Ponendo m in luogo di n, ed s in luogo di r si ha

$$V_{m+s} + V_{m-s} - 2V_m = 2As^2; \tag{3}$$

e quindi dividendo membro a membro le (2) e (3), si ottiene

$$\frac{V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n}{V_{m+s} + V_{m-s} - 2V_m} = \left(\frac{r}{s}\right)^2. \tag{4}$$

Il primo membro è dunque il quadrato di un numero intero, se r è multiplo di s; inoltre è indipendente da n, da m e dalle caratteristiche della successione.

Corollario. — *Nei gruppi equisimmetrici del terzo ordine, la differenza tra la somma dei termini estremi ed il doppio del termine medio è costante ed indipendente dalla seconda e terza caratteristica della successione* V.

Ed infatti posto nella (4), $r = s$, risulta

$$V_{n+r} + V_{n-r} - 2V_n = V_{m+r} + V_{m-r} - 2V_m = 2Ar^2$$

Teorema III. — *Il quoziente*

$$\frac{(V_n - Ar^2)^2 - V_{n-r}V_{n+r}}{r^2}$$

è eguale al discriminante della successione (1)

Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} V_{n+r}V_{n-r} &= (V_n + Ar^2 + Br + 2Anr)(V_n + Ar^2 - Br - 2Anr) = \\ &= (V_n + Ar^2)^2 - r^2(2An + B)^2 = \\ &= (V_n - Ar^2)^2 - r^2(B^2 - 4AC), \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{(V_n - Ar^2)^2 - V_{n-r}V_{n+r}}{r^2} = B^2 - 4AC.$$

Corollario I. — *Il rapporto*

$$\frac{(V_n - Ar^2)^2 - V_{n-r}V_{n+r}}{(V_m - As^2)^2 - V_{m-s}V_{m+s}}$$

è il quadrato di un numero intero, se r è multiplo di s.

Corollario II. — *Nei gruppi equisimmetrici del terzo ordine la differenza tra la somma dei prodotti due a due, dei termini del gruppo e il triplo del quadrato del termine medio è costante.*

Infatti considerando il gruppo simmetrico V_{n-r}, V_n, V_{n+r} si ha, applicando risultati precedentemente ottenuti

$$\begin{gathered} V_{n-r}V_{n+r} = (V_n - Ar^2)^2 - r^2(B^2 - 4AC) \\ V_nV_{n+r} + V_nV_{n-r} = V_n(V_{n+r} + V_{n-r}) = V_n(2V_n + 2Ar^2); \end{gathered}$$

e quindi

$$V_{n-r}V_{n+r} + V_nV_{n+r} + V_nV_{n-r} - 3V^2_n = r^2(A^2r^2 - B^2 + 4AC).$$

E perchè ponendo nella relazione ottenuta m in luogo di n, il valore del primo membro non cambia, risulta:

$$V_{n-r}V_{n+r}+V_nV_{n+r}+V_nV_{n-r}-3V^2_n=V_{m-r}V_{m+r}+V_mV_{m+r}+V_mV_{m-r}-3V^2_m$$

come si doveva dimostrare.

3. Consideriamo il gruppo simmetrico del quinto ordine

$$V_{n-r},\ V_{n-s},\ V_n,\ V_{n+s},\ V_{n+r} \qquad (r>s).$$

Abbiamo

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=(V_{n-r}+V_{n+r})^2-2V_{n-r}V_{n+r};$$

ed essendo, come si è veduto:

$$V_{n-r}+V_{n+r}=2V_n+2Ar^2,\quad V_{n-r}V_{n+r}=(V_n-Ar^2)^2-r^2(B^2-4AC),$$

risulta

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=2V^2_n+12Ar^2V_n+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC).$$

Ponendo s in luogo di r, si ha

$$V^2_{n-s}+V^2_{n+s}=2V^2_n+12As^2V_n+2A^2s^4+2s^2(B^2-4AC)$$

e quindi

$$(V^2_{n-r}+V^2_{n+r})-(V^2_{n-s}+V^2_{n+s})-12A(r^2-s^2)V_n=$$
$$=2A^2(r^4-s^4)+2(r^2-s^2)(B^2-4AC).$$

Considerando allora i *due gruppi equisimmetrici del quinto ordine*

$$V_{n-r},\ V_{n-s},\ V_n,\ V_{n+s},\ V_{n+r};\quad V_{m-r},\ V_{m-s},\ V_m,\ V_{m+s},\ V_{m+r}$$

abbiamo la formola

$$(V^2_{n+r}+V^2_{n-r})-(V^2_{n+s}+V^2_{n-s})-12A(r^2-s^2)V_n=$$
$$=(V^2_{m+r}+V^2_{m-r})-(V^2_{m+s}+V^2_{m-s})-12A(r^2-s^2)V_m. \qquad (5)$$

In particolare, per $r=2$ e $s=1$, cioè se si considerano due gruppi di cinque termini consecutivi, risulta

$$(V^2_{n+2}+V^2_{n-2})-(V^2_{n+1}+V^2_{n-1})-36AV_n=$$
$$=(V^2_{m+2}+V^2_{m-2})-(V^2_{m+1}+V^2_{m-1})-36V_m$$

od anche

$$V^2_{n+2}+V^2_{m+1}+36AV_m+V^2_{m-1}+V^2_{n-2}=$$
$$=V^2_{m+2}+V^2_{n+1}+36AV_n+V^2_{n-1}+V^2_{m-2}. \qquad (6)$$

Se nella (6) poniamo $n+2$ in luogo di n e $n+7$ in luogo di m, abbiamo fra dieci termini consecutivi della successione V la formola:

$$V^2_{n+4}+V^2_{n+8}+36AV_{n+7}+V^2_{n+6}+V^2_n=$$
$$=V^2_{n+9}+V^2_{n+3}+36AV_{n+2}+V^2_{n+1}+V^2_{n+5}. \qquad (7)$$

Così se la successione V ha per caratteristiche

$$A=0,\qquad B=1,\qquad C=0$$

se è cioè la successione dei numeri interi, abbiamo per la formola (6) l'identità

$$(n+2)^2+(m+1)^2+(m-1)^2+(n-2)^2=(m+2)^2+(n+1)^2+(n-1)^2+(m-2)^2;$$

e per la formola (7) resulta l'identità

$$n^2+(n+4)+(n+6)^2+(n+8)^2=(n+1)^2+(n+3)^2+(n+5)^2+(n+9)^2.$$

In particolare, ponendo nell'ultima identità $n=0$, risulta

$$4^2+6^2+8^2=1^2+3^2+5^2+9^2,$$

e ponendo invece $n=1$, si ottiene

$$1^2+5^2+7^2+9^2=2^2+4^2+6^2+10^2.$$

Similmente considerando la successione dei numeri numeri dispari, cioè la successione di caratteristiche

$$A=0, \qquad B=2, \qquad C=1$$

per la formola (7), si ha l'identità

$$(2n+1)^2+(2n+9)^2+(2n+13)^2+(2n+17)^2=$$
$$=(2n+3)^2+(2n+7)^2+(2n+11)^2+(2n+19)^2,$$

ecc. ecc.

4. Consideriamo i tre gruppi del terzo ordine

$$\begin{array}{lll} V_n, & V_{n+1}, & V_{n+2} \\ V_{n-r}, & V_{n+r}, & V_{n+r+1} \\ V_{n-r+1}, & V_{n-r+2}, & V_{n+r+2}. \end{array}$$

Abbiamo, per quanto si è veduto

$$V^2_{n-r}+V^2_{n+r}=2V^2_n+12Ar^2V_n+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC) \qquad (8)$$

e ponendo $n+1$ in luogo di n, risulta similmente

$$V^2_{n-r+1}+V^2_{n+r+1}=2V^2_{n+1}+12Ar^2V_{n+1}+2A^2r^4+2r^2(B^2-4AC) \quad (9)$$

e sottraendo membro a membro la (8) dalla (9), si ha

$$V^2_{n-r+1}+V^2_{n+r+1}-V^2_{n-r}-V^2_{n+r}=2(V^2_{n+1}-V^2_n)+12Ar^2(V_{n+1}-V_n). \quad (10)$$

Ponendo nella (10), $n+1$ in luogo di n, risulta

$$V^2_{n-r+2}+V^2_{n+r+2}-V^2_{n-r+1}-V^2_{n+r+1}=$$
$$=2(V^2_{n+2}-V^2_{n+1})+12Ar^2(V_{n+2}-V_{n+1}). \qquad (11)$$

Infine se sottraggliamo membro a membro la (10) dalla (11), ricordando che è

$$V_{n+2}-2V_{n+1}+V_n=2A,$$

otteniamo, la formola

$$(V^2_{n+r+2}+V^2_{n-r+2}-2V^2_{n-r+1})+(V^2_{n+r}+V^2_{n-r}-2V^2_{n+r+1})-$$
$$-2(V^2_{n+2}+V^2_n-2V^2_{n+1})=24A^2r^2. \qquad (12)$$

Poichè il secondo membro è indipendente da n, ponendo m in luogo di n il secondo membro non cambia e quindi risulta l'identità

$$\begin{aligned}&(V^2_{n+r+2}+V^2_{n-r+2}+2V^2_{m-r+1})+(V^2_{n+r}+V^2_{n-r}+2V^2_{m-r-1})+\\&+2(V^2_{m+2}+V^2_{m}+2V^2_{n+1})=(V^2_{m+r+2}+V^2_{m-r-2}+2V^2_{n-r-1})+\\&+(V^2_{m+r}+V^2_{m-r}+2V^2_{n+r+1})+2(V^2_{n+2}+V^2_{n}+2V^2_{m-1}).\end{aligned}\qquad(13)$$

Consideriamo alcuni notevoli casi particolari.

α) Per $r=1$, la (12) diviene

$$V^2_{n+3}-4V^2_{n+2}+6V^2_{n+1}-4V^2_{n}+V^2_{n-1}=24A^2.$$

Risulta quindi

Per le successioni V *a caratteristiche intere, l'espressione*

$$V^2_{n+3}-4V^2_{n+2}+6V^2_{n+1}-4V^2_{n}+V^2_{n-1}\qquad(14)$$

è divisibile per 24. Per le successioni V *la cui prima caratteristica è della forma*

$$A=\frac{2h+1}{2}$$

$\left(\text{e quindi similmente } B=\frac{2l+1}{2}\right)$, *l'espressione* (14) *è divisibile per 6: infine per le successioni aventi nulla la prima caratteristica, cioè, in altre parole, per le progressioni aritmetiche, il cui primo termine è* $B+C$ *e la ragione è* B *l'espressione* (14) *è nulla.*

Ponendo nella (13), $r=1$, si ha

$$\begin{aligned}&V^2_{n+3}+4V^2_{m+2}+6V^2_{n+1}+4V^2_{m}+V^2_{n-1}=\\&\qquad=V^2_{m+3}+4V^2_{n+2}+6V^2_{m+1}+4V^2_{n}+V^2_{m-1}.\end{aligned}$$

Sostituendo $n+2$ ad n e $n+7$ ad m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di dieci termini consecutivi della successione V

$$\begin{aligned}&V^2_{n+1}+4V^2_{n+7}+6V^2_{n+3}+4V^2_{n+9}+V^2_{n+5}=\\&\qquad=V^2_{n+6}+4V^2_{n+2}+6V^2_{n+8}+4V^2_{n+4}+V^2_{n+10}.\end{aligned}$$

Così per la successione dei numeri interi, si ha

$$\begin{aligned}&(n+1)^2+4(n+7)^2+6(n+3)^2+4(n+9)^2+(n+5)^2=\\&\qquad=(n+6)^2+4(n+2)^2+6(n+8)^2+4(n+4)^2+(n+10)^2;\end{aligned}$$

e per la successione dei quadrati dei numeri interi, abbiamo

$$\begin{aligned}&(n+1)^4+4(n+7)^4+6(n+3)^4+4(n+9)^4+(n+5)^4=\\&\qquad=(n+6)^4+4(n+2)^4+6(n+8)^4+4(n+4)^4+(n+10)^4.\end{aligned}$$

β) Per $r=2$, la (12) dà una una relazione fra i quadrati di 7 termini consecutivi

$$V^2_{n+4}-2V^2_{n+3}-V^2_{n+2}+4V^2_{n+1}-V^2_{n}-2V^2_{n-1}+V^2_{n-2}=96A^2.$$

Ponendo nella (13) $r=2$ e $n+3$ in luogo di n, $n+10$ in luogo di m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di 14 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+1}+2V^2_{n+9}+V^2_{n+10}+4V^2_{n+4}+V^2_{n+12}+2V^2_{n+13}+V^2_{n+7}=\\&=V^2_{n+5}+2V^2_{n+2}+V^2_{n+3}+4V^2_{n+11}+V^2_{n+6}+2V^2_{n+8}+V^2_{n+14}.\end{aligned}$$

γ) Per $r=3$, la (12) dà una relazione fra i quadrati di 9 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+5}-2V^2_{n+4}+V^2_{n+3}-2V^2_{n+2}+4V^2_{n+1}-\\&\qquad-2V^2_{n}+V^2_{n-1}-2V^2_{n-2}+V^2_{n-3}=216A^2.\end{aligned}$$

Ponendo nella (13), $r=3$, $n+5$ in luogo di n, $n+14$ in luogo di m, risulta la seguente relazione fra i quadrati di 18 termini consecutivi:

$$\begin{aligned}&V^2_{n+1}+2V^2_{n+11}+V^2_{n+3}+2V^2_{n+13}+4V^2_{n+5}+2V^2_{n+15}+V^2_{n+7}+2V^2_{n+17}+V^2_{n+9}=\\&=V^2_{n+10}+2V^2_{n+2}+V^2_{n+12}+2V^2_{n+4}+4V^2_{n+14}+2V^2_{n+6}+V^2_{n+16}+2V^2_{n+8}+V^2_{n+18}\end{aligned}$$

ecc. ecc.

5. Diremo che un gruppo (*) di quattro termini

$$V_\alpha,\ V_\beta,\ V_\gamma,\ V_\delta$$

è *un gruppo simmetrico*, se è $\beta-\alpha=\delta-\gamma$.

Due gruppi simmetrici V_α, V_β, V_γ, V_δ e $V_{\alpha'}$, $V_{\beta'}$, $V_{\gamma'}$, $V_{\delta'}$, si diranno *equisimmetrici*, quando è $\beta-\alpha=\beta'-\alpha'$ e $\gamma-\beta=\gamma'-\beta'$.

Considеriamo il gruppo simmetrico

$$V_{n-r},\ V_n,\ V_m,\ V_{m+r}.$$

Abbiamo

$$V_{m+r}-V_m=V_r+2Amr-C$$
$$V_n-V_{n-r}=V_r+2A(n-r)r-C;$$

e quindi

$$(V_{m+r}+V_{n-r})-(V_m+V_n)=2Ar\,(m-n+r).$$

Per il gruppo simmetrico

$$V_{n'-r},\ V_{n'},\ V_{m'},\ V_{m'+r}$$

abbiamo similmente

$$(V_{m'+r}+V_{n'-r})-(V_{n'}+V_{m'})=2Ar\,(m'-n'+r).$$

Se è

$$m-n=m'-n',$$

cioè se i due gruppi considerati sono equisimmetrici, si ha

$$(V_{m+r}+V_{n-r})-(V_m+V_n)=(V_{m'+r}+V_{n'-r})-(V_{n'}+V_{m'}),$$

ossia

(*) V. Tagiuri: "Di alcune successioni ricorrenti a termini interi e positivi", *Per. di Mat.* Serie II, Vol. III, fasc. I.

Nei gruppi equisimmetrici di quattro termini, la differenza tra la somma degli estremi e quella dei medî è costante e divisibile per il doppio della prima caratteristica.

6. Si consideri il gruppo simmetrico

$$V_{n-r},\ V_n,\ V_m,\ V_{m-r},$$

Abbiamo facilmente

$$V_{m+r}-V_{n-r}=(m-n+2r)\left(A(n+m)+B\right) \tag{15}$$
$$V_m-V_n=(m-n)\left(A(n+m)+B\right), \tag{16}$$

e quindi

$$\frac{(V_{m+r}-V_{n-r})(V_m-V_n)}{(m-n)(m-n+2r)}=(A(n+m)+B)^2. \tag{17}$$

Quindi *il quoziente*

$$\frac{(V_{m+r}-V_{n-r})(V_m-V_n)}{(m-n)(m-n+2r)}$$

è il quadrato di un numero intero, se la successione V *ha caratteristiche intere; e lo è pure quando, essendo* $A=\frac{2h+1}{2}$, $B=\frac{2l+1}{2}$, *sia* $n+m$ *un numero dispari.*

Dalle (15) e (16) risulta inoltre *che il quoziente*

$$\frac{V_{m+r}-V_{n-r}}{V_m-V_n}$$

è un numero intero, solo quando sia $2r$ *multiplo di* $m-n$.

In particolare ponendo nella (17) $r=1$ e $m=n+1$, risulta

$$(V_{n+2}-V_{n-1})(V_{n+1}-V_n)=3(A(2n+1)+B)^2$$

cioè, se si considerano quattro termini consecutivi della successione V *il prodotto della differenza degli estremi per la differenza dei medî è il triplo di un quadrato*

7. Consideriamo i due gruppi

$$V_{n+\alpha},\ V_{rn+\beta},\ V_{rn+\gamma},\ V_{n+\delta}$$
$$V_{m+\alpha},\ V_{rm+\beta},\ V_{rm+\gamma},\ V_{m+\delta}.$$

Vogliamo dimostrare *che se è*

$$r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma}$$

(*essendo* $\delta-\alpha$ *divisibile per* $\beta-\gamma$), risulta

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}+V_{rm+\gamma}+V_{m+\delta}=V_{m+\alpha}+V_{rm+\beta}+V_{rn+\gamma}+V_{n+\delta}.$$

Si ha infatti facilmente

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}-V_{rn+\gamma}-V_{n+\delta}=$$
$$=A(\alpha-\delta)(2n+\alpha+\delta)+B(\alpha-\delta)+A(\beta-\gamma)(2rn+\beta+\gamma)+B(\beta-\gamma).$$

Essendo ora per l'ipotesi fatta

$$r = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma},$$

si ha

$$\delta - \alpha = r(\beta - \gamma)$$

e quindi

$$V_{n+\alpha} + V_{rn+\beta} - V_{rn+\gamma} - V_{n+\delta} = A(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-r(\alpha+\delta)) - B(\beta-\gamma)(r-1). \quad (18)$$

Essendo il secondo membro indipendente da n, possiamo scrivere

$$V_{n+\alpha} + V_{rn+\beta} - {}_{rn+\gamma} - V_{n+\delta} = V_{m+\alpha} + V_{rm+\beta} - V_{rm+\gamma} - V_{m-\delta},$$

da cui

$$V_{n+\alpha} + V_{rn+\beta} + V_{rm+\gamma} + V_{m+\delta} = V_{m+\alpha} + V_{rm+\beta} + V_{rn+\gamma} + V_{n+\delta}. \quad (19)$$

In particolare ponendo nella (18)

$$\alpha = s,\ \beta = -1,\ \gamma = 1,\ \delta = -s$$

si ha

$$r = s:$$

e quindi

$$V_{n+s} + V_{sn-1} - V_{sn+1} - V_{n-s} = 2B(s-1);$$

ed inoltre

$$V_{n+s} + V_{sn-1} + V_{sm+1} + V_{m-s} = V_{m+s} + V_{sm-1} + V_{sn+1} + V_{n-s}.$$

ATTILIO CREPAS.

(Continua)

PICCOLE NOTE

I. **Sopra un luogo geometrico.** — È noto che il luogo dei fuochi delle coniche di una schiera è una cubica circolare della sesta classe, (*) per la quale si determinano facilmente, oltre i due ciclici, altri undici punti. Questi punti sono: i sei vertici del quadrilatero-base, i piedi delle altezze del triangolo diagonale, il fuoco proprio della parabola appartenente alla schiera e il punto all'infinito della retta che passa pei punti medi delle diagonali. Nel caso del fascio-schiera, considerato nella quistione 608 di questo Periodico (Tomo XVII, pag. 333), si prevede che il luogo dei fuochi dev'essere una cubica circolare particolare e non già una quartica come è detto nella risoluzione a pag. 145 (Settembre-Ottobre, 1902).

Se denotiamo con O il punto comune alle due tangenti, con A e B i punti di contatto, con C il centro del segmento AB, si trova infatti, per il luogo dei fuochi delle coniche del fascio-schiera, *una strofoide obliqua col nodo in* O, *passante*

(*) In generale, per un sistema di coniche tale che ve ne siano μ tangenti a una retta data, il luogo dei fuochi è una curva dell'ordine 3μ con un punto μ-plo in ognuno dei punti ciclici.

per A, *per* B, *e pel punto all'infinito di* |OC|; *tangenti nel punto doppio sono le bisettrici degli angoli* AOB.

Questo risultato può verificarsi anche osservando che la equazione (5), data nella risoluzione citata,

$$(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2)(b^2x^2 - a^2y^2) - 2ab\,[bx^2(x + y \cos \omega) - \\ - ay^2(x \cos \omega + y)] + a^2b^2(x^2 - y^2) = 0,$$

si spezza nelle due seguenti:

$$bx + ay - ab = 0$$

e

$$(bx - ay)(x^2 + 2xy \cos \omega + y^2) - ab\,(x^2 - y^2) = 0,$$

la prima delle quali dà la congiungente i punti di contatto, che non fa parte del luogo, e l'altra rappresenta la strofoide indicata sopra.

V. Retali.

II. **Sopra alcune funzioni singolari.** — Le cosiddette funzioni trigonometriche inverse (arc sen x, arc cos x, ecc.) non si possono considerare rigorosamente come funzioni che quando con opportune limitazioni, si faccia corrispondere ad ogni valore per la variabile un solo valore per la funzione. Sia p. es. la funzione

$$y = \text{arc ctn}\, x;$$

siccome la funzione ctn x prende tutti i valori possibili e una sola volta in un intervallo della forma $(\alpha, \pi + \alpha)$, o più particolarmente, della forma, $[m\pi, (m+1)\pi]$, basterà ammettere di scegliere fra gli infiniti valori della funzione quello compreso nell'intervallo considerato. Nelle seguenti considerazioni prenderò l'intervallo $(0, \pi)$. In quanto poi ai punti $\pm \infty$, si può osservare che in questi punti non si può assegnare un determinato valore alla funzione arc ctn x, giacchè nei punti in cui la cotangente diventa infinita, essa non ha segno determinato. Dovremo quindi togliere questi punti speciali.

Consideriamo ora

$$f(x) = \text{arc ctn}\,(\text{ctn}\, x),$$

che è reale finita e determinata in ogni punto x salvo che nei punti della forma $x = k\pi$ (k intero), giacchè in essi avendosi

$$f(x) = \text{arc ctn}\,(\pm \infty)$$

come abbiamo visto non ha allora valore determinato.

Aggiungiamo allora la posizione

$$f(k\pi) = 0 \quad (k \text{ intero})$$

con che la funzione viene determinata per ogni valore finito della variabile.

Si faccia ora variare x da $m\pi$ a $(m + 1)\pi$; allora $f(x)$ è 0 al principio dell'intervallo, e nel punto $x = k\pi + \varepsilon$ è

$$f(m\pi + \varepsilon) = \text{arc ctn}\,(\text{ctn}\, \varepsilon) = \varepsilon.$$

Cioè in ogni caso, per $m\pi$ e $(m + 1)\pi$, si ha

$$f(x) = x - m\pi.$$

Quando x s'avvicina a $(m + 1)\pi$, $f(x)$ tende a π; ma essendo invece allora $f(x) = 0$, in questo punto $f(x)$ è discontinua a sinistra e fa un salto eguale a π.

Applicando la stessa considerazione ad ogni altro punto di questa forma abbiamo il seguente resultato: La funzione

$$f(x) = \text{arc ctn}(\text{ctn}\, x),$$

definita come sopra si è detto, è lineare in ciascuno degli intervalli della forma $[m\pi, (m+1)\pi]$ ed eguale ad $x - m\pi$; negli estremi poi di questi intervalli è continua a destra ed a sinistra ha una discontinuità di prima specie. Avendosi poi

$$f(\pi + \varepsilon) = f(\varepsilon)$$

la funzione $f(x)$ è periodica ed ha per periodo π.

Si consideri ancora

$$\text{E}(x) = x - \frac{\text{arc ctn}(\text{ctn}\, \pi . x)}{\pi}$$

funzione composta mediante la $f(x)$.

Per x intero ed eguale a x si ha

$$\text{E}(x) = k - \frac{\text{arc ctn}(\text{ctn}\, k\pi)}{\pi}.$$

Invece per $x = k + \varepsilon$, (k intero, $\varepsilon < 1$) si avrà

$$\text{E}(x) = k + \varepsilon - \frac{\text{arc ctn}[\text{ctn}(k\pi + \varepsilon\pi)]}{\pi} = k + \varepsilon - \frac{\text{arc ctn}(\text{ctn}\, \varepsilon\pi)}{\pi} = k + \varepsilon - \varepsilon = k.$$

Concludendo: La funzione $\text{E}(x)$ rappresenta il massimo intero contenuto nel numero x.

Si può facilmente applicare questa forma analitica per determinare quella del quoziente intero e del resto di una divisione, della forma generale di un numero intero o di un numero razionale ecc.

Si può notare anche che queste funzioni, benchè infinite volte discontinue hanno la derivata continua, ed eguale a 1 nel primo caso, a 0 nel secondo.

Guido Ascoli.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 621, 622, 623, 624, 625, 626 E 627

621. *Pel punto* P *del piano di una conica data si conduca un retta variabile che incontri la conica in* A *e* B. *Si trovi l'inviluppo del circolo di diametro* AB.

E. N. Barisien.

Risoluzione del maggiore del Genio sig. D'Emilio.

Assumiamo gli assi coordinati ortogonali coll'origine in P in modo che la conica abbia per equazione

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 1 = 0, \tag{1}$$

ponendo $b = 0$ per considerare il caso della parabola e delle sue degenerazioni.

L'equazione della secante assumerà la forma

$$y = mx. \tag{2}$$

Indicando con (x_1, y_1); $x_2, y_2)$ le coordinate dei punti A, B, le espressioni.

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{g + fm}{a + bm^2} \tag{3}$$

$$\beta = \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{m(g + fm)}{a + bm^2} \tag{3'}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}\left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right] = \left[\frac{(g + fm)^2 - (a + bm^2)}{(a + bm^2)^2}\right](1 + m^2) \tag{3''}$$

ci daranno in funzione del parametro m le coordinate del centro ed il quadrato del raggio della circonferenza, che genera l'inviluppo. Esso avrà quindi per equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

da cui deduciamo l'equazione

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, m) = m^4[b^2(x^2 + y^2) + 2fby + b] + m^3[2b(fx + gy)] + m^2[2ab(x^2 + y^2) + \\ + 2bgx + 2afy + a + b] + m[2a(fx + gy)] - a^2(x^2 + y^2) + 2gax + a = 0.\end{aligned}$$

Ponendo $m = \frac{p}{q}$ si ricava l'equazione omogenea in p e q

$$F(p, q) = \psi_0 p^4 + 4\psi_1 p^3 q + 6\psi_2 p^2 q^2 + 4\psi_3 pq^3 + \psi_4 q^4 = 0 \tag{4}$$

in cui $\psi_0, \psi_1 \ldots \psi_4$ sono funzioni note di x, y e delle costanti della equazione della conica data

L'equazione dell'inviluppo, come è noto, ricavasi eliminando la m fra l'equazione

$$\varphi(x, y, m) = 0$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial m} = 0.$$

È facile mostrare che essa può ottenersi, per conseguenza, eguagliando a zero il descriminante del primo membro della (4).

Ricordando l'elegante forma data dal Cayley al descriminante di una forma biquadratica binaria, si perviene immediatamente all'equazione

$$[3\psi_2^2 - 4\psi_1\psi_3 + \psi_0\psi_4]^3 - 27[\psi_0\psi_2\psi_4 - \psi_0\psi_3^2 - \psi_1^2\psi_4 - \psi_2^3 + 2\psi_1\psi_2\psi_3] = 0$$

dell'inviluppo.

Meritano di essere essaminati a parte come casi singolari quelli in cui la conica degenera in due rette concorrenti o parallele.

622. *Siano* MN_1, MN_2, MN_3, MN_4 *le normali condotte da un punto* M *ad una ellisse di centro* O. *Il luogo dei punti* M *tali che*

$$k(\overline{MN}_1^2 + \overline{MN}_2^2 + \overline{MN}_3^2 + \overline{MN}_4^2) + k'(\overline{ON}_1^2 + \overline{ON}_2^2 + \overline{ON}_3^2 + \overline{ON}_4^2) = l^2 \tag{A}$$

è una conica che diventa un circolo, quando $k = k'$, *e una coppia di rette quando* $k = -k'$.

Quistione analoga per la parabola, essendo O *il vertice.*

E. N. Barisien.

Risoluzione del sig. Maggiore D'Emilio.

Sia

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

l'equazione dell'ellisse riferita ai suoi assi, ed x_1, y_1 le coordinate del punto M. La lunghezza delle normali condotte da M all'ellisse corrispondono ai massimi e minimi di

$$n^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$$

condizionatamente all'equazione (1).

Possiamo perciò fissare la nostra attenzione sui massimi e minimi di

$$\varphi=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+\lambda\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right], \tag{2}$$

in cui λ è un parametro ausiliario, che può considerarsi come una terza variabile indipendente.

Si hanno perciò le equazioni

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=x\left[1+\frac{\lambda}{a^2}\right]-x_1=0\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=y\left[1+\frac{\lambda}{b^2}\right]-y_1=0\\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Sostituendo i valori di x ed y ricavati dalle prime due nella terza, si ha l'equazione biquadratica

$$(\lambda+a^2)^2(\lambda+b^2)^2-a^2x_1^2(\lambda+b^2)^2-b^2y_1^2(\lambda+a^2)^2=0 \tag{B}$$

alle cui radici $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ corrispondono le quattro normali condotte dal punto $M(x_1y_1)$ all'ellisse (1).

Possiamo scrivere, osservando che $(i=1, 2, 3, 4)$

$$\overline{MN}_i^2=n_i^2=\frac{\lambda_i^2x_1^2}{(a^2+\lambda_i)^2}+\frac{\lambda_i^2y_1^2}{(b^2+\lambda_i)^2}, \tag{4}$$

$$\overline{NO}_i^2=\frac{a^4x_1^2}{(a^2+\lambda_i)^2}+\frac{b^4y_1^2}{(b^2+\lambda_i)^2}, \tag{5}$$

l'equazione

$$x_1^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'a^4}{(a^2+\lambda_i)^2}+y_1^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'b^4}{(b^2+\lambda_i)^2}=l^2, \tag{6}$$

da cui ricaveremo l'equazione del luogo definita dalla (A), osservando che le sommatorie che moltiplicano x_1^2 ed y_1^2 sono funzioni simmetriche delle radici della (B).

Per iniziare il calcolo di dette sommatorie, trasformiamo la (B) nella

$$\lambda'^4+2[b^2-a^2]\lambda'^3+[[b^2-a^2]^2-a^2x_1^2-b^2y_1^2]-2a^2x_1^2[b^2-a^2]\lambda'-a^2x_1^2(b^2-a^2)^2=0 \tag{B'}$$

in base alla relazione $\lambda+a^2=\lambda'$. Così i coefficienti della (B'), che sono funzioni simmetriche di $\lambda_1+a^2, \lambda_2+a^2, \lambda_3+a^2, \lambda_4+a^2$, si calcoleranno più rapidamente. Indichiamo con λ'_i le λ_i+a^2.

Notando che

$$\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k\lambda_i^2+k'a^4}{(\lambda+a^2)^2}=\sum_{i=1}^{i=4}\frac{k(\lambda'-a^2)^2+k'a^4}{\lambda_i'^2}=k\left[4-2a^2\sum_{i=1}^{i=4}\frac{1}{\lambda'_i}\right]+(k+k')a^4\sum_{i=1}^{i=4}\frac{1}{\lambda_i'^2}$$

in virtù delle relazioni note fra i coefficienti e le radici della (B'), si ha [determinando per analogia la espressione di

$$\sum_{i=1}^{i=4} \frac{k\lambda_i^2 + k'b^4}{(\lambda + b^2)^2} = k\left[4 - 2b^2 \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\lambda_i''}\right] + (k+k')\,b^4 \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{\lambda''^2_i} \tag{7}$$

quando poniamo $\lambda'' = \lambda + b^2$] l'equazione

$$\begin{gathered} 4k[b^2 - a^2]\,[b^2x_1^2 - a^2y_1^2] + (k+k')\,[2a^4x_1^2 + 2b^4y_1^2 - 2a^2b^2(x_1^2 + y_1^2)] = \\ = [l^2 - 2\,(a^2 + b^2)\,(k+k')]\,[b^2 - a^2]^2 \end{gathered} \tag{8}$$

che rappresenta una conica ridotta al centro ed agli assi: cioè concentrica e consocia, come d'altra parte si intuisce a priori, dell'ellisse data.

Nel caso di $k = k'$ si trova

$$4(x_1^2 + y_1^2)\left[1 + \frac{a^2b^2}{[b^2 - a^2]^2}\right] = \frac{l^2}{k} - 2\,(a^2 + b^2).$$

che rappresenta una circonferenza concentrica all'ellisse data.

Infine per $k + k' = 0$, cioè $k = -k'$ la (8) diventa

$$4k\,[b^2x_1^2 - a^2y^2_1] = l^2\,[b^2 - a^2].$$

che nel caso di $l = 0$ si riduce al sistema delle rette $bx + ay = 0$; $bx - ay = 0$ cioè:

$$bx \pm ay = 0.$$

Per estendere la questione proposta al caso di una parabola di vertice O, cominciamo ad osservare che alla (A) corrisponde la

$$k \sum_{i=1}^{i=3} \overline{\mathrm{MN}_i}^2 + k' \sum_{i=1}^{i=3} \overline{\mathrm{ON}_i}^2 = l^2. \tag{A'}$$

Essendo $y^2 = 2p\,(x - c)$ l'equazione della parabola, evidentemente si tratterà in primo luogo di fissare l'attenzione sui massimi e minimi della funzione

$$\varphi = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + \lambda\,[y^2 - 2p\,(x - c)],$$

da cui deduconsi le equazioni

$$(3^*) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = x - x_1 - \lambda p = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = y - y_1 + \lambda y = 0. \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = y^2 - 2p(x - c) = 0 \end{cases}$$

Eliminando x ed y fra le tre equazioni ultime, si perviene all'equazione cubica in λ

$$\lambda^3 + \lambda^2\left[2 + \frac{x_1}{p} - \frac{c}{p}\right] + \lambda\left[1 + \frac{2x_1}{p} - \frac{2c}{p}\right] + \frac{x_1}{p} - \frac{c}{p} - \frac{y^2_1}{2p} = 0. \tag{B*}$$

La $\sum_1^3 \overline{\mathrm{MN}_i}^2$ eguaglia

$$p^2 \sum_1^3 \lambda_i^2 + y^2_1 \sum_1^3 \frac{\lambda_i^2}{(1 + \lambda_i)^2} \tag{4*}$$

o così

$$\sum_1^3 \overline{ON_i}^2 = y^2_1 \sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i)^2} + \sum_1^3 (x_1 - c + \lambda_i p)^2. \qquad (5^a)$$

Pel calcolo di $\sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i^2)}$, $\sum_1^3 \frac{1}{1+\lambda_i}$ etc. conviene considerare la trasformata della (B^a) in base alla condizione $\lambda + 1 = \lambda'$: si ha così l'equazione

$$\lambda'^3 + \left[\frac{x'}{p} - \frac{c}{p} - 1\right]\lambda'^2 - \frac{2p^2}{y_1^2} = 0, \qquad (B'^a)$$

da cui deduconsi

$$\sum_1^3 \frac{1}{1+\lambda_i} = \sum_1^3 \frac{1}{\lambda'_i} = 0$$

$$\sum_1^3 \frac{1}{(1+\lambda_i)^2} = \sum_1^3 \frac{1}{\lambda'^2_i} = \frac{4p^2}{y^2_1}\left[\frac{x_1}{p} - \frac{c}{p}\right].$$

Tenuto conto di queste relazioni delle (4^a), (5^a), la (A') dà luogo, fatte le volute riduzioni, all'equazione

$$(k+k')[x^2_1 + c^2 - 4px_1 - 4pc + 6p^2] + 3ky^2_1 + 4k'p[x_1 - c] + 5k'(x_1 - c)^2 = l^2$$

di una conica simmetrica rispetto all'asse delle x.

Nel caso di $k = k'$ si ha

$$2k(x^2_1 + c^2 - 4px_1 - 4pc + 6p^2) + 3ky^2_1 + 4kp(x_1 - c) + 5k(x + c)^2 = l^2$$

e nel caso di $k = -k'$

$$3ky^2_1 - 4kp(x_1 - c) - 5k(x_1 - c)^2 = l^2.$$

623. *Un punto M si sposta sopra una semicirconferenza di diametro AB. Siano P, P' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base AM, e Q, Q' i vertici dei due triangoli equilateri che hanno per base BM. Si trovino i luoghi di P, P', Q, Q' e dei punti medi di PQ, P'Q', PQ' e P'Q.*

E. N. Barisien.

Risoluzione del prof. Padoa e del Maggiore D'Emilio.

Per distinguere fra loro i punti P e P' (quando M è distinto da A) si supponga che AM separi P dal centro O dalla semicirconferenza data; analogamente per i punti Q e Q'.

Sia ABC il triangolo equilatero i cui lati AC e BC tagliano la semicirconf. data (in D ed E) e sia ABC' il suo simmetrico (e siano D' ed E' i simmetrici di D ed E).

Mentre M va da A a B sulla semicirconf. data,

1° P va da A a C sulla semicirconf. AC che non passa per O; invero, facendo ruotare la semicirconf. data intorno ad A sino a che B vada in C, dall'ampiezza e dal verso della rotazione risulta che M va in P, da cui l'asserto; analogamente si dimostra che,

2° Q va da C a B sulla semicirconf. CB che non passa per O,

3° P' va da A a C' » AC' che passa per O,

4° Q' va da C' a B » C'B » »

5° il punto medio F di PQ va da D ad E sulla semirconf. DE esterna a quella data; invero, poichè mediante rotazioni concordi di 60° intorno ad A o ad M si ottiene che MB vada in PC o in MQ, risulta equipollente ad MQ, e perciò F è il punto medio di CM; ma allora, se G è il punto medio di DE e quindi anche di CO, risulta GF parallelo ad OM e metà di OM, da cui l'asserto: analogamente si dimostra che

6° il punto medio F' di P'Q' va da D' ad E' sulla semicirconf. D'E' esterna al triangolo CD'E';

7° il punto medio H di PQ' va da D' ad E sulla semirconf. D'E che passa per A; invero, per quanto precede [1°, 4°], mediante la traslazione DE' il triangolo APC va in C'Q'B, sicchè il segmento OH, che congiunge i punti medi dei lati DE' e PQ' del parallelogrammo DE'Q'P è equipollente a DP; conseguentemente [1°]. OH = OA ed $\widehat{MOH} = 60°$, da cui l'asserto: analogamente si dimostra che

8° il punto medio H' di P'Q va da D ad E' sulla semicirconf. DE' che passa per B.

624. *Essendo* r, θ *le coordinate polari di un punto* M *d'una curva d'area* s. *e* V *l'angolo della tangente col raggio vettore, dimostrare che il raggio di curvatura* ρ *in* M *è*

$$\rho = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio, tenente Golisciani, prof. Laisant e Retali.

Se φ è l'angolo che la tangente *f* con l'asse polare, dalla figura risulta $\varphi = \theta + V$, e quindi

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta + dV}.$$

625. *Dimostrare che*

$$\lim_{(x=1)} \left[\frac{(x+1)\left[\frac{(x^2+1)}{x}\operatorname{arc\,tg}x - \frac{\pi}{2}\right]}{x-1}\right] = 2.$$

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio, Golisciani e Nannei.

Applicando il teorema di De l'Hopital, il primo membro così si trasforma:

$$2\lim_{x=1} \left(\frac{2x^2-(x^2-1)}{x^2}\operatorname{arc\,tg}x + \frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right) = 2.$$

Osservazione. — Nell'enunciato era stato posto $\frac{x+1}{x}$, invece di $\frac{x^2+1}{x}$, nel numeratore, per errore tipografico. Lasciando l'espressione così, si ha

$$2\lim_{x=1} \left(\frac{x-(x+1)}{x^2}\operatorname{arc\,tg}x + \frac{x+1}{x}\cdot\frac{1}{x^2+1}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{4}+1\right) = 2 - \frac{\pi}{4}.$$

626. *Trovare l'area compresa fra la curva*

$$y = a \operatorname{sen}^2 x + b \operatorname{sen} x + c$$

e l'asse delle x, *quando* x *varia da* 0 *a* 2π.

E. N. Barisien.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio e Golisciani.

Osservando che $\mathrm{sen}(\pi + x) = -\mathrm{sen}\,x$, $\mathrm{sen}^2(\pi + x) = \mathrm{sen}^2 x$, si ha

$$U = 2a \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2 x\, dx + c \int_0^{2\pi} dx + a \Big[(x - \mathrm{sen}\,x \cos x)\Big]_0^{\pi} + 2c\pi = (a + 2c)\pi.$$

627. *Dimostrare che l'area della curva*

$$(x^2 + y^2)(b^2x^2 + a^2x^2) = (a + b)^4 (x^2 - y^2)$$

è

$$U = \frac{2(a+b)^3}{a-b} \left[\frac{a^2 + b^2}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2}\right];$$

che, quando $a = b$, *quest'area diventa*

$$U = 16a^2.$$

E. N. BARISIEN.

Risoluzione dei sigg. Maggiore D'Emilio e Golisciani.

Trasformando in coordinate polari, pigliando per asse polare l'asse x, si ha:

$$r^2 (b^2 \cos^2\theta + a^2 \mathrm{sen}^2\theta) = (a + b)^4 (\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta). \qquad (1)$$

Osservando che la curva è simmetrica rispetto agli assi x ed y e che nel primo quadrante si hanno punti reali per $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, si ha:

$$U = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta = 2(a + b)^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2\theta - \mathrm{sen}^2\theta}{b^2 \cos^2\theta + a^2 \mathrm{sen}^2\theta} d\theta. \qquad (2)$$

Pongo

$$\frac{a}{b} \operatorname{tg}\theta = t$$

per cui

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1 + \frac{b^2}{a^2} t^2}, \qquad \mathrm{sen}^2\theta = \frac{\frac{b^2}{a^2} t^2}{1 + \frac{b^2}{a^2} t^2}, \qquad d\theta = \frac{b}{a} \cos^2\theta\, dt = \frac{b}{a} \frac{dt}{1 + \frac{b^2}{a^2} t^2}$$

$$U = 2(a + b)^4 \frac{b}{a} \int_0^{\frac{b}{a}} \frac{1 - \frac{b^2}{a^2} t^2}{b^2 + b^2 t^2} \cdot \frac{dt}{1 + \frac{b^2}{a^2} t^2},$$

e posto

$$\frac{b}{a} = k$$

si ha

$$U = 2 \frac{(a+b)^4}{ab} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{1 - k^2 t^2}{1 + k^2 t^2} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} =$$

$$= 2 \frac{(a+b)^4}{ab} \left\{ -\frac{2k}{1 - k^2} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{k\,dt}{1 + k^2 t^2} + \frac{1 + k^2}{1 - k^2} \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dt}{1 + t^2} \right\} =$$

$$= 2 \frac{(a+b)^4}{ab} \left\{ -\frac{2ab}{a^2 - b^2} \Big[\operatorname{arc\,tg} kt\Big]_0^{\frac{1}{k}} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \Big[\operatorname{arc\,tg} t\Big]_0^{\frac{1}{k}} \right\} =$$

$$= \frac{2}{ab} \frac{(a+b)^3}{a-b} \left(-2ab \frac{\pi}{4} + (a^2 + b^2) \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \right) = 2 \frac{(a + b^3)}{a - b} \left(\frac{a^2 + b^2}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Se $a = b$, applicando il teorema di De l'Hospital, si ha

$$U = 16\,a^3 \lim_{a=b} \left(\frac{2a^2 b - b(a^2+b^2)}{a^2 b^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} + \frac{a^2+b^2}{ab} \cdot \frac{\frac{1}{b}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} \right) = 16\,a^3 \cdot \frac{1}{a} = 16\,a^2.$$

Od anche facendo nelle (2) $a = b$ si trova

$$U = 32\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta = 32\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\theta\, d\theta =$$

$$= 16\,a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d(2\theta) = 16\,a^2 \left[\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 16\,a^2.$$

QUISTIONI PROPOSTE

628. Trovare l'inviluppo delle rette che tagliano due circoli dati secondo corde eguali.

629. Si consideri un circolo c ed una sua corda FF'. Una conica variabile, ma avente per fuochi F,F', incontra il circolo c in quattro punti A, B, A', B'. Dimostrare che ciascuno dei quadrilateri FAA'F', FAF'B, FAF'B', FBB'F', FA'F'B', FA'F'B ha i suoi lati tangenti ad un circolo. Il luogo dei centri di questi circoli si compone dell'asse focale e d'un circolo.

E. N. Barisien.

630. Se una conica $C^{(2)}$ tocca una quartica $C^{(4)}$ nei punti A, A' e la seca nei punti B, B' C, C', esiste un'altra conica che è tangente alla $C^{(4)}$ nei punti d'incontro colla retta AA' e che passa per i punti d'incontro di essa colle rette BB', CC'.

631. Se una conica $C^{(2)}$ tocca una quartica $C^{(4)}$ in quattro punti, le tangenti a $C^{(4)}$ nei punti di contatto incontrano di nuovo la curva stessa in 8 punti di una conica.

632. Se r, r' sono due tangenti di flesso di una quartica $C^{(4)}$ nei punti A, A' e incontrano la curva ancora in B, B' esiste una conica che ha con la $C^{(4)}$ due contatti di second'ordine nei punti ove essa è tagliata dalla AA' e passa per i punti d'incontro di $C^{(4)}$ con la BB'.

Lazzeri.

633. Dimostrare che gli archi di circolo massimo condotti da un punto P di una sfera ad un circolo minore della sfera stessa soddisfano alle relazioni

$$\frac{\cos\frac{PM}{2}\cos\frac{PM_1}{2}}{\cos\frac{MM_1}{2}} = \text{costante}.$$

$$\frac{\operatorname{sen} PM \operatorname{sen} PM_1}{\cos^2\frac{MM_1}{2}} = \text{costante};$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano.

P.

BIBLIOGRAFIA

ALASIA. — *I complementi di geometria elementare.* Manuale Hoepli.

Provo sempre un gran piacere nell'aprire un nuovo volumetto della preziosa raccolta dell'egregio editore Hoepli. La cura con cui in generale sono fatti questi volumi, la nitidezza ed eleganza dell'edizione predispongono il lettore favorevolmente. Ma questa volta la mia aspettativa è stata delusa.

Apro a caso, e prima di tutto mi capita sott'occhio l'ultimo Capitolo, (XIV) " *Le sezioni coniche* „. Seguendo il metodo di DANDELIN, si considerano anzitutto i fuochi come punti di contatto del piano della sezione con la sfera ad esso tangente ed inscritta nel cono; ma non è accennato affatto che questi fuochi sono uno o due secondo che il piano secante è parallelo o no ad una generatrice; e si dimostra un solo teorema che cioè *una sezione conica è il luogo di un punto che si muove nel piano in modo che la sua distanza da un punto fisso del piano sia in rapporto costante con la distanza di esso da una retta posta nel piano.* Noto, fra parentesi, che nella dimostrazione si fa uso della trigonometria, mentre si potrebbe con eguale semplicità farne a meno.

Dopo di che, fatta la classificazione delle coniche secondo che il rapporto suddetto *(eccentricità)* è $\gtreqless 1$, l'autore scrive: " Dato così uno sguardo generale alle altre sezioni coniche, studieremo ora ciascuna di esse, ed il più elementarmente che ci sarà possibile. Cercheremo dunque di definire ciascuna di esse in modo particolare basandoci su *qualcuna delle sue proprietà caratteristiche* ecc. „

E subito dopo viene il § 95 " Ellisse „ che comincia con queste parole: " Dicesi ellisse *quella fra le sezioni coniche* che è tale che la somma delle distanze da un punto qualunque di essa a due punti fissi dello stesso suo piano è una quantità costante „.

Per chi conosce l'argomento apparisce chiaro che la definizione è sbagliata, perchè bisognerebbe dimostrare prima che le sezioni coniche (per $e < 1$) godono di quella proprietà: chi studia l'argomento per la prima volta bisogna che necessariamente si domandi: come si fa ad assoggettare tutti i punti di una sezione conica a verificare quest'altra proprietà? È vero che l'*ultimo* teorema sulla ellisse dice: " Il rapporto delle distanze di un punto dell'ellisse da uno dei fuochi e dalla *vicina* (!) direttrice è costante ed eguale all'eccentricità e „; e questo per il 1° teorema autorizza a dire che il luogo dei punti... è una sezione conica. Ma ciò non toglie che almeno la disposizione della materia è errata, e la disposizione e l'ordine in un libro didattico in cui non si espongono cose nuove e peregrine è tutto.

Riesce poi assai difficile a comprendere quali criteri hanno guidato l'autore nella scelta delle poche proprietà delle tre sezioni coniche fra le innumerevoli che sono note. Per es. perchè parla dei diametri per l'iperbole e non per l'ellisse o la parabola?

Ricomincio a sfogliare il libro dalle prime pagine augurandomi che sia soltanto *in cauda venenum*; ma trovo del veleno dappertutto. Mi limito a pochi esempi.

A pag. 9, 10 si trova il teorema d'Eulero sui poliedri ($v+f-s=2$); ma forse per amore di novità l'A. ha invertito la consueta e ben nota dimostrazione e dice: " Se uniamo i vertici $A_1, A_2 \ldots A_n$ di una faccia ad un punto qualunque P, preso fuori del piano di tale faccia, avremo ottenuto un nuovo poliedro con f' faccie, v' vertici, s' spigoli, e sarà

$$f+v-s=f'+v'-s' \text{ „}$$

E sta bene. Ma dimostrato questo aggiunge:

" Supponiamo ancora di fare l'operazione inversa, e cioè di distaccare dal poliedro una piramide lasciando ad esso la base di tale piramide. L'espressione al secondo membro dell'ultima eguaglianza non cambierà: ripetendo questa operazione un certo numero di volte *finiremo col ridurre ad un tetraedro il poliedro dato*, ecc. „

E questo è tutt'altro che evidente come mostra credere l'A.

Le inesattezze e improprietà di linguaggio sono continue, per es. a pag. 23.

" *Ogni poligono è proporzionale alla sua potenza* e il rapporto di due poligoni è eguale al rapporto delle loro potenze „.

La seconda proposizione è la correzione dell'enunciato della prima; e a pag. 25 è ripetuto lo stesso sui poliedri, e ciò salva le spalle al proto spesso vittima innocente.

A pag. 26: La figura simmetrica di una retta AB... è una retta A'B'... *eguale* ecc...

Dove è confusa *retta* con *segmento*.

In conclusione questi *Complementi* sono un lavoro abborracciato, pieno di inesattezze, e non fanno davvero buona figura nell'ottima raccolta di Manuali dell'Hoepli. Dico tutto questo con dolore, ma la verità deve andare innanzi a tutto. Auguro al laborioso Autore che metta meno fretta e più diligenza nei suoi futuri lavori.

K.

ERRATA-CORRIGE.

Pag. 197, lin. 7, invece di *arca* leggasi *arco*.

624. *Risoluzione* del sig. **Laisant**.

Chiamando α l'angolo della tangente con l'asse delle x si ha

$$\alpha=\theta+V, \qquad \rho=\frac{ds}{d\alpha}$$

e quindi la formula $\rho=\dfrac{ds}{d\theta+dV}$ è evidente.

Altra risoluzione del prof. Retali.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 17 gennaio 1903.

EQUAZIONI A RADICI IN PROGRESSIONE ARITMETICA

(Continuaz. e fine v. n. precedente)

III.

PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA A RADICI AUMENTATE.

Passiamo ad esporre alcune proprietà della trasformata a radici aumentate per le equazioni che ci occupano.

A tal fine premettiamo i lemmi seguenti:

Lemma I. — *a)* Data una serie di $n = 2p$ termini, tali che la somma di due equidistanti dagli estremi sia costante ed eguale alla somma degli estremi stessi, se diciamo σ la somma di questa serie, diminuendo ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$ si ottiene una nuova serie, in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali, e di segno contrario.

Se a_1 ed a_{2p} sono i due termini estremi, potremo indicare l'intera serie con

$$a_1,\ a_2, \dots a_p,\ (a_{2p} + a_1 - a_p), \dots (a_{2p} + a_1 - a_2),\ a_{2p},$$

onde

$$\frac{\sigma}{n} = \frac{p\,(a_{2p} + a_1)}{n} = \frac{a_{2p} + a_1}{2},$$

e diminuendo due termini qualunque, egualmente distanti dagli estremi, del valore $\frac{\sigma}{n}$, se indichiamo questi termini con

$$a_s, \qquad (a_{2p} + a_1 - a_s),$$

otterremo

$$+\frac{2a_s - a_{2p} - a_1}{2} \qquad -\frac{2a_s - a_{2p} - a_1}{2}.$$

b) Data una serie di $n = 2p + 1$ termini tali che quelli egualmente distanti dagli estremi abbiano una somma costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, ed il termine medio eguale alla semisomma degli estremi; dicendo σ la somma di questa serie, se si diminuisce ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$, si ottiene un'altra serie in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali, e di segno contrario, ed il termine medio è lo zero.

Infatti detti a_1, a_{2p+1} i termini estremi, si potrà rappresentare la serie con

$$a_1, a_2, \ldots, a_p, \left(\frac{a_{2p+1}+a_1}{2}\right), (a_{2p+1}+a_1-a_p) \ldots (a_{2p+1}+a_1-a_2), a_{2p+1},$$

onde

$$\frac{\sigma}{n} = \frac{(2p+1)(a_{2p+1}+a_1)}{2n} = \frac{a_{2p+1}+a_1}{2};$$

e la nuova serie sarà evidentemente

$$\frac{a_1-a_{2p+1}}{2}, \frac{2a_2-a_{2p+1}-a_1}{2} \ldots \frac{2a_p-a_{2p+1}-a_1}{2}, 0, -\frac{2a_p-a_{2p+1}-a_1}{2} \ldots$$
$$\ldots -\frac{2a_2-a_{2p+1}-a_1}{2}, -\frac{a_1-a_{2p+1}}{2}$$

Lemma II. — *a)* Se $n=2p$ elementi formano una serie tale che i termini egualmente distanti dagli estremi siano eguali, e di segno contrario, qualora si aumenti ciascun termine di questa serie di un numero qualunque X, si otterrà un'altra serie in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi.

Indicando la serie primitiva con

$$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p, -a_p, -a_{p-1}, \ldots, a_2\ a_1,$$

sarà la nuova serie

$$X+a_1, X+a_2, \ldots, X+a_{p-1}, X+a_p, X-a_p, X-a_{p-1}, \ldots, X-a_2, X-a_1,$$

in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale a 2X, somma degli estremi stessi.

b) Se fosse $n=2p+1$ evidentemente la serie dovrebbe avere per termine medio lo 0, che è il solo numero che possa avere i due segni nello stesso tempo. Si avrebbe pertanto la serie

$$a_1, a_2, \ldots, a_p\quad 0, \ -a_p, \ldots, -a_2, -a_1,$$

per la quale facilmente si vedrebbe che sussiste quanto si è detto precedentemente; ed inoltre si proverebbe che il termine medio della nuova serie è la semisomma dei termini estremi.

Lemma III. — La somma delle combinazioni prodotti di $n=2p$ elementi due a due eguali e di segno contrario, presi k a k, è nulla se k è un numero impari.

Si abbiano gli elementi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, -a_p, \ldots, -a_3, -a_2, -a_1,$$

e sia $k=2q+1$. Chiamiamo per maggior semplicità elementi di destra, gli elementi col segno negativo, ed elementi di sinistra quelli col segno positivo.

Se $k \leq p$ è chiaro che tutte le combizioni k a k che possono ottenersi con i dati elementi conterranno elementi tutti di destra, o tutti di sinistra, ovvero elementi presi in parte a destra, ed in parte a sinistra: mentre se fosse $k > p$ si avrebbero soltanto combinazioni le quali contengono elementi presi a destra ed a sinistra. Facilmente si scorge che a ciascuna combinazione di elementi presi tutti a sinistra se ne può far corrispondere un'altra di elementi presi tutti a destra, ed eguale ai primi. Di più data una combinazione che contenga s elementi a sinistra od a destra, e $k-s$ a destra od a sinistra, ad essa corrisponderà un'altra combinazione con i $k-s$ elementi stessi di sinistra o destra, ed i rimanenti s di destra o sinistra.

Ma se osserviamo che, per essere $k=2q+1$, le combinazioni che contengono tutti elementi di sinistra (se ve ne sono) hanno segno contrario a quelle che contengono elementi tutti di destra, potremo concludere che tali combinazioni prodotti scambievolmente si elidono.

Inoltre poichè a ciascuna combinazione che abbia $s=2q'$ elementi da un lato, e $k-s=2(q-q')+1$ dall'altro ne corrisponde un'altra la quale ha gli stessi s elementi dal lato in cui la precedente aveva i $k-s$, concluderemo che queste due combinazioni debbono avere segno opposto, e che quindi anche esse scambievolmente si elidono. Alla stessa conclusione si perverrebbe considerando s impari, giacchè in tal caso sarebbe $k-s$ pari; onde il lemma rimane dimostrato.

Osservazione. — Se oltre gli $n=2p$ elementi si consideri l'elemento 0, esso annullando le combinazioni prodotti in cui entra, non si altera il risultato precedente. Pertanto si può concludere che il lemma dimostrato sussiste anche per gli $n=2p+1$ elementi

$$a_1,\ a_2,\ldots,a_{p-1},\ a_p,\quad 0,\quad -a_p,\ -a_{p-1},\ldots,-a_2\ -a_1.$$

Lemma IV. — La somma delle combinazioni prodotti k a k di $n=2p$ elementi due a due eguali e di segno contrario, qualora k sia pari ed uguale a $2q$, è uguale alla somma delle combinazioni prodotti q a q dei quadrati di tutti e soli i p elementi aventi lo stesso segno, presa col segno $(-1)^q$. Siano

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{p-1},\ a_p,\quad -a_p,\ -a_{p-1},\ldots,-a_2,\ -a_1,$$

gli $n=2p$ elementi, e sia $k=2q$. Se

$$a_{\alpha_1}\,.a_{\alpha_2}\,.\,a_{\alpha_3}\ldots a_{\alpha_{2q}}$$

è una delle combinazioni a $2q$ a $2q$ eseguita sopra gli n elementi dati, ed in cui una almeno delle $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_{2q}$, ad esempio α_n, è diversa da tutte le altre, si potrà sempre trovare un'altra combinazione in cui all'elemento a_{α_n} sia sostituito l'elemento stesso cambiato di segno, onde le due combinazioni prodotti avranno segno contrario, ma lo stesso valore, e la loro somma sarà nulla. Però essendo k pari si debbono avere anche delle combinazioni in cui le $\alpha_1\ \alpha_2\ldots\alpha_{2q}$ sono due a due eguali; e con queste combinazioni si saranno evidentemente esaurite tutte le combinazioni possibili a farsi con gli n elementi dati k a k.

In tali ipotesi si ha

$$a_{\alpha_1} \cdot a_{\alpha_2} \cdot a_{\alpha_3} \dots a_{\alpha_{2q}} = (-a^2_{\alpha_{\gamma_1}})(-a^2_{\alpha_{\gamma_2}}) \dots (-a^2_{\alpha_{\gamma_q}}) =$$
$$= (-1)^q \, a^2_{\alpha_{\gamma_1}} \cdot a^2_{\alpha_{\gamma_2}} \dots a^2_{\alpha_{\gamma_q}} .$$

Ora in queste combinazioni non si può scambiare un elemento qualsiasi a_{α_s} nell'elemento stesso cambiato di segno, giacchè si otterrebbe una combinazione, in cui un elemento è ripetuto due volte. Sicchè queste combinazioni sono tutte dello stesso segno $(-1)^q$, e non possono ridursi. Inoltre, come è chiaro, esse non sono altro che le combinazioni q a q eseguite sopra gli elementi

$$a^2_1, \; a^2_2, \; a^2_3, \dots \; a^2_p.$$

Dicendo $A_{k=2q}$ la somma delle combinazioni prodotti k a k fatte sopra $n = 2p$ elementi, potremo simbolicamente scrivere:

$$A_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma P \left\{ C_{(a^2_1, a^2_2 \dots a^2_p)_q} \right\} \; \left(q = 1, 2, 3 \dots \frac{k}{2} \right).$$

Osservazione. — Se agli n elementi considerati aggiungiamo l'elemento 0, non si alterano i risultati precedenti; quindi la formula stabilita vale anche per $n = 2p + 1$ elementi, se tra essi vi è lo 0.

Teorema I. — La trasformata a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, costruita sopra una equazione di grado n, la quale ammetta radici che formino una serie in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, e nel caso di n impari, il termine medio sia eguale alla semisomma degli estremi:

1) ammette radici due a due eguali e di segno contrario;

2) ha nulli tutti i coefficienti di posto pari;

3) un coefficiente qualsiasi $a_{k=2q}$ di posto impari è uguale alla somma preceduta dal segno $(-1)^q$ delle combinazioni prodotti q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici che hanno un medesimo segno.

Sia l'equazione primitiva

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \dots A_{n-1} x + A_n = 0,$$

la quale ammetta le radici

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \dots \; \alpha_n,$$

che formino una progressione nel modo supposto dal teorema. Il coefficiente del secondo termine della sua trasformata a radici aumentate di h è, come si conosce

$$n_{(n-1)} h + A_1,$$

il quale si annulla per

$$h = -\frac{A_1}{n};$$

onde per il lemma I le radici della trasformata, che sono le $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ diminuite di h, formeranno una serie, in cui i termini egualmente distanti dagli estremi sono eguali e di segno contrario, come gli estremi stessi. Allora per il lemma III la somma delle combinazioni prodotti k a k, per k impari, di questi elementi, ossia i coefficienti di posto pari della trasformata, saranno nulli. Infine per il lemma IV un coefficiente qualunque $k=2q$ di posto impari sarà eguale alla somma (presa col segno $(-1)^q$) delle combinazioni prodotti q a q di tutte e sole le radici, le quali siano affette da un medesimo segno, elevate a quadrato.

Corollario. — La trasformata a radici aumentate di h di una equazione di grado n, che ammette radici in progressione aritmetica, con h che annulli il coefficiente del secondo termine:

1) ammette radici due a due eguali e di segno contrario,

2) ha nulli tutti i coefficienti di posto pari,

3) un coefficiente qualsiasi $a_{k=2q}$ di posto impari è uguale alla somma, preceduta dal segno $(-1)^q$, delle combinazioni prodotti q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici della trasformata, che hanno un medesimo segno.

Teorema II. — Inversamente, se le trasformate a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, costruita sopra di una equazione di grado n; ha nulli tutti i coefficienti di posto pari:

1) La trasformata ammetterà radici due a due eguali e di segno contrario;

2) un coefficiente qualsiasi di essa $a_{k=2q}$ di posto impari, sarà dato dalla somma delle combinazioni q a q eseguite sopra i quadrati di tutte e sole le radici della trasformata che hanno il medesimo segno;

3) la equazione primitiva ammetterà radici tali che formino una serie, in cui la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi; e nel caso di n impari il termine medio di questa serie è uguale alla semisomma degli estremi.

Infatti se rappresentiamo l'equazione con

$$x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

la sua trasformata a radici aumentate di h con $h = -\frac{A_1}{n}$ sarà, secondo la ipotesi

$$x^n + a_2x^{n-2} + a_4x^{n-4} + \ldots = 0$$

in cui la x è elevato a gradi tutti pari o tutti impari. Perciò, se α, β, γ, ... sono radici di queste equazioni, lo saranno parimenti $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ ... cioè essa ammetterà radici due a due eguali e di segno contrario.

Per conseguenza, in virtù del lemma IV, i coefficienti di posto impari

$$a_2,\ a_4,\ a_6, \ldots,\ a_{k=2q},$$

saranno dati dalla somma delle combinazioni prodotti q a q degli elementi $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2 \ldots$ prese col segno $(-1)^q$.

Infine le radici dell'equazione primitiva, che sono le

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots -\gamma, -\beta, -\alpha,$$

diminuite di h, per il lemma II, formeranno una serie nel modo supposto dal teorema.

IV.

Abbiamo dimostrato che, dato un seguito di n numeri tale che la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante ed eguale alla somma degli estremi stessi, e nel caso di n impari, il termine medio sia eguale alla semisomma degli estremi; se chiamo σ la somma di questo seguito, e diminuiamo ciascun termine del valore $\frac{\sigma}{n}$, otteniamo un altro seguito di numeri due a due eguali e di segno contrario.

Un caso particolare di un seguito siffatto è, come facilmente si vede, una serie di numeri in progressione aritmetica.

Consideriamo ora particolarmente questa progressione

Siano gli n elementi:

$$a+0d,\ a+d,\ a+2d, \ldots, a+(n-2)\,d,\ a+(n-1)\,d$$

e si supponga $n=2p$.

Due termini che siano egualmente distanti dagli estremi ed occupino un posto qualsiasi $p-s$ a partire dagli estremi stessi, saranno

$$a+(p-s-1)\,d \qquad a+(p+s)\,d,$$

ed essi, diminuiti di

$$\frac{\sigma}{n}=a+\frac{2p-1}{2}\,d,$$

divengono nella nuova serie

$$-\frac{2s+1}{2}\,d, \qquad +\frac{2s+1}{2}\,d.$$

Pertanto i termini di questa serie si otterranno ponendo in queste due formule successivamente

$$s=0,\ 1,\ 2 \ldots \frac{n-2}{2}.$$

Se n è impari, sarà, come è noto, $\frac{\sigma}{n}$ il termine medio della progressione. Poniamo

$$\frac{\sigma}{n}=a+kd,$$

e consideriamo il termine che occupa il posto $k - s$ a partire da un estremo; esso sarà $a + (k - s)\, d$, ed il termine che occupa lo stesso posto a partire dall'altro estremo è quindi $a + (k + s)\, d$. Diminuendo ambedue questi termini di $\frac{\sigma}{n}$ si ottiene.

$$- sd, \qquad + sd,$$

onde tutta la nuova serie si ottiene ponendo in queste espressioni

$$s = 0,\ 1,\ 2 \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Ciò premesso, sarà facile stabilire un criterio per riconoscere se una equazione data ammetta o pur no radici in progressione aritmetica.

Infatti si abbia l'equazione

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots A_{n-1} x + A_n = 0;$$

costruiamone anzi tutto la trasformata a radici aumentate di h, ponendo

$$h = - \frac{A_1}{n_{(n-1)}} = - \frac{A_1}{n}$$

e sia questa trasformata

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots a_{n-1} y + a_n = 0$$

se nessuno o non tutti i coefficienti della forma $a_{k=2q+1}$ sono nulli, concluderemo che la equazione data " non ammette „ radici in progressione aritmetica (Teor. I, II).

Se tutti i detti coefficienti sono nulli, in virtù dei teoremi precedenti si può asserire che le radici della equazione proposta formano una successione di n termini tali che la somma di due equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi; e nel caso di n impari, il termine medio è uguale alla semisomma degli estremi. Però questo non ci autorizza ad asserire che la serie predetta sia una progressione aritmetica.

Consideriamo allora nella trasformata i coefficienti di posto impari dati dalla formula

$$a_{k=2q} = (-1)^q\, \Sigma P \left\{ C_{(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots)_q} \right\}, \qquad \left(q = 1, 2, 3 \ldots \frac{k}{2}\right)$$

ove $\alpha_1^2, \alpha_2^2 \ldots$ sono i quadrati di tutte e sole le radici dello stesso segno.

Se le radici della equazione proposta sono in progressione aritmetica, sappiamo che quelle della trasformata

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,$$

sono date per n pari da

$$\frac{2s+1}{2}\, d \qquad s = 0, 1, 2 \ldots \frac{n-2}{2}$$

e per n impari da

$$sd \qquad s = 0, 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Sostituendo nella formula precedente, si avrà:

$$a_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma \mathrm{P} \left\{ \mathrm{C}_{(\mathrm{H}^2)_q} \right\} d^{2q},$$

ove con H^2 s'indica la serie dei numeri elevati a quadrato che si ottengono, per n pari, ponendo in $\frac{2s+1}{2}$, $s = 0, 1, 2 \ldots \frac{n-2}{2}$; e per n impari dando ad s i valori $s = 0, 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}$, ovvero facendo successivamente $s = 1, 2, 3 \ldots \frac{n-1}{2}$.

E poichè è noto essere

$$d^2 = \frac{12(n-1)\mathrm{A}_1^2 - 24\, n \mathrm{A}_2}{n^2(n^2-1)},$$

concluderemo che i coefficienti di posto impari della trasformata a radici aumentate di h, con h che annulli il coefficiente del secondo termine, di una equazione che ammetta radici in progressione aritmetica, sono dati dalla formula

$$a_{k=2q} = (-1)^q \, \Sigma \mathrm{P} \left\{ \mathrm{C}_{(\mathrm{H}^2)_q} \right\} \left(\frac{12(n-1)\mathrm{A}_1^2 - 24\, n \mathrm{A}_2}{n^2(n^2-1)} \right)^q,$$

ove per n pari sia

$$\mathrm{H}^2 = \left(\frac{2s+1}{2}\right)^2, \qquad s = 0, 1, \ldots \frac{n-2}{2},$$

e per n impari

$$\mathrm{H}^2 = s^2 \qquad\qquad s = 1, 2 \ldots \frac{n-1}{2}.$$

Ad esempio sia data l'equazione

$$x^4 - 2x^3 + 14x^2 - 13x + \frac{69}{4} = 0,$$

e si costruisca l'equazione a radici aumentate di $\frac{1}{2}$; ciò che può farsi assai facilmente con la regola di Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
\frac{1}{2} & 1 & -2 & 14 & -13 & \frac{69}{4} \\
\hline
 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{53}{4} & -\frac{51}{8} & \frac{225}{16} \\
 & 1 & -1 & \frac{51}{4} & 0 & \\
 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{25}{2} & & \\
 & 1 & 0 & & & \\
 & 1 & & & &
\end{array}$$

Poichè i coefficienti di posto pari si annullano, proveremo se i coefficienti di posto impari sono dati dalla formula precedentemente stabilita.

Operando si ottiene:

$$a_1 = -\Sigma \mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{\left(\frac{1}{4},\,\frac{9}{4}\right)_2}\right\}(-5) = \frac{25}{2}$$

$$a_4 = +\Sigma \mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{\left(\frac{1}{4},\,\frac{9}{4}\right)_2}\right\}\ 25\ = \frac{225}{16}$$

onde concluderemo che la equazione data ammette radici in progressione aritmetica.

Si abbia inoltre l'equazione

$$x^5 + 5x^4 - 31x^3 - 113x^2 + 282x + 360 = 0;$$

la sua trasformata è

$$y^5 + 41y^3 + 400y = 0;$$

ma essendo

$$a_2 = -\Sigma \mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{(1,\,4)_1}\right\} = -41$$

$$a_4 = +\Sigma \mathrm{P}\left\{\mathrm{C}_{(1,\,4)_2}\right\} = \frac{6724}{25}$$

potremo asserire che le radici della equazione proposta formano una successione in cui la somma di due termini equidistanti dagli estremi è costante, ed eguale alla somma degli estremi stessi, ed in cui il termine medio e uguale alla semisomma degli estremi, ma questa successione non è una progressione aritmetica.

V.

Rimane dunque per mezzo delle considerazioni esposte stabilito un metodo generale di risoluzione, per una equazione di grado n a radici in progressione aritmetica.

Data infatti una equazione $f(x) = 0$ si può, con i criteri stabiliti nel paragrafo IV, riconoscere se essa ammette radici in progressione aritmetica. Se la prova riesce favorevolmente si applicano le formule risolutive del paragr. II, e con esse si ottiene il primo termine della progressione, e la ragione di essa; e quindi riesce facile costruire la progressione aritmetica i cui termini sono le radici della equazione data.

Osservo per altro che alcune volte come facilmente si comprende, se $f(x) = 0$ ha radici in progressione aritmetica, ed il suo grado non sia troppo elevato (non superi il nono grado) la trasformata riuscirà facilmente risolubile, e così nel ricercare se essa equazione abbia o pur no le radici in progressione aritmetica si giunge subito alla soluzione di essa senza necessità di applicare le formule risolutive.

E ciò si verificherà anche ogni volta che si sia in presenza di una equazione, la quale abbia radici che formino una successione nella quale la somma di due termini egualmente distanti dagli estremi sia costante, ed uguale alla somma degli estremi, e nel caso in cui il numero dei termini della successione sia impari, il termine medio della stessa sia eguale alla semisomma degli estremi.

Dopo ciò ecco alcuni esempi di risoluzione delle equazioni considerate.

I. — Sia data l'equazione

$$x^{10}-20x^9+15x^8+1680x^7-6342x^6-39480x^5+182510x^4-$$
$$+258320x^3-1267659x^2-220500x+1091475=0;$$

la sua trasformata a radici aumentate di $-\left(-\frac{20}{2}\right)$ è

$$x^{10}-165x^8+8778x^6-172810x^4+1057221x^2-893025=0;$$

e poichè si ha

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\Sigma P\left\{C_{\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{4},\frac{81}{4}\right)_1}\right\}4=-165\\
a_4 &= \Sigma P\left\{C_{\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{4},\frac{81}{4}\right)_2}\right\}16=8778\\
a_6 &= -\Sigma P\left\{C_{\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{4},\frac{81}{4}\right)_3}\right\}64=-172810\\
a_8 &= \Sigma P\left\{C_{\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{4},\frac{81}{4}\right)_4}\right\}256=1057221\\
a_{10} &= -\Sigma P\left\{C_{\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4},\frac{25}{4},\frac{49}{4},\frac{81}{4}\right)_5}\right\}1024=-893025,
\end{aligned}$$

possiamo asserire che l'equazione data ha radici in progressione aritmetica. Applicando le formule del § II si ha: $d=2$, $a=-7$, onde le radici dell'equazione saranno

$$-7,\ -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11.$$

II. — Sia data l'equazione

$$x^5-5x^4+23x^3-49x^2+80x-50=0,$$

la sua trasformata è

$$x^5+13x^3+36x=0,$$

e poichè

$$a_2=-\Sigma P\left\{C_{(1,4)_1}\right\}\left(-\frac{13}{5}\right)=13,$$

$$a_4=+\Sigma P\left\{C_{(1,4)_2}\right\}\left(\frac{169}{35}\right)=\frac{675}{25},$$

l'equazione proposta non ammetterà radici in progressione aritmetica. Possiamo per altro risolvere la trasformata, ed ottenere per l'equazione data le radici

$$1+3\sqrt{-1}\quad 1+2\sqrt{-1}\quad 1\quad 1-2\sqrt{-1}\quad 1-3\sqrt{-1}.$$

CESARE CAMILLO CORTESI.

UNA SUCCESSIONE DI NUMERI INTERI

(Continuazione e fine v. fasc. prec.)

8. Alcune delle formole che si sono trovate possono servire per la risoluzione in numeri interi di particolari equazioni quadratiche indeterminate. Proponiamoci di trovare ad es., una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica a dieci incognite

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 6mx_5 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + 6my_5 \qquad (20)$$

essendo m un numero intero.

Poniamo:

$$m = 2\mathrm{A}\,(r^2 - s^2), \qquad (21)$$

ove A può essere o intero o della forma $\frac{2h+1}{2}$ ed è $r > s$ essendo r e s interi; se m è un numero dispari ($m = 2k+1$), basta porre

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}, \qquad r = k+1, \qquad s = k;$$

se è $m = p\,.(2k+1)$, essendo p un numero pari, basta porre

$$\mathrm{A} = \frac{p}{2}, \qquad r = k+1, \qquad s = k, \text{ ecc.}$$

Costruendo allora la successione, il cui termine generale è

$$\mathrm{A}n^2 + \mathrm{B}n + \mathrm{C},$$

ove A è dato dalla (21), mentre B e C sono qualunque (con la solita condizione che sia $\mathrm{B} = \frac{2l+1}{2}$, quando è $\mathrm{A} = \frac{2h+1}{2}$) si ha una soluzione in numeri interi dell'equazione (1) ponendo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \mathrm{V}_{n+r},\ x_2 = \mathrm{V}_{n-r},\ x_3 = \mathrm{V}_{m+s},\ x_4 = \mathrm{V}_{m-s},\ x_5 = \mathrm{V}_n \\ y_1 = \mathrm{V}_{m+r},\ y_2 = \mathrm{V}_{m-r},\ y_3 = \mathrm{V}_{n+s},\ y_4 = \mathrm{V}_{n-s},\ y_5 = \mathrm{V}_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} n, m \text{ qualunque e} \\ \text{maggiori di } r \text{ ed } s \end{array}$$

e ciò per un teorema sui gruppi equisimmetrici del quinto ordine (v. formola (2), § 2).

Per risolvere in numeri interi l'equazione quadratica ad otto incognite

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \qquad (22)$$

possiamo applicare due formole che abbiamo trovato.

Dalla formola (5) del § 3, quando la successione V ha la prima caratteristica nulla, risulta

$$V^2_{n+r}+V^2_{n-r}+V^2_{m+s}+V_{m-s}=V^2_{m+r}+V^2_{m-r}+V^2_{n+s}+V^2_{n-s}.$$

Perciò per risolvere in numeri interi la (22), si costruisca la progressione aritmetica di cui primo termine $B+C$ e la ragione è B, essendo B o C interi qualunque e si ponga

$$x_1=V_{n+r}\,,\ x_2=V_{n-r}\,,\ x_3=V_{m+s}\,,\ x_4=V_{m-s}$$
$$y_1=V_{m+r}\,,\ y_2=V_{m-r}\,,\ x_3=V_{n+s}\,,\ y_4=V_{n-s}$$

essendo n, m, r, s numeri interi e n ed m sono maggiori di r ed s.

Possiamo trovare una soluzione in numeri interi della (22), applicando la formola (19) del § prec. Abbiamo trovato che se è $r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma}$, è

$$V_{n+\alpha}+V_{rn+\beta}+V_{rm+\gamma}+V_{m+\delta}=V_{m+\alpha}+V_{rm+\beta}+V_{rn+\gamma}+V_{n+\delta}.$$

Se la successione V ha per caratteristiche

$$A=1\,,\qquad B=0\,,\qquad C=0$$

cioè se è la successione dei quadrati dei numeri interi, abbiamo

$$(n+\alpha)^2+(rn+\beta)^2+(rm+\gamma)^2+(m+\delta)^2=$$
$$=(m+\alpha)^2+(rm+\beta)^2+(rn+\gamma)^2+(n+\delta)^2.$$

Onde una soluzione in numeri interi della (22) è data da:

$$x_1=n+\alpha\,,\ x_2=rn+\beta\,,\ x_3=rm+\gamma\,,\ x_4=m+\delta$$
$$y_1=m+\alpha\,,\ y_2=rm+\beta\,,\ y^2=rn+\gamma\,,\ y_4=n+\delta$$

essendo $n, m, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ interi qualunque e $r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma}$ intero.

9. È noto il teorema di *Fermat:* „ ogni numero è la somma dei quadrati di quattro numeri interi (o di un minor numero di quadrati) „. Noi mostreremo che:

Ogni numero intero si può sempre decomporre in infiniti modi nella somma dei quadrati di quattro numeri (interi o frazionari).

Si è visto che se è $r=\frac{\delta-\alpha}{\beta-\gamma}$, si ha l'eguaglianza

$$(n+\alpha)^2+(rn+\beta)^2+(rm+\gamma)^2+(m+\delta)^2=$$
$$=(m+\alpha)^2+(rm+\beta)^2+(rn+\gamma)^2+(n+\delta)^2. \tag{23}$$

Ora tale eguaglianza che noi abbiamo nell'ipotesi che i numeri n, m, r, α, β, γ, δ fossero numeri interi, sussiste evidentemente anche nel caso in cui essi o parte di essi sieno numeri frazionari. Essendo ora X un numero intero, avremo per il teorema di Fermat

$$X = L^2 + M^2 + N^2 + P^2$$

ove L, M, N, P sono numeri interi. Fissiamo ad arbitrio il valore delle quantità β ed n che compaiono nella formola (23) e poniamo

$$n + \alpha = L \tag{24}$$
$$rn + \beta = M \tag{25}$$
$$rm + \gamma = N \tag{26}$$
$$m + \delta = P \tag{27}$$

essendo inoltre

$$r = \frac{\delta - \alpha}{\beta - \gamma}. \tag{28}$$

Risolvendo il sistema di equazioni (24), (25), (26), (27), (28), risulta:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= L - n \\ \gamma &= \frac{(M-\beta)^2\beta + n^2(N - M + \beta) - n(P - L)(M - \beta)}{(M-\beta)^2 + n^2} \\ m &= \frac{(P - L + n)n^2 + (M - \beta)(N - \beta)n}{(M-\beta)^2 + n^2} \\ \delta &= \frac{(L - n)n^2 - (M - \beta)(N - \beta)n + (M - \beta)^2 P}{(M-\beta)^2 + n^2} \\ r &= \frac{M - \beta}{n} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Scegliendo per n un valore diverso da zero, $(M - \beta)^2 + n^2$ è sempre diverso da zero, e perciò α, γ, m, δ, r saranno numeri o interi o frazionari. Ponendo allora

$$L_1 = m + \alpha,\ M_1 = rm + \beta,\ N_1 = rn + \gamma,\ P_1 = n + \delta,$$

avremo

$$X = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 + P_1^2;$$

ed essendo β ed n arbitrarii potremo ottenere in infiniti modi i numeri L_1, M_1, N_1, P_1.

Così è

$$383 = 3^2 + 7^2 + 10^2 + 15^2.$$

Essendo

$$L = 3,\ M = 7,\ N = 10,\ P = 15$$

e ponendo

$$\beta = 1,\ n = 2$$

Dalla (29) risulta

$$\alpha = 1,\ \ \gamma = -\frac{23}{10},\ \ m = \frac{41}{10},\ \ \delta = \frac{109}{10},\ \ r = 3.$$

Quindi si ha

$$383 = \left(\frac{51}{10}\right)^2 + \left(\frac{133}{10}\right)^2 + \left(\frac{47}{10}\right)^2 + \left(\frac{129}{10}\right).$$

Similmente si ottiene

$$3S3 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{29}{2}\right)^2 \quad \text{ecc.}$$

10. Nei §§ precedenti abbiamo studiato molte proprietà delle successioni V; ora ci proponiamo di risolvere in alcuni casi il seguente problema:

Determinare l'espressione generale delle caratteristiche di una successione V, *i cui termini devono soddisfare ad una data relazione.*

a) Risolveremo il seguente problema:

Determinare l'espressione generale delle caratteristiche di una successione V che gode della proprietà che *la somma di* $2k+1$ *suoi termini consecutivi è il quadrato di un numero intero.*

Essendo

$$V_{n-k},\quad V_{n-k+1},\dots\quad V_n,\dots,\quad V_{n+k}$$

$2k+1$ termini consecutivi, si ha facilmente

$$\begin{aligned} V_{n-k} + V_{n-k+1} + \dots + V_{n+k-1} + V_{n+k} = \\ = (2k+1)\,An^2 + (2k+1)\,Bn + ((2k+1)\,C + 2AS_{2,k}), \end{aligned} \tag{30}$$

essendo A, B, C le caratteristiche che si devono trovare e $S_{2,k}$ la somma dei quadrati dei primi k numeri interi.

Il discriminante del trinomio (assumendo la n come variabile)

$$(2k+1)An^2 + (2k+1)Bn + ((2k+1)C + 2AS_{2,k})$$

è

$$(2k+1)^2\,B^2 - 4A\,(2k+1)\,((2k+1)\,C + 2AS_{2,k}).$$

Se esso è nullo, cioè se è, fatte le riduzioni e soppresso il fattore comune $2k+1$,

$$3\,(B^2 - 4AC) = 4A^2\,k(k+1) \tag{31}$$

il secondo membro della (30) è eguale a

$$(2k+1)A\left(n + \frac{B}{2A}\right)^2.$$

Ora se si pone

$$A = (2k+1)\,h^2 \qquad (h \text{ numero intero})$$
$$B = 2(2k+1)\,h^2 r \qquad (r \text{ numero intero})$$

e quindi, come si ottiene dalla (31)

$$C = (2k+1)\,h^2 r^2 - 2S_{2,k}\,h^2,$$

si ha

$$V_{n-k} + \dots + V_n + \dots + V_{n+k} = [h(2k+1)(n+r)]^2.$$

Dunque il termine generale di una successione V *tale che la somma di* $2k+1$ *suoi termini consecutivi sia il quadrato di un numero intero è*

$$(2k+1)\,h^2 n^2 + 2(2k+1)\,h^2 rn + ((2k+1)h^2 r^2 - 2S_{2,k}\,h^2.$$

Gode evidentemente della proprietà indicata anche la successione il cui termine generale sia

$$(2k+1)\,n^2 + 2\,(2k+1)\,rn + (2k+1)\,r^2 - 2S_{2,k}.$$

In particolare per $k=1$ si ha la successione il cui termine generale è

$$3n^2 + 6rn + 3r^2 - 2$$

(ove r è un intero qualunque) e che gode della proprietà che la somma di tre suoi termini consecutivi è un quadrato.

b) Determinare le caratteristiche della *successione* V *sapendo che fra tre suoi termini consecutivi*

$$V_{n-1},\ V_n,\ V_{n+1}$$

ha luogo la relazione

$$V_{n-1}V_n + V_n V_{n+1} + V_n V_{n-1} = 3V_n^2. \tag{32}$$

Abbiamo trovato (v. coroll. II del § 2)

$$V_{n-1}V_n + V_n V_{n+1} + V_n V_{n-1} = 3V_n^2 + A^2 - B^2 + 4AC\,.$$

Affinchè abbia luogo la (32), deve quindi essere

$$A^2 = B^2 - 4AC \tag{33}$$

cioè il *discriminante della successione deve essere il quadrato della prima caratteristica.*

Ricordando che, per le ipotesi che abbiamo fatto sin da principio, si ha

$$A = \frac{h}{2} \quad \text{e} \quad B = \frac{k}{2},$$

ove h, k sono o ambedue pari o ambedue dispari, risulta che la terza caratteristica C e il doppio di ciascuna delle prime due caratteristiche di una successione V che gode della proprietà (32), sono le soluzioni in numeri interi dell'equazione quadratica indeterminata

$$h^2 = k^2 - 8hC. \tag{34}$$

Una soluzione dell'equazione (34) essendo data da

$$h=a,\ k=(2r+1)a,\ C=\frac{r(r+1)}{2}\,a \quad (a \text{ numero intero}),$$

risulta che la successione il cui termine generale è

$$\frac{a}{1}\,n^2 + \frac{(2k+1)\,a}{2}\,n + \frac{k(k+1)}{2}\,a,$$

e quindi anche la successione il cui termine generale è

$$\frac{1}{2}\,n^2 + \frac{1}{2}\,(2k+1)n + \frac{1}{2}\,k\,(k+1),$$

gode della proprietà (1). Osserviamo che tale successione è quella dei numeri triangolari a partire dal termine di posto $(k+1)^{mo}$.

c) Con analogo metodo si trova che fra tutte le successioni V solo *la successione dei numeri triangolari* gode della proprietà che *la somma di due termini consecutivi è il quadrato di un numero intero.*

II. Consideriamo ora in particolare la successione il cui termine generale è

$$Z_n = An^2 + C, \tag{35}$$

la successione cioè avente nulla la seconda caratteristica.

Tale successione gode di tutte le proprietà che abbiamo trovato in generale per le successioni V; in particolare ponendo $B = 0$ nella formola penultima del § 7, si ha per la successione (35) la formola:

$$Z_{n+s} + Z_{sn-1} = Z_{sn+1} + Z_{n-s}. \tag{36}$$

Se è

$$A = 1 \qquad C = 0$$

la (36) diviene

$$(n+s)^2 + (sn-1)^2 = (sn+1)^2 + (n-s)^2.$$

Abbiamo quindi il modo di determinare una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica a quattro incognite

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2,$$

ponendo

$$x_1 = n+s, \quad x_2 = sn-1, \qquad x_1 = sn+1, \quad y_2 = n-s.$$

Osserviamo inoltre che se un numero X è la somma di due quadrati se è cioè

$$X = P^2 + Q^2,$$

essendo P e Q numeri interi, ponendo

$$n+s = P, \qquad sn-1 = Q,$$

n ed s sono le radici dell'equazione

$$t^2 - Pt + Q + 1 = 0,$$

e quindi, se il discriminante

$$P^2 - 4(Q+1),$$

è il quadrato di un intero, n ed s sono numeri razionali, e perciò sono pure numeri razionali

$$n - s \quad \text{e} \quad sn+1.$$

Possiamo dunque dire:

Se un numero X è la somma dei quadrati dei due numeri interi P e Q, ed è

$$P^2 - 4(Q+1)$$

il quadrato di un numero intero, si possono sempre trovare due numeri R *ed* S *razionali tali che sia*

$$X = R^2 + S^2.$$

Per es. è

$$170 = 7^2 + 11^2$$

ed è

$$7^2 - 4(11+1) = 1$$

un quadrato intero. Posto

$$n + s = 7, \quad sn - 1 = 11,$$

risulta

$$n = 3, \qquad s = 4,$$

e quindi

$$170 = (n - s)^2 + (sn + 1)^2 = 1^2 + 13^2.$$

Essendo Z_α, Z_β due termini qualunque della successione il cui termine generale è

$$An^2 + C,$$

abbiamo facilmente

$$Z_\alpha Z_\beta = A^2 \alpha^2 \beta^2 + C(Z_\alpha + Z_\beta) - C^2,$$

ed essendo

$$A^2 \alpha^2 \beta^2 + C = Z_{\alpha\beta},$$

risulta

$$Z_\alpha Z_\beta = A Z_{\alpha\beta} + C(Z_\alpha + Z_\beta) - C(A + C). \qquad (37)$$

Per $\alpha = \beta$, si ha

$$Z^2_\alpha = A Z_{\alpha^2} + 2CZ_\alpha - C(A + C).$$

Moltiplicando i due membri della (37) per Z_γ si ha

$$Z_\alpha Z_\beta Z_\gamma = A Z_{\alpha\beta} Z_\gamma + C(Z_\alpha Z_\gamma + Z_\beta Z_\gamma) - C(A + C) Z_\gamma$$

e quindi sviluppando mediante la (37) i prodotti

$$Z_{\alpha\beta} Z_\gamma, \; Z_\alpha Z_\gamma, \; Z_\beta Z_\gamma,$$

risulta

$$Z_\alpha Z_\beta Z_\gamma = A^2 Z_{\alpha\beta\gamma} + AC(Z_{\alpha\beta} + Z_{\alpha\gamma} + Z_{\beta\gamma}) + \\ + C^2(Z_\alpha + Z_\beta + Z_\gamma) - C(A + C)(A + 2C).$$

In generale considerando il prodotto di h termini qualunque, si ha la formola (della quale tralasciamo la dimostrazione perchè facilissima:

$$Z_{\alpha_1} Z_{\alpha_2} \dots Z_{\alpha_h} = A^{h-1} Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_h} + A^{h-2} C \, \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{h-1}} + \\ + A^{h-3} C^2 \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{h-2}} + \dots + A^{h-i} C^{i-1} \Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{h-i+1}} + \dots \\ \dots + C^{h-1} \Sigma X_{\alpha_1} - C(A + C)\left(\frac{(A+C)^{h-1} - C^{h-1}}{A}\right),$$

ove si indica con

$$\Sigma Z_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{h-i+1}}$$

la somma dei numeri Z i cui indici sono i prodotti ad $h-i+1$ ad $h-i+1$, delle h quantità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_h$.

Facilmente si dimostrano le seguenti proprietà dei numeri Z:

1. Se

$$\alpha\delta = \beta\gamma,$$

si ha

$$\frac{Z_\alpha Z_\delta - Z_\beta Z_\gamma}{(Z_\alpha + Z_\delta) - (Z_\beta + Z_\gamma)} = C.$$

2. Se S è la somma di n numeri Z, lo è pure

$$h^2 S - nC(h^2 - 1),$$

essendo h un numero intero.

3. Se S è un numero Z, lo è pure

$$h^2 S - C(h^2 - 1),$$

4. Se la prima caratteristica della successione Z è un quadrato, se si considera cioè la successione il cui termine generale è

$$D_n = h^2 n^2 + C,$$

ove h è un numero intero dato, si ha

$$D_\alpha D_\beta = D_{h\alpha\beta} + C(D_\alpha + D_\beta) - C(C+1)$$
$$D_\alpha D_\beta = h^2 D_{\alpha\beta} + C(D_\alpha + D_\beta) - C(h^2 + C),$$

e quindi dalle due eguaglianze scritte, risulta

$$h^2 D_{\alpha\beta} - D_{h\alpha\beta} = C(h^2 - 1);$$

e posto

$$\alpha\beta = n$$

si ha la formola

$$D_{hn} = h^2 D_n - C(h^2 - 1).$$

In generale si ottiene

$$D_{\alpha_1} D_{\alpha_2} \ldots D_{\alpha_k} = D_{h^{k-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} + C\,\Sigma\, D_{h^{k-2}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}} + \ldots$$
$$\ldots + C^i\,\Sigma D_{h^{k-i-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-i}} + \ldots + C^{h-1}\,\Sigma\, D_{\alpha_1} -$$
$$- C(C+1)((C+1)^{h-1} - C^{h-1}),$$

ove si indica con

$$\Sigma D_{h^{k-i-1}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-i}}$$

la somma dei numeri D, i cui indici sono rispettivamente i prodotti a $k-i$ a $k-i$ dei numeri $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_k$, essendo ciascun prodotto moltiplicato per h^{k-i-1}.

Si ha pure la formola:

$$D_{n \cdot h^{k-1}} = h^{2(k-1)} D_n - C(h^{2(k-1)} - 1).$$

Risulta inoltre:

Se S *è la somma di* m *numeri* D, *lo è pure*

$$h^{2(k-1)}S - mC(h^{2(k-1)} - 1).$$

Se S *è un numero* D, *lo è pure*

$$h^{2(k-1)}D - C(h^{2(k-1)} - 1).$$

5. Considerando la successione E il cui termine generale è

$$E_n = k^2n^2 - 1$$

essendo k un numero intero abbiamo facilmente

$$E_\alpha E_\beta + E_\alpha + E_\beta = E_{k\alpha\beta}$$

cioè:

Il prodotto di due numeri della successione E *aumentato della loro somma è un numero della successione.*

12. Sui numeri della forma $Bn + C$, ove B e C sono interi dati, e $B > C$ dimostreremo il seguente teorema:

La condizione perchè il prodotto di due numeri della forma $Bn + C$ *sia un numero della stessa forma è che sia*

$$B = kC, \text{ essendo } k \text{ un divisore di } C - 1$$

oppure

$$B = h(C - 1), \text{ essendo } h \text{ un divisore di } C$$

oppure

$$C = 1.$$

Infatti consideriamo i due numeri

$$Bn + C \quad \text{e} \quad Bm + C.$$

Si ha

$$(Bn + C)(Bm + C) = B(Bnm + Cm + Cn) + C^2,$$

e posto

$$Bnm + Cm + Cn = \alpha,$$

risulta

$$(Bn + C)(Bm + C) = B\alpha + C^2.$$

Se $B\alpha + C^2$ deve essere un numero della forma $B\rho + C$, sarà

$$B\alpha + C^2 = B\rho + C,$$

da cui

$$\frac{C(C-1)}{B} = \rho - \alpha.$$

Essendo $\rho - \alpha$ intero, affinchè $C(C-1)$ sia multiplo di B, essendo per ipotesi $B > C$, dovrà essere $B = kC$, essendo k un divisore di $C-1$ o $B = k(C-1)$ essendo h un divisore di C. Se è $B = kC$, essendo inoltre $C - 1 = kr$,

$$\begin{aligned}(Ckn + C)(Ckm + C) &= Ck(Cknm + Cm + Cn) + C^2 - C + C = \\ &= Ck(Cknm + Cm + Cn + r) + C = C\rho + C.\end{aligned}$$

Nel secondo caso si ottiene pure, posto $C = hs$.

$$(h(C-1)n + C)(h(C-1)n + C) = h(C-1)(h(C-1)nm + Cn + \\ + Cm + s) + C = B\rho + C.$$

Infine se $C = 1$, il prodotto $(Bn+1)(Bm+1)$ è evidentemente della forma $B\rho + 1$.

Notiamo per ultimo che il prodotto di $2h$ numeri della forma

$$(N + r)X + N$$

si può porre sotto la forma $(N+r)Z + r^{2h}$, mentre il prodotto di $2h+1$ numeri della medesima forma (1) si può porre sotto la forma

$$(N + r)Z + Nr^{2h},$$

In particolare si ha

$$((N + r)X + N)^2 = (N + r)((N + r)X^2 + 2NX + N - r) + r^2.$$

Quindi per trovare una soluzione in numeri interi dell'equazione quadratica indeterminata

$$x^2 = ay + z^2,$$

ove a è intero, basterà porre

$$a = N + r,$$

essendo N ed r ambedue interi e quindi si otterrà la soluzione voluta, ponendo

$$\begin{aligned} x &= az + N \\ y &= az^2 + N(2z + 1) - r \\ z &= r. \end{aligned}$$

ATTILIO CREPAS.

LA RADICE QUADRATA D'UN INTERO
E UN CERTO GRUPPO DI TRASFORMAZIONI

In alcune lettere a me indirizzate il dottor Guido Fubini, un valoroso allievo della Scuola normale superiore di Pisa, neo-professore all'Università di Catania, solleva dubbi circa la possibilità di gruppi continui di trasformazioni *tutte* decomponibili finitamente, malgrado l'esistenza di siffatti gruppi sia dimostrata in un recente mio lavoro pubblicato dalla R. Accademia dei Lincei. (*) Mette perciò

(*) *Rendiconti*, vol. XII fasc. 3°, febbraio 1903. — *Io credo fermamente* (così il dottor Fubini) *che gruppi dotati della proprietà da Lei voluta non possono esistere (quando un numero finito di disuguaglianze dànno il criterio per la decomponibilità in n fattori) che se i parametri sono variabili in* conto che io tenti l'argomento anche per una via diversa da quella che tenni già. L'esistenza di gruppi continui composti di trasformazioni tutte decomponibili finitamente, cioè tali che la decomposizione di ciascuna in fattori (trasformazioni del gruppo) ha sempre un termine, ne sarà confermata. Tanto più opportuno mi sembra il presente scritto, perchè ha relazione con altri miei, pubblicati in questo riputato periodico, e segnatamente con quello dal titolo: *Di un certo algoritmo per lo sviluppo della radice quadrata di un numero intero in frazione continua.*(*) Ivi fo uso di una certa trasformazione fissa come mezzo per aggiungere via via de' nuovi anelli alla catena dell'ordinario sviluppo della radice di un numero intero e positivo in frazione continua. Mostrerò ora come si possa invece far uso d'una trasformazione variabile di anello in anello, purchè la trasformazione appartenga a un certo gruppo, che passo a definire. Ne trarrò, come corollario, la decomponibilità finita delle trasformazioni del gruppo.

1. S'indichi con D un numero intero e positivo, con ω la sua radice a meno di un'unità e con r il resto dell'estrazione della radice medesima. Il gruppo che voglio considerare è formato dal sistema delle trasformazioni

$$\frac{\mu z + D}{z + \mu}, \tag{1}$$

dove il *parametro* μ è un numero non minore di ω nè maggiore del più piccolo de' due limiti

$$\omega + 1 \quad \text{e} \quad \omega + \frac{r}{\omega}. \tag{2}$$

Siffatte trasformazioni formano un gruppo. Indicando infatti con (μ_1) e con (μ_2) quelle trasformazioni che corrispondono ai valori μ_1 e μ_2 del parametro, e facendone il prodotto operativo, si avrà

$$(\mu_1)(\mu_2) = \frac{\dfrac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} z + D}{z + \dfrac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2}}.$$

Questo prodotto conserva la forma dei fattori; epperò le (1) formano un gruppo. Osservando poi che per lo scambio degl'indici 1 e 2 il

---

intervalli di cui non si considerano gli estremi. Così avviene per es. per il gruppo $z' = \varepsilon z$ dove $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, ove si escluda il valore $\varepsilon = 0$. Insomma il dottor Fubini è d'opinione (come da altre sue parole meglio si parrà in appresso) che, o si devono escludere valori del parametro corrispondenti a estremi d'intervallo o punti singolari, oppure si deve specializzare la natura del parametro stesso, così da renderla inesprimibile con disuguaglianze in numero finito, come accadrebbe, al dir del Fubini, se il parametro fosse razionale. Nel primo caso il mio gruppo diverrebbe quel che si dice un *sol d'agosto*, epperò un fuor d'opera, appetto ad altri congeneri, assai più semplici; nel secondo caso .... Ma non conviene anticipare la discussione, anche perchè l'opinione del dottor Fubini sopra riportata potrebbe non essere giusta quando è ferma (v. in proposito la nota in fondo al presente scritto).

(*) Vol. XVIII, luglio-agosto 1902.

detto prodotto non muta. se ne inferisce che le (1) sono altresì permutabili fra loro a due a due.

Resta a dimostrare che. se μ_1 e μ_2 non sono minori di ω nè superano il minore dei limiti (2), anche del numero

$$\frac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2}$$

accade lo stesso. Si ponga perciò: $\mu_1 = \omega + \lambda_1$; $\mu_2 = \omega - \lambda_2$. intendendo per λ_1 e λ_2 due numeri compresi nell'intervallo da 0 a 1. E poichè

$$\frac{\mu_1\mu_2 + D}{\mu_1 + \mu_2} = \omega + \frac{r + \lambda_1\lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2},$$

si vede intanto che quel prodotto è maggiore di ω. Poichè inoltre

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \geq 2$$

o anche

$$\lambda_1 + \lambda_2 \geq 2\lambda_1\lambda_2,$$

e d'altra parte

$$2\omega \geq r,$$

sommando verrà:

$$2\omega + \lambda_1 + \lambda_2 \geq r + 2\lambda_1\lambda_2 \geq r + \lambda_1\lambda_2.$$

Il detto prodotto non può dunque superare $\omega + 1$. Finalmente esso è minore di $\omega + \frac{r}{\omega}$, perchè la disuguaglianza

$$\frac{r + \lambda_1\lambda_2}{2\omega + \lambda_1 + \lambda_2} < \frac{r}{\omega}$$

si riduce all'altra

$$\omega\lambda_1\lambda_2 < \omega r + r(\lambda_1 + \lambda_2),$$

la quale è vera, perchè, non potendo $\lambda_1\lambda_2$ superare l'unità,

$$\omega\lambda_1\lambda_2 \leq \omega r.$$

Le trasformazioni (1), anche quando il loro parametro sia contenuto tra i limiti sopra fissati, formano dunque un gruppo che chiamerò Γ', come nella mia Nota pubblicata dai Lincei. (*)

2. Se $D = 19$, i limiti del parametro μ saranno 4 e $4\frac{3}{4}$. Vediamo su questo esempio come si possa sviluppare $\sqrt{19}$ in frazione continua ordinaria. Si consideri una trasformazione di Γ', per esempio la trasformazione

$$T_1 = \left(\frac{9z + 38}{2z + 9}\right).$$

(*) Il gruppo principale considerato in quella Nota ha il parametro variabile da ω ad $\omega + 1$, non esclusi gli estremi. Esso coincide con Γ' quando $r \geq \omega$; comprende Γ' e ne è più ampio quando $r < \omega$.

In essa la parte intera del rapporto $9z:2z$ (quoziente dei due termini in z) è 4; si scriva dunque:

$$T_1 = 4 + \cfrac{1}{\cfrac{2z+9}{z+2}} \,.\, (*)$$

Si prenda ora un'altra trasformazione qualunque del gruppo Γ', per esempio la trasformazione

$$T_2 = \frac{13z+57}{3z+13}.$$

Operando sulla z che è nel 2° membro dell'ultimo valore di T_1 la sostituzione T_2, si formerà il prodotto operativo T_1T_2, che sarà

$$4 + \cfrac{1}{\cfrac{53z+231}{19z+83}}.$$

La parte intera del quoziente $53z:19z$ è 2. Si scriva dunque:

$$T_1T_2 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{19z+83}{15z+65}}}.$$

Si prenda dal gruppo Γ' un'altra trasformazione T_3, per esempio

$$\frac{19z+76}{4z+19}.$$

Seguitando con questa come sopra fu indicato, si avrà

$$T_1T_2T_3 = 4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{545z+2375}{148z+646}}}}.$$

ecc., ecc.

I numeri interi e positivi: 4, 2, 1..., che compariscono nei secondi membri dei valori di T_1, di $T_1 . T_2$, di $T_1 . T_2 . T_3$, ecc., sono gli ordinari quozienti incompleti dello sviluppo di $\sqrt{D}$, nel caso presente di $\sqrt{19}$, in frazione continua; e quel che più importa, i coefficienti della funzione lineare di z che chiude i detti valori, non possono mai essere negativi. La dimostrazione che di ciò ho trovato è simile a quella contenuta nella mia Nota: *Di un certo algoritmo ecc.*, ma per alcune modificazioni imposte dalla maggior generalità della questione,

---

*) Qualora si avesse

$$T_1 = \frac{(\omega+1)z+D}{z+(\omega+1)},$$

la parte intera del quoziente dei due termini in z toccherebbe il suo massimo $\omega+1$, e bisognerebbe aver cura di diminuirla di un'unità.

è un po' lunga e complicata. Nella speranza di poterla semplificare, ne rimetto la pubblicazione ad altro tempo. Proverò allora ciò che ho già verificato sull'esempio $D=19$, che cioè: *se* Π_n *è il prodotto di* n *trasformazioni qualunque del gruppo* Γ', *e se* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *sono i quozienti incompleti dell'ordinario sviluppo di* $\sqrt{D}$ *in frazione continua, si ha sempre*

$$\Pi_n = \left(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *positivi o nulli;* $\alpha > \gamma$ *e il determinante* $\alpha\delta-\beta\gamma$ *differente da zero.*

3. Vengo ora al corollario della decomponibilità finita. Se si pone

$$(\mu_1+\sqrt{D})(\mu_2+\sqrt{D}) \ldots . (\mu_n+\sqrt{D}) = A_n + B_n\sqrt{D},$$

è facile verificare che

$$\Pi_n = \frac{A_n z + DB_n}{B_n z + A_n}.$$

Conseguentemente

$$\frac{A_n z + DB_n}{B_n z + A_n} = \left(a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right).$$

Facendo in quest'ultima eguaglianza $z=\infty$ e poi $z=0$, si otterranno le altre due

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$$

$$\frac{DB_n}{A_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\beta}{\delta}\right).$$

E poichè i secondi membri, per la nota legge di formazione delle ridotte, sono compresi fra le ridotte $(n-1)^{ma}$ ed n^{ma} di $\sqrt{D}$, lo stesso avverrà dei primi. Essendo pertanto $\frac{A_n}{B_n}$ uguale al parametro della trasformazione Π_n, si conclude che: *se una trasformazione del gruppo* Γ' *è il prodotto di* n *fattori, il suo parametro* μ, *nonchè il quoziente* $\frac{D}{\mu}$, *sono compresi fra la ridotta* $(n-1)^{ma}$ *e la ridotta* n^{ma} *di* $\sqrt{D}$. Una trasformazione decomponibile in *infiniti* fattori avrebbe dunque il suo parametro μ eguale al *limite* comune a tutte le coppie di ridotte consecutive di $\sqrt{D}$, cioè a $\sqrt{D}$. Ma questo caso si può subito escludere, supponendo che μ sia razionale; (*) dunque il gruppo Γ', qua-

(*) Questa supposizione si fa pure nella mia Nota ai Lincei, dove i binomi della forma $\mu+\sqrt{D}$, chiamati ivi e non per nulla *binomi irrazionali*, sono sottoposti a *calcoli* che fuor della detta ipotesi non avrebbero significato. Così nel *corollario* riportato testualmente al n. 4 del presente scritto, che però vale anche quando le μ sono irrazionali. Il Fubini mi appone qualche mancata dichiarazione esplicita sul proposito. Era inutile: ma comunque sia, spero avrà supplito il buon criterio, e soprattutto il buon volere, degli altri lettori.

lora μ sia razionale, non contiene trasformazioni decomponibili all'infinito, e ciò prova il mio asserto. (*)

4. A pag. 82 della mia Nota pubblicata dalla R. Accademia dei Lincei si legge un *corollario* che mi sembra molto interessante, ma la cui dimostrazione non potei ivi sufficientemente sviluppare, per mancanza di spazio. Lo farò qui appresso dopo averne premessa l'enunciazione, quale si legge nella suddetta Nota: *Se i numeri* μ_1, $\mu_2, \ldots \mu_n$ *non sono minori di* ω *nè maggiori di* $\frac{D}{\omega}$, *e se si pone*

$$(\mu_1 + \sqrt{D})(\mu_2 + \sqrt{D}) \ldots . (\mu_n + \sqrt{D}) = A_n + B_n \sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{A_n}{B_n}$ *è compreso fra le ridotte* n^{ma} *ed* $(n-1)^{ma}$ *di* $\sqrt{D}$.

Infatti, se i numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, oltre ad essere non maggiori di $\frac{D}{\omega}$, cioè di $\omega + \frac{r}{\omega}$, sono anche non maggiori di $\omega + 1$, il teorema fu già dimostrato, perchè $\frac{A_n}{B_n}$ è il parametro del prodotto delle trasformazioni (μ_1), (μ_2), $\ldots (\mu_n)$, che nell'ammessa ipotesi appartengono tutte al gruppo Γ'. Si supponga dunque che una delle μ, per es. μ_1, entri nell'intervallo da $\omega + 1$ a $\frac{D}{\omega}$, che cioè si abbia $\mu_1 > \omega + 1$; $\mu_1 \leq \frac{D}{\omega}$. Da queste due ipotesi, aggiunte alla relazione $r < 2\omega + 1$, si deriva facilmente che $\frac{D}{\mu_1}$ non è minore di ω, nè maggiore dei due limiti $\omega + 1$ e $\frac{D}{\omega}$; talchè il rapporto $\frac{D}{\mu_1}$ rientra nei limiti fissati per il parametro delle trasformazioni di Γ'. Se pertanto si pone

$$\left(\frac{D}{\mu_1} + \sqrt{D}\right)(\mu_2 + \sqrt{D}) \ldots . (\mu_n + \sqrt{D}) = P_n + Q_n \sqrt{D},$$

(*) E di questo parere è anche il dottor Fubini il quale, abbandonati gli *estremi d'intervalli* e i *casi più semplici*, che non sarebbero più a proposito, soggiunge: " Se nel suo esempio si suppone μ razionale, si cade nella classe di gruppi in cui la decomponibilità di una trasformazione in n fattori (anzi anche p. es. in un solo fattore, ossia l'appartenenza al gruppo) *non si può far dipendere da un numero finito di disuguaglianze*. E per questa classe di gruppi io ho ammesso *possibilissimo* che accada quanto Ella afferma, come risulta dalle mie lettere ". — Quel " possibilissimo " del dottor Fubini mi basta, e n'ho d'avanzo per la mia tesi; non avendo io mai fatto questione di *classe*, ma di *gruppo continuo*, qualunque ne sia la classe. Aggiungo poi: 1º. Che dato il mio gruppo qual è, non pare che nella classe cui esso appartiene o si voglia ascrivere ne esistano di più semplici, se non più interessanti (si noti che quel mio gruppo ha speciale importanza nella teoria delle forme quadratiche, come, mostrerò in un prossimo lavoro). 2º. Che la nota in fondo al presente scritto prova come, anche in certi casi nei quali le riserve del dottor Fubini non avrebbero ragion d'essere, anzi si possiede la forma esplicita del gruppo, senza esclusione o limitazione di sorta, esistono gruppi continui di trasformazioni *tutte* decomponibili finitamente. 3º. Che il dottor Fubini, a giudicarne dalle sue parole, pare confonda l'appartenenza al gruppo col numero dei fattori; il che se facesse, avrebbe torto. Se infatti per definire la natura razionale di un parametro letterale un numero finito di disuguaglianze può essere insufficiente, lo stesso non può dirsi quanto al numero dei fattori di una *data* trasformazione. La determinazione di tal numero dipende invece, almeno pel mio gruppo, da un algoritmo *finito* (v. il n. 5 di questo lavoro).

$\frac{P_n}{Q_n}$, non che $\frac{DQ_n}{P_n}$, saranno compresi tra le ridotte n^{ma} ed $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{D}$. Scritta la precedente eguaglianza sotto la forma

$$(\mu_1+\sqrt{D})(\mu_2+\sqrt{D})\dots(\mu_n+\sqrt{D})=\mu_1\left(Q_n+\frac{P_n}{D}\sqrt{D}\right)=F-G\sqrt{D},$$

il rapporto $\frac{F}{G}=\frac{DQ_n}{P_n}$ sarà dunque compreso tra la n^{ma} e la $(n-1)^{ma}$ ridotta di $\sqrt{D}$, come dovevasi dimostrare. Ora poi che una μ è entrata nell'intervallo da ω ad $\omega+1$, si supponga che ve n'entri un'altra e si ripeta la dimostrazione precedente; quindi una terza e si ripeta la dimostrazione, e così via.

5. Dissi già che il parametro d'una trasformazione decomponibile in n fattori dev'essere compreso fra le ridotte n^{ma} ed $(n-1)^{ma}$ di $\sqrt{D}$. Errerebbe tuttavia chi, invertendo il teorema, ne traesse un criterio per riconoscere il *massimo* numero di fattori ne' quali una data trasformazione del gruppo Γ' è decomponibile. Un criterio stabilito esiste invece, ed è semplicissimo, per quel gruppo Γ il cui parametro varia da ω ad $\omega+1$, gruppo che coincide con Γ' quando $r\geq\omega$, e ne è invece un sottogruppo quando $r<\omega$. Nella mia Nota più volte citata dimostro infatti il seguente algoritmo che vale a determinare il massimo numero di fattori in cui si può decomporre una data trasformazione del gruppo Γ. Premetto che l'algoritmo è diverso, secondochè $r \lesseqgtr \omega$.

Se $r>\omega$, *si forma l'espressione*

$$(\mu+\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^k$$

e poi si cerca qual è il minimo valore che bisogna dare all'esponente k *affinchè, ridotta l'espressione a forma di binomio irrazionale* $p+q\sqrt{D}$, (*) *il rapporto* $\frac{p}{q}$ *cessi di essere compreso nell'intervallo da* ω *a* $\omega+1$, *in cui per* $k=0$ *necessariamente si trova.* (**) *Detto minimo valore dell'esponente indica il numero massimo domandato.*

(*) Se μ non fosse razionale, qual significato avrebbe quest'inciso, che tolgo dalla mia Nota?

(**) Che questa circostanza debba cessare di verificarsi *per un valore finito di* k, si può dimostrare direttamente così: Pongasi

$$(\mu+\sqrt{D})(\sqrt{D}-\omega)^k=p+q\sqrt{D}.$$

Si avrà pure

$$(\mu-\sqrt{D})(-\sqrt{D}-\omega)^k=p-q\sqrt{D}.$$

D'onde facilmente

$$\frac{p}{q}=\sqrt{D}\,\frac{(\mu+\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}-\omega}{-\sqrt{D}-\omega}\right)^k+(\mu-\sqrt{D})}{(\mu+\sqrt{D})\left(\frac{\sqrt{D}-\omega}{-\sqrt{D}-\omega}\right)^k-(\mu-\sqrt{D})}.$$

Se al crescere indefinitamente di k il rapporto $\frac{p}{q}$ non cessasse mai di essere compreso nell'inter-

Se $r < \omega$, *si opera nello stesso modo, ma facendo uso dell'espressione*

$$(\mu + \sqrt{D})(\omega + 1 - \sqrt{D})^k.$$

Se finalmente $r = \omega$, *si può far uso dell'una o dell'altra delle due precedenti espressioni.*

Di alcune notevoli applicazioni delle cose esposte all'aritmetica tratterò in una prossima Nota.

G. Frattini.

NOTA.

Invece di supporre D *numero* (intero, positivo e beninteso non quadrato) si supponga *polinomio intero e di grado pari* per rispetto ad una lettera a. Si supponga inoltre: 1° che μ sia una funzione *razionale* di a; 2° che tale funzione abbia comune con $\sqrt{D}$ la parte intera. Anche in questo caso algebrico le trasformazioni

$$\frac{\mu z + D}{z + \mu}$$

formeranno un gruppo. Di più, indicando con π_n il prodotto di n trasformazioni del gruppo, e con $a_1, a_2, a_3 \ldots$ i quozienti incompleti consecutivi che si ottengono applicando a $\sqrt{D}$ quell'algoritmo che varrebbe a svilupparla in frazione continua qualora D rappresentasse un numero, si avrà anche per questo caso:

$$\pi_n = \frac{A_n z + DB_n}{B_n z + A_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right),$$

dove α, β, γ, δ sono polinomi interi in a, e il *grado* di α supera quello di γ. Ponendo $z = \infty$, si ottiene

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(a_1, a_2, \ldots a_n, \frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Di qui si vede (per essere il grado di α maggiore di quello di γ) che: *se una trasformazione del gruppo è decomponibile in* n *fattori, il parametro della trasformazione, sviluppato in frazione continua, deve avere comuni con* $\sqrt{D}$ *i primi* n *quozienti incompleti.* Perciò se $\sqrt{D}$ e il parametro d'una data trasformazione avranno comuni k quozienti incompleti solamente, la trasformazione non sarà decomponibile in più di k fattori. Ne segue che le trasformazioni del gruppo sono *tutte* decomponibili finitamente. Perchè, se taluna ve ne fosse decomponibile all'infinito, il suo parametro e $\sqrt{D}$ dovrebbero avere comuni tutti i quozienti incompleti. Ma ciò è impossibile, perchè la serie dei quozienti incompleti di μ è limitata, mentre quella dei quozienti incompleti di $\sqrt{D}$ è infinita.

---

vallo da ω ad $\omega + 1$, esso dovrebbe tendere a un limite compreso nell'intervallo stesso, epperò positivo. Invece esso tende al limite negativo $(-\sqrt{D})$, come si vede osservando che

$$\lim_{k=\infty} \left(\frac{\sqrt{D} - \omega}{-\sqrt{D} - \omega}\right)^k = 0.$$

Fa eccezione il caso $\mu = \sqrt{D}$, che però va escluso, come già fu detto.

Si noti che il parametro del gruppo algebrico qui considerato non è a, ma la sua funzione razionale. Di questa si conosce peraltro la forma algebrica, che è

$$\omega(a) + \frac{\sum\limits_{u=0}^{u=h-1} C'_u\, a^{h-u-1}}{a^h + \sum\limits_{u=1}^{u=h} C_u\, a^{h-u}},$$

dove $\omega(a)$ denota la parte intera di $\sqrt{D}$, h un numero intero e positivo qualsivoglia e C_u, C'_u indicano coefficienti numerici arbitrari. — Dove sono qui le *esclusioni?* Dove le *infinite disuguaglianze* del dottor Fubini? Questo esempio, che non è se non il riflesso algebrico del caso aritmetico considerato nella discussa mia Nota, sfugge dunque al dilemma dell'egregio dottore. Esso prova quel che dissi fin da principio; che cioè il dilemma: o esclusione di estremi, o disuguaglianze in numero infinito, come fallisce nel caso algebrico, può anche nel caso aritmetico dar nascita a giustificati dubbi.

Avvertenza. — Il dottor Fubini, cogliendo a volo una frase contenuta nella mia Nota (che cioè le trasformazioni di un gruppo di *Lie* propriamente detto sono decomponibili all'infinito), solleva dubbi anche su ciò. Per tagliar corto, osservo che si tratta di una frase *isolata*, che non ha *nulla da fare* con la tesi del mio lavoro.

SUL POSTULATO DELL'EQUIVALENZA

1. Dirò *estensive* quelle figure che, come le lunghezze, gli angoli, le aree e i volumi, si possono scomporre in parti omogenee al tutto; allora la definizione di Duhamel sull'equivalenza si può esprimere: *Due figure estensive sono equivalenti, se si possono scomporre in uno stesso numero (finito) di parti rispettivamente eguali.*

Questa definizione ci porge il mezzo di stabilire in molti casi l'equivalenza di due figure; ma non ci può dare, nel caso di aree o volumi, una norma sicura per verificare se due figure non sieno equivalenti e precisamente se l'una sia *prevalente* o *suvvalente* all'altra, senza almeno la considerazione di infinite suddivisioni. Ne derivò il bisogno di un postulato che dietro gli studii dei proff. Faifofer e De Zolt, fu proposto la prima volta dall'illustre e compianto De Paolis, e venne poi da altri posto sotto la forma: *Una figura estensiva non è equivalente a una sua parte.*

Un simile postulato, troppo evidente, ove si presupponga, come in Euclide, il concetto di estensioni eguali, non si lascia facilmente giustificare, quando il confronto delle figure estensive abbia per base la definizione del Duhamel. (*)

(*) Veggasi il mio articolo: "Sulla equivalenza dei poligoni", *Periodico di Matematica*, anno IX, 1894, pag. 19.

2. Ma ove si voglia ammettere la distinzione fra figure finite e infinite proposta dal prof. Bettazzi, (*) la proposizione assunta come postulato può essere formalmente dimostrata; e anche ove non si accetti, per una trattazione elementare, tale distinzione, si può riferire la proprietà contenuta nella proposizione accennata a figure particolari, cioè al *rettangolo piano* e al parallelepipedo rettangolare, che per semplicità chiamerò *rettangolo solido,* rendendo così possibile una giustificazione che difficilmente si potrebbe trovare per figure indeterminate.

3. Il prof. Bettazzi dice:

" Una figura tale che, preso un punto qualunque dello spazio, le distanze di esso da tutti i punti della figura sieno tutte minori di un conveniente segmento, si dirà *finita.*

E si diranno *infinite* le altre, cioè quelle per le quali esiste almeno un punto tale che, fra le distanze di esso a tutti i punti della figura, se ne trovino anche di quelle maggiori di un qualunque segmento, comunque prestabilito ".

L'autore ne deduce che un angolo (come superficie) è infinito, perchè contiene raggi infiniti. Collo stesso criterio possiamo ritenere infinite, nel piano le parti di una striscia determinate da una retta perpendicolare ai suoi lati, e nello spazio le parti di un parallelepipedo indefinito, a sezione normale rettangolare, determinate da un piano perpendicolare ai suoi spigoli.

4. Dopo aver detto adiacenti due figure estensive che, senza sovrapporsi, hanno una parte di contorno comune, si suole definire la somma di due figure solo nel caso in cui si possono rendere adiacenti. Con simili definizioni sarebbe per es. impossibile sommare un poligono a contorno stellato i cui angoli rientranti fossero molto acuti con un poligono convesso i cui angoli fossero troppo ottusi. Ed anche ove ci si volesse limitare ai poligoni e poliedri convessi, poichè la somma di due poligoni o poliedri convessi non è necessariamente convessa, potrebbe risultare impossibile la somma di un numero qualunque di tali figure.

Si può certamente concepire la somma di più figure estensive anche totalmente separate, come quel complesso di figure che contiene tutte le loro parti; ma sembra opportuno il poter rappresentare la somma come una figura unica. Ora il carattere di figura unica, che si vuol distinguere da un complesso di figure separate, potrebbe trovarsi nella possibilità di congiungere due punti, presi ad arbitrio nella figura, con una linea che non abbia alcun punto esterno alla figura medesima; allora si può concepire anche una figura unica composta di due parti che abbiano in comune un solo punto dei loro contorni; e perciò dette *adiacenti* due figure estensive che, senza sovrapporsi,

(*) *Bollettino di Matematica,* anno I, pag. 85.

hanno almeno un punto dei loro contorni in comune. la *somma di due figure estensive adiacenti* si può definire la figura che contiene tutte le loro parti.

In questo modo e non altrimenti si possono comprendere fra le figure estensive quelle a contorno intreccinto, colla introduzione delle figure negative.

Che poi si possa ottenere la somma di due figure estensive *finite* sembra evidente: poichè, se le figure sono sovrapposte, si possono allontanare (con un movimento finito) in modo che ciascuna divenga totalmente esterna all'altra, e date in tale posizione, si possono avvicinare in modo che, per la prima volta, i loro contorni abbiano almeno un punto comune, e ciò si può fare in modi innumerevoli. Per le figure infinite non si può in generale arrivare alla stessa conclusione.

5. Ogni somma di due figure estensive finite è anch'essa finita; infatti poichè le figure finite rimangono tali dopo un movimento (*) e perciò nelle posizioni che acquistano per divenire adiacenti, preso un punto qualunque dello spazio, le distanze di questo dai punti della figura somma non sono altro che le distanze dello stesso punto dai punti delle figure addende e per conseguenza tutte minori di un conveniente segmento.

E poichè la somma di due figure finite è finita, si potrà ad essa sommare una terza figura finita, alla nuova somma una quarta e così di seguito. Se riflettiamo che tali risultati si possono ottenere in modi innumerevoli, rimanendo sempre equivalenti per la definizione di Duhamel, possiamo concludere:

I. *Esistono innumerevoli figure estensive tutte finite, fra loro equivalenti, somme di più figure estensive finite, date, omogenee.*

Questa proposizione costituisce per le figure estensive di una medesima specie, ove le figure equivalenti si considerino come forme diverse di una stessa grandezza, la proprietà fondamentale che io chiamai *aggregativa uniforme;* (**) è poi evidente che per le stesse figure valgono anche la proprietà *commutativa* e l'*associativa;* per ridurre dunque le figure estensive di una medesima specie a una classe di grandezze *ordinarie,* basta poter provare che *se due figure estensive omogenee non sono equivalenti, una di esse equivale alla somma dell'altra e di una terza figura omogenea.*

6. Poichè ogni somma di figure estensive finite è anch'essa finita, possiamo stabilire la seguente proposizione:

II. *Una figura estensiva infinita non è equivalente a una figura estensiva finita.*

Poichè, scomposta la figura finita in un numero (finito) qualunque

---

(*) BETTAZZI, *op. cit.*, pag. 86.

(**) G. BIASI, *Elementi di aritmetica e algebra esposti con metodo sintetico*, pag 30 e segg. Sassari, G. Gallizzi, 1892.

di parti, necessariamente finite, (*) ogni somma di queste è finita, e perciò non può essere eguale a una figura infinita.

7. Ricorderò le tre proposizioni note:

III. *Due figure estensive eguali sono equivalenti.*

IV. *Due figure estensive equivalenti a una terza sono equivalenti fra loro.*

V. *Se più figure estensive sono equivalenti ad altrettante figure, una somma qualunque delle prime è equivalente ad una somma qualunque delle seconde.*

8. VI. *Due rettangoli piani o solidi di egual base e di diversa altezza non sono equivalenti.*

Sieno M, A i due rettangoli di egual base e sia l'altezza di M maggiore di quella di A. Allora i due rettangoli si possono disporre in modo che M sia la somma di A e di un altro rettangolo, che denoteremo con B. Nella striscia (o parallelepipedo indefinito) che comprende i tre rettangoli si costruiscano al di là di B, e consecutivamente, i rettangoli C, D, ... eguali a B.

Se A è equivalente ad M, ossia ad $A+B$, poichè $B=C$, sarà (III, V) $A+B$ equivalente ad $A+B+C$ e perciò (IV) A equivalente ad $A+B+C$. Similmente, poichè A è equivalente ad $A+B+C$, ed è $B=D$, sarà $A+B$ equivalente ad $A+B+C+D$, e perciò anche A equivalente a questa somma. Così continuando si arriva a dimostrare A equivalente alla somma di A e di un multiplo qualunque di B, ossia a un rettangolo di egual base, la cui altezza è la somma dell'altezza di A e di un multiplo qualunque dell'altezza di B; un'altezza dunque che, secondo il postulato d'Archimede, può superare un segmento qualunque prestabilito. Il rettangolo A sarebbe per conseguenza equivalente a una figura estensiva infinita, in contraddizione colla proposizione II.

9. Fondandoci sulla proposizione nota: *Si può costruire un rettangolo piano (o solido), di data base arbitraria, equivalente a un poligono (o prisma, o somma di prismi) dato;* e considerando parti di poligono (o di prisma) solo poligoni (o prismi, o somme di prismi), possiamo ora dimostrare la proposizione:

VII. *Un poligono (o prisma) non è equivalente a una sua parte.*

Sia P un poligono (o prisma), P_1 una sua parte, P_2 la parte rimanente, e si costruiscano i rettangoli piani (o solidi) R_1, R_2 di egual base arbitraria equivalenti a P_1, P_2. Possiamo allora formare un rettangolo colla stessa base dei precedenti che abbia per altezza la somma delle loro altezze, il quale sarà perciò una loro somma, e potremo indicare con R_1+R_2. Questo rettangolo sarà equivalente (V) a una somma qualunque di P_1, P_2 e perciò a P. Se dunque P fosse equivalente a P_1 e perciò (IV) ad R_1, sarebbe anche R_1+R_2 equiva-

(*) BETTAZZI, *op. cit.*, pag. 86.

lente (IV) ad R_1, cioè sarebbero equivalenti due rettangoli di egual base e di diversa altezza, in contraddizione colla proposizione VI.

10. Colla proposizione nota che fu citata nell'articolo precedente si può stabilire, indipendentemente dalla proposizione VII, che due poligoni (o prismi), o sono equivalenti, oppure l'uno equivale alla somma dell'altro e di un terzo poligono (o prisma), poichè così avviene, in forza della proposizione VI, per i rettangoli di egual base, che si possono costruire, ad essi equivalenti. I poligoni e i prismi costituiscono così due *classi complete di grandezze ordinarie*. E poichè gli uni e gli altri sono indefinitamente scomponibili in parti omogenee al tutto, tali grandezze sono *potenzialmente continue*, (*) e si possono rendere *effettivamente continue* colla introduzione delle *grandezze limiti* determinate da due classi contigue. Così saranno grandezze limiti l'area del circolo determinata dai poligoni inscritti e circoscritti, il volume della piramide determinato dalle consuete somme di prismi inscritti e circoscritti, nonchè le superficie e i volumi dei corpi rotondi. Il poliedro dovrà considerarsi come somma di prismi e piramidi. Sarà inoltre giustificata l'esistenza di un summultiplo qualunque di tali grandezze. (**)

11. Ove in un insegnamento elementare non si creda opportuno di trattare diffusamente delle figure finite e infinite, si potranno sempre assumere con vantaggio, come postulati le proposizioni contenute nella VI per il rettangolo piano e per il rettangolo solido; la dimostrazione datane può, a mio parere, giustificarle, apparendo assurde le contradditorie; esse poi mettono in maggior luce l'importanza della definizione di figure equivalenti, dimostrando la differenza, talvolta inavvertita, fra il confronto di due rettangoli considerati come grandezze lineari eguali o disuguali e come poligoni (o poliedri) equivalenti o non equivalenti.

G. Biasi.

UNA PROPRIETÀ DEGLI ARCHI
le cui funzioni goniometriche sono razionali

1. Sopra una circonferenza di raggio arbitrario, si consideri un arco $AB = \alpha$. Se α è commensurabile con 2π, detta λ la loro massima comune misura, si ponga

$$2\pi = m \, . \, \lambda \qquad \alpha = n \, . \, \lambda,$$

dove m ed n sono due interi primi tra loro, anche qualora α sia un

(*) Biasi, *op. cit.*, pag. 49 e segg.
(**) Ibid., pag. 52.

summultiplo di 2π, nel qual caso $\alpha = \lambda$, $n = 1$. Ciò premesso, partendo da un punto qualunque A della circonferenza, si contino gli archi λ di n in n; è chiaro che il primo punto pel quale si ripasserà con questo procedimento, sarà il punto A, e ciò avverrà dopo d'aver contato un numero d'archi λ eguale al minimo comune multiplo di m ed n, che è dato in questo caso dal prodotto $m \, . \, n$, e dopo d'aver girata la intera circonferenza tante volte quante lo indica il quoziente della divisione $(m \, . \, n) : m = n$. Si avrà quindi: $m \, . \, n\lambda = n \, . \, 2\pi$, cioè $m\alpha = n \, . \, 2\pi$. Viene di conseguenza, che se partendo da A adattiamo successivamente sulla circonferenza una corda eguale a quella che sottende l'arco $\alpha = n \, . \, \lambda$, dopo d'aver girata la circonferenza n volte, ritorneremo ad A chiudendo così un poligono regolare in generale stellato (convesso se $n = 1$) di m lati e di altrettanti vertici che divideranno la circonferenza in m parti eguali. (*)

Se dunque α è commensurabile con 2π, seguendo il procedimento sovra indicato, si potrà dividere la circonferenza in m parti eguali col solo sussidio del compasso, e si conclude che il numero m deve essere necessariamente della forma

$$p_1^{i_1} \, . \, p_2^{i_2} \, . \, . \, . \, p_k^{i_k} \, . \, 2^{\mu} \, ,$$

dove gli esponenti i possono avere il valore 0, oppure 1, e μ è un intero qualunque, ed i fattori $p_1, p_2 \, . \, . \, . \, p_k$ rappresentano numeri primi di Gauss cioè della forma $(2^r + 1)$.

Se all'incontro α non è commensurabile con 2π, partendo da un punto qualsiasi e adattando successsivamente sulla circonferenza una corda che sottenda un arco α, nè si ritornera più al punto di partenza, nè sarà possibile che si ripassi per uno dei punti incontrati precedentemente.

Per la prima osservazione notiamo subito che ove si ritornasse al punto di partenza, fra 2π ed α dovrebbe sussistere una relazione del tipo $m\alpha = n \, . \, 2\pi$, essendo m, n interi, dalla quale risulterebbe

$$\alpha = \frac{n}{m} \, . \, 2\pi .$$

contro l'ipotesi della incommensurabilità.

Per giustificare la seconda, basta por mente che qualora, seguendo il predetto procedimento, si venisse, dopo uno o più giri ad incontrare una seconda volta per primo un punto B diverso da quello dal quale si è partiti, ciò vorrebbe dire che, prendendo invece le mosse da B, si ritornerebbe per primo in B, cosa non ammissibile data l'ipotesi dell'incommensurabilità ed, indipendentemente anche da essa, poichè così si verrebbe ad ammettere in B, e senza ragione alcuna,

(*) Per più complete considerazioni intorno a questo argomento si veda P. Bachmann, *Die Elemente der Zahlentheorie*, § 1°, pag. 19. Teubner, Lipsia, 1892; U. Scarpis, *Primi elementi della teoria dei numeri*, § 1°. Hoepli, Milano, 1896.

una proprietà che si è negata ad A. Se dunque 2π ed α sono incommensurabili, gl'infiniti archi della successione

$$\alpha,\ 2\alpha,\ 3\alpha \ldots k \,.\, \alpha,$$

aventi l'origine in A, avranno tutti distinti i loro estremi.

2. Sia ora α un arco non multiplo di $\frac{\pi}{2}$ che abbia razionali il seno ed il coseno che indicheremo con $\frac{r}{q}$ ed $\frac{s}{q}$. Gl'interi r, s, q verificano la relazione:

$$r^2 + s^2 = q^2,$$

e poichè in virtù di essa, se due dei tre numeri r, s, q hanno un fattore comune, esso deve pure appartenere al terzo, possiamo anche supporre di averneli liberati precedentemente rendendoli primi tra loro due a due, di modo che r ed s non sieno entrambi pari.

Dopo ciò, supponiamo α commensurabile con 2π cosicchè, detta λ la loro massima comune misura, si abbia

$$m \,.\, n \,.\, \lambda = n \,.\, 2\pi,$$

ovvero, per essere $n \,.\, \lambda = \alpha$,

$$m \,.\, \alpha = n \,.\, 2\pi$$

dove m, n sono primi tra loro.

Sarà quindi:

$$\operatorname{sen} m \,.\, \alpha = \operatorname{sen} \,.\, n \,.\, 2\pi = 0,$$
$$\cos m \,.\, \alpha = \cos \,.\, n \,.\, 2\pi = 1;$$

e poichè

$$(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^m = \cos m\alpha + i \operatorname{sen} m\alpha$$

si deduce che $(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$ è radice di $z^m = 1$.

Ma $\cos\alpha = \frac{s}{q}$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{r}{q}$, per cui, se α è commensurabile con 2π, si dovrebbe avere

$$\left(\frac{s}{q} + i\frac{r}{q}\right)^m = 1$$

cioè

$$(s + ir)^m = q^m,$$

dove m è della forma

$$p_1^{l_1} \,.\, p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k} \,.\, 2^\mu.$$

Proviamo ora che quest'ultima eguaglianza non può essere in alcun caso soddisfatta.

Pongasi dapprima m dispari, cioè $\mu = 0$, $(m \geq 3)$. Sviluppando si ricava

$$s^m + \binom{m}{1} s^{m-1} \,.\, ir + \ldots + (ir)^m = q^m$$

ed eguagliando a zero la parte immaginaria

$$\binom{m}{1} s^{m-1} \cdot ir + \binom{m}{3} s^{m-3} (ir)^3 + \ldots + (ir)^m = 0.$$

e quindi

$$\binom{m}{1} \cdot s^{m-1} \equiv 0 \mod r^2.$$

Ma r è primo con s, e quindi r^2 dovrebbe dividere $\binom{m}{1}$, la qual cosa non può accadere poichè $\binom{m}{1} = m$ non contiene fattori quadratici.

Se m è pari ($m \geqq 4$), ed r dispari, ripetendo lo stesso ragionamento si arriva alla stessa conclusione.

Rimane ancora a considerarsi il caso di m ed r entrambi pari. Osservando che in questo caso s è dispari, dalla condizione

$$\binom{m}{1} s^{m-1}\, ir + \binom{m}{3} s^{m-3} (ir)^3 + \ldots + \binom{m}{m-1} s\, (ir)^{m-1} = 0.$$

si ricava che dovrebbe aversi

$$\binom{m}{m-1} r^{m-1} \equiv 0 \mod s^2;$$

e poichè $\binom{m}{m-1} = \binom{m}{1} = m$ non contiene fattori dispari alla 2ª potenza, come prima, resta provata l'impossibilità della predetta eguaglianza.

Si conclude quindi, da quanto precede che: " se le funzioni goniometriche d'un arco sono razionali, esso non può essere commensurabile con la circonferenza.

UMBERTO SCARPIS.

OSSERVAZIONI SULLA NOTA

del dott. LAZZARINI

SUI NUMERI PERFETTI E SUI NUMERI DI MERSENNE (*)

I.

Carissimo Lazzeri,

Ti prego di voler dar posto nel *Periodico* ad alcune osservazioni suggeritemi dalla lettura della nota: " Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne ", comparsa nell'ultimo fascicolo.

L'A., dopo aver dimostrato che *ogni numero perfetto, eguale al prodotto di potenze di due soli fattori primi, è pari*, e stabilita la nota formula *d'Euclide* che dà i numeri perfetti pari, enuncia nel n. 6 che: *Un numero eguale al prodotto di potenze di più di due fattori primi non può essere perfetto.*

(*) V. *Periodico di Matematica*, a. XVIII, fasc. IV, pag. 201-212.

Sulla dimostrazione che l'A. dà per questa ultima proposizione possono farsi varie obbiezioni.

Riassumo perciò brevemente quanto è contenuto nel n. 6. Vi si considera dapprima il caso di un numero eguale al prodotto di potenze di tre soli fattori primi a, b, c, e per provare che la condizione affinchè esso sia perfetto

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma} \qquad (1)$$

non può essere soddisfatta, si premette che ambo i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^{\alpha}b^{\beta}$, o ad un suo multiplo $\dot{\mathrm{M}}$. Quindi si dice che se α e β sono pari, il prodotto

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

è dispari: di più questo prodotto non è divisibile nè per a^{α}, nè per b^{β}, quindi sarebbe $\mathrm{M}=2a^{\alpha}b^{\beta}m^{\mu}n^{\nu}\ldots$, e perciò

$$c^{\gamma}=\frac{\dot{\mathrm{M}}}{2a^{\alpha}b^{\beta}}=m^{\mu}n^{\nu}\ldots,$$

il che è assurdo, essendo c primo. Dimostrazioni analoghe l'A. fa pel caso di α e β dispari, o di α pari e β dispari, e pel caso in cui il numero dato sia il prodotto di potenze di più di tre fattori primi.

Ora, il difetto di questa dimostrazione sta nell'affermare l'assurdità dell'eguaglianza

$$c^{\gamma}=m^{\mu}n^{\nu}\ldots,$$

che (finchè non si prova il contrario) può essere soddisfatta da $m=c$, $\mu=\gamma$, $n=\ldots=1$. L'A. cerca di escludere questo *caso* nella seconda nota del n. 6, ma le osservazioni ch'Egli fa per ciò non sono giuste.

Osservo intanto che il *caso* suddetto è l'unico che naturalmente si presenta. I numeri primi a, b, c essendo primi rispettivamente con

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1},\quad\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1},\quad\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1},$$

dall'eguaglianza (1), per noti teoremi d'aritmetica, si ricava:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=2b^{\beta'}c^{\gamma'}\ ;\ \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{\alpha'}c^{\gamma''}\ ;\ \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=a^{\alpha''}b^{\beta''},$$

dove il fattore 2 può, invece che nella prima eguaglianza, comparire in una qualunque delle altre due, e $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ son numeri interi (non escluso lo 0) tali che

$$\alpha'+\alpha''=\alpha;\ \beta'+\beta''=\beta;\ \gamma'+\gamma''=\gamma.$$

Quindi, supposto per es. $\gamma'\geqq\gamma''$, si ha

$$\mathrm{M}=2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma'}.$$

Nella prima nota che serve di preparazione alla seconda, l'A. cerca di dimostrare che il prodotto $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non è divisibile nè per a^{α}, nè per b^{β}. Se ciò accadesse, egli dice, si avrebbe $M = 2^{\delta} a^{\alpha} b^{\beta} \ldots$, e quindi

$$c^{\gamma} = \frac{2^{\delta} a^{\alpha} b^{\beta} \ldots}{2 \cdot a^{\alpha} b^{\beta}}$$

il che è assurdo. Ma anche qui, affinchè l'assurdità fosse provata, bisognerebbe escludere il solito *caso.*

Nella seconda nota l'A. cerca di provare che non può essere $M = 2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ (per quanto ho detto sopra bisognerebbe invece provare che non può essere $M = 2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$), e dice che questo *caso* resta immediatamente esaurito osservando che, poichè $2a^{\alpha}b^{\beta}$ e $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non hanno fattori primi comuni (e ciò, come ho detto, non è affatto dimostrato nella prima nota), sarebbe:

$$c^{\gamma} = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \tag{2}$$

quindi

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} = 1, \tag{3}$$

da cui $c = 1$, ovvero $c = 2$, $\gamma = 0$, contrariamente all'ipotesi. Io non comprendo in qual modo l'A. deduca dalle precedenti l'eguaglianza (3). Dalla (2) e dalla (1) mi pare si ricavi soltanto (nell'ipotesi che Egli fa):

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} = 2a^{\alpha}b^{\beta},$$

ma questa eguaglianza non si presenta assurda.

Credo che queste osservazioni siano sufficienti per infirmare la validità della dimostrazione contenuta nel n. 6, e che perciò non sia ancor lecito di affermare in modo assoluto che non esistono numeri perfetti dispari. (*) Il prof. *Lazzarini* non ha però nessuna ragione di dolersi di non essere riuscito, giacchè, a quanto pare, la risoluzione del problema di cui Egli si è occupato sfuggì a molti illustri matematici, tra i quali, oltre *Fermat, Eulero, Legendre,* vanno ricordati *Descartes, Frenicle, Sylvester* (v. per es. *Formulaire Mathématique,* a. 1902, pag. 144).

Saluti cordialissimi

aff.mo C. CIAMBERLINI.

II.

Il sig. Mario Lazzarini, nella nota " Sui numeri perfetti e sui numeri di Mersenne ", ha creduto di dimostrare che non esistono numeri perfetti dispari. Dopo i tentativi infruttuosi di Matematici illustri, avrei avuto piacere che la questione fosse dall'autore completamente risoluta, però sono dolente di constatare che alcune pecche di ragionamento fanno cadere del tutto la sua dimostrazione.

(*) In quasi tutte le proposizioni enunciate dall'A. alla fine del n. 6 e nei numeri successivi, dove si seguita a parlare di numeri perfetti, bisognerà dunque aggiungere l'ipotesi che i numeri di cui si tratta sono pari. Colgo poi l'occasione per far osservare che negli enunciati di alcune proposizioni mancano altre limitazioni. Per es. il teorema del n. 14 va enunciato così: *ogni numero perfetto pari, non eguale a 6, è congruo ad* 1 *rispetto al modulo* 3; nell'enunciato del teorema del n. 15 bisogna eccettuare il caso di $a = 2$; nel teorema del n. 2 sarebbe bene si dicesse *esplicitamente* che si tratta di numeri primi a e b *diseguali,* ecc.

Infatti, dopo aver dimostrato che non esistono numeri perfetti dispari costituiti da due fattori primi diseguali, egli tenta di dimostrare che non esistono numeri perfetti dispari con tre fattori primi, e così ragiona:

" Se $a^\alpha b^\beta c^\gamma$ è un numero perfetto dispari, dev'essere verificata l'eguaglianza

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma \tag{A}$$

" ed ambedue i membri di questa eguaglianza dovrebbero essere eguali al minimo " comune multiplo M di $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ e $2a^\alpha b^\beta$, o a un suo multiplo $\dot{\mathrm{M}}$, " e per conseguenza dovrebbe essere

$$\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=\frac{\dot{\mathrm{M}}}{\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}} \quad \text{e} \quad c^\gamma=\frac{\dot{\mathrm{M}}}{2a^\alpha b^\beta}. \tag{1}$$

" Se α e β sono ambedue pari,

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=a^\alpha+a^{\alpha-1}+\ldots+a+1, \quad \text{e} \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=b^\beta+b^{\beta-1}+\ldots+b-1$$

" sono ambedue dispari e quindi

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$$

" è dispari: *di più questo prodotto non è divisibile nè per* a^α *nè per* b^β, *quindi* " *il minimo comune multiplo sarà della forma*

$$2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots,$$

" *si dovrebbe allora avere*

$$c^\gamma=\frac{2a^\alpha b^\beta m^\mu n^\nu \ldots}{2a^\alpha b^\beta}=m^\eta n^\nu \ldots$$

" *il che, essendo per ipotesi,* C *primo, è assurdo* ".

L'introduzione dei numeri $m, n, \ldots$ come fattori del minimo comune multiplo è meramente capricciosa, perchè deve essere, come è facile dimostrare:

$$\mathrm{M}=2a^\alpha b^\beta c^\gamma.$$

Infatti a, poichè non può dividere $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}$, deve almeno dividere uno degli altri fattori del 1° membro della (A), e così ragionando per b e c si perviene alle eguaglianze

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}=b^{n_1}c^{p_1}, \quad \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{m_1}c^{p_2}, \quad \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}=2a^{m_2}b^{n_2},$$

dove

$$m_1+m_2=\alpha, \quad n_1+n_2=\beta, \quad p_1+p_2=\gamma.$$

Ne segue

$$\frac{a^{\alpha+1}-2}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}=a^{m_1}b^{m}c^{\gamma},$$

e però

$$M = 2a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma},$$

e non ha più luogo l'assurdo cui ha creduto di pervenire l'Autore. Ma egli chiosa che non può aversi $M = 2a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ " dal momento *che* $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ *e* $2a^{\alpha}b^{\beta}$, *non hanno fattori primi comuni* „.

Ora in base a qual fatto l'Autore perviene a questa conclusione? Se, come lascia intravedere, in base al fatto che $\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}$ non è divisibile per $a^{\alpha}b^{\beta}$, (ciò che ha voluto dimostrare in nota col solito procedimento erroneo) è visibile chiaramente l'equivoco in cui è caduto.

E poichè l'Autore asserisce, non so poi con qual fondamento, che dal caso di 3 fattori primi si può passare facilmente al caso generale di un numero qualunque di fattori primi, debbo concludere che la dimostrazione cade senza alcuna speranza.

Io devo aggiungere che non è questo il primo caso di insuccesso in una questione così difficile.

Il Carvallo annunciò all'Accademia di Parigi (" Comptes Rendus „, LXXXI, pag. 73-75) di aver dimostrato l'inesistenza di numeri perfetti dispari, e pubblicò la sua dimostrazione in un opuscolo intitolato *Théorie de nombres parfaits* (Barcelone, A. Piagen), ma la sua dimostrazione non è esente da errori.

I numeri perfetti hanno già una letteratura; io rimando i lettori a quella che dà il Brocard nell'" Intermédiaire des Mathématiciens, t. II, 1895, pag. 52-54, limitandomi qui a riportare i risultati principali, ottenuti finora rigorosamente sui numeri perfetti dispari, lieto di far cosa grata ai lettori del Periodico.

Un numero perfetto dispari, se esiste, deve essere della forma

$$M^{2}(4q+1)^{4k+1}$$

essendo $4q+1$ *un numero primo che non divide* M. Ne segue che: *Non esistono numeri perfetti della forma* $4n+3$.

Questo teorema, dovuto ad *Eulero*, è stato poi ritrovato da *Stern* (" Mathesis „, t. VI, pag. 248-250), da *Sylvester* e da altri.

Il Sylvester nei " Comptes Rendus „ de l'A. d. S. de Paris, t. CVI, pag. 403-405, perviene ai seguenti risultati interessanti.

Non esistono numeri perfetti dispari contenenti 2, 3, 4 fattori primi diseguali.

Non esistono numeri perfetti dispari divisibili per $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Non esistono numeri perfetti dispari, primi con 3, aventi meno di 9 fattori primi diseguali.

Egli annuncia anche l'inesistenza di numeri perfetti dispari con 5 fattori primi diversi.

Il Catalan poi (" Mathesis „ VIII, 1888, p. 112-3), fa osservare come si possa semplificare, il procedimento di Sylvester, e perviene anche al seguente curioso risultato.

Se un numero N è perfetto e dispari, esso è almeno composto di 26 fattori primi, diseguali, e quindi è almeno di 45 cifre.

Ritornando ora alla nota del sig. Lazzarini, devo rilevare ancora un errore in cui egli è caduto nella ricerca della condizione necessaria e sufficiente perchè il numero 2^p-1 sia primo. L'Autore ammette implicitamente che sussista l'inversa del teorema di Fermat, almeno pei numeri della forma da lui considerata. Ora non ci son dati per asserir questo, e però non può stabilirsi quel teorema, cui crede arrivare l'Autore. Può dirsi soltanto questo:

Se il numero

$$2^p-1$$

divide il numero

$$3^{2^{p-1}-1}+1,$$

senza che divida i numeri della forma

$$3^\delta+1,$$

essendo δ *un divisore qualunque di* $2^{p-1}-1$, *il numero* 2^p-1 *è primo, e* 3 *una sua radice primitiva.*

Questo teorema deducesi immediatamente da un teorema notevole, segnalato da E. Lucas al congresso di Le Havre, nel 1876. L'Autore l'applicò per dimostrare che il numero $2^{31}-1$ è primo.

Anche il teorema empirico, che il Lazzarini cita in nota, è stato in parte enunciato già dal Catalan (v. Laisant, " Recueil de Problèmes de Mathématique ", p. 196, nota 2).

Ma l'Autore non s'illuda nella verità di questo teorema. Si sa ormai qual fede meritano i teoremi dedotti da semplice induzione; dice il Lucas (" Théorie des Nombres ", p. 423): *Il ne faut pas toujours se hâter de conclure par induction dans l'étude des propriétés des nombres.*

Michele Cipolla.

PICCOLE NOTE

Osservazione sulla potenza di un polinomio. — È noto che lo sviluppo della potenza m^a del polinomio $a_1+a_2+\ldots+a_n$, si ottiene eseguendo la moltiplicazione di m polinomi eguali ad $a_1+a_2+\ldots+a_n$, mediante la successiva applicazione della legge distributiva. Si può osservare che tale sviluppo, prima della riduzione dei termini simili, si ottiene anche formando le disposizioni con ripetizione di n elementi della classe m^a, purchè si considerino tali aggruppamenti come termini di una somma e gli elementi che entrano nei medesimi come fattori: per tal modo il numero dei termini dello sviluppo è n^m ed uno qualunque di essi avrà la forma $a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2}\, a_n^{\alpha_n}$, con $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m$. Questo termine sarà ripetuto $\dfrac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}$ volte. Quindi, dopo la riduzione dei termini simili, si ottiene la nota formula

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^m=\Sigma\,\frac{m!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_n!}\,a_1^{\alpha_1}\,a_2^{\alpha_2}\ldots a_n^{\alpha_n},$$

dove la somma si estende a tutte le soluzioni intere, positive o nulle, dell'equazione $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=m$, ed il numero dei suoi termini è eguale al numero delle combinazioni con ripetizione di n elementi della classe m^a cioè

$$\frac{n\,(n+1)\ldots(n+m-1)}{1\,.\,2\ldots m}.$$

Neppi Modona.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 619, 628, 630, 631, 632 E 633

619. *Il luogo dei punti d'incontro di due parabole che, essendo tangenti ad una retta fissa ed avendo un fuoco comune in un punto dato, hanno inoltre costante l'angolo dei loro assi, si compone di due circoli.* E. N. BARISIEN.

Risoluzione del dott. Niccolai.

Essendo P il punto simmetrico di F rapporto alla data tangente t, per P passano le direttrici di tutte le parabole in quistione. Se M è un punto del luogo, le due parabole passanti per questo punto si determinano descrivendo il circolo di centro M e di raggio MF, e conducendo per P le tangenti a questo circolo; queste due tangenti (direttrici delle due parabole) dovranno formare fra loro un angolo uguale al dato oppure supplementare. Detto 2φ questo angolo riferendosi ad un sistema di assi ortogonali coll'origine in F, essendo $x=\frac{a}{2}$ l'equazione della t, l'equazione del luogo richiesto è:

$$x^2+y^2+a\,(2x-a)\tang^2\varphi=0.$$

Il luogo richiesto è dunque il circolo di raggio $\frac{a\tan\varphi}{\cos\varphi}$, il cui centro ha per coordinate $-a\tan^2\varphi, 0$.

628. *Trovare l'inviluppo delle rette che tagliano due circoli dati secondo corde eguali.* E. N. BARISIEN.

Risoluzione del prof. Castellano.

L'inviluppo cercato è una parabola che ha per fuoco il punto medio della retta dei centri, e per podaria focale l'asse radicale dei due circoli.

DIMOSTRAZIONE. — La retta mobile a incontri in una delle sue posizioni i circoli di centri O, O' nei punti A, B, A', B', (in questo ordine) ed incontri il loro asse radicale r in M. Siano C, C' i punti medi di AB, A'B' e sia F il punto medio di OO'. Dall'ipotesi: AB = A'B', si deduce che M è punto medio comune ai segmenti AB', BA', CC', e che la MF, mediana nel trapezio birettangolo OCC'O', è normale ad a. Ne consegue che la retta a, normale nei punti di una retta fissa r alle rette che proiettano questi punti da un punto fisso F, inviluppa una parabola di fuoco F e di podaria focale r.

Se i due circoli sono l'uno interno all'altro (non eccentrici) la parabola esiste ancora ma le corde uguali determinate dalle tangenti alla parabola colla circonferenza sono immaginarie.

Se i circoli sono uguali, le rette a sono tutte parallele alla centrale OO'.

Risoluzioni del prof. Retali.

1. *Risoluzione geometrica.* — Se i cerchi sono eguali lo inviluppo si spezza evidentemente in due fasci di raggi uno dei quali ha per centro il punto all'infinito della retta dei centri e l'altro il punto equidistante dai centri. Supponiamo dunque che i raggi dei due cerchi sieno disuguali: per ognuno dei centri di similitudine passano due soli raggi dell'inviluppo, dunque questo è di seconda classe; la retta all'infinito stacca dai due cerchi corde eguali, dunque lo inviluppo cercato è la parabola che tocca le 4 tangenti comuni e l'asse radicale dei due cerchi dati. Questa parabola ha per fuoco il punto equidistante dai centri.

2. *Risoluzione analitica.* — Siano r, r' i raggi, C, C' i centri dei due cerchi, poniamo $\overline{CC'} = 2a$, e assumiamo per assi coordinati la retta dei centri e l'asse di $\overline{CC'}$. Se la retta $ux + vx + 1 = 0$ stacca nei due cerchi corde eguali, le sue distanze d, d' da C, C' verificano la relazione

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2 = \frac{(ua+1)^2}{u^2+v^2} - \frac{(ua-1)^2}{u^2+v^2},$$

e l'equazione tangenziale dell'inviluppo =

$$(r^2 - r'^2)(u^2 + v^2) = 4au,$$

che rappresenta una parabola di parametro $\frac{r^2 - r'^2}{a}$ col fuoco nell'origine.

Altra risoluzione analitica del maggiore D'Emilio.

630. *Se una conica* $C^{(2)}$ *tocca una quartica* $C^{(4)}$ *nei punti* A, A' *e la seca nei* punti B, B', C, C', *esiste un'altra conica che è tangente alla* $C^{(4)}$ *nei punti d'incontro colla retta* AA' *e che passa per i punti d'incontro di essa colle rette* BB', CC'.

631. *Se una conica* $C^{(2)}$ *tocca una quartica* $C^{(4)}$ *in quattro punti, le tangenti a* $C^{(4)}$ *nei punti di contatto incontrano di nuovo la curva stessa in 8 punti di una conica.*

632. *Se* r, r' *sono due tangenti di flesso di una quartica* $C^{(4)}$ *nei punti* A, A' *e incontrano la curva ancora in* B, B' *esiste una conica che ha con la* $C^{(4)}$ *due contatti di second'ordine nei punti ove essa è tagliata dalla* AA' *e passa per i punti d'incontro di* $C^{(4)}$ *con la* BB'.

LAZZERI.

Risoluzione del prof. Retali e del maggiore D'Emilio.

È noto che se delle n^2 intersezioni di due curve d'ordine n, $np - \frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ giacciono in una curva d'ordine $p < n$, questa ne contiene altre $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ e le rimanenti $n(n-p)$ sono in una curva d'ordine $n-p$. (V. p. es. CREMONA, *Curve piane*, § 43). Per $n = 4$ e $p = 2$ si ha che: se 8 delle 16 intersezioni di due quartiche $C^{(4)}$, $\Gamma^{(4)}$ giacciono in una conica $C^{(2)}$, le rimanenti 8 sono in un'altra conica. Ciò posto:

a) Se prendiamo per $\Gamma^{(4)}$ la quartica formata dalle quattro tangenti a $C^{(2)}$ nei suoi punti di contatto con $C^{(4)}$ abbiamo il teorema enunciato nel quistione 631.

b) Se per $\Gamma^{(4)}$ prendiamo la quartica che si spezza nella retta |AA'| contata due volte e nelle rette |BB'|, |CC'|, si ha il teorema della questione 630.

c) Se prendiamo per conica $C^{(2)}$ quella formata dalle rette r, r' e per $\Gamma^{(4)}$ la quartica che si spezza nella retta |AA'| contata tre volte e nella retta |BB'| abbiamo il teorema della quistione 632.

633. *Dimostrare che gli archi di circolo massimo condotti da un punto* P *di una sfera ad un circolo minore della sfera stessa soddisfano alle relazioni*

$$\frac{\cos\frac{PM}{2}\cos\frac{PM_1}{2}}{\cos\frac{MM_1}{2}} = \text{costante},$$

$$\frac{\operatorname{sen} PM \operatorname{sen} PM_1}{\cos^2\frac{MM_1}{2}} = \text{costante};$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano.

P.

Risoluzione del prof. Padoa.

1. Indicando con 2α e 2β gli archi PM e PM_1, le espressioni

$$\frac{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{e} \quad \frac{\text{sen}2\alpha \,.\, \text{sen}2\beta}{\cos^2(\alpha+\beta)},$$

cioè

$$\frac{1}{1-\text{tg}\alpha \,.\, \text{tg}\beta} \quad \text{e} \quad \frac{4\text{tg}\alpha \,.\, \text{tg}\beta)^2}{(1-\text{tg}\alpha \,.\, \text{tg}\beta)^2}$$

sono costanti, perchè $\text{tg}\alpha \,.\, \text{tg}\beta$ è costante (*).

Sapendo che

$$\text{tg}\alpha \,.\, \text{tg}\beta = \frac{OP \mp OR}{OP \pm OR}$$

(dove O è il centro della sfera, R è l'intersezione della retta OP col piano della circonferenza minore e dove si devon considerare i segni superiori ed inferiori secondochè R è interno od esterno al segmento OP) (**) risulta che i valori delle espressioni considerate sono

$$\frac{OR \pm OP}{2OR} \quad \text{e} \quad \frac{OP^2 - OR^2}{OR^2}.$$

2. In planimetria: sia R un punto interno ad una circonferenza c di centro C e raggio a; con raggio dato r $(r > a)$ e centro variabile O si segni una circonferenza γ che tagli la c in due punti M ed M_1, la cui congiungente passi per R (poichè in tal caso $OM^2 - CM^2 = OR^2 - CR^2$, posto $m = CR$, risulta che il luogo di O è la circonferenza di centro R e raggio (sempre reale) $\sqrt{r^2 - a^2 + m^2}$): allora, indicando con P l'intersezione del prolungamento di OR con γ, gli archi PM e PM_1 di γ hanno le proprietà enunciate.

Invero: se H è il punto medio di MM_1, poichè per ipotesi $OM > CM$, è pure $OH > CH$; si può dunque far ruotare la γ intorno ad MM_1 in modo che O venga a trovarsi su una delle semirette perpendicolari in C al piano dato; la posizione O' assunta da O è costante qualunque sia γ, perchè $O'C^2 = O'M^2 - CM^2 = r^2 - a^2$; anche la posizione P' assunta da P è costante qualunque sia γ, perchè P' sta sulla semiretta fissa O'R a distanza data r da O'; sicchè, nella sfera di centro O' e raggio r, P' è un punto dato della sup., c è una circonferenza minore data e γ è una circonferenza massima arbitraria passante per P'; quindi, ecc.

Una dimostrazione diretta della prima parte e indipendente anche questa dalla Trig. sfer. *fu mandata dal sig.* A. Gandini, *studente del R. I. T. di Como ed una dal magg.* d'Emilio.

Osservazione I. — La formola, sulla quale è basata la precedente dimostrazione della prima parte,

$$\tan\frac{PM}{2} \quad \tan\frac{PM_1}{2} = \text{costante} \qquad (1)$$

si può dimostrare molto semplicemente, ricorrendo alla considerazione di due triangoli sferici rettangoli. (***)

Osservazione II. — Indicando con r la misura del raggio sferico del circolo minore e con d la distanza sferica fra il centro del circolo stesso e il punto P, e applicando alle due formole proposte il procedimento che serve per ricavare dalle

(*) *Periodico di Matematica*, anno XVIII, fasc. III, pag. 191.
(**) *Loc. cit.*
(***) V. Baltzer, *Trigonometria*, 16.

formole di *Trig. sferica* le corrispondenti formole di *Trig. piana* (facendo cioè tendere il raggio della sfera all'infinito e tenendo d ed r costanti), si ha

$$\overline{PM}^2 + \overline{PM_1}^2 - \overline{MM_1}^2 = +2(d^2 - r^2),$$
$$\overline{PM} \times \overline{PM_1} = \pm (d^2 - r^2),$$

delle quali la prima non è che un corollario della seconda e questa (che è anche la corrispondente della (1)) non è che l'espressione di un noto teorema di *Geom. Elem.*

QUISTIONI PROPOSTE

634. Pel punto comune a due rette le quali s'incontrano fuori del foglio su cui si disegna, condurre la parallela ad una retta data.

LORIA.

635. Il luogo geometrico dei punti d'incontro delle coppie di trasversali di un triangolo isoscele, che partendo dagli estremi della base, staccano due segmenti eguali, l'uno a partire dalla base, l'altro a partire dal vertice, è il sistema di una ellisse ed una iperbole; calcolarne gli assi e dire in qual caso l'ellisse si riduce a cerchio e l'iperbole diventa equilatera.

GALLUCCI.

636. L'inviluppo dei cerchi descritti sulle corde di una conica $C^{(2)}$ che passano (prolungate, se il punto è esterno) per uno stesso punto P come diametri, è una quartica bicircolare se $C^{(2)}$ ha centro; è una cubica circolare se $C^{(2)}$ è parabola. Se P è sopra $C^{(2)}$ lo inviluppo è razionale (teorema noto). Se $C^{(2)}$ è cerchio, l'inviluppo è in generale un ovale di Cartesio. Esaminare i casi particolari nei quali O è all'infinito oppure è P centro di $C^{(2)}$.

F. RETALI.

637. Da un punto qualunque M di un circolo minore di una sfera si conduce l'arco di circolo massimo MP perpendicolare a un diametro sferico qualunque AB di quel circolo: dimostrare che si ha

$$\tan^2 \frac{PM}{2} = \tan \frac{AP}{2} \tan \frac{PB}{2}, \qquad \text{(I)}$$

$$\tan \frac{AM}{2} \tan AM = \tan \frac{AB}{2} \tan AP; \qquad \text{(II)}$$

e trovare le relazioni corrispondenti nel piano.

G. PESCI.

BIBLIOGRAFIA

G. Peano. — *Aritmetica generale ed Algebra elementare.* Torino, G. B. Paravia ed.; pagg. VIII-144 in 8°, coi tipi della Riv. di Mat. (L. 2,40).

Non è senza compiacenza e conforto di noi tutti, insegnanti e studiosi, il vedere alcuni fra i più segnalati cultori delle discipline matematiche volgere in prò della scuola media i tesori della propria dottrina ed esperienza, procacciando e studiando con somma cura ed industria ogni mezzo, che sembri atto a semplificar la materia e perfezionar la struttura ed i metodi dell'insegnamento elementare in armonia coi progressi del pensiero scientifico. Semplificare e chiarire al possibile tutti i concetti matematici, spogliandoli d'ogni superfluo; organizzare i principî della scienza; colmar lacune di metodo e sanar magagne deduttive inveterate nelle scuole e nei libri; educare negli studiosi l'abito di bene argomentare, promovendo l'uso sistematico di una scrittura ideografica regolata da norme precise e invariabili: questo è, si può dire, lo scopo a cui mira quasi tutta l'opera scientifica di Giuseppe Peano.

Il libro di cui parliamo è un saggio eloquente e una sanzione autorevole dei non lievi nè scarsi risultati acquisiti alla scienza nel dominio della Logica, Aritmetica ed Algebra elementare mercè la pasigrafia logico-matematica, che il chiarissimo prof. di Torino va patrocinando da varî anni nella sua Rivista di Matematica e nel Formulaire de Mathematique. Esso ha intenti apertamente didattici: la Logica deduttiva, l'Aritmetica generale e l'Algebra elementare vi son fuse in un sol corpo di scienzà, mirabilmente organizzato nei rispetti deduttivi, e da potersi con sicurezza additare agli insegnanti ed ai giovani come modello di edifizio speculativo.

Il maggior contrassegno di originalità vuol essere al certo l'uso costante dell'algoritmo logico-matematico invece del discorso ordinario. Non c'è troppo da illudersi sull'accoglienza, che una riforma di questo genere è per trovare in buona parte del pubblico: chè son troppo noti i motivi, tutti umanissimi e spiegabilissimi, i quali hanno fatto in ogni tempo e faranno sempre ostacolo a certe novità, che toccano la più gelosa delle nostre proprietà intellettuali. Ma nondimeno è lecito sperare che la bontà del presente trattato vincerà molte ritrosie, spegnerà molti pregiudizi, e farà nascere in qualche volenteroso docente il proposito di sperimentarlo per sè e per la Scuola. “A chi impara per la prima volta l'Aritmetica (così „ l'A. in prefazione) la via che qui si segue è senza dubbio vantaggiosa. Una cin- „ quantina di simboli, aventi significato chiaro e preciso, sostituisce alcune migliaia „ di parole, che si presentano, definite o no, nei trattati precedenti la scrittura „ ideografica. Coloro che hanno studiato per altra via l'Aritmetica e l'Algebra do- „ vranno fare uno sforzo per imparare il nuovo metodo, e per vedere che i nuovi „ aggruppamenti d'idee sono più semplici di quelli, a cui sono da tempo abituati: „ ma, se saranno capaci di questa fatica, ne verranno poi compensati dalla bellezza „ dei risultati, ch'essi soli saranno in grado d'apprezzare „.

Non dirò che sia questa un'opera da porre alle mani dei giovanetti, così come sta, senza un commento adeguato (a motivo di certa durezza nascente più che altro dalla straordinaria condensazione del testo, che per sè solo non occupa forse cento pagine in tutto): nè senza una guida intelligente ed esperta, che ne appiani le difficoltà, facendone emergere i pregi. Ma ciò non dovrebb'essere grave difetto in libri scolastici; almeno finchè il Libro e la Scuola non saranno precisamente la stessa cosa. Anche Euclide, anche Dante, vogliono essere esposti e dichiarati con diligenza; nè le soddisfazioni del vero e del bello ci sono concesse gratis; chè anzi, a voler che dian frutto di vital nutrimento allo spirito, è piuttosto necessario che siano il premio di qualche fatica proporzionata a quelle. Del resto l'A. ha provveduto alle maggiori difficoltà nascenti dall'uso della scrittura ideografica riproducendo nel comune linguaggio a piè d'ogni pagina, di pari passo con l'esposizione simbolica, una gran parte delle proposizioni del testo, e spesso anche illustrandole con opportune ed utili chiose.

La materia è distribuita in quaranta paragrafi, ciascuno intitolato ad uno o più segni speciali (ma raramente a più d'uno) scelti a rappresentare le idee, che s'introducon man mano; in maniera che ciascun § contempli tutte le proposizioni dove comparisce quel segno con alcuni dei precedenti; il che porge anche un comodo mezzo per trovare nel testo una proposizione, che sia già stata sommariamente analizzata.

Spettano alla Logica i §§ 1-5 *(eguaglianza, classe, pertinenza, coppia, negazione)*; come pure i §§ 9-11, 17, 30 e parte dei §§ 12, 14, 24 *(disgiunzione, affermazione di esistenza, classi unitarie, classi parziali, numerosità* d'una classe, *operazioni* o *trasformazioni)*. I §§ 6-8 e 12 trattano dei *numeri* (interi, contati a partir dallo *zero*) e delle operazioni di *somma, moltiplicazione, elevazione a potenza* eseguite su quelli o sopra classi loro. Il § 13 contempla i *numeri naturali* (contati dall'*unità*), le relazioni di *maggiore* e *minore*, i *multipli* d'un numero, e parecchie proprietà numeriche, specialmente in ordine a diseguaglianze. I §§ 15 e 16 versano intorno le operazioni di *sottrazione* e *divisione* fra numeri interi. I §§ 18 e 19 intorno ai concetti di *massimo* e *minimo* d'una classe di numeri. I §§ 20 e 21 sul *quoziente* e *resto* d'una coppia di numeri e sulla pratica della divisione. I §§ 22 e 23 sulle *cifre dei vari ordini* e sull'*ordine* d'un numero. Vengono poscia i *numeri relativi* (interi positivi, negativi o nulli), la nozione di *valore assoluto* o *modulo*, le somme e i prodotti di più numeri relativi (§ 24); e le potenze di numeri relativi, con una ricca collezione di identità numeriche (§ 25). Le *frazioni* o *numeri razionali* sono introdotte al § 26, come *operazioni* composte di moltiplicare e dividere successivamente per due numeri naturali (a somiglianza dei numeri *positivi* e dei *negativi*, definiti come operazioni dell'aggiungere o togliere un numero; cioè come numeri addittivi o sottrattivi; coppie, ciascuna costituita in un numero, preso insieme con uno dei segni + o —); e si studian quivi le somme, i prodotti, le differenze, i quozienti, le potenze intere positive e negative di razionali, le relazioni di maggiore e minore fra questi, ecc. Il § 27 contiene le proprietà del simbolo E di Legendre e delle *frazioni decimali*. Il § 28 è sui *razionali relativi* ed abbraccia la risoluzione dell'*equazione di primo grado* e del sistema di *due* equazioni lineari. Il § 29 considera le *frazioni proprie*. Nel § 31 si introducono i *limiti superiore* e *inferiore* di una classe di razionali; la *quantità* o *numero reale positivo* (limite superiore d'una classe non illusoria di numeri razionali, che escluda qualche razionale maggiore di tutti i numeri della classe); l'*infinito* (limite superiore della classe dei razionali); la somma, il prodotto, la differenza e il quoziente di due quantità; la potenza d'una quantità, l'esponente essendo un numero, un numero razionale, una quantità. In questo § è il calcolo delle potenze e dei radicali, e la dimostrazione di moltissime diseguaglianze interessanti e poco note. Seguono i *numeri reali relativi* e le operazioni sopra di essi (§ 32), con la risoluzione delle *equazioni di secondo e terzo grado*, e di certe coppie di equazioni, una delle quali di grado superiore al primo; e diverse proposizioni circa i valori approssimati delle radici. Viene dipoi un'appendice sul *calcolo per approssimazione* (argomento che l'A. predilige) degna di esser segnalata all'attenzione degli studiosi e dei pratici per novità e semplicità di regole. Il § 33 volge intorno ai *logaritmi* ed al calcolo per logaritmi. Il § 34 tratta delle *successioni numeriche* e delle loro somme; con molte proposizioni intorno alle *progressioni*, alle somme di *potenze simili* dei numeri naturali, alle *medie* aritmetiche, alla *divisibilità* dei numeri, alle *frazioni decimali periodiche* ecc. I §§ 35 e 36 contemplano i *prodotti di* m *fattori ordinati* e i *fattoriali*. Il § 37 è sui *multipli* e sui *divisori comuni* a più numeri naturali, e sui *numeri primi fra loro*. I §§ 38 e 39 sui *numeri primi* assolutamente. Termina il libro col § 40 sui *numeri concreti* o *grandezze*, dove, accanto ai principî fondamentali sulle grandezze in generale, trovan posto le più importanti nozioni circa le classi di grandezze a cui guardan per solito l'Aritmetica e l'Algebra nelle loro applicazioni, non escluse le grandezze meccaniche e fisiche

Nuovo e singolar pregio dell'opera le abbondanti notizie storiche circa le più ragguardevoli proposizioni; notizie qui riprodotte dal Formulario di Matematica, e vagliate alla stregua di una critica dotta e rigorosa.

A pagg. VI e VII sono enumerate e distinte le varie parti del testo, onde risulta il programma ufficiale del Ginnasio superiore e del Liceo (a. 1902).

Per il bene dell'insegnamento e della cultura è da augurare che questo libro, così diverso dagli altri nella forma ed anche un po' nella sostanza, trovi presso gli insegnanti e gli studiosi italiani un'accoglienza degna del lungo studio e grande amore, che l'hanno generato e partorito.

M. Pieri.

A. Righi e B. Dessau. — *La telegrafia senza fili*. Bologna, Zanichelli, 1903.

L'argomento è di pura fisica sperimentale; ma se riflettiamo che molti dei problemi complessi sollevati dall'applicazione delle ondulazioni elettriche alla telegrafia senza fili non sono stati ancora studiati matematicamente, non sarà trovato fuor di luogo l'accenno in questo giornale di un libro, che pone il lettore, anche profano, in grado d'impadronirsi delle cognizioni e dei metodi sperimentali che vi si riferiscono.

In modo elementare, ma geniale, l'illustre Righi riassume nella prima parte i fatti fondamentali dell'elettricità illustrando le varie ipotesi da quella di Maxwell all'altra recentissima, sugli elettroni, che la completa.

Un materiale ricchissimo di ricerche e di esperienze è riassunto nella seconda parte, dove in maniera semplice e piana lo stesso Righi espone quanto è necessario conoscere sulle oscillazioni e sulle onde elettriche. Sono enumerati i varii indicatori delle onde elettromagnetiche, ciascuno dei quali potrebbe servire nella segnalazione a distanza, mentre i radio-conduttori o *coherers* sono studiati in modo esauriente, anche in riguardo alle varie teorie proposte, in uno speciale capitolo. Tanto nella prima che nella seconda parte, sono preziosi gli accenni a ricerche originali dell'Autore intorno ai varii fenomeni studiati; mentre la seconda parte potrebbe servire, allo studioso che non fosse a giorno del soggetto, quale ottima introduzione all'altro libro del prof. Righi, l'*Ottica delle oscillazioni elettriche*, dove l'illustre Autore ha riassunto i suoi numerosi ed importanti lavori, ed ha trattato analiticamente varii casi interessanti.

Al dott. Dessau è dovuta la terza parte sulla telegrafia elettrica senza fili; vi si fa rapidamente la storia di tutti i metodi escogitati per servirsi della conducibilità della terra o dell'acqua nel trasmettere un segnale da una stazione ad un'altra mediante correnti continue od alternate; i sistemi fondati sulla induzione, e che sono ancora utilizzati fra due stazioni poste sul canale di Bristol, e quello degli apparecchi sintonici del Lodge.

La telegrafia colle onde elettriche mandò i primi vagiti con Lodge e con Muyrhead; ma soltanto nell'audace iniziativa di Marconi ebbe uno sviluppo rapido, e, per ciò che riguarda la distanza superata, completo. È debito di pura giustizia ricordare che, nell'inizio delle prime esperienze, furono l'oscillatore del Righi, il coherer del Calzecchi, l'antenna del Popoff per la registrazione delle scariche temporalesche, il martellino del medesimo per decoerizzare il *coherer*, che servirono come materiali primi all'edificio del Marconi. Il quale modificò senza tregua i suoi apparecchi, fino a raggiungere gli ultimi noti trionfi, riassunti in un'appendice al volume, con una grandiosa installazione di cui, ci permettiamo di notare passando, sarebbe pur desiderabile una interpretazione scientifica.

Tutti i tentativi fatti, le diverse soluzioni del problema studiato dai numerosi inventori, i servizi già resi vengono imparzialmente registrati in questa dotta monografia che, con acume critico, pone in evidenza i pregi e i difetti di ciascun sistema. E sulle difficoltà che rimangono da vincere, sulle probabilità di una vittoria finale, sugl'inconvenienti che *sembrano* invincibili del sistema, il giudizio è ponderato. Dopo che il Flammarion, in un suo libro recente, enumerò e dileggiò gli scienziati, è ormai di buona maniera, deridere gli studiosi e i giudizi loro. Sarebbe invece più utile meditarli perchè disinteressati, e pensare che in essi è sempre sottinteso un valore di relatività.

Il volume si chiude con due interessanti capitoli del prof. Righi sulla telegrafia coi raggi ultravioletti, e sulle trasmissioni telefoniche mediante la luce, che ci espongono quanto di più recente è stato fatto in questo curioso campo d'investigazione.

Noi raccomandiamo il volume ad ogni persona colta che vuol vivere della vita del suo tempo (tanto più che del libro se ne annunzia, fatto straordinario in Italia, una prossima ristampa) e ad ogni studioso che desiderasse tentare la sempre utile applicazione della matematica ai fenomeni studiati fin d'ora soltanto dal punto di vista pratico.

R. Pitoni.

CORRISPONDENZA

Carissimo Professore,

Il prof. Gambioli nella sua Memoria sull'ultimo teorema di Fermat lancia un dubbio, d'altra parte condiviso da Legendre, come lo stesso prof. Gambioli nota, cioè che *forse i matematici non hanno fin qui battuto buona strada* ecc. Forse un giorno, e speriamo non molto lontano, al prof. Gambioli si darà ragione. Intanto una domanda a' lettori del " Periodico ": Si è tentata mai qualche via geometrica per la dimostrazione del celebre teorema? Per es., stabilendo delle condizioni, che non sarebbero poi estremamente restrittive, per x, y, z, in modo che sussista la doppia disegnaglianza

$$x + y > z > x - y,$$

non si potrebbe studiare l'equazione

$$x^m + y^m = z^m \tag{1}$$

in numeri interi o fratti mediante la possibilità o meno della costruzione di un triangolo le misure dei cui lati soddisfacessero la (1)?

A questo proposito avrei qualche comunicazione da fare, ma desidero sentire il parere dei lettori del " Periodico " che si degneranno di prendere in considerazione queste poche parole. . . . .

Candido.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 21 marzo 1903.

NOTE GEOMETRICHE

sopra alcune proprietà dell'iperbole equilatera

Nel fascicolo di decembre 1902 dell'*Intermédiaire des Mathématiciens*, il sig. Comandante Ripert, propone sotto il numero 2479 [L¹ 11 c] una interessante quistione, relativa a una proprietà dell'iperbole equilatera. Le note seguenti dànno una dimostrazione geometrica della quistione proposta e di alcune proprietà che ne derivano.

1. Se PA, Pα; PB, Pβ; PC, Pγ sono tre coppie di raggi omologhi d'un fascio di rette in involuzione, A, B, C essendo i vertici di un triangolo qualunque, α, β, γ i punti d'intersezione dei raggi Pα, Pβ, Pγ, rispettivamente coi lati BC, CA, AB del triangolo, e P un punto qualunque del piano del triangolo, si sa (Chasles, Cremona) che i punti α, β, γ sono in linea retta.

In certi casi particolari questa retta gode di curiose proprietà. Supponiamo, per es. una involuzione circolare, cioè sia

$$\widehat{AP\alpha} = \widehat{BP\beta} = \widehat{CP\gamma} = 90^{\circ}.$$

Si avrà il teorema seguente:

Teorema. — *Le perpendicolari* Pα, Pβ, Pγ, *condotte in un punto* P *qualunque del piano d'un triangolo* ABC *alle tre rette che congiungono questo punto ai vertici del triangolo, incontrano i lati opposti* BC, CA, AB *rispettivamente in tre punti* α, β, γ *in linea retta.*

Questa proposizione è ben nota. Nella sua *Géométrie superieure* (2me edit. pag. 418) Chasles la dimostra applicando il metodo di trasformazione per polari reciproche alla proprietà che hanno le tre altezze di un triangolo d'incontrarsi in uno stesso punto. È anche facile dare di questo teorema una dimostrazione basata sulla proprietà dell'esagono di Pascal e che darà dei nuovi punti della retta $\alpha\beta\gamma$.

Consideriamo una conica Σ circoscritta al quadrilatero ABCP. Le rette Pα, Pβ, Pγ incontrano Σ rispettivamente nei punti A', B', C'. Si sa (Chasles, *Géom. Sup.* p. 413) che, se per un punto P d'una conica si conducano coppie di rette formanti una involuzione, le corde che i loro angoli intercettano nella curva, passano per uno stesso punto F.

Nel caso di una involuzione circolare, le corde AA', BB', CC' s'intersecano in un punto, detto *punto di Frégier*, corrispondente a P, e appartenente alla normale in questo punto alla conica.

Nell'esagono inscritto PA'ACBB' si ha la retta di Pascal

$(PA', BC) \equiv \alpha, \qquad (AA', BB') \equiv F, \qquad (AC, PB') \equiv \beta.$

Nell'esagono inscritto PC'CBAA' si ha la retta di Pascal

$(PC', BA) \equiv \gamma, \qquad (CC', AA') \equiv F, \qquad (BC, PA') \equiv \alpha,$

e per conseguenza, si ha il seguente

TEOREMA. — *La retta* $\alpha\beta\gamma$ *contiene il punto di Frégier del punto* P *della conica* Σ *circoscritta al quadrilatero* ABCP.

Facendo variare la conica Σ, varia anche la normale in P, dunque il punto F si sposta sulla $\alpha\beta\gamma$; si ha così il seguente curioso corollario:

COROLLARIO 1°. — *In ogni fascio di coniche, il luogo geometrico dei punti di Frégier relativi ad uno dei centri del fascio è una retta.*

È noto che ogni punto d'una circonferenza ha per punto di Frégier il centro della circonferenza: dunque,

COROLLARIO 2°. — *Se il quadrilatero* ABCP *è inscritto in una circonferenza, la retta* $\alpha\beta\gamma$ *passa per il centro di essa.*

Consideriamo ora un quadrilatero ABCP inscritto in una iperbole equilatera. Le corde AA', BB', CC' si tagliano nel punto di Frégier F di P. Ma fra le coppie di raggi omologhi ortogonali della involuzione circolare formata dalle coppie PA, PA'; PB, PB'; ecc., ne esiste una le di cui rette PS e PS' sono rispettivamente parallele agli assintoti dell'iperbole. La corda SS' è dunque la retta all'infinito del piano, e siccome essa contiene anche il punto F, ne segue che tutte le rette AA' BB' CC' sono in questa conica parallele alla normale nel punto P. Si può dunque enunciare la seguente proprietà:

COROLLARIO 3°. — *Siano* A, B, C, P *quattro punti di una iperbole equilatera* Σ. *Le perpendicolari condotte da* P *alle corde* PA, PB, PC *incontrano rispettivamente* BC, CA, AB *in tre punti* α, β, γ *in linea retta* Δ. *Questa retta è parallela alla normale in* P *alla conica* Σ.

Quest'ultimo corollario permette di costruire semplicemente la tangente in un punto P di una iperbole equilatera determinata da 4 punti A, B, C, P. Si detemina la retta Δ. La perpendicolare condotta da P a Δ è la tangente cercata.

Per alcuni sviluppi delle materie svolte in questa prima parte si vedano le mie "Note geometriche" nel *Progreso Mátematico*, 1900, pag. 313.

2. Si sa che un'iperbole equilatera, circoscritta ad un triangolo, passa pure per il suo ortocentro. Siano dunque A, B, C, D, M cinque punti qualunque di un'iperbole equilatera. Conduciamo da M la perpendicolare alla corda DA, e sia A' il suo secondo punto d'incontro colla curva. Per il teorema citato, A' sarà l'ortocentro del triangolo MAD, e per conseguenza AA' sarà perpendicolare ad MD. Parimenti se B', C' sono i secondi punti d'incontro colla curva, delle perpendicolari condotte da M rispettivamente a DB e DC, le rette BB' e CC' sono altresì perpendicolari a MD. Si ha dunque il seguente

TEOREMA. — *Se* A, B, C, D, M *sono 5 punti di una iperbole equilatera, e* A′, B′, C′ *i secondi punti d'incontro di essa colle perpendicolari condotte da* M *alle corde* DA, DB, DC, *le tre rette* AA′, BB′, CC′ *sono parallele fra loro e perpendicolari a* DM.

Siccome le corde AA′ BB′ CC′ sono parallele, segue, da un noto teorema della teoria delle coniche, che il fascio, le di cui coppie di rette omologhe sono MA e MA′, MB e MB′, MC e MC′ è involutorio, solo nel caso di una iperbole equilatera, come dimostra per altra via il sig. prof. C. Servais nel N°. di novembre 1902, pag. 250 di " Mathesis ". Sarebbe pure facile dimostrare il teorema reciproco, cioè: *Essendo* A, B, C, D, M *cinque punti di una conica, se* AA′, BB′, CC′ *sono perpendicolari a* DM, *la conica è un'iperbole equilatera.*

Se, come nella prima parte, rappresentiamo con α, β, γ i punti d'incontro di MA′, MB′, MC′ coi lati BC, CA, AB del triangolo ABC rispettivamente, risulta dalla involuzione dimostrata che $\alpha\beta\gamma$ è una retta, il che constateremo anche in un altro modo.

Le lettere essendo le stesse che nei teoremi precedenti, consideriamo l'esagono ACBB′MA′ inscritto in una conica Σ; si avrà la retta di Pascal

$$(MB', AC) \equiv \beta, \qquad (MA', BC) \equiv \alpha, \qquad (AA', BB') \equiv x.$$

La retta $\alpha\beta$, passa dunque pel punto x, intersezione di AA′, BB′.

Nell'esagono inscritto ABCC′MA′ si ha la retta di Pascal

$$(MC', AB) \equiv \gamma, \qquad (MA', BC) \equiv \alpha, \qquad (CC', AA') \equiv y.$$

La retta $\alpha\gamma$, passa dunque pel punto y, intersezione di AA′, CC′.

Nel caso particolare dell'iperbole equilatera i punti x, y si confondono all'infinito di AA′, le due rette $\alpha\beta$ e $\alpha\gamma$ sono dunque parallele ad AA′; dunque anch'esse coincidono e si ottiene così il bel teorema proposto sotto il N°. 2479 dal sig. Comandante Ripert nell'*Intermédiaire des Mathématiciens* del dicembre 1902.

TEOREMA. — *Se da un punto* M *d'una iperbole equilatera* (ABCD), *si conducono delle perpendicolari alle rette* DA, DB, DC, *esse incontrano le rette* BC, CA, AB *in punti situati sopra una retta* Δ *perpendicolare a* DM.

Le perpendicolari, condotte da M *a* DA, DB, DC, *incontrano l'iperbole in punti* A′, B′, C′ *tali che le rette* AA′, BB′, CC′ *sono parallele a* Δ.

Come fa osservare il sig. Ripert, questo teorema è, sotto certi aspetti, per l'iperbole equilatera ciò che è per il circolo il teorema di Simson.

COROLLARIO 1°. — *Se da* M *si conducono le perpendicolari alle corde* DA, DB, DC *si ottiene una retta* Δ.

Se da D *si conducono le perpendicolari alle corde* MA, MB, MC *si ottiene una retta* Δ'; *le rette* Δ *e* Δ' *sono parallele e perpendicolari a* MD.

COROLLARIO 2°. — *Se* M *si avvicina indefinitamente a* D *si ritrova l'ultimo teorema della* 1ª *parte.*

Corollario 3°. — *Siano* P *un punto qualunque del piano di un triangolo* ABC *ed* H *l'ortocentro di questo. Le perpendicolari condotte da* H *alle rette* PA, PB, PC *incontrano i lati* BC, CA, AB *del triangolo in tre punti di una linea retta perpendicolare a* PH.

Si potrebbero fare numerose applicazioni del teorema fondamentale alla geometria del triangolo. Sono pure facili a dimostrarsi le proposizioni reciproche di quelle sopra dimostrate.

A. Droz-Farny.

UN TEOREMA SULLE FUNZIONI RAZIONALI.

1. Sia:

$$f(x_1\, x_2 \ldots x_n) = \Sigma a_{q_1\, q_2 \ldots q_n}\, x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$$

una funzione razionale intera a coefficienti razionali *interi* delle n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$; a ciascun sistema di valori razionali interi delle variabili corrisponde allora un valore razionale *intero* della funzione. Inversamente, se una funzione *razionale* di n variabili $x_1 x_2 \ldots x_n$ assume un valore razionale intero per *ogni* sistema di valori razionali interi di esse variabili, si può affermare che essa è razionale intera a coefficienti interi in queste variabili? È subito visto che no. Infatti, già per le funzioni di una sola variabile, il coefficiente binomiale:

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}$$

pur avendo coefficienti razionali, ma non interi, assume un valore razionale intero per qualsiasi valore intero della variabile indipendente. È allora naturale proporsi il problema di determinare la forma più generale di una tale funzione *razionale*.

2. Chiameremo brevemente F una tale funzione. Dimostriamo innanzi tutto che:

a) *I coefficienti della* F *devono esser numeri razionali.*

Consideriamo dapprima il caso che la F sia funzione di una sola variabile x; e, suppostala ridotta alla sua più semplice espressione, sia m il grado del suo numeratore, n quello del suo denominatore; per una nota formula d'interpolazione di Cauchy-Iacobi (*) potremo esprimere la funzione stessa *in modo razionale* per gli $m+n+1$ valori che essa assume per $m+n+1$ valori della variabile indipendente; prendendo allora per gli $m+n+1$ valori della variabile $m+n+1$ valori intieri, e ricordando che i corrispondenti valori della funzione sono anche essi numeri interi *(basterebbe che fossero razionali soltanto)* ne segue immediatamente che i coefficienti della F, debbono in questo caso esser numeri razionali. (**)

(*) Cfr. Netto, *Vorlesungen über Algebra.* Bd I, S. 43; ed anche: Capelli e Garbieri, *Corso di Analisi Algebrica-Teorie introduttorie*, pag. 473. Padova, 1886.

(**) Si osservi, per esser del tutto rigorosi che. *ammessa l'esistenza della funzione* F (ridotta già alla più semplice espressione) e trattandosi solo di veder la natura dei suoi coefficienti, *non* può aversi per la formula di Chauchy-Iacobi quel caso di eccezione, che fu rilevato dal Kronecker; del resto, si vedrebbe facilmente che anche in questo caso valgono ancora immutate le considerazioni superiori (cfr. Netto, *Algebra* I, p. 47 e anche: Netto, *Zur Cauchy'-schen Interpolationsaufgabe* (Math. Annalen. Bd 42-S. 453; Capelli e Garbieri, l. c. pag. 471-472).

Dimostrato così il teorema per le funzioni di una sola variabile, si estende subito, per induzione, alle funzioni di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$. Ordiniamo infatti il numeratore e il denominatore di essa funzione rispetto ad una di esse variabili, la x_i, ed *assegniamo alle altre $n-1$ valori razionali interi, affatto arbitrarî* (che non annullino identicamente il denominatore). La funzione data si riduce allora ad una funzione della sola x_i, che ha ancora la proprietà di prender valori interi per i valori interi della x_i; i suoi coefficienti sono dunque, per quello che si è dimostrato, numeri razionali. I coefficienti della x_i sono quindi tali funzioni delle altre $n-1$ variabili, che per *ogni* sistema di valori interi di queste variabili (che non soddisfino ad una certa equazione assumono valori *razionali*; ma questo basta per concludere, per la nostra ipotesi, che i loro coefficienti devono esser numeri razionali. Tali sono adunque anche quelli della F.

3. È facile ora dimostrare che:

b) *La nostra funzione* F *deve esser razionale* **intera** *nelle variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$.

Sia infatti, se è possibile, la F razionale fratta e poniamo:

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \frac{\varphi(x_1 x_2 \dots x_n)}{\psi(x_1 x_2 \dots x_n)}, \tag{1}$$

essendo φ e ψ due polinomi, a coefficienti intieri, delle $x_1 x_2 \dots x_n$ privi di fattori comuni. Indichiamo con l_i, m_i ($i = 1, 2 \dots n$) il grado dei polinomi φ e ψ nella variabile x_i; *deve essere* $l_i \geq m_i$ ($i = 1, 2 \dots n$).

Ordiniamo infatti il numeratore φ e il denominatore ψ per le potenze discendenti della x_i; avremo:

$$\begin{cases} \varphi = a_0 x_i^{l_i} + a_1 x_i^{l_i - 1} + \dots + a_{l_i - 1} x_i + a_{l_i} \\ \psi = b_0 x_i^{m_i} + b_1 x_i^{m_i - 1} + \dots + b_{m_i - 1} x_i + b_{m_i}; \end{cases} \tag{2}$$

essendo le $a_0 \dots a_{l_i}$, $b_0 \dots b_{m_i}$, funzioni razionali intere a coefficienti interi nelle altre variabili. Assegniamo ora alle $x_1 \dots x_{i-1}$, $x_{i+1} \dots x_n$ valori interi arbitrarî colla sola condizione che non annullino b_0, nè *tutte* le $a_0, a_1 \dots a_{l_i}$, il che evidentemente è sempre possibile; facciamo poi tendere x_i all'infinito per valori interi. Ove fosse $l_i < m_i$, da un certo momento in poi la $F = \frac{\varphi}{\psi}$, pur rimanendo sempre diversa da zero, finirebbe per diventare e restare, in valore assoluto, piccola a piacere e quindi anche minore di uno, il che contraddice all'ipotesi che assuma valori interi per tutti i valori intieri delle $x_1 x_2 \dots x_n$. È adunque veramente $l_i \geq m_i$.

Sia ora una determinata $m_i > 0$; e colle notazioni precedenti poniamo:

$$F_1(x_1 x_2 \dots x_n) = b_0 F - a_0 x_i^{l_i - m_i} = \frac{b_0 \varphi - a_0 x_i^{l_i - m_i} \psi}{\psi} = \frac{\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n)}{\psi(x_1 \dots x_n)}, \tag{3}$$

dove dunque abbiam posto:

$$\varphi_1(x_1 x_2 \dots x_n) = b_0 \varphi(x_1 x_2 \dots x_n) - a_0 x_i^{l_i - m_i} \psi(x_1 x_2 \dots x_n). \tag{4}$$

I due polinomi φ_1 e ψ possono aver fattori comuni, cioè la F_1 può non avere la più semplice espressione; ma notiamo subito, *un fattore comune ai due polinomi* φ_1 e ψ *non può contenere la* x_i; un tal fattore è infatti comune anche ai polinomi ψ e $b_0 \varphi = \varphi_1 + a_0 x_i^{l_i - m_i} \psi$; e quindi, poichè φ e ψ sono primi tra loro, deve dividere b_0, donde, poichè b_0 non contiene la x_i, segue la nostra asserzione. Dividiamo allora φ_1 e ψ per il loro massimo comun divisore e poniamo:

$$F_1 = \frac{\varphi'_1(x_1 x_2 \dots x_n)}{\psi'(x_1 x_2 \dots x_n)};$$

saranno ora φ'_1 e ψ' due funzioni prime tra loro; inoltre, per ciò che precede, il polinomio ψ' ha *ancora nella* x_i *il grado* m_i, il polinomio φ'_1 invece, a causa delle (2) e (4), ha nella x_i *un grado* l'_i *minore od uguale ad* $l_i - 1$.

Dalla (3) è chiaro che la F_1 è una funzione razionale delle $x_1, x_2, \ldots x_n$ colle stesse proprietà della F; se per essa è $l'_i \geq m_i$, si può su essa ripetere il medesimo ragionamento, e così via. Dopo k volte (con $k \leq l_i - m_i + 1$) arriveremo allora ad una funzione razionale F_k, ancora dotata della solita proprietà, nella quale il numeratore avrebbe nella variabile x_i un grado *minore* che non il denominatore; ma questo è assurdo, per quel che abbiamo già detto. È adunque per *qualunque* valore di i da 1 ad n, $m_i = 0$, e quindi $\psi =$ costante, il che dimostra il teorema enunciato.

4. Poichè la F è razionale intera, a coefficienti razionali, nelle $x_1 x_2 \ldots x_n$, dettone m il grado, potremo porre identicamente:

$$F(x_1 x_2 \ldots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{x_1}{q_1}\binom{x_2}{q_2}\cdots\binom{x_n}{q_n} \qquad (q_1 + q_2 + \ldots + q_n \leq m) \tag{5}$$

dove le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ sono numeri razionali,

$$\binom{x_i}{q_i} = \frac{x_i(x_i - 1)\ldots(x_i - q_i + 1)}{1, 2 \ldots q_i},$$

e la somma è estesa a *tutti* i sistemi di valori interi, positivi o nulli, delle $q_1 \ldots q_n$ la cui somma non supera m.

c) I coefficienti $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ *devono esser numeri razionali interi*

Sia infatti $r_1, r_2 \ldots r_n$ un determinato sistema di numeri interi, positivi o nulli, per i quali si abbia:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_n \leq m; \tag{6}$$

la (5) dà allora:

$$F(r_1 r_2 \ldots r_n) = A_{r_1 r_2 \ldots r_n} + \Sigma' A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{r_1}{q_1}\binom{r_2}{q_2}\cdots\binom{r_n}{q_n}, \tag{7}$$

dove l'indice apposto al simbolo sommatorio sta ad indicare che nella somma va omesso il termine corrispondente al sistema (6) di valori delle $q_1, q_2, \ldots q_n$, che abbiamo già posto in evidenza. Si ricordi ora che se $q_i > r_i$, è identicamente $\binom{r_i}{q_i} = 0$; la (7) si riduce perciò alla forma più semplice:

$$F(r_1 r_2 \ldots r_n) = A_{r_1 r_2 \ldots r_n} + \overline{\Sigma} A_{q_1 q_2 \ldots q_n} \binom{r_1}{q_1}\binom{r_2}{q_2}\cdots\binom{r_n}{q_n}, \tag{8}$$

essendo ora la somma Σ estesa a quei sistemi di valori interi $q_1 q_2 \ldots q_n$, che soddisfano alle condizioni

$$q_i \leq r_i, \qquad \Sigma q_i < \Sigma r_i, \ (i = 1, 2 \ldots n). \tag{9}$$

Ora dunque siasi già verificato, che *tutte* le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$, per cui valgono le (9) sono numeri razionali interi, tale è anche, per la (8), e perchè $F(r_1 r_2 \ldots r_n)$ è per ipotesi un numero intero, la $A_{r_1 r_2 \ldots r_n}$. Ma per $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$, si ha;

$$F(0, 0 \ldots 0) = A_{00 \ldots 0},$$

e quindi $A_{00 \ldots 0}$ è certamente un numero intero: lo sono anche dunque *tutte* le $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ della formula (5).

5. Possiamo quindi enunciare il teorema:

Se una funzione razionale in n *variabili* $x_1 x_2 \dots x_n$ *prende valori razionali interi per tutti i possibili sistemi di valori interi delle variabili, essa ha necessariamente la forma*

$$F(x_1 x_2 \dots x_n) = \Sigma A_{q_1 q_2 \dots q_n} \binom{x_1}{q_1} \binom{x_2}{q_2} \dots \binom{x_n}{q_n} \tag{10}$$

dove $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$ *sono numeri razionali interi e:*

$$\binom{x_i}{q_i} = \frac{x_i(x_i-1)\dots(x_i-q_i+1)}{1,2\dots q_i}.$$

Inversamente è chiaro che, qualunque siano gli interi $A_{q_1 q_2 \dots q_n}$, la F ha la proprietà in discorso. (*)

6. Alcune osservazioni sul risultato che precede.

a) Abbiamo supposto che la F assuma valori razionali interi per *tutti* i sistemi di valori interi delle variabili; ma bastava supporre che ciò accadesse per *tutti* i sistemi di valori interi delle variabili, *maggiori in valore assoluto di un certo numero*. In questo caso infatti, come facilmente si vede, la F assume valori razionali interi, per *tutti* i possibili sistemi di valori delle variabili indipendenti. (**)

b) Alla stessa formula (10) saremmo pervenuti, quando si fosse ammesso che la F fosse, non razionale ma solo *algebrica* nelle $x_1 x_2 \dots x_n$. L'Hilbert ha infatti dimostrato che una funzione algebrica di n variabili $x_1 x_2 \dots x_n$, che assume valori razionali per *tutti* i possibili valori razionali delle variabili, compresi in un determinato campo, è necessariamente razionale in queste variabili. (***) Ma una tale conclusione vale ancora, come subito si riconosce, quando si ammetta soltanto che una tale funzione y debba assumere valori razionali *per tutti i possibili valori interi delle variabili* $x_1, x_2, \dots x_n$ (maggiori, se si vuole, in valore assoluto di un numero fisso C). Non è forse inutile darne qui la dimostrazione, tanto più che il teorema ora ricordato di Hilbert è semplicemente enunciato in fine della memoria citata.

Sia dunque:

$$g(x_1 x_2 \dots x_n y) = g_0 y^k + g_1 y^{k-1} + \dots + g_{k-1} y + g_k = 0 \quad (g_i = g_i'(x_1 x_2 \dots x)) \tag{11}$$

l'equazione, irriducibile nel campo assoluto di razionalità, che definisce la y come funzione algebrica delle $x_1, x_2, \dots x_n$. È allora possibile, per il teorema fondamentale di Hilbert sulla irriducibilità delle funzioni intere, (****) ed in infiniti modi, assegnare alle $x_1 x_2 \dots x_n$ dei valori interi $r_1 r_2 \dots r_n$ (maggiori di C in valore assoluto) tali che la $g(r_1 r_2 \dots r_n y)$ sia ancora irriducibile in y ed *abbia ancora il grado k*; basta infatti prender questi valori $r_1 r_2 \dots r_n$ in guisa che, oltre la (20), anche la

$$y^k g\left(x_1 x_2 \dots x_n \frac{1}{y}\right) = g_k y^k + \dots + g_0$$

si cambi in una funzione irriducibile in y. (*****) Si osservi ora che, per l'ipotesi fatta, l'equazione irriducibile in y:

$$g(r_1 r_2 \dots r_n y) = 0$$

(*) Cfr. Hilbert, *Ueber die Theorie der Algebraischen Formen.* (Math. Annalen Bd 36-S 512).

(**) Cfr. Hilbert, l. c. S 511.

(***) Cfr. Hilbert, *Ueber die Irreducibilität ganzer rationaler Functionen* (Journal von Crelle Bd 110-S 129).

(****) Cfr. Hilbert, l. c. S 192.

(*****) Cfr. Hilbert, l. c. S 117.

deve avere una radice razionale (nel nostro caso intera); essa è dunque *lineare in* y, cioè $h=1$; y è quindi una funzione razionale delle $x_1, x_2, \ldots x_n$.

c) Dalla formula (10) segue anche una curiosa proprietà *aritmetica* della funzione F. Se $q_1, q_2, \ldots q_n$ sono numeri interi, positivi o nulli, la cui somma *non* superi m, il quoziente:

$$\frac{m!}{q_1!\, q_2! \ldots q_n!}$$

è notoriamente un numero intero. Ne segue evidentemente:

Se m *è il grado della funzione* F, *il prodotto* m! F *è una funzione razionale intera a coefficienti interi delle variabili* $x_1\, x_2 \ldots x_n$.

d) Le conclusioni che precedono valgono ancora evidentemente, oltrechè nel campo assoluto di razionalità, in qualsiasi corpo algebrico che *non* contenga *numeri interi inferiori in modulo a qualsiasi quantità assegnabile*, in particolare dunque in qualunque corpo quadratico immaginario. (*) In questo caso i coefficienti $A_{q_1 q_2 \ldots q_n}$ della (10) sono numeri interi (algebrici), affatto arbitrarî, del corpo assegnato.

7. È interessante ancora l'osservazione seguente:

Supponiamo che la funzione razionale $F(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ debba assumere valori interi per *tutti i valori* delle $x_1\, x_2 \ldots x_n$ che appartengono a delle progressioni *geometriche* (non più aritmetiche) che potremo sempre scrivere sotto la forma:

$$x_i = q_i^{a_i} \quad (i = 1, 2 \ldots n) \tag{12}$$

dove q_i è un numero intero, *maggiore di uno* in valore assoluto ed a_i varia (per valori interi) da un certo valore $k_i > 0$ all'infinito *positivo*.

È subito visto che valgono ancora per F i teoremi *a) b)* dei n. 2 e 3; poniamo inoltre, indicando con x una variabile arbitraria, ρ un intiero positivo;

$$\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix} = \frac{(x-1)(x-q)\ldots(x-q^{\rho-1})}{q^{\frac{\rho(\rho-1)}{2}}(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\rho)}; \tag{13}$$

si ha allora identicamente:

$$\begin{bmatrix} q^s, q \\ \rho \end{bmatrix} = 0, \quad \text{per } 0 \leq s < \rho;$$

$$\begin{bmatrix} q^\rho, q \\ q \end{bmatrix} = (-1)^\rho;$$

$$\begin{bmatrix} q^{k+\rho}, q \\ \rho \end{bmatrix} = (-1)^\rho \frac{(1-q^{k+1})(1-q^{k+2})\ldots(1-q^{k+\rho})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^\rho)};$$
$$k > 0$$

ne segue, per una nota osservazione di Gauss, (**) che quando in $\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix}$ si ponga per x una potenza di q con esponente intero positivo, $\begin{bmatrix} x, q \\ \rho \end{bmatrix}$ diventa una funzione razionale *intera* di q a coefficienti interi.

(*) Cf. ad es: DIRICHLET, *Zahlentheorie* IV• Auflage. Suppl. XI.

(**) GAUSS, *Summatio quarundam serierum singularium.* (Werke, Bd II, S. 16, 17.)

Scriviamo allora la funzione F sotto la forma:

$$F_{(x_1 x_2 \ldots x_n)} = \sum_{(\varrho_1+\varrho_2+\ldots+\varrho_n \leq m)} A_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n} \begin{bmatrix} x_1 q_1 \\ \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 q_2 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} x_n q_n \\ \rho_n \end{bmatrix};$$

lo stesso procedimento, tenuto al n.° 4, dimostra *che le* $A_{\varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_n}$ *sono numeri interi*, che possono evidentemente prendersi affatto arbitrariamente.

ONORATO NICCOLETTI.

SULL'ESTRAZIONE ABBREVIATA
DELLA RADICE QUADRATA INTERA DAI NUMERI INTERI

Nella presente Nota dimostro con la sola considerazione di numeri commensurabili un teorema noto ed utile in pratica sull'estrazione abbreviata della radice quadrata intera dai numeri interi, (*) del quale si conoscono parecchie dimostrazioni contenenti però anche la considerazione di numeri incommensurabili, e porgo inoltre alcuni esempi di applicazione dello stesso teorema.

TEOREMA. — *Se la radice quadrata intera di un numero* a *intero ha* $2n+1$ *cifre almeno, e se s'indica con* c *il numero rappresentato dalle cifre di essa, escluse le* n *prime a destra* (**), *ed inoltre con* q *il quoziente e con* r *il resto della divisione* $\frac{a - c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n}$, *cioè se si pone:*

$$\frac{a - c^2 . 10^{2n}}{2c . 10^n} = q + \frac{r}{2c . 10^n}, \tag{1}$$

si ha $\sqrt{a} = c . 10^n + q$ *esattamente, od a meno di una unità per difetto, ovvero a meno di una unità per eccesso, secondo che riesce* $r = q^2$, *od* $r > q^2$, *ovvero* $r < q^2$.

DIMOSTRAZIONE. — Se s'indica con x il numero rappresentato dalle n prime cifre a destra della radice quadrata intera del numero intero considerato a, sarà $\sqrt{a} = c . 10^n + x$ esattamente, quando a sarà un quadrato perfetto, ed invece $\sqrt{a} = c . 10^n + x$ a meno di una unità per difetto, allorchè a non sarà un quadrato perfetto, e converrà nella dimostrazione considerare separatamente tali due casi.

CASO 1°. — Poichè si ha per ipotesi:

$$\sqrt{a} = c . 10^n + x \text{ esattamente}, \tag{2}$$

(*) In questa Nota si chiama brevemente *radice quadrata intera di un numero intero* la sua radice quadrata, quando esso è un quadrato perfetto, ed invece la sua radice quadrata a meno di una unità per difetto, quando esso non è un quadrato perfetto.

(**) Conviene osservare che il numero c è necessariamente uguale alla radice quadrata intera del numero intero che si ottiene da quello considerato a, sopprimendovi le $2n$ prime cifre a destra.

si verifica manifestamente l'eguaglianza $a = (c \,.\, 10^n + x)^2$, cioè, sciogliendo la parentesi, quest'altra:

$$a = c^2 \,.\, 10^{2n} + 2c \,.\, 10^n \,.\, x + x^2,$$

da cui facilmente si trae:

$$\frac{a - c^2 \,.\, 10^{2n}}{2c \,.\, 10^n} = x + \frac{x^2}{2c \,.\, 10^n}. \tag{3}$$

Ora, poichè per ipotesi x è un numero intero avente n cifre al più, ed invece c è un numero intero avente $n+1$ cifre almeno, si verificano necessariamente le due relazioni:

$$x < 10^n \quad , \quad c \geqq 10^n,$$

dalle quali, innalzando al quadrato i due membri della 1ª e moltiplicando per $2 \,.\, 10^n$ il primo membro della 2ª ed invece per 10^n il secondo membro della medesima, si ottengono le due seguenti:

$$x^2 < 10^{2n} \quad , \quad 2c \,.\, 10^n > 10^{2n}. \tag{4}$$

Dividendo quindi membro a membro la 1ª di queste due ultime relazioni per la 2ª delle medesime, si ha l'altra:

$$\frac{x^2}{2c \,.\, 10^n} < 1, \tag{5}$$

in virtù della quale l'eguaglianza (3) mostra chiaramente che il quoziente q della divisione $\dfrac{a - c^2 \,.\, 10^{2n}}{2c \,.\, 10^n}$ è uguale ad x, ed il resto r di essa è uguale ad x^2 e perciò eguale anche a q^2; e sostituendo quindi q ad x nella relazione (2), risulta $\sqrt{a} = c \,.\, 10^n + q$ esattamente.

Caso 2°. — Poichè si ha per ipotesi:

$$\sqrt{a} = c \,.\, 10^n + x \text{ a meno di 1 per difetto,} \tag{6}$$

e perciò anche:

$$\sqrt{a} = c \,.\, 10^n + (x+1) \text{ a meno di 1 per eccesso,} \tag{7}$$

si verifica necessariamente la relazione:

$$(c \,.\, 10^n + x)^2 < a < [c \,.\, 10^n + (x+1)]^2,$$

in virtù della quale il numero intero a riuscendo compreso fra i due numeri interi $(c \,.\, 10^n + x)^2$ e $[c \,.\, 10^n + (x+1)]^2$ dev'essere almeno eguale al minore di questi aumentato di 1 unità ed al più eguale al maggiore dei medesimi diminuito di 1 unità, cioè si debbono verificare le due relazioni:

$$a \geqq (c \,.\, 10^n + x)^2 + 1 \quad , \quad a \leqq [c \,.\, 10^n + (x+1)]^2 - 1,$$

ossia, eseguendo i quadrati indicati, le due seguenti:

$$\left.\begin{array}{l} a \geqq c^2 \,.\, 10^{2n} + 2c \,.\, 10^n \,.\, x + x^2 + 1 \\ a \leqq c^2 \,.\, 10^{2n} + 2c \,.\, 10^n \,.\, (x+1) + (x+1)^2 - 1 \end{array}\right\},$$

dalle quali si deducono poi facilmente le due altre:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{a-c^2 \cdot 10^{2n}}{2c \cdot 10^n} \overline{\geq} x + \dfrac{x^2+1}{2c \cdot 10^n} \\ \dfrac{a-c^2 \cdot 10^{2n}}{2c \cdot 10^n} \leq (x+1) + \dfrac{(x+1)^2-1}{2c \cdot 10^n} \end{array}\right\} . \tag{8}$$

Ora, poichè, avendo l'intero x per ipotesi n cifre al più, necessariamente è $x \leq 10^n - 1$ e perciò anche $x+1 \leq 10^n$ e quindi pure, innalzando al quadrato ambidue i membri di quest'ultima relazione:

$$(x+1)^2 \leq 10^{2n}, \tag{9}$$

cioè, sciogliendo la parentesi:

$$x^2 + 2x + 1 \leq 10^{2n},$$

risulta manifestamente:

$$x^2 + 1 < 10^{2n}, \tag{10}$$

e dividendo quindi membro a membro quest'ultima disuguaglianza per la 2ª delle due disuguaglianze (4), si ha l'altra:

$$\frac{x^2+1}{2c \cdot 10^n} < 1, \tag{11}$$

in virtù della quale la 1ª delle due relazioni (8) mostra che il quoziente q della divisione $\dfrac{a-c^2 \cdot 10^{2n}}{2c \cdot 10^n}$ è almeno eguale ad x.

D'altra parte, poichè dalla relazione (9) si deduce manifestamente:

$$(x+1)^2 - 1 < 10^{2n}, \tag{12}$$

dividendo poi membro a membro quest'ultima disuguaglianza per la 2ª delle due disuguaglianze (4), risulta la seguente:

$$\frac{(x+1)^2-1}{2c \cdot 10^n} < 1, \tag{13}$$

in virtù della quale la 2ª delle due relazioni (8) mostra che il quoziente q anzidetto è al più uguale ad $x+1$.

Infine conviene osservare che, quando è $q = x$, sostituendo q ad x nella relazione (6) e nella 1ª delle due relazioni (8), si ottengono immediatamente le due altre:

$$\sqrt{a} = c \cdot 10^n + q, \text{ a meno di 1 per difetto,}$$

$$\frac{a-c^2 \cdot 10^{2n}}{2c \cdot 10^n} \overline{\geq} q + \frac{q^2+1}{2c \cdot 10^n},$$

confrontando la 2ª delle quali con l'eguaglianza (1), si ottiene subito:

$$q + \frac{r}{2c \cdot 10^n} \overline{\geq} q + \frac{q^2+1}{2c \cdot 10^n},$$

da cui si deduce tosto $r \overline{\geq} q^2 + 1$ e perciò anche $r > q^2$.

Invece quando è $q=x+1$, sostituendo q ad $x+1$ nella relazione (7) e nella 2ª delle due relazioni (8), si hanno immediatamente le due seguenti:

$$\sqrt{a}=c\,.\,10^n+q, \text{ a meno di 1 per eccesso,}$$

$$\frac{a-c^2\,.\,10^{2n}}{2c\,.\,10^n}\leqq q+\frac{q^2-1}{2c\,.\,10^n},$$

confrontando la 2ª delle quali ancora con l'eguaglianza (1), si ottiene subito:

$$q+\frac{r}{2c\,.\,10^n}\leqq q+\frac{q^2-1}{2c\,.\,10^n},$$

da cui si deduce tosto $r\leqq q^2-1$ e quindi anche $r<q^2$.

Osservazione 1ª. — Il teorema testè dimostrato si verifica pure quando la radice quadrata intera del numero intero a considerato ha solamente $2n$ cifre, ma però la prima di esse a sinistra non è minore di 5, cioè quando, distinguendo le cifre del numero a in gruppi di due cifre ciascuno incominciando da destra, il numero rappresentato dall'ultimo gruppo non è minore di 25.

Infatti allora il numero intero indicato con c nel teorema avendo n cifre solamente, ma essendo però la sua prima cifra a sinistra non minore di 5, riesce manifestamente $c \overline{\gtrless} 5\,.\,10^{n-1}$, e moltiplicando poi ambidue i membri di quest' ultima relazione per $2\,.\,10^n$, si ottiene l'altra $2c\,.\,10^n \overline{\gtrless} 10^{2n}$, per la quale dividendo quindi membro a membro la 1ª delle due diseguaglianze (4), la (10) e la (12), risultano ancora le tre suddette (5), (11) e (13) che hanno già servito per mettere in evidenza la verità del teorema suddetto.

Osservazione 2ª. — È assai facile comprendere che, quando già si sia trovato il numero c estraendo con il metodo ordinario la radice quadrata intera dal numero intero che si ottiene da quello considerato a, sopprimendovi le $2n$ prime cifre a destra, se si abbasseranno a destra del resto ottenuto in tale estrazione di radice le n prime a sinistra delle $2n$ cifre anzidette, e se poi si dividerà il numero così risultante per il doppio della stessa radice trovata c, si otterrà un quoziente uguale a quello q considerato nel suddetto teorema, e se quindi si abbasseranno a destra del resto di tale divisione tutte le n rimanenti delle $2n$ suddette cifre, si otterrà un numero eguale al resto r pure considerato nello stesso teorema.

Osservazione 3ª. — Per abbreviare l'estrazione della radice quadrata intera da un numero intero dato, approfittando del teorema dianzi dimostrato e delle due osservazioni 1ª e 2ª relative al medesimo, conviene procedere nel seguente modo.

Nel caso che la prima cifra a sinistra di tale radice sia minore di 5, si trovano primieramente col metodo ordinario tante cifre a sinistra dell'anzidetta radice che il numero di esse superi il numero delle rimanenti di 2 od 1 unità, secondo che il numero totale delle cifre della stessa radice è pari od impari; ed invece nel caso che la prima cifra suddetta non sia minore di 5, si trovano primieramente con il metodo ordinario tante cifre a sinistra di tale radice che il numero di esse sia eguale al numero delle rimanenti, oppure lo superi di 1 unità, secondo che il numero totale delle cifre della medesima radice è pari oppure impari: poi in qualunque caso con il metodo indicato nell'osservazione 2ª si trovano il quoziente q ed il resto r della divisione considerata nel teorema suddetto, ed infine si aggiunge tale quoziente q al numero rappresentato dalle cifre della radice richiesta già trovate col metodo ordinario, seguite però da tanti zeri quante sono le cifre rimanenti della medesima. La somma così ottenuta sarà eguale alla radice quadrata del numero intero dato, esattamente, od a meno di una unità per difetto, oppure a meno di una unità per eccesso, secondo che il suddetto resto r riuscirà eguale, o superiore, oppure inferiore al quadrato del quoziente q suddetto, e nell'ultimo di questi tre casi poi si otterrà la radice quadrata del numero dato, a meno di 1 unità per difetto, sottraendo 1 unità dall'anzidetta somma.

Esempio 1°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 15246816484 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 1 e quindi minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 6 e quindi pari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 4 prime a sinistra delle 6 anzidette cifre, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{15246816484}$

1·5 2·4 6·8 1	1234			$1234 \times 2 = 2468$
5·2	22	243	2464	
8 4·6	2	3	4	
1 1 7 8·1	44	729	9856	
1 9 2 5				

1 9 2 5 6 4	2468	
1 9 8 0 4	78	78
6 0		78
		624
		546
$6084 = 78^2$		6084

$$\sqrt{15246816484} = 123400 + 78 = 123478 \text{ esattamente.}$$

Esempio 2°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 941978623 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 3 e quindi minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 5 e quindi impari; perciò si troveranno col metodo ordinario le 3 prime a sinistra delle 5 anzidette cifre, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{941978623}$

9·4 1·9 7	306	$306 \times 2 = 612$
4·1 9·7	606	
5 6 1	6	
	3636	
5 6 1 8 6	612	
1 1 0 6	91	91
4 9 4		91
		91
		819
$49423 > 8281$		8281
$49423 > 91^2$		

$\sqrt{941978623} = 30600 + 91 = 30691$ a meno di 1 per difetto.

Esempio 3°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 267383097852 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 6 e quindi pari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 3 prime a sinistra delle 6 cifre anzidette, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$\sqrt{267383097852}$

2 6·7 3·8 3	517		$517 \times 2 = 1034$
1 7·3	101	1027	
7 2 8·3	1	7	
9 4	101	7189	
9 4 0 9 7	1034		
1 0 3 7	91		91
3			91
			91
			819
$3852 < 8281$			8281
$3852 < 91^2$			

$\sqrt{267383097852} = 517000 + 91 = 517091$ a meno di 1 per eccesso,

$\sqrt{267383097852} = 517091 - 1 = 517090$ a meno di 1 per difetto.

Esempio 4°. — Per estrarre brevemente la radice quadrata intera dal numero intero 39112528349785 si osserva innanzitutto che la prima cifra a sinistra di essa è manifestamente 6 e quindi non minore di 5, e che inoltre il numero totale delle cifre della stessa radice è evidentemente 7 e quindi impari; perciò si troveranno con il metodo ordinario le 4 prime a sinistra delle 7 cifre anzidette, e poi si compierà il calcolo di tale radice, operando nel modo indicato nell'osservazione 3ª.

$$\sqrt{39112528349785}$$

39'11'25'28	6254			$6254 \times 2 = 12508$
31'1	122	1245	12504	
672'5	2	5	4	
5002'8	244	6225	50016	
12				

12349	12508
12349	0

$$12349785 > 0$$

$$12349785 > 0^2$$

$\sqrt{39112528349785} = 6254000 + 0 = 6254000$ a meno di 1 per difetto.

G. Bernardi.

SOPRA ALCUNE FORMOLE RELATIVE ALLE PROGRESSIONI PER DIFFERENZA

1. Si abbia la progressione per differenza:

$$\div a \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 \ldots a_{n-1},$$

la cui ragione sia d ed n il numero de' suoi termini, per modo che sia:

$$a_{r-1} = a + (r-1)\,d. \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Vogliamo esprimere la somma S_m delle potenze m^{esime} dei termini:

$$S_m = a^m + a_1^m + a_2^m + \ldots + a_{n-1}^m$$

in funzione delle somme analoghe $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots S_2, S_1$ delle potenze $(m-1)^{esime} \ldots$ seconde, prime de' termini, del numero n di essi termini, del 1° termine a e della ragione d.

Per questo abbiamo le seguenti identità:

$$\begin{cases}(a+d)^{m+1}-a^{m+1}=(m-1)a^m d+\binom{m+1}{2}a^{m-1}d^2+\binom{m+1}{3}a^{m-2}d^3+\ldots+d^{m+1}\\(a+2d)^{m+1}-(a+d)^{m+1}=(m+1)(a+d)^m d+\binom{m+1}{2}(a+d)^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}\\(a+3d)^{m+1}-(a+2d)^{m+1}=(m+1)(a+2d)^m d+\binom{m+1}{2}(a+2d)^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\(a+nd)^{m+1}-\{a+(n-1)d\}^{m+1}=\\\qquad=(m+1)\{a+(n-1)d\}^m d+\binom{m+1}{2}\{a+(n-1)d\}^{m-1}d^2+\ldots+d^{m+1}.\end{cases}$$

Sommando membro a membro e semplificando:

$$(a+nd)^{m+1}-a^{m+1}=$$

$$=(m+1)dS_m+\binom{m+1}{2}d^2S_{m-1}+\binom{m+1}{3}d^3S_{m-2}+\ldots+(m+1)d^mS_1+nd^{m+1}.$$

Ovvero, sviluppando nel 2° membro e semplificando:

$$\begin{aligned}S_m=na^m&+\frac{m}{\pi(2)}d\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\}+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}d^2\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\}+\ldots\\&\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{\pi(r+1)}d^r\{n^{r+1}a^{m-r}-S_{m-r}\}+\ldots\\&\ldots+d^{m-1}(n^m a-S_1)+\frac{d^m}{m+1}(n^{m+1}-n).\end{aligned}\tag{1}$$

che è la formola cercata.

Ponendo nella (1) $a=1$ e poi $d=1$, si ottengono rispettivamente:

$$\begin{aligned}S_m=n+\frac{m}{\pi(2)}d(n^2-S_{m-1})+\ldots+&\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{\pi(r+1)}d^r(n^{r+1}-S_{m-r})+\ldots\\&\ldots+d^{m+1}(n^m-S_1)+\frac{d^m}{m+1}(n^{m+1}-n).\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}S_m=na^m&+\frac{m}{\pi(2)}(n^2a^{m-1}-S_{m-1})+\\&+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}(n^3a^{m-2}-S_{m-2})+\ldots+\frac{1}{m+1}(n^{m+1}-n).\end{aligned}\tag{3}$$

La (2) ci dà la somma delle potenze m^{esime} degli n termini di una progressione, il cui 1° termine è l'unità e la ragione d; e la (3) dà la somma delle potenze m^{esime} di n numeri consecutivi, a partire da a.

E ponendo infine nella (1) $a=1$, $d=1$, abbiamo:

$$\begin{aligned}S_m=n&+\frac{m}{\pi(2)}(n^2-S_{m-1})+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}(n^3-S_{m-2})+\ldots\\&\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-r)}{\pi(r+1)}(n^{r+1}-S_{m-r})+\ldots,\end{aligned}$$

la quale può anche scriversi, sviluppando le parentesi:

$$S_m = \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1} - \frac{m}{2} S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{\pi(3)} S_{m-2} - \dots$$
$$\dots - \frac{m(m-1)\dots(m-r)}{\pi(r+1)} S_{m-r} - \dots - S_1 - \frac{n}{m+1} - \frac{1}{m+1}, \tag{4}$$

che ci dà la somma delle potenze simili (m^{esime}) dei primi n numeri naturali.

2. Possiamo ottenere la somma delle potenze simili dei primi n numeri naturali in altro modo e ci risulterà funzione di n.

Osserviamo perciò che se una funzione è di m^o grado in x, conterrà un termine Ax^m: aumentando la variabile x di un'unità, l'aumento di x^m è espresso da:

$$(x+1)^m - x^m = mx^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2} + \dots + mx + 1,$$

che è funzione razionale intera di grado $m-1$ in x. Onde il grado dell'accrescimento di un termine è inferiore di un'unità al grado di esso termine e quindi l'accrescimento della funzione è esso stesso una funzione di grado inferiore di un'unità a quello della funzione data.

Posto ciò, la funzione di n che dà la somma delle potenze m^{esime} dei primi n numeri naturali è di $(m+1)^{esimo}$ grado, poichè l'accrescimento, quando n aumenta di un'unità, è $(n+1)^m$, che è di grado m.

Sarà perciò una funzione della forma:

$$An^{m+1} + Bn^m + C_1 n^{m-1} + C_2 n^{m-1} + C_3 n^{m-3} + \dots + C_{m-1} n,$$

dove le $A, B, C_1, C_2 \dots C_{m-1}$ sono costanti da determinarsi. Inoltre essa funzione non conterrà termine costante, poichè per $n=0$ deve annullarsi.

Dobbiamo determinare i coefficienti $A, B, C_1, C_2 \dots C_{m-1}$: basterà perciò esprimere che aggiungendo ad essa funzione $(n-1)^m$, si avrà la somma delle potenze m^{esime}, allorchè la serie dei numeri non è terminata da n, ma da $n+1$. Si avrà quindi identicamente:

$$An^{m+1} + Bn^m + C_1 n^{m-1} + C_2 n^{m-2} + \dots + C_{m-1} n + (n+1)^m =$$
$$= A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1} + C_2(n+1)^{m-2} + \dots C_{m-1}(n+1).$$

Effettuando i calcoli e le riduzioni, si ottiene:

$$n^m + mn^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \dots + mn - 1 =$$
$$= A\left\{\binom{m+1}{1} n^m + \binom{m+1}{2} n^{m-1} + \binom{m+1}{3} n^{m-2} + \dots + (m+1)n + 1\right\} +$$
$$+ B\left\{\binom{m}{1} n^{m-1} + \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} + \dots + mn + 1\right\} +$$
$$+ C_1\left\{\binom{m-1}{1} n^{m-2} + \binom{m-1}{2} n^{m-3} + \binom{m-1}{3} n^{m-4} + \dots + (m-1)n + 1\right\} +$$
$$+ C_2\left\{\binom{m-2}{1} n^{m-3} + \binom{m-2}{2} n^{m-4} + \binom{m-2}{3} n^{m-5} + \dots + (m-2)n + 1\right\} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ C_{m-2}(2n+1) + C_{m-1}.$$

Eguagliando ora i coefficienti delle medesime potenze di n ne' due membri dell'eguaglianza, otteniamo un sistema di equazioni ricorrenti, che ci permettono di ricavare i valori delle costanti. Otteniamo per esse:

$$A=\frac{1}{m+1},\ B=\frac{1}{2},\ C_1=\frac{12}{m},\ C_2=0,\ C_3=-\frac{m(m-1)(m-2)}{720},\ C_4=0\ldots$$

e in generale pel coefficiente del termine in n^{m-r} si ha l'equazione:

$$\binom{m}{r}=A\binom{m+1}{r+1}+B\binom{m}{r}+C_1\binom{m-1}{r-1}+C_2\binom{m-2}{r-2}+\ldots+C_{r-1}\binom{m-r+1}{1}$$

Possiamo mostrare che i coefficienti $C_2, C_4, \ldots$ con indice pari, sono tutti nulli. Ponendo nella:

$$S_m=An^{m+1}+Bn^m+C_1n^{m-1}+C_2n^{m-2}+\ldots+C_rn^{m-r}+\ldots \quad (\alpha)$$

$n-1$ invece di n, si ha:

$$S'_m=A(n-1)^{m+1}+B(n-1)^m+C_1(n-1)^{m-1}+C_2(n-1)^{m-2}+\ldots+C_r(n-1)^{m-r}+\ldots \quad (\beta)$$

e sottraendo dalla (α) la (β) membro a membro:

$$\begin{aligned}n_m=&A\{n^{m+1}-(n-1)^{m+1}\}+B\{n^m-(n-1)^m\}+C_1\{n^{m-1}-(n-1)^{m-1}\}+\ldots\\ &\ldots+C_r\{n^{m-r}-(n-1)^{m-r}\}+\ldots=\\ =&A\left\{\binom{m+1}{1}n^m-\binom{m+1}{2}n^{m-1}+\ldots+\binom{m+1}{r+1}n^{m-r}\ldots\right\}+\\ &+B\left\{\binom{m}{1}n^{m-1}-\binom{m}{2}n^{m-2}+\ldots-\binom{m}{r}n^{m-r}+\ldots\right\}+\\ &+C_1\left\{\binom{m-1}{1}n^{m-2}-\ldots+\binom{m-1}{r-1}n^{m-r}-\ldots\right\}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+C_{r-1}\left\{\binom{m-r+1}{1}n^{m-r}-\ldots\right\}+\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ed eguagliando i coefficienti di n^{m-r} si ha, ponendo per A e B i loro valori:

$$0=\binom{m+1}{r+1}\frac{1}{m+1}-\binom{m}{r}\frac{1}{2}+\binom{m-1}{r-1}C_1-\binom{m-2}{r-2}C_2+\ldots+(m-r+1)C_{r-1}.$$

Ma abbiamo trovato pel coefficiente di n^{m-r}:

$$0=\binom{m+1}{r+1}\frac{1}{m+1}-\binom{m}{r}\frac{1}{2}+\binom{m-1}{r-1}C_1+\binom{m-2}{r-2}C_2+\ldots+(m-r+1)C_{r-1},$$

E sottraendo fra loro le due ultime relazioni:

$$\binom{m-2}{r-2}C_2+\binom{m-4}{r-4}C_4+\binom{m-6}{r-6}C_6+\ldots=0,$$

che deve sussistere qualunque sia r. E allora ponendo successivamente $r=3, 5, 7\ldots$, si vede che $C_2, C_4\ldots$ sono nulli, come volevamo dimostrare.

Quindi per l'espressione di S_m abbiamo:

$$S_m=\frac{n^{m+1}}{m+1}+\frac{n^m}{2}+\frac{m}{2}\cdot\frac{1}{6}n^{m-1}-\frac{1}{4}\binom{m}{3}\frac{1}{30}n^{m-3}+\frac{1}{6}\binom{m}{5}\frac{1}{42}n^{m-5}-\frac{1}{8}\binom{m}{7}\frac{1}{30}n^{m-7}+$$
$$+\frac{1}{10}\binom{m}{9}\cdot\frac{5}{66}n^{m-9}-\frac{1}{12}\binom{m}{11}\cdot\frac{691}{2730}n^{m-11}+\dots \quad (5)$$

I numeri che fanno parte dei coefficienti nella precedente formola e cioè:

$$\frac{1}{2},\ -\frac{1}{30},\ \frac{1}{42},\ -\frac{1}{30},\ \frac{5}{66},\ -\frac{691}{2730}\dots$$

sono, com'è noto, i numeri di Bernuilli.

3. Le formole (4) e (5) possono servirci a calcolare le somme delle potenze simili dei primi n numeri naturali in alcuni casi particolari, utili nella pratica:

$$m=1\quad S_1=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$m=2\quad S_2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3}$$
$$m=3\quad S_3=\frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=s_1^2$$
$$m=4\quad S_4=\frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3.5}\{3n(n+1)-1\}$$
$$m=5\quad S_5=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5}{12}n^4-\frac{n^2}{12}=\frac{n^2(n+1)^2}{12}\{2n(n+1)-1\}$$
$$m=6\quad S_6=\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$$
$$m=7\quad S_7=\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7}{24}n^4+\frac{n^2}{12}$$
$$m=8\quad S_8=\frac{n^9}{9}+\frac{n^8}{2}-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{n}{30}$$

. . . .

Le precedenti formole sono state ottenute assai speditamente dalla (5), mentre sarebbero stati necessari dei calcoli laboriosissimi a volerle ottenere dalla (4). Notiamo però che se la (5) offre, rispetto al calcolo, dei vantaggi che non offre la (4), tuttavia ha l'inconveniente di non presentare quella omogeneità nella forma dei termini, necessaria in una formola generale.

4. Diamo ora un teorema, che ci darà modo di verificare per sintesi le formole precedenti.

Sia $\varphi(a+nd)$ una funzione, tale che sia:

$$\varphi(a+nd)-\varphi(a+(n-1)d)=f(a+nd)$$

e che: $\varphi(a)=f(a)$; faremo vedere che:

$$\varphi(a+(n-1)d)=f(a)+f(a+d)+f(a+2d)+\dots+f(a+(n-1)d),$$

ossia che la funzione $\varphi(a+(n-1)d)$ è uguale alla somma di n funzioni che si ottengono dalla $f(a+nd)$ dando ad n successivamente i valori: $0, 1, 2, \ldots (n-1)$.

Infatti, per ipotesi si, ha:

$$\begin{cases} \varphi(a+d)-\varphi(a)=f(a+d), \\ \varphi(a+2d)-\varphi(a+d)=f(a+2d), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a+(n-2)\,d)=f(a+(n-1)d). \end{cases}$$

Sommando membro a membro, si ottiene:

$$\varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a)=f(a+d)+f(a+2d)+\ldots+f(a+(n-1)d),$$

ed essendo per ipotesi $\varphi(a)=f(a)$:

$$\varphi(a+(n-1)d)=\sum_{r=1}^{r=n} f(a+(r-1)d) \qquad \text{c. d. d.} \tag{6}$$

In particolare, nel caso la cui $a=d=1$, si ha:

$$\varphi(n)=\sum_1^n{}_r\, f(r). \tag{7}$$

5. Si abbia ora l'espressione indicata nel 2° membro della (1), in cui S_{m-1}, $S_{m-2}, \ldots$ rappresentano le somme delle potenze $(m-1)^{\text{esime}}$, $(m-2)^{\text{esime}}, \ldots$ degli n termini di una progressione por differenza, il cui 1° termine è a e la ragione è d; verifichiamo come essa rappresenti effettivamente la somma delle potenze m^{esime} degli n termini della progressione stessa. Ponendo perciò:

$$\varphi(a+(n-1)d)=na^m+\frac{m}{2}d\left\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\right\}+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}\left\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\right\}+\ldots,$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} f(a+(n-1)d)&=\varphi(a+(n-1)d)-\varphi(a+(n-2)d)= \\ =\Big[na^m&+\frac{m}{2}\,d\left\{n^2a^{m-1}-S_{m-1}\right\}+\frac{m\,(m-1)}{\pi(3)}\left\{n^3a^{m-2}-S_{m-2}\right\}+\ldots\Big]- \\ -\Big[(n-1)a^m&+\frac{m}{2}d\left\{(n-1)^2a^{m-1}-S'_{m-1}\right\}+\frac{m(m-1)}{\pi(3)}\left\{(n-1)^3a^{m-2}-S'_{m-2}\right\}+\ldots\Big], \end{aligned}$$

in cui le S' rappresentano le somme delle potenze simili degli $n-1$ primi termini della progressione stessa.

Ossia:

$$\begin{aligned} f(a+(n-1)d)&=a^m\{n-(n-1)\}+\frac{m}{2}da^{m-1}\{n^2-(n-1)^2\}-\frac{m}{2}d\{S_{m-1}-S'_{m-1}\}+ \\ &+\frac{m\,(m-1)}{\pi\,(3)}\,d^2a^{m-2}\left\{n^3-(n-1)^3\right\}-\frac{m(m-1)}{\pi\,(3)}\,d^2\,(S_{m-2}-S'_{m-2})+\ldots= \\ &=a^m+ma^{m-1}\,(n-1)d+\binom{m}{2}a^{m-2}\,(n-1)^2\,d^2+\ldots \\ &=\left\{a+(n-1)\,d\right\}^m. \end{aligned}$$

E quindi per la (6):

$$\varphi(a+(n-1)d)=a^m+(a+d)^m+\ldots+(a+(n-1)d)^m,$$

come volevamo verificare.

In modo identico potremmo, per mezzo della (6), verificare le formole (2) e (3) e per mezzo della (7) la formola (4), che dà la somma delle m^{esime} potenze dei primi n numeri naturali.

6. Ponendo nella (1) $a=0$, si ha:

$$S_m=-\frac{m}{2}dS_{m-1}-\frac{1}{3}\binom{m}{2}d^2S_{m-2}-\ldots-\frac{1}{r+1}\binom{m}{r}d^rS_{m-r}-\ldots$$
$$\ldots-d^{m-1}S_1+\frac{d^m}{m+1}n(n^m-1), \tag{8}$$

in cui $S_{m-1}, S_{m-2}, \ldots$ hanno sempre lo stesso significato. Questa formola ci dà la somma delle potenze m^{esime} degli $n-1$ primi multipli del numero d. In particolare, per $m=1$, abbiamo:

$$S_1=\frac{d}{2}n(n-1),$$

ovvero, ponendo $n+1$ in luogo di n:

$$S_1=\frac{d}{2}n(n+1), \tag{9}$$

che dà la somma dei primi n multipli di d. — E se nella (9) poniamo $d=2$, abbiamo:

$$s=n(n+1),$$

la quale, com'è noto, dà la somma dei primi n numeri pari.

Se nella (9) poniamo successivamente $d=1, 2, \ldots n$ e sommiamo poi le espressioni che si ottengono, abbiamo, chiamando A detta somma:

$$A=\binom{n+1}{2}+2\binom{n+1}{2}+3\binom{n+1}{2}+\ldots+(n-1)\binom{n+1}{2}+n\binom{n+1}{2}=$$
$$=\binom{n+1}{2}\{1+2+\ldots+n\}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

ossia: " la somma degli n primi multipli di ciascuno dei numeri $1, 2 \ldots n$, è uguale al quadrato della somma degli n numeri dati ".

Possiamo generalizzare la proprietà precedente nel modo seguente:

Rappresentando con $S_{m,d}$ la somma delle potenze m^{esime} degli n primi multipli di d e con $\sigma_{m,n}$ la somma analoga delle potenze m^{esime} dei primi n numeri naturali, abbiamo evidentemente la relazione:

$$S_{m,d}=d^m\,.\,\sigma_{m,n}\,.$$

Calcolando ora $\sum_1^n{}_d S_{m,d}$, si ha:

$$\sum_1^n{}_d S_{m,d}=\sum_1^n{}_d d^m\sigma_{m,n}=\sigma_{m,n}\sum_1^n{}_d d^m=\sigma^2_{m,n}, \tag{10}$$

ossia:

" la somma delle m^{esime} potenze dei primi n multipli dei numeri $1, 2 \ldots n$,

" è uguale al quadrato della somma delle potenze m^{esime} dei numeri " stessi ".

Ed ancora più generalmente, poichè si ha:

$$\sum_{1}^{p}{}_{d}\, S_{m,d} = \sum_{1}^{p}{}_{d}\, d^m \sigma_{m,n} = \sigma_{m,n} \sum_{1}^{p}{}_{d}\, d^m = \sigma_{m,n}\,.\,\sigma_{m,p}\,, \tag{11}$$

possiamo dire: " la somma delle m^{esime} potenze dei primi p multipli " dei numeri $1, 2, \ldots n\,(n \gtrless p)$, è uguale al prodotto della somma delle " potenze m^{esime} dei numeri $1, 2, \ldots n$, per la somma delle potenze m^{esime} " dei numeri $1, 2, \ldots p$ ". E da ciò, per $p = n$, discende la proprietà sopra enunciata.

7. Ponendo nella (2) $d = p - 2$, $m = 1$, si ha:

$$S = n + \frac{1}{2} n (n-1)(p-2),$$

la quale ci dà la somma degli n termini di una progressione per differenza, il cui 1° termine è l'unità e $p - 2$ la ragione.

Vogliamo ora determinare la somma degli n termini di una serie, in cui il termine generale sia rappresentato dal 2° membro dell'eguaglianza precedente.

Chiamando $u_1, u_2, \ldots u_n$ i termini di questa serie, abbiamo:

$$u_{r-1} + u_r = 2r - 1 + (r-1)^2 (p-2).$$

Dando ad r successivamente i valori $n, (n-1), \ldots 3, 2, 1$, si ha:

$$\begin{cases} u_n = 2\,.\,n - 1 + (n-1)^2 (p-2) - u_{n-1} \\ u_{n-1} = 2\,.\,(n-1) - 1 + (n-2)^2 (p-2) - u_{n-2} \\ u_{n-2} = 2\,.\,(n-2) - 1 + (n-3)^2 (p-2) - u_{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2 = 2\,.\,2 - 1 + 1^2\,.\,(p-2) - u_1 \\ u_1 = 2\,.\,1 - 1. \end{cases}$$

Sommando membro a membro e facendo le debite sostituzioni:

$$2S = n(n+1) - n + (p-2)\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + u_n =$$

$$= n(n+1) - n + (p-2)\frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + n + \frac{1}{2} n (n-1)(p-2),$$

ossia, semplificando:

$$S = \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{(n-1)(p-2)}{3} - 1\right\},$$

che è l'espressione che volevamo ottenere.

Essa, per $p = 2$, ci dà la somma dei primi n numeri naturali *(numeri lineari)*; per $p = 3$ dà:

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

che esprime la somma degli n così detti *numeri triangolari:* 1, 3, 6, 10...; per $p=4$ dà la somma nota degli n *numeri quadrati*: 1, 4, 9, 16 . . .; per $p=5$ dà:

$$S=\frac{n^2(n+1)}{2},$$

che esprime la somma di n *numeri pentagonali,* cioè 1, 5, 12, 22, 25...; ecc.

P. Patrassi.

UN NUOVO TEOREMA SULLA FUNZIONE E DI LEGENDRE

1. In una mia Nota precedente " Sulla fattoriale di un numero e sopra una nuova espressione di π „ (*) ho dato alcune formule riguardanti le fattoriali. Considerando ora nuovamente la formula

$$n\,!=\prod_{p=2}^{p=p} p^{E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}}$$

dove p rappresenta il massimo numero primo $\leqq n$ e P_p la massima potenza del valore che si dà a p, contenuta in n, ho veduto che essa è suscettibile di una maggiore semplificazione, in conseguenza del teorema sulla funzione E di Legendre che forma l'oggetto della presente nota.

2. Teorema. — *Se* n *e* p *sono due numeri interi e positivi qualunque, tali però che si abbia* n > p, *si ha*

$$E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p}=\frac{n-S_p}{p-1}$$

dove $E\frac{n}{p}$ rappresenta la parte intera del quoziente della divisione di n per p, P_p la massima potenza di p contenuta in n, ed S_p la somma delle cifre del numero n scritto nel sistema a base p.

Dimostrazione. — Principiamo collo scrivere n nel sistema a base p: avremo

$$n=hp^A+kp^B+lp^C+\ldots+a,$$

e sostituendo questo suo valore nell'espressione

$$S=E\frac{n}{p}+E\frac{n}{p^2}+\ldots+E\frac{n}{P_p},$$

(*) Cfr. *Periodico di Matematica*, Anno XVI, settembre-ottobre 1900.

sarà

$$S = E\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p} + E\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} + \ldots$$
$$\ldots + E\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^n}.$$

Consideriamo ora il primo di questi addendi: esso è eguale a

$$E\left(\frac{hp^A}{p} + \frac{kp^B}{p} + \frac{lp^C}{p} + \ldots - \frac{a}{p}\right),$$

dove l'ultimo termine $\frac{a}{p}$ è < 1, e quindi è. nel caso nostro, trascurabile. Abbiamo dunque

$$E\frac{n}{p} = hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots$$

Passiamo al secondo: esso è eguale a

$$E\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} \text{ ossia(*) } E\frac{E\dfrac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p}}{p};$$

dunque

$$E\frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a}{p^2} = \frac{hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots}{p} =$$
$$= hp^{A-2} + kp^{B-2} + lp^{C-2} + \ldots$$

e così per tutti gli altri termini.

Riassumendo, avremo

$$E\frac{n}{p} + E\frac{n}{p^2} + \ldots + E\frac{n}{p^n} = hp^{A-1} + kp^{B-1} + lp^{C-1} + \ldots$$
$$\ldots + hp^{A-2} + kp^{B-2} + lp^{C-2} + \ldots,$$

e, raggruppando tutti i termini affetti dal medesimo coefficiente,

$$S = h(p^{A-1} + p^{A-2} + \ldots + 1) + k(p^{B-1} + p^{B-2} + \ldots + 1) +$$
$$+ l(p^{C-1} + p^{C-2} + \ldots + 1) + \ldots$$

Ora, ciascuna delle espressioni contenute fra parentesi è una progressione geometrica di ragione p, di primo termine 1, e di A, B, C... termini rispettivamente: dunque

$$p^{A-1} + p^{A-2} + \ldots + 1 = \frac{p^A - 1}{p - 1}$$
$$p^{B-1} + p^{B-2} + \ldots + 1 = \frac{p^B - 1}{p - 1} \qquad \text{ecc.}$$

(*) Si dimostra facilmente che $E\frac{n}{p^2} = E\frac{E\frac{n}{p}}{p}$. Infatti poniamo $n = kp + a$, dove $a < p$; avremo

$$E\frac{n}{p^2} = E\frac{kp+a}{p^2} = E\left(\frac{kp}{p^2} + \frac{a}{p^2}\right) = \frac{k}{p};$$

$$E\frac{E\frac{n}{p}}{p} = E\frac{E\frac{kp+a}{p}}{p} = E\frac{E\left(k + \frac{a}{p}\right)}{p} = \frac{k}{p} \qquad \text{c. d. d.}$$

Quindi sostituendo

$$S = h\frac{p^A-1}{p-1} + k\frac{p^B-1}{p-1} + l\frac{p^C-1}{p-1} + \ldots =$$
$$= \frac{hp^A - h + kp^B - k + lp^C - l + \ldots}{p-1} = \frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots - (h+k+l+\ldots)}{p-1} =$$
$$= \frac{hp^A + kp^B + lp^C + \ldots + a - (h+k+l+\ldots+a)}{p-1} =$$

ossia, per quanto sopra abbiamo detto

$$S = \frac{n - S_p}{p-1}$$

c. d. d.

3. Esempi. — Sia da calcolare

$$S = E\frac{55}{2} + E\frac{55}{4} + E\frac{55}{8} + E\frac{55}{16} + E\frac{55}{32}.$$

Si ha $S_2 = 5$, quindi

$$S = \frac{55-5}{1} = 50,$$

mentre direttamente $S = 27 + 13 + 6 + 3 + 1 = 50$. Analogamente

$$S = E\frac{857}{7} + E\frac{857}{49} + E\frac{857}{343} = \frac{857-11}{6} = 141$$

e direttamente

$$S = 122 + 17 + 2 = 141.$$

$$S = E\frac{932}{5} + E\frac{932}{25} + E\frac{932}{125} + E\frac{932}{625} = \frac{932-8}{4} = 231$$
$$S = 186 + 37 + 7 + 1 = 231.$$

4. Corollario. — Posto questo, l'espressione della fattoriale

$$n! = 2^{E\frac{n}{2} + \ldots + E\frac{n}{p_2}} . 3^{E\frac{n}{3} + \ldots + E\frac{n}{p_3}} \ldots p^{E\frac{n}{p} + \ldots + E\frac{n}{p_p}}$$

diventa

$$n! = 2^{\frac{n-S_2}{1}} . 3^{\frac{n-S_3}{2}} \ldots p^{\frac{n-S_p}{p-1}} = \prod_{\mu=2}^{\mu=p} p^{\frac{n-S_p}{p-1}}.$$

5. Come applicazione della formula trovata più sopra, proponiamoci di dover calcolare la somma delle potenze successive di un numero

$$S = p + p^2 + \ldots + p^{n-1} + p^n.$$

Potrò evidentemente scrivere

$$S = \frac{p^{n+1}}{p} + \frac{p^{n+1}}{p^2} + \ldots + \frac{p^{n+1}}{p^n},$$

ed allora, applicando la formula data, ed osservando che la somma delle cifre della potenza di un numero scritta nel sistema avente a base il numero stesso, è la base medesima, sarà

$$S = \frac{p^{n+1} - p}{p-1},$$

formula nota.

6. Consideriamo finalmente la progressione geometrica

$$\div a_1\ a_2 \ldots a_n\,,$$

e supponiamo di volerne trovare la somma. È evidente che potremo porre (indicando con r la ragione)

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1(1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}),$$

ossia, per la formula precedente,

$$S = a_1\left(\frac{r^n - r}{r-1} - 1\right) = a_1\frac{r^n - 1}{r-1}\,,$$

formula nota.

Possiamo dunque considerare la progressione geometrica ordinaria come un caso particolare di un'altra progressione più generale, in cui, invece di essere costante il rapporto di due termini consecutivi, è costante la funzione E di detto rapporto.

MARIO LAZZARINI.

MATEMATICA ED ESPERANTO

L'Esperanto, la nuova lingua internazionale, continua la sua marcia trionfale, ed anche fra noi, benchè tardi, si è costituita la *Società italiana per la propaganda dell'Esperanto*. Lentamente in Italia, ma a grandi passi all'estero, la nuova lingua si propaga per mezzo di associazioni e di pubblicazioni. Nel Belgio si pubblica la *Belga sonorilo*, nella quale scrivono il capitano di artiglieria Carlo Lemaire, infaticabile propagandista, membro onorario del Circolo poliglotta di Bruxelles, il condirettore prof. Luciano Blanjean e molte delle personalità più note nella letteratura, nell'arte, nelle scienze, nell'industria e nel commercio. Nel Canadà esce *La Lumo*, illustrata, in francese, inglese ed esperanto; da poco vi si è creata una società per l'insegnamento e la propaganda dell'Esperanto fra i popoli di lingua inglese; sua sede è Keighley, presidente Joseph Rode, segretario John Ellis; altre società sono sorte da poco a Losanna ed a Ginevra nella Svizzera, a Murcia nella Spagna. In Francia è ormai vecchio *L'Esperantiste* diretto dal De Beaufront, presidente della Società esperantista francese, il quale fa ottima ed indefessa propaganda, così che sorgono sempre nuovi gruppi esperantisti (Paris, Amiens, Annecy, Besançon, Bordeaux, Boulogne-sur-Mer, Dijon, Grenoble, Lille, Hautmont, Le Havre, Lyon, Marseille, Montpellier, Nancy, Nice, Reims, Saint-Omer, Tournon) con aumento rapido di soci, con corsi settimanali d'insegnamento pubblico e gratuito, con sussidi e facilitazioni da Società e da Consigli comunali. La *Holanda pioniro* esce in Olanda; la *Lingvo internacia*, ad Upsala prima ed ora a Szegrard, in continuazione dell'*Esperantisto* fondato nel 1888; il *Rondiranto* in Bulgaria a Plovdiv; il *Bohema Esperantisto* in Boemia; il *Germana Esperantisto* e la *Revuo Internacia* a Bystrice in Moravia. La Spagna si aggiunge ora alle altre nazioni mediante la *Sociedad esperantista* fondata dal sig. Codornin ed il giornale *Esperanto* a Santander. Da noi, oltre la Società italiana p. p. E. si sono costituiti nuovi circoli, fra cui tre importanti, anche per il numero dei soci, a Palermo, a Torino ed a Napoli, dovuti all'iniziativa dei signori Nalli, Germano e Cacciapuoti, presidente ora della Società italiana; organo della Società è l'*Esperantista*, che esce mensilmente a Torino; presto, a comodo degli studiosi, saranno pubblicati in lingua italiana, grammatica e dizionario esperantista per cura dei prof. Pichi e Puccinelli di Firenze; il conte Alberto Gallois, segretario della società, presenterà a giorni la traduzione delle " Prime lezioni di Esperanto „ del prof. Cart. Ma bisogna riconoscere che, nonostante questo movimento, dovuto a pochi volonterosi, la nostra Italia è ben lenta nell'imitare le nazioni sorelle.

Vana è oramai ogni discussione sulla necessità e sull'utilità di una lingua internazionale e sui pregi dell'Esperanto, che sono già quasi universalmente conosciuti; (*) non per semplice curiosità o per desiderio di erudizione si impara questa lingua, ma per la convinzione ferma che una lingua ausiliaria si presti in modo mirabile a facilitare quei rapporti sociali ed internazionali che suscitano tanti nuovi legami di affetto e di simpatia, che tanto vantaggio portano alle relazioni commerciali e scientifiche. *A rapporti nazionali lingua nazionale, a rapporti internazionali lingua internazionale;* con questa formola pratica ben chiara l'egregio avv. Adolfo Momigliano di Torino chiude un suo articolo: " La questione della lingua nel diritto internazionale „; essa riassume lo scopo dell'Esperanto, perchè questa lingua non può mirare per ora, e qui sta la sua vera forza, che a facilitare quelle relazioni che sono il semplice portato del ragionamento e dell'attività umana, le relazioni cioè internazionali dovute al continuo progresso scientifico, allo sviluppo del commercio, all'amore del tourismo.

Ma, come giustamente osserva il sig. marchese Giuseppe Boschi in una lettera del 24 novembre 1902 al direttore dell'*Esperantista*, è indispensabile che l'impulso e l'esempio vengano dall'alto, come l'incoraggiamento. *Perciò*, egli scrive, *i diversi Ministeri degli Esteri e della Pubblica Istruzione, sopratutto nei varii Stati, dovrebbero almeno approvare pubblicamente gli sforzi di quanti concorrono alla espansione della nuova lingua internazionale, facilitare la istituzione di cattedre gratuite nelle città principali, istituire un premio, e così gli Istituti scientifici, le Camere di commercio, i Circoli filologici aprire le loro sale a conferenze su questo tema, stimolare i soci e gli alunni ad iscriversi.*

Si può forse obiettare che troppi e troppo recenti sono gl'insuccessi dei tentativi di lingue internazionali; fra tante ricorderò la *Lingua bleu* del Bolak, lo *Spokil* del De Nicolas, la *Blaia Zimondal* del Meriggi ed il *Volapük* dello Schleyer. Ma l'obiezione cade da sè per due ragioni fondamentali: 1ª perchè il *Volapük*, per parlare di quella sola che ebbe veramente un momento di grande successo, cadde, dopo un improvviso e generale entusiasmo, per la sua soverchia artificiosità, che ne rende difficile lo studio e l'applicazione; ricorderò solo a questo proposito che l'antico e profondo volapükista L. Einstein afferma, dopo aver fatto serie e ripetute prove, che è arrivato a migliori risultati col piccolo dizionario esperanto-tedesco (*Vortareto* L. 0,10) che col dizionario volapük-tedesco Schleyer (L. 6,25) coi suoi 20000 vocaboli e 200 prefissi e suffissi; 2ª perchè invece l'Esperanto colpisce gli studiosi per la sua semplicità e più ancora per la sua naturalezza, ed è riconosciuto tale, che può trarre profitto di ogni manifestazione generale della vita sociale, del progresso scientifico e commerciale.

(*) Cerretti U. " L'Esperanto. (*Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali*. Pavia, num. 26 febbraio 1902, pag. 176-190.)

È riconosciuto ormai da tutti e confermato anche da coloro che contro l'Esperanto erano mal prevenuti, che questa lingua è costruita molto razionalmente; essa sarà la disperazione degli amatori di giuochi di parole, ma non presenterà mai al lettore quelle difficoltà che s' incontrano così spesso nelle lingue delle altre nazioni; essa è cadenzata come l'italiano, ma di studio più facile per gli stranieri; ha la facilità del greco e del tedesco per la formazione di voci composte; con poche radici fondamentali dà modo di formare un ricco vocabolario, e presenta una libertà di costruzione che permette di seguire la costruzione delle varie lingue nazionali senza correre il rischio di non essere intesi.

Perciò credo che sia doveroso l'intervento favorevole dei governi e dei corpi scientifici, letterari e scolastici.

Ciò si verifica appunto in Francia, ove si contano innumerevoli attivi propagandisti, mentre è noto quanto sia caro ai francesi che la loro lingua sia la lingua d'uso per le comunicazioni diplomatiche e internazionali. Già fino dal febbraio 1899 il Navillé, socio corrispondente dell'Istituto di Francia, ha fatto proposta concreta che l'Esperanto entri nell'insegnamento secondario, come fa parte dei programmi d'insegnamento di alcune scuole commerciali; durante l'esposizione universale di Parigi del 1900 i delegati di varii congressi (7), di Camere di commercio (7), di associazioni, circoli, ed accademie scientifiche, letterarie e commerciali (48), di società di Sport, fra cui i Touring-clubs del Belgio, della Francia e della Spagna, riunitisi per la scelta di una lingua ausiliaria internazionale, ne riconobbero opportuna la scelta e la diffusione, perchè destinata, non già a sostituire nella vita individuale di ciascun popolo gli idiomi nazionali, ma a servire alle relazioni scritte ed orali fra persone di lingue materne differenti. La scelta spetterà all' Associazione internazionale delle Accademie o ad un Comitato nominato dalla Commissione generale dei delegati.

Inoltre nel settembre u. s. in una seduta della *British Association*, adunata a Belfast, l'illustre scienziato Federico Branwoll, dopo avere esposto la necessità di adottare una lingua universale, specialmente per gli usi commerciali, propose che venisse scelta la lingua italiana, rendendone obbligatorio l' insegnamento in tutte le scuole. Il Branwoll patrocina la lingua italiana non soltanto per le sue qualità grammaticali, fonetiche e grafiche, ma anche perchè la sua scelta non ecciterebbe gelosie, come se venissero scelti il francese e l'inglese. A parte la questione glottologica, conviene rilevare che appunto l'argomento più forte contro l'adozione di una lingua vivente come lingua universale ausiliaria è dato dalle rivalità e dalle gelosie internazionali (*) e certo non è la lingua italiana quella che tali gelosie potrebbe evitare. Ad ogni modo mentre è importante constatare che anche illustri personalità inglesi, non individualmente, ma come associazione, trovano necessaria l' adozione di una lingua ausiliaria universale. Vale la pena di ricordare, senza prenderla sul serio, la proposta fatta al Congresso latino, inauguratosi a Roma il 16 aprile, di adottare il latino come lingua internazionale, fabbricando a bella posta *per tutti gli indotti*, un prontuario di conversazione con 400 o anche 500 frasi.

Non è improbabile che la scelta cada sull' Esperanto, e così questa grande riforma sarà presto, spero, effettuata, come è avvenuto di tante altre, trattate in principio come chimere ed utopie.

Confido quindi che anche fra noi si seguirà con piacere l'avviamento alla soluzione di così importante questione, e che fra non molto l'insegnamento dell'Espe-

(*) Cfr. Ceretti U. „L'Esperanto„, pag. 181-182.

ranto sarà obbligatorio per le scuole di commercio e per le scuole tecniche con indirizzo commerciale, facoltativo almeno per tutto l'insegnamento secondario.

Esposto così sommariamente lo stato attuale dell'Esperanto, passiamo ad esaminare le relazioni della nuova lingua colla nomenclatura matematica ed in modo particolare col dizionario di matematica (*Vortaro esperanta matematica*).

Già fino dal 30 maggio 1900 il Dr. Zamenhof scriveva al chr. prof. Méray dell'università di Digione: *la pubblicazione di un dizionario matematico* **completo** *in Esperanto sarà una cosa utilissima;* il Méray ha patrocinato invece caldamente l'utilità di un vocabolario esperanto per ciascun ramo della scienza umana, ed il Funtier attende già a compilare, in collaborazione con due suoi colleghi, un dizionario tecnico per medicina e chirurgia. Opportuno è quindi studiare quale sia la via più conveniente per raggiungere lo scopo in modo soddisfacente per gli scienziati delle varie nazionalità.

Nello studio della nuova lingua, la parte difficile, se pur difficile può chiamarsi, giacchè la difficoltà cesserà per solo effetto di memoria, è l'uso sicuro e pronto dei prefissi e dei suffissi; perciò anche ai meno istruiti riuscirà tanto più facile e chiaro l'uso dell'Esperanto, quanto maggiore numero di vocaboli già formati conterrà il dizionario comune, il quale, completo quanto più si potrà, dovrà necessariamente essere a disposizione degli studiosi prima di stabilire un dizionario tecnico-scientifico qualunque.

Dato pure che ciò sia fatto o si faccia, un grave inconveniente si presenta subito per la compilazione del *Vortaro matematica:* le lingue delle varie nazioni non sono perfettamente d'accordo nella nomenclatura scientifica dei varii rami delle matematiche; alcune non hanno le voci corrispondenti a quelle usate da altre; vocaboli, che sembrano corrispondenti, hanno invece significati diversi. Così, ad esempio, i francesi non hanno le voci corrispondenti ad *addendo, sottraendo, minuendo, facoltà*; da poco è introdotto il vocabolo *mantisse*; (*) in tedesco *gleichung* serve per indicare *uguaglianza* ed *equazione,* quantunque nel primo significato sia preceduto dall'aggettivo *identische*; si dice pure *potenzieren, radizieren,* in luogo delle frasi *innalzare a potenza, estrarre la radice*; in geometria le voci *égalité* ed *équivalence* hanno per corrispondenti in tedesco *congruenz* e *gleicheit*; (**) in inglese *cypher* significa anche lo zero, che presso tutte le altre nazioni ha un nome speciale diverso da cifra (*zéro o rien, zero o null, cero o nada,* ecc.)

Perciò conviene anzitutto stabilire prima l'accordo sulla nomenclatura, il che si tenta appunto di fare, con speranza di riuscita, colla pubblicazione del dizionario di matematica secondo la proposta fatta dall'illustre prof. Peano al 2° congresso nazionale dei professori di matematica. (***) Alle importanti discussioni, cui tale pubblicazione darà luogo, prenderanno parte, è a sperarsi, matematici di nazionalità diverse; così alla compilazione del *Vortaro matematica* basterà una sola persona, il Peano stesso, abile esperantista, poichè basterà dare, per ogni vocabolo definitivamente scelto, la traduzione in Esperanto. Ciò non presenterà molte difficoltà, giacchè il Dr. Zamenhof ha già dato la traduzione di molti vocaboli accettando e lievemente modificando i nomi scientifici già usati internazionalmente sotto forma greca o latina; altri potrà compiere il non lieve lavoro della tradu-

(*) M. DAUZAT, *Éléments de méthodologie mathématique.* Paris, 1901, pag. 470.

(**) Cfr. A. TAFELMACHER, " Questions et remarques diverses " 8°. (*L'inseignement mathématique.* Paris, 1901, pag. 365.) Cfr. BARDELLÉ " Sur une question de terminologie ". (*L'inseignement mathématique.* Paris, 1901, pag. 452-54.)

(***) Cfr. U. CERETTI, " Relazione del 2° congresso nazionale di matematica ", pag. 267-268. (*Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali.* Pavia, 1901, N. 21, pag. 258-287.)

zione generale, seguendo anche in questa la disposizione proposta dal Peano, e cioè i varii termini matematici siano aggruppati sistematicamente in corrispondenza delle varie parti, in cui si dividono la matematica elementare e la superiore, in modo cioè che ciascuna parte contenga i termini che vi si riferiscono, disposti in ordine alfabetico, con la loro significazione esatta, l'etimologia e un accenno alle variazioni subite, senza entrare affatto nello svolgimento delle singole teorie.

Tutto peraltro non è a farsi, perchè il dizionario comune della lingua Esperanto, benchè lontano dall'essere completo, contiene già parecchi dei vocaboli speciali, che si usano nelle matematiche.

I numeri cardinali dall'1 al 10 sono dati da *unu, du, tri, kvar, kvin, ses, sep, ok. naŭ, dek; nul* è zero; *cent, mil, milion, miliard*, hanno significati facili a comprendersi; i nomi corrispondenti a decina, centinaio, migliaio, ecc. si ottengono dando ai nomi dei numeri *dek, cent, mil*, ecc. la desinenza *o* del sostantivo, così: *deko, cento, milo*, ecc. I numeri superiori a dieci si formano in modo semplice riunendo fra loro convenientemente i primi dieci numeri e le voci *cent, mil*, ecc. così: *dudek* = 20, *dekdu* = 12, *tridek* = 30, *kvincent* = 500, *dudek-unu* = 21, *mil okcent tridek-tri* = 1833, *mil naŭcent-tri* = 1903. Dando ai numeri cardinali la caratteristica *a* si ricavano i numerali ordinali: *unua* = primo, *dua* = secondo, *oka* = ottavo, *sesdeka* = sessantesimo, *sepcentkvindeka* = settecentocinquantesimo. Per mezzo del suffisso *obl* e delle caratteristiche *o* ed *a* si formano i sostantivi e gli aggettivi moltiplicativi: *la duoblo* = il doppio, *duobla* = duplice, *la kvaroblo* = il quadruplo, *kvarobla* = quadruplice, ecc. Le unità frazionarie si ottengono dai numeri cardinali per mezzo del suffisso *on*, al quale si fa seguire, secondo i casi, la caratteristica *o*, o l'altra *a*; così si ha: *la kvarono* = il quarto, la quarta parte, *la kvinono* = il quinto, la quinta parte, *tricent-sesdek-kvinono* = trecentosessantacinquesima parte, *la duona franko* = la mezza lira, *la duona litro* = il mezzo litro.

La lingua italiana non ha voci proprie, come la lingua latina, per i distributivi e si usano le perifrasi: ad uno ad uno, a due a due, ad uno per volta, ecc.; a queste corrispondono in Esperanto voci proprie che si ottengono dai cardinali, per mezzo del suffisso *op* e delle caratteristiche *a* ed *e* secondo che si vuole l'aggettivo o l'avverbio: *duope* = a due, *kvinope* = a cinque, *multope* = a molti. Così pure gli avverbi numerali che nella lingua latina hanno una forma propria, e che si formano in italiano col sostantantivo *volta*, in francese con *fois*, in tedesco con *mal*, in lingua spagnola con *vuelta*, si ottengono in Esperanto per mezzo della radicale *foj* = volta: *unufoje* = una volta, *kvarfoje* = quattro volte.

Partumo significa frazione, che si indica facendo precedere il numero delle unità frazionarie (numeratore) al nome della unità stessa (denominatore): *tri kvaronoj* = tre quarti, *kvin trionoj* = cinque terzi.

Di molti altri vocaboli la traduzione riesce facile seguendo le norme semplici della grammatica esperantista; di altri si potranno creare le voci corrispondenti, per mezzo del principio seguito dal Dr Zamenhof nella scelta delle radici. Così, se si hanno in un piano due assi perpendicolari X'X e Y'Y che si incontrino in O, si sa che i punti di OX rappresentano i numeri reali positivi, quelli di OX' i numeri reali negativi; quelli di OY e di OY' rispettivamente gli imaginari puri positivi e negativi, ed i numeri complessi tutti i rimanenti punti del piano. Ora, seguendo il concetto esposto dal sig. Bardellé (*), di adottare nella nuova lingua denominazioni che rispondano maggiormente alla realtà delle cose, si possono

(*) Cfr. Bardellé, " L'Esperanto et les mathématiciens „. (*L'enseignement mathématique*. Paris, 1901, pag. 444-5.)

creare queste denominazioni: numeri reali positivi = numeri orizzontali crescenti = *nombroj horizontalaj altigantaj*; numeri reali negativi = numeri orizzontali decrescenti = *nombroj horizontalaj falantaj*; numeri imaginari positivi = numeri verticali crescenti = *nombroj vertikalaj altigantaj*; numeri imaginari negativi = numeri verticali decrescenti = *nombroj vertikalaj falantaj*; numeri complessi = numeri obliqui = *nombroj oblikvaj*; maggiore = $>$ = è più grande che = *superas*; minore = $<$ = è più piccolo che = *inferas*.

Ai matematici esperantisti specialmente spetta di completare la traduzione dei vocaboli oggi in uso nei varii rami delle matematiche; io mi limito a presentare il breve saggio che segue, nella speranza che tanti altri, di me più valenti, vogliano portarvi il contributo autorevole del loro sapere, della loro energia.

Parte generale.

assioma, aksiomo
assurdo, absurdo (u)
" absurda (ag)
caratteristica, karakteriza
caratterizzare, karakterizi
condizione, kondico
costante, konstanta
dedurre, deduki
deduzione, deduko
definire, defini
definizione, defino
dimostrare, demontri
dimostrazione, demontreco
elemento, elemento
evidente, evidenta
evidenza, evidenteco
essere sufficiente, sufiĉi
fondamento, fundamento
generale, ĝenerala (ag.)
indipendente, maldependanta (ag.)
ipotesi, hipotezo
legge, leĝo
lemma, lemmo
necessario, necesa
negare, nejesi
negazione, nejeseco
osservare, rimarki
osservazione, rimarko
postulato, postulato
ricerca, serĉo, serĉado
scienza, scienco
simbolo, simbolo
sufficiente, sufiĉa
supporre, suspekti
tesi, konkludo
teorema, teoremo
teoria, teorio
teorico, teoria
variabile, malkonstanta

Aritmetica.

abbreviazione, mallargigo
addendo, sumato
addizionare, sumi
addizione, sumado
altezza, alto alteco
alternare, alterni
anno, jaro
apparente, ŝajna
applicazione, almeto
approssimato, proksimata
ara, aro
aritmetica, aritmetiko
calcolabile, kalkulebla
calcolare, kalkuli
calcolo, kalkulado
capacità, kapableko
centi, centi
chilo, kilo
cifra, cifero
collezione, kolekto
comune, komuna
conseguenza, sekvo
contare, kunkalkuli
cubo, kubo
deca, deka
deci, deci
differenza, diferencio
diretta, direkta
disuguaglianza, malegaleco
dividendo, dividato
dividere, dividi
divisibile, dividebla
divisione, dividado
divisore, dividanto
esattezza, ĝusteco
esatto, ĝusta
esempio, ekzemplo
espressione, esprimo
estrarre la radice, radikigi (?)
ettara, hektaro
etto, hekto
fondamentale, fundamenta

frazione, partumo
grammo, gramo
grandezza, grandeco
gruppo, grupo
illimitato, senlima
innalzare a potenza, potencigi
infinità, multego
insolubile, nesolvebla
interesse, procento
inversa, reciproka
larghezza, largo largeco
limitato, lima
limite, limo
lira, franco
litro, litro
logaritmo, (?)
lunghezza, longo, longeco
maggiore, plimulta
massimo, maksimum
medio, meza
mese, monato
metrico, metra
metro, metro
metro cubo, metro kuba
metro quadrato, metro kvadrata
milli, mili
minimo, minimum
minore, malplimulta
minuendo, (?)
minuto, minuto
miria, miria
miscuglio, miksajo
misura, mezuro
misurare, mezuri
moltiplicando, multigato
moltiplicare, multigi
moltiplicatore, multiganto
moltiplicazione, multigado
multiplo, dividebla
non divisibile, nedividebla
non multiplo, nedividebla
numerazione, nombrado
numerale, nombra
numero, nombro
numero impari, neparnombro
numero pari, parnombro
operazione, operacio
ora, horo
ordine, ordo
periodico, pererioda
periodo, periodo
periodicità, periodeco
peso, pezo
potenza, potenco
primo, unuobla
problema, problemo
prodotto, produktaĵo
profondità, profundo, profundeco
proporzione, proporcio
proporzionale, proporcia
proporzionalità, proporcieco
proprietà, propreco
prova, pruvo
quadrato, kvadrato
quantità, kvanto
quintale, centkilo
quoto, ?
reciproco, reciproka
radicale, radikparto
radice, radiko
radice cubica, radiko cuba
radice quadrata, radiko kvadrata
rapporto, rilato
regola, regulo
resto, resto
risolvere, solvi
risoluzione, solvo
risultato, rezultato
sconto, (?)
secondo, sekundo
semplice, simpla
semplificare, plisimpligi
sistema, sistemo
sociale, societa
società, societo
solubile, solvebla
soluzione, solvo
somma, sumo
sottomultiplo, subdividebla
sottraendo, deprenato
sottrarre, depreni
sottrazione, deprenado
sta a, rilatas
stare in rapporto, rilati
superficie, suprajo
tempo, tempo
tonnellata, milkilo
totalità, tuteco
trasformare, aliformigi
trasformazione, aliformigo
uguaglianza, egaleco
uguagliare, egaligi
uguale, egala
unità, unuo
valore, valoro
volume, amplekso
vuoto, senenhava
zero, nulo

Geometria elementare.

altezza, alteco
angolo, angulo
angolo acuto, angulo akra
angolo adiacente, angulo apuda
angolo alterno, angulo alterna
angolo complementare, angulo komplementa
angolo consecutivo, angulo intersekva

angolo corrispondente, angulo korespondanta
angolo interno, angulo interna
angolo ottuso, angulo oktusa (?)
angolo piatto, plaŧangulo
angolo retto, angulo rekta
angolo supplementare, angulo subplementa
arco, arko
asimmetrico, nesimetria
baricentrico, barocentra
baricentro, barocentro
bisecare, mezesekci
bisettrice, mezesekcanta
centro, centro
cerchio, rondo
cilindro, cilindro
circocentro, ĉirkaŭcentro
circocerchio, ĉirkaŭrondo
circoscritto, ĉirkaŭskribata
circoscrivere, ĉirkaŭskribi
concentrico, koncentra
coincidente, koincidanta
coincidere, koincidi
congiungere, kunigi
congiunzione, kunego
conica, konusa
cono, konuso
contatto, kontacto
corda, ŝnuro
corona, krono
costruire, konstrui
costruzione, konstruo
curvatura, kurbeco
diagonale, diagonalo
diametro, diametro
distanza, interspaco
dualità, dueco
ellisse, elipso
equatore, ekvatoro
equivalente, ekvivalenta
equivalenza, ekvivalenteco
esagono, sesangulo
estremo, ekstremo
excentro, ekscentro
excerchio, eksrondo
fascio, fasko
fuoco, fokuso
figura, figuraĵo
geometria, geometrio
geometrico, geometria
incentro, encentro
incerchio, enrondo
inclinazione, klino, klineco
inscritto, enskribata
inscrivere, enskribi
iperbole, hiperbolo
ipotenusa, hipotenuzo
lato, latuso (?)

linea, linio
linea curva, linio kurba
linea parallela, linio paralela
linea perpendicolare, linio perpendikulara
linea obliqua, linio oblikva
linea orizzontale, linio horizontala
linea retta, linio rekta
linea verticale, linio vertikala
mediana, mezalinio
mediocerchio, mezarondo
medioscritto, mezeskribata
medioscrivere, mezeskribi
meridiano, meridiano
origine, deveno,
parabola, parabolo
parallelepipedo, paralelopiedo
parallelismo, paralelismo
parallelogrammo, paralelogramo
pentagono, kvinangulo
perimetro, perimetro
piano, plato
piede, piedo
piramide, piramido
planimetria, platometrio
polare, polusa
poligono, multangulo
polo, poluso
prisma, prismo
punto, punkto
punto di mezzo, mezapunkto
quadrangolo, kvarangulo
quadrato, kvadrato
raggio, radio
rettangolo, rektangulo
rettificazione, rektigo
rettificare, rektigi
rotazione, rulado
secante, sekcanta
simmetria, simetrio
simmetrico, simetria
sfera, sfero
simile, simila
similitudine, simileco
spazio, spaco
stereometria, stereometrio
superficie, supraĵo
superficie piana, plata supraĵo
superficie curva, kurba supraĵo
tangente, kontaktarekto
trasformare, aliformiĝi
trasformazione, aliformiĝo
trapezio, trapezo
trasversale, laŭlarĝa
triangolo, triangulo
unione, huniĝo
unire, huniĝi
vertice, verto

Matematiche superiori.

algebra, algebro
algebrico, algebra
armonico, harmonia
anarmonico, neharmonia
classe, klaso
equazione, egalajo
escludere, eksteni
escluso, kuza
facoltà, fakultato
formula, formulo
formulario, formularo
funzione, funkcio
grado, grado
identico, identa
identità, identeco
imaginaria, malreala
includere, inteni
incluso, malkuza
integrale, integralo
irrazionale, malracia
lettera (alfab.), litero
negativo, malpozitiva
positivo, pozitiva
razionale, racia
reale, reala
serie, serio
successione, sekvantaro
trigonometria, trigonometrio
trigonometrico, trigonometria.

U. Ceretti.

DELLE CONGRUENZE BINOMIE RISPETTO AI NUMERI PRIMI DELLA FORMA $2^m q + 1$ ESSENDO q UN NUMERO PRIMO

Sulla risoluzione della congruenza binomia rispetto a un numero primo della forma $2q + 1$, $4q + 1$, q essendo un numero primo, trattò già il prof. R. Alagna nei *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*(*) Nel caso generale di un modulo della forma $2^m q + 1$ ($m > 0$, q primo e dispari, l'unità non esclusa) le radici di una congruenza binomia possono ottenersi in una maniera notevole, onde non crediamo inutile trattarne qui brevemente.

Incominceremo con alcune osservazioni sui numeri della forma $2^m q + 1$, e col dare le condizioni necessarie e sufficienti perchè un numero di tal forma sia primo.

1. *I numeri primi della forma* $2q + 1$, *ammettono come radice primitiva il numero* 2, *o* -2, *secondo che* q *è* $\equiv 1$ *o* $\equiv -1$ (mod. 4).

I numeri primi della forma $4q + 1$ *hanno la radice primitiva* 2.

I numeri primi della forma $2^m + 1$ *ammettono come radici primitive i numeri* 3, 5, 6, 10.

I numeri della forma $2^m q + 1$, *con* $m > 1$ *e*

$$q > \frac{9^{2^{m-2}} - 1}{2^{m+1}}$$

hanno la radice primitiva 3.

(*) T. XIII (1899) pp. 99-129.

Questi teoremi son noti, si veda p. es. la *Teoria delle congruenze* del Tchebycheff (trad. Massarini) e la *Théorie des Nombres* del Cahen.

Il Wertheim ha pubblicato a varie riprese delle tavole delle più piccole radici primitive dei numeri primi della forma $2^m q + 1$, che non superano 10000:

WERTHEIM. — *Primitive Wurzeln der Primzahlen* $2^m q + 1$, *bei welchen* $q = 1$, *oder gleich einer ungeraden Primzahl ist.* (*Zeitschrift f. math. u. natur. Unterricht*, 25, 1894; pp. 81-97).

Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln g *aller ungeraden Primzahlen* p *unter 3000* (*Acta Math.* t. 17, pp. 315-320).

Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form $2^\pi q^\lambda + 1$, *in welcher* $q = 1$, *oder eine ungerade Primzahl ist. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln* g *aller Primzahlen* p *zwischen 3000 und 10000.* (*Acta Math.* t. 20, 1896, pp. 143-157).

Berichtigungen zur Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln unter 10000 (*Acta Math.* t. 22, 1898).

Come conseguenza di un teorema, segnalato dal Lucas al congresso di Clérmont-Ferrand (1876) dell'*Association française*, si possono dimostrare i seguenti teoremi, quasi tutti enunciati dal Lucas stesso.

Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma $2q+1$ *sia primo, è che divida il numero* $2^q + 1$, *se* $q \equiv 1$ (mod. 4) *e il numero* $2^q - 1$ *se* $q \equiv -1$ (mod. 4).

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $4q+1$ *sia primo, è che divida uno dei due numeri*

$$2^q + 2^{\frac{q+1}{2}} + 1, \qquad 2^q - 2^{\frac{q+1}{2}} + 1.$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè il numero $2^{2^n}+1$ *sia primo è che divida il numero* $3^{2^{2^n-1}} + 1$.

Questo teorema è stato enunciato dal Lucas nella prefazione alla sua "Théorie des Nombres", ma ivi è incorso un errore di stampa.

Il teorema fu dimostrato dal Proth nella *Nouvelle Corréspondence de Mathématique,* e ultimamente dall'Hurvitz nell'*Intermédiaire des Mathématiciens.*

Se alla base 3 si sostituisce il 5 e il 10, i teoremi che si ottengono si devono al PÉPIN (*Comptes Rendus*, 1877, 2° sem. pag. 329).

Noi aggiungiamo il seguente altro teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un numero della forma $2^m q+1$ *sia primo, essendo* $m > 1$ *e* q *primo e* $> \dfrac{9^{2^{m-2}} - 1}{2^{m+1}}$, *è che divida il numero* $3^{2^{m+1}q} + 1$.

C'intratterremo a lungo su questo argomento e su altri analoghi in una prossima memoria sull'applicazione del teorema di Fermat alla ricerca dei grandi numeri primi.

2. Sia a una radice primitiva del numero primo $p = 2^m q + 1$.

All'esponente 2^r $(r = 0, 1, 2, \ldots, 2^m)$ appartengono i numeri

$$a^{2^{m-r}p} \equiv \alpha_r, \quad \alpha_r^2, \quad \alpha_r^3, \ldots, \alpha_r^{2^r-1}. \tag{1}$$

All'esponente $2^r q$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, 2^m)$ appartengono i numeri

$$a^{2^{m-r}} \equiv \beta_r, \quad \beta_r^{t_2}, \quad \beta_r^{t_3}, \ldots, \beta_r^{t_{2^{r-1}(q-1)}}, \tag{2}$$

ove t_i è un numero inferiore a $2^r q$ e primo con $2^r q$, cioè un numero dispari non divisibile per q.

3. Ciò posto è chiaro che le radici della congruenza

$$x^{2^r} \equiv 1 \pmod{p} \tag{3}$$

sono i minimi resti dei numeri

$$\alpha_r, \quad \alpha_r^2, \quad \alpha_r^3, \ldots, \alpha_r^{2^r}.$$

Di questi, quelli cogli esponenti dispari dànno le radici della congruenza $x^{2^{r-1}} \equiv -1 \pmod{p}$, e quelli con esponenti pari dànno le radici della congruenza $x^{2^r} \equiv 1 \pmod{p}$. Quali radici appartengono all'esponente 2^s $(s \leq r)$? Si risponderà subito a questa domanda se si esprimono le potenze di α_r per le potenze della radice primitiva a di p, mostrando come le radici della (3) possano ottenersi combinando, in tutti i modi possibili, r radici opportunamente scelte della data.

Poichè il numero a appartiene all'esponente $2^m q$, la potenza $a^{2^{m-s}q}$ appartiene all'esponente 2^s. Poniamo

$$\mu_s \equiv a^{2^{m-s}} \pmod{p}.$$

Le radici della congruenza data sono, oltre l'unità, i

$$\binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \ldots + \binom{r}{r} = 2^r - 1,$$

minimi resti dei numeri

$$(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q,$$

essendo $i_1, i_2 \ldots i_k$ una combinazione qualunque a k a k dei numeri $1, 2, \ldots r$, e k prendendo tutti i valori da 1 a r.

Infatti si ha

$$(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^{2^r q} \equiv (a^{(2^{m-i_1}+2^{m-i_2}+\ldots+2^{m-i_k})q})^{2^r} \equiv (a^{2^m q})^{2^{r-i_1}+2^{r-i_2}+\ldots+2^{r-i_k}} \equiv 1. \pmod{p}$$

Inoltre perchè due numeri $(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q$ e $(\mu_{j_1} \mu_{j_2} \ldots \mu_{j_k})^q$ siano congrui rispetto a p occorre che gli esponenti

$$2^{m-i_1} + 2^{m-i_2} + \ldots + 2^{m-i_n}, \quad 2^{m-j_1} + 2^{m-j_2} + \ldots + 2^{m-j_n}$$

siano congrui rispetto a 2^m, e quindi i numeri

$$2^{r-i_1} + 2^{r-i_2} + \ldots + 2^{r-i_n}, \quad 2^{r-j_1} + 2^{r-j_2} + \ldots + 2^{r-j_n}$$

congrui rispetto a 2^r. Essendo però

$$2^{r-i_1} + 2^{r-i_2} + \ldots + 2^{r-i_k} \leq 2^{r-1} + 2^{r-2} + \ldots + 2^{r-k} =$$
$$= 2^{r-k}(2^{k-1} + 2^{k-2} + \ldots + 2 + 1) = 2^{r-k}(2^k - 1) \leq 2^r - 1$$

i detti due numeri, se fossero congrui (mod. 2^r), dovrebbero anche essere eguali. Questa eguaglianza però non può aver luogo, poichè ognuna delle 2^r-1 combinazioni a k a k ($k=1, 2 \ldots r$) dei numeri $1, 2 \ldots r$ fornisce la rappresentazione nel sistema binario di un numero inferiore a 2^r, e viceversa un numero inferiore a 2^r può sempre e in un sol modo rappresentarsi nel sistema binario. Dunque i numeri

$$(\mu_{i_1}, \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^q$$

e l'unità sono tutte le soluzioni della congruenza (3).

Ora è chiaro che una soluzione $(\mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})$ appartiene all'esponente 2^s, se s è il più alto indice che in essa figura, e perciò tutte le soluzioni della congruenza data appartenenti all'esponente 2^s sono fornite dai 2^{s-1} numeri

$$(\mu_s \mu_{s_1} \mu_{s_2} \ldots \mu_{s_h})^q$$

che si ottengono combinando con μ_s in tutti i modi possibili i numeri

$$\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{s-1}.$$

4. Le radici della congruenza

$$x^{2^r q} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p) \tag{4}$$

sono (n. 2) i minimi resti dei numeri

$$\beta_r, \beta^2_r, \ldots, \beta_r^{2^r q}$$

o anche i minimi resti dei numeri

$$\mu_0^h \mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k} \tag{5}$$

essendo $\mu_0 \equiv a^{2^m}$ (mod. p) ed h percorrendo il sistema dei numeri $0, 1, 2, \ldots, q-1$ per ogni combinazione a k a k ($k=0, 1, 2, \ldots, r$) dei numeri $1, 2, \ldots, r$. Infatti

$$(\mu_0^h \mu_{i_1} \mu_{i_2} \ldots \mu_{i_k})^{2^r q} \equiv a^{(2^m h+2^{m-i_1}+2^{m-i_2}+\ldots+2^{m-i_n})2^r q} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Inoltre se due numeri (5) fossero congrui (mod. p) avrebbe luogo la congruenza

$$2^m h+2^{m-i_1}+2^{m-i_2}+\ldots+2^{m-i_k} \equiv 2^m h'+2^{m-j_1}+2^{m-j_2}+\ldots+2^{m-j_n} \ (\text{mod. } 2^m q)$$

e ne seguirebbe dapprima l'eguaglianza

$$2^{m-i_1}+2^{m-i_2}+\ldots+{}^{m-i_k}=2^{m-j_1}+2^{m-j_2}+\ldots+2^{m-j_n}$$

poi

$$h=h'.$$

Dunque i numeri (5) sono tutti incongrui (mod. p) e però forniscono tutte le radici della congruenza (4).

Le soluzioni appartenenti all'esponente $2^s q$ sono i $2^{s-1}(q-1)$ numeri

$$\mu_0^h \mu_s \mu_{s_1} \mu_{s_2} \mu_{s_r},$$

essendo $s_1, s_2, \ldots s_r$ una qualunque combinazione dei numeri $1, 2, \ldots s-1$ e percorrendo h il sistema dei numeri $1, 2, \ldots, q-1$.

5. Per la possibilità della congruenza

$$x^{2^r} \equiv N \quad (\text{mod. } p) \tag{6}$$

è necessario e sufficiente che sia

$$N^{2^{m-r}q} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p),$$

cioè (n. 4)

$$N \equiv \beta_{m-r}^{\varrho},$$

essendo ϱ un numero $\leq 2^{m-r}q$, e però anche

$$N \equiv a^{2^r\varrho}.$$

Dunque a^ϱ è una soluzione della congruenza data. Posto

$$a^\varrho \equiv \xi \ (\text{mod. } p),$$

è evidente che tutte le soluzioni della congruenza sono fornite dai numeri

$$\xi\,(\mu_{i_1}\mu_{i_2}\mu_{i_3}\ldots\mu_{i_k})^q$$

essendo $\mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_k}$ una combinazione qualunque a k a k ($k=0,1,2,\ldots,r$) dei numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$.

6. Analogamente perchè la congruenza

$$x^{2^r q} \equiv N \quad (\text{mod. } p) \tag{7}$$

sia possibile occorre e basta che sia soddisfatta la condizione

$$N^{2^{m-r}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } p).$$

Se ciò avviene, sarà (n. 3)

$$N \equiv \alpha_{m-r}^{\sigma} \equiv a^{2^r q \sigma} \quad (\text{mod. } p)$$

e però $\eta \equiv a^\sigma$ è una soluzione della congruenza (7). E allora tutte le soluzioni sono date dai numeri

$$\eta\mu_0{}^h \mu_{i_1}\mu_{i_2}\ldots\mu_{i_k},$$

per tutti i valori di h da 0 a $q-1$ e per tutte le combinazioni degli indici $1, 2, \ldots r$.

7. Consideriamo ora in generale la congruenza

$$x^n \equiv N \quad (\text{mod. } 2^m q+1).$$

Perchè sia possibile, occorre e basta che sia

$$N^{\frac{2^m q}{\omega}} \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2^m q+1),$$

essendo ω il massimo comun divisore di n e $2^m q$.

Sarà $\omega = 2^r$ o $2^r q$, e se la condizione precedente è soddisfatta, la congruenza si ridurrà rispettivamente alle due altre, risolute nei n^i. 5, 6,

$$x^{2^r} \equiv N^\varphi, \qquad x^{2^r q} \equiv N^\psi \quad (\text{mod. } p)$$

dove φ e ψ sono determinati dalle congruenze

$$\frac{n}{2^r}\varphi - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2^{m-r}q), \qquad \frac{n}{2^r q}\psi - 1 \equiv 0 \ (\text{mod. } 2^{m-r}).$$

8. Il prof. Alagna nel citato lavoro, dimostra che se $4q+1$ è un numero primo, si ha

$$q^q - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 4q+1).$$

Il teorema fu proposto dal sig. Bikmore nel periodico inglese *The Educational Times* (1896). In quali casi ha luogo la congruenza

$$q^q - 1 \equiv 0 \pmod{2^m q + 1}?$$

Si risponde subito a questa domanda non appena si sappia a quale esponente appartenga il numero 2, rispetto al numero primo $2^m q+1$. Poichè

$$2^m q \equiv -1 \pmod{2^m q + 1}$$

si ha

$$(2^m q)^q \equiv -1) \pmod{2^m q + 1}$$

e però, perchè sia

$$q^q \equiv 1 \pmod{2^m q + 1}$$

è necessario e basta che si abbia

$$2^{mq} \equiv -1 \pmod{2^m q + 1}. \tag{8}$$

Da ciò segue, che l'esponente cui appartiene il numero 2. deve essere pari. Se questo esponente è $2^\rho \omega$ ($\omega = 1$, o q), sarà

$$2^{2^{\rho-1}\omega} \equiv -1 \pmod{2^m q + 1},$$

quindi

$$m = 2^{\rho-1} M$$

essendo M un numero dispari.

Perchè dunque, abbia luogo la congruenza

$$q^q \equiv 1 \pmod{2^m q + 1} \tag{9}$$

è necessario e sufficiente che la parità del gaussiano di 2 *rispetto a* $2^m q+1$ *sia doppia della parità di* m.

Per $m = 1$, $m = 2$ si deducono allora subito le due proposizioni:

1. *Se* q *è un numero primo* $\equiv 1 \pmod{4}$ *e* $2q + 1$ *è primo, si ha sempre*

$$q^q \equiv 1 \pmod{2q + 1}$$

e se $q \equiv -1 \pmod{4}$ *si ha sempre*

$$q^q \equiv -1 \pmod{2q + 1}$$

Se $4q + 1$ *è primo si ha sempre*

$$q^q \equiv 1 \pmod{4q + 1}.$$

M. Cipolla.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 635 E 636

635. *Il luogo geometrico dei punti d'incontro delle coppie di trasversali di un triangolo isoscele, che, partendo dagli estremi della base staccano due segmenti eguali, l'uno a partire dalla base, l'altro a partire dal vertice, è il sistema di una ellisse ed una iperbole; calcolarne gli assi e dire in qual caso l'ellisse si riduce a cerchio e l'iperbole diviene equilatera.*

Gallucci.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes di Susa.

Assumendo per assi coordinati la retta a cui appartiene la base CA del triangolo isoscele (*asse x*) e quella cui appartiene l'altezza BH, relativa alla base (*asse y*) e posto che $\overrightarrow{HA}$ e $\overrightarrow{HB}$ sieno le direzioni positive, se Q_1, Q_2 son punti della retta BA e P_1, P_2 della retta BC, tali che sia

$$(BQ_1) = (BQ_2) = (CP_1) = (CP_2) = m$$

Si ha, ponendo $\overline{HA} = a$, $\overline{HB} = b$:

$$P_1, P_2 \equiv \left(\frac{-a(c \mp m)}{c}, \ \frac{\pm bm}{c}\right)$$
$$Q_1, Q_2 \equiv \left(\frac{\pm am}{c}, \ \frac{b(c \mp m)}{c}\right)$$

dove, per semplicità, si è posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Essendo $A \equiv (a, o)$, $C \equiv (-a, o)$ si hanno per le rette AP_1 (AP_2) e CQ_1 (CQ_2) le equazioni:

$$\pm m(-bx + ay + ab) = 2acy$$
$$\pm m(\ \ bx + ay + ab) = c(bx - ay + ab),$$

dalle quali, eliminando m, ed accoppiando i segni nei due modi possibili, si hanno le equazioni, che rappresentano il luogo cercato:

$$b^2x^2 + 3a^2y^2 + 2a^2by - a^2b^2 = 0$$
$$b^2x^2 - 4abxy - a^2y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

Perciò il luogo considerato si compone di una ellisse e di una iperbole; quella si riduce ad un circolo se è $b = a\sqrt{3}$ (cioè *se il triangolo dato è equilatero*), questa si riduce ad una iperbole equilatera se è $b = a$ (cioè *se il triangolo dato è isoscele rettangolo*).

Altra risoluzione del sig. Barisien.

636. *L'inviluppo dei cerchi descritti sulle corde di una conica* $C^{(2)}$ *che passano (prolungate, se il punto è esterno) per uno stesso punto* P *come diametri, è una quartica bicircolare se* $C^{(2)}$ *ha centro; è una cubica circolare se* $C^{(2)}$ *è parabola. Se* P *è sopra* $C^{(2)}$ *lo inviluppo è razionale (teorema noto). Se* $C^{(2)}$ *è cerchio, l'inviluppo è in generale un ovale di Cartesio. Esaminare i casi particolari nei quali* P *è all'infinito oppure è* P *centro di* $C^{(2)}$.

Retali.

Risoluzione del prof. Cardoso-Laynes di Susa.

1. Prendendo per origine delle coordinate ortogonali il punto P e lasciando indeterminata la direzione degli assi, sieno rispettivamente

$$\varphi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \qquad (1)$$
$$y = mx \qquad (2)$$

l'equazione di $C^{(2)}$ e quella di una retta del fascio di centro P.

Le coordinate dei punti $M_1 \equiv (x_1, y_1)$ ed $M_2 \equiv (x_2, y_2)$ d'incontro delle (1) (2) sono date dalle formule

$$x_1, x_2 = \frac{1}{\beta}\left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - a_{33}\beta}\right);$$
$$y_1 = mx_1; \qquad y_2 = mx_2,$$

dove, per semplicità, è stato posto

$$\alpha = a_{13} + m a_{23}\,; \qquad \beta = a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2. \tag{3}$$

Il punto medio M_0 del segmento M_1M_2 ha per coordinate

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -\frac{\alpha}{\beta}\,; \qquad y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = -\frac{m\alpha}{\beta}$$

ed inoltre è

$$\overline{M_1M_2}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = \frac{1+m^2}{4}(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{\beta^2}(1+m^2)(\alpha^2 - a_{33}\beta),$$

e quindi il circolo avente per diametro M_1M_2 è rappresentato dalla equazione

$$\left(x + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(y + \frac{m\alpha}{\beta}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}(1+m^2)(\alpha^2 - a_{33}\beta)$$

cioè

$$\beta(x^2 + y^2) + 2\alpha(x + my) + a_{33}(1 + m^2) = 0$$

e, tenendo conto delle (3):

$$f(x, y, m) = m^2\left\{a_{22}(x^2+y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} + \\ + 2m\left\{a_{12}(x^2+y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\} + a_{11}(x^2+y^2) + 2a_{13}x + a_{33} = 0. \tag{4}$$

Poichè si ha

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 2m\left\{a_{22}(x^2+y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} + 2\left\{a_{12}(x^2+y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\} = 0,$$

dalla equazione

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0 \tag{5}$$

si ha

$$m = -\frac{a_{12}(x^2+y^2) + a_{23}x + a_{13}y}{a_{22}(x^2+y^2) + 2a_{23}y + a_{33}}$$

e quindi l'inviluppo richiesto, che si ottiene eliminando m fra le (4), (5), sarà rappresentato dalla equazione

$$\left\{a_{11}(x^2+y^2) + 2a_{13}x + a_{33}\right\}\left\{a_{22}(x^2+y^2) + 2a_{23}y + a_{33}\right\} - \\ - \left\{a_{12}(x^2+y^2) + a_{23}x + a_{13}y\right\}^2 = 0,$$

cioè, indicando con A_{rs} l'elemento reciproco di a_{rs} nel discriminante della (1):

$$A_{33}(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)(A_{13}x + A_{23}y) + (A_{11} + a_{11}a_{33})x^2 + \\ 2a_{13}a_{23}xy + (A_{22} + a_{22}a_{33})y^2 + 2a_{13}a_{33}x + 2a_{23}a_{33}y + a^2_{33} = 0. \tag{6}$$

2. Se è

$$A_{33} = 0,$$

cioè se $C^{(2)}$ è una parabola, la (6) diviene

$$2(x^2+y^2)(A_{13}x + A_{23}y) + (A_{11} + a_{13}a_{33})x + 2a_{13}a_{23}xy + \\ + (A_{22} + a_{22}a_{33})y^2 + 2a_{13}a_{33}x + 2a_{23}a_{33}y + a^2_{33} = 0 \tag{7}$$

che rappresenta un *cubica circolare*, e se P è sulla $C^{(2)}$, cioè se è $a_{33} = 0$, la (7) si riduce alla seguente:

$$2(x^2+y^2)(A_{13}x + A_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0 \tag{8}$$

che rappresenta una *cubica circolare cuspidale* e quindi *razionale*.

In particolare se P è il vertice della $C^{(2)}$, cioè se la (1), rappresentando una parabola riferita all'asse principale (x) ed alla tangente al vertice (y), diviene $y^2 = 2$, la (8), trascurando un fattore costante, prende la forma

$$x(x^2 + y^2) + \frac{p}{2} y^2 = 0$$

che rappresenta una *Cissoide di Diocle*,

3. Supponendo invece

$$A_{33} \gtrless 0,$$

cioè supponendo che $C^{(2)}$ sia una conica a centro, la (6) rappresenta, in generale, una *quartica bicircolare*.

Se $C^{(2)}$ passa per P, cioè se è $a_{33} = 0$, la (6) diviene

$$A_{33}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(A_{13}x + A_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0.$$

che rappresenta una quartica bicircolare con una cuspide in P ed ha per tangente di regresso

$$a_{23}x - a_{13}y = 0.$$

Tale quartica, avendo tre punti doppi (P ed i due punti ciclici del piano) per una nota formola di Plücker, indicando con p il genere della curva, si ha

$$p = \frac{3 \cdot 2}{2} - 3 = 0,$$

cioè la curva è razionale.

4. *Se* $C^{(2)}$ *è un circolo* cioè se è

$$a_{11} = a_{22} = 1; \qquad a_{12} = 0,$$

la (6) diviene

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(a_{13}x + a_{23}y) + (2a_{33} - a_{23}^2)\, x^2 + 2a_{13}\, a_{23}\, xy + \\ + (2a_{33} - a_{13}^2)\, y^2 + 2a_{13}\, a_{33}\, x + 2a_{23}\, a_{33} y + a^2_{33} = 0\end{aligned} \qquad (9)$$

che può scriversi anche

$$\begin{aligned}&[x^2 + y^2 + a_{13}x + a_{23}y + a_{33} - {}^1\!/_2\, (a^2_{13} + a^2_{23})]^2 \\ &+ (a^2_{13} + a^2_{23})\, [a_{13}x + a_{23}y + a_{33} - {}^1\!/_4\, (a^2_{13} + a^2_{23})] = 0\end{aligned}$$

e questa, essendo della forma

$$[f_2\,(x, y)]^2 + K \,.\, f_1\,(x, y) = 0$$

dove $f_n\,(x, y)$ indica una funzione di grado n in x e y e K è una costante, mostra evidentemente di rappresentare un *ovale cartesiano*.

In particolare se è $a_{33} = 0$, cioè se P è sul circolo $C^{(2)}$, la (9) diviene

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)(a_{13}x + a_{23}y) - (a_{23}x - a_{13}y)^2 = 0$$

la quale rappresenta una *cardioide*.

Ciò resta ancor più evidente prendendo per asse delle x, la cui direzione fu lasciata indeterminata, la tangente di regresso, cioè supponendo $a_{23} = 0$, nel qual caso la precedente diviene

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a_{13}x\,(y^2 + x^2) - a^2_{13}y^2 = 0$$

che è l'equazione normale di una cardioide, coincoide del circolo

$$x^2 + y^2 + a_{13}x = 0.$$

5. *Se* P *è il centro della curva* $C^{(2)}$ i cerchi son tutti concetrici e perciò non si ha inviluppo reale.

6. *Se* P *è un fuoco della* $C^{(2)}$, la (1) diviene

$$(1-e^2)\,x^2+y^2-2e^2\delta x-e^2\delta^2=0,$$

dove e e δ rappresentano rispettivamente l'eccentricità e la distanza del fuoco dalla corrispondente direttrice e quindi la (6) diviene:

$$(1-e^2)(x^2+y^2)^2+2e^2\delta x(x^2+y^2)+e^2\delta^2x^2(e^2-2)-2e^2\delta^2y^2-2e^4\delta^3x+e^4\delta^4=0$$

che si scinde nelle due equazioni:

$$(1\pm e)(x^2+y^2)+e^2\delta x-e^2\delta^2=0,$$

le quali rappresentano una coppia di circoli.

Nel caso però in cui $C^{(2)}$ sia una parabola si ha $e=1$ e perciò uno dei circoli si riduce alla retta

$$x+p=0,$$

(direttrice della parabola) e quindi si ha il

Teorema. — *I circoli che hanno per diametri le corde passanti per il fuoco di una parabola sono tangenti alla direttrice.*

7. Considerando da ultimo il caso in cui *sia* P *a distanza infinita*, se è $C^{(2)}$ rappresentata dalla (1) e una qualunque delle rette parallele del fascio P_∞ ha per equazione

$$y=k, \tag{10}$$

le coordinate dei punti M_1, M_2, d'incontro delle (1) (10) son date da

$$x_1,\ x_2=\frac{1}{a_{11}}\left[-(a_{12}k+a_{13})\pm\sqrt{-A_{33}k^2+2A_{23}k-A_{22}}\right],$$
$$y_1=y_2=k.$$

Con un procedimento analogo a quello usato nel § 1 per il caso generale, si ha, per l'equazione del circolo di diametro M_1M_2

$$\left(x+\frac{a_{12}k+a_{13}}{a_{11}}\right)^2+(y-k)^2=\frac{-A_{33}k^2+2A_{23}k-A_{22}}{a^2_{11}},$$

cioè

$$f(x,y,k)=k^2(a_{11}+a_{22})+2k(a_{12}x-a_{11}y+a_{23})+a_{11}(x^2+y^2)+2a_{13}x+a_{33}=0$$

e poichè l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial k}=0$$

dà

$$k=-\frac{a_{12}x-a_{11}y+a_{23}}{a_{11}+a_{22}},$$

si ha per l'inviluppo cercato l'equazione:

$$x^2(A_{33}+a^2_{12})+2a_{11}a_{12}xy+a_{11}a_{22}y^2-2x(A_{13}-a_{11}a_{13})+2a_{11}a_{23}y+A_{11}+a_{11}a_{33}=0 \tag{11}$$

che si può scrivere anche

$$a_{11}\varphi+A_{33}x^2-2A_{13}x+A_{11}=0.$$

La (11), in generale, rappresenta una conica.

Altra risoluzione del sig. Barisien.

QUISTIONI PROPOSTE

638. Dimostrare che in un triangolo sferico qualunque si ha

$$\Sigma \frac{\operatorname{sen}\beta \cos(s-b) - \operatorname{sen}\gamma \cos(s-c)}{1-\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma} = 0,$$

dove con s s'intende il semiperimetro.

639. (*) Fra m persone delle quali m_1 parlano solo il francese, m_2 solo l'inglese e le altre tanto il francese quanto l'inglese se ne vogliono scegliere n in modo che n_1 di queste parlino almeno il francese e le altre almeno l'inglese: in quante maniere si potrà fare la scelta?

G. Pesci.

640. Dimostrare che per $-\rho < x < \rho$ è

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{a}{\sqrt{b^2-4ac}}\, l\left(\frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \qquad 4ac-b^2<0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{-2a}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} \qquad 4ac-b^2>0$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1} = \frac{-2a}{b+2cx} \qquad 4ac-b^2=0$$

dove ρ è, in valore assoluto, la più piccola fra le radici $-x_1$, $-x_2$ di $a+bx+cx^2=0$ ed inoltre

$$c_i = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\binom{-1}{j}\binom{-1}{i-j}}{x_1^{\,j}\, x_2^{\,i-j}}.$$

641. Dimostrare che, se si indicano con $d_{i1}, d_{i2} \ldots d_{il_i}$ tutti i divisori del numero intero i, con $\varphi^{(i)}$ il numero dei numeri primi con i ed inferiori ad i, e con α_i una radice di $x^n-1=0$ $(i=1,2,\ldots n)$, si ha:

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} n^{n-2} = \prod_{j=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{l_1}\varphi(d_{1i}) + \alpha_j \sum_{i=1}^{l_2}\varphi(d_{2i}) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \alpha_j^{\,n-1}\sum_{i=1}^{l_n}\varphi(d_{ni})\right\}.$$

Occhipinti.

(*) Questo esercizio di analisi combinatoria fu proposto nel *Supplemento al Periodico* del decembre scorso (giuoco 142); essendo rimasto insoluto lo riproponiamo qui.

BIBLIOGRAFIA

GELIN. — *Traité d'arithmetique élémentaire.* Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique. Namur, Wesmael-Charlier, 1902.

Nel fasc. III, Anno XIII, 1898, di questo periodico abbiamo parlato della 4ª edizione di questo ottimo libro. Sulla 5ª edizione, riferiamo il giudizio dato dal chiarissimo prof. P. Mansion, mentre la presentava all'Accademia reale del Belgio, (vedi Bulletins, n. 6, juin, 1902).

Il Trattato d'Aritmetica elementare del sig. abate Gelin, ha ottenuto, alcuni anni or sono, uno dei premi *De Keyn* conferiti dall'Accademia. Fino dalla sua prima edizione (1881) quest'Aritmetica era la più rigorosa e la più chiara che fosse comparsa nel Belgio; poi, nella 2ª ediz., (1885) essa era la più completa, e, come manuale pratico, la migliore che fosse pubblicata in francese. Nelle edizioni seguenti (1888, 1897) e in quella del 1902, che presentiamo oggi all'Accademia, l'Autore ha introdotto una quantità di miglioramenti di dettaglio, tanto dal punto di vista scientifico che dal punto di vista delle applicazioni; per esempio nella teoria dei numeri primi e nella esposizione del sistema metrico. Attualmente è senza dubbio la sola opera di questo genere nella quale si possano trovare le vere definizioni di metro, chilogrammo, litro, stero, adottate dal *Comitato internazionale dei pesi e misure* nel 1889, e delle notizie assolutamente precise sulle misure e monete antiche e moderne, che è utile di conoscere ai nostri tempi. Forse non è privo d'interesse ricordare che il sig. Gelin è stato il primo (così almeno crediamo), che ha fatto osservare come sotto l'antico regime la divisione del piede era decimale in due terzi del Belgio.

Il Trattato d'Aritmetica del sig. Gelin resta il migliore dal punto di vista del fondo e della forma, e il più completo dal punto di vista delle applicazioni, che sia stato pubblicato nel Belgio. P. MANSION.

NIEWENGLOWSKI. — *Cours d'Algèbre* à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques speciales et des candidats à l'École normale superieure et à l'École polythécnique. Paris, Colin, 1902. 2 volumes. 5me édition.

L'esaurimento di quattro edizioni dimostra con quale favore è accolta in Francia quest'opera del prof. Niewenglowski, ispettore dell'Accademia di Parigi. La nuova edizione differisce dalle precedenti per l'ordine delle materie, per l'aggiunta del 1° capitolo che contiene un riassunto semplice e chiaro della teoria puramente analitica dei numeri positivi e negativi, e per la semplificazione di alcune dimostrazioni.

Il contenuto è assai più vasto di quanto possa far supporre il modesto titolo di Corso d'Algebra. Infatti il 1° volume di 387 pag. diviso in 21 capitoli contiene tutta l'Algebra elementare ed i complementi cioè analisi combinatoria, formula del binomio, limiti, determinanti, equazioni lineari, numeri complessi, serie, frazioni continue, continuità delle funzioni, funzione esponenziale logaritmica, ecc.

Il secondo volume di 488 pag. è diviso in 20 capitoli, i primi nove dei quali contengono gli elementi di calcolo differenziale e integrale, e gli 11 rimanenti la teoria delle equazioni.

L'opera termina con tre note, la prima delle quali contiene un esempio di funzione continua senza derivata [$F(x) = \sum_{0}^{\infty} b^n \cos \pi a^n x$], la seconda contiene la dimostrazione del teorema di D'Alembert pubblicata dal prof. Valecki nei " Comptes Rendus " de l'Académie des Sciences (19 marzo 1883), la terza, scritta da Borel, è il riassunto dei lavori del Borel stesso sulle serie convergenti, che valsero all'autore il gran premio delle scienze matematiche assegnato dall'Accademia delle Scienze.

La sobrietà e la chiarezza dell'esposizione, non disgiunta dal rigore del ragionamento, la modernità dei concetti, l'abbondanza di esercizi e di applicazioni su tutti gli argomenti esposti, rendono quest'opera molto pregevole.

MAUPIN. — *Opinions et curiosités touchant la mathématique.* 2me série. Paris, C. Naud. 1902.

Nel fasc. I anno XV di questo periodico abbiamo fatto cenno della prima serie di curiosità relative alla matematica raccolte dal sig. Maupin. Di questa seconda serie possiamo ripetere quanto fu detto sulla prima.

Il libro non ha la pretesa di essere un lavoro dotto, ma è semplicemente la raccolta di cose curiose capitate sotto gli occhi di uno studioso di storia della matematica nel consultare opere antiche ed anche abbastanza moderne, e può esser letto con piacere ed interesse da chiunque.

Si compone di due parti, la prima delle quali, divisa in 19 capitoli, contiene cose curiose estratte da vari autori, cominciando da Gian Piero de Mesmes (1557) e terminando ad un discorso sul calcolo delle probabilità fatto dal grande Arago nel 1815 alla Camera dei Deputati, a proposito dei giurati, discorso che persuase poco, a quanto sembra, i suoi colleghi; e a due pretese risoluzioni della quadratura del circolo (1852 e 1856).

La seconda parte è un riassunto dell'opera di Simone Stevin di Bruges, amico e maestro di Maurizio di Nassau contenente l'aritmetica, i sei libri d'algebra di Diofanto, la pratica aritmetica, le memorie del principe di Nassau sulla cosmografia, la pratica di geometria, la statica e l'ottica, ecc.

ROUSE BALL. — *Breve compendio della storia delle matematiche.* Versione dall'Inglese con note aggiunte e modificazioni dei dottori D. Gambioli e G. Puliti riveduta e corretta dal prof. G. Loria. VOL. I. Le matematiche dall'antichità al rinascimento. Bologna, Zanichelli, 1903.

Questo libro del chiaro rettore del Collegio delle trinità in Cambridge nel 1901 aveva già avuto la fortuna di giungere alla terza edizione inglese. Esso, dice l'autore nella prefazione alla 3a edizione, può servire come introduzione allo studio di opere più estese di questo genere; ma ha principalmente lo scopo di dare una breve e popolare notizia dei fatti più importanti della storia della matematica; fatti che possono desiderare di conoscere anche coloro che non hanno o la buona volontà o il tempo di studiarli sistematicamente.

Per la storia fino al 1758 l'autore dichiara di avere attinto principalmente alla classica opera di M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

Mancando in Italia un compendio di storia della matematica, ci sembra ottima l'idea dei professori Puliti e Gambioli di tradurre l'opera pregevolissima del Rouse Ball, con opportune note ed aggiunte.

La prima parte, che va dalle epoche più remote fino a tutto il rinascimento, è dovuta al dott. Puliti, il quale ha aggiunto alla fine del volume una lunga nota sulla scuola Pitagorica che è indubbiamente fra le più importanti dell'antichità.

La seconda parte non ancora pubblicata è opera del dott. Gambioli.

È garanzia della serietà ed importanza di questo libro, il nome del più autorevolo cultore degli studi storico-matematici in Italia, il prof. G. Loria, che ha coadiuvato i due traduttori, correggendo le bozze di stampa.

VIVANTI. — *Complementi di matematica ad uso dei chimici e naturalisti.* Manuali Hoepli, N. 329-330.

Sono ben rari ormai i matematici che, restringendosi nella cerchia dei propri studi, non cercano di volgere l'occhio curioso nel campo delle altre scienze e delle arti, sia pure da dilettanti, non volendo che i profani applichino il poco rispettoso proverbio "*Purus mathematicus, purus asinus*". Invece non solo i cultori delle arti belle, ma anche i cultori delle altre scienze guardano con terrore e diffidenza la matematica, come cosa noiosa, indigesta, che vaga nel campo delle nuvole.

Eppure la matematica è la sola scienza che può fare a meno del sussidio delle altre, che non ha bisogno di altro laboratorio che un cervello umano ben costruito e ben equilibrato. Mentre tutte le altre scienze economiche, sociali, naturali hanno bisogno di ricorrere al sussidio della matematica; anzi non possono pretendere al nome di scienza, se non quando dai fenomeni osservati si possano dedurre delle leggi generali esprimibili in numeri. L'antipatia, la diffidenza dei più contro la matematica è dovuta principalmente alla natura stessa della nostra scienza, che deve svolgersi per mezzo di formule e simboli, che agli occhi dei profani assumono un carattere misterioso come quello di una lingua ignota; ed è per conseguenza di assai difficile volgarizzazione; un po' è dovuta all'indole e alle abitudini dei suoi cultori, che mal si rassegnano a fare uno sforzo per renderla più popolare che sia possibile.

Ma il progresso delle scienze naturali ha cominciato a persuadere i cultori di di queste, che dalla nozione sia pure sommaria, dei metodi matematici possono ricavare un potentissimo ausilio dai loro studi; e ciò è stato ufficialmente riconosciuto dai nuovi regolamenti Universitari, che impongono un corso complementare di matematiche per i chimici.

Il prof. Giulio Vivanti che, percorrendo gli eventi, aveva fino dal 1900-01 fatto un corso libero per i naturalisti dell'Università di Messina, era meglio di ogni altro nel caso di preparare un libro che contenesse in breve mole le nozioni fondamentali di matematica superiore, che possono essere utili agli studenti di chimica non solo, ma anche a tutti coloro che si dedicano ad una qualsiasi scienza applicata.

Il manuale da esso pubblicato ha dunque il carattere di un libro di volgarizzazione; si propone di condurre il lettore rapidamente e col minimo sforzo possibile alla conoscenza dei principali metodi matematici, di far conoscere i risultati, omettendo le dimostrazioni, quando sono troppo difficili, mostrando contemporaneamente esempi delle applicazioni che si possono fare alle scienze pratiche. Ottenere tutto ciò senza sacrificare interamente il rigore scientifico non è certo cosa facile. Ma pure ci sembra che l'egregio autore, se pure non l'ha raggiunto, si sia assai avvicinato allo scopo; quantunque certe dimostrazioni debbano sembrare ancora troppo scabrose e certi concetti elevati debbono essere assimilati non senza difficoltà dalle persone alle quali è principalmente destinato il libro.

La distribuzione delle materie adottate è la seguente:

Parte I. Algebra. — Analisi combinatoria, potenza d'un binomio, determinanti, equazioni lineari, serie.

Parte II. Geometria analitica — 1° *geometria del piano*. Sistemi di cordinate, punti e rette, coniche, altre curve; 2° *geometria dello spazio*, coordinate e coseni direttori, punti, rette e piani, quadriche curve nello spazio.

Parte III. Calcolo infinitesimale. — Funzioni, limiti *continuità*, derivate e differenziali. Serie di Taylor e di Mac-Laurin. Applicazioni geometriche. Massimi e minimi. Integrali, equazioni differenziali.

Parte IV. Calcolo delle probabilità. — Definizioni e teoremi generali. Applicazioni ai giuochi. Teoremi di Bernouilli. Legge dei grandi numeri; applicazioni. Teoria degli errori. Metodo dei minimi quadrati.

Parte V. Meccanica.

Parte VI. Termodinamica e meccanica chimica.

Come si vede da questo prospetto, di geometria analitica è posto quel tanto che basta perchè il lettore si familiarizzi coi metodi di rappresentazione delle funzioni per mezzo di linee o superficie, ed è dato un maggiore sviluppo al calcolo infinitesimale che, come osserva giustamente l'A., è il metodo universale che permette di porre in equazione qualunque problema scientifico di carattere quantitativo, e al calcolo delle probabilità il cui uso è così frequente in tutte le applicazioni.

Questo estratto di cognizioni è precisamente ciò che è necessario e sufficiente per i chimici, ecc.? Solo i cultori delle scienze applicate potranno rispondere in modo esauriente. A noi sembra che in generale la scelta sia stata fatta con ponderazione ed acume, tolta qualche lieve eccezione. Per esempio dubitiamo che la teoria dei determinanti potrebbe essere omessa.

ERRATA-CORRIGE

Ai nomi dei risolutori della q. 618 si aggiunga quello del D.r **Nicolai** e a quelli delle q. 604, 605 il sig. **Barisien**.

ὃν οἱ θεοὶ φιλοῦσιν ἀποθνήσκει νέος.

Ai primi dello scorso aprile, veniva rapito alla famiglia e alla scienza il giovane

Dott. ATTILIO CREPAS

che i lettori del *Periodico di Matematica* e del *Supplemento* avevano avuto occasione di conoscere ed apprezzare, e che, per l'acutezza dell'ingegno, l'amore allo studio della Matematica, alla quale si era dedicato, l'attività grandissima, dava sicuro affidamento che avrebbe conquistato un posto notevole fra i matematici.

La falce inesorabile della morte lo ha rapito troppo presto all'affetto della famiglia e degli amici, troncando le speranze che si fondavano giustamente su lui; è morto combattendo per la scienza, poichè l'ultima parte di un suo lavoro si pubblicava nel precedente fascicolo di questo giornale, quando la sua spoglia mortale veniva composta nella sua ultima dimora.

Ecco brevi notizie biografiche di lui.

Attilio Crepas, nacque ad Adria (Rovigo) nel 1880. Percorse gli studi classici al Ginnasio-Liceo Parini di Milano e gli studi di Matematica pura alla R. Università di Pavia, ove si laureò con pieni voti assoluti e con lode. Insegnò subito Matematica all'Istituto Tirelli di Milano e fu poi nominato assistente di geometria superiore all'Università di Pavia, assistente cioè dell'illustre prof. Aschieri. Scrisse in vari periodici, fra cui il *Pitagora*, il *Periodico di Matematica* e il *Supplemento*. All'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vennero lette le seguenti sue memorie: *Ricerche sui piani che secano e toccano delle curve algebriche in un iperspazio*, (estratto di una parte della dissertazione di laurea). *Sulle coniche che secano e toccano delle curve in un iperspazio*. (Id.) Una terza memoria, è stata letta e pubblicata dopo la morte di lui. I funerali riuscirono degni del compianto giovane. Al cimitero, fra gli altri, disse nobili parole il prof. Berzolari dell'Ateneo pavese. La salma riposa nella tomba di famiglia a Verona.

***

Il 10 maggio, a soli trentott'anni, moriva a Bassano Veneto il

Prof. Dott. G. B. MARANGONI

insegnante di matematica in quel Ginnasio pareggiato, da lunghi anni abbonato al *Periodico* e socio di *Mathesis*. Dotato di forte ingegno, di vasta cultura, critico acutissimo di scritti scientifico-didattici, era anche appassionato e valente cultore della musica, aveva un'anima d'artista. Quantunque nella vita privata di carattere mite, fu pubblicista battagliero; entrato nelle lotte cittadine della sua città di adozione, molte amarezze ne trasse, e queste forse lo condussero alla tomba.... Ed è morto nel fior degli anni, povero infelice, quando agli altri più sorride la vita, quella vita che mai volle sorridere a lui! Nel pensare al povero morto mi sovviene del grande e sventurato poeta di Consalvo e della Ginestra....

G. Cardoso-Laynes.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 10 giugno 1908.