CONTRIBUTO ALLA " GEOMETRIA RECENTE DEL TETRAEDRO "

In seguito ad un accurato studio della pregevole opera del Thiry dal titolo *Applications remarquables du théorème de Stewart et Théorie du barycentre,* mi venne l'idea di tentare se si potesse costruire per il tetraedro una geometria analoga alla recente geometria del triangolo. Veduto che il metodo da me seguito si prestava allo scopo, ho tratte alcune conseguenze che credo opportuno esporre ai lettori del Periodico. Tengo però a dichiarare che pubblicando la presente Nota non intendo di presentare un vero e proprio lavoro; ho cercato più che altro di invogliare qualche studioso a fissare la propria attenzione su questo argomento, che a me sembra fecondo di nuovi e importanti risultati.

---

1. Sia dato un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$: indicheremo con a_i l'area della faccia opposta al vertice A_i e con (a_ia_h) la misura del diedro compreso dalle facce le cui aree sono a_i e a_h.

Porremo a fondamento di questa nota il

Teorema 1°. — *Una faccia di un tetraedro è uguale alla somma dei prodotti delle altre tre per i coseni degli angoli che esse formano con la prima.*

Omettiamo la dimostrazione essendo semplicissima. Applicando questo teorema a ciascuna delle quattro facce del tetraedro otteniamo un primo gruppo di formule:

$$(\mathrm{I})\quad \left|\begin{array}{l} a_1 = a_2\cos(a_2a_1) + a_3\cos(a_3a_1) + a_4\cos(a_4a_1) \\ a_2 = a_3\cos(a_3a_2) + a_4\cos(a_4a_2) + a_1\cos(a_1a_2) \\ a_3 = a_4\cos(a_4a_3) + a_1\cos(a_1a_3) + a_2\cos(a_2a_3) \\ a_4 = a_1\cos(a_1a_4) + a_2\cos(a_2a_4) + a_3\cos(a_3a_4). \end{array}\right.$$

Moltiplicando queste rispettivamente per a_1, a_2, $-a_3$ e $-a_4$ e sommando, scambiando poi circolarmente gli indici, abbiamo un secondo gruppo di formule:

$$(\mathrm{II})\quad \left|\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2) = a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4\cos(a_3a_4) \\ a_2^2 + a_3^2 - 2a_2a_3\cos(a_2a_3) = a_1^2 + a_4^2 - 2a_1a_4\cos(a_1a_4) \\ a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_3\cos(a_1a_3) = a_2^2 + a_4^2 - 2a_2a_4\cos(a_2a_4), \end{array}\right.$$

e quindi il corrispondente

Teorema 2°. — *In un tetraedro la somma dei quadrati di due* *facce diminuita del doppio prodotto di esse pel coseno dell'angolo compreso, è uguale alla somma dei quadrati delle altre due meno il doppio prodotto di queste pel coseno dell'angolo che esse comprendono.*

Corollario. — *Se due diedri opposti di un tetraedro sono retti, la somma dei quadrati delle facce che comprendono l'uno è uguale alla somma dei quadrati di quelle che comprendono l'altro.*

Dalle (I), sommandole dopo averle moltiplicate rispettivamente per a_1, $-a_2$, $-a_3$, $-a_4$ e scambiando poi circolarmente gli indici otteniamo un terzo gruppo di formule:

$$
(\mathrm{III})\left|\begin{array}{l}
a_1^2 = a_2^2+a_3^2+a_4^2-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-2a_3a_4\cos(a_3a_4)-2a_2a_4\cos(a_2a_4)\\
a_2^2 = a_3^2+a_4^2+a_1^2-2a_3a_4\cos(a_3a_4)-2a_4a_1\cos(a_4a_1)-2a_3a_1\cos(a_3a_1)\\
a_3^2 = a_4^2+a_1^2+a_2^2-2a_4a_1\cos(a_4a_1)-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-2a_4a_2\cos(a_4a_2)\\
a_4^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2-2a_1a_2\cos(a_1a_2)-2a_2a_3\cos(a_2a_3)-2a_1a_3\cos(a_1a_3)
\end{array}\right.
$$

e il corrispondente

Teorema 3°. — *Il quadrato di una faccia di un tetraedro è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre diminuita del doppio dei prodotti di esse due a due per i coseni degli angoli compresi.*

Corollario. — *Se un triedro di un tetraedro è trirettangolo, il quadrato della faccia ad esso opposta è uguale alla somma dei quadrati delle altre tre.*

Risultato noto sotto il nome di *teorema di Gua de Malves.*

2. Detti A_i A_j A_h A_l i vertici del tetraedro, preso sullo spigolo A_iA_j un punto P_{ij} tale che sia

$$A_iP_{ij} : P_{ij}A_j = a_j^n : a_i^n, \qquad (\alpha)$$

consideriamo il piano che passa per il punto P_{ij} e per lo spigolo opposto A_hA_l e gli altri cinque ad esso analoghi. Dico che questi sei piani passano tutti per un medesimo punto.

Intanto, nella faccia $A_iA_hA_l$, le rette che dai vertici A_i, A_h, A_l, vanno rispettivamente ai punti P_{hl}, P_{il}, P_{ih} concorrono in un punto P_j essendo in virtù della posizione fatta, applicabile il teorema reciproco di quello di Ceva. Segue da questo che i tre piani passanti rispettivamente per P_{hl}, P_{il}, P_{ih} e per gli spigoli opposti si segano secondo la retta P_jA_j. Così pure i piani passanti per i punti P_{ij}, P_{ih}, P_{jh} e per gli spigoli A_hA_l, A_jA_l, A_iA_l passano per la retta A_lP_l che congiunge il vertice A_l col punto d'incontro delle tre ceviane A_hP_{ij}, A_jP_{ih}, A_iP_{jh}. Ora, tanto il piano contenente A_iA_h e P_jA_j come quello contenente A_iA_h e P_lA_l passano per P_{jl} e quindi coincidono; le A_jP_j e A_lP_l giacciono dunque in un piano e quindi s'incontrano. Le quattro rette A_iP_i, A_hP_h, A_jP_j, A_lP_l incontrandosi due a due e non potendo giacere nel medesimo piano, passano per un medesimo punto. Questo punto sarà costantemente indicato con K_n. (*)

(*) Se chiamiamo *sezioni isotomiche* quelle che escono da un medesimo spigolo e vanno a due punti dello spigolo opposto simmetrici rispetto al punto medio di esso, è subito visto che: " Sezioni

OSSERVAZIONE I. — I sei piani di cui abbiamo parlato sopra, tagliano il tetraedro secondo sei triangoli a cui daremo il nome di *sezioni ceviane di ordine* n. In particolare, per n uguale a zero avremo le sezioni di ordine zero o *sezioni mediane*, il cui punto d'incontro K_0 è il *baricentro* del tetraedro; per n eguale a uno, avremo le sezioni di primo ordine o *sezioni bisettrici* il cui punto K_1 è il *centro della sfera inscritta* nel tetraedro; per n eguale a due le sezioni di second'ordine o *sezioni simediane* il cui punto d'incontro K_2 è il *punto di Lemoine*.

OSSERVAZIONE II. — Chiamando h_j e h_i le distanze del punto P_{ij} dalle facce a_j e a_i e osservando che:

$$A_iP_{ij} : P_{ij}A_j = \text{tetr } P_{ij}A_iA_hA_l : \text{tetr } P_{ij}A_jA_hA_l \,,$$

si ricava, tenendo conto della (α)

$$a_j^n : a_i^n = a_jh_j : a_ih_i$$

ovvero:

$$h_i : h_j = a_i^{n-1} : a_j^{n-1}.$$

Si ha così il

TEOREMA 4°. — *Se un punto divide lo spigolo di un tetraedro in parti proporzionali alle potenze ennesime delle facce adiacenti, le distanze di questo punto da dette facce sono proporzionali alle potenze $(n-1)$-esime delle facce stesse.*

Questo teorema giustifica le denominazioni da noi date alle sezioni di ordine zero, uno, due.

3. Ci proponiamo ora di trovare una formula che permetta di calcolare l'area della sezione il cui piano passa per uno spigolo e divide lo spigolo opposto nel rapporto $m : n$.

Riferendoci al punto P_{12} dello spigolo A_1A_2, poniamo

$$\text{area } P_{12}A_3A_4 = p_{12}, \quad \text{area } P_{12}A_2A_3 = d_1, \quad \text{area } P_{12}A_1A_3 = d_2$$
$$\text{area } P_{12}A_2A_4 = c_1, \quad \text{area } P_{12}A_1A_4 = c_2 \,.$$

Applicando alle facce a_1 e a_2 dei due tetraedri $P_{12}A_2A_3A_4$ e $P_{12}A_1A_3A_4$ il teorema 3°, abbiamo:

$$a_1^2 = p_{12}^2 + c_1^2 + d_1^2 - 2\,[p_{12}c_1 \cos(p_{12}c_1) + p_{12}d_1 \cos(p_{12}d_1) + c_1d_1 \cos(c_1d_1)]$$
$$a_2^2 = p_{12}^2 + c_2^2 + d_2^2 - 2\,[p_{12}c_2 \cos(p_{12}c_2) + p_{12}d_2 \cos(p_{12}d_2) + c_2d_2 \cos(c_2d_2)].$$

Sommando queste due eguaglianze membro a membro dopo averle moltiplicate rispettivamente per c_2 e c_1 e osservando che è:

$$c_1 + c_2 = a_3 \,,$$

---

isotomiche di ceviane concorrenti in un punto sono esse pure concorrenti in un punto ". Questi due punti si dicono *reciproci*.

Per quanto riguarda le *Sezioni isogonali* si veda il pregevole *Traité de Géométrie* dei Sigg: *Rouché et Comberousse*. Paris, 1900, seconda parte, il quale contiene una Nota sulla geometria recente del tetraedro.

si ottiene:

$$a_1^2 c_2 + a_2^2 c_1 = (p_{12}^2 + c_1 c_2)\, a_3 + d_1^2 c_2 + d_2^2 c_1 - 2p_{12}\,[c_2 d_1 \cos(p_{12} d_1) + \\ + c_1 d_2 \cos(p_{12} d_2)] - 2[c_1 c_2 d_1 \cos(c_1 d_1) + c_1 c_2 d_2 \cos(c_2 d_2)].$$

Essendo ora:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

i termini che si trovano dentro la prima parentesi si distruggono; mettendo poi $d_1 c_2$ al posto di $d_2 c_1$ la formula medesima prende l'aspetto:

$$(c_1 c_2 + p_{12}^2)\, a_3 - 2 d_1 c_2\, [c_1 \cos(c_1 d_1) + c_2 \cos(c_2 d_2)] = a_1^2 c_2 + a_2^2 c_1 .$$

E poichè l'espressione che figura dentro parentesi è uguale ad $a_3 \cos(a_3 a_4)$, otteniamo ancora:

$$a_3 p_{12}^2 + (cc_1 + dd_1)\, c_2 - 2\, d_1 c_2 a_3 \cos(a_3 a_4) = a_1^2 c_2 + a_2^2 c_1 .$$

Quest'ultima può anche scriversi, dividendone ambo i membri per a_3:

$$p_{12}^2 + \frac{c_2}{a_3}\left(a_3^2 \frac{c_1}{a_3} + a_4^2 \frac{d_1}{a_4}\right) - 2 a_3 a_4 \frac{d_1}{a_4} \cdot \frac{c_2}{a_3} = a_1^2 \frac{c_2}{a_3} + a_2^2 \frac{c_1}{a_3} .$$

Ponendo poi:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{m}{n} ,$$

coll'osservare che di qui segue:

$$\frac{d_1}{a_4} = \frac{c_1}{a_3} = \frac{m}{m+n}, \qquad \frac{d_2}{a_4} = \frac{c_2}{a_3} = \frac{n}{m+n},$$

si ottiene:

$$p_{12}^2 + \frac{mn}{(m+n)^2}\,[a_3^2 + a_4^2 - 2 a_3 a_4 \cos(a_3 a_4)] = \frac{a_1^2 n + a_2^2 m}{m+n} ,$$

ossia, per la prima delle (II)

$$p_{12}^2 + \frac{mn}{(m+n)^2}\,[a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 \cos(a_1 a_2)] = \frac{a_1^2 n + a_2^2 m}{m+n} .$$

Da questa si ricava facilmente:

$$(\beta) \qquad (m+n)^2 p_{12}^2 = a_1^2 n^2 + a_2^2 m^2 + 2mn a_1 a_2 \cos(a_1 a_2)$$

che è la formula che cercavamo.

4. Diamo qui qualche applicazione della formula (β) del paragrafo precedente.

1^a. Poniamo $m = n$; otterremo la formula

$$4m_{12}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2),$$

che ci fornisce l'area della sezione mediana uscente dallo spigolo comune alle facce a_1 e a_2.

Scambiando circolarmente gli indici 1, 2, 3 troviamo

$$4m_{23}^2 = a_2^2 + a_3^2 + 2a_2a_3 \cos(a_2a_3)$$
$$4m_{13}^2 = a_1^2 + a_3^2 + 2a_1a_3 \cos(a_1a_3).$$

Sommando queste tre relazioni membro a membro tenendo presente la quarta delle (III), si ottiene

$$4(m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2) = 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - a_4^2,$$

e quindi il corrispondente

Teorema 5°. — *Il quadruplo della somma dei quadrati delle sezioni mediane uscenti da tre spigoli concorrenti in un vertice, è uguale al triplo della somma dei quadrati delle facce passanti pel medesimo vertice, diminuito del quadrato dell'altra faccia.*

Come conseguenza di questo, tenuto presente il corollario del teorema 3°, si ricava

Corollario. — *Se un tetraedro ha un triedro trirettangolo la somma dei quadrati delle sezioni mediane uscenti dagli spigoli di questo, è uguale alla metà del quadrato della faccia opposta.*

Applicando il teorema 5° alle tre facce uscenti da ciascun vertice, ricaviamo, sommando membro a membro le quattro eguaglianze che ne resultano:

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{14}^2 + m_{23}^2 + m_{24}^2 + m_{34}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2,$$

cioè il

Teorema 6°. — *La somma dei quadrati delle sezioni mediane di un tetraedro è uguale alla somma dei quadrati delle facce.*

Notiamo ancora riguardo alle sezioni mediane il

Teorema 7°. — *Il doppio della differenza dei quadrati delle sezioni mediane uscenti da due spigoli opposti, è uguale alla differenza tra le somme dei quadrati delle facce ad esse adiacenti.*

Esso risulta dalle formule

$$a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(a_1a_2) = 2(a_1^2 + a_2^2) - 4m_{12}^2$$
$$a_3^2 + a_4^2 - 2a_3a_4 \cos(a_3a_4) = 2(a_3^2 + a_4^2) - 4m_{34}^2,$$

osservando che i primi membri sono uguali in virtù della prima delle (II). In particolare

Teorema 8°. — *Se la somma dei quadrati di due facce è uguale alla somma dei quadrati delle altre due, le sezioni mediane uscenti dagli spigoli comuni sono equivalenti.*

2ª. Poniamo ora $m = a_2$ ed $n = a_1$: la sezione corrispondente è la bisettrice. Si trova facilmente

$$\beta_{12} = \frac{2a_1a_2}{a_1 + a_2} \cos\left(\frac{a_1a_2}{2}\right).$$

Da questa formula segue un teorema che è l'estensione di quello trovato dal Thiry. (*) Esso può enunciarsi così:

TEOREMA 9°. — *Se dal punto d' incontro* P_{12} *della sezione bisettrice collo spigolo opposto si eleva una perpendicolare al piano della sezione stessa ad incontrare la faccia* $A_2A_3A_4$ *nel punto* M, *il triangolo* A_3A_4M *è medio armonico tra le facce del tetraedro che comprendono la sezione bisettrice.*

3ª. Poniamo da ultimo $m = a_2^2$, $n = a_1^2$: la sezione corrispondente è la simediana. Si trova

$$(a_1^2 + a_2^2)^2 s_{12}^2 = a_1^2a_2^2 [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(a_1a_2)].$$

Osservando poi che l'espressione tra parentesi nel secondo membro è il quadrato del doppio della sezione mediana uscente dal medesimo spigolo, troveremo la formula:

$$\frac{s_{12}}{m_{12}} = \frac{2a_1a_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

estensione di un altro teorema dovuto al Thiry. (**)

5. Vogliamo ancora dire qualche parola sulle sezioni perpendicolari, su quelle sezioni cioè che si ottengono con piani che escono da ciascuno spigolo perpendicolarmente allo spigolo opposto. Queste sezioni non esistendo se non quando i due spigoli in discorso sono fra loro perpendicolari, ci riferiremo senz'altro al tetraedro rettangolo; e poichè il calcolo di esse sfugge alla formula (β), procederemo nel modo seguente:

Indichiamo con h_{12} l'area della sezione perpendicolare uscente dallo spigolo A_3A_4 e con ω_1 e ω_2 le misure degli angoli formati dal piano di questa sezione con quelli delle facce a_1 e a_2 rispettivamente. Avremo:

$$\cos\omega_1 = \frac{h_{12}}{a_1},\ \cos\omega_2 = \frac{h_{12}}{a_2},\ \operatorname{sen}\omega_1 = \frac{\sqrt{a_1^2 - h_{12}^2}}{a_1},\ \operatorname{sen}\omega_2 = \frac{\sqrt{a_2^2 - h_{12}^2}}{a_2}$$

e quindi:

$$\cos(\omega_1 \pm \omega_2) = \cos(a_1a_2) = \frac{h_{12}^2 \mp \sqrt{a_1^2 - h_{12}^2}\cdot\sqrt{a_2^2 - h_{12}^2}}{a_1a_2}$$

dalla quale dopo brevi calcoli si ricava:

$$h_{12}^2 = \frac{a_1^2a_2^2 \operatorname{sen}^2(a_1a_2)}{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos(a_1a_2)}$$

(*) THIRY, *Applications remarquables du théorème de Stewart* etc. 1891, pag. 45.

(**) THIRY, *Op. cit.*, pag. 14.

formula che esprime l'area della sezione perpendicolare in funzione delle facce adiacenti e dell'angolo da esse compreso.

In modo analogo si troverebbe:

$$h_{34}^2 = \frac{a_3^2 a_4^2 \operatorname{sen}^2 (a_3 a_4)}{a_3^2 + a_4^2 - 2a_3 a_4 \cos (a_3 a_4)} .$$

Ne segue, avuto riguardo al teorema 2°, il

TEOREMA 10°. — *Le sezioni perpendicolari di un tetraedro rettangolo uscenti da due spigoli opposti, stanno fra loro come i prodotti delle facce adiacenti per il seno dell'angolo da esse compreso.*

Facciamo da ultimo osservare che la formula (β) trovata nel paragrafo terzo, e buona parte di quelle che da essa derivano, sono quelle stesse che si trovano in Geometria del triangolo, colla sola differenza che gli elementi lato ed angolo sono sostituiti cogli elementi faccia e angolo diedro. La diversità di alcuni risultati da quelli della geometria del triangolo, si può giustificare osservando che mentre nel triangolo si hanno tanti lati quanti angoli, nel tetraedro il numero delle facce è diverso da quello degli angoli diedri.

ENRICO PICCIOLI.

Arpino, febbraio 1904.

SULL'UGUAGLIANZA DIRETTA ED INVERSA DELLE FIGURE

Nei migliori trattati moderni di geometria elementare si definisce l'uguaglianza delle figure geometriche come una corrispondenza che trasforma segmenti in segmenti uguali. Si ottengono così notevoli e indubbi vantaggi di rigore sopra l'antica definizione in cui si ricorreva al movimento rigido delle figure, ma si lascia generalmente da banda la distinzione fra figure uguali sovrapponibili e non sovrapponibili (uguali direttamente e inversamente), e dove pure di tal questione è fatto cenno, essa è ricondotta più o meno apertamente alle antiche considerazioni mediante osservazioni empiriche, ovvero la dimostrazione rigorosa delle proposizioni principali relative alla distinzione dei versi delle figure è appena adombrata, parendo inadeguata allo scopo la fatica che occorre a completarle nei loro minuti particolari.

Pare a me che tale andamento laborioso debba attribuirsi piuttosto al modo onde i versi medesimi son definiti, che all'essenza della cosa; e come effettivamente si possa riuscire allo scopo con una certa facilità mostreranno, spero, queste poche pagine.

L'obbligo che mi fanno le linee precedenti di essere quanto possibile completo, sarà causa di alcune ripetizioni di cose già troppo comuni; però, come già dissi, in generale incompletamente dimostrate.

1. È noto che i postulati dell'ordinamento dei punti sulla retta e nello spazio possono enunciarsi:

a) Due punti A, B *determinano sulla loro congiungente un verso* $\overrightarrow{AB}$ *secondo il quale i punti della retta si ordinano mediante le relazioni di precedere e seguire. Il verso* $\overrightarrow{BA}$ *si dice inverso di* $\overrightarrow{AB}$: *si passa dall'uno all'altro verso scambiando le parole precedere e seguire.*

b) Rispetto ad ogni piano α *i punti dello spazio si distribuiscono in due classi (bande) tali che ogni segmento che ha per estremi due punti della stessa classe non contiene punti di* α *e ogni segmento i cui estremi appartengono a classi diverse contengono punti di* α. *I punti di* α *si attribuiscono indifferentemente alle due classi.*

Nel postulato *b)* è involto il postulato analogo relativo alla divisione del piano in due bande rispetto ad ogni sua retta. Conseguenza di questo postulato è che *ogni retta del piano di un triangolo che passi per un punto di un suo lato (che non sia vertice) incontra uno degli altri due lati, e se incontra la retta del terzo lato, il punto d'intersezione non può però mai appartenere a questo lato (segmento) medesimo.*

Conformemente allo scopo di questo scritto, si tace delle proprietà fondamentali dell'ordinamento sulla retta e delle varie forme che si sogliono dare al postulato *b)* e delle sue conseguenze: importa invece di definire il verso nel fascio.

2. Essendo il fascio un sistema chiuso, si può bensì in esso definire, come sarà tosto precisato, un ordinamento per cui sia fissato quale di due raggi dati preceda e quale segua in esso; occorre però notare che le proprietà fondamentali delle relazioni di precedere e seguire si mutano alquanto: in particolare cessa d'esser vero che se a precede b e b precede c, a precede c, ciò che non sarà di alcun nocumento nel seguito.

In un fascio O si fissino due raggi non allineati a e b e sia AB una retta che li incontri nei punti A e B. *L'ordine di due raggi* m, n appartenenti alla stessa retta, *rispetto al verso* $\overrightarrow{ab}$ *e alla trasversale* AB sarà definito dalle convenzioni seguenti:

a) Se m incontra AB in un punto M, n precede o segue m secondochè sta rispetto alla retta di m dalla parte dei punti di AB che precedono o che seguono M nel verso $\overrightarrow{AB}$.

b) Se m non incontra AB e non le è parallelo, si troverà nelle condizioni di *a)* il raggio m' opposto ad m. Si dirà che n precede oppur segue m secondochè segue o procede m'.

c) Poichè, per ipotesi, m ed n non sono opposti è da escludersi che siano entrambi paralleli ad AB: se allora m è parallelo ad AB, si definirà l'ordine assumendo come raggio m di *a)* o di *b)* il raggio n e convenendo che *se* m *precede o segue* n, n *segue o precede* m. Che questa proposizione sia verificata dalle definizioni *a), b)* quando nè m, nè n siano paralleli ad AB risulta immediato dalle osservazioni seguenti:

1°. Due raggi opposti stanno da bande opposte della retta d'ogni raggio m; quindi di essi l'uno precede; l'altro segue m.

2°. Se i raggi m ed n incontrano entrambi AB in M, N, M precede o segue N nel verso $\overrightarrow{AB}$ secondochè N segue o precede M nel verso medesimo.

Occorre ancora osservare che dal postulato 1 *b)* segue che di tre raggi dati ve n'è sempre due che sono da bande opposte della retta del terzo: se quindi due raggi p e q incontrano AB in P e Q e se un raggio r sta rispetto alla retta di p dalla banda di q e rispetto alla retta di q dalla banda di p, P e Q stanno da bande opposte della retta di r e questa retta incontra AB. Onde segue che se m è parallelo ad AB, i raggi che incontrano (o non incontrano) AB lasciano tutti m dalla stessa parte, e perciò precedono tutti o seguono tutti m. Unendo questa conclusione alla precedente si ottiene:

3°. Tutti i raggi che precedono o seguono uno stesso raggio m stanno dalla stessa banda della sua retta.

Risulta che la considerazione della retta AB è inutile nella determinazione dell'ordine di due raggi m, n tostochè si conosce in un modo qualunque un raggio precedente (o seguente) l'uno di essi, p. es. m.

Ciò posto se il raggio m incontra AB fra A e B, il raggio a precede m e b lo segue nel verso $\overrightarrow{ab}$ rispetto alla retta AB; ma in tale ipotesi ogni retta che incontri a e b in due punti A', B' è tagliata da m fra questi due punti: quindi l'ordine di questo raggio m e di un secondo raggio n qualunque è indipendente dalla scelta della retta AB, purchè essa tagli a e b. Ma allora lo stesso deve dirsi per l'ordine di due raggi qualunque n e p perchè, indipendentemente da tal scelta è fissato l'ordine di m e n. Quindi:

4°. Il verso $\overrightarrow{ab}$ non dipende dalla scelta della trasversale AB, delle rette a e b.

D'altra parte è evidente che se a', b' sono altri due raggi che incontrino AB e a' precede b', il verso $\overrightarrow{a'b'}$ non differisce dal verso $\overrightarrow{ab}$: e poichè date due rette qualunque r, s del piano si può determinare una terza retta t che le incontra entrambe e quindi due coppie di raggi l'una delle quali tagli r e t, l'altra t ed s, si avrà generalmente che:

Un verso è assegnato in un fascio quando di due raggi non allineati sia detto quale precede e quale segue, indipendentemente dalla scelta di questi raggi e dalla trasversale ausiliaria. In ogni trasversale, risulta determinato un verso; e se due di esse incontrano la retta di un raggio m *nei punti* M, M′ *i punti che nei versi rispettivi seguono* M *e* M′ *stanno dalla stessa banda o da bande opposte di quella retta secondochè* M *e* M′ *sono sullo stesso raggio o su raggi opposti.*

3. Le considerazioni precedenti si estendono immediatamente, sia per proiezione, sia per analogia a definire i versi in un fascio di piani: un verso $\overrightarrow{\alpha\beta}$ sarà cioè definito nel fascio quando siano fissati in esso due semipiani α, β non complanari e alla definizione servirà una retta ausiliaria che incontri i due semipiani medesimi.

4. *Dati in un piano due fasci di raggi* O, O′ *ed una retta* r *non passante per* O *nè per* O′ *si dicono concordi rispetto alla* r *due versi assegnati sui due fasci quando determinano sulla* r *versi uguali o opposti secondochè* r *non taglia o taglia il segmento* OO′. *Nell' inversa ipotesi si dicono discordi.*

Poichè una retta taglia due o nessun lato d'un triangolo si ha tosto che se *i versi di due fasci di raggi sono concordi o discordi al verso di un terzo fascio rispetto ad una stessa retta, son concordi fra loro rispetto ad essa.*

Se la retta r taglia la OO′ in un punto M fuori del segmento OO′, e se rispetto ad essa i due fasci sono concordi, i punti che seguono M nei versi determinati su r dai due fasci stanno dalla stessa banda della OO′: se un'altra retta r' incontra la OO′ in M′ ciascuno dei due fasci vi determina un verso in cui i punti seguenti M′ stanno da questa stessa banda se M e M′ appartengono allo stesso suo raggio, dalla banda opposta se appartengono a raggi opposti (n. 2, 4°). Segue che i due versi su r' saranno ancora concordi se r' non taglia il segmento OO′, discordi nel caso contrario: quindi i due fasci sono ancora concordi rispetto a r'.

Se la r o la r' non tagliano la retta OO′, si consideri un terzo fascio O″ tale che le rette OO″ e O′O″ incontrino r e r'': tenendo conto della precedente osservazione circa i versi di tre fasci, si potrà concludere in generale che

Il giudizio sulla concordia o discordia dei versi di due fasci di raggi è indipendente dalla retta ausiliaria.

5. Dati nello spazio due fasci di piani di assi σ, σ', e una retta r che non li incontri, e assegnati sui due assi due versi $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$ e nei fasci due versi, si dicono questi due versi *concordi rispetto alla* r *e ai versi* $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$ *quando, secondochè i due versi* $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$ *determinano lo stesso verso o versi opposti nel fascio che ha per asse la retta* r, *essi determinano sulla* r *lo stesso verso o versi opposti*; nel caso contrario si dicono *discordi.*

Si conduca per la retta r un piano che incontri gli assi σ, σ' in due punti O, O′; esso segherà i due fasci di piani in due fasci di raggi nei quali saranno definiti i versi per sezione, dai versi assegnati nei fasci di piani. Tenendo conto dell'osservazione finale del n. 2 applicata (secondo è notato nel n. 3) al fascio di piani di asse r e della definizione del n. 4, si vede che se i fasci σ, σ' sono concordi rispetto alla retta r e ai versi $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$, i due fasci O, O′ risulteranno concordi o discordi rispetto alla r secondochè i punti che nei versi $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$ seguono rispettivamente O, O′ stanno dalla stessa banda del piano o da bande opposte. Ma il giudizio sulla concordia o discordia dei versi nei fasci O, O′ è indipendente dalla scelta della retta r nel piano; quindi il giudizio sulla concordia o discordia dei versi nei fasci σ, σ', rispetto ai versi $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}'$ è il medesimo rapporto alla retta r e ad ogni altra retta che stia con r in un piano che incontri i due assi.

Date due rette qualunque r, r' si può in infiniti modi determinare una terza retta r'' che coll'una e coll'altra sia in un piano che seghi σ e σ'; dunque in generale:

Il giudizio sulla concordia o discordia dei versi di due fasci di piani, rispetto a due versi assegnati rispettivamente sui loro assi, è indipendente dalla scelta della retta ausiliaria.

Risulta immediatamente dalla definizione che *se due versi assegnati in due fasci* σ, σ' *sono concordi rispetto a due versi assegnati sui loro assi, risultano discordi rispetto ad uno di questi versi e all'opposto dell'altro.* La relazione di concordia o discordia di due fasci è quindi inalterata se si mutano insieme il verso in uno dei fasci ed il verso sul suo asse; con un tal cambiamento si può sempre disporre in modo che per una data retta ausiliaria r, i versi sui due assi determinino lo stesso verso nel fascio di piani di asse r: i versi nei due fasci sono allora concordi quando sulla r determinano lo stesso verso. Dopo ciò è evidente che *se sugli assi σ, σ', σ'' di tre fasci sono assegnati rispettivamente i versi $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma'}$, $\vec{\sigma''}$ e se due versi assegnati nei fasci σ' e σ'' sono concordi o discordi od un verso dato in σ rapporto ai versi $\vec{\sigma'}$ e $\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma''}$ e $\vec{\sigma}$, quei due versi saranno concordi fra loro rispetto ai versi $\vec{\sigma'}$ e $\vec{\sigma''}$.*

6. Uguaglianza diretta e inversa delle figure. — Si dicono uguali due figure fra cui possa stabilirsi una corrispondenza *(corrispondenza d'eguaglianza)* per la quale ad ogni segmento corrisponda un segmento uguale. Si deduce notoriamente che la corrispondenza d'uguaglianza è ordinata e si può quindi parlare di versi omologhi su rette e fasci omologhi: sono i versi in cui si ordinano gli elementi corrispondenti. Onde tosto: se in una figura i versi di due fasci di piani sono concordi (o discordi) rispetto a dati versi sui loro assi, su una figura uguale i versi omologhi dei due fasci corrispondenti sono pure concordi (o discordi) rispetto ai versi omologhi ai versi dati sugli assi.

Nelle due figure uguali F ed F' si considerino i fasci o, p e i fasci corrispondenti o', p', e sugli assi si considerino i versi $\vec{o}, \vec{p}$ e gli omologhi $\vec{o'}, \vec{p'}$ e parimenti nei fasci medesimi i versi omologhi: secondochè i versi dei fasci o e p sono concordi o discordi rispetto ai versi $\vec{o}$ e $\vec{p}$, saran dunque concordi o discordi rispetto a $\vec{o'}$ e $\vec{p'}$ i versi di o' e p', onde saranno fra loro concordi o discordi p e p' rispetto ai versi omologhi $\vec{p}$ e $\vec{p'}$ secondochè rispetto a $\vec{o}$ e $\vec{o'}$ sono concordi o discordi o ed o' (cfr. la fine del n. 5); vale a dire che *in figure uguali i versi omologhi in ogni coppia di fasci corrispondenti sono concordi o discordi secondochè tali sono i versi in una coppia di fasci corrispondenti qualunque*. Le due figure si dicono uguali *direttamente* nel primo caso, *inversamente* nel secondo.

7. Il criterio esposto si applica immediatamente a giudicare della natura delle trasformazioni elementari d'uguaglianza: traslazione, rotazione, simmetria. (Si noti che si parla qui delle trasformazioni geometriche, non di movimenti.)

Nella traslazione si mutano in se stessi i piani dei fasci il cui asse è parallelo alla direzione della traslazione; e un verso assegnato su una di queste rette ha per omologo il verso medesimo: per questi fasci avviene dunque che versi omologhi sono concordi. *Figure corrispondenti per una traslazione sono direttamente uguali.*

Nella rotazione si muta in se stesso il fascio avente per asse l'asse di rotazione, e un verso assegnato su quest'asse resta immutato mentre si muta in se stesso un verso assegnato nel fascio. I due fasci corrispondenti aventi quest'asse sono dunque concordi. *Figure corrispondenti per una rotazione sono direttamente uguali.*

Nella simmetria rispetto a un piano si trasformano in se stessi i piani di un fascio qualunque il cui asse sia perpendicolare al piano di simmetria, ma un verso assegnato su questo asse ha per omologo il verso contrario: i due fasci corrispondenti sono discordi. *Figure corrispondenti per una simmetria sono inversamente uguali.* (*)

8. Si dice che due figure finite uguali possono condursi l'una sull'altra con un movimento quando si può costruire una successione di figure uguali alle date di cui siano prima ed ultima figura le due date, per modo che la massima distanza fra due punti omologhi in figure successive non superi un segmento assegnabile ad arbitrio.

Se due figure possono condursi l'una sull'altra con un movimento, esse possono pure trasformarsi l'una nell'altra mediante una serie di traslazioni e di rotazioni e quindi sono direttamente uguali.

Occorre considerare figure non piane: per le figure piane la proposizione è illusoria poichè è noto che due figure piane simmetriche possono trasformarsi l'una nell'altra mediante una rotazione nello spazio.

Siano dunque F, F_1 due figure uguali non piane che si conducono l'una sull'altra mediante un movimento. Siano f, f' due figure consecutive della serie che, per ipotesi, si può interpolare fra F e F' e siano $abcd$, $a'b'c'd'$ due loro tetraedri omologhi. Si supponga che la distanza fra vertici omologhi dei due tetraedri sia $\leqslant \sigma$: sia ρ la distanza di b e c dalla mediana del triangolo abc uscente da a, δ la distanza di d dal piano abc, λ la lunghezza di ad.

Mediante una traslazione che porti a in a' si trasformi f in una nuova figura f'' in cui ad $abcd$ corrisponda $a'b''c''d''$. Le distanze dei vertici omologhi di $a'b'c'd'$ e di $a'b''c''d''$ saranno $\leqslant 2\sigma$. Mediante una rotazione intorno ad a' si muti f'' in f''' per modo che siano omologhi b'' e b', c'' e c'; $a'b''c''d''$ si trasformi così in $a'b'c'd'''$; l'asse di rotazione passerà per a' e la massima delle distanze di esso da b'' e b' e da c'' e c' sarà $\geqslant \rho$, e la sua distanza da d'' e $d''' \leqslant \lambda$. La distanza $d''d'''$ sarà quindi, da una semplice considerazione di similitudine, $\leqslant \frac{\lambda \cdot 2\sigma}{\rho}$ e quindi la distanza $d'd'''$ sarà $\leqslant 2\sigma\left(\frac{\lambda}{\rho}+1\right)$. I due tetraedri $a'b'c'd'''$, $a'b'c'd'$ avranno il piano unito $a'b'c'$; quindi d' e d''' coincidono o sono

(*) Tra altre applicazioni si può notare la seguente semplicissima: *triedri opposti al vertice sono inversamente uguali,* perchè la simmetria rispetto a un punto muta in se stessi i piani pel punto, ma inverte i versi sulle rette per esso.

simmetrici rispetto ad $a'b'c'$. Ma nella seconda ipotesi $d'd''=2\delta$; esse è dunque impossibile tosto che

$$2\delta > 2\sigma\left(\frac{\lambda}{\rho}+1\right) \qquad \text{ossia} \qquad \sigma < \frac{\delta\rho}{\lambda+\rho}.$$

Ora per ipotesi σ può rendersi piccolo a piacere, mentre δ, ρ, λ sono le lunghezze di segmenti fissi nella figura f o F. Dunque si esclude la 2ª ipotesi, e si può fra F e F_1 interpolare una successione di figure uguali, per modo che ciascuna si trasformi nella successiva mediante una traslazione e una rotazione. Per il n. 7 esse sono quindi direttamente eguali.

Reciprocamente *due figure direttamente uguali possono portarsi l'una sull'altra con un movimento.* Infatti a trasformare l'una nell'altra due figure uguali occorre al più una traslazione, una rotazione e una simmetria: ma l'ultima trasformazione non interviene se le due figure sono uguali direttamente; e ciascuna delle prime due può scomporsi in una successione rispettivamente di traslazioni e di rotazioni che spostino i punti delle figure considerate di tanto poco quanto si vuole.

BEPPO LEVI.

Piacenza, gennaio 1904.

SOPRA UNO DEI PRINCIPII INTORNO ALL'EQUIVALENZA DELLE EQUAZIONI (*)

1. Nella maggior parte dei trattati d'algebra elementare si riscontrano i seguenti fatti:

a) Si passa dall'equazione

$$ax+b=0$$

alla formola risolutiva

$$x=-\frac{b}{a},$$

escludendo l'ipotesi che a sia zero.

(*) La parte principale di quest'articolo (n.i 2 e 3) fu già da me pubblicata nel 1890, nell'opuscolo: *Esposizione di uno dei principii intorno all'equivalenza di due equazioni e considerazioni relative.* Correggio d'Emilia, tip. Palazzi. La ristampo ora qui, aggiungendovi maggiori considerazioni, affine d'insistere sopra una questione importantissima d'algebra, la quale, a mio avviso, si suole trattare ognora dai più non esattamente.

Siccome poi nel presente articolo sono considerate alcune forme singolari che assumono le espressioni algebriche, così credo bene di avvertire che nel citato mio opuscolo trovasi una trattazione elementarissima su tale argomento; la quale può essere intesa anche da chi ha appena cominciato lo studio dell'algebra.

b) Nella risoluzione dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si eccettua l'ipotesi che a sia zero.

c) Per risolvere il sistema

$$ax + by = c\,,$$
$$a'x + b'y = c'$$

si suppone che il determinante dei coefficienti delle incognite sia diverso da zero.

Intanto si osserva che in ognuno di questi casi v'è una perfetta coincidenza fra ciò che esprimono le formole di risoluzione e ciò che avviene in effetto per le equazioni, o pel sistema, nelle ipotesi escluse. Ad esempio, considerando il sistema di due equazioni di primo grado, se $a = b = 0$ le formole risolutive assumono ciascuna la forma $\frac{m}{0}$, ed effettivamente le incognite non possono avere alcun valore finito.

Come si spiega tale coincidenza? Potrà dirsi che è fortuita, se è costante? Evidentemente la cosa non può che provenire da un falso modo d'intendere il principio relativo al moltiplicare o dividere i due membri d'un'equazione per un'espressione letterale indipendente dalle incognite; il qual principio è vero anche se la detta espressione acquista, per qualche ipotesi particolare, il valor zero. Ciò mi propongo di dimostrare più innanzi, esponendo il detto principio elementarmente in generale.

2. Anzitutto è necessario di chiarire bene che cosa deve intendersi per soluzione d'un'equazione.

Si sa che si chiamano soluzioni o radici d'un'equazione quei particolari valori, convenientemente scelti, attribuiti alle incognite, i quali, sostituiti alle medesime, la convertano in una identità. In base quindi a questa definizione, ogni soluzione d'un'equazione, contenente lettere indicanti numeri il cui valore può assegnarsi a piacimento, dovrà, sostituita alle incognite, trasformare quella in un'identità, indipendentemente da qualunque valore particolare che possa attribuirsi ad esse lettere. In tal caso, quando a queste si attribuiscano valori particolari, le soluzioni delle equazioni particolari che ne risulteranno, saranno i valori (finiti o infiniti) che vengono ad acquistare le soluzioni dell'equazione generale. (*)

(*) A proposito delle soluzioni infinite che può avere un'equazione, qualcuno è da me discorde, almeno nel modo di dire.

Si consideri, per esempio, l'equazione

$$ax - \frac{1}{a} - 1 = 0\,;$$

se per x si pone $\frac{a+1}{a^2}$ nel primo membro, si trova un'espressione che ha costantemente il valor zero per tutti i valori di a differenti da zero, e per $a = 0$ assume una forma indeterminata; non dovrà dunque dirsi che il valore di quell'espressione è anche zero in quest'ultima ipotesi? E se

Potrebbe avvenire che un' equazione particolare ottenuta, non avesse significato considerata da sola; come, per esempio, facendo $a=0$ nell' equazione

$$\frac{x^2}{a}-x-\frac{1}{a}+1=0,$$

si troverebbe

$$\frac{x^2}{0}-x-\frac{1}{0}+1=0;$$

la quale, considerata indipendentemente dalla prima, non ha senso; ma considerata come caso particolare di quella, ammette soluzioni, se essa equazione ne ammette. Come anche, se l' equazione data, ovvero un'altra ad essa equivalente, avesse un fattore letterale comune ai due membri, accadrà che, nelle ipotesi le quali rendono nullo il detto fattore, le equazioni particolari ammetteranno infinite altre soluzioni oltre quelle ricavate dalla formola generale di risoluzione; ma le dette soluzioni non dovranno riguardarsi come appartenenti a quelle equazioni, considerate come casi particolari dell' equazione generale; saranno soluzioni delle stesse, considerate da sole, cioè indipendentemente da quest' ultima equazione.

Per esempio l'equazione

$$ax+1=a+x$$

ammette l'unica soluzione $x=1$, perchè questo è evidentemente il solo valore che sostituito all'incognita la converta in un'identità, indipendentemente dal valore assegnato ad a; ora per $a=1$ essa diviene

$$x+1=1+x,$$

che è soddisfatta da qualunque valore assegnato ad x, considerata da sola; ma considerata come caso particolare dell'equazione data, ammette l'unica soluzione $x=1$. Si osservi che la prima equazione è equivalente a quest'altra

$$ax-x=a-1,$$

i cui membri hanno per fattore comune $a-1$; onde si comprende come, nell'ipotesi di $a=1$, l'equazione particolare, sia soddisfatta da qualunque valore assegnato ad x.

Il caso ultimo considerato è analogo a quello di un'espressione, che assume per un' ipotesi particolare la forma $\frac{0}{0}$, mentre poi il suo

---

ciò è, non dovrà dirsi che è soluzione di quell' equazione, nell' ipotesi di $a=0$, il valore (finito o infinito, determinato o no) che acquista la formola generale di risoluzione, facendo in essa la detta ipotesi?

Veggasi anche BALTZER, *Algebra*, trad. del Cremona, pag. 43.

Si può poi osservare che il ragionamento, precedente, sussistendo per ogni soluzione d'un'equazione, i cui coefficienti sieno letterali, costituisce in sostanza una dimostrazione a priori della coincidenza costante, cui ho accennato da principio, fra ciò che avviene per le equazioni e ciò che esprimono le corrispondenti formole generali risolutive.

valore è determinato; la forma indeterminata, considerata da sola, rappresenta qualunque numero; ma considerata come caso particolare del valore che assume quell'espressione, rappresenta un determinato numero.

È superfluo il dire che analoghe considerazioni si debbono fare relativamente alle soluzioni dei sistemi d'equazioni.

3. Siano ora le due equazioni

$$A = B, \qquad Am = Bm,$$

ovvero le due a queste equivalenti

$$A - B = 0, \quad (1) \qquad (A - B)\, m = 0, \quad (2)$$

in cui m può designare un numero determinato, ovvero un'espressione algebrica non contenente o contenente le incognite. Si vuole esaminare che cosa deve dirsi in ciascuno di questi casi relativamente all'equivalenza di quelle equazioni.

Prescindendo dal primo caso, pel quale le cose sono chiare, supponiamo che m sia un'espressione algebrica non contenente le incognite.

In tal caso, essendo soluzioni della (2) solo quei valori delle incognite che rendono nullo il suo primo membro, indipendentemente da qualunque valore particolare che possa assegnarsi ad m, ognuna di quelle soluzioni non può che rendere pur tale anche il primo membro della (1); perciò le due equazioni ammettono le stesse soluzioni e sono equivalenti.

Sia m un'espressione contenente le incognite, la quale per semplicità supporremo intera rispetto ad esse (il caso che fosse frazionaria potrà dedursi in seguito):

Se m è tale, la (2) sarà certamente conseguenza della (1). Affinchè poi questa sia conseguenza di quella, e sieno quindi equivalenti le due equazioni, è necessario che la (2) non sia soddisfatta da alcuna soluzione dell' equazione

$$m = 0\,; \qquad (3)$$

perchè, se ciò fosse, supposto anche che quelle soluzioni appartengano alla (1), la (2) ammetterebbe sempre un numero di radici maggiore di quello che ammette la (1); essa avrebbe per soluzioni quelle della (1) e parte o tutte quelle della (3); l' operazione della moltiplicazione avrebbe, come si dice, introdotto delle radici *estranee*, appartenenti a quest' ultima equazione.

Vediamo ora quando la (2) può non essere soddisfatta da alcuna soluzione della (3).

Consideriamo una soluzione di quest' equazione: se essa fa acquistare un valore finito all'espressione $A - B$, farà certamente acquistare il valor zero al prodotto

$$(A - B)\, m,$$

e sarà soluzione della (2); ma se la detta soluzione facesse acquistare ad $A - B$ un valore infinito, come potrebbe accadere se questa fosse un' espressione frazionaria rispetto alle incognite, allora il detto prodotto verrebbe ad assumere la forma indeterminata $\infty \times 0$, la quale, come si sa, può rappresentare un determinato numero qualunque, e si comprende che in tal caso quella soluzione potrebbe non soddisfare all'equazione (2); è chiaro anzi che avverrà allora in generale così.

Esempio. — Sieno le due equazioni

$$\frac{x}{x-1} = 0, \qquad \frac{x}{x-1}(x^2 - 1) = 0;$$

la seconda delle quali può scriversi

$$x(x+1) = 0.$$

L' equazione

$$x^2 - 1 = 0$$

ammette evidentemente le due soluzioni -1 e $+1$: la prima di queste, perchè fa acquistare il valor finito $\frac{1}{2}$ all' espressione

$$\frac{x}{x-1},$$

fa acquistare il valor zero al prodotto

$$\frac{x}{x-1}(x^2 - 1),$$

ed è soluzione della seconda equazione; la seconda invece fa acquistare a quell' espressione un valor infinito, e il prodotto ora considerato assume la forma $\infty \times 0$, la quale, come si vede, ha il valore 2; perciò essa non è radice della seconda equazione. Adunque le due equazioni date non sono equivalenti; la seconda ammette le soluzioni della prima e la radice $x = -1$ dell' equazione

$$x^2 - 1 = 0.$$

Riassumendo le cose precedenti si può enunciare il principio seguente:

Moltiplicando i due membri d' un' equazione per un numero determinato diverso da zero, si ottiene un' equazione equivalente alla data. Se il moltiplicatore è un' espressione algebrica non contenente le incognite, l' equazione ottenuta è sempre equivalente alla data. Se il moltiplicatore è un'espressione contenente le incognite, e intera rispetto a queste, l'equazione ottenuta è equivalente alla data, quand' essa non sia soddisfatta *per nessuno dei valori delle incognite, che sono soluzioni dell' equazione formata eguagliando a zero il moltiplicatore.*

Da questo principio se ne deduce subito un altro relativo alla divisione dei due membri d'un'equazione per un numero determinato o per un'espressione algebrica.

4. Si comprende ora come sia affatto naturale la coincidenza costante, di cui ho parlato antecedentemente, fra ciò che avviene per le equazioni, o pei sistemi, e ciò che esprimono le rispettive formole generali risolutive, nei casi che si sogliono comunemente eccettuare per giungere a queste formole.

A proposito di tale coincidenza considererò i due casi seguenti, i quali, nel campo dell'algebra che s'insegna nelle scuole medie, sono, parmi, i più degni di nota:

a) Per le equazioni di secondo grado equivalenti

$$ax^2+bx+c=0,$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

se $a=0$, la formola generale di risoluzione dà

$$x'=\frac{-2b}{0}, \qquad x''=\tfrac{0}{0};$$

e deve dirsi che nella detta ipotesi le equazioni sono soddisfatte da un valore infinito di x e da un altro che si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$. Quest'ultimo non può che essere uguale a $-\frac{c}{b}$, soluzione dell'equazione

$$bx+c=0,$$

perchè tale soluzione, rendendo nullo il termine ax^2, soddisfa alla prima delle due equazioni. Trasformando l'espressione che assume la forma $\frac{0}{0}$ in un'altra equivalente, si trova appunto il valore $-\frac{c}{b}$.

Si scorge da ciò quanto sia poco corretto il dire, come per solito si fa, che l'equazione

$$ax^2+bx+c=0$$

diviene, per $a=0$, l'equazione

$$bx+c=0.$$

Così dicendo, infatti, si viene in sostanza ad affermare che i due valori dell'incognita dell'equazione di secondo grado, per a tendente a zero, convergono verso lo stesso limite $-\frac{c}{b}$, contrariamente a quanto succede in effetto. (*)

(*) Si afferma da qualcuno che il concetto di grado d'un'equazione presuppone che non sia zero il coefficiente della potenza di massimo esponente dell'incognita, nel polinomio ordinato che costi-

b) Pel sistema

$$ax+by=c, \qquad a'x+b'y=c'$$

si trova che le formole generali risolutive divengono, se $a=a'=0$,

$$x=\frac{cb'-c'b}{0}, \qquad y=\tfrac{0}{0}.$$

Ora se a e a' sono solamente eguali, si ha, dicendo p il loro valore comune,

$$x=\frac{cb'-c'b}{p(b'-b)}, \qquad y=\frac{c'-c}{b'-b};$$

donde apparisce che nel caso di $a=a'=0$ il sistema è soddisfatto da un valore infinito di x e dal soprascritto valore finito di y. Se fosse $b'=br$, $c'=cr$ i valori delle incognite diverrebbero

$$x=\tfrac{0}{0}, \qquad y=\frac{c}{b};$$

e all'incognita x si potrebbe effettivamente assegnare un valore finito qualunque.

Comunemente invece questo caso si suole trattare come segue: " Se $a=a'=0$ il sistema diviene

$$by=c, \qquad b'y=c';$$

e tali equazioni sono fra loro incompatibili se non è $b'=br$, $c'=cr$ ".

Secondo me, tale modo di vedere le cose è inesatto; perchè, così dicendo, si viene in sostanza ad affermare che, nell'ipotesi di $a=a'=0$, si può attribuire all'incognita x un valore finito qualunque; mentre ciò non è; poichè, per a e a' tendenti a zero, il valore assoluto della detta incognita cresce superando qualunque numero assegnato: inoltre, che cosa dovrà dirsi che significa il limite finito e determinato cui tende il valore di y? Evidentemente, solo quando si abbia ad un tempo $a=a'=0$, $b'=br$, $c'=cr$, si può dire che il primo sistema diviene il secondo.

R. Grilli.

Treviso, febbraio 1904.

tuisce il suo primo membro e che quindi, nel caso dell'equazione $ax^2+bx+c=0$, non si può supporre $a=0$ senza abbassarla di grado. Se così non fosse, si aggiunge, ogni equazione algebrica sarebbe di quel grado elevato che si vuole.

Evidentemente le cose non stanno così. Se l'equazione $ax^2+bx+c=0$ è di secondo grado per tutti i valori di a tendenti a zero, perchè non sarà dello stesso grado anche pel valore limite di a? Inoltre, non saranno soluzioni di quella equazione, nel caso del detto valor limite, i valori limiti che assumono le formole generali di risoluzione? — Quanto poi alla cosidetta confusione dei gradi sovraccennata, mi pare che non sia neanche il caso di parlarne.

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

Triangolo delle differenze e relazioni fondamentali.

1. Si abbiano $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra:

$$a_0\,,\ a_1\,,\ldots,a_r\,,\ldots,a_{m-1}\,,\ a_m\,, \tag{1}$$

e si formino successivamente le differenze dei diversi ordini fino a $\Delta^m a_0$, disponendole per linea in modo che la serie

$$\Delta^0 a_0\,,\ \Delta' a_0\,,\ldots,\Delta^m a_0$$

si trovi per diagonale verso destra, e la serie

$$\Delta^0 a_m\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\ldots,\Delta^m a_0$$

si trovi per diagonale verso sinistra.

La diagonale verso destra o discendente è la serie delle differenze di a_0, e le tre serie

$$\begin{array}{l}
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta^0 a_1\,,\ldots\ldots,\Delta^0 a_m\,,\\
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta' a_0\,,\ldots\ldots,\Delta^m a^0\,,\\
\Delta^0 a_m\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\ldots,\Delta^m a_0\,,
\end{array}$$

insieme con tutti i termini fra esse compresi, costituiscono il triangolo delle differenze di a_0.

Questo triangolo può figurarsi col seguente schema:

$$\begin{array}{c}
\Delta^0 a_0\,,\ \Delta^0 a_1\,,\ldots,\Delta^0 a_r\,,\ldots,\Delta^0 a_{m-r}\,,\ldots,\Delta^0 a_{m-1}\,,\ \Delta^0 a_m\,,\\
\Delta' a_0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \Delta' a_{m-1}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^r a_0\,,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\,,\ \Delta^r a_{m-r}\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^{m-r} a_0\,,\ \ldots,\ \Delta^{m-r} a_r\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\,,\\
\Delta^{m-1} a_0\,,\ \Delta^{m-1} a_0\,,\\
\Delta^m a_0\,,
\end{array} \tag{2}$$

essendo opportuna una doppia espressione del termine generale, secondo il progredire dall'un senso all'altro e potendo attribuirsi ad r tutti i valori, interi e positivi, da 0 ad m, $(0 \leq r \leq m)$.

2. Le seguenti tre formole fondamentali:

$$\Delta^r a_0 = (m-r)_0 \Delta^r a_{m-r} - (m-r)_1 \Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r} \Delta^m a_0 = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i}, \quad (3)$$

$$\Delta^r a_{m-r} = (m-r)_0 \Delta^r a_0 + (m-r)_1 \Delta^{r+1} a_0 + \dots$$
$$\dots + (m-r)_{m-r} \Delta^m a_0 = \sum_{i=0}^{m-r} (m-r)_i \Delta^{r+i} a_0, \quad (4)$$

$$\Delta^m a_0 = (m-r)_0 \Delta^r a_{m-r} - (m-r)_1 \Delta^r a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r} \Delta^r a_0 = \sum_{i=0}^{m-r} (-1)^i (m-r)_i \Delta^r a_{m-r-i}, \quad (5)$$

si dimostrano facilmente per mezzo della nota relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m-r-1)_i + (m-r-1)_{i-1} = (m-r)_i. \quad (\alpha)$$

Esse sono intimamente legate fra di loro, così che la conoscenza di una qualunque implica la determinazione delle altre due e possono riguardarsi come la estensione dell'unica formula $b-a=c$, da cui deducesi $b-c=a$ e $a+c=b$, ed a questa effettivamente si riducono per $m-r=1$.

Per la legge di formazione delle differenze si ha:

$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_0,$$
$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_1 - \Delta^{r+1} a_0,$$
$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_2 - \Delta^{r+1} a_1 - (\Delta^{r+1} a_1 - \Delta^{r+2} a)_0 = \Delta^r a_2 - 2\Delta^{r+1} a_1 + \Delta^{r+2} a_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ovvero:

$$\Delta^r a_{m-r} = \Delta^r a_{m-r},$$
$$\Delta^r a_{m-r-1} = \Delta^r a_{m-r} - \Delta^{r+1} a_{m-r-1},$$
$$\Delta^r a_{m-r-2} = \Delta^r a_{m-r} - \Delta^{r+1} a_{m-r-1} - (\Delta^{r+1} a_{m-r-1} - \Delta^{r+2} a_{m-r-2}) =$$
$$= \Delta^r a_{m-r} - 2\Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ovvero:

$$\Delta^m a_0 = \Delta^m a_0,$$
$$\Delta^{m-1} a_0 = \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^m a_0,$$
$$\Delta^{m-2} a_0 = \Delta^{m-2} a_2 - \Delta^{m-1} a_1 - (\Delta^{m-1} a_1 - \Delta^m a_0) = \Delta^{m-2} a_2 - 2\Delta^{m-1} a_1 + \Delta^m a_0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (3), ponendo $m-r=0, 1, 2, \dots$.

Ammessa pertanto la formola (3) per $m-r-1$, si ottiene:

$$\Delta^r a_0 = \Delta^r a_1 - \Delta^{r+1} a_0 = (m-r-1)_0 \Delta^r a_{m-r} - (m-r-1)_1 \Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots$$
$$\dots + (-1)^i (m-r-1)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i} + \dots + (-1)^{m-r-1}(m-r-1)_{m-r-1} \Delta^{m-1} a_1 -$$
$$- (m-r-1)_0 \Delta^{r+1} a_{m-r-1} + \dots + (-1)^i (m-r-1)_{i-1} \Delta^{r+i} a_{m-r-i} + \dots$$
$$\dots + (-1)^{m-r-1}(m-r-1)_{m-r-2} \Delta^{m-1} a_1 + (-1)^{m-r}(m-r-1)_{m-r-1} \Delta^m a_0,$$

cambiando il segno del sottraendo con aumentare di 1 l'esponente di -1; riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(-1)^i (m-r)_i \Delta^{r+i} a_{m-r-i},$$

e variando i da 0 ad $m-r$ si ricava precisamente la formola (3).

Così pure per la stessa legge di formazione delle differenze, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r}, \\
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^{r+1} a_{m-r-1}, \\
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-2} + \Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2} = \\
&= \Delta^r a_{m-r-2} + 2\Delta^{r+1} a_{m-r-2} + \Delta^{r+2} a_{m-r-2}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_0 &= \Delta^r a_0, \\
\Delta^r a_1 &= \Delta^r a_0 + \Delta^{r+1} a_0, \\
\Delta^r a_2 &= \Delta^r a_0 + \Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+2} a_0 = \Delta^r a_0 + 2\Delta^{r+1} a_0 + \Delta^{r+2} a_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^m a_0 &= \Delta^m a_0, \\
\Delta^{m-1} a_1 &= \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0, \\
\Delta^{m-2} a_2 &= \Delta^{m-2} a_0 + \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0 = \Delta^{m-2} a_0 + 2\Delta^{m-1} a_0 + \Delta^m a_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (4), ponendo $m-r=0, 1, 2, \dots$.

Ammessa pertanto la formola (4) per $m-r-1$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^{r+1} a_{m-r-1} = (m-r-1)_0 \Delta^r a_0 + (m-r-1)_1 \Delta^{r+1} a_0 + \dots \\
&\dots + (m-r-1)_i \Delta^{r+i} a_0 + \dots + (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^{m-1} a_0 + (m-r-1)_0 \Delta^{r+1} a_0 + \dots \\
&\dots + (m-r-1)_{i-1} \Delta^{r+i} a_0 + \dots + (m-r-1)_{m-r-2} \Delta^{m-1} a_0 + (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^m a_0;
\end{aligned}$$

riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(m-r)_i \Delta^{r+i} a_0,$$

e variando i da 0 a $m-r$ si ricava precisamente la formola (4).

Così pure per la stessa legge di formazione delle differenze si ha:

$$\begin{aligned}
\Delta^m a_0 &= \Delta^m a_0, \\
\Delta^m a_0 &= \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^{m-1} a_0, \\
\Delta^m a_0 &= \Delta^{m-2} a_2 - \Delta^{m-2} a_1 - (\Delta^{m-2} a_1 - \Delta^{m-2} a_0) = \Delta^{m-2} a_2 - 2\Delta^{m-2} a_1 + \Delta^{m-2} a_0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_0 &= \Delta^r a_0 ,\\
\Delta^{r+1} a_0 &= \Delta^r a_1 - \Delta^r a_0 ,\\
\Delta^{r+2} a_0 &= \Delta^r a_2 - \Delta^r a_1 - (\Delta^r a_1 - \Delta^r a_0) = \Delta^r a_2 - 2\Delta^r a_1 + \Delta^r a_0 ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
\Delta^r a_{m-r} &= \Delta^r a_{m-r} ,\\
\Delta^{r+1} a_{m-r-1} &= \Delta^r a_{m-r} - \Delta^r a_{m-r-1} ,\\
\Delta^{r+2} a_{m-r-2} &= \Delta^r a_{m-r} - \Delta^r a_{m-r-1} - (\Delta^r a_{m-r-1} - \Delta^r a_{m-r-2}) =\\
&= \Delta^r a_{m-r} - 2\Delta^r a_{m-r-1} + \Delta^r a_{m-r-2} ,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,
\end{aligned}$$

le quali relazioni si possono tutte ugualmente ricavare da (5) ponendo $m-r=0, 1, 2, \ldots.$

Ammessa pertanto la formola (5) per $m-r-1$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\Delta^m a_0 = \Delta^{m-1} a_1 - \Delta^{m-1} a_0 &= (m-r-1)_0 \Delta^r a_{m-r} - (m-r-1)_1 \Delta^r a_{m-r-1} + \ldots\\
\ldots + (-1)^i (m-r-1)_i \Delta^r a_{m-r-i} &+ \ldots + (-1)^{m-r-1} (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^r a_1 -\\
- (m-r-1)_0 \Delta^r a_{m-r-1} &+ \ldots + (-1)^i (m-r-1)_{i-1} \Delta^r a_{m-r-i} + \ldots\\
\ldots + (-1)^{m-r-1} (m-r-1)_{m-r-2} \Delta^r a_1 &+ (-1)^{m-r} (m-r-1)_{m-r-1} \Delta^r a_0 ,
\end{aligned}$$

cambiando il segno del sottraendo con aumentare di 1 l'esponente di -1; riducendo per colonna, la colonna $(i+1)^{ma}$ per la relazione (α) sarà:

$$(-1)^i (m-r)_i \Delta^r a_{m-r-i} ,$$

e variando i da 0 a $m-r$ si ricava precisamente la formola (5).

3. Sulla costituzione delle formole (3), (4) e (5) si può osservare:

α) esse sono polinomi di $m-r+1$ termini di cui nessun coefficiente può annullarsi;

β) esse dipendono da $m-r$ in quanto è differenza degl'indici sia delle a che delle Δ, e possono quindi riguardarsi come funzioni formali di tali indici;

γ) una qualunque di esse è necessaria e sufficiente a determinare tutti e solamente i termini del triangolo delle differenze, che sono in tutto $\binom{m-r+2}{2}$;

δ) perchè $m-r+1$ termini del triangolo delle differenze di $\Delta^r a_0$ possano determinare tutti gli altri, è necessario e sufficiente che siano consecutivi (contigui), sia per linea sia per diagonale, indipendenti l'uno dall'altro, e che ve ne sia almeno uno della prima linea Δ^r; in generale t termini $(t \leq m-r+1)$ determinano il triangolo che li inviluppa partendo dalla linea più in alto;

ε) la sostituzione dei valori ricavati da una delle tre formule in un'altra dà luogo, naturalmente, a delle identità; così ad esempio, sostituendo in (5) i valori ricavati da (4), il coefficiente di $\Delta^{r+i}a_0$ sarà:

$$(m-r)_0(m-r)_i-(m-r)_1(m-r-1)_{i-1}+\ldots+(-1)^i(m-r)_i(m-r-i)_0$$

che si annulla sempre per $i>0$, potendo scriversi:

$$(m-r)_i\,[(i)_i-(i)_{i-1}+\ldots+(-1)^i\,(i)_0]\,,$$

e per $i=0$, dovendo essere $m=r$, si ha $\Delta^m a_0=\Delta^m a_0$.

Differenze dei diversi ordini e delle diverse classi.

4. Le $m+1$ quantità affatto indipendenti l'una dall'altra (1):

$$a_0\,,\ a_1\,,\ldots,\,a_m\,,$$

si possono considerare come le differenze d'ordine zero di a_0 e si rappresentano coi simboli

$$\Delta_0^0\,,\ \Delta_0^1\,,\ldots,\,\Delta_0^m,$$

indicando con l'indice inferiore l'ordine e con l'indice superiore la classe.

L'ordinaria serie delle differenze di a_0 forma le differenze d'ordine uno di a_0, cioè

$$\Delta_1^0\,,\ \Delta_1^1\,,\ldots,\,\Delta_1^m.$$

Formando le differenze del primo termine Δ_1^0 di quest'ultima serie, si ottengono le differenze d'ordine due di a_0, cioè

$$\Delta_2^0\,,\ \Delta_2^1\,,\ldots,\,\Delta_2^m.$$

In generale la serie delle differenze del primo termine Δ_{p-1}^0 della serie delle differenze d'ordine $p-1$ di a_0 forma le differenze d'ordine p di a_0 cioè

$$\Delta_p^0,\ \Delta_p^1,\ldots,\,\Delta_p^m.$$

Con tale notazione le relazioni fondamentali (4) e (5), per $r=0$, si scrivono

$$\Delta_0^m=(m)_0\Delta_1^0+(m)_1\Delta_1^1+\ldots+(m)_m\Delta_1^m=[1+\Delta_1]^m,$$
$$\Delta_1^m=(m)_0(-1)^m\Delta_0^0+(m)_1(-1)^{m-1}\Delta_0^1+\ldots+(m)_m(-1)^0\Delta_0^m=[-1+\Delta_0]^m.$$

Si definisca la differenza di classe m e d'ordine -1 con la relazione:

$$\Delta_{-1}^m=(m)_0\Delta_0^0+(m)_1\Delta_0^1+\ldots+(m)_m\Delta_0^m=[1+\Delta_0]^m\,,$$

e, in generale, la differenza di classe m e d'ordine $-q$ con la relazione:

$$\Delta^m_{-q} = (m)_0\Delta^0_{-q+1} + (m)_1\Delta^1_{-q+1} + \ldots + (m)_m\Delta^m_{-q+1} = [1+\Delta_{-q+1}]^m.$$

Evidentemente le due indicate relazioni fondamentali fra le differenze d'ordine zero ed uno, sussistono fra due qualunque consecutivi ordini e quindi si ha sempre

$$\Delta^m_s = [1+\Delta_{s+1}]^m,$$
$$\Delta^m_{s+1} = [-1+\Delta_s]^m,$$

per tutt'i valori interi di s, positivi e negativi compreso lo zero; si deve osservare che 1 e -1 sono le differenze fra gl'indici inferiori delle Δ, essendo il sottraendo l'ordine che si vuol determinare.

Si possono dunque considerare le differenze di a_0 secondo i diversi ordini e secondo le diverse classi, cioè:

$$\begin{array}{l} \Delta^0_{-q}\,,\ \Delta^1_{-q}\,,\ \ldots,\ \Delta^m_{-q}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^0_0\,;\ \ \Delta^1_0\,,\ \ldots,\ \Delta^m_0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^0_p\,,\ \ \Delta^1_p\,,\ \ldots,\ \Delta^m_p\,. \end{array}$$

Tali differenze possono immaginarsi disposte a raggiera attorno al termine a_0, perchè:

$$\Delta^0_{-q} = \ldots = \Delta^0_{-1} = \Delta^0_0 = \Delta^0_1 = \ldots = \Delta^0_p = a_0\,.$$

5. Si può esprimere Δ^m_0 sia in funzione della serie delle differenze d'ordine p, sia in funzione della serie delle differenze d'ordine $-q$, e si può esprimere tanto Δ^m_p quanto Δ^m_{-q} in funzione della serie delle differenze d'ordine zero; più generalmente, data una serie di differenze di a_0 d'un qualunque ordine, si può determinare la differenza emmesima d'un qualunque ordine d'indice superiore o inferiore, per mezzo delle due seguenti formole simboliche

$$\Delta^m_{p+s} = [-p+\Delta_s]^m\,, \tag{6}$$
$$\Delta^m_s = [p+\Delta_{p+s}]^m\,. \tag{7}$$

Esse per $s=0$ e $p=1$ si riducono alle relazioni fondamentali (4) e (5); per $m=0$ si riducono a

$$\Delta^0_{p+s} = (0)_0\,(-p)^0\Delta^0_s\,,$$
$$\Delta^0_s = (0)_0\,(p)^0\Delta^0_{p+s}\,,$$

cioè tutt'e due ad a_0 ch'è il centro della raggiera; nell'uno e nell'altro caso p è la differenza degli ordini.

Le formole (6) e (7) si possono direttamente verificare pei primi valori di p e di m; così per $p=0, 1, 2, 3, 4$ e $m=0, 1, 2, 3,$ si può effettivamente, per mezzo della legge di formazione delle differenze, ottenere, il seguente quadro:

	Δ^0	Δ^1	Δ^2	Δ^3
Δ_0	a_0	a_1	a_2	a_3
Δ_1	a_0	$a_1 - 1.a_0$	$a_2 - 1.2.a_1 + 1^2.a_0$	$a_3 - 1.3.a_2 + 1^2.3.a_1 - 1^3.a_0$
Δ_2	a_0	$a_1 - 2.a_0$	$a_2 - 2.2.a_1 + 2^2.a_0$	$a_3 - 2.3.a_2 + 2^2.3.a_1 - 2^3.a_0$
Δ_3	a_0	$a_1 - 3.a_0$	$a_2 - 3.2.a_1 + 3^2.a_0$	$a_3 - 3.3.a_2 + 3^2.3.a_1 - 3^3.a_0$
Δ_4	a_0	$a_1 - 4.a_0$	$a_2 - 4.2.a_1 + 4^2.a_0$	$a_3 - 4.3.a_2 + 4^2.3.a_1 - 4^3.a_0$

risultati uguali a quelli che si possono ricavare dalla formola (6), sostituendo per p ed m gli stessi valori.

Facendo per semplicità $s=0$, si ammetta pertanto

$$\Delta^m_{p-1} = [-(p-1) + \Delta_0]^m ,$$

e si sostituiscono i valori che se ne ricavano, nell'espressione di Δ^m_p in funzione di Δ_{p-1}, data dalla definizione; si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta^m_p &= (-1)^m(m)_0\Delta^0_{p-1} + \ldots + (-1)^{m-r}(m)_r\Delta^r_{p-1} + \ldots + (-1)^0(m)_m\Delta^m_{p-1} = \\ &= (-1)^m(m)_0\,[(0)_0(-p+1)^0\Delta^0_0] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (-1)^{m-r}(m)_r[(r)_0(-p+1)^r\Delta^0_0 + \ldots + (r)_r(-p+1)^0\Delta^r_0] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ (-1)^0(m)_m[(m)_0(-p+1)^m\Delta^0_0 + \ldots + (m)_r(-p+1)^{m-r}\Delta^r_0 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (m)_m(-p+1)^0\Delta^m_0].\end{aligned}$$

Sommando per colonna, dopo avere sviluppato le parentesi quadre, la colonna $(r+1)^{ma}$ sarà:

$$\begin{aligned}&(-1)^{m-r}(m)_r(r)_r(-p+1)^0\Delta^r_0 + (-1)^{m-r-1}(m)_{r+1}(r+1)_r(-p+1)^1\Delta^r_0 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (-1)^0(m)_m(m)_r(-p+1)^{m-r}\Delta^r_0 ,\end{aligned}$$

e per la nota relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m)_{h+k}\,(h+k)_k = (m)_h\,(m-h)_k \qquad (\beta)$$

e riducendo

$$\begin{aligned}&(-1)^{m-r}(m)_r\Delta^r_0[(m-r)_0(p-1)^0 + (m-r)_1(p-1)^1 + \ldots \\ &\qquad \ldots + (m-r)_{m-r}(p-1)^{m-r}],\end{aligned}$$

cioè:

$$(m)_r(-p)^{m-r}\Delta^r_0 ,$$

e variando r da 0 a m, si ottiene la somma di tutte le colonne e quindi

$$\begin{aligned}\Delta^m_p = (m)_0(-p)^m\Delta^0_0 + \ldots + (m)_r(-p)^{m-r}\Delta^r_0 + \ldots \\ + (m)_m(-p)^0\Delta^m_0 = [-p + \Delta_0]^m ,\end{aligned}$$

che è precisamente la formola (6) per $s=0$; e siccome dal paragone di questa formola con quella ammessa:

$$\Delta^m_{p-1}=[-(p-1)+\Delta_0]^m$$

risulta non altro cambiamento che le potenze di $p-1$ in quelle di p, rimanendo invariato l'indice inferiore delle Δ nello sviluppo, si conclude che la formola (6) dipende da p in quanto p è la differenza degli ordini, e quindi rimanendo costante tale differenza, s può essere qualunque intero, positivo o negativo.

Analogamente, facendo per semplicità $s=0$, si ammetta:

$$\Delta^m_0=[(p-1)+\Delta_{p-1}]^m,$$

e si sostituiscano i valori che se ne ricavano, nell'espressione di Δ^m_{-1}, data dalla definizione; si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta^m_{-1} &= (m)_0\Delta^0_0+\ldots+(m)_r\Delta^r_0+\ldots+(m)_m\Delta^m_0=\\ &=(m)_0[(0)_0(p-1)^0\Delta^0_{p-1}]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_r[(r)_0(p-1)^r\Delta^0_{p-1}+\ldots+(r)_r(p-1)^0\Delta^r_{p-1}]+\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ &+(m)_m[(m)_0(p-1)^m\Delta^0_{p-1}+\ldots+(m)_r(p-1)^{m-r}\Delta^r_{p-1}+\ldots\\ &\qquad\ldots+(m)_m(p-1)^0\Delta^m_{p-1}].\end{aligned}$$

Sommando per colonna, dopo avere sviluppato le parentesi quadre, la colonna $(r+1)^{ma}$ sarà:

$$(m)_r(r)_r(p-1)^0\Delta^r_{p-1}+(m)_{r+1}(r+1)_r(p-1)^1\Delta^r_{p-1}+\ldots$$
$$\ldots+(m)_m(m)_r(p-1)^{m-r}\Delta^r_{p-1},$$

e per la stessa relazione (β) e riducendo:

$$(m)_r\Delta^r_{p-1}[(m-r)_0(p-1)^0+(m-r)_1(p-1)^1+\ldots+(m-r)_{m-r}(p-1)^{m-r}],$$

cioè:

$$(m)_r p^{m-r}\Delta^r_{p-1},$$

e variando r da 0 ad m, si ottiene la somma di tutte le colonne e quindi:

$$\Delta^m_{-1}=(m)_0p^m\Delta^0_{p-1}+\ldots+(m)_rp^{m-r}\Delta^r_{p-1}+\ldots+(m)_mp^0\Delta^m_{p-1}=[p+\Delta_{p-1}]^m,$$

che è precisamente la formola (7) per $s=-1$; e siccome dal paragone di questa formola con quella ammessa:

$$\Delta^m_0=[(p-1)+\Delta_{p-1}]^m$$

risulta non altro cambiamento che le potenze di $p-1$ in quelle di p, rimanendo invariato l'indice inferiore delle Δ nello sviluppo, si conclude che la formola (7) dipende da p in quanto p è la differenza degli ordini, e quindi, rimanendo costante tale differenza, s può essere qualunque intero, positivo o negativo.

6. Sostituendo in (7) i valori ricavati da (6), o in (6) i valori ricavati da (7), si ottengono delle identità.

Infatti nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned}\Delta_s^m &= (m)_0 p^m \Delta_{p+s}^0 + \ldots + (m)_r p^{m-r} \Delta_{p+s}^r + \ldots + (m)_m p^0 \Delta_{p+s}^m = \\ &= \sum_{r=0}^{m} (m)_r p^{m-r} \left[(r)_0 (-p)^r \Delta_s^0 + \ldots + (r)_r (-p)^0 \Delta_s^r\right],\end{aligned}$$

ed il coefficiente di Δ_s^r, dopo lo sviluppo, si può scrivere:

$$(m)_r p^{m-r} \left[(m-r)_0 - (m-r)_1 + \ldots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r}\right],$$

e si vede che l'espressione dentro parentesi si annulla sempre, a meno che non sia $m - r = 0$, cioè $m = r$ e quindi:

$$\Delta_s^m = (m)_m p^0 \Delta_s^m = \Delta_s^m .$$

E nel secondo caso:

$$\begin{aligned}\Delta_{p+s}^m &= (m)_0 (-p)^m \Delta_s^0 + \ldots + (m)_r (-p)^{m-r} \Delta_s^r + \ldots + (m)_m (-p)^0 \Delta_s^m = \\ &= \sum_{r=0}^{m} (m)_r (-p)^{m-r} \left[(r)_0 p^r \Delta_{p+s}^0 + \ldots + (r)_r p^0 \Delta_{p+s}^r\right],\end{aligned}$$

ed il coefficiente di Δ_{p+s}^r si può scrivere:

$$(m)_r (-p)^{m-r} \left[(m-r)_0 - (m-r)_1 + \ldots + (-1)^{m-r}(m-r)_{m-r}\right],$$

e si vede che l'espressione dentro parentesi si annulla sempre, a meno che non sia $m - r = 0$, cioè $m = r$ e quindi:

$$\Delta_{p+s}^m = (m)_m (-p)^0 \Delta_{p+s}^m = \Delta_{p+s}^m .$$

Il modo uniforme con cui si è potuto condurre la prova nei due casi, è una conferma dell'esattezza delle due formole (6) e (7) in tutta la loro generalità. Data perciò una serie di differenze di a_0 d'un qualunque ordine, con (6) si determina la differenza numerica d'un qualunque ordine d'indice superiore, e con (7) si determina la differenza emmesima d'un qualunque ordine d'indice inferiore, essendo sempre p la differenza fra i due ordini.

7. Sostituendo in (6) per m, successivamente, i valori 0, 1, 2, ... m, e addizionando i risultati ottenuti, si ha un'espressione per la somma della serie delle differenze d'ordine $p + s$ in funzione della serie delle differenze d'ordine s, cioè:

$$\sum_{m=0}^{m} \Delta_{p+s}^m = \sum_{r=0}^{m} \Delta_s^r \left[(r)_r (-p)^0 + (r+1)_r (-p)^1 + \ldots + (m)_r (-p)^{m-r}\right]; \quad (8)$$

e facendo la stessa sostituzione in (7), si ha un'espressione per la somma della serie delle differenze d'ordine s in funzione della serie delle differenze d'ordine $p+s$, cioè

$$\sum_{m=0}^{m} \Delta_s^m = \sum_{r=0}^{m} \Delta_{p+s}^r \left[(r)_r p^0 + (r+1)_r p^1 + \ldots + (m)_r p^{m-r}\right]. \tag{9}$$

8. La formola (6), facendo per semplicità $s=0$, giova a dimostrare un'altra notevole espressione di Δ_p^m.

Si ha:

$$\Delta_p^m = \sum_{r=1}^{m+1} (-1)^{m-r+1} \Delta_0^{r-1} \times$$
$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right]. \tag{10}$$

Infatti:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right] =$$
$$= (m-1)_0 (m-1)_{r-1} (p-1)^1 + (m-1)_0 (m)_{r-1} (p-1)^0 +$$
$$+ (m-1)_1 (m-2)_{r-1} (p-1)^2 + (m-1)_1 (m-1)_{r-1} (p-1)^1 +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ (m-1)_{k-1} (m-k)_{r-1} (p-1)^k + (m-1)_{k-1} (m-k+1)_{r-1} (p-1)^{k-1} +$$
$$+ (m-1)_k (m-1-k)_{r-1} (p-1)^{k+1} + (m-1)_k (m-k)_{r-1} (p-1)^k +$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots +$$
$$+ (m-1)_{m-2} (1)_{r-1} (p-1)^{m-1} + (m-1)_{m-2} (2)_{r-1} (p-1)^{m-2} +$$
$$+ (m-1)_{m-1} (0)_{r-1} (p-1)^m + (m-1)_{m-1} (1)_{r-1} (p-1)^{m-1},$$

e tenuta presente la relazione (α) fra i coefficienti binomiali ed aggruppando secondo le potenze di $p-1$:

$$\sum_{k=0}^{m-1} (m-1)_k (p-1)^k \left[(m-1-k)_{r-1}(p-1) + (m-k)_{r-1}\right] =$$
$$= (m)_0 (m)_{r-1} (p-1)^0 + \ldots + (m)_k (m-k)_{r-1} (p-1)^k + \ldots + (m)_m (0)_{r-1} (p-1)^m,$$

or perchè $(m-k)_{r-1}$ non si annulli, dev'essere:

$$(m-k) \geq r-1,$$

quindi il più grande valore possibile di k è:

$$k = m - r + 1;$$

perciò, tenuta presente le relazione fra i coefficienti binomiali:

$$(m)_k (m-k)_{r-1} = (m-r+1)_k (m)_{r-1}$$

che può dedursi da (β) e che d'altronde si trasforma in identità sostituendo i fattoriali, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{m-1}(m-1)_k(p-1)^k[(m-1-k)_{r-1}(p-1)+(m-k)_{r-1}]=$$
$$=(m)_{r-1}[(m-r+1)_0(p-1)^0+\ldots+(m-r+1)_k(p-1)^k+\ldots$$
$$\ldots+(m-r+1)_{m-r+1}(p-1)^{m-r+1}]=(m)_{r-1}p^{m-r+1};$$

dunque:

$$\Delta_p^m=\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}\times\sum_{k=0}^{m-1}(m-1)_k(p-1)^k[(m-1-k)_{r-1}(p-1)+$$
$$+(m-k)_{r-1}]=$$
$$=\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}(m)_{r-1}p^{m-r+1}=$$
$$=\sum_{r=1}^{m+1}(m)_{r-1}(-p)^{m-r+1}\Delta_0^{r-1}=[-p+\Delta_0]^m,$$

che è precisamente la formola (6) per $s=0$.

VITO MELFI MOLÈ.

(Continua)

DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA GENERALE SULLE LINEE

Nel concetto intuitivo di *linea* si riconoscono questi caratteri:

I. Una linea è una serie di punti che soddisfa al postulato della continuità. (*)

II. Considerando un punto qualunque A di una linea, può sempre prendersi un punto B precedente o seguente ad A (oppure solo precedente o solo seguente se A è un estremo) tale che tutti i punti compresi fra A e B abbiano da A una distanza minore di un segmento dato qualunque.

Non vogliamo affermare qui che queste due proprietà bastino a caratterizzare il concetto di *linea*; ma neppure possiamo affermare che non bastino. Se bastassero a caratterizzare questo concetto, esse ci offrirebbero una *definizione di «linea»*. Nè sarebbe un ostacolo a ciò il dover parlare, nella definizione di *linea*, di relazioni fra segmenti, giacchè queste si possono già supporre note potendosi costruire tutta la Geometria elementare, come da alcuni è stato fatto, indipendentemente dal concetto generale di *linea*.

(*) Prenderemo il postulato della continuità sotto la ordinaria forma: Se su una linea si hanno due gruppi di punti Γ_1 e Γ_2 tali che ogni punto di Γ_1 preceda ogni punto di Γ_2, esiste sulla linea un punto che *separa* Γ_1 e Γ_2, punto che può essere anche o l'ultimo punto di Γ_1 o il primo punto di Γ_2.

In ogni modo è certo che le proprietà **I** e II permettono di dimostrare molte proprietà delle linee, alcune di intuizione evidente, ma alcune anche di intuizione difficile.

Fra le prime è questa, che ora dimostreremo: *Una linea piana* l *che congiunga due punti* A *e* B *da bande opposte di una retta* r *del piano, incontra certamente la retta* r *almeno in un punto.*

Indichiamo con (A) e (B) le regioni del piano (rispetto alla retta r) nelle quali si trovano i punti A e B; e consideriamo sulla linea l il senso AB.

Se X è un punto qualunque della l (escluso B), possono darsi due casi:

1° o tra i punti del tratto di linea XB (X escluso) ne esiste uno *non* appartenente alla regione (B), ossia esiste sulla l un punto seguente ad X ed appartenente alla regione A o alla retta r;

2° o tutti i punti del tratto XB (X escluso) si trovano nella regione (B).

Poniamo in un gruppo Γ_1 tutti i punti della l che si trovano nel primo caso, e in un gruppo Γ_2 tutti quelli che si trovano nel secondo caso.

È certo che i gruppi Γ_1 e Γ_2 esistono. Infatti, si consideri un cerchio con centro in A e la cui superficie appartenga tutta alla regione (A); se prendiamo sulla l un punto M la cui distanza da A sia minore del raggio del cerchio (prop. II), questo punto M sarà in (A), e tutti i punti del tratto AM (M escluso) apparterranno al gruppo Γ_1, essendo seguiti da un punto M non appartenente a (B). Così pure, se si considera un cerchio con centro in B e la cui superficie sia tutta in (B), ed N è un punto di l tale che tutti i punti del tratto NB abbiano da B una distanza minore del raggio del cerchio, allora il punto N è di Γ_2 perchè i punti che lo seguono appartengono tutti a (B).

Dimostrata la esistenza dei gruppi Γ_1 e Γ_2, osserviamo che ogni punto di Γ_1 precede ogni punto di Γ_2; infatti, se P è un punto di Γ_1, vuol dire che si può considerare un punto che segua P e *non* appartenga a (B), e allora tutti i punti che precedono P si trovano nelle medesime condizioni e appartengono al gruppo Γ_1. Onde nessun punto di Γ_2 può precedere un punto qualunque di Γ_1.

Ne segue, per il postulato della continuità, che esiste un punto H che separa i gruppi Γ_1 e Γ_2; e poichè i gruppi Γ_1 e Γ_2 esauriscono la linea (eccettuato B) ne viene che questo punto H non può essere altro che o l'ultimo punto di Γ_1 o il primo punto di Γ_2.

Ma nel gruppo Γ_1 non esiste un ultimo punto; infatti se P è un punto qualunque di Γ_1, ad esso segue un punto Q *non* appartenente a (B), e allora tutti i punti del tratto PQ (Q escluso) sono di Γ_1. Quindi H è il primo punto del gruppo Γ_2.

Il punto H non può trovarsi nella regione (A) perchè è facile vedere con le solite considerazioni che ad esso seguirebbero altri punti della regione (A) e quindi sarebbe un punto di Γ_1; e non può neanche trovarsi nella regione (B). Infatti, se H fosse in (B), descrivendo un cerchio con centro in H e la cui superficie appartenesse tutta a (B) e considerando un punto K precedente ad H tale che tutti punti del tratto HK avessero da H una distanza minore del raggio del cerchio, tutti i punti del tratto KB sarebbero nella regione (B) e quindi K sarebbe un punto di Γ_2, il che è assurdo essendo H il primo di tali punti.

Poichè dunque il punto H non è nè in (A) nè in (B) sarà sulla retta r, ossia la linea l incontra la retta r in un punto almeno, come si voleva dimostrare.

È evidente che la identica dimostrazione si può ripetere per questo teorema generale: *Se un ente qualunque* R *costituito di punti di un piano determina in qualsiasi modo una divisione del piano in due regioni tali che ogni punto che non sia di* R *appartenga ad una di queste regioni e che se* A *è un punto qualunque di una di queste regioni si possa considerare un cerchio con centro in* A *la cui superficie appartenga tutta a quella medesima regione, allora una linea qualunque che congiunge un punto dell'una regione con un punto dell'altra incontra necessariamente l'ente* R *almeno in un punto.*

Le dimostrazioni di questo teorema generale nei casi particolarissimi in cui l'ente R è una circonferenza e la linea è un segmento o un arco, già note, sono però più complicate della nostra dimostrazione generale, che abbiamo voluto fare su un caso semplice solo per maggiore evidenza.

La medesima dimostrazione si adatta molto facilmente anche al caso in cui l'ente R è nello spazio e determina una divisione dello spazio in due regioni tali che se un punto appartiene ad una di esse si possa sempre considerare una sfera con centro in quel punto il cui solido appartenga tutto alla medesima regione.

P. Benedetti.

Brescia, dicembre 1903.

A PROPOSITO

dell'inchiesta fatta dall'Associazione Mathesis sulla fusione della geometria piana colla solida

È stata sempre lamentata la facilità con cui in Italia si cambiano i programmi e i regolamenti delle nostre scuole, ed è stato detto e ripetuto che questa è una delle cause principali per le quali le scuole in generale non dànno quei risultati che le famiglie e la società avrebbero diritto di attendere da esse.

Anche nel III congresso dei professori di matematica delle scuole medie tenuto a Napoli nello scorso settembre, il prof. Nannei, incaricato di fare la relazione sul primo tema (studiare le cause del poco profitto che fanno nello studio della matematica i giovani delle scuole medie, e proporre i mezzi per ovviarvi), riconosceva solennemente questa verità colle parole seguenti: " Ci fu chi disse che " in Italia (e non soltanto in Italia) era necessaria una legge, la quale stabilisse

" che almeno per dieci anni nessuna legge, ormai esistente, si potesse modificare " o sopprimere. Senza trattenermi sulle ovvie considerazioni che spontaneamente " sorgono nella mente di chiunque, sul danno arrecato alle scuole dai facili cam- " biamenti e da successive contradditorie disposizioni, noterò solo che, per effetto " di tutto ciò, l'alunno si persuade che il passaggio da una classe all'altra non è " conseguenza del suo sapere, ma, almeno in gran parte, è effetto delle disposi- " zioni di un regolamento „. Ecc.

E per togliere questo grave inconveniente lo stesso prof. Nannei propone " che " le disposizioni scolastiche, una volta stabilite dopo ponderato studio e dopo ma- " turo esame, non siano facilmente mutabili „.

Queste considerazioni e questa proposta sono molto giuste, e tutti ne sono convinti, ma è ben difficile che un nuovo ministro della P. I. appena insediato alla Minerva, non senta il bisogno di buttare all'aria l'opera dei predecessori e di *descriver fondo a tutto l'Universo,* convinto, convintissimo di avere così detta l'ultima parola sull'argomento, di aver sanato tutte le piaghe, in modo che nulla resti da fare al successore. Ma la vita dei ministri è breve, e (specialmente nelle scuole classiche) la ridda dei cambiamenti nei programmi e nei regolamenti, continua eternamente fantasmagoricamente, ma con una monotonia desolante.

Poco più di tre anni or sono un ministro sapiente, si permise di fare una novità. Ordinariamente i programmi o le modificazioni di essi, erano manipolati da alti papaveri burocratici, che non avevano mai visto la scuola da vicino, o l'avevano vista in tempi preistorici; si era dato persino il caso che qualche parte del programma era stata soppressa perchè qualche figlio di papà aveva preso una solenne bocciatura in quel punto. Quel ministro invece volle ascoltare la voce degli unici veramente competenti, e fece formulare, per i Licei e i Ginnasi, dei programmi di matematica, fisica e chimica che furono pubblicati con decreto 14 ottobre 1900, da persone competentissime che colle scuole stesse erano in continuo contatto, tenendo conto di quanto nell'ultimo decennio era stato detto nei congressi e pubblicato in riviste dagli insegnanti dei Licei; e, caso assolutamente nuovo nella storia delle nostre scuole, nella relazione a S. M. il Re, che accompagna i programmi, era stampato questo periodo: " Di queste e simili osser- " vazioni sono stati organi autorevoli l'Associazione Mathesis tra gl'insegnanti di " matematica nelle scuole secondarie, e la Società Italiana di Fisica, con forma " misurata ma precisa „.

La maggiore e più importante innovazione introdotta in questi programmi, fu il dividere l'insegnamento della geometria nei vari anni di corso in guisa che fosse possibile agli insegnanti di scegliere fra il metodo tradizionale della separazione della planimetria dalla stereometria e quello della fusione dei due insegnamenti.

Una tale disposizione, per chi consideri la cosa in modo del tutto obiettivo e spassionato, era l'unica logica e ragionevole. Infatti lo stato delle cose nel 1900 era questo.

Ormai era stato riconosciuto universalmente che i classici *Elementi di Euclide,* sebbene fossero opera magistrale ed immortale, non si addicevano più ai nostri tempi; che dopo duemila anni non solo avevano progredito e fatto passi giganteschi gli studi della geometria superiore, ma per riflesso anche nei metodi elementari un po' di cammino si era necessariamente dovuto fare; che perciò non era giusto d'infliggere ai giovani il tormento di studiare la geometria come si studiava duemila anni prima; e già era stato tolto l'obbligo, imposto nel 1867, di adottare gli Elementi di Euclide come libro di testo.

Tale obbligo fu provvidenziale per spazzar via tutti i libri mal pensati e peggio scritti che infestavano il nostro paese, nei quali l'antica purezza della geometria era perduta. Ma fu provvidenziale a patto che fosse un provvedimento transitorio.

E infatti essendo stati intanto pubblicati dei nuovi libri, nei quali si conservava tutto quello che di buono era negli " Elementi „ modernizzandoli, la draconiana disposizione era già stata tolta da un pezzo.

Ma non basta, c'era stato anche chi aveva osato affermare che persino la classica e secolare separazione della geometria piana dalla solida non aveva ragione di esistere, e che per molte ragioni (che non è qui il caso di ripetere perchè ci proponiamo di fare uno studio puramente obiettivo) era più opportuno unire i due insegnamenti. L'audace iniziativa era stata sulle prime accolta con gran diffidenza, e i sostenitori di essa furono trattati poco meno che di mattoidi; i più gridarono alla profanazione, al sacrilegio, all'arca santa violata; ci fu anche chi credè di demolire l'audace riforma con un giuoco di parole: " la fusione è la confusione della geometria „.

Ma dopo vari anni di lotte e di controversie, molti si accorsero che l'idea era meno strampalata di quel che pareva in principio; tutti, anche i più fieri avversari, riconobbero che essa meritava per lo meno di essere presa in considerazione e discussa. E nel 1900 si può affermare che (lasciando da parte la massa inerte che lega l'asino dove vuole il padrone) i professori si erano schierati in due campi quasi eguali *pro-fusione* e *contro la fusione*.

Ed il ministro fece l'unica cosa che poteva fare una persona di senno, disporre cioè i programmi in modo che ogni professore fosse libero di scegliere fra i due metodi, e lasciare poi che il tempo e l'esperienza permettessero di dire l'ultima definitiva parola sull'argomento.

Di ciò fu giustamente data lode al Ministro, e l'Ass. Mathesis si ritenne orgogliosa di avere raggiunto questo risultato.

Nell'interesse del vero, per il bene delle nostre scuole, sarebbe stato opportuno lasciare ormai per qualche tempo in pace la controversa quistione e non parlarne più; questo, credo, era il desiderio della gran maggioranza dei fusionisti (che erano soddisfatti della parziale vittoria ottenuta e che in omaggio alla libertà desideravano persuadere, ma non imporre le loro idee ad alcuno) non già degli avversari che non potevano tollerare in pace di vedere i fusionisti considerati come persone ragionevoli quanto loro, e non come reprobi dannosi alla società.

E nel Congresso di Napoli il presidente dell'Associazione Mathesis si prestò gentilmente a leggere una comunicazione del prof. Angeleri, accanito antifusionista, intitolata: *La fusione della planimetria colla stereometria, nella scuola, è utile o no?*, nella quale dopo alcune considerazioni, che fra poco prenderemo in esame, proponeva d'interpellare i colleghi sul quesito che formava il titolo della comunicazione. Mi si assicura che un altro collega presente al congresso voleva fare un'altra comunicazione in senso fusionista, ma il presidente del congresso, che naturalmente era lo stesso presidente dell'Associazione, poichè, inconsultamente, era stato dato l'ostracismo dall'Ufficio di presidenza del Congresso ai professori universitari, glielo impedì.

Comunque sia il referendum è stato accettato a maggioranza di voti dal comitato direttivo dell'Associazione, il quale, novello Saturno, ha mostrato gran desiderio di mangiare i propri figliuoli, i programmi del 1900, e di sostituire alle idee larghe di libertà accolte in quelli, delle idee più ristrette ed unilaterali.

Nel n. 4 del Bollettino dell'Associazione testè pubblicato, si trova una relazione sul resultato del referendum, la quale lascia trasparire le tendenze antifusioniste dell'anonimo relatore.

Esaminiamo rapidamente i risultati. Le risposte sono state pochine e di queste, 28 favorevoli e 33 contrarie alla fusione. Il risultato numerico proverebbe dunque che i professori delle scuole italiane sull'argomento in questione si dividono, ora come nel 1900, in due campi presso a poco uguali con leggiera prevalenza per gli antifusionisti. E questa prevalenza si riduce ancora, se si considera che fra coloro che si sono schierati contro la fusione si trovano anche dei professori, illustri sì, ma che non avendo mai insegnato nelle scuole secondarie, non hanno sufficiente competenza a giudicare sopra una quistione che è eminentemente didattica.

I favorevoli alla fusione hanno inviato il loro *sì* con pochi commenti, forse perchè pensavano (e non avevano torto) che la quistione è stata oramai già trattata così ampiamente, che non valeva la pena di tornare da capo e ripetere cose dette e ridette. I contrari sono stati più eloquenti ed hanno creduto necessario di spiegare il loro *no*.

Anzitutto la relazione riporta quasi interamente la comunicazione del professore Angeleri, quantunque già pubblicata negli *Atti del Congresso*. Questa comunicazione comincia col far sapere che Tizio, Caio e Sempronio, si son dichiarati contrari alla fusione, e che persino i più caldi fusionisti come il De-Amicis e l'umile sottoscritto hanno mostrato qualche volta di non esser persuasi di quel che dicevano. Ecco la parte che mi riguarda personalmente:

" Gli stessi Lazzeri e Bassani nella compilazione dei loro Elementi di Geo- " metria „ (e qui due o tre frasi cortesi per la modesta opera nostra, delle quali lo ringrazio) " colla nitidezza delle figure solide sembra che *essi stessi* (sic) ammet- " tano una difficoltà maggiore nella Stereometria che nella Planimetria „!

Ma come! L'aver cercato che le figure del nostro libro fossero più nitide e chiare che fosse possibile, deve essere preso come argomento contro di noi? E si può dire sul serio che l'ottimo Giusti facendo un'edizione accurata ha congiurato contro le nostre idee? Spero, caro prof. Angeleri, che lo dica per burla!

E dopo aver detto che " con la fusione si farà perdere ai giovani quel po' " d'amore che ancora hanno, se pure lo hanno, per la geometria „ ed avere attribuito al Retali l'ormai storico bisticcio " fusione-confusione „ l'Angeleri aggiunge:

" Questo allo stato delle cose attuali; da qui a cinquanta anni, quando i gio- " vani del Ginnasio saranno bene addentro nei misteri della geometria, allora, ma " soltanto allora, si potrà adottare la fusione nelle scuole; per ora, no „.

Confesso candidamente che in questo periodo ci ho capito poco. Vuole forse il prof. Angeleri lasciare gli attuali studentelli al Ginnasio per 50 anni, affinchè abbiano agio di penetrare i misteri della geometria, e mandarli vecchi e canuti al Liceo, ad apprendere la fusione (o confusione, come più gli aggrada) delle due geometrie?

Oppure intende semplicemente di rimandare *ai posteri l'ardua sentenza?* In tal caso però mi permetto di osservare che con molta probabilità gli studenti di ginnasio del 1954 in media varranno intellettualmente presso a poco quanto quelli del 1904, e niente ci autorizza a ritenere che quelli, meglio di questi, arriveranno a penetrare nei sacri misteri della geometria! Sicchè non vedo la convenienza di rimandare ai posteri la risoluzione di una quistione che oramai è sul tappeto e possiamo benissimo risolvere da noi.

Ma lasciando da parte l'Angeleri ed altri, sono rimasto particolarmente impressionato dalla carica a fondo che contro la fusione e contro il sottoscritto fa il prof. Murer, il quale fu uno dei primi ad accogliere favorevolmente l'idea della fusione, e l'esperimentò due volte in scuola. Egli dice di non essere soddisfatto dei risultati e conclude: colla frase seguente stampata in corsivo " La mia esperienza " adunque, continuata e ripetuta con costanza degna di miglior esito, è completa- " mente sfavorevole alla fusione; almeno alla fusione secondo il sistema Lazzeri ".

Questo giudizio così reciso è assai sconfortante pei fusionisti e più specialmente per me, ma un po' più avanti esso viene attenuato dalle seguenti frasi.

" Dunque che penso riguardo all'utilità di adottare il metodo della fusione " nelle scuole? ".

" Ecco: da quanto dissi si capisce che io non credo di schierarmi, in tesi gene- " rale, contro di essa; anzi ammetto di buon grado che con nuovi testi e con nuovi " programmi abbia anche a riuscire utile ".

In conclusione dunque la risposta del prof. Murer, che a prima giunta sembra una fiera condanna del metodo, è in realtà una condanna all'ostracismo dei libri esistenti e più particolarmente del mio. E ciò colpisce il mio amor proprio di autore, ma almeno lascia intatto il principio per il quale combatto da molti anni; — e ne sono lieto. —

Poichè spero che tutti quanti hanno tenuto dietro alla povera opera mia su questo argomento dovranno rendermi giustizia, e riconoscere che essa si è limitata a questo: essendo profondamente convinto dell'utilità della fusione delle due geometrie, ho procurato d'infondere questa persuasione negli altri, ma non ho mai battuta la gran cassa per i miei *Elementi*, non ho mai detto che essi fossero il migliore dei libri di geometria nel migliore dei mondi possibili, non ho mai detto che soltanto seguendo me in tutti i particolari si ottiene la salvazione.

Certe affermazioni le lascio al prof. Andriani, il quale, secondo la relazione che stiamo esaminando, dichiara candidamente. " Sì, la fusione è utile se adottate " il mio libro; no, se vi ostinate ad imitare il De Paolis e Lazzeri e Bassani "!

Considerando dunque la quistione dall'alto, e all'infuori della convenienza e della vanità personale, mi compiaccio di constatare che la risposta del Murer che, è la più fiera di tutte, colpisce me personalmente; ma non intacca il principio.

E per attenuare il dispiacere che mi reca questo giudizio, mi valgo della consolazione dei disperati " mal comune mezzo gaudio ". Infatti il Murer, dopo avere esposto il suo reciso giudizio sopra citato contro il sistema Lazzeri dichiara che di questo soltanto si è occupato, " perchè chi dice fusione dice Lazzeri; e vice- " versa " (è troppo onore! e l'Andriani, il Reggio, l'Ingrami e tanti altri hanno diritto di protestare, e protesto anch'io, specialmente contro il viceversa!) " nè io " credo che esista altro libro che possa adattarsi alle scuole più di questo, mal- " grado ecc.... Non conto il De Paolis, primo tentativo, glorioso sì, ma alquanto " incerto che non ha saputo reggersi; e nemmeno il Veronese, abbenchè abbia " introdotto concetti scientificamente incensurabili e aperta la via a qualche utile " innovazione anche nell'insegnamento; in quantochè egli " (il libro o l'autore?) " mi sembra nel suo complesso qualche cosa di *paradossale e niente affatto educativo* " per la gioventù ecc. ".

In confronto delle sassate che il prof. Murer scaglia contro l'opera di due giganti come il compianto De Paolis, e il prof. Veronese, elevato in questi giorni per i suoi meriti scientifici alla dignità senatoriale, i sassolini che egli scaglia contro l'opera dell'umile sottoscritto sono confetti!

Dicendo che egli non conosce altro libro che possa adattarsi alle scuole più del mio, il Murer esprime un giudizio benevolo di cui gli sono grato. E siccome egli non ha peli sulla lingua, quel giudizio è indubbiamente sincero; e mi credo in dovere di dirgli quale ne è probabilmente la ragione.

Quando, moltissimi anni fa, ai primordi della mia carriera, mi accinsi a scrivere i primi abbozzi dei miei Elementi, non pensavo per nulla a stamparli e a farne un libro di testo; li scrissi unicamente per i miei scolari dell'Accademia Navale, ai quali dovevo insegnare la geometria in un anno, perchè mi piaceva svolgere l'insegnamento secondo le mie idee senza seguire la falsariga di nessuno; perciò riuscirono un libro sincero e spontaneo. Non mi sarei sognato davvero allora che quegli appunti litografati avrebbero avuto l'effetto di tener viva una quistione importantissima che accalora così insolitamente i matematici anche dopo tanto tempo. E siccome non faccio quistione di bottega, esprimo il voto che anche qualche insegnante di liceo o d'istituto tecnico faccia come me; si prepari un testo secondo il metodo della fusione più adatto del mio alle esigenze delle scuole secondarie; ed io mi contenterò della gloria di avere mantenuta viva la quistione e di avere spinto altri a fare meglio di me.

In conclusione io ritengo:

1° che il risultato del referendum sulla fusione delle due geometrie, abbia poco valore, perchè troppo pochi insegnanti hanno espresso il loro parere e perchè il referendum è stato proposto solamente ai professori di matematica dei Licei, escludendo così in particolare quelli degl'istituti tecnici, ma dovendo far presto e bene, la fusione è anche più specialmente indicata;

2° che se si deve tener conto del risultato, i fusionisti debbano in fondo essere soddisfatti che quasi un 50 % di coloro che hanno risposto, si siano dichiarati favorevoli, perchè non è facile sradicare le vecchie abitudini, e la quistione della fusione si prende sul serio da appena una diecina d'anni, mentre il metodo della separazione ne conta ben 2000 di incontrastato dominio e non si vuole arrendere senza vivace resistenza;

3° che il comitato direttivo dell'Associazione Mathesis ha avuto troppa fretta nel promuovere il referendum in parola.

Forse l'essere stato riconosciuto ufficialmente come *autorevole interpetre* delle opinioni degli insegnanti ha lusingato un po' troppo l'amor proprio del comitato suddetto, e lo ha invogliato a imitare i Ministri in ciò in cui sono meno imitabili, nella facilità cioè di mutare programmi e ordinamenti.

Non potendo dunque approvare l'opera del consiglio (col quale mi trovavo già poco d'accordo per altre ragioni) e non essendo disposto a sottomettermi mi sono affrettato a dimettermi dal medesimo.

Non posso chiudere queste poche osservazioni senza far rilevare che mentre l'Associazione Mathesis accenna a tornare sui propri passi e fa iniziare all'associazione un cammino a ritroso, fuori d'Italia comincia ad espandersi il moto fusionista in modo notevolissimo.

Nel N. 4 Anno V (1901) del Bollettino dell'Associazione Mathesis si trova un articolo intitolato: " La fusione della planimetria e stereometria in Francia „ nel quale è esposta la storia della fusione in Francia. Ad esso rimandiamo i nostri lettori, non consentendoci lo spazio di riprodurlo per intero, ma ne riporto alcuni brani per rammentare le notizie più interessanti:

Fino dal 1898 il sig. Laisant accennava all'utilità della fusione (*Mathématique, Philosophie, Enseignement*, pag. 238).

Nel n. 1, anno I (pag. 159 anno 1899) dell'*Enseignement mathématique* il sig. Ri-

PERT pubblicava un'ampia e diligente recensione degli *Elementi di Geometria* dei proff. LAZZERI e BASSANI, e dopo aver dato lode all'opera, chiudeva colle seguenti parole:

" Il principio della fusione delle due geometrie, considerato ieri come un'utopia, " oggi divenuto un'idea di cui s'impone lo studio, è destinato forse a trasformarsi, " in un prossimo avvenire, in metodo classico per l'insegnamento della geometria " elementare, attendendo la sua adozione in tutti i rami della geometria. A questo " progresso, se si realizzerà, avrà potentemente contribuito il libro dei professori " dell'Accademia Navale Italiana, già suffragato da vari anni d'insegnamento ".

Nell'anno I, dello stesso giornale veniva publicato un notevole articolo del prof. G. Candido, socio della *Mathesis,* in cui si esponeva la storia della fusione della geometria in Italia. Tale articolo deve senza dubbio avere contribuito a risuscitare la questione in Francia e a divulgarla altrove.

Recentemente infine sono comparsi a prò della *fusione* due notevoli articoli che varrebbe la pena di riprodurre per intero, se la tirannia dello spazio lo consentisse.

L'uno è del prof. CHAILAN col titolo: *Un progrès mathématique à réaliser,* pubblicato nell'*Enseignement Chrétien* del 1° marzo: l'altro del LAISANT, nel n. 2, anno III (15 marzo) col titolo: *Une exhumation géométrique* . . . .

. . . .

Dopo avere esposto le ragioni che militano a favore della fusione, il Chailan aggiungeva.

" L'idea della fusione non è nuova; già Gergonne (*Annales,* t. XVI, p. 209) " dubitava che il nostro modo di dividere la geometria in geometria piana e geo- " metria dello spazio non sia così naturale e così esattamente rispondente all'essenza " delle cose, come venti secoli d'abitudine hanno potuto insinuarci.

" Essa è studiata dappertutto. In Italia è quasi trionfante ".

E dopo avere accennato all'opera dell'Associazione *Mathesis,* del prof. G. LORIA " il più ardente propugnatore della fusione " e del *Periodico di Matematica,* parla dei trattati di DE PAOLIS, di ANDRIANI, di LAZZERI e BASSANI, di VERONESE e di REGGIO, soffermandosi più lungamente su quello di Lazzeri e Bassani, del quale dice: " è un eccellente libro classico che ha fatto le sue prove ".

E continua: " In Germania la questione è stata argomento di un rapporto " presentato alla riunione dei filologi e dei professori tedeschi tenuta a Dresda " nel 1897. . . . ."

" *Posso affermare che in Francia un grande movimento si prepara in favore della* " *fusione.* Ma io non conosco che due libri che potrebbero servire di base ad un " insegnamento fusionista. L'uno è divenuto rarissimo, l'altro tende a diventarlo ".

Questi due libri sono: le *Analogies de la Géométrie élémentaire,* pubblicate da A. MAHISTRE nel 1844 e i *Nouveaux Éléments de Géométrie,* pubblicati da C. MERAY nel 1874.

In quest'ultimo libro " la fusione fra le due geometrie è completa. Il paralle- " lismo, la perpendicolarità, la comparazione degli angoli, si fanno simultanea- " mente per il piano e per la spazio ".

. . . .

L'articolo del sig. Laisant, *une exhumation géométrique* è dedicato interamente all'opera del Meray, che il Loria aveva già segnalato ai lettori del " Periodico " fino dal 1898 (Anno XIV, pag. 26).

" Si danno continuamente nella vita delle sorprese ", così comincia l'articolo. " Quella di cui voglio parlare oggi non è delle minori ".

La sorpresa cui si allude è poi il fatto che, mentre era ben conosciuto in Francia il *movimento degnissimo d'interesse e d'attenzione* verificatosi da qualche anno in Italia a prò della fusione, mentre egli stesso, il LAISANT, aveva additato il Mahistre come un precursore di tale idea, ignorava affatto l'esistenza del libro del Meray, pur conoscendo di nome e per i suoi lavori il valente professore dell'Università di Digione.

. . . .

Non è quindi da meravigliarsi se il libro del Meray era assolutamente ignorato in Italia anche dai più ferventi sostenitori della fusione, se i libri di De Paolis, di Andriani, di Lazzeri e Bassani ecc. sono venuti alla luce senza che gli autori avessero conoscenza di quanto aveva fatto il Meray.

Il fatto che l'idea della fusione in Germania, in Francia, in Italia, si affacciò alla mente di parecchi valenti cultori della Geometria, ciascuno dei quali ignorava i tentativi fatti da altri, è prova della bontà dell'idea. Al nostro paese, e in particolare alla nostra Associazione *Mathesis* resterà sempre il vanto di aver per la prima volta portato dal campo della teoria a quello della pratica una buona riforma dei metodi per l'insegnamento della geometria elementare.

Questo stampava il Bollettino dell'Associazione Mathesis nel 1901. L'articolo poi si chiudeva con le interessanti relazioni dei prof. CHANCENOTTE, BILLIET e MIRONNEAU sugli esperimenti fatti alla scuola Normale di Auxerre del libro del Meray, assolutamente entusiastiche per i risultati ottenuti, e con una esortazione del Laisant perchè il metodo venisse adottato su larga scala.

Siamo oggi in grado di aggiungere a queste, delle notizie più fresche.

Nel N.° di Marzo dell'ottima rivista " L'enseignement mathématique „ il professor Meray in un articolo di 35 pagine intitolato " Justification des procédés et de l'ordonnance des nouveaux éléments de géométrie „ espone ampiamente i concetti a cui s'informa la seconda edizione del suo libro esumato dopo quasi 30 anni di oblio.

Senza entrare nell'esame del libro e dell'articolo, ci piace riportarne il seguente brano:

" Nel momento in cui scrivo queste linee, la mia opera ha l'onore di essere " insegnata testualmente o quasi in una trentina di corsi di scuole normali e di " scuole primarie superiori, ed anche, per la prima volta in una classe di Baccellierato scientifico. Io non nasconderò la mia gioia vivissima di vedere, di più " in più accentuata presso tutti i professori, ed anche presso i loro allievi, così " essi mi dicono, la soddisfazione di cui mi vengon prodigate le prove . . . . . . " Io non ne concludo che il mio lavoro è senza difetti, che uno più abile non " saprà far meglio. Mi sento soltanto autorizzato a credere che gli elementi clas- " sici hanno fatto il loro tempo, come avevo pensato, e che i rimpiazzanti futuri " si troveranno sulla via sulla quale io mi sono incamminato „.

Siccome il movimento fusionista in Francia è assai di fresca data, ci sembra che i risultati sopra esposti siano assai notevoli e soddisfacenti.

In Ispagna pure per le notizie, che ho da vari amici e corrispondenti, il movimento fusionista sta notevolmente accentuandosi.

E di fronte a questi risultati si dilegua in me l'impressione prodotta dal nuovo atteggiamento assunto dalla presidenza dell'Associazione Mathesis, si rinnovella e si riconferma invece la fede che l'avvenire è per noi fusionisti.

GIULIO LAZZERI.

PICCOLE NOTE

I. — **Nota relativa a quella del Dott. Giulio Cardoso-Laynes, "Sopra una trasformazione delle curve piane,,.** (*) — **1.** In tutte le trasformazioni geometriche piane, nelle quali ad un punto M corrisponde un punto M', a una curva (C), descritta da M, corrisponde una curva (C'), descritta dal punto corrispondente M'.

Oltre alle applicazioni particolari, è interessante occuparsi dei principî generali, perchè questi essendo conosciuti, potranno essere applicati a tutte le curve (C) e (C').

Per citare alcuni di questi principî generali ai quali facciamo allusione, richiamiamo l'attenzione sui fatti seguenti:

1°. Formola di trasformazione; essa permette di scrivere l'equazione della trasformata (C') quando si conosca quella di (C) e, come corollario, di dedurre l'ordine di (C'), conoscendo quello di (C).

2°. Essendo dati l'ordine e la classe di (C), trovare l'ordine e la classe di (C'). In particolare, studiare la trasformazione dei punti singolari di (C), cioè, trovare ciò che divengono in (C') i punti di flesso, i punti multipli di (C), ecc.

3°. Risolvere il problema della tangente, cioè *essendo dato il punto* M *di* (C), *trovare la tangente a* (C') *nel punto corrispondente* M', ecc. perchè vi sarebbero evidentemente molte altre cose da considerare.

Voglio solamente, a proposito dell'articolo citato, completare, per quanto riguarda la costruzione della tangente alla trasformata, l'interessante nota del Dott. G. Cardoso-Laynes.

2. Troverò occasione di applicare, ancora una volta, il principio che io ho chiamato *principio delle trasversali reciproche,* il qual principio a più riprese, e da ben quarant'anni, ho mostrato quanto sia semplice e fecondo.

Prendiamo, come propone il sig. Cardoso-Laynes, due assi rettangolari OX e OY; sia (C) la curva che si vuol trasformare mediante la costruzione geometrica proposta; nel punto M, preso ad arbitrio su (C), tracciamo la tangente che incontri OX in A e OY in B. Sia M' il punto di mezzo di AB; M' è nella trasformazione del sig. Cardoso-Laynes, il corrispondente di M. Supponendo M mobile su (C), M' descrive la corrispondente curva (C'); io mi propongo di risolvere il problema: *essendo dati gli assi* OX, OY *la curva* (C) *ed il punto* M, *trovare la tangente in* M' *alla trasformata* (C').

3. Indicherò la soluzione di un problema elementarissimo, al quale ricondurrò quello che mi sono proposto:

Essendo dato un triangolo ABC, *da un punto* P *della retta* BC, *condurre una trasversale* PB'C', *tale che si abbia*

$$\frac{BB'}{CC'} = \frac{p}{q},$$

essendo p *e* q *due lunghezze date.*

Suppongo il problema risoluto, e sia PB'C' la trasversale richiesta. Se B'', C'' sono rispettivamente i punti *isotomici* (**) di B' e C' sui lati AB ed AC, la retta B''C'' sarà la trasversale reciproca (***) di B'C', che andrà ad incontrare la BC in un punto P', isotomico di P. Questo punto P' è dunque conosciuto.

Prendiamo $AI = p$, $AK = q$ e dal punto P' conduciamo la parallela a IK; la trasversale reciproca di questa parallela è la retta cercata.

4. Consideriamo, col sig. Cardoso-Laynes, due rette OX, OY ed una curva (C). Tracciamo le due tangenti PQ e RS, infinitamente vicine, e sia M il loro punto d'incontro. Consideriamo il triangolo formato dalle due tangenti e da uno degli assi, per es. OX. Avendo fatto QP' = QP' = MP, e SR' = SR'' = MR, osserveremo che PR e P'R' sono trasversali reciproche nel triangolo MQS e quindi O' è l'isotomico di O su QS.

(*) "Periodico di Matematica,,. Ottobre 1903, pag. 81.

(**) Credo che questo termine sia ben noto; due punti sono *isotomici* sopra un segmento dato, quando sono simmetrici rispetto al punto medio del segmento stesso.

(***) Suppongo conosciuto il *principio delle trasversali reciproche,* che io feci conoscere nel 1866 ("Annales scientifique de l'École normale supérieure,,) e che dipoi ho applicato in numerose memorie. Tale principio può enunciarsi così: *quando tre punti sono in linea retta sui lati di un triangolo, anche i loro isotomici sono in linea retta.*

Ma d'altra parte, per il teorema di Menelao, si ha

$$\frac{KS}{KQ} = \frac{MP''}{P''Q} \cdot \frac{R''S}{MR''} \tag{1}$$

e anche

$$\frac{IR'}{IP'} = \frac{MP''}{P''P'} \cdot \frac{R''R'}{MR''}. \tag{2}$$

Ma, osservando che è

$$P''P' = 2P''Q \quad \text{e} \quad R''R' = 2R''S,$$

si conclude dalle (1) (2)

$$\frac{KS}{KQ} = \frac{IR'}{IP'} \quad \text{ossia} \quad \frac{KS}{SQ} = \frac{IR'}{P'R'}. \tag{3}$$

Infine, indicando rispettivamente con ρ e ρ' i raggi dei cerchi circoscritti ai triangoli MQS e MP'R', si ha

$$\frac{QS}{P'R'} = \frac{\rho}{\rho'}$$

e l'eguaglianza (3) si può scrivere

$$\frac{KS}{IR'} = \frac{\rho}{\rho'} \tag{4}$$

5. Ciò premesso, arriviamo facilmente alla costruzione che ci eravamo proposti; infatti, passando al limite, supponendo cioè che la tangente PQ si confonda con la RS, otteniamo alcune relazioni geometriche che metteremo in evidenza:

1°. Il punto M diviene il punto di contatto μ della tangente RS e noi prendiamo $R'S = R''S = R\mu$.

2°. Il punto O', che è l'isotomico di O su QS, diviene il simmetrico di O rispetto a S.

3°. I cerchi circoscritti ai triangoli MQS e MP'R' divengono: il primo, il cerchio passante per μ e per S, tangenzialmente a OX, ed il secondo il cerchio passante per μ e per R', tangenzialmente a O'R'.

Indicheremo con r ed r' i raggi di questi cerchi; r ed r' sono lunghezze conosciute, facili a costruirsi; sono i limiti delle lunghezze ρ e ρ'.

4°. La retta P''R'', al limite, è divenuta una retta passante per R'' e che determina, per la (3), sui lati del triangolo O'R'S, due segmenti KS e IR', tali che si abbia

$$\frac{KS}{IR'} = \frac{r}{r'}.$$

Potremo perciò tracciare questa retta R''KI, applicando la costruzione indicata nel § 3 di questa nota.

Conclusione. — Possiamo osservare che il punto medio A di RS coincide col punto medio di MR''. Analogamente A', punto medio di PQ è anche punto medio di MP'', quindi AA' è parallela a P''R'' e per avere la tangente in A alla curva (C') luogo di questo punto A, basterà condurre per A la parallela alla retta R''KI, dopo avere costruito tale retta nel modo indicato.

Questa osservazione completa, sotto un certo aspetto, l'interessante nota del sig. Cardoso-Laynes. Sarei lieto che questi vi trovasse interesse e facesse conoscere ai giovani geometri italiani il metodo delle trasversali reciproche, del quale ho mostrato in tante occasioni, come ho già detto, la meravigliosa semplicità.

Parigi, novembre 1903. G. De Longchamps.

II. — **Un teorema sui limiti.** — *Se una successione*

$$K_1, K_2, K_3, \ldots K_n, \ldots K_p, \ldots K_{p+s}, \ldots K_r \ldots \tag{1}$$

ammette un limite L, *anche la successione*

$$K_1, \ldots K_n, \ldots K_p, K_{p+1}, \ldots K_{p+s}, K_r, \ldots \tag{2}$$

ottenuta prendendo dalla (1) *un numero illimitato di quali si vogliono termini, ammette lo stesso limite* L.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, poichè la (1) ammette per limite L, potremo trovare in essa un termine K_p, appartenente pure alla (2), tale che, indicando ε un numero piccolo quanto si voglia, si verifichino le disuguaglianze:

$$|L - K_p| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$

$$|K_p - K_{p+1}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$

$$|K_{p+1} - K_{p+2}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|K_{p+s-1} - K_{p+s}| < \frac{\varepsilon}{s+1}$$

dalle quali

$$|L - K_{p+s}| < \varepsilon .$$

Analogamente

$$|L - K_r| < \varepsilon ; \ldots$$

quindi, ricordando che una successione tende al limite L se è possibile determinare nella successione un termine a_n, a partire dal quale le differenze fra L ed i termini che seguono siano in valore assoluto minore di ε, indicando ε un numero piccolo quanto si voglia, potremmo dire che la (2) tende al limite L, come appunto si voleva dimostrare.

OSSERVAZIONE. — Applicando questo teorema si potrà spesso semplificare di molto la ricerca del limite di una successione. Così per esempio si viene a semplificare la ricerca del limite della successione formata dai valori approssimati a meno di

$$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

di un numero decimale periodico.

PIER ANDREA FONTEBASSO.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 639 E 655

639. *Fra* m *persone delle quali* m_1 *parlano solo il francese,* m_2 *solo l'inglese e le altre tanto il francese quanto l'inglese, se ne vogliono scegliere* n *in modo che* n_1 *di queste parlino almeno il francese e le altre almeno l'inglese; in quante maniere si potrà fare la scelta?*

G. PESCI.

Risoluzione.

Se delle n_1 persone che devono parlare francese se ne scelgono $n_1 - r$ fra le m_1 che parlano solo francese, se ne dovranno poi scegliere r fra le $m - m_1 - m_2$ che parlano tanto il francese che l'inglese; e ciò si potrà fare in

$$\binom{m_1}{n_1 - r}\binom{m - m_1 - m_2}{r} \quad \text{maniere.}$$

Se, corrispondentemente, delle $n - n_1$ persone che devono parlare inglese se ne scelgono $n - n_1 - s$ fra le m_2 che parlano solo inglese, se ne dovranno poi scegliere s fra le $m - m_1 - m_2 - r$ che parlano tanto il francese che l'inglese e che sono rimaste dopo la scolta precedente; e ciò si potrà fare in

$$\binom{m_2}{n - n_1 - s}\binom{m - m_1 - m_2 - r}{s} \quad \text{maniere.}$$

Per cui, se delle n_1 persone che devono parlare francese se ne scelgono $n_1 - r$ fra le m_1 che parlano solo francese, questa scelta si potrà fare in

$$\binom{m_1}{n_1 - r}\binom{m - m_1 - m_2}{r}\sum_{s=0}^{s=n-n_1}\binom{m_2}{n - n_1 - s}\binom{m - m_1 - m_2 - r}{s}.$$

Facendo variare r da 0 a n_1, si conclude che il numero cercato è

$$\sum_{r=0}^{r=n_1}\left\{\binom{m_1}{n_1 - r}\binom{m - m_1 - m_2}{r}\sum_{s=0}^{s=n-n_1}\binom{m_2}{n - n_1 - s}\binom{m - m_1 - m_2 - r}{r}\right\}.$$

Una soluzione analoga a questa fu mandata dal sig. **Gandini, R. U. di Pavia.**

G. Pesci.

655. *Se* ABC, A'B'C' *sono due triangoli omologici l'uno inscritto nell'altro, e* P *è un punto qualunque del loro piano, le coniche* ABCA'P, ABCB'P, ABCC'P *incontrano i lati* B'C', C'A', A'B' *in tre punti* X, Y, Z *d'una retta* r, *e le loro tangenti in* A, B, C *concorrono in un punto* Q. *Se* P *è nella conica circoscritta ad* ABC *ed inscritta in* A'B'C', *la retta* r *tocca questa conica nel punto* P, *e* Q *è nell'asse d'omologia dei due triangoli.*

G. Biasi.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia:

$$\alpha \equiv (AA', BC),\ \beta \equiv (BB', AC),\ \gamma \equiv (CC', AB),\ D \equiv (BC, B'C');$$

pel teorema di Ceva avremo:

$$\frac{C'A}{B'A}\cdot\frac{A'B}{C'B}\cdot\frac{B'C}{A'C} = -1, \quad (1) \qquad \frac{B\alpha}{C\alpha}\cdot\frac{C\beta}{A\beta}\cdot\frac{A\gamma}{B\gamma} = -1. \quad (2)$$

Indichiamo con i la retta $\overline{PI}$ con $(I = A, B, C, A', B', C')$. Ciò posto premetto e dimostro la seguente eguaglianza:

$$(abcc')(bcaa')(cabb') = 1. \quad (3)$$

Si ha:

$$(abcc') = \frac{\text{sen}(ac)\,\text{sen}(bc')}{\text{sen}(bc)\,\text{sen}(ac')}, \quad (4) \qquad (bcaa') = \frac{\text{sen}(ba)\,\text{sen}(ca')}{\text{sen}(ca)\,\text{sen}(ba')}, \quad (5)$$

$$(cabb') = \frac{\text{sen}(cb)\,\text{sen}(ab')}{\text{sen}(ab)\,\text{sen}(cb')}, \quad (6)$$

inoltre:

$$\frac{\text{sen}(ab')}{\text{sen}(ac')} = \frac{PC'}{PB'}\cdot\frac{B'A}{C'A}, \quad (7) \qquad \frac{\text{sen}(bc')}{\text{sen}(ba')} = \frac{PA'}{PC'}\cdot\frac{C'B}{A'B}, \quad (8)$$

$$\frac{\text{sen}(ca')}{\text{sen}(cb')} = \frac{PB'}{PA'}\cdot\frac{A'C}{B'C}. \quad (9)$$

1°. Tagliando il fascio X (BCAA') con $\overline{BC}$ e proiettando la punteggiata ottenuta da A' su $\overline{B'C'}$ otterremo la punteggiata

$$(C'B'DX) = -(C'B'AX).$$

Inoltre si sa che:

$$X\,(BCAA') \barwedge P\,(BCAA'),$$

quindi avremo:

$$-(\mathrm{C'B'AX}) = (bcaa'),$$

e analogamente

$$-(\mathrm{A'C'BY}) = (cabb'), \qquad -(\mathrm{B'A'CZ}) = (abcc').$$

Moltiplicando membro a membro queste ultime tre eguaglianze, e tenendo conto delle (3), (1) risulta:

$$\frac{\mathrm{C'X}}{\mathrm{B'X}} \cdot \frac{\mathrm{A'Y}}{\mathrm{C'Y}} \cdot \frac{\mathrm{B'Z}}{\mathrm{A'Z}} = 1,$$

quindi pel teorema di Menelao i punti X, Y, Z appartengono ad una retta r. c. d. d.

2°. Siano A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro di $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ rispettivamente con le tangenti in A, B, C alle tre coniche del problema. Tagliando il fascio A(BCAA′) con $\overline{BC}$ otteniamo la punteggiata $(BCA_1\,\alpha)$; inoltre:

$$\mathrm{A\,(BCAA')} \barwedge \mathrm{P\,(BCAA')}$$

e quindi

$$(\mathrm{BCA_1}\,\alpha) = (bcaa'),$$

e analogamente:

$$(\mathrm{CAB_1}\,\beta) = (cabb'), \quad (\mathrm{ABC_1{}'}\gamma) = (abcc').$$

Moltiplicando queste ultime tre eguaglianze membro a membro e tenendo conto delle (3), (2) risulta:

$$\frac{\mathrm{BA_1}}{\mathrm{CA_1}} \cdot \frac{\mathrm{CB_1}}{\mathrm{AB_1}} \cdot \frac{\mathrm{AC_1}}{\mathrm{BC_1}} = -1$$

e per il teorema di Ceva le rette $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ passeranno per uno stesso punto Q.
c. d. d.

3°. Il puto P si trovi sulla conica circoscritta ad ABC ed inscritta in A′B′C′. Per P conduciamo la tangente a questa conica e chiamiamo X, Y, Z rispettivamente i punti in cui questa tangente incontra i lati B′C′, C′A′, A′B′. Basterà dimostrare ad esempio che i punti A, B, C, A′, P, X sono su una stessa conica.

Si sa che: *in un quadrilatero semplice circoscritto a una conica, le congiungenti i punti di contatto dei lati opposti e le diagonali concorrono in uno stesso punto;* Dunque, ad esempio, le rette AB, CP, B′Y passano per uno stesso punto H. Consideriamo l'esagono ABA′CPX. I punti $\mathrm{H} \equiv (\mathrm{AB, CP})$, $\mathrm{Y} \equiv (\mathrm{BA', PX})$, $\mathrm{B'} \equiv (\mathrm{A'C, XA})$ sono allineati; quindi ABA′CPX è un esagono di Pascal e come tale è inscrittibile in una conica. Analogamente si dimostra che i gruppi di punti

$$\mathrm{A, B, C, B'\,P, Y}; \qquad \mathrm{A, B, C, C', P, Z};$$

appartengono ad altre due coniche.

4°. Sia: $\mathrm{D} \equiv (\mathrm{BC, B'C'})$, $\mathrm{E} \equiv (\mathrm{AC, A'C'})$, $\mathrm{F} \equiv (\mathrm{AB, A'B'})$. La $\overline{DEF}$ sarà l'asse d'omologia dei due triangoli ABC, A′B′C′. Siano: Q_1, Q_2, Q_3 i punti d'incontro dell'asse d'omologia rispettivamente con le tangenti in A, B, C alle tre coniche in quistione. Avremo:

$$\mathrm{P\,(ABCX)} \barwedge \mathrm{A\,(Q_1BCX)}, \quad \mathrm{P\,(BAYC)} \barwedge \mathrm{B\,(Q_2AYC)}, \quad \mathrm{P\,(CZAB)} \barwedge \mathrm{C\,(Q_3ZAB)}.$$

I punti X, Y, Z sono allineati con P dunque i tre fasci di centro P hanno egual rapporto armonico, quindi avranno pure egual rapporto armonico anche i fasci di centri A, B, C. Segando questi tre fasci con l'asse d'omologia DEF otterremo le punteggiate:

$$(\mathrm{Q_1FED}) = (\mathrm{Q_2FED}) = (\mathrm{Q_3FED})$$

e quindi i punti Q_1, Q_2, Q_3 dovranno coincidere in un sol punto Q c. d. d.

QUISTIONI PROPOSTE

667. Sieno ABC, A'B'C' due triangoli omologici, l'uno inscritto nell'altro e si congiunga un punto Q del loro asse di omologia coi vertici A'B'C' del secondo; i punti nei quali le congiungenti incontrano i lati opposti dello stesso triangolo sono in una conica circoscritta ad ABC e tangente all'asse d'omologia nel punto Q.

668. Esistono sei coniche (tre ellissi e tre iperbole) concentriche a due a due (un'ellisse con una iperbole), circoscritte a un triangolo ABC e tali, che se le ceviane di un loro punto incontrano i lati corrispondenti in D, E, F e il circolo DEF taglia per la seconda volta gli stessi lati in D', E', F', le rette AD', BE', CF' s'incontrino in un punto della stessa conica. I centri delle sei coniche sono i punti medii dei lati del triangolo, e ciascuna conica contiene due punti del gruppo di Gergonne; le sei coniche s'incontrano per conseguenza a tre a tre in questi quattro punti.

Le sei coniche sono rispettivamente tangenti nei vertici del triangolo alle bisettrici degli angoli interni ed esterni, le quali bisettrici sono i luoghi dei centri dei circoli che passano per i piedi delle ceviane dei punti appartenenti alle coniche ad esse tangenti.

G. Biasi.

BIBLIOGRAFIA

Dr. F. Gomes Teixeira. — *Obras sobre mathematica, publicada por ordem do Governo português.* Volume primeiro.

Il Governo portoghese, colla deliberazione presa di pubblicare riunite in volumi le numerose memorie dell'illustre professore Gomes Teixeira sparse nei principali giornali del mondo, si è reso benemerito della scienza. Gli studiosi di tutti i paesi gli debbono vera e sincera riconoscenza, poichè una tale pubblicazione li libera dalle fatiche non sempre lievi di ricerche qualche volta penose da farsi fra una moltitudine di riviste che si pubblicano in tutto il mondo civile.

Il primo volume di circa 400 pagine in grande formato, testè pubblicato, contiene le seguenti quattordici memorie:

I. *Sobre o desenvolvimento des funções em serie.* Questo lavoro, già premiato e pubblicato nel 1897, dalla Reale Accademia di Madrid, tratta della serie di *Taylor* nel caso delle variabili reali e delle variabili complesse, con esposizione particolareggiata dei metodi di *Cauchy* e di *Riemann*. Passando poi a trattare anche della serie di *Laurent*, espone i metodi di *Weierstrasse* e *Mittag-Leffler*, terminando con lo studio delle serie di *Lagrange* e di *Bürmann*, della quale ultima espone altresì una notevole generalizzazione.

II. *Sur les développement des fonctions en série ordonnée suivant les puissances du sinus et du cosinus de la variable* (" Giornale di Crelle ,, 1896). L'Autore comincia collo studio delle curve rappresentate dall'equazione

$$|\operatorname{sen} z| = c,$$

essendo c una costante reale positiva e z una variabile complessa $x_1 + iy_1$. Nel caso di $c \leqq 1$, quell'equazione rappresenta un'infinità di ovali; e se la funzione $f(x)$ è olomorfa entro una di queste, è suscettibile dello sviluppo:

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n \operatorname{sen}^n x,$$

dove i coefficienti A_n sono determinabili con metodo notevole per la sua semplicità. Per $c > 1$, quell'equazione rappresenta una curva composta di due rami, che si estendono all'infinito; e se la funzione $f(x)$ è olomorfa nello spazio compreso fra i due rami, è sviluppabile sotto la forma:

$$f(x) = \sum_0^\infty A_n \operatorname{sen}^n x + \cos x \,.\, \sum_0^\infty B_n \operatorname{sen}^n x,$$

dove i coefficienti A_n, B_n sono calcolabili con apposite formole.

Si considera poi il caso particolare in cui $f(x)$ ammette il periodo reale o immaginario 2ω, applicando i risultati ottenuti alla funzione ellittica $\operatorname{sn} x$.

III. *Sur les séries ordonnées suivant les puissances d'une fonction donnée* (" Giornale di Crelle ,, 1890).

In questa memoria si dimostra che essendo data una funzione olomorfa nella corona compresa fra due circonferenze non concentriche, o nell'area limitata da rette, o da rette e da archi circolari, si possono determinare a e b in modo che la funzione, entro l'area considerata, sia sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze di $\dfrac{x-a}{x-b}$.

Dopo avere esposto un metodo per costruire delle funzioni olomorfe nell'interno di uno spazio compreso da rette, che non possono essere continuate all'esterno, si passa allo sviluppo di una funzione secondo le potenze di $\operatorname{sen} x$ o di $e^{\frac{i\pi x}{\omega}}$. Infine si dà una nuova dimostrazione della formola di *Fourier* pel caso di variabili complesse periodiche, e un'estensione di tale formula al caso in cui la funzione non è periodica.

IV. *Extrait d'une lettre adressé a M. Hermite* (" Bulletin des Sciences Mathématiques ,, 1890).

È relativa allo sviluppo di una funzione in serie ordinata secondo le potenze di $\operatorname{sen}(x-a)$ e $\cos(x-a)$.

V. *Sur les courbes parallèles à l'ellipse.* (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie de Belgique, 1898.)

Dopo avere esposte molte ed interessanti proprietà delle curve *toroidi*, si studiano le loro podarie, che appartengono alla famiglia delle curve cicliche, deducendo molte eleganti proprietà delle lemniscate elittiche ed iperboliche.

VI. *Sur les dérivées d'ordre quelconque* (" Giornale di Battaglini ,, 1880).

Dopo aver dato l'espressione analitica della derivata d'ordine n rispetto ad x della funzione $u = f(y)$, essendo $y = \varphi(x)$, si fa l'applicazione delle formole ottenute al caso delle funzioni semplici.

Si considera poi la funzione $y = f(u_1, u_2, \ldots u_l)$, essendo $u_k = \varphi_k(x)$, e infine la funzione implicita della x definita dall'equazione

$$f(x, y) = 0.$$

VII. *Sur le développement des fonctions implicites en série* (" Journal de Liouville „ 1881).

VIII. *Sur le développement des fonctions implicites* (" Journal de Liouville „ 1889).

Nella prima nota si dimostra una formula per lo sviluppo in serie, ordinata secondo le potenze di x, di una funzione u definita dalle equazioni:

$$u = f(z), \qquad z = t + x\varphi_1(z) + x^2\varphi_2(z) + \ldots + x^\lambda \varphi_\lambda(z).$$

Nella seconda si determina quale valore di u deve essere considerato come rappresentato dalla serie data, e si determinano le condizioni di convergenza di questa serie.

IX. *Sur le développement des fonctions doublement périodiques de seconde espèce en série trigonométrique* (" Giornale de Crelle „ 1903).

Applicando la teoria dei residui, l'Autore estende uno sviluppo ottenuto in un caso particolare da *Briot* e *Bouquet* nella loro opera *Théorie des fonctions elliptiques*.

X. *Apontamentos biographicos sobre Daniel Augusto Da Silva* (" Boletin da Direcção Geral de Instrucção Publica „. Lisboa. 1902).

XI. *Note sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* (" Bulletin de la Société Mathématique de France, 1881).

L'equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0$$

è trasformabile in un'equazione lineare quando se ne conosce un integrale primitivo particolare, con tre costanti arbitrarie; e quest'equazione si semplifica considerevolmente quando questo integrale soddisfa a uno o a due sistemi di equazioni della caratteristica, ai quali *Monge* ed *Ampère* hanno ridotto il problema dell'integrazione dell'equazione precedente. L'Autore dimostra che si ottengono i medesimi risultati ai quali conduce la teoria di *Ampère*, con delle considerazioni dirette.

XII. *Diversos artigos sobre geometria analytica plana.* Contiene dieci note di geometria analitica pubblicate dal 1898 al 1902 in vari periodici ("Archiv der Mathematik und Physik „, " El Progreso Matematico „, " Revista trimestral de matematica „, " Mathésis „, " Intermédiaire des mathématiciens „).

XIII. *Sur la convergence des formules d'interpolations de Lagrange, Gauss, etc.* (" Giornale di Crelle „. 1903).

Quando sono noti i valori che una funzione $f(x)$ prende per i valori $a_1, a_2, \ldots a_m$ di x, la formola d'interpolazione di *Lagrange* serve a costruire una funzione intera di x che abbia questi medesimi valori nei punti $a_1, a_2, \ldots a_m$. Nella prima parte della memoria, l'Autore studia le condizioni perchè questa funzione tenda verso $f(x)$ quando m aumenta indefinitamente. Nella seconda parte si studiano le formole d'interpolazione trigonometriche, e specialmente una formola di *Gauss* e un'altra di *Hermite*.

Si considerano in particolare le funzioni periodiche, supponendo dapprima che $a_1, a_2, a_3 \ldots$ siano numeri reali arbitrari, e poscia che essi siano radici dell'equazione $\cos(nx) = 0$, o $\operatorname{sen}(nx) = 0$.

XIV. *Diversos artigos sobre Analyse infinitesimal.* Contiene sei note di analisi pubblicate dal 1885 al 1896 in varie riviste (" Monatshefte für Mathematik und Physik „, " Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, " N. Annales de Mathématiques „).

G. PIRONDINI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 21 aprile 1904.

SULLE OPERAZIONI

FRA NUMERI DECIMALI APPROSSIMATI

e, in particolare,

sul calcolo delle parti proporzionali

nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche

Per il calcolo delle parti proporzionali nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche non si stabilisce, che noi sappiamo, alcuna norma ben determinata, e crediamo che solo nell'*Appendice* alla prima edizione del nostro *Trattato elementare di Trigonometria* (*) si diano, per ciò, opportune regole pratiche, deducendole da uno studio abbastanza esteso dalla questione. Siccome però quelle regole sono date per le tavole del CAILLET (**), le quali non si usano che per i calcoli nautici, siccome inoltre le considerazioni generali, dalle quali esse sono dedotte, possono essere note a pochi studiosi (perchè la maggior parte della materia contenuta in quell'*Appendice* non è esplicitamente richiesta da nessun programma scolastico), crediamo far cosa utile ripubblicandole qui, opportunamente modificate e molto semplificate.

Le considerazioni sulle quali esse sono basate consistono nella risoluzione di un problema generale relativo alle approssimazioni numeriche: comincieremo quindi, anche qui, dal risolvere questo problema, e saremo così condotti a stabilire dei procedimenti generali, per l'esecuzione dei calcoli fra numeri decimali approssimati; i quali non solo serviranno allo scopo che qui ci siamo prefisso, ma potranno essere utili nella maggior parte dei calcoli pratici. Fra questi cre-

(*) Ed. Giusti, Livorno, 1895.

(**) *Tables des logarithmes* (Ed. Lafolye. — Vannes, 1890).

diamo nuovo e notevole quello, che ora diamo, per la divisione; esso è semplice e di facile applicazione, benchè basato sopra considerazioni non molto facili e alquanto minuziose.

E divideremo il nostro studio in quattro capitoli: nel primo daremo i procedimenti generali ora accennati; nel secondo studieremo gli errori cui essi possono dar luogo; nel terzo applicheremo i procedimenti stessi al caso particolare del calcolo delle parti proporzionali nell'uso delle ordinarie tavole logaritmo-trigonometriche; nel quarto finalmente (come nel secondo) studieremo gli errori ai quali essi possono dar luogo nello stesso caso particolare.

Avvertiamo però che la conoscenza del secondo capitolo non è necessaria allo studio del terzo, e che anche il quarto capitolo può essere tralasciato da chi voglia limitarsi ad apprendere le regole da seguirsi nel caso particolare accennato. Avvertiamo inoltre che nel quarto capitolo siamo stati, incidentalmente, condotti a parlare di tutti gli errori prodotti dalla interpolazione semplice nelle tavole logaritmo-trigonometriche, e che abbiamo creduto non inutile raccogliere e completare i risultati delle nostre ricerche su questa laboriosa e importante questione, perchè fin'ora essa non era mai stata risolta completamente.

CAPITOLO PRIMO

LE PRIME QUATTRO OPERAZIONI FRA NUMERI APPROSSIMATI.

§ I. I problemi, che costituiscono la *Teoria delle approssimazioni numeriche*, sono, com'è noto, i due seguenti:

1° *determinare l'approssimazione colla quale si può ottenere il risultato di un determinato calcolo numerico, conoscendo le approssimazioni dei dati;*

2° *eseguire un determinato calcolo numerico in modo che il risultato abbia una approssimazione prestabilita.*

E la loro risoluzione è ampiamente sviluppata in molti trattati di *Aritmetica* (*) e in molte pubblicazioni speciali (**).

(*) Veggasi, per es., G. BERTRAND. *Trattato di Aritmetica.* (Traduzione del NOVI). Ed. Le Monnier, Firenze, 1862, pag. 412; — J. A. SERRET, *Traité d'Arithmétique.* Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1875, pag. 168; — R. BALTZER. *Die Elemente der Matematik.* Ed. Hirzel, Lipsia, 1875, I Vol. pag. 50.

(**) Veggasi, per es., M. J. VIEILLE. *Théorie générale des approximations numérique.* Ed. Mallet-Bachelie, Parigi, 1854; — J. GREISSE. *Approximations numériques.* Ed. Nony, Parigi, 1898; — M. GUYOU. *Note sur les approximations numériques.* Ed. Gauthier-Villars, Parigi, 1891.

A noi pare però che, in pratica, si debba ordinariamente presentare un altro problema, cui (secondo noi, a gran torto) non si dà nessuna importanza:

3° *in che maniera si deve eseguire un determinato calcolo fra numeri decimali approssimati, affinchè nel risultato non compaiano cifre inutili, le quali cioè, non possono, generalmente, essere esatte?*

E per spiegare meglio la ragion d'essere di questo problema, daremo due esempi.

I. Si debba moltiplicare 3,21 per 213,112 e si sappia che ciascuno di questi due numeri può essere errato, per eccesso o per difetto, di mezza unità dell'ultimo ordine. Eseguendo l'operazione nel modo ordinario (e la trascriviamo completamente qui accanto, per maggior chiarezza di quanto seguirà), si trova per prodotto 684,08952; ma questo può, secondo l'ipotesi, essere affetto da un errore eguale a

```
      3,21
   213,112
----------
       642
      321
     321
    963
   321
  642
----------
 684,08952
```

$$3{,}215 \times 213{,}1125 - 3{,}21 \times 213{,}112 = 1{,}0671675,$$

che è maggiore di una unità, quindi le cifre che nel prodotto stesso seguono la cifra delle unità sono inutili, perchè non danno che una approssimazione certamente illusoria.

II. Si debba dividere 72,575822 per 3,4 ed anche qui si sappia che ciascuno di questi due numeri può essere errato, per eccesso o per difetto, di mezza unità dell'ultimo ordine. Eseguendo l'operazione nel modo ordinario (e questa pure, per la stessa ragione, la trascriviamo qui accanto completamente, anche coi successivi prodotti parziali) si trova per quoziente 21,34583; ma questo può, secondo l'ipotesi, essere affetto da un errore eguale a

```
72,575822 | 3,4
68        |---------
--        | 21,34583
 45
 34
 ---
 117
 102
 ---
  155
  136
  ---
   198
   170
   ---
    282
    272
    ---
     102
     102
```

$$\frac{72{,}5758225}{3{,}35} - \frac{72{,}575822}{3{,}4} = 0{,}31874\ldots$$

che è maggiore di 3 decimi, quindi le cifre che nel quoziente stesso seguono la cifra dei decimi sono inutili, perchè non danno che una approssimazione certamente illusoria.

In ciascuna di queste due operazioni più della metà del lavoro che si è fatto è dunque inutile; ed evidentemente, molto di più sarebbe il lavoro inutile che si farebbe, se, sempre partendo da numeri approssimati, si eseguissero coi procedimenti ordinari più operazioni successive. Di qui ci pare quindi risultare chiaramente l'utilità e l'importanza del nostro problema.

Osservazione. — In alcune delle opere a noi note questo terzo problema s'intende compreso nel primo; ma poi vi è risolto in parte soltanto, e ciò mediante le operazioni abbreviate, le quali, essendo alquanto artifiziose, non sono generalmente in uso.

§ **2.** Stabiliremo prima di tutto le seguenti convenzioni.

I. *Il numero d'ordine delle cifre di un numero decimale si conti sempre a partire dalla cifra delle unità, questa esclusa, e si prenda* *positivo o negativo secondochè, per giungere alla cifra che si considera, si va verso sinistra o verso destra.*

Dietro tale convenzione, nel numero decimale 354,6879 le successive cifre

$$3, \quad 5, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 7, \quad 9$$

sono rispettivamente degli ordini

$$+2, \quad +1, \quad 0, \quad -1, \quad -2, \quad -3, \quad -4.$$

Questa convenzione, che noi stessi altra volta raccomandammo (*), è (come vedremo in seguito) opportunissima per lo studio delle approssimazioni numeriche; perchè, evidentemente, per passare dal valore *assoluto* (nel senso dell'*Aritmetica elementare*) al valor *relativo* di una cifra di un numero decimale, basta moltiplicare la prima per una potenza di 10 avente per esponente l'ordine della cifra stessa. Ed è molto utile anche in pratica; un esempio si ha in questa regola: *la caratteristica del logaritmo di un numero decimale qualunque* (supposto di prendere sempre i logaritmi colla mantissa positiva) *è sempre uguale all'ordine della prima cifra significativa di questo numero;* ed altri esempî notevoli troveremo in seguito (v. § 7 e Oss. I del § 10).

II. *Un numero esatto si consideri come un numero avente infinite cifre decimali.*

Questa convenzione, che forse non occorrerebbe porre esplicitamente, è necessaria per la generalità dei procedimenti che indicheremo in seguito.

III. *Se in un numero decimale si devono trascurare alcune cifre, si aumenti di una unità l'ultima cifra che resta, quando quella che seguiva era uguale o superiore a 5.*

Dietro tale convenzione, avendo i numeri

$$0{,}7286, \quad 0{,}0304, \quad 0{,}121999, \quad 43{,}392499, \quad 3{,}27350,$$

e volendo tener conto solo di tre cifre decimali, i numeri da sostituire sono rispettivamente

$$0{,}729, \quad 0{,}030, \quad 0{,}122, \quad 43{,}392, \quad 3{,}274.$$

Con questa convenzione, notissima a tutti i calcolatori, l'errore che si commette è al più eguale a 5 decimi dell'unità dell'ultimo ordine se è per eccesso (v. il quinto esempio), ed è minore dello stesso numero, ma può però differirne poco finchè si vuole, se è per difetto (v. il quarto esempio); o, in altre parole, 5 decimi dell'unità dell'ultimo ordine è un *massimo* dell'errore nel primo caso, ne è invece un *limite superiore inabbassabile* nel secondo. Mentre che, tralasciando, senz'altro, le cifre di cui non si vuol tener conto, si potrebbe commettere un errore che ha per *limite superiore inabbassabile* una unità dell'ultimo ordine (v. il terzo esempio, nel quale, se si prendesse 0,121 senz'altro,

(*) V. *Periodico di Matematica*, anno X (1895), fasc. I.

si commetterebbe un errore che, considerando come cifra dell'unità l'ultima cifra rimasta, sarebbe eguale a 0,999).

IV. *Per prima cifra di un numero decimale si intenda la prima cifra significativa a sinistra, e per ultima cifra s'intenda l'ultima cifra, significativa o no, a destra.*

Dietro tale convenzione, per avere il numero delle cifre di un numero decimale approssimato qualunque, si prescinde dalla virgola e si trascurano gli zeri che precedono la prima cifra significativa, ma non da quelli che segnano l'ultima cifra significativa. E anche questa convenzione è necessaria, perchè, se si vuole tener conto di tutte le cifre che non rappresentano una approssimazione illusoria, non si può, per es., a 3,250 sostituire 3,25; come a 0,46996 (quando non si voglia tener conto della quinta cifra decimale) non si deve sostituire 0,47, ma 0,4700 (*).

Ciò posto e supponendo (quando non si avverta esplicitamente il contrario) che nei numeri approssimati, che considereremo, l'errore sia soltanto quello cui dà luogo la convenzione III del § prec., passiamo a risolvere il nostro problema, limitandoci alle prime quattro operazioni dell'*Aritmetica*.

§ 3. **Addizione.** — *Si trascurino le cifre che sporgono (a destra) della colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra dell'addendo meno approssimato, e si proceda nel modo ordinario, tralasciando nel risultato la prima cifra che si ottiene.*

I) Dati	Addizione
12,4535	12,454
4,509601	4,510
0,00052	0,001
0,04651	0,047
0,00048	......
18,53	18,53
0,344499	0,344
	35,89

Così: dovendosi sommare i sette numeri posti qui accanto, si è osservato che l'addendo meno approssimato è il sesto, la cui ultima cifra è d'ordine — 2; si sono quindi trascurate in tutti gli altri addendi le cifre di ordine inferiore a — 3 e, siccome la prima colonna a destra ha per somma 16, si è tralasciato il 6 e alla colonna precedente si è aggiunto 2 invece di 1 (§ 2, III).

§ 4. Il procedimento indicato si giustifica facilmente, se si fa osservare che le cifre trascurate, non possono essere esatte, perchè dipendono tutte, cominciando dalla prima di esse, da cifre che in uno almeno degli addendi sono completamente sconosciute; e che può essere inesatta anche l'ultima cifra del risultato, e ciò per l'errore che affetta l'addendo meno approssimato

Si è poi tenuta una cifra di più dell'addendo meno approssimato, perchè la somma dell'ultima colonna a destra, per quanto ignota nella cifra delle unità, può dar luogo a delle diecine (come nell'esempio), che si devono portare nella colonna precedente.

Osservazione I. — Il procedimento stabilito suppone che gli addendi, escluso quello che è meno approssimato, non siano più di dieci;

(*) *Die Nullen am Ende sind in diesen Falle nicht ohne Bedeutung,* dice precisamente il Baltzer (l. c., pag. 51).

se fossero più di dieci (non però più di cento) converrebbe conservare negli addendi una cifra di più, perchè le centinaia della somma dell' ultima colonna (se ce ne fossero) sarebbero unità dell' ultimo ordine del risultato.

Osservazione II. — Se gli addendi sono due soli, invece di trascurare nel risultato la prima cifra che si ottiene, si può (chè, evidentemente, è lo stesso) trascurare una cifra di più nell' addendo più approssimato; ossia *si possono trascurare tutte le cifre che l'addendo più approssimato ha di più dell'altro* (s'intende a destra, e si suppongono i due numeri in colonna), *ed eseguire l'addizione nel modo ordinario.*

Osservazione III. — Nel caso in cui un addendo sia esatto e la sua ultima cifra sia di ordine algebricamente superiore a quello dell'ultima cifra dell'addendo meno approssimato, è necessario rammentare la convenzione II del § 2.

II) Dati	Addizione
7,8346	7,835
0,05	0,05
0,567	0,567
0,54996	0,550
	9,00

Osservazione IV. — Per quanto si osservò a proposito della convenzione IV (§ 2) non si può, in un numero approssimato, sopprimere gli zeri che (dopo la virgola) seguono l'ultima cifra significativa; se quindi la somma ottenuta col procedimento indicato finisce con uno o più zeri, questi zeri devono essere conservati. Veggasi l'esempio II.

Osservazione V. — Per calcoli in cui non si richieda una grande approssimazione, o in cui i dati possano essere errati di più di mezza unità dell'ultimo ordine, si suole operare come s'è detto nella precedente Oss. II, anche se gli addendi sono parecchi. Nel I esempio si avrebbe così per risultato 35,88.

12,45
4,51
0,05
18,53
0,34
35,88

§ 5. Sottrazione. — *In quello dei due termini che è più approssimato, si trascurino le cifre che sporgono dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra dell'altro termine, e si proceda nel modo ordinario.* Veggasi l'esempio I.

I) Dati	Sottrazione
27,34	27,34
7,20568	7,21
	20,13

§ 6. Il procedimento precedente si giustifica come quello indicato per l'addizione nel caso di due addendi soli (§ 4, Oss. II).

Osservazioni. — Analoghe alle osservazioni III e IV del § 4; e, a proposito della IV, veggasi l'es. II.

II) Dati	Sottrazione
3,279854	3,280
1,200	1,200
	2,080

§ 7. Moltiplicazione. — *Si prenda per moltiplicando quello dei due fattori che ha meno cifre; poscia si formino i successivi prodotti parziali, cominciando dalla prima cifra del moltiplicatore, scrivendoli l'uno sotto l'altro, coll'ultima cifra successivamente spostata di un posto verso destra, e arrestandosi quando si vede che il prodotto parziale seguente uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale. Nel fare poi l'addizione si trascurino nella somma tutte le cifre che escono dalla colonna nella quale si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale, e si ponga la virgola nello* *stesso posto che essa occupa nel primo prodotto parziale, avvertendo che in questo l'ordine dell'ultima cifra deve essere uguale all'ordine dell'ultima cifra del moltiplicando più l'ordine dell'ultima cifra del moltiplicatore* (§ 2, I).

Nel I es. dovendosi moltiplicare 6,83 per 57,896784, si è preso per moltiplicando il primo; poscia si sono formati i successivi prodotti parziali di 6,83 per 5, per 7, per 8, per 9, per 6, scrivendoli come è indicato qui accanto, e arrestandosi all'ultimo prodotto così ottenuto, perchè è chiaro che il seguente (avendo lo stesso numero di cifre) uscirebbe tutto dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra (5) del primo prodotto. Nel fare poi l'addizione si è seguito il procedimento stabilito nel § 3, e si è posta la virgola fra l'ultima e la penultima cifra del risultato così ottenuto, perchè l'ordine della prima cifra (5) del moltiplicatore è $+1$, l'ordine dell'ultima cifra (3) del moltiplicando è -2, e quindi l'ordine dell'ultima cifra (5) del primo prodotto parziale è $+1-2=-1$.

```
I)
      6,83
    57,89 6784
    ----------
   341 5
    47 81
     5 46|4
       61|47
        4|098
   ------
   395,4

II)
       3,21
     213,1 12
     --------
     642
      32 1
       9 6|3
         3|21
     ----
     684

III)
   0,0374
   0,568173 9
   ----------
   0,01870
       2244
        299|2
          3|74
          2|618
   -------
   0,02125

IV)
    0,037245
 2004,05654
 ----------
   74 490
      148980
        186225
         223470
   ------
   74,641
```

Nel II esempio, procedendo nello stesso modo si è trovato un prodotto la cui ultima cifra è la cifra delle unità, come precisamente doveva essere per quanto si è osservato (a proposito dello stesso esempio) nel § 1.

Nel III esempio i prodotti non si sono arrestati a quello che corrisponde alla cifra 1 del moltiplicatore, perchè il prodotto seguente (quello che corrisponde alla cifra 7) ha, evidentemente, una cifra di più.

Nel IV esempio il secondo e il terzo dei prodotti parziali sono stati spostati di tre e di due posti (invece che di uno solo) per gli zeri che si trovano nel moltiplicatore (*).

§ 8. Per giustificare questo procedimento, basta far osservare che nell'addizione finale, l'addendo meno approssimato è il primo prodotto parziale, e che quindi (§ 4) si possono trascurare tutti quei prodotti parziali che escono dalla colonna successiva a quella in cui si trova l'ultima cifra di quel prodotto. È dunque chiaro che tutte le cifre del prodotto, che, seguendo il procedimento indicato, si tralasciano, non possono essere esatte, e che può essere inesatta anche l'ultima cifra del prodotto stesso.

È pure facilmente si giustifica la scelta per moltiplicatore di quello dei due fattori che ha più cifre. Infatti, senza entrare in considerazioni generali (che non sarebbero difficili), esaminando il primo degli esempi precedenti, si vede che collo scambio dei due fattori (com'è indicato qui accanto)

```
     57,896785
      6,83
   ----------
   347 380710
    46 3174280
     1 73690355
   -----
   395,4
```

(*) Applicando agli esempî precedenti il solito procedimento dell'*Aritmetica elementare*, si rilevano subito i vantaggi del procedimento qui indicato. Ed è strano che quest'ultimo, in generale, sembri completamente nuovo ai giovani uscenti dalle scuole secondarie, mentre (almeno nella disposizione dei successivi prodotti parziali) essi stessi (come vedremo) lo hanno continuamente applicato nei calcoli logaritmici.

si risparmierebbe bensì qualche prodotto parziale, ma fin dal principio si terrebbero parecchie cifre inutili, e inoltre, nel fare l'addizione finale, bisognerebbe ricordare che, essendo il prodotto parziale successivo completamente incognito, basterebbe cominciare l'addizione stessa dalla colonna che contiene la seconda cifra dell'ultimo prodotto parziale (tenendo però conto delle decine fornite dalla colonna seguente). Dunque l'operazione sarebbe generalmente più lunga e la regola sarebbe sempre meno semplice ad applicarsi e meno facile a ricordarsi.

Osservazione I. — Per collocare la virgola, nel risultato, non si può, evidentemente seguire la regola data dall'*Aritmetica elementare;* ma dalla convenzione stabilita al § 2 (I) deriva, come s'è visto, una regola semplicissima che vale in tutti i casi.

Osservazione II. — Se uno dei due fattori è esatto, è sempre questo che deve essere preso come moltiplicatore, anche se ha meno cifre dell'altro fattore; e ciò per la convenzione II del § 2. Così, dovendosi moltiplicare il numero 3,241 approssimato per il numero 2,5 esatto, si disporrà l'operazione come qui accanto e si avrà per risultato 8,103; procedendo invece come se anche 2,5 fosse approssimato, si avrebbe solo 8,1. E le due cifre di più ottenute (03) non rappresentano affatto una approssimazione illusoria, giacchè, dietro l'ipotesi, il prodotto cercato può avere per limite inferiore inabbassabile 8,10125 e può avere per massimo 8,10375.

V)

```
  3,241
    2,5
 ------
  6 482
 1 6205
 ------
  8,103
```

Osservazione III. — Corrispondentemente alla Osservazione IV del § 4, si noti che, se il prodotto ottenuto col procedimento indicato finisce con uno o più zeri (dopo la virgola), questi zeri devono essere conservati. Veggasi l'esempio VI.

VI)

```
15,678
 1,4861 599
-----------
15 678
 6 2712
 1 2542|4
    940|68
     15|678
      7|8390
      1|25404
------
23,300
```

Osservazione IV. — Come non si possono sopprimere gli zeri ora accennati, neppure si possono far seguire degli zeri all'ultima cifra (di qualunque ordine sia) di un numero approssimato. Ne deriva che, se l'ordine dell'ultima cifra di un risultato deve essere maggiore di zero, bisogna ricorrere a qualche convenzione, anzichè aggiungere degli zeri che rappresenterebbero una approssimazione illusoria. Per maggior chiarezza, si consideri un esempio particolare, e si abbiano da moltiplicare i due numeri approssimati 1,9 e 5756,89. La parte intera del prodotto deve avere cinque cifre; eseguendo, invece la moltiplicazione col procedimento indicato, si ottengono di questo solo le prime tre, che sono 1, 0, 9. E allora per scrivere questo prodotto, si scriverà (*)

$$109_{00} \quad \text{o} \quad 10{,}9 \text{ migliaia (**)}$$

Però nelle applicazioni raramente si ricorre a questa convenzione,

(*) V. Baltzer. l. c., pag. 53 e 54.

(**) Eseguendo la moltiplicazione nel modo ordinario, si troverebbe per prodotto 10938,691, e le ultime due cifre (38) della parte intera rappresenterebbero certamente una approssimazione illusoria, perchè il prodotto cercato ha per massimo 11225,94525 ed ha per limite inferiore inabbassabile 10650,23725.

e si preferisce cambiare unità. Così, se il moltiplicando rappresentasse dei *metri*, si potrebbe dire che il prodotto è uguale a 10,9 *chilometri* (*).

OSSERVAZIONE V. — Per calcoli in cui non si richieda una grande approssimazione, o in cui i dati possano essere errati di più di mezza unità dell'ultimo ordine, si suole scrivere un prodotto parziale di meno, ossia si suole arrestare l'operazione quando si vede che il prodotto parziale seguente uscirebbe tutto dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale; l'addizione si eseguisce poi come s'è indicato nel procedimento generale. Così facendo, nel terzo degli esempi precedenti si avrebbe per risultato 0,02124 (invece di 0,02125).

```
0,0374
0,5681739
---------
0,01870
    2244
     299|2
---------
0,02124
```

§ 9. **Divisione.** — *Si proceda nel modo ordinario, arrestando l'operazione quando il quoziente ha una cifra di più di quello dei due numeri su cui si opera, che ne ha meno* (§ 2, VI), *coll'avvertenza di aumentare di una unità l'ultima cifra così ottenuta, se si vede che la seguente non sarebbe minore di 5. In quanto alla virgola poi, si applichino le ordinarie regole dell'*Aritmetica.

Nel I esempio il dividendo ha sette cifre e il divisore ne ha tre, quindi si è calcolato il quoziente con quattro cifre.

Analogamente nel II esempio, nel quale si è ottenuto un quoziente la cui ultima cifra è quella dei decimi; come precisamente doveva essere, per quanto si è osservato (a proposito dello stesso esem.) nel § 1.

Analogamente anche nel III esempio, dove l'ultima cifra del quoziente è stata aumentata di una unità, perchè la seguente sarebbe maggiore di 5.

Nel IV esempio il dividendo ha due cifre e il divisore ne ha cinque, quindi si è calcolato il quoziente con tre cifre.

Analogamente nel V esempio, dove l'ultima cifra è stata aumentata di una unità per la solita ragione.

Nel VI e nel VII esempio il dividendo e il divisore hanno lo stesso numero di cifre, cinque nel primo e tre nel secondo, quindi il quoziente è stato calcolato con sei e con quattro cifre rispettivamente.

```
I)
4,210598 | 275
2 75     | 0,01531
1 460
1 375
   855
   825
    309
    275
     34

II)
72,575822 | 3,4
68        | 21,3
 45
 34
 1 17
 1 02
   15

III)
1251,233 | 0,936
 936     | 1 337
 315 2
 280 8
  34 43
  28 08
   6 353
   5 616
     737

IV)
3,3      | 23,687
2 3687   | 0,1 39
  93390
  71001
  223290
  218003
   10287
```

§ 10. Per giustificare questo procedimento basta far vedere che la cifra del quoziente, successiva a

(*) A tale convenzione si ricorre nell'*Astronomia*, dove per unità di lunghezza si piglia il diametro della Terra, il diametro dell'orbita terrestre, il cammino percorso dalla luce in un anno; e questo si fa principalmente per potersi formare un'idea della grandezza di certe distanze, che, pure espresse in miriametri (che è la massima delle unità lineari comuni) non sarebbero concepibili, ma anche perchè, servendosi di questa unità, si otterrebbero dei numeri spinti a una approssimazione addirittura irrisoria.

quella a cui la divisione si è arrestata, non può esser nota, perchè si ricaverebbe da un numero completamente sconosciuto (dividendo questo numero per il divisore), e che questa è la prima cifra per la quale ciò necessariamente accade. E, a tale scopo, basta far vedere che quel numero esce tutto

dalla colonna in cui si trova l'ultima cifra del primo prodotto parziale, quando il dividendo sporge a destra rispetto a questo primo prodotto, ossia quando l'ordine dell'ultima cifra del dividendo è algebricamente (§ 1, I) minore dell'ordine dell'ultima cifra di quel primo prodotto (Es. I, II e III),

dalla colonna in cui trova l'ultima cifra del dividendo, quando il dividendo stesso non sporge a destra rispetto al primo prodotto parziale, ossia quando l'ordine dell'ultima cifra del dividendo è algebricamente maggiore dell'ordine dell'ultima cifra di quel primo prodotto (Es. IV, V e VII), od è uguale a questo ordine (Es. VI);

perchè allora tutte le sue cifre derivano, per successive sottrazioni da cifre una delle quali, almeno, è completamente incognita; e poi far vedere che altrettanto non accade necessariamente per il numero dal quale deriva la cifra a cui il quoziente si è arrestato.

V)

```
346      | 45,683
319781   | 7,574
 262190
 228415
  337750
  319781
   179690
   137049
    42641
```

VI)

```
576,18   | 2,8805
576 10   | 200,028
   80000
   57610
  223900
  201635
   22265
```

VII)

```
0,924    | 9 85
 8415    | 0,0009382
  8250
  7480
   7700
   7480
    2200
    1870
     330
```

Così, nel II Es., la prima cifra (1) dell'ultimo resto parziale (15) deriva per sottrazione, dalla terza cifra (5) del dividendo e dalla cifra dello stesso ordine del primo prodotto parziale, e questa è completamente sconosciuta; e la seconda cifra (5) dello stesso resto deriva, per sottrazioni, dalla quarta cifra (7) del dividendo e dalle cifre dello stesso ordine del primo e del secondo prodotto parziale, e queste due cifre sono completamente sconosciute. Invece la prima cifra (1) del numero (117), dal quale è ricavata l'ultima cifra (3) del quoziente, non deriva da nessuna cifra completamente sconosciuta.

Si indichino con A il dividendo e con B il divisore; con a e con b rispettivamente, il numero delle loro cifre; si indichino inoltre con A' e con B' i numeri a cui si riducono A e B, quando si trasporti la virgola fra la prima e la seconda cifra, onde l'ordine dell'ultima cifra sarà $1-a$ per A' e $1-b$ per B'.

Ciò posto, basta evidentemente giustificare il nostro procedimento nella ipotesi che la divisione si faccia fra i numeri A' e B', perchè, qualunque sia il posto che occupa la virgola in ciascuno dei numeri A e B, il calcolo numerico che si fa quando si divide A per B differisce da quello che si fa quando si divide A' per B' solo per il numero d'ordine delle colonne in cui si trovano le cifre del dividendo e dei successivi prodotti e resti parziali. Per ciò distingueremo quattro casi: secondochè si ha

1.° $a>b$, $A'>B'$; 2.° $a>b$, $A'<B'$; 3.° $a\leqq b$, $A'>B'$; 4.° $a\leqq b$, $A'<B'$.

Nel primo caso [Es. I. II. (*)], siccome il primo prodotto parziale ha l'ultima cifra di ordine $-b+1$ (perchè la prima cifra del quoziente è di ordine zero, e l'ultima cifra del divisore è sempre di ordine $-b+1$), basta dimostrare che quel numero, che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente, deve avere la sua prima cifra di ordine $-b$ o $-(b+1)$. Infatti quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(b+1)$ (perchè il quoziente ha $b+1$ cifre e la prima cifra è di ordine zero), quindi il prodotto parziale del valor relativo di questa cifra per B' avrebbe la sua ultima cifra di ordine

$$-(b+1)+(1-b)=-2b,$$

e di quest'ordine sarebbe pure l'ultima cifra dell'accennato numero (dal quale quel prodotto dovrebbe essere sottratto, se si volesse continuare ancora la divisione); ma questo numero è di $b+1$ cifre (155 nel II Es.) o di b cifre (348 nel I Es.), quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-2b+b=-b, \qquad \text{oppure} \qquad -2b+(b-1)=-(b+1).$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che il numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (117 nel II Es. e 309 nel I Es.) ha la sua prima cifra di ordine

$$-b+1, \qquad \text{oppure} \qquad -b,$$

e che quindi questa può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (Es. II).

Nel secondo caso (Es. III), siccome il primo prodotto parziale ha l'ultima cifra di ordine $-b$ (perchè la prima cifra del quoziente è di ordine -1), basta dimostrare che quel numero che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente deve avere la sua prima cifra di ordine $-(b+1)$ o $-(b+2)$. Infatti quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(b+2)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(b+2)+(1-b)=-(2b+1);$$

ma questo numero è di $b+1$ cifre (7370 nel III Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(2b+1)+b=-(b+1), \text{ oppure } -(2b+1)+b-1)=-(b+2).$$

E come nel caso precedente, si vede subito che la prima cifra del numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (6353 nel III Es.) può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. lo stesso Es. III).

Nel terzo caso (Es. IV e VI), siccome il dividendo ha sempre l'ultima cifra di ordine $-a+1$, basta dimostrare che quel numero che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente, deve avere la sua prima cifra di ordine $-a$ o $-(a+1)$. Infatti (essendo la prima cifra del quoziente di ordine zero ed avendo quel quoziente $a+1$ cifre)

(*) Perchè si possa seguire meglio il ragionamento, citiamo esempi relativi ad ogni caso, supponendo in ciascuno di essi il dividendo A e il dividendo B ridotti alla forma A' e B'.

quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(a+1)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(a+1)+(1-b)=-(a+b);$$

ma questo numero è di $b+1$ cifre (102870 nel IV Es., 222650 nel VI Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(a+b)+b=-a, \quad \text{oppure} \quad -(a+b)+(b-1)=-(a+1).$$

E anche qui si vede subito che la prima cifra del numero dal quale deriva la cifra a cui si è arrestata la divisione (223290 nel IV Es. e 223900 nel VI) può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. ambedue gli stessi Es. IV e VI).

Nel quarto caso, finalmente, (Es. V e VII), la prima cifra del numero che diviso per B' darebbe un'altra cifra del quoziente, invece di essere dell'ordine $-a$ o $-(a+1)$, come nel terzo caso, è dell'ordine $-(a+1)$ o $-(a+2)$. Infatti (essendo la prima cifra del quoziente di ordine -1) quella ulteriore cifra sarebbe di ordine $-(a+2)$, quindi l'ultima cifra dell'accennato numero sarebbe dell'ordine

$$-(a+2)+(1-b)=-(a+b+1);$$

ma questo numero è, al solito, di $b+1$ cifre (426410 nel V Es. e 3300 nel VII Es.) o di b cifre, quindi la sua prima cifra è di ordine

$$-(a+b+1)+b=-(a+1), \quad \text{oppure} \quad -(a+b+1)+(b-1)=-(a+2).$$

Collo stesso ragionamento si dimostra che l'ultima cifra del quoziente deriva da un numero (179690 nel V Es. e 2200 nel VII Es.) la cui prima cifra ha per ordine $-a$ o $-(a+1)$ e la penultima da un numero (337750 nel V Es. e 7700 nel VII Es.) la cui prima cifra ha per ordine $-a+1$ o $-a$; per cui anche l'ultima cifra del quoziente si ricava sempre da un numero tutto incognito, ed è solo la penultima che si ricava da un numero la cui prima cifra può non derivare da nessuna cifra completamente sconosciuta (v. ambedue gli Es. V e VII). Ne viene che in questo quarto caso il nostro procedimento dà una cifra di troppo, ossia una cifra che è certamente illusoria, ma abbiamo preferito questo inconveniente all'altro di stabilire un procedimento non generale, che, per essere applicato, avrebbe sempre richiesto che si esaminasse se si era o no in questo caso. Questa osservazione avrà molta importanza in seguito (§ 18).

OSSERVAZIONE I. — Per collocare la virgola si è detto di seguire le ordinarie regole dell'*Aritmetica;* ma, dietro la solita convenzione I del § 2, basta osservare che l'ordine della prima cifra del quoziente più l'ordine dell'ultima cifra del divisore deve essere uguale all'ordine dell'ultima cifra del primo prodotto parziale, e che quest'ordine è noto, perchè è quello della cifra del dividendo da cui quell'ultima cifra va sottratta (*).

VIII)

```
51     | 0,986
4930   |------
----   | 51,72
 1700
  986
 ----
 7140
 6902
 ----
  2380
  1972
  ----
   408
```

OSSERVAZIONE II. — Se uno dei due numeri su cui si

(*) Supposto che si conoscano gli elementi dell'*Algebra*, la regola che deriva da questa osservazione semplifica notevolmente la ordinaria regola per la divisione fra numeri decimali.

opera è esatto, bisogna tener presente la convenzione II del § 2. Così nell'VIII Es., dove si suppone il dividendo esatto, si è calcolato il quoziente con tante cifre quante ne ha il divisore più una; e nel IX Es., dove si suppone esatto il divisore, si è calcolato il quoziente con tante cifre quante ne ha il dividendo più una. Quest'ultimo caso rientra nel quarto dei casi precedentemente esaminati, e quindi l'ultima cifra, che è stata aumentata di una unità per la solita ragione, rappresenta una approssimazione illusoria.

Osservazione III. — Per la solita ragione (§ 8, Oss. III), se il quoziente che si ottiene col procedimento indicato finisce con uno o più zeri, questi non devono essere trascurati. Così: nel X e nell'XI Es. il quoziente finisce, rispettivamente, con uno e con due zeri; nel XII finirebbe con tre zeri, ma invece dell'ultimo, si è posta una unità, perchè la cifra seguente, essendo data dal quoziente di 1040000 per 131158, sarebbe maggiore di 5. Questi tre esempî assieme al XIII, rientrano nei quattro casi precedentemente esaminati, e, a proposito dell'ultimo, si deve notare anche qui che l'ultimo zero rappresenta una approssimazione illusoria.

Osservazione IV. — Si noti il caso in cui, non solo sia zero l'ultimo resto parziale, ma siano eguali a zero anche tutte le cifre da abbassare: anche allora si segue il procedimento generale indicato (Es. XIV e XVI).

Ed è notevole che in questo caso particolare, come in quello considerato nella Oss. prec., il ragionamento fatto per giustificare il nostro procedimento sussiste sempre (*).

Osservazione V. — Corrispondentemente alla Osserv. V del § 8, si noti ora che se l'ordine dell'ultima cifra del quoziente deve essere maggiore di zero, bisogna ricorrere a qualcuna delle convenzioni allora accennate. Così: dovendosi dividere 4865 per 0,00271, la parte intera del quoziente deve avere *sette* cifre: invece eseguendo la divisione col procedimento indicato si ottengono, di questo quoziente, solo le prime quattro cifre, che sono 1795; e allora per scrivere questo quoziente si scriverà

$$1795_{000} \qquad \text{o} \qquad 1795 \text{ migliaia } (^{**}).$$

E, se, in pratica, il dividendo rappresentasse, p. es., dei decimetri cubi, si potrebbe dire che il quoziente è uguale a 1795 metri cubi.

IX)
```
103   | 1,1
 99   | 93,64
  40
  33
   70
   66
    40
    33
     7
```

X)
```
9539,9835 | 37,47
7494      | 25,460
2045 9
1873 5
 172 48
 149 88
  22 608
  22 482
     1215
```

XI)
```
1,59592171 | 0,371
1484       | 4,30
 1119
 1113
   062
```

XII)
```
1574     | 1311,58
131158   | 1,2001
 262420
 262316
  104000
```

XIII)
```
1,94       | 3,464161
1,7320805  | 0,5600
  20791950
  20784966
    698400
```

XIV)
```
5,1     | 9,375
4 6875  | 0,544
  41250
  37500
   37500
   37500
```

XV)
```
274,9392 | 375,6
262 92   | 0,73200
 12 019
 11 268
    7512
    7512
```

(*) Invece del procedimento indicato, si potrebbe, per la divisione, seguire un procedimento analogo a quello indicato per la moltiplicazione (v. § 7), ma allora non si avrebbe più un procedimento generale. Così facemmo nell'*Appendice* più volte citata, dove per i casi particolari ora accennati dovemmo indicare dei procedimenti speciali.

(**) Eseguendo la divisione nel modo ordinario, si troverebbe per parte intera del quoziente 1795202, e le ultime tre cifre (202) rappresenterebbero certamente una approssimazione illusoria, perchè la parte intera del quoziente cercato ha per minimo 1791712 ed ha per massimo 1798706.

CAPITOLO SECONDO

STUDIO DEGLI ERRORI

PRODOTTI DAI PROCEDIMENTI DEL CAPITOLO PRECEDENTE.

§ **11.** Eseguendo le quattro operazioni fondamentali dell'*Aritmetica* coi procedimenti indicati nel capitolo precedente, si introduce nel risultato un nuovo errore; per cui, se m è questo nuovo errore ed l è l'errore che, necessariamente, affetterebbe il risultato quando si eseguisse l'operazione nel modo ordinario, si viene così a commettere un errore complessivo eguale ad $l+m$.

Ci proponiamo di cercare un massimo, o un limite superiore inabbassabile, tanto di m che di l (sempre, per questo, nella ipotesi stabilita alla fine del § 2, che cioè i numeri approssimati sui quali si opera siano affetti solo dall'errore cui dà luogo la convenzione III dello stesso § 2, ossia, come si suol dire, solo dall'*arrotondamento* dell'ultima cifra); confronteremo poscia fra loro questi massimi o limiti superiori inabbassabili, che indicheremo, rispettivamente, con μ e con λ; e vedremo così nuovamente giustificati i nostri procedimenti.

A questo proposito osserviamo intanto che, calcolando il risultato con una cifra di meno o una cifra di più di quelle stabilite, μ viene rispettivamente moltiplicato o diviso per 10. E osserviamo inoltre che il valore più piccolo che si può avere per λ è quello che si ottiene supponendo che dei due numeri, sui quali si opera, uno solo sia approssimato.

Ciò posto, per dimostrare che coi nostri procedimenti non si trascura nessuna cifra che possa ritenersi esatta, basta far vedere che μ non supera il valore ora accennato di λ altro che in circostanze particolarissime e solo per pochi decimi dell'unità dell'ultimo ordine; perchè allora, calcolando il risultato con una cifra di più, non si farebbe che diminuire μ (riducendosi questo limite a un decimo di quel che era prima), mentre, generalmente, esso è già non maggiore del più piccolo valore di λ (ossia del più piccolo valore che si può ottenere per il massimo, o per il limite superiore inabbassabile, dell'errore che inevitabilmente affetta il risultato).

Per dimostrare poi che neppure si hanno delle cifre necessariamente illusorie, basta far vedere che, se è necessariamente μ minore del più piccolo valore di λ, non è però necessariamente μ minore di un decimo di questo valore; perchè allora, non essendo 10μ necessariamente minore di λ, ne verrà che, se si calcolasse una cifra di meno (nel qual caso, appunto, il valore di μ si decuplerebbe) non si potrebbe asserire di non aver trascurato nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

§ **12.** Per la ricerca che stiamo per intraprendere, sarà opportuno ricordare che, se α e β sono (in valore assoluto) i massimi o dei limiti superiori inabbassabili degli errori di cui sono affetti A e B, rispettivamente,

per $A \pm B$ si ha $\lambda = \alpha + \beta$,
" $A \times B$ " " $\lambda = A\beta + B\alpha + \alpha\beta$,
" $A : B$ " " $\lambda = \frac{A\beta + B\alpha}{B(B-\beta)}$.

E sarà anche utile indicare con p e con p_1 gli ordini della prima e dell'ultima cifra di A, e con q e con q_1 gli ordini delle stesse cifre di B; onde sarà evidentemente (§ 11)

$$p = p_1 + a - 1 \quad , \quad q = q_1 + b - 1 . \tag{1}$$

Osservazione. — Dietro l'ipotesi fatta qui, relativamente agli errori α e β (ch'essi cioè derivino solo dall'arrotondamento dell'ultima cifra), per l'addizione e per la moltiplicazione il valore di λ qui indicato è un massimo, mentre che per la sottrazione e per la divisione è invece un limite superiore inabbassabile. E questo si vede subito, se si osserva che gli errori di A e di B, affinchè l'errore del risultato sia massimo, devono essere di segno eguale nel primo caso e di segno contrario nel secondo; e che quindi, in quest'ultimo caso, uno di essi può essere uguale a una mezza unità dell'ultimo ordine, ma l'altro può solo differirne poco finchè si vuole (§ 2, III).

§ **13. Addizione.** — Sia A l'addendo meno approssimato ed n il numero totale degli addendi. Siccome in $n-1$ di questi addendi si trascurano le cifre che seguono quella di ordine $p_1 - 1$ (§ 3), ciascuno di questi addendi sarà, al più, errato di $0,5 \times 10^{p_1-1}$, e quindi la loro somma sarà, al più, errata di

$$(n-1) \times 0,5 \times 10^{p_1-1};$$

siccome poi si tralascia la prima cifra (d'ordine p_1-1) che si ottiene nel fare l'addizione, all'errore precedente se ne aggiunge un altro che, al più, è uguale a $0,5 \times 10^{p_1}$. Sarà dunque

$$\mu = (n-1) \times 0,5 \times 10^{p_1-1} + 0,5 \times 10^{p_1},$$

da cui

$$\mu = (n \times 0,05 + 0,45)\, 10^{p_1}; \tag{2}$$

e questo è il massimo errore che può produrre nel risultato l'indicato procedimento.

In quanto a λ, *se tutti gli altri addendi fossero esatti* (§ 11), avrebbe un valor massimo dato da (§ 12)

$$\lambda = 0,5 \times 10^{p_1} . \tag{3}$$

Ed ora, confrontando μ con λ, si vede che, essendo

$$\mu - \lambda = (n-1) \times 0,05 \times 10^{p_1},$$

solo se il numero degli addendi fosse eguale a 11, μ supererebbe λ di mezza unità dell'ultimo ordine. Però ambedue le condizioni accennate, in generale non si verificheranno (perchè nei calcoli ordinari, λ sarà in generale maggiore del valore dato dalla (3), ed n sarà minore di 11), quindi si conclude che nel totale non manca, in generale, nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

Osservazione I. — Nel caso di due addendi soli (§ 4, Oss. II) le due parti che costituiscono l'errore μ si riducono alla prima soltanto, avendo già trascurate nell'addendo più approssimato tutte le cifre successive a quelle di ordine p_1; si ha quindi

$$(2)' \qquad \mu = 0{,}5 \times 10^{p_1}.$$

In quanto a λ esso sarà anche ora quello dato dalla (3), nella ipotesi che uno dei due addendi sia esatto. In questo caso quindi μ sarà uguale a λ.

Osservazione II. — È chiaro che, quando si segua il procedimento accennato nella Oss. V al § 4, invece della (2) si ha

$$(2)'' \qquad \mu = n \times 0{,}5 \times 10^{p_1}.$$

Osservazione III. — Se gli addendi fossero più di 11, ma non più di 101, è facile vedere, con un ragionamento analogo, che si arriverebbe alla stessa conclusione tenendo negli addendi una cifra di più (§ 4, Oss. I). Ma crediamo che per la pratica questa osservazione non abbia importanza, perchè, come s'è detto, n sarà in generale minore di 11.

§ 14. Sottrazione. — Da quanto si è detto nella Oss. I al § prec. risulta immediatamente che nella sottrazione (§ 5) μ è uguale a λ.

Osservazione. — Solo si può notare che, mentre nell'addizione una unità dell'ultimo ordine è (in valore assoluto) il massimo della somma $l + m$ nella sottrazione è invece un limite superiore inabbassabile (§ 12, Oss.).

§ 15. Moltiplicazione. — Sia A quello dei due fattori che ha meno cifre, sarà allora A il moltiplicando e B il moltiplicatore; suppongasi inoltre, per facilitare il ragionamento, che questi due numeri siano ridotti alla forma A′ e B′ (§ 10).

In tali ipotesi, il primo prodotto parziale ha, evidentemente, l'ultima cifra di ordine $-a+1$, quindi i prodotti parziali che si trascurano sono quelli che escono dalla colonna di ordine $-a$. Ora il primo di questi prodotti parziali ha per limite superiore inabbassabile una unità dell'ordine $-a$, ossia 10^{-a}, e questo è evidente; in quanto agli altri prodotti parziali tralasciati, si osservi che ciascuno di essi ha al più $a+1$ cifre, perchè è il prodotto di una cifra di B′ (la quale è al più 9) per A′ (che ha per limite superiore inabbassabile 10), ma il primo ha la prima cifra di ordine $-(a+1)$ al più, dunque tutti questi prodotti hanno successivamente per limite superiore inabbassabile $0{,}9 \times 10^{-a}$, $0{,}09 \times 10^{-a}, \ldots$ Ne viene intanto che l'errore prodotto nel risultato finale, tralasciando i prodotti parziali accennati, ha per limite superiore inabbassabile

$$(1 + 0{,}9 + 0{,}09 + \ldots)\, 10^{-a}, \qquad \text{ossia} \qquad 2 \times 10^{-a}.$$

Ma a questo se ne deve aggiungere un altro: quello che si commette tralasciando la prima cifra che si ottiene nell'addizione finale, e che ha per massimo 5×10^{-a}. Sarà dunque

(4) $$\mu = 0{,}7 \times 10^{-a+1},$$

ossia μ sarà uguale a 7 decimi dell'unità dell'ultimo ordine del prodotto.

In quanto a λ, *se il moltiplicatore* B' (che è quello che ha più cifre) *fosse esatto* (§ 11) esso si ridurrebbe a $B'\alpha$ (§ 12), *se inoltre il moltiplicatore stesso differisse poco finchè si vuole dal suo limite inferiore* 1, essendo il massimo, o il limite superiore inabbassabile, di α uguale a $0{,}5 \times 10^{-a+1}$, si avrebbe

(5) $$\lambda = 0{,}5 \times 10^{-a+1}.$$

Ed ora, confrontando μ con λ, si vede che solo in tutte le ipotesi fatte sopra per ricavare ambedue questi valori, il primo supera il secondo di due decimi dell'unità dell'ultimo ordine del prodotto. Siccome però in generale tutte le ipotesi accennate non si verificheranno (perchè, in generale, i prodotti parziali trascurati non avranno tutto il limite superiore inabbassabile indicato, nè la cifra tralasciata nel risultato sarà precisamente uguale a 5; e perchè, in generale, non sarà B' esatto, nè sarà vicinissimo all'unità), si conclude che nel prodotto non manca, in generale, nessuna cifra che possa ritenersi esatta.

Si è supposto che i numeri A e B fossero ridotti alla forma A' e B', ma è chiaro che la conclusione precedente sussiste anche prescindendo da questa ipotesi.

Osservazione I. — L'ipotesi fatta per attribuire a λ il valore più piccolo, coincide precisamente col caso particolare considerato nella Oss. II del § 8; la nostra conclusione sussiste dunque anche in questo caso particolare.

Osservazione II. — È facile vedere che il più grande valore della somma dei prodotti parziali trascurati si ottiene supponendo il moltiplicando A' prossimo a 10 e le successive cifre corrispondenti (del moltiplicatore B') eguali a 1, 9, 9, 9,... Infatti, affinchè il prodotto di un numero di una cifra per A' sia uguale a $0{,}8999\ldots \times 10^{-a}$ e abbia una cifra di più di A', bisogna che A' sia uguale a $9{,}999\ldots$ e che quel numero sia uguale a $9 \times 10^{-(a+2)}$ (e questo si vede facilmente esaminando i nove quozienti di 0,8999 per 1, 2,... 8, 9); e allora, affinchè il primo prodotto parziale trascurato sia uguale a $0{,}9999 \times 10^{-a}$, non può essere che il prodotto di A' per $1 \times 10^{-(a+1)}$. Veggasi l'esempio accanto, nel quale i prodotti parziali tralasciati sono precisamente $0{,}999 \times 10^{-3}$, $0{,}8991 \times 10^{-3}$, $0{,}08991 \times 10^{-3}$,... In questo stesso esempio, come verificazione della (4), si può anche osservare che si avrebbe $m = 0{,}688\ldots \times 10^{-2}$.

$$\begin{array}{r}
9{,}99 \\
2{,}5111999 \\
\hline
1998 \\
4995 \\
999 \\
999 \\
\hline
25{,}08
\end{array}$$

Osservazione III. — Supponendo sempre che A sia il fattore meno approssimato, è chiaro che nel prodotto di A' per B' la prima cifra è di ordine 0 o $+1$, secondochè il prodotto della parte intera di B' per A' ha a od $a+1$ cifre. Ma (§ 12)

$$A = A' \times 10^p \quad , \quad B = B' \times 10^q ,$$

da cui
$$A \times B = A' \times B' \times 10^{p+q},$$
quindi *la prima cifra del prodotto di* A *per* B *è dell'ordine* $p+q$ (§ 7, Es. II e IV), *o dell'ordine* $p+q+1$ (§ 7, Es. I e III), *secondochè il prodotto della prima cifra di* B *per* A *ha tante cifre quante ne ha* A, *o una di più.*

Ed è pure chiaro che, *corrispondentemente, il prodotto* (ottenuto col procedimento indicato) *ha* a *od* $a+1$ *cifre, e che quindi l'ultima sua cifra è sempre dell'ordine* $p+q-a+1$, *che per la* (1) *è anche uguale a* p_1+q_1+b-1.

A tutti questi risultati si può anche giungere subito, direttamente.

Osservazione IV. — È anche facile vedere che, quando si segua il procedimento indicato nella Oss. V al § 8, invece della (4) si ha

(4)' $$\mu = 2{,}5 \times 10^{-a+1}.$$

Così: dovendosi moltiplicare 9,99 per 2,511999, se si segue quel procedimento, si ha per prodotto 25,07, ed m è uguale a $2{,}487\ldots \times 10^{-2}$.

Osservazione V. — Nella giustificazione del procedimento indicato (§ 8) si è fatto osservare che, non prendendo per moltiplicando quello dei due fattori che ha meno cifre si presenterebbero due inconvenienti, uno dei quali sarebbe quello di dover scrivere un maggior numero di cifre inutili. Possiamo ora aggiungere, più precisamente, in proposito che, seguendo quella regola, il massimo numero di tutte le cifre dei successivi prodotti parziali è al più $(a+1)(a+2)$ (§ 7, Es. I), mentre che, se si scambiano i due fattori, quel numero è compreso fra ab e $a(b+1)$, gli estremi inclusi; ma le due disuguaglianze
$$(a+1)(a+2) < ab \qquad (a+1)(a+2) < a(b+1),$$
equivalgono, rispettivamente, alle due
$$3+\frac{2}{a} < b-a \qquad 2+\frac{2}{a} < b-a,$$
quindi l'inconveniente accennato (supposto che le cifre dei due fattori siano tutte significative) si presenta sempre per $b-a$ maggiore di 3, e generalmente anche per $b-a$ maggiore di 2 soltanto.

§ **16. Divisione.** — Per questa operazione si può dimostrare che, seguendo il procedimento da noi indicato nel § 9, μ risulta sempre minore di λ.

Suppongasi anche ora (§ 15) che A e B siano ridotti alla forma A' e B'. Dal procedimento accennato risulta immediatamente che nei quattro casi considerati nel § 10 si ha rispettivamente,

(6) $\mu = 0{,}5 \times 10^{-b}$, $\mu = 0{,}5 \times 10^{-(b+1)}$, $\mu = 0{,}5 \times 10^{-a}$, $\mu = 0{,}5 \times 10^{-(a+1)}$.

Ora, se nei primi due casi il dividendo (che ha più cifre del divisore) fosse un numero esatto, ossia se fosse $\alpha = 0$, sarebbe (§ 12)
$$\lambda = \frac{A'\beta}{B'(B'-\beta)}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > \frac{A'\beta}{B'^2};$$
ma
$$\beta = 0{,}5 \times 10^{-b+1}, \qquad \text{onde} \qquad \lambda > \frac{A'}{B'^2} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1},$$

per cui, per dimostrare che μ è minore di λ, nel primo caso, basta osservare che, essendo per ipotesi A' maggiore di B', sarà

$$\lambda > \frac{1}{B'} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1},$$

e che, essendo B' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà anche

$$\lambda > 0{,}5 \times 10^{-b}; \tag{7}$$

e nel secondo caso basta osservare che, essendo anche A' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà

$$\lambda > \frac{1}{100} \times 0{,}5 \times 10^{-b+1}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > 0{,}5 \times 10^{-(b+1)}. \tag{8}$$

Se poi nel terzo e nel quarto caso il divisore (che ha più cifre del dividendo) fosse un numero esatto, ossia se fosse $\beta = 0$, sarebbe (§ 11)

$$\lambda = \frac{B'\alpha}{B'(B'-\beta)}, \quad \text{da cui} \quad \lambda > \frac{\alpha}{B'};$$

ma

$$\alpha = 0{,}5 \times 10^{-a+1}, \qquad \text{onde} \qquad \lambda > \frac{1}{B'} \times 0{,}5 \times 10^{-a+1};$$

per cui per dimostrare che μ è minore di λ, basta, nel terzo e quarto caso, osservare che, essendo sempre B' compreso fra 1 e 10 (gli estremi esclusi), sarà

$$\lambda > 0{,}5 \times 10^{-a}. \tag{9}$$

Il quoto non contiene dunque nessuna cifra di meno, ma, essendo sempre μ minore di λ, potrebbe sorgere il dubbio che ne contenesse di più, ossia che contenesse delle cifre illusorie. Per togliere questo dubbio basterebbe (come si disse nel § 11) far vedere che, se μ è minore di λ, non è però necessariamente μ minore di $\lambda : 10$. Ora, si vede facilmente che, perchè questa condizione si verifichi nei quattro casi considerati, deve essere rispettivamente

$$B'(B'-\beta) < A', \quad B'(B'-\beta) < 10\,A', \quad B'-\beta < 1, \quad B'-\beta < 10, \tag{10}$$

ed è chiaro che le prime tre non si verificano *necessariamente*, mentre la quarta è vera sempre. Nel quarto caso, e in questo soltanto, basterebbe dunque calcolare il quoziente con una cifra di meno di quelle stabilite, ma, per le ragioni accennate nel § 10, si è preferito indicare un procedimento che valesse per tutti i casi.

Ed è chiaro anche qui che le precedenti conclusioni non cambiano se si prescinde dalla ipotesi che A e B siano ridotti alla forma A' e B'.

OSSERVAZIONE I. — Anche qui, le ipotesi fatte per attribuire a λ il valore più piccolo coincidono precisamente coi casi particolari considerati nella Oss. II del § 10: la nostra conclusione sussiste dunque anche in questi casi particolari.

OSSERVAZIONE II. — Nel quoziente di A' per B' la prima cifra è di ordine 0 o di ordine -1, secondochè A' non è minore o è minore di B'; ma (§ 12)

$$\frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} \times 10^{p-q},$$

quindi,

secondochè A′ *non è minore o è minore di* B′, *la prima cifra del quoziente di* A *per* B *è di ordine* p — q *o di ordine* p — q — 1 *rispettivamente* (*).

E così si ha un altro criterio (§ 10, Oss. I) per collocare la virgola nel quoziente.

Dal teorema stesso poi deriva, come corollario, che

se, essendo A′ *non minore di* B′, *si ha* p *non minore di* q — 1, *o se, essendo* A′ *minore di* B′, *si ha* p *non minore di* q, *la parte intera del quoziente di* A *per* B *ha, corrispondentemente,* p — q + 1 *o* p — q *cifre.*

E, come caso particolare del precedente corollario, si ha anche che,

se A *e* B *sono due numeri interi e se* A *è maggiore di* B, (essendo allora $p = a - 1$ e $q = b - 1$), *la parte intera del quoziente di* A *per* B *ha* a — b + 1 *o* a — b *cifre secondochè* A′ *non è minore o è minore di* B′ (**).

G. Pesci.

(Continua)

SUL CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE

(Continuazione v. fasc. precedente)

Differenza m^{esima} del prodotto di due o più funzioni.

9. Sia

$$\varphi_1(x)$$

quella funzione che per gli $m+1$ valori distinti della variabile x

$$x_0\,,\ x_1\,.\,.\,.\,,x_r\,.\,.\,.\,,x_{m-1}\,,\ x_m$$

assume, rispettivamente, i valori (1):

$$a_0\,,\ a_1\,.\,.\,.\,,\ a_r\,.\,.\,.\,,\ a_{m-1}\,a_m\,,$$

e sia

$$\varphi_2(x)$$

la funzione che per gli stessi valori della variabile stessa x assume, rispettivamente, i valori indipendenti l'uno dall'altro:

$$b_0\,,\ b_1\,.\,.\,.\,,b_r\,.\,.\,.\,,b_{m-1}\,,b_m\,,$$

e si voglia determinare la differenza m-esima del prodotto delle due funzioni relativamente al termine

$$a_0 b_0 = \varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)$$

in funzione delle differenze di $\varphi_1(x)$ e di $\varphi_2(x)$.

(*) Teorema dello Stolz (v. *Period. di Matem.*, anno XIII (1898), fasc. III).

(**) Altro teorema dello Stolz (l. c.).

Si ha

$$\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \Delta^0[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^0[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]$$
$$= \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_1) - \Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0); \qquad (\gamma)$$

ora per definizione è

$$\Delta^0\varphi_1(x_1) = \Delta^0\varphi_1(x_0) + \Delta^1\varphi_1(x_0),$$
$$\Delta^0\varphi_2(x_1) = \Delta^0\varphi_2(x_0) + \Delta^1\varphi_2(x_0),$$

e nel minuendo dell'espressione (γ) si può sostituire uno solo di tali valori o tutt'e due, dando luogo a due risultati distinti.

10. Sostituendo nel secondo fattore del minuendo, si ha

$$\begin{aligned} \Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \qquad\qquad \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \\ & + \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_0) \qquad\qquad - \Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0), \end{aligned}$$

e riducendo per linea:

$$\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0).$$

Così pure:

$$\begin{aligned} \Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^1[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \\ &= \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_1) + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1) - \\ &- \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) - \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0); \end{aligned}$$

ma:

$$\Delta^1\varphi_2(x_1) = \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0),$$
$$\Delta^1\varphi_1(x_1) = \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),$$

quindi, sostituendo nei secondi fattori del minuendo

$$\begin{aligned} \Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \qquad\qquad \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) + \\ & + \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_0) \qquad\qquad - \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \\ & \qquad\qquad + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) + \\ & + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) \qquad\qquad - \Delta^0\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0), \end{aligned}$$

e riducendo per linea

$$\begin{aligned} \Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) + \\ &+ \Delta^1\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0). \end{aligned}$$

Così pure:

$$\begin{aligned} \Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^2[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \\ &= \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_1) + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_1) + \\ &+ \Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_1) + \Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1) - \\ &- \Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) - \Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) - \\ &- \Delta^1\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) - \Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0); \end{aligned}$$

ma

$$\Delta^2\varphi_2(x_1) = \Delta^2\varphi_2(x_0) + \Delta^3\varphi_2(x_0),$$
$$\Delta^2\varphi_1(x_1) = \Delta^2\varphi_1(x_0) + \Delta^3\varphi_1(x_0),$$
$$\Delta^1\varphi_2(x_1) = \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0),$$
$$\Delta^1\varphi_1(x_1) = \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),$$

quindi, sostituendo nei secondi fattori del minuendo:

$$\begin{aligned}\Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \qquad\qquad \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^3\varphi_2(x_0)+ \\ & + \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)-\Delta^0\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)+ \\ & + \Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_0) \qquad\qquad -\Delta^1\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)+ \\ & \qquad\qquad +\Delta^1\varphi_2(x_2)\Delta^3\varphi_1(x_0)+ \\ & + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)-\Delta^0\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)+ \\ & + \Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) \qquad\qquad -\Delta^1\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

e riducendo per linea

$$\begin{aligned}\Delta^3[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^0\varphi_1(x_3)\Delta^3\varphi_2(x_0) + \Delta^0\varphi_2(x_2)\Delta^3\varphi_1(x_0) + \\ & + 2\Delta^1\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0)+ \\ & + \Delta^2\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0).\end{aligned}$$

Messe così in chiaro le diverse leggi di formazione, si può stabilire la formola per la differenza m-esima del prodotto di due funzioni, e si ha

$$\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & (m-1)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0)+(m-1)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0)+ \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ (10) \qquad & +(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+ \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & +(m-1)_{m-1}\Delta^{m-1}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)+(m-1)_{m-1}\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0)= \\ = & \sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)].\end{aligned}$$

Infatti, se si ammette per $m-1$, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^{m-1}[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)] - \Delta^{m-1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \\ = & (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^{m-1}\varphi_2(x_1) + (m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_1)+ \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ & +(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_2)\Delta^1\varphi_2(x_1)+(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_1)- \\ & -(m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0)-(m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0)- \\ & - \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots - \\ & -(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0)-(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0);\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\Delta^{m-1}\varphi_2(x_1) &= \Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) + \Delta^m\varphi_2(x_0), \\ \Delta^{m-1}\varphi_1(x_1) &= \Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) + \Delta^m\varphi_1(x_0), \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^1\varphi_2(x_1) &= \Delta^1\varphi_2(x_0) + \Delta^2\varphi_2(x_0), \\ \Delta^1\varphi_1(x_1) &= \Delta^1\varphi_1(x_0) + \Delta^2\varphi_1(x_0),\end{aligned}$$

quindi, sostituendo prima nei secondi fattori dei primi termini del minuendo e poscia nei secondi fattori dei secondi termini dello stesso minuendo, ed aggruppando separatamente coi primi e coi secondi fattori del sottraendo

$$
\begin{array}{llll}
\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]= & & (m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0) \;+ & \\
+\;(m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) & +(m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) & -(m-2)_0\Delta^0\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_2(x_0) & + \\
+\;(m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-1})\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0) & +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -(m-2)_1\Delta^1\varphi_1(x_{m-3})\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0) & + \\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + \\
+\;(m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0) & +(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_2)\Delta^2\varphi_2(x_0) & -(m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_1(x_3)\Delta^2\varphi_2(x_0) & + \\
+\;(m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_1(x_3)\Delta^1\varphi_2(x_0) & & -(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_1(x_1)\Delta^1\varphi_2(x_0) & + \\
 & +\;(m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0) \;+ & & \\
+\;(m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) & +(m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) & -(m-2)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-1}\varphi_1(x_0) & + \\
+\;(m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-2})\Delta^{m-2}\varphi_1(x_0) & +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -(m-2)_1\Delta^1\varphi_2(x_{m-3})\Delta^{m-2}\varphi_1(x_0) & + \\
+\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & +\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & + \\
+\;(m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_2(x_2)\Delta^2\varphi_1(x_0) & +(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(\mathrm{X}_0) & -(m-2)_{m-3}\Delta^{m-3}\varphi_2(x_1)\Delta^2\varphi_1(x_0) & + \\
+\;(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_1)\Delta^1\varphi_1(x_0) & & -(m-2)_{m-2}\Delta^{m-2}\varphi_2(x_0)\Delta^1\varphi_1(x_0), &
\end{array}
$$

e riducendo per linea, prima i due termini estremi e poscia i risultati coi termini medi, si ha sempre

$$
\begin{aligned}
&(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_1(x_{m-r+1})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-2)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)-(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)= \\
&=(m-2)_{r-1}\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-2)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)=(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_2(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+(m-2)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)-(m-2)_{r-1}\Delta^{r-1}\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)= \\
&=(m-2)_{r-1}\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+(m-2)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)=(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0),
\end{aligned}
$$

e perciò disponendo i risultati in due colonne secondo le loro analogie, si ottiene

$$
\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]=\sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)],
$$

che è precisamente la formola (10), la quale è così dimostrata per ogni valore di m intero e positivo, dappoichè per $m=1,\ 2,\ 3$ si riduce alle espressioni ottenute direttamente.

Questa formola che potrebbe simbolicamente rappresentarsi come un doppio sviluppo binomiale delle Δ, non è simmetrica rispetto alle differenze dei due fattori; quindi per la legge commutativa del prodotto deve pure essere

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}[(m-1)_r\Delta^r\varphi_2(x_{m-r})\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)+(m-1)_r\Delta^r\varphi_1(x_{m-r-1})\Delta^{m-r}\varphi_2(x_0)], \quad (11)$$

e si sarebbe ottenuto tal risultato se invece che nei secondi fattori del minuendo, la sostituzione fosse stata fatta nei primi.

Se $\varphi_1(x)=1$

$$\Delta^m\varphi_2(x_0)=(m-1)_0\Delta^0\varphi_1(x_m)\Delta^m\varphi_2(x_0)=\Delta^m\varphi_2(x_0),$$

annullandosi tutti gli altri termini.

Se $\varphi_2(x)=1$

$$\Delta^m\varphi_1(x_0)=(m-1)_0\Delta^0\varphi_2(x_{m-1})\Delta^m\varphi_1(x_0)=\Delta^m\varphi_1(x_0),$$

annullandosi tutti gli altri termini.

Se $\varphi_1=\varphi_2$, si ha la formola per la differenza m-esima del quadrato d'una funzione, che può scriversi:

$$\Delta^m[\varphi_1(x_0)]^2=\sum_{r=0}^{m-1}(m-1)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)[\Delta^r\varphi_1(x_{m-r})+\Delta^r\varphi_1(x_{m-r-1})].$$

11. Sostituendo invece nei due fattori del minuendo dell'espressione (γ), si ha

$$\begin{aligned}\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^0\varphi_1(x_1)\Delta^0\varphi_2(x_1)-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=[\Delta^0\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)]\,[\Delta^0\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)]-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(\varphi_0)+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)-\\ &\qquad-\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)].\end{aligned}$$

Così pure

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] &= \Delta^1[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)]-\Delta^1[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]=\\ &=\Delta^1\varphi_1(x_1)\,[\Delta^1\varphi_2(x_1)+\Delta^0\varphi_2(x_1)]+\\ &+\Delta^0\varphi_1(x_1)\,[\Delta^1\varphi_2(x_1)]-\\ &-\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]-\\ &-\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)]\,;\end{aligned}$$

ma

$$\begin{aligned}\Delta^0\varphi_1(x_1)&=\Delta^0\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0),\\ \Delta^0\varphi_2(x_1)&=\Delta^0\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0),\\ \Delta^1\varphi_1(x_1)&=\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^2\varphi_1(x_0),\\ \Delta^1\varphi_2(x_1)&=\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^2\varphi_2(x_0),\end{aligned}$$

e percio, sostituendo nel minuendo

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & [\Delta^2\varphi_1(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)]\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ & +[\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)]\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)-\\ & -\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]-\\ & -\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^1\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

e sviluppando:

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^2\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)+\\ & +2\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+(1+2)\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)+\\ & +\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)-\\ & -\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0)-\Delta^1\varphi_1(x_0)\Delta^0\varphi_2(x_0)-\\ & -\Delta^0\varphi_1(x_0)\Delta^1\varphi_2(x_0);\end{aligned}$$

e riducendo

$$\begin{aligned}\Delta^2[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^2\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+2\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ & +2\Delta^1\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)+\Delta^1\varphi_2(x_0)]+\\ & +\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[\Delta^2\varphi_2(x_0)].\end{aligned}$$

Messe così in chiaro le diverse leggi di formazione, si può stabilire la formola per la differenza m-esima, e si ha:

$$\begin{aligned}\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & (m)_0\Delta^m\varphi_1(x_0)[(m)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots\\ & \ldots+(m)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)+\ldots+(m)_m\Delta^0\varphi_2(x_0)]+\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ & +(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)]+\\ & +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\ & +(m)_m\Delta^0\varphi_1(x_0)\,[(0)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)]=\\ = & \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)].\end{aligned}\tag{12}$$

Infatti, se si ammette per m, si ha

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \Delta^m[\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)]-\Delta^m[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)]=\\ = & \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_1)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_1)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_1)]-\\ & -\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

ma

$$\Delta^0\varphi_1(x_1)=\Delta^1\varphi_1(x_0)+\Delta^0\varphi_1(x_0);\quad \Delta^0\varphi_2(x_1)=\Delta^1\varphi_2(x_0)+\Delta^0\varphi_2(x_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\Delta^m\varphi_1(x_1)=\Delta^{m+1}\varphi_1(x_0)+\Delta^m\varphi_1(x_0);\quad \Delta^m\varphi_2(x_1)=\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\Delta^m\varphi_2(x_0);$$

quindi, sostituendo nel minuendo

$$\begin{aligned}\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = & \sum_{r=0}^{m}(m)_r[\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)+\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)]\\ & [(m-r)_0(\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\Delta^m\varphi_2(x_0))+\ldots+(m-r)_{m-r}(\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)+\Delta^r\varphi_2(x_0))]-\\ & -\sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^m\varphi_2(x_0)+\ldots+(m-r)_{m-r}\Delta^r\varphi_2(x_0)];\end{aligned}$$

e riducendo

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)] +$$

$$+ \sum_{r=0}^{m} (m)_r \Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)];$$

addizionando i primi due sviluppi, la somma dei termini di posto $r+1$ sarà

$$(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+(m-r)_1\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\dots$$
$$\dots+(m-r)_s\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)]+$$
$$+(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r)_0\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{s-1}\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\dots$$
$$\dots+(m-r)_{m-r-1}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)+(m-r)_{m-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)],$$

e per la relazione (α) fra i coefficienti binomiali

$$(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+(m-r+1)_1\Delta^{m}\varphi_2(x_0)+\dots$$
$$\dots+(m-r+1)_s\Delta^{m-s+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)];$$

quindi

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] =$$

$$= \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]+$$

$$+ \sum_{r=0}^{m}(m)_r\Delta^{m-r}\varphi_1(x_0)\,[(m-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r)_{m-r}\Delta^{r+1}\varphi_2(x_0)];$$

addizionando il termine di posto $r+1$ del primo sviluppo col termine di posto r del secondo, lasciando le parentesi quadre inalterate, si ottengono evidentemente $m+2$ termini di cui quello di posto $r+1$ sarà

$$[(m)_r+(m)_{r-1}]\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)\,[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots$$
$$\dots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)];$$

cioè

$$(m+1)_r\Delta^{m-r+1}\varphi_1(x_0)[(m-r+1)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots+(m-r+1)_{m-r+1}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)],$$

e quindi

$$\Delta^{m+1}[\varphi_1(x_0)\varphi_2(x_0)] = \sum_{r=0}^{m+1}(m+1)_r\Delta^{m+1-r}\varphi_1(x_0)[(m+1-r)_0\Delta^{m+1}\varphi_2(x_0)+\dots$$
$$\dots+(m+1-r)_{m+1-r}\Delta^{r}\varphi_2(x_0)]$$

che è la stessa formola (12), cambiando m in $m+1$, e che è perciò dimostrata per ogni valore di m, intero e positivo, dappoichè per $m=1, 2$, si riduce alle espressioni ottenute direttamente.

Vito Melfi Molè.

(Continua)

NOTA SULL'APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI FAGNANO

agli archi della lumaca di Pascal e della sinussoide

Quando lo sviluppo dell'arco di una curva sia esprimibile mediante un integrale ellittico di seconda specie, alle proprietà degli archi di ellisse corrispondono evidentemente proprietà degli archi della curva considerata. Vogliamo vedere in quanto segue quali sono le proprietà che corrispondono al *teorema di Fagnano* nel caso della *lumaca di Pascal* e della *sinussoide.*

1. È noto che l'equazione della *lumaca di Pascal,* in coordinate polari, è

$$\rho = a \cos\theta \pm h$$

e che lo sviluppo dei suoi archi è dato dalla formola

$$s = (a+h) \int_0^\theta \sqrt{1 - \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta} \,.\, d\theta \,,$$

quando $h \gtreqless a$, o, ponendo $\theta = 2\varphi$,

$$s = 2(a+h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \operatorname{sen}^2 \varphi} \,.\, d\varphi$$

ossia

$$s = 2(a+h) \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \,.\, d\varphi = 2(a+h)\, \mathrm{E}(k, \varphi) \,,$$

per cui

$$k = \frac{4\,ah}{(a+h)^2} \,.$$

Ciò posto, applichiamo alla curva considerata la formola

$$\mathrm{E}(k, \varphi_1) + \mathrm{E}(k, \varphi_2) - \mathrm{E}\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_1}} \,.$$

che si verifica quando φ_1 e φ_2 soddisfano alla relazione

$$\tan\varphi_1 \tan \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \,,$$

ed alle diseguaglianze

$$0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} \,, \qquad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2} \,.$$

Rappresentando con V l'angolo fatto dalla tangente nel punto corrispondente a φ col vettore di questo punto, notando che

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \rho \frac{d\theta}{d\rho} = - \frac{a \cos\theta + h}{a \operatorname{sen}\theta} \,,$$

e facendo

$$\cos \mathrm{V} = \frac{a \operatorname{sen}\theta}{(a+h)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta}} = \frac{2a \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{(a+h)\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \,.$$

possiamo scrivere,

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2(a+h)}{2a} \cos V .$$

Ma d'altro lato se A e B sono i punti della curva pei quali φ assume i valori 0 e $\frac{\pi}{2}$, e se M, M' sono punti pei quali φ piglia i valori φ_1, φ_2, abbiamo,

$$arco\ AM = 2(a+h)\, E(k, \varphi_1), \qquad arco\ AM' = 2(a+h)\, E(k, \varphi_1),$$

$$arco\ AB = 2(a+h)\, E\left(k, \frac{\pi}{2}\right).$$

Quindi,

$$arco\ AM - arco\ BM' = \frac{k^2 (a+h)^2}{a} \cos V_1 = 4h \cos V_1 ,$$

ponendo,

$$\tang\varphi_1 \tang\varphi_2 = \frac{a+h}{a-h}.$$

Si può poi costruire la differenza degli archi AM e BM' della lumaca di Pascal pigliando sul vettore del punto M un segmento eguale a $4h$ e proiettando sulla tangente alla curva in questo punto.

2. Consideriamo ora la *sinussoide*, la cui equazione è

$$y = a \operatorname{sen} \frac{x}{m}.$$

Abbiamo,

$$s = \int_0^y \sqrt{\frac{a^2 + m^2 - y^2}{a^2 - y^2}} \, . dy ,$$

o, facendo

$$y = a \operatorname{sen}\varphi , \qquad k = \frac{a}{\sqrt{a^2 + m^2}},$$

$$s = \sqrt{a^2 + m^2} \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi} \, . d\varphi .$$

Applichiamo anche adesso all'integrale che entra in questa formola la relazione

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - \left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_1}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi_1}},$$

che ha luogo facendo

$$\tang\varphi_1 \tang\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \qquad 0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}, \qquad 0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2},$$

e notiamo che è

$$\frac{k^2 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}} = \frac{y\sqrt{a^2 - y^2}}{\sqrt{a^2 + m^2}\sqrt{a^2 + m^2 - y^2}},$$

$$T = y \sqrt{\frac{m^2 + a^2 - y^2}{a^2 - y^2}},$$

rappresentando con T la lunghezza della tangente alla curva nel punto (x, y).

Si ottiene così l'eguaglianza,

$$E(k, \varphi_1) + E(k, \varphi_2) - E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{y_1^2}{T_1 \sqrt{a^2 + m^2}},$$

ove y_1 rappresenta l'ordinata del punto della curva corrispondente a $\varphi = \varphi_1$ e T_1 la lunghezza della tangente alla curva nello stesso punto.

Ma d'altra parte, se O rappresenta il punto della curva che coincide coll'origine delle coordinate, A il punto che corrisponde a $x = \frac{1}{2} m\pi$; M e M' i punti che corrispondono a $\varphi = \varphi_1$ e $\varphi = \varphi_2$, S ed N i punti nei quali la tangente e la normale alla curva in M incontrano l'asse delle ascisse, Q la proiezione di M su quest'asse ed L il punto in cui la perpendicolare ad MN condotta per Q incontra questa retta, abbiamo,

$$arco\, OM = \sqrt{a^2 + m^2}\, E(k, \varphi_1), \qquad arco\, OM' = \sqrt{a^2 + m^2}\, E(k, \varphi_2),$$

$$arco\, OA = \sqrt{a^2 + m^2}\, E\left(k, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y_1 = MQ = T_1 \operatorname{sen} \widehat{MSO}, \qquad QL = y_1 \operatorname{sen} \widehat{MSO};$$

dunque,

$$arco\, OM - arco\, AM' = QL,$$

quando

$$\operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2 = \frac{\sqrt{a^2 + m^2}}{m}.$$

F. Gomes Teixeira.

PICCOLE NOTE

Nota sulla trasformazione quadratica del piano del signor Paolo Cattaneo. (*) — **1.** Ho indicato, (**) a proposito della trasformazione proposta, a pag. 81 del n. citato, dal sig. Cardoso-Laynes, come si potesse applicare il principio delle trasversali reciproche alla costruzione delle tangenti di una curva trasformata col sistema ch'egli indica. Questo principio può venire applicato alla trasformazione del sig. Paolo Cattaneo.

Consideriamo quindi una retta Δ ed un punto O, i quali costituiscono la figura fondamentale di questa trasformazione. Al punto P, scelto arbitrariamente, vi corrisponde un punto P', ottenuto, come indica la figura, conducendo per P la parallela a Δ, e, per il punto nel quale OP incontra Δ, la perpendicolare a questa retta Δ. Il problema che può chiamarsi *problema della tangente* si definisce così, in tutti i metodi di trasformazione puntale:

Data la tangente alla curva (C), *descritta dal punto* P *della figura che si trasforma, trovare la tangente alla curva* (C'), *descritta dal punto* P' *corrispondente del punto* P.

2. Per risolvere questo problema, occorre considerare due punti vicini P, Q su (C); i corrispondenti P', Q' su (C') e, conoscendo il limite della posizione occupata da PQ, allorchè il punto Q viene a coincidere con P, trovare la posizione limite di P' Q'.

Ecco come, nel caso particolare della trasformazione del sig. Paolo Cattaneo, può risolversi questo problema.

(*) *Periodico* (settembre-ottobre 1903; pag. 92).
(**) V. n. 1.

Consideriamo il triangolo OAB, e sui lati OA, OB, gli isotomici P″, Q″ dei punti P, Q. Le rette PQ, P″Q″ incontrano AB in due punti R, R′, isotomici sopra AB (principio delle trasversali reciproche). Se si chiama α l'angolo che fa P′Q′ con Δ, angolo che vogliamo determinare, al limite; mentre Q′ si confonde con P′, si ha

$$P'A - Q'B = AB \operatorname{tg} \alpha .$$

L'eguaglianza dei triangoli AP′P, OP″K, da un lato; quella dei triangoli BQQ′, OQ″J, dall'altra (*d*, K rappresentando le proiezioni dei punti Q″ P″ sulla perpendicolare Δ' a Δ, condotta per O) dimostrano che JK = P′A — Q′B. Si ottiene quindi

$$JK = AB \operatorname{tg} \alpha .$$

Ma chiamando C l'angolo acuto formato da P″Q″ con la retta Δ, si ha pure

$$JK = P''Q'' \cos C .$$

quindi

$$AB \operatorname{tg} \alpha = P''Q'' \cos C . \qquad (1)$$

Ciò posto, consideriamo la circonferenza circoscritta ai triangoli AOB, P″OQ″; chiamiamo R ed R′ i loro respettivi raggi; ed otteniamo

$$\frac{AB}{R} = \frac{P''Q''}{R'} . \qquad (2)$$

Comparando (1) e (2) si ottiene

$$R \operatorname{tg} \alpha = R' \cos C . \qquad (3)$$

3. Passiamo ora alla posizione limite, supponendo che Q si avvicini, sulla curva (C), indefinitamente a P. Sulla figura ottenuta possiamo fare le seguenti osservazioni:

1°. PQ ha per posizione limite una retta ben determinata, la tangente di (C) al punto P; indichiamo con r il punto in cui incontra Δ.

2°. La trasversale reciproca di PQ, cioè la retta P″Q″ ha una posizione ben determinata, essa pure; passa infatti per P″, punto isotomico di P′ sopra OA e per il punto r', simmetrico di r rispetto al punto A.

3°. Le circonferenze che abbiamo più sopra considerate; quelle circoscritte respettivamente ai triangoli AOB, P″OQ″; divengono due circonferenze ben determinate, cioè: La circonferenza che passa per O ed A, tangenzialmente a Δ; e la circonferenza passante per O e P″ tangenzialmente alla retta P″ r', che è ben determinata, come abbiamo osservato.

Indicando con ρ, e ρ' i respettivi raggi di queste circonferenze, l'uguaglianza (3) diviene

$$\rho \operatorname{tg} \alpha = \rho' \cos C .$$

In tale uguaglianza α è l'angolo incognito che, al limite, la retta P′Q′ fa con Δ; essa permette di costruire $\operatorname{tg} \alpha$ e, quindi, di risolvere, nella trasformazione osservata, il problema della tangente.

Elevando, in O, la perpendicolare a P P″, essa viene incontrata: in I, dal prolungamento di P′A; in J, dalla perpendicolare elevata a P″ r nel punto P″. Allora, AI = 2ρ e P″J = 2ρ'. La formula (4) dà finalmente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P''J \cos C}{AI} ,$$

P″J cos C essendo la proiezione di P″J sopra Δ. Costruendo un triangolo rettangolo uno dei cui lati sia AI, l'altro lato essendo uguale a questa proiezione, si otterrà l'angolo α. Si può disporre tale triangolo in modo che la sua ipotenusa sia parallela alla tangente cercata.

G. De Longchamps.

LIBRO II. — *Elementi di analisi infinitesimale.*

LIBRO III. — *Teoria delle equazioni Trigonometriche.* Contiene la trigonometria piana, e le applicazioni alla risoluzione delle equazioni binomiali, e di quelle di 3^o e 4^o grado e la formula fondamentale di trigonometria sferica.

Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle scuole medie italiane promosso dall'Associazione Mathesis tenuto in Napoli nei giorni 14, 15, 16 e 17 settembre 1903. Torino, tipografia degli Artigianelli 1904.

È un volume di pag. 121 dal quale apparisce che 89 furono gli aderenti, 46 i presenti dei quali circa 20 residenti a Napoli o dintorni.

Furono trattati i seguenti temi.

I. — Studiare le cause del poco profitto che fanno nello studio delle matematiche i giovani delle nostre scuole medie e proporre i mezzi per ovviarvi. (Relatore Nannei).

II. — Estensione e limiti dell'insegnamento della matematica in ciascuno dei due gradi, inferiore e superiore, delle scuole medie (Relatore Palatini).

III. — Sulla convenienza di rendere non obbligatoria la laurea in matematica a chi vuol conseguire il diploma di magistero per le scuole medie. (Relatore Costanzi).

Il volume contiene anche i discorsi fatti nella seduta inaugurale e alcune comunicazioni dei proff. Gallucci, Candido, Angeleri, Bustelli, Frattini, Biasi.

GUICHARD. — *Traité de géométrie (2me partie). Compléments.* Paris, Mary et C.ie, 1903.

In questi complementi che fanno seguito al Traité de Géométrie dello stesso Autore sono trattati gli argomenti che da poco sono stati introdotti nell'insegnamento in Francia, cioè la proiezione ortogonale di un cerchio e i teoremi di Daudelin sulle sezioni del cavo rotondo; la teoria dei vettori; le proiezioni centrali e la generazione delle coniche per fasci omografici.

Oltre a questi argomenti l'A. ha esposto le nozioni fondamentali della geometria proiettiva e molte teorie complementari interessanti come quella dell'inversione degli assi radicali simili.

Vi si trovano pure anche interessanti problemi oramai celebri, come il circolo dei nuovi punti, la retta di Simson, circolo tangente a tre circoli, sfera tangente a tre sfere ecc.

Un'ultima lezione è destinata alle aree dei poligoni e volume dei poliedri, alla rappresentazione conforme di un poliedro sopra un piano al teorema d'Eulero e conseguenze.

MINEO CHINI. — *Corso speciale di Matematiche con numerose applicazioni ad uso principalmente dei Chimici e dei Naturalisti.* Un vol. di pagine x-259. Livorno, R. Giusti, 1904.

È ormai generalmente noto come il meraviglioso sviluppo che in questi ultimi tempi ebbero la Chimica e le Scienze Naturali, rende necessaria, a chi voglia dedicarsi con profitto allo studio di questi rami dello scibile, la conoscenza d'una parte considerevole delle Matematiche Superiori, cioè degli Elementi d'una parte dell'Algebra Complementare, della Geometria Analitica, del Calcolo Infinitesimale oltre che di alcune nozioni di Meccanica Razionale e di Termodinamica. Appunto la constatazione di tale necessità diede luogo da un lato all'istituzione, sì nelle Università nostre, come in quelle d'altri paesi, di Corsi Speciali di Matematica per gli studenti di Chimica e Scienze Naturali, dall'altro alla pubblicazione di Trattati, dedicati all'esposizione di quelle parti delle Matematiche che sono indispensabili a chi si occupa delle accennate Scienze sperimentali. Fra questi trattati merita, sotto ogni rapporto, d'essere segnalato all'attenzione degli studiosi, pure quello che pubblicò testè il chiarissimo prof. Chini.

Il libro in parola è modellato sulle lezioni che l'A. tenne nelle RR. Università di Pavia e di Genova. Esso contiene, si può dire, tutto ciò che è assolutamente indispensabile a chi voglia acquistare perfetta conoscenza delle più moderne teorie, delle quali s'andarono arricchendo la Chimica e le Scienze Naturali: ed in pari tempo furono in esse lasciate da parte tutte quelle questioni di dettaglio, la cui trattazione sarebbe superflua all'intento prefissosi dall'A.

Molto opportunamente il chiar.mo prof. Chini incominciò il suo trattato col richiamare la teoria delle progressioni e dei logaritmi, il cui uso è di tanta importanza ed arreca tanti vantaggi nei calcoli numerici che si presentano nelle Scienze applicate. Seguono quindi alcune nozioni d'Algebra Complementare, quali gli elementi del Calcolo Combinatorio e della Teoria dei Determinanti con relativa applicazione alla risoluzione dei sistemi d'Equazioni Lineari. Tutto ciò costituisce la prima parte del libro. Merita qui d'essere particolarmente segnalato il modo semplice e chiaro con cui l'A. espone le nozioni relative ai determinanti, incominciando a parlare di quelli del secondo e terzo ordine e passando successivamente a considerare quelli d'ordine qualunque. Così il lettore si trova condotto ad esaminare tali determinanti, senza sforzo, per via naturale. La seconda parte del trattato è dedicata agli Elementi della Geometria Analitica. Una terza parte tratta degli Elementi del Calcolo Differenziale e comprende altresì un capitolo dedicato agli Elementi della Teoria degli Errori. Nella parte quarta sono esposte le Nozioni fondamentali del Calcolo Integrale e con queste termina il libro.

Una delle difficoltà maggiori che si presentano nella redazione d'un Corso di Matematiche dedicato a coloro per i quali lo studio di queste è mezzo, non fine, consiste nell'eliminazione di quelle quistioni che appartengono alla così detta " Matematica di Precisione „ senza che venga mai sagrificato il rigore col quale deve essere esposta la materia. Tale difficoltà fu egregiamente superata dall'A. Per convincersene basta invero dare uno sguardo ai capitoli del trattato del Chini, nei quali sono esposti gli elementi delle teorie dei limiti delle successioni e delle funzioni, delle serie e degli sviluppi in serie delle funzioni, come pure al capitolo dedicato agli Integrali definiti. L'A. lascia da parte tutte quelle sottili questioni che presentano precipuo interesse soltanto per chi voglia addentrarsi nello studio delle Matematiche: ed in pari tempo dà tutte le nozioni necessarie e sufficienti allo studio, fatto in modo pienamente rigoroso, delle questioni che si presentano nelle scienze sperimentali.

All'esposizione di ciascuna teoria matematica seguono sempre opportune applicazioni a questioni di Chimica e di Fisica, le quali ne mettono in luce la portata.

Così ad es. della teoria delle progressioni è data un'applicazione al calcolo del numero di atomi di carbonio, contenuti nelle molecole d'una serie di idrocarburi: della teoria dei determinanti è indicata la recente applicazione dovuta al prof. Volterra, al calcolo del numero dei composti indipendenti d'un sistema nella regola delle fasi.

Nella Geometria Analitica, allo studio dei più importanti luoghi geometrici (nel piano) seguono esempi di fenomeni ai quali corrispondono diagrammi dati appunto dalle curve ogni volta considerate. Oltre a ciò sono esposti anche criteri generali per stabilire a quali curve siano ricondotti i diagrammi relativi a date categorie di fenomeni. Notevoli pure sono le applicazioni della Geometria Analitica dello Spazio alla rappresentazione di leggi relative a fenomeni nei quali si hanno due variabili indipendenti.

Nel Calcolo Differenziale (v. Cap. V) è chiaramente esposta l'interpretazione sperimentale del concetto di derivata, come misura d'una velocità ed in generale come misura del limite del rapporto della variazione d'una funzione a quella della variabile indipendente. Qui l'A. si vale acconciamente anche della rappresentazione geometrica. Così pure opportuni esempi, tratti in particolare dalla Termodinamica, servono ad illustrare il concetto di Differenziale d'una funzione.

La breve esposizione della Teoria degli Errori, con la quale si chiudono gli Elementi di Calcolo Differenziale, oltre che contenere i cenni relativi ai criteri per la valutazione degli errori sperimentali, è illustrata ottimamente dall'esempio fornito dalla determinazione del peso specifico d'un solido colla bilancia idrostatica. Nel Calcolo Integrale l'A. indica opportuni ed eleganti artifici, mercè i quali il lettore può agevolmente procedere al calcolo degli integrali sì indefiniti che definiti, i quali più di frequente si presentano nelle quistioni sperimentali. In tal guisa l'A. raggiunge completamente l'intento, al quale deve essere informata una esposizione dei principii del Calcolo Integrale destinata a coloro che debbono essere posti in grado di calcolare speditamente e nel modo più rapido possibile anche integrali non del tutto semplici, girando le difficoltà che in tali calcoli si presentano, piuttosto che affrontandole direttamente. Non mancano qui pure acconci esempi ed applicazioni. Così ad es. troviamo il calcolo del lavoro di dilatazione d'un gas a temperatura costante: poi più innanzi dallo studio dell'inversione dello zucchero e della dissociazione dell'Acido iodidrico, l'A. trae due esempi di Equazioni differenziali ordinarie di primo ordine.

Finalmente lo studio dell'Equazione differenziale di 2° ordine, relativa ad un problema meccanico, chiude l'ottimo libro del prof. Chini. Così mi sembra che questo libro possa essere con somma utilità consultato da chi debba impartire l'insegnamento della Matematica agli Studenti di Chimica e di Scienze Naturali ed al tempo stesso possa servire di ottima guida agli studenti di tali scienze; poichè l'A. raggiunge splendidamente, sotto ogni rapporto, l'intento che si prefisse.

Adolfo Viterbi.

R. Marcolongo. — *Teoria matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, Milano, Ulrico Hoepli, 1904.

La varietà degli argomenti, che apparisce dall'indice di questo volumetto, invoglia a esaminarlo. Si incomincia a leggere e l'interesse cresce, bene avvertendosi che vien fatto di assimilare in modo preciso nozioni attraenti e di una indiscutibile importanza.

Questa la impressione sintetica, che del libro riporterà il lettore, assai più eloquente di qualsiasi elogio.

Mi si consenta soltanto di mettere in vista uno tra i molti pregi; quello, che a mio avviso, più rende simpatico un buon trattato e ne assicura il successo: voglio dire la certezza di non essere arrestati da piccoli dubbi o difficoltà di dettaglio, imputabili a incompleta elaborazione da parte dell'autore.

Nessuno ignora che una esposizione scientifica perfetta, difficilmente si raggiunge di primo acchito. Anche autori eminenti, i quali pur scrivono con semplicità suggestiva, quando non si dànno la briga di ben disciplinare la materia, curando i particolari, finiscono col lasciare qualche cosa nell'ombra, e ciò disturba lo studioso, il quale, per colmare le lacune, si trova costretto a dispendi di energia, non desiderati, nè desiderabili.

Un simile inconveniente non si incontrerà certo nell'opera del Marcolongo, che ispira a priori e merita effettivamente fiducia incondizionata. Essa è frutto di amorevoli cure e di meditazioni coscenziose; sorta dalla scuola, è già passata sotto il cribro sottile della lezione orale, più efficace di qualsiasi critica.

Eccone l'orditura generale.

I due primi capitoli fanno conoscere quei potenti mezzi analitici, concepiti nelle linee essenziali da Gauss, Green, Riemann e Dirichlet, che sono indispensabile strumento in tutti, si può dire, i campi delle matematiche applicate. L'A. tien conto dei perfezionamenti più recenti e riesce a presentare un quadro eccezionalmente compendioso e felice, che si presta bene ad un primo studio, e sarà pur visto con piacere e profitto, da chi già siasi addestrato in argomento.

Nel terzo capitolo, ancora introduttivo, sono esposti i principi della meccanica dei sistemi continui.

Dopo tali premesse si entra veramente nella teoria matematica dell'elasticità, della quale sono bene rappresentati e fusi con logica armonia i tre aspetti salienti: il fisico, l'analitico ed il tecnico.

Si incomincia, come è naturale, dal primo, per ricavarne le basi dell'intero edifizio.

Quanto mai commendevole è il criterio dell'A. di non limitarsi ad un arido elenco di postulati, ma di vivificare la trattazione, facendo largo posto ai diversi punti di vista (estensione della legge di Hooke; teorie molecolari; energetica), da cui possono essere ricavate le equazioni fondamentali.

Egli ha così occasione di riassumere la interessante controversia relativa al valore del rapporto di Poisson, e le ricerche di Voigt (semplificate e, per così dire, invertite da Somigliana) sulle forma del potenziale elastico nei mezzi cristallini.

Il lato analitico della statica dei corpi elastici è, come ebbe a dire il Klein, parlando dei matematici italiani, un problema nazionale.

Tanto più volontieri vi si intrattiene perciò il Marcolongo, svolgendo ampiamente i contributi fondamentali di Betti, Cerruti, Somigliana e i risultati successivi, ispirantisi all'uno o all'altro di quegli indirizzi, che si debbono allo stesso autore, a Lauricella, Almansi, Tedone, Gebbia ecc. Pur preponderando gli italiani, non si poteva passare sotto silenzio la parte spettante agli stranieri, e l'A. ricorda infatti con grande onore i lavori di Boussinesq, quelli più recenti dei fratelli Cosserat, e la importante quanto difficile questione risoluta dallo svedese Fredholm.

Seguono due capitoli, dedicati alle applicazioni tecniche, o meglio al substrato concettuale di tali applicazioni, in cui campeggia il problema di Saint-Venant, mirabile esempio di associazione feconda fra lo spirito pratico, l'intuito fisico e la speculazione matematica.

Il volume si chiude rendendo conto di quanto, per opera principalmente di Voigt, è stato fatto sul comportamento elastico dei cristalli. La estensione dei metodi di Saint-Venant ha, tra altro, resa possibile la determinazione effettiva delle costanti elastiche di alcuni corpi cristallini ed ha fornito la spiegazione dei fenomeni piezo-elettrici.

Il compito del recensore è finito; al pieno e schietto suo plauso sia pari la diffusione del libro, come lo sarà, si può starne garanti, la soddisfazione di ogni intelligente lettore.

Prof. TULLIO LEVI-CIVITA.

JENGO ADOLFO. — *La Telefonia*. Con 101 fig. nel testo. N. XVIII dei " Manuali Giusti ". Livorno, R. Giusti, 1904.

In questo manuale l'A. si propone di esporre concisamente tutte le cognizioni riguardanti la *Telefonia* procedendo, secondo l'ordine cronologico, dai primitivi apparecchi telefonici fino alla descrizione dei modernissimi sistemi per impianti di vaste reti per la trasmissione telefonica a grandi distanze.

L'egregio A., che dimostra di avere studiato con amore e con coscienza l'importante argomento, premette alla parte tecnica un capitolo introduttivo nel quale espone brevemente quei principi di fisica generale che servono per le applicazioni alla Telefonia. Data la piccola mole del libro e la vastità della materia da trattare l'A. non ha potuto troppo indugiarsi in queste nozioni e per conseguenza questo primo capitolo, a causa appunto della troppa concisione, non è certo encomiabile per quanto riguarda la chiarezza. Menda del resto abbastanza lieve, quando si pensi che l'A. avrebbe potuto benissimo presupporre nel lettore le cognizioni di fisica sufficienti all'interpetrazione del testo.

È invece condotto abbastanza bene il cap. successivo in cui l'A. descrive il primo telefono magnetico e merita un particolare elogio l'A. per non aver dimenticato, in questo capitolo, di rivendicare all'*italiano Meucci* la gloria della scoperta del telefono magnetico.

Nel cap. III l'A. tratta dei telefoni a pila ed in ispecial modo del microfono, e nel cap. IV descrive con precisione i vari sistemi di telefonia e termina con un cenno, veramente troppo breve, dell'applicazione fatta dall'inglese *Preece* alla telefonia senza filo. Un altro elogio va pure tributato all'A. per non avere omesso l'importante applicazione del telefono come rivelatore delle onde Hertziane per mezzo del *detector magneticum* del nostro *Marconi*.

Dopo un rapido cenno sulle pile e sugli accumulatori l'A. passa alle linee telefoniche per venire poi a trattare di tutta la parte tecnica riguardante gli accessori e l'impianti telefonici. Nella trattazione di questa parte l'A. va innanzi sicurissimo e si rivela ingegnere tecnico provetto e coscienzioso: per coloro cui il libro è destinato, è senza dubbio questa la parte più importante ed è quindi un pregio notevole del libro che sia questa la più diffusa e la più egregiamente trattata.

Nel capo IX ed ultimo l'A. parla della parte pratica dell'ultima applicazione fatta dal *Van Rysselberghe* e dagli italiani *Brunè* e *Turchi* per la telefonia e la telegrafia sullo stesso filo, riservandosi a fare un'esposizione teorica di questo sistema nella parte seconda dell'appendice: la parte prima della detta appendice è invece riservata all'esposizione della teoria della trasmissione telefonica a grande distanza.

L'A. ha necessariamente dovuto mettere in appendice queste due ultime parti perchè per l'esposizione delle medesime, ha dovuto, per forza, ricorrere a cognizioni matematiche che non sono alla portata di tutti.

In complesso questo manuale è un lavoro che si legge volentieri e che può riuscire utilissimo a tutti coloro che hanno bisogno di acquistare presto cognizioni sufficienti intorno alla tecnica e alla pratica della telefonia.

AROLDO MARTINI ZUCCAGNI.

Note all'inchiesta sulla fusione della geometria piana e solida.

Dopo la pubblicazione del precedente fascicolo io sottoscritto, direttore del « Periodico di Matematica » ho avuto acerbi rimproveri per avere accolto in questo giornale l'articolo del prof. Lazzeri *a proposito dell' inchiesta fatta dall' « Associazione Mathesis » sulla fusione della geometria piana e solida;* e siccome rifuggo dalle polemiche ed ho (è inutile negarlo) molta amicizia e simpatia per il prof. Lazzeri, ne sono rimasto molto dispiacente.

Le più gravi lagnanze mi sono state rivolte dal prof. Angeleri, il quale m'inviò una risposta al citato articolo, accompagnata dalla lettera che qui riproduco testualmente.

Ivrea, 15 maggio 1904.

Illustriss. Sig. Direttore

Nell'ultimo numero del « Periodico di Matematica » vi (*sic!*) è inserito un articolo del prof. Lazzeri sulla Fusione, e che in parte mi riguarda. Siccome in detto articolo vi (*sic!*) sono cose che offendono il mio amor proprio, ed è già la seconda volta che il sig. Lazzeri scrive in tal modo contro di me, così mi rimetto alla lealtà di V. S., perchè nel prossimo numero del suo « Periodico » inserisca questa mia risposta. Certo il sig. Lazzeri non si opporrà.

Dev.mo
FR. ANGELERI.

Naturalmente, mi sono affrettato a chiamare alla mia presenza il Prof. Lazzeri, gli ho comunicato l'articolo dell'Angeleri, e gli ho fatto un patetico discorso per dimostrargli che la sua condotta è stata altamente biasimevole, e per sentire se aveva qualche cosa da dire a sua giustificazione!

Ma egli ha ascoltata la mia predica senza scomporsi, ha mostrato di non essere impensierito gran che delle gravi accuse dell'Angeleri; ed ha avuto il coraggio, per non usare una parola più grave, di dirmi: « anche in Corte d'Assise l'ultima parola spetta alla difesa. Io non mi occupavo più da un pezzo della vecchia quistione; sono stato accusato, e mi son difeso; il prof. Angeleri, pubblico ministero, e la parte civile, vogliono replicare io non mi oppongo, purchè mi sia concesso di rispondere alla replica.

Sono stato costretto a riconoscere che il ragionamento era giusto, e per finirla, con quella imparzialità che mi distingue, ho convenuto di pubblicare la risposta dell'Angeleri con la controreplica del Lazzeri, che si è impegnato di esser breve e concettoso per non tediare i lettori.

Ecco la replica dell'Angeleri:

Ancora sulla fusione delle due Geometrie.

I colleghi che mi conoscono sanno quanto io mi occupi delle scuole, e il prof. Lazzeri, col suo « Periodico » e sopratutto col « Supplemento » non dovrebbe esserne ignaro. È in conseguenza di questo mio amore, *niente per altro*, indipendentemente da qualunque persona e da qualunque libro, che io proposi di interrogare i colleghi riguardo alla ormai famosa fusione della Planimetria colla Stereometria.

Il prof. Lazzeri fa altrettanto? Quantunque nel suo articolo (V. « Periodico di Matematica, » Fasc. V, 1904), egli dichiari di parlare oggettivamente, è già la seconda volta che si occupa della mia povera persona e con una certa acrimonia che, anche senza volerlo, fa pensare essere egli a corto di argomenti.

Che non sia proprio possibile fra insegnanti di Matematica il trattarsi con rispetto reciproco e mantenersi nella serenità della discussione!

La prima volta mi sono accontentato di scrivere al sig. Lazzeri una lettera gentilissima in mia difesa, e speravo che ne facesse almeno un cenno nel numero successivo del suo « Periodico, » dove si era parlato di me, ma m'ingannai. Questa volta ricorro alla lealtà del Direttore.

La quistione che io sto facendo da anni, si riduce a questo; *Allo stato attuale delle cose* (spero che il sig. Lazzeri capirà), *per i giovani di 1ª Liceale è più facile la Planimetria o la Stereometria?* Il prof. Lazzeri veramente non ha ancora dato una risposta esplicita a questo, ma coi suoi scritti viene ad asserire che l'una e l'altra presentano eguali difficoltà. Io e moltissimi altri (informino il *referendum* e le varie adunanze, specie l'ultima di Bologna), ci permettiamo di credere che la Stereometria sia più difficile. E il sig. Lazzeri (lo prego a non tenermi il broncio) a parole è contrario, ma nel fatto è di questo parere. Perchè infatti nel suo « Supplemento, » non mette mai a concorso quistioni di geometria solida?

Provi qualche volta a proporne, e staremo a vedere insieme quanti sono i solutori.

Io spero che il sig. Lazzeri non avrà più ad occuparsi di me, ma se mai lo prego, che citando i miei scritti non ometta a bella posta delle parole. Nel periodo: « Ma come! L'aver procurato che le figure del nostro libro fossero più nitide e chiare che fosse (anche egli, una ripetizione! Orrore!) possibile etc., » dopo la parola figure, aggiunga *solide* come ho scritto io, e vedrà, caro sig. Lazzeri che tutto corre benissimo. Da bravo! di questi scherzi non ne faccia più. Vedi poi combinazione! Nel mentre il sig. Lazzeri s'impanca a maestro di bello scrivere, non pensando alla grave responsabilità che si assume, proprio nello stesso periodo, anzi nella stessa riga, dove fa osservare a me un errore di ripetizione. *(Quam parva sapientia...!)* egli scrive queste parole, che io regalo al paziente lettore come saggio di bello stile: « e qui due o tre frasi cortesi per la modesta opera nostra, delle quali lo ringrazio ». E ciò fia suggel.

FR. ANGELERI.

Ed ecco le risposte del Lazzeri ridotte ai minimi termini.

a) Il « Supplemento » entra assai indirettamente nella quistione, ma se vogliamo tirarlo in ballo è da osservarsi che esso per vivere deve avere il favore dei fusionisti e dei non fusionisti, ed è quindi naturale che fra le quistioni da risolvere siano più numerose quelle di planimetria che quelle di stereometria. Pure, sfogliando la raccolta, è facile vedere che venne proposto, a concorso o no, anche un discreto numero di quistioni stereometriche. Qualche volta è accaduto che i giovani abbian fatto spontaneamente l'estensione allo spazio di una quistione planimetrica (esempio la quistione 53 a concorso).

Il numero dei risolutori di quistioni stereometriche non è in generale più scarso di quello dei risolutori di quistioni planimetriche.

b) Quando il prof. Angeleri afferma che il Lazzeri ha citato i suoi scritti, *omettendo a bella posta delle parole,* dice una ... cosa non esatta (il Lazzeri qui adoperò un'altra parola che ho creduto conveniente sopprimere).

Nessuno ha il diritto di contestare a chicchessia di pensarla come gli pare non solo sulla fusione, ma anche su qualsiasi più grave argomento; ma nessuno ha il diritto di far dire o far pensare ad altri quello che non si sono mai sognati di dire o di pensare.

L'Angeleri scrisse che gli stessi Lazzeri e Bassani « colla nitidezza delle *figure solide* sembra che essi stessi ammettano una difficoltà maggiore nella Stereometria che nella Planimetria »; e le sue parole furono *testualmente riprodotte* nell'articolo incriminato. Siccome però una eguale identica cura era stata posta nel disegnare le figure di geometria piana e solida annesse al trattato di geometria dei citati autori, il Lazzeri aveva il diritto di rispondere che trarre argomento dalla *nitidezza delle figure* (piane o solide poco importa) per affermare che esiste contradizione fra le parole ed il pensiero dei suddetti autori è una cosa ... abbastanza curiosa, per non dir peggio.

c) Il Lazzeri è rimasto assai addolorato nel sentirsi dire che *s'impanca a maestro di bello scrivere,* e mi ha giurato che non ha mai avuto una idea così immodesta: soltanto mi ha detto che quando s'imbatte in uno sproposito da pigliarsi colle molle, non può fare a meno di prendere le sullodate molle ed esporlo all'ammirazione del colto pubblico.

Quanto alla frase che il prof. Angeleri regala all'ammirazione del paziente lettore, il prof. Lazzeri ed io siamo corsi a farla leggere ad alcuni amici professori di lettere; i quali, (poveretti! sono forse più ciuchi di noi!) non hanno saputo trovarci spropositi.

d) Circa l'accusa di essere a corto di argomenti il Lazzeri, per non tediare i lettori, si riferisce a quanto ha scritto nella prefazione dei suoi *Elementi* e ai numerosi articoli pubblicati in questo « Periodico » nel corso di vari anni.

Volendo qualche cosa di più fresco, il prof. Angeleri può leggere il risultato dell'inchiesta sull'uso dei *Nouveaux éleménts de géométrie* di Meray nelle scuole francesi, pubblicato recentemente dal prof. Duport nella « Revue Bourguignonne » (T, XIV - 1904).

***

Dopo di che il prof. Lazzeri ha preso in esame le *rettifiche* al suo articolo fatte solennemente dal prof. Bettazzi in nome del Comitato dell' « Associazione Mathesis » (V. « Bollettino, » An. VIII, N. 5), ed ha osservato che esse non rettifican molto. Il N. 2 riguarda principalmente il prof. De Amicis, che risponderà dove e quando crederà.

Al N. 2 *d)* il Bettazzi dice: « Non *inconsultamente* si esclusero dalla Presidenza del Congresso i professori universitari, ma dopo regolare discussione in seno al Comitato direttivo ecc. »

Ed il Lazzeri non nega ciò, ma osserva che egli disse unicamente che tale deliberazione sarà magari stata eccellente, ma a lui parve cattiva e perciò la qualificò *inconsulta*.

Nei N. 4 e 5 il Bettazzi dice che il *referendum* fu rivolto *solo* ai professori di Liceo; e allora perchè ha pubblicato il parere di persone che al Liceo non hanno mai insegnato?

***

Infine il prof. Lazzeri desidera che sia pubblicata la seguente lettera del prof. Andriani, che egli ringrazia per la forma cortese della sua risposta, facendogli osservare solamente che nei libri del De Paolis e di Lazzeri e Bassani, non si può dire che si sia fatto solo un'*alternazione* delle due geometrie, poichè spesso si fa uso di proprietà stereometriche per semplificare le dimostrazioni di altre proprietà planimetriche.

Bari, 10 maggio, 1904.

Distinto Professore,

Mi permetta almeno quest'unica volta che pubblichi nel suo " Periodico di Matematica „ qualche cosa che mi riguarda in ordine alla dibattuta quistione della fusione della geometria piana colla solida. Veramente dopo quello ch'Ella ha scritto in sua difesa è ozioso scrivere altro intorno allo stesso argomento. Ma avendomi Ella accordato l'onore di nominarmi parecchie fiate, sento il bisogno di scagionarmi subito dall'accusa fattami, cioè che io pretenda che s'insegni nelle scuole solamente la mia geometria. Se male mi espressi nel *referendum* alla " Mathesis „ chieggo venia. Il mio pensiero era ed è che la fusione non debba confondersi coll'alternazione. Essa dev'essere intima, applicando quanto più è possibile il principio di dualità. Non avendo quindi finora veduto nessun libro che tratti la fusione col tenere presente il principio di dualità, mi permisi di additare il mio libro come quello che segna il primo tentativo, bene o male, per eccitare i valorosi matematici a ribattere la via da me percorsa e raddrizzarla verso la meta cui la scienza aspira, e che il compianto Cremona additò.

Se l'alternazione in geometria è un bene, io non trovo altro libro migliore del suo che possa dar buon frutto alla scuola, e se non avessi il mio libro insegnerei il suo, come quello che mantiene viva l'agitazione in favore della fusione. Opino però che la scienza non deve arrestarsi all'alternazione, ma alla vera fusione. E fo voto che i più volenterosi studino con amore i due metodi, o meglio, i due modi d'interpretare la fusione; quello che propugna Lei e quello che propugno io. Non