Se P_1 e P_2 si muovono sugli assi x e y rispettivamente, appartenendo ad una tangente mobile alla conica (13), il luogo di P_3 è la quartica

$$A_{33}x_3^2y_3^2 + A_{22}x_3^2 + A_{11}y_3^2 - 2A_{23}y_3x_3^2 - 2A_{13}x_3y_3^2 + 2A_{12}x_3y_3 = 0 \quad (19)$$

che ha un punto doppio nell'origine.

Se la conica è l'elisse (13') la curva (19) si riduce, com'è noto, alla kreuzcurva

$$x^2y^2 - b^2x^2 - a^2y^2 = 0$$

e se è l'iperbole (13'') alla kohlenspitzencurva

$$x_3^2y_3^2 - b^2x_3^2 + a^2y_3^2 = 0;$$

e se, come ultimo caso, la conica (13) è il cerchio

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

la (19) oltre alla retta $x = 0$ rappresenta la cubica

$$y_3^2(x_3 - 2r) = r^2x$$

detta da Newman curva *tunnel*.

5. Supponiamo che P_3 sia la proiezione di un punto fisso del piano, che, per semplicità, supporremo l'origine, sulla retta per P_1 e P_2; allora le coordinate di P_3 sono legate a quella di P_1 e P_2 dalle due relazioni

$$\begin{aligned} x_3[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] - (x_2y_1 - y_2x_1)(y_1 - y_2) &= 0 \\ y_3[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] - (x_2y_1 - y_2x_1)(x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Suppongasi che P_1, P_2 appartengono all'elisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

e si prenda per la (2) la relazione

$$x_1x_2 = y_1y_2;$$

allora P_3 si muove sulla lemniscata iperbolica di Both [1]

$$(x^2 + y^2)^2 = \mu^2x^2 - \nu^2y^2,$$

avendo posto

$$\mu = \frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \qquad \nu = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

La (21) si riduce alla coppia di rette

$$y = x \qquad y = -x$$

se in luogo di un'ellisse si ha un cerchio col centro nell'origine.

Se i punti P_1 e P_2 si muovono rispettivamente sugli assi x, y si ha

$$x_1 = \frac{y_3^2 + x_3^2}{x_3}, \qquad y_1 = x_2 = 0, \qquad y_2 = \frac{y_3^2 + x_3^2}{y_3}$$

---

[1] LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene curven*. Lipsia, 1902.

e se i detti punti soddisfano alla condizione (2), il luogo di P_3 è la curva

$$\psi\left(\frac{y_3^3+x_3^3}{x_3},\ 0,\ 0,\ \frac{y_3^2+x_3^2}{y_3}\right)=0. \qquad (22)$$

Si osservi che la (22) è la podaria rispetto all'origine della curva la cui equazione si ottiene eliminando x_1, y_2, fra la (2), la

$$\frac{X}{x_1}+\frac{Y}{y_2}=1.$$

e la

$$Yx_1^2\frac{\partial\psi}{\partial x_1}-Xy_2^2\frac{\partial\psi}{\partial y_2}=0.$$

Si prenda in particolare per la (2) la (9); allora la (22) diviene

$$(x_3^2+y_3^2)(y_3-x_3)-kx_3y_3=0$$

equazione di una strofoide.

Se per la (2) si prende la (10), la (22) diviene

$$k(y_3^2+x_3^2)-(y_3+x_3)=0$$

equazione di un cerchio di raggio $\frac{1}{\sqrt{2}k}$ e centro nel punto di coordinate $\frac{1}{2k}$, $\frac{1}{2k}$: se si prende invece la (6), la (22) diventa

$$(x_3^2+y_3^2)^3=k^2x_3^2y_3^2$$

equazione di una rodonea di Guido Grandi, detta rosone a quattro rami (1), la quale è podaria rispetto all'origine dell'asteroide

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=r^{\frac{2}{3}}.$$

Se per la (2) si prende la (14), la (22) dà

$$A_{33}(x_3^2+y_3^2)^2-2(A_{23}y_3+A_{13}x_3)(x_3^2+y_3^2)+$$
$$+A_{22}y_3^2+2A_{12}x_3y_3+A_{11}x_3^2=0$$

che è la podaria della conica (13) rispetto all'origine.

Se vuolsi che P_1 e P_2 formino come un punto fisso $M(a, b)$ un triangolo di area costante k, la (22) diviene

$$(y_3^2+x_3^2)^2-(x_3^2+y_3^2)(by_3+ax_3)-2kx_3y_3=0$$

e se il segmento P_1P_2 è visto dallo stesso punto sotto angolo γ costante, la (22) diviene l'equazione della strofoide

$$(x_3^2+y_3^2)[y_3(a\operatorname{tg}\gamma-b)+x_3(b\operatorname{tg}\gamma-a)]+(a^2+b^2)\operatorname{tg}\gamma\,.\,x_3y_3=0.$$

Bologna, gennaio, 1905.

FILIPPO SIBIRANI.

(1) BRIOT et BOUQUET, *Géometrie analytique*, 1878.

TEORIA DEI NUMERI COMPLESSI AD *N* UNITÀ

(vedi fascicoli III-IV)

Corpi commutativi di Weierstrass.

1. Sappiamo che se un corpo associativo a più di due unità ammette una moltiplicazione commutativa, deve possedere divisori dello zero oltre lo zero (v. fasc. IV, n. 14).

In un corpo siffatto una equazione algebrica può ammettere infinite radici senza che sia identicamente nulla.

Infatti, se k è un divisore dello zero, esistono infiniti numeri l per i quali si ha

$$kl = 0 . \tag{1}$$

Se a e b sono due numeri del corpo, e b non è un divisore dello zero, per ogni numero l esiste un sol numero x che verifica l'equazione

$$a + bx = l . \tag{2}$$

Posto allora

$$a' = ak , \qquad b' = bk , \tag{3}$$

si ha, moltiplicando l'equazione (2) per k, e ricordando la (1),

$$a' + b'x = 0 . \tag{4}$$

Questa equazione, avendo i coefficienti indipendenti da l, è soddisfatta dagl'infiniti valori di x, che corrispondono agl'infiniti valori di l.

E più generalmente, se è possibile risolvere l'equazione

$$a + bx + cx^2 + \ldots + hx^m = l ,$$

per infiniti valori di l per i quali è $kl = 0$, l'equazione

$$a' + b'x + c'x^2 + \ldots + h'x^m = 0,$$

ove è

$$a' = ak , \qquad b' = bk , \qquad c' = ck , \ldots , \qquad h' = hk$$

ammetterà infinite radici.

Una equazione dunque, i cui coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero, moltiplicando questo per numeri arbitrari del sistema può ammettere infinite radici.

2. Ipotesi di Weierstrass.

Weierstrass, osservando che questa proprietà è analoga a quella che una equazione algebrica ammette infinite radici, quando i suoi

coefficienti sono tutti uguali a zero, nell'intento di fondare un'aritmetica analoga all'ordinaria, pone l'ipotesi che il corpo ammetta una moltiplicazione commutativa e sia tale che ogni equazione algebrica possa ammettere infinite radici *solamente* quando i suoi coefficienti si deducano da uno stesso divisore dello zero, moltiplicandolo per numeri arbitrarî.

Un tale sistema lo chiameremo un *corpo commutativo di Weierstrass.*

3. Le proprietà fondamentali di questi sistemi si deducono dai seguenti teoremi.

TEOREMA I. — *Il rango di un corpo commutativo di Weierstrass è uguale all'ordine* n.

Sia m il rango del sistema e

$$\varphi_0 x^m + \varphi_1 x^{m-1} + \ldots + \varphi_m = 0$$

l'equazione fondamentale del sistema.

Sappiamo che $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ sono funzioni razionali intere delle coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ di x, e inoltre φ_0 non è identicamente nulla. Possiamo quindi considerare i rapporti

$$\Phi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad \Phi_2 = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \ldots, \Phi_m = \frac{\varphi_m}{\varphi_0}, \tag{1}$$

e supporre che, per le coordinate $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ del numero x' del sistema, prendano i valori

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m \tag{2}$$

rispettivamente.

Noi dimostreremo che se fosse $m < n$, esisterebbero infiniti sistemi di valori per $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nell'intorno del punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi_n)$, pei quali i rapporti (1) assumerebbero i medesimi valori (2), e che quindi ci sarebbero infinite radici dell'equazione

$$x^m + \gamma_1 x^{m-1} + \ldots + \gamma_m = 0,$$

a coefficienti reali (e perciò appartenenti al sistema) e non deducibili da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri arbitrari del sistema, (1) e ciò sarebbe contro l'ipotesi che il sistema sia un corpo commutativo di Weierstrass.

Devesi dunque dimostrare che il sistema

$$\begin{aligned} &\Phi_1(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \gamma_1 = 0, \\ &\Phi_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \gamma_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\Phi_m(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) - \gamma_m = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

---

(1) Il primo coefficiente 1, per es., non può dedursi da un divisore k dello zero, in modo che sia

$$1 = ak,$$

perchè moltiplicando ambo i membri di questa uguaglianza per un numero l diverso da zero, e tale che sia $kl = 0$, si dedurrebbe $l = 0$.

per $m < n$ è soddisfatto da infiniti sistemi di valori (reali) per $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Si consideri la matrice jacobiana

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_1}, & \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_2}, & \ldots, & \frac{\partial \Phi_m}{\partial \xi_n} \end{array} \right\|$$

e nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ sia $\mu \leqslant m$ la caratteristica di questo sistema; potremo, per es., supporre che nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ sia diverso da zero il determinante jacobiano d'ordine μ

$$J = \frac{\partial (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\mu)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu)}. \qquad (4)$$

Allora è noto [1] che delle funzioni

$$\Phi_1 - \gamma_1, \ \Phi_2 - \gamma_2 \ldots, \Phi_m - \gamma_m$$

soltanto le prime μ sono indipendenti e le altre $m - \mu$ sono funzioni delle prime.

Allora il sistema

$$\Phi_1 - \gamma_1 = 0, \quad \Phi_2 - \gamma_2 = 0, \ldots, \Phi_\mu - \gamma_\mu = 0, \qquad (5)$$

essendo soddisfatto dal sistema di valori $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, ed essendo evidentemente continue le derivate parziali dei primi membri rispetto a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ e diverso da zero il determinante jacobiano (4) nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, è atto [2] a definire implicitamente le variabili $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\mu$ come funzioni continue delle rimanenti nell'intorno del punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, cioè nell'intorno di questo punto esistono infiniti sistemi di valori di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ che verificano il sistema (5).

Se è $m = \mu$, allora il teorema è dimostrato; ma se è $\mu < m$ dimostreremo che ogni sistema di valori di $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, nell'intorno di $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, che verifica il sistema (5) verifica anche le rimanenti equazioni

$$\Phi_{\mu+1} - \gamma_{\mu+1} = 0, \ \Phi_{\mu+2} - \gamma_{\mu+2} = 0, \ldots, \Phi_m - \gamma_m = 0. \qquad (6)$$

Infatti per $r > \mu$ ogni funzione $\Phi_r - \gamma_r$, come si è osservato, è funzione delle prime μ, cioè si ha

$$\Phi_r - \gamma_r = \Psi_r (\Phi_1 - \gamma_1, \ \Phi_2 - \gamma_2, \ldots, \Phi_\mu - \gamma_\mu) \qquad (r = \mu+1, \ \mu+2, \ldots, m)$$

e nel punto $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m)$, nel quale tanto il sistema (5) che il sistema (6) è soddisfatto, si ha

$$\Psi_r (0, \ 0, \ldots, 0) = 0,$$

---

[1] CESÀRO. *Elementi di calcolo infinitesimale*, p. 136 n. 29.
[2] CESÀRO, *Op. cit.*, p. 133, n. 26.

e però anche in un altro punto dell'intorno di $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$, nel quale è soddisfatto il sistema (5), si avrà

$$\Phi_r - \gamma_r = 0,$$

cioè è anche soddisfatto il sistema (6).

Così il teorema risulta completamente dimostrato.

DEFINIZIONE. — Un numero g del sistema, che soddisfa ad una equazione di grado n, e non ad una equazione di grado inferiore lo diremo un numero *generante* il sistema, poichè potendosi allora prendere come unità i numeri

$$g, g^2, \ldots, g^{n-1},$$

ogni numero a del sistema può mettersi sempre sotto la forma

$$a = \alpha_0 + \alpha_1 g + \alpha_2 g^2 + \ldots + \alpha_{n-1} g^{n-1}.$$

Il polinomio $A(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \ldots + \alpha_{n-1} \xi^{n-1}$, che si cambia in a quando si muti ξ in g, lo chiameremo il polinomio *corrispondente* ad a.

TEOREMA II. — *L'equazione caratteristica del sistema non può ammettere (nel campo dei numeri complessi ordinari) radici multiple.*

Sia

$$F(\xi) \equiv \xi^n + \gamma_1 \xi^{n-1} + \ldots + \gamma_n = 0 \qquad (7)$$

l'equazione cui soddisfa il numero g generante il sistema.

Se essa ammettesse una radice multipla d'ordine λ, $F(\xi)$ sarebbe divisibile per la potenza $f^\lambda(x)$ di un fattore $f(x)$ reale e di grado non superiore al secondo; si avrebbe quindi

$$F(\xi) = f^\lambda(\xi) \cdot Q(\xi).$$

Indicando allora con $f_1(\xi)$ una funzione intera a coefficienti reali arbitrari, di grado minore di quello di $f^{\lambda-1}(\xi)$, poniamo

$$F_1(\xi) = f(\xi) f_1(\xi) Q(\xi),$$

sarà allora $F_1^\lambda(\xi)$ divisibile per $F(\xi)$, cioè

$$F_1^\lambda(\xi) = F(\xi) \cdot Q_1(\xi).$$

Se ora mutiamo ξ in g, e osserviamo che g verifica la (7), denotando con x il numero corrispondente a $F_1(\xi)$, quest'ultima eguaglianza si trasforma nell'altra

$$x^\lambda = 0.$$

Per l'arbitrarietà dei coefficienti di $f_1(\xi)$, la funzione $F_1(\xi)$ è indeterminata, e quindi esisterebbero infiniti valori di x verificanti la (8), ciò che è in contradizione coll'ipotesi che il sistema sia un corpo commutativo di Weierstrass. L'equazione caratteristica non può dunque avere radici multiple.

4. In base a questo teorema possiamo supporre la funzione $F(\xi)$ decomposta in fattori reali, del primo o del secondo grado, tutti diversi tra loro

$$F(\xi) = f_{11}(\xi) f_{12}(\xi) \ldots f_{1k}(\xi) \cdot f_{21}(\xi) f_{22}(\xi) \ldots f_{2h}(\xi), \quad (k + 2h = n)$$

dove il primo indice mostra se il fattore sia del primo o del secondo grado.

Consideriamo le funzioni

$$\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \quad (r=1,2,\ldots,k), \qquad \frac{F(\xi)}{f_{2s}(\xi)} \quad (s=1,2,\ldots,h),$$

e siano

$$u_{1s}, \qquad u_{2s}$$

i numeri del sistema corrispondenti a queste funzioni. Sia poi $A(\xi)$ il polinomio corrispondente a un numero a.

Decomponendo la funzione razionale fratta $\frac{A(\xi)}{F(\xi)}$ in somma di funzioni semplici, si ottiene, com'è noto,

$$\frac{A(\xi)}{F(\xi)} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_{1r}}{f_{1r}(\xi)} + \sum_{s=1}^{h} \frac{\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\,\xi}{f_{2s}(\xi)},$$

dove α_{1r}, α_{2s} e α'_{2s} sono costanti reali.

Moltiplicando per $F(\xi)$ e poi mutando ξ in g, si ottiene

$$a = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r}\, u_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\, g)\, u_{2s}.$$

I numeri della forma $\alpha_{1r}\, u_{1r}$ corrispondenti a tutti i valori reali di α_{1r} costituiscono un corpo C_{1r} ad una unità (u_{1r}), e i numeri della forma $(\alpha_{2s} + \alpha'_{2s}\, g)\, u_{2s}$ per tutti i valori reali di α_{2s} e α'_{2s} costituiscono un campo C_{2s} a due unità $(u_{2s},\ g u_{2s})$. Dunque.

TEOREMA. — *Un numero qualunque* a *del sistema considerato può essere rappresentato come somma di* k *numeri*

$$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k},$$

appartenenti ai campi parziali ad una unità

$$C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$$

e di h *numeri*

$$a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2h},$$

appartenenti ai campi parziali a due unità

$$C_{21}, C_{22}, \ldots, C_{2h},$$

cosicchè si ha

$$a = (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1k}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2h}).$$

5. Dimostriamo i seguenti notevoli teoremi.

TEOREMA I. — *Il prodotto di due numeri appartenenti a campi parziali differenti è nullo. Il prodotto di due numeri appartenenti ad uno stesso campo è un numero di questo campo.*

1°. Siano a_{1r} e b_{1s} $(r \neq s)$ due numeri appartenenti ai campi parziali ad una unità C_{1r}, C_{1s}; sarà

$$a_{1r} = \alpha_{1r}\, u_{1r}, \qquad b_{1s} = \beta_{1s}\, u_{1s},$$

e le funzioni corrispondenti saranno

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}, \qquad \beta_{1s}\frac{F(\xi)}{f_{1s}(\xi)}.$$

Il prodotto di queste due funzioni, poichè è $r \neq s$, è evidentemente divisibile per $F(\xi)$. Quindi si ha

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1s}\frac{F(\xi)}{f_{2s}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi).$$

Mutando ξ in g si ottiene subito

$$a_{1r}\, b_{1s} = 0.$$

In modo analogo, per $r \neq s$,

$$a_{2r}\, b_{2s} = 0,$$

e poi, anche se è $r = s$,

$$a_{1r}\, b_{2s} = 0.$$

2°. Siano ora a_{1r} e b_{1r} due numeri appartenenti a uno stesso campo parziale a una unità C_{1r}, e siano $\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$, $\beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$ le funzioni corrispondenti.

Dividiamo il prodotto di queste due funzioni per $F(\xi)$, e sia $Q(\xi)$ il quoziente ed $R(\xi)$ il resto; si avrà

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi) + R(\xi).$$

Poichè tanto il primo membro che il primo termine del secondo membro sono divisibili per $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$, anche $R(\xi)$ è divisibile per $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$; ma questa funzione è di grado $n-1$ e $R(\xi)$ non può essere di grado superiore ad $n-1$, dunque $R(\xi)$ è uguale al prodotto di $\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}$ per una costante reale γ_{1r}

$$R(\xi) = \gamma_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)}.$$

Il cambiamento di ξ in g fornisce dunque

$$\alpha_{1r}u_{1r} \cdot \beta_{1r}u_{1r} = \gamma_{1r}u_{1r}$$

cioè il prodotto di due numeri appartenenti ad un campo parziale C_{1r} ad una unità è un numero di questo campo.

Con dimostrazione analoga, il prodotto di due numeri appartenenti ad un campo C_{2s} a due unità è un numero di questo campo.

In particolare, per $r \neq s$,

$$u_{1r} \cdot u_{1s} = 0, \quad (1) \qquad u_{2r} \cdot u_{2s} = 0 \quad (2)$$

e, anche per $r = s$,

$$u_{1r} \cdot u_{2s} = 0. \quad (3)$$

TEOREMA II. — *Il prodotto di due numeri appartenenti ad uno stesso campo parziale non può essere nullo, se non è nullo uno dei fattori.*

Infatti se è

$$a_{1r}b_{1r} = 0,$$

dall'eguaglianza, che risulta per le funzioni corrispondenti ad a_{1r}, b_{1r}, precedentemente notata,

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi) + R(\xi);$$

si deduce che $R(\xi)$ si annulla quando al posto di ξ si pone g, ma quest'annullamento non può avvenire se non identicamente, altrimenti g soddisferebbe ad una equazione algebrica a coefficienti reali di grado inferiore ad n. Allora si ha

$$\alpha_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} \cdot \beta_{1r}\frac{F(\xi)}{f_{1r}(\xi)} = F(\xi) \cdot Q(\xi).$$

Dividendo per $F(\xi)$ e moltiplicando per $f_{1r}^{\,2}(\xi)$, si ottiene

$$\alpha_{1r}\beta_{1r} F(\xi) = f_{1r}^{\,2}(\xi)\, Q(\xi).$$

Ma $F(\xi)$, non possedendo radici multiple, non può ammettere il fattore $f_{1r}(\xi)$ a quadrato, e quest'eguaglianza non può sussistere, se non è nullo uno dei fattori α_{1r}, β_{1r}, cioè o è nullo a_{1r}, o è nullo b_{1r}.

In modo analogo si dimostra che se è $a_{2s}b_{2s} = 0$, deve essere nullo a_{2s} ovvero b_{2s}.

6. I moduli della moltiplicazione nei campi parziali.

Consideriamo l'unità reale 1. Essa, come ogni numero del sistema, può rappresentarsi sotto la forma

$$1 = \sum_r \mu_{1r} u_{1r} + \sum_s (\mu_{2s} + \mu'_{2s} g)\, u_{2s}. \qquad (4)$$

Per ottenere questa rappresentazione si ricorrerà alla decomposizione della frazione $\frac{1}{F(\xi)}$ in somma di funzioni semplici. Da questa decomposizione risulta che nessuna delle componenti può essere nulla, cioè che tutte le μ_{1r} sono diverse da zero e che non possono essere nulle contemporaneamente μ_{2s} e μ'_{2s}. Ciò può anche dimostrarsi così:

Se fosse $\mu_{1r} = 0$, moltiplicando ambo i membri di (4) per un numero arbitrario a_{1r} del campo C_{1r} si otterrebbe, per le formole (1), (2), (3),

$$a_{1r} = 0,$$

e però tutti i numeri del campo C_{1r} sarebbero nulli, ciò che è assurdo; e se fosse $\mu_{2s} = \mu'_{2s} = 0$, moltiplicando ambo i membri della (4) per un numero arbitrario a_{2s} del campo C_{2s}, si otterrebbe

$$a_{2s} = 0,$$

il che è pure assurdo.

Poniamo

$$v_{1r} = \mu_{1r} u_{1r}\,, \qquad v_{2s} = (\mu_{2s} + \mu'_{2s} g)\, u_{2s}\,; \tag{5}$$

la (4) diviene

$$1 = \sum_{r=1}^{k} v_{1r} + \sum_{s=1}^{l} v_{2s}\,. \tag{6}$$

TEOREMA. — *Le componenti dell'unità reale sono i moduli della moltiplicazione nei campi parziali.*

Difatti, moltiplicando ambo i membri di (6) per a_{1r} si ottiene

$$a_{1r} = v_{1r} a_{1r}\,, \tag{7}$$

e moltiplicando ambo i membri di (6) per a_{2s}, si ottiene

$$a_{2s} = v_{2s} a_{2s}\,. \tag{8}$$

In particolare

$$v_{1r}^{\,2} = v_{1r}\,, \qquad \tau_{2s}^{\,2} = \tau_{2s}\,. \tag{9}$$

7. Poichè nella prima delle (5) è μ_{1r} diverso da zero, può τ_{1r} assumersi come unità del campo C_{1r}, in luogo di τ_{1r}. In base poi alle proprietà di τ_{1r} [formola (7) e la 1ª delle formole (9)] si deduce subito che il campo C_{1r} non differisce dal campo dei numeri reali, tranne che per la rappresentazione dell'unità.

Se si vuole assumere come unità del campo C_{2s} il numero τ_{2s}, bisognerà assumere come seconda unità ogni altro numero $\bar{\tau}_{2s}$ del campo, purchè le sue coordinate non siano proporzionali alle coordinate di τ_{2s}; ciò è sempre possibile perchè le coordinate di τ_{2s} non sono entrambe nulle. Ciò posto, ogni numero di C_{2s} potrà esprimersi mediante τ_{2s} e $\bar{\tau}_{2s}$, e perciò sarà

$$\bar{v}_{2s} = \sigma_{2s} v_{2s} + \bar{\sigma}_{2s} \bar{v}_{2s}\,. \tag{10}$$

E poichè, come è noto,

$$v_{2s} = v_{2s}^{\,2}, \qquad \bar{v}_{2s} = \bar{v}_{2s} v_{2s}\,,$$

la (10) può scriversi anche così

$$\bar{v}_{2s}^{\,2} = \sigma_{2s} v_{2s} + \bar{\sigma}_{2s} \tau_{2s} \bar{\tau}_{2s}\,.$$

Donde

$$(\bar{v}_{2s} - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_{2s} v_{2s})^2 = (\tfrac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^{\,2} + \sigma_{2s})\, \tau_{2s}^{\,2}\,.$$

Il numero $\frac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^{\,2} + \sigma_{2s}$ dev'essere negativo. Infatti, se fosse nullo o positivo, risulterebbe nullo il prodotto dei due numeri, appartenenti allo stesso campo C_{2s},

$$\bar{v}_{2s} - (\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_{2s} - \sqrt{\tfrac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^{\,2} + \sigma_{2s}})\, v_{2s}\,, \quad \bar{v}_{2s} - (\tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_{2s} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^{\,2} + \sigma_{2s}})\, v_{2s}\,,$$

senza che lo sia uno almeno di essi (5, Teor. II).

Posto dunque

$$-\tau_{2s}^{\,2} = \tfrac{1}{4}\bar{\sigma}_{2s}^{\,2} + \sigma_{2s},$$

la (11) diventa

$$(\bar{v}_{2s} - \tfrac{1}{2}\bar{\sigma}_{2s} v_{2s})^2 = -\tau_{2s}^{\,2} v_{2s}^{\,2}, \tag{12}$$

e perciò, posto

$$w_{2s} = \frac{1}{\tau_{2s}} \frac{-}{v_{2s}} - \frac{\sigma_{2s}}{2\tau_{2s}} v_{2s},$$

si ha

$$w_{2s}^{\,2} = -v_{2s}. \tag{13}$$

Può evidentemente assumersi come unità del campo C_{2s} il numero w_{2s}, e allora ogni numero del campo può esprimersi mediante v_{2s} e w_{2s}.

La proprietà $v_{2s}^{\,2} = v_{2s}$, e la (13) permettono di concludere che il campo C_{2s} non differisce dal corpo dei numeri complessi ordinari, tranne che per la rappresentazione delle unità. Potremmo per es. porre

$$w_{2s} = i v_{2s}$$

con $i^2 = -1$, allora ogni numero a del sistema può mettersi sotto la forma

$$a = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s} i)\, v_{2s}.$$

Posto poi

$$b = \sum_{r=1}^{k} \beta_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\beta_{2s} + \beta'_{2s} i)\, v_{2s},$$

il prodotto ab risulterà dato da

$$ab = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{1r}\beta_{1r} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} (\alpha_{2s} + \alpha'_{2s} i)(\beta_{2s} + \beta'_{2s} i)\, v_{2s};$$

cioè le componenti del prodotto sono i prodotti delle componenti dei fattori.

La moltiplicazione risulta evidentemente associativa, commutativa, distributiva.

Il prodotto ab è nullo se sono nulle tutte le sue componenti e perciò, se nessuna delle componenti di b è nulla, deve essere nulla a.

Invece se qualcuna delle componenti di b è nulla, devono essere nulle tutte le componenti di a che corrispondono alle altre componenti di b. I divisori dello zero sono dunque tutti i numeri le cui componenti non sono tutte diverse da zero.

Se b non è un divisore dello zero, si ha

$$\frac{a}{b} = \sum_{r=1}^{k} \frac{\alpha_{1r}}{\beta_{1r}} v_{1r} + \sum_{s=1}^{h} \frac{\alpha_{2s} + i\alpha'_{2s}}{\beta_{2s} + i\beta'_{2s}} v_{2s}.$$

Dunque il sistema è un corpo commutativo.

Esso verifica inoltre all'ipotesi di Weierstrass che una equazione algebrica a coefficienti appartenenti al campo non può ammettere infinite radici se non quando i suoi coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero con moltiplicazione per numeri del campo.

Difatti, siano $a, b, \ldots, l$ numeri del sistema, e si voglia determinare un numero x tale che sia

$$a + bx + cx^2 + \ldots + lx^m = 0.$$

Se con $x_\mu, a_\mu, \ldots, l_\mu$ indichiamo le componenti di $x, a, \ldots, l$ nel campo C_μ (a una o a due dimensioni), allora l'espressione del primo membro dell'equazione nel campo C_μ ha la componente

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^m,$$

e però l'equazione si decompone nelle seguenti $k + h = r$ equazioni

$$a_\mu + b_\mu x_\mu + \ldots + l_\mu x_\mu^m = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots r).$$

Una equazione di questa forma, nella quale i coefficienti sono numeri reali o complessi ordinari ha infinite radici solo quando tutti i coefficienti siano nulli.

Quindi l'equazione (14) ammette infinite radici solo quando per un valore almeno di μ sia

$$a_\mu = b_\mu = \ldots = l_\mu = 0 .$$

Si supponga che ciò avvenga per gli ultimi $r - \rho$ valori di μ, e sia perciò

$$a = \sum_{\mu=1}^{\rho} a_\mu , \qquad b = \sum_{\mu=1}^{\rho} b_\mu , \ldots , \; l = \sum_{\mu=1}^{\rho} l_\mu .$$

Prendasi ora un numero

$$h = \sum_{\mu=1}^{\rho} h_\mu$$

dove h_μ è un numero di C_μ diverso da zero; potremo sempre determinare numeri $a', b', \ldots, l'$ tali che si abbia

$$a = ha', \qquad b = hb', \ldots , \; l = hl'.$$

Infatti sia a'_μ la componente di a'_μ in C_μ, allora è

$$ha' = \sum_{\mu=1}^{r} h_\mu a'_\mu$$

e quindi dev'essere $a'_\mu = \dfrac{h_\mu}{a_\mu}$ per $\mu = 1, 2, \ldots \rho$, mentre a'_μ per $\mu > \rho$ può assumersi arbitrariamente.

In modo analogo si determinano $b', \ldots, l'$. Quindi si ha che nel caso che l'equazione (14) ammetta infinite radici, i coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri del sistema.

Dunque il corpo commutativo considerato verifica all'ipotesi di Weierstrass.

Se dunque l'esistenza dei divisori dello zero non si vuole considerare come una sostanziale differenza fra l'aritmetica delle quantità complesse generali e quella delle quantità complesse ordinarie, e si vuole che una equazione algebrica possa ammettere infinite radici solo quando i suoi coefficienti si deducono da uno stesso divisore dello zero mediante moltiplicazione per numeri del sistema, si per-

viene ad un corpo le cui proprietà aritmetiche presentano molta analogia colle proprietà aritmetiche del corpo reale o del corpo dei numeri complessi ordinari, però la sua struttura e l'algoritmo stesso delle operazioni dimostra manifestamente l'inutilità della sua introduzione. *L'aritmetica di un tal corpo non può condurre ad alcun risultato che non si possa derivare senz'altro dalla teoria dei numeri reali o dei numeri complessi ordinari.*

Palermo, gennaio, 1905.

MICHELE CIPOLLA.

SOPRA LA RAPPRESENTAZIONE DELLE PROIETTIVITÀ
nello spazio a tre dimensioni

È noto che esistono ∞^3 proiettività tra due forme di prima specie sovrapposte. Esse formano una varietà lineare, la quale può essere quindi posta in relazione collo spazio ordinario. Mi propongo di studiare qui questa rappresentazione, notando poi in special modo le varietà ad una od a due dimensioni (linee o superfici) che corrispondono all'insieme delle proiettività aventi date particolarità.

1. Siano r, r' due forme di prima specie sovrapposte, e si stabilisca sul loro comune sostegno un sistema di coordinate proiettive di cui siano A_1, A_2 gli elementi fondamentali, E l'elemento unità.

L'equazione della più generale proiettività tra r ed r' quando siano x, x' le coordinate di due punti omologhi, sarà:

$$a_{11}x_1x_1' + a_{12}x_1x_2' + a_{21}x_2x_1' + a_{22}x_2x_2' = \sum_{i,k}^{1,2} a_{ik}x_ix_k = 0.$$

Ogni proiettività tra le due forme viene quindi a dipendere da quattro parametri omogenei a_{ik}, i quali possono evidentemente servire a stabilire la corrispondenza tra le proiettività e i punti dello spazio ordinario.

Basta per questo stabilire un sistema di coordinate proiettive nello spazio ordinario, e far corrispondere alla proiettività:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik}x_ix_k' = 0$$

il punto $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$.

2. Alla retta ed al piano dello spazio S_3, corrispondono due varietà lineari che potremo chiamare rispettivamente *sistemi lineari di proiettività di prima e di seconda specie,* o più brevemente *fascio e rete* di proiettività.

Della prima di queste varietà si può dare una proprietà assai semplice.

Se $\omega_1 \equiv (a_{ik})$, $\omega_2 \equiv (b_{ik})$ sono due proiettività del fascio, un'altra proiettività generica del fascio ha la forma:

$$\omega \equiv (\lambda a_{ik} + \mu b_{ik}),$$

ed è rappresentata dall'equazione

$$\lambda \Sigma a_{ik} x_i x'_k + \mu \Sigma b_{ik} x_i x'_k = 0,$$

la quale è sempre soddisfatta dalle coppie x_i, x'_i che annullano contemporaneamente le quantità $\Sigma a_{ik} x_i x'_k$, $\Sigma b_{ik} x_i x'_k$, cioè che corrispondono alle coppie comuni alle proiettività ω_1, ω_2. Queste coppie sono generalmente due, sicchè si conclude:

In generale, un fascio di proiettività è formato da tutte le proiettività che mutano due determinati elementi della forma r *in due elementi pure determinati dalla forma* r'.

Evidentemente poi, nei casi di eccezione si può dire:

Formano pure un fascio di proiettività tutte le proiettività aventi a comune una data coppia di elementi, e quella sola.

Simili deduzioni si possono fare nei casi in cui tutte le proiettività del fascio sono degeneri.

3. C'interessa ora indicare quali sono le proiettività fondamentali nel nostro sistema di coordinate proiettive.

Le $\Gamma_1 \equiv (1, 0, 0, 0)$, $\Gamma_4 \equiv (0, 0, 0, 1)$ sono involuzioni degeneri di cui i punti singolari sono rispettivamente A_1 e A_2; ciò si vede dalle loro equazioni

$$x_1 x'_1 = 0, \qquad x_2 x'_2 = 0.$$

Le $\Gamma_2 \equiv (0, 1, 0, 0)$, $\Gamma_3 \equiv (0, 0, 1, 0)$ di equazioni:

$$x_1 x'_2 = 0, \qquad x'_1 x_2 = 0$$

sono degeneri, non involutorie, e le loro coppie di elementi singolari sono (A_1, A_2), (A_2, A_1).

La $\Sigma \equiv (1, 1, 1, 1)$ di equazione:

$$x_1 x'_1 + x_1 x'_2 + x_2 x'_1 + x_2 x'_2 = (x_1 + x_2)(x_1' + x'_2) = 0$$

è degenere involutoria e il suo elemento singolare è il punto $(1, -1)$ coniugato armonico di E rispetto ad $A_1 A_2$.

Si noti a questo proposito la proiettività $I = (0, 1, -1, 0)$ o $(0, -1, 1, 0)$. La sua equazione:

$$x_1 x'_2 - x_2 x'_1 = 0$$

cioè

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x'_1}{x'_2}$$

mostra che la I muta in se stessi tutti i punti della forma cioè è la proiettività identica.

Se M è un punto qualunque dello spazio, la retta IM è evidentemente il luogo delle proiettività aventi per elementi uniti quelli di M.

Anche il piano unità:

$$a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$$

può avere una semplice caratterizzazione, in quanto, quando le a soddisfino a tale condizione, il punto $E \equiv (1, 1)$ è punto unito per la proiettività:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} x_i x'_k = 0;$$

E viceversa; sicchè tal piano è il luogo delle proiettività che ammettono E come punto unito. In particolare I vi appartiene.

4. I problemi che ora andremo risolvendo possono tutti comprendersi sotto l'enunciato seguente:

Determinare il luogo delle proiettività tra x *ed* x' *il cui invariante assoluto (birapporto dei punti uniti con due punti omologhi) è dato da* $\frac{\lambda}{\mu}\left(\text{o } \frac{\mu}{\lambda}\right)$.

È evidente che l'essere $\frac{\lambda}{\mu}$ o $\frac{\mu}{\lambda}$ il valore del birapporto non dipende che dall'ordine in cui si considerano i punti uniti.

Si supponga che in una tale proiettività siano (m_1, n_1), (m_2, n_2), (x_1, x_2), (x'_1, x'_2) i punti uniti e una coppia di punti omologhi.

L'equazione della proiettività sarà:

$$\left(\frac{m_1}{m_2}, \frac{n_1}{n_2}, \frac{x_1}{x_2}, \frac{x'_1}{x'_2}\right) = \frac{\lambda}{\mu},$$

che, ridotta alla forma:

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} x_i x_k = 0,$$

ci dà:

$$a_{11} \equiv (\lambda - \mu)\, m_2 n_2,\ a_{12} = \mu m_2 n_1, - \lambda m_1 n_2,$$
$$a_{21} = \mu m_1 n_2 - \lambda m_2 n_1,\ a_{22} = (\lambda - \mu)\, m_1 n_1.$$

Eliminando tra queste equazioni m_1, m_2, n_1, n_2, si avrà l'equazione del luogo cercato.

Si ottiene facilmente:

$$(\lambda + \mu)^2 a_{11} a_{22} = (\lambda a_{12} + \mu a_{21})(\lambda a_{21} + \mu a_{12}) \qquad (1)$$

equazione di secondo grado, che rappresenta quindi una quadrica, e che, come era prevedibile, non muta se $\frac{\lambda}{\mu}$ si cambia in $\frac{\mu}{\lambda}$.

5. Prima di passare ai diversi casi particolari, sarà bene dare alla (1) un'altra forma.

Si ha infatti sviluppando:

$$(\lambda + \mu)^2 a_{11} a_{22} = (\lambda^2 + \mu^2)\, a_{12} a_{21} + \lambda\mu\,(a^2_{12} + a^2_{21})$$

cioè:

$$(\lambda+\mu)^2(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})+\lambda\mu\,a_{12}-a_{21})^2=0,$$

che, posto

$$(\lambda+\mu)^2=\Lambda, \qquad \lambda\mu=M,$$

prende la forma:

$$\Lambda\,(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})+M\,(a_{12}-a_{21})^2=0. \tag{1'}$$

Si vede di qua che al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$ le quadriche rappresentate dalla (1) descrivono un fascio di quadriche. Inoltre poichè per $\Lambda=0$, $M=1$ si ottiene la quadrica:

$$(a_{12}-a_{21})^2=0,$$

che è degenere in un piano doppio, si vede anche che il fascio (1') è quello formato dalle quadriche tangenti alla

$$a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=0$$

nei punti della conica in cui essa vien segata dal piano $a_{12}-a_{21}=0$.

6. Ricerchiamo ora quali siano le quadriche del fascio che rappresentano alcune classi notevoli di proiettività.

a) Involuzioni. — Per esse può porsi $\lambda=1$, $\mu=-1$ e quindi $\Lambda=0$, $M=-1$. Si ottiene così la quadrica:

$$(a_{12}-a_{21})^2=0 \tag{2}$$

che, come abbiamo osservato si scinde in due piani coincidenti. Evidentemente esso è il piano $\Gamma_1\Gamma_4\Sigma$.

b) Proiettività degeneri. — $\lambda=0$, $\mu=1$ da cui $\Lambda=1$, $M=0$. Si ha la quadrica propria:

$$a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22}=0. \tag{3}$$

c) Involuzioni degeneri. — Sono rappresentate dai punti comuni alla quadrica (3) col piano doppio (2) cioè dai punti di una certa conica K, contata due volte, che non è altro che la curva base del fascio.

Poichè tali proiettività non hanno un determinato invariante assoluto, è naturale che esse siano comuni a tutte le quadriche del fascio.

d) Proiettività paraboliche. — Si può porre $\lambda=1$, $\mu=1$, e quindi $\Lambda=4$, $M=1$. Si ottiene il cono quadrico di equazione:

$$(a_{12}+a_{21})^2-4a_{11}a_{22}=0. \tag{4}$$

Il suo vertice è il punto $(0, 1, -1, 0)$, che come vedemmo rappresenta l'*identità* I. Ciò mette in luce la proprietà di essa di avere come punti uniti tutti i punti della forma, che corrisponde a quella di appartenere a tutte le generatrici del cono.

e) Proiettività cicliche di ordine n. — Si può porre $\frac{\lambda}{\mu} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, e quindi:

$$\lambda = e^{\frac{k\pi i}{n}}, \qquad \mu = e^{\frac{-k\pi i}{n}}$$

da cui:

$$A = 4\cos^2\frac{k\pi}{n}, \qquad M = 1.$$

L'equazione della quadrica corrispondente prende la forma:

$$4\cos\frac{k\pi}{n}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + (a_{12} - a_{21})^2 = 0 \qquad (5)$$

od anche, con la trasformazione $4\cos\frac{k\pi}{n} = 2 + 2\cos\frac{2k\pi}{2}$:

$$(a^2_{12} + a^2_{21} - 2a_{11}a_{22}) + 2\cos\frac{2k\pi}{n}(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = 0. \qquad (5')$$

Si ottengono così, poichè se $k \pm k' \equiv 0 \pmod n$ le quadriche corrispondenti coincidono, $\frac{k}{2}$ quadriche se k è pari, $\frac{k-1}{2}$ se k è dispari.

Volendo poi considerare le proiettività cicliche *propriamente* di ordine n, cioè tali che le loro prime $n-1$ potenze siano distinte, e la n^{esima} sia uguale alla prima, bisogna prendere solo i valori di k primi con n. Si avranno allora solo $\frac{\varphi(n)}{2}$ quadriche, se $n > 2$, una sola quadrica (il piano doppio (2)), se $n = 2$.

Si ha una sola quadrica anche se $n = 3, 4$; propriamente, per $n = 3$:

$$(a^2_{12} - a_{13}a_{21} + a^2_{31}) - a_{11}a_{23} = 0;$$

per $n = 4$:

$$a^2_{12} + a^2_{21} - 2a_{11}a_{22} = 0.$$

7. Sia $\Phi(\lambda, \mu)$ la quadrica luogo delle proiettività che hanno il birapporto $\frac{\lambda}{\mu}$.

Se consideriamo tutte le proiettività di una medesima generatrice u di Φ, per ciò che abbiamo già detto, esse avranno due coppie comuni (M, M'), (N, N'). Se poi X, Y sono i punti uniti di tale proiettività, presi in ordine conveniente, si ha sempre

$$(XYMM') = \frac{\lambda}{\mu};$$

ciò che prova che le coppie XY appartengono ad una proiettività, di cui sono M, M', gli elementi uniti. Poichè analogamente si dimostrerebbe che le stesse coppie, in questo od in altro ordine appartengono ad una proiettività di elementi uniti N, N', ne deriva evidentemente che la coppia (M, M') coincide con la coppia (N, N').

Inoltre la generatrice considerata incontri la conica K in ω; sarà ω un' involuzione parabolica, anzi la sola proiettività parabolica sulla u; per cui la coppia (M, M') si ridurrà ad un unico punto unito. Si consideri poi l'ulteriore generatrice di Φ passante per ω, e sia v; anche le proiettività giacenti su v avranno questo medesimo punto unito. Si può dunque enunciare il teorema:

Il luogo delle proiettività di invariante $\frac{\lambda}{\mu}$, *le quali hanno un determinato elemento unito, è dato dalle due generatrici della quadrica* $\Phi(\lambda, \mu)$ *che s'incontrano nel punto di* K *che ha quell'elemento come singolare.*

8. Più in generale, poichè al variare di $\frac{\lambda}{\mu}$ le generatrici u, v di $\Phi(\lambda, \mu)$ restano sempre nel piano tangente in ω a tutte le quadriche del fascio, ed inoltre per ogni punto di questo piano tangente passa una quadrica del fascio, si può dire anche:

Il luogo delle proiettività aventi un dato elemento unito è il piano tangente alle quadriche del fascio nel punto della conica K *avente come singolare l'elemento dato.*

9. Prima di terminare queste osservazioni sulle generatrici e sui piani tangenti di $\Phi(\lambda, \mu)$, consideriamo il caso particolare della quadrica $\Phi(0, 1)$ che contiene le proiettività degeneri e che ha l'equazione:

$$a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = 0.$$

Se ω è un punto di questa quadrica, aventi due certi elementi singolari X, Y, e si conduce in esso il piano tangente, che taglia la quadrica stessa nelle due generatrici u, v, sarà p. es. u formata di proiettività aventi l'elemento X come primo elemento singolare, v formato invece di proiettività di cui l'elemento Y è il secondo elemento singolare.

Sia τ un di punto uv diverso da ω. Per esso si tiri una retta che incontri u e v nei punti distinti τ_1, τ_2. Si vede subito che tanto τ_1, quanto τ_2 mutano X in Y e non hanno comuni altre coppie di elementi omologhi; per cui questa coppia e questa sola sarà comune a tutte le proiettività allineate con τ_1 e τ_2; quindi anche a τ. Poichè inoltre ad ogni piano tangente corrisponde in tal maniera una coppia di elementi della forma in un determinato ordine, si può enunciare il teorema:

Il luogo delle proiettività che mutano un determinato elemento X *in un altro elemento* Y *è in piano tangente alla quadrica* $\Phi(0, 1)$ *nel punto* ω *che rappresenta la proiettività di cui* X, Y *sono gli elementi singolari.*

Questo resultato comprende evidentemente quello enunciato nel § precedente.

10. Terminiamo questa breve esposizione coll'accennare a due casi di omografia nello spazio che hanno speciale significato riguardati come trasformazioni di proiettività.

Il primo caso si ha quando si applichi allo spazio una omologia armonica di cui sia I (l'identità) il centro, e il piano delle involuzioni il piano di omologia.

È evidente anzitutto che, poichè I è polo del piano di omologia rispetto a tutte le quadriche $\Phi(\lambda, \mu)$, questa omologia muta tra loro due punti della stessa quadrica allineati con I, cioè muta una proiettività in un'altra di uguale invariante e cogli stessi elementi uniti. Due proiettività omologhe non essendo generalmente identiche, dovranno essere l'una inversa dell'altra.

È naturale quindi che in tale omologia debbano essere uniti solo l'identità e le involuzioni. Si ha anche di qua il metodo più semplice per ottenere da una proiettività la sua inversa, e che stimo superfluo enunciare.

11. Il secondo caso risulta quando, essendo ω una proiettività non degenere, si fa corrispondere τ il suo prodotto $\tau\omega$ colla ω. Dimostriamo anzitutto che tale corrispondenza è una proiettività. Essa è biunivoca; muta punti, rette e piani in punti, rette e piani; lascia inalterate le relazioni di appartenenza.

Infatti, se la τ descrive una retta, essa muta sempre (in generale) due certi elementi A, B in due determinati elementi A', B'. La ω muti poi A', B' in A'', B''; la $\tau\omega$ muterà allora A, B in A'', B'', e quindi descriverà anche essa una retta.

Si abbiano poi due rette a, b che s'incontrino e quindi determinino un certo piano α. Le proiettività di a abbiano in comune due coppie A, A'; B, B'; quella di b due coppie c, c'; D, D'. Perchè le due rette si incontrino bisogna che sia ABCD $\overline{\wedge}$ A'B'C'D'. Nella nostra corrispondenza, ad $a.b$ corrisponderanno due rette a_1, b_1 che s'incontreranno e determineranno un piano α_1.

Un punto situato su α, cioè situato su di una retta appoggiantesi ad a e b, verrà mutato in un punto situato su di una retta incidente ad a_1, b_1 cioè situata su α_1.

Senza insistere di più, è ora evidente che sono verificate tutte le condizioni perchè la nostra corrispondenza sia proiettiva.

I punti uniti di essa non potranno corrispondere che a proiettività degeneri. Se X, Y sono punti singolari di una tal proiettività, la τ muta X in ogni punto della forma; la ω mantiene tale corrispondenza. Inoltre la τ muta ogni elemento della forma in Y; questo vien dalla ω mutato p. es. in Y_1; sicchè perchè τ sia unita bisogna che Y_1 sia elemento unito di ω. Ciò basta; sicchè generalmente i punti uniti saranno distribuiti su due rette sghembe, generatrici della quadrica $\Phi(1, 0)$ delle proiettività degeneri. L'omografia sarà *biassiale*.

12. Termino qui questo breve saggio, notando solo che lo stesso metodo può condurre alle rappresentazioni delle omografie e delle correlazioni tra forme di 2ª e 3ª specie, ed anche in generale di n^a specie, sovrapposte mediante gli elementi di uno spazio lineare a 8,

15, $n(n+2)$ dimensioni rispettivamente; come pure, osservando che la nostra rappresentazione delle involuzioni su di un piano ci riporta a quella notissima delle coppie di punti, sul piano stesso; mentre nelle forme di 2ª specie, la geometria delle polarità piane, che verrebbero rappresentate nello spazio a 9 dimensioni in una varietà lineare a 5 dimensioni, ci ricondurrebbe alla geometria delle coniche di un piano, svolta specialmente dal Segre e dal Veronese. Ed alla conica K luogo delle involuzioni degeneri, corrisponderebbero qui, a seconda del grado di degenerazione, due varietà, una delle quali è la V_3^4 detta superficie di Veronese.

GUIDO ASCOLI.

METODO INDIRETTO PER LA RICERCA DEI MASSIMI E MINIMI

di una funzione di variabile reale (1)

TEOREMA. — *Data una funzione* y *della variabile reale* x, *se la funzione inversa* x *della variabile* y *non è reale in un intorno* $(y_1-\varepsilon_1, y_1)$ *a sinistra di* y_1 *e reale in un intorno* $(y_1, y_1+\varepsilon_2)$ *a destra e inoltre, posto* $y_1 = y(x_1)$, *la* y *è continua nel punto* x_1 *allora* y_1 *è un minimo di* y.

Infatti, poichè y è continua in x_1, se σ è un numero reale positivo minore di ε_1 e di ε_2, esiste un intorno di x_1 per tutti i punti x del quale è $|y-y_1|<\sigma$ e quindi $y_1-\varepsilon_1<y<y_1+\varepsilon_2$, segue allora che questi stessi valori di y sono anche maggiori di y_1, perchè se fossero minori, per l'ipotesi fatta, ad essi non corrisponderebbero valori di x; y_1 è perciò un minimo.

OSSERVAZIONE 1ª. — È ovvio il teorema analogo che si riferisce al massimo.

OSSERVAZIONE 2ª. — L'enunciato del teorema precedente suppone evidentemente che la funzione y sia univalente, ovvero che si consideri un ramo univalente della funzione che passa per (x_1, y_1); così che, quando si voglia far la ricerca dei massimi e minori di una funzione col metodo indicato dal teorema stesso, converrà anzitutto decomporre la funzione in rami univalenti.

OSSERVAZIONE 3ª. — Se la funzione x di y è plurivalente ed è per es. $y_1 = y(x_1)$ ed $y_1 = y(x^{(1)})$ allora bisognerà distinguere l'uno dall'altro i valori y_1 che provengono dai due valori x_1 ed $x^{(1)}$, potendo l'uno e non l'altro essere massimo o minimo.

---

(1) Quando diremo massimi o minimi intenderemo parlare di massimi e minimi relativi.

COROLLARIO. — *Se la funzione inversa* x *di* y *è continua, a meno di* poli, *negli intervalli* $(y_1\ y'_1), (y_2, y'_2), \ldots, (y_n, y'_n)$ *mentre in ogni altro intervallo non è reale, e inoltre, posto* $y_1 = y(x_1)$, $y'_1 = y(x'_1), \ldots$, *la* y *è continua nei punti* $x_1, x'_1, \ldots$, *allora gli estremi inferiori di detti intervalli sono minimi della* y, *e i superiori massimi, e non vi sono altri massimi nè minimi.*

La prima parte è conseguenza del teorema dimostrato.

Per ciò che riguarda la seconda osserviamo che:

1°. I punti nei quali x non è reale non sono nè massimi nè minimi, perchè non sono valori assunti da y.

2°. I punti nei quali x è infinita non sono nè massimi nè minimi perchè sono i $\lim_{x=a} y$, e ai quali non è applicabile la definizione di massimo o minimo.

3°. I punti nei quali la x è continua non possono essere nè massimi nè minimi. Infatti sia x continua in y_1, posto $x_1 = x(y_1)$, se y fosse p. es. massima in x_1 esisterebbe un intorno di x_1: $(x_1 - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2)$ per tutti i punti x del quale sarebbe $y < y_1$, e quindi a valori di y maggiori di y_1 non corrisponderebbero valori di x nel detto intervallo; ma poichè x è continua in y_1 esiste un intorno di y_1 (e quindi valori maggiori di y_1) per tutti i punti y del quale risulti $|x - x_1| < \eta$, indicando con η un numero reale positivo minore di ε_1 e di ε_2, cioè a valori di y maggiori di y_1 corrispondono valori di x dell'intervallo $(x_1 - \varepsilon_1, x_1 + \varepsilon_2)$; l'ipotesi è adunque assurda.

APPLICAZIONE. — La funzione y definita da un'equazione del tipo

$$\varphi_1(y)\, x^2 + \varphi_2(y)\, x + \varphi_3(y) = 0, \qquad (1)$$

nella quale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sono funzioni univalenti e reali e

$$S = \overline{\varphi_2(y)}^2 - 4\varphi_1(y)\,\varphi_3(y)$$

è una funzione razionale intera, (1) può avere massimi e minimi dati dalla seguente:

REGOLA. — Posto

$$S = (ay^2 + by + c)(a_1y^2 + b_1y + c_1)\ldots (a_ky^2 + b_ky + c_k)(y - y_1)^{p_1}(y - y_2)^{p_2}\ldots(y - y_m)^{p_m},$$

dove le $y_1, y_2, \ldots, y_m$ si suppongono distinte e disposte in ordine crescente, se p_r è dispari e $p_{r+1} + p_{r+2} + \ldots + p_m$ è dispari (pari) y_r è massimo o minimo (minimo o massimo) secondo che $a \cdot a_1 \ldots a_k \gtrless 0$, (2) ben inteso per quei rami univalenti, dei quali si compone y, ai quali appartiene y_r e che sono continui in x_r.

---

(1) E quindi può imaginarsi decomposta in fattori reali di secondo grado a discriminante negativo e in fattori reali di primo grado.

(2) Il segno di un trinomio a discriminante negativo è sempre quello del coefficiente del termine di 2° grado.

Infatti se p. es. p_r e $p_{r+1}+p_{r+2}+\ldots+p_m$ sono entrambi dispari ed $a\,.\,a_1\ldots a_k>0$ la funzione inversa $x=\dfrac{-\varphi_2\pm\sqrt{S}}{2\varphi_1}$ è reale in un intorno a sinistra di y_r e non reale intorno a destra; perchè x è reale qnando $S>0$, complessa quando $S<0$.

Osservazione 1ª. — Le radici reali di S, cioè $y_1, y_2, \ldots y_m$ sono sufficienti a determinare gli intervalli di realtà per la x, e quindi se in questi intervalli x è continua (il che succede se sono continue $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, a meno di poli dati dalle radici della $\varphi_1=0$); la y non ha altri massimi o minimi relativi oltre quelli dati dalla regola precedente.

Inoltre il massimo dei valori che soddisfanno l'inequazione $S\geqslant 0$ sarà il massimo assoluto di y, il minimo dei detti valori sarà il minimo assoluto.

Osservazione 2ª. — Non si possono avere due massimi consecutivi perchè, supposto $a\,.\,a_1\,.\,a_2\ldots a_k>0$, se p_r e $p_{r+1}+p_{r+2}+\ldots+p_m$ sono entrambi dispari, e quindi y_r è massimo, e inoltre p_{r-1} è dispari: $p_{r+2}+\ldots$ è pari e quindi y_{r+1} è minimo, se invece p_{r-1} è pari: $p_{r+2}+\ldots$ e dispari, e quindi se p_{r+2} è dispari: $p_{r+3}+\ldots$ è pari e perciò y_{r+2} è minimo, e così via.

Analogamente, non si possono avere due minimi consecutivi.

Osservazione 3ª. — Se $y_r=y(x_r)$ è un massimo (minimo) di un ramo univalente della funzione defininita dalla (1), e il ramo stesso è continuo in un intervallo (a, b) al quale appartiene x_r, allora y_r è il massimo (minimo) assoluto di quel ramo nell'intervallo (a, b).

Infatti poichè y_r è un massimo esiste un intorno di x_r, poniamo $(x^{(0)}, x^{(1)})$ per tutti i punti x del quale compresi gli estremi è $y<y_r$; siano $y^{(0)}$ ed $y^{(1)}$ i valori di y corrispondenti agli estremi, e supponiamo $y^{(1)}>y^{(0)}$ (il che è lecito per la continuità della y). Ancora per la continuità della y, vi sono due punti x'_1, x''_1, uno a sinistra e l'altro a destra di x_r, [1] nei quali la y assume uno stesso valore y_1 compreso tra $y^{(1)}$ ed y_r.

Ciò posto se nell'intervallo (a, b) si suppone l'esistenza di un punto x_s a destra di x_r e tale che, posto $y_s=y(x_s)$, sia $y_s\geqslant y_r$, essendo la y continua in (a, b) e quindi nell'intervallo $(x^{(1)}, x_s)$, [2] in questo intervallo vi è un punto y_1''' nel quale la y assume il valore y_1. Ma allora la y assumerebbe lo stesso valore y_1 per tre valori x'_1, x''_1, x'''_1 di x, cioè l'equazione (1) avrebbe tre radici, mentre è di secondo grado in x. Analogamente si prova che non può esistere un punto come x_s alla sinistra di x_r e nell'intervallo (a, b).

Nello stesso modo si dimostra il teorema relativo al minimo.

---

[1] E nell'intervallo $(x^{(0)}, x^{(1)})$.

[2] Supponiamo, come è lecito, che $x^{(1)}$ sia a sinistra di x_s.

COROLLARIO. — *Dall'osservazione precedente si trae facilmente, che, non si possono avere due valori di* x *l'uno di massimo e l'altro di minimo col minimo maggiore del massimo e senza che tra i valori stessi di* x *vi sia un punto di discontinuità per la* y.

OSSERVAZIONE 4ª. — I valori di massimo o di minimo si ottengono sostituendo il massimo o minimo nella espressione $-\frac{\varphi_2(y)}{2\varphi_1(y)}$.

Dott. ANTONIO BINDONI.

PICCOLE NOTE

I. — **Sugli integrali definiti di una funzione finita.**

È noto che

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a = 1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{1.2}+\dots \qquad (1)$$

se a è una costante finita. Sia ora $\mu(x)$ una funzione determinata finita e integrabile nell'intervallo $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$ ($\alpha < \beta$; α, β costanti); indicheremo con M il limite superiore dei suoi valori assoluti. Divideremo l'intervallo dato in n intervalli parziali $\delta_i^{(n)}$ ($i = 1\,2 \dots n$); e sia $\delta^{(n)}$ il più grande di questi intervalli. Supporremo

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad \delta^{(n)} < \frac{H}{n} \quad \text{ossia} \quad n\delta^{(n)} < H \quad \text{ossia} \quad n[\delta^{(n)}]^2 < \frac{H^2}{n} \qquad (2)$$

dove H è una costante finita indipendente da n. Indicheremo con $\mu_i^{(n)}$ una quantità compresa tra il limite inferiore e il limite superiore (oppure anche uguale a uno di questi due limiti) di μ in $\delta_i^{(n)}$. Io dico che

$$\lim_{n=\infty} \prod_{i=1}^{n} [1 + \delta_i^{(n)} \mu_i^{(n)}] = e^{\int_\alpha^\beta \mu(x)dx} \qquad (3)$$

ossia che (si ricordi che, se il numero n è abbastanza grande, $\log(1 + \delta_i^{(n)} \mu_i^{(n)})$ è reale)

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \log(1 + \delta_i^{(n)} \mu_i^{(n)}). \qquad (4)$$

La (4) *si potrebbe assumere come una nuova definizione dell'integrale di una funzione* $\mu(x)$; *la* (3) *è una ampia generalizzazione di* (1); infatti, ponendo in essa $\mu = \frac{\alpha}{\beta - \alpha}$, $\delta_i^{(n)} = \frac{\beta - \alpha}{n}$, essa si riduce precisamente alla (1). (1)

(1) Un caso particolare di questa formula fu da me trovato a proposito di alcune mie ricerche sulle equazioni differenziali (Circolo Matematico di Palermo 1903). La (4) si potrebbe generalizzare, ponendo

$$\int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi(1 + \delta_i^{(n)} \mu_i^{(n)})$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione tale che $\lim_{\varepsilon=0} \frac{\varphi(1+\varepsilon)}{\varepsilon} = 1$ ecc. ecc.

DIMOSTRAZIONE. — Dalla (1) si ha

$$e^{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = 1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} + A_i^{(n)} \qquad (5)$$

dove è

$$A_i^{(n)} = (\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)})^2\left(\frac{1}{1.2} + \frac{\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}}{1.2.3} + \ldots\right)$$

e quindi

$$|A_i^{(n)}| < |\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}|^2 e^{M\delta^{(n)}}. \qquad (6)$$

Dalla (5) si ha

$$e^{\sum_{i=1}^{n}\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}} = \prod_{i=1}^{n}(1 + \delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)}) + B'^{(n)} \qquad (7)$$

dove è per la (6)

$$|B^{(n)}| = \left|\sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} e^{\sum_{k=1}^{n}\mu_k^{(n)}\delta_k^{(n)} - \mu_i^{(n)}\delta_i^{(n)}}\right| < n(\delta^{(n)})^2 M^2 e^{M\delta'^{(n)}} e^{(n-1)M\delta_{(n)}}.$$

E per le (2) avremo dunque

$$|B^{(n)}| < \frac{H^2M^2}{n} e^{MH} \qquad \text{donde} \qquad \lim_{n=\infty} B^{(n)} = 0. \qquad (8)$$

Ma

$$\lim_{n=\infty}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^{(n)}\mu_i^{(n)} = \int_\alpha^\beta \mu(x)\,dx.$$

Quindi dalla (7), passando al limite per $n = \infty$, otteniamo appunto [in virtù della (8)] la formola (3), che ci eravamo proposti di dimostrare.

GUIDO FUBINI.

II. — **Determinazione delle quadrisecanti di una quaterna di rette** *(nel metodo delle proiezioni centrali).*

Il prof. Loria in un suo articolo pubblicato in questo giornale (serie II, volume IV, pag. 289) dà una notevole soluzione del problema della ricerca delle quadrisecanti di una quaterna di rette. Poichè fra le soluzioni più comuni non vedo citata la soluzione che qui esporrò e che d'altra parte non ho trovata esplicitamente in alcun testo di Descrittiva, mi permetto di esporla in poche parole, quantunque per la semplicità del principio su cui si fonda essa si presenti spontaneamente.

Le due rette che si appoggiano a certe quattro rette date (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) sono le intersezioni delle due rigate;

$d_1^{(2)}$ determinata dalle rette (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2) come direttrici

$d_2^{(2)}$ " " " (A_1, A_2), (B_1, B_2), (D_1, D_2) " "

I punti A_1, B_1, C_1 sono intanto traccie di tre rette di $d_1^{(2)}$; di più se conduco p. es. per B_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, A_2C_2 fino ad incontrarsi in A'_1, e per A_1, C_1 rispettivamente le parallele alle A_2B_2, B_2C_2 fino ad incontrarsi in B'_1 ho nei punti A'_1, B'_1 le traccie di altre due rette di $d_1^{(2)}$, e precisamente di quelle rette che hanno rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga.

Analogamente si possono determinare le traccie A''_1, B''_1 delle due rette di $d_2^{(2)}$ aventi ancora rispettivamente A_2 e B_2 per punti fuga; di altre tre rette di $d_2^{(2)}$ si conoscono già le traccie A_1, B_1, D_1.

Allora le ulteriori intersezioni delle due coniche determinate, l'una dai punti $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1$, l'altra dai punti $A_1, B_1, D_1, A''_1, B''_1$ sono le traccie delle quadrisecanti richieste, e non è difficile trovare i relativi punti di fuga.

Se già si conoscesse una quadrisecante (S_1S_2) il punto S_1 si può sostituire tanto a B'_1 quanto a B''_1 nella determinazione delle due coniche prima nominate.

GUIDO TOGNOLI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 666, 682, 684, 685, 686 E 687

666. *Essendo dati due circoli* c *e* c′ *si consideri la parabola* π *di parametro costante* p *il cui vertice è situato su* c *e l'asse è tangente a* c, *e la parabola* π′ *di parametro costante* p′ *il cui vertice è situato su* c′ *e l'asse è tangente a* c′.

Dimostrare che, se gli assi di π *e* π′ *sono perpendicolari, il luogo del centro del circolo che passa per i quattro punti comuni alle due parabole* π *e* π′ *si compone di otto* conchiglie di Pascal.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Definizioni: 1ª. Con $\overrightarrow{AB}$ intenderemo che la *direzione positiva* stabilita sulla retta $\overline{AB}$ è quella diretta da A verso B; per *senso positivo di rotazione* di una retta di un piano intorno a un punto della retta stessa intenderemo quello contrario al movimento delle lancette d'un orologio.

2ª. L'angolo $\widehat{AOB}$ sarà quello descritto dalla semiretta $\overline{OA}$ quando ruota intorno ad O nel senso positivo per venire a sovrapporsi alla semiretta $\overline{OB}$.

3ª. Se t è la tangente a un cerchio di centro O in un suo punto A stabiliremo che la *direzione positiva* sulla t è quella che viene a coincidere col senso positivo $\overrightarrow{OA}$ della retta $\overline{OA}$ quando la tangente t ruotando intorno ad A di un angolo retto e nel senso positivo viene a sovrapporsi alla retta $\overline{OA}$.

I. — Sieno C e C′ i centri di c e c'; V un punto variabile di c; V'_1 e V'_2 gli estremi del diametro di c' perpendicolare alla retta $\overline{CV}$; t, t'_1, t'_2 rispettivamente le tangenti a c in V ed a c' in V'_1 e V'_2. Ciò posto è evidente che esistono sei parabole $\pi, \pi'_1, \pi'_2, -\pi, -\pi'_1, -\pi'_2$ tali che le prime tre hanno rispettivamente per vertici i punti V, V'_1, V'_2 per parametri p, p', p' per assi le rette t, t'_1, t'_2 e sono dirette secondo le direzioni positive di queste tre rette (v. Def. 3ª), mentre le ultime tre parabole hanno rispettivamente gli stessi vertici, parametri ed assi delle precedenti ma sono dirette in senso contrario. Si devono dunque distinguere i seguenti otto casi

$$(\pi, \pi'_1);\ (\pi, \pi'_2);\ (\pi, -\pi'_1);\ (\pi, -\pi'_2);\ (-\pi, \pi'_1);\ (-\pi, \pi'_2);\ (-\pi, -\pi'_1);\ (-\pi, -\pi'_2)$$

che si ottengono combinando una parabola di vertice V con una di vertice V'_1 o V'_2.

Nel § seguente considereremo però solo il primo caso (π, π'_1) dal quale dedurremo poi gli altri sette.

II. — Scegliamo la $\overrightarrow{CC'}$ per asse delle X e la perpendicolare a $\overline{CC'}$ nel suo punto di mezzo O per asse delle Y, sul quale sceglieremo per direzione positiva quella che coincide col senso positivo dell'asse delle X quando questo viene a sovrapporsi all'asse delle Y ruotando intorno ad O nel senso positivo e di un angolo retto. Questo sistema di assi lo indicheremo con (Γ).

Sia $C \equiv (-a, 0)$, $C' \equiv (a, 0)$; per C e C′ conduciamo due semirette parallele alla direzione positiva dell'asse delle Y; esse incontreranno i cerchi c e c' rispettivamente in H ed H′.

Indichiamo poi con (γ) la coppia di assi cartesiani ortogonali che si ottiene assumendo la retta t con la sua direzione positiva (v. Def. 3ª) per asse delle x o la CV per quello delle y.

L'equazione di π, riferita al sistema di assi (γ), è evidentemente

$$y^2 - 2px = 0; \qquad (1)$$

inoltre, essendo r il raggio di c e posto $\widehat{VCH} = \alpha$, le coordinate di O rispetto al sistema di assi (γ) sono

$$x = a\cos\alpha, \qquad y = a\,\mathrm{sen}\alpha - r;$$

quindi passando dal sistema (γ) al sistema (Γ) le formule di trasformazione saranno

$$\begin{cases} x = X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\alpha + a\cos\alpha, \\ y = X\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\alpha - r; \end{cases}$$

perciò la (1) diventa

$$\varphi = (X\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha + a\,\mathrm{sen}\alpha - r)^2 - 2p\,(X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\alpha + a\cos\alpha) = 0. \qquad (2)$$

Analogamente, essendo r' il raggio di c' ed osservando che $\widehat{V_1CH'} = 90^0 + \alpha$, dalla (2) si deduce l'equazione di π'_1 riferita al sistema (Γ) cambiando in essa a in $-a$, p in p', r in r' ed α in $90^0 + \alpha$. Essa è

$$\psi = (X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\alpha - a\cos\alpha - r')^2 + 2p'\,(X\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha - a\,\mathrm{sen}\alpha) = 0. \qquad (3)$$

Le parabole (2), (3) determinano il fascio di coniche

$$\varphi + \lambda\psi = 0$$

nel quale a $\lambda = 1$ corrisponde un cerchio. Indicando con X, Y le coordinate del centro di detto cerchio, avremo

$$\begin{cases} X = a\cos 2\alpha + (r - p')\,\mathrm{sen}\alpha + (r' + p)\cos\alpha, \\ Y = -a\,\mathrm{sen}\,2\alpha + (r - p')\cos\alpha - (r' + p)\,\mathrm{sen}\alpha, \end{cases}$$

donde si ricava

$$\begin{cases} (X + a)\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha = r - p', \\ -Y\,\mathrm{sen}\alpha + (X - a)\cos\alpha = r' + p, \end{cases}$$

dalle quali, eliminando α, risulta l'equazione del luogo

$$[(r - p')(X - a) - (r' + p)\,Y]^2 + [(r' + p)(X + a) + (r - p')\,Y]^2 = (X^2 + Y^2 - a^2)^2 \qquad (4)$$

che rappresenta evidentemente una *quartica bicircolare*. La (4) si può trasformare nella seguente

$$(X^2 + Y^2 - a^2)\,[X^2 + Y^2 - a^2 - (r - p')^2 - (r' + p)^2] = \\ = 2a\left\{[(r' + p)^2 - (r - p')^2]X + 2(r - p')(r' + p)\,Y + [(r - p')^2 + (r' + p)^2]\,a\right\},$$

e ponendo

$$r - p' = d_1\,\mathrm{sen}\tfrac{1}{2}\varphi_1, \qquad (5) \qquad\qquad r' + p = d_1\cos\tfrac{1}{2}\varphi_1, \qquad (6)$$

essa diventa

$$(X^2 + Y^2 - a^2)(X^2 + Y^2 - a^2 - d_1^2) = 2ad_1^2\,(X\cos\varphi_1 + Y\,\mathrm{sen}\varphi_1 + a). \qquad (7)$$

La retta

$$X\cos\varphi_1 + Y\,\mathrm{sen}\varphi_1 + a = 0 \qquad (8)$$

è tangente al cerchio c'' di diametro $\overline{CC'}$ e d'equazione

$$X^2 + Y^2 - a^2 = 0$$

nel punto $O_1 \equiv (-a\cos\varphi_1, -a\,\mathrm{sen}\varphi_1)$; avremo dunque per le (5), (6)

$$d_1 = +\sqrt{(r-p')^2+(r'+p)^2}, \quad \text{e} \quad \widehat{COO_1} = \varphi_1 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{r-p'}{d_1} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\frac{r'+p}{d_1}. \ (^1)$$

Assumiamo la $\overrightarrow{O_1O}$ per nuovo asse delle ξ e la retta rappresentata dalla (8), cioè la tangente in O_1 a c'' con la sua direzione positiva stabilita mediante la Def. 3ª, per asse delle η. Allora le formule di trasformazione saranno

$$\begin{cases} X = \xi\cos\varphi_1 - \eta\,\mathrm{sen}\varphi_1 - a\cos\varphi_1, \\ Y = \xi\,\mathrm{sen}\varphi_1 + \eta\cos\varphi_1 - a\,\mathrm{sen}\varphi_1, \end{cases}$$

e quindi la (7) diventa

$$(\xi^2+\eta^2-2a\xi)^2 = d_1^2(\xi^2+\eta_1^2).$$

Conclusione. — La curva luogo che indicheremo con Σ_1 è la *chiocciola di Pascal* concoide di c'' rispetto al polo O_1 ed al segmento addizionale d_1.

III. — Essendo O_2, O_3, O_4 punti di c'', poniamo

$$d_2 = +\sqrt{(r+p')^2+(p-r')^2}, \qquad \widehat{COO_2} = \varphi_2 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{r+p'}{d_2} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\frac{p-r'}{d_2};$$

$$d_3 = +\sqrt{(r+p')^2+(r'+p)^2}, \qquad \widehat{COO_3} = \varphi_3 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{r+p'}{d_3} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\frac{r'+p}{d_3};$$

$$d_4 = +\sqrt{(r-p')^2+(p-r')^2}, \qquad \widehat{COO_4} = \varphi_4 = 2\,\mathrm{arc\,sen}\frac{r-p'}{d_4} = 2\,\mathrm{arc\,cos}\frac{p-r'}{d_4};$$

e chiamiamo Σ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ la *chiocciola di Pascal* concoide di c'' rispetto al polo O_i ed al segmento addizionale d_i, e Σ'_i quella simmetrica di Σ_i rispetto alla retta $\overline{CC'}$. Ciò posto esaminiamo gli altri sette casi del nostro problema.

2°. — (π, π'^2). Si ha: $\widehat{V'_2CH'} = 270^0 + \alpha$; l'equazione di π'_2 rispetto alla coppia di assi (Γ) si può dedurla dalla (2) cambiando in essa a in $-a$, p in p', r in r' ed α in $270^0+\alpha$. Tale equazione è

$$(X\cos\alpha - Y\,\mathrm{sen}\alpha - a\cos\alpha + r')^2 - 2p'(X\,\mathrm{sen}\alpha + Y\cos\alpha - a\,\mathrm{sen}\alpha) = 0$$

la quale diffesisce dalla (3) per i segni di r' e di p'. Per ottenere l'equazione del luogo bisognerà quindi cambiar segno a p' ed r' nei risultati del 1° caso (§ II). Si trova che il luogo è la Σ_2.

3°. — $(\pi, -\pi'_1)$. Bisogna cambiar segno a p' nei risultati del 1° caso (§ II). Il luogo è la Σ_3.

4°. — $(\pi, -\pi'_2)$. Bisogna cambiar segno a p' nei risultati del 2° caso. Il luogo è la Σ_4.

5°, 6°, 7°, 8°. — $(-\pi, \pi'_1)$, $(-\pi, \pi'_2)$, $(-\pi, -\pi'_1)$ e $(-\pi, -\pi'_2)$. Bisogna cambiar segno a p rispettivamente nei risultati ottenuti nel 1°, 2°, 3° e 4° caso. I luoghi sono rispettivamente le chiocciole di Pascal Σ'_4, Σ'_3, Σ'_2 e Σ'_1.

IV. — Esaminiamo alcuni casi particolari notevoli.

$r = p'$, $r' = p$. — Σ_4 e Σ'_4 degenerano nel cerchio c''. Gli altri luoghi rimangono sempre conchiglie di Pascal.

$a = 0$. — I cerchi c e c' hanno il centro in O; Σ_i e Σ'_i degenerano nel cerchio di centro O e raggio d_i e nel punto O (doppio).

---

(1) Si considerano solo archi positivi (v. Def. 2ª): inoltre è evidente che queste eguaglianze, come anche le altre analoghe che stabiliremo in seguito, forniscono un solo valore per φ_1 (e sarà quello che noi sceglieremo) tale che sia $0^0 \leqq \varphi_1 < 360^0$. Il punto O_1 di c'' resta dunque univocamente determinato.

$r = r' = 0$. — I luoghi Σ_1, Σ_4, Σ'_3, Σ'_2 coincidono in un'unica conchiglia di Pascal; quindi coincideranno anche Σ'_1, Σ'_4, Σ_3, Σ_2 in una conchiglia simmetrica della precedente rispetto a $\overline{CC'}$; quando si ha

$$p^2 + p'^2 - 4a^2 = 0$$

le due conchiglie diventano due cardioidi.

$p = p' = 0$. — I luoghi Σ_1, Σ_3, Σ'_4, Σ'_2 e gli altri Σ'_1, Σ'_3, Σ_4, Σ_2 coincidono rispettivamente in due conchiglie uguali e simmetriche rispetto a $\overline{CC'}$. Questo caso è notissimo; esso oltrechè essere una specializzazione del nostro problema lo è anche del seguente

Teorema. — *La curva descritta dal vertice di un angolo costante che si muove con continuità in un piano mantenendo sempre i suoi lati tangenti rispettivamente a due circonferenze date è una* chiocciola di Pascal. (1)

$p = p' = r = 0$. — I luoghi vengono tutti a coincidere con la podaria di c' rispetto al polo C, o altrimenti, con la concoide di c'' rispetto al polo C e al segmento addizionale r'.

$p = p' = r' = 0$. — Caso analogo al precedente.

$p = p' = r = r' = 0$. — I luoghi degenerano tutti nel cerchio c''. Dà questo caso si deduce il noto

Teorema. — *Il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati passano per due punti fissi* C *e* C' *è il circolo di diametro* $\overline{CC'}$.

682. *Calcolare l'integrale*

$$I = \int \sqrt{\sqrt{4x+a} - (2x-a)}\,.\,dx.$$

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini R. U. di Pavia.

Si ha

$$\sqrt{4x+a} - (2x-a) = \tfrac{1}{2}\,[3a+1-(\sqrt{4x+a}-1)^2],$$

$$dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x+a}\,.d\,(\sqrt{4x+a}-1),$$

e ponendo

$$\sqrt{3a+1} = \alpha, \qquad \sqrt{4x+a} = z+1,$$

avremo

$$2\sqrt{2}\,I = \int (z+1)\sqrt{\alpha^2-z^2}\,dz = \int z\sqrt{\alpha^2-z^2}\,dz + \int \sqrt{\alpha^2-z^2}\,dz.$$

Si ha

$$\int z\sqrt{\alpha^2-z^2}\,dz = -\tfrac{1}{2}\int \sqrt{\alpha^2-z^2}\,d\,(\alpha^2-z^2) = -\tfrac{1}{3}\,(\alpha^2-z^2)\sqrt{\alpha^2-z^2} + c_1,$$

$$\int \sqrt{\alpha^2-z^2}\,dz = \int (z\,dz)\sqrt{\frac{\alpha^2}{z^2}-1} = \tfrac{1}{2}\,z^2\sqrt{\frac{\alpha^2}{z^2}-1} +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2-z^2}} = \tfrac{1}{2}\,z\sqrt{\alpha^2-z^2} + \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{z}{\alpha} + c_2;$$

quindi

$$2\sqrt{2}\,I = [\tfrac{1}{2}\,z - \tfrac{1}{3}\,(\alpha^2-z^2)]\sqrt{\alpha^2-z^2} + \tfrac{1}{2}\,\alpha^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{z}{\alpha} + c_3,$$

e definitivamente,

$$I = -\tfrac{1}{12}\,[\sqrt{4x+a} - 4\,(2x-a) + 3]\sqrt{\sqrt{4x+a}-(2x-a)} +$$

$$+ \frac{3a+1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc\,sen}\frac{\sqrt{4x+a}-1}{\sqrt{3a+1}} + c_4.$$

(1) V. p. es. E. Pascal, *Repertorio*, II, pag. 763.

684. *Il luogo dei centri delle coniche che passano per i fuochi di un'ellisse e sono tangenti ad essa in un punto dato, è un'iperbole.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Lemma. — *Il luogo dei centri delle coniche di un fascio*

$$\varphi + \lambda\psi = 0 \qquad (1)$$

è una conica.

Infatti le equazioni

$$\varphi'_x + \lambda\psi'_x = 0\,, \qquad \varphi'_y + \lambda\psi'_y = 0$$

rappresentano due diametri della (1); eliminando tra esse il parametro λ si ottiene l'equazione del luogo il quale è la conica

$$\varphi'_x\psi'_y - \psi'_x\varphi'_y = 0\,.$$

Con facili considerazioni geometriche si vede che tale conica passa per i punti diagonali e per i punti medi dei lati del quadrangolo base del fascio.

Ora se F, F' sono i fuochi dell'ellisse data e t è la tangente in un suo punto P, tutte le coniche tangenti all'ellisse in P e passanti per F, F' formano evidentemente un fascio; il luogo richiesto è quindi l'iperbole che passa per P, per i punti medi dei lati del triangolo PFF' e per il punto $(t, \overline{FF'})$.

685. *Si considerino due cerchi fissi* c *e* c' *di centri* O *ed* O', *e un diametro* $\overline{AB}$ *di* c. *Essendo* P *la proiezione di un punto* M *di* c *sul diametro* $\overline{AB}$, *si descriva il circolo* γ *che ha per centro* M *e per raggio la media geometrica tra il raggio del circolo* c *e la lunghezza* $\overline{OP}$ (o $\overline{MP}$). *Dimostrare che l'asse radicale di* γ *e* c' *inviluppa una conica.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Scegliamo $\overline{OA}$ per asse delle x e la normale ad $\overline{OA}$ in O per asse delle y. Sia $M = (x, y)$; r il raggio di c; $\sqrt{rx}$ quello di γ e

$$X^2 + Y^2 + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0$$

l'equazione di c'. Quella di γ sarà

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 - rx = 0\,.$$

Tenendo conto che

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (1)$$

l'equazione (in X, Y) dell'asse radicale di γ e c' è

$$(2X + r)\,x + 2Yy + \alpha X + \beta Y + \gamma - r^2 = 0\,,$$

ossia

$$Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

essendo

$$A = 2X + r\,, \qquad B = 2Y\,, \qquad C = \alpha X + \beta Y + \gamma - r^2\,.$$

Dalle (1), (2) derivando rispetto ad x e y risulta rispettivamente

$$x\,dx + y\,dy = 0\,, \qquad A\,dx + B\,dy = 0;$$

dalle quali eliminando dx e dy risulta

$$Bx - Ay = 0\,. \qquad (3)$$

Eliminando x e y tra le (1), (2), (3), si ottiene l'equazione dell'inviluppo della (2), che è la conica

$$C^2 - r^2(A^2 + B^2) = 0\,.$$

Nel caso che il raggio di γ sia $\sqrt{ry}$ la dimostrazione è analoga.

686 *Essendo* O *il vertice,* a *l'asse e* d *l'assintoto di una "versiera di Agnesi„ e* T *il punto di contatto di una delle tangenti condotte da* O *alla curva, dimostrare che la parallela ad* a *condotta per* T *divide l'area compresa tra la curva e le rette* a *e* d *in due parti equivalenti. Si cerchi anche di dividere in due parti equivalenti l'area suddetta per mezzo di una retta parallela a* d.

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

Sia C il centro ed r il raggio del circolo generatore della versiera; $A \equiv (d, a)$. Sceglieremo rispettivamente la $\overrightarrow{CA}$ per asse delle x e la perpendicolare a $\overline{CA}$ in C per quello delle y. Allora l'equazione della versiera sarà

$$\varphi = y^2 (r - x) - r^2 (r + x) = 0. \qquad (1)$$

1.° Calcoliamo l'integrale indefinito $I = \int y dx$. Si ha

$$I = r \int \sqrt{\frac{r+x}{r-x}}\, dx = r \int \frac{x\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \\ + r^2 \int \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = - r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} + C;$$

quindi l'area compresa tra la curva e le rette a e d è data da

$$I^{x}_{-r} = \left[- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \right]^{r}_{-r} = \pi r^2.$$

2°. La tangente condotta nel punto generico (x, y) alla (1) ha per equazione

$$(X - x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,$$

cioè

$$- (y^2 + r^2)(X - x) + 2y (r - x)(Y - y) = 0.$$

Questa retta passa per $O = (-r, 0)$ quando

$$y^2 (3x - r) + r^2 (r + x) = 0. \qquad (2)$$

Dalle (1), (2) si ricava $(x_{1,2} = -r,\ y_{1,2} = 0)$, $(x_{3,4} = 0,\ y_{3,4} = \pm r)$; quindi i punti di contatto delle tangenti condotte da O alla curva sono

$$O = (-r, 0);\ T = (0, r);\ T' = (0, -r).$$

Dunque l'area compresa tra la curva, le rette a e d e la parallela per T ad a sarà

$$I^{0}_{-r} + r^2 = \left[- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} \right]^{0}_{-r} + r^2 = \tfrac{1}{2} \pi r^2 \qquad \text{c. d. d.}$$

3°. Volendo dividere in due parti equivalenti l'area compresa tra la curva e le rette a e d con una retta parallela a d si dovrà determinare una x tale che sia

$$I^{x}_{-r} = \tfrac{1}{2} \pi r^2;$$

vale a dire

$$- r \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r} = 0,$$

donde

$$\cos \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}.$$

Si tratta quindi di risolvere l'equazione

$$\cos z = z.$$

687. *Dimostrare che la retta avente per equazione*

$$2\lambda(\lambda+\mu)x+(\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu+a^2)y-a(\lambda^2-\mu^2-2\lambda\mu)=0, \qquad (1)$$

essendo i parametri λ *e* μ *legati dalla relazione*

$$\lambda^2+\mu^2=b^2, \qquad (2)$$

inviluppa una conica. Quando a *varia questa conica inviluppa una quartica, e quando* b *varia questa quartica inviluppa tre rette, una delle quali è doppia ed è assintotica alla quartica.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. Gandini, R. U. di Pavia.

La (1) la possiamo scrivere così

$$(x+y-a)(\lambda^2-\mu^2)+2(x+y+a)\lambda\mu+(\lambda^2+\mu^2)x+a^2y=0. \qquad (3)$$

La (2) equivale alle seguenti posizioni:

$$\lambda=b\cos\theta, \qquad \mu=b\operatorname{sen}\theta,$$

tenendo conto delle quali, la (3) diventa

$$b^2(x+y-a)\cos 2\theta+b^2(x+y+a)\operatorname{sen}2\theta+b^2x+a^2y=0; \qquad (4)$$

la (4) derivata rispetto a θ diventa

$$(x+y+a)\cos 2\theta-(x+y-a)\operatorname{sen}2\theta=0. \qquad (5)$$

Eliminando θ tra le (4), (5) si ottiene l'inviluppo della (1). Esso è la conica

$$(b^2x+a^2y)^2-2b^4[(x+y)^2+a^2]=0. \qquad (6)$$

L'inviluppo della (6), quando a varia, è la quartica

$$b^4-2b^2xy+2y^2(x+y)^2=0,$$

la quale, variando b, inviluppa le tre rette (una doppia)

$$y^2=0, \qquad \sqrt{2}(x+y)\pm x=0.$$

QUISTIONI PROPOSTE

695. Determinare il luogo geometrico dei punti del piano di un triangolo tali che le rette che congiungono le loro proiezioni sui lati con i vertici opposti siano concorrenti, e determinare anche il luogo dei punti d'incontro di quest'ultime.

696. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè le congiungenti i vertici d'un tetraedro con i punti di contatto delle facce opposte colle rispettive sfere ex-inscritte passino per un medesimo punto.

E. Piccioli.

697. Trovare una curva piana tale che il circolo circoscritto al triangolo formato da una retta data, dalla tangente e dalla normale in un punto variabile della curva, sia tangente alla retta che unisce questo punto con un punto fisso della retta data.

698. Trovare una curva piana tale che due rette fisse del piano tra loro perpendicolari stacchino rispettivamente sulla normale e sulla tangente in un suo punto variabile due segmenti che stiano tra loro in un rapporto costante K.

A. GANDINI.

BIBLIOGRAFIA

M. D'OCAGNE. — *Le Calcul simplifié;* 1905, pag. VI-228. — Gauthier-Villars, Ed.

I numeri governano il mondo, disse Platone, *ma senza divertirlo,* ha aggiunto qualcuno; e siccome la sentenza del grande allievo di Socrate si avvera sempre più col crescere della civiltà e la necessità dei calcoli non si presenta più ai cultori delle scienze esatte soltanto, ma anche, e più largamente, ai naviganti, agli artiglieri, agli elettricisti, agli ingegneri, agli strateghi,... è naturale che cresca sempre più il desiderio, anzi il bisogno, di semplificare, di abbreviare o, magari, di sopprimere addirittura ogni specie di calcolo grafico o numerico. (1)

Nè si deve pensare che questo bisogno sia meno sentito da chi abbia una estesa cultura matematica, perchè è una vera eresia il credere che la disposizione alle matematiche sia accompagnata da una notevole abilità al calcolo numerico. Nella storia dei matematici illustri due soli, che io sappia, ebbero veramente questa abilità: Eulero e Wallis, quest' ultimo specialmente che giunse a calcolare *a mente* la radice quadrata di un numero qualunque di cinquanta cifre. Come eresia, senza dubbio maggiore, è quella di credere che una grande abilità al calcolo numerico sia indizio di disposizione alle matematiche; e ben se ne accorsero quelli che tentarono di educare i Mondeux, i Mangiamelli, gli Inaudi... tutti sterili prodigi, che il Lucas, a ragione, chiama " machines aritmétiques a grosse tête ". (2)

Per raggiungere lo scopo accennato, fin dalla più remota antichità si cominciò ad immaginare dei mezzi più o meno adatti; nessuno però, fino a pochi anni fa, aveva pensato a raccogliere e a classificare tutti questi varî, numerosissimi, modi di semplificazione. Fu solo nel 1894 che il prof. d'Ocagne, nome già noto ai cultori delle Matematiche Pure, pubblicò in un fascicolo di un centinaio di pagine (3)

---

(1) L'illustre generale Menabrea, che fu anche un fine uomo di stato e un matematico egregio, aggiungeva: " Quante osservazioni rimangono inutili al progresso delle scienze solo perchè non " si è avuta la forza sufficiente per calcolarne i risultati! Davanti a un lungo e arido calcolo, da " quanto scoraggiamento si sente preso l'uomo di genio, il quale non domanda che del tempo per " meditare e se lo vede rubato dalla materialità delle operazioni. Ma è solo per la laboriosa via " dell'analisi che egli deve arrivare alla verità, ed ei non la può seguire senza essere guidato dai " numeri, perchè senza i numeri non è possibile sollevare, neppure in parte, il velo che nasconde " i misteri della natura ".

(2) Anche a me capitò, qualche anno fa, di assistere agli esperimenti di uno di questi prodigi. Era un certo Pierini di Pomarancia (del quale ho perduto ogni traccia), anch'esso guardiano di pecore come i tre citati. Ebbene, in una *intervista* che ebbi con lui, dopo i suoi esperimenti, non mi fu possibile fargli capire che, invece di moltiplicare per 25, per 125 . . . , conveniva meglio dividere per 4, per 8 . . . , e moltiplicare poi il quoziente per 100, per 1000 . . . , o, meglio ancora, moltiplicare per 5, due, tre . . . , volte di seguito.

(3) *Le Calcul Simplifié.* — Ed. Gauthier-Villars. Parigi, 1904.

tre sue dottissime conferenze (tenute in forma elementare, al Conservatorio Nazionale d'Arti e Mestieri), nelle quali a grandi linee è tracciato tutto quanto di notevole si è fatto in proposito. Quel fascicolo, com' era da aspettarsi, ebbe fortuna e l'A. ha dovuto ora pubblicarne una seconda edizione; però le aggiunte e le maggiori spiegazioni son tante che il fascicolo si è trasformato in un volume di più di duecento pagine, e lo ha pubblicato la Ditta Gauthier-Villars, nella sua splendida *Bibliothèque général des Sciences.*

E noi crediamo far cosa utile accennando brevemente al contenuto di questo pregevolissimo volume, perchè speriamo che così nascerà in molti il desiderio di conoscerlo; e ci auguriamo che anche in Italia sorga qualche forte cultore di questo importante ramo delle Matematiche Applicate, al quale l'illustre fondatore della *Nomografia* ha dedicata, da tanti anni, la sua feconda operosità.

L'A. comincia col classificare nei seguenti sei gruppi i mezzi in discorso:
1°. *Gli istrumenti aritmetici;*
2°. *Le macchine aritmetiche;*
3°. *Gli istrumenti e le macchine logaritmiche;*
4°. *Le tavole numeriche;*
5°. *Il calcolo grafico;*
6°. *Le tavole grafiche;*

Degli *istrumenti aritmetici* ben poco c' è da dire; l'unico notevole, dopo i famosi *bastoni* di Nepero, è quello, recentissimo, costituito dalle *réglettes* dell'ingegnere Genaille, che permette di semplificare molto sensibilmente le ordinarie moltiplicazioni.

Delle *macchine aritmetiche* invece c' è da dire moltissimo e l'A. ne fa uno studio assai esteso e, crediamo, quasi completo. Comincia colle macchine per addizionare, da quella di Pascal (primo esempio che si possa citare di una macchina da calcolare) fino alle macchine a tasti americane, e, principalmente, a quelle ingegnose casse registratrici, proprie ad assicurare meccanicamente il funzionamento di una azienda commerciale.

Il capitolo delle macchine per moltiplicare è senza dubbio, uno dei più interessanti del libro. Comincia con qualche indicazione sulla macchina di Leibniz, (1) molto notevole dal punto di vista teorico, ma che è rimasta allo stato di curiosità scientifica. Poi, dopo avere passato in rivista i tentativi fatti sulla stessa via da Hahn, da Müller, da Mahon e da Stern, arriva all'*aritmometro* di Thomas, il quale ha costituita la prima soluzione, pienamente soddisfacente, del problema della moltiplicazione e di cui l'A. dà una descrizione molto dettagliata e interessantissima. L'organo essenziale di questa macchina, comune con quella di Leibniz, è il tamburo a nove denti di ineguale lunghezza, che si trova anche nelle macchine di Maurel, di Edmondson e di Tchebichef. Anche di quest'ultima, che offre la particolarità di essere a movimento continuo, l'A. dà una descrizione completa e dettagliata, deducendola da notizie attinte dalla bocca stessa di Tchebichef. Passa in seguito alle macchine, il cui organo essenziale non è più il tamburo a denti di varia grandezza, ma una ruota con un numero di denti variabile. Una ruota di questo genere si trova per la prima volta nella macchina per addizionare di Poleni; (2) si ritrova poi nella macchina circolare di Roth, ma essa non ha presa una forma veramente soddisfacente che nella macchina di Odhner, quella che è chiamata la *Brunswiga* in Germania e la *Rapide* in Francia, e che, molto perfezionata dal punto di vista meccanico, (3) si costruisce dai fratelli Cha-

(1) Leibniz, per costruire la sua macchina, spese cento mila lire; e questo nell'anno 1673.

(2) Il nome di questo nobile veneziano, che visse due secoli fa, è il solo nome italiano che figuri nella storia delle macchine aritmetiche e logaritmiche. Potrebbero però in quest'ultima, figurare anche quello del Castigliano, e specialmente del Porro, inventori di due notevoli aritmografi.

(3) Dello stesso tipo ci sembrano le recentissime *Monopol;* esse, fra altri vantaggi, presentano anche quello di essere messe in movimento dalla mano sinistra del calcolatore, il quale ha così la destra libera per trascrivere di mano in mano i risultati.

tean sotto il nome di *Dactyle*. (1) Infine, fra questo gruppo di macchine per moltiplicare con ripetute addizioni, l'A. mette anche quelle a contatto intermittente, i tipi principali delle quali si hanno nelle macchine di Dietzschold, di Grant, e di Selling. Ma la prima macchina per moltiplicare direttamente fu esposta solo nel 1889 da un giovane di 18 anni, Leone Bollée; (2) essa è un capolavoro di meccanica. Il principio sul quale è basata è poi stato applicato, sotto una forma differente, anche da Steiger.

Per la costruzione delle tavole numeriche, l'A. accenna alle macchine a differenze, che furono ideate per la prima volta dal Müller, e che furono poi realizzate, per le differenze seconde, da Babbage e, per le differenze quarte, da Scheutz e da Wiberg. Queste ultime servono, oltre che a calcolare, anche a stampare, e con esse si sono già stampate delle tavole logaritmiche.

L'A. termina il suo importantissimo studio accennando al grande progetto, disgraziatamente non realizzato, della macchina analitica di Babbage, colla quale si sarebbe potuta effettuare qualunque serie di operazioni su numeri qualunque.

Nel capitolo seguente *(gli istrumenti e le macchine logaritmiche)*, dopo una digressione molto semplice, ma molto interessante, sulla storia e sulla teoria dei logaritmi, l'A. enumera e descrive tutti gli istrumenti (regoli, circoli, eliche . . .,) fondati sul loro uso, per terminare colla notevolissima macchina di Torres, per risolvere le equazioni.

Gli altri due capitoli, sulle *tavole numeriche* e sui *calcoli grafici*, non contengono che rapide, ma interessanti, indicazioni.

Nell'ultimo capitolo finalmente, sulle *tavole grafiche*, l'A. comincia collo stabilire la perfetta autonomia del *calcolo nomografico;* poscia con rapidi e magistrali cenni, dà una esatta idea della genesi della Nomografia. Passa quindi ad esporre, sempre in forma semplicissima e servendosi del linguaggio ordinario, i principî più usuali di questa dottrina: metodo cartesiano di Ponchet; anamorfismo semplice di Lalanne; anamorfismo generale di Massau; abbachi esagonali di Lallemand; e, finalmente, punti allineati a una e a due quote, la cui geniale idea fu forse quella che spinse l'A. a fondare la Nomografia.

Giunto però alla fine del suo lavoro (pieno anche di preziose citazioni bibliografiche), l'A. si chiede se tanta ricchezza di procedimenti per evitare i calcoli numerici corrisponda realmente a una necessità pratica e se era necessario moltiplicare così le soluzioni di un problema, in apparenza sempre lo stesso. E la breve risposta che Egli si dà, dimostra appunto che questa ricchezza corrisponde alla diversa specie di calcoli che si presentano nelle diverse applicazioni, e, aggiungiamo noi, anche alle diverse condizioni materiali in cui si possono trovare i diversi calcolatori.

E concluderemo dicendo che solo chi non si è mai trovato nella necessità di dover fare lunghi calcoli numerici di uno stesso tipo o di dover frequentemente servirsi di una stessa formula, variandone i dati, può non apprezzare l'utilità delle macchine da calcolare e degli abbachi; e può trovar giusto quanto asseriva un nostro illustre professore, il quale, reduce da una delle prime esposizioni di Parigi, parlandoci delle macchine aritmetiche che egli vi aveva viste, argutamente concludeva: " però la miglior macchina per calcolare è sempre quella costituita da un pezzo di carta e da un lapis „.

G. Pesci.

---

(1) Per nostra esperienza personale possiamo asserire che la macchina *Thomas* ci pare preferibile alla *Dactyle*, perchè affatica molto meno il braccio e perchè il suo prezzo è sensibilmente minore.

(2) Questo nome è poi diventato celebre, non però come quello di un meraviglioso e precoce inventore, sibbene come quello di un fortunato e ardito automobilista.

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 5 aprile 1905

LE DEFINIZIONI GENERALI IN MATEMATICA

(Continuazione e fine v. fasc. precedente)

Aritmetica.

12. Non si deve definire il numero intero; invece si definiscono generalmente le operazioni sui numeri interi; credo che gli allievi imparino queste definizioni a mente e non vi annettano senso alcuno. Ciò dipende da due ragioni: prima di tutto vengono insegnate loro troppo presto, mentre l'intelletto loro non ne prova ancora bisogno alcuno; in secondo luogo tali definizioni non sono soddisfacenti dal punto di vista logico. Quanto all'addizione non se ne potrebbe trovare una buona, semplicissimamente perchè occorre fermarsi ed è impossibile definir tutto. Non è definir l'addizione dire che consiste in aggiungere. L'unica cosa fattibile consiste nel partire da un certo numero d'esempî concreti e dire: l'operazione che abbiamo fatta si chiama addizione.

Quanto alla sottrazione è un'altra cosa; si può definirla logicamente come l'operazione inversa dell'addizione; ma occorre cominciare di là? Anche lì bisogna principiare con esempî, mostrare sopra esempî la reciprocità delle due operazioni; la definizione sarà così preparata e giustificata.

È lo stesso anche per la moltiplicazione; si prenderà un problema speciale; si mostrerà che si può risolverlo addizionando fra loro molti numeri eguali; si dimostrerà poi che si arriva più facilmente al risultato con una moltiplicazione, operazione che gli allievi sanno già fare per pratica, e la definizione logica ne conseguirà naturalmente.

Si definirà la divisione come operazione inversa della moltiplicazione; ma si principierà con un esempio tolto dalla nozione familiare dello spartire, e si dimostrerà con quest'esempio che la moltiplicazione riproduce il dividendo.

13. Ho già parlato delle frazioni; ho detto che si comincia colla torta, e si fa bene; è proprio di lì che si deve principiare. Poco dopo si spingerà l'astrazione più oltre, e si introdurrà la grandezza continua che ha per prototipo la lunghezza; occorre mostrare (dico mostrare, mostrare agli occhi e, beninteso, non dimostrare) che è divisibile all'infinito, ed il resto andrà da sè. Quanto alle definizioni più sottili, a quelle puramente aritmetiche, bisogna abbandonarle all'insegnamento superiore, se si vuole occuparsene.

Rimangono le operazioni sulle frazioni. Non vi è difficoltà che per la moltiplicazione. È meglio esporre prima la teoria delle proporzioni; è solo da essa che potrà nascere una definizione logica; ma per fare accettare le definizioni che si incontrano al principio di questa teoria, bisogna prepararle con frequenti esempî, tolti ai problemi classici della regola del tre, in cui si avrà cura d'introdurre alcuni dati frazionarî. Non si temerà neppure di familiarizzare gli studenti colla nozione delle proporzioni mediante le immagini geometriche, sia rivolgendosi alle loro rimembranze, se hanno già fatto studî geometrici, sia ricorrendo all'intuizione diretta, se non ne hanno fatti, cosa d'altronde che ve li preparerà. Aggiungerò, finalmente, che dopo definita la moltiplicazione delle frazioni, bisogna giustificare tale definizione dimostrando com'essa sia commutativa, associativa e distributiva, e facendo bene osservare all'uditorio che si fa questa constatazione per giustificare la definizione.

14. Per definire il numero incommensurabile, bisogna nuovamente prender le mosse dalla nozione di grandezza continua; e, tra queste grandezze, scegliere un esempio, che può essere solo la lunghezza. Proveremo che certe lunghezze possono esprimersi mediante numeri commensurabili; che altre nol possono, ma sono legate alle prime da relazioni d'inegnaglianza. Sapete come tali ineguaglianze permettono di definire i rapporti incommensurabili di modo che si sarà con tutta naturalezza condotti alla definizione del numero incommensurabile. Sarà bene scegliere un esempio, in cui l'impossibilità di scegliere una comune misura possa dimostrarsi facilmente, tale l'esempio classico di $\sqrt{2}$.

Per le operazioni sui numeri incommensurabili bisogna giustificarne in due modi le definizioni; prima dal punto di vista logico, dimostrando che soddisfanno le stesse regole di quelle de' numeri interi; eppoi con imagini concrete, che si potranno prendere dalla geometria. Non sono difficili a trovarsi. Nel libro di Hilbert si trova un intero capitolo che è una vera aritmetica illustrata. Ho fatto dianzi le mie riserve su detto libro, ma vi è da prendervi molto. Del resto, poichè il numero incommensurabile non dev'esser definito che a studenti già progrediti negli studi, essi comprenderanno subito queste imagini.

15. Passiamo ai numeri negativi; occorrono qui maggiori precauzioni. Si moltiplicheranno prima gli esempî di grandezze suscettibili di cambiamenti di segno, come i segmenti, gli angoli, il tempo, la temperatura, e si faranno su tali esempî gli esercizî di addizione e sottrazione. Il termometro è a 4 gradi sotto zero, aumenta o cala di 6 gradi, che diviene la temperatura? ecc. Così preparata, la definizione dei numeri negativi, quella della loro addizione e sottrazione sarà facilmente accettata. Quella della moltiplicazione si riduce in ultima analisi alla regola dei segni; tale regola sarà compresa, se la giustificate in due modi: 1° logicamente, dimostrando che soddisfa alla legge commutativa e distributiva; 2° con esempî concreti; e di simili esempî ne vorrei due specie: prima esempî geometrici presi nella teoria delle proporzioni e della similitudine, e che saranno il seguito di quelli già visti a proposito degli incommensurabili; eppoi esempî tolti ai movimenti uniformi: sono i più atti a dare una ragione concreta della regola dei segni.

Si vede quale parte fanno in tutto questo le imagini geometriche; e questa parte è giustificata dalla filosofia e dalla storia della scienza. Se l'aritmetica fosse rimasta pura da ogni mescolanza colla geometria, non avrebbe conosciuto che il numero intero; è stato per adattarsi ai bisogni della geometria che ha inventato altre cose.

Geometria.

16. In geometria si incontra prima di tutto la nozione di linea retta. È possibile definire la linea retta? La definizione conosciuta, il cammino più corto da un punto all'altro non mi soddisfa affatto. Partirei puramente dalla *riga*, e mostrerei prima all'allievo come si possa verificare una riga col rovesciamento; questa verificazione è la vera definizione della linea retta; la linea retta è un asse di rotazione. Gli si insegnerebbe poi a verificare la riga con uno scorrimento, e si otterrebbe una delle più importanti proprietà della linea retta. Quanto a quell'altra proprietà d'essere il cammino più corto da un punto all'altro, è un teorema che può venir dimostrato apoditticamente, ma la dimostrazione è troppo delicata per poter trovare posto nell'insegnamento secondario. È meglio insegnare che una riga precedentemente verificata si applica sopra un filo teso. Non occorre temere, in presenza di analoghe difficoltà, di moltiplicare gli assiomi, giustificandoli con esperienze grossolane.

Di questi assiomi, bisogna pure ammetterne, e se ne ammettiamo un po' più di quanto sia strettamente necessario, il male non è troppo grande; l'essenziale è di imparare a ragionare giustamente sugli assiomi una volta ammessi. Lo zio Sarcey, cui piaceva ripetersi,

diceva spesso che al teatro lo spettatore accetta volentieri tutti i postulati che gli vengono imposti sul principio, ma che una volta alzato il sipario, diviene intransigente quanto alla logica. Ebbene, è lo stesso per le matematiche.

Per il circolo, si può partir dal compasso; gli allievi riconosceranno immediatamente la curva tracciata; si farà poi osservar loro che la distanza tra i due punti dello strumento rimane costante, che una di queste punte è fissa e l'altra mobile, e si sarà così naturalmente condotti alla definizione logica.

La definizione del piano implica un assioma, e non bisogna dissimularlo. Si prenda una tavola da disegno e si faccia osservare che una riga mobile si applica costantemente su detta tavola, e ciò conservando due gradi di libertà. Si potrebbe comparare col cilindro e il cono, superficie sulle quali non si potrebbe applicare una retta altro che lasciandole un solo grado di libertà; poi si prenderebbero tre tavole da disegno; si mostrerebbe prima che possono scorrere rimanendo applicate l'una sull'altra, e ciò con tre gradi di libertà; e finalmente per distinguere il piano dalla sfera, che due di queste tavole, applicabili sopra una terza, sono applicabili l'una sull'altra.

Vi meraviglierete forse di questo continuo uso di strumenti mobili; non è questo un volgare artificio, ed è molto più filosofico di quanto sulle prime si crederebbe. Cos'è la geometria pel filosofo? È lo studio di un gruppo, e di qual gruppo? di quello de' movimenti dei corpi solidi. Come allora definire questo gruppo senza far muovere alcuni corpi solidi?

17. Dobbiamo conservare la definizione classica delle parallele e dire che si chiamano così due rette che, poste sul medesimo piano, non si incontrano per quanto si prolunghino? No, perchè tale definizione è negativa, perchè non può esser verificata coll'esperienza e non potrebbe quindi venir considerata come un dato immediato dell'intuizione. No, specialmente perchè è totalmente estranea alla nozione di gruppo, alla considerazione del movimento de' corpi solidi, che è, come ho detto, la vera fonte della geometria. Non sarebbe meglio definir prima la traslazione rettilinea di una figura invariabile, come un movimento in cui tutti i punti di quella figura hanno traiettorie rettilinee; mostrare che una traslazione simile è possibile, facendo scorrere una squadra sopra una riga? Da tal constatazione sperimentale, elevata ad assioma, sarebbe facile fare uscire la nozione di parallele e lo stesso postulato d'Euclide.

Quanto al libro terzo, non esiterei nel dare all'ometetia la precedenza sulla similitudine, e nel considerare quasi sul principio la trasformazione omotetica in tutta la sua generalità. Nell'esposizione delle teorie geometriche, bisogna evitare che i teoremi sembrino come isolati gli uni dagli altri e mostrar bene il filo che li unisce. Ora,

ogni libro della geometria è lo studio di un gruppo di trasformazioni; i teoremi non si succedono a caso; si susseguono in ordine sempre eguale; se mi permettete di usare un linguaggio ben differente da quel che occorrerebbe nell' insegnamento, bisogna sempre determinare la struttura del gruppo ed i suoi invarianti. È quindi questo gruppo il legame apparente o nascosto di tutti i teoremi di un medesimo libro; senza pronunziare la grande parola gruppo, è facile lasciarla intravedere. Nei libri precedenti, considerammo solo il gruppo degli spostamenti di un corpo solido. Nel terzo si considera il gruppo delle omotetie e quello delle similitudini; è meglio principiar dal primo che è il più semplice. L'uso del pantografo darà un esempio concreto di trasformazione omotetica, che penetrerà facilmente nello spirito dei giovani e vi resterà.

Ho detto che la massima parte delle definizioni matematiche sono vere costruzioni. Quindi non è meglio far prima la costruzione, eseguirla davanti agli allievi, o meglio ancora farla loro costruire in modo da preparare la definizione?

18. Si deve ora parlare dei volumi e delle superfici? È troppo presto, poichè per comprendere la definizione logica, bisogna sapere il calcolo integrale; non è però troppo presto poichè giungiamo al quarto libro.

Che fare allora? bisogna fare come abbiamo sempre fatto fin qui; bisogna astenersi da ogni definizione del volume e della superficie; i ragazzi credono sapere cos'è, e non chiedono nulla. Ci si contenterà d'ennnciare sotto forma d'assiomi queste due proposizioni che sono in realtà una vera definizione: che due aree, composte di parti uguali ciascuna a ciascuna, hanno ugual superficie; che la superficie di una parte di un'area è più piccola della superficie dell'area totale. E lo stesso è dei volumi.

Calcolo differenziale.

19. Vi sono due modi di iniziare lo studio del calcolo differenziale, quello di Lagrange, che è in fondo quello di Newton, e quello di Leibniz. Occorre, beninteso, conoscer l'uno e l'altro, ma da quale bisogna principiare, e quando convien parlare per la prima volta dell'uno o dell'altro? Su questo punto si è molto variato; ai miei tempi l'insegnamento secondario conosceva solo le derivate, e non si parlava di differenziali che alla Scuola Politecnica. Dopo, seguendo le fluttuazioni dei programmi della Scuola Politecnica, la notazione differenziale ha invaso le classi speciali; ne è stata poi bandita, e finalmente ne ha, or non è molto, ripreso possesso. Bisogna senza

dubbio aspettarsi nuovi flussi e riflussi. Ma quali che siano queste variazioni, vi sono alcuni principî ai quali dobbiamo serbarci fedeli.

Si è spesso sedotti dall'alto senso filosofico della notazione differenziale, che ricorda continuamente la definizione, il significato profondo dei simboli che si devono adoperare. Ahimè! li ricorda troppo, e meglio sarebbe ricordarli meno che rammentarli imperfettamente, ed esporci quindi all'errore. Tali errori non si eviteranno che cercando di dimenticare il primitivo significato dei simboli. Così quando ho una funzione z di x e di y, x ed y essendo esse stesse funzioni di u e di v, scrivo:

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = \frac{dz}{du}\,du + \frac{dz}{dv}\,dv$$

e, in questa formula, ha cinque volte il simbolo dz ed ogni volta con un significato diverso. So bene che si possono adoperare d rotondi, ma che palliativo insufficiente! non occorrerebbero due forme di d; ce ne vorrebbero cinque, ce ne vorrebbero dieci.

E sarebbe ben peggio facendo intervenire i differenziali e le derivate d'ordine superiore.

Sì, certamente, ci si abitua a tali agguati e si giunge ad evitarli, ma perchè? A condizione di dimenticare l'origine di questa notazione, di non più ricordarsi che $\frac{d^2z}{dx^2}$ è il quoziente di un certo d^2z per un certo dx^2; ma di considerare questa frazione come un *blocco*, come la seconda derivata di z rapporto ad x, alla condizione insomma di *pensare in derivate*.

Chi pensa in derivate può adoperare la notazione di Leibniz senza pericolo; se trova in due termini di una medesima formula lo stesso simbolo d^2z con due significati differenti, ciò non ha maggiori inconvenienti che il trovare una medesima lettera a in due parole della stessa frase senza rapporto alcuno tra loro, poichè d^2z non è per lui un individuo, ma una porzione d'individuo.

Bisogna certo conoscere la notazione differenziale; bisogna sapere adoperare quel linguaggio ch'è di tutti, così come si deve sapere il tedesco, sebbene questa lingua abbia regole di costruzione ridicole ed un alfabeto senza senso comune, perchè è parlata da 60,000,000 di uomini tra' quali molti dotti.

Ma questa scienza è pericolosa e non bisogna adoperarla, finchè non si è imparato a pensare in derivate; senza di ciò non si saprebbe mai fare senza errori il più semplice cambiamento di variabili.

Per abituarvi gli allievi bisogna sul principio adoperare esclusivamente la notazione di Lagrange e non parlar loro di differenziali, finchè non faranno imperturbabilmente i cambiamenti di variabili. Si definirà quindi prima di tutto la derivata; vorrei che questa definizione fosse preparata da esempi concreti. Ve ne sono due, quello

delle tangenti e quello della velocità; e non sono da disdegnarsi, poichè il primo è stato il punto di partenza di Fermat e di Roberval ed il secondo quello di Newton.

Si ricondurranno questi due esempi l'uno all'altro tracciando la curva degli spazi in funzione del tempo. Credo che la definizione classica sembrerà più chiara, se arriva solo dopo questi esempi.

Vi è però un caso in cui la notazione differenziale riprende tutti i suoi vantaggi, in cui i suoi inconvenienti scompaiono e non si può negarle un alto valore filosofico ed educativo. È quello in cui non si considerano che differenziali di prim' ordine, a patto di non farne che uso giudizioso. Si imparerà così a ragionare correttamente sugl' infinitamente piccoli, ci si famigliarizzerà colla teoria dei piccoli errori, tanto importanti in fisica, intenderemo come piccole variazioni di dati possano influire sul risultato; e di questo anche i fisici non si lagneranno.

Avendo così apprese le derivate, partendo dall'esempio concreto della velocità, sapendole già calcolare ed adoperare, l'allievo inizierà lo studio dei differenziali del prim'ordine ed imparerà a servirsene, ma ad un'espressa condizione.

Il professore non scriverà mai:

$$df = \frac{df}{dx}\,dx + \frac{df}{dy}\,dy,$$

ma sempre

$$df = f'_x\,dx + f'_y\,dy.$$

Ci si asterrà sempre dal parlare dei differenziali secondi nei licei. Ho detto assolutamente; ahimè, se sono nei programmi, bisognerà rassegnarcisi, ma si relegheranno alla fine del corso, allorquando la formazione dello studente sarà compiuta, e d'altronde si definiranno servendoci unicamente dello sviluppo di Taylor.

Calcolo integrale.

20. Dopo quanto precede, è quasi superfluo dire come va definito l'integrale; è ben evidente che va definito come superficie.

I nostri padri inscrivevano in un'area piana una serie di rettangoli ed ottenevano come limite della somma di questi rettangoli un integrale rappresentante quest'area piana. Infatti, dicevano, la differenza tra la superficie cercata e la somma tende verso zero: poichè si può renderla più piccola di ogni quantità data. Facevano questo ragionamento senza scrupolo, perchè credevano sapere cosa fosse una superficie. Noi, invece, non restiamo più soddisfatti da questo ragio-

namento, perchè sappiamo che simili cose non si sanno nascendo, che non si può sapere cosa sia una superficie altro che conoscendo il calcolo integrale.

Ed allora per definire un integrale, prendiamo ogni precauzione; distinguiamo le funzioni continue e discontinue, quelle che hanno derivate, e quelle che non ne hanno. Tutto questo è a posto nell'insegnamento delle Facoltà; tutto questo sarebbe detestabile nei licei. L'allievo, qualsiasi definizione gli diate, non saprà mai cosa sia un integrale, se non gli è stato precedentemente insegnato. Tutte le sottigliezze lo lasceranno indifferente. Crede sapere che cosa sia una superficie e non comprenderà d'ignorarlo che quando avrà bene appreso il calcolo integrale; non è quindi interessante dirglielo nel momento in cui comincia lo studio di questo calcolo.

È allora semplicissimo ciò che rimane a fare; definire l'integrale come area compresa fra l'asse delle x, due ordinate e la curva, mostrare che quando una delle ordinate si sposta, la derivata di quest'area è precisamente l'ordinata stessa. È il ragionamento di Newton, così è nato il calcolo integrale, e, volenti o nolenti, bisogna ripassare per dove sono passati i padri nostri.

Si daranno alcuni esempi, scegliendo le aree che la geometria elementare permette di calcolare. Quanto ai volumi, i centri di gravità, le superficie curve, sarà facile ed utile mostrare come il calcolo dei medesimi si colleghi ad alcuni integrali, e costruire la curva la cui area varia come il volume o la superficie curva data.

Fatto questo, sarà stato fatto tutto quanto è utile nell'insegnamento secondario.

Meccanica.

21. Non ho bisogno di tornare sulla definizione del moto, o dell'accelerazione, o delle altre nozioni cinematiche; si riattaccheranno utilmente a quella delle derivate.

Insisterò invece sulle funzioni dinamiche di forza e di massa.

Una cosa mi colpisce: cioè quanto i giovani che hanno ricevuto l'insegnamento secondario siano lontani dall'applicare al mondo reale le leggi meccaniche state loro insegnate. Non solo ne sono incapaci; ma non vi pensano neppure. Per essi il mondo scientifico e quello reale sono separati da una paratia stagna. Non di rado si vede un signore ben messo, probabilmente baccelliere, seduto in una carrozza, imaginandosi di aiutarla a procedere spingendo sul davanti a dispetto del principio di azione e reazione.

Se cercassimo di analizzare lo stato d'animo dei nostri scolari, ciò ci stupirebbe meno; qual'è per essi la vera definizione della forza? Non quella che recitano, ma quella, che appiattata in un can-

tuccio del loro cervello, lo dirige tutto quanto di lì. Ecco questa definizione: le forze sono freccie colle quali si formano parallelogrammi. Tali freccie sono esseri immaginarî che non hanno rapporto alcuno con quanto esiste in natura. Ciò non accadrebbe, se si fossero mostrate loro forze reali prima di rappresentarle con freccie.

Come definire la forza? Buone definizioni logiche, non ne esistono; credo averlo sufficientemente dimostrato altrove. Vi è la definizione antropomorfica, la sensazione dell'effetto muscolare; quella è veramente troppo grossolana e non se ne può ricavare niente d'utile.

Ecco la via da seguirsi: occorre prima di tutto per far conoscere il genere forza, mostrare una dopo l'altra tutte le specie di tal genere; sono ben numerose e varie; vi è la pressione dei fluidi sulle pareti dei vasi che li racchiudono; la tensione dei filî, l'elasticità di una molla; il peso che influisce su tutte le molecole d'un corpo; l'attrito la respettiva reazione normale di due solidi a contatto.

Questa non è che definizione qualitativa; occorre imparare a misurare la forza. Perciò mostreremo prima che è possibile rimpiazzare una forza con un'altra senza turbare l'equilibrio; troveremo il primo esempio di questa sostituzione nella bilancia e nella doppia pesata di Borda. Mostreremo poi che un peso può venir rimpiazzato, non solo da un altro peso, ma da forze di nature differenti; il freno di Prony per esempio ci permette di rimpiazzare un peso con un attrito.

Da tutto questo si ricava la nozione dell'equivalenza di due forze.

Occorre definire la direzione d'una forza. Se una forza F è equivalente ad un'altra forza F', applicata al corpo considerato per mezzo di un filo teso, in modo che F possa venir rimpiazzata da F' senza turbare l'equilibrio, allora il punto di attacco del filo sarà per definizione il punto d'applicazione della forza F', e quello della equivalente forza F; la direzione del filo sarà la direzione della forza F' e quella della forza equivalente F.

Da ciò, passeremo al confronto della grandezza delle forze. Se una forza può rimpiazzarne altre due di ugual direzione, ciò dipende dall'essere uguale alla loro somma; dimostreremo per esempio che un peso di 20 grammi può rimpiazzarne due di 10 grammi.

Basta? Non ancora. Sappiamo ora comparare l'intensità di due forze, che hanno ugual direzione e punto d'applicazione; bisogna imparare a farlo quando le direzioni sono diverse. A tal uopo, immaginiamo un filo tenuto teso da un peso e passante sopra una puleggia; diremo che la tensione de' due pezzi di filo è la stessa e uguale al peso tensore.

Ecco la nostra definizione; essa ci permette di comparare due forze qualsiansi aventi la direzione stessa di questi due fili. Bisogna giustificarlo dimostrando come la tensione dell'ultimo tratto rimanga la stessa per un medesimo peso tensore, quali che siano il numero e

la disposizione delle puleggie di rinvio. Bisogna poi completarla mostrando che ciò è vero soltanto se le puleggie non hanno attrito.

Quando ci si è resi padroni di tali definizioni, occorre far vedere come il punto d'applicazione, la direzione e l'intensità bastino a determinare una forza; come due forze, per le quali questi tre elementi sono gli stessi, siano *sempre* equivalenti e possano *sempre* venir rimpiazzate l'una dall'altra, sia nell'equilibrio, sia nel movimento, e ciò qualunque siano le altre forze messe in uso.

Bisogna far vedere che due forze concorrenti possono esser sempre rimpiazzate da una risultante unica; e che *tale risultante rimane la stessa*, sia il corpo in riposo o in movimento e quali che siano le altre forze che le vengono applicate.

Bisogna finalmente far vedere che le forze definite nel modo suddetto soddisfano il principio dell'uguaglianza dell'azione e della reazione.

L'esperienza, la sola esperienza, può insegnare tutto questo.

Basterà citare alcune volgari esperienze, che gli allievi fanno ogni giorno senz'accorgersene, ed eseguire dinanzi a loro una piccola quantità d'esperienze semplici e bene scelte.

Quando avremo percorse tutte queste diverse vie, potremo rappresentar le forze con freccie, e vorrei ancora che, nello sviluppo dei ragionamenti, si tornasse quando a quando dal simbolo alla realtà. Non sarebbe per esempio difficile illustrare il parallelogramma delle forze mediante un apparecchio formato di tre fili, passanti su puleggie, tenuti tesi da pesi e rimanenti in equilibrio, essendo riuniti in un medesimo punto.

Conoscendo la forza è facile definire la massa; questa volta occorre prendere la definizione in prestito alla dinamica; non vi è modo di fare altrimenti, poichè lo scopo da raggiungere, è di far conoscere la differenza tra la massa ed il peso. Qui pure la definizione dev'essere preparata da esperienze; esiste infatti una macchina che sembra fatta proprio apposta per dimostrare che cosa sia la massa, la macchina di Atwood; si rammenterà del resto la legge della caduta de' corpi, si rammenterà che l'accelerazione del peso è la stessa pe' corpi pesanti e per quelli leggieri, e che varia colla latitudine, ecc.

22. Ora se mi dite che tutti i metodi che preconizzo sono da molto tempo applicati nei licei, me ne rallegrerò più che meravigliarmene; so che nell'insieme il nostro insegnamento matematico è buono; non desidero che sia buttato all'aria, anzi ne sarei desolato; desidero solo miglioramenti lentamente progressivi. Non bisogna che quest'insegnamento subisca brusche oscillazioni al soffio capriccioso di mode effimere. In simili tempeste soccomberebbe presto il suo alto valore educativo. Una buona e solida logica deve continuare a formarne la base. La definizione mediante l'esempio è sempre necessaria, ma deve

preparare la definizione logica, non già sostituirla; deve almeno farla desiderare nei casi in cui la vera definizione logica non può essere data utilmente che nell'insegnamento superiore.

Avete ben compreso che quanto ho detto oggi non implica affatto l'abbandono di quanto ho scritto altrove. Ho spesso avuto occasione di criticare certe definizioni che oggi preconizzo. Quelle critiche sussistono intatte. Tali definizioni non possono essere che provvisorie. Ma per quelle bisogna passare.

POINCARÉ.

IL CONCETTO DI ANGOLO IN "GONIOMETRIA,,

Nella "Geometria (1) elementare del piano„ si dice *angolo*, (2) *una parte del fascio limitata da due raggi* (*come il segmento è una parte della retta limitata da due punti*); altri invece, seguendo il Bertrand, ("Developpement nouveau de la partie élémentaires des mathématiques„. Genève, 1778, II, pag. 6) dicono: *un piano* (3) *è diviso da due rette intersecantesi e giacenti in esso, in 4 porzioni o regioni che si chiamano angoli* (γωνία); questa definizione ci conduce (4) ad attribuire all'angolo il carattere di *ente a due dimensioni*, mentre in matematica lo si riguarda come ente ad una dimensione; quello che il Bertrand chiama angolo, si può dire (col Veronese) *settore angolare*.

In Goniometria ed in Geometria Analitica s'imagina l'angolo come generato da un raggio ruotante in un dato senso intorno alla sua origine mantenendosi sopra un piano (*piano sostegno o piano dell'angolo*); le posizioni, iniziale e finale del raggio mobile, sono i lati *origine* ed *estremo* dell'angolo, intendendo che questo sia costituito dall'insieme delle posizioni occupate dal raggio generatore, o da tutti i raggi del fascio coi quali il raggio mobile va a coincidere nel suo movimento. Il raggio generatore lo si può riguardare anche come

---

(1) Cfr. H. SCHOTTEN, *Inhalt und methode des Planimetrischen unterrichts*. Lipsia, vol. II, pag. 94, Cap. II.

(2) G. VERONESE (collaboratore P. GAZZANIGA), *Elementi di Geometria*. F.lli Drucker, Padova, 1901. Parte I, Ed. IIa, pag. 33.

(3) BALTZER (traduzione di L. CREMONA), *Elementi di Matematica*. Parte VI. — Planimetria — Genova, Tip. dei Sordo-Muti, 1884, pag. 14, n. 5.

(4) U. AMALDI, *Sui concetti di retta e di piano*. Questioni riguardanti la Geometria Elementare. Raccolte e ordinate da Federigo Enriques. Edit. N. Zanichelli, Bologna, 1900, pag. 55.

projettante un punto mobile, nel verso scelto, sopra una circonferenza sul piano dell'angolo, avente per centro il vertice. Il punto mobile può percorrere la circonferenza quante volte si vuole, e se il cammino percorso lo diciamo *arco,* questo (1) può essere minore, uguale od anche maggiore di una circonferenza; quindi anche l'angolo al centro, corrispondente all'arco, può essere minore, uguale od anche maggiore (2) di un fascio di raggi.

Veniamo così a riguardare l'angolo non più come parte di un fascio di raggi, come si fa in "Geometria elementare „, e leghiamo il concetto di angolo al concetto di movimento, rendendoci, in tal modo, impossibile ogni qualsiasi studio dell'angolo dal punto di vista *attuale.*

Non credo quindi ozioso accennare con *forma puramente intuitiva* ad un modo secondo cui si possa imaginare l'angolo, indipendentemente dal movimento, come parte di un tutto, per modo da poterlo studiare anche dal punto di vista *attuale.*

Indichiamo con (Σ) la *falda* di elicoide retto, generata da un raggio la cui origine scorra sull'asse (a) di una superficie cilindrica di rotazione (λ), mantenendosi ad esso perpendicolare ed appoggiandosi ad un'elica (ε) disegnata su (λ); l'insieme delle posizioni del raggio mobile, per analogia col piano, lo chiameremo *fascio elicoidale di raggi* [forma che indicheremo con (φ)] del quale (Σ) diviene la *superficie sostegno.*

Due raggi f e g di (φ) determinano sull'elica (ε) due punti F e G la porzione finita di elica limitata dai punti F e G dicesi, com'è noto *arco di elica: l'insieme dei raggi del fascio compresi tra* f *e* g (*appoggiantisi cioè all'arco* FG) *lo diremo angolo elicoidale avente per lati* f *e* g. (3) La porzione o regione di (Σ) luogo dei punti dei raggi dell'angolo fg, la chiameremo *settore angolare* (sostegno dell'angolo).

Dato il senso positivo delle rotazioni dello spazio attorno all'asse (a), possiamo considerare angoli elicoidali positivi e negativi ed in corrispondenza archi di elica positivi e negativi; inoltre, siccome un

---

(1) Cfr. U. BETTAZZI, *Nozioni di Trigonometria.* Succ. Le Monnier, Firenze, 1896, pag. 2, II. L'arco così definito non coincide coll'arco di circonferenza della *Ciclometria.*

(2) Anche in *Geometria Elementare* dalla somma di più angoli si è condotti a considerare angoli maggiori del fascio o del piano (seguendo Bertrand).

F. ENRIQUES e U. AMALDI, *Elementi di Geometria,* ad uso delle scuole secondarie superiori. Bologna, N. Zanichelli, 1903, pag. 32, n. 91, pag. 37, n.i 103, 104.

M. GRÉMIGNI, *Elementi di Geometria.* Vol. I. Firenze, R. Bemporad e F.o 1896, pag. 12, IX.

(3) Il Ch.mo prof. U. Amaldi nel lavoro citato (pag. 58) dopo avere detto di settore angolare (piano) aggiunge: "..... si può definire come *angolo* ab o ba *l'insieme dei raggi uscenti da* O *e appartenenti al settore angolare che ha per lati* a *e* b. All'angolo si possono aggiungere, volendo, i lati a e b „.

Sarebbe bene, a mio avviso, non aggiungere all'angolo i suoi lati, potendo così estendere all' *angolo nullo* il concetto intuitivo di grandezza nulla; l'angolo nullo à per lati due raggi consecutivi (in senso infinitesimale) del fascio di raggi.

arco di elica (cilindrica di rotazione) può scorrere sulla linea stessa con perfetta sovrapposizione (proprietà che tale linea ha in comune colla circonferenza e la retta), si può, servendoci per esempio del concetto di sovrapponibilità, definire eguaglianza e somma di archi di elica, per cui possiamo dire che questi costituiscono una classe di grandezze. In conseguenza anche gli angoli elicoidali si possono riguardare come costituenti un'altra classe di grandezze: e, se diciamo *corrispondenti* un angolo elicoidale e l'arco di elica (ε) che ha per *origine* il punto ove si appoggia il lato origine dell'angolo, e per estremo il punto d'appoggio del lato estremo, si può dire che *le grandezze corrispondenti delle classi "angoli elicoidali" ed "archi di elica" sono direttamente proporzionali.*

Consideriamo il fascio (α) di semipiani avente per asse (a), uno qualunque dei semipiani à in comune col fascio elicoidale (φ) infiniti raggi paralleli ed *equiversi*, [1] e tali che due qualunque consecutivi distano di un segmento uguale al *passo* dell'elica (ε). L'angolo elicoidale che à per lati due di tali raggi consecutivi lo diremo *angolo giro*, l'arco corrispondente *arco giro*; si può vedere facilmente che se i lati di un angolo elicoidale sono paralleli ed equiversi, l'angolo è uguale ad un numero intero (positivo o negativo ma non nullo) di angoli giro e reciprocamente; e teoremi analoghi per gli archi di elica.

Se poi diciamo *angoli (archi) congrui*, due angoli (archi) che differiscono di un numero intero (positivo o negativo) di angoli (archi) giro, possiamo dire che: *portato con un movimento rotatorio dello spazio attorno all'asse* (a) *a sovrapporre il lato (punto) origine di uno di due angoli (archi) congrui col lato (punto) origine dell'altro, i lati estremi sono paralleli ed equiversi* [*i punti estremi sono sopra un semipiano di* (α)]: *e reciprocamente.*

Si potrebbero molto facilmente estendere agli angoli (archi) elicoidali congrui tutti i teoremi relativi alla *congruenza*. [2]

Si è già detto che gli archi di elica e i corrispondenti angoli elicoidali formano due classi di grandezze direttamente proporzionali; quindi, assunto un arco di elica come unità di misura per gli archi, e preso come unità di misura degli angoli quello corrispon-

---

(1) Dati due raggi paralleli, la retta delle origini divide il loro piano in due semipiani; se i due raggi sono in uno li direi *equiversi*, nel caso diverso, *antiversi;* ragioni etimologiche giustificano pienamente tali diciture.

(2) V. per esempio C. Bourlet, *Leçons de Trigonométrie rectiligne.* (Cours complet de Mathématiques élémentaires publié sus la direction de M. Darboux). Parigi A. Colin et C.ie 1898, pag. 19 e seg.

dente all'arco unitario, archi ed angoli corrispondenti ànno misure uguali.

La misura di un arco di elica rispetto ad un altro arco (non nullo) assunto come unità di misura, la diremo *ampiezza* di quell'arco, mentre con *lunghezza* dello stesso arco s'intende la misura del segmento uguale all'arco *rettificato*; quindi l'*ampiezza* di un arco è la sua misura se riguardato come elemento di una classe di grandezze.

Anche per la misurazione di angoli elicoidali, e corrispondenti archi di elica, potremo scegliere, come suol farsi in pratica per tutte le classi di grandezze, più unità di misura procedendo così a misurazioni complesse ed ottenendo valori complessi; (per esempio: l'*angolo giro* di 4 *quadranti*, di 60 *gradi*, di 60 *minuti primi*, di 60 *minuti secondi*).

Conveniamo ora di chiamare *distanza* di un punto da un piano il segmento di perpendicolare condotta dal punto al piano, compreso tra il punto (*estremo* del segmento) ed il piano. Dato un angolo elicoidale fg consideriamo la distanza di un punto P del lato estremo g dal piano del fascio (α) contenente il lato origine f, (positiva se P è da quella parte del piano ove sono i raggi, a partire da f, degli angoli positivi minori di un semigiro, negativa se P è dalla parte opposta); *il rapporto di questa distanza al segmento (sempre positivo) di* g *intercetto tra l'asse* (a) *ed il punto* P *(estremo) lo diremo seno dell'angolo* fg.

Si può dimostrare facilmente che il seno di un angolo elicoidale non dipende dalla scelta del punto P sul lato estremo (escludendo naturalmente l'origine di questo lato); ed inoltre che è una funzione monodroma dell'angolo.

Osserviamo poi che *due angoli congrui ànno uguali i seni;* infatti supposto che per un movimento rotatorio dello spazio attorno all'asse (a) si siano portati i due angoli ad avere in comune il lato origine, quindi i due lati estremi o coincidono o sono paralleli ed equiversi, e perciò le distanze degli estremi degli archi corrispondenti di una stessa elica (ε) dal piano del fascio (α) contenente il lato origine (comune) sono uguali in valore assoluto e segno, e quindi anche uguali i loro rapporti al raggio dell'elica considerata.

Ne segue che per la ricerca del valore del *seno* di un angolo possiamo sempre sostituire a questo un angolo congruo, in particolare un angolo positivo minore di un giro *(riduzione al primo giro)*.

Per determinare poi il valore del seno di un angolo positivo minore di un giro, possiamo proiettare sopra un piano normale all'asse (a)

l'angolo stesso; questo si proietta in un angolo piano [parte del fascio piano di raggi, avente per centro il punto O d'incontro del piano iconico coll'asse (*a*)], l'arco di elica (α) si proietta in un arco di circonferenza (come lo definisce la " Geometria elementare piana „) col centro in O e di raggio uguale a quello della superficie cilindrica (λ); il seno dell'angolo elicoidale risulta uguale al seno dell'angolo piano proiezione.

Qnindi studiando la funzione angolare *seno* per angoli piani minori del fascio, possiamo conoscere tutti i valori della funzione stessa per ogni angolo elicoidale.

Ciò che si è fatto per la funzione angolare seno, si può ripetere per ogni altra funzione angolare.

Imaginiamo che il passo dell'elicoide retto (Σ) vada decrescendo; le considerazioni fatte valgono in ogni suo stadio, anzi si può notare che il valore di ogni funzione angolare, per un dato angolo elicoidale non dipende dal *passo* dell'elicoide, ma solo dall'angolo diedro dei due semipiani del fascio (α) contenenti i lati dell'angolo: se dunque supponiamo che il passo dell'elicoide retto si renda evanescente, questo tenderà ad una superficie composta di infiniti piani sovrapposti normali all'asse (*a*), aventi in comune il punto O d'incontro coll'asse e tali che si possa passare dall'uno all'altro con continuità; il fascio elicoidale (φ) tende ad un fascio di raggi composto di infiniti fasci piani omocentrici (centro il punto O) e tali che anche in essi si possa passare dall'uno all'altro con continuità.

Se *a* e *b* sono due raggi di questo fascio, l'insieme dei raggi compresi tra essi (lati) costituisce l'angolo *ab* o *ba*, e si può dire che i raggi che lo compongono ànno le origini sovrapposte.

Definito così l'angolo, non potremmo estendere ad esso le definizioni della " Geometria elementare „ di angoli *concavi, convessi, piatti* poichè essa li riguarda sempre come parte di un fascio piano di raggi; potremo però dire *angolo piatto*, l'angolo di un numero intero (non nullo) di semigiri; *concavo* quello maggiore di un numero dispari di semigiri e minore del numero successivo di semigiri; *convesso* l'angolo non concavo.

Le eliche poi determinate da (Σ) sulle superficie cilindriche coassiali, di asse (*a*), tendono per l'evanescenza del passo a circonferenze concentriche (di centro O); queste circonferenze si dovrebbero riguardare non già come linee chiuse, bensì come linee aperte, per modo che l'arco di circonferenza come lo considera la " Goniometria „ è un

arco della linea limite di una elica cilindrica di rotazione di passo evanescente.

Se in " Goniometria „ si vuol mantenere all'angolo il significato datogli dalla " Geometria elementare „ dovremmo limitarci allo studio delle funzioni angolari per angoli appartenenti e non superanti il fascio piano, come projezioni di quelli di un elicoide retto minori di un giro, ed estendere poi i risultati ottenuti, come si è detto, ad angoli qualsiansi: se invece si vuol considerare l'angolo in generale, allora lo si può concepire come parte di un fascio-limite elicoidale di raggi, potendo così non fosse altro liberarci dal concetto di moto e permettendoci uno studio dell'angolo dal punto di vista *attuale*.

Se in fine invece di considerare una *falda* dell'elicoide retto prendiamo in esame tutto l'elicoide e quindi anche il fascio elicoidale di *rette*, e se in ciascuna di queste assumiamo come verso positivo quello che va dal punto di appoggio sull'asse (a) al punto di appoggio sull'elica (ε), possiamo in modo analogo acquisire il concetto che si à di angolo di due rette in " Geometria Analitica del piano „.

Anzi a questo riguardo noto che, date due rette f, g di un piano sulle quali sia fissato *il verso positivo*, assegnato inoltre il *senso positivo del piano*, il loro angolo è *indeterminato* poichè se con α^0 indichiamo il valore dell'angolo positivo congruo all'angolo fg e minore di un giro, il valore dell'angolo fg è rappresentato da

$$\alpha^0 + k\,360^0$$

ove k è un numero intero positivo o negativo (non escluso lo zero), quindi è indeterminato, il che non dovrebbe essere, dato il concetto che ci siamo *ora* fatto di angolo di due rette; possiamo dire però che è determinata l'*inclinazione* delle due rette, intendendo con tale parola (in senso *reciproco*) l'angolo positivo minimo congruo all'angolo delle due rette; e per inclinazione (in senso *relativo*) di f su g l'angolo positivo minimo congruo all'angolo gf.

F. MANCINELLI.

PRINCIPI DI GEOMETRIA EUCLIDEA

PREFAZIONE.

In questo lavoro ho esposto i principî della geometria elementare, col rigore maggiore che ho potuto conciliare con le esigenze didattiche.

La trattazione è in massima parte originale. Per la retta mi sono ispirato ai *Principî di Geometria logicamente esposti* (1) del prof. Peano. Inoltre seguendo il prof. Veronese (2) ho definito le parallele prima del piano, e l'eguaglianza tra figure, come una certa corrispondenza biunivoca. Però a differenza del prof. Veronese, io ho definito le rette parallele indipendentemente dal concetto di segmenti eguali; come anche la sopradetta definizione d'eguaglianza è modificata un poco.

Questi miei *principî*, sono scritti in modo che illustrati convenientemente con osservazioni empiriche, si possono dare in mano agli studenti delle scuole secondarie superiori. Poscia si può continuare, con leggiere modifiche, con qualsivoglia buon trattato di geometria elementare, e meglio, in particolare, col citato libro del prof. Veronese.

I. — La retta.

1. Postulato I. — *Esistono punti distinti.*

I punti si indicano con lettere maiuscole; per indicare che i punti A e B non sono distinti, cioè che le lettere A e B rappresentano uno stesso punto, scriveremo $A \equiv B$, e leggeremo: « il punto A coincide col punto B ».

È chiaro che se è $A \equiv B$, è pure $B \equiv A$; e che se è $A \equiv B$ e $B \equiv C$, è $A \equiv C$.

2. Definizione. — Dicesi *figura* una classe di punti, ciascuno dei quali si dice che *appartiene* ad essa. Se due figure F ed F′ son tali che ogni punto di F appartiene ad F′, si dice che F è *contenuta* in F′, ed anche che F′ *appartiene* ad F. Se F è contenuta in F′, e questa è contenuta in F, diremo che F ed F′ *coincidono*, e scriveremo $F \equiv F'$. È chiaro che se è $F \equiv F'$, è pure $F' \equiv F$; e se è $F \equiv F'$ e $F' \equiv F''$, è $F \equiv F''$.

Se F è contenuta in F′, ma non è $F \equiv F'$, diremo che F è *parte* di F′.

La scienza che tratta delle figure, si chiama *Geometria*.

---

(1) Torino, Fratelli Bocca, 1889.
(2) *Elementi di Geometria*, Ediz. III, 1904, Verona.

3. POSTULATO II. — *Dati due punti distinti, esiste una figura, che chiameremo segmento, individuata da essi, indipendente dall'ordine secondo cui essi sono dati, e alla quale essi appartengono.*

Il *segmento* individuato (Post. II) da due punti distinti A e B, si indica con AB o con BA; dunque AB ≡ BA. Ogni punto che appartiene ad AB, ed è distinto da A e da B, si chiama *interno* al segmento AB. Diremo, alle volte, che AB *congiunge* i punti A e B, i quali diconsi *estremi* del segmento AB.

4. POSTULATO III. — *Se un punto* C *è interno al segmento* AB, *tutti i punti di* AC *appartengono ad* AB, *e* B *non appartiene ad* AC.

TEOREMA. — *Se un punto* C *è interno al segmento* AB, *tutti i punti di* BC *appartengono ad* AB, *e* A *non appartiene a* BC.

DIMOSTRAZIONE. — Si dimostra applicando il Post. III a BA, e poi osservando (§ 3) che è AB ≡ BA.

5. POSTULATO IV. — *Se due punti distinti* C *e* D *sono interni ad* AB, *sarà vera una delle due seguenti proposizioni:* D *appartiene ad* AC; D *appartiene a* BC.

TEOREMA I. — *Se due punti distinti* C *e* D *sono interni ad* AB, *sarà vera una sola delle due seguenti proposizioni:* D *appartiene ad* AC; D *appartiene a* BC.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti poniamo, p. es. che D appartenga (Post. IV) a BC. Il punto C deve appartenere (Post. IV) ad uno (almeno) dei segmenti AD, BD. Ma C a BD non appartiene (Post. III), quindi apparterrà ad AD, onde (Post. III) D non appartiene ad AC, c. v. d.

COROLLARIO. — *Se* C *è un punto interno ad* AB, *i segmenti* AC *e* BC *non hanno alcun punto comune distinto da* C.

POSTULATO V. — *Se il punto* B, *distinto da* A, *appartiene ad entrambi i segmenti* AC *e* AD, *sarà vera una delle due seguenti proposizioni:* C *appartiene ad* AD; D *appartiene ad* AC.

TEOREMA II. — *Se il punto* B, *distinto da* A, *appartiene ad entrambi i segmenti* AC *e* AD, *sarà vera una sola delle due seguenti proposizioni:* C *appartiene ad* AD; D *appartiene ad* AC.

DIMOSTRAZIONE. — Segue dalla seconda parte del post. III.

POSTULATO VI. — *Se il punto* B *è interno ad* AC, *e* C *appartiene a* BD, *allora* C *appartiene ad* AD.

6. POSTULATO VII. — *Dati due punti distinti* A *e* B, *esistono punti, ciascuno* P *dei quali è tale che il punto* B *è interno al segmento* AP.

DEFINIZIONE. — La figura costituita dal segmento AB, e (Post. VII) dai punti, ciascuno P dei quali è tale che B è interno ad AP, si chiama *raggio* o *semiretta,* e si indica con (A) B. Il punto A dicesi *origine* di (A) B.

TEOREMA. — *Un raggio è individuato dalla sua origine e da un suo punto qualunque (distinto da questa).*

DIMOSTRAZIONE. — Sia C un punto di (A) B, dico che è (A) B ≡ (A) C. Infatti dalla Def. risulta che o C appartiene ad AB, o B appartiene ad AC.

Consideriamo quest'ultima ipotesi, e sia P un punto di (A) C. Possiamo (Def.) distinguere due casi: P appartiene ad AC; C appartiene ad AP. Se C appartiene ad AP, tutti i punti di AC appartengono (Post. III) ad AP, e in particolare B, onde P appartiene (Def.) ad (A) B. Se poi P appartiene ad AC, esso (Post. IV) o appartiene ad AB, e quindi (Def.) ad (A) B, ovvero appartiene a BC. Ma allora (Teor. § 4) B non appartiene a PC, e per conseguenza (Post. IV) B appartiene ad AP, cioè P appartiene ad (A) B. Dunque finora abbiamo dimostrato che nell'ipotesi di B appartenente ad AC, ogni punto P di (A) C appartiene ad (A) B. Sempre nella medesima ipotesi, sia ora Q un punto di (A) B. Se Q appartiene ad AB, esso appartiene (Post. III) ad AC, e quindi (Def.) ad (A) C. Se invece è B in AQ, o (Post. V) C appartiene ad AQ, o Q appartiene ad AC, onde in entrambi i casi il punto Q appartiene ad (A) C.

Nell'ipotesi che C appartenga ad AB, si ripete la fatta dimostrazione, scambiando B con C. Concludiamo (§ 2): (A) B $\equiv$ (A) C, c. v. d.

7. DEFINIZIONE. — Chiameremo *retta* la figura costituita da due raggi, ciascuno dei quali contiene l'origine dell'altro, cioè come (A) B e (B) A, con A e B punti distinti: la indicheremo con (AB). Alle volte con una sola lettera latina minuscola, indicheremo una retta. Lo stesso faremo per indicare un segmento, quando non vi è luogo ad equivoci. Si suol dire pure che (AB) *congiunge* A e B; ecc.

TEOREMA. — *Una retta è individuata da due suoi punti (distinti) qualunque.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia la retta (AB), e C un suo punto qualunque distinto da A e da B; dico, in primo luogo, (AB) $\equiv$ (BC). Infatti dalla data Def. segue che C giace in uno (almeno) dei raggi (A) B, (B) A, p. es. in (A) B. Allora o C appartiene ad AB, o B appartiene ad AC; consideriamo la prima ipotesi. Per il teor. del § 6 è (B) A $\equiv$ (B) C, onde per il nostro scopo basterà dimostrare che, se P appartiene ad (A) B, P apparterrà a (BC); e se Q appartiene a (C) B, Q apparterrà ad (AB).

Appartenga, primieramente, P ad (A) B: allora o P è in AB, o B è in AP. Se P è in AB, o esso appartiene (Post. IV) a BC, e quindi a (BC), ovvero P appartiene ad AC, e quindi (Post. III e IV) C appartiene a BP, cioè P a (B) C, e quindi P a (BC). Se invece B appartiene ad AP, allora è (Post. III) C in AP, onde giacchè (Post. III) B non è in AC, è (Post. IV) B in CP, e quindi P in (C) B, e P in (BC).

Sia ora Q un punto di (C) B: o Q è in CB, e quindi (§ 4) è in AB, e per conseguenza in (AB). Ovvero è B in CQ, per cui (Post. VI) B appartiene ad AQ, e quindi Q ad (A) B, ed anche Q ad (AB).

Sin ora abbiamo considerata l'ipotesi che O appartenga ad AB, e sempre in questa ipotesi, si dimostra analogamente, che è (AB) $\equiv$ (AC). Se invece è B in AC, si ha, per la fatta dimostrazione: (AC) $\equiv$ (AB), e (AC) $\equiv$ (BC). Onde (AB) $\equiv$ (BC).

Sia, infine, D un altro punto di (AB), distinto da A, da B, e da C:

esso, per quanto si è dimostrato, appartiene a (BC), per cui (BC) ≡ (CD); e concludendo: (AB) ≡ (CD), c. v. d.

COROLLARIO. — *Per due punti distinti passa una retta ed una sola.*

8. TEOREMA. — *La retta può considerarsi come composta di due raggi distinti, aventi la stessa origine in un punto qualunque della retta medesima.*

Ovvero, con altre parole: *La retta è divisa da ogni suo punto in due parti distinte.*

Infatti scelto un punto qualunque O di una data retta r, siano (Postulato VII) A e B due punti distinti di questa, tali che O sia interno ad AB. Osserviamo intanto che (Teor. § 7) è $r \equiv (AB)$. Sia ora P un punto qualunque di r, appartenente, p. es., ad (A) B (Def. § 7): se esso è interno ad AB, apparterrà (Post. IV) o ad OA, o ad OB, in ogni caso apparterrà ad uno dei due raggi (O) A, (O) B. Se invece è B in AP, anche (Post. III) O apparterrà ad AP, e allora giacchè B (Post. III) non appartiene ad AO, B apparterrà (Post. IV) ad OP, onde P appartiene ad (O) B. Dunque ogni punto P di r appartiene ad uno (almeno) dei due raggi (O) A, (O) B. Viceversa se Q è un punto di (O) A, p. es., esso appartiene alla (OA) ≡ r (Teor. § 7).

I due raggi (O) A e (O) B, poi, sono distinti, giacchè se coincidessero, o il punto B sarebbe interno ad AO, o A sarebbe interno ad OB, cose entrambe assurde (§ 4), c. v. d.

OSSERVAZIONE. — I due raggi (O) A e (O) B, non hanno alcun punto comune distinto da O, giacchè in contrario essi (Teor. § 6) coinciderebbero, contro quanto abbiamo dimostrato. Questa osservazione si suole enunciare dicendo che la retta è *aperta*.

DEFINIZIONE. — Due raggi distinti di una stessa retta, aventi l'origine comune, diconsi *opposti*.

COROLLARIO. — *Essendo* (O) A *e* (O) B *raggi opposti, il punto* O *è interno ad* AB.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, se O non fosse interno ad AB, esso dovendo appartenere alla (AB), e quindi o ad (A) B o a (B) A, sarebbe tale che o B appartiene ad AO, ovvero A ad OB. In entrambi i casi sarebbe (O) A ≡ (O) B (Teor. § 6), e ciò non è, c. v. d.

II. — L'angolo.

9. POSTULATO VIII. — *Data una retta esiste un punto che non appartiene ad essa.*

COROLLARIO. — *Esistono coppie di raggi distinti, aventi la stessa origine.* P. es., un raggio (O) A, e il raggio (O) B, dove B (Post. VIII) non appartiene a (OA).

DEFINIZIONE. — Dati due raggi (distinti o coincidenti) non opposti, (O) A e (O) B, aventi la stessa origine O, chiameremo loro *angolo con-*

vesso, e l'indicheremo con A (O) B o con B (O) A, la figura dei punti che appartengono a segmenti aventi gli estremi sui raggi dati. I dati raggi si chiameranno *lati* dell'angolo, e il punto O se ne dirà il *vertice.* Se è (O) A ≡ (O) B, A (O) B si chiamerà *angolo nullo.*

COROLLARIO. — *L'angolo nullo coincide coi suoi lati (coincidenti).*

10. POSTULATO IX. — *Se un raggio avente l'origine nel vertice di un angolo convesso, incontra in un punto distinto da questo, un segmento avente gli estremi sui lati dell'angolo, esso incontrerà tutti i segmenti siffatti.*

DEFINIZIONE. — Un raggio che ha l'origine nel vertice di un angolo, che incontra (Post. IX) tutti i segmenti aventi gli estremi sui lati di questo, e che è distinto dai lati dell'angolo, si dice *interno* al detto angolo.

TEOREMA I. — *Se un raggio* (O) C *è interno all'angolo convesso* A (O) B, *tutti i raggi interni ad* A (O) C *o a* B (O) C, *apparterranno ad* A (O) B, *e inoltre* (O) B *non appartiene ad* A (O) C, *e* (O) A *non appartiene a* B (O) C.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti scelto un segmento qualunque avente gli estremi (distinti da O) M in (O) A e N in (O) B, esso sarà (Post. IX) incontrato da (O) C in un punto P interno ad esso. Sia ora (O) D un raggio interno ad A (O) C, p. es.: esso (Post. IX) incontra MP in un punto interno Q, che (§ 4) è interno ad MN, onde (O) D appartiene ad A (O) B, ecc., c. v. d.

TEOREMA II. — *Se due raggi distinti* (O) C *e* (O) D *appartengono ad* A (O) B, *sarà vera una ed una sola delle due seguenti proposizioni:* (O) D *appartiene ad* A (O) C; (O) D *appartiene a* B (O) C. Ovvero con altre parole: *Un raggio interno ad un angolo convesso, divide questo in due parti che hanno quel solo raggio comune.*

DIMOSTRAZIONE. — Segue dai Post. IX e IV, e dal Teor. I del § 5.

11. DEFINIZIONE. — Siano (O) A e (O) B due raggi opposti, ed (O) C un altro raggio avente l'origine in comune con essi, e da questi distinto. La figura composta degli angoli convessi A (O) C e B (O) C, si chiamerà *angolo piatto,* e si indicherà con (O) A . C o con (O) B . C. I raggi (O) A e (O) B se ne dicono *lati,* e O *vertice.*

OSSERVAZIONE. — Un raggio (O) D di (O) A . C distinto da (O) C, appartiene (Def.) ad uno (almeno) dei due angoli A (O) C, B (O) C, poniamo, p. es., ad A (O) C.

POSTULATO X. — *Dato l'angolo piatto* (O) A . C, *se* (O) D *è interno ad* A (O) C, *allora* (O) C *apparterrà a* B (O) D; *e viceversa.*

COROLLARIO. — *Dato l'angolo piatto* (O) A . C, *ogni suo raggio distinto da* (O) C, *appartiene ad uno e ad uno solo degli angoli convessi* A (O) C *e* B (O) C.

DIMOSTRAZIONE. — Che un raggio (O) D di (O) A . C distinto da (O) C appartenga ad uno, p. es., ad A (O) C dei due angoli A (O) C, B (O) C, segue dalla data definizione di angolo piatto. Che, poi, (O) D non appartiene a B (O) C. segue dal Post. X e dal Teor. I del § 10.

12. TEOREMA. — *Un angolo piatto è individuato dai lati e da un suo raggio qualunque (distinto da questi), avente l'origine nel vertice dell'angolo.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia (O) D un raggio di (O) A . C: dico che è (O) A . C ≡ (O) A . D. Infatti supponiamo (Coroll. § 11) che (O) D (distinto da (O) C) appartenga ad A (O) C, e che sia (O) P un altro raggio di (O) A . C. Se (O) P è interno a B (O) C, esso (Post. X e Teor. I, § 10) appartiene a B (O) D e quindi ad (O) A . D. Se invece (O) P appartiene ad A (O) C, allora (Teor. II, § 10) o appartiene a C (O) D e quindi (Post. X e Teorema I, § 10) a B (O) D, ed anche ad (O) A . D, ovvero appartiene ad A (O) D, e per conseguenza ad (O) A . D. Analogamente si dimostra che viceversa ogni raggio che appartiene ad (O) A . D, apparterrà pure ad (O) A . C. Concludiamo: (O) A . D ≡ (O) A . C, c. v. d.

COROLLARIO. — *Due angoli piatti coincidono, se hanno in comune i lati e un raggio distinto da questi avente l'origine nel vertice comune.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti in tale ipotesi, ciascuno di essi è formato dai medesimi due angoli convessi.

13. TEOREMA. — *Dato un angolo piatto* (O) A . M *cui appartenga una retta* r, *se* C *è un punto di questa, uno dei due raggi di* r *aventi* C *per origine, apparterrà all'angolo* A (O) C, *e l'altro raggio apparterrà all'angolo* B (O) C.

DIMOSTRAZIONE. — Siano infatti D ed E due punti di *r*, uno per ciascuno dei due raggi di *r* aventi C per origine, onde (Coroll., § 8) C appartiene a DE. Se entrambi i raggi (O) D e (O) E appartenessero ad uno, p. es. B (O) C, dei due angoli B (O) C e A (O) C, (O) D, p. es. apparterrebbe (Teor. II, § 10) a B(O)E, e ciò è assurdo, giacchè (O) C appartiene a D (O) E (Teor. I, § 10), c. v. d.

14. TEOREMA I. — *Date due rette distinte aventi un punto in comune, non esiste alcun angolo piatto col vertice in questo punto, coi lati su una delle due rette date, e che contenga tutti i punti dell'altra retta.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano le due rette distinte (OA) e (OC); dico che non esiste alcun angolo piatto (O) A . M, p. es., che contenga tutti i punti di (OC). Infatti dovrebbe essere (§ 12) (O) A . M ≡ (O) A . C, e se D è un punto distinto da O, appartenente al raggio opposto di (O) C, tale che O sia interno a CD, il raggio (O) D dovrebbe appartenere o all'angolo A (O) C, o all'altro B (O) C. Poniamo che (O) D appartenga ad A (O) C, per cui conterrà un punto E interno ad AC, e le rette (AC) e (CD) avendo in comune i due punti distinti C ed E coinciderebbero. E allora sarebbe anche (AB) ≡ (CD) per avere comuni i due punti distinti O ed A, e ciò è contro l'ipotesi che le due date rette siano distinte, c. v. d.

TEOREMA II. — *Se un raggio ha l'origine in un lato di un angolo piatto, e incontra un raggio di questo avente la sua origine nel vertice dell'angolo, esso appartiene al detto angolo piatto.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia dato (O) A . B; dico che (A) B appartiene ad esso. Per il segmento AB la cosa è evidente; onde sia C un punto tale,

che B è interno ad AC. Allora siccome (O) B appartiene a C (O) A, cosi (Post. X, 2ª parte), (O) C appartiene ad A′ (O) B, ossia ad (O) A . B, indicando con A′ un punto tale che sia O interno ad AA′. Se ne conclude che ogni punto C di (A) B appartiene ad (O) A . B, c. v. d.

TEOREMA III. — *Due angoli piatti aventi i lati sopra una stessa retta, e un punto fuori di questa comune, coincidono.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano gli angoli piatti (O) O_1 . P e (O_1) O . P; dico che essi coincidono. Infatti ogni raggio di (O) O_1 . P interno ad O_1 (O) P, incontra (Post. IX) O_1P, e quindi (Teor. II) appartiene ad (O_1) O . P. Un raggio, poi, di (O) O_1 . P interno ad M (O) P, dove M è tale che O è interno ad MO_1, incontri MP in N. Ma (Teor., § 12) è (O_1) O . P ≡ (O_1) O . N, onde (Teor. II) il detto raggio appartiene pure ad (O_1) O . P. Analogamente si dimostra che ogni raggio di questo, appartiene ad (O) O_1 . P. Dunque (O) O_1 . P ≡ (O_1) O . P, c. v. d.

COROLLARIO. — *Date due rette che s'incontrano, qualunque angolo piatto avente i lati su una di esse, e contenente uno dei due raggi dell'altra, che hanno l'origine nel punto comune alle due rette, non contiene l'altro dei due raggi ora detti.*

DIMOSTRAZIONE. — È conseguenza del teorema precedente, e del Teorema I di questo §.

15. TEOREMA I. — *Un segmento avente un (solo) suo punto interno in comune con un lato di un angolo convesso, possiede punti non appartenenti all'angolo.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, se un segmento *a* avente un suo punto interno A comune col lato (O) A di A (O) B, avesse tutti i suoi punti appartenenti a quest'angolo, l'angolo piatto (O) A . B conterrebbe (§ 8, § 14, Teor. II) entrambi i raggi in cui A divide la retta che contiene il segmento *a*. E ciò è assurdo (Coroll., § 14), c. v. d.

TEOREMA II. — *Due angoli convessi coincidenti, hanno i medesimi lati.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, essendo A (O) B ≡ A′ (O′) B′, sia (O′) A′ non coincidente con (O) A, nè con (O) B. Si indichi con M′ un punto di (O)′ A′, p. es., non posto sui lati di A (O) B. Allora M′ sarà interno ad un segmento PQ avente gli estremi P in (O) A e Q in (O) B. Inoltre essendo A (O) B ≡ A′ (O′) B′, *tutto* il segmento PQ apparterrà ad A′ (O′) B′. Ma PQ ha solamente M′ in comune con (O′) A′, giacchè nel caso contrario, ad A (O) B apparterrebbero dei punti di (O′) A′, solamente (Post. IX, Coroll., § 7) quelli di PQ, dunque veniamo ad un assurdo (Teor. I), c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due raggi non opposti distinti (O) A e (O) B, se ne considerino gli opposti (O) A′ e (O) B′ rispettivamente. La figura composta degli angoli convessi A (O) B′, B′ (O) A′, A′ (O) B, si chiamerà *angolo concavo*. I raggi (O) A e (O) B se ne diranno *lati*, e il punto O si chiamerà *vertice;* s'indicherà con [A (O) B].

III. — **Rette parallele.**

16. TEOREMA I. — *Date due rette* r *ed* s, *se esiste un angolo piatto avente i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s, *allora scelto un punto qualunque di* s, *esisterà un angolo piatto avente quel punto per vertice, i lati su* s, *e che contiene tutti i punti di* r.

DIMOSTRAZIONE. — Essendo A, O, B tre punti distinti di *r*, esista un angolo piatto (O) A . M che contenga tutti i punti di *s*. Siano A', O', B' tre punti distinti qualunque di *s*, e tali che O' appartenga ad A'B': dico che (O') A' . O contiene tutti i punti di *r*. A tal fine basta dimostrare che se P appartiene ad *r*, (O') P appartiene o ad O (O') B', o ad O (O') A'. Infatti giacchè tutti i punti di *s* appartengono ad (O) A . M, ed è (Teor., § 12) (O) A . M ≡ (O) A . O', possiamo (§ 13) scegliere un punto Q' di *s*, in modo che (O) Q' appartenga all'angolo B (O) O', se P è in (O) B. Ma allora (O) Q' avrà in comune con O'P un punto N, cioè (O') P incontra OQ' in N, e quindi (O') P appartiene ad O (O') Q', ed anche ad (O') A'. O, c. v. d.

TEOREMA II. — *Date due rette* r *ed* s, *se esiste un angolo piatto avente i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s, *allora scelto un punto qualunque della stessa* r, *esisterà un angolo piatto avente quel punto per vertice, i lati su* r, *e che contiene tutti i punti di* s.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti essendo (O) A . M ≡ (O) A . O', si ha (Teorema III, § 14): (O) A . M ≡ (P) A . O'. E giacchè (O) A . M per ipotesi contiene tutti i punti di *s*, anche (P) A . O' conterrà tutti i punti di *s*, c. v. d.

17. DEFINIZIONE. — Due rette tali che per qualunque punto di una qualsivoglia di esse, esiste un angolo piatto col vertice in quel punto, i lati su quella retta, e a cui appartengono tutti i punti dell'altra retta, si chiameranno *parallele*.

TEOREMA. — *Due rette parallele non hanno alcun punto comune.*

Infatti date due rette che s'incontrino, non esiste (§ 14) alcun angolo piatto col vertice nel loro punto comune, p. es., coi lati su una qualunque di esse, e che contenga tutti i punti dell'altra retta, c. v. d.

POSTULATO XI. — *Per un punto che non appartenga ad una data retta, passa una retta ed una sola parallela a questa.*

IV. — **Il piano.**

18. DEFINIZIONE. — La figura dei punti di tutte le rette che congiungono i punti di una retta *r* con un punto O non appartenente ad essa, e della parallela (Post. XI) a questa passante per O, chiamasi *piano*, e si indica con O*r*.

POSTULATO XII. — *Una retta avente due punti distinti in comune col piano, appartiene a questo.*

TEOREMA. — *La parallela ad una retta del piano passante per un punto di esso, appartiene a questo piano.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano P ed r un punto ed una retta del piano. l'uno non appartenente all'altra, ed s la (Post. XI) parallela ad r condotta da P: dico che anche s appartiene al piano. Infatti se A e B son due punti distinti di r, le (PA), (PB) appartengono (Post. XII) al piano. Se (P) B appartiene (Def., § 17 e Teor., § 12) all'angolo convesso M (P) A, p. es., essendo M un punto qualunque di s distinto da P, (P) B avrà in comune con AM un punto N. Ed ora, siccome M appartiene alla (AN), la quale (Post. XII) appartiene al piano, M appartiene pure a questo, e di conseguenza tutta la retta s apparterrà (Post. XII) al piano, c. v. d.

19. TEOREMA. — *Un piano è individuato da una retta e da un suo punto qualunque non appartenente alla retta.*

DIMOSTRAZIONE. — *a)* Sia il piano Or, ed O' un suo punto qualunque distinto da O, e che non appartiene ad r: dico che è $Or \equiv O'r$. Infatti si cominci ad osservare che la (OO') appartiene (Def., § 18) ad entrambi i piani Or e $O'r$. Ne segue che ogni retta congiungente O con un punto di r, appartiene (Post. XII) ad $O'r$, e ogni retta che congiunge O' con un punto di r, appartiene ad Or. Per il teorema del § precedente, poi, la parallela ad r passante per O appartiene ad $O'r$, e la parallela ad r per O', appartiene ad Or. Dunque è $Or \equiv O'r$.

b) Se r' è una retta di Or distinta da r e non passante per O, dico che è $Or \equiv Or'$. Giacchè r' appartiene ad Or, congiungendo O con un punto qualunque di r', si ottiene una retta la quale appartiene (Post. XII) al piano Or; così dicasi (Teor., § 18) per la parallela ad r' passante per O. Dunque ogni punto di Or' appartiene ad Or. Viceversa due rette qualunque congiungenti O con due punti di r', e distinte dalla parallela ad r passante per O, incontreranno r in due punti distinti, onde r appartiene (Post. XII) ad Or'. Ne segue che sia le rette che congiungono O con punti di r, sia la parallela ad r passante per O, apparterranno (Post. XII, e Teor., § 18) ad Or'. Dunque: $Or \equiv Or'$.

c) Se O' ed r' sono un punto ed una retta di Or, ed O' non appartiene ad r', si ha: $Or \equiv O'r \equiv O'r'$, c. v. d.

COROLLARIO I. — *Il piano è individuato da tre punti qualunque non appartenenti ad una stessa retta.*

COROLLARIO II. — *Due rette parallele o che s'incontrano, individuano un piano.*

COROLLARIO III. — *Due rette del piano o sono parallele, o hanno un punto comune.*

COROLLARIO IV. — *Essendo* r, r', r'' *tre rette del piano, se* r *ed* r' *sono parallele, ed* r'' *incontra* r, r'' *incontrerà pure* r'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti se non l'incontrasse, r'' ed r' sarebbero (Coroll. III) parallele, e per il punto comune ad r e r'', passerebbero queste due rette entrambe parallele alla r', e ciò è (Post. XI) assurdo.

20. TEOREMA I. — *Data una qualunque retta del piano, questo può essere considerato come composto di due angoli piatti distinti, aventi il vertice in un punto qualunque della retta, e i lati su questa medesima.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia (OB) una retta del piano: si conduca in questo per O un'altra retta qualunque (OC). Siano inoltre A e D due punti tali che O sia interno ad AB, ed anche a CD. Ogni punto appartenente ad (O) A . C, ovvero ad (O) A . D, appartiene (Teor., § 12, Def., § 9 e Post. XII) al piano. Viceversa se P è un punto di questo, la parallela ad (AB) per esso, seca (Coroll. IV, § 19) il raggio (O) C, p. es. (Teor. § 8), onde essa appartiene (Def., § 17 e Teor., § 12) all'angolo (O) A . C.

Che, infine, (O) A . C e (O) A . D non hanno alcun punto comune fuori di (OA), segue dal coroll. del § 12, e dal Teor. I, del § 14, c. v. d.

TEOREMA II. — *Data una retta del piano, questo si può considerare come composto di due parti distinte, tali che due punti di una stessa parte individuano un segmento non avente alcun punto comune colla retta; mentre due punti appartenenti a parti diverse, sono congiunti da un segmento che incontra la data retta.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia r una data retta del piano: questo può considerarsi (Teor. I) come composto di due parti, ciascuna delle quali è un angolo piatto col vertice in un punto arbitrario di r, e i lati su questa medesima retta. Siano ora A e B due punti del piano fuori di r: se ad AB appartiene un punto M di r, i punti A e B non appartengono ad uno stesso dei due detti angoli piatti (Teor. I e Teor. I, § 14). Onde se A e B appartengono ad uno stesso di questi, il segmento AB non incontra r. Viceversa se AB non contiene alcun punto di r, A e B appartengono ad uno stesso dei sopradetti due angoli piatti. Infatti (Corollario III, § 19) o la (AB) è parallela ad r, e allora (Def., § 17) l'assunto è dimostrato. Ovvero (AB) seca r in N, e allora deve essere (N) A $\equiv$ (N) B, giacchè se così non fosse, i raggi (N) A e (N) B sarebbero opposti, ed N sarebbe interno (Coroll., § 8) ad AB, contro l'ipotesi. Onde A e B appartengono ad uno stesso dei due angoli piatti più volte menzionati.

DEFINIZIONE. — Ciascuna delle due parti distinte in cui il piano resta diviso da una sua retta qualunque, dicesi *semipiano*. Un semipiano, dunque, non è altro che uno degl'infiniti angoli piatti coincidenti, aventi i lati sopra una data retta, e passanti per uno stesso punto fuori di questa. La data retta si chiama *asse* del semipiano.

V. — Segmenti eguali.

21. POSTULATO XIII. — *Dato un segmento* a, *resta individuata una classe di segmenti, che soddisfa ai postulati seguenti.*

DEFINIZIONE. — Ciascuno b di questi, si dirà *eguale* ad a, e si scriverà $a = b$.

POSTULATO XIV. — *È* a = a.

POSTULATO XV. — *Se è* a = b, *è pure* b = a.

POSTULATO XVI. — *Se è* a = b *e* b = c, *è* a = c.

POSTULATO XVII. — *Se è* AB = A'B', *e* C *è un punto di* AB, *esisterà un punto* C' *di* A'B', *tale che è* AC = A'C', *e* BC = B'C'.

TEOREMA. — *Se è* AB = A'B', *e* C *è un punto di* AB, *esisterà un punto* C'_1 *di* A'B', *tale che è* AC = B'C'_1 *e* BC = A'C'_1.

DIMOSTRAZIONE. — Basta applicare il postulato precedente, ai due segmenti eguali AB e B'A' (§ 3).

POSTULATO XVIII. — *Se è* AB = A'B', AC = A'C', BC = B'C', *con* C *interno ad* AB, *sarà* C' *interno ad* A'B'.

22. TEOREMA. — *Un segmento* AB *non è eguale ad un segmento* MN *sua parte.*

DIMOSTRAZIONE. — In primo luogo sia, p. es., M ≡ A; allora se fosse AB = MN, siccome si ha pure (Post. XV) AN = MB, e (Post. XIV) BN = NB, con N interno ad AB, dovrebbe (Post. XVIII) essere B interno ad MN, e ciò non è (Post. III).

Se poi nessuno dei punti M ed N coincide con A o con B, si osservi che se fosse AB = MN, dovrebbe (Post. XVII) esistere un punto C di MN tale che sia BM = MC (e AM = NC). Ma per il caso già dimostrato BM non è eguale ad MC, dunque AB non è eguale ad MN, c. v. d.

OSSERVAZIONE. — Dato un segmento AB, e un suo qualunque punto C, per i Post. XIV e XVII, esiste un punto C' di AB, *unico* per il teorema precedente, tale che è AC = BC'. Questa proprietà del segmento si indica dicendo che *il segmento è invertibile.*

23. POSTULATO XIX. — *Dato un raggio* (O) P *e un segmento* MN, *esiste un punto* A *di* (O) P, *tale che è* OA = MN.

Osserviamo che il punto A è *unico* in virtù del teorema del § 22.

24. TEOREMA. — *Dati due segmenti* a *e* b, *se per un raggio* (O) P *si verifica che essendo* N *ed* M *punti di questo, è* N *interno ad* OM, *essendo* ON = a *e* OM = b, *allora per qualsivoglia altro raggio* (O') P', *sarà* N' *interno ad* O'M', *qualora sia,* O'N' = a *e* O'M' = b *con* N' *ed* M', *punti di* (O') P'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti fissato M' in modo che sia O'M' = OM = *b*, per il Post. XVII esisterà un punto N'_1 di O'M', tale che è O'N'_1 = ON, cioè O'N'_1 = *a*. Ma (§ 23) è N' ≡ N'_1, dunque... c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti *a* e *b*, e scelto un raggio qualunque (O) P, siano M ed N quei due punti di (O) P, pei quali si ha ON = *a*, OM = *b*. I punti M ed N son tali (Teor. e Def., § 6) che o N appartiene ad OM, o M ad ON. Se p. es. N appartiene ad OM, ed N non coincide con M, diremo che *a* è *minore* di *b*, e che *b* è *maggiore* di *a*, e scriveremo $a < b$ ed anche $b > a$. Se poi fosse N ≡ M, sarebbe (Post. XVI e XIV) $a = b$. Queste definizioni sono giustificate dal teorema precedente.

25. TEOREMA. — *Dati due segmenti* AB *e* A'B', *se un punto* C *di* AB *e un altro* C' *di* A'B', *son tali che è* AC = A'C' *e* BC = B'C', *sarà* AB = A'B'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti sia (§ 23) B'_1 quel punto di $(A')B'$ tale che è $AB = A'B'_1$: sarà (Post. XVII e § 23) $BC = B'_1C'$, per cui (Post. XVI) anche $B'C' = B'_1C'$, e infine (§ 23) $B' \equiv B'_1$, c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti a e b, e scelti i punti A, C e B sopra una stessa retta *qualunque*, in modo che sia $AC = a$, $BC = b$, e C interno ad AB, chiameremo questo segmento AB *somma* di a e b, e scriveremo $AB = a + b$.

Si osservi che da questa definizione e dal teorema precedente, segue che è $a + b = b + a$, cioè, come diremo, la somma gode della proprietà *commutativa*.

26. TEOREMA. — *Sia* $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, C *interno ad* AB *e* C' *interno ad* $A'B'$: *allora sarà* $BC = B'C'$.

DIMOSTRAZIONE. — Sia infatti B'_1 quel (§ 23) punto di $(C')B'$, per cui è $CB = C'B'_1$. Allora sarà (Teor., § 25) $AB = A'B'_1$, ed anche (Postulato XVI) $A'B' = A'B'_1$, onde (§ 23) $B' \equiv B'_1$, c. v. d.

DEFINIZIONE. — Dati due segmenti a e b con $a < b$, e scelti i punti A, C e B sopra uno stesso raggio $(A)B$ in modo che sia $AC = a$, $AB = b$ (e quindi (§ 24) C interno ad AB) chiameremo BC *differenza* di b e a, e scriveremo $BC = b - a$.

VI. — Figure eguali.

27. DEFINIZIONE. — Due figure F ed F' si dicono *eguali*, e si scrive $F = F'$, se i loro punti si corrispondono biunivocamente, in modo che il segmento che unisce due punti qualunque di F, è eguale a quello che congiunge i due punti corrispondenti di F'. Una siffatta corrispondenza si dirà *corrispondenza di eguaglianza*.

OSSERVAZIONI. — È chiaro che è $F = F$ (Post. XIV). Se è $F = F'$, è pure $F' = F$ (Post. XV); se è $F = F'$, $F' = F''$, sarà (Post. XVI) $F = F''$.

Date due figure eguali F e F', a punti di F interni al segmento che congiunge due punti qualunque di essa, corrispondono (Post. XVIII) in F' punti interni al segmento che unisce i punti corrispondenti *(omologhi)* di questa.

Dalla data definizione segue pure che sono eguali due figure corrispondenti *(omologhe)* in figure eguali. Si osservi inoltre, come nell'ipotesi che F e F' siano segmenti, se sono eguali secondo la data definizione, essi soddisferanno ai postulati del capitolo precedente; e (Post. XVII e Teor., § 26) viceversa.

28. TEOREMA. — *Due rette qualunque sono figure eguali, e la corrispondenza d'eguaglianza è individuata qualora sian date due coppie di punti omologhi (in modo che siano eguali i due segmenti corrispondenti così determinati).*

DIMOSTRAZIONE. — Siano le rette (AB) e $(A'B')$, con $AB = A'B'$: dico che fra i punti delle due rette si può stabilire una ed una sola corrispon-

denza d'egnaglianza, in modo che siano omologhi A, A′ e B, B′. Infatti dato un punto qualunque P di (AB), p. es. in (B) A, si assuma come suo omologo il punto P′ di (B′) A′, tale che sia $B'P' = BP$ (§ 23). Analogamente si determini il punto Q′ di (A′B′), omologo di un altro punto Q di (AB). Ed ora si ha $PQ = P'Q'$, per il teorema del § 26 se P′ e Q′ appartengono entrambi a (B′) A′, o per il teorema del § 25 se uno di essi appartiene a (B′) A′, mentre l'altro appartiene al raggio opposto a questo, c. v. d.

COROLLARIO. — *Due raggi qualunque sono figure eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Si dimostra come sopra.

29. TEOREMA. — *Ogni figura eguale ad una retta, è una retta.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia $F' = F'$, essendo $F \equiv (AB)$: dico che pure F′ è una retta. Infatti ai punti A e B saranno omologhi due punti A′ e B′ di F′, tali che è $AB = A'B'$. Se ora P′ è un altro punto qualunque di F′, e P è il suo omologo in F, giacchè A, B e P sono in una stessa retta, P′ appartiene (§ 27) ad (A′B′). Viceversa se Q'_1 è un punto qualunque di questa, e Q è il punto di (AB) che ad esso corrisponde nella relazione di eguaglianza fra la stessa (AB) e la (A′B′), con A, A′ omologhi, e B, B′ omologhi (Teor., § 28), sarà $Q'_1 \equiv Q'$ (§ 27), ove Q′ è l'omologo di Q in F′. Concludiamo che è $F' \equiv (A'B')$, c. v. d.

COROLLARIO. — *Ogni figura eguale ad un raggio, è un raggio, e nella corrispondenza d'eguaglianza sono omologhi le loro origini.*

Infatti se A e A′ sono omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza che intercede fra (O) A e (O_1) A′, ai punti interni ad OA, corrisponderanno (§ 27) i punti interni ad O′A′, detto O′ l'omologo di O. Ai punti Q tali che è A interno ad OQ, corrisponderanno (§ 27) punti Q′ tali che è A′ interno ad O′Q′. Ne segue $O_1 \equiv O'$, giacchè se cosi non fosse, i punti di $O'O_1$ non avrebbero i loro omologhi in (O) A, e ciò è assurdo, c. v. d.

30. TEOREMA. — *Se due angoli convessi sono eguali, nella corrispondenza di eguaglianza saranno omologhi i vertici, e ai lati dell'uno corrisponderanno (in un certo ordine), i lati dell'altro.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti sia $A\,(O)\,B = A_1\,(O_1)\,B_1$, e indichiamo con (O′) A′ e (O′) B′ gli omologhi di (O) A e (O) B rispettivamente. Allora nella data corrispondenza d'eguaglianza, ad A(O)B sarà omologo A′(O′)B′ (§ 27). Onde, per l'ipotesi, si deve avere $A'(O')\,B' \equiv A_1\,(O_1)\,B_1$, da cui si deduce (§ 15, Teor. II) quanto si voleva dimostrare.

31. POSTULATO XX. — *Se due angoli convessi* $A\,(O)\,B$ *e* $A'\,(O')\,B'$ *sono eguali, e sono omologhi* (Teor., § 30) (O) A *e* (O′) A′, *e quindi anche* (O) B *e* (O′) B′ *esisterà un'altra corrispondenza d'eguaglianza fra gli stessi angoli, nella quale sono omologhi* (O) A *e* (O)′ B′ *e quindi* (O) B *e* (O′) A′.

TEOREMA. — *Se è* $A\,(O)\,B = A'\,(O)'\,B'$, $OA = O'A'$ $OB = O'B'$, *sarà* $AB = A'B'$.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti possiamo (Post. XX) sempre supporre che nella corrispondenza d'eguaglianza che intercede fra i due dati angoli,

siano omologhi (O) A e (O') A', (O) B e (O') B'. Ne segue, per l'ipotesi fatta, che sono pure omologhi A, A', e B, B', onde è AB = A'B', c. v. d.

32. POSTULATO XXI. — *Se è* AC = AC', *e* BC = BC', *con* C *e* C' *posti entrambi in uno stesso semipiano avente* (AB) *per asse sarà* C ≡ C'.

TEOREMA. — *Se* (O) B *e* (O) P *appartengono ad uno stesso semipiano avente* (OA) *per asse, e se è* A (O) B = A (O) P, *sarà* (O) B ≡ (O) P.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti, supponiamo che nella relazione di eguaglianza che intercede fra A (O) B e A (O) P, sia (O) A tautologo (Post. XX), e sia OP = OB. Per il teorema precedente sarà AB = AP, onde (Postulato XXI) è B ≡ P, e quindi (O) B ≡ (O) P, c. v. d.

33. TEOREMA. — *Se* O (B) *appartiene ad* A (O) C e (O') B' *ad* A' (O') C', *se inoltre è* A(O)B=A'(O')B', A(O)C=A'(O')C', *allora sarà* B(O)C=B'(O')C'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti possiamo (Post. XX) supporre che nella corrispondenza di eguaglianza che intercede fra A (O) C e A' (O') C', siano omologhi (O) A e (O') A'. Ma allora ad (O) B sarà omologo un certo raggio che dovendo formare con (O') A' e nell'angolo piatto (O') A' . C' un angolo eguale ad A (O) B, coinciderà (Teor., § 32) con (O') B'. Per cui sarà B (O) C = B' (O') C', come figure corrispondenti in figure eguali.

34. POSTULATO XXII. — *Dato un raggio* (O) A, *in ogni angolo piatto avente* (O) A *per un lato, esiste un raggio formante con* (O) A *un angolo convesso eguale ad un angolo convesso dato.*

OSSERVAZIONE. — Questo raggio è *unico* in virtù del teorema del § 32.

35. TEOREMA. — *Due angoli piatti sono figure eguali, e precisamente esistono due diverse corrispondenze d'eguaglianza fra i loro punti, tali che in esse siano omologhi i lati dei due angoli.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano gli angoli piatti (O) A . B e (O') A' . B', e P un punto qualunque del primo di essi. Sia inoltre (O') M' quel raggio (§ 34) di (O)' A' . B', tale che è A' (O') M' = A (O) P, inoltre sia (§ 23) P' quel punto di (O') M', per cui è O'P' = OP. Assumeremo P' come omologo di P, ottenendo così, al variare di P, una corrispondenza biunivoca fra i punti dei due angoli piatti dati, nella quale sono omologhi (O) A e (O') A', e i raggi a questi opposti. Vogliamo dimostrare che questa corrispondenza è d'eguaglianza.

Infatti se Q e Q' sono altri due punti omologhi, giacchè (Teor., § 33) è P (O) Q = P' (O') Q', si ha (Teor., § 31) PQ = P'Q'.

In virtù poi del Post. XXI, la corrispondenza d'eguaglianza è unica, una volta che siano omologhi (O) A e (O') A'.

Che, infine, si possa stabilire un'altra relazione d'eguaglianza diversa da questa, segue dall'osservare che ad (O) A si può far corrispondere invece di (O') A', il raggio a questo opposto, c. v. d.

COROLLARIO. — *Due semipiani sono in infiniti modi figure eguali.*

36. DEFINIZIONE. — Due angoli convessi diconsi *opposti al vertice,* quando i lati dell'uno, sono raggi opposti ai lati dell'altro.

TEOREMA. — *Gli angoli convessi opposti al vertice sono eguali fra loro.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano opposti i raggi (O) A, (O) B', e (O) B, (O) A': dico che è A (O) B = A' (O') B'. Infatti, stabilita la corrispondenza di eguaglianza (Teor., § 35) fra gli angoli piatti (O) B.A e (O) B' . A', in modo che siano omologhi (O) B e (O) B', (e quindi (O) A' e (O) A), ad (O) A di (O) B . A corrisponda il raggio (O) A'_1 di (O) B' . A'. Ne segue che deve essere A (O) A' = A'_1 (O) A, e quindi (Teor., § 32) (O) A' ≡ (O) A'_1, e di conseguenza A (O) B = A' (O) B' come figure corrispondenti in figure eguali, c. v. d.

37. OSSERVAZIONE. — Si osservi che dato un segmento AB, per ogni suo punto M, esiste (§ 22) un altro punto M' tale che è AM = BM'.

POSTULATO XXIII. — *In ogni segmento* AB *esiste un punto* O, *tale che è* AO = OB. Cioè con altre parole: *In ogni segmento esiste un punto che lo divide in due parti eguali.*

Insomma si ammette che esista (almeno) una posizione di M, per cui sia M ≡ M'. Un siffatto punto dicesi punto *medio* del dato segmento.

38. TEOREMA. — *Ogni segmento ammette un sol punto medio.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti se M ed M_1 fossero due punti medi di AB, e se M, p. es., appartiene (Post. IV) ad AM_1, essendo $AM_1 = BM_1$, esisterebbe (Post. XVII) un punto N di BM_1, tale che è AM = BN, per cui anche (Post. XVI) BM = BN. E ciò è (Post. III e Teor., § 22) assurdo, c. v. d.

39. DEFINIZIONE. — Due punti diconsi *opposti* rispetto al punto medio del segmento che li congiunge. Due figure si chiamano *opposte* rispetto ad un punto O, se i loro punti sono riferiti biunivocamente, e se due qualunque punti omologhi, sono opposti rispetto ad O.

TEOREMA. — *Se* A, A' *e* B, B' *sono due coppie di punti opposti rispetto ad uno stesso punto* O, *è* AB = A'B'.

DIMOSTRAZIONE. — Infatti oltre di essere, per ipotesi, OA = OA' e OB = OB', è pure (Teor., § 36) A (O) B = A' (O) B', onde (Teor., § 31) si ha: AB = A'B', c. v. d.

COROLLARIO. — *Due figure opposte rispetto ad uno stesso punto, sono eguali.*

40. TEOREMA. — *Per il vertice di un angolo convesso, passa una semiretta ed una sola, che lo divide in due parti eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia A (O) B l'angolo dato, e siano M ed M' due punti dei suoi lati, in modo che sia OM = OM'; sia inoltre N il punto medio di MM'. Dico che è A (O) N = B (O) N. Infatti nella corrispondenza d'eguaglianza (Teor., § 35) fra gli angoli piatti (O) N . A e (O) N . B, avente come tautologhi i punti di (O) N, al punto M corrisponda un certo punto M_1. Siccome intanto è ON = ON, OM = OM_1, e NM = NM_1 sarà pure OM' = OM_1 e NM' = NM_1, onde (Post. XXI) è M' ≡ M_1. Ne segue che nella sopradetta corrispondenza d'eguaglianza, sono omologhi (O) A e (O) B, per cui si ha A (O) N = B (O) N, come figure omologhe in figure eguali. Che, poi, solamente (O) N divide A (O) B in due parti eguali, segue dall'osservare che un raggio (O) N_1 siffatto, contiene il punto medio di ogni segmento

come MM', e ciò sia per la corrispondenza d'eguaglianza che intercederebbe fra A (O) N_1 e B (O) N_1, sia, pure, in virtù del teorema del § 31.

DEFINIZIONE. — La semiretta che divide un dato angolo convesso in due parti eguali, dicesi *bisettrice* di questo.

41. TEOREMA. — *Le bisettrici di due angoli convessi opposti al vertice, sono opposte.*

DIMOSTRAZIONE. — A tal fine basterà dimostrare che se (O) M è la bisettrice di A (O) B, la semiretta (O) M' opposta ad (O) M. è la bisettrice di A' (O) B'. E infatti si ha: A(O)M = B (O) M, A (O) M = A' (O) M', B (O) M = B' (O) M', onde è A' (O) M' = B' (O) M', c. v. d.

42. DEFINIZIONE. — Dati tre punti A, B, C non situati in una stessa retta, chiameremo *triangolo* la figura costituita dai punti dei segmenti AB, BC, CA, e dai punti dei segmenti aventi gli estremi su due di questi tre segmenti. I punti A, B e C si chiamano *vertici* del triangolo ABC; AB, BC, CA ne sono i *lati*. Gli angoli convessi B (A) C, A (C) B, e C (B) A, si dicono *angoli del triangolo*. Diconsi *opposti* A e BC, B e AC, C e AB. La figura costituita dai lati di un triangolo si chiama *contorno* di questo.

TEOREMA. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, e gli angoli fra questi compresi eguali, sono eguali, e hanno i rimanenti lati eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti i dati triangoli sono figure corrispondenti negli angoli eguali per ipotesi.

43. TEOREMA. — *Se due triangoli hanno i lati rispettivamente eguali, essi hanno eguali gli angoli opposti a lati eguali, ed essi stessi* (Teor., § 42) *sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia AB = A'B', BC = B'C', CA = C'A', dico che è A(C)B = A'(C')B'. Infatti sia (C) A_1 quel raggio (§ 34) di (C) B . A, per cui è B (C) A_1 = B' (C') A', e sia, inoltre, CA_1 = C'A'. Si deduce (Teorema, § 42) A_1B = A'B', e quindi (Post. XXI) $A \equiv A_1$, per cui A (C) B = = A' (C') B'. Analogamente si dimostra essere B (A) C = B' (A') C', e A (B) C = A' (B') C', c. v. d.

44. DEFINIZIONE. — Dato un triangolo ABC, i punti che ad esso appartengono, senza giacere in alcuno dei lati, diconsi *interni* ad ABC.

TEOREMA. — *Ogni punto interno ad un triangolo, è interno ad un segmento avente un estremo in uno qualunque dei vertici e l'altro estremo nel lato opposto.*

DIMOSTRAZIONE. — Per la data definizione di triangolo (§ 42), se P è un punto interno ad un dato triangolo ABC, esso è interno ad un segmento MN, avente gli estremi su due lati di ABC. Vogliamo dimostrare che P è interno ad un segmento avente un estremo in A, p. es., e l'altro sul lato opposto BC. Infatti consideriamo prima il caso che essendo interno M ad AC, N lo sia ad AB. Allora (A) P incontra (Post. IX) BC in un punto interno D. Siccome poi entrambi i punti M ed N appartengono a quella delle due parti in cui il piano è diviso (Teor. II, § 20) da (BC), la quale contiene A, MN non incontra (BC), onde A e P sono

in una stessa parte di piano rispetto a (BC). Se ne deduce che D non è in AP, e quindi (Def., § 6) è P in AD.

Consideriamo ora il caso in cui mentre M è in AC, N sia in BC. Intanto (A) N è interno a B (A) C, onde (Teor. I, § 10) anche (A) P appartiene a B (A) C, e quindi esso incontrerà BC in un certo punto D. Siccome, inoltre, AM non incontra (BC), i punti A ed M appartengono (Teor. II, § 20) ad una stessa delle due parti in cui (BC) divide il piano. Ma anche P appartiene a questa stessa parte, onde AP non incontra (BC), per cui P è in AD.

Analogamente si dimostra che P è interno ad un segmento avente un estremo in B e l'altro in AC, e ad un altro segmento avente un estremo in C e l'altro in AB.

OSSERVAZIONE. — Il triangolo dunque è la figura dei punti che appartengono ai segmenti aventi un estremo fisso comune, e l'altro appartenente ad un segmento dato; la retta di questo non passante per il punto fisso.

COROLLARIO. — *Due punti interni ad un triangolo, sono congiunti da un segmento tutto interno al triangolo.*

45. OSSERVAZIONE. — Se A, B, C e A′, B′, C′ sono due terne di punti omologhi in una corrispondenza d'eguaglianza, e i punti A, B e C (e quindi A′, B′, C′) non sono allineati, ai punti interni al triangolo ABC corrisponderanno i punti interni ad A′B′C′.

TEOREMA I. — *Se due triangoli coincidono, hanno gli stessi lati.*

DIMOSTRAZIONE. — Sia $ABC \equiv A'B'C'$; se, p. es., A′B′ non fosse un lato di ABC, esisterebbe un punto M interno ad A′B′ e ad ABC. Allora M deve (Def., § 42) essere interno ad un segmento PQ avente gli estremi sul contorno di ABC. Ma per essere $ABC \equiv A'B'C'$, tutti i punti di PQ apparterrebbero ad A′B′C′, e quindi (Teor., § 44) all'angolo B′ (A′) C′, e ciò (Teor. I, § 15) è assurdo, c. v. d.

TEOREMA II. — *Se due triangoli sono eguali, ai vertici dell'uno saranno omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza, i vertici dell'altro.*

DIMOSTRAZIONE. — Siano ABC e A′B′C due triangoli eguali, e dicansi A_1, B_1 e C_1 i punti del secondo triangolo omologhi ai vertici A, B, C del primo, nella corrispondenza d'eguaglianza.

Si ha: $A'B'C' \equiv A_1B_1C_1$, per cui (Teor. I) ai vertici di ABC sono omologhi nella corrispondenza d'eguaglianza, i vertici A′, B′ e C′, c. v. d.

46. TEOREMA. — *Se due triangoli sono eguali, essi hanno i lati rispettivamente eguali.*

DIMOSTRAZIONE. — Infatti ai vertici dell'uno corrispondono (Teor., § 45) i vertici dell'altro, per cui ai lati dell'uno i lati dell'altro, c. v. d.

COROLLARIO. — *Se due triangoli sono eguali, essi hanno eguali gli angoli aventi vertici omologhi.*

DIMOSTRAZIONE. — Segue dal teorema precedente e dal Teor. del § 43.

GIUSEPPE MARLETTA.

Catania, dicembre 1904.

SULLA CONGRUENZA E SIMMETRIA DELLE FIGURE[1]

§ 1. — Figure simmetriche rispetto ad un punto.

DEFINIZIONE I. — Due punti si dicono **simmetrici** rispetto al punto di mezzo del segmento da essi determinato; questo punto dicesi **centro di simmetria.**

DEFINIZIONE II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un punto,** se i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto a questo punto.

TEOREMA I. — *La figura simmetrica ad un segmento rispetto ad un punto è un segmento eguale e parallelo ad esso.*

Infatti se AB è il segmento dato ed A', B' sono i punti simmetrici ad A, B rispetto al centro di simmetria O, dall'eguaglianza dei due triangoli OAB, OA'B' si ricava appunto che il segmento A'B' è eguale e parallello ad AB.

TEOREMA II. — *Due figure simmetriche rispetto ad un punto sono eguali fra loro.*

Infatti ad ogni punto dell'una corrisponde uno ed un solo punto dell'altra; inoltre, per il Teor. precedente, i segmenti dell'una sono eguali ai segmenti dei punti corrispondenti dell'altra. (2)

§ 2. — Segmenti congruenti e simmetrici sulla retta.

DEFINIZIONE I. — Due segmenti eguali d'una stessa retta si dicono **congruenti** se hanno lo stesso verso; si dicono **simmetrici** se sono di verso opposto.

Da questa definizione si deducono immediatamente i seguenti corollari:

COROLLARIO I. — *Due segmenti congruenti o simmetrici ad uno stesso segmento sono congruenti fra loro.*

COROLLARIO II. — *Due segmenti l'uno congruente e l'altro simmetrico ad uno stesso segmento sono simmetrici fra loro.*

---

(1) Negli *Elementi di Geometria* di GIUSEPPE VERONESE è contenuta una breve "Nota sulle figure congruenti e simmetriche„. Siccome però tale argomento non fa parte del programma per le nostre scuole secondarie, esso non è trattato comunemente nei libri di testo. Presentando quindi ai lettori del *Periodico* questo breve studio, spero di non fare cosa del tutto priva d'interesse. Nel compilarlo sono partito appunto dalle definizioni che si trovano nella Nota ricordata, e mi sono servito in parte anche di quanto lo stesso Autore espone sul medesimo argomento ne' suoi *Fondamenti di Geometria.*

(2) Vedi VERONESE, *Elementi di Geometria*, parte I, ediz. III, pag. 22.

Come il lettore riconoscerà facilmente, in questa dimostrazione si considerano soltanto le figure rettilinee; però se le due figure fossero non rettilinee, esse sarebbero pure eguali, poichè si corrisponderebbero nelle due figure rettilinee eguali determinate dai medesimi punti.

DEFINIZIONE II. — Dato un punto X del segmento AB, se X′ è il punto del segmento ad esso congruente o simmetrico A′B′, tale che $AX = A'X'$ (e quindi anche tale che $BX = B'X'$), i due punti X, X′ si dicono **corrispondenti nella congruenza o simmetria** dei segmenti dati.

E così pure dati due segmenti congruenti o simmetrici, i segmenti determinati da punti corrispondenti si dicono **corrispondenti nella congruenza o simmetria** dei segmenti dati.

TEOREMA I. — *Due segmenti corrispondenti in due segmenti congruenti o simmetrici sono rispettivamente congruenti o simmetrici.*

Se AB, A′B′ sono due segmenti congruenti o simmetrici, e se X, X′; Y, Y′ sono due coppie di punti corrispondenti, essendo (Def. II): $AX = A'X'$ ed $AY = A'Y'$ si ha pure:

$$AY - AX = A'Y' - A'X'$$

ossia

$$XY = X'Y'.$$

Ma siccome in segmenti congruenti i punti corrispondenti si succedono nello stesso verso, mentre in segmenti simmetrici si succedono in verso opposto, nel primo caso XY ed X′Y′ saranno congruenti, nel secondo simmetrici.

DEFINIZIONE III. — Se due segmenti eguali hanno due punti corrispondenti che coincidono in un punto, questo si dice **punto unito** dei due segmenti.

TEOREMA II. — *Se due segmenti congruenti hanno un punto unito, coincidono.*

Infatti se X, X′ sono due punti corrispondenti in due segmenti congruenti AB, A′B′ e coincidono, stabilita la corrispondenza fra i due segmenti, si ha che AX ed A′X′ sono congruenti (Teor. I); ma affinchè ciò avvenga è necessario che anche A coincida con A′. Così pure B coinciderà con B′.

TEOREMA III. — *Se due segmenti simmetrici* AB, A′B′ *hanno una parte in comune* BB′, *il punto medio di* BB′ *è un punto unito per i due segmenti.*

Indicando con X questo punto medio ed essendo $BX = B'X$, al punto X considerato come appartenente ad AB corrisponde il punto X stesso considerato come appartenente ad A′B′. In particolare se nei due segmenti gli estremi B e B′ coincidono in un punto, questo è un punto unito.

TEOREMA IV. — *Se due segmenti simmetrici hanno un punto unito, due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici rispetto ad esso.*

Infatti se X è il punto unito di due segmenti simmetrici, e Y, Y′ sono due punti corrispondenti qualunque, i due segmenti XY, XY′ sono essi pure simmetrici (Teor. I); quindi i punti Y, Y′ sono simmetrici rispetto ad X.

COROLLARIO. — *Due segmenti simmetrici non possono avere che un punto unito.*

TEOREMA V. — *Se due segmenti simmetrici* AB, AB′ *non hanno alcun punto unito, due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici rispetto al punto medio del segmento* BB′.

Se X è questo punto medio si ha intanto $XB = XB'$; inoltre se Y, Y′ sono due punti corrispondenti in AB ed in A′B′, si ha: $BY = B'Y'$. Da ciò si ricava:

$$XB + BY = XB' + B'Y'$$

ossia

$$XY = XY'.$$

Ma Y e Y′ sono da parti opposte rispetto ad X; qnindi sono simmetrici rispetto ad esso.

Osservazione. — Dai teoremi precedenti risulta che: Dati due segmenti simmetrici su una retta, esiste sempre un punto di essa, rispetto al quale due punti corrispondenti qualunque sono simmetrici.

§ 3. — Figure simmetriche rispetto ad una retta.

Definizione I. — Due punti distinti aventi la medesima distanza da una retta e situati sulla stessa perpendicolare a questa retta si dicono **simmetrici rispetto alla retta** e questa si chiama **asse di simmetria.**

Osservazione I. — I punti dell'asse sono simmetrici di se stessi.

Osservazione II. — Due punti simmetrici rispetto ad un asse sono simmetrici rispetto al punto comune all'asse ed alla retta alla quale appartengono.

Definizione II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un asse** quando i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto a quest'asse.

Dalle precedenti definizioni si ricava il seguente:

Corollario. — *Le due parti del piano in cui esso è diviso da una sua retta sono simmetriche rispetto ad essa.*

Teorema I. — *La figura simmetrica ad un segmento, rispetto ad un asse, è un segmento eguale ad esso. Le rette dei due segmenti s'incontrano in un punto dell'asse e formano con esso angoli eguali.*

Consideriamo prima il caso di un segmento AB avente un estremo, per es. B, sull'asse di simmetria *s*. Allora il punto B′ simmetrico di B, coincide con esso; se P è il punto d'incontro della retta AA′ con l'asse, i due triangoli ABP, A′B′P avendo BP in comune, $PA = PA'$ e gli angoli in P retti, sono eguali; quindi si ha anche: $AB = A'B'$ e $\widehat{ABP} = \widehat{A'B'P}$.

Sia dato ora un segmento AC tale che non abbia un estremo sull'asse, ma che la retta alla quale appartiene incontri l'asse, nel punto B, coincidente con B′. Condotta per C la perpendicolare all'asse e indicando con C′, P′ i punti d'incontro con la A′B′ e con l'asse, dall'eguaglianza dei triangoli CBP′, C′BP′ si ricava intanto: $CP' = C'P'$, ossia C′ è il simmetrico di C; inoltre, essendo pure $CB = C'B'$, risulta $AC = A'C'$.

Infine se il segmento dato è perpendicolare all'asse di simmetria, lo è pure il segmento simmetrico e i due segmenti appartengono

ad una stessa retta; se esso è parallelo all'asse, lo è pure il segmento simmetrico e le rette dei due segmenti incontrano l'asse nel suo punto all' infinito.

TEOREMA II. — *Due figure simmetriche rispetto ad una retta sono eguali.*

La dimostrazione è identica a quella del teor. II, § 1.

TEOREMA III. — *Due figure situate in un medesimo piano* (1) *e simmetriche rispetto ad una retta di esso sono di verso opposto.*

Consideriamo prima due triangoli, e per maggiore semplicità supponiamo che essi abbiano un lato BC in comune e appartenente all'asse di simmetria, mentre i vertici A, A′ sono due punti simmetrici rispetto ad esso. Evidentemente gli angoli $A\widehat{B}C$, $A'\widehat{B}C$ aventi il lato BC in comune ed i due lati BA, BA′ da parti opposte rispetto ad esso, sono di verso opposto; quindi, poichè i versi di un triangolo sono quelli d'uno dei suoi angoli, anche i triangoli ABC, A′BC sono di verso opposto.

Ricordando ora che gli angoli corrispondenti di due figure eguali, in uno stesso piano, sono diretti nel medesimo verso o in verso opposto se lo sono due qualunque di essi, (2) il teorema si potrà estendere a due figure qualunque.

TEOREMA IV. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due assi paralleli sono paralleli fra loro.*

Se il segmento dato è parallelo ai due assi la cosa è evidente. Negli altri casi basta osservare che la retta del segmento dato forma con le rette dei due segmenti ad esso simmetrici due angoli alterni interni oppure due angoli corrispondenti eguali, secondochè i due assi sono da parti opposte rispetto al segmento dato oppure dalla stessa parte (Teor. I).

TEOREMA V. — *Due punti* A′, A″ *simmetrici ad uno stesso punto* A *rispetto a due assi perpendicolari* s, s′ *sono simmetrici rispetto al punto d'incontro* O *degli assi.*

Indicando con S, R i punti d'incontro di AA′ con *s′* e di AA″ con *s*, dall'eguaglianza dei due triangoli A′SO, A″RO risulta intanto OA′ = OA″. Inoltre, i due angoli $A'\widehat{O}S$, $A''\widehat{O}R$ essendo complementari, l'angolo $A''\widehat{O}A'$ è piatto.

COROLLARIO I. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due assi perpendicolari sono paralleli fra loro.*

COROLLARIO II. — *Due figure simmetriche ad una stessa figura rispetto a due assi perpendicolari sono simmetriche rispetto al punto d'incontro degli assi.*

§ 4. — Figure congruenti e simmetriche sul piano.

DEFINIZIONE I. — Due figure eguali nel piano aventi due angoli dello stesso verso (e quindi anche tutti gli altri) (3) si dicono **congruenti**.

DEFINIZIONE II. — Due figure eguali nel piano aventi due angoli di verso opposto (e quindi anche tutti gli altri) si dicono **simmetriche**.

Da queste definizioni segue che:

COROLLARIO I. — *Due figure congruenti o simmetriche ad una terza figura sono congruenti fra loro.*

---

(1) Il teor. precedente, come il teor. II § 1, vale anche per figure non piane.
(2) VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, pag. 353.
(3) Vedi dimostrazione del Teor. III, § 3.

COROLLARIO II. — *Due figure l'una congruente e l'altra simmetrica ad una terza figura sono simmetriche fra loro.*

TEOREMA I. — *Due figure situate in un medesimo piano e simmetriche rispetto ad un asse sono simmetriche fra loro.*

Infatti due figure simmetriche rispetto ad un asse sono eguali (Teor. II, § 3) e di verso opposto (Teor. III, § 3).

TEOREMA II. — *Due figure congruenti aventi due punti uniti coincidono.*

Se A, B sono i punti della prima figura che coincidono con i punti corrispondenti A', B' della figura congruente, e se C è un altro punto della prima, il punto corrispondente C' nell'altra è tale che il triangolo A'B'C' è congruente al triangolo ABC. Quindi C' dovrà necessariamente essere dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB, e se ciò avviene esso coincide con C. La stessa cosa si verifica per ogni altra coppia di punti corrispondenti.

TEOREMA III. — *Due figure simmetriche aventi due punti uniti sono simmetriche rispetto alla retta da essi determinata.*

Siano ABC..., A'B'C'... due figure simmetriche aventi due coppie AA', BB' di punti corrispondenti che coincidono. I due triangoli ABC, A'B'C' determinati da punti corrispondenti, sono eguali; quindi gli angoli $C\widehat{A}B$, $B'\widehat{A}'C'$ sono eguali ma di verso opposto. Congiungendo C con C', se P è il punto d'incontro di tale congiungente con la retta AB, dall'eguaglianza dei due triangoli CPA, C'PA', risulta $CP = C'P$ e $C\widehat{P}A = A'\widehat{P}C'$, ossia i punti C e C' sono situati sopra una perpendicolare alla retta AB ed alla medesima distanza da essa. Lo stesso accadendo per ogni altra coppia di punti corrispondenti, si concluderà che le due figure considerate hanno la retta AB per asse di simmetria.

§ 5. — Figure simmetriche rispetto ad un piano.

DEFINIZIONE I. — Due punti distinti aventi la medesima distanza da un piano e situati sulla stessa perpendicolare a questo piano si dicono **simmetrici rispetto al piano**, e questo dicesi **piano di simmetria.**

OSSERVAZIONE I. — I punti del piano di simmetria sono simmetrici di se stessi.

OSSERVAZIONE II. — Due punti simmetrici rispetto ad un piano sono simmetrici rispetto al punto d'incontro della retta alla quale appartengono col piano.

DEFINIZIONE II. — Due figure si dicono **simmetriche rispetto ad un piano** quando i punti dell'una sono simmetrici ai punti dell'altra rispetto ad esso.

COROLLARIO. — *Le parti dello spazio in cui esso viene diviso da un piano sono simmetriche rispetto a questo piano.*

TEOREMA I. — *La figura simmetrica ad un segmento rispetto ad un piano è un segmento eguale ad esso. Le rette dei due segmenti si*

incontrano in un punto del piano di simmetria e formano con esso angoli eguali.

Indicando con π il piano di simmetria, se A e A′, B e B′ sono due coppie di punti simmetrici, si riconosce facilmente che i due segmenti AB, A′B′ sono situati in un piano α, perpendicolare a π, e sono simmetrici rispetto alla retta s comune ai due piani. Quindi (Teor. I, § 3) essi sono eguali e le loro rette s'incontrano in un punto della retta s, formando con essa, e quindi con π, angoli eguali.

TEOREMA II. — *La figura simmetrica ad un piano rispetto ad un piano è un altro piano; essi s'incontrano in una retta del piano di simmetria e formano con esso angoli diedri eguali.*

Infatti consideriamo il piano dato come determinato da una sua retta r e da un suo punto P fuori di essa. Se r' e P′ sono la retta ed il punto simmetrici ad r e P rispetto al piano di simmetria π, ogni punto del fascio (Pr) ha per simmetrico un altro punto del fascio (P′r'); quindi il piano P′r' è simmetrico al piano Pr rispetto a π.

Le rette simmetriche dei due piani s'incontrano nei punti della retta d'intersezione dei piani stessi, la quale sarà quindi sul piano π.

Infine considerando un piano perpendicolare alla retta d'intersezione dei due piani, è evidente che le sezioni normali da esso determinate nei diedri che i piani formano con π sono eguali (Teor. I), quindi anche i diedri sono eguali.

TEOREMA III. — *Due figure simmetriche rispetto ad un piano sono eguali.*

La dimostrazione è identica a quella del teorema II, § 1.

TEOREMA IV. — *Due triedri (e quindi anche due tetraedri) simmetrici rispetto ad un piano sono di verso opposto.*

Sia, per maggiore semplicità, BCD un triangolo del piano di simmetria, e siano A, A′ due punti simmetrici rispetto allo stesso piano; i due triedri A(BCD), A′(BCD) sono eguali e di verso opposto. Infatti basta ricordare che i versi di un triedro sono quelli di uno dei suoi diedri; ora i due triedri C(ABD), C(A′BD) sono di verso opposto; lo stesso accade per i diedri di spigoli CA, CA′ e quindi per i diedri stessi con gli spigoli in direzione opposta, cioè AC, A′C e per conseguenza anche per i triedri dati.

TEOREMA V. — *Due segmenti simmetrici ad uno stesso segmento rispetto a due piani paralleli sono paralleli fra loro.*

Osservando che il segmento dato e i due segmenti ad esso simmetrici sono situati in uno stesso piano perpendicolare ai piani paralleli di simmetria, la dimostrazione si riconduce a quella del Teor. IV, § 3.

TEOREMA VI. — *Due punti simmetrici ad uno stesso punto rispetto a due piani perpendicolari sono simmetrici rispetto alla retta d'intersezione dei due piani di simmetria.*

Con un'osservazione analoga a quella fatta per il teorema precedente, la dimostrazione si riconduce a quella del Teor. V, § 3.

COROLLARIO. — *Due figure simmetriche ad una stessa figura rispetto a due piani perpendicolari sono simmetriche rispetto alla retta d'intersezione dei piani di simmetria.*

§ 6. — Figure congruenti e simmetriche nello spazio.

DEFINIZIONE I. — Due figure eguali nello spazio aventi due[1] triedri dello stesso verso si dicono **congruenti.**

DEFINIZIONE II. — Due figure eguali nello spazio aventi due triedri di verso opposto si dicono **simmetriche.**

Da queste definizioni si ricava quanto segue:

COROLLARIO I. — *Due figure congruenti o simmetriche ad una stessa figura sono congruenti fra loro.*

COROLLARIO II. — *Due figure l'una congruente e l'altra simmetrica ad una stessa figura sono simmetriche fra loro.*

TEOREMA I. — *Due figure simmetriche rispetto ad un piano sono simmetriche fra loro.*

Infatti due figure simmetriche rispetto ad un piano sono eguali e di verso opposto (Teor. III e IV, § 5).

TEOREMA II. — *Se due figure congruenti hanno due punti uniti, esse hanno per punti uniti tutti i punti della retta da essi determinata.*

Siano A e B i punti della prima figura, che coincidono con i punti corrispondenti A′ e B′ della figura congruente. Nella corrispondenza di eguaglianza determinata dalle due figure, la retta AB corrisponde a sè stessa; quindi, scelto ad arbitrio un punto X di AB, il punto X′ corrispondente è situato sulla stessa retta, a distanze da A e B eguali a quelle di X; ossia X ed X′ coincidono.

TEOREMA III. — *Se due figure congruenti hanno tre punti uniti, non situati sopra una medesima retta, coincidono.*

Siano A, B, C i tre punti della prima figura che coincidono con i corrispondenti A′, B′, C′ della figura congruente. Se D è un altro punto qualunque della prima e D′ è il suo corrispondente nell'altra, i due tetraedri DABC, D′A′B′C′ saranno congruenti. Perciò D e D′ devono essere situati dalla stessa parte rispetto al piano ABC; ciò è possibile solamente se D e D′ coincidono.

Lo stesso avviene per ogni altra coppia di punti corrispondenti.

TEOREMA IV. — *Se due figure simmetriche hanno tre punti uniti, non situati sopra una medesima retta, esse hanno per punti uniti tutti i punti del piano da essi determinato e sono simmetriche rispetto a questo piano.*

Siano F ed F′ due figure simmetriche e siano A, B, C i punti della prima che coincidono con i punti corrispondenti A′, B′, C′ della seconda. Le parti delle due figure situate nel piano ABC, avendo tre punti uniti, coincidono; infatti la corrispondenza di eguaglianza fra due figure piane è determinata da due triangoli eguali, dati come corrispondenti; ora se questi coincidono anche le due figure coincidono.

---

(1) Si dimostra infatti il seguente teorema: I triedri corrispondenti di due figure eguali sono dello stesso verso o di verso opposto se lo sono due qualunque di essi. (VERONESE, *Fondamenti di Geometria*, pag. 419).

La seconda parte del teorema si può dimostrare in modo analogo a quello del Teor. III al § 4; oppure più brevemente si potrebbe dimostrare come segue:

Sia F'' la figura simmetrica ad F rispetto al piano ABC. Essa è congruente alla figura F', ed avendo tre punti uniti con essa, coincide con essa (Teor. III).

A. Borriero.

SU D'UN'APPLICAZIONE DELLE FUNZIONI U_n, V_n DI LUCAS

1. Indicando con α e β $(\alpha \neq \beta)$ le radici di un'equazione quadratica, con p la loro somma e q il loro prodotto. il Lucas (V. *Theor. des nombres*, pag. 30 e segg.) ha studiato le due funzioni

$$\alpha^n+\beta^n=V_n=p^n-\frac{n}{1}p^{n-2}q+\frac{n(n-3)}{1.2}p^{n-4}q^2+\ldots+(-1)^h\frac{n}{h}C^{h-1}_{p-h-1}p^{n-2h}q^h+\ldots$$

$$\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=U_n=p^{n-1}-C^1_{n-2}p^{n-3}q+\ldots+(-1)^r C^r_{n-r-1}p^{n-r-1}q^r+\ldots$$

colle condizioni iniziali

$$U_1=1\,,\quad U_2=p\,;\qquad V_0=2\,,\quad V_1=p\,.$$

Ciò premesso, consideriamo il polinomio intero razionale di grado n

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n \qquad [I]$$

ed il trinomio di secondo grado

$$x^2-px-q=(x-\alpha)(x+\beta). \qquad [II]$$

Affinchè il polinomio [I] sia divisibile per il trinomio [II] è necessario e sufficiente che si abbia

$$f(\alpha)=\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}+A_2\alpha^{n-2}+\ldots+A_n=0$$
$$f(-\beta)=(-\beta)^n+A_1(-\beta)^{n-1}+\ldots+A_n=0$$

e da queste deduciamo

$$\frac{\frac{f(\alpha)}{\alpha}+\frac{f(-\beta)}{\beta}}{\alpha-(-\beta)}=\frac{\alpha^{n-1}-(-\beta)^{n-1}}{\alpha-(-\beta)}+A_1\frac{\alpha^{n-2}-(-\beta)^{n-2}}{\alpha-(-\beta)}+\ldots+\frac{A_n}{q},$$

$$\frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha-(-\beta)}=\frac{\alpha^n-(-\beta)^n}{\alpha-(-\beta)}+A_1\frac{\alpha^{n-1}-(-\beta)^{n-1}}{\alpha-(-\beta)}+\ldots A_{n-1},$$

ossia, servendoci delle funzioni U_n e V_n di Lucas,

$$\left.\begin{aligned}U_{n-1}+A_1U_{n-2}+\ldots+A_{n-3}U_2+A_{n-2}U_1+\frac{A_n}{q}=0\\ U_n+A_1U_{n-1}+\ldots+A_{n-2}U+A_{n-1}U_1=0\end{aligned}\right\}. \qquad (U)$$

Le (U) *sono le condizioni necessarie e sufficienti affinchè il polinomio* [I] *sia divisibile per il trinomio* [II].

Infatti le (U) sono verificate se il polinomio [I] è divisibile per il trinomio [II], ed inversamente si osserva che, se le (U) sono verificate, si ha

$$f(\alpha)=0 \qquad \text{ed} \qquad f(-\beta)=0,$$

e la cosa è dimostrata.

NOTA. — Il teorema precedente è dimostrato in modo affatto diverso e con minore semplicità dai sigg. G. De Longchamps e Ch. Pravaz rispettivamente nei vol. 4° (pag. 70) e 5° (pag. 347) del *Jour. de Math.*^{que} *di Longchamps.*

2. Le (U) includono la sola funzione U_n, costruendo le condizioni

$$f(\alpha)+f(-\beta)=0, \qquad \frac{f(\alpha)-f(-\beta)}{\alpha-(-\beta)}=0$$

che si equivalgono colle (U), si hanno le condizioni

$$\left.\begin{aligned} V_n+A_1V_{n-1}+A_2V_{n-2}+\ldots+A_{n-1}V_1+A_nV_0=0 \\ U_n+A_1U_{n-1}+A_2U_{n-2}+\ldots+A_{n-2}U_2+A_{n-1}U_1=0 \end{aligned}\right\} \quad (W)$$

che contengono tutte e due le funzioni di Lucas.

3. Crediamo qui utilissimo indicare un'altra forma che può prendere la seconda delle (W).

Riteniamo il coefficiente p come un parametro variabile, allora si ha

$$2n\,U_n=V'_n$$

in cui V'_n è la derivata di V_n rispetto a p (V. " Sulle funzioni di U_n e V_n di Lucas ,, CANDIDO, *Period. di Matem.*, anno 1902, pag. 320), e le condizioni (W) divengono

$$\left.\begin{aligned} V_n+A_1V_{n-1}+A_2V_{n-2}+\ldots+A_{n-1}V_1+A_1V_0=0 \\ \frac{1}{n}V'_n+\frac{A_1}{n-1}V'_{n-1}+\frac{A_2}{n-2}V'_{n-1}+\ldots+\frac{A_{n-2}}{2}V'_2+\frac{A_{n-1}}{1}V'_1=0 \end{aligned}\right\} (W')$$

4. Consegue da quanto abbiamo stabilito che:

Le condizioni affinchè il polinomio [I] *sia divibile per* $(x^2-px-q)^k$, *con* $n \geqslant 2k$, *sono le* $2k$ *condizioni, analoghe alle* (U) *od alle* (W), *od alle* (W') *costruite rispetto a' polinomi*

$$f(x).\ f'(x),\ f''(x),\ \ldots,\ f^{(k-1)}_{(k)}.$$

5. Consideriamo oltre al polinomio [I] un altro polinomio [I'] composto di fattori semplici

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

I binomi $x-\alpha_i$ possono combinarsi a due a due in $\frac{1}{2}[k(k-1)]$ modi, ossia si ha $\frac{1}{2}[k(k-1)]$ gruppi di trinomi di secondo grado e stabilite le condizioni di divisibilità di $f(x)$ per uno di questi gruppi rimangono stabilite le condizioni di divisibilità della $f(x)$ stessa per $\varphi(x)$.

OSSERVAZIONE. — Tutte le condizioni testè accennate si possono ridurre a k solamente, ossia alle seguenti

$$\left.\begin{aligned} f(\alpha_1)-f(\alpha_2)=0 \\ f(\alpha_1)+f(\alpha_2)=0 \\ f(\alpha_3)+f(\alpha_3)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(\alpha_{k-2})+f(\alpha_{k-1})=0 \\ f(\alpha_{k-1})+f(\alpha_k)=0 \end{aligned}\right\} \quad (L)$$

Infatti queste non possono sussistere senza che si abbia contemporaneamente

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = \ldots f(\alpha_k) = 0,$$

ossia senza che la $f(x)$ sia divisibile per $\varphi(x)$, ed inversamente se queste sussistono, cioè se sussiste la divisibilità, sussisterà anche il gruppo (L).

S'intende bene che in cambio della relazione $f(\alpha_1) - f(\alpha_2) = 0$ si può associare a tutto il rimanente gruppo un'altra qualunque relazione

$$f(\alpha_k) - f(\alpha_1) = 0.$$

6. La cosa si estende alla divisibilità di $f(x)$ per $\varphi^k(x)$ e per $\varphi^k(x)\,\psi(x)$. Ne lasciamo lo studio al lettore.

Applicazioni.

Merita considerazione il caso di $n = 2k$ (§ 4) perchè ci porta ad una relazione notevole esistente fra' coefficienti $A_0 \ldots A_n$ quando il polinomio (I) è la k^{ma} potenza del trinomio (II). Ci limiteremo a studiare la cosa per il polinomio di 4° grado: ciò non toglie nulla alla generalità del processo.

Se il polinomio

$$x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$$

è il quadrato del trinomio $x^2 - px - q$, si deve avere

$$U_4 + A_1U_3 + A_2U_2 + A_3U_1 = 0$$

$$U_3 + A_1U_2 + \left(A_2 + \frac{A_4}{q}\right)U_1 = 0$$

$$4U_3 + 3A_1U_2 + 2U_1A_2 = 0$$

$$4U_2 + \left(3A_1 + \frac{A_3}{q}\right)U_1 = 0$$

ed eliminando fra queste equazioni le U si ha la risultante

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 1 & A_1 & A_2 + \frac{A_4}{q} \\ 0 & 4 & 3A_1 & 2A_2 \\ 0 & 0 & 4 & 3A_1 + \frac{A_3}{q} \end{vmatrix} = 0,$$

da cui

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 + \frac{A_4}{q} \\ 4 & 3A_1 & 2A_2 \\ 0 & 4 & 3A_1 + \frac{A_3}{q} \end{vmatrix}$$

e sviluppando e riducendo si ha, tenendo conto che è $q^2 = A_4$,

$$A_4(8A_2 - 3A_1^2)^3 = (A_1A_3 - 16A_4)^2$$

che è la relazione domandata.

La ricerca della relazione analoga a quella trovata esistente fra' coefficienti A_i $(i=1, 2, \ldots n)$ del polinomio (I), con $n=2k$, se questo è la potenza k^{ma} del trinomio (II), non presenta alcuna difficoltà.

Divisori di x^n+1 *della forma* x^2-px+1.

Riteniamo la V_n ed U_n funzioni di p; si ha allora la proposizione;

La condizione necessaria e sufficiente, perchè il trinomio

$$x^2-px+1$$

sia un divisore del binomio x^n+1 *è che l'equazione*

$$V_n+2=0 \qquad (1)$$

ammetta una radice doppia p_1.

Infatti le (W) si riducono alle altre

$$V_n+2=0, \qquad U_n=0.$$

d'altra parte questo sistema è equivalente all'altro

$$V_n+2=0, \qquad V'_n=0.$$

(V. *Periodico*, loc. cit.) e la cosa è dimostrata.

Ora ci è noto che in questo caso (V. *Giornale del Battaglini*, Vol. 39, pag. 103) per $n=2k-1$ si hanno $k-1$ radici doppie ed una eguale a -2;

per $n=2k$ $\begin{cases} k=2k_1, \text{ si hanno } k \text{ radici doppie,} \\ k=2k_1-1, \text{ si hanno } k-2 \text{ radici doppie e due nulle,} \end{cases}$

epperò la questione si può considerare svolta.

Osserviamo che dalle funzioni numeriche si ricava facilmente

$$V_{2k}=V_k^2-2,$$

epperò la (1) diviene

$$V_{2k}+2=V_k^2=0,$$

ciò che ci porta a concludere che:

Se $n=2k$

$$x^2_k+1=(x^2-p_1x+1)(x^2-p_2x+1)\ldots(x^2-px+1),$$

dove $p_1 \ldots p_k$ sono le radici dell'equazione $V_k=0$.

Se $n=2k$ con $k=2k_1-1$ si ha

$$x^{2k}+1=(x^2+1)(x^2-p_1x+1)(x^2-p_{k-2}x+1),$$

dove $p_1 \ldots p_{k-2}$ sono le radici non nulle della equazione $V_{4k_1-2}=0$.

Esempio 1°. — Sia il trinomio x^4+1, la $V_4+2=0$ è

$$p^4-4p^3+4=0,$$

ossia

$$(p^2-2)^2=0,$$

epperò

$$p_1=\sqrt{2}, \quad p_2=\sqrt{2}, \quad p_3=-\sqrt{2}, \quad p_4=-\sqrt{2},$$

e quindi

$$(x^4+1)=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1).$$

Esempio 2°. — Sia il trinomio x^5+1, la $V_5+2=0$ è

$$p^5-5p^3+5p+2=0.$$

Le radici di questa equazione sono $p_1 = -2$ che non essendo doppia non può essere adoperata e le altre

$$p_2 = -(\omega^1 + \omega^4),\ p_3 = -(\omega^2 + \omega^3),\ p_4 = -(\omega^3 + \omega^2),\ p_5 = -(\omega^4 + \omega^1)$$

dove, com'è noto (V. *Battaglini*, loc. cit.) ω è una radice quinta propria dell'unità, e tenendo conto che si ha $(-1)^5 + 1 = 0$, è pure

$$x^5 + 1 = (x+1)(x+\omega^1)(x+\omega^2)(x+\omega^3)(x+\omega^4).$$

Questo metodo ci porta alla conclusione generale, certamente non nuova, ma che serve, per così dire, di controllo:

Indicando con ω una radice $(2k+1)^{ma}$ propria dell'unità si ha identicamente

$$x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x+\omega^1)(x+\omega^2)\ldots(x+\omega^k).$$

Esempio 3°. — Sia il binomio $x^6 + 1$, la $V_6 + 2 = 0$ è

$$p^6 - 6p^4 + 9p^2 = 0,$$

da cui

$$p_1 = 0,\quad p_2 = 0,\quad p_3 = \sqrt{3},\quad p_4 = \sqrt{3},\quad p_5 = -\sqrt{3},\quad p_6 = -\sqrt{3},$$

epperò

$$x^6 + 1 = (x^2+1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1).$$

G. Candido.

PICCOLE NOTE

Sopra certi limiti dipendenti dal concetto di integrale definito.

Poichè l'osservazione che forma l'oggetto della breve nota del prof. Fubini, inserita nel fascicolo marzo-aprile 1905 di questo *Periodico*, sotto la rubrica " Piccole note „, può venire utilizzata pel calcolo di taluni limiti non semplici, come è anche fatto in quel caso particolare, credo sia opportuno dare ad essa quella maggiore estensione la cui possibilità fu già avvertita dall'A.; tanto più che la dimostrazione che qui indicheremo della proprietà da utilizzarsi è delle più semplici, pure trattandosi del caso generale.

Cominciamo col richiamare la nozione di integrale definito. Si abbia perciò una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $\overline{a\ b}$ (con $a < b$), e nel quale essa ha finiti i limiti inferiore e superiore. Diviso questo intervallo in n parti arbitrarie, per mezzo dei valori $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ di x, disposti in ordine crescente, si ponga

$$x_0 = a, \qquad x_n = b, \qquad \delta_r = x_r - x_{r-1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Siano l_r ed L_r i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ nell'intervallo parziale $\overline{x_{r-1}\ x_r}$, e λ_r un numero qualunque compreso fra l_r, L_r; non escluso però che possa coincidere coll'uno o l'altro di questi due numeri. Si consideri un sistema *normale* di divisioni dell'intervallo $\overline{a\ b}$: cioè una successione infinita di differenti decomposizioni di $\overline{a\ b}$, scelte arbitrariamente, ma tali che la massima delle ampiezze delle varie parti che le formano vada tendendo a zero (e quindi il numero di queste parti, pure essendo sempre finito, crescerà oltre ogni limite). Per la m^a decomposizione (che consti di n_m parti), potremo considerare la somma

$$S_m = \sum_{r=1}^{r=n_m} \delta_r^{(m)}\, \lambda_r^{(m)}$$

dove $\delta^{(m)}$ e le $\lambda^{(m)}$ hanno un significato del tutto analogo a quello accennato precedentemente. È noto che, se per la funzione $f(x)$ rimane soddisfatta la *condizione di integrabilità*, avremo

$$\lim_{m=\infty} S_m = \int_a^b f(x)\,dx\,;$$

qualunque sia il sistema normale di decomposizioni che si sceglie in $\overline{a\ b}$, e qualunque sia il valore che, nelle singole parti di tale intervallo, s'intende di fissare per $f(x)$.

Sia ora $F(x)$ una funzione qualunque infinitesima del 1° ordine nel punto zero; e sia tale che si abbia

$$\lim_{x=0} \frac{F(x)}{x} = k,$$

dove k è numero finito non nullo (e che è detto il *valore principale* dell'infinitesimo). Corrispondentemente ad ogni funzione $f(x)$ integrabile nell'intervallo $\overline{a\ b}$, e ad un qualsivoglia sistema normale di decomposizioni scelto in $\overline{a\ b}$, potremo considerare una successione infinita di somme, di cui la m^a (con m abbastanza grande, se $f(x)$ fosse definita soltanto in prossimità dello zero) sia

$$S'_m = \sum_{r=1}^{r=n_m} F(x_r^{(m)}), \qquad \text{essendo} \qquad x_r^{(m)} = \delta_r^{(m)}\,\lambda_r^{(m)}.$$

Ciò posto, la proprietà a cui alludevamo al principio è quella espressa dalla uguaglianza

$$\lim_{m=\infty} S'_m = k\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

che ora passeremo a dimostrare.

Infatti, per ogni valore di x che non sia nullo, ponendo

$$\frac{F(x)}{x} - k = \varphi(x),$$

si avrà

$$F(x) = kx + x\varphi(x).$$

e quindi

$$S'_m = kS_m + \sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)}\,\varphi(x_r^{(m)}).$$

Ora, corrispondentemente a quelle infinite decomposizioni dell'intervallo $\overline{a\ b}$, abbiamo una successione di gruppi di numeri, l'm^o dei quali contiene gli n_m elementi

$$x_1^{(m)},\ x_2^{(m)},\ \ldots,\ x_{n_m}^{(m)}.$$

La somma dei valori assoluti degli elementi di un gruppo qualsivoglia non supera mai un determinato numero fisso, positivo e finito; giacchè si ha evidentemente

$$|\delta_1^{(m)}\lambda_1^{(m)}| + |\delta_2^{(m)}\lambda_2^{(m)}| + \ldots + |\delta_{n_m}^{(m)}\lambda_{n_m}^{(m)}| \leqslant (b-a)\,M, \tag{2}$$

dove M indica il maggiore dei due valori assoluti che hanno i limiti inferiore e superiore di $f(x)$ in $\overline{a\ b}$. Di più, gli elementi di tutti quei gruppi tendono *uniformemente* a zero (cioè tende a zero il massimo dei valori assoluti dei numeri dei varii gruppi; perchè tende a zero la massima delle $\delta^{(m)}$, e le $\lambda^{(m)}$ non superano mai M in valore assoluto). A causa di quest'ultima proprietà, e poichè si ha

$$\lim_{x=0} \varphi(x) = 0,$$

potremo concludere che, fissato un numero positivo σ del tutto arbitrario, esiste un valore di m sufficientemente grande, a partire dal quale risulterà sempre

$$|\varphi(x_r^{(m)})| < \frac{\sigma}{(b-a)\,M}. \qquad (r = 1, 2, \ldots, n_m).$$

Ma allora, per la (2), ne seguirà

$$\left| \sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)} \varphi(x_r^{(m)}) \right| < \alpha.$$

Cioè, sebbene col crescere indefinito di m, il numero n_m tenda all'infinito, si avrà

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=n_m} x_r^{(m)} \varphi(x_r^{(m)}) = 0.$$

E dopo ciò, segue subito

$$\lim_{m=\infty} S'_m = k \lim_{m=\infty} S_m = k \int_a^b f(x)\,dx;$$

come appunto volevamo dimostrare.

La proprietà espressa dalla formula (1) potrà poi enunciarsi nel modo seguente.

Data una funzione f(x) *integrabile in un intervallo* $\overline{a\ b}$, *se invece di fare la somma di quei prodotti infinitesimi mediante i quali, col passaggio al limite, si otterrebbe il valore del suo integrale definito, si fa la somma dei valori che una funzione* F(x). *infinitesima del 1° ordine nel punto zero, acquista nei punti individuati da tali prodotti, il limite della nuova somma non differirà dall' integrale definito di* f(x) *che per un fattore costante; il quale è rappresentato dal valore principale, nel punto zero, dell' infinitesimo* F(x).

Ora questa proprietà, che del resto appare pressochè intuitiva, può essere evidentemente utilizzata per il calcolo del limite d'una somma di n valori che una funzione infinitesima del 1° ordine, nel punto zero, acquista in un intorno dello zero; mentre n tende all'infinito, e gli n punti dell'intorno vanno approssimandosi al punto zero. Volendo poi una formula di pratica applicazione, supporremo

$$n_m = m, \qquad \delta_1^{(m)} = \delta_2^{(m)} = \ldots = \delta_{n_m}^{(m)} = \frac{b-a}{m}, \qquad \lambda_r^{(m)} = f\left(a + r\frac{b-a}{m}\right).$$

Ed avremo così

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=1}^{r=m} F(x_r^{(m)}) = k \int_a^b f(x)\,dx, \tag{3}$$

essendo

$$x_r^{(m)} = \frac{b-a}{m} f\left(a + r\frac{b-a}{m}\right).$$

Ed ora non resterà che specializzare le funzioni $F(x)$ e $f(x)$, per ottenere altrettanti limiti particolari. Così, potremo prendere (è questo il caso considerato dal prof. Fubini)

$$F(x) = \log(1+x), \qquad \text{e quindi} \qquad k = 1,$$

lasciando del resto arbitraria $f(x)$. Oppure

$$F(x) = \operatorname{sen} x, \qquad \text{e quindi} \qquad k = 1$$

$$F(x) = \frac{1-\cos x}{x}, \qquad \text{»} \quad \text{»} \qquad k = \tfrac{1}{2}$$

$$F(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^2}, \qquad \text{»} \quad \text{»} \qquad k = \tfrac{1}{6}.$$

E se la funzione $f(x)$ è integrabile nell'intervallo $\overline{0\ 1}$, in luogo della formula (3) potremo considerare l'altra più semplice

$$\lim_{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} F\left[\frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)\right] = k \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{4}$$

Per esempio, supposto $f(x) = x$, otterremo

$$\lim_{n=\infty} \left\{ F\left(\frac{1}{n^2}\right) + F\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + F\left(\frac{n}{n^2}\right) \right\} = \tfrac{1}{2} k.$$

Ed in particolare, sarà

$$\lim_{n=\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{n^2}+\operatorname{sen}\frac{2}{n^2}+\ldots+\operatorname{sen}\frac{n}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n=\infty} n^2\left(\frac{1-\cos\frac{1}{n^2}}{1}+\frac{1-\cos\frac{2}{n^2}}{2}+\ldots+\frac{1-\cos\frac{n}{n^2}}{n}\right)=\frac{1}{4}.$$

È ovvio infine avvertire che le formule (1), (3). (4) saranno pure valide per ogni funzione che sia infinitesima del 1° ordine in un punto qualsivoglia x_0, purchè allora, in luogo di $F(x)$, si scriva $F(x_0+x)$.

MINEO CHINI.

BIBLIOGRAFIA

F. KLEIN und E. RIECKE. — *Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen.*
F. SHILLING. — *Ueber die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere ueber die Photogrammetrie.* Leipzig, Teubner 1904.

F. Klein è già favorevolmente noto ai lettori di questo *Periodico* per la sua pubblicazione: *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie.* (1)

Nei due volumi suaccennati sono raccolte le conferenze, sopra varie questioni di matematica, di fisica e di astronomia, tenute a Gottinga, durante le vacanze pasquali del 1904, dai proff. Klein, Riecke, Schilling ecc. Essi hanno cercato di mostrare che le scuole superiori per essere rispondenti ai bisogni della vita moderna devono essere pratiche nei programmi, nei mezzi, nelle finalità.

Il Klein, mette in evidenza, con esempi presi dalle matematiche, che ogni disciplina deve svolgersi in relazione alla coltura generale che si vuole raggiungere nella scuola e combatte l'opinione di coloro che sostengono essere troppo elevato l'insegnamento della matematica nei licei per quelli che diventeranno medici, avvocati, economisti ecc.

Da noi quest'insegnamento era già abbastanza limitato ed è facile prevedere cosa avverrà adesso col nuovo ordinamento, per il quale la maggior parte degli alunni cessa di occuparsene dopo il primo anno.

Il Riecke nella sua conferenza tratta prima della teoria unitaria di Franklin, poi di quella dualistica di Symmer e quindi di quelle di Weber e di Maxwell-Hertz; si occupa dell'esistenza di particelle elettriche (joni) negli elettroliti, nell'aria e nelle fiamme; studia l'azione dei raggi catodici e Becquerel e parla infine del radio e della sua trasformazione in elio.

Lo Schilling nella sua prima lezione si occupa delle relazioni della geometria descrittiva con le altre discipline geometriche; nella seconda esamina le applicazioni di essa alla cinematica, meccanica, geodesia, astronomia, architettura, statica grafica, fisiologia e psicologia; e nella terza, esposti i procedimenti fotogrammetrici per una prospettiva unica, ne fa applicazione a due e più prospettive e poi alla pittura, architettura, geodesia, ed astronomia e termina colla descrizione dei relativi apparecchi. In un'appendice è poi dimostrata l'utilità dell'apparecchio di proiezione per l'insegnamento delle matematiche.

Come si vede, l'argomento di queste lezioni è sommamente istruttivo e le numerose figure che illustrano il libro dello Schilling le rendano attraenti e ne facilitano l'esposizione.

A. NEPPI MODONA.

(1) V. *Periodico di Matematica*, anno X 1895, pag. 187.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 giugno 1905