Dalla seconda delle formule (6) per es. si ricava:

$$q = \frac{ca}{b'} \operatorname{sen}(\beta - B);$$

che sostituito nella terza della (7) ci dà un'espressione che contiene le sole incognite angolari α e γ, e ricordando la (5) si possono queste determinare. Crediamo che il modo più semplice di risolvere l'equazione trigonometrica (7) sia il seguente: dalla (5) si deduce

$$\operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\gamma + 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos\beta;$$

si ha

$$q^2 = c^2\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\operatorname{sen}^2\gamma + 2ac\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos(\beta - B);$$

quindi

$$\frac{q^2}{\operatorname{sen}^2\beta} = \frac{cz^2 + a^2 + 2acz\cos(\beta - B)}{z^2 + 1 + 2z\cos\beta},$$

ponendo $z = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}$. Si ha così un'equazione di 2° grado completa rispetto a z, le cui radici diremo z_1 e z_2, ed il problema presenta in generale due soluzioni. (*)

Ricavati i valori degli angoli α e γ si ricade nel 1° Caso.

3° Caso. — I dati sono: la base t, un lato b' e un angolo adiacente γ.

Si osserva che nel triangolo DBA si conoscono due lati b', c e l'angolo, opposto al lato c, per cui colle note formule di trigonometria si determina l'angolo $\widehat{DAB}$, e quindi il lato a' del tetragono. Ciò fatto, della relazione $\frac{\operatorname{sen}(\alpha - A)}{\operatorname{sen}(\beta - B)} = \frac{aa'}{bb'}$ si ricava

$$\frac{\operatorname{sen}[(\gamma - C) + (\alpha - A)]}{\operatorname{sen}(\alpha - A)} = \frac{bb'}{aa'};$$

da cui si ottiene:

$$\cos(\gamma - C) + \operatorname{sen}(\gamma - C)\cot(\alpha - A) = \frac{bb'}{aa'}$$

dalla quale si ricava l'angolo α, poi si ricaverà l'angolo β.

4° Caso. — I dati sono la base t del tetragono e due lati b', c'.

Del triangolo DBC si conoscono i tre lati b', c', a; quindi colle formule di trigonometria si determina l'angolo α e si ricade così nel caso precedente.

Tralasciamo di esaminare i molti altri casi che si possono presentare nella risoluzione del tetragono piano, secondo le varie combinazioni dei dati dei suoi elementi, sembrando sufficiente gli esempi trattati.

Sassari, novembre 1900.

Prof. Giuseppe Delitala.

(*) Sarà: $\frac{\operatorname{sen}(\beta + \gamma)}{\operatorname{sen}\gamma} = z$ ossia: $\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cot\gamma = z$ da cui si ricava γ.

PICCOLE NOTE

1°. Una formola per il calcolo della radice quadrata. — Si indichi con a un numero (positivo) maggiore dell'unità e con r la sua radice quadrata a meno di $\frac{1}{k}$ per difetto, sicchè si abbia

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{a} = r + \varepsilon \quad \text{con} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{k} \text{ e } k > 1.$$

Dalla (1) si trae $\varepsilon^2 + 2r\varepsilon + (r^2 - a) = 0$. Indicando con ε ed α le due radici di questa equazione in ε e con S_h la somma delle potenze simili $\varepsilon^h + \alpha^h$, si ha subito

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} - \alpha = \varepsilon^n \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon^n + \alpha^n}.$$

Supponendo n pari risulta

$$0 < \frac{\varepsilon - \alpha}{\varepsilon^n + \alpha_n} < \frac{\varepsilon - \alpha}{\alpha^n} < \frac{-2\alpha}{n\alpha} \leq 1.$$

Quindi si può scrivere

$$\frac{S_{n+1}}{S^n} - \alpha = \theta\varepsilon^n \quad \text{con} \quad 0 < \theta < 1.$$

Combinando questa equazione colla (1) e colla $\varepsilon + \alpha = S_1 = -2r$ si ricava

$$\sqrt{a} = -r - \frac{S_{n+1}}{S_n} + \theta\varepsilon^n.$$

Da questa si può ricavare una formola abbastanza pratica per calcolare la radice di un numero con grande approssimazione.

Come è noto la somma delle potenze n-sime delle radici dell'equazione

$$x^2 - px + q = 0$$

è data da

$$S_n = \Sigma (-1)^s \frac{n(n-s-1)\ldots(n-2s+1)}{\underline{|r}} p^{n-2s} q^s$$

Per ogni valore di n si può avere dalla (2) una formola atta al calcolo di $\sqrt{a}$ coll'approssimazione di $\frac{1}{k^n}$.

Avendo fatte parecchie applicazioni pratiche di questo metodo per calcolare la radice di un numero, mi è sembrato che la via migliore da seguire sia quella di usare, magari reiteratamente la formola che risulta dalla (2) per $n=2$, che è quella che abbiamo in vista. Si ha

$$\sqrt{a}=\frac{2ar}{r^2+a}+\theta\varepsilon^2. \text{ (*)}$$

Con questa formola, conoscendo $\sqrt{a}$ a meno di $\frac{1}{k}$, mediante una prima applicazione si calcola a meno di $\frac{1}{k^2}$; con una seconda applicazione a meno di $\frac{1}{k^4}$; con una terza a meno di $\frac{1}{k^8}$ ecc. Essa è applicabile anche nei casi comuni di estrazione di radice, quando si usino alcuni ovvi artifici per avere un'approssimazione minore dell'unità, ma ho creduto non inutile additarla specialmente per quei casi in cui occorra ottenere un'approssimazione molto grande. Se per es. una Tavola dà la radice dei numeri a meno di $\frac{1}{100000}$, con questa formula si ottiene abbastanza rapidamente l'approssimazione di $\frac{1}{10000000000}$.

In un prossimo articolo spero di poter estendere questo metodo almeno al calcolo della radice cubica.

Modena, 9 gennaio 1901.

Dott. Roberto Volpi.

2°. Dimostrazione geometrica di una formula di analisi combinatoria. — Scopo della presente Nota è di dare una dimostrazione geometrica della formula:

$$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n}+\binom{n}{n}=2^n$$

che è una tra le numerosissime che intercedono tra i coefficienti binomiali.

A tale intento in un spazio a n dimensioni S_n si prendano n S_1 uscenti da un S_0 e tra di loro indipendenti, tali cioè che (k essendo uno qualunque dei numeri $2, 3, \ldots, n$), k di essi, qualunque, non appartengano mai ad un S_{k-1}. Avremo così una figura S, di cui l'S_0 e gli spazi di dimensione inferiore ad n ottenuti combinando questi S_1 uno ad uno, due a due, ... $n-1$ ad $n-1$, si diranno gli elementi. Da questa figura l'intero spazio rimarrà diviso in 2^n regioni corrispondenti ai 2^n ennaedri che si ottengono combinando in modo opportuno n ad n le $2n$ semirette uscenti da S_0: ed è facile riconoscere che da una regione qualsivoglia R_p si potrà sempre passare ad un'altra pure qualsivoglia R_q, attraversando un determinato elemento di S. Invero l'ennaedro corrispondente ad R_q è costituito da n raggi, i quali potranno essere tutti o in parte prolungamenti di quelli dell'ennaedro corrispondente ad R_p. Nel primo caso le due regioni saranno opposte e si potrà passare dall'una all'altra attraversando l'elemento S_0: nel secondo se sono in numero di h i raggi comuni ai due ennaedri, essi individueranno un S_h, attraversando il quale passeremo dall'R_p all'R_q. Si aggiunga inoltre che, partendo da una regione R_p ed attraversando un elemento S_h di S, si passa sempre ad un'altra determinata regione R_q: invero quest'ultima corrisponde all'ennaedro di cui h raggi sono comuni a quello corrispondente ad R_p e i rimanenti $n-h$ sono i prolungamenti di quelli non comuni.

(*) Questa formula in modo più laborioso può ricavarsi dalla celebre formula di Wronski, che dà lo sviluppo in frazione continua di $\left(1+\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Da tutto questo segue che fissata una delle 2^n regioni, rimane pure fissata una corrispondenza univoca e senza eccezione tra gli elementi di S e le rimanenti $2^n - 1$ regioni, e quindi il numero totale degli elementi di S sarà $2^n - 1$. Avremo cioè, essendo $\binom{n}{h}$ il numero degli S_h di S:

$$\sum_{0}^{n-1}{}_h \binom{n}{h} = 2^n - 1,$$

o anche

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

come si voleva.

Pisa, gennaio 1901.

ENRICO PICCIOLI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 228, 238, 240

528. *Sulla tangente in un punto* M *di una parabola di fuoco* F *si prendano due punti* M', M'', *tali che sia* MM' = MM'' = MF. *Il luogo di questi punti* M', M'' *è una cubica. Si trovi l'area compresa fra questa curva e il suo asintoto.*

E.-N. BARISIEN.

Correzione del prof. G. Mola alla risoluzione pubblicata nel n. precedente.

Non è esatto dire che la perpendicolare elevata dal fuoco F sull'asse della parabola sia l'asintoto della curva descritta dai punti M_1 e M_2. Essendo

$$FM_1 = \frac{a i s^{\varphi}}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}},$$

e detto E il punto nell'asse proiezione di M_1, la grandezza del segmento FE è data da

$$FE = \frac{a\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Ma $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\varphi = 4\operatorname{sen}^3\frac{\varphi}{3} - 3\operatorname{sen}\frac{\varphi}{3}$; onde sostituendo e riducendo, si otterrà

$$FE = \frac{a}{2\cos^2\frac{\varphi}{3}} - 2a.$$

Per valori decrescenti di φ da $\frac{\pi}{2}$ a zero, FE cresce negativamente, e acquista il massimo valore quando φ è zero, cioè quando M_1 si trova infinitamente lontano dall'asse. Allora il valore di FE è $-\frac{3a}{2}$. Dunque l'asintoto della curva è la perpendicolare elevata da questo punto E, pel quale $EF = \frac{3a}{2}$.

Trasportando l'origine in E, la curva M_1 viene tracciata dall'estremo del vettore EM_1. E si avrà l'equipollenza

$$EM_1 = \frac{3a}{2} + \frac{a i \varepsilon^{\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}};$$

e però, nella formola

$$\partial A = \frac{i}{4}\,(M_1 cj\, \partial M_1 - \partial M_1\, cjM),$$

a M_1 e cjM_1 dobbiamo sostituire i valori.

$$M_1 = \frac{3a}{2} + \frac{a i \varepsilon^{\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}}\ ,\quad cjM = \frac{3a}{2} - \frac{a i \varepsilon^{-\varphi}}{\cos\frac{\varphi}{3}\ \operatorname{sen}\frac{2\varphi}{3}},$$

ma immutati rimangano quelli di ∂M_1 e $cj\partial M_1$.

Si otterrà, dopo fatte tutte le riduzioni,

$$\partial A = \frac{a^2}{8}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{3}} - \frac{\partial\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{3}}\right),$$

che, integrata tra i limiti O e $\frac{\pi}{2}$, dà $A = \frac{\sqrt{3}\,a^2}{9}$; onde tutta l'area domandata è $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^2$.

Essa è la decima parte dell'area innanzi trovata della superficie compresa tra la curva ed il segmento BB'.

Risoluzione del Prof. V. Retali.

L'equazione polare della parabola data riferita al fuoco è

$$\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}$$

e siccome l'angolo della tangente in M con l'asse polare è $\frac{\theta}{2}$, prendendo per assi l'asse della parabola e la perpendicolare nel fuoco F, le equazioni parametriche del luogo cercato sono

$$x = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\cos\theta \pm \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\left(\operatorname{sen}\theta \pm \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right)$$

nelle quali possiamo prendere i segni superiori; ponendovi $\theta = 4\varphi$ esse divengono

$$x = a(\cot\varphi \cot 2\varphi - 1)$$
$$y = a(\cot\varphi + \cot 2\varphi)$$

fra le quali eliminando φ, troviamo per equazione del luogo

$$y^2(2x + 3a) = a(3x + 4a)^2: \tag{1}$$

una cubica della quarta classe crunodale, col nodo nel punto A $\left(-\frac{4a}{3}, 0\right)$; *tocca la parabola data nel punto all'infinito* (*) *ed ha per asintoto d'inflessione la retta* $x = -\frac{3a}{2}$. La (1) ponendovi $y = \pm ix$ diviene $(x + 2m)^3 = 0$ dunque: *le rette isotrope uscenti dal fuoco della parabola sono tangenti stazionarie della cubica e i flessi corrispondenti sono le intersezioni della parabola colla direttrice;* in altre parole: la retta dei flessi è la direttrice della parabola, il flesso reale è all'infinito e il fuoco della parabola è pure il (solo) fuoco della cubica.

Trasportando parallelamente gli assi coordinati nel nodo la (1) prende la forma

$$y^2(6x + a) = 27\,ax^2:$$

Le tangenti nel punto doppio A sono $y = \pm x3\sqrt{3}$, la lunghezza della semiordinata focale $\overline{FB}$ è $4a : \sqrt{3}$ e l'area compresa fra l'arco AB della cubica, l'asse e l'ordinata $\overline{FB}$ è espressa da

$$(A) = 3\sqrt{3a}\int_0^{\frac{4a}{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{6x + a}} = \frac{10a^2\sqrt{3}}{9}$$

come trova, per altra via, il prof. Mola. La metà dell'area compresa fra la cubica e il suo asintoto è invece

$$(A)' = \int_0^{-\frac{a}{6}} \frac{x\,dx}{\sqrt{6x + a}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$

Se teniamo conto del segno abbiamo

$$(A) + (A)' = a^2\sqrt{3}$$

ossia: *l'area della cubica compresa fra l'asintoto e l'ordinata focale è otto volte quella del triangolo equilatero di lato eguale alla distanza focale della parabola.*

538. *Si considerino tutti i triangoli* ABC, *di cui la* BC *è fissa e di cui il vertice* A *si sposta sopra una retta parallela a* BC. *Dimostrare che:*

1° *il luogo dell'ortocentro e quello del centro del circolo dei nove punti del triangolo* ABC *sono due parabole;*

2° *il luogo del punto di Lemoine del triangolo* ABC *è un'ellisse.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del Sig. Prof. Ugo Fornari.

1°. Il luogo degli ortocentri dei triangoli aventi un lato fisso e altezza costante rispetto a questo lato è una parabola.

(*) Secondo la classificazione del Cayley vi sono nove specie di cubiche crunodali: La cubica studiata in questa nota è una varietà della 4ª specie.

Sia $BC = \alpha$ il lato fisso, $AM = \delta$ l'altezza costante. Sia H una posizione dell'ortocentro, $BH = \rho$ il suo raggio vettore. Pongasi inoltre $BM = y\alpha$, $HM = x\delta$, $AC = \beta$. Si avrà

(1) $$\rho = y\alpha - x\delta, \qquad \beta = \delta + (1 - y)\,\alpha,$$

donde

$$\int \rho\beta = y\int \alpha\delta - x\delta^2 + y\,(1 - y)\,\alpha^2 - x\,(1 - y\int \delta\alpha.$$

Ora per le condizioni del problema ($AM \perp BC$, $BH \perp AC$) si ha

$$\int \rho\beta = 0. \qquad \int \alpha\delta = 0,$$

e l'equazione scritta si riduce alla

$$0 = -x\delta^2 + y\,(1 - y)\,\alpha^2,$$

d'onde

$$x = my\,(1 - y),$$

posto

$$m = \frac{\alpha^2}{\delta^2}.$$

Si ha dunque, sostituendo nella (1),

$$\rho = y\alpha + my\,(y - 1)\,\delta = y\,(\alpha - m\delta) + y^2 .\, m\delta$$

che è della forma

$$\rho = \xi t + \frac{1}{2}\,\eta t^2$$

e quindi rappresenta una parabola. (Cfr. Tait, *Traité des Quaternions*, pag. 28.)

2°. Il luogo dei centri dei circoli de' nove punti dei triangoli stessi è pure una parabola.

Mantenute le notazioni precedenti, si ha che il centro del circolo dei nove punti è il punto medio O della congiungente il punto medio P di BC col punto medio L di AH. Posto $BO = \rho'_1$ si avrà

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\,(\alpha + PL) = \frac{1}{2}\,(\alpha + PM + ML) = \frac{1}{2}\left[\alpha + \left(y - \frac{1}{2}\right)\alpha - \frac{1}{2}\,(1 - x)\,\delta\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\alpha\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\delta + \frac{m}{2}\,y\,(1 - y)\,\delta\right] = \frac{1}{2}\left[y\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - y^2\frac{m\delta}{2} + \frac{1}{2}\,(\alpha - \delta)\right].$$

Se prendiamo come origine dei vettori del luogo cercato il centro F del circolo dei nove punti corrispondente al triangolo rettangolo A_1BC, essendo chiaramente

$$BF = \frac{1}{4}\,(\alpha - \delta),$$

l'equazione del luogo diventa

$$\rho = \frac{1}{2}\left[y\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - y^2\,\frac{m\delta}{2}\right] = z\left(\alpha + \frac{m\delta}{2}\right) - z^2 .\, m\delta$$

che è ancora l'equazione di una parabola.

Si noti che nella prima parabola $\alpha - m\delta$ è un vettore tangente alla parabola nell'origine B e $m\delta$ è un vettore diametro, pure condotto per l'origine: analogamente nella seconda parabola, gli stessi elementi sono rappresentati da $\alpha + \frac{m\delta}{2}$ e da $m\delta$. (Cfr. Tait, *Traité des Quaternions*, pag. 29 e seg.)

540. *Risolvere le equazioni*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}=0$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0$$

M. Chini.

Generalizzazione e risoluzione del sig. Attilio Crepas, R. U. di Pavia.

Generalizzazione. — 1° Caso. Consideriamo l'equazione

$$(1)\qquad \sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{1r}}+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{2r}}+\ldots+\sum_1^s{}_r \frac{1}{x+a_{mr}}=0.$$

del grado $ms-1$

Posto in generale

$$f_p(x)=(x+a_{p1})(x+a_{p2})\ldots(x+a_{ps}),$$

ed indicando con $f'_p(x)$ la derivata di $f_p(x)$ rispetto ad x, la (1) diviene

$$(2)\qquad \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\ldots+\frac{f'_m(x)}{f_m(x)}=0.$$

Supponiamo ora che si abbia identicamente

$$f_1'(x)=f_2'(x)=\ldots=f'_m(x),$$

ossia che, indicando in generale con cK la somma dei prodotti h ad h delle quantità $a_{p1}, a_{p2}, \ldots a_{ps}$ si abbia, qualunque sia p,

$$c_1=\mathrm{K}_1,\ c_2=\mathrm{K}_2,\ldots c_{s-1}=\mathrm{K}_{s-1}.$$

L'equazione (2) si scinde allora nelle due equazioni

$$(3)\qquad f_1'(x)=0$$

$$(4)\qquad \frac{1}{f_1(x)}+\frac{1}{f_2(x)}+\ldots+\frac{1}{f_m(x)}=0.$$

La (3) è un'equazione del grado $s-1$, e però ammetterà $s-1$ radici che saranno reali e semplici, se reali e diseguali sono i valori a_{pr} per ogni valore di p.

Essendo poi, per l'ipotesi fatta,

$$f_p(x)=x_s+\mathrm{K}_1 x^{s-1}+\ldots+\mathrm{K}^{s-1}x+a_{p1}a_{p2}\ldots a_{ps},$$

ponendo

$$(5)\qquad x^s+\mathrm{K}_1 x^{s-1}+\ldots+\mathrm{K}_{s-1}x=y,$$
$$a_{p1}a_{p2}\ldots a_{ps}=a_p,$$

l'equazione (4) diviene

$$\frac{1}{y+a_1}+\frac{1}{y+a_2}+\ldots+\frac{1}{y+a_m}=0,$$

equazione che ammette $m-1$ radici y, il valore di ciascuna delle quali, sostituito nella (5), dà luogo ad s valori della x.

Si hanno quindi $s(m-1)$ radici, che insieme alle $s-1$ date dall'equazione (3), danno $sm-1$ soluzioni dell'equazione (1), dunque: La risoluzione di un'equazione del grado $sm-1$ del tipo (1) si riduce alla risoluzione di $m+1$ equazioni, delle quali una del grado $s-1$, un'altra del grado $m-1$ e $m-1$ del grado s.

Se le quantità a_{pr} sono reali e diseguali, pure reali e diseguali saranno le radici dell'equazione.

In particolare per $m=2$, $s=2$, $a_{11}=0$, $a_{12}=-3$, $a_{21}=-1$, $a_{22}=-2$, si ha la prima delle equazioni proposte:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=0,$$

ove si ha

$$f_1(x)=x(x-3);\ f_2(x)=(x-1)(x-2);\ x^2-3x=y;\ f_1'(x)=f_2'(x)=2x-3;$$

quindi risulta

$$2x-3=0, \quad \text{da cui} \quad x_1=\frac{3}{2},$$

e

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}=0, \quad \text{da cui} \quad y=-1,$$

e perciò dall'equazione

$$x^2-3x+1=0$$

si ottiene

$$\begin{matrix}x_2\\x_3\end{matrix}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Similmente l'equazione

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-5}=0,$$

per la quale è $s=2$, $m=3$, $a_{11}=0$, $a_{12}=-5$, $a_{21}=-1$, $a_{22}=-4$, $a_{31}=-2$, $a_{32}=-3$, risolta dà per radici:

$$x_1=\frac{5}{2} \quad \text{e} \quad x_{2,3,4,5}=\frac{5\pm\sqrt{\frac{35\pm8\sqrt{7}}{3}}}{2}.$$

2º Caso. — Consideriamo ora un'equazione del tipo

$$\sum_1^s{}_r\frac{1}{x+a_{1r}}+\sum_1^s{}_r\frac{1}{x+a_{2r}}+\dots+\sum_1^s{}_r\frac{1}{x+a_{m-1,r}}+\frac{1}{x+t}=0. \tag{1}$$

Tenendo le notazioni adoperate precedentemente, la (1) diviene

$$\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\dots+\frac{(x+t)^{s-1}}{(x+t)^s}=0. \tag{2}$$

Supposto ora che si abbia, qualunque sia p,

$$c_r = \binom{s}{r} t^r \quad \text{per} \quad r = 1, 2, \ldots s-1,$$

si ha

$$f_1'(x) = f_2'(x) = \ldots = s(x+t)^{s-1};$$

e quindi l'equazione (2) si scinde nell'equazioni

(3) $$(x+t)^{s-1} = 0$$

(4) $$\frac{s}{f_1(x)} + \frac{s}{f_2(x)} + \ldots \frac{1}{(x+t)^s} = 0.$$

La (3) per x dà $s-1$ valori eguali a $-t$, che non soddisfano all'equazione (1). La (4) poi, posto come nel 1° caso

(5) $$f_p(x) = y + a_p,$$

diviene

(6) $$\frac{s}{y+a_1} + \frac{s}{y+a_2} + \ldots + \frac{1}{y+t^s} = 0,$$

che risolta rispetto ad y dà $m-1$ valori, ciascuno dei quali sostituito alla y nella (5) dà luogo ad s valori di x. Si hanno quindi in tutto $s(m-1)$ radici. Onde la soluzione di un'equazione del tipo (1) dipende dalla soluzione di m equazioni, di cui una del grado $m-1$ e $m-1$ del grado s.

In particolare l'equazione

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} = 0,$$

risoluta col metodo indicato, dà

$$x_{1,2,3,4} = 2 \pm \sqrt{\frac{15 \pm \sqrt{145}}{10}}.$$

Altre risoluzioni dei proff. Ugo Fornari di Varese, G. Santorelli di Napoli, A. Massa e R. Volpi di Modena.

QUISTIONI PROPOSTE

541. Per uno dei punti di intersezione di due elissi uguali, concentriche ed aventi gli assi omologhi normali, si conducano le tangenti alle due elissi: queste determinano con un asse un triangolo la cui area è costante per ogni coppia di elissi uguali, concentriche, omofocali colle precedenti e similmente poste.

F. Sibirani.

542. Ad un circolo di diametro AB si conduca in A una tangente d. Da un punto variabile P di d si conduca la seconda tangente al circolo PC; le rette PB e AC si tagliano in un punto D. Si trovi geometricamente il luogo di questo punto.

A. DROZ-FARNY.

543. Due coniche poste in un medesimo piano diconsi mutuamente *associate* rispetto a due punti (poli di associazione) se ogni raggio condotto per l'uno o l'altro di essi le sega in quattro punti armonici. Ciò posto, determinare lo inviluppo dei piani che segano due superficie di second'ordine date secondo due coniche associate. Luogo dei poli di associazione.

544. Due coniche fra di loro bitangenti si dicono *coniugate* l'una all'altra (rispetto al loro polo di contatto) se ognuna di esse è polare reciproca di se stessa rispetto all'altra; ciò posto, si sechino due superficie di second'ordine date secondo due coniche coniugate e si determinino i poli di contatto.

545. I tre punti C, B, A sono in linea retta (B fra C ed A) e facciamo rotolare simultaneamente due cerchi eguali di diametro BA, in direzioni opposte, l'uno sul cerchio (C, B) (*) l'altro sulla circonferenza concava (C, A); il punto B del primo cerchio genera una epicicloide BE, ed il punto A del secondo una ipocicloide AI: dimostrare che la retta |EI| congiungente i due punti corrispondenti nelle due curve così tracciate, rimane sempre parallela al diametro del cerchio mobile quando è nella sua posizione iniziale.

546. Costruire la curva

$$\rho = a \cos\theta (\tan^2\theta + \mathrm{L} \tan\theta) . \cos\theta$$

e determinarne la pedale negativa rispetto al polo.

547. Costruire la curva

$$\rho = a \operatorname{sen}\frac{2\theta}{3}\sqrt{2\cos\frac{2\theta}{3}},$$

e determinarne la pedale negativa rispetto al polo.

548. Trovare la pedale rispetto al polo

a) della sviluppata della spirale d'Archimede ($r = a\theta$);

b) della sviluppata della spirale iperbolica ($r\theta = a$).

549. Sieno O il centro, V un vertice e P un punto arbitrario di una lemniscata (di Bernoulli), T la proiezione ortogonale di O sulla tangente nel punto P: dimostrare che $\widehat{VOT} = 3\widehat{VOP}$, e concluderne una costruzione semplice per tracciare la tangente in un punto della lemniscata.

(*) Di centro C e raggio $\overline{CA}$.

550. La pedale di un'elica cilindrica rispetto a un punto dell'asse del cilindro come polo, è una spirale posta sopra un'iperboloide di rotazione a una falda. Proiezione di questa spirale iperboloidica sopra un piano normale all'asse del cilindro.

551. Determinare la curva tale che il prodotto delle distanze di un suo punto arbitrario e della corrispondente tangente da un polo fisso abbia un valore costante.

552. Dati in un piano due punti fissi O, A, facciamo corrispondere a un punto variabile P le due intersezioni P_1, P_2 del raggio OP col cerchio di centro P e passante per A. Dimostrare che se P descrive una retta g, il luogo della coppia di punti P_1, P_2 è in generale una cubica G^3_6 della sesta classe, passante per O, tangente in A alla perpendicolare ad |OA| e tangente nei punti ciclici alle rette isotrope uscenti da O. Costruire l'asintoto reale della cubica; i due rimanenti antitangenziali di O; le intersezioni di G^3_6 con g e le tangenti in questi punti. Esaminare i casi particolari seguenti:

a) la retta g passa per O o per $\underline{A}$;

b) è la mediatrice del segmento $\overline{OA}$;

c) è all'infinito.

553. Dati in un piano due punti fissi O, A, facciamo corrispondere a un punto variabile P_1 la intersezione P del raggio $|OP_1|$ colla mediatrice del segmento $\overline{AP_1}$. Dimostrare che se P_1 descrive una retta h, il luogo di P è, in generale, una cubica razionale con un punto doppio in O, passante pei due antipunti (*) di O, A ed avente un fuoco semplice in A. Determinare le tangenti nel punto doppio e le intersezioni della cubica colla retta h. Caso particolare in cui h passa per A.

V. Retali.

554. Per dimostrare le formole

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\, dx = \begin{cases} \log \frac{c}{b}, \text{ per } m \text{ dispari} \\ \left(1 - \frac{1.3.5...(m-1)}{2.4.6...m}\right) \log \frac{c}{b}, \text{ per } m \text{ pari.} \end{cases}$$

D. Besso.

(*) Le due coppie di rette isotrope uscenti da O e A si segano, oltre che nei punti ciclici, in due punti, imaginari coniugati, se O ed A son reali, denominati (Cayley) *antipunti* della coppia OA. Coppie di punti associati del sig. Darboux.

(V. R).

BIBLIOGRAFIA

S. PINCHERLE. — *Esercizi sulla Geometria Elementare* (pagg. 130 con 50 inc. Manuali Hoepli, 1897).

I. GHERSI. — *Metodi facili per risolvere i problemi di Geometria Elementare* (pagg. 190 con 126 inc. Manuali Hoepli, 1900).

La raccolta del ch. prof. Pincherle, come avverte egli nella prefazione, è complemento necessario agli altri due manuali *Geometria Pura* e *Geometria Metrica*. Questi, evidentemente, non hanno carattere di veri libri scolastici, almeno per l' insegnamento secondario; ma, compilati con parsimonia diligente, contengono soltanto le prime nozioni razionali di Geometria, per servire allo scopo della ricca collana dei *manuali Hoepli*, che è quello di rendere accessibili, a tutti, argomenti scientifici o letterari od in genere attinenti alla vita pratica. Così si spiega che in tale Raccolta del Pincherle si leggano molte definizioni, comuni ad ogni libro di Geometria Elementare, e che fra le 590 questioni proposte o risolute, vi sieno: almeno 123 proprietà e 25 problemi, necessariamente trattati in ogni testo anche molto elementare destinato a scuole secondarie; almeno 30 esercizi, i quali sono deduzioni immediate od applicazioni dirette e che in una scuola potrebbero essere proposti alla lavagna; ed invece circa 95 esercizi, che riguardano nozioni proprie soltanto dei corsi complementari di Geometria. (1)

Pertanto, non si può giudicare il volumetto con criteri didattici, i quali richiederebbero ciò, che l'A. non si è proposto; ossia, fra parecchie altre cose: designazione non dubbia dei corsi, ai quali la Raccolta è destinata; ordine diverso, almeno per alcune teorie e parecchie questioni, secondo il giudizio della più parte dei migliori trattatisti; (2) maggior ricchezza e maggior varietà di teoremi e di problemi adatti ad esercitare gli allievi di corsi iniziali o complementari, specialmente per le proprietà fondamentali; (3) preferenza alle questioni, che gli esperti dell'insegnamento secondario attestano più interessanti e più utili ai giovani, per analogia di procedimenti con altre questioni trattate e quindi per intuizione più rapida; razionale avviamento, nelle questioni meno semplici.

Ma, trattandosi di un libro non scritto per le scuole, è doveroso l'astenersi da qualunque esame d' indole didattica: non si può, dunque, fare altro che felicitarsi coll'attività non comune del ch. professore, la quale gli ha permesso, con

(1) Quadrangolo e quadrilatero completo (118-120); def. prec. il 279; omotetia e centri di similitudine (279-295, 480); assi radicali, potenze (300-314, 508-510); luoghi geometrici, massimi e minimi per superficie e perimetri di triangoli (321-341); poliedri regolari possibili (411-412); geometria sulla sfera e triangoli polari (434-438); centri di similitudine di due sfere (441); costruzioni di formole (463-471); massimi e minimi (473, 474, 555, 586-588); inversione (511, 516, 580-582); limite infinito (551).

(2) Per es.: dopo i poliedri, si parla di costruzioni elementari della Stereometria.

(3) Mancano o sono molto scarsi gli esempi specialmente per l'equivalenza e per i punti notevoli di un triangolo: la ragione addotta dall'A. nella pref. non giustifica questa insufficenza, se si tiene conto del numero esuberante delle questioni proprie di ogni sviluppo teorico anche elementare.

gli studi scientifici e le gravi cure dell' insegnamento universitario e di altri uffici scolastici, anche la produzione dei cinque *manualetti Hoepli* aventi carattere di volgarizzazione non scolastica delle Matematiche elementari.

Il titolo del Manuale del sig. ing. I. Ghersi non può essere accettato. Non esistono *metodi facili* o difficili per se stessi, ma metodi di più o meno *facile applicazione*, quando questa è possibile, o che rendono più o meno *facile la risoluzione:* un metodo riesce facile o difficile, secondo che è adatto o no alla questione, che si tratta; se là, dove la natura di un problema e l'esercizio non consigliano ad es. il metodo della similitudine, io m' incaponisco ad usarlo, troverò delle difficoltà nella risoluzione, e potrò forse giungere a questa con un'abilità dovuta in buona parte al lungo studio, ma che nessuno può nè esigere, nè insegnare. L'applicazione dell'Algebra alla Geometria, che l'A. colloca probabilmente fra i metodi cosidetti non facili, dacchè non ne fa parola, torna forse in molte questioni più difficile, per esprimermi secondo il sig. Ghersi, che il metodo dei luoghi geometrici o quello della similitudine?. Sono cose evidenti e notorie. Lo stesso A. incrimina (pag. 157) l' infelice titolo del suo lavoro.

In questo Manuale del Ghersi — non adattato punto, sotto alcun rapporto, all'altro del Pincherle — sono poi errati completamente il piano e tutta la condotta del libro, per l'evidente mancanza d'una concezione netta dello scopo del Manuale e forse anche per non sufficiente esperienza dell' insegnamento. Per ciò, oltrechè per i difetti intrinseci e gravi di sostanza e di forma che rileverò, il libro non ha le qualità più indispensabili, per essere accolto nelle nostre scuole, secondo il desiderio dell'A. (v. prefazione) e dell' Editore (v. listino d'accompagnamento).

Esso non può dirsi destinato agli allievi dei corsi iniziali di Geometria, quali sono il primo biennio degli Istituti Tecnici ed i Licei, per le seguenti ragioni:

1ª. Non solo si suppone che l'alunno abbia studiata tutta la Planimetria e non ignori Stereometria (pag. 96), ma anche che si sia esercitato molto sulla prima; poichè, a cominciare dal capitolo introduttorio " Dei luoghi geometrici ", si applicano indifferentemente tutte le teorie elementari planimetriche ed anzi si prediligono le questioni meno semplici [1] o piuttosto difficili [2] e si sfruttano proprietà non fondamentali, che sono vera materia di esercizi [3] e non sempre di esercizi adatti ai corsi iniziali. [4]

2ª. Sino dal principio, l'A. fa generalizzazioni non sempre ovvie, varianti nelle condizioni del problema e discussioni non sempre facili, talora anzi accennandole appena; [5] ed afferma analogie di risoluzione non sempre manifeste o non molto prossime. [6]

---

(1) I problemi 74-78, 80-81 ecc. di costruzioni di cerchi sono più semplici che 6, 8, 9 ecc. del capitolo primo; i problemi 82, 87, 102 di determinazione di punti e di rette sono più facili che gli analoghi 23, 26, 27, 29 ecc.; il problema 103 è più facile che gli altri 38-41.

(2) Problemi 26, 38-44, 50.

(3) Problemi 19, 60, 52.

(4) Problema 8.

(5) Problema 4 (oss.), 42, ecc. E non si sa spiegare come l'A., mentre si propone uno scopo determinato, quello, cioè, di ammaestrare all'esame della figura ed all' introduzione di linee ausiliarie, supponendo anzi che il lettore non abbia l' idea semplice di luogo (data soltanto a pag. 80), si preoccupi di generalizzazioni e di discussioni, anche accennandole appena come nel probl. 4: in poche righe (oss., pag. 35), egli afferma la generalizzazione ed una variante nelle condizioni del problema 26, per cui F. I. C., ad es., dedica più numeri.

(6) Così, nell'oss. al problema 5: « ciò è tanto più male, inquantochè il probl. 5 è solo posto in dipendenza con altro, che segue.

3ª. Non è esposto il metodo di applicazione dell'Algebra e della Goniometria (semplice capitolo dell'Algebra) alla Geometria, richiesto dal carattere dell'insegnamento della Matematica negli Istituti Tecnici e prescritto dai recenti programmi anche per i Licei. (1)

4ª. Il libro non dà alcun esempio di problemi nè di Stereometria, nè di Trigonometria propriamente detta, che è un capitolo della Geometria Elementare prescritto pure per i Licei.

5ª. Vi si parla di coniche (2) e della possibilità che esse si presentino in problemi elementari, accennando, come a cosa nota, al problema della determinazione, con riga e compasso, dei punti d'incontro d'una conica con una retta ed all'altro delle tangenti ad una conica da un punto; mentre la teoria elementare delle coniche non costituisce oggetto di studio nei Licei e si dà soltanto elementarmente, colla debita misura, nella quarta classe della Sezione F. M. degli Istituti Tecnici.

Nè il Manuale può essere adatto ai corsi complementari di Geometria, quali sono i secondi bienni degli Istituti Tecnici, oltrechè per le ragioni 3ª e 4ª precedenti, anche per queste altre:

1ª. Per gli alunni, che hanno già appreso i fondamenti della Geometria elementare, e si sono abbastanza esercitati su di essi, non è necessaria, ma superflua o dannosa l'esposizione sistematica delle soluzioni; basta un indirizzo, più o meno spinto, a seconda delle difficoltà: dopo due o più anni di studio della Geometria, debbono pur sapere trattare almeno una questione semplice, tanto più se è avviata, ed intendere od intuire cose non difficili, senza che sieno loro indicati, col pericolo di disabituarli dal pensare, i passaggi più chiari e più agevoli.

2ª. Per gli stessi alunni, molte questioni ovvie del libro sono necessariamente note, dopo un primo studio razionale di proprietà geometriche e di esercizi intorno a queste: essi debbono conoscere già non solo l'uso delle figure ausiliarie, il completamento o la decomposizione delle figure, ma anche il metodo analitico e l'applicazione dei luoghi alla risoluzione di problemi non difficili. Nè, del resto, questo Manuale può loro giovare ad approfondire o chiarire metodi e teorie noti.

3ª. Manca l'esposizione di metodi interessanti, quali sono la simmetria, il metodo cosidetto del problema contrario, il movimento e l'inversione.

Oltre a tutto ciò, di qualunque scuola si tratti, il libro del Ghersi, anche indipendentemente dagli appunti che seguono, non può dirsi *scolastico* nel senso legittimo della parola: non può avere l'accesso nelle scuole per alcuna porta. Non sarà mai scolastico un libro, che contenga gli sviluppi di centinaia d'esercizi, tanto meno poi se questi sono trattati poco bene: gli alunni di qualunque corso razionale di Matematiche, al pari di quelli dei corsi complementari, dei quali si disse sopra, debbono imparare gradatamente a fare da sè, a vedere le cose prossime senza troppe indicazioni. Per conseguenza, chiariti metodi e teorie, presentati

---

(1) Si prestavano bene all'applicazione dell'Algebra alla Geometria i probl. 4, 10, 12, 25 ecc.; ed altri per l'applicazione della Goniometria alla Geometria, ossia come esercizi di Trigonometria propriamente detta: anzi, si poteva avere così il modo di raffrontare utilmente le soluzioni geometriche con quelle algebriche e trigonometriche, cosa più utile che il dare, di uno stesso esercizio, due o più soluzioni geometriche talora basate su proprietà estranee all'insegnamento elementare od infatto non differenti.

(2) Ellisse (144), parabola (70, 93, ecc.), iperbole (9 e 22 bis).

alcuni esempi come tipi di soluzioni, gli esercizi, che si propongono, dovranno sempre essere soltanto avviati, più o meno a seconda della difficoltà e del corso cui si destinano, e graduati in ordine progressivo di difficoltà: onde, una Raccolta destinata a corsi iniziali non può mai giovare a corsi complementari. Raccolte del genere di questa del Ghersi, con tutti gli esercizi sviluppati, non graduati, e non adattati con abilità pedagogica ad un certo grado d'insegnamento, entreranno sempre nelle scuole furtivamente, nelle mani degli alunni, che vogliono scansare la fatica del lavoro prescritto. È il difetto grave di molte Raccolte francesi, assolutamente antididattiche; alcune delle quali però sono pensate davvero e, fatta astrazione dal carattere di un libro scolastico, veramente pregevoli. Come mai non ha badato a ciò l'intelligente, accorto e benemerito editore Hoepli?

Con questa mancanza completa di adattabilità del libro del Ghersi a determinate scuole ed anzi in genere alle scuole, si possono spiegare in esso: la nessuna progressione di difficoltà nei problemi già rilevata e la deficienza di ordine; (1) la poca chiarezza e la poca precisione di tutte le generalità (pagg. 1-10, 75-79, 157) ed in special modo di quelle sul metodo analitico (pagg. 9, 10) e sull'applicazione dei luoghi geometrici (pagg. 91-92, 78-79), (2) là dove si richiedeva una sintesi lucida, vigorosa e rapida, per imprimere limpidamente i concetti fondamentali; la poca cura nell'applicare metodicamente agli esercizi e far risaltare da questi la verità delle cose dette nell'esposizione teorica dei metodi, allo scopo di chiarire e rafforzare quelle cose; (3) la preoccupazione di cercare, in principio, problemi

---

(1) In realtà non si capiscono le questioni facilissime 47, 48, 60, ecc. e le altre (necessariamente note all'alunno) 72, 73 ecc. dopo alcuni problemi, fra' primi, relativamente difficili. Non sono, certo, bene scelti i 65-66, per dare esempi elementari di ricerca di luoghi, tanto più che la risoluzione dei problemi seguenti è basata in generale sui luoghi fondamentali: non era poi necessario presentare i problemi meno facili 69-71 per spiegare il modo di applicare i luoghi alla risoluzione dei problemi, quando tale modo doveva poi risultare più che chiarito, almeno per casi elementari, dai problemi 27-125. Ed è molto strano questo fatto: si pone avanti la considerazione di *punti singolari* per determinare i luoghi geometrici, non già nei problemi di semplice determinazione di luoghi (62-67), ma proprio nel problema 68, primo degli esempi di applicazione dei luoghi: così, mentre si vuole fornire esempi per fare intendere l'utilità dei luoghi, se ne cerca uno, cui si deve applicare qualche luogo sconosciuto o certo non facile. Perchè mai non si suppone noto il luogo 64, che non manca in alcun trattato, mentre si ritengono noti i luoghi 6, 7, 12, 14, che non costituiscono materia di sviluppo teorico e sono veri esercizi? È poi molto male che, ad un dato punto, si rimandi a problemi, che seguono: in 4, si rimanda a 21; dopo il problema di *Castiglione* (40): si pone il caso particolare semplice 103: ecc. E ciò è ancor più male, perchè non sempre i rimandi sono precisi e determinati bene. Nel problema 8, discussione ed esame dei casi particolari sono frammisti alla risoluzione.

(2) Per spiegare ciò che io intendo con questa affermazione riguardo al metodo analitico, non posso che rimandare alle opere di Duhamel, Lacroix, Lamè, Serret, Daugo, Laisant ed alle sintesi fatte con maestria dai nostri buoni autori Sannia e D'Ovidio, De-Paolis, Veronese, Lazzeri e Bettazzi. È inesatto l'appellativo di *artifizio* (pag. 10) per l'introduzione di linee ausiliarie, poichè queste ed in generale la composizione e la decomposizione delle figure, almeno nei casi semplici adatti a scuole secondarie, riescono abbastanza naturali. Ma a pag. 29 l'A. trova troppo compromettente tale titolo e parla di *piccolo artifizio*. È fuori di luogo, in un libro elementare, l'accenno poco chiarito alla necessità generale di uno speciale *acume geometrico* (pag. 10), non necessario per problemi elementari propri di corsi delle scuole secondarie: vedi LAISANT, *La mathématique*, pagg. 187-188. È inopportuna e non chiara l'osservazione che il metodo dei luoghi geometrici non è sempre di facile applicazione e conduce per via tortuosa (pag. 156): tale affermazione, del resto, è giustificata soltanto da quelle questioni, che sono intruse. Non abbastanza intelligibile per gli allievi la distinzione fra impossibilità assoluta e relativa (pag. 4), fra problemi *possibili nella loro essenza* (?) e quelli, che non lo sono; non chiara la distinzione di casi particolari e generali, a pag. 145.

(3) In generale, non è precisa e netta la trattazione analitica: non si addestra certo all'esame della figura ed al metodo analico lo studioso con la lettura di questo libro, che vorrebbe essere un manuale espositivo di metodi ed esempi della risoluzione dei problemi geometrici. Quando ci si propone lo scopo di ammaestrare i giovani, tutto dev'essere misurato, chiaro, preciso, graduale, perchè conduca al fine: epperciò, trattandosi di analisi, si deve avere anche cura di non affermare cosa alcuna per poi dimostrarla e di non condurre il lettore attraverso molti passaggi senza farne in-

meno comuni e meno facili, mentre molti dei più ovvii si sarebbero prestati meglio — per porre in evidenza lo studio e le cautele necessari alla pratica dell'esame della figura ed all'introduzione di linee ausiliarie — e, certo, dalla bontà dell'esposizione avrebbero acquistato aria di freschezza; il nessun accenno alle relazioni fra' problemi del libro e fra essi ed altri, che si suppongono noti; [1] la sproporzione, per difficoltà e per estensione, fra il primo capitolo introduttivo e gli altri tre di applicazioni ed esempi; insomma, la mancanza di criteri e metodo didattici, indispensabili in un libro " scritto per gli allievi delle nostre scuole secondarie e non per i dilettanti o per gli studenti delle scuole superiori „ (pag. 6).

Io non so intendere l'opportunità del capitolo primo. In questo — mentre il volumetto comprende 146 numeri di questioni — si risolvono più di 20 problemi, per presentare esempi d'esame della figura, d'introduzione di linee ausiliarie, di composizione e decomposizione delle figure, e poi si dànno oltre 41 questioni per esempi delle cosidette soluzioni con artificio; come se si potesse imparare, con lungo esercizio, a fare l'esame della figura senza bisogno di ricorrere a tali soluzioni con artificio e di applicare alcuno dei metodi esposti in seguito ed altri non indicati nel libro e come se, senza di questi, fosse possibile esercitarsi sulle soluzioni dette dall'A. con artifizio. [2] Ricorrervi tacitamente per 60 problemi è un po' troppo. E si vuole ammaestrare gli alunni nelle cose proprie d'ogni buon corso iniziale, quali sono l'esame della figura e l'introduzione di linee ausiliarie, supponendo in essi cognizioni ampie e complete di Planimetria e dei metodi di risoluzione e sveltezza sufficiente all'intelligenza dei problemi più difficili del libro, tanto da dire *superflui* rilievi interessanti; per potere poi sveltire gli stessi alunni, nei metodi chiamati *facili* dall'A. " i luoghi e la similitudine „, con esempi semplici

---

tendere a tempo la ragione: si devono fare rilievi di fatti e da questi dedurre conseguenze. Nel problema 3, soltanto dopo di aver determinato CDB, si dice che quest'angolo deve servire a costruire il triangolo CDB, mentre l'A. era in dovere di far subito rilevare che la costruzione del triangolo domandato poteva farsi dipendere da quelle del triangolo CDB, del quale si conoscevano due lati e si poteva cercare d'esprimere un angolo coi dati: così, si ammaestra all'esame della figura. Nel problema 7, si afferma, in principio della soluzione, una proprietà, di cui si fa la dimostrazione, senza che il lettore sappia a che gioverà tale proprietà, la qual cosa gli viene detta in fine esponendogli la costruzione: questo non è certo esame della figura. Nel problema 33, si afferma che il triangolo ADE è isoscele, per poi dimostrarlo. Nel problema 35, che si prestava benissimo come esempio di analisi, l'A. conduce subito le perpendicolari e descrive il cerchio, invece di fare i rilievi. Nel problema di *Castiglione* (40), bellissimo esempio di *riduzione* e come tale presentato nella Raccolta di F. I. C (numeri 51-53), si sciupa subito tutta la bellezza della riduzione affermando " vediamo di introdurre nella fig. un elemento noto „ (pag. 52). Peggio ancora: qualche volta l'A. avvia il procedimento analitico, per ricredersi subito dando un'esposizione sintetica (49). Riguardo poi all'introduzione di linee ausiliarie, si può osservare che: alcune volte essa è meno propria di qualche altro metodo (in 28, si presentavano subito il metodo algebrico e quello della similitudine, piuttosto che le tre costruzioni non molto diverse dipendenti dall'ausiliaria EF); la soluzione di qualche problema del primo capitolo non è veramente conseguenza di linee ausiliarie condotte (nel 61, le linee ausiliarie non suggeriscono la soluzione; ma l'avere intuito questa come conseguenza di una proprietà ci fa usare quelle linee). Infine, nei primi due esempi di determinazione dei luoghi (62, 63), l'A. non si preoccupa di applicare bene e completamente uno dei due criteri esposti a pag. 79; ma lo fa in 64.

(1) Il 52 è un'applicazione immediata di un problema più semplice ed interessante, non esposto nel Manuale. Doveva in qualche modo essere rilevato che i problemi 10-15, 20-22, 144,... sono dello stesso tipo, perchè il procedimento risolutivo dipende dalla condizione comune della *somma data* e dal conseguente fatto di portare questa su di un lato.

(2) In 1, si applica tacitamente un luogo, per determinare C; in 3, lo stesso luogo per determinare A. Tale luogo e parecchi altri sono applicati nei problemi 5, 6, 26 (dato da F. I. C. come applicazione di luoghi nel n. 102), 51, ecc. Nei problemi 29, 30, l'A. si vale della simmetria. In 38, si indica un inviluppo. Si applica la similitudine in 25 (dato appunto da F. I. C. come applicazione della similitudine nel n. 211).

ed anche esposti nel più elementare dei trattati! Certo qualche Raccolta, ad esempio quella di F. I. C., premette ad una grossa mole di esercizi (abbastanza ordinati, almeno secondo un trattato) un capitolo introduttivo sui metodi di risoluzione, che contiene le più difficili, più interessanti e delicate questioni e può dirsi un libro a sè; ma quella Raccolta è fra' *livres du maître!* Non pare credibile che l'A. non sia stato colpito da tale difetto, molto grave in un libro, che egli voleva destinato ad allievi di scuole secondarie, sia pure dei corsi iniziali o dei complementari.

La mancanza di chiarezza e di precisione d'idee, (1) già rilevata per le generalità, si nota pur troppo anche in molti problemi, talora come conseguenza di un'esposizione difettosa e di una forma infelice; (2) non sono rare le espressioni e le indicazioni poco buone e non accettabili. (3) Qualche affermazione è pure errata. (4)

Lascia molto a desiderare la discussione, (5) la quale, per i criteri generali e le particolarità del procedimento, meritava certamente un capitolo a parte, almeno quanto gli argomenti del primo capitolo e certo molto più degli altri dell'Appendice, i quali ultimi necessariamente lo studioso ha già considerato, nei problemi precedenti del libro, come conseguenza immediata delle proprietà del capitolo primo. Non sarebbe sfuggita all'A. la convenienza del parallelo colla discussione completa

---

(1) Nel probl. 49, si parla di direzione data BE, mentre doveva dirsi: retta data BE. Nel probl. 63, si afferma senz'altro che il punto O appartiene al luogo, mentre per esso il rapporto delle distanze è $0/0$. A pag. 98, riga 5, non si capisce tutto il periodo (senza verbo). Nel problema 16, doveva chiarirsi l'affermazione che la segante GH e le altre due FG, FH sono le massime condotte per i vertici. Nel problema 65, non si dice perchè le EF, FG si intersecano su CD e si applica una costruzione non fondamentale. A pag. 78, si parla in generale di *punti singolari* come utili per studiare i luoghi, senza dire che cosa sieno, mentre sarebbe stato preferibile che, volendo, si accennasse ad essi durante la risoluzione di qualche problema: anzi, a pag. 91 si accenna impropriamente a *posizioni* (?) d'un punto singolare (senza, del resto, averne dato un esempio); sicchè l'alunno, per determinare un luogo, dovrebbe pensare a punti, che non conosce. Rimane sempre a vedere se e quanto giovi, in un corso elementare, l'obbligo della considerazione di punti singolari per determinare i luoghi. Non si intende, a pag. XI della prefaz., l'accenno ai *sistemi* degli autori italiani ed alla sua *via opposta:* a qual sistema appartiene il pregevole volume di *Aicardi* sul triangolo?

(2) Nel probl. 3, è detto "dall'esame della figura relativa al problema supposto risolto risulta che portando AD = AB si ha...", mentre doveva dirsi "fatto AD = AB, dall'esame ecc.". A pag. 35, riga 1, è scritto: una *relazione* fra questa *lunghezza* ed il *triangolo*. Si usano lettere, senza dire che cosa rappresentino: ad es., C' nel probl. 52. Altri errori di forma: a pag. 32, riga 7, la proposizione "infatti oltre all'avere AB = BC la BM è perpendicolare...", non va, perchè il soggetto di prima (ora sottinteso) è *il triangolo*. Ma, per giudicare questo libro dal lato della forma, che non è l'ultimo requisito di un testo destinato ad alunni di scuole secondarie, basta leggere le righe 8-10 a pag. 92.

(3) Espressioni non accettabili: *triangoletto* (pag. 14, riga 17); *può ridursi* al seguente, invece di "è il seguente" (15, oss.); il *mezzo* di un segmento, invece del punto medio (pag. 28); triangolo *definitivo*, invece di domandato (pag. 50); individuato *perfettamente* (pag. 75, riga 15); ecc. Non è da approvarsi l'uso promiscuo delle maiuscole, per indicare segmenti, rette e punti.

(4) A pag. 29, è detto che I va all'infinito, nel qual caso del resto non si avrebbe indeterminazione: I diviene indeterminato, perchè l'intersezione di due rette allora coincidenti AD, MI; l'indeterminazione risulta dalla mancanza di una condizione. Si legge pure: la mediana BD darà la direzione del lato BC, invece di "la mediana BD dà il lato BC". A pag. 51, riga 13, è scritto "NP parallela a CD", mentre NP congiunge due punti noti N, P. A pag. 76, riga ultima, è detto "luoghi non soltanto di punti, ma anche di *rette*, che si chiamano *inviluppi*": i luoghi di rette sono superficie, mentre gli inviluppi sono luoghi di punti comuni alle posizioni successive della retta mobile.

(5) La discussione non è sempre esposta sistematicamente. Alcune volte, pare un esame di casi particolari o di qualche caso particolare (23), il che fa parte della discussione, ma non è tutta la discussione. Nel probl. 30, invece di discussione, si doveva scrivere *rilievo*, come fa F. I. C. (problema 1520); poichè vi si parla del numero delle soluzioni, non di possibilità del problema ed anzi non si nota neanche che, assumendo un punto arbitrario D, si è reso il problema determinato, mentre secondo l'enunciato ammetteva infinite soluzioni. Non sempre la condotta della discussione è d'accordo coi dati del problema: così, nel probl. 17, si vuole che la retta domandata *seghi i lati* AB, AC e poi si parla di possibilità d'incontri coi prolungamenti.

e sistematica dell'Algebra, se egli nei suoi Metodi non avesse dato l'ostracismo all'applicazione dell'Algebra alla Geometria.

Con più opportunità della citazione relativa a Lemoine per cose non inerenti al libro, l'A. avrebbe dovuto citare gli autori italiani, che lo hanno preceduto nell'esposizione dei metodi, e che la trattano bene ed abbastanza compiutamente.

L'edizione è bella; le figure nitide, secondo la regola dei manuali Hoepli: si notano soltanto pochi errori di stampa.

Ho letto molto attentamente questi due manuali del Pincherle e del Ghersi, spinto dal bisogno di consigliare alle mie classi un libro, che contenga, coll'esposizione dei metodi di risoluzione dei problemi geometrici, anche sufficienti ed adatti esempi, abilmente avviati con buoni criteri didattici o soltanto proposti, dei quali difetta il pregevole volumetto del ch. prof. Bettazzi. Disilluso malamente, ho dovuto confessare che i due predetti manuali, per l'esclusivismo e l'esilità del primo, per i gravi vizi del secondo e per la mancanza di legame fra essi, [1] non possono rappresentare, presi insieme, un libro di metodi e di esempi adattabile, in qualche modo, ad ogni trattato ed a scuole secondarie ed abbastanza buono. Perciò mi sono deciso a dare pubblicità a questi cenni, per il dovere di attestare, fuori d'Italia, stante la meritata fama di cui gode l'Editore, che libri del genere de' Metodi del Ghersi non sono accetti nelle scuole italiane, nelle quali la Matematica è insegnata con coscienza e con serietà di criteri didattici.

Mi auguro di poter presto tributare meritate lodi, per altro libro di Matematica, al sig. I. Ghersi, che so autore di apprezzati Manuali sul *ciclismo*, su *argomenti industriali* e su *questioni casalinghe*.

S. Ortu Carboni.

Annuaire pour l'an 1901 publié par le Bureau des longitudes. — Paris. Gauthier-Villars.

Il *Bureau des longitudes* creato dalla Convenzione nell'anno 1795 pubblica ogni anno questo annuario ricco di notizie di ogni genere.

Quello per l'anno 1901 oltre alle consuete notizie sul calendario, alle tavole astronomiche, di pesi e misure, di monete, di ammortamento e interesse, a importanti note geografiche e statistiche, ecc., contiene i seguenti articoli:

Cornu. — *Il trasporto della forza.*

Poincaré. — *Rapporto all'Accademia sul progetto di revisione dell'arco di meridiano di Quito.*

Lacroy. — *Notizia sulla conferenza internazionale tenuta all'osservatorio di Parigi nel luglio 1900.*

Bassot. — *Notizia storica sulla fondazione del sistema metrico.*

---

[1] Il *Pincherle*, non a torto, applica senza reticenze i luoghi geometrici sino dal probl. 19, cioè appena cominciato lo studio della retta. Il *Ghersi* ritiene *sbagliato* anche *il sistema* del *Pincherle*, che dà pochissimi esempi risoluti interamente e propone la maggior parte delle questioni, suggerendo al più qualche schiarimento od un piccolo indirizzo.

Bouquet de La Grye. — *Nota sulla XIII conferenza dell'Associazione internazionale geodesia tenuta a Parigi dal 25 sett. al 6 ott. sotto la presidenza del sig Faye.*

Janssen. — *Nota sui lavori all'osservatorio del Monte Bianco nel 1900.*

— — *I progressi dell'areonautica.* Discorso pronunciato il 15 sett. 1900 all'apertura tenuto a Meudon.

K.

DA GIORNALI E RIVISTE

Bulletin de sciences math. et phisyques élém. fondé par *B. Niewenglowski.*

Anno V, Fasc. 11° (1 marzo 1900). — *L. G.*, Sulle dimostrazioni dei teoremi. — *Bonnefoy,* Osservazioni sulle equazioni irrazionali (si occupa della discussione delle soluzioni di equazioni con radicali quadratici). — *E. Rebussel,* Proiezione della normale a una conica sul raggio vettore. (Prova che detta proiezione è terza proporzionale dopo i due semiassi.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 12° (15 marzo 1900). — *L. G.*, Sulla nozione di senso. (Osserva che la nozione di *senso* degli angoli è una nozione sperimentale. Per evitarla, accenna alla teoria delle equipollenze e dei vettori.) — *P. Leverrier,* Sull'inversione d'un sistema di due circoli. — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 13° (1 aprile 1900). — *L. G.*, Geometria metrica. (Espone la teoria dei rapporti e proporzioni indipendentemente dai numeri, definendo le operazioni sui rapporti in modo da poterli adoperare come i numeri.) Questa teoria si appoggia su due noti teoremi, uno dei quali è il seguente: " Se sui lati di un angolo O si " prendono rispettivamente le coppie di segmenti $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ e $\overline{OA'}$, $\overline{A'B'}$ in modo che " le rette AA', BB' sieno parallele, esse rimarranno parallele, comunque varii l'an" golo O ". Per dimostrarlo il prof. Gérard si è servito della stereometria; ma dopo aver notato che *Hilbert* ne fa a meno, perchè considera soltanto l'angolo retto, l'A. propone anche una dimostrazione planimetrica.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 20° (15 luglio 1900). — *E. N. Barisien,* Su un problema di ricreazione geometrica. — *G. De Rocquigny-Adanson,* Sulle progressioni aritmetiche. — Questioni proposte. — Questioni risolute. — Bibliografia (si parla di opere di *E. Bagnoli* e di *C. Burali-Forti*).

Anno VI, Fasc. 1° (1 ottobre 1900). — *E. Rebuffel* e *L. Gerard,* Sul teorema di Poncelet. (Tratta dei circoli cofasciali. Rende rigorosa la dimostrazione di Harz coll'introduzione dei segni: e la estende alle coniche.) — *A. Droz-Farny,* Nota d'aritmetica sullo sconto. (Se A è il capitale ed E e E' rispettivamente lo sconto in fuori e lo sconto in dentro per un tempo t, trova la relazione: $\frac{1}{A}+\frac{1}{E}=\frac{1}{E'}$, di cui dà un' interpetrazione geometrica.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 2° (15 ottobre 1900). — *M. Néollier,* Volume del tetraedro. (Servendosi della trigonometria, trova la nota formula del volume in funzione delle lunghezze degli spigoli.) — *G. De Rocquigny-Adanson,* Sulle progressioni aritmetiche. (Considera le proprietà di un quadro formato da file di numeri in progressioni aritm. tutte col primo termine 1, e aventi per ragioni numeri pari 2, 4, 6 ecc.) — *M. G. Fontené,* Sulle altezze di un tetraedro. (Dimostra alcuni teoremi di Steiner, di Joachimstal, di Painvin, ecc. e riferendosi a una questione del Concorso generale di mat. elem. del 1897 fa alcune interessanti osservazioni.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 3° (1 novembre 1900). — *M. G. Fontené,* Sulle altezze di un tetraedro (cont.) — *L. G.,* Problema della carta. (Discussione completa del problema di Pothenot.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 4° (1 novembre 1900). — *L. G.,* Equazioni di primo grado. (Prova che dato un sistema di n equazioni con n incognite, quando si sia trovato con qualunque metodo un sistema di n valori per queste, esso costituirà una soluzione del sistema dato, purchè non si sieno eseguite che certe operazioni.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 5° (1 dicembre 1900). — Note e corrispondenza. (*Barisien* si occupa delle mediane di un triangolo. *Plakowo* propone la dimostrazione diretta del teorema: " Le perpendicolari costruite dai punti medi dei lati del triangolo ortico d'un " triangolo dato ai lati di questo, concorrono in un medesimo punto „. *L. G.* dimostra i teoremi di Poncelet relativi all'ellisse e all' iperbole. *Rebuffel* comunica alcune identità per lo studio delle variazioni del polinomio di terzo grado.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 6° (15 dicembre 1900). — *E. Rebuffel,* Teorema sulle bisettrici di un triangolo. (Due dimostrazioni elementarissime del teorema: " In un triangolo al " maggior angolo corrisponde la minor bisettrice „.) — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute.

Fasc. 7° (1 gennaio 1901). — *E. Rebuffel,* Nota sulla geometria del circolo. (Osservazioni sulla potenza d'un punto rispetto ad un circolo.) — *L. G.,* Teorema di Poncelet, e quadrilatero circoscrittibile (v. fasc. 5°). — Preparazione agli esami. — Questioni proposte. — Questioni risolute. — Bibliografia. (Si parla della *Storia delle matematiche* di J. Boyer.)

Journal de mathém. élém. publié par *H. Vuibert.*

Anno XXIV, fasc. 12° (15 marzo 1900). — *A. Goulard,* Teoria elementare dei polinomi interi. (Dimostra il noto principio d'identità di due polinomi interi.)

Fasc. 13° e 14° (1 e 15 aprile 1900). — *M. Veyssière,* Studio della frazione razionale di secondo grado $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. (È uno studio elementare e completo di questa funzione, delle sue variazioni, de' suoi massimi e minimi ecc. ecc.).

Fasc. 15° (1 maggio 1900). — *C. Bioche,* Nota sull'equilibrio d'una carrucola. (Corregge il comune ragionamento che si fa per stabilire le condizioni d'equilibrio.)

Fasc. 16° (15 maggio 1900). — *G. Rech,* Sul volume della piramide.

Fasc. 20° (15 luglio 1900). — *G. Fleury,* Studio delle variazioni della funzione $\frac{a'x^2 + b'x + c'}{ax^2 + bx + c}$.

Anno XXV, **fasc.** 2° (15 ottobre 1900). — *Ch. Bioche,* Su certe equazioni di quarto grado. (Fa notare la *ragione* per cui l'equazioni biquadratica e reciproca di prima e seconda specie si risolvono con equazioni di secondo grado, e le considera come casi particolari di uno più generale.)

Fasc. 4° (15 novembre 1900). — *A. Goulard,* Note sulle equazioni razionali. (Trova la condizione necessaria, ma non sufficente, affinchè l'equazione della forma $\Sigma \frac{f_r(x)}{\varphi_r(x)} = 0$ ammetta la soluzione $x = a$, che annulla uno dei denominatori φ.)

Fasc. 6° (15 dicembre 1900). — *L. Tripard,* Nonsensi da evitare nelle operazioni sulle grandezze. (Riporta dimostrazioni comuni, dove è confusa la grandezza col numero che la misura.)

Fasc. 7° (1 gennaio 1901). — *I. Monsallut,* Nota su un teorema di Geometria. (Dimostra il teorema di Ceva, indipendentemente dal teorema di Menelao.)

In questi e negli altri numeri, molti esercizi e problemi.

E. Nannei.

Nouvelles Annales de Math. par M. M. *C. A. Laisant* et *X. Antomari;* Paris, Gautier-Villars, éditeur.

Serie III, T. XIX, fasc. 1° (gennaio 1900). — Risultato del secondo Concorso delle N. A. pel 1899. (Il premio è stato assegnato ai sigg. *Duporcq* e *Gallucci*). — Riassunto delle principali formole delle funzioni ellittiche. — *Ed. Collignon,* Problemi sul metodo inverso delle tangenti. — *M. Efimov,* Le Serie nella Pangeometria. — Certificati di Studi superiori delle Fac. di Sc. sessione di luglio 1899 (*Chlermont, Grenoble, Lilla, Marsiglia*). — Risoluz. di quistioni (*Ripert*). — Quistioni proposte (1833).

Fasc. 2° (febbraio 1900). — Sulle equazioni fondamentali della teoria della superficie, riferite a due triedri birettangoli supplementari mobili. — *M. Bauer,* Osservazioni sulla teoria dei Gruppi finiti (l'A. generalizza alcuni teoremi del sig. Frobenius sul numero di certi sotto-gruppi). — *Lagrange,* Sulle cubiche strofoidali (l'A. chiama strofoidali quelle cubiche circolari per le quali i punti ciclici sono una coppia di punti coniugati: esse formano la rete del piano semplice corrispondente alle rette del piano doppio in una certa trasformazione doppia del terz'ordine e genere uno, (*) non considerata dal sig. Lagrange). — Certificati di

(*) Dati in un piano due punti fissi O ed A facciamo corrispondere a un punto P, i due punti P_1, P_2 intersezioni della retta |OP| col cerchio di centro P e passante per A: quando P descrive una curva Σ il luogo dei due punti $P_1\,P_2$ è un'altra curva Σ'' chiamata *strofoidale* di Σ rispetto ai poli O, A. Assumendo OA per asse dell x, O per origine delle coordinate rettangolari, se (x, y) son le coordinate di P, le formole della trasformazione (doppia, del terz'ordine e genere uno) sono, ponendo per brevità $\Omega = [(x-a)^2 + y^2](x^2 + y^2)$ ed $\overline{OA} = a$,

$$x : y : 1 = \xi(\xi^2 + \eta^2 \pm \sqrt{\Omega}) : \eta(\xi^2 + \eta^2 \pm \sqrt{\Omega}) : \xi^2 + \eta^2$$
$$\xi : \eta : 1 = x(x^2 + y^2 - a^2) : y(x^2 + y^2 - a^2) : 2(x^2 + y^2 - ax).$$

La *curva limite* $\Omega = 0$ si spezza nelle due coppie di rette isotrope uscenti da O e da A: i sette punti fondamentali (del piano semplice) sono: O, due riuniti in A sulla perpendicolare ad |OA|. e le due coppie riunite nei punti ciclici sulle rette isotrope uscenti da O. Le rette del piano si trasformano nelle cubiche dette strofoidali dal sig. *Lagrange;* in particolare ai raggi del fascio O corrispondono le strofoidi della rete. Nella trasformazione inversa le rette del piano dànno cubiche razionali con un punto doppio in O ecc. La *trasformazione congiunta* è la inversione considerata nelle mie quistioni 422, 423, 424 (*Period*, an. 1898), 463, 464, 466 467 (ibid, an. 1899) e altrove.

studi sup. sessione di luglio 1899, (Poitiers, Rennes, Tolosa). — *Rouché,* Recensione del " *Traité de Nomographie* „ del sig *d'Ocagne.* — Risol. di quistioni; 360, 448, 495 (*un abbonato*), 496 (*G. Fontené*), 1788 (*V. Retali*). — Quistioni proposte (1834-1836).

Mathésis, recueil mathématique etc., par M. M. *P. Mansion* et *J. Neuberg,* Gand, A. Hoste, éditeur.

Serie II, tomo X fasc. 1° (gennaio 1900). — *E. Cesàro,* Osservazioni sopra alcune quistioni di Geometria intrinseca. — *A. Droz-Farny,* Sopra tre parabole associate a un triangolo. — Note matematiche (*Stuyvaert, Neuberg, Orlando, A. Gob*). — Risol. geometrica della quistione di Geom. analitica posto al concorso generale del 1899 (*). — Risoluzioni delle quistioni proposte 889, 939 (*Neuberg*), 1096 (*Hacken, Jerabek*), 1106 (*Emmerich*). — Quistioni di esame. — Quistioni proposte (1251-1256).

Fasc. 2° (febbraio 1900). — *H. Mandart,* Note sulle coniche. — *E. Cesàro,* Osservazioni ecc., (seguito). — Note matematiche (*Neuberg*). — Risoluzioni delle quistioni 785 (*Emmerich, Neuberg*), 1217, 1219, 1237, 1245 (*Emmerich*). — Quistioni di esame (926-934), (la 931 è estratta dal *Suppl. al Periodico di Mat.*, dec. 1899). — Quistioni proposte (1257-1260).

Fasc. 3° (marzo 1900). — *E. Cesàro,* Osservaz. ecc. (continuazione e fine). — *Droz-Farny,* Sopra la parabola associata a un triangolo. — Note matematiche (*Pirondini, Gob*). — Bibliografia. — Cenni biografici (Tchebychef, 1821-1893). — Risoluz. delle quistioni 781 (*Neuberg*), 1066 (*Droz-Farny, Barisien* e *Déprez*), 1069 (*Colart, Déprez, Andrien* e *Barisien*), 1230, 1236. — Quistioni d'esame (935-937). — Quistioni proposte (1261-1264).

Fasc. 4° (aprile 1900). — *Wasteels,* Sulla rappresentanza proporzionale. — *Barisien,* Sui triangoli inscritti in un'ellisse e circoscritti a un cerchio comentrico (seguito, v. T. IX, pag. 269). — Note matematiche (*Neuberg*). — Bibliografia. — Risoluz. delle quistioni 785 (*Espanet*), 1075 (*Emmerich*), 1150 (*Droz*), 1235 (*Cardoso-Laynes* e *Gob*), 1241, 1242. — Quistioni di esame (938-941). — Quistioni proposte (1265-1268).

Fasc. 5° (maggio 1900). — *Andrien,* Sul punto di Fagnano. — *L. Orlando,* Sulla sviluppante di cerchio e la spirale logaritmica. — Cenno biografico (F. Brioschi, 1824-1897). — *Barisien,* Sui triangoli inscritti ecc. (v. fasc. 4°). — Risoluz. delle quistioni 387 (*Emmerich*), 1098 (*Barisien*), 1214 e 1234 (*Retali*), 1221, 1243. — Quistioni proposte (1269-1272).

Fasc. 6° (giugno 1900). — *A. Emmerich,* Sul triangolo pseudo-isoscele (proprietà del triangolo ABC le cui bisettrici esterne BE, CD sono eguali senza che si abbia AB = AC). — Note matematiche (*Neuberg, Couturier, Barisien*). — *Barisien,* Sui triangoli ecc. (continuazione e fine). — Risoluzione delle questioni 1002 (*Retali*), 1050, 1071, 1092 (*Cristesco*), 1216 (*Soons*), 1258. — Quistione di esame (950-951). — Quistioni proposte (1273-1276).

Fasc. 7° (luglio 1900). — *Y. A. Third,* Sui triangoli triomologici. — *P. M.,* Divisione di un angolo in *n* parti eguali. — *Neuberg,* Il nostro supplemento. (Cenno sopra le due Memorie di *V. Retali* e *G. Tarry* annesse come supplemento a questo

(*) Una elegante dimostrazione diretta del teorema di cui si occupa il sig. Gob, fu data dal Jonquières a pag. 84 (fig. 8) dei suoi *Mélanges de Geometrie pure* (1856).

fasc.). — *P. Mansion*, Sopra una formula combinatoria. — Bibliografia. — Risoluzioni delle quistioni 1085 (*Mandart*), 1234, 1249 (*Gérard* e *Barisien*), 1251 (*Retali* e *Couturier*), 1253, 1256. — Quistioni d'esame (952-955). — Quistioni proposte (1277-1280). — Il supplemento di 30 pag. contiene: *V. Retali*, Sopra una trasformazione geometrica, pag. 1-22; *G. Tarry*, Le permutazioni quadrate di base 6, pag. 23-30. (*Mem. della società reale di scienze di Liège*, 3ª serie, t. II, 1900).

Fasc. 8º (agosto-settembre, 1900). — *S. Realis*, Quistioni di teoria dei numeri. — *Stuyvaert*, Il teorema di Chasles sulle cubiche gobbe. — *P. Mansion*, Area delle sinusoidi e formula di Wallis. — Bibliografia. — *Neuberg*, Concorso generale nel 1899, quistione di geometria analitica. — Risoluzione delle questioni 1215 e 1231 (*Emmerich*), 1238, 1259 (*Retali*), 1268. — Quistioni d'esame (956-961). — Quistione proposte (1281-1288).

V. R.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

Bartolucci L., Manuale d'Aritmetica e principii d'algebra per gli alunni delle scuole tecniche. Seconda edizione. Firenze, Bemporad, 1899. L. 2.

Bartolucci L., Piccolo manuale d'Algebra per gli alunni delle scuole tecniche. Seconda edizione. Firenze, Bemporad, 1900. L. 0,50.

Bettazzi R., I problemi di aritmetica pratica. Trattatello ad uso degli allievi maestri e degli insegnanti di scuole elementari e secondarie inferiori. Torino, Paravia, 1900. L. 1,20.

Gremigni M., Nozioni di Geometria solida ad uso delle scuole tecniche, con un formulario. Firenze, Bemporad, 1900. L. 0,80.

Lavaggi, Calcolo infinitesimale. Lezioni dettate nell'anno 1899-900 nella R. Università di Parma, compilate per cura di *S. Buroni*. Disp. 54. Parma, lib. Zafferri, 1899-900.

Ohler C., Lezioni pratiche sulle quattro operazioni aritmetiche nello spazio numerico da 1 a 10 secondo il metodo del prof. A. W. Grube. Versione dal tedesco del prof. *A. Ambrosini*. Torino, Paravia, 1900. L. 1,50.

Sala L., Letture sulle proporzionalità in ragione inversa fra le derivate e gli integrali particolari della serie di Taylor, e sui rapporti derivatori e integratori che scaturiscono da quelle proporzionalità. Milano, Suppl. al *Politecnico*, tip.-lit. degli Ingegneri. 1900.

Valle G., Introduzione all'algebra elementare. Brescia, Racca, 1900. L. 0,50.

Vecchi V., Geometria descrittiva. Lezioni dettate nella R. Università di Parma nell'anno 1899-900 e compilate per cura di *E. Beggi*. Disp. 34. Parma, lib. Zafferri, 1899-900.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 gennaio 1901.

Gli aggruppamenti prospettivi e proiettivi di 2°, 3° e 4° ordine

È nota l'importanza della teoria degli aggruppamenti proiettivi di ordine n, che il De-Paolis pose a fondamento di una teoria puramente geometrica delle linee a superficie algebriche, nelle sue memorie sull'argomento, che, sebbene incompiute, ottennero un premio postumo dalla R. Accademia dei Lincei.

Gli aggruppamenti proiettivi sono stati studiati da molti matematici, come apparisce dall'elenco di pubblicazioni stampato alla fine della presente nota, nel quale ho indicato i principali lavori che io conosco sull'argomento.

Con questa nota mi propongo di portare un modesto contributo alla teoria degli aggruppamenti proiettivi, del 3° e 4° ordine, mostrando con metodo puramente geometrico come le loro proprietà fondamentali divengano assai facili ed intuitive, deducendole da quelle degli aggruppamenti prospettivi; la qual cosa era già stata dimostrata da Schubert analiticamente soltanto per gli aggruppamenti proiettivi del 3° ordine. Scopo principale di questa nota del resto è quello di familiarizzare i lettori del Periodico con questi concetti e di agevolare così lo studio dei lavori di maggior mole.

1. Definizioni. — I. *Essendo* $r_1, r_2, \dots r_n$, (B) n *rette ed uno spazio* [p] (*) *appartenenti ad uno spazio* $[n+p]$, *tali che due qualunque di essi non abbiano un punto comune si chiama* aggruppamento prospettivo *di ordine* n *e specie* $p+1$ *l'insieme di tutti i gruppi* G_n *di* n *punti che si ottengono come intersezioni delle* n *rette* $r_1, r_2, \dots r_n$ *con gli spazi* $[n+p-1]$ *che contengono* (B). *Questo spazio* [p] *si dice* base *dell'aggruppamento.*

Indicherò un tale aggruppamento col simbolo $(A_{p+1})_n$ od anche $(A_B)_n$.

II. *Essendo* $r_1, r_2 \dots r_n$ *rette di uno spazio* $[n-1]$, *chiamo* aggruppamento prospettivo di ordine n *e* specie 0 *l'insieme dei gruppi* G_n *di* n *punti che si ottengono come intersezioni delle* n *rette date con gli spazi* $[n-2]$ *contenuti in* $[n-1]$.

Indicherò un tale aggruppamento col simbolo $(A_0)_n$ oppure $(A)_n$.

(*) Seguendo la notazione introdotta da Schubert, indico col simbolo [p] uno spazio lineare a p dimensioni. Così [0], [1], [2], [3] rappresentano un punto, una retta, un piano, uno spazio ordinario.

In questa nota mi occuperò solo di quegli aggruppamenti prospettivi che sono contenuti nello spazio ordinario; cioè di quelli di specie >0, pei quali $n+p \leq 3$, e di quelle di specie 0 pei quali $n-1 \leq 3$ ovvero $n \leq 4$. Tutti i casi possibili sono dunque:

$$n=2 \begin{cases} p+1=1 \\ p+1=2 \end{cases}$$
$$n=3 \begin{cases} p+1=0 \\ p+1=1 \end{cases}$$
$$n=4 \quad p+1=0.$$

I. — Aggruppamenti prospettivi di 2° ordine.

2. Date due rette r_1, r_2 nello spazio ed un fascio di piani di asse (B), i piani di questo fascio tagliano le r_1, r_2 in coppie di punti che formano un aggruppamento prospettivo $(A_2)_2$ di 2° ordine e specie 2. Se le rette r_1, r_2 sono in un piano π, al fascio di piani possiamo sostituire il fascio di rette intersezioni dei medesimi col piano π, ed otteniamo l'aggruppamento prospettivo $(A_1)_2$ di 2° ordine e specie 1. Ogni punto P_i di r_i determina un punto P_h di r_h, che si chiama il suo *polo*.

L'$(A_2)_2$ è la proiettività ordinaria, l'$(A_1)_2$ è la prospettività ordinaria, le proprietà delle quali son notissime; ci limitiamo ad enunciare soltanto quelle che ci occorreranno nel seguito.

I. *Un* $(A_2)_2$ *è individuato da tre dei suoi gruppi; un* $(A_1)_2$ *da due.*

Tutti i possibili $(A_2)_2$ costituiscono dunque un sistema ∞^3.

II. *Affinchè un* $(A_2)_2$ *diventi un* $(A_1)_2$ *è necessario e sufficiente che le due punteggiate abbiano un elemento unito.*

III. *Un* $(A_2)_2$ *è singolare quando è costituito dalle coppie formate da un punto* O_1 *di* r_1 *con un punto qualsiasi di* r_2 *e da un punto* O_2 *di* r_2 *con un punto qualsiasi di* r_1.

Si dice allora che i punti O_1, O_2 sono *apolari*, e che l'aggruppamento si spezza in due aggruppamenti del 1° ordine costituiti dai punti O_1 e O_2.

Si ottiene per es. un $(A_2)_2$ singolare quando la retta (B) incontra le r_1, r_2. I due punti d'incontro O_1, O_2 di B con r_1 e r_2 sono i suoi punti apolari.

Quando ad un punto P_i di r_i corrispondono due punti di r_h, corrispondono ad esso tutti i punti di r_h, e la proiettività è singolare e si spezza in P_i ed in un punto P_h di r_h.

IV. *Se le* r_1, r_2 *coincidono, e due loro elementi si corrispondono in doppio modo, l'*$(A_p)_2$ *è un'involuzione* I_{p_2}.

Un'involuzione è individuata da due dei suoi gruppi.

Un'involuzione possiede due gruppi, ciascuno costituito da un elemento doppio. Se i due punti doppi coincidono l'involuzione è *singo-*

lare ed è costituita da quell'elemento preso con un punto qualunque della retta.

V. Due aggruppamenti non singolari $(A'_2)_2$, $(A''_2)_2$ sulle stesse rette r_1, r_2 hanno in comune due e due soli gruppi distinti o coincidenti, o gli hanno in comune tutti. Se sono singolari possono avere anche in comune tutti i gruppi formati da un determinato elemento dell'una retta con tutti quelli dell'altra.

II. — Aggruppamenti prospettivi di 3° ordine.

3. Prese nello spazio tre rette r_1, r_2, r_3, ed una stella di piani (di centro O) ogni piano della stella determina sulle tre rette una terna di punti P_1, P_2, P_3. *Tutte queste terne di punti formano un aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ del 3° ordine e di specie 1.*

Presi due punti P_1, P_2 sulle rette r_1, r_2 resta determinato il punto corrispondente P_3, intersezione di r_3 col piano P_1P_2O, che si dice *polo* del gruppo (P_1, P_2). Lo stesso può ripetersi per ogni coppia di punti presi su due qualunque delle rette date.

Preso un punto, per es. P_1, su una delle rette date, r_1, resta individuato un fascio di piani avente per asse P_1O e per conseguenza su r_2, r_3 un $(A_2)_2$, i cui gruppi sono tutti e soli quelli che con P_1 formano gruppi dell'A_{p_3}, e che si dice *aggruppamento polare di* P_1.

Se le tre rette r_1, r_2, r_3 giacciono in un piano π, che non contiene O, possiamo sostituire ai piani della stella le rette di π. Allora ogni gruppo dell'$(A_1)_3$ è formato dalle intersezioni di r_1, r_2, r_3 con una retta arbitraria, ed otteniamo un *aggruppamento prospettivo $(A_0)_3$ di 3° ordine e di specie* 0. I gruppi di punti che con un punto qualsiasi P_1 di r_1 formano un gruppo di $(A_0)_3$ formano un aggruppamento prospettivo di 2° ordine e 1ª specie *polare di* P_1.

Un aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ di 3° ordine e specie 1 è individuato da tre dei suoi gruppi.

Infatti i tre gruppi individuano tre piani, i quali s'incontrano in un punto O, centro della stella che dà origine all'aggruppamento.

I gruppi di un aggruppamento prospettivo $(A_0)_3$ o $(A_1)_3$ di 3° ordine e specie 1 sono ∞^2.

Infatti ogni gruppo è individuato da due punti scelti ad arbitrio su due rette rispettivamente. Inoltre i gruppi stessi corrispondono univocamente ai piani di una stella.

4. Una coppia di punti sopra due delle rette r_1, r_2, r_3 si dice *apolare*, se forma un gruppo dell'aggruppamento non con un solo, ma con tutti i punti della retta rimanente.

Sopra ognuna delle coppie di rette che si possono formare colle r_1, r_2, r_3 esistono due gruppi apolari.

1°. Consideriamo un $(A_1)_3$, e sia s_1 la retta che passa per O e incontra r_h, r_k, e poniamo $P_{h,i}=(r_h s_i)$. Per $OP_{h,i}P_{k,i}$ passano infiniti piani, e quindi ogni punto di r_i forma un gruppo dell'$(A_1)_3$ con $P_{h,i}$, $P_{k,i}$ ossia $P_{h,i}\,P_{k,i}$ sono apolari.

Inoltre il piano Or_i è tagliato dalle r_h, r_k nei punti $P_{h,k}$, $P_{k,h}$, dunque ogni punto di r_i forma un gruppo dell'$(A_1)_3$ con $P_{h,k}$, $P_{k,h}$. Dunque anche questi due punti formano un gruppo apolare. — Riepilogando

$$\left.\begin{matrix} P_{2,1}\ ,\ P_{3,1} \\ P_{2,3}\ ,\ P_{3,2} \end{matrix}\right\}\ \text{è un gruppo apolare per } r_2\ ,\ r_3$$
$$\left.\begin{matrix} P_{3,2}\ ,\ P_{1,2} \\ P_{3,1}\ ,\ P_{1,3} \end{matrix}\right\}\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad r_3\ ,\ r_1$$
$$\left.\begin{matrix} P_{1,3}\ ,\ P_{2,3} \\ P_{1,2}\ ,\ P_{2,1} \end{matrix}\right\}\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad r_1\ ,\ r_2.$$

2°. Consideriamo ora un $(A_0)_3$, cioè esaminiamo il caso in cui le tre rette sono i lati di un trilatero. Le coppie apolari sono formate dai vertici convenientemente combinati e precisamente nel modo seguente, avendo posto $P_i=(r_h, r_k)$,

$$\left.\begin{matrix} P_1\ ,\ P_1 \\ P_3\ ,\ P_2 \end{matrix}\right\}\ \text{è un gruppo apolare per } r_2\ ,\ r_3$$
$$\left.\begin{matrix} P_2\ ,\ P_2 \\ P_1\ ,\ P_3 \end{matrix}\right\}\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad r_3\ ,\ r_1$$
$$\left.\begin{matrix} P_3\ ,\ P_3 \\ P_2\ ,\ P_1 \end{matrix}\right\}\quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad r_1\ ,\ r_2.$$

5. Finora abbiamo supposto che le rette r_1, r_2, r_3 sieno in posizione generale. Esaminiamo qualche caso particolare. Se due rette, per es. r_1, r_2, concorrono in un punto, i due punti $P_{1,3}$, $P_{2,3}$ coincidono ma nulla dobbiamo variare a quanto abbiamo detto.

Se tutte e tre le rette passano per un punto i sei punti $P_{i,h}$ coincidono.

Se le tre rette s_1, s_2, s_3 coincidono (cioè se O appartiene alla quadrica individuata da r_1, r_2, r_3) allora $P_{i,h}$, $P_{i,k}$ coincidono ed i due gruppi apolari di ogni coppia di rette coincidono.

Se due rette, per es. r_1, r_2, ed il centro O stanno in un piano π, tagliato in P_3 da r_3, l'aggruppamento $(A_0)_3$ si spezza in un aggruppamento di 2° ordine ed in uno di 1°.

Infatti ogni gruppo G_2 dell'aggruppamento $(A_1)_2$ determinato dal fascio di centro O sulle r_1, r_2 forma un gruppo G_3 dell'$(A_1)_3$ con qualsiasi punto di r_3, e il punto P_3 forma un gruppo G_3 dell'$(A_1)_3$ con ogni coppia di punti delle r_1, r_2. In questo caso diremo che l'$(A_1)_3$ è *degenere.*

Lo stesso avviene se, essendo le tre rette r_1, r_2, r_3 sghembe, il punto O è situato sopra una di esse per es. su r_3.

In tal caso infatti l'aggruppamento $(A_1)_2$ determinato su r_1, r_2 dal fascio di piani che ha per asse r_3 forma un gruppo G_3 con ogni punto di r_3, e il punto O di r_3 forma un gruppo G_3 con ogni coppia di punti su r_1, r_2.

Finalmente supponiamo che r_1, r_2 s'incontrino, ed O sia sopra una di esse, per es. su r_1.

In tal caso, posto $O = P_1$, $r_2 r_1 = P_2$, $r_3, (r_1 r_2) = P_3$, è facile vedere che l'aggruppamento si riduca a tre aggruppamenti proiettivi del 1° ordine P_1, P_2, P_3 perchè l'$(A_1)_3$ si compone di tutti i gruppi formati da uno dei tre punti suddetti P_i con due punti arbitrari delle r_h, r_k.

In questo caso l'aggruppamento si dice *singolare*.

Se due delle tre rette r_1, r_2, r_3, per es. r_1, r_2, coincidono, ad ogni punto P_3 di r_3 corrisponde l'involuzione identica formata da tutti i punti della r_1 contati due volte; ad ogni punto P_1 di r_1 corrisponde la proiettività singolare i cui punti apolari sono P_1 (su r_2) e $P_{3,2}$ (o $P_{3,1}$) (su r_3). Due punti P_1, P_2 su r_1 (o r_2) individuano l'unico punto $P_{3,2}$ il quale dunque è *apolare* per l'$(A_2)_2$, essendo indeterminata l'A_p, ad essa corrispondente. Due punti P_1, P_3 su r_1, r_3 determinano su r_2 lo stesso punto P_1.

Se tutte e tre le rette coincidono allora ad ogni punto P_1 corrispondono *tutte le possibili coppie* P_2, P_3, ecc.

6. I gruppi di un $(A_1)_3$ corrispondono univocamente, come abbiamo detto, ai piani di una stella (o alle rette di un piano). Ai piani di un fascio contenuti in questa stella corrispondono quindi ∞' gruppi dell'$(A_1)_3$ che costituiscono un fascio che chiameremo del *1° sistema*.

I gruppi di un fascio sono caratterizzati dalla seguente proprietà. I loro punti generano tre punteggiate proiettive su r_1, r_2, r_3, nelle quali

$P_{2\cdot 1}$, $P_{3\cdot 1}$ sono corrispondenti su r_2, r_3
$P_{3,2}$, $P_{1\cdot 2}$ " " " r_3, r_1
$P_{1\cdot 3}$, $P_{2\cdot 3}$ " " " r_1, r_2.

I fasci di 1ª specie di gruppi di un $(A_1)_3$ sono ∞^2. Due gruppi dell'$(A_1)_3$ individuano un fascio del 1° sistema.

Similmente esistono ∞^2 coni quadrici col vertice in O tangenti alle rette r_1, r_2, r_3. I piani tangenti ad uno di essi corrispondono ad un fascio di gruppi dell'$(A_1)_3$. I gruppi di questo fascio sono caratterizzati dalle seguenti proprietà. I loro elementi generano su r_1, r_2, r_3 tre punteggiate proiettive, nelle quali

$P_{2,3}$, P_{32} sono corrispondenti su r_2, r_3
$P_{3,1}$, P_{13} " " " r_3, r_1
$P_{1,2}$, P_{21} " " " r_1, r_2.

Chiameremo questi fasci del 2° *sistema*.

Anche i fasci del 2° sistema sono ∞^2. Due gruppi dell'$(A_2)_2$ individuano un fascio del 2° sistema.

Due fasci dello stesso sistema hanno un solo elemento comune. Due fasci di sistema diverso ne hanno due.

III. — Aggruppamenti proiettivi di 3° ordine - Fasci.

7. Sieno date tre rette o tre forme di prima specie qualsiansi, f_1, f_2, f_3, e stabiliamo tre corrispondenze proiettive fra gli elementi di queste ed i punti di tre rette r_1, r_2, r_3 collegati da un aggruppamento prospettivo del 3° ordine di specie 0 o 1.

Anche fra gli elementi di f_1, f_2, f_3 viene stabilita una speciale corrispondenza, per la quale una coppia di elementi, presi su due delle forme date, individua uno ed un solo sull'altra; ogni elemento di una forma determina infinite coppie delle altre due i cui elementi si corrispondono proiettivamente.

Diremo che tutti i gruppi formati con tre elementi delle f_1, f_2, f_3, corrispondenti a tre elementi di un gruppo dell'$(A_1)_3$ o $(A_0)_3$ sulle rette r_1, r_2, r_3 forma un *aggruppamento proiettivo del 3° ordine*, e lo indicheremo colla scrittura A_{p_3}.

In questo A_{p_3} esistono in generale sei elementi (due su ciascuna retta) che, combinati due a due formano i sei gruppi apolari.

Se però l'aggruppamento prospettivo da cui deriva è degenere o singolare, è esso pure degenere o singolare cioè si spezza in un A_{p_2} e in un A_{p_1}, oppure in tre A_{p_1}.

8. Da quanto abbiamo detto nei §§ precedenti resta dimostrata l'esistenza di aggruppamenti proiettivi del 3° ordine.

Prescindendo ora da qualsiasi costruzione geometrica definiamo l'aggruppamento proiettivo del 3° ordine nel modo seguente.

Si chiama aggruppamento proiettivo del 3° ordine, e s'indica con A_{p_3}, *la totalità dei gruppi* G_3 *di tre elementi, appartenenti a tre forme di 1ª specie* f_1, f_2, f_3 *rispettivamente, i quali soddisfano alle seguenti condizioni:*

1°. *Ogni coppia di elementi* P_i, P_h *presi su* f_i, f_h *individua (in generale) un solo elemento* P_k *della* f_k, *che con essi forma un gruppo* G_3. *Si dice che* P_k *è il polo di* P_i, P_h.

2°. *Ogni elemento* P_i *di* f_i *individua* ∞' *coppie* G_2 *di elementi su* f_h, f_k, *costituenti una* A_{p_2}, *i quali formano con* P_i *un gruppo* G_3 *dell'*A_{p_3}. *Tale* A_{p_2} *si dice polare di* P_i.

Dimostreremo fra poco che ogni A_{p_3} così definito si può ottenere nel modo indicato nel § 7.

9. *Sulle tre forme* f_1, f_2, *collegate da un* A_{p_3} *non degenere esistono sei punti (tre per ciascuna) che, combinati convenientemente, costituiscono due coppie apolari per ogni coppia di forme; oppure ne esistono infiniti.*

1°. Due elementi M'_3, M''_3 di f_3 determinano su f_1, f_2 due aggruppamenti proiettivi di 2° ordine A'_{p_2}, A''_{p_2}, i quali (in generale) hanno in comune due gruppi A_1, A_2 e B_1, B_2 distinti o coincidenti.

I due gruppi $A_1A_2M'_3$, $A_1A_2M''_3$ appartengono all'A_{p_3}, e quindi la proiettività A_{p_2} polare di A_1 è singolare, e ogni punto della f_3

forma con A_1, A_2 un gruppo dell'A_{p_3}, ossia (A_1, A_2) è un gruppo apolare dell'A_{p_3} su f_1, f_2, cioè appartiene a tutti gli aggruppamenti di 2° ordine polari degli elementi di f_3. Lo stesso può dirsi per B_1, B_2. Risulta da ciò che l'A_{p_2} polare di A_1 è singolare, e si spezza in due A_{p_1}, uno dei quali è formato da A_2 con tutti i punti di f_3 e l'altro da un punto speciale A_3 di f_3 con tutti i punti di f_2. In simil guisa ragionando su B_1, B_2 si trova un punto B_3 su f_3.

Risulta da ciò che A_1, A_3 e B_1, B_3 sono apolari per f_1, f_3, perchè con ogni punto di f_2 formano un gruppo di A_{p_3}. Inoltre B_2, A_3 e A_2, B_3 sono gruppi apolari per f_2, f_3. Infatti, poichè A_1, A_3 e B_1, B_2 sono apolari, i due gruppi A_1, B_2, A_3, B_1, B_2, A_3 appartengono all'A_{p_3}, ed allora il gruppo B_2, A_3, individuando due e quindi gli ∞^1 punti di f_1, è apolare.

2°. Se gli aggruppamenti A'_{p_2}, A''_{p_2} polari di M'_3, M''_3 hanno più di due coppie comuni, essi coincidono. Le coppie A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; ... di questo aggruppamento sono dunque tutte apolari, cioè formano un gruppo G_3 dell'A_{p_3} con qualsiasi elemento di f_3.

Il punto A_1, per es., ha per polare un aggruppamento singolare, che si spezza nell'A_{p_1} formato da A_2 con tutti gli elementi di f_3 e nell'A_{p_1} formato da un elemento A_3 di f_2 con tutti gli elementi di f_2. Questo elemento A_3 è apolare, cioè forma un gruppo di A_{p_3} con ogni coppia di elementi di f_1, f_2. Infatti alla coppia $A_3 B_2$ corrispondono A_1 e B_1 e quindi tutti gli elementi di f_1; per conseguenza anche ad ogni coppia $A_3 B_1$ corrispondono tutti gli elementi di f_1.

In questo caso si può dire che l'A_{p_3} è *degenere* e si spezza in un A_{p_1} su f_3 e in un A_{p_2} su f_1, f_2; oppure che A_3 e tutte le coppie di questo A_{p_2} sono apolari.

Se anche l'A_{p_2} si spezza in due A_{p_1}, allora l'A_{p_3} è *singolare*. Esso è individuato da tre elementi O_1, O_2, O_3 ed è formato dai gruppi che risultano da uno qualunque di questi elementi O_i con una coppia di elementi delle altre due forme.

10. *Un* A_{p_3} *non degenere è individuato quando si conoscono le sue sei coppie apolari (supposto che non sieno coincidenti) ed un suo gruppo.*

Sieno $P_{1,3}, P_{1,2}$; $P_{2,1}, P_{2,3}$; $P_{3,2}, P_{3,1}$ i sei elementi di f_1, f_2, f_3 che combinati due a due costituiscono le coppie apolari e M_1, M_2, M_3 un gruppo dell'A_{p_3}.

La proiettività polare, per es., di M_3 è determinata, perchè deve contenere le coppie P_{13}, P_{23}; P_{12}, P_{21}; M_1, M_2. Sia D_2 l'elemento corrispondente ad un punto arbitrario D_1 di f_1 in questa proiettività. Allora anche la proiettività corrispondente a D_1 è determinata, poichè in essa sono coppie corrispondenti P_{21}, P_{31}; P_{23}, P_{32}; D_2, M_3 ecc.

11. *Un aggruppamento proiettivo* A_{p_3} *è individuato, quando si conoscono gli aggruppamenti* A'_{p_2}, A''_{p_2} *polari di due elementi* P'_i, P''_i *ed un gruppo* G_3 (P_1, P_2, P_3).

Infatti è facile vedere che è determinato l'A_{p_2} polare di un punto M_h di f_h.

Siano M_k', M_k'' i poli di P_h rispetto ad A'_{p_2} e A''_{p_2}. Allora ciascuna delle coppie (P_i', M_k'), (P_i'', M_k''), (P_i, P_k) formano con P_h un gruppo dellA_{p_3}, ossia appartengono all'aggruppamento polare di P_h. Così si possono riguardare come noti gli aggruppamenti polari di P_h e P_k.

Sia ora M_h un punto qualunque di f_h e M_k', M_k'', M_k i suoi poli rispetto ad A'_{p_2}, A''_{p_2} e all'aggruppamento polare di P_k. Ciascuna delle tre coppie (P'_i, M'_k), (P''_i, M''_k), (M_i, P_k) forma con M_h un gruppo dell'A_{p_3}, ossia esse appartengono all'aggruppamento polare di M_h e lo determinano.

Infine sia M_i un punto arbitrario di f_i e M'_k, M''_k, M'''_k i suoi poli rispetto ai tre aggruppamenti polari di tre punti M'_h, M_h'', M''_h. Le tre coppie (M'_h, M'_k), (M_h'', M''_k) (M_h''', M_k''') individuano l'aggruppamento polare di M_i.

Segue da ciò che

Gli aggruppamenti proiettivi del terzo ordine sono ∞^7.

Infatti per determinare un A_{p_3} occorrono tre condizioni necessarie ad individuare l'A'_{p_2}, tre per l'A''_{p_2} ed uno per il gruppo $(P_1 P_2 P_3)$.

12. Consideriamo un A_{p_2}. Ad ogni punto di f_3, per es., è coordinato uno ed un solo A_{p_2}. Tutti questi A_{p_2} costituiscono un *fascio*.

I gruppi comuni a due A_{p_2} sono comuni a tutti gli A_{p_2} del fascio, e ne formano la *base*.

Tali gruppi sono evidentemente tutti e soli i gruppi apolari su f_1, f_2. Se dunque l'A_{p_2} non è degenere, essi sono due soli; se l'A_{p_2} è degenere sono infiniti. In questo caso il fascio si dice *singolare*.

La base di un fascio di A_{p_2} non singolare è costituita da due gruppi di elementi distinti o coincidenti, quella di un fascio singolare dagli ∞' gruppi formati da un elemento di f_1 (o f_2) e da tutti quelli di f_2 (o f_1).

In un fascio di A_{p_2} esistono due e due soli A_{p_2} singolari.

Questi sono evidentemente i due determinati dai punti apolari $P_{1,3}$, $P_{2,1}$ e $P_{1,2}$, $P_{2,3}$.

Esiste uno ed un solo fascio di A_{p_2} *che contenga due aggruppamenti* A'_{p_2}, A''_{p_2} *dati.*

Essendo f_1, f_2 i due sostegni dei due aggruppamenti dati, si prenda un'altra forma di 1ª specie f_3 e costruiamo l'aggruppamento del 3º ordine A_{p_3}, nel quale A'_{p_2}, A''_{p_2} sono gli aggruppamenti polari di due elementi P'_3, P''_3 e (P_1, P_2, P_3) è un altro gruppo.

Gli aggruppamenti polari degli elementi di f_3 formano un fascio che contiene A'_{p_2}, A''_{p_2}. Restando fissi A'_{p_2}, A''_{p_2}, (P_1, P_2) e variando P'_3, P''_3, P_3 si hanno $\infty^3 A_{p_3}$, i quali però individuano lo stesso fascio su f_1, f_2. Infatti se a P'_3, P''_3, P_3 sostituiamo gli elementi Q'_3, Q''_3, Q_3, mediante una proiettività in cui sia

$$(P'_3\, P''_3\, P_3) \barwedge (Q'_3\, Q''_3\, Q_3)$$

il nuovo A_{p_3} si trasforma nel primo e i due fasci su f_1, f_2 sono identici.

Dal teorema precedente risulta.

Due A_{p_2} *individuano un fascio.*

Se due fasci di A_{p_3} hanno due aggruppamenti comuni, coincidono.

13. *Ogni aggruppamento proiettivo A_{p_3} del 3° ordine si può dedurre da un aggruppamento $(A_0)_3$ o $(A_1)_3$ prospettivo.*

1ª. *Dimostrazione.* — I. Supponiamo A_{p_3} non degenere e individuato dalle sue coppie apolari, costituite dai sei punti P_{ih}, e da un suo gruppo M_1, M_2, M_3 (§ 10).

Si prendano tre rette r_1, r_2, r_3 sghembe due a due ed un punto O; essendo s_i la retta che passa per O e incontra r_h, r_k, si ponga $P'_{ih} = r_i s_i$ e siano M'_1, M'_2, M'_3 i punti d'incontro di r_1, r_2, r_3 con un piano arbitrario condotto per O. Si stabiliscano tre proiettività fra f_1, f_2, f_3 e r_1, r_2, r_3 rispettivamente in guisa che sia

$$(P_{12}\,P_{13}\,M_1) \barwedge (P'_{12}\,P'_{13}\,M'_1)$$
$$(P_{23}\,P_{21}\,M_2) \barwedge (P'_{23}\,P'_{21}\,M'_2)$$
$$(P_{31}\,P_{32}\,M_3) \barwedge (P'_{31}\,P'_{32}\,M'_3).$$

È allora evidente che l'aggruppamento proiettivo, che si ricava dall'$(A_1)_3$ prospettivo rispetto al centro O sulle tre rette $r_1 . r_2 . r_3$ per mezzo delle suddette proiettività, è precisamente l'A_{p_3} dato.

Similmente si prenda un trilatero r_1, r_2, r_3 ed una secante che tagli i lati nei punti M_1, M_2, M_3. Poniamo $P_i = r_h r_k$, e si stabiliscano tre proiettività fra f_1, f_2, f_3 e r_1, r_2, r_3 rispettivamente, in modo che sia

$$(P_{12}\,P_{13}\,M_1) \barwedge (P_3\,P_2\,M'_1)$$
$$(P_{23}\,P_{21}\,M_2) \barwedge (P_1\,P_3\,M'_2)$$
$$(P_{31}\,P_{32}\,M_3) \barwedge (P_2\,P_1\,M'_3).$$

È allora evidente che l'A''_{p_3} che si deduce dall'$(A_0)_3$) prospettivo su r_1, r_2, r_3 per mezzo di queste proiettività è precisamente l'A_{p_3} dato.

II. Supponiamo l'A_{p_3} degenere.

Sia P_1 il suo punto apolare su f_1, e $P'_2 P'_3$; P''_2, P''_3, P'''_2, P'''_3 tre coppie apolari su f_2, f_3.

Prendiamo una retta r_1 e due rette coincidenti r_2, r_3. Su questa siano H'_2, H''_2, H'''_2 tre punti arbitrari e si stabilisca la proiettività in guisa che sia

$$(P'_2\,P''_2\,P'''_2) \barwedge (H'_2\,H''_2\,H'''_2)$$
$$(P'_3\,P''_3\,P'''_3) \barwedge (H'_2\,H''_2\,H'''_2)$$

ed una proiettività fra f_1 ed r_1 in guisa che P corrisponda ad $r_1 r_2$ (oppure al punto d'incontro di r_1 colla retta che passa per O ed incontra r_1, r_2). Allora l'A_{p_3} è precisamente quello che ottiene dall'A'_{p_3} singolare su r_1, r_2, r_3 per mezzo di detta proiettività.

2ª *Dimostrazione.* — Sia dato un A_{p_3} su tre rette r_1, r_2, r_3, e siano $(P_{12}, P_{21})(P_{13}, P_{23})$ i due gruppi apolari sulle rette $r_1 . r_2$. Questi gruppi saranno comuni a tutti gli aggruppamenti proiettivi del 2° ordine polari dei punti di r_3.

Preso un punto arbitrario O sulla retta $s = P_{12} P_{21}$, si consideri una retta arbitraria r'_3 situata nel piano $OP_{13} P_{23}$. È evidente allora che la stella di piani di centro O determina sulle tre rette r_1, r_2, r'_3 un aggruppamento prospettivo $(A_1)_3$ che ha (P_{12}, P_{21}) (P_{13}, P_{23}) per coppie apolari sulle rette r_1, r_2.

Il fascio degli A_{p_3} polari dei punti di r'_3 rispetto a questa $(A_1)_3$ coincide con quelle dei fasci polari dei punti di r_3 rispetto all'A_{p_3} dato.

Infatti l'A_{p_3} polare di un punto P_3 di r_3 è individuato da un suo gruppo (P_1, P_2) (essendone già dati altri due gruppi). Il piano OP_1P_2 taglia r_3 in un punto P'_3 il cui aggruppamento polare rispetto ad $(A_1)_3$ contiene le coppie (P_1, P_2) (P_{12}, P_{21}) (P_{13}, P_{23}) e quindi coincide con A_{p_3}.

Segue da ciò che, se si determinano nella stessa guisa tre coppie (P_3, P'_3) (Q_3, Q'_3) (R_3, R'_3) sulle rette r_3, r'_3, e si stabilisce la proiettività fra r_3 e r'_3 in modo che sia

$$(P_3\, Q_3\, R_3) \barwedge (P'_3\, Q'_3\, R'_3)$$

l'A_{p_3} dato si trasforma nell'$(A_0)_3$.

IV. — Involuzioni di 3° ordine.

14. Supponiamo di avere un A_{p_3} qualunque, e che le f_1, f_2 coincidano. L'A_{p_3} su f_1, f_2 corrispondente ad un punto P_3 qualsiasi contiene le due coppie (P_{13}, P_{23}), (P_{12}, P_{21}). Affinchè tale A_{p_3} sia involutorio, qualunque sia P_3, è necessario e sufficiente che gli elementi suddetti si corrispondano in doppio modo, e poichè due involuzioni non hanno che una coppia comune, bisogna che coincidano

$$P_{13}, P_{21} \quad \text{e} \quad P_{12}, P_{23}.$$

Similmente, supposto che coincidano f_1, f_2, f_3, affinchè tutte le A_{p_2} determinate dai punti di f_1 su f_2, f_3, siano involuzioni, è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{21}, P_{32} \quad \text{e} \quad P_{23}, P_{31};$$

e perchè siano involuzioni tutte le A_{p_2} determinate dai punti di f_2 su f_1, f_3, è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{32}, P_{13} \quad \text{e} \quad P_{31}, P_{12}.$$

Quando sono verificate due delle condizioni suddette, è verificata la terza, ed allora l'A_{p_3} si dice un'*involuzione* e si indica col simbolo I_3.

Dunque affinchè un A_{p_3} sia involutorio è necessario e sufficiente che coincidano

$$P_{13}, P_{21}, P_{32} \quad \text{e} \quad P_{23}, P_{31}, P_{12}.$$

Ne segue:

In un'involuzione del 3° ordine esiste una ed una sola coppia apolare.

Un'involuzione del 3° ordine è determinata, se si conosce la coppia apolare (Q, Q') *e un suo gruppo* $G_3\,(A_1, A_2, A_3)$.

Infatti un punto A_i ha per polare un'involuzione del 2° ordine di cui Q, Q' e A_h, A_k sono due coppie $(i, h, k = 1, 2, 3)$, ed è quindi interamente determinata.

Preso allora un punto B_2 sulla retta r si potrà determinare il suo coniugato B_3 nella involuzione polare di A_1 (che cioè contiene le coppie Q, Q' e A_2, A_3). Allora anche B_2 individua un'involuzione di cui Q, Q' e $A_1 B_3$ sono due coppie.

Volendo allora il polo della coppia B_2, C_3 arbitraria, basterà trovare il punto coniugato a C_3 in questa involuzione.

V. — Aggruppamenti prospettivi di 4° ordine di specie 0.

15. Sieno date quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 sghembe fra loro due a due, e si considerino gli ∞^3 piani dello spazio. Ognuno di questi piani π incontra le quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 in quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4, tali che tre di essi determinano il quarto. Questi ∞^3 gruppi di punti formano un $(A_0)_4$.

Essendo i, h, k, l gl'indici 1, 2, 3, 4 scritti in un ordine qualunque risulta che *in generale:*

Tre punti P_i, P_h, P_k sulle rette r_i, r_h, r_k individuano un punto P_l della r_l, che si dice *polo* del gruppo (P_i, P_h, P_k).

Due punti P_i, P_h delle r_i, r_h determinano su r_k, r_l un $(A_2)_2$, *polare* del gruppo (P_i, P_h).

Un punto P_i di r_i determina su r_h, r_k, r_l un $(A_1)_3$, *polare* di P_i.

Un gruppo di tre, due o un punto si dice *apolare* quando non verifica le condizioni precedenti.

16. *Sopra ogni terna di rette* r_i, r_h, r_k *esistono due fasci di gruppi apolari.*

Se s è una retta che incontra r_i, r_h, r_k, (ossia una generatrice della quadrica $r_i r_h r_k$) i tre punti $P_i = sr_i$, $P_h = sr_h$, $P_k = sr_k$ non individuano un solo, ma ∞^1 piani, e quindi tutti i punti della r_l. Dunque (P_i, P_h, P_k) è un gruppo apolare.

Similmente ogni piano π per r_l determina tre punti P_i', P_h', P_k', che formano una terna apolare, poichè ad esso corrisponde qualunque punto di r_l. Si ottiene così un secondo fascio di elementi. Dunque per ogni terna di r_i r_k r_h esistono due fasci di terne apolari.

I punti di ciascun fascio determinano sulle rette r_i, r_h, r_k tre punteggiate proiettive.

I due fasci di terne apolari hanno due gruppi comuni.

Infatti esistono due rette s', s'' che incontrano r_i, r_h, r_k, r_l. I piani $r_l s'$, $r_l s''$ determinano due gruppi del secondo fascio *apolare*, che appartengono anche al primo fascio.

Ponendo $r_i s' = O_i'$, $r_i s'' = O_i''$, i due gruppi di punti (O_1', O_2', O_3', O_4') $(O_1'', O_2'', O_3'', O_4'')$ godono delle seguenti proprietà.

Una coppia O_i', O_h' ha per polare l'aggruppamento singolare formato dai punti O_k', O_l'.

Un punto qualunque O_i' ha come polare un A_{P_3} singolare, che si spezza nei tre O_h', O_k', O_l'.

17. Esaminiamo ora qualche caso particolare.

I. Siano r_1, r_2, r_3, r_4 generatrici di una serie rigata. — Tutte le rette che si appoggiano a tre di esse, incontrano anche la quarta e sono le generatrici dell'altro sistema della quadrica.

In questo caso esiste un fascio di gruppi (O_1, O_2. O_3. O_4). che godono delle proprietà esposte nel § precedente.

I due fasci di terne apolari su r_i, r_h, r_k coincidono col fascio di terne O_i, O_h, O_k.

II. Se due rette r_i, r_h s'incontrano in un punto O_{ih}. le rette che si appoggiano a r_i, r_h, r_k sono quelle del fascio che ha per centro O_{ih} e per piano $\pi_k = O_{ik}\ r_k$, e quelle del fascio che ha per sostegno $\pi_{ih} = r_i\, r_h$ e per centro il punto $\pi_{ih}\, r_k$.

In questo caso la proiettività stabilita su r_i, r_h, r_k dai gruppi delle terne apolari è degenere.

Tutti i punti O_k di r_k hanno per corrispondente su r_i e r_h il punto O_{ih}. Tutti i punti di r_i hanno per corrispondente su r_k il punto $\pi_{ih}\, r_k$, su r_h il punto O_{ih} e il punto sulla proiezione da π_{ih}, r_k ecc.

Per le altre terne di rette r non esistono singolarità.

I due gruppi ($O_1'O_2'O_3'O_4'$) e ($O_1''O_2''O_3''O_4''$) sono dati dalla retta che passando per O_{ih} incontra r_k e r_l e dalla retta del piano π_{ih} che unisce i punti d'incontro di questa con r_k e r.

III. Se tre rette r_i, r_h, r_k passano per un punto O_{ihk} ma non stanno in un piano, esiste un fascio di rette (quelle che passano per O_{ihk} e incontrano r_l) che le incontrano tutte e quattro. Dunque il fascio di elementi ($O_1\, O_2\, O_3\, O_4$) è degenere, coincidendo sempre O_i, O_h, O_k con O_{ihk}.

IV. Se tre rette r_i. r_h, r_k giacciono in un piano π_l ma non passano per un punto, esistendo un fascio di rette, che incontrano le r_i. r_h. r_k, r_l, avente π_l per sostegno e $P_l = r_l\, \pi_l$ come centro. A tutti i punti di r_l corrisponde il medesimo A_{P_3} prospettivo sulle $r_i\, r_h\, r_k$.

Il fascio di elementi (O_1. O_2, O_3. O_4) è degenere coincidendo sempre O_l con P_l.

18. I gruppi di un $(A_0)_4$ corrispondono univocamente ai piani dello spazio. Da ciò discendono queste conseguenze.

1°. I piani di un fascio di piani determinano un *fascio di gruppi* (P_1. P_2. P_3, P_4) appartenenti all'$(A_0)_4$. I punti delle singole rette costituiscono quattro punteggiate proiettive.

Similmente i piani tangenti ad un cono quadrico, tangente alle r_1, r_2, r_3, r_4 determinano un fascio di gruppi appartenenti all'$(A_0)_4$. I singoli elementi generano punteggiate proiettive.

Siccome le rette sono ∞^4 e ogni punto dello spazio è vertice d'∞^1 coni quadrici tangenti alle quattro rette abbiamo:

Esistono due sistemi di ∞^4 fasci di gruppi appartenenti ad un A_{p_4}. *Li chiameremo rispettivamente di prima e seconda specie.*

2°. *I piani di una stella determinano una rete di gruppi di* A_{p_4}. *In un* A_{p_4} *esistono* ∞^3 *reti di gruppi.*

Un fascio di gruppi di prima specie ed una rete hanno in generale un sol gruppo comune.

Un fascio di gruppi di seconda specie ed una rete hanno in generale due gruppi comuni.

VI. — Aggruppamenti proiettivi di 4° ordine - Fasci.

19. Siano ora f_1, f_2, f_3, f_4 quattro forme qualunque di 1ª specie, e stabiliamo quattro proiettività fra esse e le quattro rette r_1, r_2, r_3, r_4 collegate da un $(A_0)_4$.

Anche fra gli elementi di f_1, f_2, f_3, f_4 viene stabilita una corrispondenza, per la quale tre elementi scelti ad arbitrio sulle f_i, f_h, f_k ne individuano uno su f_l: due elementi scelti su f_i, f_h individuano un A_{p_2} su $f_k\, f_l$ ecc. Si hanno dunque per i gruppi di elementi delle f_1, f_2, f_3, f_4 le stesse proprietà, che valgono per i gruppi dell'$(A_0)_4$ sulle rette r_1, r_2, r_3, r_4. Diremo che questi gruppi formano un aggruppamento proiettivo A_{p_4}.

Questi A_{p_4} godono di proprietà analoghe a quelle degli $(A_0)_4$ prospettivi, e presentano gli stessi casi particolari di singolarità e degenerazione.

20. Prescindendo ora da qualsiasi costruzione geometrica, definiamo l'aggruppamento proiettivo del 4° ordine nel modo seguente.

Si chiama aggruppamento proiettivo del 4° ordine, e s'indica col simbolo A_{p_4}, *la totalità dei gruppi* G_4 *di 4 elementi appartenenti a quattro forme di prima specie* f_1, f_2, f_3, f_4, *i quali soddisfano alle seguenti condizioni:*

1°. *I gruppi* G_3, *che con un elemento* P_i *di* f_i *formano un gruppo* G_4 *dell'*A_{p_4}, *costituiscono un aggruppamento proiettivo del 3° ordine, che si dice* POLARE *di* P_i.

2°. *I gruppi* G_2 *che con due elementi* P_i, P_h *di* f_i, f_h *formano un gruppo* G_4 *dell'*A_{p_4}, *costituiscono un aggruppamento proiettivo del 2° ordine, che si dice* POLARE *di* $P_i\, P_h$.

3°. *Esiste* (in generale) *un solo elemento* P_l *di* f_l *che con tre elementi* P_i, P_h, P_k *di* f_i, f_h, f_k *forma un gruppo dell'*A_{p_4}. P_l *si dice* POLARE *del gruppo* (P_i, P_h, P_k).

Le ultime due condizioni sono evidentemente conseguenze della prima.

Dimostreremo che ogni A_{p_4} di questa natura si può ricavare da uno prospettivo nel modo indicato nel § precedente.

21. *Per ogni elemento* P_i *di* f_i *esistono due coppie di elementi di* f_h, f_k *che con* P_i *formano un gruppo apolare per l'*A_{p_4}.

Sia dato un A_{p_4} su quattro forme f_1, f_2, f_3, f_4. Due elementi P'_4, P''_4 di f_4 determinano due A_{p_3} che ammettono ∞^1 elementi comuni.

Infatti preso un punto arbitrario P_3 di f_3, le coppie P'_4, P_3 e P''_4, P_3 determinano su f_1, f_2 due A'_{p_2}, A''_{p_2} che hanno (in generale) due gruppi comuni A_1, A_2 e B_1, B_2. Ne segue che $A_1A_2P_3P'_4$ e $B_1B_2P_3P''_4$ sono gruppi di A_{p_4}, e quindi il gruppo $A_1A_2P_3$ è apolare. Lo stesso può dirsi di $B_1B_2P_3$.

22. *Un aggruppamento proiettivo del 4º ordine A_{p_4} è individuato, quando si conoscono gli aggruppamenti A'_{p_3}, A''_{p_3} polari di due elementi P'_1, P''_1 e un suo gruppo* (P_1, P_2, P_3, P_4).

L'A_{p_3} polare di P_h è interamente determinato dai dati suddetti. Infatti esso deve contenere i gruppi G_3 formati da P'_1 coi gruppi dell'A'_{p_2} polare di P_h rispetto ad A'_{p_3}, da P''_1 coi gruppi dell'A''_{p_2} polari di P_h rispetto ad A''_{p_3} e il gruppo (P_i, P_k, P_l) (§ 11).

Parimente è determinato l'aggruppamento polare di un punto arbitrario M_h di f_h. Infatti esso deve contenere i gruppi G_3 formati da P'_1 o P''_1 con i gruppi dell'A'_{p_2} o A''_{p_2} polari di M_h rispetto ad A'_{p_3}, A''_{p_3} ed un gruppo formato da P_k con un gruppo G_2 polare di M rispetto all'A_{p_3} polare di M_k.

Infine è facile vedere che è determinato anche l'aggruppamento polare di un punto M_i di f_i. Segue da ciò.

Gli aggruppamenti proiettivi del 4º ordine sono ∞^{15}.

Infatti per determinare A'_{p_3}, A''_{p_3} e il gruppo $(P_1P_2P_3P_4)$ occorrono rispettivamente 7, 7, 1 condizioni, poichè dei quattro punti P_1, P_2, P_3, P_4 tre sono arbitrari.

23. Dato un A_{p_4}, tutti gli aggruppamenti polari di f_4, per es., si dice che costituiscono un *fascio.*

I gruppi comuni a due aggruppamenti di un fascio sono i gruppi apolari di f_1, f_2, f_3, ed appartengono anche a tutti gli altri aggruppamenti del fascio. Dunque tutti gli aggruppamenti di un fascio hanno in comune gli ∞' gruppi di due fasci.

Esiste uno ed un sol fascio che contiene due aggruppamenti A'_{p_3}, A''_{p_3} dati ad arbitrio

La dimostrazione di questo teorema è identica a quella del § 12.

In altre parole: due A'_{p_3}, A''_{p_3} individuano un fascio. Se due fasci hanno due aggruppamenti comuni coincidono.

24. *Ogni A_{p_4} si può trasformare in uno prospettivo* $(A_0)_4$.

Sia dato un A_{p_4} su quattro rette f_1, f_2, f_3, f_4; esso determina un fascio di A_{p_3} su f_1, f_2, f_3. Consideriamo due aggruppamenti A_{p_3}, A'_{p_3} polari di due punti U_4, V_4, e siano (H_1, H_2) (H'_1, H'_2) le coppie apolari per A_{p_3} e (K_1, K_2) (K'_1, K'_2) le coppie apolari per A'_{p_3} su f_1, f_2.

Scelto un punto O su H_1H_2 ed uno O_1 su K_1K_2, sia r_3 la retta comune ai piani $OH'_1H'_2$, $O_1K'_1K'_2$. Si possono trasformare A_{p_3}, A'_{p_3} in due prospettivi su f_1, f_2, r_3 rispetto ai centri O, O_1 (§ 13).

Considerando ora l'$(A_0)_4$ prospettivo su $f_1, f_2, r_3, r_4 = (OO_1)$, questo individua su f_1, f_2, r_3 un fascio di A_{p_3}, che ha col precedente due aggruppamenti comuni. I due fasci dunque coincidono, e quindi tutti gli aggruppamenti A_{p_3} del fascio precedentemente considerato su f_1, f_2, r_3 sono prospettivi.

Sia S_1, S_2, S_3 un gruppo polare di un punto S_4 di f_4. Allora stabilita una proiettività fra f_4 e r_4 in guisa che sia

$$(U_4 V_4 S_4) \barwedge (O O_1 S'_4)$$

essendo S'_4 il punto comune a r_4 ed al piano $S_1 S_2 S'_3$ (S'_3 corrispondente di S_3 su r_3) l'A_{p_4} si trasforma nell'$(A_0)_4$ prospettivo.

25. *In ogni* A_{p_4} *esistono due gruppi* (H_1, H_2, H_3, H_4), (K_1, K_2, K_3, K_4) *tali che tre punti qualunque di un gruppo formano una terna apolare.*

Trasformato A_{p_4} in uno $(A_0)_4$ prospettivo, i gruppi suddetti sono quelli determinati dalle rette che si appoggiano sui sostegni.

Chiameremo i gruppi suddetti *gruppi base.*

Per mezzo del teorema precedente si può semplificare la trasformazione di un A_{p_4} in uno prospettivo $(A_0)_4$, quando si conoscano i gruppi base.

Sieno (H_1, H_2, H_3, H_4), (K_1, K_2, K_3, K_4) i gruppi base, (R_1, R_2, R_3, R_4), un gruppo appartenente ad A_{p_4}.

Scelte quattro rette sghembe due a due r_1, r_2, r_3, r_4, sieno ($H'_1 H'_2, H'_3, H'_4$ e K'_1, K'_2, K'_3, K'_4) i punti d'incontro di esse colle corde comuni e R'_1, R'_2, R'_3, R'_4 i punti d'incontro con un piano arbitrario.

Stabilite fra f_i ed r_i quattro proiettività in guisa che sia

$$(H_i K_i R_i) \barwedge (H'_i K'_i R'_i)$$

si trasforma l'A_{p_4} nell'$(A_0)_4$ prospettivo.

VII. — Involuzioni di 4° ordine.

26. Consideriamo un A_{p_4} su quattro rette f_1, f_2, f_3, f_4, e supponiamo che f_3 e f_4 coincidano.

Prendiamo una coppia di punti P_1, P_2 su f_1, f_2, e siano H_3, H_4 e K_3, K_4 le due coppie che con P_2 formano un gruppo apolare per f_2, f_3, f_4. Affinchè l'A_{p_4} determinata da P_1, P_2 sia involutoria, qualunque sia P_1, è necessario e sufficiente che coincidano H_3, K_4 e H_4, K_3. Se questa condizione è verificata, essa è verificata anche supponendo che P_2 vari sulla f_2. Infatti H_3, H_4, K_3, K_4 percorrono su f_3 punteggiate proiettive a P_2, e quindi fra loro, e siccome una coppia si corrisponde in doppio modo, tutte si corrispondono in doppio modo.

In simil guisa, supposto che f_1, f_2, f_3, f_4 coincidano tutte, si può stabilire la condizione affinchè tutte le proiettività su $f_i f_k$ determinate da due punti di f_0 siano involuzioni.

Allora diremo che l'A_{p_4} è un'*involuzione* I_4.

Bibliografia.

AUGUST. — *De superficibus tertii ordinis;* Diss. inaug. — Berolini 1862.

SCHUBERT. — *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden,* Math-Ann. Bd XVII.

Le Paige — *Mémoire sur quelques applications de la théorie de formes algebriques;* Mémoires couronnés publiés par l'Acad. R. des sciences de Belgiques. T. XLII; 1859.

— — *Note sur l'hanographie des troisieme ordre* Bulletin de l'Acad. de Belgique. III série. T. V. 1883.

Castelnuovo. — *Studio sull'omografia di seconda specie;* Atti del R. Ist. Veneto. Serie VI. T. V.

Thieme. — *Die definition der geometrischen Gebilde durch Construction ihrer Polarsysteme.* — Zeitschrift für Mat. und Phisik, Bd. 24.

Wiener. — *Rein geometrischen Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punhtgruppen auf der Geraden;* Darmstadt 1885.

Schumacher. — *Die Punktsysteme auf der Geraden und ihre Anwendung zur Erzeugung der Algebraischen ebenen Curven;* Journal für die reine und Angewandte Mat. T. 110 e 111 Berlin 1892-1893.

Benno Klein. — *Theorie der trilinear-simmetrischen Elementargebilde.* Marburg. Elvert'sche Buchandlung. 1881.

— — *Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde;* Theil I. *Das Tripelnetz.* Ann. di Mat. S. II. T. 18. Milan 1890. Theil II. *Das Tripelgebiet.* Ann. di Mat. S II. T. 19. Milano 1891.

De Paolis. — *Dei gruppi geometrici e delle corrispondenze che si possono stabilire fra i loro elementi;* Memorie della società dei XL. Serie III. T. VII. 1889.

— — *Le corrispondenze proiettive nelle forme geometriche fondamentali di 1ª specie;* Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino. Serie II. T. XLII. 1892.

— — *Teoria delle corrispondenze proiettive e degli aggruppamenti proiettivi nelle forme fondamentali a due dimensioni;* Rend. della R. Acc. dei Lincei. Serie V. Volume III. 1894.

G. Lazzeri.

NOTA SULLA CONCOIDE DI DE SLUSE (*)

Sieno O un punto e d una retta fissa; una retta mobile, passante per O incontra d in P; si prendano su OP due segmenti eguali PM e PM' tali che sia

$$\mathrm{OP} \times \mathrm{MP} = \mathrm{OP} \times \mathrm{PM'} = \mathrm{K}^2 \,(\text{cost.});$$

il luogo dei punti M e M' si compone di due *concoidi* dette di *de Sluse* (si suppone M posto fra P ed O).

Indichiamo con $\mathrm{OA} = a$ la distanza di O dalla retta d; prendiamo O per polo ed OA per asse polare.

L'equazione polare della concoide, luogo di M, sarà

$$\frac{a}{\cos\theta}\left(\frac{a}{\cos\theta} - r\right) = k^2,$$

(*) Questa nota mi è stata suggerita dalla generalizzazione data dal sig. Cardoso-Laynes, del teorema della quistione 1897 dell'*Intermédiaire des mathématiciens.*

ossia

$$(1)\qquad r=\frac{a^2-k^2\cos^2\theta}{a\cos\theta}.$$

L'equazione polare della concoide luogo di M' è analogamente

$$\frac{a}{\cos\theta}\left(r-\frac{a}{\cos\theta}\right)=k^2,$$

ossia

$$(2)\qquad r=\frac{a^2+k^2\cos^2\theta}{a\cos\theta}.$$

Le equazioni (1), (2) in coordinate cartesiane divengono

$$(3)\qquad ax(x^2+y^2)=(a^2-k^2)x^2+a^2y^2$$

$$(4)\qquad ax(x^2+y^2)=(a^2+k^2)x^2+a^2y^2.$$

Queste due concoidi, che possono chiamarsi *gemelle*, sono cubiche circolari unicursali, dotate di asse di simmetria ed hanno ambedue per assintoto la retta d.

La curva (4), qualunque siano i valori di a e di k ha sempre la stessa forma; ha un vertice con la tangente parallela a d ed un punto isolato in O.

La curva (3) ha forma analoga alla curva (4), quando è $k<a$; se è invece $k=a$, essa diviene la *cissoide retta* avente OA per tangente di regresso; se poi è $k>a$, allora ha un punto doppio e un vertice. In quest'ultimo caso si ha una curva del genere della strofoide retta. D'altra parte per $k^2=2a^2$ la curva (3) è effettivamente una *strofoide retta*.

Le due equazioni (3) e (4) si possono scrivere

$$(5)\qquad y^2=x^2\left[\frac{\left(a-\frac{k^2}{a}\right)-x}{x-a}\right].$$

$$(6)\qquad y^2=x^2\left[\frac{\left(a+\frac{k^2}{a}\right)-x}{x-a}\right].$$

Le due concoidi (5) e (6) hanno dunque un'equazione del tipo

$$(7)\qquad y=x\sqrt{\frac{\alpha-x}{x-\beta}}.$$

Osservazione. — Le *concoidi di de Sluse* possono anche definirsi come *podarie di una parabola rispetto a un punto del suo asse.*

Ricerchiamo alcune formule e proprietà delle curve (7) per applicarle poi alle curve (5) e (6), facendo

$$(8)\qquad \alpha=a\mp\frac{k^2}{a}\quad \beta=a.$$

I. *Calcolo dell'area finita compresa fra la curva* (7) *ed il suo assintoto.* Si può porre

$$\frac{\alpha-x}{x-\beta}=\tan^2\varphi;$$

da cui

$$x = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$y = x \tan \varphi = \alpha \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{\beta \operatorname{sen}^3 \varphi}{\cos \varphi}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = 2(\beta - \alpha) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi.$$

Ma il differenziale dell'area U, racchiusa fra la curva l'asse delle x e due ordinate, ha per espressione

$$d\mathrm{U} = y\,dx = 2(\beta - \alpha)[\alpha \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi + \beta \operatorname{sen}^4 \varphi]\,d\varphi.$$

Se integriamo fra $x = \beta$ e $x = \alpha$, cioè fra $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi = 0$, si ha per l'area totale

$$\mathrm{U} = 4(\alpha - \beta)\left[\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi + \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi\right].$$

Ma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \varphi \cos^2 \varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{16} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

dunque

$$\mathrm{U} = \frac{\pi(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)}{4}. \tag{9}$$

S'intende bene che quando la curva (7) ha un punto doppio, l'area U indica la differenza fra l'area della *foglia* e l'area compresa fra il resto della curva e l'assintoto, avendo queste due aree segno contrario.

Se è $\alpha = -3\beta$, l'equazione (7) diviene

$$y = x\sqrt{\frac{x + 3\beta}{\beta - x}}. \tag{10}$$

Questa è l'equazione della *trisettrice di Mac-Laurin*, e siccome si ha in tal caso $\mathrm{U} = 0$, resulta che *l'area della foglia della trisettrice di Mac-Laurin è equivalente all'area compresa fra il resto della curva e il suo assintoto.*

Sostituendo i valori di α e β dati dalla (8) nella (9) si ha

$$\mathrm{U} = \frac{\pi k^2}{4a^2}(k^2 \mp 4a^2). \tag{11}$$

Le due concoidi (5) e (6) hanno dunque rispettivamente per area

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\pi k^2}{4a^2}(k^2 - 4a^2) \quad , \quad \mathrm{U}_2 = \frac{\pi k^2}{4a^2}(4a^2 + k^2). \tag{12}$$

La prima mostra che se è $k < 2a$, *l'area compresa fra le due concoidi che sono assintotiche l'una all'altra è* $2\pi k^2$.

Se è $k > 2a$ quest'area è $\frac{\pi k^4}{2a^2}$.

Se è $k=2a$, $U_1=0$, la curva (5) è una *trisettrice di Mac-Laurin.* L'area compresa fra questa curva e la sua gemella è $8\pi a^2$.

Se è $k=a$, la (5) è una *cissoide retta;* la sua area e quella della curva gemella sono respettivamente

$$U_1=\frac{3\pi a^2}{4}\quad,\quad U_2=\frac{5\pi a^2}{4}.$$

L'area compresa fra le due curve è dunque $2\pi a^2$.

Se è $k=a\sqrt{2}$, la (5) è una *strofoide retta;* la sua area e quelle delle curve gemelle sono respettivamente

$$U_1=\pi a^2\quad,\quad U_2=3\pi a^2.$$

L'area compresa fra le due curve è $4\pi a^2$.

II. *Equazione della tangente e della normale in un punto della curva* (7).

L'equazione (7) può scriversi

$$x(x^2+y^2)=\alpha x^2+\beta y^2.$$

Ponendo $y=tx$, si ha per le coordinate di un punto, in funzione di t:

$$x=\frac{\alpha+\beta t^2}{1+t^2}\quad,\quad y=\frac{\alpha t+\beta t^3}{1+t^2}. \tag{13}$$

L'equazione della tangente in questo punto è

$$(X-x):\frac{dx}{dt}=(Y-y):\frac{dy}{dt}. \tag{14}$$

Ma

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2(\beta-\alpha)t}{(1+t^2)^2}\quad,\quad\frac{dy}{dt}=\frac{\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)}{(1+t^2)^2}; \tag{15}$$

quindi sostituendo con i valori (13) e (15) nella (14), si trova per l'equazione della tangente

$$X\{\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)\}+2y(\alpha-\beta)t=(\alpha+\beta t^2)^2. \tag{16}$$

L'equazione della normale nel medesimo punto (13) è

$$(X-x)\frac{dx}{dt}+(Y-y)\frac{dy}{dt}=0$$

ossia

$$2(\beta-\alpha)tX+Y[\alpha(1-t^2)+\beta(3t^2+t^4)]=t(\alpha+\beta t^2)[\beta(t^2+2)-\alpha]. \tag{17}$$

Le formole (16) e (17), nelle quali t non è altro che $\tan\varphi$, usata precedentemente, sono di assai facile applicazione.

Nei casi particolari seguenti si ha:

1°. $\alpha=0$ *(Cissoide retta).*
Tangente $X(3t^2+t^4)-2tY=\beta t^4$.
Normale $2tX+Y(3t^2+t^4)=\beta t^3(t^2+2)$.

2°. $\beta=-\alpha$ *(Strofoide retta).*
Tangente $X(1-4t^2-t^4)+4tY=\alpha(1-t^2)^2$.
Normale $4tX-Y(1-4t^2-t^4)=-\alpha t(1-t^2)(t^2+3)$.

3°. $\alpha = -3\beta$ *(Trisettrice di Mac-Laurin).*
Tangente $X(t^4 + 6t^2 - 3) - 8tY = \beta(t^2 - 3)^2$.
Normale $8tX + Y(t^4 + 6t^2 - 3) = \beta t(t^2 - 3)(t^2 + 5)$.

III. *Da un punto* (X, Y) *si conducano le quattro tangenti e si abbassino le cinque normali alla cubica* (7); *trovare i coefficienti angolari delle rette che congiungono l'origine* O *ai punti di contatto delle tangenti ed ai piedi delle normali.*

Le equazioni (16) e (17), ordinate rispetto a t, dànno:

$$\beta t^4(X-\beta) + t^2[X(3\beta-\alpha) - 2\alpha\beta] + 2(\alpha-\beta)tY + \alpha(X-\alpha) = 0. \tag{18}$$

$$\beta^2 t^5 - 3Yt^4 + 2\beta^2 t^3 - Y(3\beta-\alpha)t^2 + \{\alpha(2\beta-\alpha) - 2(\beta-\alpha)X\}t - \alpha Y = 0. \tag{19}$$

Se indichiamo con t_1, t_2, t_3, t_4 i coefficienti angolari dati dalla (18) e con T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 quelli dati dalla (19), avremo:

$$\Sigma t_1 = 0 \quad , \quad \Sigma t_1 t_2 = \frac{X(3\beta - \alpha) - 2\alpha\beta}{\beta(X - \beta)}, \tag{20}$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = \frac{2(\beta - \alpha)Y}{\beta(x - \beta)} \quad , \quad t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{\alpha(X - \alpha)}{\beta(Y - \beta)}.$$

$$\Sigma T_1 = \frac{Y}{\beta} \quad , \quad \Sigma T_1 T_2 = 2 \quad , \quad \Sigma T_1 T_2 T_3 = \frac{Y(3\beta - \alpha)}{\beta^2}, \tag{21}$$

$$\Sigma T_1 T_2 T_3 T_4 = \frac{\alpha(2\beta - \alpha) - 2(\beta - \alpha)X}{\beta^2} \quad , \quad T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 = \frac{\alpha Y}{\beta^2}.$$

Ne derivano moltissime proprietà di luoghi geometrici come i seguenti:

1°. Si ha $\Sigma t_1 = 0$, $\Sigma T_1 T_2 = 2$.

2°. Il luogo dei punti (X, Y) tali che le espressioni $\Sigma t_1 t_2$, $\Sigma t_1 t_2 t_3$, $\Sigma t_1 t_2 t_3 t_4$, ΣT_1, $\Sigma T_1 T_2$, $\Sigma T_1 T_2 T_3$, $\Sigma T_1 T_2 T_3 T_4$, $T_1 T_2 T_3 T_4 T_5$ sieno costanti, sono linee rette.

3°. Il luogo dei punti tali che sia

$$t_1 t_2 t_3 t_4 + T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 = \text{cost.}$$

è un' *iperbole equilatera.*

Per mezzo delle (20) e (21) si potrebbero trovare moltissimi altri luoghi geometrici analoghi costituiti da coniche.

IV. *Si conduce per ogni punto* M *della curva* (7) *la retta* OM *che incontra l'assintoto in* P. *La perpendicolare condotta in* P *all'assintoto incontra la normale in* M *in un punto* N *e la tangente in* M *in un punto* T. *Il luogo del punto* N *è una* parabola; *quello del punto* T *è una* quintica.

La retta OP, avendo per equazione $Y = tX$, facendo $X = \beta$, si ha per l'ordinata del punto P il valore $t\beta$. L'equazione della retta condotta in P perpendicolarmente all'assintoto è dunque

$$Y = t\beta. \tag{22}$$

Il luogo del punto N si ottiene eliminando t fra le equazioni (17) e (22), e si ha

$$2(\beta - \alpha)\frac{X}{\beta} + \frac{Y^2}{\beta^2}(3\beta - \alpha) + \frac{Y^4}{\beta^3} + \alpha = \frac{(\alpha\beta + Y^2)}{\beta^2}\left[\frac{Y^2}{\beta} + (2\beta - \alpha)\right],$$

ovvero, dopo fatte le riduzioni e dopo aver soppresso il fattore $(\beta-\alpha)$:

$$Y^2+2\beta X-\alpha\beta=0 \tag{23}$$

che rappresenta una parabola avente per asse Ox, ed il cui vertice ha per coordinate

$$X=\frac{\alpha}{2} \quad , \quad Y=0.$$

Il luogo del punto T si ottiene analogamente, eliminando t fra le (16) e (22). Si ha così la *quintica:*

$$X[Y^4+\beta(3\beta-\alpha)\,Y^2+\alpha\beta^3]=\beta[Y^4+2\beta^2Y^2+\alpha^2\beta^2]. \tag{24}$$

Le espressioni racchiuse nelle due parentesi quadre sono divisibili l'una per l'altra se si ha

$$\frac{3\beta-\alpha}{2\beta}=\frac{1}{\alpha}=1 \quad \text{o} \quad \alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2=0 \quad , \quad (\alpha-\beta)(\alpha-2\beta)=0.$$

È dunque soltanto per $\alpha=\beta$, cioè, quando la cubica (7) si decompone in tre rette, che l'equazione (24) si riduce alla retta $x=\beta$.

Osservazione. — La parabola (23), relativa alla concoide (5), ha per equazione

$$Y^2+2aX-a^2+k^2=0 \tag{25}$$

La parabola analoga relativa alla concoide (6) ha per equazione

$$Y^2+2aX-a^2-k^2=0. \tag{26}$$

Le quintiche (24) relative alle concoidi (5) e (6) hanno rispettivamente per equazioni

$$XY^4+aXY^2\left(2a+\frac{k^2}{a}\right)+a^3X\left(a-\frac{k^2}{a}\right)=aY^4+2a^3Y^2+a^3\left(a-\frac{k^2}{a}\right)^2, \tag{27}$$

$$XY^4+aXY^2\left(2a-\frac{k^2}{a}\right)+a^3X\left(a+\frac{k^2}{a}\right)=aY^4+2a^3Y^2+a^3\left(a+\frac{k^2}{a}\right)^2. \tag{28}$$

Supponendo che k vari mentre l'assintoto comune alle due concoidi (5) e (6) rimane fisso, si trova per il luogo dei punti d'incontro delle quintiche (27) e (28) la cubica

$$X(Y^2-a^2)+2a^3=0. \tag{29}$$

V. *Luogo dei punti d'incontro della tangente in* M *alla concoide* (5) *con la tangente in* M' *alle concoidi gemelle* (6).

L'equazione (16), dando ad α, β i valori dati dalla (8), ed avendo k^2 successivamente i segni $-$ e $+$, diviene

$$X\left[a(1+t^2)^2-\frac{k^2}{a}(1-t^2)\right]-\frac{2Yk^2t}{a}=\left[a(1+t^2)-\frac{k^2}{a}\right]^2$$

$$X\left[a(1+t^2)^2+\frac{k^2}{a}(1-t^2)\right]+\frac{2Yk^2t}{a}=\left[a(1+t^2)+\frac{k^2}{a}\right]^2.$$

Queste due equazioni, risolute rispetto ad X ed Y, dànno per le coordinate di un punto del luogo

$$X = a + \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2} \quad , \quad X(1-t^2) + 2tY = 2a(1+t^2).$$

Facendo $t = \tan\varphi$, le precedenti equazioni divengono

$$(X-a)\,a^3 = K^4 \cos^4\varphi \quad , \quad X\cos 2\varphi + Y \operatorname{sen} 2\varphi = 2a$$

Resta ora da eliminare φ fra le due ultime equazioni: la prima di esse dà

$$1 + \cos 2\varphi = \frac{2a}{k^2}\sqrt{a(X-a)}.$$

Sostituendo il valore di $\cos 2\varphi$ nella seconda e rendendo razionale l'equazione ottenuta, si trova per l'equazione del luogo

$$\left[(X^2+Y^2)\left\{\frac{4a^3}{k^4}(X-a)+1\right\} + 4aX + 4a^2 - Y^2\right]^2 =$$
$$= \frac{16a^3}{k^4}(X-a)(X^2+Y^2+2aX)^2.$$

Questa rappresenta una *sestica unicursale*, che ha un punto doppio e due assintoti.

Le coordinate di un punto della curva, in funzione di φ, sono

$$(30) \qquad X = a + \frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi \quad , \quad Y = \frac{2a - a\cos 2\varphi - \frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi\cos 2\varphi}{\operatorname{sen} 2\varphi}.$$

Per $\varphi = 0$ si ha

$$X = a + \frac{k^4}{a^3} \quad , \quad Y = \infty.$$

Per $\varphi = \frac{\pi}{2}$ si ha

$$X = a \qquad , \qquad Y = \infty.$$

La curva ha dunque due assintoti paralleli $X = a + \frac{K^4}{a^3}$ e $X = a^3$. Essa è costituita da due rami che si tagliano in un punto sull'asse $Y=0$.

Si può facilmente determinare l'area della curva (30). Si ha

$$\frac{dU}{d\varphi} = Y \cdot \frac{dX}{d\varphi}.$$

Ma

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{4k^4}{a^3}\cos^3\varphi \operatorname{sen}\varphi,$$

dunque

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{2k^4}{a^3}\cos^2\varphi\left[\frac{k^4}{a^3}\cos^4\varphi\cos 2\varphi + a\cos 2\varphi - 2a\right],$$

ossia

$$\frac{dU}{d\varphi} = \frac{2k^4}{a^3}\left[\frac{2k^4}{a^3}\cos^8\varphi - \frac{k^4}{a^3}\cos^6\varphi + 2a\cos^4\varphi - 3a\cos^2\varphi\right].$$

L'area totale U compresa fra la curva e i suoi assintoti è dunque

$$U = \frac{4k^4}{a^3}\left[\frac{2k^4}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \varphi d\varphi - \frac{k^4}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi + \right.$$

$$\left. + 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi - 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi\right].$$

Ma

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32} \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{35\pi}{256},$$

dunque

$$U = \frac{3\pi k^4 (5k^4 - 16a^4)}{32a^6}.$$

Se è $k = \frac{2a}{\sqrt[4]{5}}$, è $U = 0$, cioè l'area compresa fra la curva e uno degli assintoti è equivalente all'area compresa fra il resto della curva e l'altro assintoto.

Se è $k = a$ la curva (5) è una cissoide retta. La (30) è allora una curva analoga alla curva gemella (6) avente lo stesso vertice e lo stesso assintoto di questa. In tal caso si ha

$$U = \frac{33\pi a^2}{32}.$$

VI. *Luogo dei punti d'incontro della normale in* M *alla concoide* (5) *con la normale in* M' *alla concoide gemella* (6).

L'equazione (17), dando ad α, β i valori dati dalla (8), e k avendo successivamente i segni $-$ e $+$, diviene

$$2tX\frac{k^2}{a} + Y\left[a(1+t^2)^2 - \frac{k^2}{a}(1-t^2)\right] = t\left[a^2(t^2+1)^2 - \frac{k^4}{a^2}\right],$$

$$-2tX\frac{k^2}{a} + Y\left[a(1+t^2)^2 + \frac{k^2}{a}(1-t^2)\right] = t\left[a^2(t^2+1)^2 - \frac{k^4}{a^2}\right];$$

da cui, risolvendo rispetto a X e Y:

(31) $$Y = t\left[a - \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2}\right].$$

(32) $$X = \frac{Y(1-t^2)}{2t} = \frac{(1-t^2)}{2}\left[a - \frac{k^4}{a^3(1+t^2)^2}\right].$$

Dalla (32) si deduce

(33) $$4t^2X^2 = Y^2[(1+t^2)^2 - 4t^2]$$

$$4t^2(X^2+Y^2) = Y^2(1+t^2)^2,$$

e sostituendo il valore

$$\frac{1}{(1+t^2)^2}=\frac{Y^2}{4t^2(X^2+Y^2)}$$

nella (31), si ha

$$Y=at-\frac{k^4Y^2}{4a^3(X^2+Y^2)t},$$

ossia

$$at^2-tY-\frac{k^4Y^2}{4a^3(X^2+Y^2)}=0.$$

Eliminando t fra questa e l'equazione

$$t^2Y+2tX-Y=0,$$

si ha per l'equazione del luogo proposto:

$$8a^3(X^2+Y^2)(Y^2+2aX)[2a^3(X^2+Y^2)+k^4X]=[k^4Y^2-4a^4(X^2+Y^2)]^2.$$

Questa rappresenta una *sestica bicircolare* ed unicursale con un punto quadruplo nell'origine.

Per $Y=0$ si ha $X=0$, $X=\frac{a^4-k^4}{2a^3}$ (punto doppio).

Per $X=0$ si ha $Y=0$, $Y=\frac{k^4-4a^4}{4a^3}$.

Gli assintoti paralleli all'asse delle x vanno a distanza infinita, cioè la curva ha due rami parabolici.

Se $k=a$, la (5) è una cissoide retta e la sestica ha una cuspide in O.

E. N. Barisien.

Sulle leggi operative dell'Aritmetica

Già da qualche anno nei libri di aritmetica proposti per le scuole secondarie (*) vediamo adottata la massima di definire le operazioni aritmetiche sopra i numeri interi mediante le così dette *leggi di formazione* e di dimostrare poi rigorosamente le proprietà caratteristiche di dette operazioni eliminando qualsiasi aiuto intuitivo, qualsiasi deduzione che non sia logica conseguenza delle leggi di formazione e delle proprietà precedentemente dimostrate.

Mi sembra però che tale scopo si potrebbe più facilmente e sicuramente conseguire col simbolismo di cui ora dò un cenno: simbo-

(*) P. Gazzaniga, *Libro d'aritmetica e d'algebra elementare*, terza edizione. Padova, 1900.

lismo che, oltre a mettere meglio in luce l'essenza delle leggi di formazione e le analogie fra le varie operazioni, mi sembra possa essere utile anche per rendere più difficile l'incosciente ricorso ad aiuti intuitivi, per dare una più intima conoscenza del meccanismo delle operazioni, per aprire eventualmente la via ad una teorica generale delle operazioni stesse.

§ I.

1. Sia data la *successione naturale dei num.*: 1, 2, 3, ..., a, ... ed indichiamo col simbolo a_s il *successivo* del numero a.

2. Se due scritture A e B indicano le stesso numero, si dice che A *eguale a* B e si scrive: A = B.

3. Da A = B e B = C possiamo dunque concludere che A = C. Se una scrittura A indicante un numero a fa parte di una scrittura C indicante un numero c, si intende che in C venga posto a in luogo di A; quindi, se A = B e D si ottiene da C colla semplice sostituzione di A con B, è necessariamente C = D. Invece poi di: " $A_1 = A_2, A_2 = A_3, \dots, A_i = A_{i_s}$ *e quindi* $A_1 = A_{i_s}$ " si scrive compendiosamente: " $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{i_s}$ ".

4. Indichiamo ora col simbolo: $f_1(a, b)$ il numero che si ottiene dai numeri dati a e b mediante la seguente *legge di formazione*:

$$f_1(a, 1) = a_s \quad , \quad f_1(a, b_s) = (f_1(a, b))_s.$$

Indichiamo poi successivamente coi simboli:

$$f_2(a, b),\ f_3(a, b), \dots, f_{i_s}(a, b), \dots$$

i numeri ottenuti colle *leggi di formazione*:

$$\begin{array}{ll} f_2(a, 1) = a \quad , & f_2(a, b_s) = f_1(f_2(a, b), a); \\ f_3(a, 1) = a \quad , & f_3(a, b_s) = f_2(f_3(a, b), a); \\ \dots\dots & \dots\dots\dots ; \\ f_{i_s}(a, 1) = a \quad , & f_{i_s}(a, b_s) = f_i(f_{i_s}(a, b), a); \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \text{(*)} \end{array}$$

5. Dimostriamo le *principali proprietà di tali operazioni*.

(I) $$f_1(f_1(a, b), c) = f_1(a, f_1(b, c)).$$

Per $c = 1$ essa è vera perchè:

$$f_1(f_1(a, b), 1) = (f_1(a, b))_s = f_1(a, b_s) = f_1(a, f_1(b, 1));$$

ammessa per $c = x$ essa è vera anche per $c = x_s$ perchè:

$$f_1(f_1(a, b), x_s) = (f_1(f_1(a, b), x))_s = (f_1(a, f_1(b, x)))_s = \\ = f_1(a, (f_1(b, x))_s) = f_1(a, f_1(b, x_s));$$

essa è dunque vera sempre.

(II) $$f_1(a, b) = f_1(b, a).$$

(*) È ovvio notare l'identità dei simboli: a_s, $f_1(a, b)$, $f_2(a, b)$, $f_3(a, b)$ rispettivamente coi noti simboli: $a + 1$, $a + b$, $a \cdot b$, a^b.

Per $a=b=1$ essa è evidente; ammessa per $a=1$ e $b=x$ essa è vera anche per $a=1$ e $b=x_s$ perchè:

$$f_1(1, x_s) = (f_1(1, x))_s = (f_1(x, 1))_s = (x_s)_s = f_1(x_s, 1);$$

essa è dunque vera sempre per $a=1$; ammessa poi per $a=y$ essa è vera anche $a=y_s$ perchè:

$$f_1(y_s, b) = f_1(f_1(y, 1), b) = f_1(y, f_1(1, b)) = f_1(y, f_1(b, 1)) =$$
$$= f_1(f_1(y, b), 1) = f_1(f_1(b, y), 1) = f_1(b, f_1(y, 1)) = f_1(b, y_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(III) $$f_2(f_1(a, b), c) = f_1(f_2(a, c),\ f_2(b, c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_2(f_1(a, b), 1) = f_1(a, b) = f_1(f_2(a, 1), f_2(b, 1));$$

ammessa poi per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_2(f_1(a, b), x_s) = f_1(f_2(f_1(a, b), x), f_1(a, b)) = f_1(f_1(f_2(a, x), f_2(b, x)), f_1(a, b)) =$$
$$= f_1(f_2(a, x), f_1(f_2(b, x), f_1(b, a))) = f_1(f_2(a, x), f_1(f_1(f_2(b, x), b), a)) =$$
$$= f_1(f_2(a, x), f_1(a, f_2(b, x_s))) = f_1(f_1(f_2(a, x), a), f_2(b, x_s)) = f_1(f_2(a, x_s), f_2(b, x_s));$$

essa è dunque vera sempre.

(IV) $$f_2(a, b) = f_2(b, a).$$

Per $a=b=1$ essa è evidente; ammessa per $a=1$ e $b=x$ essa è vera anche per $a=1$ e $b=x_s$ perchè:

$$f_2(1, x_s) = f_1(f_2(1, x), 1) = (f_2(x, 1))_s = x_s = f_2(x_s, 1);$$

essa è dunque vera sempre per $a=1$; ammessa poi per $a=y$ essa è vera anche per $a=y_s$ perchè:

$$f_2(y_s, b) = f_2(f_1(y, 1), b) = f_1(f_2(y, b), f_2(1, b)) =$$
$$= f_1(f_2(b, y), f_2(b, 1)) = f_1(f_2(b, y), b) = f_2(b, y_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(V) $$f_2(a, f_1(b, c)) = f_1(f_2(a, b), f_2(a, c)).$$

Infatti:

$$f_2(a, f_1(b, c)) = f_2(f_1(b, c), a) = f_1(f_2(b, a), f_2(c, a)) = f_1(f_2(a, b), f_2(a, c)).$$

(VI) $$f_2(a, f_2(b, c)) = f_2(f_2(a, b), c).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_2(a, f_2(b, 1)) = f_2(a, b) = f_2(f_2(a, b), 1);$$

ammessa poi per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_2(a, f_2(b, x_s)) = f_2(a, f_1(f_2(b, x), b)) = f_1(f_2(a, f_2(b, x)), f_2(a, b)) =$$
$$= f_1(f_2(f_2(a, b), x), f_2(a, b)) = f_2(f_2(a, b), x_s);$$

essa è dunque vera sempre.

(VII) $$f_3(a, f_1(b, c)) = f_2(f_3(a, b), f_3(a, c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_3(a, f_1(b,1)) = f_3(a, b_s) = f_2(f_3(a,b), a) = f_2(f_3(a,b), f_3(a,1)):$$

ammessa per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_3(a, f_1(b, x_s)) = f_3(a, (f_1(b,x))_s) = f_2(f_3(a, f_1(b,x)), a) =$$
$$= f_2(f_2(f_3(a,b), f_3(a,x)), a) = f_2(f_3(a,b), f_2(f_3(a,x), a)) = f_2(f_3(a,b), f_3(a, x_s));$$

essa è dunque vera sempre.

In modo affatto analogo si avrebbe potuto dimostrare la (V) servendosi solo della (I).

(VIII) $$f_3(f_2(a,b), c) = f_2(f_3(a,c), f_3(b,c)).$$

Vale una dimostrazione affatto analoga a quella usata per la (III).

(IX) $$f_3(a, f_3(b,c)) = f_3(f_3(a,b), c).$$

Vale una dimostrazione affatto analoga a quella usata per la (VI).

(X) $$f_4(a, f_1(b,c)) = f_3(f_4(a,b), f_4(a,c)).$$

Per $c=1$ essa è vera perchè:

$$f_4(a, f_1(b,1)) = f_4(a, b_s) = f_3(f_4(a,b), f_3(b,1));$$

ammessa per $c=x$ essa è vera anche per $c=x_s$ perchè:

$$f_4(a, f_1(b, x_s)) = f_4(a, (f_1(b,x))_s) = f_3(f_4(a, f_1(b,x)), a) =$$
$$= f_3(f_3(f_4(a,b), f_4(a,x)), a) = f_3(f_4(a,b), f_3(f_4(a,x), a)) =$$
$$= f_3(f_4(a,b), f_4(a, x_s));$$

essa è dunque vera sempre.

(XI) $$f_4(a, b_s) = f_3(a, f_4(a,b)).$$

Infatti:

$$f_4(a, b_s) = f_4(a, f_1(1,b)) = f_3(f_4(a,1), f_4(a,b)) = f_3(a, f_4(a,b)).$$

6. *Osservazioni.* — L'operazione f_4 si può dunque ricondurre tosto alla f_3. Ogni espressione in cui siano indicate solo le 4 prime operazioni si può quindi facilmente ridurre ad una in cui siano indicate solo le prime 3; le espressioni così ottenute sono però in generale assai più complicate delle primitive e non facilmente riducibili sotto forma più semplice. Così, ad es.:

$$f_4(f_3(a,b), c_s) = f_3(f_3(a,b), f_4(f_3(a,b), c)),$$
$$f_4(a, f_3(b_s, c_s)) = f_4(a, f_1(f_3(b_s, c), b_s)) = f_4(a, (f_1(f_3(b_s, c), b))_s) = f_3(a, f_4(a, f_1(f_3(b_s, c), b))).$$

Per le operazioni f_4 e successive non si conoscono formole semplici (*) analoghe a quelle dimostrate per le prime 3. Fa eccezione la formola (X) che però è già meno semplice delle analoghe (V) e (VII).

Per nessuna poi delle operazioni $f_3, f_4, f_5, \ldots$ è vera in generale la formola $f_i(a,b) = f_i(b,a)$ che vale invece per le operazioni f_1 ed f_2; infatti, ad es., se i non è 1, si ha: $f_{i_s}(1,1) = 1$, $f_{i_s}(1, x_s) = f_i(f_{i_s}(1,x), 1) =$

(*) V. nota di Woelpcke nel *Giornale di Crelle*: Vol. 42, pag. 87.

$=f_{i_s}(1,x)$ e quindi in generale $f_{i_s}(1,b)=1$ mentre invece $f_{i_s}(b,1)=b$. Per le operazioni f_3 ed f_4 c'è però l'eccezione $f_i(2,4)=f_i(4,2)$ che poi, ad es. per la f_5, non vale più. Infatti osserviamo anzitutto che, essendo $f_1(2,2)=(f_1(2,1))_s=3_s=4$ ed $f_{x_s}(2,2)=f_x(f_{x_s}(2,1),2)=f_x(2,2)$, si ha in generale $f_i(2,2)=4$. Ora:

$$f_3(4,2)=f_3(f_3(2,2),2)=f_3(2,f_2(2,2))=f_3(2,4),$$
$$f_4(4,2)=f_3(4,4)=f_3(f_4(2,2),f_3(2,2))=f_4(2,f_1(2,2))=f_4(2,4).$$
$$f_5(2,4)=f_4(f_5(2,3),2)=f_4(f_4(f_5(2,2),2),2)=f_4(f_4(4,2),2)=$$
$$=f_3(f_4(4,2),f_4(4,2))=f_3(f_4(4,2),f_3(4,4))=f_4(4,f_1(4,2))=$$
$$=f_3(f_4(4,4),f_3(4,2))=f_3(f_5(4,2),f_3(4,2))\ [>f_5(4,2):\ \S\ \text{II},\ 6].$$

§ II.

1. Invece di $(n_s)_s, ((n_s)_s)_s, \ldots$ scriveremo più semplicemente: $n_{ss}, n_{sss}, \ldots$

2. Dati due numeri distinti a e b avrà luogo uno ed uno solo di questi due casi: o b nella successione naturale dei numeri segue a, oppure a segue b. Nel primo caso b è un numero della successione: $a_s, a_{ss}, a_{sss}, \ldots$; esiste cioè un numero r tale che $f_1(a,r)=b$ e si dice che $a<$ (*è minore di*) b. Nel secondo caso a è un numero della successione: $b_s, b_{ss}, b_{sss}, \ldots$; esiste cioè un numero r tale che $f_1(b,r)=a$ e si dice che $a>$ (*è maggiore di*) b. *Per a e b è* dunque *vera una ed una sola delle proposizioni $a<b$, $a>b$ le quali dinotano l'esistenza di un numero r tale che rispettivamente sia: $f_1(a,r)=b$, $f_1(b,r)=a$.*

3. Dalle definizioni date si vede tosto che: $b>$ o $<a$ *secondo che* $a<$ o $>b$. Facilmente inoltre si vede che, *se $a>b$ e $b>c$ si ha che $a>c$*: infatti dalle ipotesi si ha $f_1(b,r)=a$, $f_1(c,s)=b$ e quindi $a=f_1(f_1(c,s),r)=f_1(c,f_1(s,r))$, donde infine $a>c$. È poi evidente che: *ogni numero a o $=1$ o >1.*

4. Se due scritture A e B indicano due numeri distinti a e b si dice che A $>$ *o* $<$ B *secondo che* $a>$ *o* $<b$.

5. Date dunque più scritture ciascuna delle quali indichi uno ed un sol numero, si vede tosto che per due qualunque d'esse *è vera una ed una sola delle proposizioni* $M>N$, $M=N$, $M<N$ e che $N>,=$ *o* $<M$ *secondo che* $M<,=$ *o* $>N$. È inoltre evidente che, se $M>$ o $=N$ ed $N>P$ oppure se $M>N$ ed $N=P$ si ha che $M>P$ e quindi che: *se* $M\geq(>$ *o* $=)N$ *ed* $N\geq P$, $M\geq P$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $M=N=P$. È chiaro quindi pure che: *se* $M\leq(<$ *o* $=)N$ *ed* $N\leq P$, $M\leq P$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $M=N=P$: infatti, se $M\leq N$ ed $N\leq P$, si ha $P\geq N$ ed $N\geq M$ e quindi $P\geq M$ cioè $M\leq P$. Anche qui poi invece di scrivere, ad es.: " $A=B, B\geq C, C>D$ *e quindi* $A>D$ " si scrive compendiosamente: " $A=B\geq C>D$ ".

6. Ricordiamo che: $f_1(a,b)>a$; $f_{i_s}(a,1)=a$; se $b>1$, $f_2(1,b)=b>1$; se $b>1$ ed $i>2$, $f_i(1,b)=1$. Dimostriamo che per $a>1$ e $b>1$ si ha: $f_i(a,b)>a$. Tale formola è infatti vera per $i=1$ e basterà quindi dimostrarla vera per $i=x_s$, ammesso che sia vera per $i=x$. Ma si ha $f_{x_s}(a,1)=a$ ed ammesso che sia $f_{x_s}(a,y)\geq a$ si ha che $f_{x_s}(a,y_s)>a$: infatti, essendo $a>1$, si ha $f_{x_s}(a,y)\geq a>1$ e quindi

$f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a, y), a) > f_{x_s}(a, y) \geq a$. La $f_{x_s}(a, b) > a$, e quindi anche la $f_i(a,b) > a$, è dunque vera sempre se $a > 1$ e $b > 1$. Concludendo si ha che: $f_i(a,b) \geq a$, *il segno = valendo solo se* $i > 1$ *e* $b = 1$ *oppure se* $i > 2$ *ed* $a = 1$.

7. Se $a > b$, $f_1(a,c) > f_1(b,c)$ ed $f_1(c,a) > f_1(c,b)$. Infatti, se $a > b$, si avrà $a = f_1(b,r)$ e quindi $f_1(c,a) = f_1(c, f_1(b,r)) = f_1(f_1(c,b), r) > f_1(c,b)$ ed $f_1(a,c) = f_1(c,a) > f_1(c,b) = f_1(b,c)$. Se $a > b$, $f_i(a,c) > f_i(b,c)$; se $a > b$ e $c > 1$, $f_i(c,a) > f_i(c,b)$. Queste proprietà sono già dimostrate per $i = 1$; basterà quindi dimostrarle per $i = x_s$, ammesso che siano vere per $i = x$. Ma la $f_{x_s}(a,c) > f_{x_s}(b,c)$ è vera per $c = 1$ perchè: $f_{x_s}(a,1) = a > b = f_{x_s}(b,1)$; ammessa per $c = y$ è vera per $c = y_s$ perchè: $f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a,y), a) > f_x(f_{x_s}(b,y), a) \geq f_x(f_{x_s}(b,y), b) = f_{x_s}(b, y_s)$; è vera dunque sempre. La $f_{x_s}(c, f_1(b,r)) > f_{x_s}(c,b)$ è vera per $r = 1$ perchè, essendo $c > 1$ e quindi anche $f_{x_s}(c,b) \geq c > 1$, si ha:

$$f_{x_s}(c, f_1(b,1)) = f_{x_s}(c, b_s) = f_x(f_{x_s}(c,b), c) > f_{x_s}(c,b);$$

ammessa per $r = y$ è vera per $r = y_s$ perchè:

$$f_{x_s}(c, f_1(b, y_s)) = f_{x_s}(c, (f_1(b,y))_s) > f_{x_s}(c, f_1(b,y)) > f_{x_s}(c,b);$$

è dunque vera sempre. È quindi vera anche la $f_{x_s}(c,a) > f_{x_s}(c,b)$ poichè, essendo $a > b$, si ha $a = f_1(b,r)$ donde appunto:

$$f_{x_s}(c,a) = f_{x_s}(c, f_1(b,r)) > f_{x_s}(c,b).$$

Ricordiamo poi che: $f_1(1,a) > f_1(1,b)$; $f_2(1,a) = a > b = f_2(1,b)$; se $i > 2$, $f_i(1,a) = 1 = f_i(1,b)$. Possiamo insomma concludere che: *se* $a > b$, *si ha che* $f_i(a,c) > f_i(b,c)$ *ed* $f_i(c,a) \geq f_i(c,b)$, *il segno = valendo solo se* $i > 2$ *e* $c = 1$.

8. *Secondo che* $A >, = o < B$, $f_i(A,C) >, = o < f_i(B,C)$: infatti se $A = B$ si sa che $f_i(A,C) = f_i(B,C)$; se $A > B$, sarà $a > b$ e quindi $f_i(A,C) = f_i(a,c) > f_i(b,c) = f_i(B,C)$; se $A < B$, sarà $B > A$, donde: $f_i(B,C) > f_i(A,C)$ e quindi infine $f_i(A,C) < f_i(B,C)$. — *Secondo che* $f_i(A,C) >, = o < f_i(B,C)$, $A >, = o < B$: infatti, ad es., se $f_i(A,C) > f_i(B,C)$ non può essere $A \leq B$ perchè sarebbe $f_i(A,C) \leq f_i(B,C)$; sarà dunque appunto $A > B$.

9. Analogamente si dimostra che: *se* $C > 1$, $f_i(C,A) >, = o < f_i(C,B)$ *secondo che* $A >, = o < B$ e che reciprocamente: *se* $C > 1$, $A >, = o < B$ *secondo che* $f_i(C,A) >, = o < f_i(C,B)$. *Tali proposizioni valgono anche se* $C = 1$ *ed* $i \leq 2$; *non valgono più se* $C = 1$ *ed* $i > 2$, perchè allora, qualunque sia D, si ha $f_i(1,D) = 1$.

10. Se $a > 1$ e $b > 1$, si ha $f_i(a,b) > b$. Tale formola è infatti vera per $i = 1$ poichè $f_1(a,b) = f_1(b,a) > b$; è vera per $b = 1$ poichè $f_i(a,1) \geq a > 1$; ammessa vera tanto per $i = x$ e b qualsiasi, quanto per $i = x_s$ e $b = y$ essa è vera anche per $i = x_s$ e $b = y_s$ poichè essendo $f_{x_s}(a,y) > y$, si ha $f_{x_s}(a,y) \geq y_s$ e quindi:

$$f_{x_s}(a, y_s) = f_x(f_{x_s}(a,y), a) \geq f_x(y_s, a) > y_s;$$

essa è dunque vera sempre [è vera per $i = 1$ ed, ammessa per $i = x$, è vera per $i = x_s$ poichè è vera per $i = x_s$ e $b = 1$ ed, ammessa per $i = x_s$ e $b = y$, è vera per $i = x_s$ e $b = y_s$]. Avendosi poi sempre $f_1(a,b) > b$

ed $f_{i_s}(c_s, 1) = c_s > 1$, possiamo concludere che: $\mathrm{f}_i(\mathrm{a}, \mathrm{b}) > \mathrm{b}$ *purchè non sia contemporaneamente* $\mathrm{i} > 1$ *ed* $\mathrm{a} = 1$, nel qual caso si ha $f_2(1, b) = b$ e, se $i > 2$, $f_i(1, b) = 1$.

11. Se $a > 1$ e $b > 1$, $f_{i_s}(a, b) \geq f_i(a, b)$, il segno $=$ valendo solo se $a = b = 2$. Tale formola è infatti vera per $b = 2$ poichè si ha $f_{i_s}(2, 2) = f_i(2, 2) = 4$ e per $a > 2$, $f_{i_s}(a, 2) = f_i(a, a) > f_i(a, 2)$; è vera per $i = 1$ poichè si ha $f_2(a, 2) \geq f_1(a, 2)$ ed ammessa per $i = 1$ e $b = y$ è vera per $i = 1$ e $b = y_s$ poichè si ha:

$$f_2(a, y_s) = f_1(f_2(a, y), a) \geq f_1(f_1(a, y), a) > f_1(f_1(a, y), 1) = f_1(a, y_s);$$

ammessa poi tanto per $i = x$ e b qualsiasi, quanto per $i = x_s$ e $b = y$ essa è vera anche per $i = x_s$ e $b = y_s$ poichè, essendo $a > 1$ ed $y = b > 1$, si ha $f_1(a, y) > a \geq 2$ e quindi:

$$f_{x_{ss}}(a, y_s) = f_{x_s}(f_{x_{ss}}(a, y), a) \geq f_{x_s}(f_{x_s}(a, y), a) > f_x(f_{x_s}(a, y_s), a) = f_{x_s}(a, y_s).$$

Essa è dunque vera sempre. Ne segue quindi tosto che: *se* $\mathrm{a} > 1$ *e* $\mathrm{b} > 1$ *ed* $\mathrm{j} > \mathrm{i}$, $\mathrm{f}_j(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \geq \mathrm{f}_i(\mathrm{a}, \mathrm{b})$, *il segno* $=$ *valendo solo se* $\mathrm{a} = \mathrm{b} = 2$. Infatti:

$$f_{f_1(1, x_s)}(a, b) = f_{(f_1(1, x))_s}(a, b) \geq f_{f_1(1, x)}(a, b) \text{ ed } f_{f_1(1, 1)}(a, b) = f_{i_s}(a, b) \geq f_i(a, b).$$

§ III.

1. Dati due numeri a e b: se esiste *un numero* r *tale che* $\mathrm{f}_i(\mathrm{r}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}$ *lo indicheremo col simbolo* $\mathrm{f}_i(\bar{\mathrm{a}}, \mathrm{b})$; se esiste *un numero* s *tale che* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \mathrm{s}) = \mathrm{a}$ *lo indicheremo col simbolo* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$. (*)

2. Non possono esistere due numeri distinti r e $\rho > r$ indicati dal simbolo $f_i(\bar{a}, b)$: infatti si avrebbe: $f_i(\rho, b) > f_i(r, b)$ ed $f_i(\rho, b) = a = f_i(r, b)$, il che è assurdo. Analogamente si dimostra che, se non è contemporaneamente $i > 2$ ed $a = 1$, non possono esistere due numeri distinti s e $\sigma > s$ indicati dal simbolo $f_i(b, \bar{a})$. Avendosi poi, per $i > 2$, $f_i(1, s) = 1$, possiamo dunque concludere che *i simboli* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$ *ed* $\mathrm{f}_i(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})$ *non possono indicare due numeri distinti, eccettuato per* $\mathrm{i} > 2$ *il simbolo* $\mathrm{f}_i(1, \bar{1})$ *che può indicare un numero qualsiasi e che supporremo sempre escluso dalle nostre considerazioni.*

3. Per la definizione stessa dei simboli ora introdotti possiamo dire che, se esistono i numeri da essi indicati, si ha che:

$$f_i(f_i(\bar{a}, b), b) = a \quad \text{ed} \quad f_i(b, f_i(b, \bar{a})) = a$$

e quindi anche che:

$$f_i(f_i(\bar{a}, b), \bar{a}) = b \quad \text{ed} \quad f_i(\bar{a}, f_i(b, \bar{a})) = b.$$

Ne segue pure tosto [§ II, 6 e 10]: che $f_i(\bar{a}, b) \leq a$ ed $f_i(b, \bar{a}) \leq a$

(*) È ovvio notare l'identità dei simboli: $f_1(\bar{a}, b)$ oppure $f_1(b, \bar{a})$, $f_2(\bar{a}, b)$ oppure $f_2(b, \bar{a})$, $f_3(\bar{a}, b)$, $f_3(b, \bar{a})$ rispettivamente coi noti simboli: $a - b$, $a : b$, $\sqrt[b]{a}$, $\lg_b a$.

e che *condizione necessaria per l'esistenza dei numeri* $f_i(\bar{a}, b)$ *ed* $f_i(b, \bar{a})$ *si è che sia* $a \geq b$. È chiaro poi anche che:

$$f_i(\overline{f_i(a, b)}, b) = a \text{ ed } f_i(a, \overline{f_i(a, b)}) = b;$$

che
$$f_{i_s}(a, \bar{a}) = 1 \text{ ed } f_{i_s}(\bar{a}, 1) = a;$$

che
$$f_i(\bar{4}, 2) = f_i(2, \bar{4}) = 2; \ldots.$$

4. Facilmente si dimostrano [§ II, 8 e 9], se esistono i numeri indicati dai simboli, le seguenti *proprietà*. *Secondo che* $A >, = o > B$, *si ha che* $f_i(\overline{A}, C) >, = o < f_i(\overline{B}, C)$: infatti, secondo che $A >, = o < B$, si ha che $f_i(f_i(\overline{A}, C), C) >, = o < f_i(f_i(\overline{B}, C), C)$ e quindi che $f_i(\overline{A}, C) >, = o < f_i(\overline{B}, C)$. — *Secondo che* $A >, = o < B$, *si ha che* $f_i(A, \overline{C}) <, = o > f_i(B, \overline{C})$: infatti, se, ad es., $A > B$, non può essere $f_i(A, \overline{C}) \geq f_i(B, \overline{C})$ perchè allora sarebbe: $C = f_i(A, f_i(A, \overline{C})) > f_i(B, f_i(A, \overline{C})) \geq f_i(B, f_i(B, \overline{C})) = C$. — *Secondo che* $A >, = o < B$, *si ha che* $f_i(C, \overline{A}) >, = o < f_i(C, \overline{B})$ *ed* $f_i(\overline{C}, A) <, = o > f_i(\overline{C}, B)$: se non è $C = 1$ ed $i > 2$ valgono dimostrazioni affatto analoghe; per $i > 2$ è poi chiaro che i simboli $f_i(1, \overline{D})$ ed $f_i(\overline{1}, D)$ non indicano nessun numero. — Si vede poi tosto che *sono vere anche le quattro proprietà reciproche:* infatti, se, ad es., $f_i(A, \overline{C}) > f_i(B, \overline{C})$, non può essere $A \geq B$ perchè allora sarebbe $f_i(A, \overline{C}) \leq f_i(B, \overline{C})$.

5. Abbiamo poi infine [§ II, 11] che: *se* $j > i$ *e* $B > 2$, $f_j(\overline{A}, B) < f_i(\overline{A}, B)$ *ed* $f_j(B, \overline{A}) < f_i(B, \overline{A})$: infatti non può essere $f_j(\overline{A}, B) \geq f_i(\overline{A}, B)$ perchè allora sarebbe

$$A = f_j(f_j(\overline{A}, B), B) \geq f_j(f_i(\overline{A}, B), B) > f_i(f_i(\overline{A}, B), B) = A;$$

analogamente si dimostra l'altra formola.

6. Dalle proprietà (II) e (IV) del § I si vede tosto che: *per* $i \leq 2$, *se esiste un numero indicato da uno dei simboli* $f_i(\bar{p}, q)$ *ed* $f_i(q, \bar{p})$ *lo stesso numero è indicato anche dall'altro simbolo e si ha quindi* $f_i(\bar{p}, q) = f_i(q, \bar{p})$. È chiaro quindi che, ad es., abbiamo:

$$f_1(a_s, 1) = f_1(1, a_s) = a \quad \text{ed} \quad f_2(\bar{a}, 1) = f_2(1, \bar{a}) = a.$$

7. Dalla definizione di $>$ [§ II, 2] si ha che *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del numero indicato dai simboli* $f_1(\bar{a}, b)$ *ed* $f_1(b, \bar{a})$ *si è che sia* $a > b$; ove poi tal numero esista, per *trovarlo* bisogna porre in $f_1(b, x)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$ finchè si trova il numero r cercato tale che $f_1(b, r) = a$.

8. Per *trovare,* ove esista, il numero $f_2(\bar{a}, b) = f_2(b, \bar{a})$ basta porre in $f_2(b, x)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$; essendo $f_2(b, x) \geq x$, si troveranno così dei numeri maggiori d'ogni numero assegnato e quindi s'incontrerà o il numero r cercato tale che $f_2(b, r) = a$, o un numero p tale che $f_2(b, p) < a < f_2(b, p_s)$ nel qual caso il numero r non esiste poichè, essendo $f_2(b, p) < a$, $f_2(b, r) = a$, $f_2(b, p_s) > a$, dovrebbe essere $p < r < p_s$, il che è assurdo.

9. Analogamente si vede che, se $i = 2$, per *trovare,* ove esista, il numero $f_i(\bar{a}, b)$ basta porre in $f_i(x, b)$ successivamente $x = 1, 2, 3, \ldots$; s'incontrerà così o il numero r cercato tale che $f_i(r, b) = a$, o un numero p tale che $f_i(p,b) < a < f_i(p_s,b)$ nel qual caso il numero r non esiste. Così pure, se $i > 2$ ed $a = 1$, per *trovare* $f_i(a,\bar b)$ si considera $f_i(a,x)$ e s'incontrerà o l'r tale che $f_i(a,r) = b$, o un p tale che $f_i(a,p) < b < f_i(a,p_s)$ nel qual caso l'r cercato non esiste; $f_i(1,\bar c_s)$ non indica poi nessun numero ed $f_i(1,\bar 1)$ indica un numero qualsiasi, come già si è detto.

10. Dalle proprietà del § I si deducono poi le seguenti *formole*, che facilmente si possono successivamente verificare e per la cui validità si deve naturalmente presupporre che esistano i numeri indicati dai simboli che in esse compaiono. Le formole sono:

1. $f_1(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(a,f_1(\bar b,c))$,
2. $f_1(f_1\overline{(\bar a,b)},c)=f_1(\bar a,f_1(b,c))$,
3. $f_1(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(\bar a,f_1(b,\bar c))$;
4. $f_2(f_1(\bar a,b),c)=f_1(f_2\overline{(a,c)},f_2(\bar b,c))$,
5. $f_2(f_1\overline{(a,b)},c)=f_1(f_2(\bar a,c),f_2(\bar b,c))$,
6. $f_2(f_1\overline{(\bar a,\bar b)},c)=f_1(f_2\overline{(\bar a,c)},f_2(\bar b,c))$;
7. $f_2(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(a,f_2(\bar b,c))$,
8. $f_2(f_2\overline{(\bar a,\bar b)},c)=f_2(\bar a,f_2(b,c))$,
9. $f_2(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(\bar a,f_2(b,\bar c))$;
10. $f_3(a,f_1(\bar b,c))=f_2(f_3\overline{(a,b)},f_3(a,c))$;
11. $f_3(f_2(\bar a,b),c)=f_2(f_3\overline{(a,c)},f_3(b,c))$,
12. $f_3(f_2\overline{(a,b)},c)=f_2(f_3(\bar a,c),f_3(\bar b,c))$,
13. $f_3(f_2\overline{(\bar a,b)},c)=f_2(f_3\overline{(\bar a,c)},f_3(\bar b,c))$;
14. $f_3(a,f_2\overline{(b,c)})=f_1(f_3\overline{(a,\bar b)},f_3(a,\bar c))$,
15. $f_3(a,f_2(\bar b,c))=f_1(f_3\overline{(a,\bar b)},f_3(a,\bar c))$;
16. $f_3(f_3\overline{(a,b)},c)=f_3(f_3(\bar a,c),b)$;
17. $f_3(f_3\overline{(a,\bar b)},c)=f_3(a,f_2(\bar b,c))$,
18. $f_3(f_3\overline{(\bar a,b)},c)=f_3(\bar a,f_2(b,c))$,
19. $f_3(f_3\overline{(a,b)},c)=f_3(\bar a,f_2(b,\bar c))$;
20. $f_3(a,f_3\overline{(b,c)})=f_2(f_3\overline{(a,\bar b)},c)$,
21. $f_3(a,f_3(\bar b,c))=f_2(f_3\overline{(a,\bar b)},c)$;
22. $f_4(a,f_1(\bar b,c))=f_3(f_4\overline{(a,b)},f_3(a,c))$;
23. $f_4(a,\bar b)=(f_3(a,f_3\overline{(a,\bar b)}))_s$;

ed altre immediatamente deducibili da queste.

La verifica è poi facile ed il metodo è sempre lo stesso [§ III, 1 e 3; proprietà del § I; formole precedenti quelle che si dimostra]. Per la 10, ad es., abbiamo:

$$f_2(f_3(a,f_1(\bar b,c)),f_3(a,c))=f_3(a,f_1(f_1(\bar b,c),c))=f_3(a,b);$$

per la 13 abbiamo:

$$f_3(f_2(\overline{f_3(\bar a,c)},f_3(\bar b,c)),c)=f_2(\overline{f_3(\bar a,c),c}),f_3(f_3(\bar b,c),c))=f_2(\bar a,b);$$

per la 15 abbiamo:

$$f_3(a,f_1(\overline{f_3(a,\bar b)},f_3(a,\bar c)))=f_2(\overline{f_3(a,f_3(a,\bar b))},\overline{f_3(a,f_3(a,\bar c))})=f_2(\bar b,c);$$

per la 19 abbiamo:

$$f_3(f_3(\bar a,f_2(b,\bar c)),c)=f_3(\overline{f_3(a,c)},f_2(b,\bar c))=f_3(a,f_2(\bar c,f_2(b,\bar c)))=f_3(a,b);$$

per la 21 abbiamo:

$$f_3(a,f_2(\overline{f_3(a,\bar b)},c))=f_2(\overline{f_3(a,f_3(a,\bar b))},c)=f_3(\bar b,c);$$

per la 22 abbiamo:

$$f_3(f_4(a,f_1(\bar b,c)),f_3(a,c))=f_4(a,f_1(f_1(\bar b,c),c))=f_4(a,b);$$

per la 23 abbiamo infine:

$$f_4(a,(f_3(a,\overline{f_3(a,\bar b)}))_s)=f_3(a,f_3(a,f_3(a,\overline{f_3(a,\bar b)})))=f_1(a,f_3(a,\bar b))=b.$$

555. Supponendo sempre fissi i due vertici BC di un triangolo se il terzo vertice A descrive una retta, il luogo del punto K (di Lemoine) è una conica passante per O (punto medio del lato BC) e bitangente all'ellisse E^2 della quistione precedente.

Se A descrive un cerchio non ortogonale al cerchio O^2, della quistione precedente, il luogo di K è una ellisse bitangente a E^2.

In generale se A descrive una conica, il luogo di K è una curva razionale del quart'ordine quadritangente all'ellisse E^2 e con un punto doppio in O: determinarne gli altri due punti doppi.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

H. Poincaré — *Électricité et optique. La lumière et les théories électrodynamiques.* Paris, Carrè e Naud, 1901. Seconda edizione.

Le prime 340 pagine di questa seconda edizione sono una ristampa fedele delle corrispondenti della prima (1891); le altre contengono una esposizione delle teorie di Hertz e di Lorentz, ed alcune note complementari, scritte a proposito di osservazioni dell'A. sulla teoria di Larmor.

Furono invece soppressi in questa edizione il capitolo *sulla verificazione sperimentale delle ipotesi di Maxwell*, l'altro *sulla unità della forza elettrica* e quelli relativi alla *descrizione dell'esperienze di Hertz* colle *note* che la seguivano.

Poichè l'autore raccolse già queste dottrine e queste ricerche in un volume, pubblicato nel 1893, sulle *oscillazioni elettriche*, mentre in un altro volumetto del 1899, *La théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes*, scrisse quasi una preparazione elementare alla lettura del libro precedente, e, per la parte sperimentale, anche dell'opera che ci sta sott'occhio. (V. *Periodico*, Anno XV, pag. 38.)

Il nome dell'illustre autore non ci obbliga che ad un breve cenno dell'opera sua; la quale contiene l'esposizione critica, fatta com'egli solo poteva fare, di quanto vi è d'importante e di recente sulle moderne teorie dell'elettricità e della luce.

Queste ebbero veramente la loro origine, quando un attento esame delle analogie fra i fenomeni elettrici e quelli calorifici fece ritenere impossile di considerare l'elettricità come un particolare movimento della materia ponderabile. Il Maxwell, persuaso che la spiegazione di quei fenomeni dovesse essere cercata nelle proprietà e nel moto di una particolare materia, abbandonò, per il primo, la teoria dei due fluidi, a cui tanto peso (almeno come parafrasi dei fatti) avevano conferito i lavori dei più celebri fisici matematici da Poisson in poi; e si rifece a sviluppare e a completare dal punto di vista matematico la teoria di un solo fluido di Franklin e di Epino, che il nostro Volta aveva sempre fedelmente seguito e di cui anche il Cavendish aveva tentato una trattazione matematica.

Ma fino allora quella teoria ammetteva l'esistenza di azioni a distanza, mentre le idee del nostro Mossotti sui dielettrici, riprese ed illustrate dalle ricerche sperimentali del Faraday, portavano ad attribuire alle modificazioni avvenute nello spazio che separa due corpi elettrizzati, i fenomeni che questi presentano. Perciò la teoria del Maxwell si volge ad esaminare la costituzione di questo spazio interposto e del fluido in esso contenuto. Il fenomeno della polarizzazione rotatoria magnetica, il primo dei molteplici fatti elettro-ottici scoperti, conduce naturalmente a identificare il fluido elettrico coll'etere luminoso; e così, dapprima in Inghilterra si sviluppa completamente l'ipotesi già accennata dal Newton nella sua *Ottica:* che la produzione dell'elettricità sia il resultato del movimento di un principio etereo; se pure non si vuol ricordare coi lavori anteriori del Lorentz un saggio di teoria elettromagnetica della luce.

Nella recentissima teoria di Lorentz l'elettricità aderisce alla materia; i fenomeni elettrici sono dovuti a piccoli corpi solidi, gli *ioni* od *elettroni*, che carichi di una quantità costante di elettricità e disseminati in ogni corpo, semplici oppure complessi, si spostano senza deformarsi nell'interno dei conduttori, mentre non possono che oscillare intorno alla loro posizione d'equilibrio nell'interno dei dielettrici. In egual modo la teoria di Maxwell suppone elastica *l'elettricità* contenuta nei dielettrici ed inerte quella contenuta nei conduttori, senza però che si veda bene la ragione di questa differenza.

Nella teoria di Larmor all'elettrone vengono sostituite altre ipotesi sulle particelle di etere; questo è costituito da vortici infinitesimi, o almeno le sue particelle sono dotate di elasticità rotazionale; alla sua inerzia sono attribuiti i fenomeni d'induzione elettro-magnetica, mentre le rotazioni delle sue particelle producono le ordinarie correnti voltaiche.

Oltre queste teorie che dànno una rappresentazione materiale dei fenomeni, altre ve ne sono, nelle quali i fatti vengono collegati ad una o più formole che rappresentano, sia l'azione mutua di due elementi di corrente, sia le componenti del flusso d'induzione, ricavate alla lor volta da formole che esprimono la forza elettromotrice d'induzione e che sono d'accordo coll'esperienza.

Tale è la teoria di Hertz, il quale ha conservato solamente l'equazioni stabilite dal Maxwell, trascurando ogni idea concreta sulla natura dell'elettricità; anche perchè l'oscuro trattato di quest'ultimo, contiene piuttosto un insieme di teorie, che lo sviluppo di una teoria omogenea, la quale da un punto di partenza ben determinato deduca armonicamente la spiegazione dei vari fenomeni che s'intendono di collegare. Le teorie infatti dello spostamento elettrico (cap. II), della costituzione cellulare dei dielettrici (cap. III), che fa seguito alla teoria del Mossotti, delle tensioni e pressioni che sviluppandosi nel fluido contenuto dai dielettrici dànno origine alle attrazioni elettrostatiche (cap. IV), non solo presentano gravi difficoltà ma sono anche impossibili a conciliarsi.

Il punto di vista dell'Hertz, puramente analitico, dovrebbe essere ben accetto al Poincaré, il quale nella sua elegante e geniale introduzione, come in altre sue pubblicazioni, insiste su questo fatto: siccome da un noto teorema discende che trovata una spiegazione meccanica di una classe di fenomeni, se ne possono immaginare infinite altre egualmente plausibili, sembrerebbe sufficiente per spiegare meccanicamente un fenomeno, l'aver dimostrato la *possibilità* di una tale spiegazione meccanica, e la ricerca del *meccanismo* particolare che vi soddisfa dovrebbe dai fisici propriamente detti esser lasciata ai metafisici. Non differentemente, in sostanza, si esprimeva Newton ai suoi tempi, scrivendo: I filosofi moderni nelle loro speculazioni fisiche immaginano delle ipotesi per spiegare meccanicamente ogni cosa, e rinviano le altre cause alla metafisica.

Checchè ne sia delle obiezioni che si potrebbero, forse, fare a questo giudizio dell'A., sta il fatto che l'equazioni dell'Hertz come quelle dell'Helmholtz, che comprendono le teorie di Neumann e di Weber come casi particolari e la teoria di Maxwell come caso limite, non rendono ragione dei fenomeni di aberrazione, del trasporto delle onde luminose per effetto della materia ponderabile, etc., pur soddisfacendo ai principii fondamentali della dinamica.

Mentre la teoria di Lorentz, la quale è una immagine materiale dei fenomeni elettrici, *sebbene non soddisfi al principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione*, è la sola che permette di collegare i fatti osservati, fino a quello recentissimo di Zeemann, e quindi è la sola, conclude l'A., che conviene conservare, *almeno provvisoriamente*.

Ma è evidente che una teoria in disaccordo colla terza legge della dinamica non può dichiararsi soddisfacente; e che bisognerà quindi, presto o tardi, modificare profondamente le idee fin'ora ammesse, senza però che si possa nemmeno oscuramente prevedere in qual senso.

L'opera del nostro A. s'indirizza a chi già possiede sufficienti cognizioni fisico-matematiche; e, come tutti i suoi precedenti lavori, non è l'opera di un matematico a cui la fisica serve di pretesto per degli sviluppi analitici; poichè delle ricerche sperimentali, anche le più minute, egli fa tesoro per i continui raffronti colle conseguenze teoriche.

Talvolta egli non fa che ricordare gli enunciati piuttostochè riassumere teoremi e dottrine già note (cap. I e IV ad es.); tal'altra (cap. V) appena accenna i principi necessari al suo scopo, che è sempre quello di tracciare le linee fondamentali delle singole teorie. Queste vengono però sempre collegate fra loro, quando è possibile, e di ognuna l'A., completando quell'esame che già si trova iniziato nel trattato del Maxwell, pone singolarmente in luce le difficoltà e ritrova ed accenna i *desiderata* a cui dovrebbe soddisfare.

Nella parte prima, esposte le leggi dell'elettrostatica, delle correnti di conduzione, del magnetismo, elettro-magnetismo, elettro-dinamica e induzione, l'autore stabilisce l'equazioni del campo magnetico e svolge la teoria elettromagnetica della luce. Nel capitolo sulla polarizzazione rotatoria magnetica, oltre la teoria di Maxwell, oscura come ognun sa, accenna a quelle di Poitier e di Rowland, ed al fenomeno, non ancora bene spiegato, di Kerr.

Seguono le teorie elettrodinamiche di Ampère, Weber, Helmholtz nella parte seconda; e nella terza e quarta le altre a cui già abbiamo accennato, insieme ad alcune osservazioni sulle sfere pulsanti del Bjerknes.

Tale è lo spirito ed il piano di quest'opera elevata, che tratta a fondo un soggetto da cui sembra debba dipendere, non solo una maggiore e più perfetta conoscenza dei fenomeni elettrici, ma altresì qualche cognizione sul meccanismo di quella misteriosa forza attrattiva della materia; la quale da tre secoli preoccupa gli spiriti più vigorosi, e sconcerta, come dice il Boys, per la sua generalità assoluta, per la nessuna sua relazione cogli altri agenti fisici, per il suo modo di propagazione istantanea, a distanza, ed attraverso tutti i mezzi, materiali o no.

Se, come crede il Cornu, noi siamo alla vigilia di qualche grande scoperta, è soltanto dagli studi dei fisici e dei matematici sull'elettricità che potrà venire la luce desiderata. Poichè il meccanismo di trasmissione di una forza è intimamente collegato ai fenomeni di propagazione nel mezzo che ne è la sede; e poichè questi fenomeni sono accessibili nello studio dell'elettricità, meglio che nello studio di qualsiasi altro agente fisico.

L'opera quindi s'indirizza non soltanto ai fisici matematici propriamente detti, ma anche, o forse in special modo, ai fisici sperimentali, ai quali spetta pur sempre il controllo e l'ultima parola sulle teorie dei primi. E sono, nel libro, numerosi gli accenni a verificazioni sperimentali possibili.

R. Pitoni.

Grassi. — *Elementi di geometria descrittiva*, per uso della R. Accademia Navale e dei RR. Istituti Tecnici. Livorno, Belforte, 1901. (Testo pagine 264, tavole 58).

Questo libro destinato a servire di guida agli allievi della R. Accademia Navale è fatto in conformità dei programmi di quell'Istituto e contiene un ampio sviluppo della proiezione di Monge e quotata e una trattazione sommaria della proiezione centrale e dell'assonometria con applicazioni alla teoria delle ombre.

Nell'introduzione si trova, insieme ad altri argomenti, un rapido cenno sull'omologia, omotetia, affinità, che vengono poi utilmente applicate nel seguito.

Da questi brevi cenni si capisce come l'opera contenga assai più di quanto occorre per gl'Istituti tecnici, tuttavia potrebbe anche essere adottato in queste scuole, omettendo quanto non è richiesto dai programmi.

L'esposizione chiara e semplice, l'accuratezza dell'edizione, la nitidezza delle figure renderanno il libro ben accetto agli studiosi.

G. L.

DA GIORNALI E RIVISTE

Proceedings of the Edimburgh Mathematical Society.

Vol. XVII, Session 1898-99. — *W. L. Thomson*, Teoria geometrica delle funzioni iperboliche. — *G. A. Gibson*, Rivista delle " Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, von Moritz Cantor " 3ᵉʳ (Schluss) Band. 3ᵗᵉ Abtheilung 1727-1758, con teoremi speciali riguardo alla controversia dell'"*Analyst*". — *Ch. Tweedie*, Nota sui teoremi di ineguaglianza che si collegano al limite esponenziale $\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$. — *R. F. Muirhead*, Su una dimostrazione di Eulero per teorema del binomio per il caso di esponenti negativi e frazionari. — *Id.* Nota sulle frazioni continue. — *Id.* Sulla dimostrazione del teorema del binomio quando l'esponente è positivo ed intero. — *T. B. Sprague*, Sul problema delle otto regine. — *Tait*, Distribuzione centrobarica su una superficie sferica. — *J. A. Third*, Sistemi di circoli analoghi ai circoli di Tucker. — *Id.* Sistemi di coniche connesse col triangolo. — *Id.* Sistemi di sfere connesse col tetraedro.

Vol. XVIII, Session 1899-1900. — *G. E. Crawford*, Dimostrazione elementare del teorema che la media aritmetica di più numeri positivi è maggiore della loro media geometrica. — *R. F. Muirhead*, Spezzamento di due triangoli in ugual numero di triangoli rispettivamente simili. — *J. A. Third*, Due trasformazioni geometriche. — *L. Crawford*, Sul calcolo di un determinante. — *A. D. Russell*, Caso speciale dello spezzamento di due triangoli in triangoli rispettivamente simili. — *Dr. Peddie,* Dimostrazione elementare del teorema del potenziale per uno strato sferico uniforme. — *R. F. Muirhead,* Osservazioni alla precedente dimostrazione. — *J. Dougall,* Determinazione della funzione di Green per mezzo delle armoniche cilindriche o sferiche. — *G. A. Gibson,* Nota sulle ineguaglianze fondamentali connesse con e^x e x^m. — *E. Collignon,* Nota su un problema di Geometria. — *Id.* Nota sulle dimostrazioni per mezzo della proiezione in Trigonometria, e Geometria analitica. — *C. A. Laisant,* Problema della sezione in ragione data. — *W. E. Philip,* Piccola estensione del Teorema di Eulero sulle funzioni omogenee. — *Id.* Dimostrazione generale del Teorema di addizione in Trigonometria. — APPENDICE: *G. A. Gibson,* Proporzioni - Il V libro degli elementi di Euclide.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, N. 22, luglio 1900. — *C. A. Scott,* Sulla geometria di posizione di Staudt (continuazione). — Piccola Nota: *R. F. Davis,* Sul cilindroide. — *Id.* Sulla parabola.

Vol. I, N. 23, 1900. — *W. H. Macaulay,* Le leggi della dinamica e la loro trattazione nei libri di testo (continua). — Bibliografia. — Piccole Note: *J. H. Hooker,* Dimostrazione geometrica delle formule di $\cos\frac{A}{2}$ e $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$. — *W. J. Johnston,* Dimostrazione della formula: $\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B-C)}$. — *A. C. L. Wilkinson,* Dimostrare che $1 \geqq \cos A+\cos B+\cos C \geqq \frac{3}{2}$ quando A, B, C sono angoli di un triangolo.

Vol. I, N. 24, dicembre 1900. — *W. H. Macaulay,* (continuazione vedi numero precedente). — Bibliografia. — Piccole Note: *J. V. Thomas,* Dimostrazioni geometriche delle formule $\sqrt{1+\operatorname{sen}A}+\sqrt{1-\operatorname{sen}A}=2\cos\frac{A}{2}$, $\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 A}}{\operatorname{tang} A}=\operatorname{tang}\frac{A}{2}\ (A<90^\circ)$. — *R. F. Davis,* Un triangolo con due bisettrici interne uguali è isoscele. — *W. E. Hartley,* In ogni triangolo sferico ABC, si ha: $\operatorname{sen} a \cot c=\operatorname{sen} B\cot C+\cos a\cos B$. — *J. M. Dyer,* Su un luogo di un fuoco di una certa conica inscritta in un triangolo.

Vol. II, N. 1, gennaio 1901. — *R. F. Davis,* Due esempi sull'eliminazione. — *J. Brill,* Nota sulla soluzione delle equazioni cubiche e biquadratiche. — Bibliografia. — Piccole Note.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.

Vol. XXXV, disp. 7-15. — *A. Tanturri,* Un problema di geometria numerativa sulle varietà algebriche, luogo di ∞^1 spazi. — *G. Scorza,* Sopra le corrispondenze (p, p) esistenti sulle curve di genere p a moduli generali. — *O. Tedone,* Sulle equazioni delle vibrazioni dei corpi elastici in coordinate curvilinee. — *G. Lauricella,* Intorno alle derivate normali della funzione potenziale di superficie. — *T. Boggio,* Un teorema di reciprocità sulle funzioni di Green di ordine qualunque. — *E. D'Ovidio,* Commemorazione di E. Beltrami. — *E. Holmgren,* Sur un théorème de M. Volterra sur l'inversion des intégrales définies. — *G. Scorza,* Sopra le curve coniche di uno spazio lineare qualunque e sopra certi loro covarianti quartici. — *F. Severi,* Ricerche sulle coniche secanti delle curve gobbe.

Rendiconto del R. Istituto lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXIII, fasc. 7-15. — *E. Ciani*, Un teorema sopra la quartica di Klein. — *T. Cazzaniga*, Note critiche sulla teoria degli integrali curvilinei e di superficie. — *M. Chini*, Sui fattori integranti di una o più forme differenziali di grado n a m variabili. — *L. Berzolari*, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. — *E. Pascal*, La teoria delle equazioni ai differenziali totali di 3° ordine. — *D. Gigli*, Sulle superficie elicoidali e rigate dello spazio ellittico. — *U. Amaldi*, Sulle sostituzioni lineari commutabili. — *T. Vignoli*, Del linguaggio scientifico. — *L. Berzolari*, Sulle coniche appoggiate in più punti a date curve algebriche. — *C. Severini*, Sulle equazioni differenziali ordinarie contenenti un parametro arbitrario.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze lettere ed arti.

Tomo LIX, Serie VIII, tomo II, disp. 4-8. — *T. Boggio*, Integrazioni dell'equazione $\Delta^2\Delta^2 = 0$ in una corona circolare ed in uno strato sferico. — *F. Levi Civita*, Funzioni armoniche e trasformazioni di contatto.

Atti e memorie della R. Accademia di scienze lettere ed arti di Padova.

Nuova serie, vol. XVI, disp. 1-3. — *F. D'Arcais*, Un problema di calcolo di probabilità.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna.

Serie V, tomo VIII, fasc. 1. *C. Arzelà*, Sulle serie di funzioni. Parte I.

Atti della R. Accademia lucchese di scienze lettere ed arti.

Tomo XXX. — *R. Bettazzi*, La pratica nell'insegnamento della matematica.

Atti della R. Accademia di scienze lettere ed arti di Palermo.

Serie III, vol. V. — *E. Soler*, Sulla rappresentazione geodetica di talune superficie. — *Id.* Nuovi studi sopra una certa deformata della sfera.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Tomo XIV, fasc. 6°. — *Cremona*, Commemorazione di Eugenio Beltrami (continuazione e fine). — *Castelnuovo* e *Enriquez*, Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi. — Estratti dei verbali.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali diretto da *A. Conti*.

Anno II, N. 1 contiene: *Bettazzi*, Le indicazioni nella risoluzione dei problemi. — *Murer*, Estensione alle frazioni dei teoremi sulla divisibità. — *Ciamberlini*, Sullo zero. — *Id.* Didattica per la Scuola elementare. — Rivista bibliografica. — *Genovesi*, Corrispondenza.

Il N. 2 contiene: Ringraziamenti reali. — *Ortu Carboni*, La raccolta di esercizi nell'insegnamento della geometria. — *Ciamberlini*, Una lezione di disegno nella scuola elementare. — *Scoto*, Rivista storica. — Rivista bibliografica. — *Ciamberlini*, Didattica per le scuole elementari.

Il Pitagora diretto da G. Fazzari.

Anno VII, fasc. 1-2 contiene: *Burali-Forti*, Sui simboli di Logica Matematica (Nota 5). — *Ciamberlini*, Sulla definizione della somiglianza delle figure. — *Ceretti*, Pel calcolo mentale. — *Testi*, Relazione dei lavori presentati al concorso 1900. — *Droz-Farny*, Nota di geometria. — *Palatini*, Le proprietà formali delle operazioni fondamentali con numeri razionali. — *De Zolt*, Dimostrazione di due teoremi algebrici fondamentali. — *Dedekind*, Continuità e numeri irrazionali, trad. di *L. Certo* (cont.) — *Gambioli*, Nota su alcune equazioni indeterminate. — Varietà.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

E. Scotti, Elementi di Geometria ad uso dei corsi complementari. Torino, tip. Salesiana, 1900. L. 1.

P. Cardani, Fisico matematica. Lezioni dettate nell'anno scolastico 1899-900 nella R. Università di Parma e compilate per cura di *S. Duroni*. Parma, lit. Zafferri, 1899-900.

E. Fabbri, Il teorema dell'integrale di Cauchy: contributo alla storia critica dell'analisi. Bologna, Zamorani e Albertazzi, 1900.

E. Verdelli, Lezioni di aritmetica razionale. Piacenza, Piacentini, 1900.

C. Marenghi, Sulle figure simili e particolarmente sui poligoni piani simili. Camerino, Borgarelli, 1900.

D. Giordano, Nozioni di aritmetica razionale esposte per uso del Ginnasio superiore. Ragusa Inferiore, V. Criscione, 1900. L. 1.

E. P. Gazzaniga, Aritmetica generale e divisioni ordinarie, speciali e mobili; configurazioni numeriche e numeri primi, divisioni e frazioni periodiche; nuovi studi e teoremi. Bergamo, Fratelli Bolis, 1900. L. 5.

D. Pizzarello, Sulle funzioni trascendenti intere. Messina, tip. dell'Epoca, 1900.

A. Pensa, Sull'influenza di alcune singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P, con applicazioni alla determinazione di superficie razionali di 3° ordine. Mondovì, tip. Vescovile, 1900.

R. Viti, Sulla teoria matematica della previdenza. Conferenza. Roma, tipografia Balbi, 1900.

G. D'Amico, Aritmetica: insegnamento pratico secondo il metodo intuitivo: ad uso degli insegnanti elementari. Melfi, Gineo, 1899.

E. Bertolotti, Lezioni di Calcolo infinitesimale. Lezioni dettate nel 1899-900 nella R. Università di Modena. Modena, lit. Pizzolotti, 1899-900.

C. Carrone, Le congruenze del 2° ordine senza linee singolari e le loro superficie focali studiate mediante una trasformazione doppia. Casarice, 1900.

G. Ricci, Lezioni di algebra complementare. Verona-Padova, Drucker, 1900. Lire 10.

F. Niceli, Lezioni di geometria descrittiva, tenute nella R. Università di Modena nel 1899-900, lit. Pizzoletti, 1899-900.

CARLO HERMITE

Il 24 Decembre 1892 gli scolari di **Carlo Hermite** festeggiarono con straordinaria solennità il 70° anniversario della nascita del sommo matematico; ed a queste onoranze si associarono gli scienziati di tutto il mondo, poichè la gloria di lui non appartiene alla sola Francia, ma onora tutta l'umanità. Così la morte di lui, avvenuta il 14 Gennaio scorso, è un lutto per la scienza di tutti i paesi.

È impossibile parlare adeguatamente del monumento imperituro, che egli ha eretto a sè stesso colle innumerevoli memorie relative a tutti i rami dell'analisi; che il suo genio gli ha permesso di profondere per più di mezzo secolo in tutti i giornali di Francia e degli altri paesi, fra i quali ci piace ricordare gli *Annali di matematica* e gli *Atti dell'Accademia di Torino.* Ci limitiamo ad accennare di volo i più importanti fra i suoi lavori.

Fino dal 1843 egli iniziò brillantemente la sua carriera scientifica coi lavori sulla divisione delle funzioni abeliane, che, in forma di lettere Jacobi, volle inseriti nella raccolta delle proprie memorie.

Ideò nel 1852 la rappresentazione tipica delle forme binarie e la teoria dei covarianti associati, ed in questo campo fu degno emulo di Sylvester e Cayley.

Dette una dimostrazione del tutto nuova e puramente aritmetica dei celebri teoremi di *Sturm* e *Cauchy* sulla separazione delle radici di un'equazione algebrica.

Nel 1858, risolvè coll'aiuto delle funzioni ellittiche l'equazione del 5° grado, precedendo di poco il Kronecker ed il Brioschi.

Nel 1873 dimostrò la trascendenza del numero e, e la sua scoperta permise a Lindmann di dimostrare la trascendenza di π e la conseguente impossibilità della quadratura del circolo.

Infine per quasi tutta la vita si occupò con successo delle funzioni trascendenti e specialmente delle funzioni doppiamente periodiche.

Oltre che per le scoperte, l'opera di **Hermite** fu sommamente utile alla scienza per la fecondità dei metodi da lui ideati; per la volgarizzazione delle grandi scoperte di Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy, che in mezzo secolo avevano trasformato la scienza matematica; per la squisita gentilezza e bontà d'animo, che lo fecero prodigo di incoraggiamento e di aiuti verso gli studiosi di tutti i paesi che a lui ricorrevano.

Fu in rapporti di cordiale amicizia coi maggiori matematici di tutto il mondo, e in particolare con quelli del nostro paese, che ora ne piangono la perdita.

ERRATA-CORRIGE.

Anno XVI, fasc. III. — Pag. 126, linea 31, invece di β leggere φ; e alla linea 41, dopo *ipotenusa* inserire: Si può sempre supporre che a non sia commensurabile con b.

Fasc. IV, pag 193, linea 21, deve aggiungersi: ad eccezione delle verticali del determinante β, che non hanno la corrispondente in A, le quali occuperanno i medesimi posti che occupano in quello che corrisponde al primo dei determinanti d'ordine m di A. — Nella stessa pagina in fondo, nell'ultimo determinante devesi eseguire lo scambio dei secondi indici 3 e 4.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 30 Marzo 1901.

TEORIA ELEMENTARE DEL COMPLESSO LINEARE

Il fascicolo di febbraio del giornale *Mathesis,* contiene una breve nota nella quale il sig. Stuyvaerts con un nuovo metodo elementare e semplicissimo espone i fondamenti della teoria dei complessi lineari.

Scopo di questo articolo è di far conoscere ai lettori del *Periodico* il metodo suddetto, la cui parte essenziale è riportata quasi integralmente nel § 2, e di portare ad esso alcune modificazioni che rendono lo studio dei complessi ancora più elementare, poichè ho potuto fare a meno di adoperare anche il concetto di proiettività e di rapporto anarmonico, al quale ha dovuto ricorrere il citato autore, limitandomi a supporre note le poche nozioni metriche su rette e piani, che si studiano nei Licei.

---

1. Teorema. — *È possibile stabilire una corrispondenza univoca fra i punti ed i piani dello spazio in modo che ogni punto* P *individui un piano* π *che passa per esso, e viceversa* π *individui* P.

Una tale corrispondenza si può stabilire in infiniti modi; a noi basterà dare un esempio.

Si scelgano tre rette arbitrarie p, p', r sghembe a due a due. Preso un punto arbitrario P si faccia ad esso corrispondere un piano π individuato dalla retta a_1 che, passando per P, si appoggia a p, p' e dal punto A_1 d'incontro della r con la retta b_1 individuata dai punti d'incontro di p, p' col piano Pr.

Da questa costruzione risulta che, dato il piano π, il punto P ad esso corrispondente si troverà come incontro della retta a_1, che passa per i punti d'incontro di p, p' con π, e del piano che passa per la r e per la retta che, passando per πr, si appoggia a p, p'.

Definizione. — *Una tale corrispondenza si dice involutoria.*

Ogni punto P si dice *polo* del suo piano corrispondente π, e questo *piano polare* di P.

Con questa e con moltissime altre costruzioni si può ottenere la corrispondenza richiesta.

Corollario. — *Tutte le rette che, passando per un punto* P, *giacciono nel suo piano polare* π *rispetto ad una corrispondenza univoca involutoria costituiscono un sistema di rette tale che ogni fascio di rette ne contiene una sola, o è formato interamente di rette del sistema.*

Sia F un fascio di centro P in un piano α. Se α non coincide col piano π polare di P, la sola retta $\alpha\pi$ del fascio F appartiene al sistema considerato. Se α coincide con π tutte le rette del fascio F appartengono al sistema.

Osservazione. — Se la retta r incontra p, è facile vedere che non esiste più la corrispondenza univoca sopra indicata, poichè in tal caso ad ogni punto A corrisponde il fascio Ap, e se A è su p il piano corrispondente è indeterminato.

2. Definizione. — *Si chiama* **complesso lineare** *un sistema di rette tale che ogni fascio di rette contenga una ed una sola retta del sistema o sia formato di rette tutte appartenenti al sistema.*

Il sistema di rette che incontrano una retta data o quello delle rette determinate da una corrispondenza univoca e involutoria, come nel § precedente, verificano evidentemente le condizioni precedenti.

Teorema I. — *Le rette di un complesso che passano per un punto* A *o formano un fascio, o sono tutte quelle della stella di centro* A.

Le rette di un complesso situate in un piano α *o formano un fascio o sono tutte quelle del piano* α.

Per ogni punto A passano infinite rette del complesso, poichè ogni fascio di centro A ne contiene o una o infinita.

Se a_1, a_2 sono due rette del complesso passanti per A, ogni retta del fascio determinato da esse appartiene per la data definizione al complesso. Se esiste un'altra retta a_3 del complesso fuori del piano a_1a_2, ogni altra retta a della stella di centro A appartiene pure al complesso. Infatti il piano a_3a incontra il piano a_1a_2 in una retta a_4 del complesso, perciò anche tutte le rette del fascio a_3a_4 (ed in particolare a) appartengono al complesso.

Definizioni. — *Un punto si chiama* **ordinario** *o* **singolare**, *secondo che è centro di un fascio, o di una stella formata di rette del complesso. Nel primo caso il piano del fascio si dice* **polare** *del punto.*

Un piano si chiama **ordinario** *o* **singolare**, *secondo che contiene un fascio di rette del complesso, o tutte le sue rette sono del complesso. Nel primo caso il centro del fascio si dice* **polo** *del piano dato.*

Teorema II. — *Se esiste un punto singolare, ne esiste almeno un secondo.*

Se esiste un piano singolare, ne esiste almeno un secondo.

Sia P un punto singolare, α un piano qualunque non passante per P ed A il polo di α. Poichè tutte le rette di α passanti per A ed AP appartengono al complesso, anche ogni altra retta della stella di centro A appartiene al complesso, e quindi A è un punto singolare.

Teorema III. — *Se due punti* P_1, P_2 *sono singolari, ogni punto della retta* $r = P_1P_2$ *è singolare, e tutti i piani per* r *sono singolari.*

Se due piani π_1, π_2 *sono singolari, ogni piano per la retta* $r = \pi_1\pi_2$ *è singolare, e tutti i punti della* r *sono singolari.*

Conduciamo per il punto M della r una retta arbitraria a, e su essa prendiamo un punto N. Le rette NP_1, NP_2 appartenendo al complesso, anche la a, che fa parte del fascio individuato da esse, appartiene al complesso. Dunque M è singolare.

Ogni piano per la r è pure singolare, poichè tutte le sue rette appartengono al complesso.

TEOREMA IV. — *Se tre punti non in linea retta sono singolari, tutti i punti dello spazio sono singolari.*

Se tre piani, che non passano per una retta, sono singolari, tutti i piani dello spazio sono singolari.

Sieno P_1, P_2, P_3 tre punti singolari non in linea retta, ed M un punto arbitrario fuori del loro piano. Le rette MP_1, MP_2, MP_3 appartengono al complesso e non sono in un piano, perciò M è un punto singolare.

Se N è un punto del piano $P_1 P_2 P_3$, si dimostra egualmente che è singolare, perchè le tre rette NP_1, NP_2, NPM, non situate in un piano, appartengono al complesso.

COROLLARIO. — *In un complesso o non esistono punti (e piani) singolari, o sono singolari tutti quelli di una retta, o sono singolari tutti i punti (e piani) dello spazio.*

Se sono singolari tutti i punti di una retta r e tutti i piani che passano per essa, il complesso è costituito da tutte le rette che incontrano r. Si dice allora che esso è *speciale*, e che r è il suo *asse*.

Se sono singolari tutti i punti dello spazio, tutte le rette dello spazio appartengono al sistema, ed allora non abbiamo più un vero complesso.

Se non esistono punti e piani singolari, esiste corrispondenza univoca involutoria, senza eccezioni, fra i punti e i piani dello spazio.

In ciò che segue colla parola *complesso* indicheremo sempre il complesso senza punti singolari, se non sarà esplicitamente detto il contrario.

3. TEOREMA. — *Se A è polo di α, ogni punto di α deve avere un piano polare passante per A.*

Infatti se B è un punto di α la retta AB appartiene al complesso, e quindi il piano polare di B contiene questa retta, e passa per A.

COROLLARI. — 1°. *I punti di una retta del complesso hanno per polari i piani che passano per essa.*

Se r è una retta del complesso, ogni punto P di essa ha un piano polare che contiene la r. I piani polari di due punti qualunque non possono coincidere, perchè se coincidessero, il piano sarebbe singolare.

2°. *Ogni retta* r, *non appartenente al complesso, individua una retta* r' *inviluppo dei piani polari dei punti di* r *e luogo di poli dei piani per* r.

Siano A, B due punti arbitrari di r; i loro piani polari, non passando per r, si tagliano secondo una retta r'. Se M è un punto qualunque di r', esso ha per piano polare MAB, poichè MA, MB sono rette del complesso. In altre parole la r' taglia i piani per r nei loro poli.

In simil guisa si dimostra che la r taglia i piani per r' nei loro poli.

DEFINIZIONE. — *Due rette* r, r' *ciascuna delle quali è il luogo dei poli* *dei piani che passano per l'altro si dicono* **reciproche** *o* **polari** *rispetto al complesso.*

Corollari. — 3°. *Se una retta del complesso incontra una retta* r, *incontra anche la sua reciproca; viceversa ogni retta che incontra due rette reciproche appartiene al complesso.*

4°. *Tutte le rette di un piano* α *hanno per reciproche quelle della stella che ha per centro il polo* A *di* α.

4. Teorema I. — *Un complesso è individuato da due rette* p, p′ *reciproche rispetto ad esso e da una sua retta* r, *purchè* p, p′, r *sieno sghembe due a due.*

Infatti per determinare il piano polare di un punto A o il polo di un piano α basta evidentemente eseguire le costruzioni del § 1.

Le tre rette p, p', r possono essere scelte ad arbitrio.

Teorema II. — *Un complesso è individuato da 5 sue rette sghembe due a due.*

Siano r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 cinque rette sghembe due a due. Esistono due sole rette p, p' che si appoggiano a r_1, r_2, r_3, r_4. Il complesso cercato è quello che ha p, p' per rette reciproche e che contiene la retta r.

Corollario. — *Date cinque rette* r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 *sghembe due a due, e che non incontrano una stessa retta, sieno* p_1, p'_1 *le due rette che le incontrano tutte, esclusa la* r_1.

Le cinque rette che passano per un punto P *e incontrano una coppia di rette* p_1, p'_1 *giacciono in un piano* π *(polare di* P*).*

Le cinque rette che giacciono in uno stesso piano π *e incontrano una coppia di rette* p_1, p'_1, *passano per un punto* P *(polo di* π*).*

5. Le rette del piano all'infinito hanno per reciproche le rette che passano per il polo del piano stesso, e che per conseguenza sono parallele.

Teoremi. — 1°. *Il luogo dei poli di un fascio di piani paralleli è una retta che si chiama* **diametro coniugato** *a questi piani.*

2°. *Tutti i diametri sono paralleli.*

3°. *Esiste un diametro perpendicolare ai piani ai quali è coniugato. Esso si chiama* **asse del complesso.**

L'asse del complesso si trova facilmente nel modo seguente. Costruito il diametro d coniugato ad una serie di piani paralleli, si conducano i piani perpendicolari a d; il diametro coniugato a questo è l'asse.

4°. *Tutte le rette del complesso che incontrano l'asse sono perpendicolari all'asse; viceversa tutte le rette, che sono perpendicolari all'asse e l'incontrano, appartengono al complesso.*

5°. *Ogni retta che incontra due rette reciproche e l'asse è perpendicolare all'asse.*

Infatti se una retta incontra due rette reciproche, appartiene al complesso, e se incontra l'asse, deve essere perpendicolare ad esso.

6. Teoremi. — I. *Due rette reciproche giacciono in due piani paralleli all'asse.*

Sieno p, p' due rette reciproche, π, π' i piani condotti l'uno per p parallelo a π', l'altro per p' parallelo a p. La retta comune a π, π', incontrando p, p', appartiene al complesso, e siccome è situata nel piano all'infinito, passa per il polo di questo piano. Dunque l'asse del complesso è parallelo a π, π'.

II. *La retta, che è perpendicolare a due rette reciproche e le incontra, è pure perpendicolare all'asse e l'incontra.*

Se una retta r è perpendicolare alle rette reciproche p, p', è anche perpendicolare ai piani paralleli π, π', che passano per esse, e quindi anche all'asse. Incontrando poi p, p', deve incontrare anche l'asse.

7. Teorema. — *Un complesso è individuato dal suo asse e da una sua retta.*

Questo teorema è un caso particolare del teorema I del § 4, poichè dare l'asse equivale ad assegnare una coppia di rette reciproche.

8. Teorema. — *Se si sposta un complesso, facendo scorrer l'asse su se stesso, o eseguendo una rotazione attorno all'asse, il complesso scorre su se stesso.*

1°. Facendo scorrere l'asse su se stesso, anche ogni diametro scorre su se stesso, e quindi il piano polare α di un punto A situato su uno di questi diametri viene a coincidere col piano polare α' (ad esso parallelo) di un altro punto A' situato sullo stesso diametro.

Dunque ogni retta del complesso viene a coincidere con un'altra retta del complesso stesso, ossia questo *scorre* su se stesso.

2°. Sia a l'asse del complesso, r una retta del complesso la quale incontri due piani arbitrari π, π', condotti per a, in due punti A, A' egualmente distanti dall'asse, B, B' le proiezioni di A, A' su a.

Le rette AB, A'B' (§ 5, Teorema 4°) appartengono al complesso, r pure appartiene al complesso, dunque i piani polari di A, A' sono rispettivamente $\alpha = AA'B$, $\alpha' = A'AB'$. Ora se si rovescia il diedro $\pi\pi'$, in modo che B vada in B' e viceversa, si vede che il tetraedro ABA'B' viene a coincidere con se stesso in modo che lo spigolo AB coincide con lo spigolo A'B'. Ciò prova che il diedro $\pi\alpha$ è eguale al diedro $\pi'\alpha'$; dunque i piani polari di punti equidistanti dall'asse fanno diedri eguali coi piani individuati dai punti stessi e dall'asse.

Ne segue che facendo rotare la figura attorno all'asse, in guisa che un punto A prenda la posizione A_1, il piano polare del punto A coincide col piano polare di A_1.

9. Teorema. — *Se* A *è un punto di una retta* x *perpendicolare all'asse* a *in un punto* O, *e si pone* OA = d *e s'indica con* φ *l'angolo che il piano polare di* A *(passante per* x*) fa col piano* ax, *si ha la relazione*

$$d \, . \tan \varphi = costante$$

Consideriamo il piano π' perpendicolare al piano ax condotto per a, e sia α il piano polare di A che taglia π' secondo una retta che passa per O. Su questo si prenda un punto A' alla distanza d' dall'asse, e sia O' la proiezione di A' sull'asse. È evidente che AOA', AO'A' sono i piani polari di A e A' rispettivamente, e che gli angoli φ, φ' che essi fanno con π e π' sono $\varphi = \widehat{O'OA'}$, $\varphi' = \widehat{OO'A}$. Dai triangoli rettangoli AOO', A'OO' si ricava, posto $OO' = h$,

$$\tan\varphi = \frac{d'}{h}, \qquad \tan\varphi' = \frac{d}{h},$$

e quindi

$$d \,.\, \tan\varphi = d' \,.\, \tan\varphi' = \text{costante}$$

e così, tenuto conto del teorema del § 6, il teorema è dimostrato.

10. Il teorema del § precedente ci dà una costruzione del complesso, che ci permette di farci un' idea del modo col quale esso è costituito.

Poichè ogni retta deve incontrare un piano dato, basterà scegliere un piano π qualunque per l'asse, e costruire tutti i fasci di rette del complesso che hanno per centri i punti del medesimo.

A tale scopo si conduca una retta x perpendicolare all'asse in un punto O. Se è data una retta del complesso, potremo determinare l'angolo φ relativo ad un punto A di φ, e per mezzo di esso la costante che comparisce nel teorema precedente.

Per mezzo di essa potremo determinare tutti i fasci di rette del complesso che hanno per centri i punti di x.

Si otterranno poi i fasci relativi ai punti di ogni altra retta del piano π parallelo ad x, considerando che i punti situati su un diametro, hanno i piani polari paralleli.

G. Lazzeri.

UN NOTEVOLE SPECCHIO DI NUMERI

1. Si formi uno specchio (A) di numeri ponendo nella prima linea l'unità; nella seconda due unità; nella terza il doppio di ciascun elemento della seconda, aumentato dell'elemento a sinistra; nella quarta il triplo di ciascuno elemento della terza, aumentato da quello immediatamente a sinistra. In generale, se con $\alpha_{i,j}$ intendiamo l'elemento di posto i-esimo della linea j-esima, sia

(1) $$\alpha_{i,j} = (j-1)\,\alpha_{i,j-1} + \alpha_{i-1,j-1}.$$

Ecco alcune linee dello specchio (A)

1					
1	1				
2	3	1			
6	11	6	1		
24	50	35	10	1	
120	274	225	85	15	1
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

2. Dimostriamo subito che

gli elementi della h*-esima linea di* (A) *sono i coefficenti delle successive potenze di* m *fino alla* h*-esima nel polinomio di* h*-esimo grado in* m, *cui dà luogo lo sviluppo del prodotto*

$$m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+h-1).$$

Ammettendo che ciò sia vero per $h=k-1$, mostreremo che è vero anche per $h=k$, e poichè la cosa si verifica per $h=1,2,3$, essa sarà provata in generale.

Sia dunque

$$m(m+1)\ldots(m+k-2)=\alpha_{1,k-1}m+\alpha_{2,k-1}m^2+\ldots+\alpha_{k-1,k-1}m^{k-1}.$$

Moltiplichiamo per $m+k-1$; otterremo

$$m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-2)(m+k-1)=(k-1)\,\alpha_{1,k-1}m+ \\ +\left\{(k-1)\,\alpha_{2,k-1}+\alpha_{1,k-1}\right\}m^2+\left\{(k-1)\,\alpha_{3,k-1}+\alpha_{2,k-1}\right\}m^3+\ldots \\ +\left\{(k-1)\,\alpha_{k-1,k-1}+\alpha_{k-2,k-1}\right\}m^{k-1}+\alpha_{k-1,k-1}m^k,$$

e per la (1)

$$(2)\qquad m(m+1)(m+2)\ldots(m+k-1)=\alpha_{1,k}m+\alpha_{2,k}m^2+\ldots+\alpha_{k,k}m^k.\text{(*)}$$

Se poniamo nella (2) $m=1$, otteniamo

$$(3)\qquad 1.2.3\ldots k=\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}+\ldots+\alpha_{k,k}.$$

Onde:

La somma degli elementi della k*-esima linea di* (A) *è uguale a* k!

Ponendo invece $m=-1$ si ha

$$(4)\qquad 0=-\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}-\alpha_{3,k}+\ldots+(-1)^k\alpha_{k,k}.$$

Onde:

In ogni linea di (A) *la somma degli elementi di posto pari è uguale a quella degli elementi di posto dispari.*

Poichè la (1) per $i=1$ diventa

$$(5)\qquad \alpha_{1,j}=(j-1)\,\alpha_{1,j-1},$$

si deduce evidentemente:

Il primo elemento della linea k*-esima è uguale a* k-1!

(*) Osserviamo una volta per sempre che qualunque sia r, $\alpha_{r,r}=1$.

3. Con un procedimento del tutto analogo a quello tenuto per la dimostrazione della prima proposizione, si dimostra che:

gli elementi della **k**-*esima linea di* (A) *moltiplicati per* $(-1)^{k-i}$, *essendo* i *il numero d'ordine degli elementi stessi, sono i coefficienti delle successive potenze di* m *nel polinomio di* k-*esimo grado in* m, *cui dà luogo lo sviluppo del prodotto*

$$(6) \qquad m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-k+1).$$

È adunque

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)=(-1)^{k+1}\alpha_{1,k}m+(-1)^{k-2}\alpha_{2,k}m^2-\ldots+(-1)^{2k-1}\alpha_{k-1,k}m^{k-1}+\alpha_{k,k}m^k.$$

In particolare, se n è intero,

$$n!=(-1)^{n+1}\alpha_{1,n}n+(-1)^{n+2}\alpha_{2,n}n^2+\ldots+\alpha_{n,n}n^n.$$

Possiamo anche esprimere $n!$ mediante le successive potenze di qualsiasi intero $h<n$.

Consideriamo il prodotto

$$(7) \qquad m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n);$$

allora, se h è un numero intero e positivo minore di n, scindiamo il prodotto (7) nei fattori

$$m(m+1)\ldots\ldots(m+h-1) \quad \text{e} \quad (m+h)(m+h+1)\ldots\ldots(m+n),$$

il primo dei quali è uguale a

$$(8) \qquad \alpha_{1,h}m+\alpha_{2,h}m^2+\ldots+\alpha_{h,h}m^h,$$

ed il secondo a

$$(9) \qquad \alpha_{1,n-h+1}(m+h)+\alpha_{2,n-h+1}(m+h)^2+\ldots+\alpha_{n-h+1,\,n-h+1}(m+h)^{n-h-1}.$$

Cerchiamo nel prodotto di (8) per (9) il coefficiente di m. Esso sarà, com'è facile vedere,

$$\alpha_{1,h}(\alpha_{1,n-h+1}h+\alpha_{2,n-h+1}h^2+\ldots+\alpha_{n-h-1,\,n-h+1}h^{n-h-1}).$$

Ma d'altra parte, sviluppando nel solito modo, il coefficiente di m è $\alpha_{1,n+1}=n!$

Onde:

Se h *ed* n *sono numeri interi, ed* $h<n$, *sussiste l'eguaglianza*

$$(10) \qquad n!=\alpha_{1,h}(\alpha_{1,n-h+1}h+\alpha_{2,n-h+1}h^2+\ldots+\alpha_{n-h+1,\,n-h+1}h^{n-h+1}).$$

4. Il prodotto (6), a seconda che si considera come prodotto di k numeri crescenti oppure di k numeri decrescenti, è uguale a

$$(11) \qquad \alpha_{1,k}m+\alpha_{2,k}m^2+\ldots+\alpha_{k,k}m^k,$$

oppure

$$(12) \quad (-1)^{k+1}\alpha_{1,k}(m+k-1)+(-1)^{k+2}\alpha_{2,k}(m+k-1)^2+\ldots+\alpha_{k,k}(m+k-1)^k.$$

Possiamo intanto dire:

Nel polinomio di k*-esimo grado ordinato per le potenze ascendenti (esclusa la potenza ad esponente nullo) di un numero qualunque* m, *aventi per coefficienti ordinatamente gli elementi della* k*-esima linea dello specchio* (A), *si può sostituire ad* m, m + k − 1, *purchè si moltiplichi ogni coefficiente* $\alpha_{s,k}$ *per* $(-1)^{k-s}$.

Cerchiamo in (12) il coefficiente della potenza s-esima di m.

Esso è

$$\binom{s}{s}(-1)^{k+s}\alpha_{s,k}+\binom{s+1}{s}(-1)^{k+s+1}\alpha_{s+1,k}(k-1)+$$
$$+\binom{s+2}{s}(-1)^{k+s+2}\alpha_{s+2,k}(k-1)^2+\ldots+\alpha_{k,k}\binom{k}{s}(k-1)^{k-s},$$

il quale per l'identità di (11) e (12) sarà uguale a $\alpha_{s,k}$.

Onde abbiamo le relazioni

$$\sum_{i=0}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s-i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i=\alpha_{s,k}$$
$$\sum_{i=1}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s-i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i=0 \text{ per } k+s \text{ pari}$$
$$\sum_{i=1}^{i=k-s}\binom{s+i}{s}(-1)^{k+s+i}\alpha_{s+i,k}(k-1)^i=2\alpha_{s,k} \text{ per } k+s \text{ dispari.}$$

5. Poichè è

$$\prod_{i=0}^{i=k-1}(x-i)=\sum_{i=1}^{i=k}(-1)^{k+i}\alpha_{i,k}x^i,$$

si può dire che:

L'equazione di k° *grado che ammette per radici i numeri* 0, 1, 2 ... k − 1 è

$$(-1)^{k+1}\alpha_{1,k}x+(-1)^{k+2}\alpha_{2,k}x^2+\ldots+\alpha_{k,k}x^k=0.$$

E poichè è

$$\prod_{i=0}^{i=k-1}(x+i)=\sum_{i=1}^{i=k}\alpha_{i,k}x^i,$$

si deduce che:

L'equazione di k° *grado, che ammette per radici i numeri* 0, −1, −2, ... −(k − 1) è

$$\alpha_{1,k}x+\alpha_{2,k}x^2+\alpha_{3,k}x^3+\ldots+\alpha_{k,k}x^k=0.$$

6. Denotiamo con $s_{h,n}$ $(h<n)$ la somma dei $\binom{n-1}{h}$ prodotti dei numeri 1, 2, 3 ... $n-1$ combinati ad h ad h in tutti i modi possibili. Dalle relazioni che corrono fra i coefficienti e le radici di un'equazione, deduciamo che

$$s_{h,n}=\alpha_{n-h,n}.$$

Secondo questa relazione

$$\alpha_{nn}=s_{o,n},$$

e siamo però condotti a porre

$$s_{o,n}=1.$$

Discende adunque che:

Nello specchio (A) *l'elemento* $\alpha_{h,k}$ *è uguale alla somma dei prodotti dei numeri* $1, 2, 3 \ldots k-1$ *combinati a* $k-h$ *a* $k-h$ *in tutti i modi possibili.*

La (1) diviene

$$s_{i,j} = (j-1)\, s_{i-1,j-1} + s_{i,j-1}. \tag{13}$$

La (3) riceve l'interpretazione seguente:

La somma di tutte le $s_{h,k}$ *relative ad* $h = 0, 1, 2, 3, \ldots k$ *è uguale a* k:

E la (4) dimostra che:

La somma delle $s_{h,k}$ *relative ad* h *nullo e pari è uguale alla somma delle* $s_{h,k}$ *relative ad* h *dispari, quando si faccia successivamente* $h = 0, 1, 2, \ldots k$.

7. Se nella (1) si pone in particolare $i = j-1$, si ha

$$\alpha_{j-1,j} = (j-1)\, \alpha_{j-1,j-1} + \alpha_{j-2,j-1}.$$

Per $j = 2, 3, \ldots m$ si ha

$$\alpha_{1,2} = 1$$
$$\alpha_{2,3} = 2\, \alpha_{2,2} + \alpha_{1,2}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_{m-1,m} = (m-1)\, \alpha_{m-1,m-1} + \alpha_{m-2,m-1}.$$

Sommando membro a membro

$$\alpha_{m-1,m} = s_{1,m} = \sum_{n=1}^{n=m-1} n\alpha_{n,n} = \frac{(m-1)\,m}{2}.$$

Poniamo nella (1) $i = j-2$; con ciò si ottiene

$$\alpha_{j-2,j} = (j-1)\, \alpha_{j-2,j-1} + \alpha_{j-3,j-1}.$$

Con un processo analogo a quello tenuto or ora, si ottiene

$$\alpha_{m-2,m} = \sum_{n=1}^{n=m-2} (n+1)\, \alpha_{n,n+1} = \sum_{n=1}^{n=m-2} \frac{n\,(n+1)^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=m-2} (n^3 + 2n^2 + n).$$

Ora si sa essere (cfr. CESÀRO, *Corso d'Anal. Alg.*, cap. XLI, § 4)

$$\sum_1^p n^2 = \frac{p^3}{3} + \frac{p^2}{2} + \frac{p}{6},$$
$$\sum_1^p n^3 = \frac{p^4}{4} + \frac{p^3}{2} + \frac{p^2}{4}.$$

Tenendo conto di queste formule,

$$\alpha_{m-2,m} = s_{2,m} = \frac{1}{24}(3m^4 - 10m^3 + 9m^2 - 2m).$$

Se si pone nella (1) $i = j-3$ e $i = j-4$, e si hanno presenti le relazioni

$$\sum_1^p n^4 = \frac{p^5}{5} + \frac{p^4}{2} + \frac{p^3}{3} - \frac{p}{30}$$
$$\sum_1^p n^5 = \frac{p^6}{6} + \frac{p^5}{2} + \frac{5p^4}{12} - \frac{p^2}{12}$$
$$\sum_1^p n^6 = \frac{p^7}{7} + \frac{p^6}{2} + \frac{p^5}{2} - \frac{p^3}{6} + \frac{p}{42}$$
$$\sum_1^p n^7 = \frac{p^8}{8} + \frac{p^7}{2} + \frac{7p^6}{12} - \frac{7p^4}{24} + \frac{p^2}{12},$$

si trova

$$\alpha_{m-3,m} = s_{3,m} = \frac{1}{48}(m^6 - 7m^5 + 17m^4 - 17m^3 + 6m^2)$$

$$\alpha_{m-4,m} = s_{4,m} = \frac{1}{5760}(15m^8 - 180m^7 + 830m^6 - 1848m^5 + 2015m^4 -$$
$$- 900m^3 + 20m^2 + 48m).$$

Abbiamo così espresse le somme dei prodotti dei primi m numeri interi combinati in tutti i modi possibili ad 1 ad 1; a 2 a 2; a 3 a 3; a 4 a 4, in funzione di m. Si potrebbe ancora, seguendo il procedimento tenuto sopra, esprimere le $s_{h,m}$ in funzione di m, qualunque sia h, poichè si possono calcolare, per qualsiasi q intero, (*) le $\sum_{n=1}^{n=p} n^q$ da cui dipendono.

8. Possiamo esprimere $\sum_1^m n^3$ mediante i numeri dello specchio (A). Infatti

$$\alpha_{m,m+2} - \alpha_{m-1,m+1} = s_{2,m+2} - s_{2,m-1} = \frac{m^3}{2} + m^2 + \frac{m}{2},$$

onde

$$\sum_1^m n^3 = \frac{m}{2}(\alpha_{m,m+2} - \alpha_{m-1,m+1}) = \frac{m}{2}(s_{2,m+2} - s_{2,m+1}).$$

9. Vogliamo dimostrare che il valore del determinante

$$D = \begin{vmatrix} s_{n,n+1} & s_{n-1,n+1} & \cdots & s_{n-k+1,n+1} \\ s_{n+1,n+2} & s_{n,n+2} & \cdots & s_{n-k+2,n+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n+k-1,n+k} & s_{n+k-2,n+k} & \cdots & s_{n,n+k} \end{vmatrix}$$

è $(n!)^k$.

Per dimostrare ciò, prendiamo prima in considerazione un determinante Δ, in cui gli elementi della prima linea siano t numeri

$$\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_t,$$

e gli elementi delle altre linee siano derivati dai numeri β in modo che, se $A_{m,n}$ è l'elemento appartenente alla linea m-esima ed alla n-esima colonna, sia

$$A_{m,n} = \lambda_m A_{m-1,n} + A_{m-1,n-1}$$

(λ_m numero qualunque).

Si prova allora facilmente che

$$\Delta = \beta_1^t.$$

(*) Denotando con $B_1, B_2, B_3 \ldots$ i numeri di Bernoulli (CESÀRO, *l. c.*) si ha

$$\sum_{n=1}^{n=p} n^q = \frac{p^{q+1}}{q+1} + B_1 p^q + \frac{1}{2} q B_2 p^{q-1} + \frac{1}{3}\binom{q}{2} B_3 p^{q-2} + \frac{1}{4}\binom{q}{3} B_4 p^{q-3} + \ldots + B_q p.$$

Del resto si possono calcolare queste somme in altri modi: cfr. PINCHERLE, *Algebra Compl.* Parte I, § 57.

Ma il determinente D per la relazione (1) è dello stesso tipo di Δ, epperò il suo valore sarà

$$(s_{n,n+1})^k = (n!)^k .$$

10. Si abbia la progressione aritmetica

$$1+d,\quad 1+2d,\quad 1+3d, \dots 1-nd$$

e si considerino i primi m termini.

Dopo quanto abbiamo detto, è facile provare che la somma dei $\binom{m}{h}$ prodotti degli m termini detti, combinati in tutti i modi possibili (che indicheremo con $S_{h,m}$) è data da

$$S_{h,m} = \binom{m}{h} + \binom{m-1}{h-1} s_{1,m+1} d + \binom{m-2}{h-2} s_{2,m+1} d^2 + \dots$$
$$+ \binom{m-h-1}{1} s_{h-1,m+1} d^{h-1} + s_{h,m+1} d^h.$$

Si dimostra facilmente che:

la somma delle $S_{h,m}$ *relative ad* h *nullo o pari è uguale alla somma delle* $S_{h,m}$ *relative ad* h *dispari, quando si faccia* $h = 0.1.2.3.\dots m$.

Infatti

$$S_{0,m} = 1$$
$$-S_{1,m} = -\left\{\binom{m}{1} + s_{1,m+1} d\right\}$$
$$S_{2,m} = \binom{m}{2} + \binom{m-1}{1} s_{1,m+1} d + s_{2,m+1} d^2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(-1)^h S_{h,m} = (-1)^h \left\{\binom{m}{h} + \binom{m-1}{h-1} s_{1,m+1} d + \dots + \binom{m-h+1}{1} s_{h-1,m+1} d^{h-1} + s_{h,m+1} d^h\right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$(-1)^m S_{m,m} = (-1)^m \left\{\binom{m}{m} + \binom{m-1}{m-1} s_{1,m+1} d + \dots + s_{m-1,m+1} d^{m-1} + s_{m,m+1} d^m\right\}.$$

Sommando membro a membro, ordiniamo il secondo membro per le potenze di d: ogni coefficiente è della forma

$$s_{\nu,m+1} \sum_{k=\nu}^{k=m} (-1)^k \binom{m-\nu}{k-\nu},$$

che è evidentemente nullo.

Onde

$$\sum_{h=0}^{h=m} (-1)^h S_{h,m} = 0,$$

che è quanto volevasi provare.

FILIPPO SIBIRANI.

Bologna, dicembre 1900.

SULLA RICERCA DEI POLIGONI REGOLARI

che possono decomporsi in poligoni pure regolari

1. Indicando con L ed S respettivamente l'ordine e la specie di un dato poligono regolare, che chiameremo P, e con

$$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n,$$
$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$$

le quantità analoghe per gli n poligoni della scomposizione, $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ che concorrono in uno stesso vertice di P, avremo la relazione:

$$\sum_1^n \frac{l_r - 2s_r}{l_r} 180^\circ = \frac{L - 2S}{L} 180^\circ. \tag{1}$$

ovvero

$$2 \sum_1^n \frac{s_r}{l_r} - (n-1) = \frac{2S}{L} \tag{1'}$$

la quale, di per sè sola, lascia indeterminato il problema che vogliamo risolvere. Infatti prendendo per unità di misura degli angoli 180°, e indicando per brevità nella (1), con $\frac{a}{b}$, e con $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$, respettivamente il valore del 2° membro, e quelli degli n termini del primo, si vede subito che in infiniti modi può essere soddisfatta la relazione,

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}; \tag{2}$$

perchè, se l_r ed s_r indicano respettivamente l'ordine e la specie dell'r^{mo} poligono, l'eguaglianza

$$\frac{(l_r - 2s_r)}{l_r} = \frac{a_r}{b_r},$$

che può mettersi sotto la forma

$$\frac{s_r}{l_r} = \frac{b_r - a_r}{2b_r}, \tag{2'}$$

mostra che per ognuno degli infiniti valori che si deducono dalla (2) per la frazione $\frac{a_r}{b_r}$, e quindi per a_r e b_r, si possano trovare infiniti valori per l_r ed s_r capaci di soddisfare alla relazione precedente; il che prova appunto che in infiniti modi si può scomporre l'angolo al vertice di un dato poligono regolare in n angoli, eguali respettivamente agli angoli al vertice di altrettanti poligoni pure regolari.

Esempio. — Per il tetradecagono di 2ª specie si ha: $\frac{a}{b} = \frac{L - 2S}{L} = \frac{5}{7}$; volendo ora scomporre l'angolo di questo poligono, ad es., in quattro parti, eguali respettivamente agli angoli di 4 poligoni regolari, si potranno prendere a caso i rapporti $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$, coll'unica condizione che la somma di queste tre frazioni sia inferiore a $\frac{5}{7}$, e prendere poi

$$\frac{a_4}{b_4} = \frac{5}{7} - \left(\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3}\right).$$

Facendo per es. $\frac{a_1}{b_1}=\frac{1}{8}$; $\frac{a_2}{b_2}=\frac{5}{12}$; $\frac{a_3}{b_3}=\frac{3}{20}$; si trova $\frac{a_4}{b_4}=\frac{19}{840}$; e quindi, per la (2'),

$$\frac{s_1}{l_1}=\frac{1439}{2880}\ ;\ \frac{s_2}{l_2}=\frac{431}{864}\ ;\ \frac{s_3}{l_3}=\frac{179}{360}\ ;\ \frac{s_4}{l_4}=\frac{1499}{3024},$$

ossia basta prendere quattro poligoni regolari qualunque, pei quali i rapporti fra la specie e l'ordine siano respettivamente eguali ai rapporti numerici precedentemente trovati, perchè essi, nel concorrere alla scomposizione di un angolo del poligono di P, non si sovrappongano nè lascino lacune tra di loro.

Ciò premesso veniamo a determinare tutte le soluzioni del problema generale proposto, distinguendo la ricerca in due parti: nella prima ci occuperemo del caso in cui nessuno dei vertici dei poligoni di $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ cade sui lati del poligono P; nella seconda, invece, toglieremo affatto questa limitazione.

2. Per la prima parte della ricerca cominceremo ad osservare che il lato di ciascun poligono della scomposizione, che sta intorno al perimetro di P, deve essere eguale a quello dello stesso P; e siccome un poligono regolare intrecciato è concavo rispetto a ciascuno dei suoi lati, così non è possibile di rendere i poligoni $p_1, p_2, \ldots p_n$ adiacenti ai lati di P, se questo non è di 1ª specie, senza che non si sovrappongano in parte tra di loro.

Ciò porta a concludere che, nel caso di cui ora ci occupiamo, il poligono P non può essere che di prima specie. Parimente tutti i poligoni della scomposizione che stanno intorno al perimetro di P debbono essere di prima specie. Infatti, se in un vertice di P concorresse un solo poligono e questo fosse intrecciato, allora, o alcune parti di questo uscirebbero al di fuori di P, oppure si presenterebbero in P delle lacune; se invece vi concorressero almeno due poligoni, e uno di questi, almeno, fosse intrecciato, si presenterebbero delle sovrapposizioni fra i poligoni; dovendo esser dunque tutti i poligoni di prima specie, la relazione (1') può, in questo caso, mettersi sotto la forma

$$2\left(\frac{1}{l_1}+\frac{1}{l_2}+\frac{1}{l_3}+\ldots+\frac{1}{l_n}\right)-\left(n-1\right)=\frac{2}{\mathrm{L}}\ ; \tag{3}$$

ed osservando poi che deve essere $2\sum_1^n\frac{1}{l_r}>n-1$, e che il massimo valore di $\sum_1^n\frac{1}{l_r}$ si ottiene quando tutte le l sono eguali a 3, nel qual caso deve aversi

$$\frac{2n}{3}>n-1 \qquad \text{ossia } n<3,$$

si conclude che in ciascun vertice di P non possono concorrere più di due poligoni regolari. Dopo ciò la (3) può ridursi all'altra

$$\mathrm{L}=\frac{2l_1\,l_2}{2(l_1+l_2)-l_1\,l_2}. \tag{4}$$

Escludendo ora le infinite soluzioni che si otterrebbero quando si supponesse una delle l eguale a zero, il che darebbe luogo, come si deduce dalla (3), non ad una scomposizione, ma ad un semplice ricoprimento di P con un poligono eguale ad esso, si vede facilmente che la (4) è verificata solamente per i tre seguenti sistemi di valori:

$$\text{I,}\ \begin{cases}l_1=3\\ l_2=3\end{cases}\mathrm{L}=6;\qquad \text{II,}\ \begin{cases}l_1=3\\ l_1=4\end{cases}\mathrm{L}=12;\qquad \text{III,}\ \begin{cases}l_1=3\\ l_2=5\end{cases}\mathrm{L}=30.$$

Ora osserviamo che la relazione (1) impone una condizione necessaria ai soli poligoni della scomposizione che sono disposti a guisa di corona lungo il perimetro di P, ma nulla ci dice per ciò che riguarda i poligoni interni; affinchè dunque sieno accettabili i precedenti sistemi di valori, è necessario di verificare che la porzione di P che rimane ancora scoperta, è alla sua volta scomponibile in poligoni regolari. Ora ciò si verifica facilmente per le soluzioni trovate. Infatti per la I, la corona perimetrale di 6 triangoli ricopre totalmente l'esagono. Per la II, la corona di 6 quadrati e di 6 triangoli, lascia scoperto un esagono regolare. Infine per la III, la corona di 15 triangoli e di 15 pentagoni, lungo il perimetro del triacontagono regolare, lascia scoperto un poligono di 30 lati ad angoli salienti e rientranti, i primi dei quali hanno ciascuno il valore di $360^\circ - 2 \times 108^\circ - 60^\circ = 84^\circ$, che è appunto l'angolo del pentadecagono stellato di 4ª specie.

Riassumendo possiamo dunque dire che, sotto le ipotesi fatte, si hanno le soluzioni:

I. —	Esagono	scomposto in	6 triangoli.
II. —	Dodecagono	"	6 triangoli, 6 quadrati, un esagono (fig. 1).
III. —	Triacontagono	"	15 triangoli, 15 pentagoni, un pentadecagono di 4ª specie (fig. 2).

Si osservi che l'esagono interno della fig. 1 potrebbe alla sua volta scomporsi in 6 triangoli equilateri in conformità della soluzione I.

3. Veniamo ora ad occuparci della scomposizione di P, nella supposizione che lungo il perimetro di esso cadano dei vertici di $p_1 . p_2 . p_3 \ldots . p_n$. In questa ricerca supporremo dapprima che P sia di 1ª specie, poi di specie superiore, e per ognuno di questi due casi supporremo successivamente che tutti i poligoni della scomposizione sieno di prima specie oppure no. Ricorderemo ancora che in tutto ciò che segue quando parleremo di poligoni della scomposizione intenderemo generalmente di riferirci a quei poligoni che stanno intorno al perimetro di P; e quindi perchè ognuna delle soluzioni che troveremo sia accettabile, è necessario verificare sempre che la parte di P che rimane scoperta, dopo i poligoni della corona, è alla sua volta scomponibile in poligoni regolari.

CASO I. - *I poligoni* P *e* $p_1, p_2, \ldots p_n$ *sono di prima specie.*

Per questa ricerca dovremo determinare anzitutto gli aggruppamenti di poligoni pei quali la somma degli angoli concorrenti in uno stesso punto di un lato di P eguaglia 180°. Per questi dovremo avere:

$$\sum_1^n \frac{180(l_r - 2)}{l_r} = 180$$

da cui, $n = 1 + 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} + \ldots + \frac{1}{l_n}\right)$ che dà luogo alle seguenti soluzioni:

$$n = 3, \quad 1 = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \quad ; \quad l_1 = l_2 = l_3 = 3 \tag{5}$$

$$n = 2, \quad 1 = 2\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) \quad ; \quad \begin{cases} l_1 = l_2 = 4 & (6) \\ l_1 = 3,\ l_2 = 6 & (7) \end{cases}$$

Esaminiamo ora i due sottocasi seguenti:

1°. *In ciascun vertice di* P *concorre un solo poligono.* — Con questa ipotesi la (5) e la (6) non possono dar luogo che alla scomposizione di un triangolo e di un quadrato respettivamente in p^2 triangoli e p^2 quadrati, essendo p il numero dei poligoni adiacenti a ciascun lato di P. La scomposizione relativa al triangolo si può osservare nella fig. 10 quando si supponga scomposto in triangoli l'esagono centrale.

La (7) può dar luogo alla scomposizione di un triangolo o di un esagono in triangoli ed esagoni.

Quanto al triangolo, nella supposizione che gli esagoni ed i triangoli si separino a vicenda, abbiamo una scomposizione in

$$\frac{p(p-1)}{2}+\frac{(p+1)(p+2)}{2}=p^2+p+1 \text{ triangoli, e } \frac{p(p+1)}{2} \text{ esagoni (fig. 3).}$$

Nella supposizione, invece, che ogni triangolo sia adiacente per un sol lato ad un esagono, come mostra la fig. 4, il triangolo P risulta scomposto in p^2 esagoni e in $3p^2$ triangoli. Da quest'ultima scomposizione si può dedurre una varietà supponendo di sostituire un esagono a 6 triangoli concorrenti in uno stesso punto, ed in tal caso P contiene

$$p^2+\frac{(p-2)(p-1)}{2}=\frac{3}{2}p(p-1)+1 \text{ esagoni,}$$

e $3p^2-3(p-2)(p-1)=3\{3p-2\}$ triangoli.

In tutte queste formule p rappresenta il numero degli esagoni adiacenti a ciascun lato del triangolo P.

Quanto all'esagono esso può essere decomposto, come mostra la fig. 5, cioè in modo analogo al triangolo della fig. 3; questa scomposizione dà luogo a $3p(p+1)+1$ esagoni, e a $6p(p+1)$ triangoli, ove p rappresenta il numero dei triangoli che insistono sopra ciascun lato dell'esagono P.

2°. *In ciascun vertice di* P *concorrono due poligoni.* — In questa ipotesi la (5) fornisce una scomposizione in $6p^2$ triangoli per il solo esagono (fig. 7).

La (6) non può dar luogo ad alcuna scomposizione.

La (7) dà una scomposizione dell'esagono in triangoli ed esagoni come mostra la fig. 6. Essa può riguardarsi come composta di 6 triangoli analoghi a quello rappresentato dalla fig. 4, e quindi si hanno $6p^2$ esagoni e $18p^2$ triangoli.

Supponendo poi di aver sostituito un esagono a 6 triangoli concorrenti in uno stesso punto, i numeri precedenti divengono rispettivamente:

$$9p(p-1)+6+6(p-1)+1=3p(3p-1)+1 \text{ esagoni;}$$
$$18(3p-2)-36(p-1)-6=6(3p-1) \text{ triangoli.}$$

In queste formule p rappresenta il numero degli esagoni adiacenti a ciascun lato di P.

Alle risoluzioni precedentemente trovate potrebbero aggiungersi anche quelle che si ottengono decomponendo nei modi sopra enumerati, i triangoli i quadrati e l'esagono, che entrano nella scomposizione del decagono regolare (fig. 1).

Caso II. - *Il poligono* P *di prima specie, e* $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ *non tutti di prima specie.*

Potremo distinguere in due questo caso:

1°. *I vertici dei poligoni della scomposizione non cadono sui lati, ma sui vertici di* P. Se in ciascun vertice di P concorressero due poligoni intrecciati, questi, come abbiamo già osservato al principio del num. 2, non potrebbero essere adiacenti tra di loro nè adiacenti ai lati di P; ciò porta a concludere che fra essi e i due lati di P che concorrono in quel vertice, dovrebbero essere inseriti gli angoli di almeno tre poligoni ordinari di prima specie. Ma abbiamo già veduto allo stesso num. 2 che in ciascun vertice di P non possono concorrere più di due poligoni ordinari; dunque è inammissibile la supposizione ora fatta, e per conseguenza in quel vertice non può aversi che un solo poligono stellato (che chiameremo π) in unione a due altri poligoni ordinari non diversi da due triangoli, o da un triangolo ed un quadrato, o da un triangolo ed un pentagono. Ora io dico che in un angolo rientrante R (angolo esterno) di π non può concorrere alcun poligono stellato.

Infatti chiamando con α, β, λ, rispettivamente l'angolo al vertice, l'angolo esterno rientrante R, e il numero dei lati del poligono π, dovremo avere $\alpha = \beta - \frac{360}{\lambda}$. Ma se in R potesse concorrere un poligono stellato, questo dovrebbe essere accompagnato almeno da due poligoni ordinari i quali, anche nel caso più favorevole di triangoli equilateri, condurrebbero per β ad un valore superiore a $120°$, e quindi per α (poichè $\lambda \geq 6$) ad un valore superiore a $60°$; valore questo che associato con quello dei due poligoni, che con π concorrono in uno stesso vertice di P, verrebbe a superare un angolo piatto. Si conclude dunque che in un angolo rientrante esterno di π non può concorrere che un solo poligono.

Possiamo ora dimostrare che i due poligoni che insieme a π concorrono in uno stesso vertice di P, non possono essere che due triangoli equilateri.

Infatti, se essendo l'uno un triangolo equilatero, l'altro fosse un pentagono, il valore β dell'angolo rientrante R, non potrebbe essere che di $108°$, e quindi quello di α, $36°$; ma allora non sarebbe la somma degli angoli dei tre poligoni che concorrono in P, $(60° + 36° + 108°)$ inferiore a $180°$. Se l'altro poligono fosse invece un quadrato, e quindi $\beta = 90°$ e $\alpha = 45°$, si giungerebbe alla medesima conclusione. Infine dico che l'angolo β non può essere che di $60°$. Infatti la serie dei poligoni che fa seguito (lungo il lato di π) al triangolo che concorre in un vertice di P, non può essere formata che di triangoli e di esagoni, e quindi l'angolo β non potrebbe essere che di $60°$ o $120°$; ma se fosse $\beta = 120°$ sarebbe $\alpha = 60°$, e quindi la somma degli angoli dei tre poligoni che concorrono in P, eguaglierebbe $180°$; non resta dunque per β che l'unico valore di $60°$.

Di qui si conclude facilmente che π deve essere dello stesso ordine di P e che questi due poligoni debbono avere i vertici in comune. Per la soluzione del problema dovremo dunque cercare quelle coppie P e π di poligoni pei quali gli spazi che rimangono scoperti in P, dopo che in coincidenza dei vertici di questo si sono posti quelli di π, sieno tanti triangoli equilateri. Ora per soddisfare a queste condizioni basta porre

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{180\,(L-2)}{L} - \frac{180\,(L-2s)}{L}\right\} = 60°$$

che dopo fatte le riduzioni assume la forma, $3s - L = 3$ la quale è soddisfatta per $s = 1$ e $L = 0$, e quindi per tutti i valori di

$$\left.\begin{array}{l} s = 1 + \theta \\ L = 3\,\theta \end{array}\right\} \qquad (8)$$

ove θ rappresenta un numero intero qualunque. Osserviamo poi che se L è pari si deve avere

$$s \leq \frac{L-2}{2}$$

quindi $1 + \theta \leq \frac{3\theta - 2}{2}$ e per conseguenza $\theta \geq 4$.

Se invece L è dispari dovremo pure avere

$$s \leq \frac{L-1}{2}$$

quindi $1 + \theta \leq \frac{3\theta - 1}{2}$, e conseguentemente $\theta \geq 3$. Tutte le soluzioni del problema sono quindi

$$\left\{\begin{array}{llllllll} L = 9, & 12, & 15, & 18, & 21, & 24, & 27, & 30, \ldots \\ s = 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, \ldots \end{array}\right. \qquad (9)$$

che sono in numero infinito. La figura corrispondente alla 2ª soluzione (dodecagono di 1ª, scomposto in un dodecagono di 5ª e in 12 triangoli equilateri) può vedersi nella parte più interna (fig. 8).

2°. *Nei vertici di* P *non concorre alcun poligono stellato, ma concorrono invece sui lati dello stesso* P. Il poligono P dovendo avere i suoi angoli ricoperti da poligoni ordinari, non potrà essere che *triangolo, quadrato, esagono, dodecagono, triacontagono;* e quindi i poligoni della scomposizione non potranno essere che *triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni.*

Siccome due poligoni stellati non possono risultare adiacenti per un lato senza presentare delle sovrapposizioni, così in un punto dei lati di P, non potranno concorrere che un poligono stellato e due ordinari, dei quali ultimi uno almeno dovrà essere un triangolo. Se dunque nella relazione

$$\sum_1^3{}_r \frac{180\,(l_r - 2s_r)}{l_r} = 180$$

poniamo $l_1 = 3$ con $s_1 = 1$ e $s_2 = 1$, e riduciamo, avremo

$$\frac{1}{l_2} + \frac{s_3}{l_3} = \frac{2}{3}$$

che ammette le soluzioni:

$$1^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 3,\quad l_3 = 3n,\quad s_3 = n,\quad \alpha_3 = 60^\circ,\quad \beta_3 = 60^\circ + \frac{120^\circ}{n}$$

$$2^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 4,\quad l_3 = 12n,\quad s_3 = 5n,\quad \alpha_3 = 30^\circ,\quad \beta_3 = 30^\circ + \frac{30^\circ}{n}$$

$$3^a;\quad l_1 = 3,\quad l_2 = 5,\quad l_3 = 15n,\quad s_3 = 7n,\quad \alpha_3 = 12^\circ,\quad \beta_3 = 12^\circ + \frac{24^\circ}{n}$$

essendo α_3 l'angolo al vertice del poligono stellato e β_3 il suo angolo esterno rientrante.

Nella prima soluzione non si può fare che $n = 2$, nel qual caso si hanno le due soluzioni rappresentate dalle fig. 7 e 10, quando in esse si faccia astrazione dalle linee tratteggiate.

La soluzione 2ª e 3ª non sono accettabili perchè per gli angoli esterni rientranti del poligono stellato resultano sempre dei valori che non possono associarsi respettivamente con quelli dell'angolo del quadrato e del pentagono per formare un angolo piatto.

Caso III. - *Il poligono* P *è stellato e tutti i poligoni della scomposizione che stanno intorno al perimetro di* P, *sono di prima specie.*

Con ragionamento analogo a quello fatto al num. 2 per stabilire la formula (4) si trova che nel caso attuale la formula ora detta diviene

$$L = \frac{2\,l_1\,l_2}{2\,(l_1 + l_2) - l_1\,l_2}\,S,$$

e siccome per le sole coppie di valori (3,3; 3,4; 3,5) che si possono attribuire ad l_1 e l_2, l'espressione frazionaria assume valori interi, si deduce che L è un multiplo di S, vale a dire che P non può essere un poligono stellato vero e proprio, ma un poligono regolare intrecciato, resultante dall'insieme di un certo numero di poligoni ordinari del medesimo ordine. Vediamo ora se fra questi poligoni, che chiameremo derivati e pei quali considereremo il solo perimetro esterno astraendo per conseguenza dalle sovrapposizioni, ve ne sono alcuni scomponibili in poligoni regolari di prima specie. Ricordando le soluzioni già trovate al num. 2 è chiaro che questi poligoni derivati non possono essere costituiti che dall'intrecciamento o di triangoli, o di quadrati, o di esagoni, o di dodecagoni, o di triacontagoni regolari. Chiamando allora α l'angolo concavo del poligono intrecciato P, e osservando che $L = mS$ si ha

$$\alpha = 360 - \frac{180\left\{L - 2(S-1)\right\}}{L} = \frac{180\left\{S(m+2)-2\right\}}{mS} = \frac{180}{m}\left\{(m+2) - \frac{2}{S}\right\} \qquad (11)$$

ove m non può prendere che i valori 3, 4, 6, 12, 30. Si osservi che per un dato valore di m, α assume il valore massimo per $S = 2$.

Affinchè poi questo angolo α possa scomporsi in angoli di poligoni regolari, è necessario che si abbia, tenendo conto della (11)

$$\sum_1^p \left(1 - \frac{2}{l_r}\right) = 1 + \frac{2(S-1)}{mS}$$

ovvero

$$(p-1) - 2\sum_1^p \frac{1}{l_r} = \frac{2(S-1)}{mS} \qquad (12)$$

da cui si deduce anche che

$$\sum_1^p \frac{1}{l_r} > \frac{1}{2}\left(p - \frac{m+2}{m}\right) \qquad (13)$$

ove p rappresenta il numero dei poligoni che con uno dei loro angoli concorre a ricoprire l'angolo α. Facciamo ora tutte le ipotesi intorno ai valori di m, e per ognuno di questi assegnamo a p tutti i valori possibili in modo da soddisfare, per valori convenienti di S, alla (12).

Per $m = 3$, P è formato dall'intrecciamento di 5 triangoli; $240^\circ \leq \alpha \leq 300^\circ$, e fra i poligoni che concorrono in α, i due adiacenti ai lati di quest'angolo non possono essere che triangoli od esagoni. Assegnando ora a p i valori compatibili colla (13) e fra questi tenendo solo quelli che soddisfano alla (12) si trovano le soluzioni seguenti:

1ª	$p = 4$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3$.	
2ª	"	$s = 4$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3$;	$l_4 = 4$
3ª	"	$s = 10$	$l_1 = l_2 = l_3 = 3$;	$l_4 = 5$
4ª	$p = 3$	$s = n$	$l_1 = l_2 = 3$;	$l_4 = 3n$
5ª	$p = 2$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = 6$.	

Per $m=4$ il poligono P è formato dall'intrecciamento di quadrati; $220^\circ \leq \alpha < 270^\circ$, e i poligoni adiacenti ai lati di quest'angolo non possono essere che quadrati; in questo caso si ha l'unica soluzione

6ª	$p = 3$,	$s = 3$	$l_1 = l_2 = 4$;	$l_3 = 3$.

Per $m=6$ il poligono P è costituito da esagoni intrecciati fra di loro; $210^\circ \leq \alpha < 240^\circ$, e i poligoni adiacenti ai lati di questo angolo o sono triangoli od esagoni. Si hanno quindi le soluzioni:

7ª	$p = 3$	$s = 2$	$l_1 = l_2 = 3$,	$l_3 = 4$
8ª	"	$s = 5$	$l_1 = l_2 = 3$,	$l_3 = 4$.

Per $m = 12$ ed $m = 30$ non si trova alcuna soluzione accettabile.

La 1ª soluzione corrisponde all'esagono stellato (due triangoli equilateri intrecciati) scomposto in triangoli equilateri; esso può riscontrarsi nell'esagono stellato che comparisce nella fig. 7, nel quale la scomposizione predetta è messa in evidenza per mezzo di linee tratteggiate.

La 2ª, ad un dodecagono stellato di 4ª specie (quattro triangoli equilateri intrecciati fra di loro) che può ottenersi prendendo il dodecagono scomposto nel modo indicato dalla fig. 1, e completandolo col sormontarne ciascun lato con un triangolo equilatero. Anche nella fig. 8 si può riscontrare, nella sua parte interna, rappresentata la soluzione 2ª, quando si supponga di aver messo al posto del dodecagono ordinario quello rappresentato dalla figura 1.

Per la 3ª soluzione si ha un triacontagono di 10ᵐᵃ specie (dieci triangoli intrecciati) di cui la scomposizione può essere rappresentata dalla fig. 2, quando il perimetro venga sormontato lungo ognuno dei suoi lati da un triangolo equilatero.

La 4ª soluzione corrisponde al caso di un poligono stellato formato da quanti si vogliano triangoli equilateri intrecciati fra di loro, il quale poligono viene scomposto in un poligono ordinario del medesimo ordine di quello intrecciato (che si ottiene riunendo consecutivamente i vertici rientranti), e in tanti triangoli equilateri che sono sovrapposti a ciascun lato del poligono ordinario ora detto. Nella parte interna della figura 8 si può avere la rappresentazione corrispondente al caso di 4 triangoli intrecciati (dodecagono di 4ª specie) quando si consideri la parte che rimane dopo i triangoli equilateri, come semplice dodecagono ordinario.

Per la 5ª, si ha un esagono stellato (2 triangoli intrecciati) scomposto in triangoli ed esagoni; essa è rappresentata dalla fig. 9.

Per la 6ª, si ha un dodecagono stellato di 3ª specie (tre quadrati intrecciati) scomposti in 12 quadrati, 12 triangoli e un dodecagono ordinario. Questa soluzione si può riscontrare nella fig. 8.

La 7ª corrisponde al caso di un dodecagono di 2ª specie (due esagoni intrecciati) scomposto in 24 triangoli equilateri, in 12 quadrati e in un dodecagono stellato di 4ª specie, scomposto nel modo corrispondente alla soluzione 6ª. Anche questa soluzione è compresa nella fig. 8.

La soluzione 8ª corrisponde al caso del triacontagono di 5ª specie formato dall'intreccio di 6 esagoni regolari. Lungo il perimetro di esso si può formare una corona di triangoli e di pentagoni in modo che due di quest'ultimi concorrano in ciascun angolo saliente; e due triangoli, separati da un pentagono, in ciascun angolo del poligono P. Si può poi aggiungere un triacontagono di 13ª specie concentrico a P e in modo che i suoi angoli salienti vengono ad inserirsi fra i due pentagoni che con due triangoli concorrono in uno stesso punto interno di P, completando in tal modo con questi poligoni un angolo giro. Ma dopo ciò rimangono ancora scoperti in P, 30 triangoli isosceli (con angoli di 72° e di 36°) che non possono scomporsi in poligoni regolari. La soluzione 8ª deve quindi rigettarsi.

Si osservi che la soluzione 1ª, 2ª, 3ª, quando si supponga di lasciare indecomposto respettivamente l'esagono, il dodecagono, il triacontagono centrale, rientrano tutte nella soluzione 4ª.

Riassumendo possiamo dunque dire che i poligoni scomponibili forniti dal caso III sono: 1° una serie infinita di poligoni stellati formati dall'intreccio di n triangoli; (il caso di $n=2$ ammette due scomposizioni; fig. 7 (esagono stellato interno) e fig. 9); 2° il dodecagono stellato formato da 3 quadrati; 3° il dodecagono stellato formato da due esagoni.

Caso IV. - *Il poligono* P *è stellato e non tutti i poligoni della scomposizione sono di 1ª specie.*

Con ragionamenti perfettamente identici a quelli fatti al principio del II caso si prova che se il poligono stellato π ha in comune un vertice con P, deve essere dello stesso ordine di questo poligono e avere con esso tutti i vertici in comune;

e si prova pure che i quadrilateri che rimangono scoperti, contenendo tre angoli di 60°, devono avere due lati per diritto e quindi ridursi a triangoli. Ciò porta a concludere che il poligono P non può essere di prima specie, e quindi la ricerca di cui ora ci occupiamo rientra in quella già trattata nella prima parte del caso II.

Il poligono π abbia invece i suoi vertici nei vertici degli angoli rientranti di P, e sia dello stesso ordine di questo poligono. Perchè i quadrilateri che rimangono scoperti sieno allora scomponibili in triangoli, è necessario che sieno delle losanghe cogli angoli opposti di 120°, oppure dei quadrati. Conservando quindi la notazione L, S e λ, σ respettivamente per l'ordine e la specie di P e π, dovremo avere, se gli angoli di 120° sono quelli al vertice di P e quelli esterni rientranti di π,

$$\frac{180\left\{\lambda-2(\sigma-1)\right\}}{\lambda}=120^\circ; \qquad \lambda=6(\sigma-1)$$

$$180\frac{\left\{L-2S\right\}}{L}=120^\circ; \qquad L=6S.$$

Si hanno quindi le infinite soluzioni:

$$\begin{cases} L=12, & 18, & 24, & 30, & 36,\dots\\ S=2, & 3, & 4, & 5, & 6,\dots\end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=12, & 18, & 24, & 30, & 36,\dots\\ \sigma=3, & 4, & 5, & 6, & 7,\dots\end{cases}$$

Il poligono P, in questo caso, risulta sempre come intrecciamento di un certo numero di esagoni. Nella fig. 8 si può riscontrare la prima delle soluzioni ora trovate; dodecagono di 2ª specie (2 esagoni intrecciati) scomposto in un dodecagono di 3ª specie (3 quadrati intrecciati) e in 24 triangoli equilateri.

Se al contrario gli angoli al vertice di P e quelli rientranti (esterni) di π sono di 60° dovremo avere

$$\frac{180\left\{\lambda-2(\sigma-1)\right\}}{\lambda}=60^\circ; \qquad \lambda=3(\sigma-1)$$

$$\frac{180\left\{L-2S\right\}}{L}=60^\circ; \qquad L=3S$$

e quindi le infinite soluzioni

$$\begin{cases} L=9, & 12, & 15,\dots\\ S=3, & 4, & 5,\dots\end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=9, & 12, & 15,\dots\\ \sigma=4, & 5, & 6,\dots\end{cases}$$

La seconda soluzione può ancora riscontrarsi nella fig. 8 (dodecagono di 4ª specie formati di 4 triangoli intrecciati), scomposto in un dodecagono di 5ª specie e in 24 triangoli equilateri.

Infine se la losanga è un quadrato, si trova nello stesso modo:

$$\lambda=4(\sigma-1), \qquad L=4S, \qquad S=\sigma-1,$$

e quindi le infinite soluzioni:

$$\begin{cases} L=8, & 12, & 16, & 20, & 24,\dots\\ S=2, & 3, & 4, & 5, & 6,\dots\end{cases}$$
$$\begin{cases} \lambda=8, & 12, & 16, & 20, & 24,\dots\\ \sigma=3, & 4, & 5, & 6, & 7,\dots\end{cases}$$

La seconda soluzione si può vedere rappresentata nella stessa fig. 8; dodecagono di 3ª specie (3 quadrati intrecciati), scomposto in un dodecagono di 4ª specie (4 triangoli intrecciati) e in 12 quadrati.

Si può infine riscontrare che se il poligono π non è nelle condizioni precedentemente ammesse rispetto a P, le parti di P che rimangono scoperte, non possono in ogni caso essere scomponibili in poligoni regolari.

Applicazioni.

Le soluzioni trovate pei dodecagoni regolari, si prestano agevolmente per trovare con metodo intuitivo alcune formule relative ai dodecagoni medesimi.

1°. L'area del dodecagono equivale, (fig. 1), a quelle di 6 quadrati, più quelle di 12 triangoli equilateri dello stesso lato; indicando quindi con l questo lato e con S l'area del dodecagono, abbiamo

$$S = 6l^2 + 12\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 3l^2(2+\sqrt{3}). \tag{14}$$

2°. Dalla semplice ispezione della fig. 1 si ricava ancora che

$$S = 3\,ABCDEO = 3(ABCDO + COD);$$

ma $\quad COD = ODG + GDC + OGC = ODG + OGH + OHA = AODGHA = AFDCBA$

e quindi sostituendo questo valore di COD nella precedente, abbiamo

$$S = 3\,AODF = 3R^2$$

essendo R il raggio del circolo circoscritto al dodecagono.

3°. Dal confronto delle due espressioni di S si ricava:

$$R = l\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{l}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

4°. La superficie totale del prisma esagonale le cui faccie laterali sono dei quadrati (questo corpo appartiene ad una delle due serie infinite di corpi d'Archimede) eguaglia quella del dodecagono il cui lato è uguale allo spigolo del prisma.

5°. Dalla 2ª delle soluzioni (9) si ricava che il dodecagono regolare può essere scomposto in 12 triangoli equilateri ed in un dodecagono di 5ª specie; e, (fig. 1), può pure scomporsi in 12 triangoli equilateri ed in 6 quadrati; si deduce quindi che l'area del dodecagono stellato di 5ª specie equivale a 6 volte quella del quadrato costruito sul lato del dodecagono ordinario iscritto nello stesso cerchio.

6°. Dalla fig. 8, si ricava che chiamando con l il lato dei triangolini e dei quadratini della scomposizione, e con L_2, L_3, L_4 respettivamente il lato del dodecagono di 2ª, 3ª, 4ª specie, e con S_2, S_3, S_4 le aree respettive di questi stessi poligoni, si trova facilmente:

$$L_2 = l(2+\sqrt{3});\quad S_2 = 6l^2(2\sqrt{3}+3) = 6L^2(2\sqrt{3}-3)$$
$$L_3 = l(3+\sqrt{3});\quad S_3 = 6l^2(\sqrt{3}+3) = L^2(3-\sqrt{3})$$
$$L_4 = l(3+\sqrt{3});\quad S_4 = 6l^2(\sqrt{3}+1) = L^2(\sqrt{3}-1).$$

M.te di Cammarata (Sicilia), Luglio 1900.

A. ANDREINI.

PRINCIPII DI LOGICA

PARTE I. — **Principii di logica espressi in linguaggio comune.**
PARTE II. — **Gli stessi espressi in simboli, eseguendo la via tracciata dalla** *Rivista di Matematica.*

Certamente per l'esposizione di proposizioni, per lo svolgimento di dimostrazioni, non è necessaria la scrittura simbolica, nello stesso modo che non è necessaria la scrittura algebrica per l'esposizione di proposizioni d'aritmetica, per dimostrazioni di esse, per risoluzione di problemi d'aritmetica.

Ma la scrittura algebrica è un mezzo utilissimo ed importantissimo per esporre e ricordare proposizioni d'aritmetica, per indicare regole le quali con grande facilità ci fanno passare da una proposizione ad un'altra, ci danno lo svolgimento di dimostrazioni e la soluzione di problemi: analogamente la scrittura ideografica, già stabilita dalla *Rivista di Matematica*, è un mezzo utilissimo ed importantissimo per esporre e ricordare forme di ragionamento, per indicare regole le quali con grande facilità ci fanno passare da una proposizione ad un'altra, da una forma di ragionamento ad altra forma, e ci danno lo svolgimento di dimostrazioni.

Senza la scrittura algebrica non si sarebbero ancora trovate tante proposizioni e la soluzione di certi problemi sarebbe possibile a pochi: e senza la scrittura ideografica certe forme di ragionamento o sarebbero ancora rimaste inavvertite o non si sarebbero ancora trovate: vedasi a proposito gli studi della *Rivista di Matematica.*

§ 1. — Classi - Negazione e partizione di classi - Relazioni fra classi.

1. Ad ogni *cosa* e ad ogni *classe di cose* si fa corrispondere un segno o complesso di segni, una voce o complesso di voci: questi segni e queste voci sono i mezzi di trasmissione delle idee.

Per es. nomi di cose: punto P; retta r; cerchio a; Pietro; padre di Antonio; ecc.... nomi di classi; pnt (r) (si legga punti della r); punto (a); Italiani; Europei; scolari diligenti; uomo; cose contenute in questa stanza; angeli; alunni di questa scuola ecc. ecc.

2. Fissata una classe, si acquista subito l'idea dell'altra classe che comprende tutte le cose eccettuate quelle della classe fissata: una di queste due classi può chiamarsi *negazione* dell'altra.

Per amore di brevità, leggendo i segni « $\equiv$ » « ( ) » per identità, per preposizione « di » o « del », si potrà scrivere per es.:

Negazione (cose contenute in questa stanza) $\equiv$ Tutte le cose eccettuate quelle della stanza $\equiv$ Tutte le cose esterne alla stanza. Negazione (classe degli angeli) $\equiv$ Tutte le cose che non sono angeli.

3. Data una classe è facile acquistare l'idea d'una seconda classe che sia una parte, determinata o indeterminata, della prima: la seconda classe si potrebbe chiamare *particolare rispetto alla prima, o, particolare della prima;* e la prima classe si potrebbe chiamare *universale rispetto alla seconda, o, universale della seconda.*

Per es. rispetto alla classe « poligoni », le classi particolari indeterminate sono espresse da « molti poligoni » « alcuni poligoni » « qualche poligono » ecc.

Invece « poligoni; triangoli; triangoli isosceli; triangoli equilateri; triangoli equilateri con un vertice in A » sono classi tali che ognuna è particolare determinata rispetto alle classi precedenti, ed è universale rispetto alle seguenti.

4. Osservazioni. — 1ª. *Per varietà di linguaggio alle due classi indicate al n. 3 si applica una delle seguenti espressioni: la prima classe comprende o contiene la seconda: la seconda è compresa o contenuta nella prima: la prima è maggiore della seconda: la seconda può contenere meno individui ma più idee: ciò che appartiene alla seconda apparterrà pure alla prima: non può una cosa appartenere alla seconda senza che appartenga alla prima: tutto ciò che appartiene alla seconda apparterrà ad entrambe le classi: non esiste cosa che appartenga alla seconda e alla negazione della prima: ecc. ecc.*

2ª. *Ordinariamente si indica la negazione d'una data classe premettendo ad essa il segno « non ». La negazione della negazione d'una classe data non è altro che la data.*

3ª. *La particolare di una particolare di una classe data è sempre particolare della data. La universale di una universale di una classe data è sempre universale della data.*

4ª. *La negazione di una parte di una data classe comprende la negazione della data più l'altra parte della data: vale a dire (considerando che ad una parte di una classe data corrisponde l'altra parte della data) una parte di una classe e la negazione della classe sono particolari rispetto alla negazione dell'altra parte: ossia, la negazione di una parte di classe è universale tanto rispetto all'altra parte quanto rispetto alla negazione della classe.*

Per es. chiamiamo α la classe dei punti del cerchio qui segnato, compresi quelli della circonferenza; α' una parte e α'' la rimanente di α; e per semplicità limitiamo il complesso delle cose ai punti del piano cosicchè negazione $(\alpha) \equiv$ esterno del cerchio; evidentemente si ha che la « negazione (α') » comprende la « negazione (α) » e la classe α''.

5ª. *La negazione d'un individuo (cosa) nel senso di non esistenza, è un non senso cioè un assurdo. Negare, il corpo che cade od è caduto sotto i nostri sensi, un certo cerchio, una certa cosa di cui abbiamo nozione, è lo stesso che esprimere nello stesso tempo, l'esistenza e la non *esistenza, l'essere e non essere, e ciò si chiama appunto assurdo: così affermare, un triangolo con quattro vertici, un uomo privo di ogni senso, ecc. è lo stesso che esprimere l'assurdo. Quando diciamo per es. Dio, affermiamo un prodotto della nostra mente, e dobbiamo dire che questo prodotto ha un'esistenza, e sarebbe assurdo la sua negazione nel senso di non esistenza. La frase « Dio non esiste » è un modo abbreviato per esprimere che quella cosa o prodotto della nostra mente corrispondente alla voce « Dio », non ha certe proprietà (per es. forma, realtà fisica, potenzialità ecc. ecc.) che si vorrebbero da alcuni attribuirgli. Se un tale dicesse, la retta non esiste, egli vorrebbe intendere che la cosa di cui ha la nozione espressa dalla voce « retta » non ha poi le proprietà che da altri si vorrebbero attribuirle. Negare una legge fisica, per es. la gravità, equivarrebbe ad affermare che una certa cosa che ha esistenza, come concezione della mente, non ha poi la proprietà di appartenere alla classe delle cose del mondo fisico. Alcune volte pare che si indichi la non esistenza d'una cosa, ma veramente non si fa altro che, prima intendere questa cosa come una classe di cose identiche ad essa e poi la negazione di questa classe. Nella proposizione « Dio è mortale » cambiando il soggetto in ciò che pare la negazione di Dio ma che in sostanza non è altro che la negazione della classe « enti identici a Dio », si ottiene « non Dio, è mortale » cioè « tutto ciò che non è Dio è mortale ».*

6ª. *Chiamando, per convenzione, una classe qualunque, particolare di se stessa; universale di se stessa, (ciò è poi lo stesso che dire, una classe è contenuta in se stessa e contiene se stessa); si potrà esprimere ciò che in logica si dice prodotto di classi, somma di classi, nel seguente modo:*

Il *prodotto* di due classi date è quella classe *particolare* di entrambe e tale che qualunque altra classe *universale* di essa non è più *particolare* di entrambe le date.

La *somma* di due classi date è quella classe *universale* di entrambe e tale che qualunque altra classe *particolare* di essa non è più *universale* di entrambe le date.

5. Le relazioni fra due classi le rappresenteremo graficamente con coppie di cerchi: a tal fine o limiteremo il complesso delle cose ai punti del piano; o intenderemo che i punti del cerchio, compresa la circonferenza, rappresentino gl'individui d'una classe, ed i punti esterni rappresentino i rimanenti individui ossia la negazione della classe.

Una coppia di cerchi di cui il primo è sempre a ed il secondo variabile è b_1 o b_2 o b_3 o b_4 o b_5 si presenta in cinque casi ben distinti: i quali così si possono esprimere:

1° Caso. — a *contiene* b_1: *ossia la classe* a *è universale di* b_1.

2° Caso. — a *contiene* b_2 *ed è contenuto in* b_2: *ossia* a *è nello stesso tempo universale e particolare di* b_2: *ossia la classe* a *è uguale alla* b_2.

3° Caso. — a *è contenuto in* b_3: *ossia la classe* a *è particolare di* b_3.

4° Caso. — a *nè contiene nè è contenuto in* b_4, *ma però* a, b_4 *hanno elementi in comune: ossia,* a *non è nè universale nè particolare di* b_4, *ed esistono individui comuni alle classi* a, b_4.

5° Caso. — a *nè contiene nè è contenuto in* b_5, *di più* a, b_5 *non hanno elementi in comune: ossia,* a *non è nè universale nè particolare di* b_5, *e non esistono individui comuni alle classi* a, b_5.

Osservazione 1ª. — *L'espressione « esistono individui comuni alle classi* a, b: *ossia, la coesistenza delle classi* a, b *non è assurda: ossia, il prodotto logico delle classi* a, b *non è nullo » indica uno dei primi quattro casi senza distinguere quale. L'espressione « Non esistono individui comuni alle classi* a, b: *ossia, la coesistenza delle classi* a, b *è assurda: ossia, il prodotto logico delle classi* a, b *è nullo » indica distintamente il 5° caso.*

Osservazione 2ª. — *Quando fra le classi* a, b *si verifica il 2° o 4° o 5° caso, allora nelle espressioni che indicano la relazione logica fra due classi si possono commutare fra loro le dette classi* a, b. *Ma quando fra le classi* a, b *si verifica il 1° o 3° caso, allora nelle dette espressioni non si possono commutare dette classi; però quando si volessero nelle dette espressioni commutare le due classi* a, b *bisognerà commutare fra loro anche i termini « contiene; è contenuto » oppure i termini « universale; particolare » espressi o sottintesi.*

6. Per l'osservazione 4ª del n. 4 facilmente si vede che, volendo nel discorso introdurre le classi le quali sono negazione delle $a, b_1 \ldots$, i precedenti cinque casi si possono così esprimere in modo abbreviato coll'introduzione del segno «$\sim$» per indicare « negazione di classe ».

1° Caso. — $\sim$a *è contenuta in* $\sim b_1$: *ossia, la classe* $\sim$a *è particolare di* $\sim b_1$.

2° Caso. — $\sim$a è *contenuta in* $\sim b_2$ *e contiene* $\sim b_2$: *ossia,* $\sim$a *è nello stesso tempo particolare e universale di* $\sim b_2$: *ossia la classe* $\sim$a *è uguale alla* $\sim b_2$.

3° Caso. — $\sim$a *contiene* $\sim b_3$: *ossia, la classe* $\sim$a *è universale di* $\sim b_3$.

4° Caso. — $\sim$a *nè è contenuto in, nè contiene* $\sim b_4$, *ma però* $\sim$a, $\sim b_4$ *hanno elementi in comune: ossia,* $\sim$a *non è nè particolare nè universale di* $\sim b_4$, *ed esistono individui comuni alle classi* $\sim$a, $\sim b_4$.

5° Caso. — $\sim$a *nè è contenuto in, nè contiene* $\sim b_5$, *di più* $\sim$a, $\sim b_5$ *hanno elementi in comune: ossia,* $\sim$a *non è nè particolare nè universale di* $\sim b_5$, *ed esistono individui comuni alle classi* $\sim$a, $\sim b_5$.

Si ha quindi la seguente regola in generale:

In una relazione fra due classi, si possono sostituire alle classi le corrispondenti negative purchè si commutano i termini « contiene; è contenuto » oppure i termini « universale; particolare » espressi o sottintesi.

§ 2. — Proposizioni categoriche - Necessità logiche.

1. La *Proposizione categorica* è una coppia di cose separate da « è » o « sono » o da altri segni equivalenti i quali si possono considerare come funzioni o relazioni di coesistenza fra le due cose: la prima di queste è un individuo od una classe e si chiama *soggetto;* la seconda è sempre una classe e si chiama *attributo.*

OSSERVAZIONE. — *Osservando che: l' individuo può anche essere espresso come fosse una classe e precisamente una classe di individui identici; che la classe di individui identici può anche essere espressa come un individuo; si comprende che: le proposizioni* singolari, *così chiamate perchè il loro soggetto è un individuo, possono prendere anche la forma di coppia di classi separate da „ sono ":*

Alcune proposizioni singolari hanno l'attributo espresso sotto forma di individuo: In generale si può anche dire che ogni proposizione categorica è determinata da una coppia di classi.

2. Due proposizioni categoriche si dicono *identiche* quando, fatta astrazione dalla forma linguistica e grammaticale, hanno soggetti identici e attributi identici.

Per es.: La proposizione categorica singolare avente per soggetto il punto P e per attributo la classe dei punti della retta r, si esprime con una delle seguenti proposizioni identiche: P appartiene alla r: P sta su r: ad r appartiene P: r contiene P: r passa per P: r è rtt (P,): ecc.

Per es.: La relazione fra le due classi a, b_1, vedasi § 1 n. 5, si esprime con una delle seguenti identiche proposizioni chiamate *universali affermative* perchè il soggetto non viene espresso come parte di classe ma si bene come una classe seguita dal segno « è contenuto », e poi l'attributo non vien indicato col segno di negazione: Tutti i punti di b_1 sono punti di a: il cerchio b_1 è contenuto nel cerchio a: a contiene, o comprende, b_1: se x è punto di b_1, allora, x è punto di a: $x \varepsilon b_1$. si deduce. $x \varepsilon a$: non esiste individuo di b_1 che non sia individuo di a: non esiste alcun individuo che appartenga a b_1 e alla $\sim a$: non esiste individuo comune alla due classi b_1, $\sim a$: il prodotto logico delle due classi b_1, $\sim a$ è nullo.

La proposizione « alcuni (molti, diversi, vari...) alunni di questa scuola sono diligenti » vien detta *proposizione particolare* indeterminata *affermativa* perchè il soggetto ha la forma di una classe particolare indeterminata di altra classe, e l'attributo non viene espresso col segno di negazione: e in linguaggio comune vien anche così indicata: esistono alunni di questa scuola i quali sono diligenti: in questa scuola si trova qualche alunno diligente: possiamo dividere questa scolaresca in due parti distinte o classi separate e in modo che una (realmente esistente, ossia non nulla, ossia contenente almeno un individuo) abbia tutti alunni diligenti cioè sia contenuta nella classe dei diligenti; l'altra abbia tutti alunni non diligenti, cioè sia contenuta nella classe dei non diligenti.

3. Data una proposizione categorica, facendo, in qualche modo, secondo qualche norma, variare la coppia di classi di cui è formata, si ottengono tante altre *proposizioni derivate dalla data* secondo quel modo, secondo quella norma.

Per es. alla classe soggetto si potrebbe sostituire, la sua negazione, un'altra che rispetto ad essa sia particolare o universale, la negazione di una sua parte, in generale una classe derivata in qualche modo dalla classe soggetto: analogamente per la classe attributo: contemporaneamente si possono fare variazioni su entrambe le classi soggetto ed attributo. Fra le dette possibili variazioni hanno importanza le quattro seguenti:

1ª all'attributo sostituire la sua negazione

2ª al soggetto e all'attributo sostituire le rispettive negazioni

3ª al soggetto sostituire l'attributo, e all'attributo sostituire il soggetto

4ª al soggetto sostituire una determinata classe particolare rispetto al soggetto.

A queste quattro variazioni, considerate come operazioni che si possono premettere ad ogni proposizione senza curarsi per ora della verità o falsità del resultato; si danno i rispettivi nomi: *opposizione, contrarietà, inversione, partizione.*

Alle stesse, considerate come risultati ottenuti facendo sulla proposizione data le dette operazioni, si danno i rispettivi nomi di proposizione *opposta, contraria, inversa, particolare,* rispetto alla data, o della data.

Per es.: Data la proposizione di cui il soggetto sia la classe dei triangoli isosceli, e l'attributo sia la classe dei triangoli isogoni e limitato il complesso delle cose alla classe dei triangoli, si avrà:

opposizione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo che è isoscele, non è isogonio

contrarietà (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo non isoscele, non è isogonio

inversione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ Ogni triangolo che è isogonio, è isoscele

partizione (ogni triangolo che è isoscele, è isogonio) $\equiv$ I triangoli che sono isosceli e nel semipiano α, sono isogoni.

Osservazione. — *Per ragioni grammaticali il segno « non » o altro equivalente che deve indicare la negazione d'una classe, spesso, invece di unirsi alla classe si mette prima del verbo o prende un posto speciale secondo la natura della lingua ed il modo di fraseggiare; ma ciò e altre modificazioni grammaticali si devono considerare estranee alla natura logica delle proposizioni. Facilmente sui risultati precedenti, come su qualunque altra proposizione, si possono ripetere le dette operazioni.*

4. Possiamo immaginare un gruppo di queste operazioni fatte successivamente su una proposizione data e sui risultati che successivamente si ottengono; indi confrontare il risultato ottenuto colla proposizione data. Così indicando con P la proposizione categorica data e segnando il punto invece della parentesi o preposizione « del; della; di » facilmente si verifica che:

opposizione . opposizione (P) $\equiv$ P

contrarietà . contrarietà (P) $\equiv$ P

inversione . inversione (P) $\equiv$ P

opposta . contraria (P) ≡ contraria . opposta (P)

opposta . inversa (P) ≡ inversa . opposta . contraria (P) ≡ inversa . contraria . opposta (P)

inversa . opposta . (P) ≡ opposta . inversa . contraria (P) ≡ opposta . contraria . inversa (P)

contraria . inversa (P) ≡ inversa . contraria (P)

particolare . particolare (P) ≡ particolare (P)

particolare . opposta (P) ≡ opposta . particolare (P)

« particolare . contraria (P) » differisce dalla « contraria . particolare (P) » per il solo soggetto e precisamente il soggetto della seconda è universale di quello della prima

« particolare . inversa (P) » differisce dalla « inversa . particolare (P) » in quanto che questa seconda ha il soggetto universale rispetto a quello della prima, ed ha l'attributo particolare rispetto a quello della prima.

Osservazione 1ª. — *Resta inteso che, volendo generalizzare le quattro operazioni su dette anche per le proposizioni singolari (cosa importante solo per quanto riguarda l'opposizione) bisogna osservare che:*

la negazione dell'individuo soggetto deve essere intesa nel modo indicato a § 1 n. 4, osservazione 5ª;

si considera la partizione dell'individuo soggetto sempre eguale allo stesso individuo: per l'inversione è necessario che l'attributo sia una classe di individui identici, cioè per l'inversione è necessaria l'identità tra il soggetto e l'attributo.

Per es. le due seguenti proposizioni singolari una inversa dell'altra « Dio è Onnipotente: l'Onnipotente è Dio » esprimono l'identità delle due cose corrispondenti ai termini « Dio: Onnipotente ».

Osservazione 2ª. — *Una data proposizione categorica e quelle che si ottengono facendo sulla data le prime tre operazioni « opposizione, contrarietà, inversione » da sole o accoppiate, formano un gruppo di otto proposizioni distinte. Con la quarta operazione « partizione determinata » su ognuna delle precedenti, si ottengono altre otto proposizioni.*

Osservazione 3ª. — *Devesi badare a non confondere « la partizione » con la* « partizione indeterminata ».

Per es. rispetto alla data proposizione « Gli Europei appartengono alla razza bianca » queste due altre « Gl'italiani appartengono alla razza bianca » « alcuni Europei, diversi Europei, esistono degli Europei che, appartengono alla razza bianca » son tali che la prima è particolare della data cioè al soggetto della data venne sostituito una sua determinata classe particolare, mentre la seconda è particolare indeterminata della data.

Per es.: Inteso a, b come al § 1 n. 5; e a_1 per parte determinata di a cioè per classe compresa in a; e data la proposizione « ogni a è b », allora, la proposizione « ogni a_1 è b » è particolare della data; mentre la proposizione « alcuni a, diversi a, molti a, esistono degli a tali che, appartengono a b » è particolare indeterminata della data.

5. Rispetto al sentimento ogni proposizione categorica è detta *vera*, o, è detta *falsa*. Ad una data proposizione categorica si associa il *sentimento del vero* o il *sentimento del falso* a seconda della natura della coppia di classe di cui è formata. Circa le altre proposizioni, derivate dalla data per mezzo delle quattro operazioni su dette, si osserva che: qualcuna potrà essere indipendentemente o vera o falsa a seconda della natura della detta coppia di classe, e tutte le altre sono vere o false solo per *necessità logiche*; vale a dire, per acquistare il sentimento del vero o del falso su tutte queste altre non è più necessario considerare la natura delle due classi, ma basta osservare quelle poche che già si sono dette vere o false dipendentemente dalla natura delle classi. A proposito di questa osservazione si hanno le seguenti « necessità logiche », o, seguenti « Principii di logica fra le proposizioni categoriche ». principii che qui indicheremo con Pp seguito da numero romano.

Pp I. — Principio d'opposizione delle singolari.

Presa una coppia di proposizioni singolari opposte, si dirà che: se una proposizione è vera, l'altra è necessariamente falsa; se una è falsa l'altra è necessariamente vera. Con altre parole, due proposizioni singolari opposte non possono essere entrambe vere nè entrambe false.

Indicando per es. con P una proposizione singolare si avrà che:

« P è vero » è lo stesso che « opposta (P) è falso »
« P è falso » è lo stesso che « opposta (P) è vero »

Pp II. — Principio d'opposizione delle non singolari.

Presa una coppia di proposizioni categoriche non singolari ma opposte si dirà che: se una è vera, l'altra è necessariamente falsa; se una è falsa allora la particolare indeterminata dell'altra è necessariamente vera. Con altre parole, due proposizioni non singolari ma opposte non possono essere entrambe vere: di più una di esse e la particolare indeterminata dell'altra non possono essere entrambe false.

Per es. indicando con a, b le classi dei punti di due cerchi, prendendoli nel senso indicato a § 1 n. 5 e adottando il segno $\sim$ per negazione, si avrà che:

« vero che: ogni a è b »	sarà necessariamente		« falso che: ogni a è $\sim b$ »
« falso che: ogni a è b »	»	»	« vero che: qualche a è $\sim b$ »
« vero che: ogni a è $\sim b$ »	»	»	« falso che: ogni a è b »
« falso che: ogni a è $\sim b$ »	»	»	« vero che: qualche a è b.

Con altre parole, indicando con q una proposizione categorica non singolare si ha che: i due casi « vero q » « vero opposto q » sono tali che uno esclude necessariamente l'altro:

i due casi « falso q » « falso particolare indeterminata . opposto (q) » sono tali che uno esclude necessariamente l'altro:

i due casi « falso opposto (q) » « falso particolare indeterminata (q) sono tali che uno esclude necessariamente l'altro.

OSSERVAZIONE. — *Nel* Pp II *non si escludono i casi in cui due proposizioni categoriche non singolari ma opposte siano entrambe false.*

Per es. inteso a, b_4, b_1 come venne indicato a § 1 n. 5 e 6, le due seguenti proposizioni « ogni a è b_4 » « ogni a è $\sim b_4$ » sono una opposta dell'altra ed entrambe false.

Analogamente dicasi per queste due « ogni a è b_1 » « ogni a è $\sim b_1$ ».

Pp III. — PRINCIPIO DI INVERSA DELLA CONTRARIA; OPPURE DI CONTRARIA DELLA INVERSA; OPPURE 1ª LEGGE DELLE INVERSE.

Presa una coppia di proposizioni tali che una sia l'inversa della contraria dell'altra, o, ciò che è lo stesso, la contraria dell'inversa dell'altra, si ha: Se una è vera, l'altra è necessariamente vera; se una è falsa, l'altra è necessariamente falsa. Con altre parole, chiamando *equivalenti* due proposizioni che sono necessariamente o entrambe vere o entrambe false, si dirà: ogni proposizione è equivalente alla contraria della sua inversa.

Per es. inteso a, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 come viene indicato a § 1 n. 5 e 6, si hanno: le seguenti coppie di proposizioni una contraria dell'inversa dell'altra ed entrambe vere:

« b_1 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_1$ »
« b_2 è contenuto in a . simultaneamente . a è contenuto in b_2 »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_2$. simultaneamente . $\sim b_2$ è contenuto in $\sim a$ »
« a è contenuto in b_3 »	« $\sim b_3$ è contenuto in $\sim a$ »

le seguenti coppie di proposizioni una contraria dell'inversa dell'altra ed entrambe false:

« a è contenuto in b_4 »	« $\sim b_4$ è contenuto in $\sim a$ »
« b_4 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_4$ »
« a è contenuto in b_5 »	« $\sim b_5$ è contenuto in $\sim a$ »
« b_5 è contenuto in a »	« $\sim a$ è contenuto in $\sim b_5$ ».

OSSERVAZIONE. — *Ricordando che ogni proposizione categorica si può ridurre alla forma « classe* a *contenuta nella classe* b » *nella qual forma si dice che* a *è classe particolare di* b, *si comprende facilmente come questo* Pp III *non sia che un modo di esprimere la regola già indicata a* § 1 n. 6. *Anzi ricordando la semplicissima osservazione* 4ª *del* n. 4 *si comprende come questo* Pp III *non sia che una forma data al significato della detta osservazione.*

Varallo, 10 gennaio 1901.

(Continua) PIETRO BUFFA.

Sui summultipli delle grandezze di 1ª, 2ª e 3ª genere

Il compianto De Paolis, in una sua lettera del 23 Dicembre 1885, m'indicava parecchi punti dei suoi *Elementi di Geometria*, i quali parevano a lui aver bisogno di modificazioni od aggiunte. Le sue osservazioni potrebbero dar luogo a lungo e vario discorso; ma io intendo fermarmi soltanto sopra una di esse: la 14ª. Con questa egli rispondeva ad una obbiezione, che io avevo mossa contro la dimostrazione da lui data (pag. 435) dell'esistenza del summultiplo di un arco circolare secondo un qualunque numero intero. Chi legga infatti quella dimostrazione, vede che nell'ultima ineguaglianza ($3AC' < A'B' - AB$) il segno $<$ deve mutarsi in $>$, il che infirma l'asserzione immediatamente seguente. Egli, reputando giusta l'obbiezione, modificava convenientemente la dimostrazione; la quale veniva così ad accordarsi con quella già data nella 6ª edizione degli *Elementi di Geometria di Sannia e d'Ovidio;* dimostrazione valida per una grandezza di 1°, 2° e 3° genere, (*) qualora questa ammetta i summultipli secondo 2, 4, 8, ...; ed infatti in tale forma generale l'abbiamo enunciata nelle successive edizioni. L'ipotesi dell'esistenza dei summultipli secondo 2, 4, ... fu adottata anche dal De Paolis nella dimostrazione rettificata.

Nè agli egregi professori Lazzeri e Bassani è riuscito di evitarla, sebbene essa non figuri a pag. 248 del loro Trattato, e sebbene durante la dimostrazione si supponga tacitamente esistere una grandezza minore della grandezza data, poi una grandezza non maggiore della metà della precedente, e così via. Essi invero ottengono due variabili in corrispondenza univoca, la 1ª sempre maggiore della 2ª ed aventi una differenza indefinitamente decrescente; ma ciò non basta per dirle *convergenti*, non avendo anche dimostrato (come la definizione di variabili convergenti anche da essi adottata esige) che la 1ª sia decrescente e la 2ª crescente.

Non sarà dunque inutile che io qui esponga in modo generale e rigoroso, ad uso dei giovani, le due dimostrazioni cui ho accennato.

Prima dimostrazione.

Sia A la grandezza data di 1°, 2° o 3° genere, la quale ammetta i summultipli secondo m, m^2, m^3, ... e sia n un numero intero diverso da queste potenze di m.

Esisteranno due potenze successive di m fra le quali sia compreso n, e sia

$$m^{p-1} < n < m^p.$$

(*) Chiamo di 1° *genere* le grandezza del tipo dei segmenti, di 2° quelle del tipo dei poligoni piani, di 3° quelle del tipo degli archi o settori circolari.

Pongo $\quad m^p - n = q, \quad$ onde $\quad m^p = n + q.$

Esisteranno le grandezze (*)

$$B \doteq \frac{A}{m^p}, \quad C \doteq q\frac{B}{m^p} \doteq \frac{qB}{m^p}, \quad D \doteq q\frac{C}{m^p} \doteq \frac{qC}{m^p}, \ldots;$$

e le grandezze della successione

$$B, \; C, \; D, \ldots$$

decresceranno indefinitamente, perchè ciascuna è q volte la m^pma parte della precedente.

Ora si ha successivamente

$$\begin{aligned} A &\doteq m^p\, B \doteq (n+q)\, B \doteq nB + qB, \\ A &\doteq nB + m^p\, C \doteq nB + (n+q)\, C = n\,(B + C) + qC, \\ A &\doteq n\,(B + C) + m^p\, D \doteq n(B + C + D) + qD, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{aligned}$$

e quindi sorge una variabile crescente, i cui stati successivi sono

$$nB, \; n\,(B + C), \; n\,(B + C + D), \ldots$$

tutti $<\cdot$ A.

Essendo $nm > m^p > q$, oltre questa variabile crescente, si può costruire un'altra variabile decrescente, i cui stati successivi, tutti $\cdot>$ A, siano

$$nB + nmB, \; n\,(B + C) + nmC, \; n\,(B + C + D) + nmD, \ldots.$$

Queste due variabili sono convergenti; poichè la loro differenza acquista gli stati successivi

$$(nm - q)\,B, \; (nm - q)\,C, \; (nm - q)\,D, \ldots,$$

i quali decrescono indefinitamente, come B, C, D, ...

E le due variabili hanno per limite A, visto che A è compresa fra l'una e l'altra.

Ora delle dette due variabili esistono i summultipli secondo n, e sono rispettivamente

$$\begin{array}{lll} B, & B + C, & B + C + D, \ldots, \\ (m+1)\,B, & B + (m+1)\,C, & B + C + (m+1)\,D, \ldots; \end{array}$$

dunque essi costituiscono anche due variabili convergenti; e però (giusta il postulato che due variabili convergenti hanno sempre un limite) essi avranno un limite, il quale avrà A per multiplo secondo n, cioè sarà summultiplo di A secondo n.

Seconda dimostrazione.

Nelle ipotesi fatte esistono le grandezze

$$b \doteq \frac{A}{m}, \quad c \doteq \frac{b}{m}, \quad d \doteq \frac{c}{m}, \ldots, \text{(**)}$$

ed esistono nb, nc, nd, ...

(*) Adopero i segni $\doteq$ (*equivalente a*), $\cdot>$ (*prevalente a*), $<\cdot$ (*subvalente a*). Per grandezze di 1° genere essi si riducono a $=$ (*eguale a*), $>$ (*maggiore di*), $<$ (*minore di*).

(**) La dimostrazione vale anche se si suppongono esistere le grandezze $b \doteq \frac{A}{m}$, $c \doteq \frac{b}{m'}$, $d \doteq \frac{c}{m''}$ ...

Esistono due multipli successivi di nb fra i quali sia compresa A, e sia

$$p \,.\, nb \leq\cdot A <\cdot (p+1) \,.\, nb,$$

onde

$$n \,.\, pb \leq\cdot A <\cdot n \,.\, (p+1)\, b.$$

Del pari, esistono due multipli successivi di nc fra i quali sia compresa A, e sia

$$p' \,.\, nc \leq\cdot A <\cdot (p'+1) \,.\, nc,$$

onde

$$n \,.\, p'c \leq\cdot A <\cdot n \,.\, (p'+1)\, c.$$

Così si può continuare indefinitamente.

Ora si osservi che, essendo $b \doteq mc$, si ha

$$n \,.\, pmc \doteq n \,.\, pb \leq\cdot A,$$

e però dev'essere

$$n \,.\, pmc \leq\cdot n \,.\, p'c,$$

ossia

$$n \,.\, pb \leq n \,.\, p'c.$$

Ed analogamente, essendo

$$n \,.\, (p+1)\, mc \doteq n \,.\, (p+1)\, b \,\cdot> A,$$

dev'essere

$$n \,.\, (p+1)\, mc \,\cdot\geq n \,.\, (p'+1)\, c,$$

ossia

$$n \,.\, (p+1)\, b \,\cdot\geq n \,.\, (p'+1)\, c.$$

Dunque con questo procedimento si ottengono due variabili: la 1ª crescente, i cui stati successivi sono

$$n \,.\, pb, \quad n \,.\, p'c, \ldots,$$

e la 2ª decrescente, i cui stati successivi sono

$$n \,.\, (p+1)\, b, \qquad n \,.\, (p'+1)\, c, \ldots$$

La 1ª variabile si conserva $\leq\cdot$ A, e la 2ª $\cdot\geq$ A. Inoltre la loro differenza acquista gli stati successivi

$$nb, \; nc, \ldots,$$

ciascuno dei quali è summultiplo del precedente secondo m; ond'essa decresce indefinitamente.

Dunque le dette due variabili sono convergenti, ed hanno per limite A. Di esse esistono i summultipli secondo n, cioè

$$pb, \; p'c, \ldots,$$
$$(p+1)\, b, \; (p'+1)\, c, \ldots,$$

che formano due altre variabili convergenti, e quindi hanno un limite, il cui multiplo secondo n è A; cosicchè codesto limite è summultiplo di A secondo n.

Merita di esser notato che se, invece di supporre $b \doteq \frac{A}{m}$, $c \doteq \frac{b}{m}, \ldots$, si suppone $b <\cdot \frac{A}{m}$, $c <\cdot \frac{b}{m}, \ldots$, non si può applicare il precedente ragionamento. Poichè, essendo $b \cdot> mc$, sarà $n \,.\, pmc <\cdot n \,.\, pb$, e quindi si è sicuri che $n \,.\, pmc \leq\cdot n \,.\, p'c$, ma non che $n \,.\, pb \leq\cdot n \,.\, p'c$. Nè, del pari, si è sicuri che risulti $n \,.\, (p'+1)\, c \leq\cdot n \,.\, (p+1)\, b$.

Ciò dipende dal fatto, che la scelta di $b, c, \ldots$ non è regolata da una legge fissa, in guisa che ciascuna grandezza sia individuata dal suo posto, come si richiede quando si adopera una successione di grandezze.

In questioni simili non vi è cautela che basti.

Ad esempio, lo stesso *de Paolis*, a pag. 445, per dimostrare che una grandezza data A ha sempre una *misura* rispetto ad una data unità u con cui sia incommensurabile, fa un ragionamento analogo al precedente; prende, cioè, di A un multiplo $n\mathrm{A} \cdot> u$, e determina due multipli di u tali che

$$mu <\cdot n\mathrm{A} <\cdot (m+1)\, u,$$

onde

$$\frac{m}{n} u <\cdot \mathrm{A} <\cdot \frac{m+1}{n} u,$$

con

$$\frac{m+1}{n} u - \frac{m}{n} u \doteq \frac{1}{n} u.$$

È chiaro, egli soggiunge, che, aumentando n, la differenza $\frac{1}{n} u$ decresce indefinitamente, e che gli stati *successivamente decrescenti* di $\frac{m+1}{n} u$ e gli stati *successivamente crescenti* di $\frac{m}{n} u$ si possono considerare come stati successivi di due variabili convergenti, che hanno per limite A.

Or bene: non è evidente che vi siano codesti stati successivamente decrescenti o crescenti delle due variabili.

Ma una consimile menda devo confessare trovarsi anche nei miei *Elementi* (10ª edizione, pag. 348).

Ivi infatti, trattandosi la medesima questione della misura, è detto in sostanza che gli stati della variabile $\frac{m}{n} u$, *disposti in un ordine conveniente*, sono crescenti, e che quelli di $\frac{m+1}{n} u$, *disposti in un ordine conveniente*, sono decrescenti. Ora nemmeno qui si è sicuri di poter disporre i detti stati negli ordini richiesti, poichè si tratta di successioni *indefinite*.

Tanto nel caso del *De Paolis*, quanto nel mio, la difficoltà si toglie certamente col prendere per n successivi valori, ciascuno dei quali sia multiplo del precedente.

E. D'Ovidio.

PICCOLE NOTE

Sull'esagono di Pascal e sull'esalatero di Brianchon. — Il prof. Diego Fellini (*) ha dimostrato che è sempre possibile risolvere i seguenti problemi:

" *Date cinque rette* a, b, c, d, e, *determinarne una sesta* f *in modo che l'esagono semplice* a b c d e f *sia ad un tempo esagono di* PASCAL *ed esalatero di* BRIANCHON ".

" *Dati cinque punti* A, B, C, D, E, *determinarne un sesto* F *in modo che l'esagono semplice* A B C D E F *sia ad un tempo esalatero di* BRIANCHON *ed esagono di* PASCAL ".

Premesso questo, si possono dimostrare i seguenti teoremi:

TEOREMA 1°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ *di* BRIANCHON, *ad un tempo esagono di* PASCAL, *i lati non consecutivi determinano sei punti*

ac, bd, ce, df, ea, fb,

che sono i vertici di un esagono semplice φ' *di* PASCAL, *che è ad un tempo esalatero di* BRIANCHON.

TEOREMA 2°. — *Se* A, B, C, D, E, F, *sono i vertici di un esagono semplice* Φ *di* PASCAL, *ad un tempo esalatero di* BRIANCHON, *i vertici non consecutivi determinano sei rette*

AC, BD, CE, DF, EA, FB,

che sono i lati di un esalatero semplice Φ' *di* BRIANCHON, *che è ad un tempo esagono di* PASCAL.

Sia O il punto per il quale passano le rette

$$p \equiv ab \,.\, de$$
$$q \equiv bc \,.\, ef$$
$$r \equiv cd \,.\, fa$$

congiungenti i vertici opposti ed o la retta alla quale appartengono i punti

$$\mathrm{P} \equiv ad, \quad \mathrm{Q} \equiv be, \quad \mathrm{R} \equiv cf$$

intersezioni delle coppie di lati opposti di φ.

φ' *è esalatero di Brianchon.* — Si considerino i due trilateri abf, dec: essi hanno i lati omologhi

$$(a,\ d), \quad (b,\ e), \quad (f,\ c)$$

che s'incontrano rispettivamente nei tre punti P, R, Q della retta o, e perciò le rette

$$p \ ,\ r \ ,\ x \equiv bf \ .\ ce,$$

congiungenti i vertici omologhi s'incontrano in un punto.

In modo analogo considerando le coppie di trilateri

$$bca,\ efd \quad ; \quad cdb,\ fae,$$

si dimostra rispettivamente che le rette

$$p \ ,\ q \ ,\ y \equiv ac \ .\ df$$

e

$$q \ ,\ r \ ,\ z \equiv bd \ .\ ea$$

passano per un punto.

Ma per ipotesi le rette p, q, r s'incontrano in o, quindi le rette x, y, z, congiungenti i vertici opposti di φ', passano anch'esse per questo punto.

(*) *Periodico di Matematica*, Tomo XIV, maggio-giugno 1899.

φ' *è esagono di Pascal.* — Si considerino i due triangoli

$$fa \,.\, fb \,.\, ae \quad \text{e} \quad cd \,.\, ce \,.\, bd:$$

in essi le rette r, x, z, congiungenti i vertici omologhi, passano per lo stesso punto o, e perciò i punti P, R, X, intersezioni dei lati omologhi, sono in linea retta. In modo analogo, dalla considerazione delle coppie di triangoli

$$ab \,.\, ac \,.\, bf \quad , \quad de \,.\, df \,.\, ce$$

e

$$bc \,.\, bd \,.\, ac \quad , \quad ef \,.\, ea \,.\, df,$$

si dimostra rispettivamente che i punti

P, Q, Y e Q, R, Z

appartengono ad una retta. Ma per ipotesi i punti P, Q, R, sono sulla o, quindi i punti X, Y, Z, intersezioni dei lati opposti di φ', appartengono anch'essi a questa retta.

Corollario 1°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice di* Brianchon, *che è ad un tempo esagono di* Pascal, *le rette non consecutive determinano sei punti*

ac, bd, ce, df, ea, fb

che appartengono ad una conica.

Corollario 2°. — *Se* O *ed* o *sono rispettivamente punto di* Brianchon *e retta di* Pascal *di* φ, *essi sono tali anche per* φ'.

Corollario 3°. — *Il punto* O *e la retta* o *sono polo e polare rispetto alle coniche* C *e* C' *circoscritte a* φ *ed a* φ'.

Teorema 3°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ *di* Brianchon, *ad un tempo esagono di* Pascal, *i punti di contatto dei lati sono i vertici di un esagono semplice* φ'' *di* Pascal, *che è pure esalatero di* Brianchon.

Corollario 1°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice di* Pascal, *che è ad un tempo esalatero di* Brianchon, *i punti non consecutivi determinano sei rette*

AC, BD, CE, DF, EA, FB

che sono tangenti ad una conica.

Corollario 2°. — *Se* o *ed* O *sono rispettivamente retta di* Pascal *e punto di* Brianchon *di* ψ, *essi sono tali anche per* ψ'.

Corollario 3°. — *La retta* o *ed il punto* O *sono polare e polo rispetto alle coniche* K *e* K' *circoscritte a* ψ *ed a* ψ'.

Teorema 4°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice* ψ *di* Pascal, *ad un tempo esalatero di* Brianchon, *le tangenti condotte per i vertici sono i lati di un esalatero semplice* ψ'' *di* Brianchon, *che è pure esagono di* Pascal.

Questi due teoremi non sono altro che i risultati contenuti nei n. 3 e 4 della sopracitata memoria.

Corollario. — *Il punto* O *è il polo della retta* o *rispetto alla conica* C'' *circoscritta a* φ''.

Teorema 5°. — *Se* a, b, c, d, e, f *sono i lati di un esalatero semplice* φ di Brianchon, *ad un tempo esagono di* Pascal, *i punti di contatto dei lati non consecutivi determinano sei rette, che sono i lati di un esalatero semplice* φ''' *di* Brianchon, *che è pure esagono di* Pascal.

Corollario. — *La retta* o *è la polare del punto* O *rispetto alla conica* K'' *circoscritta a* ψ''.

Teorema 6°. — *Se* A, B, C, D, E, F *sono i vertici di un esagono semplice* ψ *di* Pascal, *ad un tempo esalatero di* Brianchon, *le tangenti nei vertici non consecutivi determinano sei punti che sono i vertici di un esagono semplice* ψ''' *di* Pascal, *che è pure esalatero di* Brianchon.

φ''' *è esalatero di Brianchon.* — Infatti, i vertici di φ''' sono rispettivamente i poli dei lati di φ' rispetto alla conica C'' e poichè i lati opposti di questo s'incontrano in tre punti della retta *o*, così i vertici opposti di quello sono congiunti da tre rette che passano per il punto O, polo della retta *o* rispetto C''.

φ''' *è esagono di Pascal.* — Infatti i lati di φ''' sono rispettivamente le polari dei vertici di φ' rispetto alla conica C'', e poichè i vertici opposti di questo sono congiunti da tre rette che passano per il punto O, così i lati opposti di quello s'incontrano in tre punti della stessa retta *o*, polare del punto O rispetto C''.

Corollario. — *Il punto* O *è il polo della retta* o *rispetto alla conica* C''' *circoscritta a* φ'''.

Corollario. — *La retta* o *è la polare del punto* O *rispetto alla conica* K''' *circoscritta a* ψ'''.

Nel caso particolare in cui $\varphi \equiv \psi$ abbia i lati opposti paralleli, lo stesso accade di φ', φ'', φ''', ψ', ψ'', ψ'''. Allora la retta *o* diventa la retta all'infinito del piano ed O il centro delle coniche iscritte e circoscritte.

Ermanno Fabbri.

Sopra una proprietà delle linee giacenti su di una superficie di rotazione. — In una nota pubblicata nelle *Nouvelles Annales de Matematiques* (Novembre 1899) ho trovato analiticamente che se una linea è situata sopra un cono di rotazione, in ogni punto il coseno dell'angolo che essa fa coll'asse del cono è uguale al coseno dell'angolo che fa colla generatrice moltiplicato pel coseno dell'angolo (costante) che la generatrice fa coll'asse: qui darò una semplicissima dimostrazione geometrica di detta proprietà riferendomi, invece che al cono circolare a una qualsivoglia superficie di rotazione.

Sia perciò S una tal superficie, l una linea di essa, M un punto di l e t la tangente relativa, m la tangente al meridiano passante per M. Si conduca per M la parallela a all'asse e si consideri il triedro che ha il vertice in M e che ha per costole, questa parallela, t ed m: in detto triedro, come si riconosce facilmente, è retto il diedro che ha per costola m; per cui, segando con una sfera di centro M, si ottiene un triangolo sferico rettangolo; applicando ad esso un noto teorema di trigonometria sferica si ha subito:

$$\cos(ta) = \cos(tm) \, . \, \cos(ma)$$

cioè:

„Se una linea giace sopra una superficie di rotazione il coseno dell'angolo sotto cui sega l'asse uguaglia il prodotto del coseno dell'angolo sotto cui taglia il meridiano pel coseno dell'angolo del meridiano e dell'asse „.

Manifestamente se l'angolo che il meridiano fa coll'asse è costante, S è un cono circolare e si ritorna al teorema accennato in principio. In tal caso è facile riconoscere che si ha:

„Se una linea di un cono di rotazione sega sotto angolo costante le generatrici di un cono circolare, essa taglia conseguentemente sotto angolo costante le generatrici del cilindro che la proietta dal punto all'infinito dell'asse „.

E. Piccioli.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 545, 547, 550bis, 551bis E 554 (*)

545. *I tre punti* C, B, A *sono in linea retta* (B *fra* C *ed* A) *e facciamo rotolare simultaneamente due cerchi eguali di diametro* BA, *in direzioni opposte, l'uno sul cerchio* (C, B) *l'altro sulla circonferenza concava* (C, A); *il punto* B *del primo cerchio genera una epicicloide* BE, *ed il punto* A *del secondo una ipocicloide* AI: *dimostrare che la retta* |EI| *congiungente i due punti corrispondenti nelle due curve così tracciate, rimane sempre parallela al diametro del cerchio mobile quando è nella sua posizione iniziale.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Ugo Fornari di Varese.

Basta osservare che scelti come assi di riferimento la retta CA (asse delle x) e la Cy perpendicolare ad essa in C, detti a e b respettivamente i raggi del cerchio fisso e di quello mobile, ω l'anomalia del centro del cerchio mobile, si ha per l'epicicloide

$$y=(a+b)\operatorname{sen}\omega-b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\,\omega$$

e per l'ipocicloide (contraddistinguendo con apici gli elementi corrispondenti)

$$y_1=(a_1-b_1)\operatorname{sen}\omega_1-b_1\operatorname{sen}\frac{a_1-b_1}{b_1}\,\omega_1.$$

Nel caso nostro $b=b_1$, $a_1=a+2b$, e quindi $a_1-b_1=a+b$.

Quindi per $\omega=\omega_1$ si avrà

$$y=y_1,$$

che dimostra la proprietà enunciata.

Altra risoluzione del sig. G. Mola di Campobasso.

547. *Sieno* O *il centro,* V *un vertice e* P *un punto arbitrario di una lemniscata (di* BERNOUILLI), T *la proiezione ortogonale di* O *sulla tangente nel punto* P: *dimostrare che* $\widehat{VOT}=3\widehat{VOP}$, *e concludere una dimostrazione semplice per tracciare la tangente in un punto della lemniscata.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Pietro Di Stefano R. U. di Catania.

Essendo $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ l'equazione della lemniscata, se indichiamo con α l'angolo che la normale nel punto $(\rho\theta)$ forma coll'asse della x, si ha

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\dfrac{d\rho}{d\theta}\cos\theta-\rho\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{d\rho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta+\rho\cos\theta}=\frac{a^2\operatorname{sen}2\theta\cos\theta+\rho^2\operatorname{sen}\theta}{a^2\operatorname{sen}2\theta\operatorname{sen}\theta-\rho^2\cos\theta},$$

ovvero, sostituendo a ρ^2 il suo valore:

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\theta.$$

Per costruire la tangente alla curva in un punto P, basta condurre per O una retta OS tale che sia $\widehat{VOS}=3\widehat{VOP}$, e da P la perpendicolare ad OS; questa è la tangente richiesta.

(*) Nel num. precedente fu omesso per errore il nome del sig. Pietro Di Stefano fra i risolutori delle quistioni 542 e 540.

550.bis *Costruire un triangolo dati due vertici e il centro del circolo di Feuerbach.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Roberto Occhipinti, R. U. di Palermo.

Analisi. — Siano m, n le lunghezze note delle proiettanti il centro M del circolo di Feurbach del triangolo incognito ABC sul lato noto BC e sulla perpendicolare condotta a BC dal suo punto di mezzo O (coordinate di M); è noto allora che, chiamando ξ, η rispettivamente l'altezza AP relativa a BC e la distanza OP (coordinate di A), si ha: (*) $m=\frac{\xi}{2}$, $n=\frac{\eta^2-\xi^2+a^2}{4\eta}$ dove $a=\overline{OB}$. Da questo sistema semplicissimo si ricava: $\xi=2m$, $\eta=2n\pm\sqrt{4n^2+4m^2-a^2}$. Determinati ξ e η si può costruire il triangolo rettangolo OPA e quindi ABC. Il problema ha due soluzioni ed è possibile solo quando $4n^2+4m^2-a^2>0$.

Costruzione. — *a)* Le formole precedenti conducono alla seguente costruzione: Si costruisca il triangolo rettangolo di cateti $2n$, $2m$; indi quello di cateto a e di ipotenusa eguale all'ipotenusa di quello così costruito; l'altro cateto si aggiunga a $2n$ o si sottragga da esso: si avranno così due segmenti q, q_1; infine si costruisca il triangolo rettangolo di cateti $2m, q$ (oppure $2m, q_1$); esso sarà il triangolo OPA (od OPA_1) ed allora i triangoli ABC, A_1BC sono i richiesti.

b) La costruzione seguente è più semplice: Si costruisca il triangolo rettangolo di cateto OB e di ipotenusa 2OM; l'altro vertice O' è evidentemente il centro del cerchio circoscritto al triangolo ABC ed O'B ne è il raggio

Il vertice A deve stare su questo cerchio, deve inoltre stare sulla perpendicolare ad AC condotta dal punto dove il cerchio OM seca BC, dunque i punti A, A_1 d'intersezione rappresentano il terzo vertice del triangolo richiesto.

Altra risoluzione del sig. Giorgio Levi, R. L. di Prato.

551.bis *Costruire un triangolo dati due vertici ed il punto di Lemoine.*

RETALI.

Risoluzione del sig. Roberto Occhipinti, R. U. di Palermo.

Analisi. — Siano m, n le lunghezze note delle proiettanti il punto K di Lemoine del triangolo incognito ABC sul lato noto BC e sulla perpendicolare condotta a BC dal punto di mezzo O di esso (coordinate di k); è noto allora che, chiamando ξ, η rispettivamente l'altezza AP relativa a BC e la distanza OP (coordinate di A), si ha: $m=\frac{4a^2\xi}{\xi^2+\eta^2+3a^2}$, $n=\frac{2a^2\eta}{\xi^2+\eta^2+3a^2}$. Risolvendo questo sistema rispetto a ξ e η, si ha:

$$\xi=\frac{am}{N^2}\left\{2a\pm\sqrt{4a^2-3N^2}\right\},\quad \eta=\frac{2an}{N^2}\left\{2a+\sqrt{4a^2-3N^2}\right\},$$

dove $a=OB$, $N^2=m^2+4n^2$. Determinati ξ ed η, si può costruire il triangolo rettangolo OPA, e quindi ABC. Il problema ha evidentemente quattro soluzioni, ed è possibile solo quando $4a^2-3N^2>0$.

Costruzione. — Le formole precedenti conducono alla seguente costruzione: Si costruisca l'espressione $2a\pm\sqrt{4a^2-3N^2}=M$ mediante due triangoli rettangoli: uno di cateti $m, 2n$ e l'altro di ipotenusa a e di cateto $N\sqrt{3}$; indi N^2, portando sui lati di uno degli angoli costruiti; a partire dal vertice S, i segmenti SR, ST uguali

(*) Veggasi la risoluzione del prof. V. Retali della quistione 588 nel *Periodico di Matematica*, anno XVI, pag. 261.

ad 1, N sopra un lato, ed ST' = N sull'altro; indi conducendo da T la TU parallela ad RT'; sarà SU = N^2. Se invece si portano sui lati dello stesso angolo, a partire da S, i segmenti SV, SW uguali ad N^2, m sur un lato, ed SK = a sull'altro e poi si conduce WH parallela a VK, sarà $S = \frac{am}{N^2}$. Infine se sui lati dello stesso angolo si portano, sempre a partire da S, i segmenti SR, S2 eguali rispettivamente ad 1 ed M sur un lato ed SH sull'altro e poi si conduce LS' parallela ad RH, sarà SS' = ξ. Per costruire η non occorre altro che la analoga costruzione di $\frac{2an}{N^2}$ e del prodotto $\frac{2an}{N^2}\left\{2a \pm \sqrt{4a^2 - 3N^2}\right\}$.

Non resta che a costruire il triangolo rettangolo OPA di cateti ξ, η.

Altre risoluzioni dei sigg. U. Fornari di Varese, e prof. G. Mola di Campobasso.

554. *Dimostrare le formole*

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\, dx = \begin{cases} \log\frac{c}{b}, \text{ per m dispari} \\ \left(1 - \frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\right)\log\frac{c}{b}, \text{ per m pari.} \end{cases}$$

D. Besso.

Risoluzione del sig. Aldo Finzi di Mantova.

Dalle formole

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\frac{m+3}{2}}{1.2\ldots\ldots\frac{m-1}{2}}\cos z\right\}, \text{ per } m \text{ impari}$$

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}}\left\{\cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)z + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)\ldots\frac{m+2}{2}}{1.2\ldots\frac{m}{2}}\right\}, \text{ per } m \text{ pari}$$

si traggono le seguenti:

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\, dx = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-1}{2}}\binom{m}{r}\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\, dx$$

per m impari,

$$\int_0^\infty \frac{\cos^m bx - \cos^m cx}{x}\, dx = \frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-2}{2}}\binom{m}{r}\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\, dx$$

per m pari. Ora è

$$\int_0^\infty \frac{\cos(m-2r)bx - \cos(m-2r)cx}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{\cos bz - \cos cz}{z}\, dz = \log\frac{c}{b};$$

e però notando che si ha

$$\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-1}{2}}\binom{m}{r} = \frac{1}{2^{m-1}}\,\frac{1}{2}\,2^m = 1,$$

per m impari, e

$$\frac{1}{2^{m-1}}\sum_{r=0}^{r=\frac{m-2}{2}}\binom{m}{r}=\frac{1}{2^{m-1}}\,\frac{1}{2}\left\{2^m-\binom{m}{\frac{m}{2}}\right\}=1-\frac{1}{2^m}\binom{m}{\frac{m}{2}}=1-\frac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots m},$$

per m pari, risultano le

$$\int_0^\infty\frac{\cos^m bx-\cos^m cx}{x}\,dx=\begin{cases}\log\dfrac{c}{b}, \text{ per } m \text{ impari}\\[2mm] \left(1-\dfrac{1.3.5\ldots(m-1)}{2.4.6\ldots\ldots m}\right)\log\dfrac{c}{b}, \text{ per } m \text{ pari}\end{cases}$$

che si dovevano dimostrare.

(Il calcolo dell'integrale $\int_0^\infty\frac{\cos bz-\cos cz}{z}\,dz$ si fa ricorrendo a noti artifizi, pel tramito d'integrali doppi, e l'ometto perchè può vedersi nei trattati.)

QUISTIONI PROPOSTE(*)

556. Le uniche funzioni, finite e continue, di una variabile indipendente x, che soddisfino alla condizione:

$$f(x_1+x_2)\,f(x_1-x_2)=f^2(x_1)-f^2(x_2),$$

dove x_1 ed x_2 sono due valori qualunque di x, sono le seguenti:

$$ax,\quad c\,\mathrm{sen}\,ax,\quad c\left(a^x-\frac{1}{a^x}\right)$$

con a, c costanti arbitrarie. CHINI.

557. Trovare l'inviluppo delle parabole che hanno per fuoco il fuoco di una parabola fissa, e per direttrici le tangenti della parabola stessa.

558. Dimostrare che

$$e^x\left(x-\frac{x^2}{2.\underline{|2}}+\frac{x^3}{3.\underline{|3}}-\frac{x^4}{4.\underline{|2}}+\ldots\right)=$$

$$=x+\frac{1+\frac{1}{2}}{\underline{|2}}x^2+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\underline{|3}}x^3+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\underline{|4}}x^4+\ldots$$

559. Se un circolo passa pel vertice di una parabola, è tangente ad essa in P e la taglia in Q, il centro di curvatura corrispondente a P si trova sulla normale nel punto Q.

GREENSTREET.

560. In un triangolo ABC i vertici B, C sono fissi e l'angolo $\widehat{A}$ è costante. Trovare l'inviluppo delle simediane uscenti da A.

(*) Nelle quistioni proposte nel n. V sono stati ripetuti i n.i da 550 a 554 che già erano stati adoperati nel n. IV. Si indichino le quistioni del n. V coi n.i 550bis ... 554bis, 555.

561. Dimostrare che la curva ottenuta eliminando θ fra le due equazioni

$$x = a(6\theta + 6\theta^2 - 8\theta^3 - 3),$$
$$x^2 + y^2 - 13a^2 + 12a^2\theta = 0$$

è unicursale, che la sua area è $30\pi a^2$ ed il suo perimetro $48a$.

562. Dimostrare che se è $a > b$ l'area della curva rappresentata dall'equazione

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2} \pm \sqrt{b^2 - x^2}$$

è eguale a $2\pi b^2$.

563. Dimostrare che il quoziente dei due integrali

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\operatorname{sen}^2\theta + b^4\cos^2\theta)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(a^2\operatorname{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta)(a^4\operatorname{sen}^2\theta + b^4\cos^2\theta)^2}$$

è uguale ad ab.

E. N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Andrew Russell Forsyth (membro del Collegio della Trinità a Cambridge). — *Trattato sulle Equazioni differenziali,* capitoli dieci: prima versione dall'inglese di A. Arbicone. — Raffaello Giusti edit. Livorno, 1901; pagg. XI-327, in-8, L. 7.

Non intendo fare un esame critico; ma, avendo letto con piacere ed apprezzato molto questa traduzione italiana, che appare ora contemporaneamente all'edizione inglese, sono lieto di poterne dare l'annuncio, che tornerà gradito agli allievi delle nostre Facoltà matematiche ed in generale a tutti gli studiosi ed ai professionisti colti, pei quali la teoria delle equazioni differenziali è di interesse capitale.

Chi ha dovuto consultare più trattati e pubblicazioni periodiche, per avere una discreta conoscenza di tale argomento, apprezzerà, quanto si conviene, l'importanza della traduzione, della quale il dott. Arbicone ha avuto la felice idea e che egli ha fatto con molta cura.

L'Autore dichiara che, con questo libro, ha voluto dare un'introduzione allo studio delle equazioni differenziali, la cui teoria generale con altre elevate questioni, che ad essa si connettono, egli espone nella sua opera *Teoria delle equazioni differenziali* (in corso di pubblicazione, Cambridge, tip. dell'Università: ne sono apparsi tre volumi): epperciò, *non presupponendo nel lettore alcuna conoscenza del soggetto, limitandosi a valori reali per le variabili e prendendo dalla teoria delle funzioni a variabili reali soltanto i teoremi più semplici,* in questo Trattato *espone i processi più noti e validi per ottenere l'integrale effettivo delle equazioni.* Ma chi considera gli sviluppi di alcuni capitoli — ad es.: la derivata di Schwarz; la forma di Thomson; l'equazione di Bessel; la funzione G di Gauss; parecchi metodi e forme tipiche per le equazioni alle derivate parziali di prim'ordine, di second'ordine e di ordine superiore; ecc. — riconosce subito che, rispetto alle ordinarie esposizioni, questo libro, che il sig. Russel Forsyth chiama un'introduzione, è un vero e ricco trattato, più che sufficiente perchè abbiano conoscenza chiara ed estesa dell'interessante teoria quelli, che ignari di essa non possono ricercare gli ultimi sviluppi particolari, e specialmente tutti coloro, che debbono giovarsene per le applicazioni. Certo, la lettura del Trattato di Russell Forsyth presenta, degli studi antichi e moderni sull'argomento — da quelli di Eulero, Bernoulli, Gauss, Lagrange, Riccati, Laplace, Legendre, Cauchy, Monge ai recenti di Abel, Jacobi, Kummer, Riemann, Cayley, Sturm, Thomson, Todhunter, ecc., — quanto basta, perchè si possa essere avviati bene all'esame speciale delle singole questioni ed alle ricerche.

In ciascuno dei dieci capitoli, si hanno numerosi ed interessanti esempi, che sono in parte dovuti all'Autore ed in parte ricavati dalle memorie degli esami dell'Università di Cambridge o da libri e memorie degli autori, che più si occuparono dell'argomento e che il Russell Forsyth costantemente cita. Senza dubbio, per l'uso e l'illustrazione dei metodi (non sempre per sè stessi facili, sovratutto a chi incomincia lo studio delle equazioni differenziali), la ricca collezione di esempi rappresenta un pregio rilevante ed anzi speciale di questo Trattato. Interessano pure molto alcuni cenni bibliografici, specialmente per la serie ipergeometrica e per le equazioni alle derivate parziali.

L'esposizione piana e nello stesso tempo rigorosa, l'ordine delle teorie e dei metodi hanno quei pregi, che tutti ammirano in altri autori inglesi, ad esempio, in Todhunter e Cayley.

Perchè chi coltiva l'Analisi sia indotto a leggere la traduzione del dott. Arbicone, basta ch'io dia le indicazioni dei capitoli, ponendo in rilievo qualcuno fra i punti più notevoli e meno comuni in altre esposizioni di questa Teoria:

Capitolo I. - *Introduzione.*

Capitolo II - *Equazioni differenziali del primo ordine.* — Sei tipi; metodo per ottenere l'integrale singolare dalla primitiva, luogo inviluppo, luogo nodale, luogo delle cuspidi; metodo per ricavare direttamente l'integrale singolare dall'equazione differenziale, luoghi dei punti di contatto; ecc.

Capitolo III. - *L'equazione lineare generale a coefficienti costanti.* — Proprietà generali; metodi per ottenere la funzione complementare; metodi per avere, in alcuni casi, l'integrale particolare; integrazione dell'equazione lineare omogenea.

Capitolo IV. - *Metodi diversi.* — Integrazione di $y^{(n)} =$ funzione di $y^{(n-1)}$; equazioni esatte lineari o non; derivata di Schwarz; metodo della variazione dei parametri: forma di William Thomson; valore del determinante, che dà la condizione per l'indipendenza di un certo numero d'integrali particolari dell'equazione lineare generale; depressione dell'ordine, quando si conoscono degli integrali particolari; traiettorie: ecc.

Capitolo V. - *Integrazione per serie.* — Equazione di Legendre; equazione di Bessel; proprietà delle funzioni J; equazione di Riccati; relazioni fra l'equazione di Bessel e quelle di Legendre e di Riccati; soluzioni simboliche; ecc.

Capitolo VI. - *La serie ipergeometrica.* — Gruppo di 24 integrali particolari e loro divisione in sei classi; funzione G di Gauss; applicazione della derivata schwarziana per l'equazione differenziale, alla ricerca dei casi d'integrabilità sotto forma finita; ecc.

Capitolo VII. - *Integrazione con integrali definiti.* — Teorema sull'integrazione con integrali definiti dell'equazione lineare generale e casi speciali; applicazione all'equazione della serie ipergeometrica e primitiva di quest'equazione sotto forma d'integrale definito; ecc.

Capitolo VIII. - *Equazioni ordinarie ai differenziali totali.* — Metodi d'integrazione di Richelot e di Cauchy per l'equazione ellittica di Eulero; generalizzazione di quest'equazione e metodo d'integrazione di Jacobi — Equazioni ai differenziali totali e metodi d'integrazione per i casi, nei quali è o no soddisfatta la relazione per l'esistenza di una primitiva; interpretazione geometrica, famiglia di curve; equazioni ai differenziali totali con n variabili; equazioni non lineari — Equazioni simultanee, con coefficienti costanti e con coefficienti variabili; integrazione delle equazioni del moto d'una particella sotto l'azione di una forza centrale.

CAPITOLO IX. - *Equazioni alle derivate parziali del prim'ordine.* — Equazione lineare di LAGRANGE — Quattro forme tipiche; metodo di CHARPIT e LAGRANGE per l'integrazione dell'equazione generale contenente due variabili indipendenti ed applicazione alle forme tipiche ed all'equazione lineare di LAGRANGE — Metodo di JACOBI per l'integrazione dell'equazione generale del prim'ordine con n variabili indipendenti — Equazioni simultanee alle derivate parziali.

CAPITOLO X. — (Metodo di MONGE per integrare $Rr + Ss + Tt = V$; trasformazioni di LAPLACE dell'equazione lineare; metodo di POISSON per una forma speciale dell'equaziona omogenea — Equazione lineare a coefficienti costanti; classe di equazioni omogenee; metodi diversi — Integrazione per serie di $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$. — Intregrazione col metodo di AMPÈRE per l'equazione $Rr + Ss + Tt + U.(rt - s^2) = V$: equazioni che debbono essere soddisfatte da una W e forma generale di W — Ecc.

All'Autore ed all'Editore, presento l'augurio che l'esito di questo Trattato sia tale da indurli ad offrirci tradotta la *Teoria delle equazioni differenziali* del RUSSELL FORSYTH e — specialmente nell'interesse di chi deve non coltivare, ma applicare questi studi — alcuni altri pregevoli trattati, tedeschi ed inglesi, per diversi rami od argomenti speciali d'Analisi e di Geometria.

S. ORTU CARBONI.

É. LEMOINE. — *La géométrographie dans l'éspace ou Steréometrographie.*

Il sig. Lemoine di Parigi, ben noto ai matematici per la sua geometria recente sul triangolo, nel dicembre scorso ha presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi una breve nota, nella quale espone un saggio dell'estensione allo spazio ordinario della sua Geometrografia, dando nuova prova di originalità, di novità e di personalità. Il Lemoine espose per la prima volta il suo metodo per le figure piane, in una memoria, letta nel 1888 al Congresso di Orano; tenendo conto poi dei lavori del Bernès, del Tarry e del Mackay, e facendo anche applicazioni alla geometria descrittiva, ne diede una esposizione quasi completa in una memoria presentata alla Società fisico-matematica di Kasan (1897). Riconosciutasi l'importanza pratica della Geometrografia nella costruzione effettiva dei disegni, per le applicazioni sue alla geometria descrittiva ed alle proiezioni ortogonali parallele, essa fu introdotta nell'insegnamento superiore e secondario anche in Italia, specialmente per mezzo del Jung a Milano, del Burali Forti a Torino e del Nannei a Bari, ottenendo efficace aiuto nell'insegnamento della geometria.

Il Lemoine imagina per la sua stereometrografia due istrumenti ideali, convenzionali, corrispondenti alla riga ed al compasso della geometrografia; essi sono il *planografo (planque)* e lo *sferografo (sférêtre)* per tracciare piani e sfere, come servono riga e compasso per tracciare rette e circonferenze. Alle notazioni R_1, $2R_1$, R_2, C_1, $2C_1$, C_2 e C_3, già accettate in geometrografia, aggiunge le seguenti; $P_1 =$ far passare il planografo per un punto; $2P_1 =$ far passare il planografo per due punti o per una retta; $3P_1 =$ far passare il planografo per tre punti, o per una retta ed un punto, o per due rette che si tagliano o per una data curva piana $P_2 =$ tracciare il piano; $S_1 =$ mettere una punta dello sferografo in un punto determinato; $S_2 =$ mettere una punta dello sferografo in un punto indeterminato di una linea o di una superficie tracciata; $S_3 =$ tracciare la sfera. Chiamato poi *coefficiente di semplicità* o *semplicità* il numero totale delle operazioni fatte, cioè la somma dei coefficienti dei simboli, e *coefficiente di preparazione* o *preparazione* la somma dei coefficienti delle operazioni di preparazione, cioè C_1, C_2, R_1, P_1, S_1, S_2, passa ad esaminare due costruzioni del problema: " per un punto A tracciare un piano perpendicolare ad una retta BC, " ottenendo i seguenti risultati:

1°. Op. $(C_1 + C_3 + 6P_1 + 3P_2 + 2S_1 + 2S_3)$. Sempl. 15. Prep. 9; 1 circonferenza, 3 piani, 2 sfere;

2°. Op. $(3P_1 + P_2 + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3)$. Sempl. 11. Prep. 6; 1 piano, 2 sfere.

Il Lemoine chiude la sua nota, affermando che non sarà difficile estendere la geometrografia allo spazio ad n dimensioni, ed avverte che una nota più importante della presente sarà inserita nei Rendiconti dell'Associazione francese per il progresso delle Scienze (Congresso di Parigi, 1900).

L'egregio prof. Nannei, dando nel *Pitagora* (anno 1898) una breve esposizione della Geometrografia, terminava promettendo che egli ne avrebbe studiata l'estensione allo spazio. E sono lieto di associare ora al nome chiaro del Lemoine quello del collega ed amico prof. Nannei. Egli ha già condotto a buon punto il suo studio (che mi auguro pubblicato presto) ottenendo gli stessi risultati del Lemoine; egli pure fa uso di un planografo e di uno sferografo, identico il primo al *planque*, diverso il secondo dallo *sphérêtre*. Infatti il Lemoine, parlando di punte *(mettre une pointe du sphérêtre)* fa pensare ad una forma analoga a quella del compasso, mentre il Nannei ha imaginato per il suo sferografo la forma di mezzo cerchio di raggio variabile, cosicchè si traccia la sfera, mettendo il centro dell'istrumento nel punto che sarà centro di essa, e facendo rotare il semicerchio intorno al diametro applicando cioè il solito metodo della generazione dei solidi di rotazione. Tale diversità non produce, come è naturale, alcuna differenza nei resultati.

U. Ceretti.

DA GIORNALI E RIVISTE

Nel num. 3, vol. XIV del **Journal Sciencias Mathematicas e Astronomicas** pubblicato dal Ch. prof. *F. Gomes Teixeira* a Coimbra, leggesi quanto segue, a riguardo del **Sunto di Planimetria** del prof. *S. Ortu Carboni*, edito da R. Giusti:

" Questo volumetto fa parte di una raccolta di manuali pubblicati dalla Casa Editrice R. Giusti di Livorno col titolo di *Biblioteca degli Studenti*. Tratta di Geometria piana e, malgrado il suo piccolo formato (116 pag.) contiene quanto occorre a quelli che studiano tale scienza per coltura scientifica generale. Ma anche a chi si prefigge lo studio della geometria elementare come preparazione a studi matematici più estesi, può questo libretto riescire utile come primo inizio. A tal fine l'autore omise certe teorie minuziose, che trovansi in libri di Geometria più estesi, e che gli studiosi stentano a capire quando ancora non sono iniziati. Fece quindi una esposizione ed una scelta tale dei precetti e li dispose in modo che questa omissione non abbia per effetto uno studio incompleto della scienza presa a trattare. Al contrario, i precetti dati si seguono e si coordinano in modo da formare un complesso armonico. Aggiungasi che l'esposizione della materia è chiara quanto può occorrere in un libro destinato a principianti. "

Bulletin des Sciences mathématiques et physiques élémentaires fondé par *M. B. Niewenglowski*.

Anno VI, N. 8, 15 gennaio 1901. — *Ch. M.*, Sull'inversione. — *L. G.*, Sulle dimostrazioni geometriche. (Critica di diverse note dimostrazioni). — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 9, 1 febbraio 1901. — *E. Rebuffel,* Sulla geometria del circolo. (Potenze d'un punto di un piano rispetto a tre circoli d'uno stesso fascio: e angoli d'un circolo con i circoli d'un fascio). — *L. G.*, Sulle dimostrazioni geometriche (cont.). — Corrispondenza (*E. Lebon* fa notare un teorema sulle progressioni geometriche del prof. *Dufour*). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 10, 15 febbraio 1901. — *E. Rebuffel,* Posizioni relative d'una retta e d'un iperbole (Stabilisce la distribuzione tra punti di una retta interni ed esterni ad un'iperbole, cercando di evitare il concetto di continuità). — *L. G.*, Variazioni di alcune funzioni. (Dimostra che se $P = a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n$ è il prodotto di $m+n$ fattori positivi tali che nessuno dei primi m sia maggiore di nessuno degli ultimi n; e se $Q = c_1 c_2 \dots c_m d_1 d_2 \dots d_n$ è il prodotto di $m+n$ fattori positivi di cui la somma sia eguale alla somma dei fattori di P, e di più è $c_s \leq a_s$ $(s = 1, 2, 3 \dots n)$ e insieme $d_r \geq b_r$ $(r = 1, 2, 3 \dots n)$; allora se tutti i fattori di P non sono eguali ai corrispondenti fattori di Q è sempre $P > Q$. Ne deduce come esempio dell'applicazione che può avere questo teorema nella teorica elementare dei massimi e minimi, che il massimo di $x^m (a-x)^n$ si ha per $x = \frac{m+n}{am}$). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 11, 1 marzo 1901. — *L. G.*, Variazioni di $(x-a)^m (x-b)^n (x-c)^p$ ecc., (Applica il teorema dimostrato nel fasc. precedente allo studio di altre funzioni. — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte.

N. 12, 15 maggio 1901. — *L. G.*, Assiomi geometrici (fa noto il sistema di assiomi *completo* e *irriducibile* di Hilbert, citando a proposito i lavori di Burali-Forti e di Peano). — Preparazione agli esami. — Questioni risolute. — Questioni proposte (alcune sono tolte dal *Supplemento al Periodico di Matematica*).

Journal de Mathématiques élémentaires de *H. Vuibert.*

Anno XXV, N. 8, 15 gennaio 1901. — *A. Vacquant,* Studia l'equazione $\operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a$. (*)

N. 10, 15 febbraio 1901. — *V. Hioux,* Nota sulla parabola. (Considera la parabola come inviluppo di una retta, che intercetta sui lati di un angolo costante due segmenti, tra le cui misure p e q sussiste la relazione $ap + bq = l^2$ essendo a, p, l lunghezze date). — *M. Lévy,* Discorso pronunziato alla seduta pubblica annuale dell'Accademia delle Scienze. (Constata l'immenso progresso scientifico conseguito nel secolo XIX).

N. 11, 1 marzo 1901. — *A. Goulard,* Nota d'Aritmetica e d'Algebra. (Dimostra che la somma e il prodotto di due numeri commensurabili non possono essere ambedue interi, se questi due numeri non sono interi). In questo e negli altri fascicoli non citati, numerosi esercizi e problemi.

L'Enseignement Mathématique (Revue internationale. Directeurs M.M. *C. A. Laisant* e *H. Fehr*).

Anno III, N. 1, 15 gennaio 1901. — *Fr. Pietzker,* L'insegnamento matematico in Germania durante il XIX secolo. — *A. Gallardo,* Le matematiche e la biologia. — *Ch. Méray,* Corrispondenze internazionali in *esperanto*. (**) — *Hoffbauer,* Su una terminologia comparativa del punto e della retta. — *H. Dellac,* Sull'espressione: *similitudine inversa* nella Planimetria. — Cronaca. — Corrispondenza. — Bibliografia.

E. N.

(*) V. *Supplemento al Periodico di Matematica*, 18ª quistione a concorso (Anno III - Fasc. IV, Febbraio 1900).

(**) L'*esperanto* è una nuova lingua internazionale proposta dal Dr. Zamenhof.

Unterichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften.

Anno VI (1900), fasc. 1°. — *F. Pietzker*, Il principio del nuovo secolo. — *R. Schwalbe*, La nautica in relazione all' insegnamento. (L'A. dimostra come le nozioni sulla nautica abbiano relazione con molte materie d'insegnamento e specialmente con la storia per ciò che riguarda le battaglie navali; con la matematica, (v. anche fasc. 5° del 1899) alla quale tali nozioni offrono eccellente materia d'esercizio; con la fisica, di cui quasi ogni parte presenta dei legami con la nautica; con la geografia che comprende un capitolo di nautica, cioè la oceanografia). — *F. Pietzker*, Esempi di calcoli. (Si discute sopra esempi del modo logicamente più opportuno di disporre le operazioni dovendo calcolare il valore di una data espressione). — Notizie scolastiche ed universitarie. — Relazioni di adunanze. — Mezzi d'insegnamento. — Recensioni di libri relativi a scienze naturali.

Fasc. 2° (1900). — Ordine del giorno del IX congresso tenuto ad Amburgo dall' " Associazione per il miglioramento dell'insegnamento della matematica e delle scienze naturali ", — *R. Schwalbe*, La nautica ecc. (continuazione, v. fasc. 1°). — *E. Meyer*, Sulla posizione di rette e piani nello spazio. (L'A. si propone di mostrare come possano coordinarsi le proposizioni che riguardano la posizione di rette e piani nello spazio in modo da ottener la maggior brevità possibile nell'esposizione di questa parte della stereometria, ch'egli giudica poco attraente per gli alunni e gl'insegnanti, proponendo d'impiegare il tempo che così viene a risparmiarsi p. e. ad una breve introduzione di geometria descrittiva). — *A. Richter*, La nautica in relazione all'insegnamento della fisica. — Notizie scolastiche ed universitarie. — Associazioni e adunanze. — Recensioni di libri relativi a scienze naturali ed alla nautica e dell'Algebra elementare ad uso dei Licei e degli Istituti Tecnici (1° biennio) e degli Elementi del calcolo algebrico ad uso delle Scuole Normali del professore M. Nassò.

Fasc. 3° (1900). — *H. Schotten*, Scienza e scuola. (L'A. si propone di fissare quale sia il vero intimo scopo delle scuole superiori, ed in quali relazioni si trovino queste con la scienza). — *Schafheitlin*, Le definizioni nella trigonometria con un'aggiunta a questo scritto di F. Pietzker. (Si fa la critica del libro " Sui diversi modi di porre i fondamenti della trigonometria " di Haentzschel). — *Grüber*, Misura della sfera. — Relazione sul IX congresso dell' " Associazione per il miglioramento, ecc. " (v. fasc. 2°). — Notizie scolastiche ed universitarie. — Associazioni e adunanze. — Mezzi d'insegnamento (relazioni sopra tavole murali). — Recensioni di libri relativi alle scienze naturali e dei seguenti: — 1° *P. Bachmann*, Teoria dei numeri, parte 4ª, Leipzig, 1898, Teubner. — 2° *Arved Fuhrmann*, Applicazione del calcolo infinitesimale nelle scienze naturali, nell'alta scienza delle costruzioni e nella tecnica, Berlin, Ernst. — 3° *Ed. Maiss*, Problemi sul calore ed inclusivamente sulla teoria meccanica del calore e sulla teoria cinetica dei gas, Wien 1898, successori Pichler. — 4° *H. Schotten*, Insegnamento della matematica.

F. Palatini.

ERRATA-CORRIGE DEI FASCICOLI PRECEDENTI.

Pag. 211,	linea ultima	invece di $\overline{CA}$	leggasi $\overline{CB}$.
" 271,	" 20	" " 3° ordine	" 5° ordine.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 12 giugno 1901.