" 7 : 15 ", si ha:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 360 & -423 & -346 & 112 & 49 \\ \times 7 & & 168 & -119 & -217 & -49 \\ \hline & 360 & -255 & -465 & -105 & 0 \\ :15 & 24 & -17 & -31 & -7 & \end{array}$$

Risulta che " 7 : 15 " è una radice della (5) e che l'equazione residua è:

$$360x^3 - 255x^2 - 465x - 105 = 0$$

da cui (dividendo ogni coefficiente per 15):

$$24x^3 - 17x^2 - 31x - 7 = 0 \tag{13}$$

il che basta ad escludere dal prospetto (12) la frazione " − 7 : 15 ".

Eseguiamo la trasformazione accennata, ponendo nella (13)

$$x = y : 24 \tag{14}$$

e moltiplicando per 24^2. Si ottiene:

$$y^3 - 17y^2 - 744y - 4032 = 0.$$

Corrispondentemente, moltiplichiamo per 24 i numeri del prospetto (12), tranne quelli aventi denominatore 15; otteniamo

$$8 \quad 56 \quad 21 \quad -8 \quad -56 \quad -7.$$

Sperimentiamo l'ultimo, che ha minor valore assoluto:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -17 & -744 & -4032 \\ -7 & & -7 & 168 & 4032 \\ \hline & 1 & -24 & -576 & 0 \end{array}$$

Dunque " − 7 : 24 " è un'altra soluzione della (5).

Ricavando y dalla (14) e sostituendo nell'equazione residua

$$y^2 - 24y - 576 = 0$$

risulta

$$24^2x^2 - 24^2x - 24^2 = 0$$

cioè

$$x^2 - x - 1 = 0$$

che si risolve. Riassumendo, le radici della (5) sono

$$\frac{7}{15}, \quad -\frac{7}{24}, \quad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Genova, aprile 1917.

ALESSANDRO PADOA.

A PROPOSITO DELLE DIMOSTRAZIONI DELLA FORMOLA DI EULER

$$d^2 = R.(R - 2r)$$

1. Fra le dimostrazioni di questa notevole formula ce n'è una d vuta al sig. G. B. DURRANDE che figura in quella bella raccolta c s'intitola *Gli Annali di Gergonne*, ma di questa dimostrazione si so forse perdute le tracce; se non è ignorata, è per lo meno dimenticat

Non ci sembra perciò inopportuno che dalle colonne di que pregevole *Periodico di Matematica* essa venga restituita alla lu rendendo così omaggio all'Autore delle *otto* memorie geometric inserite negli Annali e rapito alla scienza a soli 27 anni.

Il Durrande aveva tentato l'estensione al tetraedro, ma disg ziatamente, come da sè vedrà il lettore cortese, essa contiene un'ines tezza che la rende senza valore e impedisce di scrivere la corrisp dente formula. Così anche noi non possiamo riportare su quelle trac come avremmo ardito, la formula analoga per l'*n-edro* di S_{n-1}.

Il lavoro del Durrande, di cui ho fatto cenno sopra, figura n l'annata 1823 degli Annali e porta il titolo *Démonstration élementa des principales propriétés des héxagones inscrits et circonscrits au c cle, suivie de la solution de divers problèmes de géométrie.*

Il teorema X di detto articolo dice:

" Due triangoli essendo circoscritti a un cerchio, se cinque " loro vertici sono sopra una circonferenza, su questa si troverà a " che il sesto.

" Quando un triangolo è al tempo stesso circoscritto a un c " chio e inscritto in un altro cerchio, infiniti altri triangoli poss " essere al medesimo tempo, inscritti nel *primo* e circoscritti al " *condo* cerchio.

Credo benfatto riportare qui le dimostrazioni di questi due t remi per esporre in modo più completo il bel procedimento del gnor DURRANDE.

Dimostrazione del teorema X. — Se ABC, DEF sono i triangoli questione e a, b, c, d, e, f i punti di contatto, preso a considerare l'e gono ABFEDCA e indicati con G, H, K i punti comuni ad AB, E BF, DC; FE, AC, essi saranno sopra una stessa retta perchè nell'e gono *abcdefca* inscritto appartengono a una retta i punti di conco dei lati opposti ab, ef; bd, fc; de, ca. Ora questi punti sono rispe vamente i poli di CD, GK e BF, per cui queste tre rette dovra passare per un medesimo punto, cioè il punto H d'intersezione di BF e DC è allineato con G e K. I punti ABC DEF sono dunque vertici di un esagono di cui i punti d'incontro delle rette dei lati opposti sono in linea retta. Poichè cinque di essi sono sopra una circonferenza, anche l'altro apparterrà alla medesima circonferenza.

Dimostrazione del teorema XIV. — Sia ABC il triangolo circoscritto al cerchio O e inscritto nel cerchio P. Inscriviamo nel secondo la corda DE tangente al primo e per i vertici D, E conduciamo al cerchio O le tangenti DF, EF; basta far vedere che F appartiene alla circonferenza P. Infatti i due triangoli ABC, DEF essendo circoscritti al cerchio O, poichè cinque de' sei vertici sono sulla circonferenza P, vi sarà anche il sesto. —

Andiamo ora al teorema XX:

" La distanza fra i centri di due cerchi l'uno inscritto e l'altro
" circoscritto a un medesimo triangolo *qualunque* è media propor-
" zionale fra il raggio del circoscritto e l'eccesso di questo raggio
" sul diametro dell'inscritto.

Dimostrazione. — Abbiamo veduto che quando un triangolo è inscritto in un cerchio e circoscritto ad un altro, infiniti altri triangoli esistono che si trovano nelle medesime condizioni di questo. La distanza dei centri di questi due cerchi sarà la stessa per tutti e dovrà essere quindi indipendente dalla natura del triangolo che si considera e dipendere solo dai raggi dei due cerchi.

Profittando di questo riferiamoci a uno dei triangoli che hanno un vertice in un estremo del diametro del cerchio circoscritto e passante pel centro del cerchio iscritto e che ha in conseguenza il lato opposto perpendicolare a questo diametro. Sia dunque SK il diametro del cerchio circoscritto che contiene i centri dei due cerchi C ed O e sia H il punto in cui SK taglia l'inscritto O: sia poi ASD il triangolo isoscele in questione. Condotte AC ed AO, il triangolo SAH ha AO come bissettrice dell'angolo in A.

Avremo quindi:

$$\overline{(AS)}^2 : \overline{(AH)}^2 = \overline{(OS)}^2 : \overline{(OH)}^2.$$

Ma è:

$$\overline{(AS)}^2 = \overline{(SH)}^2 + \overline{(AH)}^2 = \overline{(SH)}^2 + \overline{(AC)}^2 - \overline{(CH)}^2 = (d + R + r)^2 + R^2 - (d + r)^2 = R\,.\,(d + R + r)$$

$$\overline{(AH)}^2 = \overline{(AS)}^2 - \overline{(SH)}^2 = R^2 - (d + r)^2 = (d + R + r)\,(R - r - d)$$

$$\overline{(OS)}^2 = (d + R)^2, \qquad \overline{(OH)}^2 = r^2$$

per cui sostituendo e sopprimendo il fattore $d + R + r$ nel primo e secondo termine:

$$2R : R - r - d = (d + R)^2 : r^2.$$

Applicando l'operazione *dividendo* e sopprimendo ancora il fattore $d+R+r$:

$$1:R-r-d=R-r+d:r^2$$

da cui:

$$d^2=R(R-2r).$$

Questa è la dimostrazione del DURRANDE, originale senza dubbio, e che farebbe la sua figura fra le tante — e credo non sarebbe mal-fatto raccoglierle — che si conoscono della formula di cui ci occupiamo.

Era naturale che il DURRANDE fosse spinto ad estendere al tetraedro il procedimento seguito sopra.

Troviamo infatti, qualche teorema dopo, non già l'estensione del teorema X, ma quella del teorema XIV.

" Se un tetraedro è al medesimo tempo circoscritto a una sfera " e inscritto in un'altra, esistono infiniti altri tetraedri inscritti in " questa e circoscritti alla prima.

Dimostrazione. — Prendiamo uno dei vertici del nostro tetraedro per vertice di un cono circoscritto alla prima sfera; questo cono sarà inscritto nel tetraedro e sarà segato secondo un cerchio dal piano della faccia opposta al suo vertice. Questo piano, d'altra parte, segherà la sfera secondo un cerchio e la faccia del tetraedro che qui consideriamo sarà al tempo stesso circoscritta al primo cerchio e inscritta nell'ultimo. Dunque pel teorema XIV si potrà costruire un'infinità di triangoli che saranno circoscritti a uno di questi e inscritti nell'altro ed è chiaro che se si fa di questi triangoli le basi di tante tetraedri aventi tutti il medesimo vertice del primo, questi saranno come il primo, circoscritti all'una e inscritti nell'altra di queste sfere. —

Dopodichè si passa all'estensione del teorema XX prendendosi a considerare un tetraedro isoedro invece di un triangolo isoscele: la formula a cui perviene il DURRANDE pel tetraedro è:

$$d^2=(R+r).(R-3r).$$

Ma il cortese lettore si sarà certamente accorto che l'ultima dimostrazione non regge perchè vi si asserisce che il cono circoscritto alla prima sfera e inscritto nel tetraedro è segato dal piano della faccia opposta al suo vertice secondo un cerchio: il che non è

2. Giacchè passiamo in rivista gli Annali di Gergonne — anche per dare una prima spinta all'idea espressa sopra di raccogliere tutte le dimostrazioni della formula di EULER — riportiamo dalla pag. 34[illegible] annata 1812 una dimostrazione trigonometrica dovuta a GARNIER.

Consideriamo d come lato di un triangolo un cui vertice è A osservando che i lati rimanenti sono misurati da R e da $\dfrac{r}{\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}}$ e che l'angolo compreso è $\frac{1}{2}(B-C)$ o $\frac{1}{2}(C-B)$. Segue per la formola fondamentale di trigonometria rettilinea

$$2R \cdot r \cdot \cos\frac{1}{2}(B-C) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}A = r^2 + (R^2-d^2) \cdot \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A$$

e mutando vertici:

$$2R \cdot r \cdot \cos\frac{1}{2}(C-A) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}B = r^2 + (R^2-d^2) \cdot \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}B$$

$$2R \cdot r \cdot \cos\frac{1}{2}(A-B) \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{2}C = r^2 + (R^2-d^2) \cdot \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}C$$

Sottraendo le prime due si trova:

$$2R \cdot r \cdot \left\{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}B\right\} = (R^2-d^2) \cdot \left\{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}B\right\}$$

da cui

$$2Rr = R^2 - d^2$$

c. d. d.

Enrico Piccioli.

PROBLEMI (1)

(Continuazione e fine — Vedi fascicolo IV, anno XXXI).

239. Dimostrare che l'inviluppo della linea

$$B(Ax+By)^2 - B(Bx+\lambda y+C)^2 + (\lambda-A)(Ax+By)(Bx+\lambda y+C) = 0.$$

al variare di λ è la parabola

$$(Bx+Ay+C)^2 - 4ABxy = 0$$

e la retta

$$Ax+By=0.$$

240. Eliminando t fra le due equazioni

$$x = \frac{a(1-t^2)}{t^4-t^2+1}, \qquad y = \frac{at}{t^4-t^2+1},$$

(1) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

o fra le due

$$x=\frac{-at^2(1-t^2)}{t^4-t^2+1}, \qquad y=\frac{-at^3}{t^4-t^2+1},$$

si trova lo stesso risultato, che rappresenta una curva di 4° ordi
Formare l'equazione in coordinate polari della curva e dedurne
modo per descriverla geometricamente.

(Si trova

$$(x^2+y^2)-ax(x^2+y^2)-a^2y^2=0).$$

241. L'equazione

$$\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+(bx\cos\varphi+ay\,\mathrm{sen}\,\varphi-ab)^2=0$$

rappresenta una conica che ha un contatto di 3° ordine con l'
lisse $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$.

Dimostrare che l'area di questa conica non dipende che dall'a
dell'ellisse e da λ.

(Si trova $S=\pi ab\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\frac{3}{2}}$).

242. Il circolo concentrico all'ellisse e di raggio $(a-b)$ to
quattro volte la sviluppante dell'ellisse.

243. Risolvere l'equazione

$$[a(a+2b)\lambda+b(2a+b)]^3-27a^2b^2(a+b)^2\lambda(\lambda+1)=0.$$

(Le radici sono $\lambda_1=\lambda_2=\frac{b}{a}$, $\lambda_3=-\frac{b(2a+b)^3}{a(a+b)^3}$).

244. La curva

$$(x^2+y^2)^2-2ax(x^2-y^2)+a^2(x^2-\lambda y^2)=0,$$

quando λ è positiva, è una quartica binodale di cui l'area è

$$U=\lambda a^2\left[\mathrm{arctg}\sqrt{\lambda}+\frac{\sqrt{\lambda}(3\lambda^2+5)}{3(\lambda+1)^2}\right].$$

(Si prenda l'equazione in coordinate polari

$$\rho=a(\cos\omega\cos2\omega\pm\mathrm{sen}\,\omega\sqrt{\lambda-4\cos^4\omega}).$$

245. Dimostrare che

$$\int \mathrm{sen}\,4\omega\,.\sqrt{3-4\cos^4\omega}\,d\omega=$$

$$=\frac{1}{3}(3-4)\cos^4\omega)^{\frac{3}{2}}+\cos^2\omega\,.\sqrt{3-4\cos^4\varphi}+\frac{3}{2}\,\mathrm{arc\,sen}\left(\frac{2\cos^2\omega}{\sqrt{3}}\right.$$

246. Dimostrare che il circolo

$$x^2+y^2=(a-b)^2$$

è tangente alla sestica

$$(b^2x^2+a^2y^2)(x^2+y^2)^2=c^4x^2y^2\ (c^2=a^2-b^2)$$

nei punti d'incontro del circolo colle rette $bx^2-ay^2=0$.

247. Si considerino i triangoli che hanno per lati un raggio fisso $OA=r$ di un circolo ed un raggio variabile OB.

1°. Il luogo del punto di Lemoine di questi triangoli è un'ellisse di area $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}\pi r^2$.

2°. Il luogo del centro dell'ellisse di Lemoine è una curva unicursale di 4° ordine di cui l'area è $\dfrac{15\sqrt{3}-8}{72}\pi r^2$.

248. Risolvere l'equazione

$$a^2\,\text{sen}^6 x+b^2\cos^6 x=\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}.$$

(Si ha *intuitivamente* la soluzione

$$\text{sen}\,x=\sqrt{\frac{b}{a+b}},\qquad \cos x=\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

L'equazione in sen x è

$$(a^2-b^2)\,\text{sen}^6 x+3b^2\,\text{sen}^4 x-3b^2\,\text{sen}^2 x+\frac{b^3(2a+b)}{(a+b)^2}.$$

Dividendo il primo membro per $\text{sen}^2 x-\dfrac{b}{a+b}$, resta

$$(a^2-b^2)\,\text{sen}^4 x+b(a+2b)\,\text{sen}^2 x-\frac{b^3(2a+b)}{a+b}=0,$$

da cui le soluzioni

$$\text{sen}^2 x=\frac{b}{a+b},\qquad \text{sen}^2 x=-\frac{b^2(2a+b)}{a^2-b^2},$$

la prima delle quali è eguale alla soluzione (1)).

249. L'area compresa fra la cissoide $y^2=\dfrac{x^3}{a-x}$ e la cubica $y^2=\dfrac{a^2x}{a-x}$ è finita ed equivalente all'area del cerchio generatore della cissoide

E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

TAVOLE LOGARITMICHE *a 5 cifre decimali, raccolte e pubblicate per cu* *dell'Istituto idrografico della R. Marina* (edizione ridotta, Lire Un Genova, 1916).

Facendo seguito alla recensione sull'edizione completa, pubblicata nel fascic del Novembre u. s., sono ben lieto di riconoscere che il pessimismo ivi espre era in parte eccessivo. Quelle Tavole sono già adottate in varie Scuole; e l'a scorso se ne dovette fare una ristampa. Venne inoltre pubblicata l'edizione dotta, che qui annunciamo. Essa contiene: un'ampia Introduzione; i logari dei numeri da 1 a 10200 (colle Diff. e le tabelle delle P. P.); i logaritmi d funzioni goniometriche di 1' in 1'; i valori di tali funzioni di 10' in 10'; i val di $\frac{1}{n}$ per n compreso fra 1,00 e 10,00. Complessivamente si ha un bel volu di oltre 100 pagine di grande formato, in vendita al prezzo mitissimo di L.

Nella prossima ristampa l'Istituto farà alle sue Tavole un miglioramento certamente sarà molto apprezzato dagli egregi Colleghi. I numeri scritti nelle vole sono, come si sa, i *valori arrotondati*, non gli *abbreviati* (secondo la be dicitura proposta recentemente dal prof. Peano (¹)), sono cioè i valori appros mati per difetto o per eccesso secondo che la sesta cifra decimale < 5 o $\geqslant$ Spesso interessa sapere se il numero dato dalle Tavole è difettoso o eccessi ma da esse ora non lo si sa. Per rimediare a tale inconveniente, la quinta ci decimale sarà scritta in carattere diverso dalle altre quando il valore è eccessi Sarà così dimezzato l'intervallo nel quale risulta compreso un dato logarit Ora, ad es., avendosi accanto al numero 2420 il numero 38382, si può dire tanto che $3{,}383815 < \lg 2420 < 3{,}383825$; colla modificazione indicata il 2, qui cifra della mantissa, sarà alterato e si potrà concludere che

$$3{,}383815 < \lg 2420 < 3{,}383820.$$

Così pure ora si può soltanto sapere che $3{,}380205 < \lg 2400 < 3{,}380215$; seguito, vedendo accanto al numero 2400 la mantissa 38021 coll'1 stampato co stesso carattere delle altre quattro cifre, si saprà che

$$3{,}380210 < \lg 2400 < 3{,}380215.$$

L'Istituto idrografico ha pubblicato anche delle *Tavole logaritmiche e n* *tiche*, delle quali pure fu già pubblicata la 2ª edizione. Il volume, elegantemen legato in tela, consta di due parti di circa 100 pagine ciascuna: la 1ª è ident

(¹) Cfr. il fascicolo del Marzo u. s.

all'edizione ridotta di cui abbiamo già parlato; la 2ª contiene 50 tavole nautiche. Il prezzo del volume è di *tre lire*.

Mi auguro che l'Istituto pubblichi presto anche un volume di *Tavole logaritmiche — finanziarie — attuariali*, che sarebbe utilissimo per le Scuole di commercio e di ragioneria. Per la natura dei calcoli che in esse devono farsi sarebbe forse opportuno che tali tavole fossero a 7 cifre decimali e che vi fossero i logaritmi di tutti i numeri interi da 1 a 100000, anzi basterebbe da 10001 a 99999. Le tavole goniometriche, che per tali Scuole non servono, potrebbero essere tutte omesse.

Con questo nuovo volume non vi sarebbe nessuna ragionevole obbiezione ad usare in tutte le Scuole italiane le Tavole dell'Istituto. Il prof. Iadanza, in una Nota presentata il 25 Febbraio u. s. all'Accademia delle Scienze di Torino, e il prof. Pesci fin dal 1912, nel *Supplemento al Periodico di Matematica*, deplorano anch'essi la dannosa ed umiliante invasione di Tavole straniere; (1) e il prof. Iadanza propone la pubblicazione di un'*edizione nazionale*, il cui uso sia obbligatorio in tutte le Scuole italiane. Le pubblicazioni dell'Istituto rendono facilmente attuabile tale ottima proposta; l'alta mente e il patriottismo fervente di S. E. il ministro Ruffini fanno sperare che l'attuazione sia sollecita. Sarà una bella occasione per porre un legame visibile fra due istituzioni tanto care ad ogni buon italiano: la nostra Marina e la nostra Scuola. E sarà un buon avviamento verso la completa emancipazione dalle pubblicazioni scolastiche straniere, la cui invasione è tanto lamentata, ad es., per i classici latini e greci e per le carte geografiche.

CATTANEO PAOLO.

Dott. ALPINOLO NATUCCI. — *Compendio di Algebra* per la prima e per la seconda classe liceale (2 volumetti). — *Compendio di Matematica* per la terza classe liceale (Algebra — Trigonometria — Aritmetica). — *Enciclopedia Scolastica* del Prof. G. M. GATTI. Ed. L. Cappelli, Rocca S. Casciano. Prezzo di ciascun volumetto L. 0,80.

In questi tre volumetti si offre agli alunni del liceo classico un riassunto del programma di Aritmetica, Algebra e Trigonometria, assai utile per la ripetizione della materia d'insegnamento in tutte le sue parti essenziali. Non si tratta di un libro di testo vero e proprio, poichè lo svolgimento della materia vi è condotto in forma riassuntiva, talvolta con cenni rapidi e dimostrazioni che si riducono a semplici chiarimenti a base di esempi e con ricorso alla intuizione, e manca pure una raccolta di esercizi da proporre. Ma il chiaro A. ha avuto l'abilità di occuparsi sufficientemente di ogni argomento importante, non trascurandone alcuno, e la sua esposizione chiara, precisa, efficacissima nella sua brevità senza ingombranti considerazioni, può riuscire molto accessibile e vantaggiosa agli alunni, specialmente ai più deboli (ai quali i trattati completi incutono un vero terrore!),

(1) Graziosa è l'osservazione fatta dal prof. Iadanza relativamente alle Tavole del Bruhns, che da 50 anni si pubblicano a Lipsia, dove l'autore era professore ed astronomo. Nell'edizione mandata l'anno scorso in Italia, con delicato pensiero, con correttezza e fierezza teutonica, la parola " *Lipsia* " è ovunque soppressa e il volume si finge stampato a Lugano. In Isvizzera costa L. 6,50; per i " *boni taliani* " il suo prezzo è di L. 8!

e sopra tutto a coloro che hanno bisogno di prepararsi agli esami in un temp relativamente breve. Anche i punti più difficili del programma sono trattati co cura evidente, ma senza pesanti disquisizioni; e se certe questioni non sono, com del resto non potrebbero essere in un lavoretto modesto di questo genere, pro fondamente analizzate, sono però abilmente presentate e svolte in ciò che è esse ziale.

Leggendo questi volumetti si sente, per così dire, ad ogni passo la destrezz di un vero conoscitore dei bisogni degli scolari (ai nostri giorni assai più debol di quanto si potrebbe attendere!) che sa scegliere la via suggeritagli dalla dur esperienza della scuola. Io giudico quindi che questi *Compendi* raggiungano, da punto di vista didattico sopra tutto, lo scopo che si sono prefissi l'egregio autor e il benemerito direttore dell'*Enciclopedia Scolastica*. E i pregi didattici, uniti a vantaggio di una trattazione correttissima, dovrebbero bastare per accogliere co plauso questo lavoretto, il quale dev'essere stato invero di difficile compilazion per dover essere ad un tempo breve completo e rigoroso.

Umberto Concina.

De La Vallée Poussin. — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*. Leçons professées au College de France. Paris, Gauthier-Villars, 1916.

Il De La Vallée Poussin, è una delle tante vittime della terribile guerra ch da quasi tre anni insanguina il mondo. Professore all'università di Lovanio, dovè come tutti i suoi colleghi cercarsi un asilo all'estero quando l'infelice Belgio fu schiacciato dalla cieca ferocia teutonica. Dapprima egli fu chiamato a fare delle conferenze all'Università di Harvard in America, poi al Collegio di Francia, ove fra il dicembre 1915 e il Marzo 1916 fece le lezioni che vengono pubblicate ne volume di cui ci occupiamo.

Le quistioni trattate appartengono alla teoria recente delle funzioni fondat da Borel, Baire e Lebesgue. " Il Signor Baire, scrive l'A. nella prefazione h " limitato un dominio funzionale reale che basta a tutti i bisogni dell'Analisi " al di là del quale tutte le generalizzazioni sembrano condannate ad esser van " e sterili. Le funzioni di questo dominio godono di proprietà comuni, ben pre " cise. I metodi generali dell'Analisi sono loro applicabili; e la loro teoria, gi " ricca di resultati, può esser considerata come *la teoria generale delle funzion* " *di variabili reali*. Questo è un progresso fondamentale dal punto di vista filo " sofico e è dovuto sopratutto al Sig. Lebesgue. Più di chiunque altro, il Sig. Le " besgue ha contribuito a mettere dell'unità nella teoria delle funzioni e i " tal modo assicurare ad essa il carattere estetico che le mancava ".

Il libro del La Vallée Poussin sarà senza dubbio utilissimo a tutti coloro ch vorranno iniziarsi ad un ordine di studi recente e non molto conosciuto.

K.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 Giugno 1917.

Approssimazioni numeriche:
Moltiplicazione abbreviata e moltiplicazione ordinata [1]

Negli scritti di KEPLERO e di suoi contemporanei si trovano esempi di " moltiplicazioni abbreviate " (si veda una lettera di K. del 1626 in *Opera*, Francfort s. M. 1868, v. 7, pag. 306). La regola della moltiplicazione abbreviata è esposta in OUGHTRED (*Aritmeticae... institutio...*, Londres 1631), donde il nome di " regola d'Oughtred ".

L'approssimazione della moltiplicazione abbreviata si trova calcolata in VIEILLE (*Approximations numériques*, 2e ed., Paris 1854) con risultati equivalenti, in parte, a quelli da noi ottenuti.

Per quanto riguarda la " moltiplicazione ordinata " si vedano FOURIER (*Analyse des équations déterminées*, Paris 1831, pag. 190) e CAUCHY (*Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, Paris 1840, ovvero *Oeuvres complètes*, 1e série, t. 5, p. 437 e 445). [2]

1. Di due numeri reali (assoluti) x, y siano a_n, b_n i valori con n decimali (a meno di $0{,}1^n$ per difetto), e si consideri il prodotto $a_n b_n$, che è un valore per difetto di xy a meno di

$$(a_n + b_n + 0{,}1^n) \,.\, 0{,}1^n,$$

ovvero, a meno di $(a + b) \,.\, 0{,}1^n$, essendo a, b due qualunque valori per eccesso di x, y.

Nell'eseguire il prodotto $a_n b_n$ si moltiplicano tutte le cifre del moltiplicando per tutte le cifre del moltiplicatore, tenendo conto dell'unità in cui sono espressi i singoli prodotti; ora se si trascurano quei prodotti che sono espressi in unità inferiori a $0{,}1^n$ si ha per risultato un numero decimale, che rappresenteremo con $P_n(a_n, b_n)$ o semplicemente con P_n, il quale è un valore per difetto di $a_n b_n$ — e quindi anche di xy —, e che noi chiameremo *prodotto abbreviato, n.esimo*, di a_n e b_n.

È manifesto che il prodotto abbreviato di a_n, b_n gode della *proprietà commutativa*.

---

(1) Quest'articolo è un altro estratto, con ommissioni e varianti, da un mio lavoro sulle *Approssimazioni numeriche o Calcolo numerico approssimato*, di prossima pubblicazione (v. *Periodico di Matematica*, fasc. II, di quest'anno).

(2) Si confronti la nostra trattazione con quella contenuta nella Memoria testè pubblicata del Prof. G. PEANO, *Approssimazioni numeriche*, Atti dell'Accad. di Torino, adunanze 25 Febbraio e 11 Marzo 1917.

virgola in modo di eguagliare il numero delle cifre decimali nei du fattori; ottenuto poi il prodotto abbreviato e la sua approssimazion si trasformano i risultati tenendo conto delle variazioni fatte.

3. Dati i numeri x, y coi loro sviluppi decimali, si può cercare co quante cifre decimali debbonsi assumere i valori approssimati a_n, b a che il loro prodotto abbreviato P_n sia un valore approssimat di xy a meno di $0,1^t$, oppure abbia t cifre decimali esatte, essendo un intero prefissato (*problema inverso*).

Si possono cercare a_n, b_n col seguente procedimento, avente pe base l'approssimazione (α) di P_n rispetto ad xy [n. 2].

Noti a_0, b_0, per un presunto numero massimo di cifre decimali s può prendere 100, ovvero 1000, o altra potenza di 10, come valor massimo previsto per l'espressione $1+a_0+b_0+k_n$; sicchè potrem scrivere come *ipotesi provvisoria*

$$1+a_0+b_0+k_n \leqq 10^p,$$

ove p è un intero che viene da noi assunto; da ciò segue l'approssimazione ipotetica

$$(1+a_0+b_0+k_n)\,.\,0,1^n \leqq 10^{n-p}.$$

Ora, se si vuole un valore di xy a meno di $0,1^t$, si porrà $n-p=t$ da cui $n=p+t$, calcolando poi la effettiva approssimazione

$$(1+a_0+b_0+k_n)\,.\,0,1^n;$$

se quest'espressione risulterà maggiore di $0,1^t$, si esperimenteranno dei valori successivi di n fino che si giunga — ciò che sarà sempr possibile (¹) — ad un'espressione $\leqq 0,1^t$; il corrispondente prodott abbreviato sarà quello richiesto.

Trovato il valore di xy a meno di $0,1^t$, e calcolata l'effettiva approssimazione data dalla (α), si otterranno due valori di xy, l'uno pe difetto e l'altro per eccesso, che, eventualmente, potranno avere l prime t cifre decimali comuni. In caso contrario, se si vuole il valore di xy con t cifre decimali esatte, si esperimenteranno dei valor successivi di n, giungendo, generalmente, dopo pochi esperimenti a valore richiesto.

Esempio. — Si voglia calcolare $z=\pi\sqrt{2}$, a meno di 0,001, essend

$$\pi = 3,14159262\ldots,\qquad \sqrt{2}=1,41421356\ldots.$$

(¹) Invero, si dimostra facilmente che $(1+a_0+b_0+k_n)\,.\,0,1^n$ diviene piccola a piacere co crescere di n.

Assumendo in questo caso

$$1+a_0+b_0+k_n \leqq 100 = 10^2,$$

cioè $p=2$, avremo $n=p+t=2+3=5$, e quindi eseguiremo la seguente moltiplicazione abbreviata.

$$\begin{array}{rl}
 & 3{,}14159 \\
 & 124141 \\
\hline
 & 341159 \\
 & 125660 \\
 & 3141 \\
 & 1356 \\
 & 62 \\
 & 3 \\
\hline
P_5 = & 4{,}44281 \ \text{(valore per difetto di } xy) \\
 & 17 = 1+3+1+4+1+4+2+1 \ \text{(approssim.)}. \\
\hline
 & 4{,}44298 \ \text{(valore per eccesso di } xy).
\end{array}$$

Sicchè sarà $z=4{,}442\ldots$, essendo la 4^a cifra decimale o 8 o 9.

4. La definizione di prodotto abbreviato n.esimo $P_n(a_n, b_n)$ di due numeri con n cifre decimali a_n, b_n [n. 1] entra come caso particolare nella definizione di *prodotto abbreviato n.esimo di due numeri decimali qualunque*, finiti o infiniti, x, y (serie decimali), il quale è la somma dei prodotti delle cifre del moltiplicando per quelle del moltiplicatore, tenendo conto delle unità in cui sono espressi i singoli prodotti, e trascurando quei prodotti che sono espressi in unità inferiori a $0{,}1^n$. Rappresenteremo questo nuovo prodotto abbreviato con $P_n(x, y)$. Manifestamente esso pure gode della proprietà commutativa.

Si abbia ad esempio

$$x=37{,}4526789\ldots, \qquad y=21{,}345245\ldots,$$

e si voglia formare $P_4(x, y)$; si può disporre il calcolo come qui appresso, a sinistra o a destra, analogamente a n. 1, ma qui, come si vede, vengono adoperate altre cifre decimali, oltre alle prime quattro del moltiplicando o del moltiplicatore.

$$\begin{array}{rl}
x = & 37{,}4526789\ldots \\
y = & 21{,}3452345\ldots \\
\hline
 & 7490534 \\
 & 374526 \\
 & 112356 \\
 & 14980 \\
 & 1870 \\
 & 74 \\
 & 9 \\
\hline
P_4(x,y) = & 799{,}4349
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
37{,}4526789\ldots \\
\ldots 5432543'12 \\
\hline
7490534 \\
374526 \\
112356 \\
14980 \\
1870 \\
74 \\
9 \\
\hline
799{,}4349
\end{array}$$

Se ciascuna delle parti intere di x, y non ha più di una cifr allora si ha $P_n(x, y) = P_n(a_n, b_n)$, ove a_n, b_n sono i valori con n dec mali di x, y.

Riferendoci all'esempio considerato, se si fa il calcolo dell'appro simazione di $P_4(x, y)$ rispetto al prodotto xy, procedendo in mo analogo a n. 2, si trova che detta approssimazione è data da

$$(1+3+2+1+3+4+5+2+3) \,.\, 0{,}1^4 = 24 \,.\, 0{,}1^4,$$

cioè da tante unità decimali del 4° ordine quante ne esprime somma della 1ª cifra del moltiplicando, aumentata di 1, e di tut le cifre del moltiplicatore che sono adoprate nei prodotti parziali.

Nel caso del moltiplicando e del moltiplicatore finiti si può os servare quanto segue: Riferendosi all'operazione eseguita come destra, cioè col moltiplicatore rovesciato, si possono trascurare nel somma, che dà l'approssimazione, le cifre del moltiplicatore che no sono sottoposte a cifre del moltiplicando seguite da cifre significa tive a destra, e si può trascurare la 1ª cifra del moltiplicando (au mentata di 1) se il moltiplicatore rovesciato non si prolunga a sin stra del moltiplicando (1).

Nel caso generale si ha:

L'approssimazione di $P_n(x, y)$ *rispetto al prodotto* xy *è data da tan unità del n.esimo ordine decimale quante ne esprime la somma della prim cifra di* x, *aumentata di* 1, *e delle cifre di* y *che sono adoprate per fo mare il prodotto abbreviato* (2).

Un caso particolare è l'approssimazione di $P_n(a_n, b_n)$ rispetto prodotto $a_n b_n$.

In modo analogo a n. 3 si tratta il *problema inverso*, di eseguir cioè un prodotto abbreviato di due serie decimali date ottenendo un approssimazione prefissata.

5. Tanto il prodotto completo di due numeri decimali finiti ch il prodotto abbreviato di due numeri decimali qualunque [n. 1 e 4 possono ottenersi con la regola della *moltiplicazione ordinata*, dett di FOURIER, ma nota assai prima (3), che consiste nel calcolare e som mare separatamente i prodotti di due cifre, l'una del moltiplicand e l'altra del moltiplicatore, i quali esprimono unità dello stesso or dine, come si vede nell'esempio seguente, in cui si procede comin ciando dai prodotti d'ordine massimo.

---

(1) Calcoli il lettore il prodotto abbreviato 4° dei due numeri decimali finiti $a = 37{,}452$ $b = 21{,}34026$, che dà per risultato $P_4(a, b) = 799{,}4209$, con l'approssimazione, rispetto ad ab,

$$(4+5+2+3) \,.\, 0{,}1^4 = 0{,}0014.$$

(2) Vedi VIEILLE, l. cit., pag. 39.

(3) La moltiplicazione ordinata, col nome di moltiplicazione " fulminea ", era nota ai matema tici indiani del VI secolo, e fu insegnata in Europa dagli italiani LEONARDO DA PISA (1228), LUCA PACIUOLO (1494), NICOLÒ TARTAGLIA (1556).

Esempio di moltiplicazione ordinata.

$$\begin{array}{lr}
 & a_4 = 3\,7{,}4\,5\,2\,6 \\
 & b_4 = \underline{2\,1{,}3\,4\,5\,2} \\
[2\,.\,3] & 6 \\
[2\,.\,7+1\,.\,3] & 1\,7 \\
[2\,.\,4+1\,.\,7+3\,.\,3] & 2\,4, \\
[2\,.\,5+1\,.\,4+3\,.\,7+4\,.\,3] & 4\,7 \\
[2\,.\,2+1\,.\,5+3\,.\,4+4\,.\,7+5\,.\,3] & 6\,4 \\
[2\,.\,6+1\,.\,2+3\,.\,5+4\,.\,4+5\,.\,7+2\,.\,3] & 8\,6 \\
[1\,.\,6+3\,.\,2+4\,.\,5+5\,.\,4+2\,.\,7] & 6\,6 \\
\hdashline
[3\,.\,6+4\,.\,2+5\,.\,5+2\,.\,4] & 5\,9 \\
[4\,.\,6+5\,.\,2+2\,.\,5] & 4\,4 \\
[5\,.\,6+2\,.\,2] & 3\,4 \\
[2\,.\,6] & 1\,2 \\
\hline
 & a_4 b_4 = 7\,9\,9{,}4\,3\,3\,2\,3\,7\,5\,2
\end{array}$$

Alla linea tratteggiata si arresterebbe l'operazione per ottenere

$$P_4(a_4\,,\,b_4) = 7\,9\,9{,}4\,3\,2\,6.$$

La moltiplicazione ordinata viene eseguita convenientemente con l'uso della " striscia mobile „ nel cui margine inferiore viene scritto il moltiplicatore rovesciato e che viene disposto volta a volta, al disopra del moltiplicando, in modo che le cifre da moltiplicarsi tra loro siano sovrapposte (¹).

Sull'esempio del Cauchy (loc. cit.) si può scrivere la cifra delle unità di ogni somma parziale sotto la cifra delle unità semplici del moltiplicatore rovesciato della striscia mobile; e inoltre si possono scrivere le somme parziali dei vari ordini nella forma raccolta che si vede qui sotto, in cui le cifre dell'ultima operazione si sono fatte scorrere lungo le verticali.

$$\begin{array}{rl}
 & \rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{moltiplicatore rovesciato}\\ 2\,5\,4\,3\,1\,2\end{array}} \quad \begin{array}{c}3^{a}\text{ posizione della}\\ \text{striscia mobile}\end{array} \\
\text{moltiplicando} & 3\,7{,}4\,5\,2\,6 \\
\hline
 & 6\,7\,4{,}7\,4\,6\,6\,9\,4\,4\,2 \\
 & 1\,2\,4\,6\,8\,6\,5\,4\,3\,1 \\
\hline
a_4 b_4 = & 7\,9\,9{,}4\,3\,3\,2\,3\,7\,5\,2
\end{array}$$

Per eseguire a memoria ciascuna somma parziale il Fourier (l. cit.) consiglia, dopo aver sovrapposto al moltiplicando il moltiplicatore rovesciato in modo che si corrispondano le cifre che si devono moltiplicare, di sommare insieme le sole cifre delle unità dei prodotti

(¹) Esperimenti il lettore.

andando da destra a sinistra, poi di sommare le sole cifre di quei prodotti che esprimono decine ritornando verso destra (1).

6. Osserviamo infine che col metodo della moltiplicazione ordinata (eseguita convenientemente con la striscia mobile in cui è scritto il moltiplicatore rovesciato) si può calcolare un prodotto abbreviato qualunque di due serie decimali [n. 4], cominciando l'operazione con le unità d'ordine superiore, e proseguendola e arrestandola a piacere *(moltiplicazione ordinata di due serie decimali)*.

Se, quando si arresta l'operazione, si calcola l'approssimazione del prodotto abbreviato ottenuto, si può vedere quali sono le cifre esatte del resultato, e perciò interrompendo l'operazione ovvero continuandola si avrà modo di giungere, generalmente, ad un valore del prodotto delle due serie avente un numero prefissato di cifre decimali esatte: in ogni caso, come si dimostra facilmente, si potrà giungere ad un'approssimazione d'ampiezza piccola a piacere, sempre che si considerino note le due serie decimali nella successione delle loro cifre.

ESEMPIO. — Riferendoci alle due serie decimali x, y considerate a n. 4, è qui riprodotto il calcolo, in forma raccolta, di $P_4(x, y)$ con la sua approssimazione $24 . 0{,}1^4$, a cui è fatto seguire il calcolo di $P_6(x, y)$ con l'approssimazione $33 . 01^6$. Per ottenere dei prodotti abbreviati successivi a quest'ultimo si dovrebbero conoscere altre cifre decimali di x, y.

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{moltiplicatore rovesciato} & \text{ultima posizione della striscia} \\
\longrightarrow & \ldots 5\,4\,3\,2\,5\,4\,3\,1\,2 & \text{per il calcolo di } P_4(x, y) \\
\text{moltiplicando} & 3\,7{,}4\,5\,2\,6\,7\,8\,9\ldots & \\
\hline
 & 6\,7\,4{,}7\,4\,6\,9 & \\
 & 1\,2\,4\,6\,8\,8 & \\
\hline
P_4(x, y) = & 7\,9\,9{,}4\,3\,4\,9 & 24 . 0{,}1^4 \text{ [n. 4]} \\
 & \phantom{7\,9\,9{,}4\,}1\,1\,5\,6 & \\
 & \phantom{7\,9\,9{,}4\,3\,4\,}1\,4 & \\
\hline
P_6(x, y) = & 7\,9\,9{,}4\,3\,6\,1\,9\,6 & (24 + 4 + 5) . 0{,}1^6 = 33 . 0{,}1^6.
\end{array}
$$

EUGENIO MACCAFERRI.

---

(1) Inoltre se si eseguiscono le somme parziali cominciando da quelle che esprimono unità d'ordine inferiore, e di ogni somma si scrive la cifra delle unità riportando nella somma successiva il numero delle decine, si può, come dice il FOURIER, scrivere direttamente, cifra per cifra, il risultato della moltiplicazione, qualunque sia il numero delle cifre dei due fattori.

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

d'ordine superiore [1]

---

1. Data una successione di numeri

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_r,\ \ldots$$

se si moltiplica a_1 per i successivi $s-1$ termini, a_2 per i successivi $s-1$ termini, ecc., la successione formata coi prodotti ottenuti si dice la *successione dei primi prodotti* s *ad* s della data.

La successione dei primi prodotti s ad s della successione dei primi prodotti s ad s della data si dice la *successione dei secondi prodotti* s *ad* s della data, ecc.

Risultano evidenti le due seguenti proprietà:

1) *Data una progressione geometrica d'ordine* n *e di ragione* q *si ha che la successione dei prodotti erresimi* s *ad* s *forma una nuova progressione geometrica d'ordine* n *e di ragione* $q^{(s^r)}$.

2) *Data una progressione geometrica d'ordine* n, *della classe* m *e di ragioni* $q_1, q_2, \ldots, q_m$ *ponendo* $q_1 q_2 \ldots q_m = p$ *si ha che la successione dei prodotti ennesimi* m *ad* m *forma una nuova progressione geometrica d'ordine* n, *della prima classe e di ragione* $p^{(m^{n-1})}$.

2. *Data una progressione geometrica*

$$\frac{n:}{:}\ a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_r : \ldots \tag{1}$$

d'ordine n *e di ragione* q, *la successione*

$$a_1,\ a_{1+s},\ a_{1+2s},\ \ldots,\ a_{1+(r-1)s},\ \ldots \tag{2}$$

forma una progressione geometrica d'ordine n *e di ragione* $q^{(s^n)}$, *qualunque sia* s.

Formiamo infatti la successione dei primi quozienti della (2):

$$(a_{1+s} : a_1),\ (a_{1+2s} : a_{1+s}),\ \ldots,\ (a_{1+rs} : a_{1+(r-1)s}),\ \ldots$$

---

[1] V. nell'Annata in corso del "Periodico di Matematica,,: L. TENCA, *Su alcuni determinanti di differenze e di somme*; L. TENCA, *Alcune proprietà delle progressioni aritmetiche d'ordine superiore.*

evidentemente:

$$a_{1+s} : a_1 = (a_2 : a_1)(a_3 : a_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (a_{1+s} : a_s)$$
$$a_{1+2s} : a_{1+s} = (a_{2+s} : a_{1+s})(a_{3+s} : a_{2+s}) \ldots (a_{1+2s} : a_{2s})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1+rs} : a_{1+(r-1)s} = (a_{2+(r-1)s} : a_{1+(r-1)s})(a_{3+(r-1)s} : a_{2+(r-1)s}) \ldots (a_{1+rs} : a_{rs})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

cioè ciascun primo quoziente di (2) è eguale al prodotto di s primi quozienti successivi di (1) e precisamente il primo è eguale al primo dei primi prodotti s ad s della successione dei primi quozienti di (1), il secondo è eguale all'$(1+s)^{mo}$ dei primi prodotti stessi, ecc.

Formiamo ora la successione dei secondi quozienti della successione (2). Pel modo con cui sono formati i primi quozienti si ha che il primo dei secondi quozienti di (2) è eguale al primo dei secondi prodotti s ad s della successione dei secondi quozienti di (1), il secondo è eguale all'$(1+s)^{mo}$ dei secondi prodotti stessi, ecc.

In generale: il primo degli erresimi quozienti di (2) è eguale al primo degli ennesimi prodotti s ad s della successione degli erresimi quozienti di (1), il secondo è eguale all'$(1+s)^{mo}$ degli erresimi prodotti stessi, ecc.

In particolare il primo degli ennesimi quozienti della (2) è eguale al primo degli ennesimi prodotti s ad s della successione degli ennesimi quozienti di (1), il secondo è eguale all'$(1+s)^{mo}$ degli ennesimi prodotti stessi, ecc. Ma gli ennesimi quozienti di (1) sono eguali a q, perciò gli ennesimi quozienti di (2) sono eguali a $q^{(s^n)}$.

In modo analogo si dimostra la seguente proprietà:

Data una progressione geometrica di ordine n, *della classe* m, *di ragioni* $q_1, q_2, \ldots q_m$

$$m \frac{n:}{:} a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_r : \ldots$$

ponendo $q_1 q_2 \ldots q_m = q$, *si ha che la successione*

$$a_1,\ a_{1+m},\ a_{1+2m}, \ldots, a_{1+(r-1)m}, \ldots$$

forma una progressione geometrica d'ordine n, *della prima classe e di ragione* $p^{(m^{n-1})}$.

3. *Data una progressione geometrica*

$$\frac{n:}{:} a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_r : \ldots$$

d'ordine n *e di ragione* q *si ha che la successione*

$$(3) \qquad \prod_{t=s}^{t=s} a_t,\quad \prod_{t=1}^{t=s} a_{s+t},\quad \prod_{t=1}^{t=s} a_{2s+t}, \ldots, \prod_{t=1}^{t=s} a_{(r-1)s+t}, \ldots$$

forma una progressione d'ordine n *e di ragione* $q^{(s^{n+1})}$.

Infatti la successione dei primi prodotti s ad s della data per una proprietà vista forma una progressione geometrica di ordine n e di ragione q^s. Formiamo con termini di questa una nuova successione prendendo in essa il primo termine, quello di posto $s+1$, quello di posto $2s+1$, ecc., che è poi quella di cui tratta il teorema. Per una proprietà dimostrata essa forma una nuova progressione geometrica di ordine n e di ragione $(q^s)^{(s^n)} = q^{(s^{n+1})}$.

Il teorema si può dimostrare anche osservando che la successione (3) si può ottenere moltiplicando termine a termine le progressioni

$$\frac{n:}{:} a_1 : a_{1+s} : a_{1+2s} : \ldots : a_{1+(r-1)s} : \ldots$$

$$\frac{n:}{:} a_2 : a_{2+s} : a_{2+2s} : \ldots : a_{2+(r-1)s} : \ldots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{n:}{:} a_s : a_{2s} : a_{3s} : \ldots\ldots\ldots a_{rs} : \ldots\ldots\ldots$$

In modo analogo si dimostra la seguente proprietà:

Data una progressione geometrica di ordine n, *della classe* m, *di ragioni* $\mathrm{q}_1, \mathrm{q}_2, \ldots \mathrm{q}_\mathrm{m}$

$$\mathrm{m}\frac{\mathrm{n}:}{:} \mathrm{a}_1 : \mathrm{a}_2 : \mathrm{a}_3 : \ldots : \mathrm{a}_r : \ldots$$

ponendo $\mathrm{q}_1\mathrm{q}_2 \ldots \mathrm{q}_\mathrm{m} = \mathrm{p}$ *si ha che la successione*

$$\prod_{t=1}^{t=m} \mathrm{a}_t, \quad \prod_{t=1}^{t=m} \mathrm{a}_{m+t}, \quad \prod_{t=1}^{t=m} \mathrm{a}_{2m+t}, \ldots, \prod_{t=1}^{t=m} \mathrm{a}_{(r-1)m+t}, \ldots$$

forma una progressione geometrica d'ordine n *della prima classe e di ragione* $\mathrm{p}^{(\mathrm{m}^\mathrm{n})}$.

4. Dividendo termine a termine le due progressioni seguenti ricavate dalla (1)

$$\frac{n:}{:} \prod_{t=1}^{t=s} a_t : \prod_{t=1}^{t=s} a_{s+t} : \prod_{t=1}^{t=s} a_{2s+t} : \ldots : \prod_{t=1}^{t=s} a_{(r-1)s+t} : \ldots$$

$$\frac{n:}{:} a_s : a_{2s} : a_{3s} : \ldots : a_{rs} : \ldots$$

si ottiene la nuova progressione

$$\frac{n:}{:} \prod_{t=1}^{t=s-1} a_t : \prod_{t=1}^{t=s-1} a_{s+t} : \prod_{t=1}^{t=s-1} a_{s+t} : \prod_{t=1}^{t=s-1} a_{2s+t} : \ldots : \prod_{t=1}^{t=s-1} a_{(r-1)s+t} : \ldots$$

di ragione

$$q^{(s^{n+1})} : q^{(s^n)} = q^{s^n(s-1)}.$$

Dividendo termine a termine la progressione ottenuta per la progressione seguente pure ricavata dalla (1)

$$\frac{n:}{:}\, a_{s-1} : a_{2s-1} : a_{3s-1} : \ldots : a_{rs-1} : \ldots$$

si ottiene la nuova progressione

$$\frac{n:}{:}\, \prod_{t=1}^{t=s-2} a_t : \prod_{t=1}^{t=s-2} a_{s+t} : \prod_{t=1}^{t=s-2} a_{2s+t} : \ldots : \prod_{t=1}^{t=s-2} a_{(r-1)s+t} : \ldots$$

di ragione $q^{s^n(s-2)}$.

In generale:

Data una progressione geometrica di ordine n *e di ragione* q

$$\frac{n:}{:}\, a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_r : \ldots$$

si ha che la successione

$$\prod_{t=1}^{t=s-u} a_t,\ \prod_{t=1}^{t=s-u} a_{s+t},\ \prod_{t=1}^{t=s-u} a_{2s+t}, \ldots, \prod_{t=1}^{t=s-u} a_{(r-1)s+t}, \ldots$$

forma una progressione d'ordine n *e di ragione* $q^{s^n(s-u)}$ *dove* u *può assumere uno qualunque dei valori* $0, 1, 2, \ldots, s-1$, *qualunque sia* s.

In modo analogo si giunge alla seguente proprietà:

Data una progressione geometrica di ordine n, *della classe* m, *di ragioni* $q_1, q_2, \ldots q_m$

$$m\, \frac{n:}{:}\, a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_r : \ldots$$

ponendo $q_1 q_2 \ldots q_m = p$ *si ha che la successione*

$$\prod_{t=1}^{t=m-u} a_t,\ \prod_{t=1}^{t=m-u} a_{m+t},\ \prod_{t=1}^{t=m-u} a_{2m+t}, \ldots, \prod_{t=1}^{t=m-u} a_{(r-1)m+t}, \ldots$$

forma una progressione geometrica d'ordine n, *della prima classe e di ragione* $p^{m^{n-1}(m-u)}$ *dove* u *può assumere uno qualunque dei valori*

$$0, 1, 2, \ldots m-1.$$

Albania, aprile 1917.

L. Tenca.

UNA GENERAZIONE DELLE CONICHE A CENTRO
ideata da E. TORRICELLI

(*Nota di* GINO LORIA)

In una pagina tuttora inedita degli Scritti di E. Torricelli (¹), la quale troverà posto nell'edizione in corso di stampa delle *Opere* del grande Faentino, si legge una notevole costruzione dell'iperbole, che, se anche venne poi avvertita da altri (il che io ignoro (²)), è certamente così poco nota che, se non m'inganno, merita di venire segnalata ai lettori di questo *Periodico*. Ecco come la espone l'eminente discepolo di Galileo:

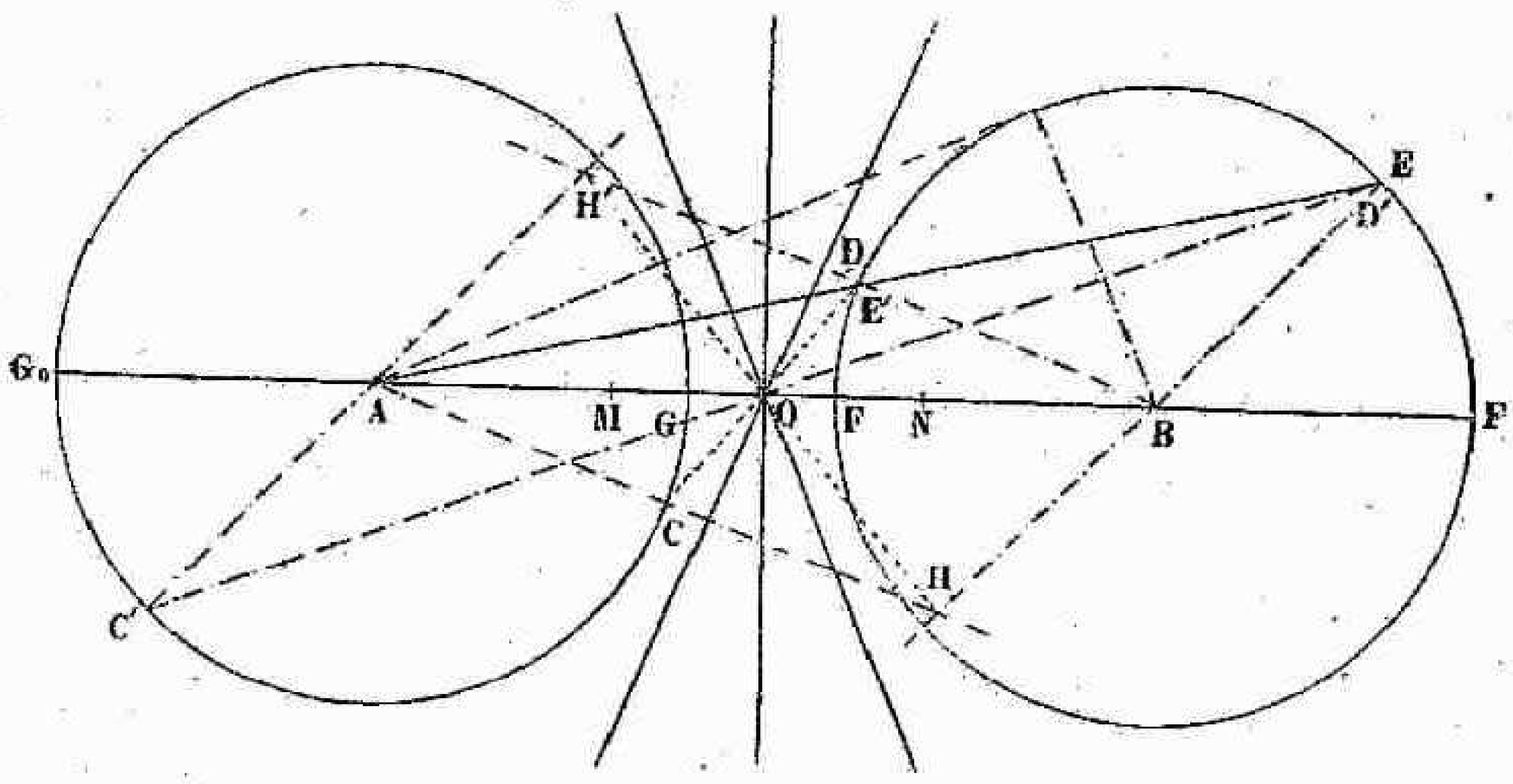

Fig. 1.

" Siano i dati foci (fig. 1) A, B et il lato trasverso AG, facciamo due circoli, il semidiametro de quali sia il lato trasverso della futura hyperbola. Prendansi eguali gli archi GC, FD e si prolunghino AC, AD e tirando per E et B la EBH sarà H nell'hyperbola ".

Altrove il Torricelli rileva che, quando la trasversale ADE diviene tangente al cerchio di centro B, le rette AC e BE divengono parallele; donde il mezzo per trovare gli asintoti della curva in questione. Ciò è un semplice corollario della precedente costruzione, il quale diviene ancora più manifesto osservando che i punti C e D sono

(¹) Il T. XXIX, carta 58 v., della raccolta *Discepoli di Galileo* depositata nella Biblioteca Nazionale di Firenze.

(²) Sarò grato a chiunque vorrà illuminarmi sopra questo punto per me interessantissimo.

simmetrici rispetto a O, punto medio del segmento AB. Va notat che questa costruzione degli asintoti è per il Torricelli sempre e fettuabile, perchè nella figura su cui egli ragiona il punto A è estern al cerchio di centro B.

Per verificare semplicemente l'esattezza della costruzione surri ferita, serviamoci d'un sistema di assi cartesiani ortogonali di cui l retta AB sia l'asse delle ascisse e O sia l'origine. Chiamiamo $2l$ l distanza fra i dati fuochi e r il raggio comune dei due circoli ausi liari; per le ipotesi fatte sulla disposizione della figura sarà $r < 2$

Indichiamo poi con α e β gli angoli DBF, EBF; in conseguenz le coordinate dei punti D, E, C saranno espresse come segue:

$$l - r\cos\alpha,\ 2\,\text{sen}\,\alpha;\quad l - r\cos\beta,\ r\,\text{sen}\,\beta;\quad -l + r\cos\alpha,\ -r\,\text{sen}\,\alpha.$$

Siccome i tre punti A, D, E per costruzione sono in linea retta sussisterà la relazione

$$\begin{vmatrix} -l & 0 & 1 \\ l - r\cos\alpha & r\,\text{sen}\,\alpha & 1 \\ l - r\cos\beta & r\,\text{sen}\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} l & 0 & \frac{r}{2} \\ \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha & 1 \\ \cos\beta & \text{sen}\,\beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

D'altronde le rette AC, BE hanno risp. per equazioni:

$$(2)\quad (x + l)\,\text{sen}\,\alpha + y\cos\alpha = 0,\qquad (3)\quad (x - l)\,\text{sen}\,\beta + y\cos\beta = 0.$$

Perciò l'equazione del luogo geometrico del punto H si ottiene eliminando α e β fra le equazioni (1), (2), (3).

Ora le (2), (3) danno

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{-y} = \frac{\cos\alpha}{x + l} = \frac{1}{\sqrt{(x + l)^2 + y^2}}$$

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{-y} = \frac{\cos\beta}{x - l} = \frac{1}{\sqrt{(x - l)^2 + y^2}}.$$

Sostituendo nella (1) i valori di $\text{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$, $\text{sen}\,\beta$ e $\cos\beta$ dati da queste relazioni si trova

$$\begin{vmatrix} l & 0 & \frac{r}{2} \\ x + l & 1 & \sqrt{(x + l)^2 + y^2} \\ x - l & 1 & \sqrt{(x - l)^2 + y^2} \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$\sqrt{(x+l)^2+y^2}-\sqrt{(x-l)^2+y^2}=r. \tag{4}$$

Per ridurre quest'equazione a forma razionale sono necessarie due elevazioni a quadrato, dopo di che essa assume il seguente aspetto

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{l^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=1 \tag{5}$$

e questo pone subito in evidenza l'esattezza dell'asserto torricelliano.

Ma la (5) mostra anche che se $2l$, invece di essere maggiore, fosse minore di r, il luogo del punto H sarebbe rappresentato dall'equazione

$$\frac{x^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2-l^2}=1$$

onde sarebbe, non più un'iperbola, ma un'ellisse avente ancora l'asse focale di lunghezza r. Dunque *la costruzione di Torricelli può servire per tutte le coniche a centro* (nella fig. 2 essa è applicata alla ellisse).

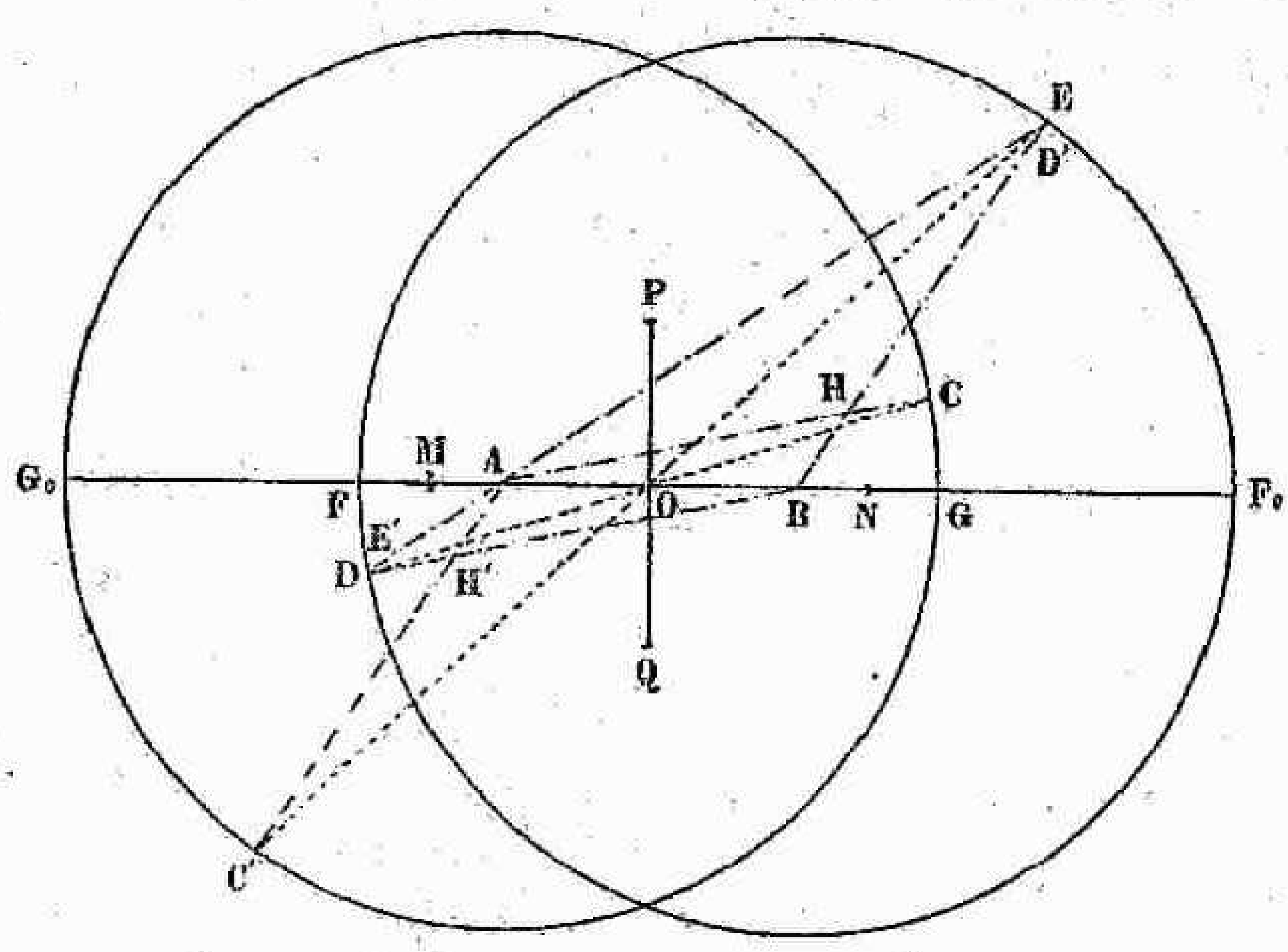

Fig. 2.

Chiuderemo questa Nota con alcune osservazioni.

I. L'equazione (4) è la traduzione in linguaggio algebrico della notoria relazione che passa fra i raggi vettori di un punto qualunque di una conica a centro; onde la costruzione esposta si può riguardare come un modo speciale per esprimere quella relazione, il quale conveniente dal punto di vista grafico.

II. Nella costruzione precedente (v. fig. 1 o fig. 2) si scambino l voci dei punti D, E; per maggior chiarezza chiamiamo il primo d questi punti E' ed il secondo D'; si otterrà allora invece di H, u punto H', il quale è il simmetrico di H rispetto al centro O dell curva. Emerge da ciò che, nel caso di figura considerato dal Torricelli, la genesi esposta dà entrambi i rami dell'iperbola, senza bisogno, come poteva credersi, di scambiare fra loro gli uffici dei du punti A, B e dei due circoli ausiliari; nel caso dell'ellisse si possono similmente ottenere tutti i punti della curva.

III. I punti F, G che intervengono nella costruzione torricellian sono due delle intersezioni delle circonferenze ausiliari con la rett dei centri. Come tali il Torricelli scelse i due perigei (1); ma all stesso risultato (anche nel caso dell'ellisse) si perviene preferendo due apogei, oppure un perigeo ed un apogeo, circostanza che pu talvolta riuscire utile nella delineazione di una conica a centro.

Genova, Luglio 1917.

PRODOTTI APPROSSIMATI

(Nota del Dott. Prof. VIRGINIA VESIN)

In Geometria, per calcolare $2\pi r$, πr^2 e simili, ove r sia espresso in cifre, e si vogliano alcune cifre del prodotto, bisogna fare un calcolo approssimato.

La maggioranza dei trattati di Geometria ad uso delle scuole non parla di tale questione; altri danno esempi con cifre non esatte. Pochi autori trovano le cifre esatte, per via più o meno rapida.

Mi propongo di esporre come si possa trattare simile questione nelle scuole medie.

a) La scrittura:

$$V_7\pi = 3{\cdot}1415926$$

si legge: "Il valore con 7 cifre decimali di π è 3·1415926" (2).

(1) Per brevità chiamo *perigeo* ed *apogeo* di un punto rispetto ad un cerchio appartenente ad un piano passante per quel punto il punto della periferia situato alla distanza minima o massima dal dato.

(2) Il punto che si vede in alto tra le cifre 3 ed 1 è il punto decimale.

Di qui, cancellando alcune cifre, si ha:

$$V_3\,\pi = 3{\cdot}14$$
$$V_4\,\pi = 3{\cdot}1415$$
$$V_5\,\pi = 3{\cdot}14159$$
ecc....

b) X rappresenta il numero *dieci*, base della numerazione.

Quindi: X^0; X^1; X^2; X^{-1}; X^{-2}, si possono leggere: " unità, decine, centinaia, decimi, centesimi, ecc.... ".

c) Se x è un numero reale positivo, ed n è un numero naturale, si ha:

$$V_n x \leqq x < V_n x + X^{-n}$$

cioè: " Il valore con n cifre decimali del numero x è minore di x, (od eguale, quando tutte le cifre dopo la n^{ma} siano nulle), ed x è minore dello stesso numero aumentato di una unità dell'ultimo ordine decimale ".

Problema I. — *Una circonferenza ha per raggio* m 2; *calcolarne con 2 cifre decimali la lunghezza in metri, ovvero:*

Calcolo di $V_2\,(4 \times \pi)$.

Soluzione.

Prendendo π con 3 cifre decimali, si ha:

$$V_3\pi = 3{\cdot}141 < \pi < \text{idem} + X^{-3}.$$

ove la parola " idem " sta ad indicare il medesimo numero scritto nel primo membro della limitazione.

Moltiplico per 4 i singoli membri di questa limitazione:

$$4 \times V_3\pi = 12{\cdot}564 < 4 \times \pi < \text{idem} + 4 \times X^{-3}.$$

ove anche qui la parola " idem " sta per indicare il medesimo numero al primo membro della limitazione, cioè indica 12·564.

Dunque

$$12{\cdot}564 < 4 \times \pi < 12{\cdot}568.$$

onde

$$V_2(4 \times \pi) = 12{\cdot}56.$$

Risposta.

La circonferenza data è lunga *m* 12·56 e frazione di centimetro [1].

Problema II. — *Data una circonferenza di diametro* m 7, *se ne calcoli la lunghezza con 2 cifre decimali, ovvero:*

---

[1] Uso la parola *frazione* nel significato volgare ed etimologico, cioè di quantità minore di 1.

Calcolo di V_2 $(7 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Prendendo π con 3 cifre decimali si ha:

$$V_3\pi = 3{\cdot}141 < \pi < \text{idem} + X^{-3}.$$

Moltiplico per 7:

$$7 \times V_3 \pi = 21{\cdot}987 < 7 \times \pi < \text{idem} + 7 \times X^{-3} = 21{\cdot}994.$$

Si conclude:

$$V_2(7 \times \pi) = 21{\cdot}98, \text{ ovvero } = 21{\cdot}99.$$

OSSERVAZIONE I. — Questa risposta, per cui del valore richiesto si danno due espressioni differenti di una unità dell'ultimo ordine decimale, si ritiene sufficiente in pratica. Se si vuole decidere quale di questi numeri sia il vero valore, allora si prenda π con una cifra decimale di più, quindi si faccia il prodotto per 7.

Si ha:

$$V_4\pi = 3{\cdot}1415 < \pi < \text{idem} + X^{-4}$$
$$7 \times V_4\pi = 21{\cdot}9905 < 7 \times \pi < \text{idem} + 7X^{-4} = 21{\cdot}9912.$$

Si conclude:

$$V_2(7 \times \pi) = 21{\cdot}99.$$

Risposta.

La circonferenza data è lunga $m\,21{\cdot}99$ e frazione di centimetro.

OSSERVAZIONE II. — Si può anche dedurre che $V_3(7 \times \pi) = 21{\cdot}990$ ovvero $= 21{\cdot}991$.

PROBLEMA III.

Calcolo di V_3 $(100 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Moltiplico π per 100, cioè trasporto il punto decimale di 2 posti verso destra e prendo 3 cifre decimali. Ciò equivale a prendere π con 5 cifre decimali e trasportare poi il punto decimale di 2 posti.

Cioè:

$$V_3\,(100 \times \pi) = 100 \times V_5\pi = 314{\cdot}159.$$

PROBLEMA IV.

Calcolo di V_3 $(0{\cdot}1 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Moltiplico π per $0{\cdot}1$, cioè trasporto a sinistra il punto decimale di un posto, poi prendo 3 cifre decimali.

Concludo:

$$V_3\,(0{\cdot}1 \times \pi) = 0{\cdot}314.$$

PROBLEMA V.

Calcolo di V_2 $(200 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Osservo che:

$$200 \times \pi = 2 \times (100 \times \pi).$$

Prendo $100 \times \pi$ con 3 cifre decimali, (problema III) e poi moltiplico per 2 (problema II).

Si ha:

$$V_3(100 \times \pi) = 314 \cdot 159 < 100 \times \pi < \text{idem} + X^{-3}.$$

Onde:

$$2 \times V_3(100 \times \pi) = 628 \cdot 318 < 200 \times \pi < \text{idem} + 2 \times X^{-3} = 628 \cdot 320.$$

Concludo che:

$$V_2 \times (200 \times \pi) = 628 \cdot 31.$$

PROBLEMA VI.

Calcolo di V_2 $(0 \cdot 5 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Prendo $0 \cdot 1 \times \pi$ con tre cifre decimali, poi moltiplico per 5.

Si ha:

$$V_3(0 \cdot 1 \times \pi) = 0 \cdot 314 < 0 \cdot 1 \times \pi < \text{idem} + X^{-3}.$$

Onde:

$$5 \times V_3(0 \cdot 1 \times \pi) = 1 \cdot 570 < 0 \cdot 5 \times \pi < \text{idem} + 5 \times X^{-3} = 1 \cdot 575.$$

Concludo:

$$V_2(0 \cdot 5 \times \pi) = 1 \cdot 57.$$

PROBLEMA GENERALE.

Calcolo di V_2 $(234 \cdot 56 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Osservo che:

$$\begin{aligned} 234 \cdot 56 \times \pi &= (200 + 30 + 4 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot 06) \times \pi \\ &= 2 \times (100\pi) + 3 \times (10\pi) + 4\pi + 5 \times (0 \cdot 1\pi) + 6 \times (0 \cdot 01\pi). \end{aligned}$$

Prendo i valori con 4 cifre decimali di 100π, 10π, 4π, $0 \cdot 1\pi$, $0 \cdot 01\pi$, faccio le moltiplicazioni, e la somma:

$$\begin{array}{lrcl} 2 \times V_4(100\pi) = & 628 \cdot 3184 < & 200\pi < \text{idem} + & 2 \times X^{-4} \\ 3 \times V_4(10\pi) = & 94 \cdot 2477 < & 30\pi < \text{idem} + & 3 \times X^{-4} \\ 4 \times V_4\pi = & 12 \cdot 5660 < & 4\pi < \text{idem} + & 4 \times X^{-4} \\ 5 \times V_4(0 \cdot 1\pi) = & 1 \cdot 5705 < & 0 \cdot 5\pi < \text{idem} + & 5 \times X^{-4} \\ 6 \times V_4(0 \cdot 01\pi) = & 0 \cdot 1884 < & 0 \cdot 06\pi < \text{idem} + & 6 \times X^{-4} \\ \hline & 736 \cdot 8910 < & 234 \cdot 56\pi < \text{idem} + & 20 \times X^{-4}. \end{array}$$

Cioè:

$$736 \cdot 8910 < 234 \cdot 56\pi < 736 \cdot 8930.$$

Concludo:

$$V_2(234 \cdot 56 \times \pi) = 736 \cdot 89.$$

Osservazione. — Il numero 736·8910, che risulta dalle operazioni indicate, dicesi *prodotto di grado* 4 *di* 234·56 per π, e si indica con:

$$234{\cdot}56 \times_4 \pi.$$

In generale: se π è un numero qualunque, e se a è una cifra, cioè uno dei numeri 0, 1, 2,..., 9, allora si conviene che:

$$a \times_n \pi = a \times V_n \pi.$$
$$(a \times X^p) \times_n \pi = a \times V_n(X^p \pi).$$

Ed avendosi un numero con più cifre, lo si scriva come una somma di potenze di dieci:

$$a_2 a_1 a_0{\cdot}a_{-1} a_{-2} = a_2 X^2 + a_1 X^1 + a_0 + a_{-1} X^{-1} + a_{-2} X^{-2}.$$

Poi si faccia il prodotto di grado n di ogni termine per π, e la somma di questi prodotti parziali:

$$a_2 a_1 a_0{\cdot}a_{-1} a_{-2} \times_n \pi = (a_2 X^2) \times_n \pi + (a_1 X^1) \times_n \pi + a_0 \times_n \pi + \\ + (a_{-1} X^{-1}) \times_n \pi + (a_{-2} X^{-2}) \times_n \pi.$$

Se chiamo a il numero $a_2 a_1 a_0{\cdot}a_{-1} a_{-2}$, si ha dal ragionamento precedente:

$$a \times_n \pi < a \times \pi < a \times_n \pi + (\text{Somma delle cifre di } a) \times X^{-n}.$$

Se la somma delle cifre di a è minore di 100, (il che avviene certamente se a ha non più di 11 cifre), per calcolare $a \times \pi$ con $n-2$ cifre decimali, si calcoli $a \times_n \pi$, e si cancellino le due ultime cifre. Tutte le cifre rimaste sono esatte, salvo l'ultima che forse si deve aumentare di una unità; e precisamente, se aggiungendo ad $a \times_n \pi$ la somma delle cifre di a, moltiplicata per X^{-n}, (cioè tante unità dell'ultimo ordine decimale quant'è la somma delle cifre di a), la terz'ultima cifra non varia, allora tutte le $n-2$ cifre decimali sono esatte; altrimenti riesce ambigua di una unità l'ultima cifra conservata.

Ora risolverò i problemi numerici relativi a $2\pi r$ e πr^2, che si trovano nei trattati di Geometria che ho potuto consultare, trattati ad uso delle scuole medie italiane.

Nella maggioranza di quei trattati non è spiegato come si faccia il prodotto di π per un razionale; nemmeno sono portati esempi del genere. Tali trattati, benchè alcuni portino nel titolo: " ad uso delle scuole tecniche " non rispondono al programma. Similmente non rispondono al programma quelli che, pure non spiegando come si faccia la moltiplicazione per π, nè dando esempi relativi, propongono agli allievi degli esercizî in cui si esigono quelle cognizioni, quindi esercizî che gli allievi non possono risolvere.

Citerò ora quei trattati in cui sono dati uno o due esempi.

Esempio 1°.

Calcolo di $V_4\ (6{\cdot}25 \times \pi)$

ovvero: calcolare con 4 cifre decimali l'area del cerchio che ha il raggio di m 2·5.

Soluzione.

Calcolo $6{\cdot}25 \times_6 \pi$, cioè calcolo il prodotto di grado 6 di 6·25 per π.

$$\begin{aligned} 6 \times V_6\pi &= 18{\cdot}849552 \\ 2 \times V_6(10^{-1}\pi) &= \ \ 0{\cdot}628318 \\ 5 \times V_6(10^{-2}\pi) &= \ \ 0{\cdot}157075 \end{aligned}$$

Sommando si ha: $6{\cdot}25 \times \pi > 19{\cdot}634945$

Somma delle cifre di $6{\cdot}25 = 13$

$$6{\cdot}25 \times \pi < 19{\cdot}634958.$$

Siccome aggiungendo 13 unità di ultimo ordine decimale al primo membro, non variano le prime 4 cifre decimali, si conclude:

$$V_4(6{\cdot}25 \times \pi) = 19{\cdot}6349.$$

Nota. — L'esempio precedente trovasi in Biffis, *Geometria elementare ad uso delle scuole tecniche*, sesta edizione, 1916, pag. 216.

L'Autore dà il risultato 19·6250 con errore di 99 unità dell'ultimo ordine decimale. Questo errore proviene dal fatto che l'A. prese per π il valore 3·14 insufficiente a dare 4 cifre decimali; ovvero, avendo preso quel valore, di avere scritto 4 cifre decimali.

Esempio 2°.

Calcolo di $V_6\ (0{\cdot}5184 \times \pi)$

ovvero: calcolare con 6 cifre decimali, l'area del cerchio il cui raggio è m 0·72.

Soluzione.

Calcolo $0{\cdot}5184 \times_8 \pi$.

$$\begin{aligned} 5 \times V_8(10^{-1}\pi) &= 1{\cdot}57079630 \\ 1 \times V_8(10^{-2}\pi) &= \ \ {\cdot}03141592 \\ 8 \times V_8(10^{-3}\pi) &= \ \ {\cdot}02513272 \\ 4 \times V_8(10^{-4}\pi) &= \ \ {\cdot}00125660 \end{aligned}$$

Sommando si ha $0{\cdot}5184 \times \pi > 1{\cdot}62860154$

Somma delle cifre di $0{\cdot}5184 = 18$

$$0{\cdot}5184 \times \pi < 1{\cdot}62860172.$$

Concludo:

$$V_6(0{\cdot}5184 \times \pi) = 1{\cdot}628601.$$

Nota. — Il Biffis (libro citato, pag. 216) dice: 1·627776 con errore di 825 unità dell'ultimo ordine decimale.

ESEMPIO 3°.

Calcolo $V_3\,(13{\cdot}4 \times \pi)$.

SOLUZIONE.

Calcolo $13{\cdot}4 \times_5 \pi$.

$$\begin{array}{lcr} V_5(10\pi) & = & 31{\cdot}41592 \\ 3 \times V_5\pi & = & 9{\cdot}42477 \\ 4 \times V_5(10^{-1}\pi) & = & 1{\cdot}25660 \\ \hline & & 42{\cdot}09729 \\ & & 8 \\ \hline & & 42{\cdot}09737. \end{array}$$

Concludo:

$$V_3\,(13{\cdot}4 \times \pi) = 42{\cdot}097.$$

NOTA. — L'esempio precedente trovasi in FAIFOFER, *Geometria intuitiva ad* ... *delle scuole tecniche e normali*, 39ma edizione, pag. 120.

Vi si legge per risposta: 39·416, e queste cifre non esatte si trovano ne... numerose edizioni del libro del compianto Autore.

ESEMPIO 4°.

Calcolo di $V_0 p$, ove $p = 7701{\cdot}4 \times \pi$.

I^a SOLUZIONE.

Eseguendo le moltiplicazioni usuali, che qui sopprimo per brevità, si ha:

$$p > 7701{\cdot}4 \times 3{\cdot}14159 = 24194{\cdot}641226$$
$$p < \qquad\qquad\quad 60 = 24194{\cdot}718240.$$

Si conclude:

$$V_0 p = 24194.$$

NOTA. — Questo esempio, con questa soluzione trovasi in LO MONACO, *G...metria intuitiva*, anno 1915, pag. 167.

II^a SOLUZIONE.

Eseguisco come sopra la moltiplicazione, si ha:

$$p > 7701{\cdot}4 \times 3{\cdot}14159 = 24194{\cdot}641226.$$

Per avere il prodotto $7701{\cdot}4 \times (3{\cdot}14159 + X^{-5})$, non è necessario esegu... una nuova moltiplicazione, ma basta aggiungere al prodotto precedente il num... $7701{\cdot}4 \times X^{-5} = 0{\cdot}077014$, ed ho:

$$p < 24194{\cdot}718240.$$

Concludo, come prima:

$$V_0 p = 24194.$$

III^a SOLUZIONE.

Calcolo $7701{\cdot}4 \times_2 \pi$.

$$\begin{array}{lcr} 7V_2\,(10^3\pi) & = & 21991{\cdot}13 \\ 7V_2\,(10^2\pi) & = & 2199{\cdot}05 \\ 1V_2\pi & = & 3{\cdot}14 \\ 4V_2\,(10^{-1}\pi) & = & 1{\cdot}24 \\ \hline & & 24194{\cdot}56 \\ & & 19 \\ \hline & & 24194{\cdot}75 \end{array}$$

onde:

$$V_0 p = 24194.$$

Nota. — Questa III^a soluzione è molto più rapida delle precedenti, perchè nella I^a soluzione si deve moltiplicare il numero 7701·4 che ha 5 cifre per il numero 314159 che ne ha 6, facendo così 30 moltiplicazioni di una cifra per una cifra; e nella seconda moltiplicazione se ne fanno altri 30; in tutto 60 prodotti di una cifra per una cifra.

Nella II^a soluzione si fanno in tutto 30 prodotti. Nella III^a soluzione si fanno solo 20 prodotti di una cifra per una cifra.

Esempio 5°.

Calcolo di $V_1(73{\cdot}45 \times \pi)$

I^a Soluzione.

Faccio la moltiplicazione usuale di 73·45 per $3{\cdot}141 = V_3\pi$.

$$\begin{array}{rcl}
0{\cdot}05 \times 3{\cdot}141 & = & 0{\cdot}15705 \\
0{\cdot}4 \times 3{\cdot}141 & = & 1{\cdot}2564 \\
3 \times 3{\cdot}141 & = & 9{\cdot}423 \\
70 \times 3{\cdot}141 & = & 219{\cdot}87 \\
\hline
73{\cdot}45 \times 3{\cdot}141 & = & 230{\cdot}70645 \quad < 73{\cdot}45 \times \pi. \\
 & & 7345 \\
\hline
 & & 230{\cdot}77990 \quad > 73{\cdot}45 \times \pi.
\end{array}$$

Concludo:

$$V_1(73{\cdot}45 \times \pi) = 230{\cdot}7.$$

Nota. — Questo esempio, con questa soluzione trovasi in Pensa, *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie inferiori*, 1^a edizione 1912 — 8^a edizione pag. 183.

II^a Soluzione.

Calcolo $73{\cdot}45 \times_3 \pi$.

$$\begin{array}{rcr}
7 \times V_3(10\pi) & = & 219{\cdot}905 \\
3 \times V_3\pi & = & 9{\cdot}423 \\
4 \times V_3(10^{-1}\pi) & = & 1{\cdot}256 \\
5 \times V_3(10^{-2}\pi) & = & {\cdot}155 \\
\hline
 & & 230{\cdot}739 \\
 & & 19 \\
\hline
 & & 230{\cdot}758.
\end{array}$$

onde:

$$V_1(73{\cdot}45 \times \pi) = 230{\cdot}7.$$

Esempio 6°.

Calcolo di $V_1(72{\cdot}9 \times \pi)$.

I^a Soluzione.

Faccio la moltiplicazione usuale di 72·9 per $V_3\pi$.

$$\begin{array}{rcl}
0{\cdot}9 \times V_3\pi & = & 2{\cdot}8269 \\
2 \times V_3\pi & = & 6{\cdot}282 \\
70 \times V_3\pi & = & 219.87 \\
\hline
72{\cdot}9 \times V_3\pi & = & 228{\cdot}9789 \\
 & & 729 \\
\hline
 & & 229{\cdot}0518.
\end{array}$$

Quindi:

$$V_1(72{\cdot}9 \times \pi) = 228{\cdot}9, \text{ od } = 229{\cdot}0,$$

ed i prodotti di una cifra per una cifra sono in numero di $4 + 4 + 4 = 12$.

NOTA. — Questo esempio, con questa soluzione trovasi in PENSA, libro citato, pag. 134.

II^a SOLUZIONE.

Calcolo $72{\cdot}9 \times_8 \pi$.

$$\begin{array}{lcr} 7 \times V_8(10\pi) & = & 219{\cdot}905 \\ 2 \times V_8\pi & = & 6{\cdot}282 \\ 9 \times V_8(10^{-1}\pi) & = & 2{\cdot}826 \\ \hline & & 229{\cdot}013 \\ & & 18 \\ \hline & & 229{\cdot}031 \end{array}$$

quindi:

$$V_1(72{\cdot}9 \times \pi) = 229{\cdot}0.$$

ed i prodotti di una cifra per una cifra sono in numero $5 + 4 + 3 = 12$.

Perciò, eseguendo il prodotto graduale, collo stesso lavoro, si ottiene una cifra di più.

Così con una successione di problemi, esposi la definizione e le proprietà del prodotto graduale, nel caso in cui uno dei fattori ha un numero finito di cifre: e citai a titolo di onore i pochi libri ad uso delle scuole, nei quali tale questione è trattata, sia col calcolo approssimato, in cui si trovano cifre non esatte, sia con procedimento rigoroso, come negli ultimi, servendosi però della moltiplicazione ordinaria.

NOTEVOLI PROPRIETÀ DI DUE SUCCESSIONI

Si formino due successioni A e B tali che in ciascuna di esse ogni termine sia eguale alla semidifferenza tra il termine che lo segue e quello che lo precede, e tali che i primi due termini della successione A siano 1 e 2, ed i primi due termini della successione B siano 1 e 3.

Per tre termini consecutivi a_{n-1}, a_n e a_{n+1} della successione A si ha così:

$$a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2} \tag{1}$$

e per tre termini consecutivi b_{n-1}, b_n e b_{n+1} della successione B si ha egualmente:

$$b_n = \frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}. \tag{2}$$

Le due successioni così formate sono:

Successione A		Successione B	
1°	$a_1 = 1$	1°	$b_1 = 1$
2°	$a_2 = 2$	2°	$b_2 = 3$
3°	$a_3 = 5$	3°	$b_3 = 7$
4°	$a_4 = 12$	4°	$b_4 = 17$
5°	$a_5 = 29$	5°	$b_5 = 41$
6°	$a_6 = 70$	6°	$b_6 = 99$
7°	$a_7 = 169$	7°	$b_7 = 239$
8°	$a_8 = 408$	8°	$b_8 = 577$
9°	$a_9 = 985$	9°	$b_9 = 1393$
10°	$a_{10} = 2378$	10°	$b_{10} = 3363$
11°	$a_{11} = 5741$	11°	$b_{11} = 8119$
12°	$a_{12} = 13860$	12°	$b_{12} = 19601$
13°	$a_{13} = 33461$	13°	$b_{13} = 47321$
14°	$a_{14} = 80782$	14°	$b_{14} = 114243$
15°	$a_{15} = 195025$	15°	$b_{15} = 275807$
16°	$a_{16} = 470832$	16°	$b_{16} = 665857$
17°	$a_{17} = 1136689$	17°	$b_{17} = 1607521$
18°	$a_{18} = 2744210$	18°	$b_{18} = 3880899$
19°	$a_{19} = 6625109$	19°	$b_{19} = 9369319$
20°	$a_{20} = 15994428$	20°	$b_{20} = 22619537$
. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
n^{mo}	$a_n = \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2}$	n^{mo}	$b_n = \frac{b_{n+1} - b_{n-1}}{2}$.

Le proprietà di cui godono queste due successioni sono così importanti, e le formole che da esse se ne ricavano sono così eleganti, che meritano essere studiate, tanto più che di esse credo nessuno siasi fin oggi occupato.

Cominciamo col confrontare la successione A con la successione naturale dei numeri; scorgiamo subito che una sola diversità esiste nella loro formazione, ed è che mentre nella prima ciascun termine è uguale alla semidifferenza dei due termini contigui, nella seconda ciascun termine è uguale alla semisomma dei due termini contigui della successione stessa; in entrambe però il primo termine è 1 ed il secondo è 2.

Esiste quindi una certa analogia fra queste due successioni.

Identicamente esiste una certa analogia tra la successione B e la successione dei numeri dispari, giacchè anche qui la diversità consiste solo tra semidifferenza e semisomma, ma in entrambe il primo termine è 1 ed il secondo è 3.

Esporremo ora nelle seguenti formole e nei seguenti teoremi le proprietà principali delle nostre due successioni, non tralasciando di fare qualche opportuna applicazione e proporre anche qualch esercizio alla fine del presente studio.

Dalle formole fondamentali (1) e (2) con semplici trasposizioni d termini ricaviamo facilmente queste altre:

(3) $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ (4) $b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1}$

(5) $2a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$ (6) $2b_n = b_{n+1} - b_{n-1}$

(7) $a_{n-1} = a_{n+1} - 2a_n$ (8) $b_{n-1} = b_{n+1} - 2b_n$.

Di tre termini consecutivi di ciascuna delle due successioni es sendo noti i primi due, se ne può calcolare il terzo per mezzo dell formole (3) e (4), colle quali perciò si possono calcolare quanti s vogliono successivi termini di ciascuna delle due successioni stesse

TEOREMA 1°. — *I termini della successione* A *sono alternativament uno dispari ed uno pari, quelli della successione* B *sono tutti dispari.*

Infatti, dalla formola (5) scorgiamo che due termini alternati dell successione A differiscono per un numero pari $2a_n$, perciò sono o entrambi dispari o entrambi pari; ma il primo termine, 1, della successione A essendo dispari, saranno dispari tutti quelli di posto dispari ed essendo il secondo termine, 2, pari, saranno pari tutti i termini d posto pari.

I termini della successione B saranno invece tutti dispari perchè la formola (6) è identica alla (5) e perchè il primo termine 1 ed i secondo, 3, sono entrambi dispari.

TEOREMA 2°. — *La somma di due termini consecutivi della successione* A *è uguale al termine della successione* B *il cui posto è uguale a quello del maggiore dei due primi, e la differenza è uguale al termine della successione* B *il cui posto è uguale a quello del minore; cioè:*

$$\left.\begin{array}{l} a_{n+1} + a_n = b_{n+1} \\ a_{n+1} - a_n = b_n \end{array}\right\}. \tag{9}$$

Cominciando dalla prima parte del teorema, osserviamo che il secondo termine, 3, della successione B è uguale a $1 + 2$, cioè al primo più il secondo termine della successione A. Il terzo termine, 7, della successione B è uguale a $2 + 5$, cioè al secondo più il terzo della successione A. Il quarto termine, 17, della successione B è uguale a $5 + 12$, cioè al terzo più il quarto della successione A. Il quinto termine, 41, della successione B è uguale a $12 + 29$, cioè al quarto più il quinto della successione A.

Fin qui la legge viene verificata. Supponiamo che continuando ancora essa si verifichi sino al termine b_n della successione B, e che si abbia cioè:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_n &= a_n + a_{n-1}. \end{aligned}$$

Dimostreremo che la legge medesima si verificherà ancora pel termine seguente, cioè si avrà ancora:

$$b_{n+1} = a_{n+1} + a_n.$$

Infatti per la formola (3) essendo

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$$

ed

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$$

sommando sarà:

$$a_n + a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1} + a_{n-2}.$$

D'altra parte nella successione B per la (4) si avrà:

$$b_{n+1} = 2b_n + b_{n-1}$$

dove sostituendo a b_n e b_{n-1} i valori sopra indicati sarà:

$$b_{n+1} = 2(a_n + a_{n-1}) + (a_{n-1} + a_{n-2})$$

ossia riducendo,

$$b_{n+1} = 2\,a_n + 3a_{n-1} + a_{n-2}$$

e quindi finalmente:

$$b_{n+1} = a_n + a_{n+1}.$$

Ora, avendo noi verificato la legge sino al quinto termine della successione B, cioè: $41 = 12 + 29$, essa sussisterà anche per il sesto, poi per il settimo e così di seguito, sicchè la detta legge sarà vera in ogni caso.

Per la seconda parte del teorema osserviamo che essendo per la (3) $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ sarà pure, trasportando a_n al primo membro,

$$a_{n+1} - a_n = a_n + a_{n-1}.$$

Ma avendo trovato che $a_n + a_{n-1} = b_n$ sarà:

$$a_{n+1} - a_n = b_n. \qquad \text{c. d. d.}$$

Corollario 1°. — *La somma di due termini alternati della successione* A *è uguale alla differenza dei corrispondenti termini della successione* B, *cioè*:

$$a_{n+1} + a_{n-1} = b_{n+1} - b_{n-1}. \tag{10}$$

Chiamiamo *termini corrispondenti* delle due successioni, quei termini che occupano il medesimo posto in ciascuna delle successioni stesse.

Dalla prima delle due formole (9) si ha:

$$a_{n+1} + a_n = b_{n+1},$$

dalla seconda, per il termine b_{n-1} si ha pure:

$$a_n - a_{n-1} = b_{n-1}.$$

Sottraendo e riducendo si ha finalmente:

$$a_{n+1} + a_{n-1} = b_{n+1} - b_{n-1}.$$

COROLLARIO 2°. — *La semisomma e la semidifferenza di due termini consecutivi della successione* B *sono rispettivamente eguali a due termini consecutivi della successione* A.

Pel teorema precedente si ha (9):

$$a_{n+1} + a_n = b_{n+1}$$
$$a_{n+1} - a_n = b_n .$$

Addizionando e sottraendo e poi dividendo per 2 avremo:

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{b_{n+1} + b_n}{2} \\ a_n &= \frac{b_{n+1} - b_n}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

COROLLARIO 3°. — *Il prodotto di due termini alternati della successione* A *è uguale alla differenza dei quadrati dei due corrispondenti termini delle due successioni, il cui posto è intermedio a quello dei due primi, cioè:*

$$a_{n-1}\, a_{n+1} = b_n^2 - a_n^2. \qquad (12)$$

Infatti, le due formole (9) per lo stesso termine b_n dànno:

$$a_{n-1} + a_n = b_n$$
$$a_{n+1} - a_n = b_n$$

che si possono anche scrivere

$$a_{n-1} = b_n - a_n$$
$$a_{n+1} = b_n + a_n .$$

E moltiplicando membro a membro si ha finalmente:

$$a_{n-1}\, a_{n+1} = b_n^2 - a_n^2.$$

Esempi:

per $n = 3$ si ha: $2 \times 12 = 7^2 - 5^2$ ossia $24 = 49 - 25$
per $n = 4$ si ha: $5 \times 29 = 17^2 - 12^2$ ossia $145 = 289 - 144$.

TEOREMA 3°. — *Il doppio della somma dei quadrati di due termini consecutivi della successione* A *è uguale alla somma dei quadrati dei corrispondenti termini della successione* B, *cioè:*

$$2(a_n^2 + a^2_{n+1}) = b^2_n + b^2_{n+1} . \qquad (13)$$

Infatti, elevando al quadrato ciascuna delle due formole (9), sarà:

$$a^2_{n+1} + 2a_{n+1}\, a_n + a_n^2 = b^2_{n+1}$$
$$a^2_{n+1} - 2a_{n+1}\, a_n + a_n^2 = b^2_n .$$

Addizionando membro a membro e riducendo, sarà ancora:

$$2(a_n^2 + a^2_{n+1}) = b^2_n + b^2_{n+1} \qquad \text{c. d. d.}$$

Esempi:

per $n=3$ si ha $2(5^2+12^2)=7^2+17^2$
per $n=4$ " $2(12^2+29^2)=17^2+41^2$
per $n=5$ " $2(29^2+70^2)=41^2+99^2$.

Teorema 4°. — *Il doppio della differenza dei quadrati di due termini alternati della successione* A *è uguale alla differenza dei quadrati dei corrispondenti termini della successione* B, *cioè:*

$$2(a^2_{n+1}-a^2_{n-1})=b^2_{n+1}-b^2_{n-1}. \tag{14}$$

Infatti, applicando il teorema precedente a due termini consecutivi, avremo:

$$2a^2_{n+1}+2a_n^2=b^2_{n+1}+b_n^2$$
$$2a_n^2+2a^2_{n-1}=b_n^2+b^2_{n-1}.$$

e sottraendo membro a membro, sarà:

$$2(a^2_{n+1}-a^2_{n-1})=b^2_{n+1}-b^2_{n-1}.$$

Esempi:

per $n=3$ si ha $2(12^2-2^2)=17^2-3^2$ ossia $2(144-4)=289-9$
per $n=4$ " $2(29^2-5^2)=41^2-7^2$ ossia $2(841-25)=1681-49$.

Teorema 5°. — *La differenza tra il doppio quadrato di un termine della successione* A *e del quadrato del corrispondente termine della successione* B, *è uguale* a $+1$ *per i termini di posto dispari ed* a -1 *per i termini di posto pari, cioè:*

$$2a_n^2-b_n^2=\pm 1\begin{cases}+1 \text{ per } n \text{ dispari}\\ -1 \text{ per } n \text{ pari.}\end{cases} \tag{15}$$

Infatti, non conoscendo tale differenza, supponiamo che essa sia uguale ad x per l'n^{mo} termine, cioè tale che si abbia

$$2a^2_n-b_n^2=x$$

ed uguale ad y pel termine seguente, cioè:

$$2a^2_{n+1}-b^2_{n+1}=y.$$

Sommando termine a termine avremo:

$$2(a^2_{n+1}+a_n^2)-(b^2_{n+1}+b^2_n)=x+y.$$

Per la formola (13) il primo membro di questa eguaglianza è uguale a zero, quindi anche $x+y=0$, cioè $x=-y$. Perciò per due termini consecutivi la differenza cercata sarà eguale, ma di segno contrario, mentre per due termini alternati tale differenza sarà eguale e collo stesso segno. Quindi per tutti i termini di posto pari tale differenza sarà lo stesso numero, come lo stesso numero, ma di segno contrario al primo, sarà per tutti i termini di posto dispari. Per $n=1$ questa differenza risulta $=+1$, perchè $2\times 1^2-1^2=+1$, sarà quindi pure eguale a $+1$ per $n=5$, cioè: $2 \times 5^2 - 7^2 = +1$, è cos per tutti i termini di posto dispari. Per $n=2$ tale differenza risult $= -1$, perchè $2 \times 2^2 - 3^2 = -1$, sarà perciò $= -1$ anche per $n=$ cioè: $2 \times 12^2 - 17^2 = -1$ e per tutti i termini di posto pari. C. d. d

Esempio:

$$
\begin{array}{llr}
\text{per } n = 7 & \text{si ha:} & 2 \times 169^2 - 239^2 = +1 \\
\text{,, } n = 8 & \text{,,} & 2 \times 408^2 - 577^2 = -1 \\
\text{,, } n = 9 & \text{,,} & 2 \times 985^2 - 1393^2 = +1 \\
\text{,, } n = 10 & \text{,,} & 2 \times 2378^2 - 3363^2 = -1.
\end{array}
$$

COROLLARIO. — *Il quadrato di un termine della successione* A *diminuito dal prodotto dei due termini contigui della stessa successione uguale a* $+1$ *od a* -1 *a seconda che il primo termine è di posto dispar o di posto pari, cioè*:

$$
a_n^2 - a_{n+1}\, a_{n-1} = \pm 1 \left\} \begin{array}{l} + \text{ per } n \text{ dispari} \\ - \text{ per } n \text{ pari.} \end{array} \right. \qquad (16
$$

La formola (15) può anche scriversi:

$$
a^2_n - (b_n^2 - a_n^2) = \pm 1
$$

per la formola (12) si ha inoltre:

$$
b_n^2 - a_n^2 = a_{n+1}\, a_{n-1}
$$

sostituendo, avremo quindi:

$$
a_n^2 - a_{n+1}\, a_{n-1} = \pm 1
$$

Esempio:

$$
\begin{array}{llr}
\text{per } n = 3 & \text{si ha:} & 5^2 - 2 \times 12 = +1 \\
\text{,, } n = 4 & \text{,,} & 12^2 - 5 \times 29 = -1 \\
\text{,, } n = 5 & \text{,,} & 29^2 - 12 \times 70 = +1 \\
\text{,, } n = 6 & \text{,,} & 70^2 - 29 \times 169 = -1.
\end{array}
$$

TEOREMA 6°. — *Il quadrato di un termine della successione* B *diminuito dal prodotto dei due termini contigui della stessa successione è eguale a* $+2$ *od a* -2 *a seconda che il primo è pari, oppure dispari, cioè*:

$$
b_n^2 - b_{n+1}\, b_{n-1} = \pm 2 \left\{ \begin{array}{l} +2 \text{ per } n \text{ pari} \\ -2 \text{ per } n \text{ dispari.} \end{array} \right. \qquad (17)
$$

Supponiamo infatti, che questa differenza sia eguale ad x e che la differenza pel termine seguente sia y, cioè tali che si abbia:

$$
\begin{gathered}
b_n^2 - b_{n-1}\, b_{n+1} = x \\
b^2_{n+1} - b_n b_{n+2} = y
\end{gathered}
$$

sommando sarà:

$$
b_n^2 + b^2_{n+1} - b_{n-1}\, b_{n+1} - b_n b_{n+2} = x + y
$$

mettendo b_n e b_{n+1} a fattor comune, sarà:

$$b_{n+1}(b_{n+1}-b_{n-1})-b_n(b_{n+2}-b_n)=x+y$$

sostituendo ai termini dentro le parentesi i valori dati dalla formola (6) si avrà:

$$b_{n+1}(2b_n)-b_n(2b_{n+1})=x+y$$

ossia:

$$2b_nb_{n+1}-2b_nb_{n+1}=x+y.$$

Il primo membro essendo uguale a zero sarà anche $x+y=0$ ossia $x=-y$. Collo stesso ragionamento fatto pel 5° teorema troviamo che la differenza è uguale a $+2$ per tutti i termini di posto pari ed uguale a -2 per tutti i termini di posto dispari.

Esempi:

per	$n=3$	si ha	$7^2-3\times 17=-2$
„	$n=4$	„	$17^2-7\times 41=+2$
„	$n=5$	„	$41^2-17\times 99=-2$
„	$n=6$	„	$99^2-41\times 239=+2.$

Teorema 7°. — *La somma dei quadrati di due numeri consecutivi, che risultano dalla semidifferenza e dalla semisomma di un termine di posto dispari della successione* B *coll'unità, è eguale al quadrato del corrispondente termine della successione* A, *cioè*:

$$\left(\frac{b_n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2=a_n^2 \text{ per } n \text{ dispari.} \tag{18}$$

Infatti, la formola (15) per n dispari dà $2a_n^2-b_n^2=1$, che può anche scriversi, dietro avere moltiplicato per 2,

$$2b_n^2+2=4a_n^2.$$

Aggiungendo e sottraendo $2b_n$ nel primo membro, avremo:

$$(b_n^2-2b_n+1)+(b_n^2+2b_n+1)=4a_n^2.$$

I termini che abbiamo posto dentro parentesi formano un quadrato perfetto, quindi sarà:

$$(b_n-1)^2+(b_n+1)^2=4a_n^2$$

e dividendo per 4, sarà finalmente

$$\left(\frac{b_n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2=a_n. \qquad \text{c. d. d.}$$

Esempio:

per	$n=1$	si ha	$0+1^2=1^2$
„	$n=3$	„	$3^2+4^2=5^2$
„	$n=5$	„	$20^2+21^2=29^2$
„	$n=7$	„	$119^2+120^2=169^2$
„	$n=9$	„	$696^2+697^2=985^2$
„	$n=11$	„	$4059^2+4060^2=5741^2.$

Osservazione. — Questo teorema fornisce molti di quei casi speciali in cui le applicazioni al teorema di Pitagora possono venire eseguite con calcolazioni semplicissime, quei casi speciali, cioè, in cui i tre lati del triangolo rettangolo sono dati tutti e tre da numeri razionali, così come 3, 4 e 5, i cui quadrati dànno la relazione

$$3^2+4^2=5^2.$$

Notiamo ancora che applicando uno di questi casi speciali si può con tutta esattezza tracciare sul terreno un angolo retto per mezzo delle sole misure di lunghezza, senza perciò nessun bisogno di goniometri o squadri agrimensori.

Avendo a disposizione, come quasi sempre avviene, una rolletta di 10 metri, tale angolo può venire tracciato molto agevolmente piegando la rolletta stessa in modo da formare un triangolo rettangolo, avente per lati rispettivamente m. 2,00, m. 2,10 e m. 2,90, giacchè i quadrati di questi numeri, come abbiamo visto, sono legati dal teorema di Pitagora, e la somma delle tre lunghezze non oltrepassa quella della rolletta stessa, ciò che non avviene scegliendo ad esempio le tre lunghezze m. 3, m. 4 e m. 5.

Corollario. — *La somma dei tre numeri, i cui quadrati sono legati dalla relazione espressa dal precedente teorema, è uguale al termine che segue quello della successione* A, *cioè:*

$$\frac{b_n-1}{2}+\frac{b_n+1}{2}+a_n=a_{n+1}. \tag{19}$$

Infatti per i primi due termini si ha:

$$\frac{b_n-1}{2}+\frac{b_n+1}{2}=b_n$$

che sostituendo nel 1° membro dà:

$$b_n+a_n=a_{n+1}.$$

la quale non è altro che la seconda delle formole (9) colla trasposizione del termine a_n dal primo al secondo membro.

Teorema 8°. — *La somma dei quadrati di due numeri consecutivi, che risultano dalla semidifferenza e dalla semisomma di un termine di posto pari della successione* B *coll'unità, è uguale al quadrato del corrispondente termine della successione* A *aumentando di* 1, *cioè*

$$\left.\left(\frac{b_n-1}{2}\right)^2+\left(\frac{b_n+1}{2}\right)^2=a_n^2+1\right\} \text{ per } n \text{ pari.} \tag{20}$$

Infatti, per n pari, dalla formula 15, abbiamo:

$$2a_n^2-b_n=-1$$

che possiamo scrivere:

$$b_n^2 + 1 = 2a_n^2 + 2$$

e moltiplicando per 2:

$$2b_n^2 + 2 = 4a_n^2 + 4a_n^2 + 4.$$

Aggiungendo e sottraendo nel primo membro il termine $2b_n$, sarà:

$$(b_n^2 + 2b_n + 1) + (b_n^2 - 2b_n + 1) + 4a^2_n + 4.$$

I termini che abbiamo posto dentro parentesi sono quadrati perfetti, perciò

$$(b_n + 1)^2 + (b_n - 1)^2 = 4(a_n^2 + 1)$$

e dividendo per 4 avremo finalmente

$$\left(\frac{b_n - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n + 1}{2}\right)^2 = a_n^2 + 1.$$

Esempi:

$$\begin{array}{llll}
\text{per } n = 2 & \text{si ha} & 1^2 + 2^2 & = 2^2 + 1 \\
\text{„ } n = 4 & \text{„} & 8^2 + 9^2 & = 12^2 + 1 \\
\text{„ } n = 6 & \text{„} & 49^2 + 50^2 & = 70^2 + 1 \\
\text{„ } n = 8 & \text{„} & 288^2 + 289^2 & = 408^2 + 1 \\
\text{„ } n = 10 & \text{„} & 1681^2 + 1682^2 & = 2378^2 + 1 \\
\text{„ } n = 12 & \text{„} & 9800^2 + 9801^2 & = 13860^2 + 1.
\end{array}$$

TEOREMA 9°. — *Il doppio prodotto di due termini consecutivi della successione A è uguale al prodotto dei corrispondenti termini della successione B aumentato o diminuito di 1 a seconda che il termine minore occupa posto dispari o posto pari, cioè:*

$$2a_n a_{n+1} = b_n b_{n+1} \pm 1 \begin{cases} +1 & \text{per } n \text{ dispari} \\ -1 & \text{per } n \text{ pari.} \end{cases} \qquad (21)$$

Infatti la formola (15) può scriversi, supposto n dispari,

$$2a_n^2 - 1 = b_n^2$$

e pel termine seguente:

$$2a^2_{n+1} + 1 = b^2_{n+1}.$$

Sottraendo dalla seconda la prima, si ha:

$$2(a^2_{n+1} - a_n^2) + 2 = (b^2_{n+1} - b^2_n)$$

e scomponendo in prodotto le due differenze di quadrati, sarà:

$$2(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) + 2 = (b_{n+1} - b_n)(b_{n+1} + b_n)$$

per le formole (9) e (11) avremo ancora

$$2b_n b_{n+1} + 2 = 4a_n a_{n+1}$$

dividendo per 2 e trasportando si ha finalmente

$$2a_n a_{n+1} = b_n b_{n+1} + 1 \text{ per } n \text{ dispari}$$
$$2a_n a_{n+1} = b_n b_{n+1} - 1 \text{ per } n \text{ pari.}$$

Esempi:

per $n=2$ si ha: $2(2 \times 5) = 3 \times 7 - 1$
" $n=3$ " $2(5 \times 12) = 7 \times 17 + 1$
" $n=4$ " $2(12 \times 29) = 17 \times 41 - 1$
" $n=5$ " $2(29 \times 70) = 41 \times 99 + 1.$

(Continua)

Ing. FILIPPO NICITA.

UNA OSSERVAZIONE SUL CALCOLO DI ALCUNI VALORI PROBABILI nelle prove ripetute

La probabilità P_α che un dato avvenimento si presenti α volte in m prove, in ciascuna delle quali abbia costantemente la probabilità p di presentarsi, è data, come si sa, dalla formola

$$P_\alpha = \frac{m!}{\alpha!\,(m-\alpha)!}\, p^\alpha (1-p)^{m-\alpha}.$$

Nella teoria delle prove ripetute, occorre calcolare i cosiddetti *valori probabili* delle potenze del numero α e della differenza $\alpha - mp$, cioè le sommatorie

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \alpha^r P_\alpha, \qquad \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} (\alpha - mp)^r P_\alpha,$$

per $r = 1, 2, \ldots$.

A quest'effetto si parte dalla relazione che si ottiene derivando rispetto a p l'indentità

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} P_\alpha = 1.$$

Si capisce però subito come non debba esser necessario ricorrere alla nozione di derivata in una questione di aritmetica elementare. Basta infatti osservare che si ha

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-r)P_\alpha =$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-r)\, p^{r+1} \sum_{\alpha=r+1}^{\alpha=m} \frac{(m-r-1)!}{(\alpha-r-1)!\,(m-\alpha)!}\, p^{\alpha-r-1} q^{m-\alpha} =$$
$$= m(m-1)(m-2)\ldots(m-r)p^{r+1}(p+q)^{m-r-1} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-r)p^{r+1},$$

essendo

$$q = 1 - p.$$

E si può anche scrivere

$$(1)\quad \Sigma\alpha^{r+1}P_\alpha - A_{r1}\Sigma\alpha^rP_\alpha + A_{r2}\Sigma\alpha^{r-1}P_\alpha + \dots$$
$$\dots + (-1)^rA_{rr}\Sigma\alpha P_\alpha = m(m-1)(m-1)\dots(m-r)p^{r+r},$$

la quale dà $\Sigma\alpha^{r+1}P_\alpha$ quando si conoscano $\Sigma\alpha P_\alpha$, $\Sigma\alpha^2P_\alpha, \dots, \Sigma\alpha^rP_\alpha$.

In essa A_{rs} $(s = 1, 2, 3, \dots r)$ rappresenta la somma di tutti i possibili prodotti, ciascun formato di s fattori presi tra i numeri $1, 2, \dots r$.

Avute le sommatorie anzidette, il valor probabile della $(r+1)^{ma}$ potenza di $\alpha - mp$ si ha ovviamente dalla formola

$$(2)\quad \Sigma(\alpha - mp)^{r+1}P_\alpha = \Sigma\alpha^{r+1}P_\alpha - \binom{r+1}{1} mp\Sigma\alpha^rP_\alpha +$$
$$+ \binom{r+1}{2} m^2p^2\Sigma\alpha^{r-1}P_\alpha + \dots + (-1)^{r+1}m^{r+1}p^{r+1}.$$

(Per il calcolo di questo valore probabile basta, anzi, conoscere le somme $\Sigma\alpha^rP_\alpha$, $\Sigma\alpha^{r-1}P_\alpha, \dots$; giacchè la $\Sigma\alpha^{r+1}P_\alpha$ può tra la (1) e la (2) venire eliminata).

Si ha successivamente dalla (1) per $r = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$\Sigma\alpha P_\alpha = mp$$
$$\Sigma\alpha^2P_\alpha = mp\{1 + (m-1)p\}$$
$$\Sigma\alpha^3P_\alpha = mp\{1 + 3(m-1)p + (m-1)(m-2)p^2\}$$
$$\Sigma\alpha^4P_\alpha = mp\{1 + 1(m-7)p + 6(m-1)(m-2)p^2 + (m-1)(m-2)(m-3)p^3\}.$$

. . . .

. . . .

E dalla (2) poi

$$\Sigma(\alpha - mp)P_\alpha = 0$$
$$\Sigma(\alpha - mp)^2P_\alpha = mp(1-p) = mpq$$
$$\Sigma(\alpha - mp)^3P_\alpha = mp(1 - 3p + 2p^2) = mpq(q-p)$$
$$\Sigma(\alpha - mp)^4P_\alpha = mp\{1 + (3m-7)p - 6(m-2)p^2 + 3(m-2)p^3\} =$$
$$= mpq\{1 + 3(m-2)pq\}$$

. . . .

. . . .

C. Mineo.

QUISTIONI PROPOSTE

1819. Pel centro di curvatura C corrispondente ad un punto M d'una curva (C) si tracci una parallela a Oy che incontri OM nel punto P e Ox in R. Determinare la curva (c) tale che $RP = \frac{1}{n} MD$, essendo D il piede della perpendicolare condotta da M ad Oy.

1820. La bisettrice dell'angolo degli assi Ox, Oy incontra in A la tangente nel punto M di una curva. Determinare la curva tale che le ordinate dei punti A e M siano in un rapporto costante.

1821. La normale ad una curva (C) nel punto M incontra Oy in N; sia C il centro di curvatura corrispondente al punto M, CR la sua distanza da Ox. Trovare la curva C tale che $CR = \frac{1}{n} ON$.

J. Rose.

BIBLIOGRAFIA

Berzolari. — *Geometria analitica* - I. *Il metodo delle coordinate* - II. *Curve e superficie del secondo ordine.* Manuali Hoepli (serie scientifica) 388-389, 390-391.

L'illustre autore ha raccolto in questi volumetti della pregevolissima e notissima raccolta di manuali Hoepli, il corso di geometria analitica che egli svolge da molti anni all'Università di Pavia in forma chiara, rigorosa senza pedanterie, breve e concettosa. L'insegnamento della matematica nel primo biennio universitario dovendo servire non soltanto ai pochi studenti di matematiche pure che si dedicano all'insegnamento, ma anche, anzi sopratutto, ai moltissimi futuri ingegneri, per i quali la matematica è mezzo e non fine, è ben naturale che le opere di piccola mole e di relativamente grande contenuto debbano essere accolte dal grande pubblico meglio che i grossi volumi.

Seguendo le traccie del D'Ovidio e di molti altri il Berzolari nel primo volume espone ampiamente il metodo delle coordinate sotto i suoi diversi aspetti e lo applica sopratutto allo studio delle forme lineari di prima, seconda e terza specie, mentre nel secondo volume fa uno studio metodico e diligente delle coniche e quadriche, partendo dall'equazione generale del secondo grado fra due o tre variabili.

In ambedue i volumi l'A. adopera di preferenza le coordinate cartesiane sia perchè sono più facilmente comprese dai principianti, sia perchè nelle applicazioni dell'Analisi alla Geometria e nella Meccanica occorre fare uso quasi esclusivo di esse. Però gli ultimi capitoli del primo volume sono consacrati allo studio dei vari sistemi di coordinate proiettive e alla applicazione delle medesime allo studio delle proprietà grafiche delle figure. E nel secondo volume studia dapprima le proprietà proiettive delle coniche e delle quadriche per mezzo delle loro equazioni in coordinate proiettive omogenee e passa poi allo studio delle proprietà metriche per mezzo delle coordinate cartesiane, come caso particolare delle coordinate proiettive.

Notevoli particolarmente per originalità di trattazione sono i capitoli relativi alla rappresentazione parametrica delle coniche, alle sezioni circolari ed ai fuochi delle quadriche.

Riproduciamo l'indice per dare ai lettori una più chiara idea del contenuto e della disposizione delle varie materie.

K.

Il 17 Luglio scorso si spengeva a Padova il

Prof. GIUSEPPE VERONESE

che da 35 anni era onore e decoro di quella illustre e gloriosa Università. La sua perdita è un grave lutto per la Università di Padova, alla quale egli consacrò la parte migliore della sua attività di scienziato e d'insegnante; per tutti i cultori della scienza matematica che riconoscevano in lui un maestro illustre ed amato; per l'Italia che perde in lui uno dei suoi migliori e più autorevoli figli, il quale nella scienza, nella politica, nell'insegnamento lascia tracce imperiture del suo passaggio.

Perchè Giuseppe Veronese non era lo scienziato che vive interamente assorto nella ricerca delle alte vette del sapere, chiuso entro le mura dello studio e della biblioteca, non sentendo il flusso della vita comune di tutti, di ogni giorno e di ogni ora, che passa con alternative di calme e di tempeste accanto al chiuso sacrario della scienza senza sfiorarlo. Le tempeste egli le conosceva e le aveva affrontate vigorosamente e vittoriosamente fino dalla prima gioventù; ed in quelle prime tempeste egli aveva temprato il carattere, aveva afforzato l'anima ed il corpo per affrontare le maggiori e più aspre battaglie della vita con indomita energia, con la ferrea volontà di vincere, con l'occhio fisso verso i più nobili e più alti ideali, in guisa da raggiungere una delle più elevate posizioni scientifiche e sociali, essendo partito da umilissime origini.

Giuseppe Veronese infatti, nato a Chioggia il 7 Maggio 1854 da un modesto decoratore, studiò da giovinetto disegno e pittura; impiegato nel 1872 come disegnatore in un'impresa per la sistemazione del Danubio, visse a Vienna vestendo la blusa dell'operaio; dal 1873 al 1876 studiò al Politecnico di Zurigo, lavorando nello stesso tempo per guadagnarsi la vita. Nel 1877 passava a Roma ove si laureava, sotto gli auspici del Cremona, che lo prendeva poi per suo assistente, e nel 1882 vinceva il concorso alla cattedra di Geometria analitica nella R. Università di Padova, cattedra che insieme a quella di Geometria Superiore ha tenuta e illustrata fino all'ultimo giorno della sua vita.

La brillante posizione scientifica e sociale conquistata in giovane età, a prezzo di fatiche, di stenti, di privazioni, non fu per lui la comoda nicchia, ove si adagiano beatamente le boriose nullità; non fu il luogo di quiete e di riposo da dove si possono guardare indifferentemente e con aria di superiorità le lotte e le miserie degli altri; ma fu la palestra più vasta e più nobile nella quale egli poteva esplicare la molteplice ed inesaurabile attività della sua anima, e da cui la genialità veramente latina della sua mente elettissima poteva spiccare il volo per le maggiori altezze. E così mentre continuava con fervore gli studi geometrici, che aveva iniziato brillantemente fin da quando era studente con le ricerche sull'esagrammo di Pascal (che avevano dato occasione ad altro importante lavoro del Cremona suo maestro) e pubblicava le sue ricerche sugli *iperspazi* e poi sui fondamenti della geometria, non disprezzava gli studi elementari, e redigeva libri di testo per le scuole secondarie di ogni ordine e specie, prendeva parte attiva ed assidua a tutte le discussioni didattiche, faceva sentire la sua voce autorevole in tutti i congressi scientifici dei quali era assiduo frequentatore. Intanto lo eleggevano loro socio, le maggiori accademie italiane come la R. Accademia dei Lincei, la R. Accademia delle scienze di Torino, il R. Istituto Lombardo, il R. Istituto Veneto, del quale fu anche presidente per due anni, ecc.; e l'Università di Aberdeen lo nominava dottore *honoris causa*.

Accanto alla attività scientifica e didattica si svolgeva la sua attività politica, senza che l'una nuocesse all'altra. Per lungo tempo consigliere comunale della nativa Chioggia, poi deputato per due legislature (a partire dal 1897) curò con amore, con competenza, con grande autorità gli interessi della sua città.

E con alacrità sempre giovanile curò gli interessi della sua seconda patria, Padova. Dal 21 Luglio 1899 egli ne era consigliere comunale dei più autorevoli ed ascoltati, sia che appartenesse alla maggioranza, sia che parlasse dai banchi della minoranza. Tenne anche altre importanti cariche cittadine, fra le quali quelle di presidente delle Giunte di vigilanze dell'Istituto tecnico e della R. Scuola professionale Selvatico.

Ai lavori del Senato, al quale apparteneva da vari anni, egli partecipava con assiduità, facendo sentire la sua autorevole e ascoltata parola, specialmente quando erano in discussione le quistioni in cui era più particolarmente competente, cioè le questioni scolastiche, e le quistioni che riguardavano il rinnovamento industriale ed economico dell'Italia e particolarmente della regione Veneta. Fu anche vice-presidente del Consiglio Superiore delle acque e foreste e Presidente dell'Istituto idrotecnico di Strà per lo studio sperimentale dei problemi idraulici.

Ottimo patriota, Giuseppe Veronese fu uno dei primi e più ferventi propugnatori della necessità per l'Italia di assumere il posto che, non solo i suoi interessi, ma anche i principi ideali di libertà e di diritto in nome dei quali era nata, le assegnavano, quando la feroce avidità di egemonia universale dei due barbari imperatori centrali accese il terribile incendio, nel quale doveva essere travolto il mondo intero e dal quale, come da un immane crogiuolo dovrà uscire purificato e migliorato il nuovo mondo di domani. E stoicamente vide partire per il fronte i suoi due figli, dolente che l'età non gli consentisse di accompagnarli.

Ben disse il Senatore Polacco, porgendo in nome dell'Istituto Veneto l'estremo saluto alla salma lacrimata: " con Giuseppe Veronese una gran luce si è spenta ". Sì luce di sapere, luce d'intelletto, luce di fede e di patriottismo, luce che servì a tanti per scorgere la retta via e che troppo presto si è spenta!

L'uomo retto e valoroso, dopo aver degnamente compiuta la sua opera di cittadino di scienziato, di insegnante, dopo avere lasciato tracce, durevoli delle molteplici manifestazioni della sua mente geniale, della sua anima elettissima, è sceso serenamente nella tomba fra l'ammirazione e il rimpianto universale, lasciando caro ricordo di sè in tutti. La sua memoria vivrà lungamente nelle sue opere, ma in modo particolare vivrà nei cuori di quanti, avendo avuto (come chi scrive) la fortuna di conoscerlo più intimamente e di appartenere al ristretto circolo dei veri amici, sanno che la bontà e la gentilezza dell'animo erano pari all'altezza dell'ingegno.

G. L.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 26 Agosto 1917

Sull'insegnamento della matematica nelle scuole medie [1]

Mentre siamo ancora in attesa delle promesse riforme dei programmi in genere delle scuole medie, credo opportuno che in questo *Periodico* apparisca qualche studio sull'insegnamento della matematica, e specialmente su quanto converrà fare perchè esso meglio si presenti ai tempi cui andiamo incontro, che inevitabilmente esigeranno radicali innovazioni. Nella speranza di condurre i Colleghi ad occuparsi della importante questione, comincio io col fare conoscere alcune idee in proposito, avendo riguardo in special modo alle scuole medie superiori. Chi mi condannerà per troppa arditezza voglia almeno accordarmi le *circostanze attenuanti*, in considerazione del lungo tempo che ho passato nell'insegnamento, e dei miei continui studi d'indole didattica che, se a nulla hanno giovato, costituiscono qualche dimostrazione del mio sincero amore per la scuola.

***

1. Naturalmente, per giungere ad una felice soluzione del complesso problema relativo all'insegnamento della matematica nelle scuole medie, non basta fissare *quanto* si deve insegnare, e come debbono essere *distribuite* le varie parti nei diversi ordini di scuole, e nei successivi anni di corso. Occorre sopratutto indicare quale debba essere il *procedimento* da seguire per ottenere i migliori risultati.

In questi ultimi tempi — superato il periodo acuto degli studi critici sui fondamenti, dalla cui influenza l'insegnamento medio non poteva completamente sottrarsi — una certa *tendenza* si è cominciata a manifestare; forse, come reazione naturale contro quanto era o sembrava alquanto esagerato; forse, perchè l'esperienza dimostrava a molti non essere sempre possibile, o almeno non essere sempre

---

(1) Il chiar.mo prof. LAZZERI mi ha scritto relativamente a questo mio articolo: “ *Sono lietissimo di constatare che ci troviamo, come sempre, d'accordo, e che il nostro spirito ha subito le stesse trasformazioni. In gioventù, subendo inconsciamente l'influsso tedesco, ci siamo trovati nel periodo della critica e della ipercritica matematica, ed abbiamo creduto utile di andare a cercare il pelo nell'uovo. Ora ci accorgiamo, con la gran maggioranza, che bisogna scendere dalle nuvole e cercare di esser più pratici.... Tu pure in scuola reciti il confiteor, e ne sono lieto* ”.

utile, seguire nella scuola, passo passo, in ogni parte, quanto la scienza avrebbe richiesto. Intendo parlare della tendenza ad una *semplificazione* dei metodi d'insegnamento, della quale è indice non solo l'apparizione di recentissimi libri di testo d'algebra, che, pur svolgendo in modo completo i programmi quali sono oggi, hanno abbreviato di molto la trattazione di alcune parti fondamentali; ma ancora lo sforzo incessante fatto anche dagli Autori più noti per ridurre i loro libri di testo nei principî, cioè là dove essi sono meno accessibili agli alunni.

È veramente giustificata questa tendenza? E, se è giustificata, fino a qual punto merita di essere incoraggiata? Esaminiamo anzitutto sotto questo importante punto di vista la questione che vogliamo trattare.

2. Per ordinare e chiarire meglio quanto dirò, credo opportuno rammentare come i mutamenti verificatisi negli ultimi cinquant'anni nell'insegnamento delle matematiche elementari abbiano avuto per *fattori* o *cause* principali:

1°. L'ingiunzione fatta fin dal 1867 dal governo italiano che nelle scuole classiche la Geometria fosse insegnata secondo il metodo di Euclide, cioè osservando lo stretto rigore scientifico, e escludendo ogni sussidio aritmetico e algebrico dalle dimostrazioni di tutte quelle proprietà che precedono il trattato della misura. " La recisa prescrizione mirava a ricondurre all'antica purezza la trattazione della Geometria razionale elementare, che il Legendre e i suoi imitatori avevano offuscata, adoprando sovente il calcolo aritmetico a dimostrare delle verità, che poche argomentazioni fondate sulla semplice intuizione sarebbero bastate ad accertare nel modo più diretto od appropriato „. [1]

2°. La trattazione rigorosa dei *numeri irrazionali* e quindi della *teoria della misura.*

3°. La trattazione più accurata della teoria dell'*equivalenza geometrica.*

4°. La critica mossa al *postulato del movimento delle figure.*

5°. La questione relativa alla *fusione della geometria piana con la solida.*

6°. Gli studi sui *fondamenti dell'aritmetica.*

7°. Gli studi fatti per una *maggior cura dei casi particolari*, troppo spesso trascurati negli enunciati e nelle dimostrazioni dei teoremi, e nelle risoluzioni dei problemi.

Lasciando per ora da parte i fattori 1° e 5°, che si riferiscono a pure questioni di metodo, possiamo senz'altro affermare che i risultati di tutti questi studi, diretti a colmare lacune e a rettificare lo-

---

[1] V. Prefazione agli *Elementi di Geometria* di A. Sannia e E. D'Ovidio.

gicamente le varie teorie, non potevano non esser tenuti in conto nell'insegnamento, perchè " nelle scuole di cultura generale, il principale scopo dello studio della matematica è lo sviluppo e l'incremento delle facoltà logiche; il ragionamento matematico costituisce appunto il modello del ragionamento perfetto in ogni sua parte, quando non si facciano intervenire elementi estranei agli enti primitivi ed ai postulati fondamentali che si premettono „. (1)

E la Scienza ebbe effettivamente il suo meritato trionfo. In seguito agli studi accennati sorsero in Italia libri di testo che devono essere considerati come veri modelli di perfezione logica. Ci basti perciò citare le opere scolastiche di SANNIA e D'OVIDIO, FAIFOFER, DE PAOLIS, LAZZERI e BASSANI, VERONESE, ENRIQUES e AMALDI, DE FRANCHIS, GAZZANIGA, PINCHERLE, PALATINI, TESTI, RIBONI, MARTINI-ZUCCAGNI, CATANIA, FRATTINI, BARONI, FONTEBASSO, CONTI.

3. Se non che, cominciò presto ad essere avvertito che il materiale matematico che si sottoponeva allo studio dei giovani delle scuole medie diventava un po' pesante, almeno nelle parti fondamentali, e di ciò alcuni degli stessi Autori, nel momento medesimo in cui presentavano le loro opere alle scuole, parvero *preoccuparsi*.

" La mente del principiante non sempre ha lena bastevole a sostenere una lunga e intensa riflessione sopra un argomento astratto e delicato; quindi egli non deve lusingarsi di rendersi ad una prima lettura pienamente ragione delle singole parti di una teoria, ma è piuttosto prudente che, quando ne abbia compreso l'insieme, proceda oltre alle applicazioni, salvo a ritornare di quando in quando sui propri passi, per rimuovere i dubbi che per avventura gli fossero rimasti su questa o quella parte della teoria „. (2)

" La difficoltà dello studio delle scienze di puro ragionamento consiste, è vero, nella soverchia tensione mentale che esse richiedono ed alla quale gli studenti non sono assuefatti; lo studente viene così a provare per esse, fin da principio, una ripugnanza che spesse volte diviene incoercibile, tanto più che talvolta a lui sembra inutile lo sforzo perchè crede evidenti le proprietà che si tratta di stabilire „. (3)

" Occorre che i concetti fondamentali siano dati poco per volta, e che le dimostrazioni siano svolte con pazienza e con cura. Certe proposizioni..., o per mancanza di tempo o per altre circostanze, potranno esser fatte leggere solamente, essendo di per sè evidenti, ed altre potranno esser tralasciate „. (4)

---

(1) V. Prefazione della *Geometria elementare ad uso dei Licei e dei Ginnasi superiori e degli Istituti tecnici* (1° biennio) del prof. MICHELE DE FRANCHIS.

(2) V. Prefazione agli *Elementi di Geometria* di A. SANNIA e D'OVIDIO.

(3) V. Prefazione dell'*o. c.* di DE FRANCHIS.

(4) V. Prefazione alla 1ª edizione degli *Elementi di Geometria* di VERONESE. Il VERONESE dava appunto nelle *avvertenze* un elenco di proposizioni che potevano esser lette senza dimostrazione.

Certamente, non avevano preoccupazioni di questo genere gli Autori degli antichi libri di testo!

Si aggiungano le *esagerazioni* [1] cui ci condusse la *moda* degli studi critici, dalla quale molti di noi, per non breve periodo di tempo, ci lasciammo trascinare. Allora si cercò l'errore anche dove esso non era; si arrivò al punto di rinunziare a dei procedimenti semplici ed eleganti (perchè a torto ritenuti difettosi), sostituendoli con altri assai lunghi e complicati. L'indirizzo preso, se poteva dare vantaggi alla Scienza, non poteva darne molti alla Scuola.

4. Il Ministero non si lasciò sfuggire occasione per mettere qualche freno in questa corsa. Fin dal 1900, nelle istruzioni che accompagnarono i programmi per il Ginnasio e il Liceo, raccomandava quanto segue: " Le disquisizioni sui fondamenti della Scienza sono escluse dalla Scuola.... L'insegnante deve insistere sui punti fondamentali della Scienza, *senza troppo divagare in considerazioni secondarie*, affinchè la mente dell'alunno riceva e conservi un'impressione forte e durevole delle idee cardinali, che non sono in gran numero „. E più tardi, nel 1904, nel promulgare altri programmi, in conseguenza della facoltà della scelta tra il greco e la matematica: " Porrà il professore *pochi* principî fondamentali... ed eviterà assolutamente quelle discussioni, in parte filosofiche, sui principî stessi, che la generalità dei giovani, non anche abituata alle sottili discussioni scientifiche, non può arrivare a comprendere pienamente, e che non possono quindi fare a meno di ingenerare oscurità e confusione.... A raggiungere questi scopi molto gioverà anche la scelta dei libri di testo che dovrà cadere su quelli che siano pienamente informati ai concetti suesposti, escludendo quegli altri che con definizioni complicate e non naturali e astruse, con metodi e dimostrazioni tratte dall'alta scienza male si addicono ad un insegnamento di matematica che è e deve restare assolutamente elementare, e che nella maggior parte deve essere comune a tutti gli alunni „.

Non pago di questo, e per evitare lunghi sviluppi delle teorie più astratte, il Ministero si espresse anche più esplicitamente negli ultimi programmi (a. 1911), in cui tra altro si legge: " **Principali** proprietà delle prime cinque operazioni sui numeri interi (4ª ginnasiale). — **Principali** proprietà delle prime cinque operazioni sulle frazioni (5ª ginnasiale). — **Principali** teoremi e problemi sull'equivalenza dei poligoni. Proporzioni tra grandezze geometriche e loro **più semplici proprietà** (1ª liceale). — Numeri reali e **cenni** sulle operazioni ad essi relative (2ª liceale) „.

Le parole che qui sottolineo, e che non figurano nei programmi antichi, dimostrano chiaramente le intenzioni ministeriali relativamente allo svolgimento delle parti più delicate.

---

[1] In un trattato di geometria per uso di SCUOLE TECNICHE e PROFESSIONALI si giunse perfino a voler dimostrare che il segmento è *invertibile*.

Vediamo così che la tendenza a introdurre qualche semplificazione nelle parti fondamentali dell'insegnamento matematico medio, ha avuto origine nelle *sfere governative*; essa trova la sua piena giustificazione nel fatto che la generalità dei nostri alunni, date le condizioni mentali in cui naturalmente si trovano, non potrebbe seguirci in considerazioni astratte troppo minute e troppo lunghe. Del resto, non si pensava così anche nel passato, quando nella Scienza e nel campo scolastico non erano ancora entrate certe delicate teorie? " S'il y a du danger à passer trop légèrement sur la vraie métaphysique des sciences, il y a aussi de l'inconvénient à s'étendre beaucoup sur les détails de cette métaphysique; *les jeunes gens épuisent leurs forces sur de vaines subtilités, et perdent, à les discuter, un temps qu'ils emploieraient bien plus utilement à augmenter la masse de leurs connaissances.* Les digressions sont d'ailleurs bien moins propres à faire sentir la nature des vérités que la succession méthodique de ces vérités. Les conséquens, lorsqu'ils sont bien déduits et bien ordonnés, réfléchissent sur les antécédens une lumière beaucoup plus vive que celle que ces antécédens pourraient acquérir par eux-mêmes. En passant à de nouvelles choses, dans un ordre convenable, on sait mieux celles qu'on a dejà apprises; c'est dans ce sens qu'un géomètre célèbre du siècle passé, disait à quelqu'un qui se plaignait des nuages que certaines démonstrations avaient laissé dans son esprit: *allez en avant, et la foi vous viendra* „. (S. F. Lacroix, *Essais sur l'enseignement*). [1]

5. Oltre che dalle ragioni suesposte che sono d'indole, dirò così, *immanente*, la tendenza di cui ho parlato può essere stata forzata in questi ultimissimi anni da altre cause d'indole *transitoria*. Alludo alle condizioni straordinarie in cui la Scuola si trova per lo stato di guerra, in seguito alle quali l'insegnamento non può procedere che affrettato e ridotto. Ma anche quando saranno cessate queste ultime ragioni (e auguriamoci che ciò avvenga al più presto con piena fortuna della Patria nostra) io penso che coi tempi nuovi s'imporrà un *alleggerimento* generale almeno nelle parti più astratte degli insegnamenti. La Scuola media, pur prefiggendosi sempre come scopo precipuo la formazione mentale dei giovani, dovrà far a meno di qualche *lusso scientifico*, e avvicinarsi meglio alla *vita* che si dovrà vivere. Certo, non potremo dire ora in modo preciso quanto occorrerà fare; ma è utile che fin da questo momento si pensi a spianare un po' la via.

Per vedere quanto in questo senso si può ottenere nell'insegnamento matematico, esaminiamo anzitutto quei *fattori* indicati nel

---

[1] Con parole diverse esprimeva semplicemente lo stesso concetto il prof. Faifofer: " Obiezioni si possono fare, non irragionevoli e in gran quantità a chi comincia a parlar di Geometria. Ma egli tira innanzi, senza dar retta, impaziente di arrivare in *campo sereno* „ (*Elementi di Geometria ad uso dei Licei*; Venezia, tip.[a] Sorteri e Vidotti, 12ª ediz., 1907, pag. 7; nota).

n. 2 che più degli altri hanno contribuito al miglioramento scientifico delle varie teorie.

6. La prescrizione ministeriale di non servirsi, nell'insegnamento della Geometria nei Licei, di nessun sussidio aritmetico o algebrico prima della misura, conduce a premettere una *teoria delle proporzioni tra grandezze* (V libro d'*Euclide*), per poter poi svolgere la proporzionalità dei segmenti e la simiglianza delle figure. Il prof. FAIFOFER, prevedendo le difficoltà che gli alunni avrebbero incontrato nello studio di questa teoria, propose di alternare alcune delle proposizioni ad essa relative con altre più concrete sulla proporzionalità dei segmenti; e, com'è noto, i proff. ENRIQUES e AMALDI, applicando anche alcuni altri buoni criteri seguirono appunto questo procedimento. (1)

Ma, a tagliar corto, vennero poi per i Licei i programmi del 1911 che, come ho già ricordato, limitarono lo studio delle proporzioni tra grandezze alle *loro più semplici proprietà*. E questa era la soluzione più pratica, più semplice, posto che il procedimento geometrico da seguire dovesse essere rigorosamente conforme a quello euclideo. (2)

7. A questo punto però il mio pensiero va ad uno dei migliori libri italiani di Geometria: a quello dei proff. LAZZERI e BASSANI. Questi A., dopo aver premesso una teoria del rapporto (aritmetico) di una grandezza ad un'altra, fondano, com'è noto, su di essa lo studio delle proporzioni tra grandezze, per le quali danno una definizione *completa*, riducendone semplicemente le proprietà a quelle delle proporzioni numeriche. (3) Non ho intenzione di trarre da ciò nessuna conclusione; mi limito a qualche considerazione, che in parte riassume le interessanti osservazioni fatte dagli egregi A. su questo argomento nella prefazione della loro opera.

Certo, per l'insufficienza dei mezzi, e specialmente per la maggiore oscurità in cui di fronte a noi si trovava ai suoi tempi il concetto di numero irrazionale, EUCLIDE non aveva da scegliere; la via seguita gli si presentava come una *necessità*. Ma oggi, appunto perchè sappiamo che potremo e dovremo giungere più in là, in quel suo procedimento non possiamo non sentire l'*artifizio*, qualche cosa d'*incompleto*, di *provvisorio*, che riceve piena luce solo quando si perviene alla teoria della misura. Gli alunni che hanno studiato il ginnasio o la

---

(1) Dubbi d'indole didattica sulla teoria euclidea delle proporzioni sono anche espressi da LEONI (La *Matematica*, pag. 241). — Fu appunto in seguito a tali dubbi che ebbero origine i tentativi di GRASSMANN, RAJOLA-PESCARINI, HOBEZ, per costruire in base a definizioni puramente geometriche una teoria atta a sostituire, per quanto riguarda almeno il caso dei segmenti, quella di EUCLIDE. (V. in proposito l'articolo: *Sulla teoria delle proporzioni* di G. VAILATI nelle *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, raccolte e ordinate da F. ENRIQUES; pag. 228 e seg.).

(2) I trattati di Geometria, pubblicati prima del 1911, non hanno potuto tener conto di questi cambiamenti nei programmi governativi. A noi insegnanti il compito di provvedere al riguardo, limitandoci a dare qualche saggio delle dimostrazioni delle *più semplici proprietà*.

(3) Nel suo ottimo libro di *Geometria per gl'Istituti tecnici*, il prof. RIBONI va anche più in là, premettendo addirittura tutta la teoria della misura a quella delle proporzioni tra grandezze.

scuola tecnica, e che hanno già sentito parlare di *rapporti* e di *proporzioni* non si adattano, senza qualche difficoltà, ad attribuire più tardi a queste parole significati diversi da quelli cui essi erano abituati. (1)

V'è dunque motivo di chiedere: perchè tanto timore di anticipare un po' l'introduzione del numero nello studio della Geometria? (2)

8. Un procedimento che conduce molto rapidamente a stabilire quanto delle proporzioni tra grandezze occorre e basta per svolgere la proporzionalità dei segmenti e la simiglianza delle figure, — procedimento che avrebbe dovuto presentarsi prima di oggi alla nostra mente, come quello che meglio di ogni altro risponde all'ordine con cui svolgiamo in scuola le proprietà geometriche — è quello che ora indicherò. Il metodo, che assai si raccomanda per semplicità e naturalezza, può accontentare tutti, e specialmente quelli che a nessun costo vogliono introdurre l'Aritmetica nello studio della Geometria prima della trattazione della misura.

Ordinariamente, la proporzionalità tra due classi di grandezze si fa dipendere dalla teoria delle proporzioni. Il FAIFOFER, per es., pone la definizione: " se alquante grandezze corrispondono univocamente ad altre grandezze, e due quali si vogliano delle prime stanno tra loro come le corrispondenti, le prime (o le seconde) si dicono proporzionali alle altre ". (3) — Ora a me pare che così s'inverta l'ordine naturale delle cose. Se pensiamo, per es., alla proprietà: due angoli al centro di una stessa circonferenza stanno tra loro come gli archi corrispondenti, vediamo che essa vien data *dopo* (e non potrebbe essere diversamente) di aver stabilito che ad angoli al centro eguali corrispondono archi eguali, che ad un angolo al centro, somma di due altri, corrisponde l'arco che è somma degli archi corrispondenti; proprietà, queste ultime, che da sole caratterizzano già la proporziolità tra gli angoli al centro e gli archi che ad essi corrispondono. — Così ancora, per fare un esempio pratico, osservo che non si potrebbe affermare che i costi di due differenti quantità di una stessa merce stanno tra loro come le quantità stesse, se non si sapesse in precedenza che il costo di quella merce è direttamente proporzionale alla quantità di essa.

Mi parrebbe quindi più naturale fondare la definizione di *propor-*

---

(1) Ciò fu sentito dal prof. FAIFOFER, che com'è noto usa la parola *rapporto* nello studio delle proporzioni tra grandezze. Egli trovò appunto necessario avvertire esplicitamente che tal parola era da lui adoprata allo scopo unico di comporre una locuzione che si prestasse meglio di altre per esprimere talune proposizioni, ma che non si doveva attribuirle nessun significato aritmetico.

(2) Del concetto più o meno esteso, più o meno larvato di numero si fa del resto uso da tutti nello studio delle proporzioni tra grandezze: del numero *intero* da chi tratta la teoria col metodo degli equimultipli (SANNIA e D'OVIDIO; ENRIQUES e AMALDI; ec.); del numero *razionale* da chi invece si serve degli equisummultipli (FAIFOFER; ec.); e perfino del numero *irrazionale* (VERONESE). — Com'è noto, i Francesi (HADAMARD, BOREL,...) sono per l'*impurità numerica* indistintamente.

(3) FAIFOFER, *o. c.*, pag. 197 e seg.

zione su quella di *proporzionalità*, piuttosto che questa su quella; ed ecco pertanto come presso a poco parlerei agli alunni.

Nello studio della Geometria fatto fin qui abbiamo visto che gli angoli al centro di uno stesso cerchio e gli archi compresi sono in corrispondenza biunivoca tale che ad angoli al centro eguali corrispondono archi eguali, e ad angolo al centro somma di due altri corrisponde l'arco somma degli archi corrispondenti; che tra i segmenti di due trasversali di un fascio di parallele sussiste analoga corrispondenza; che analoga corrispondenza v'è ancora tra i parallelogrammi di eguale altezza e le loro basi. Orbene, nello studio che dovremo ancora fare, si presenteranno spesso classi di grandezze che si trovano nelle stesse condizioni di quelle considerate nei tre esempi precedenti, quindi ci conviene di porre la definizione seguente:

a) *Due classi di grandezze si diranno* **proporzionali** *(direttamente) se v'è, o si può stabilire, tra esse una corrispondenza biunivoca tale che a grandezze eguali della prima ne corrispondano due eguali nella seconda, e alla somma di due grandezze della prima corrisponda la somma delle due corrispondenti della seconda.* (1)

Da questa definizione e da quanto sappiamo risulta dunque che gli angoli al centro di uno stesso cerchio sono proporzionali agli archi corrispondenti; i segmenti di due trasversali di un fascio di parallele sono proporzionali; i parallelogrammi di eguale altezza sono proporzionali alle basi.

Poi ricaverei subito le proprietà seguenti: Se alle grandezze A,B,C,... di una classe corrispondono le grandezze A′, B′, C′, ... di altra classe proporzionale alla prima avremo: 1° che alle grandezze $m\mathrm{A}$, $\frac{1}{m}\mathrm{A}$, $\frac{m}{n}\mathrm{A}$ corrispondono rispettivamente $m\mathrm{A}'$, $\frac{1}{m}\mathrm{A}'$, $\frac{m}{n}\mathrm{A}'$; (2) 2° che secondo che è $\mathrm{B} \gtreqless \frac{m}{n}\mathrm{A}$, è anche $\mathrm{B}' \gtreqless \frac{m}{n}\mathrm{A}'$; (3) 3° che due classi proporzionali ad una terza sono proporzionali tra loro; (4) 4° che se due classi sono proporzionali ed è $\mathrm{A}=\mathrm{A}'$, sarà anche $\mathrm{B}=\mathrm{B}'$, $\mathrm{C}=\mathrm{C}'$, ... (5)

---

(1) È questo *il più semplice criterio di proporzionalità*, perchè fondato sui concetti fondamentali di *eguaglianza* e di *somma*. — Si vegga nel mio articolo: *Contributo ad un miglioramento dei libri di testo di matematica elementare* (*Boll.° di Matematica*, a. III, n. 1) come possa essere utilizzato questo principio, specialmente per dimostrare che *le circonferenze sono proporzionali ai raggi*.

(2) In questo modo il concetto di proporzionalità si fa coincidere subito, anche nella forma, con quello che gli alunni hanno acquistato nel ginnasio e nella scuola tecnica.

(3) Sarà molto utile didatticamente, nel mentre si spiegano le proprietà 1ª e 2ª, far tener presente agli alunni l'esempio degli angoli al centro e degli archi corrispondenti.

(4) Così, per es., gli archi di due circonferenze corrispondenti ad angoli al centro eguali, sono proporzionali tra loro.

(5) Quest'ultima proprietà può essere stabilita con una dimostrazione per *assurdo*, dopo aver premesso che date due grandezze B, B′ diseguali e una terza grandezza A omogenea con esse, esiste una frazione di questa terza compresa tra le prime due. — Un esempio concreto della 4ª proprietà può essere tratto dai segmenti corrispondenti di due trasversali di un fascio di parallele. Se un segmento A è eguale al corrispondente A′, i segmenti A e A′ dovranno essere i lati opposti di un *parallelogrammo* o di un *trapezio isoscele*; quindi le due trasversali sono *egualmente inclinate* rispetto alle parallele, e perciò ogni segmento risulta eguale al suo corrispondente.

Ciò premesso, darei così la definizione di proporzione:

b) *Date ordinatamente quattro grandezze* A, B, A′, B′, *diremo che formano una* **proporzione**, *se* A *e* A′, B *e* B′ *sono coppie di grandezze corrispondenti di due classi proporzionali.* (1)

Da questa definizione e dalla *a)* risulta subito che *due* angoli al centro di uno stesso cerchio stanno tra loro come gli archi corrispondenti; che *due* segmenti quali si vogliano di una trasversale di un fascio di parallele sono proporzionali ai segmenti corrispondenti di ogni altra trasversale dello stesso fascio; che *due* parallelogrammi di eguale altezza stanno come le loro basi. E le *più semplici proprietà* delle proporzioni tra grandezze si dedurrebbero immediatamente da quelle stabilite per la proporzionalità. Così, per es.:

1°. *Se* $A:B=A'':B''$ *e* $A':B'=A'':B''$, *è anche* $A:B=A':B'$.

Infatti, le due classi cui appartengono le coppie (A, B) e (A′, B′) sono proporzionali [Def. *a*)] alla classe cui appartiene la coppia (A″, B″); quindi sono proporzionali tra loro; perciò [Def. *a*)] $A:B=A':B'$.

2°. *Da* $A:B=A':B'$ *risulta*

$$(A+B):B=(A'+B'):B'; \qquad \frac{m}{n}A:B=\frac{m}{n}A':B'.$$

Infatti, nelle due classi proporzionali cui appartengono le coppie (A, B) e (A′, B′), le grandezze $(A+B)$, $(A'+B')$, come pure $\frac{m}{n}A$, $\frac{m}{n}A'$ sono corrispondenti; perciò ... [Def. *a*)].

3°. *Se* $A:B=A':B'$ *e* $A=A'$, *è anche* $B=B'$.

Infatti, nelle due classi proporzionali cui appartengono le coppie (A, B) e (A′, B′) è $A=A'$; quindi per una proprietà stabilita sulla proporzionalità è anche $B=B'$.

Osservazione. — Dai due teoremi 1° e 3° si deduce subito, nel modo solito, l'unicità della quarta proporzionale.

4°. *Se* $A:C=A':C'$ *e* $B:C=B':C'$, *risulta* $A:B=A':B'$.

Infatti, dall'ipotesi risulta che la classe (I) delle grandezze A, B, C è proporzionale nello stesso tempo ad una classe (II) nella quale

(1) Il mio amico prof. Bettino Bettini, cui chiesi il parere relativamente a questo modo di definire la proporzione, mi scriveva: " Mi pare vada benissimo. L'idea di proporzionalità è antecedente e molto più generale di quella di proporzione. ... Non potendosi *definire* la proporzione con le *quattro sole* grandezze che la determinano, ma dovendo servirci e di multipli e di summultipli di quelle grandezze, meglio che costruire dopo *le classi* che servono a verificare la proporzione, si tratterebbe di prepararle prima, con vantaggio reciproco della teoria delle proporzioni e di quella della proporzionalità. Stando anche alla più semplice delle definizioni (quella di Euclide), si tratta di considerare le due classi corrispondenti

$$\begin{array}{c} \ldots mA \ldots nB \ldots \\ \ldots mA' \ldots nB' \ldots \end{array}$$

e verificare che si abbia la stessa relazione tra due elementi qualunque mA, nB della prima e i due corrispondenti della seconda. Come si vede dunque, la proporzione viene spiegata mediante le classi (proporzionali), e quindi fai benissimo a presentare la *innovazione* ". Anche l'amico prof. Silvio Bandini e il prof. Attilio Salerni, R. Provveditore agli studi e già insegnante di matematiche negli Istituti Tecnici, approvano la mia proposta.

ad A e C corrispondono A′ e C′ e ad una classe (III) in cui a B e C corrispondono B′ e C′. Le due classi (II) e (III) proporzionali alle (I) sono proporzionali tra loro. E poichè alla grandezza C′ corrisponde se stessa, così anche ad A′ corrisponderà A′, e a B′ corrisponderà B′. Allora possiamo dire che la classe cui appartengono le grandezze A, B, C, ... è proporzionale ad una classe in cui A′, B′, C′ corrispondono rispettivamente ad A, B, C; perciò A : B = A′ : B′. ec. (¹)

Settembre, 1917.

(Continua) C. Ciamberlini.

NOTEVOLI PROPRIETÀ DI DUE SUCCESSIONI

(Continuazione e fine — v. fascicolo V, anno XXXII).

Ordine decrescente delle due successioni. — Abbiamo visto fin da principio come per mezzo delle formole (3) e (4), dopo fissati il primo e secondo termine di ciascuna delle due nostre successioni, si possono calcolare successivamente tutti gli altri, cioè cominciando a calcolare prima il terzo per mezzo del 1° e del 2°, poi il 4° per mezzo del 2° e del 3°, poi il 5° per mezzo del 3° e del 4° e così di seguito. Con tale procedimento i termini si succedono in ordine crescente, ed in modo sempre che conosciutine due consecutivi se ne calcola quello immediatamente seguente.

Se conosciuti due termini consecutivi si volesse viceversa calcolare il termine precedente, si dovrebbero allora adoperare le formule (7) e (8), per mezzo delle quali perciò si procederebbe in ordine decrescente nella calcolazione dei termini stessi, e siccome le formole medesime sono generali, così esse ci permettono di conoscere anche i termini che precedono in ciascuna successione quei due che abbiamo fissato come punto di partenza sulla formazione delle successioni stesse — Questi altri termini avranno i posti rappresentati il primo da zero e gli altri dai successivi numeri della successione naturale presi negativamente.

(¹) La *permutabilità* dei medi in una proporzione di grandezze tutte omogenee può essere più tardi stabilita per i segmenti e per i poligoni, come per es. fanno F. Enriques e U. Amaldi nella loro Geometria. Per grandezze quali si vogliano si completerà la proposizione nella teoria della misura.

Nella successione A il termine a_0, che precede quello che abbiamo assunto come primo, sarà perciò $a_0 = a_2 - 2a_1 = 2 - 2 = 0$. Identicamente:

$$
\begin{aligned}
a_{-1} &= a_1 \quad - 2a_0 \quad = 1 - 2 \times 0 = +1 \\
a_{-2} &= a_0 \quad - 2a_{-1} = 0 - 2 \times 1 = -2 \\
a_{-3} &= a_{-1} - 2a_{-2} = 1 - 2 \times -2 = +5 \\
a_{-4} &= a_{-2} - 2a_{-3} = -2 - 2 \times 5 = -12 \\
a_{-5} &= a_{-3} - 2a_{-4} = 5 - 2 \times -12 = +29.
\end{aligned}
$$

. . . .

Dato uno sguardo scorgiamo subito che questi termini riproducono in valore assoluto ed in ordine inverso la successione A già calcolata; i segni invece sono alternativamente uno positivo ed uno negativo.

Dall'esame dei segni possiamo ricavare le due formole:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_{-n} \text{ per } n \text{ dispari} \\ a_n &= -a_{-n} \text{ per } n \text{ pari} \end{aligned}\right\}. \tag{22}$$

Identicamente per la successione B troveremo:

$$
\begin{aligned}
b_0 \; &= b_2 \quad - 2b_1 \quad = 3 - 2 = +1 \\
b_{-1} &= b_1 \quad - 2b_0 \quad = 1 - 2 \times 1 = -1 \\
b_{-2} &= b_0 \quad - 2b_{-1} = 1 - 2 \times -1 = +3 \\
b_{-3} &= b_{-1} - 2b_{-2} = -1 - 2 \times 3 = -7 \\
b_{-4} &= b_{-2} - 2b_{-3} = 3 - 2 \times -7 = +17 \\
b_{-5} &= b_{-3} - 2b_{-4} = -7 - 2 \times 17 = -41,
\end{aligned}
$$

da cui possiamo ricavare queste altre formole:

$$\left.\begin{aligned} b_n &= b_{-n} \text{ per } n \text{ pari} \\ b_n &= -b_{-n} \text{ per } n \text{ dispari} \end{aligned}\right\}. \tag{23}$$

TEOREMA 10°. — *Il doppio prodotto di due termini* b_n *e* b_k *della successione* B *è uguale alla somma o alla differenza dei due termini* b_{n+k} *e* b_{n-k} *della stessa successione a seconda che* k *è pari o dispari, cioè:*

$$2b_n b_k = b_{n+k} \pm b_{n-k} \begin{cases} + \text{ per } k \text{ pari} \\ - \text{ per } k \text{ dispari.} \end{cases} \tag{24}$$

Cominciamo ad esaminare ciò che avviene per un valore costante di n e per valori diversi e successivi di k a cominciare da 1.

Per $k = 1$ è $b_k = b_1 = 1$, $b_{n+k} = b_{n+1}$, $b_{n-k} = b_{n-1}$.

Per questo primo valore di k la legge risulta dimostrata dalla stessa formola (6) scritta in questo modo:

$$2b_n b_1 = b_{n+1} - b_{n-1}.$$

Per $k = 2$, è:

$$b_k = b_2 = 3, \qquad b_{n+k} = b_{n+2}, \qquad b_{n-k} = b_{n-2}.$$

quindi:

$$2b_n b_2 = 2(3b_n) = 2(2b_n + b_n).$$

Sostituendo a $2b_n$ il valore dato dalla (6) sarà:

$$2b_n b_2 + 2(b_{n+1} - b_{n-1} + b_n)$$

ossia

$$2b_n b_2 = (2b_{n+1} + b_n) + (b_n - 2b_{n-1}).$$

Sostituendo ora ai termini dentro la parentesi i valori dati rispettivamente dalle formole (4) e (8), avremo finalmente:

$$2b_n b_2 = b_{n+2} + b_{n-2}.$$

Per $k = 3$ è

$$b_k = b_3, \qquad b_{n+k} = b_{n+3}, \qquad b_{n-k} = b_{n-3}$$

quindi

$$2b_n b_3 = 2b_n(b_3) = 2b_n(2b_2 + b_1)$$

ed eseguendo la moltiplicazione:

$$2b_n b_3 = 2(2b_n b_2 + b_n b_1).$$

Sostituendo ai due prodotti i valori sopra trovati, sarà:

$$2b_n b_3 = 2(b_{n+2} + b_{n-2}) + (b_{n+1} - b_{n-1})$$

ossia,

$$= (2b_{n+2} + b_{n+1}) - (b_{n-1} - 2b_{n-2})$$

e per le formole (4) e (8) avremo finalmente:

$$2b_n b_3 = b_{n+3} - b_{n-3}.$$

Per valori successivi di k troveremo egualmente, cioè:

per $k = 4$ $\qquad 2b_n b_4 = b_{n+4} + b_{n-4}$

per $k = 5$ $\qquad 2b_n b_5 = b_{n+5} - b_{n-5}$

per $k = 6$ $\qquad 2b_n b_6 = b_{n+6} + b_{n-6}$

per $k = 7$ $\qquad 2b_n b_7 = b_{n+4} - b_{n-7}.$

e così di seguito, notando che si ha somma per k pari e differenza per k dispari.

Supponiamo di avere verificato la legge fino ad un dato valore di k, che supponiamo pari, così che si ha:

$$2b_n b_k = b_{n+k} + b_{n-k}.$$

Dimostremo che essa si verificherà ancora per $k+1$ (che è numero dispari).

Infatti per la formola (4) si ha:

$$2b_n b_{k+1} = 2b_n (2b_k + b_{k-1}) = 4b_n b_k + 2b_n b_{k-1}$$

ed avendo ammesso che

$$2b_n b_k = b_{n+k} + b_{n-k},$$

e di conseguenza anche pel valore precedente di k cioè $k-1$

$$2b_n b_{k+1} = b_{n+k-1} - b_{n-k+1}$$

sarà

$$2b_n b_{k+1} = 2b_{n+k} + 2b_{n-k} + b_{n+k-1} - b_{n-k+1}$$

ossia

$$= (2b_{n+k} + b_{n+k-1}) - (b_{n-k+1} - 2b_{n+k}).$$

Per le formole (4) e (8) avremo ancora:

$$2b_n b_{k+1} = b_{n+k+1} - b_{n-k-1}$$

ed in generale per qualunque valore di k possiamo scrivere

$$2b_n b_{k+1} = b_{n+k+1} \pm b_{n-k-1} \begin{cases} + \text{ per } k \text{ pari} \\ - \text{ per } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Fin qui abbiamo supposto che n sia costante per tutti i valori di k, però non essendo determinato, la legge ha luogo per qualunque suo valore.

Esempi:

per $n=5$ è $b_n = b_5 = 41$
per $k=1$ si ha $2(41 \times 1) = 99 - 17$
„ $k=2$ „ $2(41 \times 3) = 239 + 7$
„ $k=3$ „ $2(41 \times 7) = 577 - 3$
„ $k=4$ „ $2(41 \times 17) = 1393 + 1.$

Sia ancora $n=6$ e quindi $b_n = b_6 = 99$

per $k=1$ si ha $2(99 \times 1) = 239 - 41$
„ $k=2$ „ $2(99 \times 3) = 577 + 17$
„ $k=3$ „ $2(99 \times 7) = 1393 - 7$
„ $k=4$ „ $2(99 \times 17) = 3363 + 3$
„ $k=5$ „ $2(99 \times 41) = 8119 - 1.$

Teorema 11°. — *Il doppio quadrato di un termine della successione* B *è uguale al termine della stessa successione il cui posto corrisponde al numero che è doppio di quello del primo, aumentato o diminuito di 1 a seconda che il primo termine è di posto pari o di posto dispari, cioè:*

$$2b_n^2 = b_{2n} \pm 1 \begin{cases} +1 \text{ per } n \text{ pari} \\ -1 \text{ per } n \text{ dispari.} \end{cases} \tag{25}$$

Infatti facendo nella formola (24) $k=n$, si avrà:

$$2b_n^2 = b_{2n} \pm b_0$$

ed essendo $b_0 = 1$ avremo:

$$2b_n^2 = b_{2n} \pm 1. \qquad \text{c. d. d.}$$

Esempi:

per $n=1$ si ha $2 \times 1^2 = 3 - 1$
„ $n=2$ „ $2 \times 3^2 = 17 + 1$
„ $n=3$ „ $2 \times 7^2 = 99 - 1$
„ $n=4$ „ $2 \times 17^2 = 577 + 1$
„ $n=5$ „ $2 \times 41^2 = 3363 - 1$
„ $n=6$ „ $2 \times 99^2 = 19601 + 1.$

Corollario. — *Il quadruplo quadrato di un termine della successione* A *è uguale al termine della successione* B *il cui posto corrisponde al numero che è doppio di quello del primo, aumentato o diminuito di 1. a seconda che il primo termine è di posto dispari o di posto pari, cioè*

$$4a_n^2 = b_{2n} \pm 1 \begin{cases} +1 \text{ per } n \text{ dispari} \\ -1 \text{ per } n \text{ pari.} \end{cases} \tag{26}$$

Moltiplicando per 2 i termini della formola (15) si ha:

$$4a_n^2 - 2b_n^2 = \pm 2$$

da cui trasportando

$$2b_n^2 = 4a_n^2 \pm 2$$

che sostituito nella (25) dà:

$$4a_n^2 = b_{2n} \pm 1.$$

Esempi.

$$\begin{array}{llll} \text{per } n=2 & \text{si ha} & 4 \times 2^2 & = 17-1 \\ \text{„ } n=3 & \text{„} & 4 \times 5^2 & = 99+1 \\ \text{„ } n=4 & \text{„} & 4 \times 12^2 & = 577-1 \\ \text{„ } n=5 & \text{„} & 4 \times 29^2 & = 3363+1. \end{array}$$

Teorema 12°. — *La somma dei quadrati di due termini consecutivi della successione* A *è uguale al termine della stessa successione, il cui posto è la somma dei posti dei detti due termini, cioè*

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}. \tag{27}$$

Infatti, dalla (8) ponendo $2n$ per $n-1$ si ricava:

$$b_{2n} = b_{2n+2} - 2b_{2n+1}.$$

Aggiungendo ad ambo i membri il termine b_{2n+2} si ha:

$$b_{2n+2} + b_{2n} = 2b_{2n+2} - 2b_{2n+1}$$

per la 2^a delle (11) il secondo membro è uguale a $4a_{2n+1}$ e per la (26) il primo membro è eguale a

$$4a_{n+1}^2 \pm 1 + 4a_n^2 \pm 1,$$

quindi dividendo per 4 e riducendo avremo:

$$a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{2n+1}.$$

Esempi:

$$\begin{array}{lllr} \text{per } n=1 & \text{si ha} & 1^2+2^2=5 & (3^{\circ} \text{ termine}) \\ \text{„ } n=2 & \text{„} & 2^2+5^2=29 & (5^{\circ} \text{ termine}) \\ \text{„ } n=3 & \text{„} & 5^2+12^2=169 & (7^{\circ} \text{ termine}) \\ \text{„ } n=4 & \text{„} & 12^2+29^4=985 & (9^{\circ} \text{ termine}) \\ \text{„ } n=5 & \text{„} & 29^2+70^2=5741 & (11^{\circ} \text{ termine}) \\ \text{„ } n=6 & \text{„} & 70^2+169^2=33461 & (13^{\circ} \text{ termine}). \end{array}$$

COROLLARIO. — *La somma dei quadrati di due termini consecutivi della successione B è uguale al doppio del termine della successione A il cui posto è la somma dei posti dei detti due termini, cioè:*

$$b_n^2 + b^2_{n+1} = 2a_{2n+1}. \tag{28}$$

Infatti, dalla (13) si ha $a_n^2 + a^2_{n+1} = \frac{b_n^2 + b^2_{n+1}}{2}$ che sostituita nella (27) si ottiene:

$$\frac{b_n^2 + b^2_{n+1}}{2} = a_{2n+1}$$

e moltiplicando per 2,

$$b_n^2 + b^2_{n+1} = 2a_{2n+1} \qquad \text{c. d. d.}$$

Esempi:

per $n = 1$ si ha $1^2 + 3^2 = 2 \times 5$
„ $n = 2$ „ $3^2 + 7^2 = 2 \times 29$
„ $n = 3$ „ $7^2 + 17^2 = 2 \times 169$
„ $n = 4$ „ $17^2 + 41^2 = 2 \times 985$
„ $n = 5$ „ $41^2 + 99^2 = 2 \times 5741.$

Somma dei primi n termini delle due successioni A, B. — Cominciamo dalla successione B; la somma dei due primi termini di essa è uguale al terzo termine della successione A diminuito di 1, cioè:

$$1 + 3 = 5 - 1 \qquad \text{ossia} \qquad b_1 + b_2 = a_3 - 1.$$

Aggiungendo ad ambi i membri il termine b_3 sarà

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_3 + b_3 - 1$$

ma per la seconda delle (9):

$$a_3 + b_3 = a_4,$$

quindi

$$b_1 + b_2 + b_3 = a_4 - 1.$$

Collo stesso ragionamento troveremo:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = a_5 - 1$$
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = a_6 - 1$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

ed in generale

$$\sum_{i=1}^{i=n} b_i = a_{n+1} - 1. \tag{29}$$

Cioè la somma degli n primi termini della successione B è uguale all'$(n+1)^{mo}$ termine della successione A diminuito di 1.

Per la successione A scriviamo le seguenti eguaglianze

$$o + a_1 = b_1$$

per la 2ª delle (9):

$$a_1 + a_2 = b_2$$
$$a_2 + a_3 = b_3$$
$$a_3 + a_4 = b_4$$
$$\dots\dots$$
$$a_n + a_{n+1} = b_{n+1}.$$

Sommando membro a membro avremo:

$$2\sum_{i=1}^{i=n} a_i + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{i=n+1} b_i$$

e per la (29)

$$2\sum_{i=1}^{i=n} a_i = a_{n+2} - a_{n+1} - 1$$

ed essendo per la seconda delle (9) $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$ avremo finalmente

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = \frac{b_{n+1} - 1}{2}. \tag{30}$$

Le due formole così trovate si riferiscono alla somma dei successivi termini che cominciano dal primo; se si volesse invece la somma di successivi termini a cominciare da uno qualunque, basterà fare una sola sottrazione..

Volendo la somma dei termini della successione A da quello di posto k a quello di posto n, $(n > k)$ essa sarà:

$$\sum_{i=k}^{i=n} a_i = \sum_{i=1}^{i=n} a^i - \sum_{i=1}^{i=k-1} a_i = \frac{b_{n+1} - b_k}{2} \tag{31}$$

e per la successione B:

$$\sum_{i=k}^{i=n} b_i = \sum_{i=1}^{i=n} b_i - \sum_{i=1}^{i=k-1} b_i = a_{n+1} - a_k. \tag{32}$$

Esempio: per $n = 8$ e $k = 5$ sarà:

$$\sum_{i=5}^{i=8} a_i = \frac{b_9 - b_6}{2} = \frac{1393 - 41}{2} = 676$$

$$\sum_{i=5}^{i=8} b_i = a_9 - a_5 = 985 - 29 = 956.$$

Teorema 13°. — *La differenza di due termini della successione* A *che stanno alla distanza di 4 posti tra loro è uguale a quattro volte il termine della successione* B *il cui posto è medio tra i due primi, cioè:*

$$a_{n+4} - a_n = 4b_{n+2}. \tag{33}$$

Infatti, per la (3)

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2}$$

e per la (7)

$$a_n = a_{n+2} - 2a_{n+1}$$

sottraendo sarà:

$$a_{n+4} - a_n = 2(a_{n+3} + a_{n+1})$$

e per la (3) ancora è:

$$a_{n+3} = 2a_{n+2} + a_{n+1}$$

che sostituito nella precedente dà

$$a_{n+4} - a_n = 2(2a_{n+2} + a_{n+1} + a_{n+1}) = 4(a_{n+2} + a_{n+1})$$

e per la prima delle (9) finalmente si avrà:

$$a_{n+4} - a_n = 4b_{n+2} \qquad \text{c. d. d.}$$

TEOREMA 14°. — *La somma di quattro termini consecutivi della successione A è uguale a quattro volte il penultimo di essi, cioè:*

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} = 4a_{n+3}. \tag{34}$$

Infatti, per la (3) si ha:

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2}$$

per la (7):

$$a_{n+1} = a_{n+3} - 2a_{n+2}$$

sostituendo questi valori nel primo membro, avremo:

$$(a_{n+3} - 2a_{n+2}) + (a_{n+2}) + (a_{n+3}) + (2a_{n+3} + a_{n+2})$$

e riducendo sarà:

$$\sum_{i=n+1}^{i=n+4} a_i = 4a_{n+3}.$$

COROLLARIO. — *Siccome per la successione* B *sono identici il ragionamento e le corrispondenti formole* (4) e (8) sarà pure:

$$\sum_{i=n+1}^{i=n+4} b_i = 4b_{n+3}. \tag{35}$$

TEOREMA 15°. — *Il limite verso cui tende il rapporto* $\frac{b_n}{a_n}$ *è* $\sqrt{2}$.

Infatti, dividendo per a_n^2 i termini della formola (15) e trasportando, si ha:

$$\frac{b_n^2}{a_n^2} = 2 \pm \frac{1}{a_n^2}$$

da cui, estraendo la radice quadrata

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2 \pm \frac{1}{a_n^2}} \begin{cases} + \text{ per } n \text{ pari} \\ - \text{ per } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

A misura che aumenta n, il termine $\frac{1}{a_n^2}$ va diventando sempre più piccolo, finchè per $n = \infty$ sarà:

$$\frac{b_n}{a_n} = \sqrt{2}. \tag{36}$$

COROLLARIO. — *Il limite verso cui tende il rapporto fra due termini consecutivi di ciascuna delle due successioni è* $1 + \sqrt{2}$.

Dividendo per a_n la seconda della formola (9) e trasportando si ha, per i termini della successione A:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{b_n}{a_n}$$

e quindi per $n=\infty$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\sqrt{2}. \tag{37}$$

Per i termini della successione B, dividendo per b_n i termini della seconda delle formole (11), dopo averli moltiplicati per 2, e trasportando si ha:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=2\frac{a_n}{b_n}+1$$

e sostituendo ad $\frac{a_n}{b_n}$ il valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sarà

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}$$

e finalmente

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=1+\sqrt{2}. \tag{38}$$

Osservazione 1ª. — Questo teorema fornisce la maniera di calcolare, per mezzo di una sola divisione, la radice quadrata di 2, giacchè basta ridurre a numero decimale, a seconda l'approssimazione che si desidera, una delle seguenti frazioni ordinarie, i cui termini sono rispettivamente due termini consecutivi della successione A:

$$\frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \frac{408}{169},\ \frac{985}{408},\ \frac{2378}{985},\ \frac{5741}{2378},\ \frac{13860}{5741}\cdots\cdots$$

diminuendo di una unità il risultato ottenuto; oppure una delle frazioni i cui termini sono rispettivamente due termini consecutivi della successione B:

$$\frac{3}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{17}{7},\ \frac{41}{17},\ \frac{99}{41},\ \frac{239}{99},\ \frac{577}{239},\ \frac{1393}{577},\ \frac{3363}{1393},\ \frac{8113}{3363}\cdots\cdots$$

e diminuendo anche qui di una unità il risultato ottenuto.

Osservazione 2ª. — Il superiore teorema può anche venire dimostrato colla teoria delle frazioni continue, giacchè le suddette frazioni ordinarie non sono altro che le successive ridotte di una stessa frazione continua periodica, quella stessa a cui si riduce tanto $1+\sqrt{2}$ quanto il rapporto di due termini consecutivi di ciascuna delle nostre due successioni.

PROBLEMA 1°. — *Calcolare un termine della successione* A *senza bisogno di calcolare tutti quelli che lo precedono.*

Di questa successione noi conosciamo i primi venti termini; colla formola (27) possiamo calcolare tutti i termini di posto dispari dal 21° al 39° e dopo, colla formola (1), anche tutti quelli di posto pari intermedi. Collo stesso procedimento si potranno indi calcolare tutti i termini dal 40° al 77°, e così di seguito.

Si voglia ad esempio conoscere il 70º termine. Colla formola (27) si avrà:

$$a_{33} = a^2_{16} + a^2_{17}$$
$$a_{35} = a^2_{17} + a^2_{18}$$
$$a_{37} = a^2_{18} + a^2_{19}$$

e colla formola (1):

$$a_{34} = \frac{a_{35} - a_{33}}{2}$$

$$a_{36} = \frac{a_{37} - a_{35}}{2}$$

poi di nuovo colla formola (27):

$$a_{69} = a_{34} + a_{35}$$
$$a_{71} = a_{35} + a_{36}$$

e finalmente

$$a_{70} = \frac{a_{71} - a_{69}}{2}.$$

Problema 2º. — *Calcolare un termine della successione* B *senza bisogno di calcolare tutti quelli che lo precedono.*

Anche di questa successione noi conosciamo i primi venti termini. Colla formola (25) scritta in questo altro modo:

$$b_{2n} = 2b_n^2 \pm 1 \begin{cases} +1 \text{ per } n \text{ dispari} \\ -1 \text{ per } n \text{ pari} \end{cases}$$

possiamo calcolare tutti i termini di posto pari dal 22º al 40º e colla formola (2) anche tutti i termini di posto dispari intermedi. Collo stesso procedimento si potranno dopo calcolare tutti i termini seguenti dal 41º all'80º e così di seguito.

Si voglia ad esempio calcolare anche qui il 70º termine.

Colla formola (25) si avrà:

$$b_{34} = 2b^2_{17} + 1$$
$$b_{36} = 2b^2_{18} - 1$$

e colla (2)

$$b_{35} = \frac{b_{36} - b_{34}}{2}$$

e finalmente, conosciuto b_{35}, colla (25), sarà:

$$b_{70} = 2b^2_{35} + 1.$$

Esercizi.

Dimostrare le seguenti formole:

1º. $$a_{n+k} \pm a_{n-k} = 2a_n(a_k + a_{k-1}) \begin{cases} + \text{ per } k \text{ pari} \\ - \text{ per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

2°. $$a_{n+k} \pm a_{n-k} = 2a_n b_k \quad \begin{cases} + \text{ per } k \text{ pari} \\ - \text{ per } k \text{ dispari} \end{cases}$$

3°. $$a_{2n} = 2a_n (a_n + a_{n-1})$$

4°. $$4a^2_n = a_{2n} + a_{2n-1} \pm 1 \quad \begin{cases} +1 \text{ per } n \text{ dispari} \\ -1 \text{ per } n \text{ pari} \end{cases}$$

5°. $$b_{2n-1} = 4a_n a_{n-1} \pm 1 \quad \begin{cases} +1 \text{ per } n \text{ dispari} \\ - \text{ per } n \text{ pari} \end{cases}$$

6°. $$a_{2n} = 2a_n b_n$$

7°. $$4b_n^3 = b_{3n} \pm 3b_n \quad \begin{cases} + \text{ per } n \text{ pari} \\ - \text{ per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

8.° $$8b_n^4 = b_{4n} + 3 \pm 4b_{2n} \quad \begin{cases} + \text{ per } n \text{ pari} \\ - \text{ per } n \text{ dispari} \end{cases}$$

9°. $$a^2_{n+2} - a^2_n = 2a_{2n+2}$$

10°. $$a^2_n = a_n (a_{n+1} + a_{n-1})$$

11°. $$\sum_{i=1}^{i=4n-1} a_i = 2a^2_{2n}$$

12°. $$\sum_{i=1}^{i=4n+1} a_i = b^2_{2n+1}.$$

Ing. Filippo Nicita.

SUI CASI DI ASSOLUTA ECCEZIONALITÀ E SULLA TRASCENDENZA

della generalità delle curve

Quando un insieme di punti di una punteggiata è formato da tutti i punti di intervalli, non aventi due a due parti comuni ed aventi una lunghezza totale l, si dice che l'insieme dato ha per *misura* l.

È noto poi che l'insieme dei numeri trascendenti ha la potenza del continuo, mentre quello dei numeri algebrici è numerabile, ed è pure noto che se da un insieme A di punti, avente la potenza del continuo, ne sopprimiamo un insieme numerabile B, la potenza dell'insieme A — B restante, è ancora quella del continuo; di più, avendo sempre un insieme numerabile di punti per misura zero, se ne deduce che la misura dell'insieme A — B è ancora quella stessa di A.

Da ciò emerge che un'infinità numerabile è trascurabile rispetto ad un'infinità che ha la potenza del continuo, analogamente a quanto succede per un infinito che sia di ordine minore rispetto ad un infinito di ordine maggiore.

Si domanda ora: qual'è la probabilità che colpendo a caso un punto sul segmento $0-1$ di una punteggiata, questo punto sia algebrico?

Per rispondere a tale domanda osserveremo che siccome è noto che se una variabile x può indifferentemente assumere qualsiasi valore compreso fra a e b, la probabilità che, in una data prova, il suo valore sia compreso fra c e d, dove si suppone $a < c < d < b$, è uguale a $\frac{d-c}{b-a}$, resta evidente il caso più generale che se un insieme di punti di misura s è contenuto in un altro di misura superiore S, la probabilità che colpendo a caso un punto, questo appartenga all'insieme di misura s è data dal rapporto $\frac{s}{S}$. Ora l'insieme dei punti algebrici compresi fra 0 ed 1 ha per misura zero, mentre l'insieme dei punti trascendenti ha per misura 1. Ne dedurremo che la probabilità cercata è uguale a $\frac{0}{1} = 0$; la stessa cioè che si avrebbe di colpire un solo punto dato nel segmento considerato $0-1$. (1)

Notisi che invece del segmento $0-1$ noi potremmo analogamente parlare di un segmento qualunque.

Dato ora un insieme qualunque A, chiamo *casi di assoluta eccezionalità* dell'insieme stesso, quelli che costituiscono un insieme B contenuto in A e di cui è zero la probabilità che scegliendo a caso un elemento di A, questo appartenga a B.

Sono, ad esempio, casi di assoluta eccezionalità i punti interi presi nell'insieme dei punti razionali di una punteggiata, poichè qualunque sia il segmento su cui si volesse colpire un punto, in esso giace un numero finito di punti interi ed un numero infinito di punti razionali.

Nell'insieme poi di tutti i punti della punteggiata, i punti algebrici rappresentano pure casi di assoluta eccezionalità.

E sono sempre casi di assoluta eccezionalità di un insieme A,

---

(1) È così lontano, per noi, il concetto dell'∞ che l'asserire esservi probabilità zero, e quindi impossibilità di colpire un punto dato fra i punti di un segmento ci pare asserzione troppo ardita. E ciò perchè qui l'impossibilità non deriva dalla mancanza di casi favorevoli, i quali, nel nostro caso, sarebbero rappresentati da un punto (potrebbe anche essere un insieme numerabile qualunque, od anche della potenza del continuo di punti, purchè di misura zero) che ci pare anzi di aver ben sott'occhio, e quindi facile da colpire, specialmente se il segmento $0-1$ fosse breve. Saremmo quasi più disposti a credere più difficile scegliere a caso un dato granellino di sabbia nel deserto; ma ciò non è: è infinitamente meno probabile colpire il punto che scegliere il granellino. E ciò anche se quest'ultima prova si volesse ripetere per n volte successive, pur essendo n grande a piacere.

avente la potenza del continuo, quelli che appartengono ad un insieme di misura zero contenuto nel dato di misura > 0.

Sempre pel fatto che i numeri razionali sono casi di assoluta eccezionalità nell'insieme della totalità dei numeri, si deduce che, data una grandezza K, le infinite grandezze che sono ad essa commensurabili rappresentano casi di assoluta eccezionalità nell'insieme di tutte le grandezze omogenee a K. (¹)

Ritornando ora sopra una mia Nota pubblicata pure nel *Periodico di Matematica* (Fascicolo V, 1916) applicheremo ora il concetto già definito di assoluta eccezionalità per dimostrare come la generalità delle curve del piano siano trascendenti, in un senso molto elevato, nel senso cioè di non passare che per punti trascendenti del piano stesso.

Dicevamo dunque in quella Nota, come si sappia che, ad eccezione del punto $x=0$, $y=1$, il teorema di Lindemann prova che l'equazione

$$y=e^x$$

è di tale natura che x ed y non possono essere entrambi algebrici e che quindi, ad eccezione del punto (0, 1), la curva rappresentata da quella equazione non può passare per nessun punto algebrico del piano ed è di conseguenza una curva trascendente.

Si potrebbe dire analogamente della curva

$$y = \text{arc sen } x$$

poichè essendo

$$\text{sen } y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

l'equazione suddetta diventa:

$$2ix = e^{iy} - e^{-iy}$$

la quale rappresenta quindi una curva che, ad eccezione del punto (0, 0), non potrà passare per nessun punto algebrico del piano, poichè, sempre in virtù del teorema di Lindemann, non potranno essere contemporaneamente algebrici x ed y.

Formando i punti algebrici del piano un insieme denso, dove cioè ne esistono infiniti in un'area piccola quanto si voglia, pare a tutta prima ben strana la proprietà che, ad es. hanno queste due curve, le quali, se se ne eccettua uno, hanno la proprietà di riuscire a scansare tutti i punti algebrici del piano stesso.

Orbene noi dimostreremo invece che la proprietà che hanno certe curve di non passare per punti algebrici non è affatto particolare, ma che anzi, data una curva qualsiasi può affermarsi che

---

(¹) Si potrebbe, ad es. affermare che dati a caso due segmenti, la probabilità che essi siano commensurabili è zero.

essa, in generale, non passerà che per punti trascendenti del piano, in modo che l'insieme delle infinite curve non aventi questa proprietà è infinitamente meno vasto di quello formato dalle curve che della suaccennata proprietà godono. Cosa questa di grande importanza teorica.

In altri termini, vogliamo dimostrare che le curve passanti per punti algebrici, sono casi di assoluta eccezionalità, e cioè che data una curva qualsiasi, anche tracciata a caso sul piano, la probabilità che essa ha di passare per qualche punto algebrico, è zero.

Ed infatti considerando le ascisse algebriche dei punti della curva tracciata, comprese in quel qualunque intervallo che vogliasi considerare, è zero la probabilità che ad una di esse corrisponda un'ordinata pure algebrica, perchè le infinite ordinate corrispondenti ad ascisse algebriche formano un insieme numerabile e sarà quindi zero la probabilità che una di esse, esistente nell'insieme continuo di *tutte* le ordinate dei punti della curva, nell'intervallo considerato, sia pure algebrica.

Resta quindi provato il nostro asserto.

Lungi quindi dallo stupirci che, ad es. le due curve sopraccennate

$$y = e^x; \qquad y = \text{arc sen}\, x$$

riescano a scansare tutti i punti algebrici del piano, eccettuatone uno solamente, dovremmo fare invece le nostre meraviglie precisamente del contrario e cioè che esse riescano a passare per almeno un punto algebrico; proprietà quest'ultima che le fa proprio annoverare fra i casi di assoluta eccezionalità.

DOTT. CALEGARI ADRASTO

SCOMPOSIZIONE DELL'IMPERPIRAMIDE TRONCA

a basi parallele di S_4

Scopo del presente articolo è quello di estendere allo spazio a quattro dimensioni il teorema che insegna a scomporre un tronco di prisma triangolare a basi parallele di S_3 nella somma di tre piramidi aventi la medesima altezza del tronco e per basi risp: la base minore del tronco, la maggiore e una media proporzionale fra esse;

teorema quest'ultimo che, se ben si osserva, è l'estensione del noto teorema di geometria piana: un trapezio equivale alla somma di due triangoli aventi l'altezza del trapezio e per basi risp. la base minore e la maggiore di esso.

Una volta ottenuta l'estensione all'S_4, il lettore paziente potrà da sè eseguirla per lo spazio a un numero qualunque di dimensioni e applicarla al caso di una iperpiramide tronca a basi poliedrali invece che tetraedrali come facciamo noi in questo articolo.

Andiamo dunque a dimostrare il

TEOREMA. — *Una iperpiramide tetraedrale tronca a basi parallele in S_4 si può scomporre in quattro iperpiramidi tetraedrali della medesima altezza dell'iperpiramide data e aventi come basi risp: la base minore, la base maggiore di questa e due medie proporzionali continue tra la minore e la maggiore.*

Si prenda a considerare in S_4 l'iperpiramide tronca che ha per basi i tetraedri ABCD, A'B'C'D' situati in due S_3 paralleli e per altezza il segmento h: questo segmento rappresenterà quindi la distanza dei due S_3 suddetti. Potremo supporre che dei due tetraedri simili basi, ABCD sia minore di A'B'C'D': ciò è lecito, non potendo in nessun caso essere uguali.

Ciò posto, nella base maggiore A'B'C'D' riportiamo A'B'', A'C'', A'D'' risp: uguali ad AB, AC, AD e immaginiamo congiunti i vertici del triangolo B''C''D'' con quelli del triangolo B'C'D'. Questi triangoli, di cui il primo è uguale a BCD, giacciono in due S_2 paralleli, per cui risulteranno equivalenti fra loro i tetraedri:

$$A'B'C'D' - A'B'C''D' - A'B'C'D'' \qquad (\alpha)$$

ed equivalenti pure fra loro i tetraedri:

$$A'B''C''D' - A'B''C'D'' - A'B'C''D''. \qquad (\beta)$$

Conduciamo ora un S_3 pel vertice D della base minore e per i vertici A', B', C' della base maggiore: da questo iperpiano l'iperpiramide tronca rimane divisa in due ipersolidi, uno è l'iperpiramide tetraedrale di S_4 che ha per base il tetraedro A'B'C'D' e per vertice D, cioè che ha l'altezza dell'iperpiramide data e per base la base maggiore di questa, l'altro ipersolido è una iperpiramide pure di S_4 che ha per base il prisma triangolare a basi parallele di S_3ABCA'B'C' e per vertice il punto D esterno a detto S_3. Ora questo prisma, pel teorema noto di geometria elementare e ricordato in principio è scomponibile nella somma di tre piramidi che andiamo ad esaminare una ad una.

Cominciamo da quella che ha per base A'B''C'' e per vertice A; essa dà origine all'iperpiramide tetraedrale D(AA'B''C'') nella quale, per essere DD'' parallela all'S_3 che contiene il tronco ABCA'B'C', possiamo al vertice D sostituire D''. Otteniamo così l'iperpiramide tetraedrale D″(AA′B″C″) alla quale possiamo dare come vertice A e come base A′B″C″D″. Essa ha dunque l'altezza h dell'iperpiramide tronca data e per base A′B″C″D″ cioè la base minore.

Passiamo ad esaminare quella che ha per base A′B′C″ e per vertice A: essa dà origine alla iperpiramide tetraedrale D(AA′B′C″).

In questa possiamo porre D″ per D per una ragione analoga a quella accennata sopra, ed otterremo così la nuova iperpiramide di vertice D″ e base AA′B′C″ alla quale potremo dare per base A′B′C″D″ e per vertice A. Essa ha dunque per altezza h e per base A′B′C″D″ che è uno dei tetraedri (β).

Consideriamo infine quella la cui base è A′B′C′ e il cui vertice è A: essa dà origine all'iperpiramide tetraedrale D(AA′B′C′) nella quale il vertice D può essere sostituito da D″, con che si passa all'iperpiramide D″(AA′B′C′). In quest'ultima assumendo come vertice A, la sua base è A′B′C′D″: l'altezza è dunque h e la base è uno dei tetraedri (α).

Abbiamo così scomposto l'iperpiramide tronca in quattro iperpiramidi tetraedrali aventi la medesima altezza dell'iperpiramide tronca e per basi rispettive la base minore di essa, la base maggiore, un tetraedro (α) e un tetraedro (β).

Rimane, per completare il nostro asserto, che noi facciamo vedere che sussiste la catena di rapporti:

$$A'B''C''D'' : \beta = \beta : \alpha = \alpha : A'B'C'D'.$$

Invero si ha:

$$A'B''C''D'' : A'B''C'D'' = A'B''C'' : A'B''C' = A'C'' : A'C'$$
$$A'B''C'D'' : A'B'C'D'' = A'B''C' : A'B'C' = A'C'' : A'C'.$$

Si ha poi:

$$A'B'C'D'' : A'B'C'D' = A'C'D'' : A'C'D' = A'D'' : A'D'$$

ed essendo:

$$A'C'' : A'C' = A'D'' : A'D',$$

segue:

$$A'B''C''D'' : A'B''C'D'' = A'B''C'D'' : A'B'C'D'' = A'B'C'D'' : A'B'C'D'$$

cioè:

$$A'B''C''D'' : \beta = \beta : \alpha = \alpha : A'B'C'D'$$

c. d. d.

ENRICO PICCIOLI.

PICCOLE NOTE

Calcolo approssimato. — Giustissimi sono i metodi di calcolo indicati nell'articolo *Prodotti approssimati* di VIRGINIA VESIN apparso nell'ultimo fascicolo del *Periodico.*

Non va tuttavia dimenticata la seguente osservazione.

Nel dare un valore approssimato sotto forma decimale non è affatto necessario e talora neppur conveniente dare un valore con cifre esatte: per esempio se di x si sa che 15,48 è un valore per difetto a meno di 0,03, in cifre esatte non si può dare che la parte intera 15; ora, questo valore è a meno di 0,51 cioè per esso il limite superiore dell'errore è 17 volte più grande che pel valore precedente.

Quando si fanno dei calcoli con valori approssimati, pur formati con cifre esatte, si ottengono dei risultati approssimati che non sono, generalmente, espressi con cifre esatte; e se si vuole ridurli a tali, si aumenta l'ampiezza dell'approssimazione, cioè si aumenta l'errore.

Ciò che importa nei calcoli approssimati è determinare l'approssimazione del risultato di un calcolo eseguito, e, inversamente, stabilire il calcolo che deve essere fatto per ottenere un'approssimazione prefissata.

Ancora, rispetto al procedimento indicato nell'articolo in parola, si può osservare (come ivi è detto) che quel procedimento non si applica ai prodotti di due numeri entrambi approssimati, che pure compaiono nell'insegnamento secondario inferiore (per esempio, per calcolare la lunghezza della circonferenza circoscritta ad un quadrato di lato 1, che è data da $\sqrt{2} \times \pi$).

Complessivamente, io credo che nelle scuole medie di 1° grado, alle quali si riferiva l'articolo di V. VESIN e nelle quali si fanno calcoli approssimati di tutte le specie, si debba attenersi al metodo più semplice di eseguire le operazioni ordinarie su valori approssimati, con la sola determinazione (in grosso modo) dell'approssimazione del resultato; solamente in un insegnamento di grado superiore si potrà svolgere in modo più ampio e preciso, e con le operazioni abbreviate, il calcolo approssimato.

Comunque, volendo indicare con precisione i procedimenti del calcolo approssimato per un determinato ordine di scuole, non si può restringere l'esame ad una sola operazione separatamente, ma bisogna estenderlo a tutte, perchè detti procedimenti devono formare un insieme omogeneo e ben coordinato.

E. MACCAFERRI.

Determinazione degli assi di una conica centrale. — È noto che, se è data l'equazione generale di una conica

$$f(x) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{1}$$

e chiamiamo A_{ih} il minore complementare di a_{ih} nel suo discriminante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

e poniamo

$$\mathrm{I} = a_{11} + a_{22} - 2a_{12} \cos \theta,$$

quando è $A_{33} \neq 0$, la conica è centrale, e le coordinate del centro sono

(2) $$x_0 = \frac{A_{13}}{A_{33}}, \qquad y_0 = \frac{A_{23}}{A_{33}}.$$

I coefficienti angolari degli assi sono le radici dell'equazione

(3) $$(a_{12} - a_{22} \cos \theta)\, m^2 + (a_{11} - a_{22})\, m + (a_{11} \cos \theta - a_{12}) = 0,$$

cioè, posto

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 - 4\,(a_{12} - a_{22} \cos \theta)(a_{11} \cos \theta - a_{12}) = \mathrm{I}^2 - 4A_{33} \operatorname{sen}^2 \theta,$$

questi coefficienti angolari sono

(4) $$m = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{2\,(a_{12} - a_{22} \cos \theta)}.$$

Finalmente si sa che l'equazione della conica riferita agli assi è

(5) $$\frac{X^2}{\alpha} + \frac{Y^2}{\beta} = 1,$$

dove α, β sono le radici dell'equazione

(6) $$z^2 + \frac{A\mathrm{I}}{A_{33}{}^2} z + \frac{A^2}{A_{33}{}^2} \operatorname{sen}^2 \theta = 0,$$

cioè

(7) $$\left.\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix}\right\} = \frac{A}{2A_{33}{}^2} \left\{ -\mathrm{I} \pm \sqrt{\Delta} \right\}.$$

Quest'ultima formula si deduce ordinariamente facendo uso della proprietà invariantiva delle funzioni

$$\frac{A}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \frac{A_{33}}{\operatorname{sen}^2\theta}, \quad \frac{\mathrm{I}}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Volendo disegnare la conica rappresentata dalla equazione (1), basta dunque fissare il centro C per mezzo delle formule (2), poi tracciare per C due rette le cui direzioni sono determinate dalle formule (4), le quali saranno gli assi. La formula (7) finalmente dà le lunghezze degli assi. E più precisamente, se $A_{33} > 0$, $A \cdot \mathrm{I} < 0$, dalla (6) risulta che α, β sono positivi; la conica è una ellisse reale di cui $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$ sono le lunghezze degli assi. Se $A_{33} > 0$, $A \cdot \mathrm{I} > 0$, risulta che α, β sono negativi e la conica è un'ellisse immaginaria. Se $A_{33} < 0$, risulta $\alpha > 0$, $\beta < 0$, e la conica è un'iperbole di cui $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{-\beta}$ sono le lunghezze dei semiassi.

Tracciati gli assi della ellisse, o della iperbole, sono note parecchie costruzioni per disegnarla.

Col procedimento sopra indicato non resta però determinato su quale delle due direzioni degli assi si debba portare la lunghezza $\sqrt{\alpha}$ e su quale la lunghezza $\sqrt{\pm \beta}$. In pratica si giunge facilmente a togliere questa incertezza con qualche tentativo. Ma la questione si può precisare colla seguente regola:

Ai due valori di m *dati dalle* (4) *corrispondono ordinatamente i valori di* α, β *dati dalle formule* (7) *colla condizione che* $\sqrt{\Delta}$ *sia in ambedue le formule preceduta dallo stesso segno.*

Mi limito a dimostrare questa regola per il caso in cui gli assi coordinati sono ortogonali. In questo caso essendo $\theta = 90^0$, le formule (3), (4) diventano

(8) $$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0,$$

(9) $$m = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{2a_{12}},$$

essendo

(10) $$\Delta = I^2 - 4A_{33} = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2.$$

Imaginiamo di avere già trasportati gli assi parallelamente a loro stessi in guisa che l'origine coincida col centro della curva. Per noti termini l'equazione diventa

(11) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \frac{A}{A_{33}} = 0;$$

e l'equazioni degli assi sono

(12) $$y = mx,$$

dove m è uno dei due valori dati dalla (9).

Se eliminiamo y fra le due ultime equazioni e risolviamo l'equazione risultante rispetto ad x, troviamo la proiezione sull'asse delle x del semiasse corrispondente al valore di m che si considera.

Per fissare le idee prendiamo in esame il valore di m corrispondente al radicale col segno $+$, cioè

(13) $$m = \frac{a_{22} - a_{11} + \sqrt{\Delta}}{2a_{12}},$$

e sia a la lunghezza del semiasse corrispondente. La proiezione di a è dunque data dall'equazione

$$x^2(a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2) + \frac{A}{A_{33}} = 0,$$

oppure, siccome dalla (13) si ricava

$$a_{11} + 2a_{12}m = a_{22} + \sqrt{\Delta},$$

dall'altra

$$x^2\{a_{22}(1 + m^2) + \sqrt{\Delta}\} + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Essendo $m = \tan\varphi$, si ha

$$a^2 = \frac{x^2}{\cos^2\varphi} = x^2\sec^2\varphi = x^2(1 + m^2),$$

e perciò dall'equazione precedente si ricava

(14) $$a^2\left\{a_{22} + \frac{\sqrt{\Delta}}{1 + m^2}\right\} + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Ma dalla (13) si ricava

$$1 + m^2 = \frac{1}{4a_{12}^2}\{4a_{12}^2 + (a_{22} - a_{11})^2 + \Delta + 2(a_{22} - a_{11})\sqrt{\Delta}\},$$

ossia

$$1 + m^2 = \frac{1}{2a_{12}^2}\{\Delta + (a_{22} - a_{11})\sqrt{\Delta}\} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a_{12}^2}\{a_{22} - a_{11} + \sqrt{\Delta}\},$$

e quindi

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{1+m^2}=\frac{2a_{12}^2}{a_{22}-a_{11}+\sqrt{\Delta}}=\frac{2a_{12}^2}{(a_{22}-a_{11})^2-\Delta}\{(a_{22}-a_{11})-\sqrt{\Delta}\}$$

ossia, tenendo conto della (10),

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{1+m^2}=-\frac{1}{2}\{(a_{22}-a_{11})-\sqrt{\Delta}\}.$$

Se sostituiamo nella (14) risulta

$$\frac{a^2}{2}\{(a_{11}+a_{22})+\sqrt{\Delta}\}+\frac{A}{A_{33}}=0,$$

ossia

$$a^2(I+\sqrt{\Delta})(I-\sqrt{\Delta})+\frac{2A}{A_{33}}(I-\sqrt{\Delta})=0,$$

e per la (10)

$$a^2 . 4A_{33}+\frac{2A}{A_{33}}(I-\sqrt{\Delta})=0$$

ossia

$$a^2=\frac{A}{2A_{33}^2}\{-I+\sqrt{\Delta}\}.$$

Siamo così ritornati alla formula (7), ma abbiamo per di più verificato che quando nella formula (13), che dà il valore di m, si prenda $\sqrt{\Delta}$ preceduto dal segno $+$ anche nella formula (7) si deve prendere $\sqrt{\Delta}$ pure preceduto dal segno $+$, ecc.

Abbiamo fatto la dimostrazione per il caso di assi ortogonali; ma si capisce facilmente che la regola si estende subito anche al caso degli assi obliqui. Infatti la legge di dipendenza fra i due valori della (4) e i due della (7) per θ qualunque deve ridursi a quella sopra esposta, quando si ponga $\theta=90$.

Sul circolo osculatore dell'ellisse. — 1. Il circolo osculatore in un punto P di una conica ha in comune con la medesima tre punti riuniti in P ed un altro punto P' reale, in generale distinto da P che, chiamerò l'*associato* di P. Fra i due punti P, P' nel caso che la conica sia un'ellisse c'è una dipendenza semplicissima, che non so se sia stata osservata. Scopo di questa nota è dimostrare tale legge di dipendenza.

Ricordiamo anzitutto che l'equazione del circolo osculatore ad una conica si può determinare coi metodi della geometria analitica come segue.

Se $f(x, y)=0$ è l'equazione della conica data, $M=0$, $N=0$ sono l'equazioni di due rette qualunque e K una costante arbitraria, l'equazione

$$f(x, y)+K.M.N=0$$

rappresenta il fascio di coniche che passano per i quattro punti d'incontro della conica data con le due rette. Se $M=0$ rappresenta la tangente in un punto P della conica, e $N=0$ rappresenta una retta qualunque per P, tre di questi punti coincidono con P; si dice allora che la (1) ha un *contatto tripunto* colla conica data. E se le due rette $M=0$, $N=0$ coincidono colla tangente in P alla conica data, l'equazione precedente diventa

$$f(xy)+K.M^2=0$$

e rappresenta una conica che ha in comune colla conica data quattro punti riuniti in P; si dice che essa ha un *contatto quadripunto* colla data conica.

2. Consideriamo ora l'ellisse riferita ai suoi assi,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\,\text{sen}\,\varphi. \end{cases}$$

L'equazione della tangente nel punto P corrispondente al valore φ del parametro, e quella di una retta qualunque per P, di coefficiente angolare m, essendo

$$\begin{cases} \dfrac{x\cos\varphi}{a}+\dfrac{y\,\text{sen}\,\varphi}{b}=1 \\ y-b\,\text{sen}\,\varphi=m(x-a\cos\varphi), \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} bx\cos\varphi+ay\,\text{sen}\,\varphi-ab=0 \\ mx-y-(ma\cos\varphi-b\,\text{sen}\,\varphi)=0, \end{cases}$$

l'equazione di una conica che abbia in P un contatto tripunto è

$$(1) \qquad (b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)+$$
$$+K(bx\cos\varphi+ay\,\text{sen}\,\varphi-ab)\{mx-y-(ma\cos\varphi-b\,\text{sen}\,\varphi)\}=0$$

e quella di una conica che abbia un contatto quadripunto è

$$(2) \qquad (bx^2+a^2y^2-a^2b^2)+K(bx\cos\varphi+ay\,\text{sen}\,\varphi-ab)^2=0.$$

Le (1) (2) si possono scrivere

$$(3) \quad (b^2+Kmb\cos\varphi)x^2+(a^2-Ka\,\text{sen}\,\varphi)y^2-K(am\,\text{sen}\,\varphi-b\cos\varphi)xy+\ldots=0$$

$$(4) \qquad (1+K\cos^2\varphi)b^2x^2+(1+K\,\text{sen}^2\varphi)a^2y^2+\frac{1}{2}Kab\,\text{sen}\,2\varphi\,xy+\ldots=0.$$

3. Dalla (4) apparisce che perchè la conica avente un contatto quadripunto sia un circolo è necessario e sufficiente che sia:

$$\begin{cases} (1+K\cos^2\varphi)b^2=(1+K\,\text{sen}^2\varphi)a^2 \\ \dfrac{1}{2}Kab\,\text{sen}\,2\varphi=0. \end{cases}$$

Dalla seconda di questa equazione si ricava $2\varphi=h\pi$, $\varphi=h\dfrac{\pi}{2}$; dalla prima si deduce poi K. Dunque *soltanto nei vertici della ellisse esiste un circolo avente un contatto quadripunto.*

4. Dalla (3) apparisce che la conica avente un contatto tripunto in un punto P qualunque della ellisse è un circolo, quando sono verificate le condizioni

$$\begin{cases} b^2+Kmb\cos\varphi=a^2-Ka\,\text{sen}\,\varphi \\ am\,\text{sen}\,\varphi-b\cos\varphi=0, \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} m=\dfrac{b\cos\varphi}{a\,\text{sen}\,\varphi} \\ K=\dfrac{ac^2\,\text{sen}\,\varphi}{a^2\,\text{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}, \end{cases}$$

ove si è posto $c^2=a^2-b^2$; ne risulta che l'equazione della corda comune alla conica e al circolo osculatore in P è

$$(5) \qquad bx\,.\cos\varphi-ay\,\text{sen}\,\varphi=ab\cos 2\varphi.$$

E l'equazione del circolo osculatore (fatte le opportune riduzioni) diventa

$$(6) \qquad x^2+y^2-2\frac{c^2}{a}\cos^3\varphi\,.\,x+2\frac{c^2}{b}\,\text{sen}^3\varphi+c^2\cos 2\varphi=0.$$

Se ne ricava con facili calcoli che le coordinate del centro ed il raggio sono dati dalle formole note

$$(7)\qquad \begin{cases} x_0 = \dfrac{c^2}{a}\cos^3\varphi \\ y_0 = -\dfrac{c^2}{b}\,\mathrm{sen}^3\varphi \end{cases} \qquad\qquad (8)\qquad R = \frac{(a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

5. L'equazione (5) rappresenta la retta PP', dunque risolvendo il sistema formato dalla (5) e dall'equazione della ellisse troveremo le coordinate di P (che sono note) o quelle di P'. Se nella equazione dell'ellisse sostituiamo il valore di y data dalla (5), troviamo

$$(9)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\cos\varphi\,.\,\cos 2\varphi\,.\left(\frac{x}{a}\right) + (\cos^2 2\varphi - \mathrm{sen}^2\varphi) = 0\,.$$

Il discriminante di questa equazione è

$$\Delta = \cos^2\varphi\,.\,\cos^2 2\varphi - \cos^2 2\varphi + \mathrm{sen}^2\varphi = \mathrm{sen}^2\varphi\,.\,\mathrm{sen}^2 2\varphi$$

dunque

$$\frac{x}{a} = \cos\varphi\,.\,\cos 2\varphi \pm \mathrm{sen}\,\varphi\,.\,\mathrm{sen}\,2\varphi,$$

da cui le due soluzioni $x = a\cos\varphi$, $x = a\cos 3\varphi$; la prima corrisponde al punto P, la seconda dà le coordinate di P', che sono

$$(10)\qquad \begin{cases} x = a\cos(-3\varphi) \\ y = b\,\mathrm{sen}\,(-3\varphi). \end{cases}$$

È noto il significato geometrico dell'angolo φ. Il circolo che ha per diametro l'asse maggiore dell'ellisse e l'ellisse stesso sono figure omologiche affini nella omologia che ha per asse l'asse maggiore dell'ellisse e per centro il punto improprio della direzione normale a quest'asse. Se P_1 e P sono punti corrispondenti del circolo e dell'ellisse, l'angolo xOP_1 è l'angolo φ corrispondente a P.

Come si vede dalle formule (10) *il punto associato a* P *è il punto dell'ellisse omologo a quello del circolo, corrispondente all'angolo* -3φ.

E questa è la legge semplicissima di dipendenza cui ho accennato in principio.

6. Possiamo ora proporci il problema: *Esiste un punto che sia associato del suo associato?* In altre parole il circolo osculatore in P taglia l'ellisse in P'; il circolo osculatore in P' taglia l'ellisse in un punto P'', in generale diverso da P; può P'' coincidere con P?

Dalle formule (10) apparisce che se P corrisponde al valore φ del parametro, il suo associato P' corrisponde al valore -3φ, l'associato P'' di P' corrisponde dunque al valore $(-3)^2\varphi = 9\varphi$. Affinchè P'' coincida con P' deve essere $9\varphi - \varphi = 2h\pi$ ossia $\varphi = h\dfrac{\pi}{4}$; dunque soltanto le due coppie di punti corrispondenti ai valori $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{4}$ e $\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ verificano la condizione indicata; la soluzione $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ non è da considerarsi perchè allora il contatto è quadripunto.

Più generalmente si costruisca, partendo da P una successione di punti P', P'', ... $P^{(n)}$, di cui ciascuno sia l'associato del precedente. $P^{(n)}$ corrisponde al valore $(-3)^n\varphi$. Perchè coincida con P dovrà essere $(-3)^n\varphi - \varphi = 2h\pi$, ossia $\varphi = \dfrac{2\pi}{(-3)^n - 1}\,.\,h$.

In particolare si trova

$$\begin{cases} n=3 \\ \varphi = \frac{1}{14}\pi \,.\, h \end{cases} \qquad \begin{cases} n=4 \\ \varphi = \frac{1}{40}\pi \,.\, h \end{cases} \qquad \begin{cases} n=5 \\ \varphi = \frac{1}{122}\pi \,.\, h \end{cases} \qquad \begin{cases} n=5 \\ \varphi = \frac{1}{364}\pi \,.\, h \,\ldots \end{cases}$$

7. Proponiamoci di *trovare l'inviluppo della retta* PP', cioè della retta ch unisce un punto P della ellisse al suo associato.

Dalla (5) risulta che le coordinate plückeriane di tale retta sono

$$\begin{cases} u = -\dfrac{\cos\varphi}{a\cos 2\varphi} \\ v = \dfrac{\operatorname{sen}\varphi}{b\cos 2\varphi} \,. \end{cases}$$

Eliminando φ fra queste equazioni, si trova come equazione dell'inviluppo cercato in coordinate plückeriane

$$(a^2u^2 - b^2v^2)^2 - (a^2u^2 + b^2v^2) = 0 \,.$$

Dunque: *l'inviluppo è di quarta classe.*

Per avere l'equazione in coordinate cartesiane basta eliminare φ fra la (5) la sua derivata rispetto a φ, cioè fra le due equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}\cos\varphi - \dfrac{y}{b}\operatorname{sen}\varphi = \cos 2\varphi \\ \dfrac{x}{a}\operatorname{sen}\varphi + \dfrac{y}{b}\cos\varphi = 2\operatorname{sen} 2\varphi \,, \end{cases}$$

dalle quali si trova

$$\begin{cases} x = a\,\{3\cos\varphi - 2\cos^3\varphi\} \\ y = b\,\{3\operatorname{sen}\varphi - 2\operatorname{sen}^3\varphi\} \end{cases}, \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\,\{3\cos\varphi + \cos 3\varphi\} \\ y = \dfrac{b}{2}\,\{3\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} 3\varphi\} \,. \end{cases}$$

Eliminando φ si trova

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 4\right)^3 + 3\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = 0 \,.$$

Dunque: *l'inviluppo cercato è di 6° ordine.*

È facile verificare che essa ha quattro punti cuspidali di coordinate

$$x = \pm\, a\sqrt{2} \qquad y = \pm\, b\sqrt{2} \,.$$

Se si considera l'ipocicloide a 4 regressi situati sul circolo concentrico al
i raggio $2a$ nei punti corrispondenti a $\varphi = (2h+1)\frac{\pi}{4}$, si trova ch le coordinate dei suoi punti sono

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\,\{3\cos\varphi + \cos 3\varphi\} \\ y = \dfrac{a}{2}\,\{3\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen} 3\varphi\} \,. \end{cases}$$

Se ne deduce che: *l'inviluppo cercato e questa ipocicloide si corrispondono nell omologia che intercede fra l'ellisse ed il circolo sopra considerato.*

G. LAZZERI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 31 Ottobre 1917