del passo r, se le due tavole hanno ugual entrata, talchè

$$b_{11} = a_{11}; \qquad b_{12} = a_{12}, \dots b_{1n} = a_{1n},$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned} & b_{ij} = q\gamma_{j-1} S + a_{ij} = (\nu_{ij}^{(h)} - \nu_{ij}^{(r)}) S + a_{ij} \\ & \text{essendo} \\ & q\gamma_{j-1} = \nu_{ij}^{(h)} - \nu_{ij}^{(r)} = \frac{(h+1)^{j-1} - (r+1)^{j-1}}{n}; \qquad j > 1 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

ed al solito

$$S = a_{11} + a_{12} \dots + a_{1n}.$$

Sostituendo nella (22) a b_{ij} ed a_{ij} le espressioni che risultano dalle (1) per i valori $qn + r$ ed r del passo, risulta la relazione:

$$(\mu_{11}^{(h)} - \mu_{11}^{(r)}) a_{ij} + \dots + (\mu_{1n}^{(h)} - \mu_{1n}^{(r)}) a_{1,j-1} = (\nu_{ij}^{(h)} - \nu_{ij}^{(r)}) S \quad (23)$$

che è una identità rispetto alle a (che nel 1° membro si succedono nell'ordine a_{1j}, $a_{1,j+1}$, ... a_{1n}, a_{11}, ... $a_{1,j-1}$).

Se $r = 0$ ed $h = qn$, si ha $a_{ij} = a_{1j}$, e per $j = 1$ risulta:

$$\left.\begin{aligned} & b_{i1} = (\nu_{i1} - 1) S + a_{11} \\ & \text{con} \\ & \nu_{11} = 1; \qquad \nu_{12} = \nu_{13} = \dots = \nu_{1,n} = 0, \\ & \text{e} \\ & \nu_{i1}^{(h)} = \frac{(h+1)^{i-1} - 1}{n} + 1 \\ & \text{mentre se } j > 1, \text{ si ha } \nu_{1j}^{(0)} = 0, \text{ e:} \\ & \nu_{ij}^{(h)} = \frac{(h+1)^{i-1} - 1}{n} \\ & b_{ij} = \nu_{ij}^{(h)} S + a_{1j} \qquad j > 1 \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Se poi $h = nq + (n-1)$, con ragionamento analogo a quello fatto per le tavole sinistrorse si trova:

$$b_{ij} = n^{i-2}[(q+1)^{i-1} - 1] S + n^{i-2} S = n^{i-2}(q+1)^{i-1} S. \quad (25)$$

E poichè questa relazione coincide colla (20), si ha che per

$$h = nq + (n-1)$$

la tavola destrorsa e la sinistrorsa coincidono.

Infine se $n = 1$, l'unico valore di j è 1, e risulta

$$b_{i1} = (h+1)^{i-1} a_{11}.$$

In tal caso, la tavola si riduce ad una sola colonna.

PARTE TERZA.

Espressione in funzione di* $Q_1, Q_2, \ldots Q_n, p, m$ *dell'
termine della successione determinata dai va
$Q_1, \ldots Q_n$ dei primi n termini e dall'equazione
***corrente* $Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \ldots + Q_{m-n})$.**

È noto che si chiamano successioni di Leonardo Pisano q
determinate dai valori dei primi due termini e dalla condizion
ciascun termine valga la somma dei due che lo precedono. Esse
caso particolare delle successioni $Q_1, Q_2, \ldots$ determinate dai v
iniziali Q_1, Q_2 e dall'equazione ricorrente

$$Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2}).$$

Queste a lor volta sono caso particolare delle successioni d
minate dai valori $Q_1, \ldots Q_n$ dei primi n termini e dall'equa
ricorrente

$$Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2} + \ldots + Q_{m-n})\,; \qquad m > n.$$

Ci proponiamo di trovare in qual modo il termine generale
una di tali successioni si esprime in funzione di $Q_1, \ldots Q_n, p$.

Rammentiamo anzitutto che se si indica con $H_{11}, H_{12}, H_{13} \ldots$
successione determinata dagli n valori iniziali 1, 0, 0, ... 0, e
l'equazione (1), con $H_{21}, H_{22}, H_{23} \ldots$ quella determinata dagli
lori iniziali 0, 1, 0, ... 0, e dalla (1), ... infine con H_{n1}, H_{n2}, H
quella determinata dagli n valori iniziali 0, 0, ... 0, 1 e dall
risulta dalla teoria delle equazioni ricorrenti lineari a coeffi
costanti:

$$Q_m = \sum_1^n{}_i\, H_{im}\, Q_i = H_{1m}\, Q_1 + H_{2m}\, Q_2 + \ldots + H_{nm}\, Q_n\,.$$

Per raggiungere lo scopo propostoci ci basta adunque
esprimere $Q_{1m}, \ldots Q_{nm}$ in funzione di p.

Sia dapprima $n = 2$. Consideriamo adunque la successione d
minata dai valori iniziali $Q_1, \ldots Q_2$ e dall'equazione ricorrente

$$Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2}).$$

Sia $H_{11}, H_{12}, \ldots$ la successione determinata dai valori iniziali
dall'equazione ricorrente

$$H_{1m} = p\,(H_{1,m-1} + H_{1,m-2}),$$

$H_{21}, H_{22}, \ldots$ quella determinata dai valori iniziali 0; 1 e dall'
zione ricorrente

$$H_{2m} = p\,(H_{2,m-1} + H_{2,m-2})\,.$$

Le due successioni sono:

(H_1) $\quad 1,\ 0,\ p,\ p^2,\ p^3+p^3,\ p^4+2p^3,\ p^5+3p^4+p^3,\ \ldots.$

(H_2) $\quad 0,\ 1,\ p,\ p^2+p,\ p^3+2p^2,\ p^4+3p^3+p^2,\ p^5+4p^4+3p^3,\ \ldots$

e si constata subito che è:

$$H_{1,m} = pH_{2,m-1}.$$

Risulta inoltre:

$$H_{2,m} = \sum_{0}^{E\frac{m-2}{2}}{}_j \binom{m-j-2}{j} p^{m-j-2}$$

e quindi:

$$H_{1,m} = \sum_{0}^{E\frac{m-3}{2}}{}_j \binom{m-j-3}{j} p^{m-j-2} \tag{4}$$

Dunque H_{2m} è un polinomio di $E\dfrac{m-2}{2}+1$ termini e di grado $m-2$ in p; l'ultimo termine di esso è di grado $m-2-E\dfrac{m-2}{2}$ in p ed i cui coefficienti sono i numeri $\binom{m-2}{0}, \binom{m-3}{1}, \ldots$ che appartengono ad una diagonale al triangolo T_1. [1] Ora poichè

$$Q_m = H_{1m}\, Q_1 + H_{2m}\, Q_2 \tag{5}$$

sostituendo ad H_{1m}, H_{2m} le espressioni (3) troveremo Q_m espresso in funzione di Q_1, Q_2, p. [2]

---

(1) Osserviamo, poichè ciò sarà utile in seguito, che se si considerano i numeri

$$\begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}_h, \begin{Bmatrix} k-1 \\ 1 \end{Bmatrix}_h, \begin{Bmatrix} k-2 \\ 2 \end{Bmatrix}_h, \ldots, \begin{Bmatrix} k-i+1 \\ i-1 \end{Bmatrix}_h, \begin{Bmatrix} k-i \\ i \end{Bmatrix}_h, \begin{Bmatrix} k-i-1 \\ i+1 \end{Bmatrix}_h, \ldots$$

e si suppone che da $\begin{Bmatrix} k-i \\ i \end{Bmatrix}_h$ in poi siano nulli, sarà $(k-i)\,h < i$ e quindi $i > \dfrac{kh}{k+1}$. Sarà pertanto $i = E\dfrac{kh}{h+1}+1$, comunque sia kh divisibile o no per $h+1$. I suddetti numeri

$$\begin{Bmatrix} k \\ 0 \end{Bmatrix}_h, \ldots, \begin{Bmatrix} k-i+1 \\ i-1 \end{Bmatrix}_h$$

non nulli appartengono al triangolo T_h, e sono disposti lungo una diagonale $\nearrow$ che muovendo dal termine $(k+1)^0$ della prima verticale, passa per il k^{mo} della 2^a, per il $(k-1)^0$ della 3^a, ... ecc.

(2) L'equazione ricorrente $Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2})$ è caso particolare della

$$Q_m = p\,Q_{m-1} + q\,Q_{m-2}.$$

Si ha rapporto a questa $Q_m = H_{1m}\,Q_1 + H_{2m}\,Q_2$ ed è:

$$H_{1,m} = q\,H_{2,m-1}; \qquad H_{2m} = \sum_{0}^{E\frac{m-2}{2}}{}_j \binom{m-j-2}{j} p^{m-2j-2} q^j$$

e per $q = p$ coincide colla 1^a delle (4). Cfr. un mio lavoro: *Sulle equazioni ricorrenti lineari del 2° ordine a coefficienti costanti. Periodico di Matematica*, fasc. Marzo-Maggio 1914.

Supponiamo ora $n = 3$. Consideriamo adunque la succession
terminata dei valori iniziali Q_1, Q_2, Q_3 e della equazione ricor

$$Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2} + Q_{m-3}).$$

Le successioni

$$H_{11}\,,\ H_{12}\,,\ H_{13}\ldots;\quad H_{21}\,,\ H_{22}\ldots;\quad H_{31}\,,\ H_{32}\,,\ldots$$

sono:

$H_{1i})$ $1,\ 0,\ 0,\ p,\ \ p^2,\ \ \ p^3+p^2,\ \ p^4+2p^3+p^2,\ \ \ p^5+3p^4+3p^3,$
$H_{2i})$ $0,\ 1,\ 0,\ p,\ p^2+p,\ \ p^3+2p^2,\ \ p^4+3p^3+2p^2,\ \ p^5+4p^4+5p^3+p$
$H_{3i})$ $0,\ 0,\ 1,\ p,\ p^2+p,\ p^3+2p^2+p,\ p^4+3p^3+3p^2,\ p^5+4p^4,+6p^3+2$

e risulta per $m \geqslant 3$:

$$H_{2,m} = p\,(H_{3,m-1} + H_{3,m-2})$$

$$H_{1,m} = pH_{3,m-1}\,.$$

Si ha poi, come si può constatare facilmente:

$$H_{3,m} = \begin{Bmatrix} m-3 \\ 0 \end{Bmatrix}_2 p^{m-3} + \begin{Bmatrix} m-4 \\ 1 \end{Bmatrix}_2 p^{m-4} + \begin{Bmatrix} m-5 \\ 2 \end{Bmatrix}_2 p^{m-5} + \ldots$$

$$\ldots + \begin{Bmatrix} m-3-\mathrm{E}\,\dfrac{2\,(m-3)}{3} \\ \mathrm{E}\,\dfrac{2\,(m-3)}{3} \end{Bmatrix}_2 p^{m-3-\mathrm{E}\frac{2(m-3)}{3}}$$

ovvero

$$H_{3,m} = \sum_{0}^{\mathrm{E}\frac{2(m-3)}{3}}{}_j \begin{Bmatrix} m-j-3 \\ j \end{Bmatrix}_2 p^{m-j-3}\,.$$

Adunque $H_{3,m}$ è un polinomio di $\mathrm{E}\,\dfrac{2\,(m-3)}{3} + 1$ termini;
è di grado $m-3$ in p ed il suo ultimo termine è di grado

$$m - 3 - \mathrm{E}\,\frac{2\,(m-3)}{3}\,.$$

Si ha poi

$$Q_m = H_{1,m}\,Q_1 + H_{2,m}\,Q_2 + H_{3,m}\,Q_3$$

e poichè le (7) ed (8) ci permettono di esprimere H_{1m}, H_{2m}, H
funzione di p, possiamo dire di saper esprimere Q_m in funzio
Q_1, Q_2, Q_3, p.

Aggiungiamo che i coefficienti $\begin{Bmatrix} m-3 \\ 0 \end{Bmatrix}_2$, $\begin{Bmatrix} m-4 \\ 1 \end{Bmatrix}_2$, ... nell'es
sione di H_{3m} data dalle (8) sono numeri del triangolo T_2, ed i
sono distribuiti lungo la diagonale $\nearrow$ che si stacca dal termine (
della 1ª verticale e passa per l'$(m-3)^{\circ}$ della 2ª, l'$(m-4)^{\circ}$ de

come mostra lo specchio seguente, nel quale i numeri stampati in grassetto sono i coefficienti di $H_{3,s}$.

1ª	1	0	0	0	0	**0**...			
2ª	1	1	1	0	**0**...				
3ª	1	2	3	**2**	1	0	0...		
4ª	1	3	**6**	7	6	3	1	0	0...
5ª	1	**4**	10	6...					
6ª	**1**	5	15...						
7ª	1	6....							

È anche notevole la relazione

$$H_{2m} = H_{1,m} + H_{1,m-1}.$$

Passiamo al caso $n = 4$. L'equazione ricorrente cui soddisfa la successione delle Q è

$$Q_m = p\,(Q_{m-1} + Q_{m-2} + Q_{m-3} + Q_{m-4}) \tag{10}$$

e si ha:

$$Q_m = H_{1m}\,Q_1 + H_{2m}\,Q_2 + H_{3m}\,A_3 + H_{4m}\,Q_4. \tag{11}$$

Le successioni

$$H_{11}\,,\ H_{12}\,,\ldots;\quad H_{21}\,,\ H_{22}\,,\ldots;\quad H_{31}\,,\ H_{32}\,,\ldots;\quad H_{41}\,,\ H_{42}\ldots$$

sono:

H_1) $1, 0, 0, 0, p,\quad p^2,\quad p^3+p^2,\quad p^4+2p^3+p^2,\quad p^5+3p^4+3p^3+2p^2,\ldots$

H_2) $0, 1, 0, 0, p, p^2+p,\quad p^3+2p^2,\quad p^4+3p^3+2p^2,\quad p^5+4p^4+5p^3+2p^2,\ldots$

H_3) $0, 0, 1, 0, p, p^2+p, p^3+2p^2+p,\quad p^4+3p^3+3p^2,\quad p^5+4p^4+6p^3+2p^2,\ldots$

H_4) $0, 0, 0, 1, p, p^2+p, p^3+2p^2+p, p^4+3p^3+3p^2+p, p^5+4p^4+6p^3+4p^2,\ldots$

e si vede subito che sono soddisfatte le relazioni:

$$\begin{aligned} H_{3m} &= p\,(H_{4,m-1} + H_{4,m-2} + H_{4,m-3}) \\ H_{2m} &= p\,(H_{4,m-1} + H_{4,m-2}) \\ H_{1m} &= p\,H_{4,m-1} \end{aligned} \tag{12}$$

talmodochè per aver Q_m espresso in funzione di p, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, basta saper esprimere le H_4 in funzione di p. Ora se ci riferiamo al triangolo T_3, vediamo che i coefficienti ad es. di $H_{4,9}$ sono sulla

1ª	1	0	0	0	0	**0**...			
2ª	1	1	1	1	**0**	0...			
3ª	1	2	3	**4**	3	2	1	0	0...
4ª	1	3	**6**	10	12	12...			
5ª	1	**4**	10	20...					
6ª	**1**	5	15...						

diagonale $\nearrow$ 1, 4, 6, 4, od in generale H_{4m} è un polinomio di g
$m-4$ in p, con $E\frac{3(m-4)}{4}+1$ termini, l'ultimo dei quali di g
$m-4-E\frac{3(m-4)}{4}$ in p. In esso i coefficienti sono i numeri

$$\left\{\begin{matrix} m-4 \\ 0 \end{matrix}\right\}_3, \left\{\begin{matrix} m-5 \\ 1 \end{matrix}\right\}_3 \cdots \left\{\begin{matrix} m-4-E\frac{3(m-4)}{4} \\ E\frac{3(m-4)}{4} \end{matrix}\right\}_3.$$

Adunque:

$$H_{4m} = \sum_{0}^{E\frac{3(m-4)}{4}} {}_j \left\{\begin{matrix} m-j-4 \\ j \end{matrix}\right\}_3 p^{m-j-4}.$$

La legge di formazione delle H è ora evidente. Sia adunq successione $Q_1, Q_2, \ldots$, determinata dai valori iniziali $Q_1, \ldots$ dall'equazione ricorrente (1). Siano

$$H_{11}, H_{12} \ldots; \quad H_{21}, H_{22} \ldots; \ldots; H_{n1}, H_{n2}, \ldots$$

le n successioni determinate dalle equazioni ricorrenti:

$$H_{im} = p\,(H_{i,m-1} + H_{i,m-2} + \ldots + H_{i,m-n}); \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

e dai valori iniziali

$$\begin{array}{llll} 1\ 0\ 0 \ldots 0 & \text{per le} & H_{11}, H_{12} \ldots \\ 0\ 1\ 0 \ldots 0 & \text{"}\ \ \text{"} & H_{21}, H_{22} \ldots \\ \vdots & & \\ 0\ 0 \ldots 0\ 1 & \text{"}\ \ \text{"} & H_{n1}, H_{n2} \ldots \end{array}$$

Si hanno le relazioni:

$$\begin{aligned} H_{n-1,m} &= p\,(H_{n,m-1} + H_{n,m-2} + \ldots + H_{n,m-n+1}) \\ H_{n-2,m} &= p\,(H_{n,m-1} + H_{n,m-2} + \ldots + H_{n,m-n+2}) \\ &\vdots \\ H_{n-i,m} &= p\,(H_{n,m-1} + H_{n,m-2} + \ldots + H_{n,m-n+i}) \\ &\vdots \\ H_{2m} &= p\,(H_{n,m-1} + H_{n,m-2}) \\ H_{1,m} &= p\,H_{n,m-1} \end{aligned}$$

e poichè

$$Q_m = H_{1m}\,Q_1 + H_{2m}\,Q_2 + \ldots + H_{nm}\,Q_n$$

per saper esprimere Q_m in funzione di $p, Q_1, \ldots Q_n$, basterà esprimere $H_{n,1}, H_{n,2} \ldots$ in funzione di p. Ora si ha appunto:

$$H_{n,m} = \sum_{0}^{E\frac{(n-1)(m-n)}{n}} {}_j \left\{\begin{matrix} m-j-n \\ j \end{matrix}\right\}_{n-1} p^{m-j-n}$$

vale a dire $H_{n,m}$ è un polinomio di $E\frac{(n-1)(m-n)}{n}+1$ termini, di grado $m-n$ in p, coll'ultimo termine di grado

$$m-n-E\frac{(n-1)(m-n)}{n}.$$

I coefficienti dei suoi termini sono i numeri

$$\left\{\begin{matrix} m-n \\ 0 \end{matrix}\right\}_{n-1}, \qquad \left\{\begin{matrix} m-n-1 \\ 1 \end{matrix}\right\}_{n-1} \cdots$$

ed appartengono alla diagonale $\nearrow$ di T_{n-1}, che si stacca dal termine $(m-n+1)^{\circ}$ della 1ª verticale e passa per l'$(m-n)$ della 2ª, l'$(m-n-1)^{\circ}$ della 3ª ecc.

Abbiamo così raggiunto lo scopo che ci eravamo proposti.

N. Traverso.

ERRATA-CORRIGE

Il lettore è pregato di fare le seguenti correzioni nella parte del lavoro stampata nei fasc. precedenti

Fasc.	Pag.	Linea dall'alto	ERRATA-CORRIGE	
I	2	12, 13, 14	cambiare h in $h+1$ e tener conto dei segni che precedono h	
»	9	13	supponendo	scomponendo
»	12	16	$n+1$	$n=1$
»	15	la 9ª linea va scritta:	$Y=X^m=\left\{\begin{matrix} m \\ 0 \end{matrix}\right\}_h+\left\{\begin{matrix} m \\ 1 \end{matrix}\right\}_h x+\ldots+\left\{\begin{matrix} m \\ i \end{matrix}\right\}_h x^i+\ldots$	
»	15	29	$m-n+1$	$[m-n+1]$
»	18	20	$\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8-5 \end{matrix}\right\}_3$	$\left\{\begin{matrix} 5 \\ 8-3 \end{matrix}\right\}_3$
II	53	18, 19	tutti i simboli $\{\ \}$ devono avere l'indice h al piede	
»	63	11	$\begin{pmatrix} n-j-i \\ i \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} i \\ n-j-i \end{pmatrix}$
»	65	15	m^a	$(n+1)^a$
»	67	7	$\ldots 0, 1, \ldots 0, 0, \ldots$	$\ldots 0, 1, \ldots 1, 0, \ldots$
»	69	8	$a'a'$	aa',
III	110	25	$a'_{i,\,n-r-j}$	$a'_{i,\,n-r+j}$
IV	145	nella tavola a destra il 2° numero della 3ª linea è 3 e non 2		
»	160	21	$\mu^{(h)}_{p+q-2},\ \sigma_q+w$	$\mu^{(h)}_{p+q-1},\ \sigma_q+w$
»	162	28	$\mu^{(h)}_{p+q-1},\ \sigma_q+v-u$	$\mu^{(h)}_{p+q-1},\ \sigma_p+v-u$

RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

e discussione dei risultati con metodo geometrico

Applicazione alle equazioni di 1°, 2°, 3° grado.

Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ gli $(n+1)$ coefficienti dati in grand
e segno del polinomio:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

Costruiamo la poligonale rettangolare i cui successivi lati

$$A_0A_1, \; A_1A_2, \; \ldots, \; A_{n-1}A_n$$

abbiano lunghezza proporzionale ai coefficienti a; quanto al s
è da seguirsi la successione dei segni delle potenze di $i = \sqrt{-1}$
modo che il lato r-esimo e quello $(r+2)$-esimo siano parallel

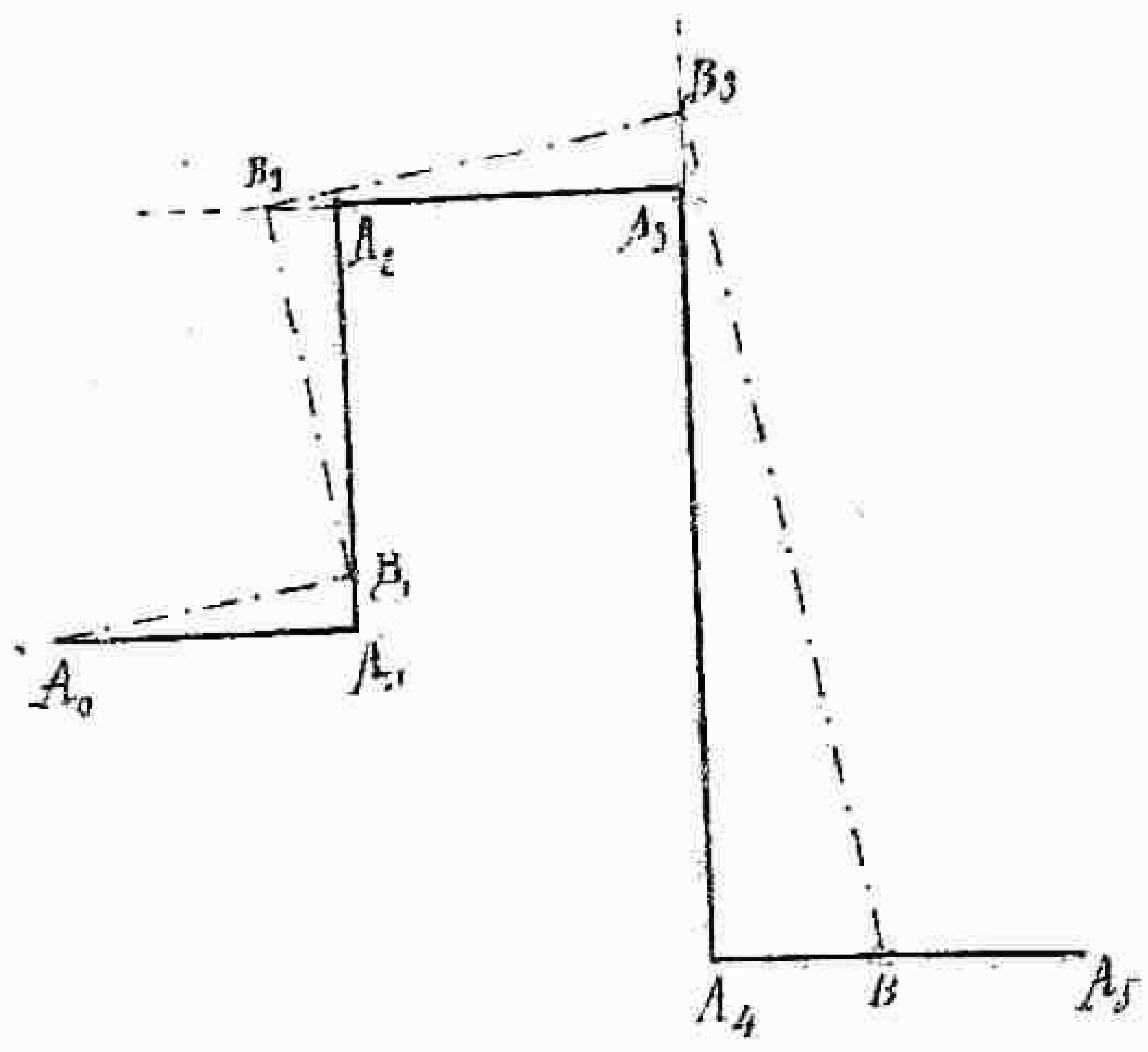


Fig. 1.

abbiano il medesimo senso o senso contrario secondo che i c
cienti sono di senso contrario o del medesimo segno.

Resta poi fissato il senso positivo per l'asse cartesiano x d
nistra verso destra e per l'asse y dal basso verso l'alto.

Prendiamo uno di questi circuiti, per esempio uno di cinque l
sia $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ (fig. 1), e in esso inscriviamo, a partire da A_0 e

... un punto B sulla retta A_1A_2, un nuovo circuito rettangolare $A_0B_1B_2B_3B_4$, ... la misura del segmento B_4A_5 è eguale a $f\left(\frac{B_1A_1}{A_0A_1}\right)$; (vedi "Elementi di ... calcolo grafico del CREMONA" pag. 46). (¹) Ne segue che se $B_4A_5 = 0$ ... ossia se B_4 coincide con A_5 il valore $\frac{B_1A_1}{A_0A_1}$ di x è uno dei valori che ... soddisfano l'equazione $f(x) = 0$.

(¹) Affinchè i giovani lettori possano trarre il massimo vantaggio dai risultati del mio studio ... questa nota dimostrerò, per i polinomi di terzo grado, i due teoremi generali citati. Essendo ... data la funzione

$$f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,$$

... con la regola generale costruisco la poligonale dei coefficienti (fig. a) e preso un punto B sulla retta

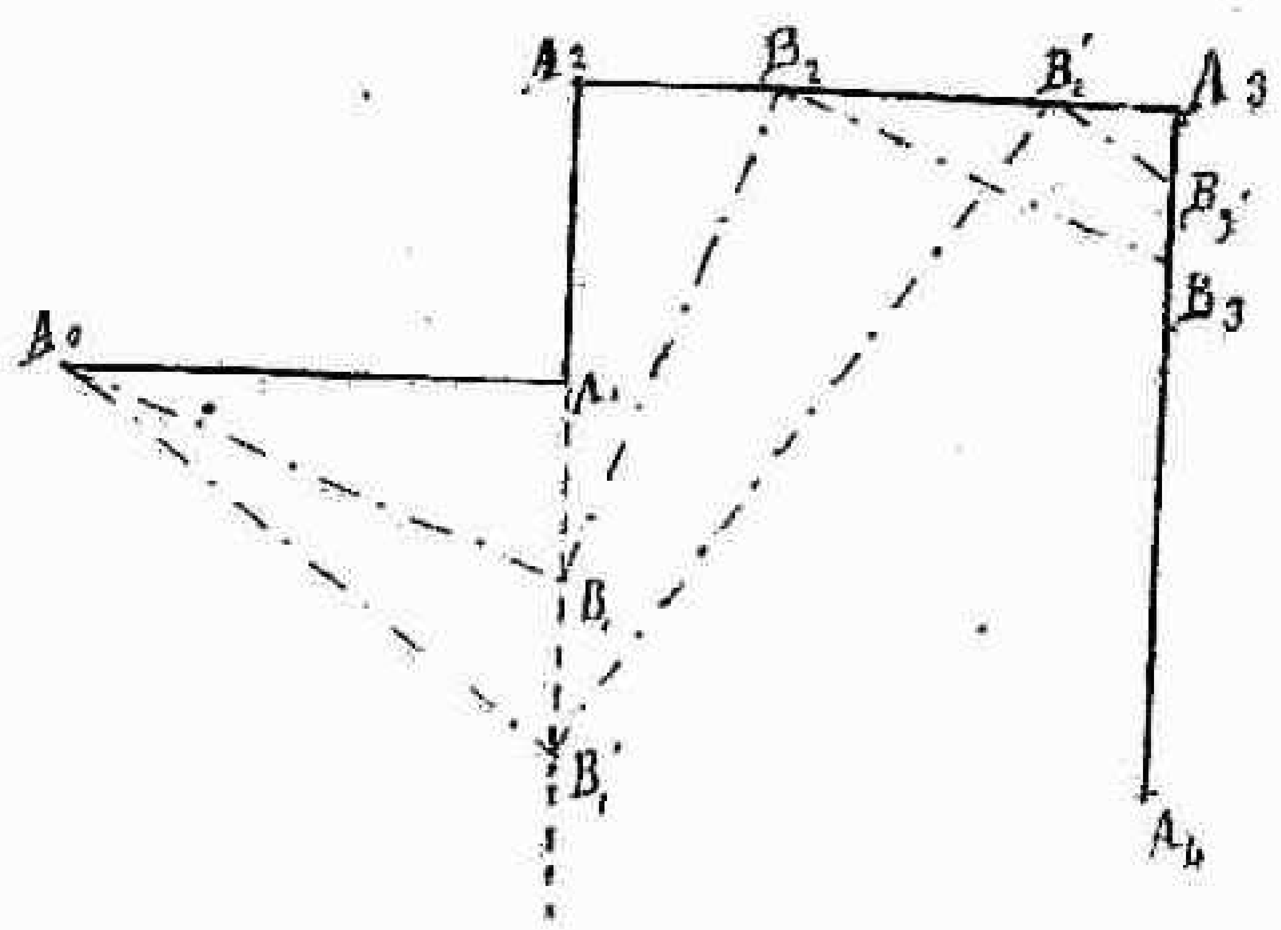


Fig. a.

... del secondo coefficiente descrivo la poligonale inscritta.
... i triangoli

$$A_0A_1B_1; \quad B_1A_2B_2; \quad B_2A_3B_3$$

... sono simili e quindi è

$$\frac{A_0A_1}{B_1A_0} = \frac{B_1A_2}{B_2A_2} = \frac{B_2A_3}{B_3A_3}.$$

... supponendo che

$$A_0A_1 = a_0, \quad A_1A_2 = a_1, \quad A_2A_3 = a_2, \quad A_3A_4 = a_3.$$

... osservando che

$$B_1A_2 = B_1A_1 + a_1, \quad B_2A_3 = B_2A_2 + a_2, \quad B_3A_4 = B_3A_3 + a_3,$$

e ponendo $x = \frac{B_1A_1}{A_0A_1}$ e anche $B_1A_1 = a_0x$, si ha:

$$\begin{aligned}
B_1A_2 &= a_0x + a_1 \\
B_2A_2 &= a_0x^2 + a_1x \\
B_2A_3 &= a_0a^2 + a_1x + a_2 \\
B_3A_3 &= a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x \\
B_3A_4 &= a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3,
\end{aligned}$$

... che ci dimostra che il segmento B_3A_4 compreso fra gli estremi A_4 e B_3 delle due poligonali ... ha per misura il valore che assume il polinomio $f(x)$ quando si prende $x = \frac{B_1A_1}{A_0A_1}$.

Dimostro ora che il circuito B è quello risolvente. Considero un altro punto B'_1 sulla retta ... del secondo coefficiente e quindi considerando $x' = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1}$ per quanto sopra si ha

$$B'_3A_4 = a_0x'^3 + a_1x' + a_2x' + a_3.$$

Così il problema della risoluzione delle equazioni è trasfc in quello di inscrivere in un circuito rettangolare di n lati, un circuito rettangolare di $n-1$ lati che abbia gli estremi coin con quelli del primo circuito. Il circuito rettangolare di $(n$ — iscritto nel circuito dato di (n) lati, avente gli estremi comur circuito risolvente rispetto al dato poichè rappresenta il qu che si ha dividendo il polinomio dato per uno dei suoi fatt neari (vedi " Elementi di Calcolo grafico del CREMONA „ pag.

Applicazione di quanto sopra alla risoluzione delle equazio primo, del secondo e del terzo grado con discussione dei risu

Equazione di 1° grado. — La formula generale dell'equazi 1° grado è:

$$ax + b = 0$$

dove si suppone $a > 0$.

In questo polinomio sostituisco al posto dei coefficienti a i valori in funzione del cuito B ossia:

$$a_0 = A_0A_1 \qquad a_1 = A_1A_2 = B_1A_2 - B_1A_1 = B_1A_2 - A_0A_1x$$
$$a_2 = A_2A_3 = B_2A_3 - B_2A_2 = B_2A_3 - B_1A_2x$$
$$a_3 = A_3A_4 = B_3A_4 - B_3A_3 = B_3A_4 - B_2A_3x$$

e avrò

$$B_3'A_4 = A_0A_1x'^3 + (B_1A_2 - A_0A_1x)\,x'^2 + (B_2A_3 - B_1A_2x)\,x' + B_3A_4 - B_2A_3\,x$$

o anche

$$B'_3A_4 = (x' - x)\,[A_0A_1x'^2 + B_1A_2x' + B_2A_3] + B_3A_4$$

e ancora

$$\frac{B'_3A_4 - B_3A_4}{x' - x} = A_0A_1x'^2 + B_1A_2x' + B_2A_3$$

ma dalla simiglianza dei triangoli si ha anche:

$$\frac{A_0A_1}{A_0B_1} = \frac{B_1A_2}{B_1B_2} = \frac{B_2A_3}{B_2B_3}$$

da cui

$$A_0A_1 = A_0B_1\frac{B_1A_2}{B_1B_2}\,; \qquad B_1A_2 = B_1B_2\frac{A_0A_1}{A_0B_1} = B_1B_2\frac{B_1A_2}{B_1B_2}\,; \qquad B_2A_3 = B_2B_3\frac{B_1}{B_1}$$

sostituendo questi valori nella (1) e ponendo in vista nel 2° membro $\frac{B_1A_2}{B_1B_2}$ ho:

$$\frac{B'_3A_4 - B_3A_4}{x' - x} = \frac{B_1A_2}{B_1B_2}\,[A_0B_1x'^2 + B_1B_2x' + B_2B_3]$$

essendo

$$B'_3A_4 = f(x') \qquad \text{e} \qquad B_3A_4 = f(x)$$

concludo che ridotte le lunghezze al rapporto $\frac{B_1A_2}{B_1B_2}$ il circuito B rappresenta il poli

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$$

e nel caso che x sia una radice della $f(x) = 0$ il circuito B rappresenta il polinomio $\frac{f(x}{x'-}$

ogni poligonale rettangola di tre lati inscritta in quella data avente gli estremi comun di questa è una poligonale risolvente poichè rappresenta il quoziente che si ha divid linomio dato per un suo fattore lineare.

Se $b > 0$, il circuito ha la forma della fig. 2 ($A_0A_1A_2$) che è di due lati, quindi il circuito risolvente dovendo essere di un lato e dovendo avere per estremi A_0 e A_2 sarà il segmento congiungente quei due punti e quindi si ha un'unica soluzione data dalla formula:

$$x = \frac{A_2A_1}{A_0A_1} = -\frac{b}{a},$$

ed essendo $b > 0$, è $x < 0$.

Se $b < 0$, il circuito ha la forma della fig. 3 ($A_0A_1A_2$), pure di due

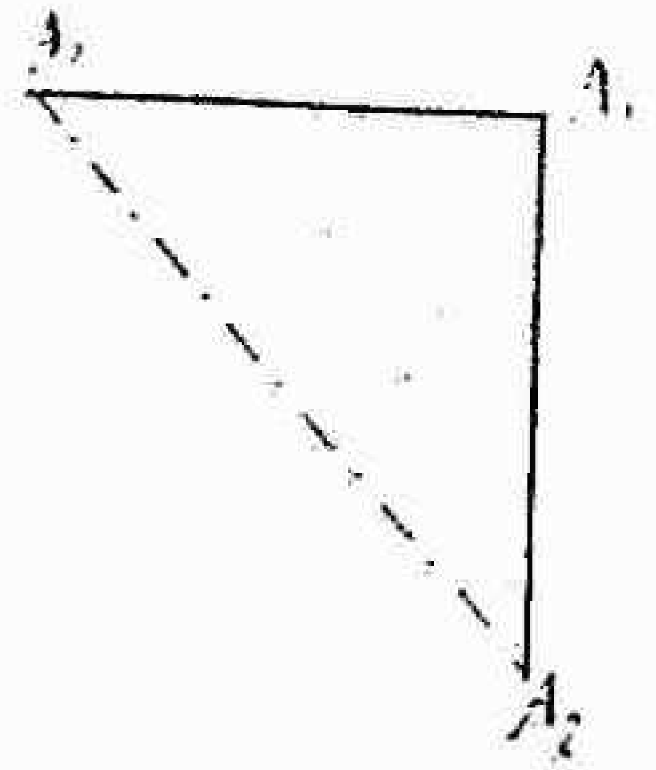


Fig. 2.

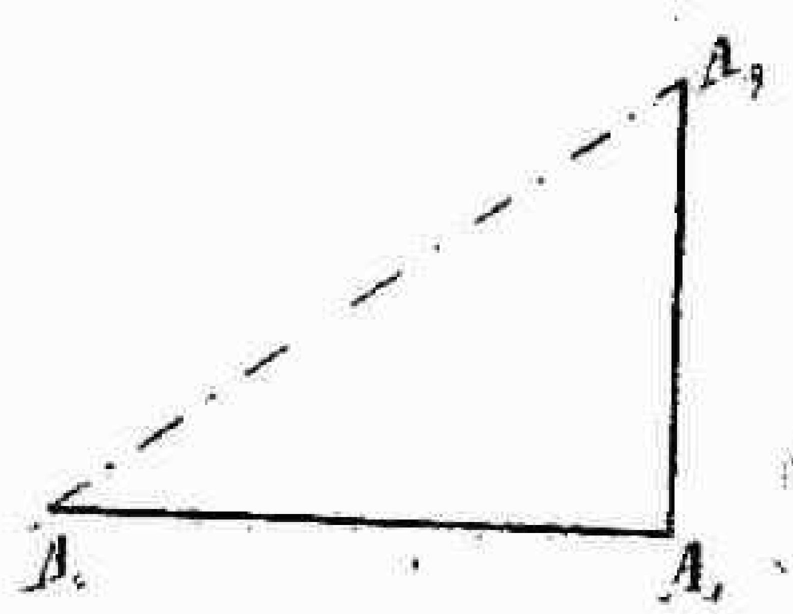


Fig. 3.

lati e come prima l'unico circuito risolvente è A_0A_2 di un sol lato e quindi:

$$x = \frac{A_2A_1}{A_0A_1} = +\frac{|b|}{a}$$

da cui risulta $x > 0$.

Concludendo: essendo sempre possibile ed in un modo solo costruire il segmento congiungente A_0 con A_2 ed essendo questo segmento il circuito risolvente, ne segue che per l'equazione di 1° grado esiste sempre un valore ed uno solo che la risolve. E se

$$b > 0 \quad \text{è} \quad x < 0;$$

$$b < 0 \quad \text{è} \quad x > 0.$$

Equazione di 2° grado. — La forma generale dell'equazione di secondo grado è

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

dove $a > 0$.

Formiamo il circuito dell'equazione che sarà il circuito $A_0A_1A_2A_3$ (fig. 4) di tre lati e cerchiamo il circuito risolvente che dovrà essere di due lati $A_0B_1A_3$.

Il luogo dei punti B che formano con A_0A_3 triangoli rettangoli aventi per ipotenusa A_0A_3 è la circonferenza di diametro A_0A centro 0, punto medio di A_0A_3; ma il circuito risolvente de sere inscritto nel circuito A, quindi i punti B che risolvono blema sono quelli (se esistono) che risultano intersezione del conferenza luogo e della retta A_1A_2.

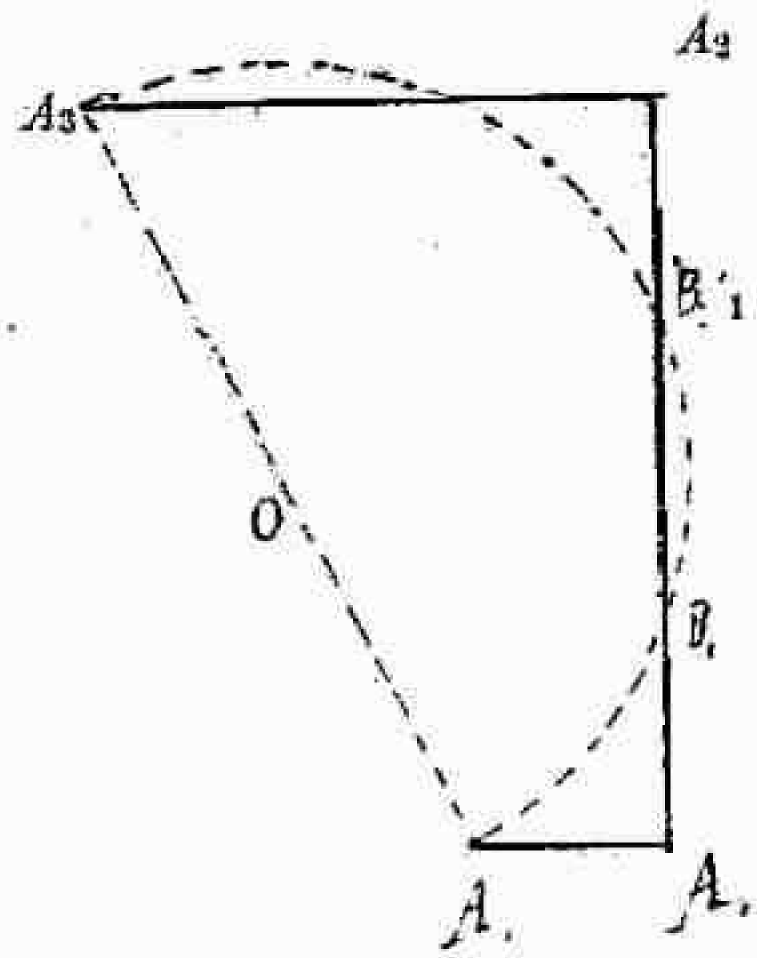


Fig. 4.

Di punti comuni di una circonfer di una retta ve ne possono essere o uno o nessuno a seconda che la di della retta (A_1A_2) dal centro della cir renza è minore, eguale o maggiore de gio (OA_0).

Supposta per un momento l'esiste due punti intersezione B_1 e B'_1 e qu due circuiti risolventi $A_0B_1A_3$, A_0B' radici dell'equazione sono:

$$x_1 = \frac{B_1A_1}{A_0A_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1}$$

Discutiamo il risultato per i sing Il numero delle radici reali dipend abbiamo visto, dalla distanza di O dalla retta A_1A_2.

Se i due lati A_0A_1 e A_2A_3 sono del medesimo senso (fig. se, essendo $a > 0$, è $c < 0$, qualunque sia il senso di A_1A_2 i punti A_0 ed A_3 sono da bande opposte rispetto alla A_1A_2 e quindi la retta A_1A_2 sega la circonferenza (O). Si ha così sempre l'esistenza dei due circuiti risolventi $A_0B_1A_3$ ed $A_0B'_1A_3$, da cui l'esistenza per l'equazione di due radici reali e distinte (risultato che coincide con quello dell'analisi avendosi in questo caso $b^2 - 4ac > 0$):

$$x_1 = \frac{B_1A_1}{A_0A_1} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1}.$$

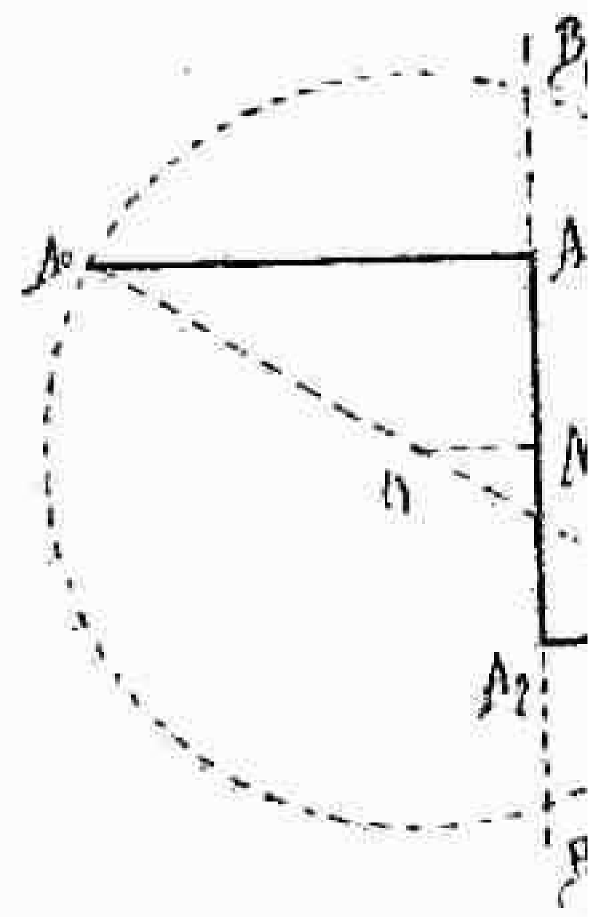


Fig. 5.

Di più i punti B_1 e B'_1 si trovano da bande opposte rispetto al punto A_1 (il piede della normale dall'estremo di un diametro ad una corda che l'interseca, gli estremi della corda); ne risulta che le radici sono una po l'altra negativa.

Se $b < 0$,

$$x_1 < 0 \quad \text{e} \quad x_2 > 0$$

e quindi

$$x_1 < x_2.$$

Se $b > 0$,

$$x_1 > 0 \quad \text{e} \quad x_2 < 0$$

quindi:

$$x_1 > x_2 .$$

Se $b = 0$ (A_1 coincidente con A_2) (fig. 6) si ha:

$$x_1 < 0 \qquad x_2 > 0 .$$

Da cui

$$x_1 < x_2 \quad \text{ma} \quad x_2 = |x_1| .$$

Se $c = 0$, (A_2 coincidente con A_3) il circuito si riduce ad $A_0A_1A_2$

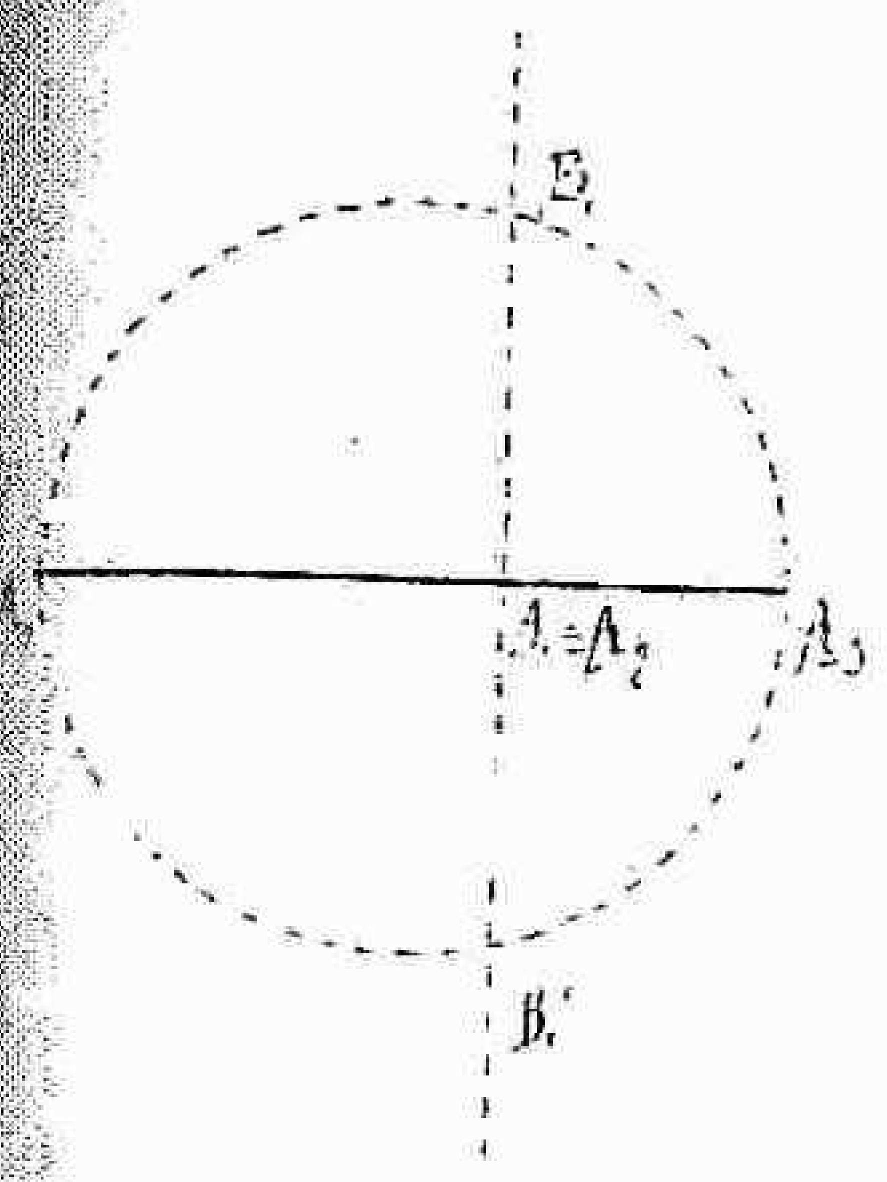


Fig. 6.

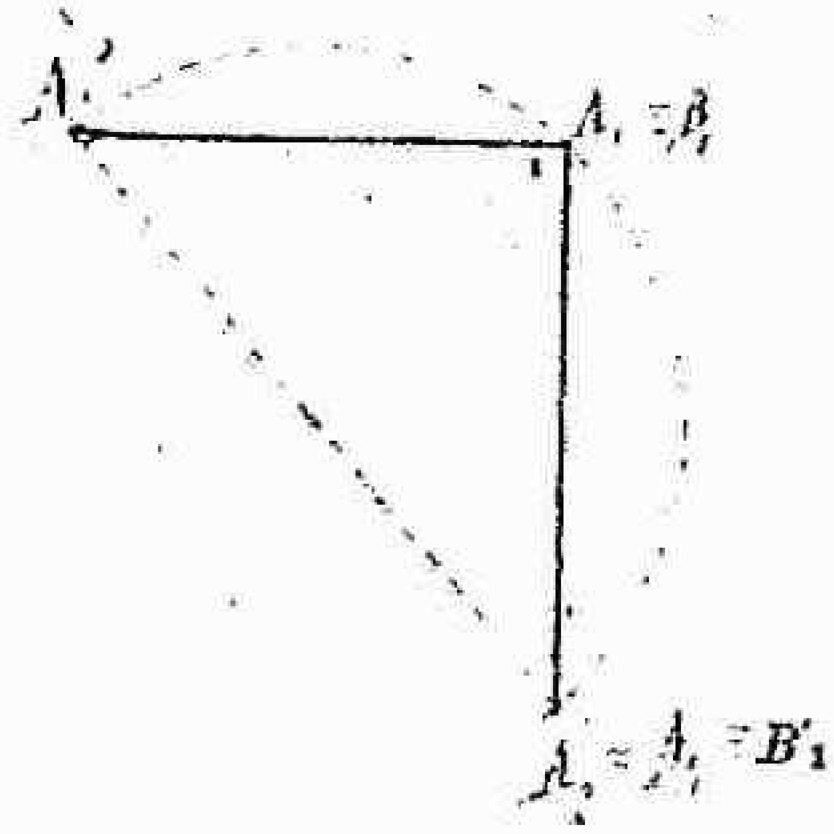


Fig. 7.

(fig. 7) e A_1A_2 è segante in A_1 ed A_2; i due circuiti risolventi sono perciò $A_0A_1A_2$ e il segmento A_0A_2. Ne segue:

$$x_1 = \frac{A_1A_2}{A_0A_1} = \frac{0}{A_0A_1} = 0 \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{A_2A_1}{A_0A_1} = -\frac{b}{a} .$$

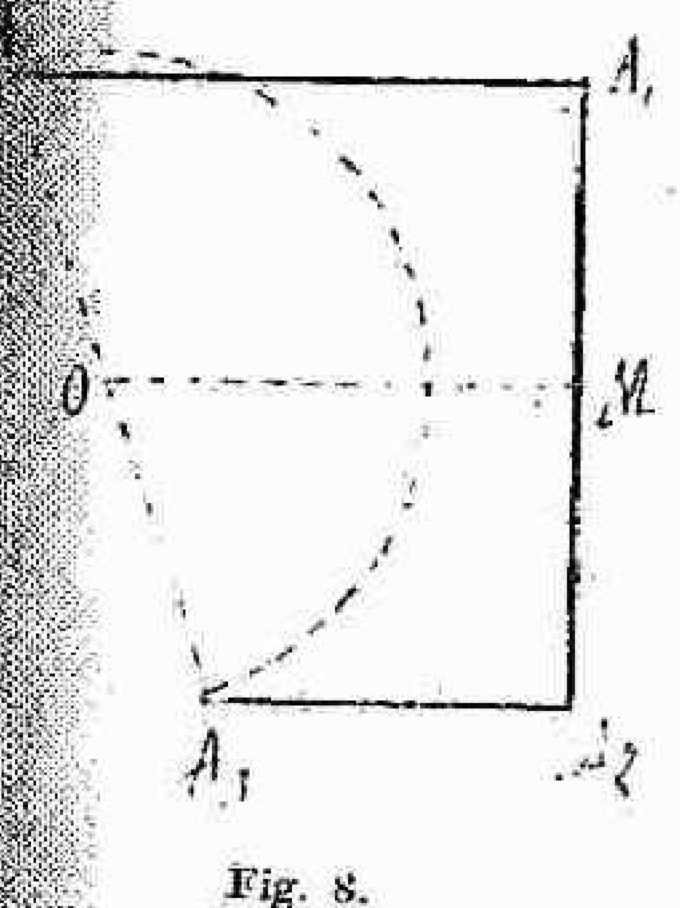


Fig. 8.

Se $b > 0$,

$$x_1 = 0 \qquad x_2 < 0 ;$$

se $b < 0$,

$$x_1 = 0 \qquad x_2 > 0 ;$$

se $b = 0$,

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0 .$$

Anche in questo caso le radici sono distinte.

Se i due lati A_0A_1 e A_2A_3 sono di senso opposto (ossia, se, essendo $a > 0$, è $c > 0$) (fig. 8) la A_1A_2 sarà segante, tangente o esterna secondo che OA_0 è maggiore, eguale o minore di OM.

Se $OM > OA_0$, non vi sono punti reali comuni alla retta e alla circonferenza, quindi nessun circuito risolvente e perciò non vi sono

radici reali (risultato che coincide con quello dell'analisi poic
$OM > OA_0$ [1] si ha

$$a^2 + c^2 + 2ac > b^2 + a^2 - 2ac + c^2$$

e quindi $b^2 - 4ac < 0$).

Se $OM < OA_0$, si hanno due circuiti risolventi (fig. 9) e due radici reali. Di più i punti B_1, B'_1 dalla medesima banda rispetto al pun (il piede della normale condotta dall'es di un diametro (A_0) ad una corda ch l'interseca (A_1A_2) non cade fra gli es della corda). Ne risulta che le radici egual segno.

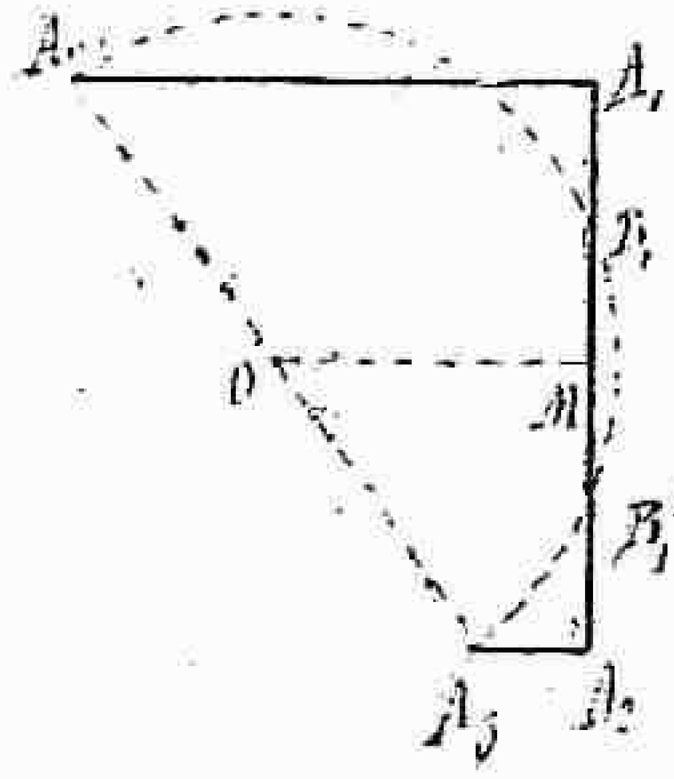


Fig. 9.

Se $b > 0$,

$$x_1 = \frac{B_1A_1}{A_0A_1} < 0, \qquad x_2 = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1} < 0$$

$$|x_1| < |x_2|$$

se $b < 0$,

$$x_1 = \frac{B_1A_1}{A_0A_1} > 0, \qquad x_2 = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1} > 0, \qquad x_1 < x_2 .$$

Le radici sono dunque di egual segno e di segno contrario a di b. (La disuguaglianza $OM < OA_0$ ci dà il caso dell'analisi $b^2 - 4ac > 0$).

Se $OM = OA_0$, si ha un unico circuito risolvente (figura 10) e quindi una radice doppia $\frac{B_1A_1}{A_0A_1}$. (L'eguaglianza $OM = OA_0$ ci dà il caso dell'analisi $b^2 - 4ac = 0$).

Se $b > 0$,

$$x_1 = x_2 < 0 .$$

Se $b < 0$,

$$x_1 = x_2 > 0 .$$

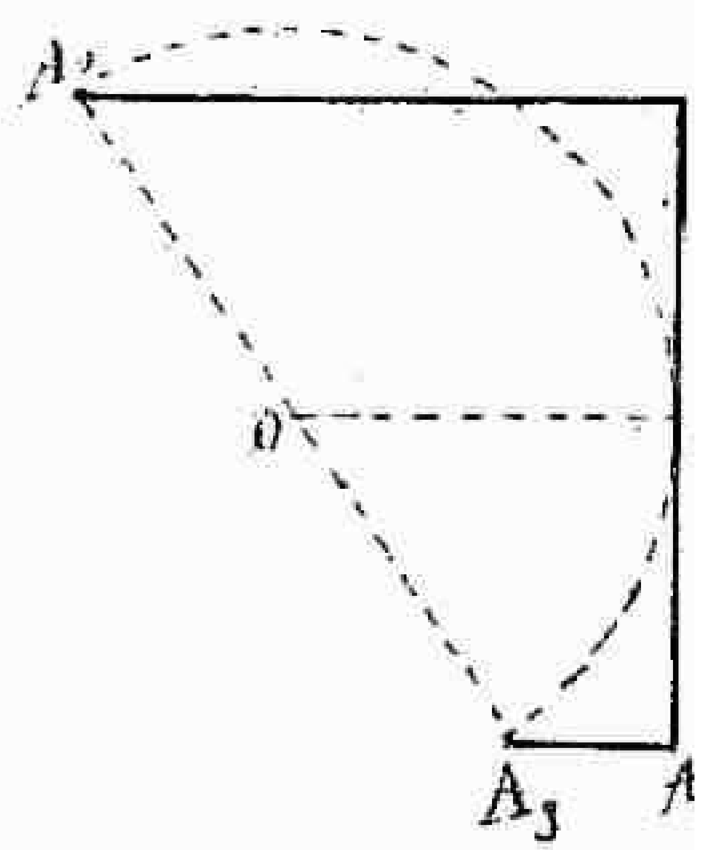


Fig. 10.

Tanto nel caso di $OM < OA_0$ che in quello di $OM = OA_0$, se non si hanno radici reali poichè non esistono punti reali comu circonferenza e alla retta A_1A_2 (fig. 11).

Fino a questo punto si è considerato $a \neq 0$.

---

[1] Dalla fig. 9 si ha:

$$OA_0 = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + (a-c)^2}$$

$$OM = \frac{1}{2}(a + c).$$

Vediamo per a tendente a zero.

Se $c < 0$, i circuiti risolventi tendono ai circuiti A_1A_3 e $A_1A_2A_3$ al tendere di A_0 ad A_1 e così i punti d'intersezione B_1 e B'_1 tendono ad A_1 ed A_2 e quindi si ha

$$x_1 = \lim_{A_0A_1=0} \frac{B_1A_1}{A_0A_1} = \frac{A_1A_1}{A_0A_1} = \frac{0}{0} \quad x_2 = \lim_{A_0A_1=0} \frac{B'_1A_1}{A_0A_1} = \frac{A_2A_1}{0} = \pm \infty .$$

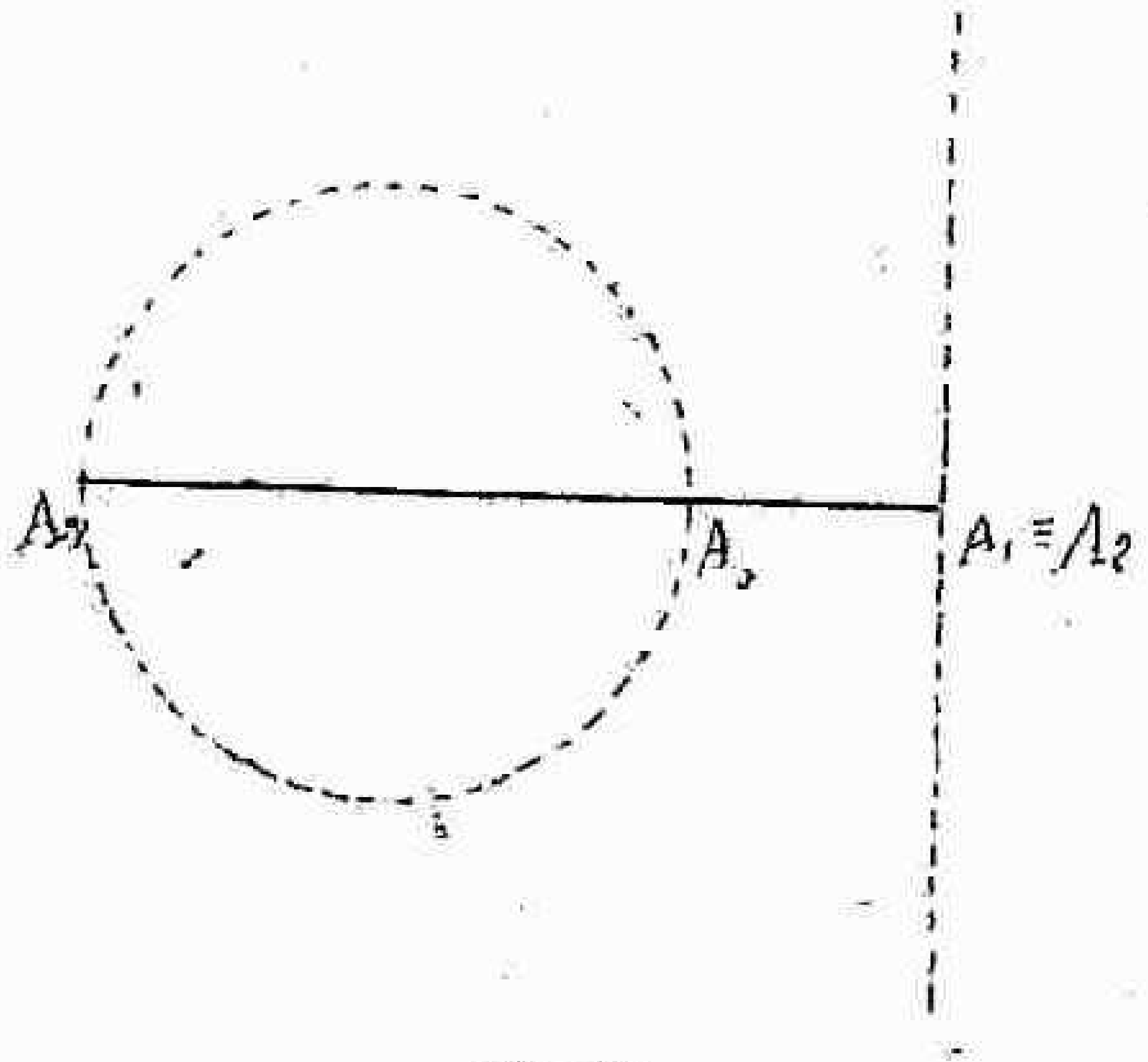


Fig. 11.

Ma fuori del limite dai triangoli simili $A_0A_1B_1$, $B_1A_2A_3$ si ricava (fig. 5)

$$x_1 = \frac{B_1A_1}{A_0A_1} = \frac{A_2A_3}{B_1A_2},$$

e quindi

$$x_1 = \lim_{A_0A_1=0} \frac{B_1A_1}{A_0A_1} = \lim_{A_0A_1=0} \frac{A_2A_3}{B_1A_2} = \frac{A_2A_3}{B_1A_2}.$$

Si ha dunque

se $b > 0$,

$$x_1 = \frac{c}{b} > 0, \qquad x_2 = -\infty$$

se $b < 0$,

$$x_1 = -\frac{c}{b} < 0, \qquad x_2 = +\infty .$$

Per a tendente a 0, se $c > 0$, si è sempre nel caso $OM < OA_0$ e quindi $x_1 = \frac{B_1A_1}{A_3A_1}$ e $x_2 = \frac{B'_1A_1}{A_0A_1}$ che con considerazioni analoghe al caso precedente diventano:

$$x_1 = \frac{A_2A_3}{A_1A_3} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{A_2A_1}{0}.$$

Se $b > 0$,

$$x_1 = -\frac{c}{b} < 0, \qquad x_2 = -\infty.$$

Se $b < 0$,

$$x_1 = \frac{-c}{-b} > 0, \qquad x_2 = +\infty.$$

Equazione di 3° grado. — Prendiamo l'equazione generale di 3° gr
sotto la forma:

$$f(x) = x^3 + px + q = 0$$

e formiamo con la regola generale la poligonale dei coefficienti
gura 12) (consideriamo, per es., il caso in cui sia $p < 0$ e $q <$(
su di essa facciamo alcune osservazioni.

Per ogni valore dato ad x si ha un corrispondente valore per
e così per ogni segmento XA_1 che rappres
con la sua misura il valore della nostr
si ha un corrispondente segmento A_3Y
rappresenta con la sua misura il valore
assume la $f(x)$. Così facendo variare i
lori di x con continuità da $+\infty$ a $-$o
hanno corrispondentemente e con contin
le variazioni di Y da $-\infty$ a $+\infty$. Ma
sendo la $f(x)$ di terzo grado, devono ess
tre punti X (se l'equazione ha tre radici r
tali che $A_3Y = 0$; ne segue che allo spo
mento di X con continuità Y si sposta
continuità, ma dovendo coincidere tre v
con A_3 deve due volte cambiar senso e
precisare le idee, si deve avere una pr
coincidenza di Y con A_3 e poi Y si sp
ancora da A_3 verso $+\infty$ fino a raggiun
un punto M in cui il movimento di Y cambia senso, Y torna verso
coincide una seconda volta con A_3, prosegue verso $-\infty$ fino a
punto M_1 dove nuovamente il suo movimento q cambia senso
torna verso A_3, coincide per la terza volta con A_3 e procede verso -
senza che il suo movimento cambi senso.

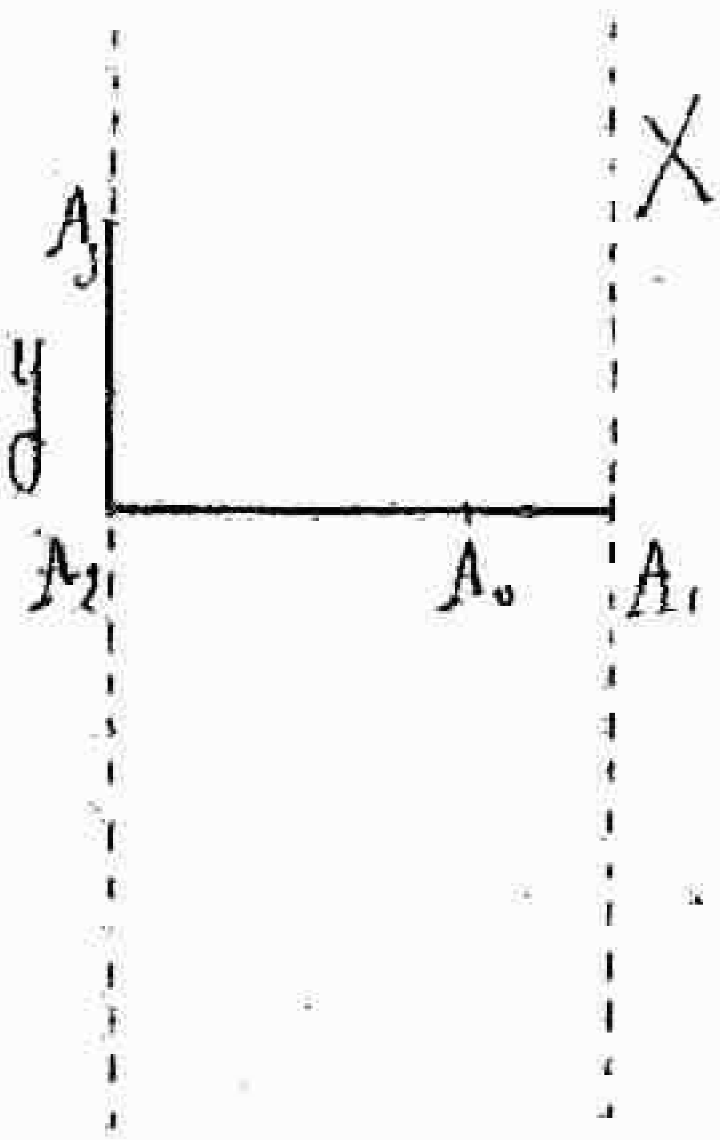


Fig. 12.

I punti M, M_1 sono punti di massimo e di minimo della $f($
corrispondono ai due valori X tali che le corrispondenti XA_1 s
le radici della $f'(x)$ che nel nostro caso è

$$f'(x) = 3x^2 + p = 0.$$

Se questa $f'(x) = 0$ ha due radici immaginarie anche M e
sono immaginarie e quindi vi è un solo punto X tale che $f(XA_1)$
e nessun cambiamento di senso per il procedere di Y da $-\infty$ a +
Se la $f'(x) = 0$ ha radici reali, i punti M ed M_1 sono reali.

La $f'(x) = 3x^2 + p = 0$ ha radici reali per $p < 0$, e radici immaginarie per $p > 0$ come si vede risolvendo:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

1° Caso. — Sia $p < 0$. Per $q < 0$ la poligonale è della forma $A_0A_1A_2A_3$ (fig. 13). Sulla r (perpendicolare in A_1 alla A_0A_2) prendiamo i punti M ed M_1 corrispondenti ai due valori

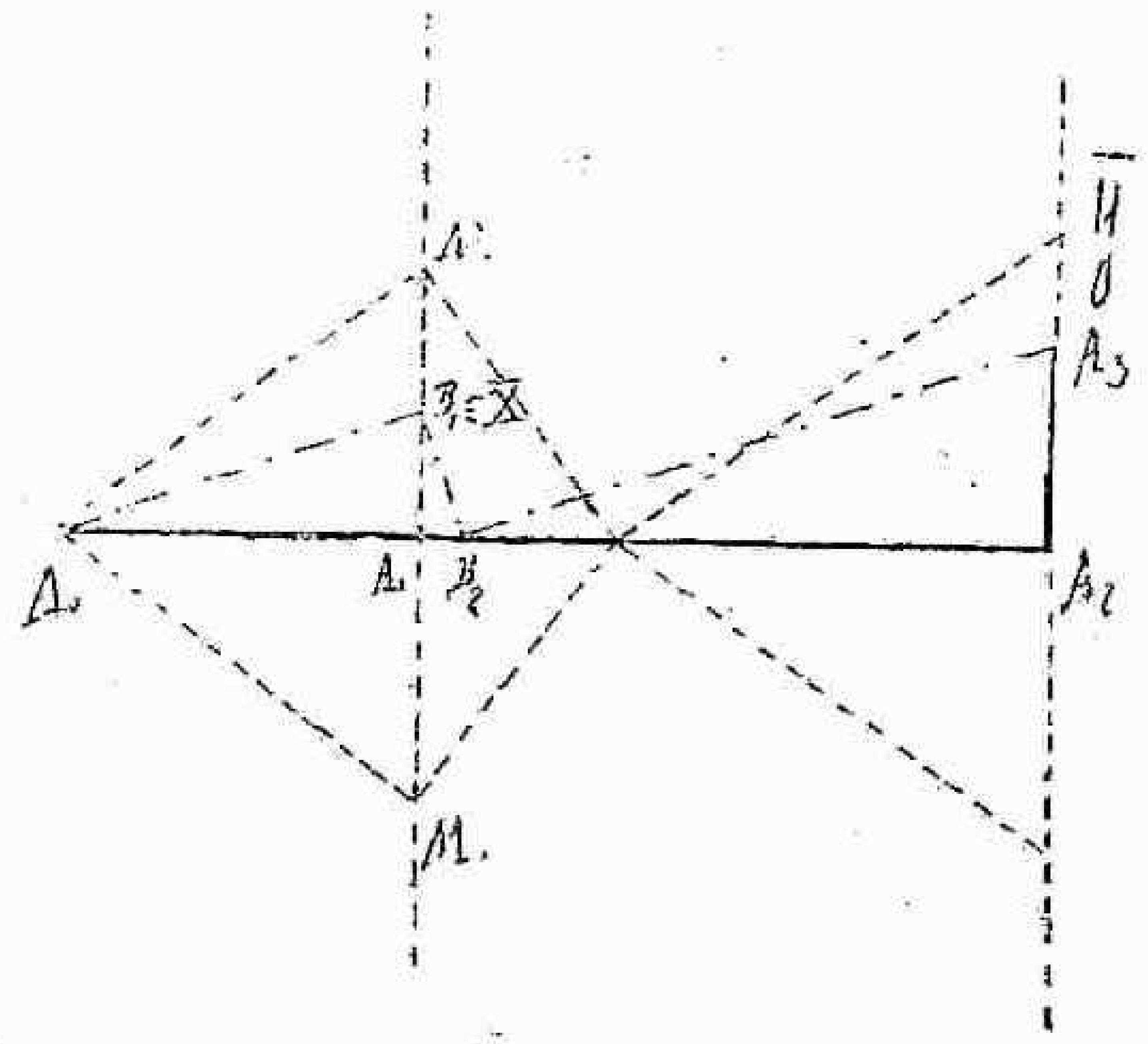


Fig. 13.

$$\sqrt{-\frac{p}{3}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

e costruiamo le relative poligonali inscritte.

Per quanto abbiamo osservato sopra vi è un $\overline{X}$ tale che

$$f(\overline{X}A_1) = 0.$$

Essendo $q < 0$, A_3 è compreso fra 0 e $+\infty$, quindi $\overline{X}$ deve essere fra A_1 ed M da cui $x_1 < 0$. Resta così determinata la forma ed il senso della poligonale risolvente. In tale poligonale A_0B_1 e B_2A_3 sono da bande opposte rispetto a B_1B_2, quindi, per quanto si è visto dalla discussione delle equazioni di 2° grado, essa ammette a sua volta due risolventi che dànno due radici reali distinte di senso contrario. Essendo poi B_1B_2 negativo si ha $x_2 < 0$, $x_3 > 0$, ed x_1 dovendo essere compreso fra questi due valori, si ha

$$x_2 < x_1 < x_3.$$

Se $q > 0$, con un ragionamento analogo si ha $x_1 > 0$, e B_1
sendo positivo

$$x_2 > 0 \qquad \text{o} \qquad x_3 < 0$$

e

$$x_2 > x_1 > x_3 .$$

2° Caso. — $p > 0$. I punti M ed M_1 sono immaginari.

Consideriamo $q > 0$. Costruiamo la poligonale $A_0A_1A_2A_3$ (fi
e conduciamo la retta A_3A_0 che incontra in B_1 la retta r. Co

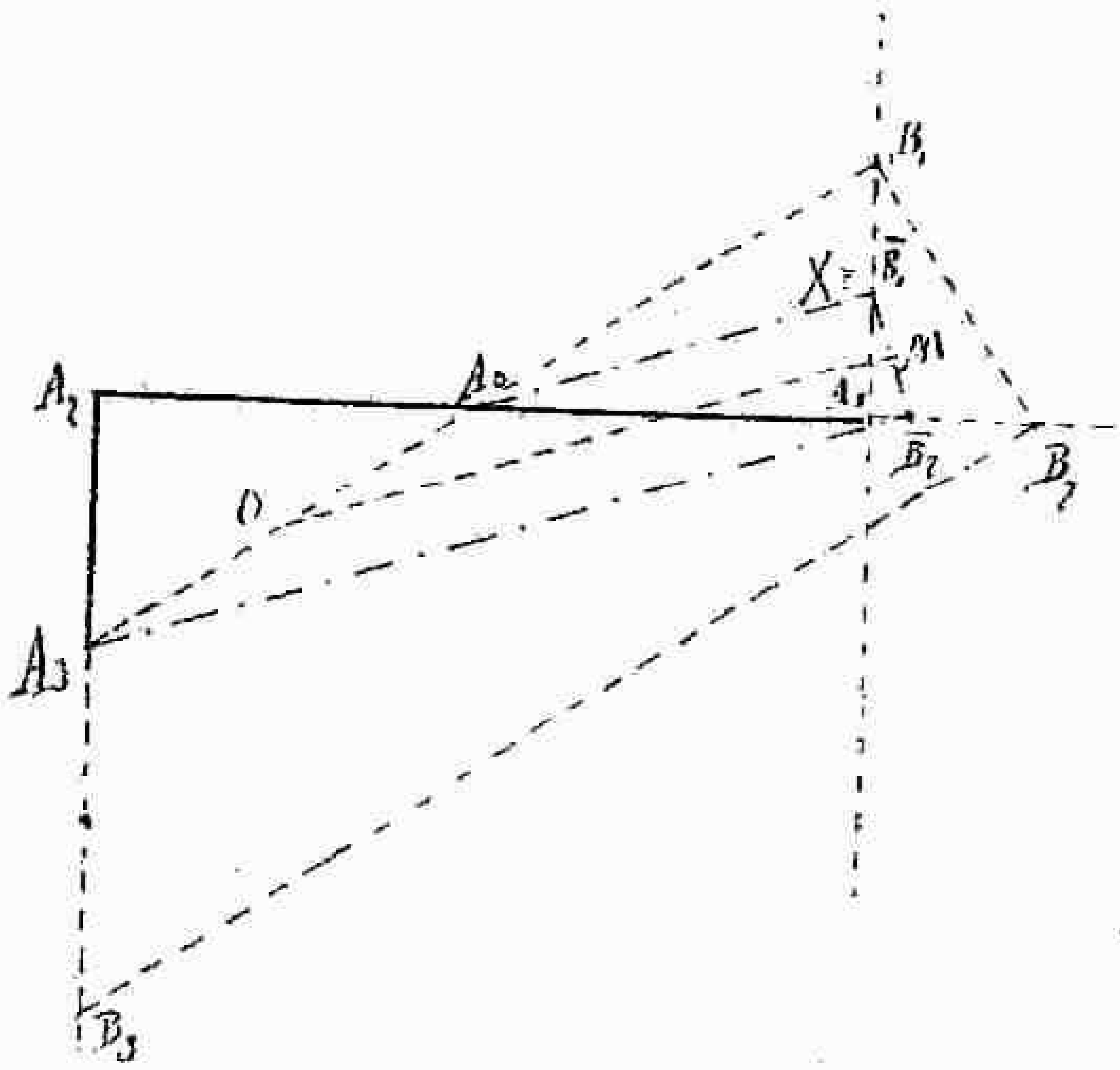


Fig. 14.

rando il punto B_1 a partire da A_0 costruiamo la poligonale in
nel circuito A: $A_0B_1B_2B_3$.

Se $\overline{X}$ è in A_1 ho la poligonale $A_0A_1A_2$; ne segue che esse
fra A_2 e B_3, $\overline{X}$ deve essere fra A_1 e B_1, ed esso è tale che $f(\overline{X}A$
Essendo $\overline{X}$ fra A_1 e B_1, ne segue che $x_1 < 0$.

La risolvente è $A_0\overline{B}_1\overline{B}_2A_3$; vediamo se questa poligonale riso
può ammettere soluzioni.

Perchè ciò fosse, essendo $A_0\overline{B}_1$ e $\overline{B}_2A_3$ di senso contrario,
i coefficienti dell'equazione risolvente del medesimo segno, do
essere, per quanto si è visto,

$$OM < OA_0 .$$

Invece si ha precisamente il contrario. Infatti: per quanto $\overline{X}$
cidente con $\overline{B}_1$ tenda ad A_1, si ha $A_0\overline{B}_1 > A_0A_1$, così per qua

tenda ad A_1 si ha sempre $A_3\overline{B}_2 > A_3A_1$. Se mostriamo che $A_0A_1 + A_3A_1 > A_3A_0$, a maggior ragione sarà $A_3\overline{B}_2 + A_0\overline{B}_1 > A_3A_0$, e quindi $OM > OA_0$. Ma

$$A_0A_1 + A_1A_3 = 1 + \sqrt{p^2 + q^2},$$

da cui quadrando

$$(A_0A_1 + A_1A_3)^2 = 1 + p^2 + q^2 + 2\sqrt{p^2 + q^2},$$

e

$$A_3A_0 = \sqrt{(p-1)^2 + q^2}.$$

Da cui:

$$\overline{A_3A_0}^2 = 1 + p^2 - 2p + q^2.$$

Dalle quali eguaglianze, trattandosi di lunghezza di segmenti, essendo $2\sqrt{p^2 + q^2} > -2p$, si ricava:

$$A_0A_1 + A_1A_3 > A_3A_0,$$

e quindi:

$$OM > OA_0,$$

che ci dice, secondo la discussione delle equazioni di 2° grado, che le radici sono immaginarie.

Dunque, per $p > 0$ e $q > 0$, $x_1 < 0$, x_2, x_3 immaginarie.

È facile vedere che per $p > 0$ e $q < 0$ si ha

$$x_1 > 0 \quad \text{e} \quad x_2,\ x_3 \text{ immaginarie.}$$

Dalla discussione fatta non risulta nessun caso in cui le radici siano tutte e tre del medesimo segno, quindi è esclusa la possibilità che $x^3 + px + q = 0$ abbia tre radici di egual segno. Questo fatto trova conferma in ciò che la $x^3 + px + q$ non ci può dare che due permanenze o due variazioni di segno, mentre per il caso di tre radici di egual segno occorrono tre permanenze o tre variazioni.

Quadro riassuntivo.

Equazione di 1° grado: $ax + b = 0$

Se $b < 0$,	$x > 0$
„ $b > 0$,	$x < 0$.

Equazione di 2° grado: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$:

<0	Se $b < 0$	$x_1 < 0$	$x_2 > 0$	$x_1 < x_2$		
	„ $b = 0$	$x_1 < 0$	$x_2 > 0$	$x_1 < x_2$	ma	$x_2 = \mid x_1 \mid$
	„ $b > 0$	$x_1 > 0$	$x_2 < 0$	$x_1 > x_2$		
$=0$	Se $b < 0$	$x_1 = 0$	$x_2 > 0$	$x_1 < x_2$		
	„ $b = 0$	$x_1 = 0$	$x_2 = 0$			
	„ $b > 0$	$x_1 = 0$	$x_2 < 0$	$x_1 > x_2$		

$$c>0\left\{\begin{array}{l}\text{Se } OM > OA_0 \quad \text{nessuna radice reale}\\ \text{,, } OM < OA_0 \left\{\begin{array}{lllll}\text{Se } b<0 & x_1>0 & x_2>0 & x_1<x_2\\ \text{,, } b=0 & \text{nessuna radice reale} & & \\ \text{,, } b>0 & x_1<0 & x_2<0 & |x_1|<|x_2|\end{array}\right.\\ \text{,, } OM = OA_0 \left\{\begin{array}{ll}\text{Se } b<0 & x_1=x_2>0\\ \text{,, } b=0 & \text{nessuna radice reale}\\ \text{,, } b>0 & x_1=x_2<0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Se a tende a 0:

$$c<0\left\{\begin{array}{llll}\text{Se } b<0 & x_1<0 & x_2=+\infty & x_1<x_2\\ \text{,, } b>0 & x_1>0 & x_2=-\infty & x_1>x_2\end{array}\right.$$

$$c>0\left\{\begin{array}{llll}\text{Se } b<0 & x_1>0 & x_2=+\infty & x_1<x_2\\ \text{,, } b>0 & x_1<0 & x_2=-\infty & x_1>x_2\end{array}\right.$$

Equazione di 3° grado: $x^3+px+q=0$:

$$p<0\left\{\begin{array}{lllll}\text{Se } q<0 & x_1<0 & x_2<0 & x_3>0 & x_2<x_1<x_3\\ \text{,, } q>0 & x_1>0 & x_2>0 & x_3<0 & x_2>x_1>x_3\end{array}\right.$$

$$p>0\left\{\begin{array}{lll}\text{Se } q<0 & x_1>0 & x_2 \text{ e } x_3 \text{ immaginarie}\\ \text{,, } q>0 & x_1<0 & x_2 \text{ e } x_3 \text{ immaginarie.}\end{array}\right.$$

A. Colonna.

LE DEFINIZIONI MATEMATICHE E IL CONCETTO DI UGUAGLIANZA

1. **Il concetto filosofico di uguaglianza.** — Poichè due oggetti dif riscono fra loro almeno per la diversa posizione nello spazio, o p il loro diverso ordinamento nel tempo, si può concludere che n esistono oggetti che siano in tutto e per tutto identici, e quindi c la parola uguaglianza non ha e non può avere un significato as luto, ma è solo suscettibile di un senso relativo alle note che si p sono trascurare per mezzo di convenzioni, spesso tacite, nel confron di due oggetti.

In questo ordine di idee, due enti si diranno uguali, quando ottengano componendo, mediante certe leggi ben determinate, un r

(1) I numeri entro parentesi quadra si riferiscono alle pubblicazioni elencate nella bibliogr che chiude il presente articolo, quelli entro parentesi rotonda si riferiscono ai paragrafi dell'arti stesso. Questo, salvo lievi modificazioni, riproduce il Cap. 38° di un'opera *Fondamenti di aritme generale*, ormai completata da vari mesi, che spero di pubblicare fra non molto tempo.

desimo oggetto M con delle note trascurabili nel campo di studi o di indagini che ci interessa [22].

2. **Il concetto logico di uguaglianza.** — Vediamo tuttavia se ci si può contentare di questo concetto generico di uguaglianza nel campo preciso delle indagini matematiche.

Notiamo per ciò innanzi tutto che in matematica capita spesso di dover riunire un oggetto con note trascurabili, piuttosto che di doverlo comporre con queste note [18].

Ciò accade per es. quando ci si riferisce a misure, necessariamente approssimate, di grandezze fisiche o geometriche.

In questo caso può accadere che non sia più vero il noto principio: " due cose uguali a una terza sono uguali fra loro ", quando il concetto di uguaglianza si stabilisca nel modo esposto sopra (1).

Invero due grandezze A, B, in quest'ordine di idee, si potranno ritenere uguali se le loro misure M_1, M_2 differiscono fra loro per quantità minori del limite λ assegnato agli errori di osservazione, cioè quando si abbia:

$$(\alpha) \qquad M_1 = M_2 \pm \alpha_1 \quad , \quad \alpha_1 < \lambda .$$

Analogamente la grandezza B si riterrà uguale a una terza grandezza C, se indicando con M_3 la misura di questa, si ha:

$$(\beta) \qquad M_2 = M_3 \pm \alpha_2 \quad , \quad \alpha_2 < \lambda .$$

Dalle (α) (β) si trae:

$$M_1 = M_3 \pm \alpha_1 \pm \alpha_2 ,$$

ma non è lecito dedurne in generale $A = C$, perchè pur essendo $\alpha_1 < \lambda$, $\alpha_2 < \lambda$, può essere $\pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \geqq \lambda$.

Ma più importante è l'osservazione che in matematica si ragiona su enti astratti, e un medesimo ente è suscettibile di diverse rappresentazioni simboliche, anzi in genere ammette infinite rappresentazioni.

Ora quando si dice per es.: " il numero a è uguale al numero b ", s'intende in realtà che a e b siano due diverse rappresentazioni di uno stesso numero. Così quando si dice: " la figura F_1 è uguale alla figura F_2 ", si intende tacitamente che F_1, F_2 siano due diverse imagini di una stessa figura ideale F.

Che cosa dovremo concludere? Che il significato filosofico di uguaglianza, sopra accennato (1), non è accettabile nelle investigazioni precise della matematica, e che almeno in questo campo di studi, dovremo valerci del concetto di *identità*, precisato una volta per sempre e per tutti gli enti da Leibniz, con le parole: " *Eadem sunt quorum unus in alterius locum substitui potest, salva veritate.* " [Peano, Padoa, Burali-Forti, ecc.].

Due enti dunque si diranno uguali, se ogni proprietà dell'un pure proprietà dell'altro, ovvero se l'uno appartiene a tutte le cl cui appartiene l'altro. " *Definita così l'uguaglianza in generale, non s più lecito stabilire per definizione il significato di alcuna uguaglia particolare,* " [36].

3. **L'uguaglianza in geometria e in aritmetica.** — Vediamo ora s possibile attenerci sempre a questo canone logico e in che mod può ottenere il dovuto rigore scientifico.

In Geometria non si può prescindere dalla diversa posizione d figure nello spazio, che ha sempre una notevole importanza e ta addirittura fondamentale (geometria descrittiva e proiettiva). L'id tità si ridurrebbe pertanto alla coincidenza delle figure e sare priva del tutto d'importanza. Ecco perchè si parla invece di *gruenza* delle figure, e questa congruenza si definisce per mezzo *movimento*, o si assume come *concetto primitivo*, caratterizzato da opportuno sistema di postulati. [16].

La prima via si è seguita senza obiezioni per molti secoli; ronese e altri misero in luce il circolo vizioso nel quale così si deva, ma è da notarsi che ora è possibile conciliare il rigore con indirizzo valendosi dei gruppi continui di trasformazioni del Li

Nel secondo indirizzo si hanno le tre belle formulazioni scie fiche di Pasch, di Veronese, e di Hilbert.

In aritmetica fino agli ultimi tempi l'uguaglianza si soleva d nire caso per caso per i varî enti numerici, mediante opportune c venzioni. Ciò era causato dalla confusione abituale fra i simboli merici e i concetti astratti da essi rappresentati. Del resto non possibile fare altrimenti finchè gli enti numerici si introducev mediante le cosiddette definizioni per postulati o per astrazion cui diremo tra breve.

I moderni studî logici avendo permesso di sostituire queste d nizioni con definizioni esplicite, hanno anche reso possibile l'uso segno « $=$ » nel senso logico sopra dichiarato (2).

4. **Generalità intorno alle definizioni.** — Qualsiasi definizione co ste nell'attribuire a un nuovo simbolo o a una nuova parola x il desimo significato di un complesso a di nozioni già noto. *Ogni nizione* è, in altri termini, una *uguaglianza* della forma:

$$x = a \qquad (\mathrm{D}f), \tag{1}$$

che si legge " x è identico per definizione ad a " [2].

Anzi quelle proposizioni, che pur essendo chiamate definizioni, si possano ridurre alla forma (1), non sono definizioni.

---

[1] De Franchis ha introdotto felicemente questo metodo nella scuola coi suoi Eleme Geometria. (*Geometria elementare*, Remo Sandron, editore, Palermo).

[2] Vedasi per ciò che segue Peano [23, 24, 25], Burali-Forti [3].

Naturalmente non è necessario che il segno = sia scritto fra i due membri della definizione, cioè fra il *definito* e il *definiente*, potendo essere sostituito da termini del linguaggio comune.

Nei libri di logica vengono date intorno alle definizioni varie regole le quali, nota Peano [24], non hanno valore in matematica.

Tale è per es. la distinzione aristotelica delle definizioni in *reali* e *nominali*, perchè in matematica non si hanno che definizioni nominali; e del resto le cosiddette definizioni reali di storia naturale sono propriamente delle descrizioni dell'animale o della pianta che si considera.

Lo stesso si dica della regola aristotelica che ogni definizione sia data " *per genus proximum et differentiam specificam* ", regola che al più si può applicare alle definizioni di una classe.

Esempio: quadrato = quadrilatero $\frown$ equilatero $\frown$ equiangolo.

Aristotele critica e combatte le *definizioni negative*, ma in matematica vi sono delle definizioni negative perfettamente rigorose, per es.

linea curva = linea nè retta, nè composta di rette.

Altri logici hanno affermato che *si devono definire solo cose esistenti*, ma in matematica spessissimo si pongono definizioni di cose che possono anche non esistere, e la cui esistenza si dimostra poi. Tali per es. le definizioni di limite, di derivata, d'integrale ecc., poichè questi enti esistono in certi casi, cioè per certe funzioni, e non in altri.

5. **Utilità e arbitrarietà delle definizioni.** — Una definizione essendo una semplice convenzione di scrittura e di linguaggio, e non una proposizione, non è *nè vera nè falsa.*

Le definizioni sono pertanto arbitrarie, almeno in teoria, poichè in pratica si adattano per quanto è possibile all'uso comune.

Se una definizione è ben data al posto del simbolo definito si potrà sempre sostituire il membro definiente, e così eliminare da tutta la teoria il simbolo stesso.

Quest'eliminazione può servire, come osserva Peano [24], a riconoscere l'esattezza della definizione, poichè se essa presenta delle difficoltà, è segno che la definizione non fu ben data.

Ne risulta che teoricamente nessuna definizione è necessaria, ma la loro utilità pratica è innegabile e grandissima.

6. **Definizioni possibili. - Omogeneità delle definizioni.** — Perchè una definizione non si riduca a un circolo vizioso, *bisogna che nel secondo membro non ci sia il segno o il nome definito, o almeno che vi comparisca con un significato diverso da quello che ha nel primo membro, e già noto.*

Ciò accade per es. nell'uguaglianza:

$$(\alpha) \qquad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

che taluno assume come definizione per la somma delle frazioni.

Il segno $+$ che si vuol definire figura anche nel secondo meml ma qui fra numeri interi invece che fra due frazioni, e quindi in senso già noto.

Ogni uguaglianza che soddisfi a questa condizione è una *definizi possibile.* Così è per π una definizione possibile:

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ogni definizione deve essere omogenea, cioè deve contenere nei membri che la costituiscono le stesse variabili reali.

Quando un membro è costante la ragione dell'omogeneità è dente, perchè se indico con un nome costante una espressione possa assumere più valori, vengo a dare lo stesso nome a cose ferenti fra cui poi risulta impossibile distinguere.

La (α) per es. non è omogenea perchè il primo membro è una zione delle due variabili $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, mentre il secondo è funzione d quattro variabili a, b, c, d. Ne deriva l'inconveniente, che poten una frazione x mettere sotto infinite forme $\frac{a}{b}$, date le frazioni $\frac{a}{b}$, la frazione $\frac{ad+bc}{bd}$ non è individuata.

Per accettare tale definizione occorre quindi dimostrare l'uni del definiente, cioè occorre provare che la somma di una qualun frazione della classe $\frac{a}{b}$, con una qualunque della classe $\frac{c}{d}$, ap tiene alla classe $\frac{ad+bc}{bd}$ [1].

7. **Definizioni di 1ª e 2ª specie.** — Le definizioni nominali son qualche Autore distinte in due specie, chiamandosi di *1ª specie* quell tipo (1) (n.° 4), quando x e a non contengano lettere indetermi e chiamandosi di *2ª specie* quelle nelle quali il definente e il def contengono delle variabili.

Esempio di una definizione di 1ª specie:

$$r = +\mathrm{R} \cup -\mathrm{R} \cup \iota 0.$$

Nelle definizioni di 2ª specie bisogna limitare con un'ipote campo dei valori da assegnare alle variabili, dimodochè tali de zioni hanno la forma:

$$(2) \qquad b \, . \supset . \, x = a \qquad (\mathrm{D}ef).$$

---

[1] Cfr. PADOA A. *Introduzione alla teoria delle frazioni* "Boll. della Mathesis", Anno I, n PALATINI F. *Riflessioni sull'uso del segno* $=$. "Boll. Mathesis", Anno VII, n.° 2.

Esempio: $a, b \,\varepsilon\, N : \supset : a$ è primo con $b \,.=.\, D(a, b) = 1$, " se a e b sono numeri interi, dire che a è primo con b, equivale a dire che il massimo comun divisore di a, b è 1 ".

Talvolta la definizione di 2ª specie non è espressa mediante un'unica proposizione, ciò accade per es. quando si deve far uso del principio d'induzione. La definizione si dice allora *definizione induttiva di 2ª specie.*

Tali sono per es. le definizioni di addizione, moltiplicazione, potenza dei numeri interi date dal Peano nel suo classico trattato di Aritmetica generale e Algebra elementare.

8. **Definizioni improprie.** — Oltre le definizioni nominali, che sono le vere definizioni, si usano in matematica altri modi di definire che vengono detti *impliciti*, perchè in essi la cosa incognita si trova inclusa in una combinazione più o meno complessa di cose note. Le definizioni nominali, che contengono la cosa da definire isolata in un membro di una uguaglianza, si dicono per contrapposto *esplicite.* In questo modo il concetto di definizione viene ampliato e comprende in genere qualunque mezzo che serva a dedurre con operazioni logiche un concetto da altri concetti noti. Si hanno pertanto tante specie di definizione quanti sono i sistemi possibili di tali operazioni (definizioni per riunione, interferenza, corrispondenza, astrazione).

Alcuni di questi modi si presentano o si possono mettere sotto forma di definizioni nominali, quindi risultano due soli nuovi tipi, che sono le *definizioni di 3ª specie o per postulati, e le definizioni di 4ª specie o per astrazione.*

9. **Definizioni di 3ª specie.** — Queste definizioni consistono nel determinare una nozione o un insieme di nozioni per mezzo di un sistema di postulati cui debbano soddisfare.

Tali sono per es. la definizione di classe di grandezze omogenee data da Burali-Forti [9, 10, 13]; e le definizioni della classe N_0 date da Peano (*Aritmetica generale e Algebra elementare*); Padoa (*Thèorie des nombres entiers absolus,* " Riv. di matem. " Vol, 8°, pag. 45), Pieri (*Sugli assiomi aritmetici,* " Boll. dell'Accad. Gioenia ", Catania, 1908).

I postulati debbono in ogni caso essere scelti in modo da poterne dedurre tutte le altre proprietà degli enti introdotti. Burali-Forti [3] dice che queste definizioni sono le sole necessarie, perchè non vi è altra via per introdurre i concetti primitivi di una data scienza, che ricorrere a esse.

Altri però osserva [14], che queste definizioni non hanno la forma dovuta e però si deve cercare di trasformarle per quanto è possibile in nominali o esplicite.

A questo proposito il Couturat osserva [14], che un sistema di postulati contenente dei simboli non definiti, si può paragonare a un sistema di equazioni a più incognite.

Come questo può ammettere secondo i casi una, o più, o in
soluzioni, così quello può determinare in modo unico, o in più
o anche lasciare del tutto indeterminato il significato dei simbol
contiene. Per sapere se il sistema di postulati determina veran
questo significato, bisognerebbe risolvere il sistema, cioè ricava
valore dei simboli incogniti in funzione dei concetti noti, ma a
si avrebbe senz'altro una definizione esplicita.

Questa trasformazione non sempre è possibile, e quand'ancl
possibile non sempre è facile. Il caso più semplice è che il sis
racchiuda una sola nozione primitiva, perchè allora basta dire
essa è tale da verificare il sistema stesso di postulati. È ciò cl
fatto Burali-Forti per il concetto di grandezza [9, 10].

Un altro esempio di trasformazione di una definizione di 3ª s
in esplicita è stato dato dal Russell per la classe N_0 [26]. Per
nere lo scopo il matematico inglese ha dovuto considerare i n
interi come classi di classi che si possono porre in corrispon
biunivoca (*ony-ony*) fra loro (classi equivalenti di Cantor, aggr
coordinabili di Capelli).

10. **Definizioni per astrazione.** — Una definizione di 4ª specie
ferisce sempre a una funzione di enti noti, e non determina co
tamente questa funzione, ma dice soltanto in quali casi, ossia
quali valori delle variabili che contiene, essa assume valori ug

La forma generale di una tale definizione è la seguente:

$$(3) \qquad hxy : \supset : \varphi(x) = \varphi(y) . = . xry, \qquad (\mathrm{D}ef),$$

dove hxy è l'ipotesi relativa agli enti x, y, che consiste generalr
nell'indicare la classe alla quale appartengono (x, $y \varepsilon a$) e xry
relazione di significato noto che si pone per definizione equiva
alla relazione incognita $\varphi(x) = \varphi(y)$. La nozione della funzione
sulta così per astrazione dalla considerazione dei varî casi che
tano a uno stesso valore per essa.

In modo analogo a quello tenuto per l'uguaglianza può de
una qualsiasi operazione α da eseguirsi sugli enti $\varphi(x)$, $\varphi(y)$:

$$hx, y : \supset : \varphi(x)\, \alpha \varphi(y) . = . xr'y,$$

dove r' è la relazione nota fra x e y che per convenzione si r
identica al risultato dell'operazione α eseguita su $\varphi(x)$, $\varphi(y)$.

La classe c dei valori di cui è suscettibile la funzione φ,
finisce poi come l'insieme degli enti u tali che esista almeno
della classe nota a, per il quale sia $u = \varphi(x)$:

$$(4) \qquad c = u \ni (x \varepsilon a . u = \varphi(x) . - = \Lambda).$$

Affinchè l'uguaglianza definita dalla (3) sia riflessiva, simme
transitiva, anche la r deve godere di queste proprietà.

Questa è condizione necessaria e sufficiente perchè si possa dare la definizione per astrazione.

11. Esempi tratti dalla Geometria e dall'Aritmetica. — La relazione geometrica di equivalenza fra poligoni (scomponibilità in parti congruenti) è riflessiva, simmetrica e transitiva, perciò da ogni poligono A si ricava l'ente astratto " area di A ", ponendo:

$$\text{Area di A} = \text{Area di B} .=. \text{A equivalente a B}.$$

Analogamente dalla relazione di parallelismo fra rette si ricava l'ente astratto " punto all'infinito o direzione di una retta ", da quella di parallelismo fra piani, si ricava la nozione di " giacitura o retta all'infinito di un piano "; mentre dalle relazioni " perpendicolare ", " multiplo " ecc., che non godono delle citate proprietà non si ricava nessun ente astratto.

In aritmetica si hanno come esempi di definizioni di 4° tipo, la definizione delle frazioni come coppie di interi, nella quale si pone:

$$(a, b) = (c, d) .=. ad = bc;$$
$$(a, k) + (b, k) = (a + b, k), \text{ ecc.};$$

la definizione dei numeri relativi come coppie di numeri razionali, o dei complessi quali coppie di numeri reali; e la teoria che considera i numeri reali come limiti superiori di classi limitate di razionali.

12. Il concetto filosofico dell'astrazione. — Il prof. Enriques ha messo bene in luce i mutui rapporti fra il concetto di uguaglianza e quello di astrazione. " L'uguaglianza di due oggetti è sempre relativa, egli dice [15, n.° 3], al concetto astratto di una classe in cui vengono considerati; per es. segmenti uguali sono quelli che appartengono a un medesimo sistema di segmenti generato dalle possibili posizioni di un segmento rigido che si muove liberamente nello spazio.... ". " All'uguaglianza spettano le proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva che esprimono qui le proprietà fondamentali del processo logico di associazione e astrazione. Viceversa ogni relazione fra oggetti qualsiansi, che goda delle tre proprietà suddette, può considerarsi come un'uguaglianza, perchè essa porge un determinato modo di classificazione degli oggetti dati, ove si pongano in una medesima classe gli oggetti legati dalla relazione indicata ".

Non si creda però che le proprietà citate siano esclusive dell'uguaglianza, poichè esse spettano a una estesa categoria di relazioni. Non basta dunque verificare che sussistono queste proprietà, per legittimare certe definizioni di uguaglianza.

13. Trasformazione delle definizioni di 4ª specie in esplicite. — La trasformazione delle definizioni per astrazione in nominali è stata oggetti di particolari studi da parte dei matematici della scuola logica. Il prof. Padoa è riuscito in un modo molto semplice a conseguire

lo scopo, precisando il concetto di *astrazione matematica* colla segue
definizione:

" *Se* k *è una classe nella quale sia data una relazione* r *egualifo (simmetrica e transitiva), e se* a *è un individuo arbitrario di* k, *al astrazione di* a *rispetto a* r *è l'insieme di tutti e soli quei* k *che con* a *nella relazione* r " [20, 21].

Questa classe è appunto la c definita dalla (4) del n.° 10.

L'area di un poligono secondo questa definizione è l'insieme *u* poligoni equivalenti al dato, scelti nella classe k di tutti i polig frazione $\frac{a}{b}$ è l'insieme delle coppie $(x; y)$ di numeri proporzio ad $(a; b)$, tali cioè che sia

$$ay = bx; \text{ ecc.}$$

In questo modo l'uguaglianza viene sempre ridotta all'ider logica, perchè affermare l'uguaglianza di due concetti astratti s fica ora riconoscere che due classi definite mediante proprietà verse, cioè differenti dal punto di vista della comprensione, identiche in estensione, ossia contengono gli stessi elementi.

14. **Altra trasformazione delle definizioni per astrazione.** — Un' via per trasformare le definizioni di quarta specie in esplicite è indicata da Bertrand Russell [26].

Egli si vale a tal uopo del cosiddetto *principio di astrazione* cioè del teorema che *ogni relazione transitiva e simmetrica può considerata come il prodotto relativo* (1) *di una relazione univoca e sua inversa.* (2)

La relazione r che comparisce nella (3) del n.° 10, e che dev sere, come si è detto, riflessiva e simmetrica, si può decom pertanto nel prodotto di una relazione univoca s, per la sua in " ɔ ' s ":

$$xry \,.=.\, xsu * u \,ɔ' sy.$$

Il termine u in generale è una classe che può definirsi co conseguente di s, la funzione φ che comparisce nella (3) è il cor che ha per estensione u, e può identificarsi ad u, ove si prescin contenuto, come suol farsi nella logica formale.

Per tornare all'esempio di prima, ponendo in una classe *u* i poligoni fra loro equivalenti, dire che due poligoni sono equival lo stesso che dire che essi appartengono ad una stessa classe, e di un poligono (che corrisponde in questo caso alla funzione è altro che la classe che contiene il poligono con tutti i suoi valenti.

(1) Da non confondersi col prodotto logico.

(2) Russall B. *Sur la logique des rélations avec des applications à la théorie des séries.* " matem. ", Vol. 7°.

15. Postulato logico di Burali-Forti. — Coi metodi indicati del Padoa e del Russell, si consegue effettivamente lo scopo di introdurre gli enti astratti mediante definizioni nominali, ma questi enti non sono più semplici secondo il concetto tradizionale e abituale, bensì classi di classi, o classi di coppie di classi, o ancora più complicati, e questo fatto presenta degli inconvenienti gravi, scientifici e didattici, che è fuor di luogo adesso porre in rilievo (¹).

Per evitare questi inconvenienti, il prof. Burali-Forti ha creduto di legittimare la definizione per astrazione col seguente *principio logico*: [8, pag. 160].

" Se qualunque siano gli elementi x, y, z, di una classe u, la relazione α fra gli u, diversa dall'identità, è tale che:

$$x\alpha x,$$

da

$$x\alpha z \quad \text{e} \quad y\alpha z \quad \text{segue} \quad x\alpha y \text{ (²)},$$

allora esiste una sola classe v e una sola funzione f tali che:

1° qualunque sia l'elemento x di u, fx è un elemento di v;

2° qualunque sia l'elemento h di v, esiste almeno un elemento x di u, tale che $h = f(x)$;

3° se x e y sono elementi di u, allora $fx = fy$ solamente quando x è nella relazione α con y, cioè quando $x\alpha y$ ".

Il prof. Antonio Bindoni ha poi dimostrato [1] che la classe v che così si ottiene per astrazione, coincide con la classe v_1 che può definirsi nominalmente, secondo le vedute di Russell o di Padoa, così:

$$v_1 = h \ni \{\exists\, u \frown x \ni [h = u \frown y \ni (y\alpha x)]\}.$$

16. Osservazioni intorno al postulato di Burali-Forti. — Il prof. E. Maccaferri ha notato però che il postulato introdotto dal Burali-Forti non è valido, inquantochè la classe v di cui si tratta in esso non è unica, come risulta dai seguenti esempi [17] (³):

Se consideriamo la classe u formata dalle coppie $(m; n)$ di interi, e definiamo l'equivalenza $(\equiv)$ tra coppie, ponendo:

$$(\alpha) \qquad (m; n) \equiv (m'; n') \,.=.\, mn' = m'n,$$

la relazione $(\equiv)$ risulta riflessiva, simmetrica, transitiva.

Allora una classe v, i cui elementi siano funzioni φ degli elementi (coppie) della classe u, e queste φ soddisfino alla (3) del n.° 10, dove x, y siano degli u, e r sia la relazione di equivalenza ora de-

(¹) Si veda per es. le opere [2], [6], [7], [12].

(²) Da queste due proprietà segue anche la simmetrica, poichè supposto $x\alpha z$, essendo $z\alpha z$ si ha:

$$z\alpha z \,.\, x\alpha z :\supset: z\alpha x.$$

(³) Il difetto era stato rilevato del resto anche da Burali-Forti [5, n. 5]. Vedasi anche T. ...oto [2].

finita ($\equiv$), si può interpetrare sia come la classe delle frazi

sia come la classe delle frazioni $\frac{n}{m}$, sia come la classe dei nume cioè dei numeri che hanno logaritmi razionali, sia ancora c classe dei numeri $\sqrt{\frac{m}{n}}$, e così via.

In modo analogo se la relazione α (n.° 15) [o r (n.° 10)] parallelismo fra le rette u dello spazio, convenendo che una sia parallela a sè stessa, α è riflessiva, simmetrica, transitiv se alle rette u dello spazio si fanno corrispondere gli elem una classe v in modo che a rette parallele corrispondano el uguali (identici) di v, la classe v può essere intesa sia come la delle direzioni (piano punteggiato all'infinito), sia come la cla fasci di piani paralleli (piano rigato all'infinito).

E gli esempi si possono moltiplicare a volontà [17].

17. Importanza eccezionale della classe di Russell. — Fra le classi v, determinate dalle condizioni 1ª, 2ª, 3ª del n.° 15, ha lare importanza la classe di Russell, $\mathrm{R}(u, \alpha)$, la quale si co delle classi formate ciascuna dagli elementi di u che sono a due legati dalla relazione α [17].

Infatti in primo luogo la $\mathrm{R}(u, \alpha)$ si può definire nominalm quindi la sua esistenza e unicità è fuori dubbio; in secondo essa è la classe v che si può in generale individuare più facil

Per mostrare questo cominciamo a osservare che il postu Burali-Forti si può trasformare nel seguente teorema, che più la classe astratta cercata, ma una classe di classi:

" *Data una classe* u *e una relazione α riflessiva, simmetrica sitiva per gli* u, *esiste una classe di classi* Φ(u, α), *ciascuna* v *dell è una funzione degli* u *soddisfacente alla condizione 3ª del n.°*

$$\varphi(x) = \varphi(y) \,.=.\, x\alpha y,$$

ove x, y *sono degli* u ".

Per rendere manifesta l'esistenza della $\Phi(u, \alpha)$, che può d simbolicamente così:

$$(5) \qquad u\varepsilon\, \mathrm{Cls.}\ \alpha\varepsilon\, \mathrm{Rel.\ Rif.\ Simm.\ Trans.}\ u \,.\supset:$$

$$\Phi(u, \alpha) = \mathrm{Cls.} \frown v \ni [\exists\, vfu \frown \varphi \ni \{\varphi \text{‘} u = v \,.\because.\, x, y\varepsilon u \,.\supset_{x,y}: \varphi(x) = \varphi(y) \,.=.\, x\alpha y\}],$$

basta mostrare che esiste almeno una v.

Ora tale è appunto la $\mathrm{R}(u, \alpha)$. Infatti questa classe amm seguente definizione, con l'ipotesi comune alla (5):

$$\mathrm{R}(u, \alpha) = b \ni [\exists\, u \frown x \ni \{b = u \frown z \ni (z\alpha x)\}],$$

da cui appare che ogni suo elemento b è funzione di un x di u, e poichè, indicando questa funzione con g, si ha:

$$gx = u \cap z \ni (z \alpha x),$$

sarà pure

$$gx = gy \,.\!=\!.\, x \alpha y .$$

Essendo soddisfatta la (1) n.° 10, la $R(u, \alpha) = g \text{ʻ} u$ sarà una delle $\Phi(u, \alpha)$.

Che poi la $R(u, \alpha)$ sia la più ovvia e la più semplice delle $\Phi(u, \alpha)$ risulta dal fatto che nessuna funzione degli u legati dalla relazione α, può esser più semplice di quella che fa ottenere la classe stessa di questi u, poichè non c'è un criterio che induca a scegliere tra essi l'un elemento piuttosto che l'altro.

Tornando al 1° esempio del n.° 15 fra tutte le v in esso indicate, la $R(u, \alpha)$ è la classe delle classi che si ottengono raggruppando le coppie fra loro equivalenti, cioè legate dalla (α) del n.° 15 stesso. Sono queste classi che il Padoa chiama frazioni, nella citata introduzione alla teoria delle frazioni.

Il Maccaferri conclude pertanto che " quando si voglia introdurre una classe $v = \varphi \text{ʻ} u$, soddisfacente alla sola condizione (1) n.° 10, e non si sa dare, rispetto a un determinato campo di nozioni, una definizione nominale di una classe soddisfacente a tale condizione, diversa e più semplice della $R(u, \alpha)$, la cosa migliore sia di servirsi di questa classe del Russell, che ci offre una definizione nominale perfettamente rigorosa " [17].

18. **Concetto di campo di nozioni.** — Il prof. Burali-Forti fermo tuttavia nella sua opinione di dover evitare per quanto è possibile la classe di Russell, la quale sebbene logicamente importante, ci dà come enti complessi degli enti abitualmente considerati come enti semplici, ha posto [5] sotto nuova forma il suo postulato (n.° 14).

Egli precisa innanzi il concetto di *campo di nozioni*, come " un complesso (o classe) N di nozioni logico-scientifiche, cioè enti o relazioni o funzioni logiche, enti o relazioni o funzioni geometriche, analitiche, ecc. La classe N può esser formata da tutte le nozioni che noi effettivamente possediamo, o da alcune che a noi piace scegliere tra quelle note per formare un certo campo logico scientifico ".

Ciò posto Burali-Forti introduce il seguente postulato logico:

" *Se essendo* u *una classe ed* α *una relazione normale* (¹) *fra gli* u, *non esiste una* $\Phi(\mathrm{u}, \alpha)$ *che sia classe semplice in* N, *allora esiste una sola* $\Phi(\mathrm{u}, \alpha)$ *che è semplice in un campo* N' *più ampio di* N ".

Per esempio i numeri reali non esistono come enti semplici nel campo razionale, ma il loro complesso esiste come classe semplice (classe di enti semplici) in un campo più ampio.

(¹) Riflessiva, simmetrica, transitiva. Padoa chiama egualiformi queste relazioni (n. 12).

Questo postulato è analogo ai postulati esistenziali che si us in geometria per passare dalla geometria della retta a quella piano, da quella del piano a quella dello spazio ecc.

L'unica $\Phi(u, \alpha)$ la cui esistenza è affermata dal postulato ste è stata indicata con Abs (N, u, α). (Abs abbreviazione di **Abstra**

19. **Concetto di operatore, ed eliminazione delle definizioni per as zione.** — Non si può dire che quest'ultima forma di definizione astrazione (accolta anche dal Catania nelle ultime edizioni dei libri di testo), sia completamente soddisfacente.

Intanto con essa si torna sotto nuova veste a quei postulati stenziali, che era scopo precipuo della logica formale di evitare. differenza sostanziale vi è fra il postulato enunciato sopra, e la posizione di Dedekind: Quando due classi contigue non ammet un elemento di separazione razionale, noi creiamo (*wir erschaffen* nuovo ente, ecc.? (¹)

Lo stesso Burali-Forti non è rimasto completamente appagat suoi risultati, e ne è la prova il fatto che ha cercato una soluz migliore per altra via.

Riprendendo e completando alcuni suoi studi precedenti grandezze e sui numeri [4, 9, 10], egli ha recentemente definito meri reali come operatori su grandezze [6], e ha mostrato [7] si possano definire nello stesso modo le formazioni geometric Grassmann e Peano, i vettori, ecc. (²)

In questo modo le definizioni per astrazione che apparivan cora necessarie nel 1909 [11], si sono rese completamente in almeno nel campo dell'aritmetica generale. (³)

Come osserva Boggio [2] con la nuova forma di definizione diante operatori; stando per u, α le note ipotesi, ed eliminand tutto il campo di nozioni, la fu, α (n.° 14) può essere individuata

$$a \,\varepsilon\, u \,.\supset.\, fu,\alpha\, a = \iota\,[(\mathrm{Cls}\,{}^{\backprime} u)\, fu \frown \lambda \ni \{b \,\varepsilon\, u \,.\supset_b.\, \lambda b = u \frown \alpha a \frown \alpha b\}$$

donde risulta:

$$a, b \,\varepsilon\, u \,.\supset:\, fu,\alpha\, a = fu,\alpha\, b \,.=.\, a \,\varepsilon\, \alpha b \,.=.\, \alpha a = \alpha b,$$

e la classe Abs (N, u, α), diviene la classe percorsa da $f_{u,\alpha}$ riando x in tutta la classe u.

Per es. se u è la classe dei poligoni, area di un poligono a funzione del poligono (unica), che fa corrispondere al poligono

---

(¹) Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Braunschweig, 1872.

(²) Questi risultati di Burali-Forti sono stati svolti e volgarizzati da S. Catania [12].

(³) "... la nuova definizione mediante operatori, rende del tutto inutili le definizioni zione, alle quali si è avuto il torto di dedicare troppi sforzi, in luogo di cercare una n diversa, s'intende, dalle definizioni per classi" [2].

una classe di poligoni $\{(\mathrm{Cls}'u)\, f u\}$, la classe dei poligoni equivalenti ad a; e dire che l'area di a è uguale all'area di b, equivale a dire che i poligoni equivalenti ad a sono anche equivalenti a b (α in questo caso è la relazione di equivalenza).

Spiegazione dei simboli logici usati nel presente articolo

" si deduce ", quando il segno si trova fra proposizioni; " è inclusa in " quando il segno si trova fra classi.

$. = .$ " equivale a ", e significa che dal 1° membro si deduce il 2° e dal 2° il 1°.

ε simbolo di appartenenza ad una classe; $x \varepsilon a$ significa x appartiene alla classe a, x è un a.

è la relazione contraria a ε, cioè la relazione che passa fra una classe e i suoi elementi; può leggersi " tale che ".

$-$ negazione.

classe vuota, " il nulla ".

" e ", indica l'affermazione simultanea di due proposizioni, o la interferenza di due classi (prodotto logico).

" o ", indica l'affermazione alterna di due proposizioni, o la riunione (somma logica) di due classi.

prodotto relativo. Es. zio $. = .$ fratello * padre.

indica l'inversa della relazione s, (francese : converse).

" il ", " il solo ", è la relazione che passa fra un individuo e la classe singolare che lo contiene.

" si deduce qualunque siano x, y ".

" si deduce qualunque sia a ".

$a f b$ " funzione che trasforma gli a in b ".

BIBLIOGRAFIA

1. Bindoni A. *Sulle definizioni per astrazione e mediante classi.* " Boll. di Matem. ", Anno XI, n. 6-8.

2. Boggio T. *Algebra elementare.* Recensione dell'opuscolo " Grandezze e numeri " di S. Catania, in " Boll. di Bibliografia e Storia delle scienze matematiche ", 1915, IV.

3. Burali-Forti C. *Logica matematica.* Manuali Hoepli, 1894.

4. — *Les propriétés formales des opérations algebriques.* " Rivista di Ma
Vol. 6°, pag. 141.

5. — *Gli enti astratti definiti come enti relativi a un campo di nozioni.*
diconti dell'Acc. dei Lincei „, Vol. XXI, 1912.

6. — *I numeri reali definiti come operatori per le grandezze.* " Ren
R. Accad. dei Lincei „, 1915.

7. — *Nuove applicazioni degli operatori.* " Atti dell'Accademia delle
di Torino „, 7 marzo 1915.

8. Burali-Forti C. e Marcolongo R. *Elementi di calcolo vettoriale.* B
Zanichelli, 1909.

9. Burali-Forti C. *Teoria delle grandezze.* " Riv. di Matematica „ t. II

10. — *Sulla teoria generale delle grandezze e dei numeri.* " Atti dell'
mia delle Scienze di Torino „, t. 39, 1904.

11. — *Sulle definizioni mediante coppie.* " Boll. di Matematica „, Ann
n. 9-10.

12. Catania S. *Grandezze e Numeri.* Catania, Giannotta, 1915.

13. — *Sulle condizioni che caratterizzano una classe di grandezze.* "
Accad. delle Scienze di Torino „, 1915-16 (14 novembre 1915).

14. Couturat L. *Les principes des mathèmatiques.* Paris, Alcan, 1905

15. Enriques F. *I numeri e l'infinito.* " Scientia „. Vol. IX, 1911.

16. Guarducci A. *Della congruenza e del movimento.* Art. 3° in Quis
guardanti la Geometria elementare. Raccolte e coord. da F. Enriques, I
1ª edizione.

17. Maccaferri E. *Le definizioni per astrazione e la classe del Russell.*
del Cir. matem. di Palermo „, t. XXXV, 1ª serie, 1913.

18. Natucci A. *Alcune osservazioni su due articoli di* A. Palomby. " P
di matematica „, Anno XXX, fasc. VI.

19. Padoa A. *Note di logica matematica.* " Riv. di matem. „. Vol. VI

20. — *Funzioni, relazioni e astrazioni.* " Periodico di matem. „. Ann
n. VI.

21. — *Dell'astrazione matematica.* Quistioni filosofiche, Bologna-Moden

22. Palomby A. *Sul concetto aritmetico filosofico di eguaglianza e di rip*
" Periodico di matem. „. Anno XXX, n. V.

23. Peano G. *Les définitions mathèmatiques.* " Biblioteque du Congrès
Philosophie „, Paris, 1901, Vol. III.

24. — *Le definizioni in matematica.* Publicacions de l'institut de cien
cellona, MCMXI, Any 1, num. 1.

25. — *Le definizioni per astrazione.* " Boll. della Mathesis „. Anno V
dicembre 1915.

26. Russell B. *The principles of Mathematics.* Vol. 1°, Cambridge, 1

A. Nat

PICCOLE NOTE

Sulla trascendenza della generalità delle curve.

È noto che ad eccezione di $x=0$, $y=1$ il teorema di Lindemann prova che l'equazione:

$$y=e^x$$

è di tale natura che x ed y non possono essere entrambi algebrici e che quindi, ad eccezione del punto $(0, 1)$, la curva rappresentata da quella equazione non può passare per nessun punto algebrico del piano ed è di conseguenza una curva trascendente.

Si potrebbe dire analogamente della curva

$$y = \text{arc sen } x,$$

poichè, essendo

$$\text{sen } y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i},$$

l'equazione suddetta diventa:

$$2ix = e^{iy} - e^{-iy},$$

la quale rappresenta quindi una curva che, ad eccezione del punto $(0, 0)$, non potrà passare per alcun punto algebrico del piano, poichè, sempre in virtù del teorema di Lindemann, non potranno essere contemporaneamente algebrici x ed y.

In questa Nota esponga alcune considerazioni dalle quali si deduce, con gran facilità, che la proprietà che ha la generalità delle curve di non passare per punti algebrici non è affatto particolare, ma che anzi, data una curva qualsiasi può affermarsi che essa, *in generale*, non passerà che per punti trascendenti del piano, in modo che l'*insieme* delle infinite curve che non hanno questa proprietà è infinitamente meno vasto di quello formato dalle curve che della suaccennata proprietà godono.

Noi sappiamo intanto che la generalità dei numeri è formata dall'*insieme* dei numeri trascendenti. Potremmo anzi dire che, dato un numero a caso, quale, ad es. l'ascissa di un punto qualunque di una punteggiata, la probabilità che esso ha di essere algebrico è infinitamente piccola. Si noti infatti che l'insieme dei numeri algebrici è *numerabile*, mentre l'insieme della totalità dei numeri ha la *potenza del continuo*. Ne consegue che l'insieme dei numeri compresi, ad es. in un certo intervallo l ha per misura l, mentre l'insieme dei numeri algebrici dell'intervallo stesso ha per misura zero, la qual cosa ci dice che la probabilità che un numero, dato a caso, sia algebrico è infinitamente piccola.

Data ora una curva qualsiasi, anche non rappresentata da nessuna equazione e tracciata cioè comunque nel piano, essa, in generale, non potrà passare per punti algebrici, perchè dando, ad es. alle ascisse gli infiniti valori algebrici presi nell'intervallo qualunque che vogliasi considerare, la probabilità che a di essi corrisponda un'ordinata pure algebrica è infinitamente piccola. Ed i se consideriamo le infinite ordinate corrispondenti ad ascisse algebriche, ess in un'infinità numerabile, e sarà quindi infinitamente piccola la probabilit una di esse sia pure algebrica, perchè la probabilità che fra un'infinità di nate, avente la potenza del continuo, ce ne sia una, compresa in una data i numerabile, (quale sarebbe, nel nostro caso, una algebrica, corrisponden un'ascissa pure algebrica) è infinitamente piccola.

Resta quindi provato che la curva considerata, non passerà, *in genera* nessun punto algebrico del piano.

Come dunque gli infiniti numeri algebrici sono eccezioni nella totalità d meri, così potremo dire che le infinite curve che passano per punti algebric presentano pure eccezioni nell'insieme di tutte le curve possibili.

Sono interessanti ora le seguenti considerazioni sull'insieme dei punti nali del piano:

Se una retta

$$ax + by = 1$$

passa per due punti razionali del piano i suoi parametri a e b sono evi mente razionali ed allora ogni suo punto avente l'ascissa x razionale ha razionale la sua ordinata y.

Se invece la retta data avesse i parametri a e b irrazionali (e questo, le considerazioni svolte, sarebbe il caso generale) allora essa non potrebbe sare per due punti razionali del piano.

Ne consegue che gli ∞^2 punti razionali del piano sono allineati sulle che hanno i parametri razionali.

Le considerazioni qui svolte possono essere facilmente generalizzate spazio.

Dott. Calegari Adrast

RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 811

811. *Sul diametro* FG *d'un cerchio di centro* A *sono dati due punti* B, C *distanti dal centro. Determinare un punto* M *della periferia in modo che ri massimo*

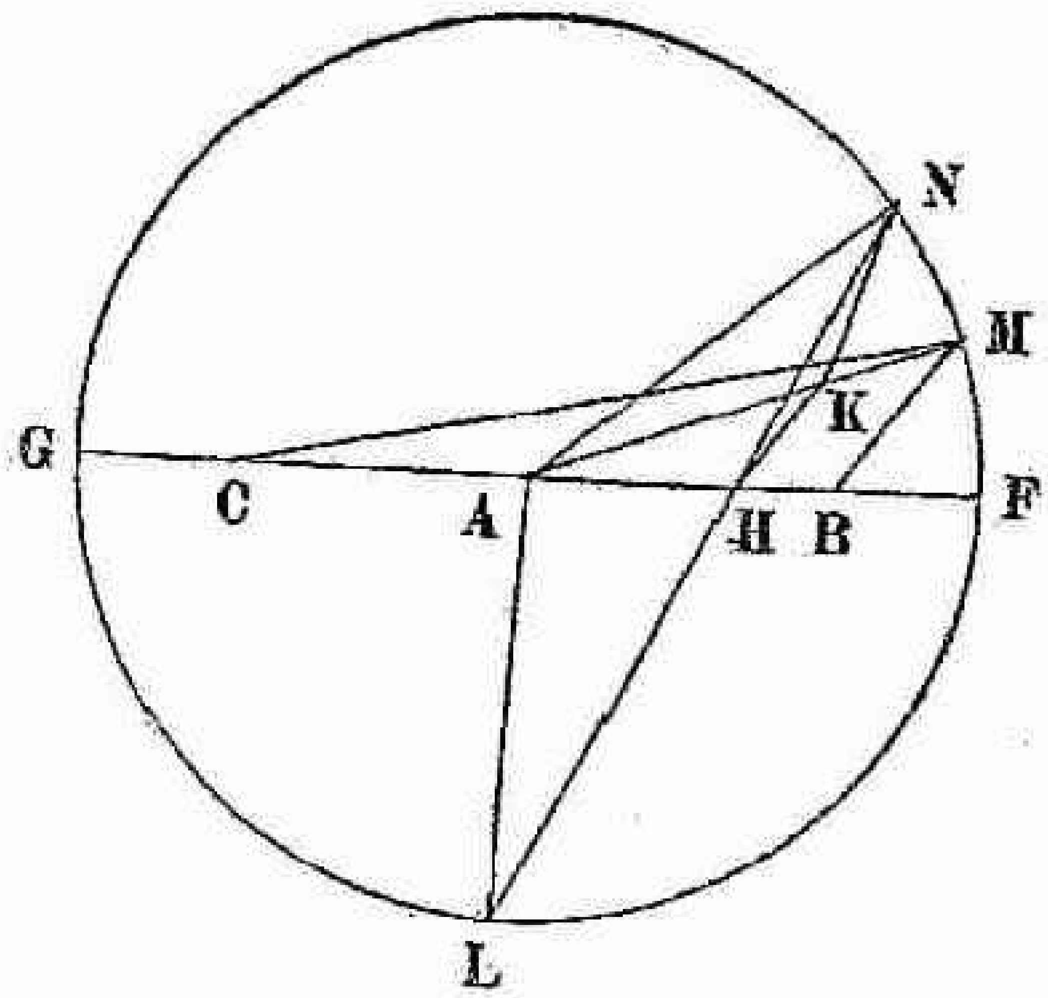
$$A\widehat{M}B - A\widehat{M}C.$$

Frisi

Risoluzione del prof. G. Vivanti, R. U. di Pavia.

Determiniamo il punto H coniugato armonico di F rispetto a B, C, sicchè:

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AF}.$$



Se N è un punto qualunque della periferia, M il punto di mezzo dell'arco NF, si ha:

$$\widehat{ANH} = \widehat{AMB} - \widehat{AMC}. \tag{1}$$

Infatti, preso su AM il segmento AK = AB, i triangoli ANK, AMB sono eguali, e AKH è simile ad essi, quindi:

$$\frac{HK}{KN} = \frac{AH}{AK} = \frac{AC}{AM}, \tag{2}$$

$$\widehat{ANK} = \widehat{AMB}, \tag{3}$$

$$\widehat{AHK} = \widehat{AKN}; \tag{4}$$

dalla (4) segue:

$$\widehat{HKN} = \widehat{AKH} + \widehat{AKN} = \widehat{AKH} + \widehat{AHK} = \widehat{CAM},$$

quindi, per la (2), i triangoli HKN, CAM sono simili, e si ha:

$$\widehat{KNH} = \widehat{AMC}. \tag{5}$$

Dalle (3), (5) risulta immediatamente la (1).

Dopo ciò il problema è ridotto alla ricerca del massimo dell'angolo $\widehat{ANH}$.

Prolungata la NH sino ad incontrare di nuovo la periferia in L, il triangolo isoscele ANL avrà gli angoli alla base massimi quando la base sarà minima, cioè quando NL sarà perpendicolare a FG.

Il problema proposto si risolve dunque così: Determinato il punto H coniugato armonico di F rispetto a B, C, si conduca KN perpendicolare a FG sino ad incontrare la periferia in N, e si divida per metà l'arco NF in M; il punto M è quello a cui corrisponde la massima differenza $\widehat{AMB} - \widehat{AMC}$.

BIBLIOGRAFIA

MICHELE LEONCINI, *Aritmetica ed Algebra* ad uso del primo bi dell'Istituto tecnico. Volume secondo (per la seconda cl Giulio Vannini, Brescia, 1916.

Nel fascicolo IV, Anno XXX, di questo *Periodico* si trova una mia rece del primo volume di quest'opera, destinato agli alunni della prima classe Istituti tecnici. Quel primo volume era una buona promessa per il second allora non era stato ancora pubblicato; e dobbiamo dire subito che la pro è stata pienamente mantenuta. Senza ripetere le considerazioni, che già fe l'altra recensione, sui criteri didattici e scientifici generali ai quali si è is l'A., e che meritano, secondo me, una piena approvazione, mi limiterò ad nare brevemente il contenuto di questo secondo volume.

La *teoria dei numeri irrazionali* si svolge col metodo delle sezioni nel dei numeri razionali. Però, per dare alla trattazione un fondamento più int e per mostrare l'opportunità delle varie convenzioni, l'A. stabilisce anzit concetto di *valore* (*numero razionale*) o *rapporto* di un segmento rispetto altro col quale sia commensurabile; passando poi a considerare due seg incommensurabili fra loro, pone il concetto di *valore approssimato* (*raz per difetto e per eccesso*) di uno rispetto all'altro; così che si mostra come segmento, rispetto a un altro, corrisponda o un numero razionale (il suo o due classi di numeri razionali (formate dei suoi *valori approssimati*, per e per eccesso). Viene quindi naturale, nel secondo caso, l'introduzione nuovo ente (*numero*) da chiamarsi *valore* del segmento, al quale corrispon medesimo tempo il segmento e la sezione nel campo dei numeri raziona esso determina.

Questo metodo non solo ha il vantaggio, notato sopra, di maggiore intu e naturalezza, ma anche quello di far ragionare sui valori approssimati segmento prima che si parli di sezioni e di numeri irrazionali, e l'altro, ch segnante si trova fatta, senza accorgersene, la teoria della misura delle gran Inoltre, molte dimostrazioni relative alle proprietà dei numeri irrazionali s plificano colla considerazione del corrispondente segmento, e ciò senza della purezza logica perchè è evidente che il riferimento alla classe dei seg è un sostegno che, una volta fatta la teoria, si può sopprimere. L'A. avver nel primo biennio dell'Istituto tecnico non è necessario svolgere completa tutta questa parte; ma bisogna dire che essa si presenta in questo lib tanta semplicità e chiarezza che si può benissimo svolgerla tutta, con molt taggio dell'unità organica.

Si può domandare, perchè l'A. abbia parlato di segmenti e non di gra in generale, di cui pure pone il concetto più tardi. Credo che ciò abbia fat rendere anche più intuitive le sue considerazioni, e per non sviare l'atte dello scolaro con un concetto nuovo e necessariamente meno determinato. I parte è manifesto che quanto si dice per i segmenti si può ripetere per ogni altra classe di grandezze, estendendo ad essa il postulato della continuità.

L'A. si ferma opportunamente sulla *rappresentazione decimale dei numeri reali*, razionali o irrazionali che siano; a ogni numero reale viene a corrispondere un simbolo decimale con un numero finito o infinito di cifre dopo la virgola: nel primo caso tale simbolo ha un valore determinato, uguale a quello del numero reale cui corrisponde; nel secondo caso si conviene di considerare quel numero reale come valore di tale simbolo. È questo il modo di concepire ordinario anche nel caso dei numeri decimali periodici; ma a me pare che, giacchè l'A. pone poi il concetto di limite, sarebbe stato anche più semplice e chiaro anticipare questo concetto, dare un significato a qualunque simbolo decimale con infinite cifre dopo la virgola come limite dei suoi valori decimali ridotti, e mostrare poi come esista un numero decimale indefinito uguale a qualunque numero reale dato. Mi pare anche facendo così si cammini più sul sodo. Però la trattazione dell'A. è esatta e, in fondo, semplice, e arriva presto al risultato più importante, cioè a stabilire la condizione necessaria e sufficiente affinchè un simbolo decimale indefinito rappresenti un numero razionale.

La rappresentazione decimale di ogni numero fa nascere spontanea la questione, quante siano le cifre *esatte* del risultato di una operazione eseguita su valori decimali ridotti di due numeri. Ecco dunque un breve capitolo sulle *operazioni con valori approssimati*, nel quale il problema, posto come si è detto, trova una soluzione completa. L'argomento è di grande importanza, e dovrebbe interessare l'insegnamento di ogni grado; ma pare che i risultati ai quali ordinariamente si giunge, per quanto sembrino semplici, non appariscano abbastanza pratici ed usualmente applicabili, perchè questa parte dell'insegnamento dell'aritmetica è in generale negletta. L'A. decisamente ha fatto un passo notevole sulla via della semplicità e praticità; forse ha avuto timore di dedicare all'argomento troppe pagine del suo libro, ma io credo che sviluppando completamente tutte le regole, colla considerazione di valori approssimati per difetto e per eccesso, potrà arrivare a risolvere in un modo pienamente soddisfacente l'interessante e trascurata questione.

Nelle norme per la *trasformazione delle espressioni con radicali* e per la risoluzione delle *equazioni irrazionali* si notano quei pregi di determinatezza dei vari passi che già molte volte abbiamo dovuto apprezzare in quest'opera. Segue un breve capitolo sulla *rappresentazione geometrica dei numeri reali*; definito il *valore algebrico* di un segmento, si dimostra il Teorema di Chasles e si definisce l'ascissa di un punto di una retta rispetto a una origine e a un senso fissati.

La parte dedicata alle *proporzioni* si apre col concetto generale di *classe di grandezze*; le proprietà che lo caratterizzano vengono poste in maniera sobria ed efficace. L'A. pone il postulato di Archimede ma non quello della continuità; ammette però che di ogni grandezza esistano summultipli secondo qualunque numero. Effettivamente, per assicurare la esistenza del rapporto di due grandezze in ogni caso è sufficiente il postulato di Archimede, mentre quello della continuità sarebbe necessario per dimostrare che, dato un numero qualunque, esistono due grandezze il cui rapporto è uguale ad esso; il che l'A. non ha necessità di dimostrare. Non ostante, affinchè le considerazioni svolte nel primo capitolo relativamente alla classe dei segmenti possano estendersi senz'altro a classi di grandezze qualunque, non sarebbe male ammettere in generale il postulato della continuità.

Le proprietà delle *proporzioni fra grandezze* si deducono coll'applicazion poche proprietà dei rapporti; seguono alcuni teoremi sulle *proporzioni fra meri*, e questa parte termina con un teorema, molto importante per le appl zioni, col quale si determina l'espressione di una grandezza variabile direttam proporzionale ad alcune altre grandezze ed inversamente proporzionale ad a

La trattazione delle *equazioni e sistemi di secondo grado* si svolge con gr chiarezza e con abbondante e ordinata esemplificazione. Dopo le equazior 2^0 grado e le questioni relative, le equazioni biquadratiche e le reciproche due tipi, di 3^0, 4^0 e 5^0 grado; indi i sistemi di equazioni delle quali un 2^0 grado; poi i sistemi di due equazioni di 2^0 grado, prima in generale, poi casi particolari più importanti; infine i sistemi di equazioni di cui due di 2^0 gr Tutti i principali artifici passano sotto gli occhi dell'alunno. Nei problemi mancano accenni alla costruzione geometrica della soluzione.

Una notevole semplicità raggiunge l'A. nell'*estensione del concetto di pot* fino all'esponente reale positivo e negativo; argomento in generale assai de gante. Rapidamente quindi si arriva ai *logaritmi*; e qui si devono specialm notare la cura anche della distribuzione pratica del calcolo logaritmico, e le nc chiare e complete sull'uso delle caratteristiche negative e sulle relative tra mazioni ed operazioni. Di solito si affida tutto ciò al buon senso dell'alunno incorre frequentemente in errori.

Dopo le *progressioni aritmetiche e geometriche*, si ha un capitolo sui *li* in esso si trova quanto è necessario per arrivare a stabilire il limite della so dei termini di una progressione geometrica, quando il numero di essi tend l'infinito. La trattazione è scientificamente inappuntabile, chiara e convinc Mi pare che qui sarebbe venuto opportuno osservare che a un simbolo deci con infinite cifre dopo la virgola si può dare un significato anche secondo qu nuovo concetto di limite, e che tale significato coincide con quello già cor zionalmente attribuitogli.

L'ultima parte riguarda i *problemi sull'interesse composto*, ed è dedicata cialmente alla Sezione Ragioneria. Essa è notevole in alto grado, e rivela speciale competenza dell'A. È assai soddisfacente, e deve esserlo anche l'alunno, troppo disposto a trovare praticamente inutile quello che studia, ve le teorie svolte precedentemente applicate ad argomenti concreti e positivi le questioni di *capitalizzazioni di rendite, valutazione di capitali, scadenze n sconto composto, annualità, ammortamenti* ecc.; la distinzione fra tasso effetti tasso nominale porta in questi problemi una luce insolita. Gli insegnan quegli istituti nei quali la seconda classe può avere una speciale sezione p Ragioneria, troveranno molto vantaggioso sostituire quest'ultima parte a qu altro capitolo del testo, relativamente di minore importanza.

Da quanto ho detto risulta che evidentemente non potrei terminare q rapido cenno sul secondo volume dell'opera con parole diverse da quelle c quali conchiusi la recensione sul primo: augurando cioè che il libro si dif largamente nelle nostre scuole.

P. Benedetti.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 Agosto 1916

LE FORMULE DI GIRARD E DI WARING

per le funzioni simmetriche semplici

Nel fascicolo Maggio-Giugno 1915 del *Pitagora* il prof. G. Mignosi ha dimostrato elementarmente che, posto

$$a + b = s, \qquad ab = p \qquad \text{ed} \qquad a^n + b^n = S_n,$$

si ha:

$$S_n = s^n - n \,.\, s^{n-2} \,.\, p + \frac{n}{n-2} \cdot \binom{n-2}{2} \,.\, s^{n-4} \,.\, p^2 -$$

$$- \frac{n}{n-3} \cdot \binom{n-3}{3} \,.\, s^{n-6} p^3 + \dots$$

$$\dots + (-1)^h \frac{n}{n-h} \cdot \binom{n-h}{h} \,.\, s^{n-2h} \,.\, p^h + \dots,$$

l'espressione del secondo membro intendendosi estesa a tutti i termini pei quali l'esponente $n - 2h$ è positivo o nullo.

A detta del Mignosi tale formula è un caso particolare di un'altra trovata dal prof. M. Cipolla.

Il risultato precedente può enunciarsi anche così: Si considerino tutte le possibili coppie di numeri interi positivi o nulli h e k pei quali $h + 2k = n$; abbiamo allora

$$S_n = \Sigma \, (-1)^k \, \frac{n}{n-k} \cdot \binom{n-k}{k} \,.\, s^h \,.\, p^k ;$$

donde si ha

$$S_n = \Sigma \, (-1)^k \,.\, \frac{n \,.\, \underline{|n-k}}{(n-k) \,.\, \underline{|k} \,.\, \underline{|n-2k}} \,.\, s^h \,.\, p^k =$$

$$= \Sigma \, (-1)^k \,.\, \frac{n \,.\, \underline{|n-k-1}}{\underline{|k} \,.\, \underline{|h}} \,.\, s^h \,.\, p^k =$$

$$= n \,.\, \Sigma \, (-1)^k \,.\, \frac{\underline{|h+k-1}}{\underline{|h} \,.\, \underline{|k}} \,.\, s^h \,.\, p^k .$$

Posta sotto questa forma, si vede ovviamente che la formula del Mignosi è molto più naturale considerarla come un caso particolare

della ben nota *formula di Waring* [1]; della quale, proprio in q
caso particolare di due numeri, s'è occupato il prof. G. CANDI
due articoli pubblicati nei fascicoli Maggio-Giugno 1899 e Maggic
del *Supplemento*, dandone varie interessanti applicazioni.

La formula di WARING può essere però dimostrata con pr
mento affatto elementare anche nel caso generale, per quanti
gliano numeri. È quello che faremo nel presente articolo, cog
così l'occasione di esporre, sempre elementarmente, altre n
sulle funzioni simmetriche, colla speranza che il Lettore sia
gliato a proseguire su un trattato di Algebra complementare lo
di tale importante ed interessante argomento.

* * *

1. Siano dati n numeri qualsiansi $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Indichiamo con s_1 la loro somma $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$; con
somma dei prodotti che si ottengono moltiplicandoli a 2 a 2 in
i modi possibili $(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_1a_n + a_2a_3 + \ldots)$; in ge
con s_h $[h = 2, 3, \ldots, n-1]$ la somma dei prodotti che si otte
moltiplicando in tutti i modi possibili tali numeri ad h ad h;
il loro prodotto $(a_1 . a_2 \ldots a_n)$. Tali somme diconsi *funzioni simm*
elementari degli n numeri dati.

Diconsi poi *funzioni simmetriche semplici* degli n numeri le
$S_t = a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t$ delle loro potenze di egual grado, con
nente intero e positivo [2].

Fra le S e le s ci sono le importanti relazioni trovate dal
matico olandese GIRARD (nato nel 1595, morto nel 1632) ed er
mente attribuite di solito a NEWTON (nato nel 1642, morto nel
Esse esprimono in modo assai semplice una S qualsiasi in fu

---

(1) EDUARDO VARING, matematico inglese nato nel 1734, morto nel 1798, fu anche m
suo nome trovasi nell'elenco dei medici di Cambridge, ma sembra che nulla abbia scrit
dicina; ha invece molte ed importanti pubblicazioni di matematica. Fra i suoi contemp
tanto stimato che a soli 27 anni fu ritenuto degno di occupare la cattedra di matem
Collegio di Lucas a Cambridge, cattedra resa celebre da NEWTON che, a partire dal 1669,
coperta per una lunga serie di anni.

Per questo e pei cenni storici seguenti cfr. il vol. II della *Breve storia delle maten*
W. W. ROUSE BALL, tradotta da D. GAMBIOLI (Zanichelli, 1904).

(2) Più in generale una *funzione* di più variabili dicesi *simmetrica* se è identica a q
si ottiene scambiando fra loro due variabili qualsiansi. Così, ad es., oltre alle precede
simmetriche le funzioni:

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2, \qquad \frac{a_1 . a_2 . a_3}{(a_1 + a_2 + a_3)^3}, \qquad \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2}, \text{ ecc.}$$

Nei trattati di Algebra si dimostra che ogni funzione simmetrica di più variabili p
mersi per mezzo delle sole funzioni simmetriche elementari di tali variabili, oppure p
delle sole loro funzioni simmetriche semplici.

delle s e delle S aventi un indice minore; e sono:

$$(\mathrm{A}')\quad S_q = S_{q-1} . s_1 - S_{q-2} . s_2 + S_{q-3} . s_3 - \ldots + (-1)^q . S_1 . s_{q-1} + (-1)^{q+1} . q . s_q ,$$

per $q \leqslant n$,

$$(\mathrm{A}'')\quad S_q = S_{q-1} . s_1 - S_{q-2} . s_2 + S_{q-3} . s_3 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^n . S_{q-n+1} . s_{n-1} + (-1)^{n+1} . S_{q-n} . s_n ,$$

per $q > n$.

2. Per dimostrare tali formule osserviamo anzitutto che il termine generico a_i^q del primo membro c'è una volta ed una volta soltanto nello sviluppo del secondo membro: quando si fa lo sviluppo del suo primo addendo $s_1 . S_{q-1}$.

Fra gli altri termini ottenuti dallo sviluppo del secondo membro quelli che non hanno tutti gli esponenti eguali ad 1 compaiono due volte e due volte soltanto, una volta col segno $+$ e l'altra col segno $-$; di guisa che si elidono. Ad es., il termine $a_1 . a_2^{q-2} . a_4$ lo si ha soltanto dallo sviluppo di $s_2 . S_{q-2}$ e di $s_3 . S_{q-3}$, la prima volta col segno $-$, la seconda col segno $+$.

Restano da considerare, nello sviluppo del secondo membro, i termini formati dal prodotto di q fattori tutti diversi fra loro, termini che compaiono solo nel caso in cui $q \leqslant n$. Un termine di tale forma lo si ottiene q volte dallo sviluppo del penultimo addendo del secondo membro, $(-1)^q . s_{q-1} . S_1$, sempre collo stesso segno; d'altra parte, col segno opposto e moltiplicato per q, lo si ha dallo sviluppo dell'ultimo addendo, $(-1)^{q+1} . s_q . q$. Fatta la riduzione dei termini simili, anche tali termini quindi spariscono.

Le *formule di Girard* restano così completamente dimostrate.

3. Essendo i numeri considerati n soltanto, non è possibile prenderne in nessun modo $n+1$ o $n+2$, o, in generale, più di n. Non avendo ancora attribuito nessun significato al simbolo s_m quando $m > n$, è dunque naturale porre $s_{n+1} = s_{n+2} = s_{n+3} = \ldots = 0$.

Con tale posizione le formule (A') ed (A'') possono ridursi, qualunque sia q, all'unica formula:

$$(\mathrm{A})\quad S_q = S_{q-1} . s_1 - S_{q-2} . s_2 + S_{q-3} . s_3 - \ldots$$

$$\ldots + (-1)^q S_1 . s_{q-1} + (-1)^{q+1} q . s_q .$$

Tale formula infatti, quando $q \leqslant n$, coincide senz'altro colla (A'); quando $q > n$, differisce dalla (A'') pei soli termini

$$(-1)^{n+2} . S_{q-n-1} . s_{n+1}, \qquad (-1)^{n+3} . S_{q-n-2} . s_{n+2}, \ldots, (-1)^{q+1} . q . s_q ,$$

che sono tutti nulli, essendo nulli, per la posizione ora fatta, i loro ultimi fattori.

* * *

4. La formula di Girard ora dimostrata è una formula ricor
colla quale si possono trovare ovviamente, una dopo l'altra, le e
sioni di $S_2, S_3, S_4, \ldots$ in funzione delle s.

Infatti, essendo anzitutto $S_1 = s_1$ ed avendosi dalla (A), per
$S_2 = S_1 \,.\, s_1 - 2s_2$, si ha intanto $S_2 = s_1^2 - 2s_2$.

Posto nella (A) $q = 3$, si ha $S_3 = S_2 \,.\, s_1 - S_1 \,.\, s_2 + 3s_3$, dond

$$S_3 = (s_1^2 - 2s_2) \,.\, s_1 - s_1 \,.\, s_2 + 3s_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3 .$$

In modo analogo si trova:

$$S_4 = (s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3) \,.\, s_1 - (s_1^2 - 2s_2) \,.\, s_2 + s_1s_3 - 4s_4 =$$
$$= s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4$$

$$S_5 = (s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_1s_3 + 2s_2^2 - 4s_4) \,.\, s_1 -$$
$$- (s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3) \,.\, s_2 + (s_1^2 - 2s_2) \,.\, s_3 - s_1s_4 + 5s_5$$
$$= s_1^5 - 5s_1^3s_2 + 5s_1^2s_3 + 5s_1s_2^2 - 5s_1s_4 - 5s_2s_3 + 5s_5 ,$$

e così via.

Il calcolo delle S_t fatto in tal modo diventa, come ben si
sempre più lungo e complicato quanto più grande è l'indice
esige che per il calcolo di una S_t siansi prima calcolate tutt
precedenti.

È dunque assai utile ed interessante una formula la qua
senz'altro, in generale, qualunque sia t, l'espressione di S_t i
zione delle s.

5. Tale risultato è ottenuto colla *formula di Waring*:

$$\text{(B)} \qquad S_t = t \,.\, \Sigma (-1)^{k_2+k_4+\ldots} \,.\, \frac{\underline{|k_1 + k_2 + \ldots + k_t - 1}}{\underline{|k_1} \,.\, \underline{|h_2} \ldots \underline{|k_t}} \,.\, s_1^{k_1} \,.\, s_2^{k_2} \ldots$$

nella quale la sommatoria si intende estesa a tutti i valori
positivi o nulli delle k pei quali sia

$$k_1 + 2 \,.\, k_2 + 3 \,.\, k_3 + \ldots + t \,.\, k_t = t.$$

Avendosi, da tale relazione,

$$k_2 + k_4 + k_6 + \ldots = t - k_1 - k_2 - 3k_3 - 3k_4 - 5k_5 - 5k_6 - \ldots =$$
$$= t - (k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots) - 2k_3 - 2k_4 - 4k_5 - 4k_6$$

si vede che

$$k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$$

è pari o dispari assieme a

$$t-(k_1+k_2+k_3+k_4+\ldots)$$

e quindi che

$$(-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots}=(-1)^{t-(k_1+k_2+k_3+\ldots)}=\frac{(-1)^t}{(-1)^{k_1}.(-1)^{k_2}.(-1)^{k_3}\ldots}.$$

La formula di Waring può dunque scriversi anche così:

$$(\mathrm{B}')\quad S_t=\Sigma\frac{(-1)^t.t}{(-1)^{k_1}.(-1)^{k_2}.(-1)^{k_3}\ldots}\cdot\frac{\underline{|k_1+k_2+k_3+\ldots+k_t-1}}{\underline{|k_1}\,.\,\underline{|k_2}\ldots\underline{|k_t}}.s_1^{k_1}.s_2^{k_2}\ldots s_t^{k_t};$$

ed è questa la forma più opportuna per la dimostrazione.

6. Per tale dimostrazione si osservi anzitutto che la formula è manifestamente valida quando $t=0$, riducendosi allora all'ovvia relazione $S_1=s_1$.

Per dimostrare la (B′) nella sua generalità applicheremo il metodo d'induzione, supponendo che essa sia valida per i valori 1, 2, 3, ..., $q-1$ dell'indice t, e provando che allora essa è esatta anche quando $t=q$. Basterà a tal uopo considerare la formula (A) e dimostrare che, essa è identicamente soddisfatta quando all'S_q del primo membro ed agli S_{q-1}, S_{q-2}, ..., S_2, S_1 del secondo vengano sostituite le corrispondenti espressioni date dalla (B′).

Il termine generico ottenuto dalla sostituzione di S_q nel *primo membro* della (A) ha la forma

$$M=\frac{(-1)^q.q}{(-1)^\alpha.(-1)^\beta\ldots(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\ldots\underline{|\lambda}}.s_a^\alpha.s_b^\beta\ldots s_l^\lambda$$

con $\alpha\beta\ldots\lambda$ numeri interi *positivi* tali che $a.\alpha+b.\beta+\ldots+l.\lambda=q$.

Nel *secondo membro* della (A), fatta la sostituzione, hanno le stesse funzioni $s_a s_b\ldots s_l$ elevate agli stessi esponenti $\alpha\beta\ldots\lambda$ i termini:

$$(-1)^{a+1}\cdot\frac{(-1)^{q-a}.(q-a)}{(-1)^{\alpha-1}.(-1)^\beta\ldots(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha-1+\beta+\ldots+\lambda-1}}{\underline{|\alpha-1}\,.\,\underline{|\beta}\ldots\underline{|\lambda}}.s_a^{\alpha-1}.s_b^\beta\ldots s_l^\lambda.s_a$$

(ottenuto dallo sviluppo di $(-1)^{a+1}S_{q-a}.s_a$),

$$(-1)^{b+1}\cdot\frac{(-1)^{q-b}.(q-b)}{(-1)^\alpha.(-1)^{\beta-1}\ldots(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta-1+\ldots+\lambda-1}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta-1}\ldots\underline{|\lambda}}.s_a^\alpha.s_b^{\beta-1}\ldots s_l^\lambda.s_b$$

(ottenuto dallo sviluppo di $(-1)^{b+1}S_{q-b}.s_b$),

. . . .

$$(-1)^{l+1}\cdot\frac{(-1)^{q-l}.(q-l)}{(-1)^\alpha.(-1)^\beta\ldots(-1)^{\lambda-1}}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1-1}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\ldots\underline{|\lambda-1}}.s_a^\alpha.s_b^\beta\ldots s_l^{\lambda-1}.s_l$$

(ottenuto dallo sviluppo di $(-1)^{l+1}S_{q-l}.s_l$).

Fatte delle ovvie riduzioni, tali termini sono

$$\frac{(-1)^q\,.\,(q-a)}{(-1)^\alpha.(-1)^\beta...(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+...+\lambda-2}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,\alpha\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,...\,s_l{}^\lambda\,,$$

$$\frac{(-1)^q\,.\,(q-b)}{(-1)^\alpha.(-1)^\beta...(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+...+\lambda-2}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,\beta\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,...\,s_l{}^\lambda\,,$$

. . . .

$$\frac{(-1)^q\,.\,(q-l)}{(-1)^\alpha.(-1)^\beta...(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+...+\lambda-2}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,\lambda\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,...\,\lambda_l{}^\lambda\,;$$

e addizionati, ricordando che $a\alpha+b\beta+\ldots+l\lambda=q$, danno

$$\frac{(-1)^q}{(-1)^\alpha\,.\,(-1)^\beta\,...\,(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+\ldots+\lambda-2}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,...$$

$$...\,s_l{}^\lambda\,.\,[(q-a)\,\alpha+(q-b)\,\beta+\ldots+(q-l$$

$$=\frac{(-1)^q}{(-1)^\alpha\,.\,(-1)^\beta\,...\,(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+\ldots+\lambda-2}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,..$$

$$...\,s_l{}^\lambda\,[q\alpha+q\beta+\ldots+q\lambda-$$

$$=\frac{(-1)^q\,.\,q}{(-1)^\alpha\,.\,(-1)^\beta\,...\,(-1)^\lambda}\cdot\frac{\underline{|\alpha+\beta+\ldots+\lambda-1}}{\underline{|\alpha}\,.\,\underline{|\beta}\,...\,\underline{|\lambda}}\,.\,s_a{}^\alpha\,.\,s_b{}^\beta\,...$$

Si ritrova così il termine M del primo membro.

Tale verifica è però difettosa quando $\alpha+\beta+\ldots+\lambda-$ ossia quando tutte le k sono nulle tranne una che è egual Per provarla anche in tale caso si osservi che il corrisponder mine di S_q nel *primo membro* della (A) è allora manifestame

$$\frac{(-1)^q\,.\,q}{(-1)^1}\,.\,s_q{}^1=(-1)^{q+1}\,.\,q\,.\,s_q$$

e coincide coll'ultimo termine del *secondo membro* della (A).

Fatta nel secondo membro della (A) la riduzione dei simili, ogni termine del primo membro è dunque identico ad secondo.

7. Perchè la formula di Waring risulti completamente dim basta ora provare che ogni termine dello sviluppo del secondo m della (A) ha effettivamente un termine simile nello sviluppo del primo membro.

A tal uopo conviene considerare il *peso di un monomio intero* contenente lettere munite di indici; come, ad es., le lettere $s_1, s_2, s_3, \ldots$. Per definizione, tale peso è la somma dei prodotti degli indici delle lettere che compaiono nel monomio, moltiplicati per gli esponenti corrispondenti; così ad es., il monomio $-7a_3^4a_5a_8^3$ ha il peso

$$3.4+5+8.3=12+5+24=41.$$

È ovvio che il peso del prodotto di due monomi coincide colla somma dei pesi dei monomi fattori; così, ad es., i monomi $3s_1^3s_2s_5$ e $-4s_2^2s_5^2s_7$ hanno rispettivamente i pesi 10 e 21, il loro prodotto $-12s_1^3s_2^3s_5^3s_7$ ha per peso 31.

Ciò posto è manifesto che del secondo membro della (B') tutti i termini hanno, rispetto alle s, il peso t; e che compaiono tutti i vari casi possibili di monomi interi aventi peso t. Nello sviluppo del *secondo membro* della (A) tutti i termini hanno dunque il peso q: per l'ultimo termine lo si vede senz'altro; per i termini provenienti dagli altri addendi $\pm S_{q-h} . s_h$ basta osservare che il peso di un termine qualsiasi di S_{q-h} è $q-h$, che il peso di s_h è h, che il peso del prodotto di s_h per un termine qualsiasi di S_{q-h} è $(q-h)+h=q$. D'altra parte nello sviluppo del *primo membro* della (A) compaiono tutti i possibili casi di monomi interi aventi peso q; v'è quindi sempre un termine simile ad un termine qualsiasi del secondo membro; come dovevasi provare.

La formula (B') resta con ciò dimostrata esaurientemente; e assieme ad essa la formula (B), il cui uso è più comodo nelle applicazioni.

8. Come applicazione della formula di Waring proponiamoci di esprimere in funzione delle s_i la S_7.

Basterà porre nella (B) $t=7$, risolvendo prima, in numeri interi positivi o nulli, l'equazione:

$$p_1+2k_2+3k_3+4k_4+5k_5+6k_6+7k_7=7.$$

k_1	7	5	4	3	3	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0
k_2	0	1	0	2	0	1	0	3	1	0	0	2	1	0	0
k_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0	1	0	1	0
k_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0
k_5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
k_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
k_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Le soluzioni cercate sono quelle indicate nel quadro preceden
e dalla formula (B) abbiamo quindi:

$$S_7 = 7 \cdot \left\{ \frac{\underline{|6}}{\underline{|7}} \cdot s_1^7 - \frac{\underline{|5}}{\underline{|5}} \cdot s_1^5 \cdot s_2 + \frac{\underline{|4}}{\underline{|4}} \cdot s_1^4 \cdot s_3 + \frac{\underline{|4}}{\underline{|3} \cdot \underline{|2}} \cdot s_1^3 \cdot s_2^2 - \right.$$

$$- \frac{\underline{|3}}{\underline{|3}} \cdot s_1^3 \cdot s_4 - \frac{\underline{|3}}{\underline{|2}} \cdot s_1^2 \cdot s_2 \cdot s_3 + \frac{\underline{|2}}{\underline{|2}} \cdot s_1^2 \cdot s_5 - \frac{\underline{|3}}{\underline{|3}} \cdot s_1 \cdot s_2^3 + \underline{|2} \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s$$

$$\left. + \frac{\underline{|3}}{\underline{|2}} \cdot s_1 \cdot s_3^2 - s_1 \cdot s_6 + \frac{\underline{|2}}{\underline{|2}} \cdot s_2^2 \cdot s_3 - s_2 \cdot s_5 - s_3 \cdot s_4 + s_7 \right\} =$$

$$= s_1^7 - 7 \cdot s_1^5 \cdot s_2 + 7 \cdot s_1^4 \cdot s_3 + 14 \cdot s_1^3 \cdot s_2^2 - 7 \cdot s_1^3 \cdot s_4 - 21 \cdot s_1^2 \cdot s_2 \cdot s_3 +$$
$$+ 7 s_1^2 \cdot s_5 - 7 \cdot s_1 \cdot s_2^3 + 14 \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot s_4 + 7 \cdot s_1 \cdot s_3^2 - 7 \cdot s_1 \cdot s_6 + 7 \cdot s_2^2 \cdot s_3 -$$
$$- 7 \cdot s_2 \cdot s_5 - 7 \cdot s_3 \cdot s_4 + 7 \cdot s_7 .$$

Tale formula risulta semplificata se $n < 7$, essendo allora

$$s_{n+1} = s_{n+2} = \ldots = s_7 = 0.$$

Così, ad es., se $n = 3$, ossia se i numeri considerati sono 3 s
tanto: a, b, c, si ha

$$S_7 = s_1^7 - 7 s_1^5 \cdot s_2 + 7 s_1^4 \cdot s_3 + 14 s_1^3 \cdot s_2^2 - 21 s_1^2 \cdot s_2 \cdot s_3 - 7 s_1 \cdot s_2^3 + 7 s_1 \cdot s_3^2 + 7 s_2^2$$

dove

$$s_1 = a + b + c, \qquad s_2 = ab + bc + ca, \qquad s_3 = abc.$$

Tenendo conto dell'osservazione ora fatta, vediamo tosto che,
è fissato il numero n delle quantità considerate, la formula di W
RING può anche scriversi così:

$$\text{(C)}\quad S_t = t \cdot \Sigma (-1)^{k_2+k_4+k_6} + \ldots \frac{\underline{|k_1 + k_2 + \ldots + k_i - 1}}{\underline{|k_1} \cdot \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_i}} \cdot s_1^{k_1} \cdot s_2^{k_2} \ldots$$

con i indicandosi il più piccolo dei numeri t ed n (il loro valore
mune, se $t = n$) e la sommatoria intendendosi estesa a tutti i num
interi positivi o nulli pei quali

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + ik_i = t.$$

La formula ultimamente trovata, in cui $t = 7$ ed $n = 3$, la si pot
ottenere direttamente dalla (C) ponendovi $i = 3$.

* * *

9. Partendo dalla formula (C) è facile esprimere in funzione dell
anche le somme

$$S_{-t} = a_1^{-t} + \ldots + a_n^{-t} = \frac{1}{a_1^t} + \frac{1}{a_2^t} + \ldots + \frac{1}{a_n^t} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1}\right)^t + \left(\frac{1}{a_2}\right)^t + \ldots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^t.$$

A tal uopo si considerino le n quantità

$$\alpha_h = \frac{1}{a_h} \qquad [h = 1, 2, \ldots, n];$$

si ponga

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n,$$

$$\sigma_h = \Sigma\, \alpha_{r_1} . \alpha_{r_2} \ldots \alpha_{r_h}, \qquad \sigma_n = \alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n$$

$$\Sigma_t = \alpha_1^t + \alpha_2^t + \ldots + \alpha_n^t;$$

si osservi infine che, se $i < n$, $\sigma_i = \frac{s_{n-i}}{s_n}$, che $\sigma_n = \frac{1}{s_n}$, che $\Sigma_t = S_{-t}$

Dalla formula (C) abbiamo allora:

$$S_{-t} = \Sigma_t = t . \Sigma(-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} . \frac{\underline{|k_1+k_2+\ldots+k_i-1}}{\underline{|k_1} . \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_i}} . \sigma_1^{k_1} . \sigma_2^{k_2} \ldots \sigma_i^{k_i} =$$

$$= t . \Sigma(-1)^{k_2+k_4+k_6+\ldots} . \frac{\underline{|k_1+k_2+\ldots+k_i-1}}{\underline{|k_1} . \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_i}} . \frac{s_{n-1}^{k_1} . s_{n-2}^{k_2} \ldots s_{n-i}^{k_i}}{s_n^{k_1+k_2+\ldots+k_i}},$$

dove, se $i = n$, ossia se $t \geqslant n$, si deve porre $s_{n-i} = 1$.

Da tale formula si ha tosto l'altra di uso più comodo:

$$(D) \qquad S_{-t} = \frac{t}{s_n^t} . \Sigma(-1)^{k_2+k_4+\ldots} . \frac{\underline{|k_1+k_2+\ldots+k_i-1}}{\underline{|k_1} . \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_i}} .$$

$$. s_n^{t-(k_1+k_2+\ldots+k_i)} . s_{n-1}^{k_1} . s_{n-2}^{k_2} \ldots s_{n-i}^{k_i}.$$

10. Si voglia, ad es., esprimere in funzione di

$$s_1 = a + b + c, \quad s_2 = ab + bc + ca \quad \text{ed} \quad s_3 = abc$$

la somma

$$S_{-6} = \frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6}.$$

Si applicherà la formula (D) ponendovi $n = 3$, $t = 6$, $i = 3$ e risolvendo in numeri interi positivi o nulli l'equazione

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 6,$$

come si ha dal prospetto qui unito.

k_1	6	4	3	2	1	0	0
k_2	0	1	0	2	1	3	0
k_3	0	0	1	0	1	0	2

Si trova allora

$$S_{-6}=\frac{6}{s_3^6}\cdot\left\{\frac{|\underline{5}}{|\underline{6}}\cdot s_2^6-\frac{|\underline{4}}{|\underline{4}}\cdot s_3\cdot s_2^4\cdot s_1+\frac{|\underline{3}}{|\underline{3}}\cdot s_3^2\cdot s_2^3+\frac{|\underline{3}}{|\underline{2}\cdot|\underline{2}}\cdot s_3^2\cdot s\right.$$

$$-|\underline{2}\cdot s_3^3\cdot s_2\cdot s_1-\frac{|\underline{2}}{|\underline{3}}\cdot s_3^3\cdot s_1^3+\frac{1}{|\underline{2}}\cdot s$$

$$=\frac{1}{s_3^6}\left\{s_2^6-6s_1\cdot s_2^4\cdot s_3+6s_2^3\cdot s_3^2+9s_1^2\cdot s_2^2\cdot s_3^2-12s_1\cdot s_2\cdot s_3^3-2s_1^3\cdot s_3^3\right.$$

Se si volesse invece esprimere in funzione di s_1, s_2, s_3 la som
converrebbe ricordare l'espressione di S_7 già trovata nel n.
posta applicata ai numeri $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$.

Si trova allora senz'altro:

$$S_{-7}=\left(\frac{s_2}{s_3}\right)^7-7\cdot\left(\frac{s_2}{s_3}\right)^5\cdot\frac{s_1}{s_3}+7\cdot\left(\frac{s_2}{s_3}\right)^4\cdot\frac{1}{s_3}+14\cdot\left(\frac{s_2}{s_3}\right)^3\cdot\left(\frac{s_1}{s_3}\right.$$

$$-21\cdot\left(\frac{s_2}{s_3}\right)^2\cdot\frac{s_1}{s_3}\cdot\frac{1}{s_3}-7\cdot\frac{s_2}{s_3}\cdot\left(\frac{s_1}{s_3}\right)^3+7\cdot\frac{s_2}{s_3}\cdot\left(\frac{1}{s_3}\right)^2+7\cdot\left(\frac{s_1}{s_3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{s_3^7}\left\{s_2^7-7s_1\cdot s_2^5\cdot s_3+7s_2^4\cdot s_3^2+14s_1^2\cdot s_2^3\cdot s_3^2-\right.$$

$$-21s_1\cdot s_2^2\cdot s_3^3-7s_1^3\cdot s_2\cdot s_3^3+7s_2\cdot s_3^4+7s_1^2$$

Si noti che le espressioni per le quali si deve moltiplic
ed $\frac{1}{s_3^7}$ per avere, rispettivamente, S_{-6} ed S_{-7} sono somme di
aventi tutti lo stesso peso: 12 e 14 (*funzioni isobariche*) $\begin{cases} ἴσος = \text{e} \\ βάρος = \end{cases}$

In generale l'espressione per la quale bisogna moltipli
per avere S_{-t} è una funzione isobarica di peso $(n-1)\cdot t$, os
somma di termini aventi tutti lo stesso peso $(n-1)\,t$.

Infatti

$$n\cdot\{t-(k_1+k_2+\ldots+k_i)\}+(n-1)k_1+(n-2)\,k_2+\ldots+(n-$$

$$=nt-(k_1+2k_2+\ldots+ik_i)=nt-t=(n-1)\,t.$$

I secondi membri delle formule (B), (B'), (C) sono invece
isobariche di peso t, sempre rispetto alle s.

Tutto ciò si poteva del resto prevedere applicando le nozio
funzioni omogenee (omogeneità rispetto alle quantità a_1, a_2, .

***

11. Nel n. 4 abbiamo veduto che dalla formula di Girard si possono dedurre successivamente $S_2, S_3, S_4, \ldots$ in funzione delle s. È facile vedere come, partendo dalla stessa formula, si possano anche esprimere le s per mezzo delle S.

Essendo anzitutto $s_1 = S_1$, dalla $S_2 = S_1 . s_1 - 2s_2$ si ha

$$s_2 = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2);$$

dalla $S_3 = S_2 . s_1 - S_1 . s_2 + 3s_3$ si ha

$$s_3 = \frac{1}{3}[S_3 - S_2 . S_1 + S_1 \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)] =$$

$$= \frac{1}{3}S_3 - \frac{1}{3}S_1S_2 + \frac{1}{6}S_1^3 - \frac{1}{6}S_1S_2 = \frac{1}{6}S_1^3 - \frac{1}{2}S_1S_2 + \frac{1}{3}S_3;$$

e così via.

Esiste però una formula (¹) che dà senz'altro, in generale, qualunque sia t, l'espressione di s_t in funzione delle S. Tale formula viene naturalmente denominata *formula inversa a quella di Waring*; essa è

$$(E) \qquad s_t = \Sigma \frac{(-1)^{k_2+k_4+\ldots}}{1^{k_1} . 2^{k_2} . 3^{k_3} \ldots t^{k_t}} . \frac{1}{\underline{|k_1} . \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_t}} . S_1^{k_1} . S_2^{k_2} \ldots S_t^{k_t},$$

la sommatoria intendendosi estesa a tutti i numeri k interi positivi o nulli pei quali $k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \ldots + tk_t = t$.

Per la dimostrazione conviene scrivere la formula nel modo seguente:

$$(E') \qquad s_t = \Sigma \frac{(-1)^{t-k_1-k_2-\ldots-k_t}}{1^{k_1} . 2^{k_2} \ldots t^{k_t}} . \frac{1}{\underline{|k_1} . \underline{|k_2} \ldots \underline{|k_t}} . S_1^{k_1} . S_2^{k_2} \ldots S_t^{k_t};$$

osservare che tale formula è manifestamente valida quando $t = 1$; provare infine che, supposto essa sia verificata quando $t = 1, 2, 3, \ldots, q-1$, lo è anche quando $t = q$.

Per provare ciò giova riferirsi alla formula (A) di Girard, scritta nel modo seguente

$$q . s_q = S_1 . s_{q-1} - S_2 . s_{q-2} + S_3 . s_{q-3} - \ldots + (-1)^q S_{q-1} . s_1 + (-1)^{q+1} S_q,$$

e verificare che essa è identicamente soddisfatta ove al posto delle s si pongano le loro espressioni date dalla (E').

(¹) Pascal, *Repertorio di matematiche superiori*; vol. I, pag. 101 (Hoepli, 1898).

Il procedimento da seguire in tale verifica è affatto anal quello usato nei n. 6 e 7 per la formula di Waring; lasciamo p al Lettore lo sviluppo dei dettagli, non offrendo essi alcuna dif concettuale.

Si noti che il secondo membro della (E) è una funzione iso di grado t rispetto alle quantità $S_1, S_2, S_3, \ldots$; risultato anche prevedibile per chi conosce le nozioni sulle funzioni omogene

12. Applichiamo la formula (E) ad un caso particolare, ad e ricerca della formula che esprime s_6 in funzione delle S.

A tal uopo si dovrà risolvere anzitutto, in numeri interi p o nulli, l'equazione

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 + 5k_5 + 6k_6 = 6;$$

le soluzioni sono indicate nel prospetto seguente:

k_1	6	4	3	2	2	1	1	0	0	0	0
k_2	0	1	0	2	0	1	0	3	1	0	0
k_3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2	0
k_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
k_5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
k_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Dalla formula (E) abbiamo allora:

$$s_6 = \frac{1}{|\underline{6}}S_1^6 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|\underline{4}}.S_1^4.S_2 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{|\underline{3}}.S_1^3.S_3 +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{|\underline{2}\,.\,|\underline{2}}.S_1^2.S_2^2 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{|\underline{2}}.S_1^2.S_4 - \frac{1}{2\,.\,3}.S_1.S_2.$$

$$+ \frac{1}{5}.S_1.S_5 - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{|\underline{3}}.S_2^3 + \frac{1}{2\,.\,4}.S_2.S_4 + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{|\underline{2}}.S_3^2 - \frac{1}{6}S$$

$$= \frac{1}{|\underline{6}}\cdot\Big\{S_1^6 - 15\,.\,S_1^4.S_2 + 40\,.\,S_1^3.S_3 + 45\,.\,S_1^2.S_2^2 - 90\,.\,S_1^2.S_4$$

$$- 120.S_1.S_2.S_3 + 144.S_1.S_5 - 15.S_2^3 + 90.S_2.S_4 + 40.S_3^2 - 120$$

Paolo Cattan

SOPRA UNA NOTEVOLE SOMMATORIA

1. Ci proponiamo di calcolare, in funzione di n e di k, il valore della somma

$$S_k = \sum_{r=1}^{r=n} r^k x^r. \tag{1}$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned} S_0 &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n, \\ S_1 &= x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ S_k &= x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \dots + n^k x^n, \\ S_{k+1} &= x + 2^{k+1} x^2 + 3^{k+1} x^3 + \dots + n^{k+1} x^n. \end{aligned} \tag{1'}$$

Se, nella (1), calcoliamo, in ambo i membri, la derivata rispetto a x, avremo

$$S'_k = 1 + 2^{k+1} x + 3^{k+1} x^2 + \dots + n^{k+1} x^{n-1},$$

e deduciamo pertanto

$$xS'_k = S_{k+1}. \tag{2}$$

Per particolari valori di k, dalla (2) si trae

$$\begin{aligned} xS'_0 &= S_1, \\ xS'_1 &= S_2, \\ xS'_2 &= S_3, \\ &\dots \end{aligned} \tag{a_1}$$

e da queste, derivando, si deduce:

$$\begin{aligned} S'_1 &= S'_0 + xS''_0, \\ S_2 &= xS'_0 + x^2 S''_0; \end{aligned} \tag{a_2}$$

$$\begin{aligned} S'_2 &= S'_0 + 3xS''_0 + x^2 S'''_0, \\ S_3 &= xS'_0 + 3x^2 S''_0 + x^3 S'''_0; \end{aligned} \tag{a_3}$$

e così via.

Posto, in generale,

$$S_k = xS'_0 + c_{k,2} x^2 S''_0 + c_{k,3} x^3 S'''_0 + c_{k,4} x^4 S_0^{(4)} + \dots, \tag{3}$$

risulta

$$S'_k = S'_0 + xS''_0 + 2c_{k,2}xS''_0 + c_{k,2}x^2S'''_0 + 3c_{k,3}x^2S'''_0 +$$
$$+ c_{k,3}x^3S_0^{(4)} + 4c_{k,4}x^3S_0^{(4)} +$$

ossia

$$S'_k = S'_0 + (2c_{k,2} + 1)\, xS''_0 + (c_{k,2} + 3c_{k,3})\, x^2S_0''' +$$
$$+ (c_{k,3} + 4c_{k,4})\, x^3S_0^{(4)} + \ldots$$

sicchè

$$S_{k+1} = xS'_0 + (2c_{k,2} + 1)\, x^2S''_0 + (c_{k,2} + 3c_{k,3})\, x^3S'''_0 +$$
$$+ (c_{k,3} + 4c_{k,4})\, x^4S_0^{(4)} + \ldots .$$

Dal confronto delle formole (3) e (4) risulta che, trovati i ficienti di xS'_0, $x^2S''_0$, $x^3S'''_0$, ... nell'espressione di S_k, si posson mediatamente scrivere gli analoghi coefficienti per S_{k+1}; si ha, i

$$\begin{aligned} c_{k+1,1} &= c_{k,1} = 1, \\ c_{k+1,2} &= c_{k,1} + 2c_{k,2}, \\ c_{k+1,3} &= c_{k,2} + 3c_{k,3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_{k+1,\,r+1} &= c_{k,r} + (r+1)\, c_{k,r+1}; \end{aligned}$$

quest'ultima si può assumere come formula ricorrente per il c dei coefficienti c. È agevole la compilazione del *triangolo* dei ficienti c:

(S_1) ...	1						
(S_2) ...	1	1					
(S_3) ...	1	3	1				
(S_4) ...	1	7	6	1			
(S_5) ...	1	15	25	10	1		
(S_6)	1	31	90	90	65	15	1
(S_7)	1	63	301	350	140	21	1
...	...	...	...	...	...	...	...

Si avrà dunque, ad esempio,

$$S_5 = xS'_0 + 15x^2S''_0 + 25x^3S'''_0 + 10x^4S_0^{(4)} + x^5S_0^{(5)}.$$

2. Procediamo al calcolo delle $S_0, S'_0, S''_0, S'''_0, \ldots$

Si ha, intanto,

$$S_0 = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}.$$

Posto

$$x^{n+1} - x = \varphi,$$

calcoliamo $S_0^{(r)}$ mediante la nota formola di Leibniz per il calcolo della derivata d'un prodotto. Si ha

$$S_0^{(r)} = D_r\left(\varphi \cdot \frac{1}{x-1}\right) = \varphi^{(r)} \cdot \frac{1}{x-1} + \binom{r}{1}\varphi^{(r-1)} D_1\left(\frac{1}{x-1}\right) +$$
$$+ \binom{r}{2}\varphi^{(r-2)} D_2\left(\frac{1}{x-1}\right) + \ldots + \varphi D_r\left(\frac{1}{x-1}\right);$$

e, siccome

$$D_1\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{1}{(x-1)^2},$$
$$D_2\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{2}{(x-1)^3},$$
$$D_3\left(\frac{1}{x-1}\right) = -\frac{3!}{(x-1)^4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_r\left(\frac{1}{x-1}\right) = (-1)^r \frac{r!}{(x-1)^{r+1}},$$

si avrà

$$S_0^{(r)} = \frac{\varphi^{(r)}}{x-1} - \binom{r}{1}\frac{\varphi^{(r-1)}}{(x-1)^2} + \binom{r}{2}\frac{2!\,\varphi^{(r-2)}}{(x-3)^3} + \ldots + (-1)^r \frac{r!\,\varphi}{(x-1)^{r+1}}, \quad (6)$$

ossia

$$S_0^{(r)} = \sum_{\nu=0}^{\nu=r} (-1)^\nu \frac{\nu!\,\varphi^{r-\nu}}{(x-1)^{\nu+1}}. \quad (6')$$

In particolare si ha

$$S'_0 = \frac{\varphi'}{x-1} - \frac{\varphi}{(x-1)^2},$$
$$S'' = \frac{\varphi''}{x-1} - \frac{2\varphi'}{(x-1)^2} + \frac{2!\,\varphi}{(x-1)^3},$$
$$S'''_0 = \frac{\varphi'''}{(x-1)} - \frac{3\varphi''}{(x-1)^2} + \frac{3\,.\,2!\,\varphi'}{(x-1)^3} - \frac{3!\,\varphi}{(x-1)^4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si ha, infine,

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi \;\; = x^{n+1} - x \\
\varphi' \; = (n+1)\,x^n - 1 \\
\varphi'' = (n+1)\,nx^{n-1} \\
\varphi''' = (n+1)\,n\,(n-1)\,x^{n-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi^{(\nu)} = (n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-\nu+2)\,x^{n-\nu+1}
\end{array}\right\} \quad (7)$$

Applicando queste formole si può facilmente esprimere $S_1, S_2, S_3, \ldots,$ in funzione di n e k.

* * *

3. È interessante vedere a che si riducono le formole trova
caso particolare, assai notevole, in cui sia $x=1$. Allora le s
$S_1, S_2, S_3, \ldots$ riduconsi, evidentemente, alle somme $s_1, s_2, s_3, \ldots$
delle potenze simili dei primi n numeri naturali.

Per calcolare le s mediante le formole trovate, è necessari
vare i veri valori che assumono le derivate successive di S_0, q
$x=1$.

A tale uopo è necessario ricorrere al teorema di De l'Ho
e applicarlo ai singoli termini della (6). Si avrà

$$\lim_{x=1} S_0^{(r)} = \lim_{x=1} \left\{ \varphi^{(r+1)} \left[1 - \binom{r}{1}\frac{1}{2!} + \binom{r}{2}\frac{2!}{3!} - \binom{r}{3}\frac{3!}{4!} + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots + (-1)^r \frac{r!}{(r+1)!} \right]\right.$$
$$= \lim_{x=1} \left\{ \frac{\varphi^{(r+1)}}{r+1} \left[\binom{r+1}{1} - \binom{r+1}{2} + \binom{r+1}{3} - \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots + (-1)^r \binom{r+1}{r+1} \right]\right.$$

ossia, essendo com'è ben noto

$$-\binom{r+1}{0} + \binom{r+1}{1} - \binom{r+1}{2} + \binom{r+1}{3} - \ldots + (-1)^r \binom{r+1}{r+1}$$

risulta

$$\lim_{x=1} S_0^{(r)} = \lim_{x=1} \frac{\varphi^{(r+1)}}{r+1},$$

ossia, per la (7),

$$\lim_{x=1} S_0^{(r)} = \frac{(n+1)\,n\ldots(n-r+2)}{r+1}.$$

A questa formola possiamo anche dar la forma

$$\lim_{x=1} S_0^{(r)} = r!\binom{n+1}{r+1}.$$

Osservazione. — Siccome, d'altra parte, si ha

$$S'_0 = 1 \,.\, 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1},$$
$$S''_0 = 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 3x + 3 \,.\, 4x^2 + \ldots + n(n-1)x^{n-2},$$
$$S'''_0 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4x + 3 \,.\, 4 \,.\, 5x^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)x$$

applicando la (8) avremo

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n-1)=\frac{(n+1)n(n-1)}{3},$$

$$1.2.3+2.3.4+\ldots+n(n-1)(n-2)=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4},$$

. . . .

4. Dalla (8') e dalle formole stabilite al num. 1 risulta

$$s_1=\binom{n+1}{2}$$

$$s_2=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{3}$$

$$s_3=\binom{n+1}{2}+6\binom{n+1}{3}+6\binom{n+1}{4}$$

. . . .

e, in generale

$$s_k=c_{k,1}\binom{n+1}{2}+2!\,c_{k,2}\binom{n+1}{3}+3!\,c_{k,3}\binom{n+1}{4}+\ldots+k!\,c_{k,k}\binom{n+1}{k+1}, \quad (9)$$

ossia

$$s_k=\sum_{r=1}^{r=k} r!\,c_{k,r}\binom{n+1}{r+1}. \quad (9')$$

Posto

$$r!\,c_{k,r}=\mu_r, \qquad (r=1, 2, \ldots k) \quad (10)$$

la (9) diviene

$$s_k=\mu_1\binom{n+1}{2}+\mu_2\binom{n+1}{3}+\ldots+\mu_k\binom{n+1}{k+1}. \quad (11)$$

Possiamo assumere la formola (11) come formola ricorrente per il calcolo di $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ Risulta, infatti, che: per $n=1$, si ha

$$1^k=\mu_1\binom{2}{2},$$

da cui

$$\mu_1=1;$$

per $n=2$, si ha

$$1^k+2^k=\binom{3}{2}+\mu_2\binom{3}{3},$$

da cui

$$\mu_2=2^k-2;$$

per $n=3$, si ha

$$1^k+2^k+3^k=\binom{4}{2}+(2^k-2)\binom{4}{3}+\mu_3\binom{4}{4},$$

da cui

$$\mu_3=3^k-3\,.\,2^k+3,$$

e così di seguito.

Le formole trovate, per $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$, sono del tipo

$$r!\,c_{k,r}=\mu_r=r^k-\binom{r}{1}(r-1)^k+\binom{r}{2}(r-2)^k-\ldots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-}$$

Per dar ragione della generalizzazione fornita dalla (12), far vedere che le c, definite dalla (12), soddisfanno alla relazi corrente fondamentale (5). Applicando la (12) si ha infatti

$$(r+1)!\,c_{k,r+1}=(r+1)^k-\binom{r+1}{1}r^k+$$
$$+\binom{r+1}{2}(r-1)^k-\ldots+(-1)^r\binom{r+1}{r}$$

e ricorrendo poscia alla (5), si trova

$$c_{k+1,r+1}=\frac{1}{r!}\left[r^k-\binom{r}{1}(r-1)^k+\binom{r}{2}(r-2)^k-\ldots+(-1)^{r-1}\binom{}{}\right.$$
$$+\frac{r+1}{(r+1)!}\left[(r+1)^k-\binom{r+1}{1}r^k+\right.$$
$$+\binom{r+1}{2}(r-1)^k-\ldots+(-1)^r\binom{r+1}{r}$$

ossia

$$(r+1)!\,c_{k+1,r+1}=(r+1)\left\{(r+1)^k-\left[\binom{r+1}{1}-1\right]r^k+\right.$$
$$+\left[\binom{r+1}{2}-\binom{r}{1}\right](r-1)^k-\left[\binom{r+1}{3}-\binom{r}{2}\right](r-2)^k+\ldots$$

siccome poi

$$\binom{r+1}{1}-1=r,$$

$$\binom{r+1}{2}-\binom{r}{1}=\frac{r-1}{2}\binom{r}{1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{r+1}{\nu+1}-\binom{r}{\nu}=\frac{r-\nu}{\nu+1}\binom{r}{\nu},$$

la precedente diviene

$$(r+1)!\, c_{k+1,r+1} = (r+1)^{k+1} - \binom{r+1}{1} r^{k+1} + $$
$$+ \binom{r+1}{2} (r-1)^{k+1} - \ldots + (-1)^r \binom{r+1}{r},$$

che è dello stesso tipo della (12). Resta dunque provata che tutti i coefficienti $c_{k,r}$ s'ottengono mediante la (12).

Osserviamo che la (12) si può scrivere

$$\mu_r = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} (r-\varrho)^k \tag{12'}$$

sicchè la (11) diviene

$$s_k = \sum_{r=1}^{r=k} \left[\sum_{\varrho=0}^{\varrho=r} (-1)^\varrho \binom{r}{\varrho} (r-\varrho)^k \right] \binom{n+1}{r+1}, \tag{13}$$

ossia, se vogliamo,

$$s_k = \binom{n+1}{2} + (2^k - 2)\binom{n+1}{3} + (3^k - 3\,.\,2^k + 3)\binom{n+1}{4} +$$
$$+ (4^k - 4\,.\,3^k + 6\,.\,2^k - 4)\binom{n+1}{5} + \ldots .$$

Le formole trovate ci dànno modo di dedurre delle notevoli identità. Così, per esempio, siccome

$$c_{k,k} = 1$$
$$c_{k,k-1} = \frac{k(k-1)}{2},$$

dalla (12) si ricava

$$k^k - \binom{k}{1}(k-1)^k + \binom{k}{2}(k-2)^k - \ldots + (-1)^{k-1} k = k!,$$

$$(k-1)^k - \binom{k-1}{1}(k-2)^k + \binom{k-1}{2}(k-3)^k - \ldots + (-1)^k (k-1) = \frac{k!\,(k-1)}{2}.$$

R. Vercellin.

IL METODO ARITMETICO

nel caso irreducibile dell'equazione di 3° grado (*)

L'Algebra ha potuto risolvere, con metodi particolari, le e
zioni solo fino al 4° grado; l'Aritmetica alla sua volta se è ca

---

(*) Questa memoria fu presentata alla R. Accademia dei Lincei e per incarico dei so
serna e Volterra fu data ad esaminare al prof. Vacca che presentava la seguente

RELAZIONE.

Il cav. ing. prof. FILIPPO NICITA, nella sua Memoria " il metodo aritmetico nel cas
ducibile dell'equazione di terzo grado " osserva che nella equazione di 3° grado $x^3 =$
in cui $p > 0$, $0 < q < \sqrt{\frac{4p^3}{27}}$ le tre radici sono reali, due negative ed una positiva.

Tale radice a soddisfa alla relazione.

Da questa semplice considerazione, che l'Autore dimostra con metodo assai semplice
mentare, l'A. parte per esporre un metodo di calcolo numerico della radice positiva a de
analogo a quello adoperato ordinariamente per calcolare la radice cubica di un numero d

L'A. giustamente osserva (nella sua memoria) che il suo calcolo non è più complicato d
che occorre per l'estrazione della radice cubica di un numero dato.

Merita però considerazione il fatto, che se l'A. avesse esteso il suo metodo ad una equ
di grado n, sarebbe giunto al metodo di risoluzione numerica fondato sulla regola di
Horner, il quale può anch'esso a sua volta considerarsi come una semplice estensione d
gola di estrazione della radice di ordine n, da un numero assegnato.

Questo modo aritmetico di considerare la risoluzione delle equazioni, sebbene sia tan
plice, toglie però ogni interesse algebrico allo studio delle equazioni di grado qualunque

Esso si trova esposto già nelle opere di un matematico cinese del secolo XIV (cfr. la
lazione: " Le scienze dell'Estremo Oriente ", in Atti della Soc. per il Progresso delle
Roma, Ottobre, 1911) e non diede in origine, come forse non avrebbe dato fra noi, a studi imp

Invece i primi grandi algebristi, tutti italiani, Ludovico Ferrari, Scipione Ferro, Nic
taglia, G. Cardano, Rafaele Bombelli .... trovarono invece degna di meditazione ed amm
la risoluzione algebrica delle equazioni di terzo e quarto grado, la quale diede poi orig
teorie moderne eleganti e feconde dell'algebra, le quali possono considerarsi come la
continuazione del libro X degli " Elementi di Euclide.... ".

La Memoria dell'Ing. FILIPPO NICITA, pur non sembrando adatta, per la sua indole a
pubblicata nelle Memorie della R. Accademia dei Lincei, meriterebbe tuttavia di essere pu
in qualche periodico di matematica elementare, per la semplicità della esposizione e la c
dei calcoli, opportunamente illustrati da numerosi esempi.

Roma, 22 Marzo 1915.

Firmato: GIOVANNI VA

I sottoscritti ringraziano il prof. Vacca per l'aiuto loro dato colla disamina storica
sente lavoro e propongono all'Accademia di inviare un ringraziamento all'Autore.

Firmati: P. BLASERNA, V. VOLTERRA, *relator*

Di questa relazione il Segretario Ing. E. MANCINI, d'ordine del Presidente, dette co
zione all'A. con la seguente lettera:

Roma, 17 Aprile

Chiarissimo Sig. Professore,

Sono ben lieto di rimetterle una copia della relazione sulla Sua Memoria " Il metodo
tico nel caso irreducibile dell'equazione di terzo grado ". Come appare dalla medesim
procedimento venne molto apprezzato dai Commissari, così uno di essi si interessò di un
storica, di cui è fatto cenno nella predetta Relazione.

Se ella troverà modo che il suo scritto venga pubblicato in qualche periodico di ma
elementare, come ad esempio in quello che si pubblica a Livorno dal prof. Lazzeri, ne t
vantaggio tutti gli studiosi che si interessano degli obbietti didattici della Scienza.

di ottenere il valore numerico della radice di tutte le equazioni del 1° e 2°, è ancora inadatta ad ottenere quella delle equazioni del 3° e 4° grado, quando cadono nel caso così detto *irreducibile*.

Vero è che non mancano metodi, come quelli di Lagrange, di Newton o di Ruffini-Horner, coi quali si può ricavare questo valore; ma le difficoltà di questi metodi, di carattere generale, è così sproporzionata a quella dei metodi algebrici, che possiamo dire come effettivamente fin oggi manca per la risoluzione numerica delle equazioni del 3° e 4° grado un metodo il cui carattere elementare e particolare faccia riscontro a quella del corrispondente metodo di risoluzione algebrica.

Scopo del presente lavoro è quello di riparare a tale deficienza.

È noto che quando l'equazione di terzo grado cade nel caso irreducibile, le radici sono tutte e tre reali.

Sia

$$x^3 - px + q = 0$$

l'equazione, le cui radici sono a, b e c.

Giacchè il coefficiente del termine x^2 è zero, una o due radici devono essere negative, senza di che non potrebbe sussistere la relazione $a + b + c = 0$.

Quando la radice negativa è una sola, ad esempio c, l'equazione piglia la forma suddetta $x^3 - px + q = 0$.

Quando invece le radici negative sono due, come a e b, l'equazione stessa si presenta sotto l'altra forma:

$$x^3 - px - q = 0.$$

Difatti in questo caso l'equazione risulta dal prodotto

$$(x + a)(x + b)(x - c) = 0$$

che sviluppato dà:

$$x^3 - (-a - b + c)x^2 + (ab - ac - bc)x - abc = 0.$$

E dovendo essere $-a - b + c = 0$, ossia $c = a + b$, sostituendo il valore di c, si avrà:

$$x^2 - (a^2 + ab + b^2)x - ab(a + b) = 0.$$

Facendo

$$a^2 + ab + b^2 = p, \qquad \text{e} \qquad ab(a + b) = q,$$

sarà, come abbiamo detto

$$x^3 - px - q = 0.$$

Questa sarà la forma dell'equazione di 3° grado, che formerà oggetto del presente studio, allo scopo di trovare un metodo aritmetico elementare atto a calcolare con qualunque approssimazione, una delle radici dell'equazione medesima. E delle tre radici $-a$, e $a+b$, quella che ci proponiamo di calcolare sarà precisamente a cioè quella che oltre ad essere la più grande è anche la positi

Osserviamo anzitutto che in detta equazione a tre radici r il valore del termine q dovrà essere compreso entro limiti dete nati, di cui uno dipende dal valore di p.

Infatti q non può essere minore di zero, perchè diversamente rebbe ad essere cambiato il segno della radice.

Non può essere maggiore di $\sqrt{\frac{4p^3}{27}}$, perchè allora l'equazione metterebbe non più tre radici reali, ma una reale e due immagin ciò che è contrario alla nostra ipotesi.

In secondo luogo bisognerà studiare il modo con cui varia valori della radice $a+b$ al variare di q, per potere determinare limiti non troppo distanti tra loro, entro cui dovrà trovarsi la r stessa, in modo che tali limiti dipendano dal valore di p e sian dipendenti da quello di q.

Scriviamo l'equazione proposta sotto la forma:

$$x^3 - px = q,$$

e si abbia un'altra equazione in cui p abbia lo stesso valore precedente, invece sia $Q > q$, tale che $Q = q + R$, cioè

$$y^3 - py = q + R$$

le cui radici siano $-a'$, $-b'$ e $a'+b'$.

Sottraendo dalla seconda la prima, sarà:

$$y^3 - x^3 - p(y-x) = R.$$

Essendo

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + yx + x^2),$$

sostituendo, avremo:

$$(y-x)\{(y^2 + yx + x^2) - p\} = R.$$

Sostituendo in questa equazione ad y il valore $a'+b'$ e ad valore $a+b$, avremo ancora:

$$\{(a'+b') - (a+b)\}\{(a'+b')^2 + (a'+b')(a+b) + (a+b)^2 - p\} =$$

Essendo $(a'+b')^2 - p = a'b'$, sarà pure:

$$\{(a'+b') - (a+b)\}\{(a'+b')(a+b) + (a+b)^2 + a'b'\} = R.$$

Ora, essendo i termini dentro la seconda parentesi grande positivi, e positivo anche R, sarà positiva la differenza $(a'+b') - ($ quindi la radice $(a'+b')$ della equazione $y^3 - py - (q+R) = 0$, maggiore della radice $(a+b)$ della equazione $x^3 - px - q = 0$.

Da ciò deduciamo che se in una equazione della forma $x^3-px-q=0$, si fa rimanere inalterato il coefficiente p, e si aumenta il termine q, anche il valore della radice $(a+b)$ aumenta e viceversa.

Siccome però il più piccolo valore di q, come abbiamo visto, è zero, così il più piccolo valore della radice, per questo valore di q, sarà $x=\sqrt{p}$, perchè in questo caso l'equazione diventa:

$$x^3-px=0.$$

Questo valore $x=\sqrt{p}$ è dunque il minimo che può avere la radice $(a+b)$ dell'equazione $x^3-px-q=0$, e tale valore corrisponde al valore minimo di q, cioè $q=0$.

Viceversa rimanendo inalterato il coefficiente p ed aumentando il valore di q, il valore della radice stessa $(a+b)$ aumenterà pure.

Però, siccome il massimo valore di q, come abbiamo visto, è $\sqrt{\frac{4p^3}{27}}$, così basterà, per ricavare il limite massimo della radice, fare $q=\sqrt{\frac{4p^3}{27}}$ nell'equazione proposta, che diventa così:

$$x^3-px-\sqrt{\frac{4p^3}{27}}=0.$$

In questo caso la formola detta di Cardano si presta a determinare detto valore, che è:

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3}{27}}}=2\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}=\sqrt{\frac{4}{3}p}$$

Quindi i limiti entro cui trovasi compresa la radice dell'equazione proposta, qualunque sia il valore di q, sono:

$$\sqrt{p} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}p},$$

bene inteso che q non può essere minore di zero, nè maggiore di $\sqrt{\frac{4p^3}{27}}$.

Che poi la radice compresa dentro questi limiti è precisamente $a+b$ e non $-a$ o $-b$, è facile provarlo direttamente.

Infatti, essendo $p=a^2+ab+b^2$, i valori di a e di b sono entrambi minore di $\sqrt{p}$, quindi tanto l'una quanto l'altra non può essere compresa fra detti limiti, ma dovendovene essere una, essa sarà precisamente $(a+b)$.

I limiti trovati per questa radice essendo non troppo distanti tra loro forniscono con molta facilità una prima approssimazione della radice stessa, massime quando questa è formata da una sola cifra.

Nel caso però in cui la radice si compone di più cifre, è ne sario sapere calcolare successivamente ciascuna di esse, allo s di potere nei valori non esatti ottenere quella approssimazione si vuole; di modo che a qualunque punto in cui viene ferma calcolo, coll'ultima cifra si ottiene il valore della radice a men una unità per difetto dell'ordine a cui appartiene l'ultima stessa.

Del resto, è noto, che in qualunque caso, il valore della rad compreso sempre fra quei due numeri consecutivi, che rendono positivo, l'altro negativo la funzione:

$$x^3 - px - q.$$

Esaminiamo ora i diversi casi che possono presentarsi della e zione proposta; e siccome i limiti da noi trovati pel valore radice sono $\sqrt{p}$ e $\sqrt{\frac{4}{3}p}$, entrambi dipendenti solo dal coefficien così i diversi casi da esaminare li faremo dipendere dai divers lori che ha il coefficiente medesimo.

1° Caso. - **Il valore di p è compreso tra 1 e 100.** — Per $p =$ radice e compresa tra $\sqrt{1}$ e $\sqrt{\frac{4}{3}}$. Per $p = 100$ essa è compres $\sqrt{100}$ e $\sqrt{\frac{400}{3}}$. Quindi per p compreso tra 1 e 100 la radice compresa tra 1 e $\sqrt{\frac{400}{3}}$, cioè sarà formata da una sola cifra, può arrivare anche a due cifre, solo coi due numeri 10 e 11.

Per trovare dunque il valore della radice, basterà conoscer radice quadrata intera di p a meno di una unità per difetto radice quadrata intera di $\frac{4}{3}p$ a meno di una unità per eccess le due cifre trovate sono consecutive, la minore è il valore radice a meno di una unità per difetto e la maggiore a meno d unità per eccesso. Se poi le due cifre trovate non sono consec bisognerà sostituire nella funzione $x^3 - px - q$ le cifre intern Il valore della radice sarà compresa fra le due cifre successiv rendono la minore negativa e la maggiore positiva la funzion desima. La prima sarà il valore della radice a meno di una per difetto, la seconda a meno di una unità per eccesso.

I valori non troppo distanti che si ottengono per la radice a mezzo dei detti limiti sono indipendenti dal valore di q, il del resto, può variare in questo primo caso da zero a

$$\sqrt{\frac{4p^3}{27}} = 38,4900179\ldots.$$

Daremo ora qualche esempio per chiarire meglio la regola su esposta.

1°. Sia l'equazione

$$x^3 - 26x - 8 = 0$$

x è compresa tra $\sqrt{26} = 5$ a meno di una unità per difetto e

$$\sqrt{\frac{4}{3} \cdot 26} = \sqrt{34\,{}^2/_3} = 6$$

a meno di una unità per eccesso.

Sostituendo infatti questi due valori nella funzione $x^3 - 26x - 8$, per $x = 5$ diventa negativa e per $x = 6$ positiva, si avrà cioè:

per $\quad x = 5, \qquad 125 - 26 \times 5 - 8 = -12$

per $\quad x = 6, \qquad 216 - 26 \times 6 - 8 = +52$

quindi il valore della radice a meno di una unità per difetto è 5.

2°. Sia l'equazione

$$x^3 - 17x - 10 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{17} = 4 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 17} = \sqrt{22\,{}^2/_3} = 5.$$

Sostituendo infatti si avrà

per $\quad x = 4 \qquad 64 - 68 - 10 = -14$

per $\quad x = 5 \qquad 125 - 85 - 10 = +30.$

Il valore della radice a meno di una unità per difetto è 4.

3°. Sia l'equazione

$$x^3 - 22x - 14 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{22} = 4 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 22} = \sqrt{29\,{}^1/_3} = 6.$$

In questo caso le due cifre trovate 4 e 6 non essendo consecutive, bisognerà provare la cifra intermedia 5, la quale sostituita nella funzione dà

$$125 - 22 \times 5 - 14 = +1.$$

La radice quindi più specificatamente è compresa tra 4 e 5, infatti sostituendo il 4 si avrà

$$64 - 22 \times 4 - 14 = -38.$$

4°. Sia l'equazione

$$x^3 - 60x - 40 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{60} = 7 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,60} = \sqrt{80} = 9.$$

Anche in questo caso le due cifre trovate 7 e 9 non sono co cutive; provando la cifra intermedia 8 sarà:

$$512 - 60 \times 8 - 40 = -8.$$

La radice è compresa tra 8 e 9.

5°. Sia l'equazione

$$x^3 - 96x - 100 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{96} = 9 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,.\,96} = \sqrt{128} = 12.$$

Essendo la radice compresa tra 9 e 12, bisognerà anche pro le cifre intermedie 10 e 11

per $x = 10$ la funzione diventa $1000 - 96 \times 10 - 100 = -$ (
per $x = 11$ id. id. $1331 - 96 \times 11 - 100 = +1$7

La radice quindi, più specificatamente è compresa tra 10 e

6°. Sia ancora l'equazione

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{7} = 2 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,.\,7} = \sqrt{9\,{}^1\!/_3} = 4.$$

La cifra intermedia fra 2 e 4 è 3, la quale sostituita nella zione, dà:

$$27 - 7 \times 3 - 6 = 0$$

quindi in questo caso la cifra intermedia 3 è il valore esatto (radice.

7°. Sia l'equazione

$$x^3 - 21x - 20 = 0$$

x è compresa tra

$$\sqrt{21} = 4 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,.\,21} = \sqrt{28} = 6.$$

Provando la cifra intermedia 5, si ha:

$$125 - 21 \times 5 - 20 = 0$$

quindi anche in questo caso si ottiene colla cifra intermedia un lore esatto della radice, che è 5.

8°. Sia l'equazione

$$x^3-76x-240=0$$

la x è compresa tra

$$\sqrt{76}=8 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 76}=\sqrt{101\,^1/_3}=11.$$

Sostituendo nella funzione ciascuna delle due cifre intermedie 9 e 10, troviamo:

$$\text{per} \quad x=9 \quad 729-76\times 9-240=-195$$
$$\text{per} \quad x=10 \quad 1000-76\times 10-240=0.$$

Quindi in questo caso, come nei due precedenti esempi, si ottiene il valore esatto della radice, senza bisogno di ricorrere a calcoli lunghi e complicati.

Qui il valore esatto della radice è 10.

2° Caso. - **Il valore di p è compreso tra 100 e 10000.** — Per $p=100$ la radice è compresa tra $\sqrt{100}=10$ e $\sqrt{\frac{400}{3}}=11{,}56$, per $p=10000$ essa è compresa tra $\sqrt{10000}=100$ e $\sqrt{\frac{40000}{3}}=115{,}6$, quindi per p compresa tra 100 e 10000, la radice sarà compresa tra 10 e 115,6, cioè sarà formata da due cifre, ma che possono arrivare a tre solo pei numeri che vanno da 100 a 115; sarà in altri termini composta da decine (che possono arrivare fino ad 11) e da unità.

Per trovare la cifra delle decine basterà dividere per 100 il coefficiente p e trovare come nel primo caso i due limiti

$$\sqrt{\frac{p}{100}} \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{p}{100}}$$

entro cui sarà compresa la cifra delle decine della radice. Infatti per la radice x la cifra delle decine è $\frac{x}{10}$. Chiamando A questa cifra sarà $x=10\text{A}$.

Sostituendo questo valore nell'equazione proposta, sarà:

$$1000\text{A}^3-10p\text{A}-q=0$$

e dividendo per 1000, si avrà

$$\text{A}^3-\frac{p}{100}\text{A}-\frac{q}{1000}=0$$

quindi per ciò che si è detto avanti, la cifra A delle decine è compresa tra $\sqrt{\frac{p}{100}}$ e $\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{p}{100}}$. Analogamente a quanto si è detto nel

1° caso, se le due cifre trovate differiscono di una sola unità, la nore è la cifra delle decine a meno di una unità per difetto. Se le due cifre trovate differiscono per più di una unità, bisognerà vare nella funzione anche la cifra o le cifre intermedie per dete uare quella che è ugnale alla cifra A delle decine a meno di unità per difetto.

Trovata la cifra delle decine a meno di una unità per difetto a trovare quella delle unità.

Prima però di passare alla ricerca di questa seconda cifra, occ ricordare il procedimento usato dall'aritmetica per estrarre la ra cubica da un numero formato da più di tre e meno di sette cioè quei numeri la cui radice si compone di due sole cifre, de ed unità.

È noto che per trovare la cifra delle decine basterà scompor numero dato Q in due gruppi di tre cifre ciascuno (il grupp sinistra potrà anche avere due od anche una cifra soltanto) e tro quale è il massimo cubo perfetto contenuto nel gruppo di sini La cifra delle decine sarà data dalla radice di questo cubo perf

Sia A questa cifra trovata ed m la cifra incognita delle u $10A+m$ sarà la radice cubica di Q a meno di una unità per dif cioè $(10A+m)^3$ sarà il massimo cubo contenuto in Q. Indicando c il resto sarà:

$$Q=(10A+m)^3+R$$

e sviluppando:

$$Q=1000A^3+300A^2m+30Am^2+m^3+R$$

da cui si ricava

$$m=\frac{Q-1000A^3-30Am^2-m^3-R}{300A^2}$$

e dividendo per 100 numeratore e denominatore, sarà ancora:

$$m=\frac{\frac{Q}{100}-10A^3-\frac{3Am^2}{10}-\frac{m^3}{100}-\frac{R}{100}}{3A^2}.$$

Trascurando i termini $\frac{3Am^2}{10}$, $\frac{m^3}{100}$ ed $\frac{R}{100}$ perchè molto picc confronto agli altri, avremo infine

$$m=\frac{\frac{Q}{100}-10A^3}{3A^2}=\frac{N}{D}.$$

Questa formola algebrica è precisamente quella che riassun regole aritmetiche per l'estrazione della radice cubica, o megli la determinazione della cifra delle unità della radice stessa.

Infatti scomponendo il numero dato Q in due gruppi di tre ciascuno, cominciando da destra, il termine $\frac{Q}{100}$ della formola è il numero che risulta dalle cifre del gruppo a sinistra, seguite dalla prima cifra del gruppo a destra, il termine A^3 è il massimo cubo contenuto nel gruppo di sinistra, quindi $10A^3$ è lo stesso cubo seguito da un zero; il termine $3A^2$ è il triplo quadrato della cifra delle decine.

Per eseguire l'operazione, dopo aver sottratto dalle cifre del gruppo a sinistra, seguite dalla prima cifra a sinistra del gruppo di destra, il cubo delle decine trovate, seguito da un zero, si divide il resto così ottenuto per il triplo quadrato della cifra delle decine stesse, il quoziente darà la cifra delle unità o una cifra più grande.

Per provarla la si scrive a destra della cifra trovata delle decine, si innalza al cubo il numero di due cifre così formato, e si tenta la sottrazione di questo cubo dal numero dato.

Se la sottrazione può farsi, la cifra data dal quoziente è giusta, se no la si diminuisce di una, due... unità e si ripete l'operazione fino a che la sottrazione può effettuarsi.

Si sono volute ricordare queste regole, perchè quelle da noi trovate per la calcolazione della radice dell'equazione di 3° grado, non differiscono quasi affatto da esse; di tal che può dirsi che le operazioni da eseguirsi pel calcolo della radice dell'equazione di 3° grado sono quelle stesse che si eseguono nella estrazione della radice cubica, salvo qualche lieve differenza.

Ripigliamo l'equazione proposta:

$$x^3 - px - q = 0,$$

che possiamo anche scrivere

$$x^3 - px = q.$$

Essendo A la cifra delle decine, che come abbiamo visto può arrivare fino ad 11, ed m quella incognita delle unità, la radice dell'equazione sarà $10A + m$ a meno di una unità per difetto, e quindi essendo $10A + m$, minore del vero valore della radice, sostituendolo al valore di x, nella equazione suddetta, dovrà essere

$$(10A + m)^3 - p(10A + m) = q - R$$

in cui R è il resto che si ottiene sottraendo dal valore di q, quello che diventa la stessa q, quando al vero valore della radice se ne sostituisce uno minore che è $10A + m$.

Sviluppando il cubo, l'equazione suddetta diviene

$$1000A^3 + 300A^2m + 30Am^2 + m^3 - 10pA - pm = q - R$$

da cui si ricava

$$m = \frac{q + 10pA - 1000A^3 - 30Am^2 - m^3 - R}{300A^2 - p}$$

e dividendo per 100

$$m = \frac{\frac{q}{100} + \frac{pA}{10} - 10A^3 - \frac{3Am^2}{10} - \frac{m^3}{100} - \frac{R}{100}}{3A^2 - \frac{p}{100}}.$$

Trascurando anche qui, perchè molto piccoli in confronto altri, i termini $\frac{3Am^2}{10}$, $\frac{m^3}{100}$ ed $\frac{R}{100}$, i quali, come si vede, sono stessi che si sono trascurati nella formola per la radice cubica, av

$$m = \frac{\frac{q}{100} + \frac{pA}{10} - 10A^3}{3A^2 - \frac{p}{100}} = \frac{N}{D}.$$

Confrontando questa formola coll'altra già trovata per la e zione della radice cubica, cioè:

$$m = \frac{\frac{q}{100} - 10A^3}{3A^2} = \frac{N}{D}$$

scorgiamo subito che dalla prima si può ricavare la seconda che si faccia $p = 0$. La estrazione della radice cubica quindi altro che la risoluzione di un caso particolare della equazion 3° grado, quel caso, cioè, in cui il coefficiente di x è zero, cioè

$$x^3 - 0 \times x - q = 0.$$

Da ciò possiamo conchiudere che il procedimento aritmetico giato sulla detta formola algebrica:

$$m = \frac{\frac{q}{100} + \frac{pA}{10} - 10A^3}{3A^2 - \frac{p}{100}}$$

per la risoluzione dell'equazione di 3° grado, non è altro che la neralizzazione del procedimento aritmetico usato per la estra della radice cubica. E di conseguenza, come la formola per la radice cubica fornisce la enunciazione della regola aritmetica per l'estrazione della radice stessa, così la formola ricavata dall'equazione di 3° grado, ci fornirà alla stessa maniera, la regola aritmetica elementare per calcolare la radice dell'equazione stessa.

Infatti, osserviamo che il procedimento su cui sono poggiate le due operazioni è perfettamente eguale, giacchè consiste in entrambe nel considerare la radice composta di due parti, decine ed unità; dopo conosciuta la cifra delle decine, viene calcolata quella delle unità per mezzo di ciascuna delle due formole.

Perciò abbiamo voluto richiamare la regola aritmetica per l'estrazione della radice cubica, per potere quasi colla stessa dicitura formulare la regola aritmetica per il calcolo della radice dell'equazione di 3° grado. Tale regola è la seguente:

Si scomponga il coefficiente p in due gruppi di due cifre ciascuno, il gruppo a sinistra può contenere anche una sola cifra, questo gruppo è perciò eguale a $\frac{p}{100}$. La cifra A delle decine sarà compresa tra $\sqrt{\frac{p}{100}}$ e $\sqrt{\frac{4}{3}\cdot\frac{p}{100}}$ e si determinerà come nel primo caso.

Per trovare la cifra m delle unità, si scompone il numero q pure in due gruppi, però di tre cifre ciascuno, a cominciare da destra; il gruppo di sinistra può contenere 2 o 1 cifra o mancare del tutto, come pure il gruppo di destra può contenere 3, 2 od anche una sola cifra.

Al numero formato (quando è possibile) dalle cifre del gruppo di sinistra della q, seguite dalla prima cifra a sinistra dell'altro gruppo $\left(\text{quale numero è } \frac{q}{100}\right)$, si aggiunge il prodotto delle decine A per il numero che risulta dalle cifre del gruppo a sinistra della p, seguita dalla prima cifra a sinistra dell'altro gruppo $\left(\frac{p}{10}\times A\right)$, e da questa somma si sottrae il decuplo del cubo delle decine ($10A^3$).

Questa differenza si divide per la differenza tra il triplo quadrato delle decine ($3A^2$) e il numero formato dalle cifre del gruppo a sinistra della p $\left(\text{cioè } \frac{p}{100}\right)$.

Il quoziente di questa divisione darà la cifra m delle unità od una cifra maggiore.

Per provarla la si scrive a destra della cifra trovata delle decine, e si innalza al cubo il numero di due cifre ($10A+m$), così formato; poi si tenta la sottrazione di questo cubo dalla somma dei due numeri, di cui uno è q e l'altro è il prodotto di p per il numero di due cifre trovate $10A+m$.

Se la sottrazione può farsi la cifra m data dal quoziente è gi
se no la si diminuisce di una, due... unità e si ripete l'operaz
fino a che la sottrazione può effettuarsi.

Vedremo in seguito come per comodità di calcolo conviene
tiplicare per 10 ciascuno dei termini q, $(10A + m)p$ e $(10A + m$

Ciò del resto non modifica la effettuazione o la non effettuaz
della sottrazione.

Applichiamo la superiore regola a qualche esempio, dove a
faremo vedere la maniera come conviene disporre l'operazione.

1°. Sia l'equazione

$$x^3 - 3683x - 2568 = 0.$$

Si scomponga in due gruppi di due cifre ciascuno il coefficien
che diventa 36.83; si scomponga nello stesso numero di gruppi
di tre cifre, il termine q, che diviene 2.568.

Col 1° gruppo della p, cioè con 38 si determinano, come nel p
caso i due limiti della cifra A delle decine, cioè

$$\sqrt{36} = 6 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 36} = \sqrt{48} = 7.$$

Essendo queste due cifre consecutive, la cifra delle decine è A
Si calcolino i termini $\frac{q}{100}$, $\frac{pA}{10}$, $3A^2$ e $\frac{p}{100}$ disponendoli nel
seguente

	$A = 6$	$x = 61$
$q:100$	2.5	2568
$+pA:10$	220.8	224663
	223.3	227231
$-10A^3$	216.0	226981
$N =$	7.3	$+250$
$3A^2$	108	
$-p:100$	36	
$D =$	72	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{73}{72} = 1$	

Giacchè la sottrazione può farsi (il resto è $+250$) la cifra
delle unità è giusta, quindi la radice dell'equazione è 61 a me
una unità per difetto.

2°. Sia l'equazione

$$x^3 - 83.72x - 12.426 = 0.$$

Fatta la scomposizione in gruppi della p e della q, si trova la cifra delle decine, che è compresa tra $\sqrt{83} = 9$ e $\sqrt{110\,{}^1/_3} = 11$, e più esattamente tra 9 e 10. Si disponga come segue:

	$A = 9$	$x = 92$
$q : 100$	12.4	12426
$+ pA : 10$	753.8	770224
	765.7	782650
$- 10A^3$	729.0	778688
$N =$	36.7	$+3962$
$3A^2$	$34\ 3$	
$- p : 100$	$8\ 3$	
$D =$	$16\ 0$	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{367}{160} = 2$	

La radice è perciò 92 a meno di una unità per difetto.

3°. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 18.32x - 2.524 = 0.$$

La cifra delle decine è compresa tra $\sqrt{18} = 4$ e $\sqrt{24} = 5$, perciò $A = 4$

	$A = 4$	$x = 43$
$q : 100$	2.5	2524
$+ pA : 10$	73.2	78776
	75.7	81300
$- 10A^3$	64.0	79507
$N =$	11.7	$+1793$
$3A^2$	$4\ 8$	
$- p : 100$	$1\ 8$	
$D =$	$3\ 0$	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{117}{30} = 3$	

Daremo ora qualche altro esempio, in cui la cifra delle unità ottenuta colla divisione è più grande di quanto deve essere

4°. Risolvere l'equazione

$$x^3 - 42.76x - 15.672 = 0$$

La cifra delle decine è compresa tra $\sqrt{42} = 6$ e $\sqrt{56} = 8$,
esattamente tra 6 e 7, perciò $A = 6$.

	$A = 6$	$x = 68$	$x = 67$
$q:100$	15 . 6	15 67 2	15672
$+pA:10$	256 . 2	29 076 8	286492
	271 . 8	30 644 0	302164
$-10A^3$	216 . 0	31 443 2	300763
$N =$	55 . 8	non si può	$+1401$
$3A^2$	10 8		
$-p:100$	4 2		
$D =$	6 6		
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{558}{66} = 8$		

Come si vede in questo esempio, la cifra delle unità ottenuta
divisione $\frac{558}{66}$ è 8. Però sostituendo il valore di 68 nella prova
scritta nella 3ª colonna, si vede che la sottrazione non può effett
quindi discende di una unità e si fa 67.

Provando con questa cifra la sottrazione può effettuarsi,
$x = 67$.

5°. Trovare la radice dell'equazione

$$x^3 - 73 . 90x - 624 = 0$$

qui $A = 8$ e il gruppo a sinistra della q è zero.

	$A = 6$	$x = 87$	$x = 86$
$q:100$	0 . 6	0624	0624
$+pA:10$	591 . 2	642930	635540
	591 . 8	643554	636164
$-10A^3$	512 . 0	658503	636058
$N =$	89 . 8	non si può	$+108$
$3A^2$	19 2		
$-p:100$	7 3		
$D =$	119		
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{898}{119} = 7$		

In quest'altro esempio la cifra delle unità risultante dalla
sione $\frac{898}{119}$ è 7. Però provandola si scorge che è grande, percl

può effettuarsi la sottrazione. Provando invece la cifra 6 cioè il numero 86 si vede che è giusta. Perciò $x = 86$.

Nei due esempi precedenti la terza e la quarta colonna sono state divise per mezzo di una doppia linea, e ciò solo come un segnale per indicare che la sottrazione non si è potuta effettuare e che si è dovuto diminuire di una unità la seconda cifra della radice.

3° Caso. - **Il valore di p è maggiore di 10.000.** — Il metodo esposto per il secondo caso è generale, cioè vale qualunque sia il numero delle cifre della radice dell'equazione, giacchè ciascuna a cominciare dalla terza si ottiene collo stesso metodo con cui si ottiene la seconda.

In ogni caso il numero delle cifre delle radice è uguale al numero dei gruppi di due cifre in cui può venire scomposto il coefficiente p. Il termine q può contenere però un numero di gruppi, di tre cifre, uguale, ma anche minore di quello dei gruppi della p, il suo valore però non potrà mai essere maggiore di $\sqrt{\frac{4p^3}{27}}$.

Daremo qui qualche esempio per chiarire meglio le regole.

1°. Sia l'equazione

$$x^3 - 21.43.21.42x - 38.210.930.604 = 0.$$

La radice avrà quattro cifre quanto sono i gruppi della p. La prima cifra è compresa tra $\sqrt{21} = 4$ e $\sqrt{\frac{4}{3}21} = \sqrt{28} = 6$ e più esattamente tra 5 e 6. Disponiamo l'operazione come al solito:

	A = 5	A = 53	A = 534	$x = 5346$
$q:100$	38.2	38.210.9	38.210.930.6	38.210.930.604
$+pA:10$	107.0	113.589.6	114.447.627.6	114.576.231.132
	145.2	151.800.5	152.658.558.2	152.787.161.736
$-10A^3$	125.0	148.877.0	152.273.304.0	152.787.161.736
N =	20.2	2.923.5	385.254.2	000
$3A^2$	75	8427	855468	
$-p:100$	21	2143	214321	
D =	54	6284	641147	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{202}{54} = 3$	$\frac{29235}{6284} = 4$	$\frac{3852542}{641147} = 6$	

2°. Nell'esempio che segue il numero dei gruppi del termine q è minore di quello della p. In questo caso si sostituiranno degli zeri al posto delle cifre mancanti.

Sia l'equazione

$$x^3 - 4566765x - 3548 = 0$$

che può scriversi

$$x^3 - 4.56.67.65x - 0.000.008.548 = 0.$$

Le cifre della radice saranno quattro, e la prima è 2.

	A = 2	A = 21	A = 213	$x = 2137$
$q:100$	0.0	0.000.0	0.000.008.5	0.000.008.
$+pA:10$	9.0	9.588.6	9.727.198.8	9.759.176.
	9.0	9.588.6	9.727.207.3	9.759.185.
$-10A^3$	8.0	9.261.0	9.663.597.0	9.759.185.
N =	1.0	327.6	63.610.3	000
$3A^2$	12	1323	136107	
$-p:100$	4	456	45667	
D =	8	867	90440	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{10}{8} = 1$	$\frac{3276}{867} = 3$	$\frac{636103}{90440} = 7$	

Come si vede dai due precedenti esempi il procedimento r
lo stesso qualunque sia il numero delle cifre della radice. Quin
venire calcolata in ogni caso la radice stessa con quella app
mazione che si vuole, giacchè basterà aggiungere tanti gruppi
zeri alla p ed altrettanto di tre zeri alla q, per quante cifre se
si vogliono ottenere nella radice, in modo che coi decimali s
raggiungere quella approssimazione desiderata, così come si p
nella estrazione della radice quadrata e nella radice cubica.

In ogni caso la parte intera della radice sarà composta di
cifre quanti sono i gruppi della parte intera del coefficiente p
parte decimale di tante cifre quanti sono i gruppi della parte
male del coefficiente stesso.

Prima di ultimare il presente studio è importante rilevare
relazione, anche praticamente, esiste tra il superiore procedim
quello usato per l'estrazione della radice cubica.

L'equazione data nel penultimo esempio è:

$$x^3 - 21432142x - 38.210.930.604 = 0.$$

Se invece il coefficiente p fosse stato uguale a zero, si sa
avuta l'equazione

$$x^3 - 0 \times x - 38.210.930.604 = 0$$

che può venire risoluta semplicemente colla estrazione della radice cubica dal numero 38.210.930.604.

Se ora estraiamo questa radice disponendo l'operazione perfettamente collo stesso ordine e sistema che abbiamo adottato nella calcolazione della radice dell'equazione di 3° grado, anche coll'avvertenza di porre degli zeri al posto dei valori dei termini $10pA$ e $p:100$, avremo:

	$A=3$	$A=33$	$A=336$	$x=3368$
$q:100$	38.2	38.210.9	38.210.930.6	38.210.930.604
$+pA:10$	00.0	00.000.0	00.000.000.0	00.000.000.000
	38.2	38.210.0	38.210.930.6	38.210.930.604
$10A^3$	27.0	35.937.0	37.933.056.0	38.204.652.032
$N=$	11.2	2.273.9	277.874.6	+ 6.278.572
$3A^2$	3 6	3267	3 38688	
$-p:100=0$	0 0	0000	0 00000	
$D=$	3 6	3267	3 38688	
$m=\frac{N}{D}$	$\frac{112}{36}=3$	$\frac{22739}{3267}=6$	$\frac{2778746}{338688}=8$	

Confrontando le due operazioni l'analogia che vi scorgiamo è tale da poterle considerare entrambe quasi perfettamente identiche, così che conoscendo l'operazione per l'estrazione della radice cubica, nessuna difficoltà si incontra nella operazione per il calcolo della radice dell'equazione di terzo grado. Quest'ultima operazione essendo tanto elementare quanto la prima, può finanche senza troppa difficoltà venire inseguata nello stesso corso in cui si insegna la estrazione della radice cubica. Non è esagerazione quindi il potere affermare come col metodo da noi esposto, lo studente possa saper risolvere l'equazione di 3° grado nel caso irriducibile, forse ancora prima di saper risolvere l'equazione di 2° grado, il compito gli sarà ancora più facile addestrandosi ad estrarre la radice cubica disponendo l'operazione nel modo sopra esposto.

Le sole piccole differenze che esistono, del resto, tra le due operazioni, non sono che le seguenti:

1°. Che oltre a scomporre il numero p in gruppi di due cifre, deve pure scomporsi in gruppi da tre cifre il termine q, eguagliando con zeri i due gruppi nel caso che il numero dei gruppi della q sia minore di quello della p.

2°. Che la prima cifra della radice dipende solo dal 1° gruppo p' della p, ed è compresa tra $\sqrt{p'}$ e $\sqrt{\frac{4}{3}p'}$, e piu esattamente è quella

cifra cifra che rende positiva l'espressione $\frac{q}{100}+\frac{pA}{10}-10A^3$, q
la cifra successiva la rende negativa.

3°. Che nello eseguire la divisione per ottenere la seconda
bisogna aggiungere al dividendo il prodotto della prima cifra tr
per il primo gruppo a sinistra della p, seguito dalla cifra a si
del gruppo seguente, e sottrarre dal divisore il solo primo gru
sinistra della stessa p.

Abbreviazione dell'operazione. — Come per l'estrazione della r
cubica, così per il calcolo della radice dell'equazione di 3° g
può venire abbreviata l'operazione, di modo che conoscendo un
numero di cifre della radice, se ne può calcolare il resto colla
divisione.

Sia la radice x composta di due parti B e C, di cui sia n
prima parte B. Si sostituisca il valore $x=B+C$ nella equa
proposta, si avrà:

$$B^3+3B^2C+3BC^2+C^3-pB-pC-q=0$$

da cui si ottiene:

$$C=\frac{q+pB-B^3}{3B^2-p}-\frac{3BC^2+C^3}{3B^2-p}.$$

Se per mezzo di questa formola si vuole calcolare la par
trascurando la seconda frazione, l'errore in più che si comme

$$E=\frac{3BC^2+C^3}{3B^2-p}.$$

Il valore massimo che può assumere l'errore E, sarà qua
valore di p è massimo, perchè allora il denominatore assume u
lore minimo. E siccome per un determinato valore della rad
la p può variare da $\frac{3}{4}x^2$ a x^2, così il massimo suo valore è que
timo, sostituendolo nel valore di E, sarà:

$$E=\frac{3BC^2+C^3}{3B^2-x^2}.$$

Inoltre, questo valore diventa tanto più grande quanto mag
è la parte C, è nello stesso tempo minore la parte B, giacch
nel solo numeratore e B è al quadrato nel denominatore.

Sia ora la radice x composta da n cifre, di cui ne siano n
prime k, e se ne vogliono calcolare le altre $n-k$.

Il numero più piccolo fra quelli composti di n cifre cioè quello che facciamo eguale alla parte B della radice, è l'unità seguita da $n-1$ zeri, cioè 10^{n-1}.

Ed il numero più grande fra quelli composti di $n-k$ cifre, cioè quello che facciamo eguale alla seconda parte C della radice, è 99999... in numero di $n-k$, quale numero è uguale a $10^{n-k}-1$.

Sostituendo ora questo valore massimo di C e questo valore minimo B nella precedente formola, avremo per il caso più sfavorevole:

$$E=\frac{3\times 10^{n-1}\times(10^{n-k}-1)^2+(10^{n-k}-1)^3}{3\,(10^{n-1})^2-(10^{n-1}+10^{n-k}-1)^2}.$$

Se in questa formola sostituiamo 10^{n-k} a $10^{n-k}-1$, noi non diminuiamo, ma aumentiamo insensibilmente il valore di E. Così la formola stessa più semplificata diviene:

$$E=\frac{3\times 10^{n-1}\times(10^{n-k})^2+(10^{n-k})^3}{3(10^{n-1})^2-(10^{n-1}+10^{n-k})^2}.$$

Sviluppando il quadrato ed eseguendo le riduzioni si ha:

$$E=\frac{3\times 10^{3n-2k-1}+10^{3n-3k}}{2\times 10^{2n-2}-2\times 10^{2n-2k-1}-10^{2n-2k}}.$$

Dividendo ambi i termini della frazione per $10^{3n-2k-1}$ si ha ancora

$$E=\frac{3+\frac{1}{10^{k-1}}}{2\times 10^{-n+2k-1}-\frac{2}{10^{n-k}}-\frac{1}{10^{n-1}}}.$$

Quando n, k, e $n-k$ non sono troppo piccoli, i termini

$$\frac{1}{10^{k-1}},\ \frac{2}{10^{n-k}}\ \text{e}\ \frac{1}{10^{n-1}}$$

sono piccolissimi in confronto agli altri, trascurandoli, il valore di E diviene infine:

$$E=\frac{3}{2\times 10^{-n+2k-1}}.$$

Acciocchè questo valore di E sia minore dell'unità bisogna che l'esponente $-n+2k-1$ di 10, al minimo sia uguale ad 1 perchè allora $E=\frac{3}{20}$.

Dalla relazione:

$$-n+2k-1=1,$$

ricaviamo:

$$k=\frac{n}{2}+1 \qquad \text{ed} \qquad n-k=\frac{n}{2}-1$$

quali risultati ci dicono che: *quando delle n cifre, di cui si comp la radice, ne sono note metà più una, colla sola divisione si potra calcolare tutte le altre.*

Così ad esempio se la radice si compone di 14 cifre e ne s conosciute $\frac{14}{2}+1=8$, colla divisione si calcoleranno le altre $\frac{14}{2}-1=$

Quindi nel caso di radici approssimate, dopo conosciuto un d numero n di cifre, colla divisione se ne calcoleranno altre $n-2$ l'ultima sarà a meno di una unità per difetto dell'ordine a cui partiene la cifra stessa. Conosciute queste $2n-2$ cifre, alla ste maniera si calcoleranno le altre $2n-4$ e così di seguito.

Da ciò possiamo formulare la regola da seguire per abbrevi l'operazione, regola identica anche questa a quella adoperata n estrazione della radice cubica:

Si calcoli la prima cifra come abbiamo esposto nel 1° caso.

Si calcoli la seconda cifra per mezzo della formola che dà il lore di m, e si provi.

Lo stesso si faccia per la terza cifra.

Conosciute le prime tre cifre, colla divisione si calcoli la 4ª.

Conosciute le prime quattro cifre, colla divisione si calcol la 5ª e 6ª.

Conosciute le prime sei cifre, colla divisione si calcolino le a quattro seguenti. Conosciute queste 10 cifre se ne calcoleranno altr poi $18+16=34$, poi $34+32=66$ e così di seguito.

Applichiamo questa regola a qualche esempio, proponendoci ciascuno di calcolare le prime dieci cifre della radice.

1°. Sia l'equazione

$$x^3-20x-8=0.$$

La prima cifra della radice è compresa tra

$$\sqrt{20}=4 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{4}{3}\cdot 20}=6.$$

Provando la cifra intermedia 5, si scorge che la radice stess più esattamente compresa tra 4 e 5. La parte intera della radice perchè il coefficiente 20 e compreso tra 1 e 100 (1° caso). Si dispo l'operazione col solito sistema:

	A = 4	A = 48	A = 47	A = 46	A = 466
$q:100$	8.0	8.000.0	8.000.0	8.000.0	8.000.000.0
$+pA:10$	80.0	96.000.0	94.000.0	92.000.0	93.200.000.0
	88.0	104.000.0	102.000.0	100.000.0	101.200.000.0
$-10A^3$	64.0	110.592.0	103.823.0	97.336.0	101.194.696.0
N =	24.0	non si può	non si può	2.664.0	5.304.0
$3A^2$	48			6348	65 14 68
$-p:100$	20			2000	200000
D =	28			4348	45 14 68
$m=\frac{N}{D}=$	$\frac{240}{28}=8$			$\frac{26640}{4348}=6$	$\frac{53040}{45\,14\,68}=0$

	A = 4660	A = 466011	$x = 4.660117479$
$q:100$	8.000 000.000.0	8.000.000.000.000.000.0	
$+pA:10$	93.200.000.000.0	93.202.200.000.000.000.0	
	101.200.000.000.0	101.201.862.317.159.331.0	
$-10A^3$	101.194.696.000.0	337 682 840 669.0	
N =	5.304.000.0		
$3A^2$	65 14 68 00	651 498 756 363	
$-p:100$	20 00 00 00	200 000 000 000	
D =	45 14 68 00	451 498 756 363	
$m=\frac{N}{D}=$	$\frac{53\,04\,0000}{45\,14\,6800}=1,1$	$\frac{3376828406690}{451498756363}=7,479$	

Come si vede in questa operazione, la divisione per ottenere la seconda cifra dà per quoziente 8, però provandola si scorge che la sottrazione non può effettuarsi lo stesso avviene per 7. Invece la cifra 6 è giusta, perchè la sottrazione può effettuarsi: il resto è 2.664.0 Quindi si continua l'operazione, calcolando la terza cifra che è pure 6, poi la 4ª che è 0, poi le altre fino a trovare

$$x = 4,660117479.$$

Volendo spingere ancora l'approssimazione, si calcoleranno le altre 8 cifre; poi colle 18 le altre 16 e così di seguito.

2°. Si voglia calcolare cos 20° fino alla decima cifra decimale.

È noto che tale valore è uguale ad una delle radici della equazione:

$$x^3 - 0,75x - 0,125 = 0.$$

Facendo $x = \frac{y}{10}$, riducendo si avrà

$$y^3 - 75y - 125 = 0.$$

La prima cifra della radice di quest'equazione è comprera

$$\sqrt{75} = 8 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 75} = 10$$

e più esattamente tra 9 e 10.

Eseguiamo l'operazione per calcolare le altre cifre:

	$A = 9$	$A = 94$	$A = 93$	$A = 939$
$q:100$	125.0	125.000.0	125.000.0	125.000.000.
$+pA:10$	675.0	705.000.0	697.500.0	704.250.000.
	800.0	830.000.0	822.500.0	829.250.000.
$-10A^3$	729.0	830.584.0	804.357.0	827.936.019.
$N =$	71.0	non si può	18.143.0	1.313.981.
$3A^2$	243		25947	264 516 3
$-p:100$	75		7500	75 000 0
$D =$	168		18447	189 516 3
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{710}{168} = 4$		$\frac{181430}{18447} = 9$	$\frac{13139810}{1895163} = 6$

	$A = 9396$	$A = 939692$	$y = 9,39692$
$q:100$	125.000.000.000.0	125.000.000.000.000.000.0	
$+pA:10$	704.700.000.000.0	704.769.000.000.000.000.0	
	829.700.000.000.0	829.769.000.000.000.000.0	
$-10A^3$	829.524.131.136.0	829.767.821.087.261.888.0	
$N =$	175.868.864.0	1.178.912.738.112 0	
$3A^2$	264854448	2649063164592	
$-p:100$	75000000	750000000000	
$D =$	189854448	1899063164592	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{1758688640}{189854448} = 9,2$	$\frac{11789127381120}{1899063164592} = 6,207$	

Essendo $x = \frac{y}{10}$, sarà

$$x = 0,9396926207,$$

che è precisamente il coseno di 20°.

3°. Sia infine l'equazione

$$x^3 - 105000x - 24 = 0.$$

In questo esempio il numero dei gruppi del termine q essendo minore di quello di p, si sostituiranno i mancanti con zeri, cioè come l'equazione fosse scritta:

$$x^3 - 10\,.\,50\,.\,00x - 0\,.\,000\,.\,024 = 0.$$

Essendo tre i gruppi della p, la radice avrà tre cifre per la parte intera, il resto saranno decimali. La prima cifra essendo compresa tra

$$\sqrt{10} = 3 \quad \text{e} \quad \sqrt{\frac{4}{3}\,.\,10} = 4,$$

sarà 3. Si esegua l'operazione:

	A = 3	A = 32	A = 324	A = 3240
$q:100$	0.0	0.000.0	0.000.024.0	0.000.024.000.0
$+pA:10$	31.5	33.600.0	34.020.000.0	34.020.000.000.0
	31.5	33.600.0	34.020.024.0	34.020.024.000.0
$-10A^3$	27.0	32.768.0	34.012.224.0	34.012.224.000.0
N =	4.5	832.0	7.800.0	7.800.000.0
$3A^2$	27	3072	314928	31492800
$-p:100$	10	1050	105000	10500000
D =	17	2020	209928	20992800
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{45}{17} = 2$	$\frac{8320}{2020} = 4$	$\frac{78000}{209928} = 0$	$\frac{78000000}{20992800} = 3{,}7$

	A = 324037	$x = 324{,}0371492$
$q:100$	0.000.024.000.000.000.0	
$+pA:10$	34.023.885.000.000.000.0	
	34.023.909.000.000.000.0	
$-10A^3$	34.023.877.666.718.653.0	
N =	31.333.281.347.0	
$3A^2$	314999932107	
$-p:100$	105000000000	
D =	209999932107	
$m = \frac{N}{D} =$	$\frac{313332813470}{209999932107} = 1{,}492$	

ING. FILIPPO NICITA.

Il quadrato aritmetico di "Fermat„ e la serie di "Fibonacci„

1. Si abbia un quadrato diviso in $(n+1)^2$ quadratini uguali n diante rette parallele ai lati ed equidistanti. Imaginiamo di numer tanto le linee quanto le colonne coi numeri naturali a partire da e nella casella che appartiene alla linea corrispondente all'indice alla colonna corrispondente all'indice k scriviamo un numero a_{hk} finito dalla seguente formola:

$$(1) \qquad a_{hk} = a_{kh} = \begin{cases} \binom{k}{h} & \text{se } k > h \\ \binom{h}{k} & \text{se } k < h \end{cases}$$

Immaginando allora di sopprimere una volta gli elementi a sinis un'altra volta quelli a destra della diagonale principale, otterre due triangoli aritmetici di TARTAGLIA scritti per modo da mett in luce la dipendenza degli elementi dai coefficienti binomiali. secondo di essi è:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{array}{ccccc} \binom{0}{0} & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \end{array}$$

dove si suppone:

$$\binom{n}{k} = 0, \quad \text{se} \quad n < k \quad \text{e} \quad k \neq 0$$

$$\binom{n}{k} = 1, \quad \text{se} \quad k = 0 \text{ con } n \text{ qualunque (anche zero).}$$

---

(1) Il prof. A. MARTINI ZUCCAGNI nella sua pregevole "Guida per la risoluzione degli ese d'Algebra„ riferendosi al quadrato aritmetico di *Fermat* asserisce che sommando i numer questo quadrato situati su certe parallele tracciate in esso si ottengono i termini della *seri Fibonacci*. Nel presente articolo al § 2 vien dimostrata quest'asserzione e vien tratta così legge di dipendenza dei termini di dette serie dai coefficienti binomiali, legge che il *Cesàro* sua *Analisi Algebrica* aveva dedotto da considerazioni sui *continuanti*.

Scriviamo in una prima orizzontale i numeri della diagonale principale del triangolo (I)

$$\binom{0}{0} \quad \binom{1}{1} \quad \binom{2}{2} \quad \binom{3}{3} \quad \binom{4}{4} \text{ ecc.;}$$

in una seconda gli elementi a sinistra dei precedenti

$$\binom{1}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{5}{4} \text{ ecc.}$$

e continuiamo di questo passo. Otterremo un nuovo quadro che rappresenta il cosiddetto *quadrato aritmetico di* FERMAT, figurato qui sotto:

$$\text{(II)} \qquad \left\{\begin{array}{llllll} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \binom{2}{2} & \binom{3}{4} & \binom{4}{4} & \cdots \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} & \binom{5}{4} & \cdots \\ \binom{2}{0} & \binom{3}{1} & \binom{4}{2} & \binom{5}{3} & \binom{6}{4} & \cdots \\ \binom{3}{0} & \binom{4}{1} & \binom{5}{2} & \binom{6}{3} & \binom{7}{4} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Numerando le linee e le colonne anche di questo quadro coi numeri naturali a partire da 0, il termine a_{hk} che occupa la casella appartenente alla linea d'indice h e alla colonna d'indice k è

$$(2) \qquad a_{h,k} = \binom{h+k}{k} = \binom{h+k}{h}.$$

Mettendo al posto dei simboli i valori numerici, il quadro (II) diventa

$$\text{(II')} \qquad \left\{\begin{array}{lllll} 1 & 1 & 1 & 1 & 1\ldots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15\ldots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35\ldots \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70\ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

Posto sotto la forma (II) il quadrato aritmetico di FERMAT, possiamo, per noti risultati relativi ai determinanti, trarre la conseguenza:

Prese a considerare le p *prime righe del quadro* (III) *e* p *colonne consecutive, il determinante dei corrispondenti elementi è uguale all'unità.*

Come caso particolare vale *uno* il determinante che noi st[illegible] studiando, il cui termine generale è dato dalla (2).

2. Pensiamo ora il quadrato aritmetico di FERMAT come se [illegible] uno scacchiere di $(n+1)^2$ caselle e immaginiamo un cavallo che [illegible] tendo dalla casella dell'elemento a_{0k} vada avvicinandosi, col su[illegible] lito salto, alla prima colonna del quadrato passando successivam[illegible] dalla 1ª alla 2ª colonna, poi alla terza e così via, senza mai tor[illegible] nelle linee già attraversate: esso occuperà le caselle degli elen[illegible] $a_{0,k}$, $a_{1,k-2}$, $a_{2,k-4}$, ecc. fino a quella che contiene $a_{\frac{k-1}{2},1}$ o $a_{\frac{k}{2},0}$ sec[illegible] che k è dispari o pari.

Sommando i numeri di queste caselle e indicando con u_k la so[illegible] avremo:

$$(3)\quad \begin{cases} u_k = a_{0,k} + a_{1,k-2} + a_{2,k-4} + \ldots + a_{\frac{k-1}{2},1} & \text{(se } k \text{ è dispari)} \\ u_k = a_{0,k} + a_{1,k-2} + a_{2,k-4} + \ldots + a_{\frac{k}{2},0} & \text{(se } k \text{ è pari).} \end{cases}$$

Tenendo conto della (2), queste formole si possono anche scri[illegible]

$$(4)\quad \begin{cases} u_k = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}(k+1)}{\frac{1}{2}(k-1)} & \text{(se } k \text{ è dis[illegible]} \\ u_k = \binom{k}{0} + \binom{k-1}{1} + \binom{k-2}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}k} & \text{(se } k \text{ è pa[illegible]} \end{cases}$$

Da queste, cambiando k in $k-1$, si ricava

$$\begin{cases} u_{k-1} = \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}(k-1)}{\frac{1}{2}(k-1)} & \text{(se } k \text{ è disp[illegible]} \\ u_{k-1} = \binom{k-1}{0} + \binom{k-2}{1} + \binom{k-3}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}k}{\frac{1}{2}(k-2)} & \text{(se } k \text{ è disp[illegible]} \end{cases}$$

Se eseguiamo la somma di u_k e di u_{k-1}, tenendo conto [illegible] identità $\binom{m}{p-1} + \binom{m}{p} = \binom{m+1}{p}$, nel caso di k dispari si tr[illegible]

$$u_k + u_{k-1} = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}(k+3)}{\frac{1}{2}(k-1)} + \binom{\frac{1}{2}(k-1)}{\frac{1}{2}(k-1)}$$

$$= \binom{k+1}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k-1}{2} + \ldots + \binom{\frac{1}{2}(k+3)}{\frac{1}{2}(k-1)} + \binom{\frac{1}{2}(k+[illegible]}{\frac{1}{2}(k+[illegible]}$$

Ma il secondo membro rappresenta u_{k+1}, dunque:

$$(5)\qquad u_{k+1} = u_k + u_{k-1}.$$

In modo perfettamente analogo si procede per k pari, e si giunge allo stesso risultato: Se ne conclude che i numeri u_k, somme degli elementi situati nelle caselle occupate dal cavallo nel suo percorso, sono tali da soddisfare la (5).

Poichè, come facilmente si può riconoscere, è:

$$u_1 = 1, \qquad u_2 = 1,$$

si ha che detti numeri sono quelli della *serie di Fibonacci:*

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34 \text{ ecc.}$$

Le formole (3) ci danno anche l'espressione di u_k in funzione dei coefficienti binomiali.

E. Piccioli.

In morte del prof. ERMANNO SENIGAGLIA

Fra i Colleghi caduti nella nostra guerra di redenzione merita un cenno speciale **Ermanno Senigaglia**, morto il 31 Maggio u. s. La Sua morte fu comunicata alla desolata famiglia colla Nota seguente, scritta dal Suo capitano: " Giovane eroe, caduto colpito al petto mortalmente dal piombo nemico, mentre incitava gli uomini alla resistenza; vivido, fulgido esempio di abnegazione, eroismo, amor sacro di Patria ". Sono in corso le pratiche per la medaglia d'argento al valor militare.

Il Collega così presto rapitoci (da soli 15 giorni aveva compiuti 27 anni!) era ormai molto apprezzato come insegnante e come studioso. Laureato a Padova nel 1910, aveva insegnato matematica, sempre in seguito a concorso e molto lodevolmente, nella Scuola tecnica di Sacile, nel Ginnasio-Liceo di S. Marino, nella Scuola media Commerciale di Bari, nella Scuola tecnica di Udine e ultimamente, in missione, nella " Caboto " di Venezia. Pubblicò: nel fascicolo del Novembre 1913 di questo " Periodico " il pregevole articolo " Infinito ed infinitesimo in matematica applicata "; e nel fascicolo del Dicembre 1913 del " Bollettino della Mathesis " un'interessante nota " Sull'attitudine e sulla negativa per la matematica ". Già prima aveva pubblicate, in un opuscolo litografato, le " Lezioni di aritme-

tica ed algebra „ tenute nell'anno 1911-12 al II° corso del Lic
San Marino; colla collaborazione del prof. Broglio di Udine stav
compilando un volume di " Disegno geometrico applicato allo s
della geometria „. Ma il lavoro che maggiormente aveva asso
da anni la Sua attività ed al quale, con stoica serenità, lavo
anche ultimamente, al fronte, nelle poche ore libere, era un'ope
" Metodologia matematica „ colla quale si proponeva di dare u
setto radicalmente nuovo alla Logica matematica; tale lavoro
quasi ultimato e, per la parte scritta prima di andare al fronte, a
già ottenuto lusinghieri giudizi da persone competenti; purt
però tutto il manoscritto è andato, temesi, perduto, insieme
cassetta da ufficiale del defunto Autore.

Socialista non interventista prima della proclamazione
guerra, il Senigaglia fu tosto invaso da vivo entusiasmo appena
affidati alle armi l'avvenire e l'onore della Sua Patria. Impaz
di dedicarsi all'impresa in cui l'Italia s'era impegnata Egli, q
tunque riformato della classe 1889, si arruolò tosto, soldato
5° Regg. Genio, nel Giugno 1915; e con gioia ottenne, alcuni mesi
di essere accettato quale allievo dell'Accademia militare di To
Il 6 Dicembre fu nominato sottotenente del Genio; e poco dopo f
viato, dietro Sua domanda, nel Trentino, dov'ebbe campo di affro
notevoli difficoltà, mostrando la Sua intelligente attività, che fu se
molto apprezzata dai superiori e che Lo portò alla morte gloriosa

Notevole ed ammirabile fu sempre la serenità di spirito che
conservava inalterata fra tutti i disagi e i pericoli della gue
che mostrava anche nei Suoi scritti, specialmente in quelli che
dava alla famiglia, alla quale era sempre largo di consiglio
conforto; Egli sembrava quasi esclusivamente preoccupato de
goscia in cui aveva lasciati, nella Sua Padova, la Mamma ad
e i carissimi fratelli, dei quali era vanto ed orgoglio e pei
come figlio primogenito da lungo tempo orfano di padre, era il
cipale appoggio materiale e morale. Ma sui doveri e sugli a
familiari ebbero il predominio, in quest'ora solenne, il dove
l'affetto verso la Patria! Onore a Lui! Assieme agli altri Martir
riosi della nuova Italia anche questo Nostro merita di essere se
ricordato con riverente gratitudine

" ove fia santo e lacrimato il sangue
" per la patria versato „.

P.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 21 Ottobre 1916