \frac{bc}{(a+c)\,(b+a)} - \frac{ca}{(b+a)\,(c+b)} - \frac{ab}{(c+b)\,(a+c)}\right) = \frac{2\,abc}{(a + b)\,(b + c)\,(c + a)}$$

e conseguentemente

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{(a + b)\,(b + c)\,(c + a)}{2\,abc}\,.$$

(*) La presente dimostrazione può anche leggersi nell'*Appendice* dei Sigg. Prof. D. Gambioli e V. Bernardi all'edizione italiana della Geometria dello Schlömilch.

Due dimostrazioni sintetiche, però soltanto apparentemente dirette, di questo teorema possono leggersi a p. 138 e 311 del t. I, 1841, dei *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Non vengono riportate per il poco interesse didattico che presentano.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
96, 105, 110*, 120*, 121*, 122*, 123*, 124* e 125*

96. *Dimostrare che, se la congruenza generale di 2° grado e di modulo primo* p

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \equiv 0 \qquad mod.\ p$$

non è parabolica, se cioè $b^2 - 4ac$ *non è* 0, *mod.* p, *essa, in generale, cioè quando* $ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf$ *non è* 0 *mod.* p, *ha* $p - 1$ *soluzioni se è iperbolica, se cioè* $b^2 - 4ac$ *è resto quadratico mod.* p, *e ne ha* $p + 1$ *se è ellittica.* (G. Frattini).

Dimostrazione del Sig. Prof. *U. Scarpis.*

Una congruenza generale di 2° grado e di modulo primo p si può sempre porre sotto la forma

$$(1) \qquad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv 0.$$

Riferite a quest'ultima congruenza, le condizioni espresse nella enunciazione del teorema che si deve dimostrare diventano:

$$\Delta = abc + 2ghf - af^2 - bg^2 - ch^2 \overset{1}{\underset{1}{\equiv}} 0$$

$$C = ab - h^2 \overset{1}{\underset{1}{\equiv}} 0.$$

Se ora si pone

$$G = fh - bg\ ; \qquad F = gh - af,$$

e si chiama $f(x, y)$ il primo membro della (1), si avrà l'identità (D'Ovidio — *Le pro. fond. d. curve di 2° ordine*, n. 4)

$$(2) \qquad bCf(x, y) = C(hx + by + f)^2 + (Cx - G)^2 + \Delta b.$$

Non essendo C multiplo di p, e supponendo per ora che non lo sia neppure b, alla (1) potrà dunque sostituirsi l'equivalente

$$(3) \qquad X^2 - (h^2 - ab)\, Y^2 \equiv - \Delta b$$

(si è posto $Cx - G = X$ ed $hx + by + f = Y$). Per la quistione 84 (fasc. 1°, 1891) si trova che, non imponendo alcuna condizione ai segni, la (3) ammette $p - 1$ soluzioni, a due a due eguali ed opposte, se $h^2 - ab$ è residuo quadratico mod. p, e ne ammette $p + 1$ nel caso opposto.

Ciò premesso, essendo C e b diverse da 0 mod. p, le formole

$$Cx - G = X\ ; \qquad hx + by + f = Y$$

mostrano che ad ogni soluzione (X, Y) della (3) ne corrisponde una ed una sola per la (1), e a soluzioni diverse della (3) soluzioni diverse per la (1). E poichè è vera anche la reciproca, si conclude che la (1), al pari della (2), ammette $p-1$ soluzioni, se h^2-ab è residuo quadratico, e $p+1$ nel caso contrario.

Se fosse $b\equiv 0$, invece dell'identità (2) si considererebbe l'altra

$$aCf(x, y)\equiv(ax+hy+g)^2+(Cy-F)^2+\Delta a$$

e, ragionando come sopra, si concluderebbe che la proposta congruenza ha $p-1$ radici, per essere in questo caso $h^2-ab\equiv h^2$ un residuo quadratico.

Rimane a discutersi il caso $a\equiv b\equiv 0$, ossia il caso della congruenza

$$2(hy+g)x+2fy+c\equiv 0$$

per h diversa da 0 mod. p, tale dovendo essere h^2-ab. La condizione $\Delta \underset{1}{\overset{1}{\equiv}} 0$, divisa per h, dà l'altra

$$ch-2gf\underset{1}{\overset{1}{\equiv}} 0.$$

Dando alla y tutti i valori $0, 1, 2, \ldots\ldots p-1$ (escluso quello per il quale $hy+g\equiv 0$, perchè dalle condizioni $hy+g\equiv 0$ e $2fy+c\equiv 0$ seguirebbe l'altra $ch-2gf\equiv 0$, contraria all'ipotesi) i $p-1$ corrispondenti valori per la x dovranno risultare fra loro diversi. Infatti, se si avesse

$$2hxy+2gx+2fy+c\equiv 0$$
$$2hxy'+2gx+2fy'+c\equiv 0,$$

si dedurrebbe, eliminando x, $ch-2gf\equiv 0$, contro l'ipotesi. Nel caso che si considera la proposta congruenza (manifestamente iperbolica, perchè $h^2-ab\equiv h^2$ è residuo) ammette adunque $p-1$ soluzioni.

105. *Determinare i triangoli ciascuno dei quali soddisfi alle seguenti condizioni: un vertice cada in un punto dato, i due vertici rimanenti cadano in due date rette, uno per ciascuna, e l'ortocentro sia un punto assegnato.*

(S. Catania).

Soluzione del Sig. Prof. *F. Palatini.*

Siano A il vertice, O l'ortocentro dati. Se fissiamo uno degli altri due vertici, B, il terzo vertice, C, sarà il punto d'incontro delle perpendicolari abbassate da A e da O rispettivamente sulle OB, AB. Dopo di che è chiaro che quando B varia sopra una retta g i due raggi uscenti da O e da A, i quali determinano il corrispondente C, descrivono due fasci proiettivi che generano una conica G (in generale un' iperbole) passante per A, O e per i punti P, Q all'infinito delle direzioni perpendicolari alla OA e alla g, corrispondenti l'uno al punto (g, AO), l'altro al punto all'infinito di g. Ora date due rette g, g_1, la G corrispondente alla g incontra g_1 in due punti C, C_1, i quali con la costruzione sopra indicata determinano due punti B, B_1 della g tali che i triangoli ABC, AB_1C_1 soddisfano al problema proposto. Evidentemente poi la G_1 corrispondente alla g_1 taglia g nei punti B, B_1 ora considerati. Così si vede intanto che il problema ammette in generale due soluzioni le quali possono essere tutt'e due reali o immaginarie ed anche coincidenti, ed è pure dato il modo di ottenerle mediante note costruzioni.

La corrispondenza ora considerata fra i punti B, C determina una trasformazione quadratica; i punti fondamentali della rete di coniche G corrispondente alla rete di rette g del piano, sono A, O, P. Al fascio di rette g parallele alla AO corrisponde un fascio di parabole: ad ogni retta passante per A (per O) corrisponde una conica formata dalla AP (OP) e dalla perpendicolare alla data retta passante per O (A); ad ogni retta passante per P corrisponde la conica formata dalla retta stessa e dalla AO. È chiaro ancora che quando B è sulla circonferenza H che ha per diametro AO, il corrispondente C coincide con B. Da queste considerazioni che si ricavano dal modo di costruzione di C, dato B, risultano facilmente i seguenti casi particolari principali, nei quali inoltre si possono avere costruzioni più semplici che nel caso generale.

Quando g, g_1 s'incontrano in un punto M di H, si ha soltanto una soluzione (perchè le G, G_1 incontrano le due rette in M), tranne quando le due rette passano per di più per A, O, chè allora vi sono infinite soluzioni, perchè soddisfano alla quistione tutti quei triangoli i cui vertici B, C sono i due punti d'incontro di g, g_1 con una perpendicolare ad AO. Una sola soluzione (propria) si ha pure quando le due rette passano comunque ambedue per A o per O, ed ancora quando g_1 si prende parallela ad un assintoto della G che corrisponde a g, cioè se passa per P o se è perpendicolare a g (senza essere un assintoto). Non si ha poi alcuna soluzione (propria) se le due rette passano comunque rispettivamente per A, O, oppure tutt'e due per P, oppure se g_1 è un assintoto di G.

Infine può darsi che le due soluzioni siano coincidenti, il che avviene quando g_1 si prende tangente a G (ed allora anche G_1 riesce tangente a g). Fissata una g esistono ∞^1 g_1 (tutte quelle che inviluppano G) tali che per ogni coppia g, g_1 le due soluzioni sono coincidenti; vi sono dunque ∞^3 coppie di rette per le quali le due soluzioni coincidono.

110'. *Posto*

$$b_n = 2^n + \binom{n-1}{1} \cdot 2^{n-2} + \binom{n-2}{2} \cdot 2^{n-4} + \ldots\ldots$$

dove il 2° membro finisce col termine 1 *se* n *è pari e con* $\frac{n+1}{2} \cdot 2$ *se* n *è dispari, dimostrare che si ha:*

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n}.$$

(F. Giudice).

Dimostrazione del Sig. *E. de Vito*, licenziato dall'Istituto tecnico di Roma.

Dimostro prima che si ha

$$2\,b_{n-1} + b_{n-2} = b_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Sia n pari: il 1° membro della [1] diviene

$$2\left[2^{n-1}+\binom{n-2}{1}2^{n-3}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}2\right]+$$

$$+\left[2^{n-2}+\binom{n-3}{1}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-2}2^2+1\right]=$$

$$=2^n+\left\{\binom{n-2}{1}+1\right\}2^{n-2}+\left\{\binom{n-3}{2}+\binom{n-3}{1}\right\}2^{n-4}+\ldots\ldots$$

$$+\left\{\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-1}+\binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}-2}\right\}2^2+1=$$

$$=2^n+\binom{n-1}{1}2^{n-2}+\binom{n-2}{2}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}-1}2^2+1=b_n,$$

a motivo della relazione generale $\binom{m}{i+1}+\binom{m}{i}=\binom{m+1}{i+1}$.

Se n è dispari lo stesso 1° membro diventa

$$2\left[2^{n-1}+\binom{n-2}{1}2^{n-3}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-3}{2}}2^2+1\right]+$$

$$+\left[2^{n-2}+\binom{n-3}{1}2^{n-4}+\ldots\ldots+\binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-5}{2}}2^2+\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}.2\right]=$$

$$=2^n+\left\{\binom{n-2}{1}+1\right\}2^{n-2}+\ldots\ldots+\left\{\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-3}{2}}+1\right\}2=$$

$$=2^n+\binom{n-1}{1}2^{n-2}+\ldots\ldots+\frac{n+1}{2}.2=b_n.$$

Posto ciò, osservo che

$$\frac{b_{n-1}+b_n}{b_n}=1+\frac{1}{\frac{b_n}{b_{n-1}}}=1+\frac{1}{\frac{2b_{n-1}+b_{n-2}}{b_{n-1}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}}}=$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{2b_{n-2}+b_{n-3}}{b_{n-2}}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{b_{n-2}}{b_{n-3}}}}}$$

e così di seguito.

Per n convergente all'infinito il 2° membro si riduce alla frazione continua indefinita $1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots\ldots$, che, com'è noto, equivale a $\sqrt{2}$, dunque

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \ldots\ldots = \sqrt{2}.$$

120*. *Nel piano d'un cerchio è dato un punto* C. *Dimostrare che vi sono, in generale, quattro triangoli equilateri* ABC, *ciascuno dei quali ha il lato* AB *tangente in* B *al dato cerchio, e costruirli. I quattro vertici* A *sono per diritto.*

(S. Catania).

Risposta del Sig. *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari (*).

Poichè l'angolo CBA è formato dalla tangente BA e dalla segante BC al cerchio dato O ed è uguale alla terza parte di 2 retti, l'arco intercetto sarà la terza parte della circonferenza e per consegnenza BC sarà tangente al cerchio concentrico ad O di raggio $BO : 2$. Inoltre poichè $AB = AC$ il punto A si troverà sull'asse radicale del punto C e del cerchio O.

Per costruire i triangoli che soddisfanno alla quistione si descriva un cerchio concentrico ad O di raggio uguale alla metà del raggio del cerchio dato, quindi conducansi le tangenti BCB_1, B_2CB_3 o BB_1C, B_2B_3C, secondo che C è interno od esterno ad O. Descritti su BC, CB_1, B_2C, CB_3 altrettanti triangoli equilateri BAC, B_1A_1C, B_2A_2C, B_3A_3C questi avranno i loro lati BA, B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3 tangenti ad O ed i loro vertici A, A_1, A_2, A_3 in linea retta perchè situati, come si è osservato, sull'asse radicale del punto C e del cerchio O.

È chiaro che se C cade entro il cerchio minore il problema non ha alcuna soluzione, mentre ne ha due se C cade in questo cerchio e quattro in ogni altro caso.

121*. *Risolvere l'equazione*

$$x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 10x^2 + 5x + 1 = 0.$$

(F. Giudice).

Risoluzione dei Sigg. *D. Pacilli*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia ed *A. Gandolfi*, alunno del R. Istituto tecnico di Piacenza (**).

Si vede facilmente che l'equazione data è soddisfatta da $x = -1$, quindi -1 è una sua radice, e per un noto teorema, la proposta è divisibile per $x+1$. Eseguendo la divisione e ponendo a zero il quoziente, si ha l'altra equazione

$$x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 1 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

che fornirà le altre quattro radici della data.

(*) Altre dimostrazioni, meno dirette, pervennero dai Sigg. *E. de Vito* (alunno del R. Ist. tec. Roma) e *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila)

(**) Soluzioni analoghe pervennero da *E. Bellezza* (alunno del R. Ist. tec. Foggia), *G. Polverini* (R. Ist. tec. Girgenti), *E. G. Ricci* (R. Liceo Bari), *F. Sterca* (R. Ist. tec. Lodi), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

Osserviamo che la [1] può scriversi nel modo seguente:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 14 = 0,$$

e ponendo

$$x + \frac{1}{x} = z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

diventa

$$z^2 + 4z - 16 = 0.$$

Quest'ultima dà per z i due valori

$$z = -2 \pm 2\sqrt{5}.$$

Dalla [2] si ha

$$x^2 - zx + 1 = 0,$$

da cui, sostituendo a z i valori ottenuti e risolvendo, si hanno i corrispondenti valori di x che, uniti a quello ottenuto da principio, dànno le cinque radici dell'equazione proposta, che sono le seguenti:

$$x = -1,\ x = -1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{5 - 2\sqrt{5}},\ x = -1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Il Sig. *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce, che inviò pure una risposta alla quistione, aggiunge la seguente osservazione, riguardo alla risoluzione dell'equazione [1].

« Si consideri l'equazione completa di 4° grado

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in cui [α] $d = \frac{c^2}{a^2}$, e pongasi il 1° membro uguale a

$$\left(x^2 + px + \frac{c}{a}\right)\left(x^2 + qx + \frac{c}{a}\right).$$

Sviluppando e confrontando i coefficienti si trova

$$p + q = a, \qquad pq = \frac{ab - 2c}{a},$$

da cui segue che i valori di p e q sono le radici di

$$y^2 - ay + \frac{ab - 2c}{a} = 0.$$

Tutte le volte adunque in cui sussiste la relazione [α] l'equazione considerata di 4° grado è riducibile al 2°. Nel caso dell'equazione [1] la condizione [α] è soddisfatta e si ottiene $p = 2(\sqrt{5} + 1)$, $q = -2(\sqrt{5} - 1)$, onde le quattro radici della [1] sono le due coppie di radici delle equazioni

$$x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + 1 = 0, \qquad x^2 - 2(\sqrt{5} - 1)x + 1 = 0,$$

conformemente a quanto è stato trovato sopra.

122'. *Costruito sopra un raggio* AB *di un cerchio un triangolo equilatero* ABC *e condotta la congiungente dei punti di mezzo dei lati* AC, BC, *questa determina sull'arco* BC *un arco* BM; *trovare con quale approssimazione quest'arco rappresenta un quattordicesimo della circonferenza.*

(F. PALATINI).

Soluzione del Sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania.

Dai punti C ed M si conducano le perpendicolari CH, MN sul raggio AB. Posto ang. $MAB = \alpha$, si ha evidentemente $MN = \frac{CH}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} . AB$, onde: sen $\alpha = \frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}4330127$ a meno di $\frac{1}{10^7}$. Di qui si ricava, servendosi delle tavole trigonometriche,

$$\alpha = 25^\circ . 39' . 32''$$

a meno di un secondo per difetto.

D'altra parte l'angolo al centro α' corrispondente all'arco uguale alla quattordicesima parte della circonferenza è $\alpha' = \frac{360^\circ}{14} = 25^\circ . 42' . 51''$ a meno di un secondo per difetto. La differenza $\alpha' - \alpha = 3' . 19''$ pure a meno di un secondo. L'arco BM rappresenterà quindi la quattordicesima parte della circonferenza a meno di $3' . 20'' = 200'' = \frac{1}{6480}$ della circonferenza stessa (*).

123'. *Sull'ipotenusa d'un triangolo rettangolo, esternamente ad esso, è costruito un quadrato. Se l'intera figura ruota intorno ad un cateto del triangolo, dimostrare che il volume generato dal quadrato è equivalente ad un cilindro retto avente per raggio di base l'ipotenusa e per altezza la somma dei cateti.*

(V. CORRENTI).

Dimostrazione del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istit. tecnico di Foggia.

Chiamasi ABC il triangolo rettangolo, $BCDE$ il quadrato costruito sull'ipotenusa BC e sia AB il cateto intorno al quale ruota l'intera figura. Abbassate dai vertici D, E le perpendicolari DD', EE' su AB e condotta BD, è chiaro che il volume generato dal quadrato, nella rotazione dell'intera figura intorno ad AB, si può considerare come la somma dei volumi generati dai due triangoli CBD, BDE, allorchè ruotano intorno alla medesima retta. Ora per noti teoremi si ha:

$$\text{Vol. } CBD = \frac{1}{3} BC . \text{sup } CD = \frac{1}{3} BC . \pi (AC + DD') . CD$$

$$\text{Vol. } BDE = \frac{1}{3} BE . \text{sup } DE = \frac{1}{3} BE . \pi (DD' + EE') . DE.$$

(*) Un' altra soluzione venne inviata dal Sig. *D. Pacilli*, alunno del R. Istituto tec. di Foggia. Il Sig. *Pacilli* trova per limite dell'errore $\frac{1}{1000}$ del quadrante: dunque un valore più grande del necessario.

Ma, com'è facile vedere tirando per E una parallela ad AB ad incontrare DD' in D'' ed osservando che i triangoli CAB, $BE'E$, $DD''E$ sono uguali, $EE' = D'E' = AB$ e $DD' = AC + AB$, $AD' = BD' + D'E' = BE' = AC$, onde sostituendo

$$\text{Vol. } CBD = \frac{\pi}{3} . BC(2AC + AB) . BC, \quad \text{Vol. } BDE = \frac{\pi}{3} BC(AC + 2AB) . BC.$$

Sommando ricavasi

$$\text{Vol. quad. } BCDE = \frac{\pi}{3} \overline{BC}^2 (3AC + 3AB) = \pi \overline{BC}^2 (AB + AC)$$

che è quanto d. d. (*).

124*. *Dato un cerchio, siano* A, B, C, D, E, F *i punti che lo dividono in sei parti uguali. Una retta* AM *ruoti nel piano del cerchio, intorno al punto* A, *incontrandolo in un punto variabile* H. *Dimostrare che tirata la corda* HE, *che incontra il diametro* AD *in* I, *e per* I *la perpendicolare* IL *a questo diametro, il luogo dei punti in cui* IL *incontra* AM *è la segante* CD.

(S. Gatti).

Dimostrazione del Sig. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia (**).

Chiamando L il punto in cui AM incontra CD od i suoi prolungamenti, la quistione si riduce a dimostrare che LI è perpendicolare ad AD.

Tirisi DH, e suppongasi che L ed I giacciano dalla medesima banda di HD; è facile vedere in questo caso che gli angoli HLD e DIH sono uguali perchè i loro lati intercettano sulla circonferenza archi rispettivamente uguali. Che se invece L ed I si trovano da bande opposte di HD, considerando gli archi che essi angoli HLD e DIH intercettano sulla circonferenza, è agevole riconoscere che gli angoli stessi sono supplementari. Dunque in ogni caso il quadrangolo i cui vertici sono D, I, L, H è inscrittibile, talchè sarà ang. LID uguale o supplementare di LHD e poichè quest'ultimo è retto tale sarà anche l'angolo LID c. v. d..

125*. *Siano* AD, AE *le rette che dividono l'angolo retto di un triangolo rettangolo* ABC *in tre parti uguali, incontrando l'ipotenusa in* D, E, *dimostrare che si ha:*

$$BE . DC = 3BD . EC.$$

(S. Gatti).

Dimostrazione dei Sigg. *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia, e *A. Perrucci*, alunno del R. Istituto tecnico di Napoli (***).

(*) Soluzioni analoghe a questa, vennero inviate dai Sigg. *E. Bellezza* (R. Ist. tec. Foggia), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *E. De Vito* (R. Ist. tec. Roma), *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

(**) Altre soluzione, più diffuse, furono inviate dai Sigg. *E. De Vito* (R. Ist. tec. Roma), *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila) e *G. Trapani* (R. Ist. nautico Catania).

(***) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. *E. Bellezza* (R. Ist. tec. Foggia), *E. de Vito* (R. Ist. tec. Roma), *A. Gandolfi* (R. Ist. tec. Piacenza), *G. Polverini* (R. Ist. tec. Girgenti), *F. Sterca* (R. Ist. tec. Lodi).

Condotta EF perpendicolare ad AC, dai triangoli simili BAC, EFC, segue

$$BC : EC :: AB : EF.$$

Dal triangolo AEB, in cui AD è bisettrice dell'angolo A, si ha

$$DE : BD :: AE : AB.$$

Se ora si osservi che nel triangolo rettangolo EAF, l'angolo EAF è la terza parte di un retto e quindi $EF = AE : 2$, moltiplicando le precedenti proporzioni termine a termine, risulta

$$DE . BC : BD . EC :: AE . AB : AB . EF :: AE : EF :: 2 : 1,$$

onde

$$DE . BC = 2 BD . EC \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

Ma $DE = DC - EC$, $BC = BE + EC$, talchè $DE . BC = DC . BE - EC . BE + DC . EC - EC . EC = BE . DC - EC . BC + DC . EC = BE . DC - (BC - DC) . EC = BE . DC - BD . EC$, cosicchè, sostituendo in [1], si ricava infine

$$BE . DC = 3 BD . EC \qquad \text{c. d. d..}$$

Dimostrazione dei Sigg. *G. Candido*, alunno del R. Liceo di Lecce, e *G. Onesti*, alunno del R. Istituto tecnico di Lodi.

Considerando successivamente i triangoli ABE, ADC, ABD, AEC, si ha

$$BE = \frac{AE . \operatorname{sen} 60^0}{\operatorname{sen} B},\ DC = \frac{AD . \operatorname{sen} 60^0}{\operatorname{sen} C},\ BD = \frac{AD . \operatorname{sen} 30^0}{\operatorname{sen} B},\ EC = \frac{AE . \operatorname{sen} 30^0}{\operatorname{sen} C},$$

e quindi

$$BE . DC = \frac{AE . AD . \operatorname{sen}^2 60^0}{\operatorname{sen} B \ \operatorname{sen} C} = \frac{3 AE . AD}{4 \operatorname{sen} B \ \operatorname{sen} C};$$

$$BD . EC = \frac{AE . AD . \operatorname{sen}^2 30^0}{\operatorname{sen} B \ \operatorname{sen} C} = \frac{AE . AD}{4 \operatorname{sen} B \ \operatorname{sen} C},$$

donde si vede che il primo prodotto è triplo del secondo.

Il Sig. *G. Trapani*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, che inviò pure una soluzione di questa quistione, osserva che se l'angolo BAC non è retto e AD, AE sono le rette che lo trisecano, si avrà:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB . AD \operatorname{sen} \frac{1}{3} A}{AD . AC \operatorname{sen} \frac{2}{3} A} = \frac{AB}{2 AC \cos \frac{1}{3} A},$$

$$\frac{EC}{BE} = \frac{AC . AE \operatorname{sen} \frac{1}{3} A}{AB . AE \operatorname{sen} \frac{2}{3} A} = \frac{AC}{2 AB \cos \frac{1}{3} A}$$

onde

$$BE . DC = 4 BD . EC \cos^2 \frac{A}{3},$$

il che corrisponde ad una generalizzazione del teorema. Inoltre siccome $A < 180°$, sarà $\frac{A}{3} < 60°$, e perchè si abbia $4 \cos^2 \frac{A}{3} = 3$, dovrà essere $A = 30°$.

Di qui si trae che è vero anche il teorema reciproco di quello proposto, ossia se la relazione $BE \,.\, DC = 3 BD \,.\, EC$ è soddisfatta e AD, AE sono le rette che trisecano l'angolo BAC, questo sarà retto.

Un'altra generalizzazione della quistione ci viene comunicata dal Sig. Prof. G. *Russo*, nei seguenti termini:

Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo ABC *si conducono le rette* AD, AE *(entrambe interne, o entrambe esterne, od una interna e l'altra esterna al triangolo), in modo che l'angolo* $BAD = CAE = \alpha$, *dimostrare che si ha:*

$$BE \,.\, DC = \cot^2 \alpha \,.\, BD \,.\, EC.$$

QUISTIONI PROPOSTE (*)

136. Se due gruppi di n numeri tutti differenti fra loro e da zero si possono porre in corrispondenza univoca di proporzionalità al più in m modi $(m > 1)$, m sarà un divisore di n, e i numeri dei due gruppi potranno essere tutti reali soltanto per $m = 2$.

G. Sforza.

137*. Risolvere un triangolo dati un angolo A, la bisettrice interna α e l'inclinazione i di questa sul lato a. Qual dev'essere il valore di i affinchè il triangolo abbia la ragione m col quadrato di α?

G. Bellacchi.

138*. Per quali valori razionali di n l'espressione

$$\frac{(n+5)(n+6)}{6n}$$

si riduce a un intero positivo?

S. Catania.

139*. Inscrivere in un cerchio dato un quadrangolo, dati due lati contigui e tale che due suoi lati opposti siano inversamente proporzionali agli altri due.

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

Dimostrare poi che conducendo da un punto fuori del cerchio le sei perpendicolari ai quattro lati e alle due diagonali di sifatto quadrangolo, la somma dei due rettangoli delle perpendicolari condotte a due lati opposti ed ai rimanenti è equivalente al doppio rettangolo delle perpendicolari tirate alle diagonali.

S. GATTI.

140*. Essendo $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ numeri interi dati, indichino $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ rispettivamente i minimi multipli comuni alle coppie (a_1, a_2), (m_1, a_3), (m_2, a_4), $\ldots (m_{n-2}, a_n)$, e $d_1, d_2, d_3, \ldots d_{n-1}$ i massimi comuni divisori di queste coppie. Dimostrare che il prodotto $d_1 d_2 \ldots d_{n-1}$ si mantiene costante variando l'ordine dei numeri dati.

A. TAGIURI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

ING. G. DELITALA. — *Ricerche di Stereometria.* — Monografie tecniche utili per le Scuole e nella pratica. — Sassari, G. Dessì, 1890 - L. 3.

Scopo dell'A. è quello della ricerca di formole pratiche per il calcolo dei volumi dei solidi prismatici o cilindrici limitati da basi a superficie piana o rigata-sghemba; l'A. ha svolto questi argomenti in quattro Note raccolte poi nella monografia che sto esaminando. Noto subito che mi asterrò dal pronunziare giudizi sul valore tecnico o pratico dei risultati del signor Delitala, giudizi che devono essere riservati alle persone competenti nell'arte; analizzerò semplicemente il libro dal punto di vista della geometria teorica.

NOTA I.

Del tronco di prisma e del prismoide quadrilatero.

Premesse alcune nozioni elementari sul prisma e sul tronco di prisma triangolare retto ed obliquo, l'A. passa ad occuparsi particolarmente del tronco di prisma retto ed obliquo a sezione qudrilatera e ne trova il volume espresso per mezzo delle aree delle sezioni normali dei tronchi di prismi triangolari, in cui si decompone il tronco dato con l'uno o con l'altro dei suoi due piani diagonali e per mezzo delle lunghezze degli spigoli laterali. Il duplice modo col quale si perviene così al volume del tronco di prisma quadrilatero gli permette di trovare una relazione tra i detti spigoli laterali e le sezioni normali dei detti tronchi di prismi triangolari, relazione espressa dalla formola

$$S_1(a'' + a''' + a'''') + S_3(a'''' + a' + a'') = S_2(a''' + a'''' + a') + S_4(a' + a'' + a'''), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dalla quale l'A. ricava erroneamente la seguente:

$$\frac{a' + a'''}{a'' + a''''} = \frac{a' S_3 + a''' S_1}{a'' S_4 + a'''' S_2}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4')$$

mentre, tenendo conto della $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$, la (4) dà luogo invece alla più semplice relazione

$$S_2 a'' + S_4 a'''' = S_1 a' + S_3 a''' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

Però questa piccola inavvertenza non ha influenza su ciò che segue. L'A. introduce poi nel calcolo i mutui segmenti delle diagonali della sezione normale, e trova la (4) sotto altre forme (5), (5'), nelle quali non entrano più le aree $S_1, \ldots$, e prende occasione dalla (5'), la quale può dedursi immediatamente dalla (α), per enunciare un teorema, il quale, almeno dal punto di vista della geometria teorica, non mi sembra che meritasse di essere rilevato. L'A. mostra in seguito come si possa giungere alla stessa (5') anche col sussidio della geometria analitica, e nella (6) ci presenta la (5') come equivalente all'annullarsi di un determinante del 4° ordine. Modifica poi le formole (1) e (2) introducendo l'area S della sezione normale e i mutui segmenti delle diagonali, giungendo così a due nuove formole (7) e (8) che dànno sempre lo stesso volume, e da queste finalmente ricava, per via di semisomma, una terza espressione (9) del vol. V simmetrica rispetto agli elementi del tronco di prisma. Ponendo poi le (7), (8) e (9) sotto la forma $V = SZ$, le stesse (7), (8) e (9) gli offrono tre espressioni diverse, (11), (12) e (13), per Z; e poichè, come osserva lo stesso A., è noto (Baltzer, *Ster.* § 11, 19) che il volume di un tronco di prisma è equivalente al prodotto della sezione normale S per il corrispondente spigolo baricentrico, così le tre espressioni di Z dànno appunto la lunghezza dello spigolo baricentrico del tronco di prisma quadrilatero a mezzo degli elementi di questo. Se il tronco di prisma è retto, Z può essere considerata come la terza coordinata cartesiana del detto c. g.; l'A., mostra poi come si possano trovare anche le altre due coordinate X, Y supponendo di prendere per assi delle x e delle y le due diagonali della sezione normale di base. A questo proposito l'A. soggiunge un'osservazione per la ricerca geometrica del c. g. di un quadrilatero piano, la quale nel caso generale è erronea. Invero l'A. indica con O il punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero piano, con M ed N i loro punti di mezzo, con G il c. g. dell'area del quadrilatero, ed asserisce che $OG = \frac{2}{3} MN$. Ora ciò è falso, se l'angolo MON non è retto; infatti G è anche il c. g. del triangolo OHK, i cui lati OH, OK sono doppi di OM, ON e nelle stesse direzioni (cfr. Baltzer, *Ster.* § 11, 11; e Cremona, *Cal. gra.* Art. 137); sicchè detto I il punto medio di HK, si ha $OG = \frac{2}{3} OI$. Se fosse $OG = \frac{2}{3} MN = \frac{1}{3} HK$, sarebbe $2\,OI = HK$, e quindi l'angolo MON sarebbe retto.

L'A. continua queste sue discussioni passando dal prisma quadrilatero generale (che, non so per quale ragione, chiama *forma geometrica primitiva*) ai casi più particolari del prisma-trapezio, parallelogramma, triangolare, e trova le formole (14), (15), (16), (16'), (17), (14') e (15') per il volume del tronco di prisma-trapezio (a sezione normale trapezia) e la (19) e la (22) rispettivamente per il tronco-parallelogramma e il triangolare. Notiamo specialmente la (17), la quale è una conferma della nota regola di Newton per il calcolo del volume di un segmento solido compreso fra facce parallele per mezzo di tre sezioni parallele ad uguali intervalli fra loro (cfr. Baltzer, *Ster.*, § 9, 10). Dalle (14') e (15') ricava poi la relazione di condizione (18) fra gli spigoli laterali del tronco di prisma-trapezio e il rapporto dei lati paralleli del trapezio sezione normale, relazione ch'egli traduce in parole osservando che il detto rapporto è il medesimo anche per una sezione non normale. Pel tronco di prisma-parallelogramma la condizione esposta si semplifica e si riduce ad esprimere la proprietà che la somma di due spigoli opposti è uguale alla somma degli altri due. Infine l'A. osserva che per il tronco di prisma-triangolare la relazione, cui debbono soddisfare gli spigoli laterali, prende la forma

$$\frac{b}{a' - a''} = \frac{0}{0} \; , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

dove b sia il lato della sezione normale opposto allo spigolo a''' e a', a'' siano i rimanenti due spigoli laterali. Egli ne conclude che: « Nel tronco di prisma triangolare la scelta degli elementi che lo determinano è affatto arbitraria », conclusione di cui non so vedere l'importanza. Non posso tralasciare di dichiarare che l'osservazione a piè della pag. 11, che l'A. aggiunge a complemento della sua teoria del tronco di prisma, è estremamente inesatta ed indeterminata.

Prismoide. — Secondo l'A. è un tronco di prisma quadrilatero retto, in cui una base è sostituita da un quadrilatero sghembo paraboloidico, o più generalmente è una porzione di prisma quadrilatero limitata da due quadrilateri paraboloidici. La determinazione di questo volume nel primo caso è fatta nel seguente modo. Si osservi che il tetraedro, che ha per vertici i quattro vertici del quadrilatero paraboloidico, è diviso per metà dal detto quadrangolo paraboloidico (Baltzer, *Ster.*, § 9, 5 in nota), e quindi il prismoide risulta in un modo dalla somma di due tronchi di prismi triangolari T_1, T_3 aumentata della metà del detto tetraedro e in un altro modo dalla somma di due altri tronchi di prismi triangolari T_2, T_4 diminuita della metà del detto tetraedro. Il prismoide perciò eguaglia $\frac{1}{2}(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$. L'A. nell'esporre questo ragionamento cade in qualche inesattezza, come per esempio quella che $T_1 + T_3$ eguagli un tronco di prisma quadrilatero avente gli stessi spigoli del prismoide e la stessa sezione normale, tronco che non esiste; perciò l'interpretazione che dà alla formola finale (pag. 13) è falsa. Non posso poi non deplorare la mancanza di sobrietà sia nell'uso di vocaboli nuovi non necessari (p. es. *tetraedro risultante*), sia nelle considerazioni che conducono ai risultati. Questi ed altri difetti s'incontrano anche più innanzi in questa Nota, ed io li citerò come avvertimento all'A., senza discuterli. P. es. la (24′) poteva essere sostituita dalla più semplice

$$R = \frac{1}{3} (S_2 a'' + S_4 a'''' - S_1 a' - S_3 a''') ;$$

inutile l'osservazione che *gli elementi comunque dati pel prismoide non soddisfano in generale la relazione* (4) *ossia la* (5′); — il significato dato a Z nella (26), che dà il volume del prismoide a due basi sghembe, non è in nessun modo giustificato, e quindi il preteso teorema conseguente che cioè « il volume del prismoide è eguale al prodotto dell'area del quadrilatero sezione normale per la distanza dei centri di gravità delle due basi ossia dei segmenti di superficie sghemba che comprende il solido » rimane indimostrato; — nella considerazione delle *forme geometriche derivate* (!) del prismoide quadrilatero, cioè del *prismoide-trapezio*, del *prismoide-parallelogrammo* e del *prismoide-triangolare*, trovo ripetuta a pag. 16 la formola errata $OG = \frac{2}{3} MN$ relativa al c. g. dell'area di un quadrilatero piano, errore però che non ha influenza sul resto; subito dopo noto l'errore di stampa $\frac{g}{m} = \frac{3}{4}$ invece che $\frac{g}{m} = \frac{4}{3}$; — a pag. 17 comma 3° attribuisce a $\frac{Z' + Z''}{2}$ il significato di distanza fra i c. g. delle due basi sghembe, significato che, come già si è osservato, resta sempre a provarsi; — la dimostrazione che L (punto d'incontro delle rette che uniscono i punti medi dei lati opposti del tetraedro *risultante*) è il c. g. del tetraedro poteva omettersi essendo notoria; — nell'esposizione delle proprietà principali del paraboloide iperbolico noto un linguaggio che non mi sembra del tutto esatto, p. es. *assintoti* per generatrici orizzontali, ecc.; — noto ancora che la descrizione non è sempre completa, p. es. le sezioni che sono parabole si possono ottenere non solamente con piani passanti per l'asse ma anche con piani paralleli all'asse, ecc.

L'A. chiude la Nota con considerazioni intorno all'applicazione del concetto di numero alle grandezze geometriche (*volumi*), le quali difficilmente fanno indovinare il suo pensiero e che in ogni modo mi sembrano fuori posto.

L'A. collega infine le sue ricerche coi teoremi di Torricelli, Cavalieri, Newton ed altri sulla cubatura approssimativa dei segmenti compresi fra due piani paralleli, ed osserva che la ricerca del volume del prismoide si può far dipendere da quella del volume dei solidi terminati da una superficie rigata-sghemba compresa fra due piani paralleli, il che non è per me evidente; e soggiunge: « Il prismoide nello studio dei solidi si può riguardare come anello di congiunzione fra i corpi terminati da facce piane e quelli terminati da superficie curve », conclusione di significato troppo indeterminato.

A schiarimento l'A. ha dato in fondo alla Nota un esempio numerico.

Nota II.

Dei tronchi prismatici e cilindrici.

L'A. determina in questa Nota il volume del tronco di cilindro (o di prisma) a sezione normale qualunque, e divide perciò il tronco con una serie di $n+1$ piani paralleli alla generatrice del cilindro, paralleli fra loro ed equidistanti, per modo che il volume gli risulta dalla somma di n solidi elementari compresi tra il primo e l'ultimo piano dividente, i quali, per n abbastanza grande, si possono considerare come altrettanti tronchi di prisma-trapezi.

In un primo modo, applicando a ciascuno di questi tronchi-trapezi la (16) della Nota I e sommando i risultati, ottiene una formola, la (4), pel volume richiesto. In un secondo modo suppone anzitutto che n sia pari, e considera gli $\frac{n}{2}$ segmenti solidi elementari compresi fra sezioni di posto dispari consecutive, di ciascuno dei quali calcola il volume con la regola di Cavalieri (secondo il Baltzer di Newton) per mezzo delle sezioni estreme e della intermedia, regola che l'A. aveva già data colla formola (17) della Nota I; sommando questi volumi elementari, ottiene pel volume richiesto la (8).

L'A. soggiunge che la (8) è più esatta della (4) quando *i segmenti intercetti sulle due linee di base* (dai due piani dividenti di posto dispari) *sono curvilinei e tendono a confondersi con archi parabolici* appartenenti (soggiungerei io) a parabole di asse parallelo ai piani dividenti. Infatti solo quando questa condizione fosse adempiuta esattamente, ogni segmento solido elementare soddisferebbe alla condizione voluta per l'esattezza della regola di Newton, poichè si prova facilmente che una sezione fatta in uno di essi con un piano parallelo alle basi avrebbe allora un'area funzione di terzo grado della distanza di esso piano da una delle basi.

L'A. approfitta poi di queste sue formole per dare due espressioni, (10) e (11), approssimate della lunghezza L dello spigolo baricentrico, osservando che, se S è la sezione normale del tronco e V è il suo volume, si ha anche $V = SL$. Infine si occupa del volume dello spicchio cilindrico retto simmetrico, a cui applica la (4); e siccome è conosciuta un'altra espressione del volume di questo solido, nella quale entra una delle coordinate del c. g. della sezione normale del solido, così egli ha opportunità di determinare questa coordinata; con semplici scambi di lettere determina poi l'altra coordinata. Per tal modo ottiene un'espressione approssimata del c. g. di un'area piana racchiusa da un arco di curva arbitrario e degli assi coordinati.

Debbo porre in avvertenza l'A. che nella (18) fu scritto per errore di stampa $\frac{l}{d}$ invece di $\frac{d}{l}$. Inoltre non posso tacere della forma poco esatta con cui nell'ultimo capoverso della pag. 32 si accenna al metodo pratico, che si usa comunemente dagli ingegneri, per la ricerca del c. g. di una figura piana qualunque. Infine nella tabella a pag. 34 si trovano alcune cifre inesatte.

Francamente debbo dire che questa Nota non mi pare troppo interessante dal punto di vista teorico.

Non mi occuperò della Nota III « sulla misura della capacità dei serbatoi naturali », nè della Nota IV « Dei solidi cilindrici, lo spicchio ed il cuneo cilindrico », perchè d'indole assolutamente pratica.

Spero che l'egregio A. vorrà accogliere benevolmente le osservazioni che mi son permesso di fare alla sua Monografia, la quale, ritoccata qua e là, condensata in minor numero di pagine e indirizzata agli studiosi di matematiche applicate, potrà certamente trovare favore.

G. Rozzolino.

AVERARDO MATTEUCCI. — *Appunti di trigonometria* ad uso degli alunni dei Licei e degli Istituti tecnici. — G. B. Paravia e Comp. — Prezzo L. 1.

Questo piccolo libro scritto senza pretensioni, con chiarezza di stile, parmi che sia una buona guida per i giovani candidati alla licenza liceale. Le materie del programma di trigonometria del 3° corso di Liceo vi si trovano svolte per intero ed accompagnate da opportuni esempi. L'A. ha seguito nella sua esposizione il classico libro del Serret sulla stessa materia, discostandovisi qua e là e anche con discernimento. Così ad es. le formule pel seno e coseno della somma e differenza di due archi sono ricavate appoggiandosi al teorema di Tolomeo e fra le applicazioni sono studiate due quistioni d'indole fisica.

Da elogiarsi una tavola in cui sono raccolte, con disposizione molto chiara, le variazioni delle funzioni trigonometriche al cambiare dell'arco.

Quantunque l'A. noti nella prefazione e anche in seguito come il libro sia piuttosto destinato agli studenti di Liceo che a quelli degli Istituti tecnici, pure siccome il titolo lo indirizza agli uni ed agli altri, non sarà fuor di luogo notare che per questi ultimi esso non risponde che incompletamente per la ristrettezza della materia sviluppata e maggiormente per l'assenza di esercizi a risolvere.

Nelle applicazioni avrei preferito l'uso dei logaritmi a 5 decimali anzichè a 7.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico (*)

Antomari (X.) — *Leçons de cinématique et de dynamique, suivies de la détermination des centres de gravité* à l'usage des candidats à l'École polytechnique. — Paris, Libraire Nony et C., 17, rue des Écoles. — Prix: 4 fs.

Bettazzi (R.) — Il concetto di lunghezza e la retta (Ann. di Mat. pura ed app.; Serie 2ª, t. XX).

— — Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabile reale (Rend. Circolo mat. Palermo; t. VI, 1892).

(*) Per deficienza di spazio si rimanda al fascicolo venturo l'elenco delle pubblicazioni periodiche ricevute.

Del Re (A.) — Considerazioni nel gruppo delle similitudini sul piano reale (Riv. di mat.; vol. II, 1892).

De Marchi (L.) — I cicloni atlantici e le recenti intemperie (Rend. R. Ist. Lom.; Serie 2ª, vol. XXV, f. IX, 1892).

Frattini (G.) — A complemento di alcuni teoremi del sig. Tchebicheff (Rend. R. Acc. dei Lincei; Serie 5ª, vol. I, 2° sem., 1892).

Garbieri (G.) — *Elementi di aritmetica pratica* con numerosi esercizi e problemi e con tavole di ragguaglio, libro di testo per le Scuole secondarie inferiori. 6ª edizione. — Padova, Tip. Sacchetto, 1892. — Prezzo: L. 2.

— — Introduzione a una teorica dell'eliminazione (Gior. di Mat. di Battaglini; vol. XXX, 1892.

Giudice (F.) — Dott. G. Petersen: Teoria delle equazioni algebriche. Vol. II (Riv. di mat.; vol. II, 1892).

— — Sulla risolvente di Malfatti (Atti R. Acc. delle Scienze Torino; volume XXVII, 1892).

— — Sopra un criterio del sig. Petersen per calcolare un limite superiore alle radici d'un'equazione numerica. — Subfiniti e transfiniti dal punto di vista di Cantor (Rend. Circolo mat. Palermo; t. VI, 1892).

Giuliani (G.) — Sulle funzioni di *n* variabili reali (Gior. di Mat. di Battaglini, vol. XXIX, 1891).

Loria (G.) — Nicola Fergola e la scuola dei matematici che lo ebbe a duce. Pagine 144 con 4 tav. lit. (Atti della R. Univ. di Genova, 1892).

— — Sulla teoria della curvatura delle superficie (Riv. di mat., vol. II, 1892).

Martone (M.) — Introduzione alla teoria delle Serie. Parte II — Il problema universale del Wronski e la risoluzione algebrica delle equazioni. Catanzaro. Stab. tip. V. Asturi e figli, 1892.

Marcolongo (R.) — Alcune applicazioni delle funzioni ellittiche alla teoria dell'equilibrio dei fili flessibili. Nota 1ª e 2ª (Rend. R. Acc. Scienze fisiche e mat., Napoli. Serie 2ª, vol. VI, 1892).

— — Risoluzione di due problemi relativi alla deformazione di una sfera omogenea isotropa (Rend. R. Acc. dei Lincei; Serie 5ª, vol. I, 1° sem., 1892).

Marotta (G.) — *Interesse e sconto semplici.* Lezioni teorico-pratiche esposte nella R. Scuola tecnica di Acireale. — Acireale, S. Donzuso, 1892.

Millosevich (E) — Nuovi elementi ellittici di Unitas (306), in base a tutto l'intervallo di tempo delle osservazioni della prima opposizione (Mem. Società Spettroscopisti italiani, vol. XXI, 1892).

Nicita (F.) — *Descrizione del cerchio.* Raccolta di 527 problemi di Geometria elementare colle relative soluzioni. Ragusa, tip. Piccitto e Antoci, 1892. — Prezzo: L. 3.

Pasanisi (F. M.) — *Atlante pel disegno cartografico.* Opera ad uso delle Scuole secondarie tecniche e classiche, degl' Istituti tecnici, dei Collegi militari e delle Scuole normali. Parte 1ª, con 26 fig. ed 8 carte. Fr. M. Pasanisi, editore, Roma, 1892. — Prezzo: L. 2.

Peano (G.) — Generalizzazione della formula di Simpson. (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XXVII, 1892).

Veronese (G.) — Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale (Rend. Circolo mat. Palermo, t. VI, 1892).

Chiusura della redazione il dì 10 settembre 1892.

A PROPOSITO DI UN LAVORO SULLA STORIA DELLE MATEMATICHE

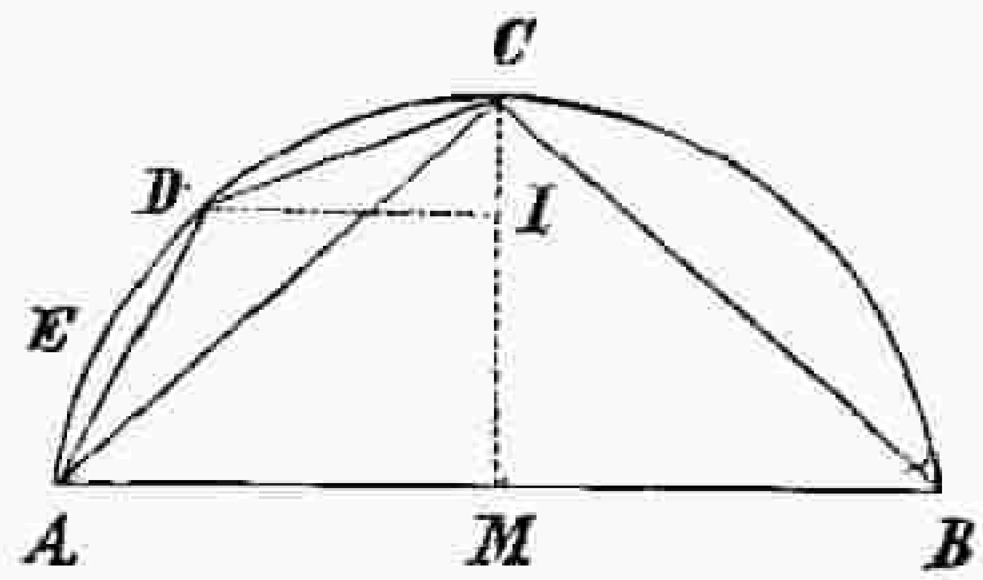
(Continuazione, V. pag. 113).

Ma nella greca geometria si escludevano i concetti di limite e di serie con un'infinità di termini, velandoli sotto l'apparenza del metodo di esaurimento, e da ogni dubbio rimovendo l'intelletto con la prova della riduzione all'assurdo. Nel 1° teorema del XII libro Euclide mostra i poligoni simili iscritti nei cerchi esser proporzionali ai quadrati dei diametri di questi e coi suddetti metodi lo estende ai circoli. Il triangolo massimo iscritto in un segmento circolare non maggiore di un semicerchio supera la metà del segmento, e perciò simboleggiando c la superficie del circolo, a il quadrato iscrittovi, s il segmento di c insistente sopra ogni lato di a, t il triangolo massimo iscrittovi, dall'identità $c = a + 4s$ a motivo di $a > \frac{c}{2}$ si rileva $s < \frac{c}{2^3}$; parimenti indicando a_1 la superficie $a + 4t$ dell'ottagono regolare, s_1 il segmento di c insistente sopra ciascun lato di a_1 e t_1 il triangolo massimo iscrittovi, a motivo di $s = t + 2s_1$ e $t > \frac{s}{2}$ si deduce $s_1 < \frac{s}{2^2} < \frac{c}{2^5}$, e $c = a + 4t + 2^3 s_1 = a_1 + 2^3 s_1$; in generale simboleggiando a_{m-2} la superficie del poligono di 2^m lati, s_{m-2} il segmento circolare, che insiste sopra ogni lato di a_{m-2} e t_{m-2} il triangolo massimo iscrittovi, si avranno $c = a_{m-2} + 2^m s_{m-2}$, $s_{m-3} = t_{m-3} + 2s_{m-2}$; ora poichè risulta $t_{m-3} > \frac{1}{2} s_{m-3}$, si ricava $s_{m-2} < \frac{1}{4} s_{m-3} < \frac{s}{4^{m-2}}$ e per conseguenza $2^m s_{m-2} < \frac{s}{2^{m-4}} < \frac{c}{2^{m-1}}$ diviene piccolissimo per m crescente; dunque la differenza $c - a_{m-2}$ può ridursi ad esser minore di un qualunque spazio finito ε. Due circoli descritti coi raggi r, r' differiranno dai poligoni simili iscritti a_n, a'_n delle quantità ε_n, ε'_n minime per n grandissimo e dalla proporzione $c - \varepsilon_n : c' - \varepsilon'_n = (r) : (r')$ mediante i limiti si dedurrebbe $c : c' = (r) : (r')$. Invece Euclide esamina l'ipotesi $(r) : (r') = c : x'$ indicando x' una superficie diversa da c'; prima supponendo $x' < c'$ iscrive in c' il poligono $a'_n > x'$ col prendere $c' - a'_n < c' - x'$ e poi iscrive in c il poligono a_n simile ad a'_n: or dalla nota proporzione

$(r):(r') = a_n : a'_n$ paragonata alla supposta deduce $a_n : a'_n = c : x'$, e siccome a'_n supera x', dovrebbe aversi $a_n > c$, il che è assurdo. In secondo luogo considera l'ipotesi di $x' > c'$ e convertendo la proporzione deduce $(r') : (r) = x' : c$, in cui facendo $x' : c = c' : y$ ne conseguirebbero $y < c'$ ed $(r') : (r) = c' : y$, dimostrate impossibili nella prima supposizione.

Un metodo antico per il calcolo di $\pi = c : (r)$ consiste nel cercare i valori approssimati della ragione $a_n : (r)$ per n continuamente duplicante; si abbrevierebbe questo computo mercè i seguenti lemmi di Huygens:

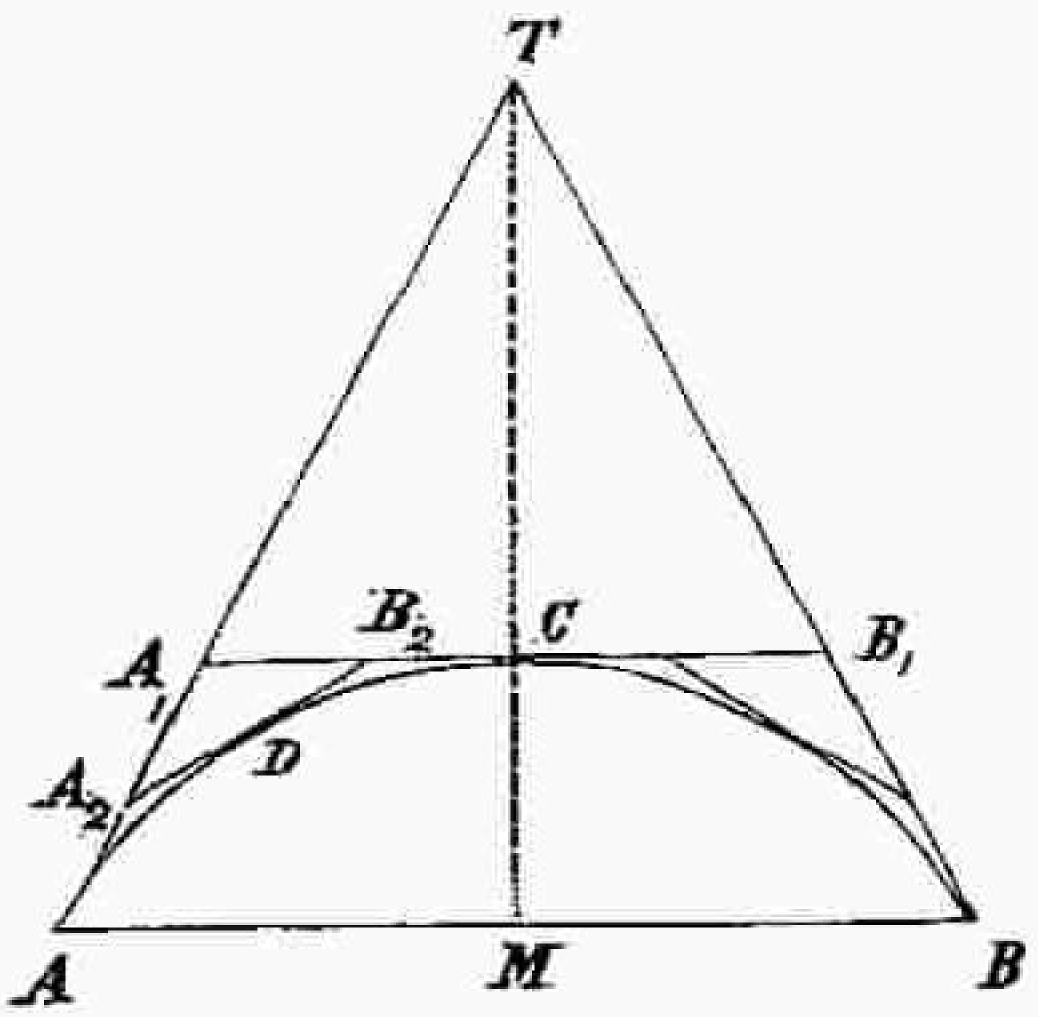
1.° Il segmento circolare non maggiore di un semicerchio supera i $\frac{4}{3}$ del triangolo isoscele iscrittovi. Infatti siano C, D i mezzi degli archi sottesi dalle corde AB, AC e CM, CI le rispettive saette; a motivo di $AC < 2CD$ sostituendo alla ragione dei quadrati costruiti sulle corde AC, DC quella delle lor proiezioni CM, CI sul diametro condotto per C si trova $CM < 4.CI$; e poichè i triangoli $ABC = t$, $ACD = t_1$ stanno in ragion composta delle



rispettive basi ed altezze, dalle ragioni $AC : AB > \frac{1}{2}$, $CI : CM > \frac{1}{4}$ si ricava $t_1 > \frac{1}{8} t$; parimente dal triangolo isoscele $AED = t_2$ resulta $t_2 > \frac{t_1}{8} > \frac{t}{8^2}$, e così proseguendo si ha: segmento $ABC >$ $t + 2t_1 + 2^2 t_2 + 2^3 t_3 + \dots > t\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots\right) = \frac{4}{3} t$.

2.° Un segmento circolare minore di un semicerchio vale meno di $\frac{2}{3}$ del triangolo circoscritto. Poichè tirando per il punto medio C dell'arco ACB la retta A_1B_1 parallela alla corda AB e compresa fra le tangenti AT, TB, a motivo di $AA_1 = A_1C < A_1T$, si ha $A_1B_1 : AB > \frac{1}{2}$, $CT : MC > 1$ e quindi triangolo $A_1TB_1 >$ $\frac{1}{2} ACB$. Similmente conducendo le tangenti ai punti medi degli archi AC, CB, la tangente A_2B_2 si avrà pure $2A_2B_2A_1 > 2 . \frac{ADC}{2}$, in simil modo condotta la tangente $A_3 B_3$ all'arco AD per il suo punto medio E resulta fra i triangoli $A_3 A_2 B_3$, AED la relazione $2^2 . A_3A_2B_3 > 2^2 . \frac{AED}{2}$, ... e così scritte le successive disuguaglianze, con l'aggiungerle si trova che la superficie $ACBT$ racchiusa fra le tangenti AT, TB e l'arco AC supera la metà del segmento circolare ACB, e quindi $ATB > \frac{3}{2}$ segmento ACB.

Il poligono regolare di n lati abbia il perimetro p_n, la superficie s_n ed r il raggio del circolo circoscritto, per la nota proposizione $s_{2n} = \left(\frac{1}{2} p_n, r\right)$; fatto $r = 1$ si ha $s_{12} = 3$, e poichè $p_{12} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ resulta $s_{24} - s_{12} = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)$ somma dei triangoli isosceli iscritti nei segmenti circolari che insistono sui lati del dodecagono regolare; onde la somma di questi segmenti per il 1° lemma di Huygens è maggiore di $4(\sqrt{6} - \sqrt{2} - 1)$, cui aggiungendo la superficie 3 del dodecagono si trae $\pi > 4(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 1 = 3{,}1411044....$



E simboleggiando con P_n ed S_n il perimetro e la superficie del poligono regolare circoscritto di n lati, dalla relazione $S_n = \left(\frac{1}{2} P_n, r\right)$, a motivo di $r = 1$ e $P_{12} = 24(2 - \sqrt{3})$ si ha $S_{12} = 12(2 - \sqrt{3})$, quindi $21 - 12\sqrt{3}$ eguaglia la differenza fra i due dodecagoni regolari circoscritto ed iscritto e per il 2° lemma surriferito la somma dei segmenti circolari che insistono sui lati del dodecagono iscritto è minore di $\frac{2}{3}(21 - 12\sqrt{3})$; aggiuntovi la superficie 3 del medesimo poligono si conchiude $\pi < 17 - 8\sqrt{3} = 3{,}1435936....$; dunque $3{,}14 = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{7}}$ è il valor approssimato di π a meno di $\frac{1}{100}$.

(*Continua*).

G. Bellacchi.

DELL'ANALISI INDETERMINATA DI SECONDO GRADO

(*Continuazione e fine, V. pag. 119*).

22. Teorema. — *Dicasi* (p, q) *una soluzione qualunque, e* (p_1, q_1) *la soluzione minima dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Sia inoltre* (k, h) *una soluzione dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = N$, *scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali* $h < q_1 \sqrt{N}$ *e conseguentemente* $k < p_1 \sqrt{N}$. *Tutte le soluzioni intere e positive dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = N$ *saranno date, e ciascuna una volta sola, dalla formola*

$$x + y \sqrt{D} = (k + h \sqrt{D}) (p + q \sqrt{D}),$$

qualora si uguaglino le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ *de' suoi due membri.*

Per la dimostrazione basta ricordare quanto si disse nei n. 1, 2 e 3, in proposito della risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, aggiungendo la seguente considerazione. Se si applica la [4] alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, scegliendo per (α, β) la (p_1, q_1), essa diverrà:

$$x + y \sqrt{D} = (K + H \sqrt{D}) (p_1 + q_1 \sqrt{D}),^m$$

con le condizioni $H < q_1$, $K < p_1$ per H e per K, le quali, nel caso speciale che si considera, saranno valori della y e della x relativi a soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$. Ma poichè la soluzione minima di questa equazione è (p_1, q_1), la quale vien subito dopo la soluzione evidente (1, 0), dovrà essere: $H = 0$, $K = 1$. Pertanto la precedente eguaglianza diverrà:

$$p + q \sqrt{D} = (p_1 + q_1 \sqrt{D}).^m \qquad (*)$$

Relativamente all'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, avendosi

$$x + y \sqrt{D} = (k + h \sqrt{D}) (p_1 + q_1 \sqrt{D}),^m$$

(*) Si ottiene così, come caso particolare, la nota formola di risoluzione dell'equazione di PELL; (V. p. 88. DIRICHLET, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, § 85).

con $k^2 - Dh^2 = N$, $h < q_1 \sqrt{N}$, $k < p_1 \sqrt{N}$, si avrà pure

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}),$$

con $h < q_1 \sqrt{N}$, $k < p_1 \sqrt{N}$, come bisognava dimostrare.

Teorema. — *Dicasi* (p, q) *una soluzione qualunque, e* (p_1, q_1) *la soluzione minima dell' equazione* $x^2 - Dy^2 = 1$. *Sia inoltre* (k, h) *una soluzione dell'equazione* $x^2 - Dy^2 = -N$, *scelta in tutti i modi possibili fra quelle nelle quali*

$$h \leq \sqrt{\frac{N(p_1 + 1)}{2D}}$$

e conseguentemente

$$k \leq \sqrt{\frac{N(p_1 - 1)}{2}}.$$

Tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$ *saranno date, e ciascuna una volta sola,* (*) *dalla formola*

$$x + y\sqrt{D} = (\pm k + h\sqrt{D})(p + q\sqrt{D}),$$

qualora si eguaglino le parti razionali e i coefficienti di $\sqrt{D}$ *de' suoi due membri.*

Ricordato quanto fu detto nei n. 4, 5 e 6, in proposito della risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$, la dimostrazione procede come quella del teorema precedente.

APPENDICE.

Per risolvere l'equazione $x^2 - Dy^2 = N$ in numeri interi e positivi fu assegnata la formola

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

nella quale α e β denotano due numeri interi e positivi, fissi, diversi da zero e legati dalla relazione $\alpha^2 - D\beta^2 = 1$; mentre k ed h significano i valori della x e della y relativi a tutte le soluzioni fondamentali, ossia a quelle soluzioni dell'equazione proposta, per le quali si ha

$$h < \beta\sqrt{N} \text{ e conseguentemente } k < \alpha\sqrt{N}.$$

(*) Salvo il caso in cui le limitazioni stesse della h e della k forniscono una soluzione dell'equazione. In questo caso talune soluzioni si ripetono; (V. l'osservazione del n 6).

È importante osservare che la precedente formola equivale alla seguente:

$$x + y\sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m,$$

ove per k' ed h' s'intendano i valori di x e di y relativi a tutte quelle soluzioni della proposta equazione, per le quali si verifica la condizione

$$h' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}$$

e la conseguente

$$k' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha + 1)}{2}}.$$

Si ha così per l'equazione $x^2 - D\,y^2 = N$ una regola di risoluzione analoga a quella che fu data per l'equazione $x^2 - D\,y^2 = -N$. Inoltre, essendo la sopraddetta limitazione di h' minore della limitazione di h, com'è facile verificare, la risoluzione dell'equazione $x^2 - D\,y^2 = N$ riesce più sbrigativa adottando la seconda formola (*) invece della prima (v. al n. 16 la nota a pie' di pagina).

La formola

$$x + y\sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

si deduce dall'altra

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m$$

distinguendo le soluzioni fondamentali $(k,\ h)$ in quelle per le quali h è compresa fra 0 e $\sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}$ e in quelle per le quali h è compresa fra questa seconda limitazione e $\beta\sqrt{N}$. Tra le soluzioni dei due gruppi esiste una corrispondenza definita dalle formole reciproche di sè stesse

$$Y = \beta x - \alpha y$$
$$X = \alpha x - D\beta y,$$

per le quali ad una soluzione $(x,\ y)$ appartenente ad uno dei due gruppi corrisponde una soluzione $(X,\ Y)$ appartenente all'altro, e a questa la prima (**). Ciò posto, si consideri la formola

$$x + y\sqrt{D} = (k + h\sqrt{D})\,(\alpha + \beta\sqrt{D})^m.$$

(*) Se di questa seconda formola, come di alcuni altri risultati, non si è fatto cenno fin dal principio di questo lavoro, ciò è avvenuto perchè tali risultati furono ottenuti quando il lavoro era già in parte pubblicato.

(**) Per la dimostrazione di questo principio vedasi la mia Nota: « *A complemento di alcuni teoremi del Sig.* Tchebicheff » pubblicata nei *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1892.

In essa k ed h indicano i valori della x e della y relativi alle soluzioni così del primo come del secondo dei menzionati due gruppi. Ora, se (k, h) è soluzione del secondo gruppo, dovrà aversi, pel ricordato principio,

$$h = \beta k' - \alpha h'$$
$$k = \alpha k' - D\beta h',$$

ossia

$$k + h \sqrt{D} = (k' - h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D}),$$

essendo k' ed h' i valori della x e della y relativi a una soluzione del primo gruppo. Da ciò facilmente si deduce che l'uso della formola

$$x + y \sqrt{D} = (k + h \sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^m$$

estesa a tutte le soluzioni (k, h) dei due gruppi, equivale all'uso della formola

$$x + y \sqrt{D} = (k' \pm h'\sqrt{D})\,(\alpha + \beta \sqrt{D})^m$$

estesa alle sole soluzioni (k', h') del primo gruppo, cioè a quelle soluzioni nelle quali

$$h' \leq \sqrt{\frac{N(\alpha - 1)}{2D}}.$$

Per $m = 0$ bisognerà rifiutare il segno — davanti alla h'. L'ultima formola fornisce poi, senza ripetizioni, tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = N$, eccettuato il caso in cui le limitazioni di h' e di k' sono numeri interi. Quando ciò avviene, la soluzione massima fra quelle relative ad un certo valore di m coincide con la soluzione minima fra quelle relative al valore susseguente della stessa m, come nella formola di risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = -N$.

NOTE.

a) L'argomento fu studiato dai geometri fin da tempo antichissimo. Così le formole che nel n. 20 sono attribuite ad Eulero, erano già note agl' Indiani, quattro secoli avanti Leonardo Pisano. (V. la Memoria del prof. Marcolongo: « *Sull'analisi indeterminata di 2° grado* » nel Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane, a. 1888, pag. 84-85). Ma il problema della risoluzione dell'equazione $x^2 \pm Dy^2 = \pm N$, e in generale di qualsivoglia equazione di secondo grado a due incognite e a coefficienti razionali, in numeri interi, fu risoluto la prima volta da Lagrange, in tutta la sua generalità e con tutto il rigore che si può desiderare. (V. la Memoria di Lagrange: « *Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré* » e l'altra: « *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers*).

b) Nella prefazione alla prima delle citate sue Memorie, Lagrange, riferendosi ai suoi metodi, dice: « *Je les crois d'autant plus dignes de l'attention des Mathématiciens qu'elles laissent encore un vast champ à leurs recherches* ». Se non che il problema Lagrangiano fu ben presto incorporato in più alto e difficile argomento; intendo dire nella dottrina delle forme quadratiche: minore perciò forse la copia di nuove ricerche, condotte con metodo diretto ed elementare, quali dovettero essere vagheggiate dall'antecessore di Gauss e di Dirichlet.

c) Credo nuovo il metodo, e nuova una gran parte dei risultati contenuti in questo lavoro. Di molte cose ho taciuto, per amore di brevità, che pure mi sembrano importanti: e segnatamente delle formole e del metodo per la risoluzione dell'equazione

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$$

in numeri interi, quando $b^2 - ac$ è quantità positiva. Tanto le une quanto l'altro si dedurrebbero dal metodo e dalle formole date in questo lavoro per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$.

d) Il metodo che ho stabilito per la risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ consiste sostanzialmente nella determinazione di alcune soluzioni comprese fra 0 e un certo limite positivo della y, epperò in numero finito, dalle quali, mediante conveniente formola, si deducono tutte le altre. Esso è accompagnato da altro metodo, che serve a giudicare se l'equazione è possibile, e quando è tale, a trovare quelle soluzioni dalle quali tutte le altre si derivano. Tanto il primo quanto l'altro dei due metodi non dipendono affatto dalla teorica delle frazioni continue. Invece il metodo di Lagrange riposa essenzialmente su questa teoria, e sulla ipotesi che la N e la y sieno numeri primi fra loro. Una tale ipotesi fa sì che l'equazione si decomponga in tante equazioni parziali quanti sono i fattori quadrati contenuti in N. Talchè, quando N decomposto in fattori primi risulta dotato di un gran numero di fattori quadrati, il metodo di Lagrange, diviene, al dire dello stesso Autore, pressochè impraticabile. « *La méthode* (così Lagrange nella seconda delle Memorie citate di sopra, riferendosi all'equazione $A = p^2 - Bq^2$) *pour le cas où* B *est un nombre positif et où* p *et* q *doivent être des nombres entiers, est à la vérité un peu longue et compliquée, et j'avoue même qu'elle l'est à un point qui la rend difficile à suivre; mais je crois que cette difficulté ne doit être imputée qu'à la nature de la matière, et au grand nombre de cas auxquels il faut avoir égard quand on veut la traiter d'une manière aussi directe et aussi rigoureuse que nous l'avons fait* ». E pur supponendo N ed y primi fra loro, il metodo di Lagrange (nonostante le semplificazioni apportate ad esso dall'Autore nella Memoria testé ricordata) non cessa di essere lungo, perchè intralciato da decomposizioni e riduzioni che debbono precedere l'algoritmo delle frazioni continue: sia che si segua il primo oppure il secondo dei procedimenti indicati dall'Autore nelle sue aggiunte all'algebra di Eulero, § VII.

Il metodo stabilito in questo lavoro è semplicissimo, e non obbliga a dividere e suddividere la trattazione: e quanto alla difficoltà della ricerca di quelle soluzioni dalle quali tutte le altre si derivano, essa non dipende dal numero dei fattori quadrati contenuti in N, epperò dalla composizione di N mediante i suoi fattori primi, ma solo dalla grandezza della stessa N. Applicando il detto metodo agli esempi trattati da Lagrange nelle sue Memorie, o ad altri, si può verificare che esso è assai più sbrigativo di quello di Lagrange, come ho accennato nel n. 16, trattando l'equazione $x^2 - 46y^2 = 210$. Finalmente l'unità e la semplicità ond'è dotato, rendono evidenti molte proprietà notabili, che difficilmente emergerebbero d'altronde, e dalla stessa teoria delle forme quadratiche.

e) A prima vista potrebbe sembrare che i metodi stabiliti nei n. 8, 13, 17 e 19 per la ricerca delle soluzioni fondamentali, e più generalmente di tutte le soluzioni dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ comprese fra lo zero e un certo limite superiore della y, non siano se non una generalizzazione dell'algoritmo stabilito da Eulero (*Éléments d'Algèbre*, T. II, Ch. VII) per risolvere la celebre equazione di Pell: ma ciò non è. Perchè quei metodi, a differenza dall'algoritmo di Eulero, riposano essenzialmente sulla nozione di *soluzione singolare*, da me introdotta; ed applicati all'equazione di Pell, richiedono un calcolo per tentativi, che non è quello richiesto dal metodo di Eulero, come il lettore può facilmente verificare.

f) L'algoritmo di Eulero, che perfezionato ed elevato a teoria da Lagrange diede nascita all'applicazione delle frazioni continue alla risoluzione dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$, non riguarda direttamente se non il caso in cui N è minore di $\sqrt{D}$ (V. p. e. Legendre, *Théorie des nombres*, T. I, § VI); mentre i metodi da me stabiliti sono valevoli qualunque sia N. Se questo vantaggio fosse mancato, sarebbe stato mestieri procedere per via di riduzioni a casi già noti, come col metodo di Lagrange: molto probabilmente a discapito dell'unità e della naturalezza.

g) Lagrange ha osservato che non basta, in generale, combinare una sola soluzione (x_0, y_0) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = \pm N$ con le soluzioni (p, q) dell'equazione $x^2 - Dy^2 = 1$, perchè tutte le altre soluzioni della prima equazione divengano note, mediante la regola di Eulero. D'onde la questione che si accampa nel n. 20 di questo lavoro, e alla quale rispondono in una maniera semplice e precisa i teoremi del n. 22. Se poi si tien conto di ciò che ho dimostrato nell'appendice, il primo di essi diviene analogo al secondo, e più comodo per gli usi pratici.

h) Nella Memoria del Sig. Tchebicheff, citata in principio di questo scritto, il teorema al n. 21 è dimostrato per via così indiretta, che non è facile scorgerne la capitale importanza nella risoluzione dell'equazione indeterminata trattata finora. D'altra parte esso è quivi applicato soltanto ad alcune ricerche relative ai numeri primi. L'averlo qui dedotto da considerazioni dirette, e più appropriate all'indole sua, mi ha permesso di generalizzarlo e d'interpretarlo geometricamente nella mia Nota: « *Due proposizioni della teoria dei numeri e loro interpretazione geometrica* » e nell'altra: « *A complemento di alcuni teoremi del Sig. Tchebicheff* » (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1892).

G. Frattini.

SULLA DIVISIONE DEI POLINOMI INTERI

(*Continuazione e fine, V. pag. 127*).

3.

Mediante gli elementi della prima colonna della tabella (8), escluso l'ultimo, si possono formare dapprima i quozienti della divisione delle potenze di x per $D^{(r)}$, e successivamente il quoziente di $P^{(n)}$ diviso per lo stesso divisore.

Infatti, si riconosce facilmente che se q_m è il quoziente ed r_m il resto ottenuto dividendo x^m per $D^{(r)}$, sarà $q_{m+1}=q_m x + q'_m$ il quoziente della divisione di x^{m+1} per $D^{(r)}$, indicando con q'_m il quoziente di $r_m x$ diviso per $D^{(r)}$. Ma per $m=r+h$ si ha $q'_m=b_1^{(h)}$; per $m=r$ si ha $q'_m=b_1$, $q_m=1$, e perciò si può stabilire il sistema delle eguaglianze

$$(10)\quad \begin{cases} q_{r+1}=x+b_1 \\ q_{r+h}=q_{r+h-1}x+b_1^{(h-1)} \qquad [h=2,3,\ldots.(n-r)] \end{cases}$$

da cui, moltiplicando la penultima per x, l'antipenultima per x^2 ecc., la prima per x^{n-r-1}, sommando e riducendo si trae:

$$q_n=x^{n-r}+b_1x^{n-r-1}+b_1^{(1)}x^{n-r-2}+\ldots.+b_1^{(n-r-2)}x+b_1^{(n-r-1)}.$$

In modo analogo tralasciando l'ultima delle (10) si calcola il valore di q_{n-1}, poi quello di q_{n-2} ecc., cosicchè i quozienti di x^n, x^{n-1}, $\ldots. x^{r+1}$, x^r divisi per $D^{(r)}$ sono rispettivamente rappresentati da:

$$(11)\begin{cases} q_n=x^{n-r}+b_1x^{n-r-1}+b_1^{(1)}x^{n-r-2}+\ldots+b_1^{(n-r-2)}x+b_1^{(n-r-1)} \\ q_{n-1}= \qquad x^{n-r-1}+b_1\, x^{n-r-2}+\ldots.+b_1^{(n-r-3)}x+b_1^{(n-r-2)}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{r+1}= \qquad\qquad x+b_1 \\ q_r= \qquad\qquad 1\quad. \end{cases}$$

Laonde se si moltiplicano ordinatamente la prima delle (11) per a_0, la seconda per a_1 ecc., la penultima per a_{n-r-1}, l'ultima per a_{n-r}, e si addizionano i resultati, si avrà il quoziente Q della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$ espresso da:

$$
(12)\qquad
\begin{array}{l|l|l|l}
Q = a_0 x^{n-r} + a_0 b_1 & x^{n-r-1} + a_0 b_1^{(1)} & x^{n-r-2} + \ldots + a_0 b_1^{(n-r-2)} & x + a_0 b_1^{(n-r-1)} \\
\qquad\qquad\quad + a_1 & \qquad\quad + a_1 b_1 & \qquad\quad + a_1 b_1^{(n-r-3)} & + a_1 b_1^{(n-r-2)} \\
 & \qquad\quad + a_2 & \qquad\quad + \ldots\ldots & + \ldots\ldots \\
 & & \qquad\quad + a_{n-r-2} b_1 & + a_{n-r-2} b_1^{(1)} \\
 & & \qquad\quad + a_{n-r-1} & + a_{n-r-1} b_1 \\
 & & & + a_{n-r}\,.
\end{array}
$$

È appena necessario l'avvertire che questo modo di dedurre dalle (11) l'espressione di Q, ha la sua spiegazione nelle forme che si trovano appartenere ai quozienti, quando si dimostrano i teoremi I e II.

Notiamo infine che, determinati i valori delle $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, \ldots . b_1^{(n-r-1)}$, al calcolo dei coefficienti del quoziente Q, indicati per semplicità con $a_0, B_1, B_2, \ldots . B_{n-r}$, potrà essere data la seguente disposizione

$$
(13)\qquad
\begin{array}{l|llllll}
 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{n-r-1} & a_{n-r} \\
b_1 & & a_0 b_1 & a_1 b_1 & \ldots\ldots & a_{n-r-2} b_1 & a_{n-r-1} b_1 \\
b_1^{(1)} & & & a_0 b_1^{(1)} & \ldots\ldots & a_{n-r-3} b_1^{(1)} & a_{n-r-2} b_1^{(1)} \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
b_1^{(n-r-2)} & & & & & a_0 b_1^{(n-r-2)} & a_1 b_1^{(n-r-2)} \\
b_1^{(n-r-1)} & & & & & & a_0 b_1^{(n-r-1)} \\
\hline
 & a_0 & B_1 & B_2 & \ldots\ldots & B_{n-r-1} & B_{n-r}
\end{array}
$$

spiegata manifestamente dall'osservazione della (12).

4.

Un algoritmo, abbastanza spedito, per trovare i valori delle $b_1^{(h)}$ che compariscono nella (12), quando i coefficienti del divisore sono numerici, è indicato nello schema seguente:

$$
(14)\left\{\begin{array}{llllllll}
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots\ldots b_r & & & \\
& \overline{b_1 b_1} & b_1 b_2 & b_1 b_3 & \ldots\ldots b_1 b_{r-1} & b_1 b_r & & \\
& \overline{b_1^{(1)}} & b_1^{(1)} b_1 & b_1^{(1)} b_2 & \ldots\ldots b_1^{(1)} b_{r-2} & b_1^{(1)} b_{r-1} & b_1^{(1)} b_r & \\
& & \overline{b_1^{(2)}} & b_1^{(2)} b_1 & \ldots\ldots b_1^{(2)} b_{r-3} & b_1^{(2)} b_{r-2} & b_1^{(2)} b_{r-1} & b_1^{(2)} b_r \\
& & & \overline{b_1^{(3)}} & \ldots\ldots b_1^{(3)} b_{r-4} & b_1^{(3)} b_{r-3} & b_1^{(3)} b_{r-2} & b_1^{(3)} b_{r-1} \; b_1^{(3)} b_r \\
& & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & &
\end{array}\right.
$$

Esso è formato scrivendo in una linea orizzontale i coefficienti di $D^{(r)}$ e in una seconda linea orizzontale, al disotto di essi, il prodotto dei medesimi coefficienti per b_1, coll'avvertenza di collocare il primo prodotto $b_1 b_1$ sotto a b_2. La somma di questi due termini, com'è noto dalla prima delle formule (6), è il valore di $b_1^{(1)}$. A destra di esso, nella terza orizzontale, sono scritti i prodotti di $b_1^{(1)}$ per tutti i termini della prima linea; e la somma dei termini b_3, $b_1 b_2$, $b_1^{(1)} b_1$ che vengonsi a trovare sulla terza verticale è, come deducesi facilmente dalle formule (5), il valore di $b_1^{(2)}$. Scritti successivamente a destra di esso i prodotti di $b_1^{(2)}$ per i termini della prima linea, la somma dei termini della quarta verticale dà il valore di $b_1^{(3)}$. Ecc., ecc.

Se poi nello schema (14) si sopprimono i valori delle somme $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}, b_1^{(3)}$ ..... insieme col primo termine di ogni linea, ossia $b_1, b_1 b_1, b_1^{(1)} b_1, b_1^{(2)} b_1$, ... riducendolo alla forma

$$
(15)\left\{\begin{array}{llllll}
b_2 & b_3 & b_4 & \ldots\ldots\ldots b_r & & \\
& b_1 b_2 & b_1 b_3 & \ldots\ldots\ldots b_1 b_{r-1} & b_1 b_r & \\
& & b_1^{(1)} b_2 & \ldots\ldots\ldots b_1^{(1)} b_{r-2} & b_1^{(1)} b_{r-1} & b_1^{(1)} b_r \\
& & & \ldots\ldots\ldots b_1^{(2)} b_{r-3} & b_1^{(2)} b_{r-2} & b_1^{(2)} b_{r-1} \; b_1^{(2)} b_r \\
& & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &
\end{array}\right.
$$

si prova agevolmente, mediante le stesse formule (5), che sommando per colonne i termini rimanenti si ottengono i valori di b_2, $b_2^{(1)}$, $b_2^{(2)}$, ... quelli cioè che si trovano nella seconda colonna della tabella (8). Se si sopprime poi nello schema (15) il primo termine di ogni linea, cioè b_2, $b_1 b_2$, $b_1^{(1)} b_2$, ... e si sommano per colonne i rimanenti, si hanno i valori di b_8, $b_8^{(1)}$, ... ossia quelli della terza colonna della tabella (8). E seguitando col sopprimere ordinatamente i primi termini di ogni linea dello schema (15), successivamente semplificato, si ottengono tutte le colonne della tabella (8), l'ultima delle quali ha per elementi b_r, $b_1 b_r$, $b_1^{(1)} b_r$, $b_1^{(2)} b_r$, ...

Resulta dunque che *dagli elementi preparati per il calcolo dei coefficienti del quoziente, si hanno immediatamente altresì quelli che servono al calcolo dei coefficienti del resto.*

È da notare che, nella pratica, dai valori particolari di n e di r si dedurrà facilmente tanto il numero delle linee dello schema (14), quanto il numero delle colonne di cui basterà trovare le somme per comporre le tabelle (13) e (9) ove sono compendiati i calcoli da fare per ottenere i coefficienti del quoziente e del resto della divisione di $P^{(n)}$ per $D^{(r)}$.

Per applicare la teoria svolta ad un esempio, si supponga $r = 7$ e

$$D^{(7)} = x^7 - 2x^6 + 4x^5 - 7x^3 + 12x^2 - x + 1.$$

Riserbandoci di assegnare poi al dividendo una forma speciale, stabiliamo soltanto che il suo grado debba essere $n = 11$. Così, essendo $n - r = 4$, è sufficiente limitare lo schema (14) alle seguenti cinque linee:

$$(14)' \quad \left| \begin{array}{rrrrrrrrrrr}
\mathbf{2} & -4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 & & & & \\
 & \underline{4} & -8 & 0 & 14 & -24 & 2 & -2 & & & \\
 & \mathbf{0} & \underline{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & \mathbf{-8} & \underline{-16} & 32 & 0 & -56 & 96 & -8 & 8 & \\
 & & & \mathbf{-9} & \underline{-18} & 36 & 0 & -63 & 108 & -9 & 9 \\
 & & & & \mathbf{16} & & & & & &
\end{array} \right.$$

La tabella (8) si comporrà, nel nostro caso, di cinque linee contenenti ordinatamente i coefficienti dei resti della divisione per $D^{(7)}$ delle potenze x^7, x^8, x^9, x^{10}, x^{11}, e nella sua prima colonna si troveranno appunto i numeri 2, 0, -8, -9, 16 ora determinati. Di questi cinque numeri, soltanto i primi quattro 2, 0, -8, -9 sono necessari, come apparisce dalla (13), al calcolo dei coefficienti del quoziente.

Lo schema (15), dedotto dal precedente, ha la forma:

$$
(15)' \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrrrrrr}
-4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 & & & & \\
 & -8 & 0 & 14 & -24 & 2 & -2 & & & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & & & 32 & 0 & -56 & 96 & -8 & 8 & \\
 & & & & 36 & 0 & -63 & 108 & -9 & 9
\end{array} \right.
$$

e come la somma delle prime *cinque* colonne fornisce i termini -4, -8, 7, 34, 13 che costituiscono la seconda colonna della tabella (8), così sopprimendo successivamente i primi termini di ogni linea e sommando ogni volta le sole prime *cinque* delle colonne rimanenti si otterranno tutte le colonne della tabella (8) che viene ad essere composta nel modo seguente:

$$
(8)' \quad \left\{ \begin{array}{rrrrrrr}
2 & -4 & 0 & 7 & -12 & 1 & -1 \\
0 & -8 & 7 & 2 & -23 & 1 & -2 \\
-8 & 7 & 2 & -23 & 1 & -2 & 0 \\
-9 & 34 & -23 & -55 & 94 & -8 & 8 \\
16 & 13 & -55 & 31 & 100 & -1 & 9
\end{array} \right.
$$

Fissando ora che il dividendo sia il polinomio speciale

$$P^{(11)} = 3x^{11} + 4x^{10} - x^9 + 3x^8 - 2x^7 + 5x^6 + x^5 - 9x^4 - 8x^3 + x^2 - x + 10,$$

mediante i suoi primi cinque coefficienti 3, 4, -1, 3, -2 e i quattro termini 2, 0, -8, -9 della prima colonna della tabella (8)' si compone senza difficoltà la (13) per il calcolo dei coefficienti del quoziente. Essa è in tal caso:

$$
(13)' \quad \begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 4 & -1 & 3 & -2 \\
2 & & 6 & 8 & -2 & 6 \\
0 & & & 0 & 0 & 0 \\
-8 & & & & -24 & -32 \\
-9 & & & & & -27 \\
\hline
 & \mathbf{3} & \mathbf{10} & \mathbf{7} & \mathbf{-23} & \mathbf{-55}
\end{array}
$$

e se ne deduce che

$$Q = 3x^4 + 10x^3 + 7x^2 - 23x - 55.$$

Infine con tutti i coefficienti del dividendo e colla tabella (8)′ si può comporre la (9) in questa guisa:

		5	1	-9	-8	1	-1	10
	-2	2	-4	0	7	-12	1	-1
	3	0	-8	7	2	-23	1	-2
(9)′	-1	-8	7	2	-23	1	-2	0
	4	-9	34	-23	-55	94	-8	8
	3	16	13	-55	31	100	-1	9
		21	**153**	**-247**	**-120**	**631**	**-33**	**65**

e concludere che

$$R = 21\,x^6 + 153\,x^5 - 247\,x^4 - 120\,x^3 + 631\,x^2 - 33\,x + 65.$$

Non vogliamo trascurare qui l'osservazione, che se questo metodo fa apparire laboriosa la ricerca del quoziente e del resto in casi particolari, esso presenta *sempre* il vantaggio di potere, ad un certo punto, calcolare i coefficienti del quoziente e del resto indipendentemente l'uno dall'altro; ciò che riuscirà utile in talune ricerche. Così, nell'esempio considerato, alla domanda se il polinomio $P^{(11)}$ è divisibile per $D^{(7)}$, si risponde negativamente appena che dalle prime quattro colonne dello schema (14)′ si sono avuti i numeri 2, 0, -8, -9, e che dalla tabella (13)′, la quale immediatamente ne deriva, si è ottenuto -55 per valore dell'ultimo coefficiente del quoziente. Così pure volendo sapere qual valore dovrebbe sostituirsi al coefficiente -2 di x^7 nel polinomio $P^{(11)}$ affinchè *potesse* essere divisibile per $D^{(7)}$, basterà nell'ultima colonna della (13)′ sostituire a -2 l'indeterminata α e stabilire l'eguaglianza

$$\alpha + 6 - 32 - 27 = 10$$

da cui si ha $\alpha = 63$. Se tale fosse stato il coefficiente di x^7 nel polinomio $P^{(11)}$, il criterio or applicato per riconoscere la divisibilità di $P^{(11)}$ per $D^{(7)}$ non sarebbe stato decisivo; ma ognun vede che colla sostituzione di 63 a -2 nella tabella (9)′ il primo coefficiente del resto, invece di annullarsi, viene ad acquistare un valore maggiore di 21, il che *basta* per affermare che neppure in quel caso il polinomio $P^{(11)}$ sarebbe stato divisibile per $D^{(7)}$.

Notiamo inoltre che, *purchè rimanga inalterato il divisore* $D^{(7)}$, la tabella (8)', preparata nell'ipotesi che il grado del dividendo sia $n = 11$, potrà evidentemente essere utilizzata per i dividendi di grado minore, colla semplice soppressione di una o più delle ultime linee; e per i dividendi di grado maggiore coll'aggiunta di nuove linee che seguano l'ultima.

5.

Quanto semplici resultano le forme (12) e (2) del quoziente e del resto, e facile il passaggio dalla prima alla seconda, se si adottano i coefficienti simbolici $b_s^{(h)}$, altrettanto l'una e l'altra si complicano quando si vogliano esprimere coi coefficienti effettivi del divisore. Un esempio n'è già stato dato (n.° 1) nella forma esplicita trovata per il resto della divisione del polinomio $P^{(4)}$ per $D^{(2)}$. Tuttavia, per quel che concerne l'espressione del quoziente (e conseguentemente quella del resto), deducendosi dalle (5), o dalla sola ispezione dello schema (14), la relazione

$$(16)\qquad b_1^{(h)} = b_1\, b_1^{(h-1)} + b_2\, b_1^{(h-2)} + b_3\, b_1^{(h-3)} + \ldots . + b_h\, b_1 + b_{h+1}$$

si potrà, se h non è molto grande, valersi di questa per calcolare successivamente i valori delle $b_1^{(h)}$. Così, per esempio, dando ad h i valori di 1, 2, 3, 4, e sostituendo al simbolo $b_1^{(0)}$ il suo valore b_1, si trova:

$$
\begin{aligned}
b_1^{(1)} &= b_1^2 + b_2\\
b_1^{(2)} &= b_1^3 + 2\, b_1\, b_2 + b_3\\
b_1^{(3)} &= b_1^4 + 3\, b_1^2\, b_2 + 2\, b_1\, b_3 + b_2^2 + b_4\\
b_1^{(4)} &= b_1^5 + 4\, b_1^3\, b_2 + 3\, b_1^2\, b_3 + 3\, b_1\, b_2^2 + 2\, b_1\, b_4 + 2\, b_2\, b_3 + b_5,
\end{aligned}
$$

e, come si riconosce subito, questi valori sono sufficienti per istabilire le forme complete del quoziente e del resto della divisione di un polinomio

$$P^{(11)} = a_0 x^{11} + a_1 x^{10} + \ldots . . + a_{10} x + a_{11}$$

per
$$D^{(7)} = x^7 - b_1 x^6 - \ldots . . - b_6 x - b_7 .$$

In generale, le $b_1^{(\lambda)}$ dipendendo razionalmente dai coefficienti del divisore $D^{(r)}$, sono funzioni simmetriche delle radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$; e conviene ricorrere alla teoria di queste funzioni per rendersi conto *a priori* della forma semplificata che compete a *una qualunque* di esse espressa mediante i coefficienti di $D^{(r)}$. Già è stato riconosciuto che le $b_1^{(\lambda)}$, quali funzioni delle radici dell'equazione $D^{(r)} = 0$, s'identificano colle cosidette funzioni *omogenee complete* (o *simmetriche complete*) di r elementi, e ne sono state dimostrate molte importanti proprietà valendosi all'uopo delle feconde teoriche dei determinanti e delle equazioni differenziali.

Nonpertanto, come forse proveremo in un'altra occasione, le prime proprietà fondamentali di quelle funzioni possono essere dimostrate anche più elementarmente col sussidio della formula (16) sopra stabilita e di qualche altro teorema relativo alla divisione algebrica.

E. Sadun.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Notarella di aritmetica. — 1. Dei numeri decimali periodici semplici $0,[a]$; $0,[b]$; $0,[c]$; $0,[d]$; ..... sieno i periodi

(1) . . . . $a, \; b, \; c, \; d, \ldots\ldots$

composti rispettivamente di

(2) . . . . $m, \; n, \; p, \; q, \ldots\ldots$

cifre. Dai numeri (1) se ne formino altrettanti, ciascuno di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, scrivendo consecutivamente quante volte occorra ciascun periodo. (In casi determinati il numero $mnpq\ldots\ldots$ può essere il minimo comune multiplo degli altri (2)). Sieno così fatti numeri indicati rispettivamente con

(3) . . . . $e, \; h, \; k, \; l, \ldots\ldots$;

allora le generatrici dei periodici dati, saranno:

(4) . . . . $\dfrac{e}{99\ldots9}, \quad \dfrac{h}{99\ldots9}, \quad \dfrac{k}{99\ldots9}, \quad \dfrac{l}{99\ldots9}, \ldots\ldots$

e la somma di queste sarà:

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9},$$

ritenendo in tutte codeste frazioni il denominatore costituito da $mnpq\ldots\ldots$ cifre eguali a 9. Se il numero $e+h+k+l+\ldots\ldots$ abbia più di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, si indichi con s quello formato dalle $mnpq\ldots\ldots$ prime cifre a destra e con r l'altro costituito dalle rimanenti a sinistra, rispetto a chi legge. Si può quindi porre:

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=\frac{r\,.\,10^{mnpq\ldots\ldots}+s}{99\ldots9}=r+\frac{s+r}{99\ldots9}\,.$$

Se anche il numero $s+r$ abbia più di $mnpq\ldots\ldots$ cifre, scomponendolo in due analoghe parti $r_1\,.\,10^{mnpq\ldots\ldots}$ ed s_1, si potrà porre

$$\frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=r+r_1+\frac{s_1+r_1}{99\ldots9}\,.$$

Così continuando, prima o poi si giungerà ad un numero s_x+r_x di sole $mnpq\ldots\ldots$ cifre; avendo così:

$$(\alpha)\qquad \frac{e+h+k+l+\ldots\ldots}{99\ldots9}=r+r_1+r_2+\ldots\ldots+r_x+\frac{s_x+r_x}{99\ldots9}\,.$$

Se ne conclude che il numero *somma* dei periodici dati ha la parte intera $r+r_1+r_2+\ldots\ldots+r_x$ ed il periodo s_x+r_x.

Nota. Il periodo potrebbe risultare di un numero minore di cifre; ed allora s_x+r_x è formato da quello ripetuto alcune volte.

2. Si considerino ora i numeri periodici semplici $x,[a]$; $y,[b]$; $z,[c]$; $u,[d]$. Ritenendo le notazioni precedenti, di leggeri si riscontra essere le generatrici loro rispettivamente

$$x+\frac{e}{99\ldots9}\,;\quad y+\frac{h}{99\ldots9}\,;\quad z+\frac{k}{99\ldots9}\,;\quad u+\frac{l}{99\ldots9}\,.$$

La somma dunque dei numeri decimali proposti sarà:

$$S=x+y+z+u+r+\frac{s+r}{99\ldots9}\,;$$

e quando si ponga $x+y+z+u+r=w$, anche si avrà:

$$(\beta)\ \ldots\ldots\ldots\quad S=w+\frac{s+w-(x+y+z+u)}{99\ldots9}\,.$$

Le formule (α) e (β) esprimono due regole *pratiche* per calcolare la somma di quanti si vogliano numeri decimali periodici semplici, senza aver ricorso alle loro generatrici. Anche ne consegue la regola per moltiplicare un numero periodico semplice per un intero qualunque.

Esempi:

1° $0,[924]+0,[87]+0,[6]$; calcolata la somma $924924+878787+666666=2470377$ e l'altra $470377+2=470379$, si conclude essere $0,[924]+0,[87]+0,[6]=2,[470379]$.

2° $0,[43]\times 348$; calcolato il prodotto $43\times 348=14964$ e la somma $149+64=213$ e l'altra $2+13=15$, il prodotto cercato sarà $0,[43]\times 348=(149+2),[15]=151,[15]$.

Corollario. Il prodotto di un periodico semplice per 10^m è un altro periodico semplice la cui parte intera si ha spostando la virgola nel dato di m posti a destra, ed il cui periodo si ottiene scrivendo di seguito alle rimanenti cifre del periodo quelle che colla virgola ne furono separate. Cioè

$$8,[7562] \times 10^3 = 8756,[2756].$$

3. Con un semplice cambiamento di unità si può dedurre dalla regola precedente quella per calcolare la somma di periodici misti, quando l'antiperiodo sia costituito in tutti dallo stesso numero di cifre. Ed invero se nei periodici $0, x[a]$; $0, y[b]$; $0, z[c]$; $0, u[d]$, sieno gli antiperiodi costituiti da m cifre, essi riferiti all' unità $\frac{1}{10^m}$ saranno rappresentati da:

$$x,[a]; \quad y,[b]; \quad z,[c]; \quad u,[d].$$

Di questi allora calcolata la somma

$$S = w,[s + w - x - y - z - u]$$

si avrà quella dei numeri dati ritornando dall'unità $\frac{1}{10^m}$ all' intera.

G. Ingrami.

Alcuni teoremi affini di geometria. (*Continuazione,* *v. p. 147*). — Teorema. *Se in un triangolo due angoli sono diseguali, la bisettrice dell' angolo maggiore divide il lato opposto in due segmenti tali che il rettangolo da essi contenuto è maggiore del rettangolo contenuto dai segmenti determinati dalla bisettrice dell'angolo minore sul lato opposto.*

Sia ABC il dato triangolo e vi si supponga l'angolo ACB maggiore di CAB e conseguentemente $AB > BC$. Posto, come il solito, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, s'indichino con c_1 e c_2 le lunghezze dei segmenti AD, DB in cui il lato AB è diviso dalla bisettrice CD, e con a_1 e a_2 le lunghezze dei segmenti BE, EC determinati dalla bisettrice AE sul lato BC.

È ben noto che $c_1 = \frac{bc}{a+b}$, $c_2 = \frac{ac}{a+b}$ e che perciò $c_1 c_2 = \frac{abc^2}{(a+b)^2}$.

Analogamente si trova $a_1 a_2 = \frac{cba^2}{(c+b)^2}$, e se ne deduce che

$$\frac{c_1 c_2}{a_1 a_2} = \frac{c(c+b)^2}{a(a+b)^2}.$$

Ma dall'essere $c > a$, resulta $c(c+b)^2 > a(a+b)^2$ e quindi è anche

(1) . . . . $c_1 c_2 > a_1 a_2$ c. d. d..

Corollario 1. *La bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Indicando con β_1 e β_3 rispettivamente le lunghezze delle bisettrici AE, CD si sa che

$$cb = \beta_1^2 + a_1 a_2 \quad , \quad ab = \beta_3^2 + c_1 c_2 ;$$

e poichè insieme con $c > a$, si ha $cb > ab$, sussisterà la diseguaglianza

$$\beta_1^2 + a_1 a_2 > \beta_3^2 + c_1 c_2 ,$$

e, a causa della (1), sarà pure

$$\beta_1^2 > \beta_3^2 \qquad \text{e} \qquad \beta_1 > \beta_3 .$$

Corollario II. *Se le bisettrici di due angoli di un triangolo sono uguali, il triangolo è isoscele.*

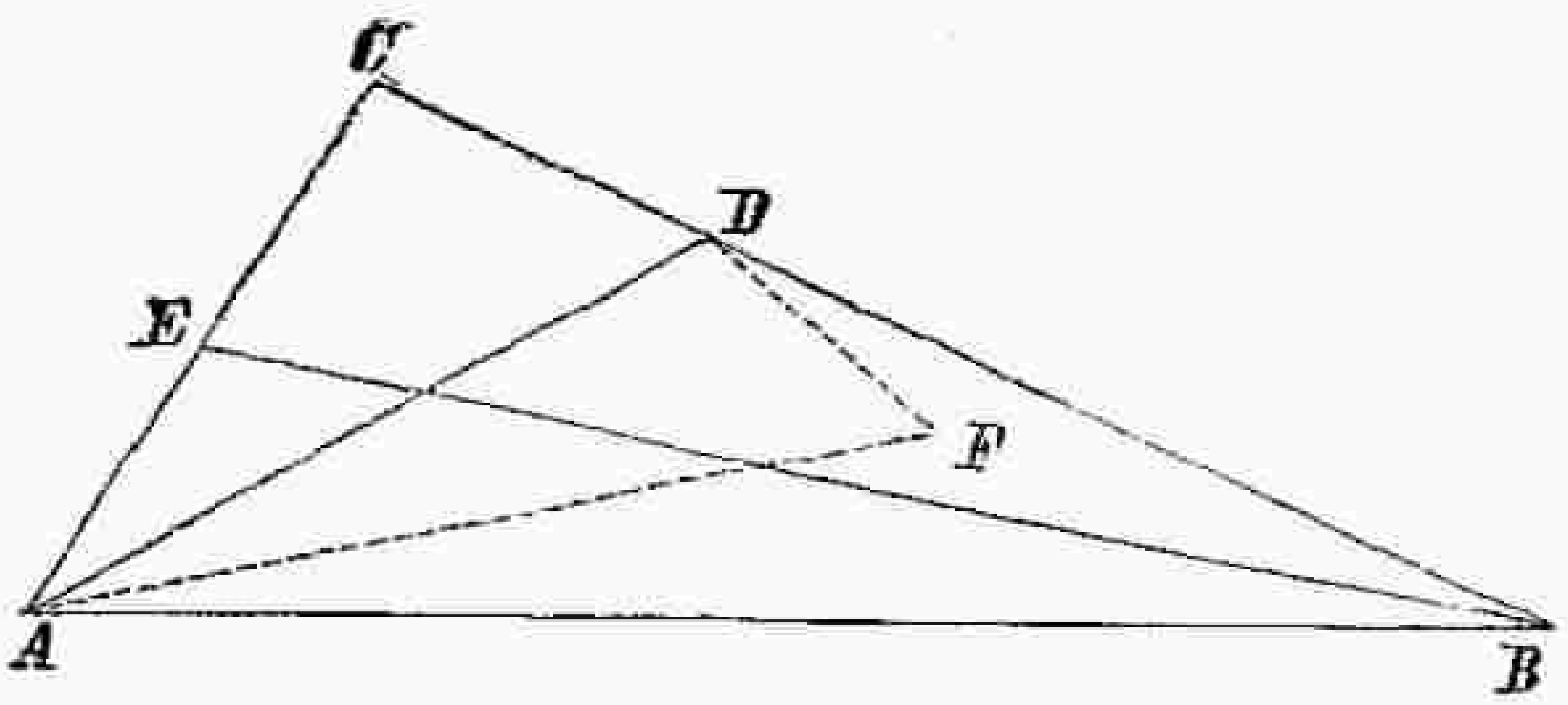
E. Sadun.

Teorema 1°. *Se due triangoli aventi la base comune ed il terzo vertice dell'uno situato nell'interno dell'altro, sono tali che la somma degli angoli opposti alla base comune è minore di due retti, dei lati non comuni che vanno ad uno stesso vertice, e che appartengono ai due diversi triangoli, è maggiore quello che appartiene al triangolo esterno.*

Sieno ACB, ADB i due triangoli dati e D cada nell'interno del triangolo ACB: si unisca C con D. Se fosse $AD \geqq AC$, sarebbe ang. $ACD \geqq ADC$ e quindi ang. $ACB > ADC$, perchè è ang. $ACB > ACD$. Ma essendo ang. $ADC + ADB + CDB = 4$ Retti e ang. $CDB < 2$ Retti, deve essere ang. $ADC + ADB > 2$ Retti. Dunque se fosse $AD \geqq AC$ sarebbe ang. $ACB + ADB > 2$ Retti contro l'ipotesi, e deve perciò aversi $AD < AC$ e analogamente $DB < CB$.

Teorema 2°. *Se due angoli di un triangolo sono disuguali, la bisettrice dell'angolo maggiore è minore della bisettrice dell'angolo minore.*

Sia ABC il triangolo dato avente l'angolo CAB maggiore dell'angolo CBA, e sieno AD, BE rispettivamente le bisettrici di questi angoli. Avremo ang. $CAD = DAB > CBE = EBA$, e poichè ang. $AEB = ACB + CBE$ e ang. $BDA = ACB + CAD$ sarà ang. $AEB < BDA$. Costruiscasi l'angolo DAF eguale all'angolo EBA



e l'angolo ADF eguale all'angolo AEB. Risulterà l'angolo AFD eguale all'angolo CAB. Il triangolo ADF avrà la base comune col triangolo ABD ed il vertice F nell'interno di questo triangolo, e poichè ang. $CAB + DBA <$ 2 Retti sarà anche $AFD + DBA < 2$ Retti e pel teorema precedente dovrà aversi $AF < AB$.

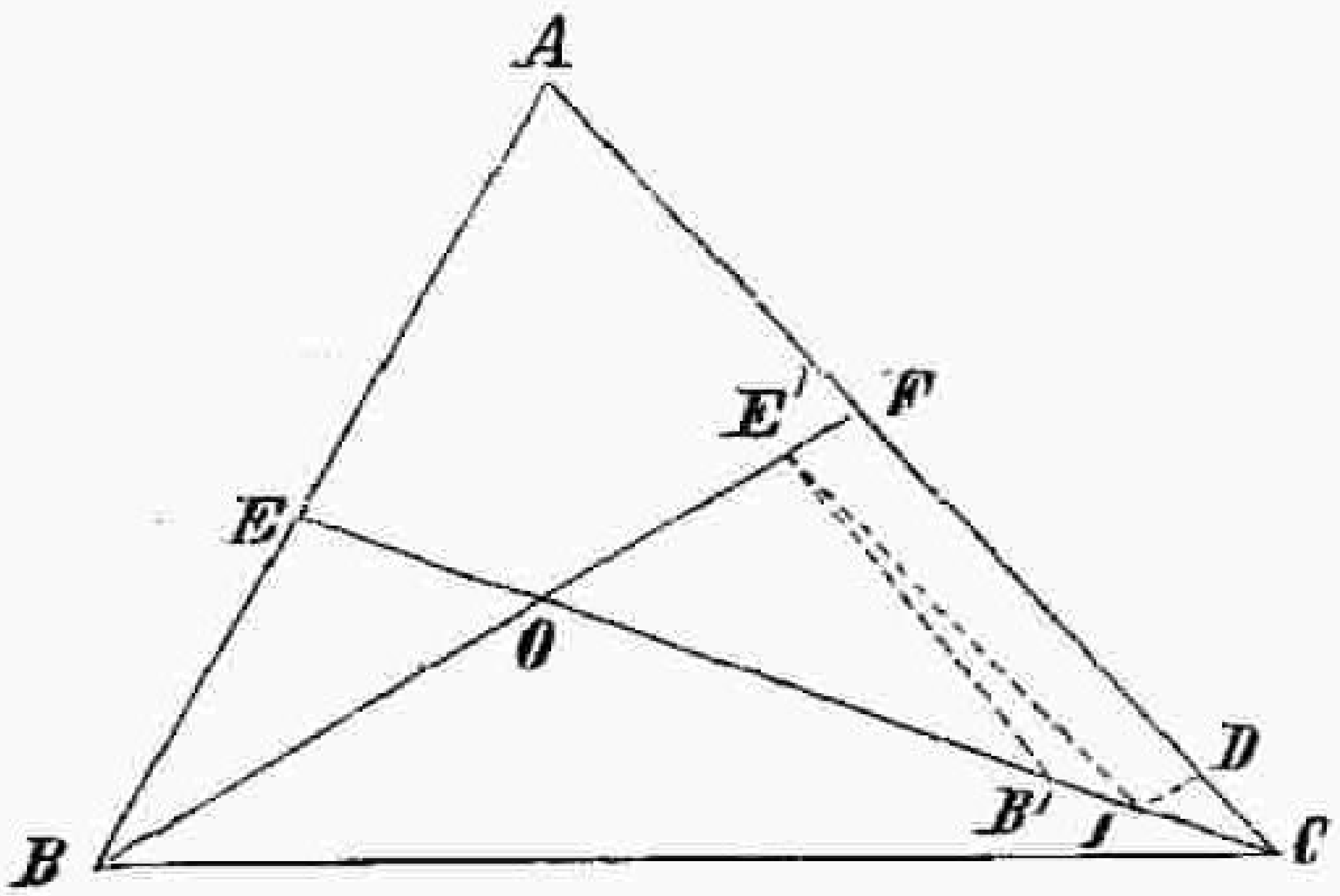
Ma AF ed AB sono due lati omologhi dei triangoli simili AFD, AEB e perciò per gli altri due lati omologhi AD, EB si avrà pure $AD < EB$; cioè la bisettrice dell'angolo maggiore è minore di quella dell'angolo minore.

COROLLARIO. — *Se un triangolo ha eguali le bisettrici di due suoi angoli, il triangolo è isoscele.* C. SOSCHINO.

TEOREMA. *Se i segmenti* BF *e* CE *delle bisettrici degli angoli* ABC *e* ACB *sono eguali, anche gli angoli* ABC *e* ACB *saranno eguali ed il triangolo* ABC *è isoscele.*

Pongo ang. $OBC = \alpha$, ang. $BCO = \beta$, ang. $OEB = r$, ang. $CFO = r'$.

Dico essere $BO = OC$. Se ciò non fosse sul segmento maggiore OC prendo, a partire da O, $OB' = OB$, ed analogamente sul segmento $OF > OE$ prendo $OE' = OE$ e tiro la $E'B'$. Poichè $OC > OB$ sarà $\alpha > \beta$, e nei due triangoli BEO ed OFC sarà $r < r'$, perchè ang. $EOB = FOC$. Per la costruzione precedentemente fatta, i due triangoli BEO ed $OE'B'$ sono eguali e quindi $r = OE'B'$, ma $r < r'$ dunque ang. $OE'B' < r'$. Da ciò si conchiude che se da E' si conduce la parallela ad AC essa cade nell'interno del quadrilatero $E'FCB'$, ossia come si vede disegnata nella figura. Se da I si conduce la parallela ad $E'F$ si otterrà il parallelogrammo $E'IDF$ e quindi $ID = E'F$, ma poichè $BE' = EB'$ sarà $E'F = B'C$ ossia $IC < ID$; ed allora considerando il triangolo IDC sarà $\beta >$ ang. IDC ma ang. $IDC = r'$ dunque $\beta > r'$, e siccome $\alpha > \beta$ a più forte ragione $\alpha > r'$, risultato evidentemente assurdo perchè r' è angolo esterno del triangolo BAF, dunque $BO = OC$, ossia $\alpha = \beta$ ovvero ang. $ABC = ACB$ c. b. d..



A. MARTONE.

NOTA DELLA RED. — Del teorema « Se in un triangolo due bisettrici sono uguali, il triangolo è isoscele », possono leggersi delle dimostrazioni, fondate sui primi tre libri d'Euclide, alle pag. 147-149 dell'anno 3°, 1889, del *Bulletin Scientifique* redatto dal Sig. Prof. E. LEBON. — Risalendo ad epoca più remota, giova ricordare che il teorema ora citato fu nel 1840 proposto a STEINER dal LEHMUS, professore a Berlino, colla preghiera di averne una dimostrazione sintetica: donde il nome di *teorema di Lehmus* sotto cui è noto. Negli anni 1840-55 nei periodici tedeschi, francesi ed inglesi ne apparvero tante dimostrazioni che il CLAUSEN diceva che quella proposizione possedeva una letteratura sua propria come il teorema di Pitagora e la teoria delle parallele. Nel solo *Archiv* di GRUNERT si trovano 13 dimostrazioni; un'altra fu data dal REUSCHLE (*Programmabhandlung* von 1850), altre tre si leggono nelle *Mathematische Unterhaltung* del D.r RIECKE (I Heft 1867 p. 38, II Heft 1868 p. 48). Essa venne poi generalizzata dallo ZECH (*Archiv* cit. XVI), sostituendo alle bisettrici le rette che dividono due angoli nello stesso rapporto.

Tema di matematica per la licenza dagli Istituti tecnici (Sessione d'ottobre). — *Dal vertice* A *di un rettangolo* ABCD *si abbassi la perpendicolare* AM *sulla diagonale* BD, *e dal piede* M *si conducano le perpendicolari* MP, MQ *sui lati* CB, CD. *Posto* $BD = d$, $MP = p$, $MQ = q$, *dimostrare che* $p^{\frac{2}{3}} + q^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$.

Prolunghisi PM ad incontrare AD in H, dal triangolo rettangolo AMD, si ha:

$$\overline{DM}^2 = AD \, . \, DH = BC \, . \, q \quad , \quad \overline{MH}^2 = \overline{DQ}^2 = AH \, . \, HD = BP \, . \, q. \quad [1]$$

Dai triangoli simili BDC, BMP, MDQ segue poi: $BC : q = d : MD$, $BP : q = p : QD$, da cui ricavasi $BC = \frac{qd}{MD}$, $BP = \frac{qp}{QD}$. Sostituendo rispettivamente in [1], si ottiene subito $\overline{DM}^3 = q^2 \, . \, d$, $\overline{DQ}^3 = q^2 \, . \, p$ e quindi:

$$DM = \sqrt[3]{q^2 \, . \, d}\,, \qquad DQ = \sqrt[3]{q^2 \, . \, p}\,, \qquad MQ = \sqrt[3]{q^2 \, . \, q}\,.$$

Applicando ora il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo MDQ, si ha:

$$\left(\sqrt[3]{q^2 \, . \, d}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{q^2 \, . \, p}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{q^2 \, . \, q}\right)^2$$

da cui, eliminando il fattor comune $\left(\sqrt[3]{q^2}\right)^2$, segue la relazione richiesta.

Osservazione. — Prolungata pure QM, ad incontrare AB in L, e posto $MH = x$, $ML = y$, dai triangoli rettangoli AMB, DMA si ha: $p = y^2 : x$, $q = x^2 : y$ e la relazione proposta diviene $y \sqrt[3]{y : x^2} + x \sqrt[3]{x : y^2} = \sqrt[3]{d^2}$ la quale rappresenta, in coordinate ortogonali x e y, il luogo dei piedi delle perpendicolari condotte dall'origine sopra un segmento di lunghezza costante d che si muove mantenendo i suoi estremi sugli assi coordinati.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
111, 113, 128*, 129* e 131*.

111. *Posto*

$$\alpha_n = (2a)^n + (n-1)(2a)^{n-2} \, . \, b + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \, . \, 2} (2a)^{n-4} \, . \, b^2 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} (2a)^{n-6} \, . \, b^3 + \ldots\ldots,$$

con $a > 0$ *e* $b > 0$, *dove il secondo membro deve finire col termine* $b^{\frac{n}{2}}$ *se* n *è pari e col termine* $\frac{n+1}{2} \, . \, 2a \, . \, b^{\frac{n-1}{2}}$ *se* n *è dispari, si ha:*

$$\sqrt{a^2 + b} = a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b \, . \, \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$$

e la differenza tra $\sqrt{a^2 + b}$ *ed* $a - 1 + \frac{\alpha_n + b\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ *è minore di* $\frac{b^n}{\alpha_{n-1} \, . \, \alpha_n}$.

(F. Giudice).

Soluzione del Sig. Prof. *S. Catania.*

Moltiplicando α_n per $2a$ ed α_{n-1} per b, poi addizionando, sia n pari o dispari, con un procedimento analogo a quello che si legge a pag. 154, 155 di questo giornale, si ritrova

$$2a \, . \, \alpha_n + b \, . \, \alpha_{n-1} = \alpha_{n+1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [1]$$

Posto ciò, ricorrendo alla trasformazione di $\sqrt{a^2+b}$ in frazione continua, si ha, com' è noto:

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ldots}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad [2]$$

Le prime ridotte di questa continua sono:

$$\frac{a}{1}, \quad \frac{a \, . \, 2a + b}{2a}, \quad \frac{a\,[(2a)^2 + b] + 2a \, . \, b}{(2a)^2 + b}, \quad \frac{a\,[(2a)^3 + 2\,(2a) \, . \, b] + b\,[(2a)^2 + b]}{(2a)^3 + 2\,(2a) \, . \, b},$$

ed hanno la forma:

$$\frac{a\alpha_0 + b \, . \, 0}{\alpha_0}, \quad \frac{a \, . \, \alpha_1 + b \, . \, \alpha_0}{\alpha_1}, \quad \frac{a \, . \, \alpha_2 + b \, . \, \alpha_1}{\alpha_2}, \quad \frac{a\,\alpha_3 + b\,\alpha_2}{\alpha_3},$$

dove ad α_k è da attribuirsi il significato che ha nell'enunciato della quistione proposta; dimostrerò che ciò vale per tutte. Infatti per la legge di formazione delle ridotte delle frazioni continue della forma [2], posto che le ridotte k^{esima} e $(k+1)^{esima}$ siano $\dfrac{a \, . \, \alpha_{k-1} + b \, . \, \alpha_{k-2}}{\alpha_{k-1}}$ e $\dfrac{a \, . \, \alpha_k + b \, . \, \alpha_{k-1}}{\alpha_k}$, la ridotta $(k+2)^{esima}$ sarà:

$$\frac{2a\,[a \, . \, \alpha_k + b \, . \, \alpha_{k-1}] + b\,[a \, . \, \alpha_{k-1} + b \, . \, \alpha_{k-2}]}{2a \, . \, \alpha_k + b\,\alpha_{k-1}} =$$

$$\frac{a\,[2a \, . \, \alpha_k + b \, . \, \alpha_{k-1}] + b\,[2a \, . \, \alpha_{k-1} + b \, . \, \alpha_{k-2}]}{2a \, . \, \alpha_k + b \, . \, \alpha_{k-1}}.$$

E questa espressione, in virtù della [1], può scriversi $\dfrac{a \, . \, \alpha_{k+1} + b \, . \, \alpha_k}{\alpha_{k+1}}$.

Adunque:

$$\sqrt{a^2+b} = \lim_{n=\infty} \frac{a \, . \, \alpha_n + b\,\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = \lim_{n=\infty} \left(a - 1 + \frac{\alpha_n + b \, . \, \alpha_{n-1}}{\alpha_n}\right) =$$

$$a - 1 + \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + b \, . \, \alpha_{n-1}}{\alpha_n}.$$

Per dimostrare la seconda parte del teorema proposto, si rammenti che se si ha la frazione continua

$$\cfrac{\beta_1}{\gamma_1 + \cfrac{\beta_2}{\gamma_2 + \ldots\ldots}}$$

la differenza fra le ridotte di ordine n ed $n-1$ è una frazione ordinaria il cui numeratore in valore assoluto è $\beta_1 \, . \, \beta_2 \, . \, . \, . \, . \, \beta_n$, e il denominatore è uguale al prodotto dei denominatori delle due ridotte. Nel caso nostro, essendo $\beta_1 = \beta_2 = \ldots\ldots = \beta_n = b$, la differenza fra la ridotta $\dfrac{a \cdot \alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ e la precedente è $\dfrac{b^n}{\alpha_{n-1} \cdot \alpha_n}$, e quindi $\sqrt{a^2 + b}$, che è compresa fra le medesime ridotte, differirà da $\dfrac{a \cdot \alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$, cioè da $a - 1 + \dfrac{\alpha_n + b \cdot \alpha_{n-1}}{\alpha_n}$, per meno di $\dfrac{b^n}{\alpha_{n-1} \cdot \alpha_n}$.

Osservazione. — Se $a = 1$, $b = 1$, si ha:

$$\sqrt{2} = \lim_{n=\infty} \frac{\alpha_n + \alpha_{n-1}}{\alpha_n},$$

che rappresenta il teorema 110°.

113. *Dimostrare che l'equazione*

$$A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

in cui è

$$\begin{aligned}
A_4 &= m^5 - l m^3 n + m^2 l^4, \\
A_3 &= 4 m^4 n - 3 l m^2 n^2 - 11 m^3 l^3 + 2 m n l^4, \\
A_2 &= 6 m^3 n^2 - 3 m n^3 l + 64 m^4 l^2 - 49 l^3 n m^2 + n\, l^4, \\
A_1 &= 4 m^2 n^3 - n^4 l + 128 m^3 n l^2 - 65 m n^2 l^3, \\
A_0 &= m n^4 + 64 m^2 n^2 l^2 - 27 l^3 n^3,
\end{aligned}$$

ha due radici eguali, ed esprimere queste e l'altre radici in funzione di l, m, n.

(D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *G. Rozzolino.*

Pongasi

$$f(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

La prima derivata di $f(x)$ è

$$f'(x) = 4 A_4 x^3 + 3 A_3 x^2 + 2 A_2 x + A_1,$$

e se $f(x) = 0$ ha una radice doppia, α, si dovrà avere

$$\frac{A_0}{A_4} = \alpha^2 \beta \gamma,$$

dove β e γ sono le rimanenti due radici di $f(x) = 0$; inoltre sappiamo che α dovrà essere radice semplice di $f'(x) = 0$, e quindi sarà

$$\frac{A_1}{4 A_4} = -\alpha \delta \varepsilon,$$

dove δ ed ε sono le rimanenti radici di $f'(x) = 0$.

Ora si ha:

$$\begin{aligned}
A_0 &= n^2 (m n^2 + 64 m^2 l^2 - 27 l^3 n) = n^2 A_0', \\
A_1 &= n (4 m^2 n^2 - n^3 l + 128 m^3 l^2 - 65 m n l^3) = n A_1', \\
A_4 &= m^2 (m^3 - l m n + l^4) = m^2 A_4',
\end{aligned}$$

ove manifestamente nessun fattore (razionale) di $\frac{A_1'}{4\,m\,A_4'}$, può essere fattore quadratico (razionale) di $\frac{A_0'}{A_4'}$. Perciò si deve avere:

$$\alpha = \pm \frac{n}{m}.$$

La scelta del segno si può fare con un caso particolare; per es. ponendo $l = m = n = 1$, si trova $\alpha = -1$, e quindi in generale dev'essere $\alpha = -\frac{n}{m}$.

È facilissimo verificare che effettivamente si ha:

$$f\left(-\frac{n}{m}\right) = 0 \quad , \quad f'\left(-\frac{n}{m}\right) = 0,$$

e che quindi $-\frac{n}{m}$ è radice doppia di $f(x) = 0$.

Le rimanenti radici β e γ soddisferanno un'equazione di 2.° grado $a x^2 + b x + c = 0$, che si potrà determinare ponendo identicamente

$$f(x) = (m x + n)^2 \, (a x^2 + b x + c);$$

il che dà:

$$\begin{array}{rcl} a m^2 = A_4 & \text{donde} & a = m^3 - l m n + l^4; \\ 2 a m n + b m^2 = A_3 & \text{donde} & b = 2 m^2 n - l n^2 - 11\, l^3 m; \\ c n^2 = A_0 & \text{donde} & c = m n^2 + 64\, l^2 m^2 - 27\, l^3 n. \end{array}$$

Un'ulteriore ricerca sarebbe inutile, perchè β e γ sono certamente irrazionali in l, m ed n; infatti è evidente che nè a nè c sono decomponibili in fattori razionali.

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Catania.*

L'equazione proposta si può scrivere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & m n^4 \left[\left(\frac{m x}{n}\right)^4 + 4\left(\frac{m x}{n}\right)^3 + 6\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 4\left(\frac{m x}{n}\right) + 1\right] \\ & - l n^4 x \left[\left(\frac{m x}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 3\left(\frac{m x}{n}\right) + 1\right] \\ & + l^4 n^2 x^2 \left[\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{m x}{n}\right) + 1\right] + 64\, l^2 m^2 n^2 \left[\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 2\left(\frac{m x}{n}\right) + 1\right] \\ & - l^3 n^3 \left[49\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 27 + 11\left(\frac{m x}{n}\right)^3 + 65\left(\frac{m x}{n}\right)\right] = 0; \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned} & m n^4 \left(\frac{m x}{n} + 1\right)^4 - l n^4 x \left(\frac{m x}{n} + 1\right)^3 + \left(l^4 n^2 x^2 + 64\, l^2 m^2 n^2\right) \left(\frac{m x}{n} + 1\right)^2 \\ & \qquad - l^3 n^3 \left[49\left(\frac{m x}{n}\right)^2 + 27 + 11\left(\frac{m x}{n}\right)^3 + 65\left(\frac{m x}{n}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

La quantità chiusa nell'ultima parentesi quadra si può scrivere successivamente:

$$11\left(\frac{mx}{n}\right)^3+22\left(\frac{mx}{n}\right)^2+11\left(\frac{mx}{n}\right)+27\left(\frac{mx}{n}\right)^2+54\left(\frac{mx}{n}\right)+27$$

$$=11\,\frac{mx}{n}\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2+27\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2=\left(11\,\frac{mx}{n}+27\right)\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2.$$

Sostituendo, mettendo in evidenza il fattor comune $\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2$, riducendo e ordinando, si ha:

$$\left(\frac{mx}{n}+1\right)^2[(m^3-lmn+l^4)x^2+(2m^2n-11l^3m-ln^2)x+64l^2m^2+mn^2-27l^5n]=0.$$

Sotto questa forma si scorge subito che l'equazione proposta ammette la radice doppia $x=-\frac{n}{m}$, e le altre due saranno espresse da:

$$\frac{A\pm l\sqrt{B}}{2C},$$

in cui è:

$$A=-2m^2n+11l^3m+ln^2,$$
$$B=-256m^5+320m^3ln^2-135m^2l^4-90ml^2n^2+n^4+108l^5n,$$
$$C=m^3-mln+l^4.$$

128*. *Divisa la corda* AB *di un arco in tre parti uguali* AI = IE = EB *e condotti i raggi* **OIM, OEN,** *dimostrare che il coseno dell' angolo medio, cioè* $\cos \mathrm{IOE}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos\alpha}$, *essendo angolo* AOB = α *l'angolo al centro.*

(G. Bellacchi).

Dimostrazione dei Sigg. *G. Candido*, licenziato dal R. Liceo di Lecce; *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *G. Russi Ruggi*, alunno del R. Istituto tecnico di Foggia (*).

Condotta da O la perpendicolare OH alla corda AB, dai triangoli rettangoli OHA, OHI si ha $AH=3.IH=OH\tan\frac{\alpha}{2}$, $IH=OH\tan\frac{IOE}{2}$.

Eliminando OH da queste due relazioni, si ricava:

$$3\tan\frac{IOE}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\quad\dots\dots\dots\quad[1]$$

che sotto forma diversa da quella richiesta è la relazione domandata. Per ridurla alla forma voluta si rammenti che $\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, per cui quadrando [1] si ha:

$$9\,\frac{1-\cos IOE}{1+\cos IOE}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

(*) Soluzioni meno dirette pervennero dai Sigg. *E. de Vito* (licenziato dal R. Ist. tec. Roma), *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila), *F. Restucci* (R. Ist. tec. Napoli), *G. Trapani* (licenziato dal R. Ist. nautico Catania).

e, riducendo a forma intera, e, semplificando:

$$4+5\cos\alpha-5\cos IOE-4\cos\alpha\,.\,\cos IOE=0\,,$$

da cui, ricavando $\cos IOE$, risulta:

$$\cos IOE=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\cos 4}\,.$$

129' *Di un pentagono* ABCDE *si conoscono i lati* AB = a, BC = CD = 2 a, DE = 3 a, EA = 4 a *e gli angoli* EAB = BCD = 120°, *si calcolino gli altri elementi per la sola geometria.* (G. Bellacchi).

Risposta dei Sigg. *V. Columbo*, alunno del R. Istituto tecnico di Bari, ed *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari (*).

Condotta da E la EF perpendicolare ad AB, a tagliare il prolungamento di BA in F, essendo l'angolo EAB di 120°, l'angolo FAE sarà di 60° onde $FA=EA:2=2a$, $EF=2a\sqrt{3}$ ed $FB=FA+AB=3a$. Se poi si osservi che la diagonale DB è il lato di un triangolo equilatero inscritto in un cerchio di raggio $BC=CD=2a$, risulta $DB=2a\sqrt{3}$. Così il quadrilatero $EFBD$ ha i lati opposti uguali e l'angolo EFB retto, quindi esso è rettangolo, ossia DB è perpendicolare ad AB e DE. Dopo ciò è evidente che angolo $ABC=CDE=120°$ e angolo $DEA=60°$.

I Sigg. *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma e *G. Trapani*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Catania, nel rispondere a questa quistione, calcolano pure le lunghezze delle diagonali trovando oltrechè $BD=2a\sqrt{3}$, $BE=a\sqrt{21}$, $AD=a\sqrt{13}$, $AC=a\sqrt{7}$, $EC=a\sqrt{19}$.

Come genesi della figura il Sig. *G. Candido*, allievo del R. Liceo di Lecce, fa osservare ch'essa poteva ottenersi da un parallelogrammo di lati a e $4a$ ed angolo compreso di 60°, sopra di un lato maggiore del quale sia costruito un semiesagono regolare, il Sig. *G. F. Farruggio*, alunno del R. Istituto nautico di Catania, nota che il pentagono considerato può ottenersi da un triangolo equilatero di lato $5a$ da un angolo del quale sia staccato un triangolo simile di lato $2a$ e da un altro angolo un triangolo equilatero di lato a, finalmente il Sig. *E de Vito* nota che si origina la stessa figura costruendo un parallelogrammo di lati $4a$ e $3a$ ed angolo compreso di 60°, poi staccando da un angolo acuto un triangolo equilatero di lato $2a$.

131' *Le potenze di un intero* a *qualsivoglia, sono sempre esprimibili mediante la somma di* a *termini consecutivi della serie dei numeri dispari.*

(F. P. Paternò).

Dimostrazione del Sig. *G. Candido*, licenziato dal R. Liceo di Lecce.

(*) Altre risposte vennero inviate dai Sigg. *G. Candido*, *E. De Vito*, *G. F. Farruggio*, *L. Perrotti* (R. Ist. tec. Aquila), *G. Trapani*.

È noto che la somma dei primi n numeri dispari è uguale ad n^2, cioè:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)=n^2.$$

Ora si ha:

$$n^2=\sum_{i=1}^{i=n}(2i-1)=\sum_{1}^{k}(2i-1)+\sum_{k+1}^{n}(2i-1)=k^2+\sum_{k+1}^{n}(2i-1),$$

quindi:

$$\sum_{i=k+1}^{i=n}(2i-1)=n^2-k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

la quale uguaglianza dimostra che la differenza dei quadrati di due interi n, k è esprimibile mediante la somma di $n-k$ termini consecutivi della serie dei numeri dispari a partire dal $(k+1)^{\text{esimo}}$ numero dispari.

Ciò posto si ha identicamente:

$$\left(\frac{a^{m-1}+a}{2}\right)^2-\left(\frac{a^{m-1}-a}{2}\right)^2=a^m;$$

epperò per la [1] possiamo conchiudere che a^m è la somma di $\frac{a^{m-1}+a}{2}-\frac{a^{m-1}-a}{2}$, ossia di a termini consecutivi, della serie dei numeri dispari, a partire dal termine d'ordine $\frac{a^{m-1}-a}{2}+1$.

Dimostrazione dei Sigg. *G. F. Farruggio*, alunno del R. Istituto nautico di Catania; *E. de Vito*, licenziato dal R. Istituto tecnico di Roma; *E. G. Ricci*, alunno del R. Liceo di Bari; *G. Trapani*, licenziato dal R. Istituto nautico di Catania (*).

Pongasi

$$a^m=x+(x+2)+\ldots\ldots+(x+2\,[a-1]);$$

dimostrando che questa relazione, qualunque sia a, è sempre soddisfatta per un valore dispari di x, la quistione proposta resta provata.

La somma al secondo membro è anche uguale ad $ax+\frac{a(a-1).2}{2}$, onde uguagliandola ad a^m e semplificando, risulta:

$$a^{m-1}=x+a-1 \qquad \text{donde} \qquad x=a^{m-1}-a+1.$$

Ora quando a sia tanto pari che dispari la differenza $a^{m-1}-a$ è numero pari per cui x è sempre dispari, c. d. p.

(*) Altre dimostrazioni di questa quistione pervennero dai Sigg. *F. Columbo* (R. Ist. tec. Bari) e *D. Pasillo* (R. Ist. tec. Foggia).

QUISTIONI PROPOSTE (*)

141*. Se p è un numero primo maggiore di 3 ed a un numero intero qualunque, dimostrare che la differenza $a^p - a$, è sempre divisibile per $6p$.

F. GIUDICE.

142*. Nel piano d'un cerchio di diametro AB sia dato un punto M, e coi diametri MA, MB si descrivano due cerchi K ed L, e concentricamente al cerchio AB si descriva un altro cerchio H. Dimostrare che i cerchi K ed L tagliano il cerchio H in quattro punti, vertici d'un quadrangolo completo di cui un punto diagonale è M e un altro cade nella retta AB.

S. CATANIA.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

E. SADUN e C. SOSCHINO — *Lezioni di aritmetica;* — Elementi della teoria dei numeri interi e frazionari. Ditta G. B. Paravia, 1893 — Prezzo: L. 2,50.

La tessitura di queste lezioni non è la solita dei trattati d'aritmetica razionale, ma vi si discosta in più luoghi dando all'opera un certo carattere d'originalità. E realmente scorrendo con attenzione il libro dei Sigg. Prof. Sadun e Soschino, mentre lo si riconosce subito per un lavoro pensato, fatto con grande cura e lodevolissimo rigore, vi si riscontrano in pari tempo parecchie differenze dai metodi usuali di trattazione che cercherò di porre in rilievo.

Partendo dal concetto che per definire le operazioni sui numeri e dimostrare le principali proprietà di essi, non è necessario di saperli rappresentare con pochi segni o cifre, ma si possono indicare con lettere dell'alfabeto, l'esposizione di un sistema di numerazione, anzichè formare oggetto, come d'ordinario, dei preliminari, è rimandata a più tardi col duplice vantaggio di poter sviluppare una trattazione più generale e di non dover far uso tacitamente fin dal principio, a scapito del rigore, di proprietà da svolgersi dopo.

In seguito a ciò gli aa. limitando i preliminari (Cap. I) a sviluppare il concetto di numero e di numeri consecutivi, ciò che è fatto con grande chiarezza, passano a studiare, nei Cap. II e III, le proprietà fondamentali della somma e differenza, chiarendone prima con esattezza la natura. Le dimostrazioni dei due teoremi simbolicamente espressi dalle uguaglianze $a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a+b=b+a$, in base alla data definizione di somma, come più difficili, sono date in due note poste in fine del Cap. II.

Seguono nei capitoli IV e V i teoremi fondamentali relativi ai prodotti ed ai quozienti (esatti). E quivi appoggiandosi ad una corrispondenza che non si può disconoscere e che fu altra volta sviluppata in questo giornale (**), i Sigg. Pro-

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

(**) F. AMODEO. Correlazione fra i teoremi delle operazioni sui numeri interi. *Periodico*, III, pp. 69, 103.

fessori Sadun e Soschino hanno dimostrato soltanto alcuni teoremi sui prodotti, omettendo le dimostrazioni degli altri teoremi e di quelli relativi ai quozienti esatti, facendo però notare in qual modo possono dedursi da quelle dei corrispondenti teoremi dell'addizione e della sottrazione. Nei Cap. VI e VII sono svolti i principali teoremi sulle somme e differenze combinate con prodotti e quozienti e sull'elevamento a potenza. Uniformandosi alla correlatività sopra notata osservano opportunamente gli aa., alla fine del Cap. VII, che alcuni dei teoremi sulle potenze possono farsi corrispondere ad altri dei Cap. IV e VI relativi ai prodotti ed alla combinazione delle somme e differenze con prodotti e quozienti e notano pure per quale motivo questa corrispondenza non possa essere generale.

Il Cap. VIII riguarda i quozienti approssimati. Vi sono considerate talune proprietà dei resti, spesso taciute nei manuali d'aritmetica e che trovano nondimeno frequenti applicazioni. Le distinte trattazioni in due capitoli delle proprietà dei quozienti esatti e di quelle che derivano dai quozienti appossimati è da lodarsi in quantochè il riunirle lascia spesso nella mente dei giovani qualche dubbio sulla bontà della definizione di divisione.

Nel Cap. IX sono studiati i sistemi di numerazione con particolare considerazione al sistema decimale, nel Cap. X vengono esposte, colle opportune dilucidazioni, le regole per eseguire le quattro operazioni e nei Cap. XI e XII le proprietà dei resti della divisione per 2, 5, 4, 25, 8, 125, 3, 9, 11, 33, 99 e le prove delle operazioni.

I Cap. XIII a XVI rispondono ai seguenti titoli – numeri primi e composti – tavola dei numeri primi; metodo per verificare se un numero dato è primo o no; decomposizione in fattori primi – divisori di un numero; numeri primi fra loro - divisori e multipli comuni a più numeri. Le proprietà principali dei numeri primi sono fondate sul teorema « Il prodotto di due numeri più piccoli di un dato numero primo non è divisibile per questo numero primo ». Le teorie del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo sono basate dagli aa. sulla teoria dei numeri primi e svolte in modo da porre in evidenza la corrispondenza fra le proprietà principali delle due teorie. Il Cap. XVI termina poi con una nota nella quale sono indicate le modificazioni che dovrebbero apportarsi al testo per svolgere le teorie del m. c. d. e del m. c. m. indipendentemente dalla teoria dei numeri primi, e per trattare quest'ultima in base a quella del m. c. d. senza ricorrere al teorema sopra riportato. È doveroso notare come gli aa. abbiano conservato anche in questi capitoli stretto rigore ed abbiano date opportune amplificazioni a dimostrazioni e proprietà talvolta esposte poco esattamente o incompletamente nei trattati d'aritmetica. Citerò ad es. nel Cap. XIII il teo. V in cui l'univocità della scomposizione di un numero in fattori primi è presentata nella forma seguente « Se le due serie di numeri primi (diversi da uno) $a, b, c, d...,$ $p, q, r, s...,$ sono tali che i prodotti $a\,b\,c\,d...,$ $p\,q\,r\,s...$ hanno uno stesso valore m, ad ogni termine di una delle serie deve corrisponderne uno eguale nell'altra » e il metodo a seguire per la formazione di una tavola di numeri primi, nel Cap. XIV il metodo per verificare se un dato numero è primo o no, finalmente nel Cap. XVI il teo: (II) « Affinchè un divisore comune di più numeri sia il loro m. c. d., è necessario e sufficiente che i quozienti di questi numeri per il divisore comune, sieno numeri primi fra loro », il teo: (V) « Due numeri hanno lo stesso m. c. d. del minore di essi e della differenza fra un multiplo qualunque di questo, ed il maggiore » ed il corrispondente del primo di questi teoremi nella teoria del m. c. m..

Ai numeri frazionari sono dedicati dagli aa. 12 capitoli. Nel Cap. I, introdotti i numeri frazionari, vengono estese alle frazioni di uguale denominatore le definizioni ed i teoremi relativi alla somma dei numeri interi. Il concetto di uguaglianza, sul quale si basano le proprietà fondamentali delle frazioni, è stabilito nei seguenti termini « Due frazioni sono eguali, quando sono eguali i prodotti del numeratore dell'una per il denominatore dell'altra ». Vengono appresso nei capitoli dal II al IV le definizioni e proprietà della somma e differenza, del prodotto e del quoziente delle frazioni, nel Cap. V le proprietà delle somme e differenze combinate con prodotti e quozienti, nel Cap. VI i teoremi sulle potenze, nel Cap. VII infine viene mostrato come possano estendersi alle frazioni a termini frazionari le proprietà delle frazioni a termini interi. Da notarsi come i Cap. II a VI relativi ai numeri frazionari siano i corrispondenti non soltanto nel titolo ma nella sostanza di quelli sui numeri interi segnati II a VII.

Nel Cap. VIII è dato il concetto di valore approssimato di una frazione ed è mostrato come dal valore approssimato $\frac{q}{k}$ di $\frac{a}{b}$, per difetto, a meno di $\frac{1}{k}$, in seguito all'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{q}{k} + \frac{1}{k} \cdot \frac{r}{b}$ $(r < b)$, dal valore approssimato $\frac{q_1}{m}$ di $\frac{r}{b}$, a meno di $\frac{1}{m}$, in seguito all'eguaglianza $\frac{r}{b} = \frac{q_1}{m} + \frac{1}{m} \cdot \frac{r_1}{b}$ $(r_1 < b)$, ecc., possa dedursi il valore approssimato di $\frac{a}{b}$ a meno di $\frac{1}{k\,m \ldots}$. I Cap. IX e X riguardano le frazioni ed i numeri decimali e le quattro operazioni con numeri decimali. Finalmente i Cap. XI e XII trattano della trasformazione delle frazioni ordinarie in decimali e viceversa. Il problema della trasformazione di una frazione decimale in ordinaria (Cap. XII), è risoluto, senza ricorrere al concetto di limite, valendosi dei seguenti tre teoremi « Affinchè una frazione ordinaria sia eguale ad un numero decimale, con m cifre nella parte decimale, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data, contenga i soli fattori primi 2 e 5 elevati ad esponenti il maggiore dei quali sia eguale ad m », « Affinchè una frazione ordinaria generi una frazione periodica semplice, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data sia un numero primo con 10 », « Affinchè una frazione ordinaria generi una frazione decimale periodica mista con h cifre di antiperiodo, è necessario e sufficiente che il denominatore della frazione irriducibile eguale alla data contenga fattori primi diversi da 2 e 5, che non sia primo con 10, ma contenga i fattori primi 2 e 5 elevati ad esponenti il maggiore dei quali sia eguale ad h », dimostrati nel Cap. XI.

Chiude l'opera una raccolta di 125 esercizi sui numeri interi e di 41 sui numeri frazionari, in cui si contemperano opportunamente la parte teorica e la parte pratica.

Terminerò con una parola di sincero elogio ai giovani autori per queste ottime lezioni, esprimendo la speranza che il largo uso dei simboli non riesca di ostacolo ai discenti per l'intelligenza del libro, al quale auguro quella larga fortuna che merita.

A. Lugli.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d' histoire des mathématiques, publié par G. Eneström. Nouvelle série. 6. N. 2, 3. — Stockholm, 1892.

Bulletin scientifique, rédigé par M. E. Lebon. Sixième année. N. 8, 9 et 10. A. Colin et C., éditeurs. Paris, 1892. — Septième année. N. 1. Félix Alcan, éditeur. Paris, 1892.