La prima successione, a cui si riferiscono tutte le altre sia d'ordine minore che maggiore, è la successione (x) d'un numero infinito di termini; essa ed i valori $a_1, \ldots, a_y$, scelti più o meno ad arbitrio, dei termini $\Delta^{-1}(x_1), \ldots, \Delta^{-y}(x_y)$ delle successioni d'ordine minore, essendo $x_1, \ldots, x_y$ dei valori qualsivogliano di x, formano la determinazione. La definizione è quella stessa delle altre due leggi, le quali sono comprese in questa che si può applicare in generale a qualsivoglia successione (x) ed in particolare a qualsivoglia 1-classe $[x]$.

Così esteso, il simbolo $\Delta^y(x)$ rappresenta:

1° per x costante ed y costante, la differenza d'ordine y del termine (x);

2° per x variabile ed y costante, la successione delle differenze d'ordine y della successione (x);

3° per x costante ed y variabile, la successione delle differenze del termine (x), cioè la diagonale discendente del termine (x), e per $x=0$ la prima diagonale o diagonale principale;

4° per x variabile ed y variabile, la 2-classe aritmetica che si ottiene, nel caso più generale, dall'applicazione alla successione (x) del calcolo diretto ed inverso delle differenze finite. Se però la somma $x+y$ è costante, si ha la diagonale ascendente del termine (x).

È opportuno osservare che se della 2-classe si conosce soltanto la successione delle differenze d'ordine y, risultano appieno determinate le infinite successioni d'ordine maggiore e del tutto indeterminate le infinite successioni d'ordine minore; se si conosce soltanto una diagonale discendente, la 2-classe è appieno determinata a destra e del tutto indeterminata a sinistra; e se si conosce soltanto una diagonale ascendente, la 2-classe è appieno determinata a sinistra e del tutto indeterminata a destra.

Di queste linee di nome diverso (successione, diagonale discendente, diagonale ascendente) tre qualsivogliano s'incontrano a due a due, e se il termine comune alle due diagonali è d'ordine maggiore di quello degli altri due che sono dello stesso ordine, esse limitano un triangolo delle differenze d'ordine uguale alla differenza degli ordini indicati.

52. Le tre uguaglianze

$$\left.\begin{aligned} \Delta^y(x) &= \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^{y-1}(x) \\ \Delta^{y-1}(x+1) &= \Delta^{y-1}(x) + \Delta^y(x) \\ \Delta^{y-1}(x) &= \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^y(x) \end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

implicite nella definizione comune delle tre leggi, e che qui occorre considerare per $y \gtreqless 0$, coincidono per $y \geqslant 0$ con le tre uguaglianze (α), (β) e (γ) vedute in principio, e vincolano i tre termini del triangolo d'ordine uno delle differenze di $\Delta^{y-1}(x)$:

$$\begin{matrix} \Delta^{y-1}(x), & & \Delta^{y-1}(x+1) \\ & \Delta^y(x). & \end{matrix}$$

Le stesse tre uguaglianze coincidono con quelle implicite nella definizione della legge (27) delle combinazioni semplici:

$$\left.\begin{aligned} C_{x,y} &= C_{x+1,y+1} - C_{x,y+1} \\ C_{x+1,y+1} &= C_{x,y+1} + C_{x,y} \\ C_{x,y+1} &= C_{x+1,y+1} - C_{x,y} \end{aligned}\right\} \qquad (80^{\text{bis}})$$

che si riferiscono al triangolo

$$\begin{matrix} C_{x,y+1}\,, & & C_{x+1,y+1} \\ & C_{x,y}\,, & \end{matrix}$$

e con quelle implicite nella definizione della legge (37) del simbolo $\binom{n}{i}$:

$$\left.\begin{aligned} \binom{x}{y} &= \binom{x+1}{y+1} - \binom{x}{y+1} \\ \binom{x+1}{y+1} &= \binom{x}{y+1} + \binom{x}{y} \\ \binom{x}{y+1} &= \binom{x+1}{y+1} - \binom{x}{y} \end{aligned}\right\} \qquad (80^{\text{ter}})$$

che si riferiscono al triangolo

$$\begin{matrix} \binom{x}{y+1}, & & \binom{x+1}{y+1} \\ & \binom{x}{y}\,. & \end{matrix}$$

Ma per questi due triangoli occorre osservare che il termine d'ordine maggiore *non è* espresso per mezzo del segno d'operazione Δ, ma è *uguagliato* ad un termine di *altra* successione; perciò si deve scrivere $\Delta C_{x,y+1}$ per $C_{x,y}$ e $\Delta\binom{x}{y+1}$ per $\binom{x}{y}$; e si può quindi affermare l'assoluta coincidenza delle definizioni delle leggi (27), (37) e (79).

Si può facilmente vedere che le 2-classi (27) e (37) sono comprese nella (79). Invero, se nella (79) si pone

$$\begin{aligned} x_1 = \ldots = x_y &= 0\,, \\ a_1 = \ldots = a_y &= 0\,, \\ (x) &= 1\,, \end{aligned}$$

e si osserva che essendo

$$\Delta^y(x) = 0\,, \qquad \text{per} \qquad y > 0,$$

si possono tralasciare questi valori e restringere la limitazione della variabile y, è chiaro che per $x \geqslant 0$, la 2-classe è quella delle combinazioni semplici, essendo

$$(x) = C_{x,0} \qquad \text{e} \qquad \Delta^{-y}(x) = C_{x,y}\,,$$

e per $x \gtrless 0$, la 2-classe è quella del simbolo $\binom{n}{i}$, essendo

$$(x) = \binom{x}{0} \quad \text{e} \quad \Delta^{-y}(x) = \binom{x}{y}.$$

Ma la maggiore comprensione della legge (79) essendo soltanto nella limitazione e nella determinazione e *non* nella definizione, non esclude la combinatorietà del calcolo delle differenze finite.

Essendo la 2-classe (37) un caso particolare della (79), si può dare un'interpretazione diversa dello specchio di numeri (44), considerandolo come la sovrapposizione di *due* 2-classi (37), in modo che coincidano i termini $\binom{2i}{i}$ formando un asse di simmetria, in valore e segno, ed in modo che l'una sia orientata a destra e l'altra a sinistra.

53. Si consideri il triangolo d'ordine z delle differenze del termine $\Delta^y(x)$:

$$\begin{array}{ccc} \Delta^y(x), & —, & \Delta^y(x+z) \\ \diagdown & & \diagup \\ & \Delta^{y+z}(x). & \end{array} \tag{81}$$

Dalle tre uguaglianze (80) si deducono le formule che dànno le espressioni d'un vertice in funzione del lato opposto, e si ha

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{y+z}(x) &= \binom{z}{0}.\Delta^y(x+z) - \ldots + (-1)^z\binom{z}{z}.\Delta^y(x) \\ \Delta^y(x+z) &= \binom{z}{0}.\Delta^y(x) + \ldots + \binom{z}{z}.\Delta^{y+z}(x) \\ \Delta^y(x) &= \binom{z}{0}.\Delta^y(x+z) - \ldots + (-1)^z\binom{z}{z}.\Delta^{y+z}(x) \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Infatti, esse sono vere per $z=0$, perchè si riducono ad identità; per $z=1$, perchè coincidono con le (80) ponendo in queste $y+1$ per y. Consentendo che siano vere per $z-1$, siccome dalle stesse (80) si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{y+z}(x) &= \Delta^{y+z-1}(x+1) - \Delta^{y+z-1}(x) \\ \Delta^y(x+z) &= \Delta^y(x+z-1) + \Delta^{y+1}(x+z-1) \\ \Delta^y(x) &= \Delta^y(x+1) - \Delta^{y+1}(x), \end{aligned}$$

sostituiscano nei secondi membri i valori consentiti e riducendo ottengono le (82). E non è inutile osservare che tale riduzione è esclusivamente poggiata sulla relazione (B) dei coefficienti binomiali, che non è altro che la seconda delle (80ter); cosicchè può dirsi che le formule fondamentali (82) si deducono direttamente ed esclusivamente dalla legge (79).

Data una qualsivoglia successione di differenze $\Delta^y(x)$ (y costante), qualsivoglia termine di essa $\Delta^y(x+z)$ (y e x costanti e $z \gtrless 0$)

può considerarsi come vertice d'un triangolo delle differenze di cui l'altro vertice dello stesso ordine è il termine $\Delta^y(x)$; ed un qualsivoglia termine d'una delle successioni d'ordine maggiore si può comprendere in un triangolo delle differenze che ha il termine $\Delta^y(x)$ nel lato disposto lungo la successione d'ordine minore. In generale, due o quanti si vogliano termini della 2-classe, in numero finito, si possono comprendere in un triangolo delle differenze d'un termine d'ordine non maggiore del minimo ordine dei termini compresi.

Un triangolo delle differenze è un tutto a sè ed è appieno determinato da uno dei suoi lati; esso varia di posizione al variare del termine cui si riferisce, e che è sempre quello per cui tanto x quanto y hanno il più piccolo valore, e varia di grandezza al variare della differenza degli ordini delle successioni fra cui è compreso; esso è orientato sempre nello stesso modo e le formule fondamentali che ne vincolano i termini non sono altro che l'estensione combinatoria delle tre uguaglianze fra le tre qualsivogliano quantità a, b e c.

Queste formule (82) esistono tutt'e tre se ne esiste una, e si possono senz'altro scrivere non appena si conosca l'ordine del triangolo e sia precisato uno dei suoi vertici. Esse comprendono le formule (4), (5) e (6). (¹)

Osservando lo schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \Delta^{y-z}(x), & — , & \Delta^{y-z}(x+z) & & & & \\
 & & \diagdown & & \diagup & & & & \\
\Delta^y(x-z), & — , & & \Delta^y(x), & & — , & \Delta^y(x+z) & & \\
 & \diagdown & & \diagup & \diagdown & & \diagup & & \\
 & & \Delta^{y+z}(x-z) & & & \Delta^{y+z}(x) , & & &
\end{array} \qquad (83)$$

si vede bene che $\Delta^y(x)$ è vertice *diverso* di *tre successioni* di triangoli delle differenze, e quindi, essendo *separatamente* $z = 0, 1, 2, \ldots$, si può scrivere

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^y(x) &= \binom{z}{0} \cdot \Delta^{y-z}(x+z) - \ldots + (-1)^z \binom{z}{z} \cdot \Delta^{y-z}(x) \\
&= \binom{z}{0} \cdot \Delta^y(x-z) + \ldots + \binom{z}{z} \cdot \Delta^{y+z}(x-z) \\
&= \binom{z}{0} \cdot \Delta^y(x+z) - \ldots + (-1)^z \binom{z}{z} \Delta^{y+z}(x)
\end{aligned}\right\} \qquad (82^{\text{bis}})$$

54. Considerando lo stesso triangolo (81), si supponga

$$r,\ s,\ z \geqslant 0\,,$$
$$r + s = z\,,$$

(¹) V. *Periodico di Matematica*, anno XIX, pag. 222. Le tre formule sono note da tempo, ma non sembra che altri abbia considerato il triangolo delle differenze.

e sarà chiaro che i termini $\Delta^y(x+r)$ e $\Delta^y(x+s)$ sono, simmetricamente, ad ugual distanza dai vertici $\Delta^y(x)$ e $\Delta^y(x+z)$, e così pure i termini $\Delta^{y+r}(x)$ e $\Delta^{y+s}(x)$ dai vertici $\Delta^y(x)$ e $\Delta^{y+z}(x)$, e così pure i termini $\Delta^{y+s}(x+r)$ e $\Delta^{y+r}(x+s)$ dai vertici $\Delta^{y+z}(x)$ e $\Delta^y(x+z)$; ed è pur chiaro che variando r od s, ogni lato si può percorrere nei due sensi.

Scrivendo le tre formule pel triangolo d'ordine s delle differenze del termine $\Delta^{y+r}(x)$, si ha

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{y+z}(x) &= \binom{s}{0}\Delta^{y+r}(x+s) - \ldots + (-1)^s\binom{s}{s}\Delta^{y+r}(x) \\ \Delta^{y+r}(x+s) &= \binom{s}{0}\Delta^{y+z}(x) + \ldots + \binom{s}{s}\Delta^{y+z}(x) \\ \Delta^{y+r}(x) &= \binom{s}{0}\Delta^{y+r}(x+s) - \ldots + (-1)^s\binom{s}{s}\Delta^{y+z}(x) \end{aligned}\right\} \quad (82^{ter})$$

e scrivendo le tre formule pel triangolo d'ordine r delle differenze del termine $\Delta^{y+s}(x)$, si ha

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{y+z}(x) &= \binom{r}{0}\Delta^{y+s}(x+r) - \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}\Delta^{y+s}(x) \\ \Delta^{y+s}(x+r) &= \binom{r}{0}\Delta^{y+s}(x) + \ldots + \binom{r}{r}\Delta^{y+z}(x) \\ \Delta^{y+s}(x) &= \binom{r}{0}\Delta^{y+s}(x+r) - \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}\Delta^{y+z}(x) \end{aligned}\right\} \quad (82^{quater})$$

Variando r da 0 a z, si possono distinguere sette casi.
Sia z un multiplo di 6.

1° CASO. — Se $0 < r < \frac{z}{3}$, le due diagonali

$$\Delta^y(x+r), \ldots, \Delta^{y+s}(x+r)$$
$$\Delta^{y+s}(x), \ldots, \Delta^y(x+s)$$

s'incontrano nel termine $\Delta^{y+s-r}(x+r)$ ed incontrano la successione delle differenze d'ordine $y+r$ nei termini $\Delta^{y+r}(x+r)$ e $\Delta^{y+r}(x+s-r)$; questi tre termini sono i vertici del triangolo d'ordine $s-2r$ delle differenze del termine $\Delta^{y+r}(x+r)$, per cui le tre formule sono

$$\left.\begin{aligned} \Delta^{y+s-r}(x+r) &= \binom{s-2r}{0}\Delta^{y+r}(x+s-r) - \ldots + (-1)^{s-2r}\binom{s-2r}{s-2r}\Delta^{y+r}(x+r) \\ \Delta^{y+r}(x+s-r) &= \binom{s-2r}{0}\Delta^{y+r}(x+r) + \ldots + \binom{s-2r}{s-2r}\Delta^{y+s-r}(x+r) \\ \Delta^{y+r}(x+r) &= \binom{s-2r}{0}\Delta^{y+r}(x+s-r) - \ldots + (-1)^{s-2r}\binom{s-2r}{s-2r}\Delta^{y+s-r}(x+r) \end{aligned}\right\} \quad (82^{quinquies})$$

2° CASO. — Se $r = \frac{z}{3}$, i tre termini precedenti si riuniscono nel termine $\Delta^{y+r}(x+r)$;

3° CASO. — Se $\frac{z}{3} < r < \frac{z}{2}$, si ottengono gli stessi tre termini del 1° caso, ma non più disposti a triangolo delle differenze;

4° CASO. — Se $r = \frac{z}{2}$, il termine $\Delta^y(x+r)$ coincide col termine $\Delta^y(x+s)$, e così pure $\Delta^{y+r}(x)$ con $\Delta^{y+s}(x)$, e così pure $\Delta^{y+s}(x+r)$ con $\Delta^{y+r}(x+s)$;

5° CASO. — Se $\frac{z}{2} < r < \frac{2z}{3}$, si ottengono i tre termini $\Delta^{y+r-s}(x+s)$, $\Delta^{y+s}(x+r-s)$ e $\Delta^{y+s}(x+s)$ non disposti a triangolo delle differenze;

6° CASO. — Se $r = \frac{2z}{3}$, i tre termini precedenti si riuniscono nel termine $\Delta^{y+s}(x+s)$;

7° CASO. — Se $\frac{2z}{3} < r < z$, i tre termini precedenti sono i vertici del triangolo d'ordine $r-2s$ delle differenze del termine $\Delta^{y+s}(x+s)$, per cui le tre formule sono

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{y+r-s}(x+s) &= \binom{r-2s}{0}\Delta^{y+s}(x+r-s) - \ldots + (-1)^{r-2s}\binom{r-2s}{r-2s}\Delta^{y+s}(x+s)\\
\Delta^{y+s}(x+r-s) &= \binom{r-2s}{0}\Delta^{y+s}(x+s) + \ldots + \binom{r-2s}{r-2s}\Delta^{y+r-s}(x+s)\\
\Delta^{y+s}(x+s) &= \binom{r-2s}{0}\Delta^{y+s}(x+r-s) - \ldots + (-1)^{r-2s}\binom{r-2s}{r-2s}\Delta^{y+r-s}(x+s)
\end{aligned}\right\} \quad (82^{\text{sexies}})$$

Se z è multiplo di 3 e non di 2, manca il 4° caso.
Se z è multiplo di 2 e non di 3, mancano il 2° ed il 6° caso.
Se z non è multiplo di 2 nè di 3, mancano il 2°, il 4° e il 6° caso.
S'intende bene che si potrebbero pur fare le supposizioni

$$r+s+t=z; \qquad r+s+t+u=z; \ \ldots$$

e considerare i vari triangoli ed i vari casi.

55. Dalle formule (82) si possono ricavare le espressioni d'un lato in funzione di ciascuno degli altri due.

Si ha

$$\begin{aligned}
\Delta^{y+z}(x) &= \binom{z}{0}\Delta^y(x+z) - \binom{z}{1}\Delta^y(x+z-1) + \ldots + (-1)^z\binom{z}{z}\Delta^y(x)\\
\Delta^{y+z-1}(x) &= \qquad\qquad \binom{z-1}{0}\Delta^y(x+z-1) - \ldots + (-1)^{z-1}\binom{z-1}{z-1}\Delta^y(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta^y(x) &= \qquad\qquad\qquad\qquad \binom{0}{0}\Delta^y(x),
\end{aligned}$$

e sommando, dopo di aver cambiato il segno d'ogni seconda relazione,

$$\Delta^{y+z}(x) - \ldots + (-1)^z\Delta^y(x) = \binom{z+1}{0}\Delta^y(x+z) - \ldots + (-1)^z\binom{z+1}{z}\Delta^y(x); \quad (84)$$

si ha

$$\Delta^{y+z}(x)=\binom{z}{0}\Delta^{y}(x+z)-\ldots+(-1)^{z-1}\binom{z}{z-1}\Delta^{y}(x+1)+(-1)^{z}\binom{z}{z}\Delta^{y}(x)$$

$$\Delta^{y+z-1}(x+1)=\binom{z-1}{0}\Delta^{y}(x+z)-\ldots+(-1)^{z-1}\binom{z-1}{z-1}\Delta^{y}(x+1)$$

. . . .

$$\Delta^{y}(x+z)=\binom{0}{0}\Delta^{y}(x+z),$$

e sommando

$$\Delta^{y+z}(x)+\ldots+\Delta^{y}(x+z)=\binom{z+1}{1}\Delta^{y}(x+z)-\ldots+(-1)^{z}\binom{z+1}{z+1}\Delta^{y}(x);\quad (85)$$

si ha

$$\Delta^{y}(x+z)=\binom{z}{0}\Delta^{y}(x)+\binom{z}{1}\Delta^{y+1}(x)+\ldots+\binom{z}{z}\Delta^{y+z}(x)$$

$$\Delta^{y+1}(x+z-1)=\qquad\binom{z-1}{0}\Delta^{y+1}(x)+\ldots+\binom{z-1}{z-1}\Delta^{y+z}(x)$$

. . . .

$$\Delta^{y+z}(x)=\qquad\binom{0}{0}\Delta^{y+z}(x),$$

e sommando

$$\Delta^{y}(x+z)+\ldots+\Delta^{y+z}(x)=\binom{z+1}{0}\Delta^{y}(x)+\ldots+\binom{z+1}{z}\Delta^{y+z}(x);\quad (86)$$

si ha

$$\Delta^{y}(x+z)=\binom{z}{0}\Delta^{y}(x)+\ldots+\binom{z}{z-1}\Delta^{y+z-1}(x)+\binom{z}{z}\Delta^{y+z}(x)$$

$$\Delta^{y}(x+z-1)=\binom{z-1}{0}\Delta^{y}(x)+\ldots+\binom{z-1}{z-1}\Delta^{y+z-1}(x)$$

. . . .

$$\Delta^{y}(x)=\binom{0}{0}\Delta^{y}(x),$$

e sommando

$$\Delta^{y}(x+z)+\ldots+\Delta^{y}(x)=\binom{z+1}{1}\Delta^{y}(x)+\ldots+\binom{z+1}{z+1}\Delta^{y+z}(x);\quad (87)$$

si ha

$$\Delta^{y}(x)=\binom{z}{0}\Delta^{y}(x+z)-\binom{z}{1}\Delta^{y+1}(x+z-1)+\ldots+(-1)^{z}\binom{z}{z}\Delta^{y+z}(x)$$

$$\Delta^{y+1}(x)=\qquad\binom{z-1}{0}\Delta^{y+1}(x+z-1)-\ldots+(-1)^{z-1}\binom{z-1}{z-1}\Delta^{y+z}(x)$$

. . . .

$$\Delta^{y+z}(x)=\qquad\binom{0}{0}\Delta^{y+z}(x),$$

e sommando, dopo di aver cambiato il segno d'ogni seconda relazione,

$$\Delta^y(x)-\ldots+(-1)^z\Delta^{y+z}(x)=\binom{z+1}{0}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z}\Delta^{y+z}(x)\,; \quad (88)$$

si ha

$$\Delta^y(x)=\binom{z}{0}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^{z-1}\binom{z}{z-1}\Delta^{y+z-1}(x+1)+(-1)^z\binom{z}{z}\Delta^{y+z}(x)$$

$$\Delta^y(x+1)=\binom{z-1}{0}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^{z-1}\binom{z-1}{z-1}\Delta^{y+z-1}(x+1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^y(x+z)=\binom{0}{0}\Delta^y(x+z)\,,$$

e sommando

$$\Delta^y(x)+\ldots+\Delta^y(x+z)=\binom{z+1}{1}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z+1}\Delta^{y+z}(x). \quad (89)$$

Dal confronto delle formule (87) e (89) si ricava

$$\binom{z+1}{1}\Delta^y(x)+\ldots+\binom{z+1}{z+1}\Delta^{y+z}(x)=\binom{z+1}{1}\Delta^y(x+z)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z+1}\Delta^{y+z}(x)\,, \quad (90)$$

e dal confronto delle formule (84) e (88)

$$\binom{z+1}{0}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z}\Delta^y(x)=$$
$$=(-1)^z\left[\binom{z+1}{0}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z}\Delta^{y+z}(x)\right], \quad (91)$$

e dal confronto delle formule (85) e (86)

$$\binom{z+1}{1}\Delta^y(x+z)-\ldots+(-1)^z\binom{z+1}{z+1}\Delta^y(x)=$$
$$=\binom{z+1}{0}\Delta^y(x)+\ldots+\binom{z+1}{z}\Delta^{y+z}(x). \quad (92)$$

E sommando le formule (84) e (85), (86) e (87), (88) e (89), si hanno le relazioni fra due lati ed il terzo:

$$\sum_0^z{}_i(-1)^i\Delta^{y+z-i}(x)+\sum_0^z{}_i\Delta^{y+z-i}(x+i)=\sum_0^z{}_i(-1)^i\binom{z+2}{1+i}\Delta^y(x+z-i), \quad (93)$$

$$\sum_0^z{}_i\Delta^{y+i}(x+z-i)+\sum_0^z{}_i\Delta^y(x+z-i)=\sum_0^z{}_i\binom{z+2}{1+i}\Delta^{y+i}(x), \quad (94)$$

$$\sum_0^z{}_i(-1)^i\Delta^{y+i}(x)+\sum_0^z{}_i\Delta^y(x+i)=\sum_0^z{}_i(-1)^i\binom{z+2}{1+i}\Delta^{y+i}(x+z-i)\,(^1). \quad (95)$$

(1) Le quattro formule date dallo Studnicka (V. E. PASCAL, *Calcolo delle differenze finite*) sono comprese come caso particolare: *due* nelle prime due delle (82^{ter}) o nelle prime due delle (82^{quater}), e *due* nella (87).

56. Dalle tre uguaglianze (80) si ricavano le espressioni delle tre linee di nome diverso che s'incontrano nel termine $\Delta^y(x)$.

Si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{y+1}(x) &= \Delta^y(x+1) - \Delta^y(x) \\ \Delta^y(x+1) &= \Delta^{y-1}(x+2) - \Delta^{y-1}(x+1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{y-z+1}(x+z) &= \Delta^{y-z}(x+z+1) - \Delta^{y-z}(x+z), \end{aligned}$$

e sommando e riducendo

$$\Delta^y(x) + \ldots + \Delta^{y-z}(x+z) = \Delta^{y-z}(x+z+1) - \Delta^{y-1}(x); \qquad (96)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{y+1}(x) &= \Delta^y(x+1) - \Delta^y(x) \\ \Delta^{y+2}(x-1) &= \Delta^{y+1}(x) - \Delta^{y+1}(x-1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{y+z+1}(x-z) &= \Delta^{y+z}(x-z+1) - \Delta^{y+z}(x-z), \end{aligned}$$

e sommando e riducendo

$$\Delta^y(x) + \ldots + \Delta^{y+z}(x-z) = \Delta^y(x+1) - \Delta^{y+z+1}(x-z); \qquad (97)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{y-1}(x+1) &= \Delta^{y-1}(x) + \Delta^y(x) \\ \Delta^{y-1}(x+2) &= \Delta^{y-1}(x+1) + \Delta^y(x+1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{y-1}(x+z+1) &= \Delta^{y-1}(x+z) + \Delta^y(x+z), \end{aligned}$$

e sommando e riducendo

$$\Delta^y(x) + \ldots + \Delta^y(x+z) = \Delta^{y-1}(x+z+1) - \Delta^{y-1}(x); \qquad (98)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta^{y-1}(x+1) &= \Delta^{y-1}(x) + \Delta^y(x) \\ \Delta^{y-1}(x) &= \Delta^{y-1}(x-1) + \Delta^y(x-1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{y-1}(x-z+1) &= \Delta^{y-1}(x-z) + \Delta^y(x-z), \end{aligned}$$

e sommando e riducendo

$$\Delta^y(x) + \ldots + \Delta^y(x-z) = \Delta^{y-1}(x+1) - \Delta^{y-1}(x-z); \qquad (99)$$

si ha

$$\begin{aligned} \Delta^y(x-1) &= \Delta^y(x) - \Delta^{y+1}(x-1) \\ \Delta^{y-1}(x-1) &= \Delta^{y-1}(x) - \Delta^y(x-1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta^{y-z}(x-1) &= \Delta^{y-z}(x) - \Delta^{y-z+1}(x-1), \end{aligned}$$

e sommando e riducendo, dopo di aver cambiato il segno d'ogni seconda relazione,

$$\Delta^y(x) - \ldots + (-1)^z \Delta^{y-z}(x) = \Delta^{y+1}(x-1) + (-1)^z \Delta^{y-z}(x-1); \qquad (100)$$

si ha

$$\begin{aligned}
\Delta^{y}(x-1) &= \Delta^{y}(x) - \Delta^{y+1}(x-1) \\
\Delta^{y+1}(x-1) &= \Delta^{y+1}(x) - \Delta^{y+2}(x-1) \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\Delta^{y+z}(x-1) &= \Delta^{y+z}(x) - \Delta^{y+z+1}(x-1),
\end{aligned}$$

e sommando e riducendo, dopo di aver cambiato il segno d'ogni seconda relazione,

$$\Delta^{y}(x) - \ldots + (-1)^{z}\Delta^{y+z}(x) = \Delta^{y}(x-1) + (-1)^{z}\Delta^{y+z+1}(x-1). \quad (101)$$

Si vede facilmente che le formule (96) e (97) comprendono come caso particolare la formula (7), le formule (98) e (99) quella dell'integrale alle differenze e le formule (100) e (101) la formula (8).

(Continua) VITO MELFI MOLÈ.

UNA PROPRIETÀ DELLE RETI DI SFERE

Dati in un piano due circoli Γ_1, Γ_2, se si segnano le polari di un punto qualunque P′ del piano rispetto ad essi (ed a tutti i circoli del fascio che essi determinano), esse s'incontrano in un punto P″; fra P′ e P″ passa allora una notissima corrispondenza quadratica; ora se si considera anche il punto medio del segmento P′P″, si trova che esso sta sempre sopra l'asse radicale a dei due dati cerchi (e del fascio che essi determinano).

Questa osservazione — che io appresi dal prof. ALDO FINZI dell'Istituto Tecnico di Bari [1] — suggerisce naturalmente la questione se un fatto analogo abbia luogo nello spazio ordinario (anzi in uno spazio lineare qualunque).

Che realmente ciò succeda si riconosce agevolmente come segue:

Siano

$$(x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 + (z-\gamma_i)^2 - r_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

le equazioni di tre sfere Σ_i qualisivogliano. Due punti

$$P'(x', y', z') \qquad \text{e} \qquad P''(x'', y'', z'')$$

[1] La giustezza della riferita osservazione si riconosce agevolmente così: Per costruire P″ basta determinare il punto comune alle polari di P′ rispetto a due qualunque circoli del dato fascio; come uno di essi giova considerare quello costituito dalla retta all'infinito del piano e dall'asse a: ora la polare di P′ rispetto a tale curva non è che il luogo dei punti simmetrici di P′ rispetto a tutti i punti di a; sopra questa retta sta P″, onde il centro del segmento P′P″ si trova in a, qualunque sia la posizione di P′.

sono coniugati rispetto a tali sfere (nonchè a tutte quelle della rete che esse individuano) ove sussistano le tre seguenti relazioni:

$$(x'-\alpha_i)(x''-\alpha_i)+(y'-\beta_i)(x''-\beta_i)+(z'-\gamma_i)(z''-\gamma_i)-r_i^2=0$$
$$(i=1,\ 2,\ 3).$$

Dette ora x, y, z le coordinate del punto medio M del segmento P′P″ si avranno le equazioni:

$$x''=2x-x',\quad y''=2y-y',\quad z''=2z-z'.$$

Eliminando col loro mezzo x'', y'', z'' dalle relazioni precedenti si ottengono queste altre:

$$(x'-\alpha_i)(2x-x'-\alpha_i)+(y'-\beta_i)(2y-y'-\beta_i)+(z'-\gamma_i)(2z-z'-\gamma_i)-r_i^2=0$$

ossia

$$2x(x'-\alpha_i)+2y(y'-\beta_i)+2z(z'-\gamma_i)-(x'^2+y'^2+z'^2)+(\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2-r_i^2)=0$$

o ancora

$$2xx'+2yy'+2zz'-(x'^2+y'^2+z'^2)=2\alpha_i x+2\beta_i y+2\gamma_i z-(\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2)+r_i^2.$$

Da queste equazioni risulta che il punto M *si trova sopra la retta rappresentata nel modo seguente*

$$2\alpha_1 x+2\beta_1 y+2\gamma_1 z-(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)+r_1^2=2\alpha_2 x+2\beta_2 y+2\gamma_2 z-$$
$$-(\alpha_2^2+\gamma_2^2+\gamma_2^2)+r_2^2=2\alpha_3 x+2\beta_3 y+2\gamma_3 z-(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)+r_3^2.$$

Ma queste possono anche scriversi sotto la seguente forma

$$(x-\alpha_1)^2+(y-\beta_1)^2+(z-\gamma_1)^2-r_1^2=(x-\alpha_2)^2+(y-\beta_2)^2+$$
$$+(z-\gamma_2)^2-r_2^2=(x-\alpha_3)^2+(y-\beta_3)^2+(z-\gamma_3)^2-r_3^2.$$

Dunque *tale retta altro non è che l'asse radicale delle tre sfere date* (e della rete che esse determinano). E così resta dimostrato che il teorema riferito in principio è generalizzabile al nostro spazio (e così farebbesi per uno spazio lineare qualunque).

Queste osservazioni fanno vedere che, almeno limitandosi agli elementi reali dello spazio, il complesso *inerente* (per usare l'espressiva locuzione introdotta dal prof. Pieri) alla trasformazione birazionale (cubica) stabilita fra i punti P′ e P″, è un *complesso lineare speciale*. Per riconoscere se questo esaurisca *tutte* le congiungenti delle coppie di punti corrispondenti P′, P″, notiamo che la corrispondenza fra questi rientra nel tipo più generale di quella che si ottiene associando ad un punto qualunque P′ il punto comune ai piani che gli corrispondono in tre correlazioni dello spazio. La specializzazione che ha luogo nel caso che studiamo è duplice. Anzitutto queste correlazioni sono polarità rispetto a tre quadriche (cioè le sfere $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$) il che ha per conseguenza che la corrispondenza fra P′ e P″ è involutoria; in secondo luogo tali quadriche hanno comune una conica Γ (il cerchio immaginario all'infinito).

Ora è facile dimostrare che in generale il complesso inerente ad una trasformazione birazionale (μ, ν) è del grado $\mu + \nu$, ma discende al grado ν allorquando la corrispondenza sia involutoria del grado ν. Perciò il complesso costituito dalle rette P', P'' è, in generale, del terzo grado. Ma quando, come nel caso considerato, le tre quadriche direttrici hanno in comune una conica Γ (e quindi passino anche per altri due punti fissi M, N) ogni punto P' di Γ coincide col suo corrispondente e la retta $P'P''$ risulta indeterminata. Ciò porta a concludere che dal complesso cubico inerente alla trasformazione di cui ci occupiamo si stacca il complesso quadratico formato dalle rette incontranti Γ; toltolo, rimane un *complesso lineare* come formato dalle rette che uniscono ciascuna due punti corrispondenti *distinti*. (1)

Per mostrare direttamente che questo è speciale ed ha per asse la retta MN, osserviamo che per determinare il punto P'' che corrisponde ad un punto qualsivoglia P' si può operare come segue: si considerino tre qualunque delle quadriche appartenenti alla data rete (cioè passanti per la conica ed i punti M, N); i piani polari rispetto ad esse del punto P' si tagliano in P''. Orbene come una di tali quadriche scegliamo quella formata dal piano $MNP' = \sigma$ e dal piano τ ove sta Γ; rispetto ad essa il piano polare del punto P' è σ stesso; i piani polari di P' rispetto a quelle altre due quadriche scelte taglieranno il piano in due rette la cui intersezione è appunto P''. Le due rette MN e $P'P''$, che stanno entrambe nel piano σ, si tagliano; in altri termini la retta $P'P''$ incontra sempre la retta MN c. d. d.

G. Loria.

IL CONCETTO GEOMETRICO DI LINEA

(Continuazione — Vedi fascicoli III e IV).

Spartizione dei punti interni a una linea chiusa per mezzo di una linea.

48. Mostreremo come la regione interna a una linea chiusa venga divisa, da una linea che la *attraversi*, in due regioni, che conservano i caratteri della regione primitiva.

(1) In generale se la trasformazione (μ, ν) possiede una curva punteggiata unita dell'ordine n il grado del complesso costituito dalle rette che uniscono due punti corrispondenti qualunque *distinti* e in generale $\mu + \nu - n$, ma scende a $\nu - n$ se si tratta di una trasformazione involutoria di grado ν. Può accadere che questo numero si riduca a zero; se, per es. si considera la trasformazione analoga a quella studiata nel testo, ma relativa a tre quadriche passanti per una cubica gobba k, il complesso ad essa inerente è costituito dalle secanti di tale curva; ma ogni corda della stessa contiene infinite coppie di punti corrispondenti distinti, onde la congruenza delle corde di k fa infinite volte parte del complesso inerente alla trasformazione in discorso, ecc.

XVII. *Se due punti M, N di una linea L, chiusa e priva di nodi, sono congiunti da una linea l' priva di nodi, che ha tutti i suoi punti interni ad L (eccettuati gli estremi), i punti della regione interna ad L, esclusi quelli appartenenti ad l', si dividono in due regioni, che sono le regioni interne alle due linee chiuse ll' ed l'l'' formate da l' e dai due tratti l ed l'' nei quali M ed N dividono L.*

Costruiamo le striscie x_0y_0 e xy, come per la dimostrazione del teorema XVI [44]; gli estremi M ed N di l' possono trovarsi uno sull'uno e uno sull'altro dei due tratti nei quali A' e B' dividono L, o su uno stesso tratto; esaminiamo il primo caso.

Dei due tratti A'B' di L, uno è, rispetto all'altro, dalla parte di P [44]; su questo sia M, sull'altro N.

Consideriamo le linee

$$\lambda \equiv AA'MB'B\,, \qquad \lambda' \equiv AA'MNB'B\,, \qquad \lambda'' \equiv AA'NB'B\,,$$

e le regioni R_1, R'_1, R''_1 contenenti P, e R_2, R'_2, R''_2 contenenti Q, determinate nella striscia xy da ciascuna di esse.

L'aver supposto che il tratto A'MB' sia quello che si trova, rispetto all'altro, dalla parte di P, porta che si abbia:

$$R_1 < R_1''$$
$$I(L) \equiv R''_1 - R_1 - \overline{A'MB'}\,. \qquad [45]$$

Ora osserviamo che ogni linea che parte da P, è interna a xy e non incontra λ non può incontrare neanche l' che ha i suoi punti interni a L e quindi in R''_1, e non incontra perciò λ'; quindi si ha:

$$R_1 < R'_1\,.$$

Per avere la espressione della regione interna alla linea chiusa ll', basta considerare questa linea come formata dai due tratti MB' e B'NM, e assegnare ai tratti AA'M e B'B la stessa funzione dei tratti AA' e B'B nella dimostrazione del teorema XVI.

Tale espressione si trova essere:

$$I(ll') \equiv (R_2 R'_1) \equiv R'_1 - R_1 - \overline{MB'}.$$

Con analoghe considerazioni rispetto al punto Q troviamo:

$$R'_1 < R''_1\,,$$
$$I(l'l'') \equiv (R'_2 R''_1) \equiv R''_1 - R'_1 - \overline{A'MN}\,.$$

È evidente che le regioni $I(ll')$ e $I(l'l'')$ non hanno punti comuni, perchè l'una è tutta in R'_1 e l'altra tutta in R'_2. Riunendo avremo:

$$\begin{aligned} I(ll') + I(l'l'') &\equiv (R_1'' - R'_1 - \overline{A'MN}) + (R'_1 - R_1 - \overline{MB'}) \equiv \\ &\equiv R''_1 - R_1 - \overline{A'M} - \overline{MN} - \overline{MB'} \equiv \\ &\equiv R''_1 - R_1 - \overline{A'MB'} - \overline{MN} \equiv \\ &\equiv I(L) - \overline{MN} \equiv I(L) - \overline{l'}\,. \end{aligned}$$

Risulta dunque la regione interna ad L meno i punti di essa che appartengono ad l'.

Analoghe considerazioni valgono nel caso nel quale i punti M ed N si trovano su uno stesso dei due tratti A'B' di L.

49. Un punto X del tratto l'' di L non è interno alla linea ll', giacchè, se così fosse, sarebbe anche interno alla linea L. Si ha dunque che: *Nelle ipotesi del teorema XVII, i punti del tratto* l' *di* L (*esclusi gli estremi*) *sono esterni rispetto alla linea chiusa* ll', *e i punti del tratto* l (*esclusi gli estremi*) *sono esterni rispetto alla linea* l'l''.

50. A completamento del teorema XVI possiamo ora dimostrare il seguente:

XVI$^{\text{bis}}$. *Due punti della regione interna rispetto a una linea piana* L, *chiusa e priva di nodi, si possono congiungere con una linea del piano che non incontri* L.

Consideriamo un punto W di I(L) e conduciamo per esso una retta r; siano α' e β' i primi punti nei quali i due raggi determinati da W su r incontrano L. Il tratto $\overline{\alpha'\beta'}$ di r sarà tutto in I.

Possono darsi due casi: che W si possa congiungere ad ogni altro punto di I con una spezzata di un numero finito di lati che non incontri L, o che ciò non avvenga. Nel primo caso si verificherebbe quanto vogliamo dimostrare; supponiamo quindi che esista un punto U di I non congiungibile con W nel modo detto.

Ogni punto interno ad L e non appartenente al segmento $l' \equiv \alpha'\beta'$ è necessariamente interno all'una ed esterno all'altra delle due linee chiuse formate da l' e dai due tratti l e l'' nei quali L è divisa dai punti α' e β' [48]. Sia, per esempio, U interno alla linea chiusa ll' ed esterno alla $l'l''$. Considerando la regione I' dei punti che si possono congiungere con U mediante linee spezzate che non incontrano L, si ha non solo $I' < I(L)$ ma anche $I' < I(ll')$, giacchè se una di tali spezzate incontrasse il segmento $\alpha'\beta'$ avremmo che anche W sarebbe di I', contro l'ipotesi.

Prendiamo un punto $\alpha \equiv \beta$ del tratto l'', diverso da α' e β', e riguardiamo L come una linea limitata $\overline{\alpha\alpha' l \beta'\beta}$ con gli estremi α e β coincidenti. Ciascun punto dei tratti $\overline{\alpha\alpha'}$ e $\overline{\beta'\beta}$ è esterno alla linea chiusa ll' [49], onde si può considerare un intorno circolare di esso nel quale non siano contenuti punti di I'. E allora noi vediamo che per la linea L si può ripetere il ragionamento fatto al n. 42 relativamente alla linea $l \equiv AA'B'B$ per la dimostrazione dell'ultima parte del teorema XIV. I tratti $\alpha\alpha'$ e $\beta'\beta$ di L terranno il posto dei tratti AA' e B'B di l, la regione I' terrà il posto della regione R'''_2 del n. 42.

L'assurdo al quale si giunge prova l'inammissibilità dell'ipotesi di due punti W e U di I non congiungibili con una linea (spezzata di un numero finito di lati) che non incontri L (1).

---

(1) La regione I(L) è dunque un *campo connesso* secondo WEIERSTRASS (v. nota al n. 55).

51. Nella dimostrazione del teorema XIV [38-42] ponemmo la limitazione che due tratti della linea l ivi considerata, adiacenti agli estremi A e B, fossero rettilinei; però tale limitazione occorre solo per stabilire che due punti della regione R_2 si possono congiungere con una linea contenuta in R_2. Tornando ora a quel teorema, consideriamo la regione interna a un rettangolo tagliato dalla striscia xy e che contenga x' e y'; essa è divisa da l in due regioni, interne a due linee chiuse e prive di nodi [48]. Per il teorema XVI^{bis} [50] due punti di una di tali regioni si possono congiungere fra loro con una linea interna alla striscia xy e che non incontra l. Tale proprietà si mantiene estendendo le due regioni suddette in tutta la striscia xy, nel qual caso si ottengono appunto le regioni R_1 e R_2.

Dunque la proprietà accennata è indipendente dall'esistenza dei due tratti rettilinei AA′ e B′B.

Posizione relativa di tre linee limitate con gli estremi in comune.

52. Le tre linee l, l', l'' del teorema XVII [48] si trovano in questa condizione: una di esse è interna alla linea chiusa formata dalle altre due, e ciascuna di queste due è esterna alla linea chiusa formata dalle altre.

Ora vedremo in generale che:

XVIII. *Se tre linee* l, l′, l″, *prive di nodi, hanno gli estremi* **M, N** *in comune, e due qualunque di esse non hanno, oltre gli estremi, altri punti comuni, una determinata delle tre linee ha tutti i suoi punti, eccettuati gli estremi, interni alla linea chiusa formata dalle altre due, e ciascuna di queste ha tutti i suoi punti, eccettuati gli estremi, esterni alla linea chiusa formata dalle altre due.*

Considerando due parallele x_0, y_0 che sfiorino il sistema delle tre linee l, l', l'', in modo che queste siano contenute nella striscia x_0y_0 [19], facciamo una costruzione analoga a quella fatta al n. 44.

I due punti di sfioramento A′ e B′ (l'uno su x_0, l'altro su y_0) possono trovarsi su due diverse linee l, l', l'', o su una stessa; possono anche coincidere, uno o ambedue, coi punti M ed N.

Esaminiamo il primo caso; sia per esempio A′ su l'' e B′ su l. Delle linee

$$\lambda \equiv AA'MB'B\,, \qquad \lambda'' \equiv AA'NB'B\,,$$

che determinano nella striscia xy le regioni R_1, R_2; R''_1, R''_2, supponiamo che la prima sia quella che si trova, rispetto all'altra, dalla parte di P [44]; di modo che si abbia:

$$R_1 < R_1''\,, \qquad I(ll'') \equiv (R_2R''_1)\,.$$

Il punto N è nella regione R_2, e quindi tutti i punti di $\overline{l'}$ sono in R_2; così M è in R''_1, e quindi tutti i punti $\overline{l'}$ sono in R''_1. Ne segue che $\overline{l'}$, essendo in R_2 e in R''_1, è interna alla linea chiusa ll''.

Nel secondo caso, siano A′ e B′ ambedue su l''; essi limitano un tratto di l'' che indicheremo senz'altro con A′B′. Consideriamo le tre linee:

$$\lambda \equiv AA'MlNB'B\,, \quad \lambda' \equiv AA'Ml'NB'B\,, \quad \lambda'' \equiv AA'B'B\,.$$

Le linee l e l', che non incontrano l'' (eccettuati gli estremi comuni M, N), non incontrano neppure λ'', e quindi si trovano interamente in una delle due regioni determinate da λ''; siano, per esempio, in R''_1. Di più, delle linee λ e λ', sia λ quella che si trova, rispetto all'altra, dalla parte di P. Allora avremo che i punti di $\overline{l'}$ sono in R_2 rispetto a λ, in R''_1 rispetto a λ''; sono dunque nella regione $(R_2R''_1)$. Così, anche in questo caso, $\overline{l'}$ è interna alla linea chiusa ll''.

Negli altri casi, nei quali A′ o B′ od ambedue coincidono con M od N, si possono fare considerazioni analoghe; del resto però questi casi possono anche evitarsi, scegliendo opportunamente la striscia x_0y_0.

Quanto poi al fatto che se $\overline{l'}$ è interna alla linea chiusa ll'', $\overline{l}$ ed $\overline{l''}$ sono esterne alle linee chiuse ll' e $l'l''$ rispettivamente, ciò risulta dall'osservazione fatta al n. 49.

53. Dal teorema dimostrato segue: *Un insieme di linee limitate e prive di nodi che hanno gli estremi in comune e non hanno poi, prese due a due, altri punti in comune, si può ordinare in modo che una qualunque di esse linee sia interna rispetto alla linea chiusa formata da una linea precedente e da una seguente a quella.*

54. Combinando i teoremi XVII e XVIII, si può enunciare il seguente: *Nelle ipotesi del teorema XVIII, considerando le regioni interne alle tre linee chiuse che si ottengono dalle linee* l, l′, l″ *prendendole due a due, si ha che una determinata di queste regioni contiene le altre due, le quali non hanno fra loro alcun punto in comune.*

La proprietà contenuta in questo teorema caratterizza quella delle tre linee che è interna rispetto alla linea chiusa formata dalle altre due.

Superficie limitata da una linea chiusa. Composizione delle superfici.

55. Se alla regione interna rispetto a una linea L chiusa e priva di nodi si aggiungono i punti della linea L stessa, si ottiene un insieme di punti

$$S(L) \equiv I(L) + L\,,$$

che sarà detto *superficie limitata dalla linea* L (¹). La linea L è il *contorno* della superficie S.

(¹) L'insieme S è tale che ogni suo punto è punto limite dell'insieme, e ogni punto limite dell'insieme è nell'insieme stesso; è dunque un insieme *perfetto* nel senso di CANTOR. La denominazione di *superficie* data all'insieme S (L) risponde alla norma di chiamare *superficie semplice* ogni insieme di punti costituito di un *campo connesso* e dei suoi punti limiti (SCHOENFLIES, *op. cit.*, II, pag. 109). Per campo connesso si deve intendere, con WEIERSTRASS, un insieme di punti nel quale ogni punto è centro di un intorno circolare tutto appartenente all'insieme, e due punti sono congiungibili con una spezzata di un numero finito di lati contenuta nell'insieme (*Ges. Werke*, 2, pag. 71). L'insieme S (L) è anche connesso nel senso di CANTOR, ed essendo connesso e perfetto è un *continuo*. La regione I (L) è un *continuo non chiuso* per SCHOENFLIES (*op. cit.*, II, pag. 117) ed un *semicontinuo* per CANTOR (*Math. Ann.*, 21 (1883), pag. 590).

56. Prima di porre il concetto di *superficie composta* di due altre, dimostreremo il teorema:

XIX. *L'insieme dei punti di due superfici limitate da linee chiuse e prive di nodi, che hanno un tratto di contorno in comune e non hanno poi altri punti comuni, è ancora una superficie limitata da una linea chiusa e priva di nodi.*

Sia l' il tratto di contorno comune, l ed l'' i due tratti che non sono comuni; cosicchè i contorni delle due superfici siano ll' ed $l'l''$. Si hanno le relazioni:

$$\mathrm{I}(ll') \equiv \mathrm{S}(ll') - ll', \qquad \mathrm{I}(l'l'') \equiv \mathrm{S}(l'l'') - l'l'',$$

e poichè abbiamo supposto che le $\mathrm{S}(ll')$ ed $\mathrm{S}(l'l'')$ non abbiano altri punti comuni che quelli di l', abbiamo che $\mathrm{I}(ll')$e $\mathrm{I}(l'l'')$ non hanno punti comuni.

Applicando alle tre linee l, l', l'' il teorema XVIII [52], completato dall'osservazione fatta al n. 54, si ha che l' è quella delle tre linee che è interna alla linea chiusa formata dalle altre due, e quindi:

$$\mathrm{I}(ll'') \equiv \mathrm{I}(ll') + \mathrm{I}(l'l'') + \overline{l'}\,.$$

Da questa, aggiungendo ad ambedue i membri i punti della linea chiusa ll'', si ottiene:

$$\mathrm{I}(ll'') + ll'' \equiv \mathrm{I}(ll') + \mathrm{I}(l'l'') + \overline{l'} + l + \overline{l''} \equiv$$
$$\equiv [\mathrm{I}(ll') + ll'] + [\mathrm{I}(l'l'') + \overline{l''}],$$

e quindi:

$$\mathrm{S}(ll'') \equiv \mathrm{S}(ll') + [\mathrm{S}(l'l'') - l'].$$

Poichè il tratto l', che deve essere sottratto da $\mathrm{S}(l'l'')$, si trova già in $\mathrm{S}(ll')$, abbiamo che i punti appartenenti alle due superfici date costituiscono la superficie limitata della linea chiusa ll''.

57. Diremo *superficie composta* di due superfici che hanno un tratto del contorno in comune, senza avere altri punti comuni, la superficie costituita dei punti appartenenti alle due superfici.

Applicando successivamente il processo di composizione si potrà avere una superficie composta di più altre, le quali si diranno *parti* di quella.

Il teorema XVII [48] si può enunciare nel modo seguente: *Una linea che congiunge due punti del contorno di una superficie ed è del resto interna rispetto a questo contorno, divide la superficie in due parti* (1).

---

(1) Ciò mostra come le superficie qui considerate siano *semplicemente connesse*, nel senso di RIEMANN.

Posizione relativa di due linee chiuse.

58. I due casi più importanti che possono presentarsi nella posizione relativa di due linee chiuse e prive di nodi appartenenti a uno stesso piano sono contenuti nel seguente teorema:

XX. *Se i contorni* L *ed* L′ *di due superfici hanno un insieme qualunque di punti (o nessun punto) in comune, e gli altri punti di ciascuno di essi sono esterni rispetto all'altro, le due superfici* S(L) *ed* S(L′) *non hanno altri punti comuni che quelli del contorno.*

Se i contorni L *ed* L′ *di due superfici hanno un insieme qualunque di punti (o nessun punto) in comune, e gli altri punti di* L′ *sono interni rispetto ad* L, *ogni punto della superficie* S(L′) *appartiene alla* S(L); *mentre esistono punti della seconda che non appartengono alla prima.*

Per la dimostrazione della prima parte notiamo che, se L ed L′ non coincidono, non può neppure supporsi, trattandosi di linee chiuse e prive di nodi, che ogni punto di L sia in L′ [26]; è lecito dunque considerare un punto M di L che non appartenga ad L′ e che quindi sia esterno ad L′.

Con centro in M descriviamo una circonferenza di raggio

$$\rho < \delta(M, L'),$$

e prendiamo un punto N interno ad essa ed anche interno ad L. Il punto N sarà interno ad L ed esterno a L′. Un punto qualunque X di I(L) può congiungersi ad N con una linea interna ad L; questa linea non può incontrare L′, e perciò appartiene, come N, ad E(L′). Si ha dunque che ogni punto X di I(L) è in E(L′), e che quindi ogni punto di S(L) o non appartiene ad S(L′) o appartiene al suo contorno.

Poichè la stessa considerazione può ripetersi per L′ rispetto ad L, la prima parte del teorema è dimostrata.

Passiamo ora alla seconda parte. Sia M un punto esterno tanto rispetto ad L che ad L′, ed X un punto interno rispetto ad L′; una linea l qualunque che congiunga M con X incontra necessariamente L′ in un punto N. Ora, o N è anche di L (ossia è comune ad L e L′), oppure N è interno ad L, e allora il tratto MN di l incontra L. In ogni caso dunque la linea l incontra L, e quindi il punto X è anche in I(L).

Così è dimostrato che ogni punto di S(L′) è in S(L). Ora consideriamo, se L ed L′ non coincidono, un punto H di L che non appartenga a L′. Il punto H è esterno ad L′, perchè se fosse interno a L′ sarebbe anche interno ad L; e i punti di S(L) contenuti in un intorno circolare di H di raggio $< \delta(H, L')$ sono ancora esterni ad L′.

Esistono dunque punti di S(L) che non sono in S(L′); fra questi, quei punti di L che non sono su L′.

59. Per quanto abbiamo veduto si ha che *quando una linea* L′ *appartiene alla superficie limitata ad un'altra linea* L, *i punti di* L *che non sono anche di* L′ *sono esterni rispetto ad* L′.

60. Per completare l'esame di tutti i casi che possono presentarsi nella posizione relativa di due linee aggiungiamo che se i contorni L e L′ di due superfici sono tali che due punti di uno di essi siano in regioni diverse rispetto all'altro, lo stesso fatto avviene per il secondo rispetto al primo; le due superfici hanno in comune dei punti anche non appartenenti ai contorni, ma non si può dire che l'insieme dei punti comuni alle due superfici sia ancora una superficie.

Posizione relativa di una linea con una retta.

61. Considerando una linea piana chiusa L, priva di nodi, e una retta r del suo piano, possono presentarsi tre casi:

1°, *che* L *ed* r *non abbiano punti comuni.* La linea L e la superficie S(L) hanno tutti i loro punti da una stessa parte rispetto alla retta r, e i punti di r sono esterni ad L; la retta r dicesi *esterna* rispetto alla linea L.

2°, *che* L *ed* r *abbiano punti comuni, ma non esistano su* L *due punti che siano da parte opposta rispetto ad* r. La linea L, e la superficie S(L), giacciono interamente in uno dei due semipiani determinati da r, e quei punti di r che non sono su L sono esterni ad L; la retta è *sfiorante* per la linea L [19].

3°, *che* L *ed* r *abbiano punti comuni, ed esistano su* L *due punti* M, N *che siano da parte opposta rispetto ad* r; la prima condizione è manifestamente conseguenza della seconda.

Considerando due punti M′, N′ interni ad L e in un intorno circolare di M, N sufficientemente piccolo affinchè anche M′ e N′ siano da parte opposta rispetto ad r, M′ ed N′ possono congiungersi con una linea interna ad L, che incontra r almeno in un punto; su r esistono dunque dei punti interni ad L. In questo terzo caso la retta r si dice *segante* per la linea L.

Inversamente si ha:

Una retta r *che ha punti comuni con la linea* L *è sfiorante o segante secondo che esistono o no su* r *punti della regione* I(L).

(Continua) P. Benedetti.

SUI MASSIMI E MINIMI DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

1. Si tratta qui di indicare un nuovo metodo per la distinzione dei massimi e dei minimi delle funzioni di più variabili.

Ricordiamo dagli elementi qualche osservazione.

Nella matematica elementare si risolvono questioni di massimo e di minimo con considerazioni che sembrano, e furono anche dette indirette, ben inteso rispetto alla natura delle quistioni proposte. Per chiarire vediamo un elementarissimo esempio.

Dividere un numero positivo 2a *in due parti positive il cui prodotto sia massimo.*

Se x è una delle parti, l'altra sarà $2a-x$. Se si pone

$$x(2a-x)=p \tag{1}$$

si tratta di trovare il massimo di p. La (1) può scriversi

$$x^2-2ax+p=0$$

da cui

$$x=a\pm\sqrt{a^2-p}\,.$$

Si osserva quindi che se deve essere x reale, deve essere

$$a^2-p\geqslant 0$$

e di qui

$$p\leqslant a^2$$

la quale ci dice che p può raggiungere al massimo il valore a^2, valore che esso assume effettivamente prendendo

$$x=a \qquad \text{e} \qquad 2a-x=a\,;$$

e così il massimo prodotto si ha quando le due parti sono uguali.

La questione proposta è dunque risoluta con procedimento nel quale, quasi direi, si abbandona la considerazione diretta del fine che si ha di mira: discende la determinazione del massimo dalla condizione che le parti debbano essere reali.

Con procedimenti simili in molte altre questioni si è condotti a stabilire delle disuguaglianze dalle quali scaturisce la determinazione del massimo e del minimo di certe quantità.

Il metodo che è detto elementare, non si presenta così in forma naturale per il fine desiderato, e appare indiretto.

Ma ciò non è come è ben noto e come è stato esposto anche in libri di elementi.

Nel trattato di Algebra del prof. Arzelà, sin dalla prima edizione del 1880 e anche nelle successive, e nei Complementi, è messo in luce che un tal metodo indiretto rientra in quello che è detto *della funzione inversa* e che appartiene in origine a Fermat.

E del prof. Arzelà è anche uno studio *sui massimi e sui minimi* per le funzioni di una variabile, pubblicato nel 1878 negli *Atti della società delle Scienze Naturali ed Economiche* di Palermo, e che si fonda sulla considerazione della funzione inversa.

Ma l'estensione di un tal metodo a più variabili non è, ch'io sappia, mai stata fatta.

Il prof. Amodeo in un articolo pubblicato nel *Periodico di Matematica*, anno XXIV, ricorda che Fermat applicò il metodo suaccennato anche a funzioni di più variabili *in modo astruso e con ripieghi difficili a seguirsi in generale.*

Ma io non ho potuto trovar qui, per ora, e leggere l'opera di Fermat.

Altri tentativi recenti di estensione non cito, perchè ciò che in appresso esporrò, ne metterà in luce l'erroneità e l'insufficienza. Per esempio, se si ha una funzione $z=f(x, y)$ di due variabili, qualche autore riguarda come fissa la x e applica il metodo della funzione inversa alla funzione $f(\overline{x}, y)$ della sola y: poi riguarda invece come fissa la $\overline{y}$, e applica il metodo della funzione inversa alla funzione delle sole x $f(x, \overline{y})$; i valori (x_0, y_0) trovati per x e y sarebbero il massimo o il minimo. Ma è presto veduto, che così facendo si è solamente sicuri di avere un massimo o un minimo relativo ai valori che la funzione ha lungo le rette $x=x_0$ e $y=y_0$, e non si può asserire alcunchè di sicuro rispetto alla totalità dei valori che la z può avere nell'intorno del punto (x_0, y_0) almeno, sino a che non si aggiungano altre condizioni.

E se il metodo, applicato a particolari esempi, dà un resultato giusto, ciò non prova nulla; sarebbe facile trovare il perchè di questo fatto. Ma il procedimento non è affatto rigoroso.

Il metodo che daremo è assai semplice e si può con qualche apparenza di somiglianza riguardare come l'estensione di quello sopradetto della *funzione inversa.*

2. Sia

$$z=f(xy)$$

una funzione di due variabili, che riferita a tre assi coordinati, rappresenta una superficie.

In un punto x_0y_0 la funzione assuma un valore z_0 massimo o minimo; un piano parallelo al piano xy condotto alla distanza

$$z_0-\delta, \qquad \text{o} \qquad z_0+\delta,$$

rispettivamente da quest'ultimo, taglierà la superficie secondo una linea che si proietterà nel piano secondo un'altra, chiusa, nel cui interno giace il punto x_0, y_0; per ogni punto $\overline{xy}$ preso sulla curva sarà:

$$f(\overline{xy})=z_0-\delta \qquad \text{o} \qquad f(\overline{xy})=z_0+\delta$$

rispettivamente, ma, detta ρ la minima distanza, certamente maggiore di zero, dei punti della curva proiettata, dal punto x_0y_0, esisterà un cerchio di centro x_0y_0 e raggio ρ determinato, che diviene zero solo per $\delta=0$, tale che per i punti x_0+h, y_0+k presi nel suo interno, si verifica

$$f(x_0+h, \quad y_0+k)-f(x_0y_0)\leqslant 0$$

ovvero

$$f(x_0+h, \quad y_0+k)-f(x_0y_0)\geqslant 0$$

e lo studio del segno di queste differenze nell'intorno del punto x_0y_0, ove, per essere un massimo o un minimo, sono nulle le derivate prime z'_x e z'_y, si fa come è ben noto, studiando il segno della funzione quadratica in h e k che è il secondo termine dello sviluppo di Taylor di quella differenza.

Ora noi osserviamo che dal verificarsi della disuguaglianza, segue che sopra ogni retta passante per x_0y_0, vi è in questo punto un massimo o un minimo rispetto alla retta stessa.

È sufficiente questa condizione? vale a dire: se sopra ogni retta che passa pel punto (x_0y_0) si ha $f(x_0y_0) = z_0$, massima o minima, si può concludere che esiste un cerchio di centro x_0y_0 di raggio assegnabile maggiore di zero, nei punti interni del quale si abbia

$$f(x_0 + h, \quad y_0 + k) - f(x_0y_0) \leqslant 0$$

ovvero

$$f(x_0 + h, \quad y_0 + k) - f(x_0y_0) \geqslant 0$$

e quindi si abbia in (x_0y_0) un massimo o un minimo secondo la definizione data sopra?

Si può dimostrare con esempi che non è sufficiente.

Il primo esempio fu dato dal prof. Peano (Calcolo diff. di Genocchi, pag. XXIX) nella funzione

$$z = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)$$

dove è $p > q > 0$ e si considera il punto (00).

Le $y^2 = 2px$ e $y^2 = 2qx$ sono due parabole che si toccano nel punto (00) e hanno per asse la parte positiva dell'asse y. Nella regione interna alla parabola interna, e nella regione esterna alla parabola esterna la z è positiva; nella regione compresa tra esse è negativa; per $x = 0$, $y = 0$ è $z = 0$. Ogni retta diversa dall'asse x e dall'asse y, passante per l'origine, porta quivi un minimo della z rispetto alla retta stessa; sopra ciascuna retta vi è un intorno di (00) in ogni punto del quale si ha

$$f(x_0 + h, \quad y_0 + k) - f(x_0y_0) \geqslant 0;$$

ma questi intorni vanno impicciolendo indefinitamente.

Si possono costruire quanti esempi simili si vogliono (vedi Scheeffer, "Theor. der Max. und Min.", ecc., *Math. Ann.*, XXXV Band.).

Il prof. Vivanti in una nota *sui massimi e sui minimi* delle funzioni di più variabili, nei rendiconti dei Lincei (anno 1898) mostrò che per avere un massimo o un minimo era necessario e sufficiente che un massimo o un minimo in quel punto si avesse sopra qualsiasi curva continua passante per esso. Ma l'arbitrarietà grande di tale condizione rende ben difficile e forse impossibile il verificarla.

Vi è dunque luogo a ricercare quale è rispetto al fascio di raggi passante pel punto x_0y_0 la condizione necessaria e sufficiente.

Se vi è un cerchio di centro $(x_0 y_0)$ e raggio ρ siffatto che in ogni punto $(x_0 + h, y_0 + k)$ di esso sia

$$f(x_0 + h, \ y_0 + k) - f(x_0 y_0) \leqslant 0$$

ovvero

$$f(x_0 + h, \ y_0 + k) - f(x_0 y_0) \geqslant 0,$$

si ha che su ogni retta le disuguaglianze rispettive sono verificate in tutto in un tratto di lunghezza ρ e da ambo le parti di $(x_0 y_0)$. E se su ogni retta passante per $(x_0 y_0)$ esiste un tratto 2ρ col centro in $(x_0 y_0)$, lungo il quale è verificata l'una o l'altra di quelle disuguaglianze, vi è sicuramente un cerchio di centro $(x_0 y_0)$ e raggio ρ nel quale è verificata l'una o l'altra delle dette disuguaglianze e quindi si ha un massimo o un minimo della $z = f(xy)$.

La condizione necessaria e sufficiente è dunque questa:

che valga uno stesso intorno, maggiore di zero, di $(x_0 y_0)$ *per ogni retta, dove è verificata l'una o l'altra di quelle diseguaglianze.*

Da questa considerazione nasce un metodo per riconoscere e distinguere se in un punto ci sia un massimo od un minimo.

Innanzi tutto ricordiamo che le coordinate di un punto $(x_0 y_0)$ di massimo o di minimo, devono costituire una soluzione del sistema

$$\begin{cases} z'_x(x, y) = 0 \\ z'_y(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

z'_x e z'_y indicando le derivate parziali di $z(xy)$ rispetto ad x ed y.

Risolvendo il sistema (1) si avranno le soluzioni $(x_0 y_0)$, $(x_1 y_1) \ldots$ che qui supponiamo in numero finito, o almeno consideriamo una di queste isolata, cioè tale che in un intorno di essa non vi siano altri massimi o minimi. Corrisponderanno i valori

$$z_0 = f(x_0 y_0), \qquad z_1 = f(a_1 y_1) \ldots$$

che possono essere massimi o minimi. Si tratta di riconoscere che sono tali e distinguerli.

Ciò può farsi nel seguente modo.

Si consideri per es. il valore z_0 e un valore $z_0 + \delta$, δ essendo un numero assegnabile che può essere piccolo. Per un momento si assuma nell'intervallo z_0 e $(z_0 + \delta)$ come variabile indipendente il valore della z; se per ogni valore z, compreso fra z_0 e $z_0 + \delta$ esiste in corrispondenza sopra ogni retta passante per $(x_0 y_0)$ un tratto di lunghezza ρ, maggiore sempre di un certo numero assegnabile sinchè è assegnabile e diversa da zero, la differenza $z_0 - z$, e che diviene zero, solo se diviene tale $z_0 - z$, e se preso su ogni retta di coefficiente angolare φ, per φ compreso tra 0 e 2π, un tratto ρ a partire da $(x_0 y_0)$, essendo z il valore della funzione in un punto generico di esso, si abbia sempre

$$z - z_0 \leqslant 0$$

allora si riconoscerà che z_0 è un minimo: se invece l'esistenza del tratto ρ si verifica per ogni z fra z_0 e $z_0-\delta$, z_0 sarà un massimo.

Se in corrispondenza a certi valori di φ o a qualche gruppo di valori di φ non esiste il detto valore di ρ reale e positivo, o se, considerati tutti i ρ corrispondenti a tutti i valori di φ, per un z diverso da z_0 il limite inferiore dei ρ non è maggiore di un numero maggiore di zero, vorrà dire che il valore z_0 non è nè massimo, nè minimo.

Nell'esempio del prof. Peano è appunto ciò, quello che succede: per ogni φ esiste un ρ, ma non esiste un determinato ρ maggiore di zero, che valga per tutti i φ a darci su ogni retta l'intorno nel quale sia $z-z_0<0$ ovvero $z-z_0>0$.

Il procedimento atto a far riconoscere l'esistenza di questo valore di ρ può indicarsi così: si ponga nella

$$z=f(xy) \tag{1}$$

$x=\rho\cos\rho$, $y=\rho\operatorname{sen}\varphi$ se si tratta di riconoscere se vi è un massimo od un minimo nel punto (00).

Si avrà

$$f(\rho\cos\varphi,\quad \operatorname{sen}\varphi)-z=0 \tag{2}$$

nella quale z indica un valore fisso, comunque compreso fra z_0 e $z_0-\delta$ o $z_0+\delta$ e si riguarderà nella equazione scritta come incognito il ρ.

Se si riconosce che la (2) ammette in ρ una radice positiva, maggiore (qualunque sia φ fra 0 e 2π) di un numero assegnabile maggiore di zero per ogni z compreso fra z_0 e $z_0-\delta$, che si riduce a zero, solo se diviene zero la differenza $z-z_0$, allora si concluderà che z_0 è un massimo. Se invece il z è da prendersi fra z_0 o $z_0+\delta$, per ottenere il ρ anzidetto, ciò significherà che z_0 è un minimo. Se per avere il ρ di che si tratta, occorre per certi valori di ρ prendere il z fra z_0 e $z_0+\delta$, e per altri valori di φ prendere il z, fra z_0 e $z_0-\delta$, non vi sarà per la funzione, nè massimo, nè minimo.

Se si tratta, anzichè del punto (00), del punto (x_0, y_0), si porrà nella (1)

$$x=x_0+\rho\cos\varphi \qquad \text{e} \qquad y=y_0+\rho\operatorname{sen}\varphi$$

e si avrà da risolvere in ρ l'equazione

$$f(x_0+\rho\cos\rho,\quad y_0+\rho\operatorname{sen}\omega)-z=0.$$

Il metodo è generale e il successo di esso è interamente fondato sullo studio dell'equazione in ρ, e se la forma di questa è algebrica, il problema dei massimi e dei minimi è ridotto a una questione di algebra.

Si è detto che i valori $z_0, z_1, \ldots$ da provarsi sono dipendenti dalle soluzioni del sistema

$$z'_x=0, \qquad z'_y=0;$$

ciò è opportuno se si vogliono sottoporre alla prova solo i valori che siano massimi o minimi, altrimenti si potrebbero provare dei valori che a priori si può riconoscere che non possono essere tali; ma il procedimento per la prova è bene notarlo, serve a decidere se un valore $\bar{z}$ della $f(xy)$ è massimo o minimo anche se esso non è scelto fra i detti z_0, z_1 ....

3. Qualche esempio.

1° Esempio:

Sia la funzione

$$z = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 . \qquad (1)$$

Risolvendo le

$$\begin{aligned} z'_x &= 2Ax + By + D = 0 \\ z'_y &= Bx + 2Cy + E = 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

si otterà la soluzione $(x_0 y_0)$ in corrispondenza alla quale si ha

$$z_0 = Ax^2_0 + By_0 y_0 + Cy^2_0 + Dx_0 + Ey_0 + F$$

e deve ricercarsi se questo sia un massimo o un minimo.

Posto pertanto

$$x = x_0 + \rho \cos \varphi , \qquad y = y_0 + \varphi \operatorname{sen} \varphi$$

sostituendo nella (1) e ordinando, si ha

$$\begin{aligned} &\rho^2 (A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + C \operatorname{sen}^2 \omega) + \\ &\quad + \rho (\cos \varphi [2Ax_0 + By + D] + \operatorname{sen} \varphi [Bx_0 + 2Cy_0 + 2]) + \\ &\qquad + (Ax^2_0 + Bx_0 y_0 + Cy^2_0 + Dx_0 + Ey_0 + F) - z = 0 \end{aligned}$$

che per la (2) e (3) si riduce a

$$\rho^2 (A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi) + (z_0 - z) = 0.$$

Di qui

$$\rho = \pm \frac{\sqrt{z - z_0}}{\sqrt{A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + C \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

Distinguiamo parecchi casi e sia da prima

$$B^2 - 4AC < 0.$$

Allora

$$\begin{aligned} &A \cos^2 \varphi + B \cos \varphi \operatorname{sen} \varphi + C \operatorname{sen}^2 \varphi = \\ &\qquad = \frac{1}{4C} [(2C \operatorname{sen} \varphi + B \cos \varphi)^2 + \cos^2 \varphi (4AC - B^2)] \end{aligned}$$

la quale non si annulla per nessun valore di φ.

Se m ed M indicano rispettivamente il minimo ed il massimo assoluto di

$$(2C \operatorname{sen} \varphi + B \cos \varphi)^2 + \cos^2 \varphi (4AC - B^2)$$

sarà

$$\frac{m}{4C} < A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi - C\,\mathrm{sen}^2\varphi < \frac{M}{4C};$$

pertanto ρ avrà valore reale positivo maggiore di una quantità determinata positiva, quando si scelga il segno $+$ nell'espressione di ρ e si prenda la differenza che è al numeratore di segno uguale a quello di C. Si avrà infatti, per qualsiasi φ

$$\rho \geqslant 2\sqrt{\frac{(z-z_0)C}{M}}$$

quindi il valore z_0 sarà un massimo se C è negativo, un minimo nel caso contrario.

E ρ diviene zero solo con l'andare a zero della differenza $z - z_0$.

Dunque se $B^2 - 4AC < 0$ si ha un massimo o un minimo per la z, nel punto $(x_0 y_0)$ secondo che A e C sono positivi o negativi.

Sia, in secondo luogo

$$B^2 - 4AC > 0.$$

Allora si ha

$$A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + C\cos^2\varphi =$$
$$= \frac{1}{4C}\left[(2C\,\mathrm{sen}\,\varphi + B\cos\varphi)^2 - (B^2-4AC)\cos^2\varphi\right] =$$
$$= \cos^2\varphi\, C\left[\left(\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{B^2-4AC}{4C^2}\right]$$

e il trinomio

$$A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + C\,\mathrm{sen}^2\varphi$$

ha quindi segno uguale a quello di C se $\mathrm{tg}\,\varphi$ è maggiore o minore delle radici dell'espressione

$$\left(\mathrm{tg}\,\varphi - \frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{B^2-4AC}{4C^2},$$
$$\frac{-B \pm \sqrt{B^2-4AC}}{2C}$$

o contrario a quello di C se $\mathrm{tg}\,\varphi$ è compreso tra esse.

Per conseguenza affichè sia sempre positiva l'espressione

$$\frac{z-z_0}{A\cos^2\varphi + B\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi + C\,\mathrm{sen}^2\varphi} = \frac{z-z_0}{\cos^2\varphi\, C\left[\left(\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{B}{2C}\right)^2 - \frac{B^2-4AC}{4C^2}\right]}$$

per cui ρ risulta reale, bisogna prendere $z - z_0$ a seconda del valore di $\mathrm{tg}\,\varphi$ e del segno di C. Se $\mathrm{tg}\,\varphi$ è esterna alle due radici anzidette si ha che l'espressione stessa è dello stesso segno di C, quindi deve essere $z - z_0$ scelto di tale segno che $\frac{z-z_0}{C}$ sia dello stesso segno di C; se $\mathrm{tg}\,\varphi$ è interna alle due radici, l'espressione stessa risulta di segno contrario a quello di C quindi deve essere $z - z_0$ scelto di tale segno per cui pure $\frac{z - z_0}{C}$ sia di segno contrario a quello di C.

Per $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$ si ha per ρ un valore infinito.

Nell'intorno del punto $(x_0 y_0)$ si otterrà pertanto un ρ reale per tutti i valori di φ compresi fra 0 e 2π se in corrispondenza a una parte di questi valori di φ si prende $z - z_0 > 0$ e ad un'altra parte si prende $z - z_0 < 0$.

Ne risulta che per $B^2 - 4AC > 0$ in $(x_0 y_0)$ non vi è nè massimo, nè minimo per la funzione.

Infine se

$$B^2 - 4AC = 0$$

è

$$A\cos^2\varphi + B\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + C\operatorname{sen}^2\varphi = \cos^2\varphi\, C\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{B}{2C}\right)^2$$

quindi

$$\rho = \pm \sqrt[3]{\frac{z - z_0}{\cos^2\varphi\, C\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{B}{2C}\right)^2}};$$

prendendo $\frac{z - z_0}{C}$ positivo si otterrà il valore di ρ reale e positivo, se si esclude dinanzi al radicale il segno —; tale valore diviene zero solo per $z - z_0 = 0$.

Si avrà dunque un massimo se C è negativo, un minimo se C è positivo.

Si noti che per $\cos\varphi = 0$ si ha

$$\rho = \sqrt{\frac{z - z_0}{C}};$$

l ρ è sempre maggiore di una determinata quantità maggiore di ero, sinchè è tale $z - z_0$.

2° Esempio:

Sia la funzione

$$z = ax^3 + by^3 + c.$$

Il punto (00) costituisce una soluzione di

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

uindi può essere punto di massimo o di minimo ed è $z_0 = c$.

Si ponga dunque

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\operatorname{sen}\varphi$$

e si deve risolvere in ρ l'equazione

$$a\rho^3 \cos^3 \varphi + b\rho^3 \operatorname{sen}^3 \varphi + c - z = 0$$

da cui

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{z-c}{a \cos^3 \varphi + b \operatorname{sen}^3 \varphi}}.$$

Ora si osservi che $a \cos^3 \varphi + b \operatorname{sen}^3 \varphi = \cos^3 \varphi\,(a + b \operatorname{tg}^3 \varphi)$ e quindi il divisore dell'espressione di ρ ha segni opposti pei valori di φ nel 1° e 3° quadrante e nel 2° e 4°. Per conseguenza

$$\frac{z-c}{a \cos^3 \varphi + b \operatorname{sen}^3 \varphi}$$

sarà positivo se si muta il segno di $z-c$ a seconda di quello di $a \cos^3 \varphi + b \operatorname{sen}^3 \varphi$. Non vi è dunque nè massimo nè minimo. Dei tre valori di ρ uno solo è certamente reale e diviene zero se $z-c$ diviene tale.

3° Esempio:

Sia la funzione

$$z = x^3 + x^2 y + f,$$

se ne ricava

$$z'_x = 3x^2 + 2xy$$
$$z'_y = x^2$$

risolute per $x=0$ e $y=0$. Si ha $z_0 = f$ e cerchiamo se esso sia un massimo o un minimo per la funzione data.

Ponendo

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

si è condotti a risolvere l'equazione in ρ

$$\rho^3 \cos^3 \rho + \rho^3 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \varphi + z_0 - z = 0$$

da cui

$$\rho = \sqrt[3]{\frac{z - z_0}{\cos^2 \varphi\,(\cos \varphi = \operatorname{sen} \varphi)}}.$$

Il valore di ρ che se ne ricava diviene zero solo se $z - z_0$ va a zero e sarà positivo se $z - z_0$ e $\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi$ avranno lo stesso segno. Ma siccome non può essere che per tutti i valori di φ compresi fra 0 e 2π $\cos \varphi + \operatorname{sen} \varphi$ sia sempre di un segno, così avviene che per $z - z_0$ si ha cambiamento di segno a seconda del valore di φ.

Il valore z_0 non è dunque nè massimo nè minimo.

4. Il metodo può dar luogo a calcoli e a discussioni meno semplici, solo che il grado della equazione si elevi e non oso dire che esso possa sostituirsi con vantaggio ai metodi dell'ordinaria teoria dei massimi e minimi.

Certo, se l'equazione in ρ è poco semplice, la discussione può essere faticosa.

Abbiamo solo voluto mostrare come sia possibile l'estensione a più variabili del metodo della funzione inversa, la quale non era stata fatta sin qui in modo sufficiente.

5. Al risultato precedente troviamo opportuno aggiungere le seguenti osservazioni sui massimi e minimi *isolati* delle funzioni di più variabili.

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un massimo o di un minimo in un punto x_0 *per una funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *di una variabile* x, *è che i rapporti incrementali destro e sinistro, per gli incrementi* h, *abbastanza piccoli, della variabile, pei quali non sono nulli, siano ognuno sempre di un segno, opposto a quello dell'altro.*

Questa regola, in certe condizioni si riconduce ad un'altra più facilmente applicabile: Sia $y=f(x)$ funzione continua nell'intervallo $a \ldots b$. Se in un punto x_0 interno vi è un massimo, o un minimo, ed ivi esiste la $f(x)$, essa deve essere zero, e ciò sarà sufficiente, se, presa la derivata nei punti a destra e a sinistra di un certo intorno di x_0, le une risultano sempre di un segno, contrario a quello delle altre; precisamente vi sarà un massimo se nei punti a destra la derivata è negativa o nulla, a sinistra positiva o nulla, un minimo se avviene il contrario.

Un massimo, o un minimo, riconosciuto in base a questo criterio è *isolato* cioè in vicinanza di esso non vi è altro massimo, o minimo: cioè, è assegnabile un intorno $x_0-\varepsilon$, $x_0+\delta$ tale che da $x_0-\varepsilon$ a x_0 la funzione cresce e da x_0 a $x_1+\delta$ decresce, o viceversa. E se esiste $f''(x)$ in tutto l'intorno $x_0-\varepsilon$, $x_0+\delta$ e in x_0 è continua e diversa da zero, dal suo segno si distingue il massimo, o il minimo, e si tratta certamente di un massimo, o minimo, isolato.

Tutto ciò è ben noto.

6. Il concetto di massimo, o di minimo, *isolato* suesposto può trasportarsi alle funzioni di più variabili. Ed ecco in che modo.

Sia in un punto $(x_0 y_0)$ un massimo, o minimo, *isolato*, si possa cioè assegnare un intorno determinato entro il quale non cade altro massimo, o minimo. Ciò significherà che se si considera il fascio di raggi passanti per quel punto, sopra ciascun raggio, relativamente a questo, quel massimo, o quel minimo, è isolato. E ancora: sopra ogni raggio, dalle due parti di $(x_0 y_0)$ esisterà un tratto assegnabile; da ciascuno degli estremi fino al punto $(x_0 y_0)$ la funzione $f(xy)$ andrà non decrescendo sempre, o sempre non crescendo, secondo che si tratti di un massimo o di un minimo. Ma ciò solo non basta; gli infiniti tratti da considerarsi sopra il fascio di raggi, anche se nessuno di essi diviene mai nullo, potrebbero avere per limite inferiore lo zero. Se ciò fosse, potrebbe ancora aversi un massimo, o un minimo, isolato, sopra ciascun raggio, relativamente ad esso, ma potrebbe non esistere il massimo, e minimo, isolato nel punto $(x_0 y_0)$. secondo la definizione suesposta.

Occorre che il tratto esistente su ciascun raggio e nel quale la funzione non decresce, o non cresce, a partire dall'estremo verso $(x_0 y_0)$ si mantenga maggiore, su tutti i raggi, di un segmento assegnabile, maggiore di zero.

Vediamo come ciò si possa riconoscere.

Ricordiamo dal calcolo il concetto di derivata in una direzione qualunque. Essa è definita come

$$\lim_{\rho=0} \frac{f(x+h,\, y+k) - f(xy)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

h e k incrementi arbitrari di x, y e $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$. Se esistono le derivate parziali rapporto a x e ad y, $f'_x(xy)$, $f'_y(xy)$ e una di esse esistendo anche nei punti dell'intorno di (xy) e in (xy) stesso è assolutamente continua, dall'uguaglianza

$$\frac{\Delta f}{\rho} = \frac{h}{\rho} f'_x(xy) + \frac{k}{\rho} f'_y(xy) + \frac{h}{\rho}\sigma_1 + \frac{k}{\rho}\sigma_2,$$

facendo avvicinare il punto $(x+h,\, y+k)$ al punto (xy) lungo il segmento che li congiunge, si otterrà quel limite nella forma

$$\lim_{\rho=0} \frac{\Delta f}{\rho} = \alpha f'_x(xy) + \beta f'_y(xy)$$

α e β essendo i coseni degli angoli che quel segmento fa con la direzione positiva degli assi xy. Un tal limite

$$\lim_{\rho=0} \frac{f(x+h,\, y+k) - f(xy)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \alpha f'_x(xy) + \beta f'_y(xy)$$

si chiama, come si sa, derivata nella direzione $(\alpha\beta)$.

A riconoscere che la $z = f(xy)$ non decresce, ovvero non cresce, lungo un raggio, occorre che si abbia permanenza di segno nella derivata presa in quella direzione, non escluso che sia nulla; secondo che tale derivata è positiva o negativa, la $f(xy)$ andrà non crescendo, o non decrescendo, dall'estremo al punto $(x_0 y_0)$.

Se un punto qualunque $(x_0+h_1,\, y_0+k_1)$ è sopra un raggio, e un punto $(x_0+h_2,\, y_0+k_2)$ è sullo stesso raggio uscente da $(x_0 y_0)$ con

$$\sqrt{h_1^2+k_1^2} < \sqrt{h_2^2+k_2^2}$$

si ha:

$$\frac{f(x_0+h_2,\, y_0+k_2) - f(x_0+h_1,\, y_0+k_1)}{\sqrt{(h_2-h_1)^2+(k_2-k_1)^2}} =$$
$$= \alpha f'_x(x_0+h_1+\theta_1[h_2-h_1],\, y_0+k_1+\theta_2[k_2-k_1]) +$$
$$+ \beta f'_y(x_0+h_1+\theta_1[h_2-h_1],\, y_0+k_1+\theta_2[k_2-k_1]),$$

essendo α e β i coseni direttori del raggio, e se deve essere sempre

$$f(x_0+h_2\,,\,y_0+k_2)-f(x_0+h_1\,,\,y_0+k_1)<0$$

sinchè è

$$\sqrt{h_1^2+k_1^2}<\sqrt{h_2^2+k_1^2}$$

dovrà l'espressione $\alpha f'_x(xy)+\beta f'_y(xy)$ avere sempre il segno negativo per ogni punto (xy) in un tratto, lungo il raggio che si considera.

Ben s'intende che si considerano qui come distinte tutte le direzioni fra 0 e 2π, due raggi opposti avendo la direzione φ e $\varphi+\pi$.

La condizione anzidetta, cioè la permanenza di segno nella

$$\alpha f'_x(xy)+\beta f'_y(xy)$$

deve verificarsi in tutti i punti (xy) di *uno stesso tratto* sopra ogni raggio uscente da (x_0y_0).

Allora si avrà qui un massimo, o un minimo *isolato*, secondo che il segno costante è negativo o positivo.

7. Ma si può anche osservare quanto segue:

Si fissi per es. che si tratti di un massimo isolato in (x_0y_0). Allora

$$f(x_0+h,\,y_0+k)-f(x_0y_0)$$

sarà sempre negativo per $(x_0+h,\,y_0+k)$ preso sul tratto di raggio già detto, non solo, ma sarà *sempre crescente* verso zero, mentre tende a zero $\sqrt{h^2+k^2}$. Vale a dire che deve essere tale la

$$hf'_x(x_0+\theta h\,,\,y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h\,,\,y_0+\theta k);$$

e mentre il punto $(x_0+h,\,y_0+k)$ percorre il raggio verso il punto (x_0y_0) si può, senza nuocere alla generalità, pensare h e k arbitrari, ma fissi rispetto ai punti del raggio stesso; epperò si potrà considerare anche l'espressione

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}f'_x(x_0+\theta h,\,y_0+\theta h)+\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}f'_y(x_0+\theta h\,,\,\;y_0+\theta k)$$

la quale così dovrà essere negativa e sempre crescente a zero, mentre $\sqrt{h^2+k^2}$ tende ad annullarsi.

In luogo di quello si consideri con h e k fissi arbitrariamente l'espressione generale

$$\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}f'_x(xy)+\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}f'_y(xy)$$

dove (xy) è un punto qualsiasi sul tratto del raggio che si considera, ovvero la

$$\alpha f'x(xy)+\beta f'_y(xy).$$

L'essere essa negativa e sempre crescente verso zero, mentre (xy) percorre il tratto del raggio, sarà sufficiente a che in (x_0y_0) sia un massimo *isolato*. E veramente poichè si ha che le $f'_x(x_0y_0)$, $f'y\,(x_0y_0)$

essendo nulle e le $f'_x(xy)$. $f'_y(xy)$ sempre continue, così basta verificare che la

$$\alpha f'_x(xy) + \beta f'_y(xy)$$

che in $(x_0 y_0)$ si annulla, è sempre crescente, lungo il tratto di raggio che va al punto $(x_0 y_0)$.

A riconoscere ciò basta che, tenuti fissi α e β, si prenda di quella espressione la derivata lungo la direzione stessa e vedere se tale derivata è sempre negativa mentre è

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}$$

e

$$\rho = \Delta R = \sqrt{(x_0 - x_0 + h)^2 + (y - y_0 + k)^2} = \sqrt{h^2 + k^2}$$

sempre positivo.

La derivata nella direzione $\alpha\beta$ della

$$\alpha f'_x(xy) + \beta f'_y(xy)$$

è

$$\alpha[\alpha f''_x(xy) + \beta f''_{xy}(xy)] + \beta[\alpha f''_{xy}(xy) + \beta f''_y(xy)] =$$
$$= \alpha^2 f''_x(xy) + 2\alpha\beta f''_{xy}(xy) + \beta^2 f''_y(xy).$$

Se questa è negativa in ogni punto (xy) del tratto di raggio $(\alpha\beta)$ anzidetto, sarà la $f(xy)$ lungo quel raggio, sempre crescente verso $f(x_0 y_0)$. E se tale permanenza di segno si verifica per uno stesso tratto lungo ogni raggio uscente da $(x_0 y_0)$ il valore $f(x_0 y_0)$ sarà un massimo isolato; se il segno sarà positivo si tratterà di un minimo.

Si ritrova così in sostanza la nota condizione del calcolo per la distinzione del massimo o minimo, nelle funzioni di due variabili.

È da notarsi però che col procedimento qui esposto, rimane inoltre ancora provato che la condizione ora detta è per il massimo, o minimo, *isolato*.

CAROLINA RAVAJOLI.

I NUMERI REALI CONSIDERATI COME SUCCESSIONI DI NUMERI DECIMALI

§ 1. — Preliminari.

1. Le seguenti considerazioni sui segmenti sono fatte col solo scopo di giustificare la definizione che daremo di *numeri reali* e non per trattare la teoria di questi numeri; ciò verrà fatto indipendentemente dal concetto di grandezza e da quello di misura.

Quanto diremo relativamente ad un segmento qualunque OA confrontato con un dato segmento OU (*unità di misura*), può intendersi ripetuto per una quantità qualunque di una grandezza, confrontata con una quantità data della grandezza stessa. Considereremo i numeri soltanto in valore assoluto ed i segmenti indipendentemente dal verso, salvo che non si avverta che si vuol tener conto del segno o del verso.

2. *Dividere* (nel senso di determinare la parte intera del quoziente) un segmento (od un numero intero) per un altro segmento (numero intero), o trovare *quante volte* il primo segmento (numero) *contiene* il secondo, avrà per noi il significato di trovar il maggior multiplo del secondo segmento (numero) che sia minore del primo; con ciò il resto della divisione è minore od uguale al divisore e non è mai nullo.

Dividiamo il segmento OA, non nullo, per $\frac{OU}{10^s}$, con s intero (cioè numero intero non escluso lo zero); per ogni valore di s esisterà un altro intero q_s pel quale sussisteranno le relazioni

$$\frac{OU}{10^s}\cdot q_s < OA \leqq \frac{OU}{10^s}\cdot(q_s+1) \tag{1}$$

È facile vedere che variando s, il quoziente q_s varia per l'aggiunta o per la soppressione di tante cifre alla sua destra quante sono le unità di cui è aumentato o diminuito s.

Se infatti dividiamo OA per $\frac{OU}{10^{s+t}}$ avremo

$$\frac{OU}{10^{s+t}}\cdot q_{s+t} < OA \leqq \frac{OU}{10^{s+t}}\cdot(q_{s+t}+1),$$

e poichè le (1) possono scriversi

$$\frac{OU}{10^{s+t}}\cdot q_s\,.\,10^t < OA \leqq \frac{OU}{10^{s+t}}\cdot(q_s+1)\,.\,10^t\,,$$

risulta subito che deve essere

$$q_s\,.\,10^t \leqq q_{s+t}\,,\qquad q_{s+t} \leqq q_s\,.\,10^t + (10^t-1)\,.$$

Dunque il numero q_{s+t} è uno dei numeri compresi fra i due che si ottengono scrivendo t zeri o t nove a destra di q_s; ma tali numeri sono appunto quelli che risultano dallo scrivere t cifre a destra di q_s.

È dato poi asserire, a causa della unicità del quoziente, che si passa da q_{s+t} a q_s sopprimendo t cifre a destra del numero q_{s+t}.

3. Indichiamo con a_0 (non escluso $a_0=0$) l'intero che rappresenta il quoziente (che prima abbiamo chiamato q_0) di OA per OU, con a_{s+1} la cifra che si deve scrivere a destra di q_s per avere q_{s+1} e con $a_0a_1a_2\ldots a_s$ l'intero che ha per cifre quelle di a_0 e le altre $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Le (1) si potranno rappresentare con

$$\frac{OU}{10^s}\cdot a_0a_1a_2\ldots a_s < OA \leqq \frac{OU}{10^s}\cdot(a_0a_1a_2\ldots a_s+1)$$

o, più convenientemente, con

$$OU \,.\, a_0, a_1a_2 \ldots a_s < OA \leqq OU \,.\, a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1), \qquad \text{(I)}$$

dove $a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)$ indica il numero decimale che si deduce dall'altro $a_0, a_1a_2 \ldots a_s$ aumentando di uno l'ultima cifra. [1]

4. Volendo considerare anche il caso in cui il segmento OA sia nullo, ritorniamo alle relazioni (1) e, introducendo per il momento i numeri con segno, scriviamo

$$\frac{OU}{10^s} \cdot (-1) < OA = OU \,.\, 0\,,$$

o ancora

$$OU \,.\, \left(-\frac{1}{10^s}\right) < OA = OU \,.\, 0\,.$$

Ma sappiamo che

$$-\frac{1}{10^s} = -1 + \frac{10^s - 1}{10^s} = -1 + 0{,}99 \ldots 9$$

con $0{,}99 \ldots 9$ avente s cifre dopo la virgola tutte eguali a nove. Se conveniamo di rappresentare con $\bar{1}{,}99 \ldots 9$ la somma $-1 + 0{,}99 \ldots 9$, le relazioni precedenti, relative al quoziente, prenderanno la forma

$$OU \,.\, \bar{1}{,}99 \ldots 9 < OA = OU \,.\, \bar{1}{,}99 \ldots (9 + 1)$$

nella quale i numeri decimali hanno ancora s cifre nella parte che segue la virgola.

Dunque possiamo ritenere valevoli le relazioni (I) e le considerazioni svolte nel n.° 2 anche quando il segmento OA è nullo.

5. Risulta da quanto è stato esposto fin qui che *ogni segmento* OA, *commensurabile o no con* OU, *ed ogni segmento uguale ad* OA, *determina un'unica successione* (unica a causa della unicità del quoziente di OA per $\frac{OU}{10^s}$)

$$a_0; \quad a_0, a_1; \quad a_0, a_1a_2; \quad a_0, a_1a_2a_3; \ldots \qquad \text{(II)}$$

di numeri razionali, che si diranno *termini* della successione, e che si ottengono dalle (I) facendo ordinatamente prendere ad s i valori 0, 1, 2, 3,...

Diamo due proprietà del segmento OA in relazione alla successione precedente:

1ª. *Moltiplicando ordinatamente* OU *per i termini della* (II) *si ottengono segmenti i quali, a partire da un certo punto, differiscono da* OA *meno di qualunque segmento assegnato* (si ottengono cioè i segmenti *approssimati* ad OA quanto si vuole).

---

[1] Non si esclude che sia $a_s = 9$, nel qual caso s'intende facilmente come restino modificate le cifre del dato numero.

Dalle (I) apparisce che la differenza fra OA ed $OU . a_0, a_1 a_2 \ldots a_s$ non è maggiore di $\frac{OU}{10^s}$; ma questo segmento si può rendere, per il postulato di Archimede, minore di qualunque segmento assegnato, scegliendo convenientemente il valore di s.

Il ragionamento ora tenuto vale per l'insieme dei segmenti che diremo approssimati ad OA per *difetto*; si può estenderlo facilmente all'insieme dei segmenti approssimati per *eccesso*, considerando la differenza (che può anche esser nulla) fra $OU . a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s + 1)$ ed OA.

2ª. *Due segmenti differenti* OA *ed* OB *non possono soddisfare alle stesse relazioni* (I); *e quindi non possono dar luogo alla stessa successione* (II).

Sia, se è possibile, $OB > OA$ e, nello stesso tempo, soddisfino entrambi i segmenti alle (I); e quindi si ottenga da entrambi la (II). Posto $OB - OA = AB$, si prenda un intero s per il quale risulti (postulato di Archimede) $\frac{OU}{10^s} < AB$. Si avrà dalle (I)

$$OU . a_0, a_1 a_2 \ldots a_s < OA < OB \leqq OU \ldots a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s + 1),$$

ossia, facendo la differenza fra i termini estremi e fra i termini medi di queste disuguaglianze, $\frac{OU}{10^s} > AB$, il che è assurdo.

Dunque la successione (II) oltre a determinare segmenti che differiscono da OA meno di un segmento precedentemente assegnato, appartiene ad un *solo* segmento OA; epperò si può dire che la successione (II) *determina* il segmento OA.

6. Data una successione come la (II), tale cioè che i suoi termini non siano tutti uguali da uno in poi, (¹) e nella quale ogni termine sia dedotto dal precedente scrivendo sempre a destra una nuova cifra che supporremo conosciuta quando ne è conosciuto il posto, dimostreremo ora che esiste il segmento OA dal quale la successione (II) deriva secondo le considerazioni fatte nei numeri precedenti.

Escludiamo, pel momento, il caso in cui le cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots a_s, \ldots$ divengano tutte eguali a nove da una in poi. Allora i numeri della successione (II) saranno sempre seguiti da altri maggiori; e se si aumenta di uno l'ultima cifra di ogni termine della successione (II) si ne otterrà un'altra i cui termini saranno sempre seguiti da altri minori. Ogni termine di questa successione supera, evidentemente, tutti i termini della (II).

Si pensino costruiti sopra una retta x, a partire da un punto O, i segmenti OA_0, OA_1, $OA_2, \ldots$ le cui misure sono ordinatamente i termini (II), e i segmenti OA'_0, OA'_1, $OA'_2, \ldots$ le cui misure sono

(¹) Resta quindi escluso che le cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots$ da una in poi siano tutte zero.

ordinatamente i numeri che si deducono dai termini della (II) aumentando di uno l'ultima cifra. Per la osservazione fatta precedentemente sulle misure di tali segmenti si può concludere che esiste (postulato della continuità) *un* segmento OA maggiore di qualunque segmento OA_s e minore di qualunque segmento OA'_s; soddisfacente in conseguenza alle relazioni (I).

Consideriamo il caso che abbiamo lasciato in disparte. La cifra a_s sia diversa da nove e le successive siano tutte eguali a nove.[1] Costruendo, come or ora, i segmenti OA_0, OA_1, OA_2..... e gli altri OA'_0, OA'_1, OA'_2,..., è facile osservare che i primi vanno ancora aumentando mentre i secondi, che si mantengono maggiori dei primi, vanno diminuendo fino a raggiungere il segmento OA'_s; e poi risultano tutti eguali a quest'ultimo; cioè $OA'_s = OA'_{s+1} = OA'_{s+2} = \ldots$. Dunque anche quando i termini della successione (II) sono costituiti dal numero a_0, dalle cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s < 9$, e dalle seguenti tutte eguali a nove, essa determina un segmento, e precisamente il segmento

$$OA = OU \,.\, a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s + 1);$$

e se a questo si applica il procedimento sviluppato nei primi numeri si ritrova appunto la data successione.

§ 2. — Numeri reali.

7. Rappresenteremo la successione (II) del paragrafo precedente, con l'unica espressione

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \qquad \text{(III)}$$

che, arrestata alla virgola, oppure alla prima, alla seconda, ecc., cifra dopo la virgola, si ridurrà rispettivamente al primo, al secondo, al terzo, ecc., termine della successione (II).

Daremo il nome di *numero reale* alla espressione (III), nella quale si supporrà conosciuto il numero intero a_0 (*parte intera*) e la cifra a_s (della *parte decimale*) corrispondente ad ogni valore intero di s. Per quanto grande sia s supporremo che fra le cifre che seguono a_s ve ne siano sempre di quelle diverse da zero.

I termini della successione (II) si diranno i *valori approssimati per difetto* del numero reale (e, spesso, semplicemente *valori approssimati*), ordinatamente *a meno di un'unità, a meno di un decimo*, ecc.; e i numeri che risultano dai termini stessi aumentando di uno l'ultima cifra a destra, si diranno valori approssimati *per eccesso* e, corrispondentemente a quelli per difetto, a meno di una unità, a meno di un decimo, ecc.

---

[1] La cifra a_s può appartenere ad a_0; ed in tal caso perchè sia applicabile il ragionamento che faremo, basta riguardare a_0 scomposto nelle sue cifre; (faremo precedere a_0 da uno zero se le sue cifre sono tutte eguali a nove). Non è esclusa la successione $\overline{1}$; $\overline{1,9}$; $\overline{1,99}$;....

Le cifre del numero a_0 e le altre $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sono le cifre del numero reale. Il numero a_0 ha, come abbiamo detto, valore intero positivo o valore zero, e può avere il valore -1; in questo caso le cifre $a_1, a_2, a_3, \ldots$ si riguardano tutte eguali a nove, ed il numero reale si scrive $\overline{1},999\ldots$ od anche $\overline{1},[9]$, come si usa nell'aritmetica per ogni numero decimale periodico; e si intende di dover prendere come valori approssimati i numeri $-1;\ -1+0,9;\ -1+0,99;\ldots$.

Un numero reale è *conosciuto* quando si sappia costruirne i successivi valori approssimati, cioè quando si conosca a_0 e la cifra a_s corrispondente ad ogni valore di s.

8. *Perchè un segmento* OA *sia commensurabile con l'unità* OU *è necessario e sufficiente che le cifre del corrispondente numero reale formino periodo.*

1°. Supposto OA commensurabile con OU, avremo $OA = OU . a$, dove a rappresenta un numero razionale $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ che, come sappiamo, è periodico. (1) Questo numero coincide d'altronde con quello reale che si ottiene dalla considerazione del segmento OA, perchè essendo questo segmento eguale ad $OU . a$, è maggiore di tutti i segmenti

$$OU . a_0;\quad OU . a_0, a_1;\quad OU . a_0, a_1a_2;\ldots$$

ed è minore di tutti i segmenti

$$OU . (a_0+1);\quad OU . a_0 . (a_1+1);\quad OU . a_0, a_1(a_2+1);\ldots$$

(Nel caso considerato nella nota precedente, OA sarebbe eguale a uno di questi segmenti e a tutti i successivi).

2°. Se il numero reale $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ corrispondente ad OA è periodico esiste un numero razionale a che, come sappiamo, è maggiore di tutti i numeri

$$a_0;\quad a_0, a_1;\quad a_0, a_1a_2;\ldots$$

ed è minore di tutti i numeri

$$a_0+1;\quad a_0, (a_1+1);\quad a_0, a_1(a_2+1);\ldots$$

(Il numero a è eguale a uno di questi numeri e a tutti i successivi, se le cifre $a_1, a_2, \ldots$ diventano da un certo punto in poi tutte eguali a nove). Epperò il segmento $OU . a$ sarà, come il segmento OA, maggiore dei segmenti che hanno per misura i numeri della prima fra le due precedenti successioni e minore (od uguale da uno in poi) dei segmenti che hanno per misura i numeri della seconda. Dunque $OA = OU . a$.

---

(1) Se a è un numero decimale finito, per esempio

$$a = a_0, a_1a_2\ldots a_s, \qquad \text{porremo} \qquad a = a_0, a_1a_2\ldots(a_s-1)[9].$$

Questo sviluppo in decimali si ottiene eseguendo le divisioni nel modo indicato nel n.° 2.

9. I numeri reali periodici sono dunque in corrispondenza biunivoca con le proprie generatrici e derivano da segmenti commensurabili con l'unità, e che hanno per misura le generatrici stesse. E perciò ai numeri reali periodici daremo il nome di *numeri reali razionali; ed un numero reale razionale e la sua generatrice si diranno uguali.*

Poichè sappiamo che esistono segmenti incommensurabili con OU possiamo dire che *esistono numeri reali le cui cifre non formano periodo.* A questa conclusione si giunge anche, evidentemente, con l'osservazione diretta dei numeri reali. Ai numeri reali non periodici daremo il nome di *numeri reali irrazionali.*. Essi corrispondono a segmenti incommensurabili con l'unità.

Due numeri reali si diranno eguali se le cifre che occupano lo stesso posto, relativamente alla virgola, sono eguali.

Il numero reale corrispondente ad OA, e che indicheremo per brevità con α, si dirà anche *misura* o *rapporto* di OA rispetto ad OU; e porremo le solite eguaglianze

$$OA = OU \, . \, \alpha, \qquad OA : OU = \alpha$$

la prima delle quali leggeremo OA *è eguale ad* OU *moltiplicato* α, e la seconda *il rapporto fra* OA *ed* OU *è eguale ad* α.

Se α è un numero reale razionale ed è a la sua generatrice, ossia se è $\alpha = a$, potremo scrivere

$$OU \, . \, \alpha = OU \, . \, a \, .$$

10. *Fra i segmenti* riferiti ad una unità OU secondo il procedimento dei n.[i] 2 e 3, *e i numeri reali esiste dunque una corrispondenza biunivoca*, per la quale ad ogni segmento corrisponde un numero reale ed uno solo, e reciprocamente.

Ai numeri reali *disuguali* (non eguali) corrispondono segmenti disuguali, e reciprocamente. Se si fanno corrispondere ordinatamente le cifre di due numeri reali disuguali procedendo da sinistra a destra [1] si può asserire che *il numero reale nel quale si incontra per prima la cifra maggiore, determina il segmento maggiore.*

Siano OA ed OB i segmenti corrispondenti ai numeri reali

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s-1} a_s \ldots ; \qquad \beta = a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s-1} b_s \ldots$$

nei quali a_s e b_s rappresentino le prime cifre disuguali che si incontrano quando si fanno corrispondere ordinatamente le cifre dei due numeri; si supponga $a_s > b_s$; sarà

$$OA > OU \, . \, a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s-1} a_s \geqq OU \, . \, a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s-1} (b_s + 1) \geqq OB \, ,$$

e quindi

$$OA > OB \, .$$

[1] Le parti intere dei due numeri reali si intenderanno scritte con lo stesso numero di cifre. Se ciò non avviene faremo precedere da cifre zero il numero intero che ha minor quantità di cifre.

Perciò *di due numeri reali disuguali chiameremo maggiore quello nel quale s'incontra per prima la cifra maggiore*, quando si procede al confronto delle loro cifre nel modo convenuto.

Naturalmente se α e β sono due numeri reali razionali aventi le rispettive generatrici a e b, si avrà insieme con $\alpha \geqq \beta$ anche $a \geqq b$. (1)

Un numero reale si dirà maggiore (o minore) di uno razionale, quando è maggiore (minore) del numero reale eguale al secondo.

Le cose precedentemente stabilite permettono di dire che di due segmenti è maggiore quello al quale corrisponde il numero maggiore; e reciprocamente.

Valendoci delle definizioni date si possono estendere ai numeri reali le proprietà della uguaglianza e della disuguaglianza dei numeri razionali; e ciò indipendentemente da ogni considerazione di segmenti. Dati dei numeri reali (tutti o in parte irrazionali o anche tutti razionali) si possono stabilire le consuete relazioni. Ad esempio: 1ª. Da $\alpha = \beta$ e $\beta = \gamma$ risulta $\alpha = \gamma$; 2ª. Se è $\alpha > \beta$ e $\beta \geqq \gamma$ sarà $\alpha > \gamma$; 3ª. Da $\alpha = \beta$, $\gamma = \delta$ ed $\alpha > \gamma$ consegue $\beta > \delta$; ecc.

11. Nel seguito parlando di numeri intenderemo di riferirci a numeri reali (razionali o irrazionali), a meno che per il senso della esposizione, o perchè sia esplicitamente avvertito, non si debba intendere diversamente.

Diamo ora alcune proprietà sui valori approssimati:

1ª. *Ogni numero è compreso* (2) *fra i suoi valori approssimati per difetto e per eccesso, a meno di* $\frac{1}{10^s}$.

Dato il numero $\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots a_sa_{s+1} \ldots$, esso soddisfa alle relazioni

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_sa_{s+1} \ldots > a_0, a_1a_2 \ldots (a_s - 1)[9] = a_0, a_1a_2 \ldots a_s$$

e

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_sa_{s+1} \ldots \leqq a_0, a_1a_2 \ldots a_s[9] = a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)$$

e quindi alle altre

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s < \alpha \leqq a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1). \qquad \text{(IV)}$$

2ª. *Un numero che soddisfa alle relazioni* (IV) *ha per valore approssimato, a meno di* $\frac{1}{10^s}$, *il numero* $a_0, a_1a_2 \ldots a_s$.

---

(1) Siano infatti $a_0, a_1a_2 \ldots a_{s-1}a_s$ e $b_0, b_1b_2 \ldots b_{s-1}b_s$ i primi valori approssimati disuguali di α e di β. Se è $\alpha > \beta$ si avrà

$$a > a_0, a_1a_2 \ldots a_{s-1}a_s \geqq a_0, a_1a_2 \ldots a_{s-1}(b_s + 1) \geqq b$$

quindi $a > b$.

Se è $\alpha = \beta$ sarà $a = b$ non potendo uno stesso numero periodico ammettere due generatrici.

Questi risultati si invertono facilmente ragionando per assurdo e tenendo conto della univocità della corrispondenza fra i numeri reali razionali e le loro generatrici.

(2) Dicendo che un numero è compreso fra due numeri razionali, vogliamo intendere che è più grande del minore e più piccolo od uguale al maggiore.

Se dal confronto delle cifre di α con quelle di $a_0, a_1a_2\ldots a_s$ risultasse che una delle cifre del primo numero fosse minore o maggiore della corrispondente del secondo si dovrebbe concludere che le relazioni (IV) non sono soddisfatte; nel primo caso sarebbe α minore, o al più eguale, ad $a_0, a_1a_2\ldots a_s$, e nel secondo caso sarebbe α maggiore di $a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)$.

E qui giova fare le seguenti osservazioni:

a) Se nelle (IV) figura il segno eguale, questo segno sussisterà anche per tutti i valori più grandi di s, ed il secondo membro della seconda fra esse, si manterrà costante. Risulta infatti

$$\alpha = a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1) = a_0, a_1a_2\ldots a_s[9].$$

b) Se il secondo membro delle (IV), per s e per tutti i valori maggiori, si mantiene costante, allora nelle (IV) deve figurare il segno eguale. Infatti perchè per ogni valore di t risulti

$$a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1) = a_0, a_1a_2\ldots(a_{s+t}+1)$$

bisogna che sia

$$a_{s+1} = a_{s+2} = \ldots = a_{s+t} = 9\,,$$

e cioè

$$\alpha = a_0, a_1a_2\ldots a_s[9].$$

Dunque risulta in tal caso che α è razionale ed eguale ad

$$a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1).$$

Osservazione. — *Se due numeri hanno lo stesso valore approssimato questo è anche valore approssimato per qualunque numero compreso fra i primi due.* [1]

Siano μ_s e ν_s i numeri aventi in comune il valore approssimato (s'intende, come già abbiamo avvertito, per difetto) $a_0, a_1a_2\ldots a_s$; avremo

$$a_0, a_1a_2\ldots a_s < \mu_s \leqq a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)$$
$$a_0, a_1a_2\ldots a_s < \nu_s \leqq a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)$$

e supposto

$$\mu_s < \alpha \leqq \nu_s\,, \qquad \text{oppure} \qquad \mu_s \leqq \alpha < \nu_s\,,$$

risulterà

$$a_0, a_1a_2\ldots a_s < \mu_s < \alpha \leqq \nu_s \leqq a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)\,,$$

oppure

$$a_0, a_1a_2\ldots a_s < \mu_s \leqq \alpha < \nu_s \leqq a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)\,,$$

e, in conseguenza

$$a_0, a_1a_2\ldots a_s < \alpha \leqq a_0, a_1a_2\ldots(a_s+1)\,.$$

---

[1] Cioè uguale o minore del più grande e maggiore del più piccolo, oppure minore del più grande e uguale o maggiore del più piccolo.

Corollario I. — *Se due successioni, delle quali una sia composta con i numeri $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ e l'altra con i numeri $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$, sono tali che μ_s e ν_s abbiano eguali i valori approssimati a meno di $\frac{1}{10^s}$; e se μ_{s+1} e ν_{s+1} sono compresi fra μ_s e ν_s; le due successioni individuano un numero α il cui valore approssimato, a meno di $\frac{1}{10^s}$, è quello comune ai numeri μ_s e ν_s.*

Corollario II. — *Le due successioni $\mu_{z_1}, \mu_{z_2}, \ldots$ e $\nu_{z_1}, \nu_{z_2}, \ldots$ estratte comunque dalle precedenti, ma con $z_1, z_2, \ldots$ numeri interi crescenti, individuano ancora il numero α.*

Naturalmente con queste ultime successioni si determinano le cifre di α a gruppi, mentre con quelle del Coroll. I si determinavano ad una ad una.

12. Per la genesi dei numeri reali dai segmenti, si potrebbe con tutta facilità estendere ad essi le definizioni e le proprietà dei segmenti (e dei numeri razionali); basterebbe tener conto della corrispondenza che abbiamo dimostrato esistere fra gli uni e gli altri. Volendo noi trattare qui parallelamente, ma indipendentemente, la teoria dei numeri reali e quella della misura ci fonderemo invece, come abbiamo già fatto nelle dimostrazioni precedenti, sopra le definizioni stabilite.

Dimostriamo intanto il seguente

Teorema. — *Se due successioni $u_1, u_2, u_3, \ldots$ e $v_1, v_2, v_3, \ldots$, composte di numeri razionali, hanno le seguenti proprietà:*

a) *La prima successione è formata di numeri non decrescenti, fra i quali non ne esiste uno maggiore di tutti.*

b) *La seconda successione è formata di numeri non crescenti, fra i quali può esisterne uno minore di tutti.*

c) *I termini della seconda successione sono maggiori dei corrispondenti della prima, e in conseguenza di tutti; e le differenze $v_1 - u_1$, $v_2 - u_2$, $v_3 - u_3, \ldots$ divengono minori di qualunque numero assegnato.*

Esse, od altre due estratte da esse, individuano un numero reale, compreso fra i termini della prima successione e quelli della seconda. (1)

Indichiamo con u_{z_s} e con v_{z_s} i primi termini delle date successioni, che soddisfano alla condizione

$$v_{z_s} - u_{z_s} \leqq \frac{1}{10^{s+1}}$$

che equivale all'altra

$$v_{z_s} < u_{z_s} + \frac{1}{10^{s+1}}.$$

(1) In seguito, dopo definita la differenza dei numeri reali, le due successioni potranno ritenersi anche composte di numeri reali. E allora fra i numeri della prima successione potrà esisterne uno maggiore di tutti, contrariamente ad una parte della proprietà a), purchè fra quelli della seconda non ne esista uno minore di tutti.

Riducendo u_{z_s} in decimali, a meno di $\frac{1}{10^{s+1}}$, si abbia

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s a_{s+1} < u_{z_s} \leqq a_0, a_1a_2 \ldots a_s(a_{s+1} + 1). \qquad (1)$$

Da queste relazioni, per la precedente disuguaglianza, si ottiene

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s a_{s+1} < v_{z_s} < a_0, a_1a_2 \ldots a_s(a_{s+1} + 2). \qquad (2)$$

E, se è $a_{s+1} < 9$, e quindi $a_{s+1} + 2 \leqq 10$, dalle (1) e (2) risulta

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s < u_{z_s} < v_{z_s} < a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1).$$

Ora se, qualunque sia s, la $s+1^{\text{esima}}$ cifra della parte decimale del numero corrispondente ad u_{z_s} non fosse mai nove, ci troveremmo nelle condizioni del Coroll. I del n.° 11, ed il teorema resterebbe dimostrato.

Se la cifra $s+1^{\text{esima}}$ della parte decimale del numero corrispondente ad u_{z_s} è nove, ma esistono quanti si vogliono valori di t per i quali l'ultima cifra dello sviluppo in decimali di $u_{z_{s+t}}$ non è nove, allora ci troviamo in condizioni analoghe a quelle del Coroll. II del n.° 11; e il teorema rimane ancora provato.

E se infine riducendo $u_{z_s}, u_{z_{s+1}}, u_{z_{s+2}}, \ldots$ in decimali e rispettivamente, a meno di $\frac{1}{10^{s+1}}$, a meno di $\frac{1}{10^{s+2}}$, a meno di $\frac{1}{10^{s+3}}, \ldots$, si trova sempre *nove* come ultima cifra, allora esaminando le relazioni (1) e (2), che possono, in tal caso, scriversi

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s\, 9 < u_{z_s} < v_{z_s} < a_0, a_1a_2 \ldots a_s\,(9 + 2),$$

e le analoghe per $u_{z_{s+1}}, u_{z_{s+2}}, \ldots$, si rileva che possono presentarsi i seguenti casi:

d) Tutti gli sviluppi in decimali dei numeri razionali $u_{z_s}, u_{z_{s+1}}, u_{z_{s+2}}, \ldots$ hanno la parte comune $a_0, a_1a_2 \ldots a_s$; e allora terminano rispettivamente con una, con due, con tre, ... cifre eguali a nove. E in tal caso è facile convincersi che le successioni definiscono il numero reale [1]

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s\,[9] = a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1),$$

ancora *unico*, come nei casi precedenti.

---

(1) Esiste infatti il numero $a_0, a_1a_2 \ldots a_s[9]$, minore dei numeri $v_{z_s}, v_{z_{s+1}}, \ldots$ ed uguale ad uno di essi ed ai consecutivi, e che è compreso, qualunque sia il valore di t, fra lo sviluppo $a_0, a_1a_2 \ldots a_s\, 99 \ldots 9$ appartenente ad $u_{z_{s+t}}$ e lo stesso sviluppo aumentato di $\frac{2}{10^{s+t+1}}$. E un numero diverso da quello notato non può esser compreso fra i due precedenti numeri decimali: Fra gli sviluppi $a_0, a_1a_2 \ldots a_s\, 99 \ldots 9$, prendendo t convenientemente, ce ne sono dei maggiori di qualunque numero che sia più piccolo di $a_0, a_1a_2 \ldots a_s[9]$: Gli stessi sviluppi, anche aumentati di $\frac{2}{10^{s+t+1}}$, finiranno, per un conveniente valore di t, per restare minori di qualunque numero che superi $a_0, a_1a_2 \ldots a_s[9]$, per esempio del numero $a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)\, a_{s+1} \ldots a_{s+t} \ldots$, con $a_{s+t} > 0$.

e) Uno degli sviluppi in decimali dei numeri razionali sopra indicati, per esempio quello di $u_{z_{s+t+1}}$ ha la s^{esima} cifra della parte decimale eguale ad a_s+1. Allora si verifica la relazione

$$a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)\, 0 \ldots 09 < u_{z_{s+t+1}} < v_{z_{s+t+1}} < a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)\, 0 \ldots 0(9+2)$$

dalla quale si deduce l'altra, con $s+t$ cifre di parte decimale

$$a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)\, 0 \ldots 00 < u_{z_{s+t+1}} < v_{z_{s+t+1}} < a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)\, 0 \ldots 01.$$

Se ora continuiamo a costruire i soliti sviluppi in decimali dei numeri $u_{z_{s+t+2}}, u_{z_{s+t+3}}, \ldots$ può darsi che dopo essersi presentati, alternativamente, alcune volte il caso *d*) ed altre il caso *e*), si cada definitivamente nel primo; e allora le successioni individuano un numero reale razionale. Oppure si ripete continuamente il caso *e*), ed allora, per il Coroll. II del n.° 11, si conclude che le successioni individuano un numero reale.

Osservazione. — Per la determinazione effettiva del valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^s}$, del numero α definito dalle successioni del precedente teorema, dobbiamo ricorrere alle relazioni

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_s a_{s+1} < u_{z_s} < v_{z_s} < a_0, a_1 a_2 \ldots a_s (a_{s+1}+2)$$

le quali non ci lasciano dubbio sul valore da scegliere, quando sia $a_{s+1} < 9$. Se invece abbiamo $a_{s+1} = 9$ le relazioni precedenti si trasformano nelle altre

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_s\, 9 < u_{z_s} < v_{z_s} < a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)\, 1,$$

le quali ci lasciano nel dubbio se il valore approssimato richiesto sia anche questa volta $a_0, a_1 a_2 \ldots a_s$, oppure $a_0, a_1 a_2 \ldots (a_s+1)$.

Nell'ultimo caso la s^{esima} cifra della parte decimale di α dovrebbe essere seguita da uno o più zeri. Indichiamo con t il numero di questi zeri consecutivi, cosicchè la cifra che segue la $s+t^{esima}$ sia diversa da zero; t, come sappiamo, è finito. Considerando i termini $u_{z_{s+t}}$ e $v_{z_{s+t}}$ avremo

$$a_0, a_1 a_1 \ldots a_{s+t} a_{s+t+1} < u_{z_{s+t+1}} < v_{z_{s+t+1}} < a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s+t} (a_{s+t+1}+2);$$

relazione che ci assegna il valore approssimato di α, a meno di $\frac{1}{10^{s+t}}$, e quindi anche quello a meno di $\frac{1}{10^s}$. Il valore approssimato di α, a meno di $\frac{1}{10^{s+t}}$, è dato da $a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s+t}$, anche se è $a_{s+t+1} = 9$. Infatti, perchè avvenisse diversamente, cioè perchè il valore approssimato fosse $a_0, a_1 a_2 \ldots (a_{s+t}+1)$, bisognerebbe che la cifra $s+t^{esima}$ della parte decimale fosse seguita da una eguale a zero. E ciò rimane escluso dall'ipotesi fatta relativamente al valore di t.

In pratica, naturalmente, si può presentare qualche difficoltà dovuta alla grandezza relativa di t, quando si vogliano determinare i valori approssimati di α. Ed è però opportuno notare che, pel caso in cui si tratti di segmenti, dalle relazioni

$$OU \, . \, a_0, a_1a_2 \ldots a_s < OA \leqq OU \, . \, a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 2)$$

si rileva che la differenza fra i segmenti che comprendono OA è data da $OU \, . \, \frac{2}{10^s}$. È quindi ben conosciuta l'approssimazione sulla quale si può contare quando si prende $OU \, . \, a_0, a_1a_2 \ldots a_s$ invece di OA; e ciò anche essendo incerti se si debba scegliere come valore approssimato di α, a meno di $\frac{1}{10^s}$, il numero $a_0, a_1a_2 \ldots a_s$ oppure l'altro $a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)$. [1]

13. *Se due numeri α e β sono disuguali ed è $\alpha > \beta$, si possono ottenere valori approssimati per difetto di α che superino quelli approssimati per eccesso (a fortiori quelli per difetto) di β.*

Siano come nel n.° 10, a_s e b_s le prime cifre disuguali che si incontrano in α e in β quando si fanno corrispondere ordinatamente le loro cifre; si avrà $a_s > b_s$, e perciò

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s-1}a_s \geqq a_0, a_1a_2 \ldots a_{s-1}(b_s + 1);$$

e poichè fra le cifre che seguono a_s ne debbono esistere delle differenti da zero, si conclude che sarà

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+t} > a_0, a_1a_2 \ldots (b_{s+r} + 1)$$

per valori arbitrarî di t e di r, purchè una almeno delle cifre che nel primo numero seguono a_s non sia zero.

§ 3. — Somma e differenza.

14. Conveniamo di chiamare approssimati *in egual grado* i valori approssimati che hanno egual quantità di cifre dopo la virgola. Potremo enunciare il

Teorema. — *Le somme dei valori approssimati, in egual grado, per difetto e per eccesso di due o più numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ definiscono un numero σ.*

Siano

$$\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots; \quad \beta = b_0, b_1b_2 \ldots; \quad \gamma = c_0, c_1c_2 \ldots; \ \ldots$$

p numeri reali. Indichiamo con u_s e con v_s le somme dei loro valori approssimati rispettivamente per difetto e per eccesso a meno di $\frac{1}{10^s}$.

---

[1] Dopo la definizione di differenza di numeri reali, si potrà intendere trattata una quistione analoga rispetto alla sostituzione del numero razionale $a_0, a_1a_2 \ldots a_s$ al numero reale α.

I numeri u_s vanno aumentando col crescere di s perchè le cifre dei numeri dati non sono tutte eguali a zero da uno in poi. Abbiamo inoltre, evidentemente, $v_s = u_s + \frac{p}{10^s}$; e se si tien conto delle relazioni

$$v_{s+1} = u_{s+1} + \frac{p}{10^{s+1}} \qquad u_{s+1} \leqq u_s + \frac{9}{10^{s+1}} \cdot p,$$

si ottiene

$$v_{s+1} \leqq u_s + \frac{p}{10^s} = v_s .$$

Dunque i numeri razionali $u_1, u_2, \ldots$ vanno aumentando; i numeri razionali $v_1, v_2, \ldots$ non vanno aumentando e sono maggiori dei precedenti; infine le differenze $v_1 - u_1, v_2 - u_2, \ldots$ divengono minori di qualunque numero assegnato $\left(\text{si tenga conto infatti che } v_s - u_s = \frac{p}{10^s}\right)$. Per il teorema del n.° 12 le due successioni individuano un numero σ.

Se OA, OB, OC, ... sono segmenti aventi per misura rispettivamente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, ed OS è la loro somma, si ha

$$\mathrm{OU} . u_s < \mathrm{OS} \leqq \mathrm{OU} . v_s ;$$

e la misura di OS, dovendo esser sempre compresa fra u_s e v_s, coinciderà con σ.

E perciò *chiameremo somma di due o più numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (termini) il numero σ individuato dalle somme dei valori approssimati in egual grado dei singoli termini.*

Ponendo

$$\alpha + \beta + \gamma + \ldots = \sigma$$

potremo scrivere l'eguaglianza

$$\mathrm{OU} . \alpha + \mathrm{OU} . \beta + \mathrm{OU} . \gamma + \ldots = \mathrm{OU} . (\alpha + \beta + \gamma + \ldots),$$

la quale ci permette di dire che *la somma di più segmenti ha per misura la somma delle loro misure.*

15. Osservazione. — Adottando le notazioni precedenti si supponga $p < 10^t$, e si considerino le somme u_{s+t+1} e v_{s+t+1}; avremo

$$u_{s+t+1} < \sigma \leqq v_{s+t+1}$$

e ancora

$$u_{s+t+1} < \sigma \leqq u_{s+t+1} + \frac{p}{10^{s+t+1}} < u_{s+t+1} + \frac{10^t}{10^{s+t+1}} = u_{s+t+1} + \frac{1}{10^{s+1}} .$$

Infine, se si pone

$$u_{s+t+1} = x_0, x_1 x_2 \ldots x_{s+t+1} ,$$

risulta subito

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_s x_{s+1} < \sigma \leqq x_0, x_1 x_2 \ldots x_s (x_{s+1} + 2) ;$$

e se è $x_{s+1} < 9$ e quindi $x_{s+1} + 2 \leqq 10$, si ricava

$$x_0, x_1x_2 \dots x_s < \sigma \leqq x_0, x_1x_2 \dots (x_s + 1)$$

e si può concludere che $x_0, x_1x_2 \dots x_s$ è il valore approssimato, a meno di $\frac{1}{10^s}$, della somma σ.

Se poi è $x_{s+1} = 9$, la osservazione del n.° 12 ci insegna che la somma stessa u_{s+t+1}, o una delle successive, dà il richiesto valore approssimato di σ.

Si può quindi stabilire che *le somme dei valori approssimati in egual grado, e per difetto, dei termini di una somma dànno i valori approssimati per difetto della somma stessa.* E si può aggiungere che *in generale la somma dei valori approssimati a meno di* $\frac{1}{10^{s+t+1}}$, *dei singoli termini, dà il valore approssimato, a meno di* $\frac{1}{10^s}$, *della somma.*

Può darsi che si debba ricorrere alla somma $u_{s+t+k+1}$ per accertarsi del valore approssimato di σ; ciò avviene quando questo numero abbia k cifre consecutive eguali a zero dopo la $s + t^{esima}$ cifra della parte decimale.

16. Teorema. — *La somma σ di* p *numeri è eguale a quella che si ottiene addizionando la somma σ' dei primi* $p - 1$ *termini con l'ultimo termine ρ.*

Dalla somma

$$u'_{s+t+k} = x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_{s+t+k}$$

dei valori approssimati, a meno di $\frac{1}{10^{s+t+k}}$, dei primi $p-1$ termini, risulti $x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_{s+t}$ come valore approssimato (1) di σ', e dalla somma

$$u''_{s+t} = x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_{s+t} + r_0, r_1r_2 \dots r_{s+t} = x_0, x_1x_2 \dots x_{s+t}$$

si deduca $x_0, x_1x_2 \dots x_s$ come valore approssimato di $\sigma' + \rho$. Vogliamo dimostrare che quest'ultimo è valore approssimato anche di σ.

Usando le solite notazioni avremo

$$u_{s+t+k} = u'_{s+t+k} + r_0, r_1r_2 \dots r_{s+t+k};$$

ma, essendo

$$x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_{s+t} < u'_{s+t+k} < x'_0, x'_1x'_2 \dots (x'_{s+t} + 1)$$

ed anche, purchè si prenda k abbastanza grande,

$$r_0, r_1r_2 \dots r_{s+t} < r_0, r_1r_2 \dots r_{s+t+k} < r_0, r_1r_2 \dots (r_{s+t} + 1),$$

(1) Dicendo che $x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_{s+t}$ è valore approssimato di σ' intendiamo di voler dire che tutte le sue cifre appartengono a σ'; e che perciò ne rappresenta il valore approssimato a meno di $\frac{1}{10^{s+t}}$.

ricava da queste, tenendo conto delle precedenti,

$$u''_{s+t} = x_0, x_1x_2 \dots x_{s+t} < u_{s+t+k} < x_0, x_1x_2 \dots (x_{s+t} + 2) = v''_{s+t}.$$

Dunque il numero u_{s+t+k} che, come sappiamo, definisce la somma σ, sempre compreso fra i numeri che definiscono la somma $\sigma' + \rho$; e ərciò abbiamo $\sigma' + \rho = \sigma$.

Corollario. — *La somma di più numeri, considerati in un certo ordine, è eguale a quella che si ottiene addizionando il primo termine l secondo, la somma col terzo, la nuova somma col quarto, ecc.*

17. Dalla definizione di somma conseguono le proprietà seguenti:

1ª. *Somme di termini eguali, e nello stesso ordine sono eguali.* (¹)

2ª. *La somma di due o più numeri è indipendente dal loro ordine. Proprietà commutativa della somma).*

3ª. *La somma di due numeri, maggiori di zero, è maggiore di ascun termine.*

Siano α e β i due numeri e supponiamo che la prima cifra di β versa da zero sia la s^{esima} dopo la virgola. Il valore approssimato meno di $\frac{1}{10^s}$, della somma $\alpha + \beta$ sarà dato da $a_0, a_1a_2 \dots (a_s + b_s)$ ppure da $a_0, a_1a_2 \dots (a_s + b_s + 1)$; e siccome questi numeri sono ıtrambi maggiori di $a_0, a_1a_2 \dots a_s$ resta provato che è $\alpha + \beta > \alpha$.

4ª. *Se a numeri eguali si aggiungono numeri disuguali si ottengono mme disuguali; delle due somme è maggiore quella che contiene il mine più grande.* (²)

Se è $\beta > \gamma$ sarà $\alpha + \beta > \alpha + \gamma$. Si ha infatti, da un certo valore s in poi, per il n.° 13,

$$b_0, b_1b_2 \dots b_s > c_0, c_1c_2 \dots (c_s + 1);\ (^3)$$

quindi posto

$$a_0, a_1a_2 \dots a_s + b_0, b_1b_2 \dots b_s = x_0, x_1x_2 \dots x_s$$

$$a_0, a_1a_2 \dots a_s + c_0, c_1c_2 \dots c_s = x'_0, x'_1x'_2 \dots x'_s,$$

ulta

$$x_0, x_1x_2 \dots x_s > x'_0, x'_1x'_2 \dots (x'_s + 1).$$

a il primo membro di questa disuguaglianza o è il valore approsnato, a meno di $\frac{1}{10^s}$, della somma $\alpha + \beta$, o ne è minore, mentre il condo membro o è il valore approssimato, a meno di $\frac{1}{10^s}$, della mma $\alpha + \gamma$, o ne è maggiore. E sarà perciò $\alpha + \beta > \alpha + \gamma$.

(¹) Il numero razionale m somma dei numeri razionali $a, b, c, \dots$ è la generatrice della somma σ numeri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ che hanno per generatrici $a, b, c, \dots$ Infatti, risulta subito che m, come σ, ompreso sempre fra le somme u_s e v_s.

(²) Si potrebbe enunciare così: *Una somma aumenta se si aumenta uno dei suoi termini.*

(³) È ovvio il significato da attribuire qui e nel seguito ai numeri $b_0, b_1b_2 \dots b_s$; $c_0, c_1c_2 \dots c_s$; $a_1a_2 \dots a_s$; ecc.

Poichè per il Coroll. del numero precedente e per la proprietà 2ª, ora esposta, si può asserire che *la somma dei numeri reali gode della proprietà associativa*, resta provato quanto appresso:

5ª. *Per la somma dei numeri reali sussistono i soliti teoremi che conseguono dalle proprietà commutativa e associativa e dalle precedenti.*

6ª. *Addizionando i valori approssimati per difetto di alcuni termini d'una somma con i valori approssimati per eccesso degli altri termini, si ottengono somme che contengono i valori approssimati della somma σ dei dati termini.*

Esaminiamo il caso di due termini. La somma

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_k + b_0, b_1b_2 \ldots (b_k + 1) = m_k$$

è compresa fra le due che abbiamo indicato con u_k e con v_k; e queste avranno in comune, come è già stato detto, un certo valore approssimato, per esempio quello a meno di $\frac{1}{10^s}$, che appartiene anche alla somma $\alpha + \beta = \sigma$. Ora, per l'osservazione del n.° 11, il detto valore, a meno di $\frac{1}{10^s}$, apparterrà anche ad m_k.

Da qui deduciamo i seguenti esempi: *a*) La somma di α con $\overline{1},[9] = 0$ è eguale ad α; *b*) La somma di un numero reale con uno decimale finito si può ottenere addizionando i valori approssimati del primo numero col secondo numero. E inversamente; *c*) Un numero reale può porsi, in più modi, sotto forma di somma di un numero decimale finito e di uno reale; così si può scrivere

$$15{,}6487053 \ldots = 15{,}6 + 0{,}0487053 \ldots$$

18. Teorema. — *Dati due numeri disuguali α e β, e supposto $\alpha > \beta$, esiste un numero δ che addizionato con β dà per somma α.*

Essendo al solito $\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots$ e $\beta = b_0, b_1b_2 \ldots$ potremo, per il n.° 13, costruire le differenze

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_s - b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1) = u_s$$

purchè si prenda s sufficientemente grande. A maggior ragione si possono costruire le differenze

$$a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1) - b_0, b_1b_2 \ldots b_s = v_s.$$

Evidentemente con l'aumentare di s le u_s non diminuiscono e le v_s non aumentano. Inoltre v_s supera u_s; e la differenza $v_s - u_s$ è data da $\frac{2}{10^s}$. Dunque i numeri $u_1, u_2, u_3, \ldots$ (dal punto in cui si possono costruire) e gli altri $v_1, v_2, v_3, \ldots$ soddisfano alle condizioni del Teorema del n.° 12 e perciò individuano un numero δ.

Dimostriamo ora che $\beta + \delta = \alpha$. Posto $u_{s+1} = x_0, x_1x_2 \ldots x_{s+1}$, avremo

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+1} - b_0, b_1b_2 \ldots (b_{s-1} + 1) = x_0, x_1x_2 \ldots x_{s+1} = u_{s+1}$$
$$a_0, a_1a_2 \ldots (a_{s-1} + 2) - b_0, b_1b_2 \ldots (b_{s+1} + 1) = x_0, x_1x_2 \ldots (x_{s-1} + 2) = v_{s+1};$$

e queste provano, n.° 15, che δ ha per valore approssimato, a meno di $\frac{1}{10^s}$, il numero $x_0, x_1x_2 \ldots x_s$, se è $x_{s+1} < 9$. In caso diverso il valore approssimato o è ancora il precedente oppure l'altro $x_0, x_1x_2 \ldots (x_s + 1)$. In ogni modo, dalle eguaglianze precedenti si ricava

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+1} = b_0, b_1b_2 \ldots (b_{s+1} + 1) + x_0, x_1x_2 \ldots x_{s+1},$$

e da questa facilmente risulta la relazione

$$b_0, b_1b_2 \ldots b_s + x_0, x_1x_2 \ldots x_s < a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+1},$$

come pure l'altra

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+1} < b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1) + x_0, x_1x_2 \ldots (x_s + 1).$$

E, quando sia $x_{s+1} = 9$, sussiste anche la disuguaglianza

$$b_0, b_1b_2 \ldots b_s + x_0, x_1x_2 \ldots (x_s + 1) \leqq a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+1}.$$

Le ultime tre disuguaglianze dimostrate provano appunto che, in ogni caso. α è la somma di β con δ.

Al numero δ che aggiunto a β (sottraendo) dà per somma α (minuendo) daremo il nome di differenza fra α e β. E porremo al solito $\alpha - \beta = \delta$.

Corollario. — *Per ottenere la differenza $\alpha - \beta$ si tolgono i valori approssimati per eccesso del sottraendo dai valori approssimati per difetto, e in egual grado, del minuendo.* Se l'ultima cifra di tale differenza non è nove, le precedenti appartengono alla differenza δ; se l'ultima cifra è invece nove, o le precedenti appartengono, anche questa volta, a δ, oppure l'ultima di esse deve essere aumentata di uno.

Per l'esame di quest'ultimo caso si possono ripetere le considerazioni svolte alla fine del n.° 15, per l'addizione.

19. Fondandoci sulla sola definizione di differenza si possono provare alcune delle seguenti proprietà, e le altre si possono provare fondandosi e sulla definizione di differenza e sui teoremi e sulle proprietà sviluppate relativamente all'addizione.

1ª. *Differenze di numeri eguali sono eguali.* Si confronti quanto è detto nella nota alla proprietà 1ª del n.° 17 in riguardo ai numeri razionali.

2ª. *I teoremi e le proprietà sulle differenze dei numeri razionali sussistono anche per i numeri reali; e pure le dimostrazioni, fatte nella ipotesi dei numeri razionali, sono valevoli per i numeri reali.*

3ª. *La differenza di due numeri eguali è data da* $\overline{1},[9] = 0$.

4ª. *La differenza di due segmenti ha per misura la differenza delle loro misure,* cioè

$$OU . \alpha - OU . \beta = OU . (\alpha - \beta).$$

Si potrebbe dimostrare anche una proprietà analoga alla 6ª del n.° 17; ed altre che conseguono immediatamente da quelle poste fin qui. Ci limitiamo, completando la nota al teorema del n.° 12, a porre qui la seguente

Osservazione. — Il Teorema del n.° 12 sussiste, evidentemente, anche quando le successioni $u_1, u_2, u_3, \ldots$ e $v_1, v_2, v_3, \ldots$ che si sono supposte composte di numeri razionali, vengano sostituite con altre due $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ e $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots$ composte di numeri reali. In questo caso non è necessario escludere che fra i termini della prima successione ve ne sia uno maggiore di tutti; ma allora, naturalmente, non può esservene uno minore di tutti fra quelli della seconda successione.

Carlo Soschino.

(Continua)

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo del prof. Usai, a pag. 165 del Fasc. IV, invece di:

$\begin{cases} A'_2 = \varepsilon_1 y^2 \\ B'_2 = -\varepsilon_2 xy \end{cases}$ $\begin{cases} A''_2 = \varepsilon_1 xy \\ B''_2 = -\varepsilon_1 x^2 \end{cases}$ deve leggersi: $\begin{cases} A'_2 = \varepsilon_2 y^2 \\ B'_2 = -\varepsilon_2 xy \end{cases}$ $\begin{cases} A''_2 = \varepsilon_1 xy \\ B''_2 = -\varepsilon_1 x^2 \end{cases}$

BIBLIOGRAFIA

F. Gomes Teixeira. — *Obras sobre Mathematica*, publicadas por ordem do Governo Portuguez. Volume segundo e terçeiro.

I volumi II e III delle opere di Matematica dell'illustre Direttore dell'Accademia Politecnica di Porto, diffusi soltanto ora fra il pubblico quantunque portino la data 1906, saranno senza dubbio accolti con entusiasmo nel mondo degli studiosi. Essi sono di quei libri che onorano tanto il sommo geometra che li ha pensati e scritti, quanto quel Governo che ne ha assunto la pubblicazione.

L'importanza della nuova opera dell'illustre Autore si rileva dall'esame del contenuto di ciascuno dei due volumi. Nel secondo si trovano i seguenti quattordici studi:

I. *Notes sur deux travaux d'Abel relatifs à l'intégration des différences finies*, pubblicate nel 1904 nel giornale *Acta mathematica*, in occasione della commemorazione del primo centenario della nascita del sommo analista svedese.

Partendo da due lavori di Abel, l'Autore fa importanti applicazioni di analisi.

II. *Sur la décomposition des fractions rationnelles.* — Qui viene esposto un nuovo metodo per trovare (indipendentemente l'uno dall'altro) i numeratori delle frazioni semplici nelle quali si decompone una funzione razionale, giungendo a delle formole che contengono quelle trovate da Hermite in un caso particolare.

III. *Varios artigos sobre diversos questoẽs de analyse.* — Contiene dodici pubblicazioni fatte in vari periodici scientifici, non che estratti di lettere, dove si trattano importanti questioni di analisi.

IV. *Integraçao das equaçoẽs as derivadas parciales de segundo ordem.* — Questo lavoro non è altro che la dissertazione di laurea che il prof. Teixeira presentò nel 1875 all'Università di Coimbra. È diviso in cinque capitoli, e tratta con molta dottrina della teoria degli integrali delle equazioni a derivate parziali, della trasformazione di tali equazioni, delle equazioni di Monge e di Ampère, di alcune equazioni del secondo ordine di grado superiore al primo, esponendo per di più alcune profonde riflessioni sull'integrazione delle equazioni simultanee.

V. *Tres artigos sobre as equações as derivadas parciales.* — Nel primo di questi articoli l'Autore tratta del numero delle funzioni arbitrarie degli integrali delle equazioni a derivate parziali, nel secondo si occupa dell'integrazione d'un'equazione a derivate parziali del secondo ordine, e nel terzo dell'integrazione d'una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine.

VI. *Sobre o emprego dos eixos coordenadas obliquos na mecanica analytica.* — Questo interessante lavoro costituisce la dissertazione presentata alla Facoltà di Matematica dell'Università di Coimbra nel 1876, in occasione di un concorso. È diviso in tre capitoli e tratta dell'equilibrio dei sistemi di forze, dell'equilibrio dei solidi e dei principii generali della meccanica.

VII. *Sur les nombres de Bernoulli.*

VIII. *Sur la série de Lagrange et ses applications.* — La detta serie è applicata all'interessante questione dello sviluppo delle funzioni algebriche, trattando specialmente alcuni casi particolari notevoli. Sono oltremodo importanti i metodi seguiti dall'Autore per la determinazione dei coefficienti degli sviluppi.

IX. *Sur la théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires.* — È uno studio geometrico di grandissima importanza, nel quale si tratta della determinazione dei centri d'inversione delle predette curve e di un elegante metodo per costruire le quartiche bicircolari unicursali.

X. *Sur un problème de Gauss et une classe particulière de fonctions symétriques.* — Prendendo le mosse dalla celebre memoria di Gauss, *Theoria interpolationis methodo nova tractata*, l'Autore giunge a costruire delle importanti funzioni simmetriche, delle quali si serve opportunamente anche per lo sviluppo delle funzioni razionali in serie.

XI. *Sur quelques applications des séries ordonnées suivant les puissances du sinus.* — Qui l'illustre geometra applica con molta sagacia ed opportunità le dette serie al calcolo di numerosi integrali definiti, e riesce pure a trovare collo stesso mezzo delle importantissime relazioni fra i numeri di Bernoulli e di Eulero.

XII. *Alguns artigos sobre diversas questoẽs de Geometria analytica.* — Contiene sei pubblicazioni assai importanti, di carattere geometrico, fatte in diversi periodici scientifici.

XIII. *Diversos artigos sobre Analyse mathematica.* — Contiene undici pubblicazioni d'indole analitica, con estratti di alcune lettere, risolvendo in ognuna di esse una particolare questione d'interesse incontestato.

XIV. *Dois trabalhos sobre Geometria analytica.* — Nel primo di questi lavori si danno due costruzioni per realizzare le spiriche di Perseo, e nel secondo si dimostra un'importantissima proprietà della strofoide, e si tratta infine delle cubiche che coincidono colle loro cissoidali.

Il volume terzo costituisce la prima parte del *Curso de Analyse infinitesimal*, che ha ormai raggiunto la quarta edizione, e comprende il Calcolo differenziale. È un lavoro di singolare importanza scientifica, esposto coi metodi rigorosi più moderni, tanto che esso ebbe la meritata distinzione d'un premio concessogli dalla *Reale Accademia delle Scienze di Lisbona.*

Il lavoro comincia con due Capitoli d'introduzione, dove si espone la teoria dei numeri irrazionali, dei numeri negativi e dei numeri immaginari, e i principii della teoria delle funzioni, con considerazione particolare ad alcune di queste.

L'esposizione del Calcolo differenziale si fa in otto Capitoli, nei quali sono successivamente esposte le nozioni preliminari, la teoria delle derivate del primo ordine delle funzioni, seguìta da importanti applicazioni geometriche, la teoria delle derivate di ordine superiore, la formola di Taylor con opportune e bene scelte applicazioni, la determinazione delle funzioni per mezzo di serie, le singolarità delle funzioni, e infine la teoria delle funzioni di variabili immaginarie.

Questi cenni or dati sui due volumi or ora pubblicati dal prof. TEIXEIRA, benchè rapidi e condensati, danno un'idea abbastanza esatta della straordinaria importanza di quest'opera scientifica, la quale riuscirà sommamente utile a Coloro che vogliono approfondirsi nello studio di una quantità di argomenti scientifici di alto interesse, tanto più quando essi sono trattati con quella competenza e quel rigore, accompagnato da pari chiarezza, che distinguono le opere dell'illustre Autore.

G. PIRONDINI.

W. W. ROUSE BALL. — *Ricreazioni e problemi matematici dei tempi antichi e moderni.* Versione dall'inglese del dott. DIONISIO GAMBIOLI. Bologna, Zanichelli.

In quest'opera sono raccolte disparate e interessanti notizie scientifiche e storiche, che si estendono dai giuochi matematici più elementari e più noti, fino a problemi di alta matematica, alcuni dei quali attendono ancora la loro risoluzione. Nella Parte I (Cap. I-VI), intitolata *Ricreazioni matematiche*, vengono trattati molti giuochi, curiosità, paradossi e problemi sia aritmetici (Cap. I) che geometrici (Cap. II) e meccanici (Cap. III); alcuni sono originali, gli altri sono accompagnati da interessanti notizie storiche. Ricorderemo qui i cenni storici su certe questioni sui numeri primi, alcune delle quali ancora insolute, come il cosiddetto ultimo teorema di Fermat, e il risultato di Mersenne sui numeri primi della forma $2^p - 1$ (p primo); a quest'ultimo problema è poi dedicato, nella Parte II, un apposito Capitolo (il IX), dove si dà ampia relazione storica dei vari metodi adoperati per tale ricerca e dei risultati ottenuti.

Nel Cap. IV si espongono vari giuochi, fra cui ricorderemo il noto problema delle otto regine. Nel Cap. V l'A. tratta dei quadrati magici, dando assai notizie storiche e indicando vari metodi per la loro costruzione; nel Cap. VI infine espone i teoremi di Eulero sulle curve a tracciato continuo, facendone applicazione alla teoria dei labirinti, e tratta dipoi i due casi finora studiati del problema inverso di quest'ultimo, cioè il giuoco di Hamilton ed il noto problema del cammino del cavaliere sulla scacchiera.

Prevalentemente storica è la Parte II (Capp. VII-XIV), intitolata *Miscellanea di saggi e problemi.* Il Cap. VII contiene la storia, assai diffusa e documentata, degli studi e dell'esame di laurea in matematica nell'Università di Cambridge. Segue poi la storia dei tre celebri problemi geometrici dell'antichità; a proposito della rettificazione della circonferenza sarebbe forse piaciuto di trovare in quest'opera qualche accenno ai metodi meccanici di integrazione, e specialmente all'integrafo, ma probabilmente ciò non si accordava col disegno piuttosto elementare dell'opera. I Capp. X e XI contengono, con assai fatti ed aneddoti, cenni storici notevoli risp. sull'astrologia e sui crittografi e cifrari. Negli ultimi tre Capp. che seguono l'A. tratta infine dello spazio, del tempo e della materia, escludendo le questioni metafisiche, e limitandosi più che altro alla parte storica; nel Cap. sullo spazio inoltre illustra il noto concetto che l'esistenza di uno spazio a più di tre dimensioni e la realtà delle geometrie non euclidee non sono incompatibili con la nostra esperienza.

F. C.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 Maggio 1911

I NUMERI REALI CONSIDERATI COME SUCCESSIONI DI NUMERI DECIMALI

(Continuazione — Vedi fascicolo precedente)

---

§ 4. — Prodotto e quoziente.

20. Teorema. — *I prodotti dei valori approssimati in egual grado per difetto e per eccesso di due o più numeri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ definiscono un numero π.*

Indichiamo con u_s e con v_s i prodotti dei valori approssimati, rispettivamente per difetto e per eccesso, a meno di $\frac{1}{10^s}$, dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

I numeri u_s vanno aumentando col crescere di s perchè le cifre dei numeri dati non sono tutte zero da una in poi. Inoltre poichè i fattori di u_s sono tanti quanti quelli di v_s ed ogni fattore del secondo prodotto è maggiore di uno corrispondente del primo, si può dire che è $v_s > u_s$. E ancora, poichè

$$\begin{array}{l} a_0, a_1 a_2 \dots (a_s + 1) \geqq a_0, a_1 a_2 \dots a_s (a_{s+1} + 1) \\ b_0, b_1 b_2 \dots (b_s + 1) \geqq b_0, b_1 b_2 \dots b_s (b_{s+1} + 1) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

si ottiene $v_s \geqq v_{s+1}$.

Infine, indicando per brevità con $a^{(s)}, b^{(s)}, \dots$ i valori approssimati, a meno di $\frac{1}{10^s}$, dei numeri $\alpha, \beta, \dots$, la cui quantità supporremo rappresentata da p, avremo

$$v_s - u_s = \left(a^{(s)} + \frac{1}{10^s}\right) \cdot \left(b^{(s)} + \frac{1}{10^s}\right) \dots - a^{(s)} \cdot b^{(s)} \dots$$

Se è $p = 2$, questa relazione ci dà subito

$$v_s - u_s = \left(a^{(s)} + b^{(s)} + \frac{1}{10^s}\right) \cdot \frac{1}{10^s} < \frac{a_0 + b_0 + 2}{10^s} \qquad (1)$$

e la differenza $v_s - u_s$ diventa minore di qualunque numero assegnato. Il teorema resta dimostrato per due numeri, perchè sono verificate tutte le condizioni richieste nel teorema del n.° 12. Ma rimane da considerare il caso di $p > 2$, ed è ciò che ora faremo.

Fra i numeri dati ve ne sarà uno, per esempio α, non minore degli altri; allora $a^{(s)}$ non sarà minore di nessuno dei numeri $b^{(s)}, c^{(s)}, \dots$, e la relazione che dà la differenza $v_s - u_s$. permette di stabilire che è

$$v_s - u_s \leqq p \, . \, \{a^{(s)}\}^{p-1} \, . \, \frac{1}{10^s} + \frac{p \, . \, (p-1)}{1 \, . \, 2} \, . \, \{a^{(s)}\}^{p-2} \, . \, \frac{1}{10^{2.s}} + \ldots + \frac{1}{10^{p.s}}$$

o anche

$$v_s - u_s \leqq \left\{ a^{(s)} + \frac{1}{10^s} \right\}^p - \{a^{(s)}\}^p.$$

E poichè il secondo membro di questa disuguaglianza è divisibile per la differenza, $\frac{1}{10^s}$, delle basi, ed è $a^{(s)} + \frac{1}{10^s} \leqq a_0 + 1$, si ottiene

$$v_s - u_s \leqq \{(a_0 + 1)^{p-1} + (a_0 + 1)^{p-2} \, . \, a^{(s)} + \ldots (a^{(s)})^{p-1}\} \, . \, \frac{1}{10^s},$$

ed infine

$$v_s - u_s \leqq \frac{p \, . \, (a_0 + 1)^{p-1}}{10^s}, \tag{2}$$

ed il teorema rimane dimostrato in generale.

Chiameremo prodotto di due o più numeri $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ *(fattori) il numero* π *individuato dai prodotti dei valori approssimati, in egual grado, dei singoli fattori.* E porremo

$$\alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma \ldots = \pi \, .$$

Poichè indicando con OP il segmento $\{[(OU \, . \, \alpha) \, . \, \beta] \, . \, \gamma\} \ldots$, si ha

$$OU \, . \, u_s < OP \leqq OU \, . \, v_s,$$

si conclude che la misura di OP coinciderà con π, e potremo porre la eguaglianza

$$\{[(OU \, . \, \alpha) \, . \, \beta] \, . \, \gamma\} \ldots = OU \, . \, (\alpha \, . \, \beta \, . \, \gamma \ldots)$$

la quale, se è $OU \, . \, \alpha = OA$, ci permette di dire che *moltiplicando un segmento* OA *successivamente per certi numeri, si ottiene un segmento la cui misura è il prodotto della misura di* OA *e dei numeri per i quali esso è stato successivamente moltiplicato.*

21. Osservazione. — Adottando le solite notazioni si prenda 10^t maggiore del numeratore del secondo membro della disuguaglianza (1) o (2), del n.° 20, secondo che sia $p = 2$ oppure $p > 2$, e si considerino i prodotti u_{s+t+1} e v_{s+t+1}. La (1), o la (2), diventerà allora

$$v_{s+t+1} - u_{s+t+1} < \frac{1}{10^{s+1}} \qquad \text{ossia} \qquad v_{s+t+1} < u_{s+t+1} + \frac{1}{10^{s+1}}$$

e si avrà, in conseguenza,

$$u_{s+t+1} < \pi \leqq v_{s+t+1} < u_{s+t+1} + \frac{1}{10^{s+1}}$$

e, considerando soltanto la parte intera x_0 e le prime $s+1$ cifre $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{s+1}$, della parte decimale del numero u_{s+t+1} (composto di $(s+t+1).p$ cifre dopo la virgola), si trova

$$x_0, x_1x_2 \ldots x_{s+1} < \pi < x_0, x_1x_2 \ldots (x_{s+1}+2).$$

Da questo punto si può continuare conformemente alla esposizione del n.° 15 per giungere a concludere che *in generale il prodotto dei valori approssimati, a meno di* $\frac{1}{10^{s+t+1}}$, *dei singoli fattori, dà il valore approssimato, a meno di* $\frac{1}{10^s}$, *del prodotto.*

22. TEOREMA. — *Il prodotto* π *di* p *fattori è eguale al prodotto che si ottiene moltiplicando quello* π' *dei primi* $p-1$ *fattori per l'ultimo fattore* ρ.

Dal prodotto

$$u'_{s+t+k} = x'_0, x'_1x'_2 \ldots x'_{s+t+k} \ldots x'_{(p-1)(s+t+k)}$$

dei valori approssimati, a meno di $\frac{1}{10^{s+t+k}}$, dei primi $p-1$ fattori, risulti $x'_0, x'_1x'_2 \ldots x'_{s+t}$ come valore approssimato di π'; e dal prodotto

$$u''_{s+t} = x'_0, x'_1x'_2 \ldots x'_{s+t} \, . \, r_0, r_1r_2 \ldots r_{s+t} = x_0, x_2x_2 \ldots x_{2(s+t)}$$

si deduca $x_0, x_1x_2 \ldots x_s$ come valore approssimato di $\pi'.\rho$. Vogliamo dimostrare che quest'ultimo valore approssimato appartiene anche a π.

Con le solite notazioni avremo

$$u_{s+t+k} = u'_{s+t+k} \, . \, r_0, r_1r_2 \ldots r_{s+t+k}\,;$$

ma poichè

$$x'_0, x'_1x'_2 \ldots x'_{s+t} \leqq u'_{s+t+k} < x'_0, x'_1x'_2 \ldots (x'_{s+t}+1)$$

ed anche, prendendo k abbastanza grande,

$$r_0, r_1r_2 \ldots r_{s+t} < r_0, r_1r_2 \ldots r_{s+t+k} < r_0, r_1r_2 \ldots (r_{s+t}+1),$$

si ricava da queste, tenendo conto delle precedenti,

$$u''_{s+t} < u_{s+t+k} < v''_{s+t}. \text{ (1)}$$

Dunque il numero u_{s+t+k} che, come sappiamo, definisce il prodotto π è sempre compreso fra i numeri che definiscono il prodotto $\pi'.\rho$; e perciò è $\pi'.\rho = \pi$.

COROLLARIO. — *Il prodotto di più numeri, considerati in un certo ordine, è eguale a quello che si ottiene moltiplicando il primo per il secondo, il prodotto per il terzo, il nuovo prodotto per il quarto, ecc.*

---

(1) Con v''_{s+t} abbiamo indicato il prodotto dei valori approssimati per eccesso, a meno di $\frac{1}{10^{s+t}}$, di π' e di ρ.

OSSERVAZIONE. — Dalla definizione di prodotto consegue che *prodotti di numeri eguali considerati nello stesso ordine sono eguali.* [1] E dalla definizione di prodotto e dal corollario precedente deriva che *per i prodotti di numeri reali sussistono le proprietà commutativa e associativa e tutti i teoremi che sono con esse direttamente collegati.*

23. Ripetendo per i prodotti la dimostrazione svolta nel n.° 17 per la proprietà 6ª della somma, si stabilisce che:

Moltiplicando i valori approssimati per eccesso di alcuni fattori di un prodotto per i valori approssimati per difetto degli altri fattori, si ottengono prodotti che contengono i valori approssimati del prodotto π dei dati fattori.

Ad esempio:

Il prodotto $\alpha . 1 = \alpha . 0.[9] = \alpha$

Il prodotto $\alpha . 0 = \alpha . \bar{1}[9] = 0.$

24. TEOREMA. — *Il prodotto di una somma (di una differenza) per un numero, è eguale alla somma (alla differenza) dei prodotti dei singoli termini per il numero.*

Non dipendendo la dimostrazione dal numero dei termini della somma, limitiamoli a due. Si vuol dimostrare che

$$(\alpha + \beta) . \gamma = \alpha . \gamma + \beta . \gamma .$$

Ciò risulta immediatamente dal fatto che le due espressioni eguali

$$(a_0, a_1 a_2 \ldots a_s + b_0, b_1 b_2 \ldots b_s) . c_0 , c_1 c_2 \ldots c_s$$

e

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_s . c_0, c_1 c_2 \ldots c_s + b_0, b_1 b_2 \ldots b_s . c_0, c_1 c_2 \ldots c_s$$

dànno, con alcune delle loro cifre, i valori approssimati rispettivamente dei due membri della eguaglianza che vogliamo dimostrare esser vera. E perciò esistono continuamente valori approssimati in comune delle due quantità $(\alpha + \beta) . \gamma$ e $\alpha . \gamma + \beta . \gamma$.

Per la verità dell'altra eguaglianza

$$(\alpha - \beta) . \gamma = \alpha . \gamma - \beta . \gamma$$

si osservi che, posto $\alpha - \beta = \delta$, si ha $\alpha = \beta + \delta$, da cui

$$\alpha . \gamma = \beta\gamma + \delta . \gamma \quad \text{e quindi} \quad \delta . \gamma = \alpha . \gamma - \beta . \gamma,$$

e, infine

$$(\alpha - \beta) . \gamma = \alpha . \gamma - \beta . \gamma .$$

Il teorema dimostrato (che esprime la *proprietà distributiva* della somma e della differenza rispetto al prodotto) permette di *sviluppare* il prodotto di una somma, o di una differenza, per un numero, e di *raccogliere* un fattore comune. E si può enunciare anche così: *Aumentando un fattore, il prodotto aumenta.*

---

[1] Si veda per il prodotto di numeri razionali la nota posta alla proprietà 1ª del n.° 17.

Corollario. — *Il prodotto di due somme è eguale alla somma dei prodotti di tutti i termini della prima per ciascun termine della seconda.*

Da questo corollario si deduce:

1°. *Se due o più numeri non sono minori di altrettanti, e uno almeno è maggiore del corrispondente, il prodotto dei primi è maggiore del prodotto dei secondi (purchè fra i fattori uguali dei due prodotti non ci sia lo zero).*

2°. *Il prodotto di più fattori tutti maggiori o tutti minori di uno, è rispettivamente maggiore o minore di uno.*

3°. *Il prodotto di due fattori è maggiore o minore di uno dei fattori (che non sia zero) se l'altro è maggiore o minore del numero uno.*

Essendo $\alpha = \alpha > 0$ si ha, insieme con $\beta \gtreqless 1$, anche $\alpha . \beta \gtreqless \alpha$.

25. Teorema. — *Dati due numeri α e β, e supposto $\beta > 0$, esiste un numero γ che moltiplicato per β dà per prodotto α.*

Costruiamo i quozienti

$$\frac{a_0, a_1a_2 \ldots a_s}{b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1)} = u_s, \qquad \frac{a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)}{b_0, b_1b_2 \ldots b_s} = v_s$$

e dimostriamo che u_s e v_s soddisfano alle condizioni del teorema del n.° 12.

Poichè, per qualche valore di t, è

$$a_0, a_1a_2 \ldots a_{s+t} > a_0, a_1a_2 \ldots a_s$$

ed è, sempre,

$$b_0, b_1b_2 \ldots (b_{s+t} + 1) \leqq b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1)$$

risulta $u_{s+t} > u_s$. Abbiamo poi

$$u_s = \frac{a_0, a_1a_2 \ldots a_s}{b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1)} < \frac{a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)}{b_0, b_1b_2 \ldots b_s} = v_s,$$

e quindi possiamo dire che $v_s > u_s$. Ed ancora da

$$v_s = \frac{a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)}{b_0, b_1b_2 \ldots b_s} \geqq \frac{a_0, a_1a_2 \ldots (a_{s+1} + 1)}{b_0, b_1b_2 \ldots b_{s-1}} = v_{s+1}$$

si deduce $v_s \geqq v_{s-1}$.

Considerando infine la differenza $v_s - u_s$ e indicando con $b^{(z)}$ il più piccolo valore approssimato, diverso da zero, del numero β (od anche un numero minore, purchè sempre diverso da zero), potremo scrivere

$$v_s - u_s = \frac{a_0, a_1a_2 \ldots (a_s + 1)}{b_0, b_1b_2 \ldots b_s} - \frac{a_0, a_1a_2 \ldots a_s}{b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1)} =$$

$$= \frac{\left(a_0, a_1a_2 \ldots a_s + b_0, b_1b_2 \ldots b_s + \frac{1}{10^s}\right) \cdot \frac{1}{10^s}}{b_0, b_1b_2 \ldots b_s \,.\, b_0, b_1b_2 \ldots (b_s + 1)} < \frac{1}{10^s} \cdot \frac{a_0 + b_0 + 2}{\{b^{(z)}\}^2},$$

e concludere quindi che la differenza $v_s - u_s$ può rendersi piccola a piacere. Con ciò la prima parte del teorema rimane dimostrata; e prendendo

$$10^t > \frac{a_0 + b_0 + 2}{b_0^{2}},$$

il quoziente u_{s+t+1} *ci dà, in generale, il valore approssimato, a meno di* $\frac{1}{10^s}$, *di* γ. Nel caso in cui la $s - 1^{\text{esima}}$ cifra della parte decimale del numero u_{s+t+1} ridotto in decimali, sia eguale a nove, si dovranno ripetere le considerazioni già fatte più di una volta (si veda n.° 15).

Passiamo ora a dimostrare la seconda parte del teorema, e cioè che $\beta \, . \, \gamma = \alpha$. Ridotto u_{s+t+1} in decimali e supposto che la $s + 1^{\text{esima}}$ cifra dopo la virgola sia diversa da nove, avremo

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_s < u_{s+t+1} \leqq x_0, x_1 x_2 \ldots (x_s + 1)$$

ossia

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_s < \frac{a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s+t+1}}{b_0, b_1 b_2 \ldots (b_{s+t+1} + 1)} \leqq x_0, x_1 x_2 \ldots (x_s + 1);$$

e da queste risulta

$$x_0, x_1 x_2 \ldots x_s \, . \, b_0, b_1 b_2 \ldots b_s < a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s+t+1}$$

ed

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_{s+t+1} \leqq x_0, x_1 x_2 \ldots (x_s + 1) \, . \, b_0, b_1 b_2 \ldots (b_s + 1)$$

le quali disuguaglianze provano la verità della seconda parte del teorema per $x_{s+1} < 9$, ed anche per $x_{s-1} = 9$ purchè, in questo caso, γ sia uguale ad un numero decimale finito.

Se è poi $x_{s+1} = 9$, e il numero γ non è decimale finito, si potrà ottenere che la cifra x_{s+1} sia diversa da nove, dando ad s valori sufficientemente grandi; e si ricadrà così nel caso precedente.

Al numero γ *che moltiplicato per* β *(divisore) dà per prodotto* α *(dividendo) daremo il nome di quoziente di* α *per* β. E porremo

$$\alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \gamma.$$

COROLLARIO. — *Per ottenere il quoziente* $\alpha : \beta$ *si dividono i valori approssimati per difetto del dividendo per i valori approssimati per eccesso, ed in egual grado, del divisore.*

Dalla dimostrazione del teorema si rileva quale è l'approssimazione del quoziente in relazione a quella dei termini.

26. Se OA ed OB sono due segmenti aventi per misura α e β, sono soddisfatte le eguaglianze

$$OA = OU \, . \, \alpha = OU \, . \, (\beta \, . \, \gamma) = (OU \, . \, \beta) \, . \, \gamma = OB \, . \, \gamma$$

dalle quali consegue $OA = OB \, . \, \gamma$, e quindi

$$OA : OB = \alpha : \beta$$

e si può dare l'enunciato: *Il rapporto fra due segmenti* OA *ed* OB *è eguale al quoziente delle misure dei due segmenti riferiti ad una stessa unità di misura.*

27. E fondandosi ancora, alcune volte, sulla sola definizione di quoziente, ed altre volte, e sulla definizione di quoziente e sulle proprietà e sui teoremi che abbiamo esposti nella moltiplicazione, si possono dimostrare le seguenti proprietà:

1ª. *Quozienti di numeri eguali sono eguali.* (1)

2ª. *I teoremi sui quozienti dei numeri razionali sussistono anche per i numeri reali*; e si possono ripetere anche le dimostrazioni.

In conseguenza, tenendo presente l'esempio dato nel n.° 23, si può porre $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$. Chiamando *inverso* (o *reciproco*) di β il quoziente $\frac{1}{\beta}$ si può dire:

3ª. *Il quoziente di due numeri è eguale al prodotto del primo per l'inverso del secondo.*

E di qui si trae subito:

4ª. *Il quoziente di una somma (di una differenza) per un numero, è eguale alla somma (alla differenza) dei quozienti dei singoli termini per il numero. (Proprietà distributiva.)*

Si ha infatti

$$(\alpha \pm \beta) : \gamma = (\alpha \pm \beta) \cdot \frac{1}{\gamma} = \alpha \cdot \frac{1}{\gamma} \pm \beta \cdot \frac{1}{\gamma} = \alpha : \gamma \pm \beta : \gamma.$$

A questa proprietà si potrebbe dare anche la forma: *Aumentando il dividendo il quoziente aumenta.* È altrettanto facile dimostrare che *aumentando il divisore il quoziente diminuisce.* (2)

Posto infatti $\frac{\alpha}{\beta} = \delta$ e $\frac{\alpha}{\beta + \gamma} = \delta_1$, e quindi $\alpha = \beta . \delta$ ed $\alpha = \beta . \delta_1 + \gamma . \delta_1$, deve essere $\delta_1 < \delta$; poichè, se fosse $\delta_1 \geqq \delta$, risulterebbe $\beta . \delta_1 \geqq \beta . \delta = \alpha$ e quindi $\beta . \delta_1 + \gamma . \delta_1 > \alpha$.

5ª. *Se i termini di una divisione sono eguali, il quoziente è uno; e se il divisore è uno, il quoziente è eguale al dividendo.*

Derivano immediatamente dal primo esempio del n.° 23.

Dalle proprietà conseguenti dal corollario del n.° 24 si deduce ancora:

6ª. *Secondo che il divisore di una divisione sia maggiore o minore di uno, il quoziente è minore o maggiore del dividendo.*

Il quoziente di due numeri disuguali è maggiore o minore di uno, secondo che il dividendo è maggiore o minore del divisore.

Infine notiamo che anche per la divisione, come per le precedenti operazioni, vale la proprietà:

---

(1) Si veda la nota alla proprietà 1ª del n.° 17.

(2) Considerazioni analoghe potevano farsi, come conseguenza dei relativi teoremi, nella sottrazione.

7ª. *Dividendo per i valori approssimati per eccesso del divisore quelli, pure approssimati per eccesso, del dividendo, si ottiene il quoziente.*

28. Poichè può benissimo supporsi che l'introduzione del concetto di numeri col segno e lo studio delle loro proprietà siano stati fatti indipendentemente dalla considerazione se i valori assoluti erano razionali o no, possiamo intendere estesi ai numeri reali i teoremi e le convenzioni che trovammo durante lo studio dei numeri razionali relativi. Se non avviseremo esplicitamente del contrario, intenderemo però anche nel seguito, parlando di numeri, di riferirci ai loro valori assoluti.

§ 5. — **Potenza e radice.**

29. La trattazione svolta per i prodotti e per i quozienti ci permette di riguardare estesi ai numeri reali, considerati in valore assoluto, i concetti di *potenza ad esponente intero, positivo o negativo*, ed i relativi teoremi e proprietà.

Dai n.i 20 e 21 si ricava che *per ottenere il valore approssimato, a meno di* $\frac{1}{10^s}$, *di* α^p *(con* $p > 1$*) si può considerare, in generale, la potenza* $a_0, a_1 a_2 \ldots a^p_{s+t-1}$, *con* t *intero tale che renda* $10^t > p \cdot (a_0 + 1)^{p-1}$. Ed estendendo questa regola a definire i casi di $p = 0$ e $p = 1$ avremo ancora $\alpha^0 = 1$ ed $\alpha^1 = \alpha$.

E dalle cose dimostrate nel capitolo che si riferisce ai prodotti e quozienti conseguono le proprietà delle potenze, che diamo qui appresso:

1ª. *Se la base è uno la potenza è uno. E se la base è maggiore o minore di uno la potenza è rispettivamente maggiore o minore (minore o maggiore) di uno, purchè l'esponente sia positivo (negativo).*

2ª. *Di due potenze aventi lo stesso esponente è maggiore (minore) quella che ha base maggiore, se l'esponente è positivo (negativo).*

3ª. *Di due potenze aventi la stessa base è maggiore (minore) quella che ha esponente maggiore se la base è maggiore (minore) di uno.*

Se dei due numeri interi relativi a e b è $a > b$, avremo

$$\alpha^a : \alpha^b = \alpha^{a-b}$$

con $a - b$ positivo; sarà perciò $\alpha^{a-b} \gtrless 1$ secondo che sia $\alpha \gtrless 1$. Dunque se è $\alpha > 1$ risulta $\alpha^a > \alpha^b$, e se è $\alpha < 1$ risulta $\alpha^a < \alpha^b$.

4ª. *La potenza* α^m, *con* m *positivo (negativo) può farsi diventare maggiore o minore (minore o maggiore) di qualunque numero assegnato, naturalmente positivo, secondo che la base è maggiore o minore di uno. E perciò basta prendere* m *sufficientemente grande (in valore assoluto se è negativo).*

Può essere ripetuta la dimostrazione che si svolge quando la base è un numero razionale; tale dimostrazione è fondata, per la base maggior d'uno e per l'esponente positivo, sullo sviluppo della potenza d'un binomio. Ora questo sviluppo dipendendo soltanto dall'applicazione dei teoremi sui prodotti di somme vale anche per lo sviluppo della potenza di un binomio composto di numeri reali.

30. Teorema. — *Dato un numero reale positivo* α *ed uno intero e positivo* m *esiste sempre un numero* ρ *la cui* m^{esima} *potenza sia* α.

Confrontando le potenze m^{esime} delle frazioni decimali di denominatore 10^s, con i valori approssimati di α, troveremo delle potenze minori dei valori approssimati, per difetto, di α e perciò minori di α; e troveremo anche delle potenze maggiori dei valori approssimati, per eccesso, di α e quindi maggiori di α. Consegue da ciò che esiste un numero intero q_s che soddisfa alle relazioni

$$\left(\frac{q_s}{10^s}\right)^m < \alpha \leqq \left(\frac{q_s+1}{10^s}\right)^m,$$

le quali possono scriversi

$$\left(\frac{q_s \,.\, 10}{10^{s-1}}\right)^m < \alpha \leqq \left(\frac{q_s \,.\, 10+10}{10^{s+1}}\right)^m.$$

E da queste relazioni risulta l'esistenza di un numero intero x_{s+1}, composto di una sola cifra, e pel quale si ha

$$\left(\frac{q_s \,.\, 10+x_{s-1}}{10^{s+1}}\right)^m < \alpha \leqq \left(\frac{q_s \,.\, 10+x_{s+1}+1}{10^{s+1}}\right)^m.$$

Se poniamo $q_0 = x_0$ rileviamo, dalle relazioni precedenti, che esiste un numero reale $x_0, x_1x_2x_3 \ldots$ tale che le potenze m^{esime} dei suoi valori approssimati, in egual grado, comprendono sempre il numero α; e se indichiamo con ρ il numero $x_0, x_1x_2x_3 \ldots$ sappiamo, dal n.° 29, che anche ρ^m è compreso fra le potenze m^{esime} dei precedenti valori approssimati. Si conclude che

$$\rho^m = \alpha$$

ed il teorema rimane dimostrato. E dalle proprietà precedentemente esposte, n.° 29, risulta pure l'unicità del numero ρ.

Al numero ρ *che elevato alla* m^{esima} *potenza dà per risultato* α *daremo il nome di radice aritmetica* m^{esima} *di* α, *od anche di potenza (aritmetica) di* α *con esponente* $\frac{1}{m}$. E porremo

$$\sqrt[m]{\alpha} = \rho, \qquad \alpha^{\frac{1}{m}} = \rho.$$

31. A questo punto si potrebbero dimostrare i teoremi sui radicali, si potrebbe introdurre il concetto di esponente frazionario (positivo o negativo) e dimostrare l'applicabilità dei teoremi ad esponente intero al caso delle potenze con esponente frazionario. E ciò supponiamo venga fatto nel modo consueto. Qui ci limiteremo a dimostrare che le proprietà enunciate alla fine del n.° 29 sono vere anche per gli esponenti frazionari. Ci occuperemo degli esponenti positivi risultando poi evidente in qual modo ci si debba contenere per quelli negativi.

Dalla eguaglianza $\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n = \alpha$ risulta che insieme con $\alpha \gtreqless 1$ deve essere $\alpha^{\frac{1}{n}} \gtreqless 1$; in conseguenza, poichè $\alpha^{\frac{m}{n}} = \left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^m$, insieme con $\alpha \gtreqless 1$ risulterà $\alpha^{\frac{m}{n}} \gtreqless 1$; e la prima proprietà rimane provata. Per la seconda proprietà si osservi che, se è $\alpha > \beta$, dalle eguaglianze $\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^n = \alpha$ e $\left(\beta^{\frac{1}{n}}\right)^n = \beta$ risulta che deve essere $\alpha^{\frac{1}{n}} > \beta^{\frac{1}{n}}$, e, in conseguenza,

$$\left(\alpha^{\frac{1}{n}}\right)^m > \left(\beta^{\frac{1}{n}}\right)^m, \qquad \text{ossia} \qquad \alpha^{\frac{m}{n}} > \beta^{\frac{m}{n}}.$$

Le altre proprietà conseguono da queste; l'ultima richiede, naturalmente, che l'esponente $\frac{m}{n}$ possa prendere valori assoluti maggiori di qualunque numero intero dato.

32. Teorema. — *Le potenze (aritmetiche) di un numero positivo α, che abbiano per esponenti i valori approssimati per difetto e per eccesso, in egual grado, di un numero β, individuano un numero γ.*

1°. Il teorema risulta evidente per $\alpha = 1$ e per β positivo o negativo; sarà $\gamma = 1$.

2°. Poniamo

$$\alpha^{b_0, b_1 b_2 \ldots b_s} = \mu_s; \qquad \alpha^{b_0, b_1 b_2 \ldots (b_s + 1)} = \nu_s \text{ (1)}$$

e sia $\alpha > 1$ e β positivo.

I numeri μ_s vanno aumentando con l'aumentare di s perchè le cifre $b_1, b_2, b_3, \ldots$ non sono tutte zero da una in poi. Essendo

$$b_0, b_1 b_2 \ldots (b_s + 1) \geqq b_0, b_1 b_2 \ldots (b_{s+1} + 1)$$

sarà $\nu_s \geqq \nu_{s+1}$ e quindi i numeri ν_s non aumentano col crescere di s. È poi evidente che $\nu_s > \mu_s$.

Considerando infine la differenza $\nu_s - \mu_s$, per la quale risulta

$$\nu_s - \mu_s = \alpha^{b_0, b_1 b_2 \ldots b_s} \cdot \left(\alpha^{\frac{1}{10^s}} - 1\right)$$

e quindi

$$\nu_s - \mu_s < \alpha^{b_0, b_1 b_2 \ldots (b_s + 1)} \cdot \left(\alpha^{\frac{1}{10^s}} - 1\right). \text{ (2)}$$

(1) È ormai noto il significato da attribuire al numero $b_0 . b_1 b_2 \ldots b_s$.

(2) Il numero $b_0, b_1 b_2 \ldots (b_s + 1)$ rappresenta un valore a piacere fra gli approssimati per eccesso di β (o anche un numero maggiore di tali valori).

Dimostreremo ora che la quantità $\alpha^{\frac{1}{10^s}} - 1$ può farsi diventare minore di qualunque numero σ arbitrariamente assegnato, purchè si scelga convenientemente s; e allora resterà provato che il secondo membro della precedente disuguaglianza può rendersi minore di un numero τ scelto a piacere. Ne conseguirà, a più forte ragione, $\nu_s - \mu_s < \tau$, e per l'osservazione del n.° 19 le successioni considerate individueranno, nel caso di $\alpha > 1$ e β positivo, un numero γ, che sarà, evidentemente maggiore di uno.

Prendiamo dunque $10^s > \frac{\alpha - 1}{\sigma}$. Risulta $\alpha < 1 + 10^s . \sigma$ e, tanto più, tenendo conto dello sviluppo della potenza $(\sigma + 1)^{10^s}$, si potrà scrivere $\alpha < (\sigma + 1)^{10^s}$ od anche $\alpha^{\frac{1}{10^s}} < \sigma + 1$ ed infine $\alpha^{\frac{1}{10^s}} - 1 < \sigma$.

3°. Supposto $\alpha < 1$. e β ancora positivo, la dimostrazione precedente, con lievissime modificazioni sussiste purchè si scambino le μ_s con le ν_s; il numero γ, la cui esistenza rimane ancora provata, sarà minore di uno. Diamo qui la parte della dimostrazione che richiede maggiori cambiamenti, quella cioè che serve a provare che la differenza $\mu_s - \nu_s$ è minore di un numero τ. Basterà far vedere che può rendersi $1 - \alpha^{\frac{1}{10^s}} < \sigma$. Potendo supporre $\sigma < 1$, si prenda s in modo che sia (n.° 29, prop. 4ª) $(1 - \sigma)^{10^s} < \alpha$; risulterà $1 - \sigma < \alpha^{\frac{1}{10^s}}$ e quindi $1 - \alpha^{\frac{1}{10^s}} < \sigma$.

4ª. Se poi β è negativo ed eguale a $-\beta'$, basterà ricordare che con $\alpha^\beta = \alpha^{-\beta'}$ intendiamo di rappresentare la potenza $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\beta'}$, per poter ritenere dimostrata, anche in questo caso, l'esistenza del numero γ il quale sarà minore o maggiore di uno, secondo che il numero positivo α è maggiore o minore di uno.

Al numero γ individuato dalle potenze del numero positivo α, che hanno per esponenti i valori approssimati di β, daremo il nome di potenza di base α e di esponente β. E porremo

$$\alpha^\beta = \gamma.$$

33. Le proprietà dimostrate nei n.ⁱ 29 e 31, e tutti i soliti teoremi sulle potenze sussistono anche quando l'esponente è un numero reale. Le dimostrazioni sono, per la maggior parte, fondate sulle conclusioni che qui brevemente ricordiamo:

a) *I risultati delle operazioni su numeri reali si trovano operando sopra i valori approssimati dei numeri stessi.*

b) *I valori approssimati delle potenze sono dati da potenze ad esponente razionale.*

c) *Per le potenze ad esponente razionale valgono tutti i teoremi sulle potenze ad esponente intero.*

Notiamo alcuni esempi:

1°. *Di due potenze aventi lo stesso esponente, positivo, è maggiore quella che ha base maggiore.*

Supposto $\alpha > \beta$ si vuol dimostrare che è $\alpha^\gamma > \beta^\gamma$. Una delle dimostrazioni potrebbe esser questa: Sarà $\alpha^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots c_s} > \beta^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots c_s}$ e quindi $\alpha^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots c_s} = \beta^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots c_s} . \lambda$ con $\lambda > 1$. Prendiamo un s tale che renda $\beta^{\frac{1}{10^s}} < \lambda$, avremo $\alpha^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots c_s} > \beta^{c_0 \cdot c_1 c_2 \dots (c_s+1)}$ e quindi $\alpha^\gamma > \beta^\gamma$.

2°. Il teorema contenuto nella eguaglianza

$$(\alpha . \beta)^\gamma = \alpha^\gamma . \beta^\gamma$$

si può dimostrare seguendo il ragionamento tenuto nel n.° 24 per il prodotto di una somma per un numero; salvo a cambiare i vocaboli che si riferivano a somme e a prodotti nei corrispondenti che si riferiscono a prodotti ed a potenze. E supposto dimostrato il teorema attuale, il precedente può farsi derivare da esso nel seguente modo: Ponendo $\alpha = \beta . \lambda$ sarà $\lambda > 1$, e risulterà $\alpha^\gamma = \beta^\gamma . \lambda^\gamma$ con $\lambda^\gamma > 1$; e perciò $\alpha^\gamma > \beta^\gamma$.

34. Teorema. — *Esiste sempre un numero positivo o negativo β che soddisfa alla equazione $\alpha^\beta = \gamma$ nella quale sono conosciuti i numeri α e γ entrambi positivi; ed α è diverso da uno.*

1°. Qualunque sia α, se è $\gamma = 1$ basterà prendere $\beta = 0$.

2°. Supponiamo α e γ entrambi maggiori di uno. Si confrontino tutte le potenze α, i cui esponenti sono le frazioni aventi i denominatori uguali a 10^s e i numeratori eguali ai successivi numeri interi positivi, col numero dato γ. Ricordando che $\alpha^0 = 1 < \gamma$ e che le potenze considerate diventano maggiori di qualunque numero assegnato purchè si prenda l'esponente sufficientemente grande, si può asserire che esiste un numero intero positivo (o zero) tale che risulti

$$\alpha^{\frac{q_s}{10^s}} < \gamma \leqq \alpha^{\frac{q_s+1}{10^s}}$$

da cui

$$\alpha^{\frac{q_s . 10}{10^{s+1}}} < \gamma \leqq \alpha^{\frac{q_s . 10 + 10}{10^{s+1}}}$$

e con ragionamento identico a quello del n.° 30 si giunge a dimostrare l'esistenza d'un numero β reale e positivo soddisfacente alla data equazione.

3°. Supposto ancora $\alpha > 1$, ma $\gamma < 1$, determineremo nel modo precedente, il numero β' che soddisfi alla equazione $\alpha^{\beta'} = \frac{1}{\gamma}$, ed avremo subito $\alpha^{-\beta'} = \gamma$. Dunque esiste, anche in questo caso, un numero β, che è negativo, e che soddisfa alle poste condizioni.

4°. Infine se α e γ sono entrambi minori di uno, il numero β che soddisfa alla equazione $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^\beta = \frac{1}{\gamma}$ soddisfa anche all'altra $\alpha^\beta = \gamma$.

Se nella equazione $\alpha^\beta = \gamma$ fosse incognito il valore di α si potrebbe porre $\alpha = \gamma^{\frac{1}{\beta}}$ e si ricadrebbe nel teorema del n.° 32.

Procedendo coi soliti metodi si potrebbero ora far conseguire le note proprietà dei logaritmi.

C. Soschino.

SU UNO SPECIALE DETERMINANTE DI FUNZIONI

1. Supposte le $g_1, g_2, f_1, f_2, \ldots f_n$ $n+2$ funzioni delle variabili $x_1 x_2 \ldots x_{n+1}$ si consideri il determinante

$$\theta(g_1, g_2, f_1, \ldots f_n) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+1}} \\ 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{n+1}} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}$$

e lo si sviluppi secondo gli elementi della prima linea.

Si trova:

$$\theta(g_1, g_2, f_1, \ldots f_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \mathrm{D}_i(g_2, f_1, \ldots f_n) \qquad (1)$$

ove sia:

$$\mathrm{D}_i(g_2, f_1, \ldots f_n) = (-1)^i \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial g_2}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_{n+1}} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Se si indica con t un'altra funzione di $x_1, \ldots x_{n+1}$ si può scrivere:

$$\theta(tg_1, tg_2, tf_1, \ldots tf_n) = \sum_i \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i}\right) \mathrm{D}_i(tg_2, tf_1, \ldots tf_n).$$

Ma per una proprietà di questi determinanti D (1) si ha:

$$\theta(tg_1, tg_2, tf_1, \ldots tf_n) = t^n \sum_i \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i}\right) [t \mathrm{D}_i(g_2, f_1, \ldots f_n) + \\ + g_2 \mathrm{D}_i(t, f_1, \ldots f_n)]$$

(1) Occhipinti, "Su alcuni determinanti di funzioni", *Period. di Matem.*, settembre-ottobre 1908.

cioè:

$$\theta(tg_1, tg_2, tf_1, \dots tf_n) = t^{n+2} \sum_i \frac{\partial g_1}{\partial x_i} D_i(g_2, f_1, \dots f_n) + $$
$$+ t^{n+1} g_1 \sum_i \frac{\partial t}{\partial x_i} D_i(g_2, f_1, \dots f_n) + t^{n+1} g_2 \sum_i \frac{\partial g_1}{\partial x_i} D_i(t, f_1, \dots f_n) +$$
$$+ t^n g_1 g_2 \sum \frac{\partial t}{\partial x_i} D_i(t, f_1, \dots f_n)$$

da cui tenendo conto della (1) e notando che

$$\sum_i \frac{\partial t}{\partial x_i} D_i(t, f_1, \dots, f_n) = \theta(t, t, f_1, \dots f_n) = 0,$$

si avrà:

$$\theta(tg_1, tg_2, tf_1, \dots tf_n) = t^{n+1}[t\theta(g_1, g_2, f_1, \dots f_n) +$$
$$+ g_1\theta(t, g_2, f_1, \dots f_n) + g_2\theta(g_1, t, f_1, \dots f_n)] \quad (2)$$

formula la quale esprime il determinante θ delle funzioni composte mediante tre determinanti della stessa natura ma con funzioni semplici.

2. Quest'ultima espressione la si può generalizzare come segue: Dato il determinante

$$\theta(g_1, g_2, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix}$$

si dimostra che $\theta(tg_1, \dots tg_s, tf_1, \dots tf_n)$ è esprimibile mediante $s+1$ determinanti θ relativi a funzioni semplici, cioè:

$$\theta(tg_1, \dots tg_s, tf_1, \dots tf_n) = t^{n+s-1}[t\,\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{s} g_j\,\theta(g_1, g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots, g_s, f_1 \dots f_n)].\ ^{(1)} \quad (2')$$

---

(1) Si noti il significato di questo $\theta(g_1, g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)$ e degli analoghi che si adopreranno in seguito. La t prende il posto della g_j nella successione

$$g_1, g_2, \dots g_{j-1}, g_j, g_{j+1}, \dots g_s.$$

Quindi per $j = 1$ si ha

$$\theta(t, g_2, \dots g_s, f_1, \dots f_n)$$

per $j = 2$

$$\theta(g_1, t, g_3, \dots g_s, f_1, \dots f_n)$$

e finalmente per $j = s$

$$\theta(g_1, \dots g_{s-1}, t, f_1, \dots f_n).$$

La formula in questione, poi per $s = 2$ si riduce alla (2) precedente e per $s = 1$ chiamando con f l'unica funzione g in questo caso, diventa la (2) dell'Occhipinti citato.

Infatti, ammessa questa si ha per il caso in cui vi sia ancora un'altra funzione (g_{s+1}) e un'altra variabile x (x_{n+s})

$$\theta(tg_1, tg_2, \dots tg_s, tg_{s+1}, tf_1, \dots tf_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+s} \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) \theta_i (tg_2, \dots tg_s, tg_{s+1}, tf_1, \dots tf_n) \; (^1)$$

$$= t^{n+s-1} \sum_{i=1}^{n+s} \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) [t\, \theta_i (g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ \sum_{j=2}^{s+1} g_j\, \theta_i (g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)]$$

$$= t^{n+s+1} \sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ t^{n+s} g_1 \sum_i \frac{\partial t}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ t^{n+s} \sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \sum_{j=2}^{s+1} g_j\, \theta_i (g_2, g_3, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ t^{n+s-1} g_1 \sum_i^{n+s} \frac{\partial t}{\partial x_i} \sum_{j=2}^{s+1} g_j\, \theta_i (g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n).$$

Ora si osservi:

$$\sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) = \theta (g_1, g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial t}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) = \theta (t, g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) =$$

$$= \theta (g_1, g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n+s} \frac{\partial t}{\partial x_i} \theta_i (g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) =$$

$$= \theta (t, g_2, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)$$

e questo è zero perchè ha due linee uguali.

Sicchè si ha:

$$\theta (tg_1, tg_2, \dots, tg_{s+1}, tf_1, \dots tf_n) = t^{n+s} [t\, \theta (g_1, g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ g_1\, \theta (t, g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) + \sum_{j=2}^{s+1} g_j\, \theta (g_1, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \dots f_1, \dots f_n)]$$

e finalmente

$$\theta (tg_1, tg_2, \dots tg_{s+1}, tf_1, \dots tf_n) = t^{n+s} [t\, \theta (g_1, g_2, \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s+1} g_j\, \theta (g_1, \dots g_{j-1}, t, g_{j+1} \dots g_{s+1}, f_1, \dots f_n)]$$

e questa si accorda pienamente con la (2'). Sicchè questa è generale.

---

(1) Con θ_i indico il prodotto di $(-1)^i$ per il determinante θ delle funzioni in parentesi rispetto a tutte le variabili esclusa la x_i e poichè esso contiene s funzioni tg di $n+s-1$ variabili si potrà sviluppare mediante la (2').

3. Ritornando al caso di due sole funzioni g, si ricava dalla (1)

$$\theta(g_1, g_2, tf_1, \dots tf_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} D_i(g_2, tf_1, \dots tf_n).$$

Ma dai determinanti D si ha:

$$D_i(g_2, tf_1, \dots tf_n) = t^n D_i(g_2, f_1, \dots f_n) \text{ (}^1\text{)}$$

quindi

$$\theta(g_1, g_2, tf_1, \dots tf_n) = t^n \theta(g_1, g_2, f_1, \dots f_n).$$

Nel caso di tre funzioni g (e quindi anche $n+2$ variabili indipendenti) si ha:

$$\theta(g_1, g_2, g_3, tf_1, \dots tf_n) = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \theta_i(g_2, g_3, tf_1, \dots tf_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial g_1}{\partial x_i} t^n \theta_i(g_2, g_3, f_1, \dots f_n)$$

e infine

$$\theta(g_1, g_2, g_3, tf_1, \dots tf_n) = t^n \theta(g_1, g_2, g_3, f_1, \dots f_n).$$

Nel caso più generale si trova con un semplice procedimento di induzione

$$\theta(g_1, g_2, \dots g_s\, tf_1, \dots tf_n) = t^n \theta(g_1, g_2, \dots g_s, f_1, \dots f_n) \qquad (2'')$$

e questa dice che moltiplicando tutte le funzioni f di θ (funzioni del secondo gruppo) per una stessa funzione t, il determinante si riproduce a meno del fattore t^n.

4. Vediamo ora il caso in cui si moltiplicano per t tutte le funzioni g del primo gruppo.

Quando si tratti di una sola g si ha un determinante, dell'Occhipinti:

$$D(tg_1, f_1, \dots f_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i} \right) K_i(f_1, \dots f_n)$$

in cui:

$$\text{(}^2\text{)}\ K^i(f_1, \dots f_n) = (-1)^i \begin{vmatrix} f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \dots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

e tenendo presente la relazione fra i determinanti D e K:

$$D(tg_1, f_1, \dots f_n) = t\, D(g_1, f_1, \dots f_n) + g_1 D(t, f_1, \dots f_n).$$

---

(1) Articolo Occhipinti, formula (3).

(2) Questi determinanti K furono trovati da Iacobi, il quale li trovò mediante la trasformazione $y_i = \frac{x_i}{x_0}$ fatta su un determinante funzionale (vedi Crelle, vol. XII, 1834).

Si occuparono assai di essi anche il Casorati (Istituto Lombardo, 1874), ed il Torelli (Rendiconti, Palermo, 1893).

Nel caso di due funzioni g:

$$\theta(tg_1, tg_2, f_1, \ldots f_n) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i}\right) D_i(tg_2, f_1, \ldots f_n)$$

essendo D_i il prodotto di $(-1)^i$ per il determinante D delle

rispetto alle
$$tg_2, f_1, \ldots f_n$$
$$x_1, \ldots x_{i-1}; x_{i+1}, \ldots x_{n+1}.$$

Sicchè tenendo conto della precedente:

$$\theta(tg_1, tg_2, f_1, \ldots f_n = \\ = \sum_{i=1}^{n+1} \left(t \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + g_1 \frac{\partial t}{\partial x_i}\right) [t D_i(g_2, f_1, \ldots f_n) + g_2 D_i(t, f_1, \ldots f_n)] = \\ = t^2 \theta(g_1, g_2, f_1, \ldots f_n) + g_1 t \theta(t, g_2, f_1, \ldots f_n) + \\ + g_2 t \theta(g_1, t, f_1, \ldots f_n) + g_1 g_2 \theta(t, t, f_1, \ldots f_n)$$

e poichè l'ultimo θ è zero si ha:

$$\theta(tg_1, tg_2, f_1, \ldots f_n) = t[t\theta(g_1, g_2, f_1, \ldots f_n) + \\ g_1\theta(t, g_2, f_1, \ldots f_n) + g_2\theta(g_1, t, f_1, \ldots f_n)].$$

Più in generale:

$$\theta(tg_1, \ldots tg_s, f_1, \ldots f_n) = t^{s-1}[t\theta(g_1, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \ldots g_{j-1}, t, g_{j+1}, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n)]$$

e la si dimostra con lo stesso procedimento usato per la (2').

5. Dalle formule precedenti possiamo ricavarne altre specializzando la funzione moltiplicatrice t e considerando in particolare i due casi in cui essa sia uguale ad una delle g o ad una delle f.

Se si indica con g_a una g qualunque per la (2') si ha:

$$\theta(g_a g_1, g_a g_2, \ldots g_a g_s, g_a f_1, \ldots g_a f_n) = g_a^{n+s-1}[g_a\theta(g_1, g_2, \ldots g_s, f_1, f_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \ldots g_{j-1}, g_a, g_{j+1}, \ldots g_s, f_1 \ldots f_n)].$$

Ma si osservi

$$\sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \ldots g_{j-1}, g_a, g_{j+1}, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n)$$

si riduce ad un unico termine

$$g_a \theta(g_1, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n)$$

corrispondente al valore $j = a$.

Quindi

$$\theta(g_a g_1, g_a g_2, \ldots g_a g_s, g_a f_1, \ldots g_a f_n) = 2 g_a^{n+s} \theta(g_1, g_2, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n).$$

In modo analogo facendo uso della (2') in cui si ponga $t = g_a^2$

$$\theta(g_a^2 g_1, g_a^2 g_2, \dots g_a^2 g_s, g_a^2 f_1, \dots g_a^2 f_n) = \\ = g_a^{2(n+s-1)} [g_a^2 \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, g_2, \dots g_{j-1}, g_a^2, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)].$$

Ma:

$$\sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, \dots g_{j-1} . g_a^2, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = 2 g_a \sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, \dots g_{j-1}, g_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = 2 g_a^2 \, \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n).$$

Quindi sostituendo si ha:

$$\theta(g_a^2 g_1, g_a^2 g_2, \dots g_a^2 g_s, g_a^2 f_1, \dots g_a^2 f_n) = \\ = 3 g_a^{2(n+s)} \theta(g_1, g_2, \dots g_s, f_1, \dots f_n). \text{ [1]}$$

Più in generale

$$\theta(g_a^{r-1}, g_a^{r-1} g_2, \dots g_a^{r-1} g_s, g_a^{r-1} f_1, \dots g_a^{r-1} f_n) = \\ = r g_a^{(r-1)(n+s)} \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n). \quad (4)$$

Infatti ponendo nella (2') $t = g_a^{r-1}$:

$$\theta(g_a^{r-1} g_1, g_a^{r-1} g_2, \dots g_a^{r-1} g_s, g_a^{r-1} f_1, \dots g_a^{r-1} f_n) = \\ = g_a^{(r-1)(n+s-1)} [g_a^{r-1} \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, \dots g_{j-1}, g_a^{r-1}, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)]$$

ed essendo:

$$\sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, \dots g_{j-1}, g_a^{r-1}, g_{j-1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = (r-1) g_a^{r-2} \sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta(g_1, \dots g_{j-1}, g_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = (r-1) g_a^{r-1} \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n)$$

con una semplice sostituzione si ha senz'altro la (4).

Quindi questa è generale e dice che moltiplicando la funzione di θ per la potenza $(r-1)^a$ di una qualunque funzione del primo gruppo, il determinante θ si riproduce a meno del fattore $r g_a^{r-1(n+s)}$.

---

(1) Si può arrivare a questa formula anche mediante la (2''). Basta porre in luogo di $g_1 \dots g_s$ rispettivamente $g_a^2 g_1, \dots g_a^2 g_s$ e in luogo di t la g_a^2. Allora si ha

$$\theta(g_a^2 g_1, \dots g_a^2 g_s, g_a^2 f_1, \dots g_a^2 f_n) = g_a^{2n} \theta(g_a^2 g_1, \dots g_a^2 g_s, f_1 \dots f_n).$$

Ma per la (3) in cui in luogo di t si metta g_a^2

$$\theta(g_a^2 g_1, \dots g_a^2 g_s ; f_1, \dots f_n) = g_a^{2(s-1)} [g_a^2 \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots g_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \, \theta \, g_1, \dots g_{j-1}, g_a^2, g_{j+1}, \dots g_s, f_1 \dots f_n)]$$

e da questo momento in poi la dimostrazione procede come prima.

Per $s=1$ poi chiamando f l'unica funzione g in questo caso si ha la formola (4) dell'Occhipinti.

6. Resta da considerarsi l'altro caso enunciato in cui la funzione moltiplicatrice sia una qualunque delle f e la chiamiamo f_a. Allora la (2') darà:

$$\theta(f_a g_1, \dots f_a g_s, f_a f_1, \dots f_a f_n) = f_a^{n-s-1}[f_a \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \dots g_{j-1}, f_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)].$$

Ma:

$$\theta(g_1 \dots g_{j-1}, f_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} \\ . & . & . & . \\ 0 & \frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{j-1}}{\partial x_{n+s-1}} \\ 0 & \frac{\partial f_a}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_a}{\partial x_{n+s-1}} \\ 0 & \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_{j+1}}{\partial x_{n+s-1}} \\ . & . & . & . \\ 0 & \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} \\ f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} \\ . & . & . & . \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix}$$

sviluppato per la prima colonna dà:

$$(-1)^{s+a-1} f_a \frac{\partial(g_1, \dots g_{j-1}, f_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_{a-1}, f_{a+1}, \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots\dots\dots\dots x_{n+s-1})} = \\ = (-1)^{s+a-1}(-1)^{s-j+a-1} f_a \frac{\partial(g_1, \dots g_{j-1}, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots\dots x_{n+s-1})}.$$

Sicchè:

$$\theta(g_1, \dots g_{j-1}, f_a, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = (-1)^j f_a \frac{\partial(g_1, \dots g_{j-1}, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots\dots x_{n+s-1})}$$

e chiamando I_j quest'ultimo determinante Iacobiano si ha:

$$\theta(f_a g_1, f_a g_2, \dots f_a g_s, f_a f_1, \dots f_a f_n) = \\ f_a^{n-s}[\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + \sum_{j=1}^{s}(-1)^j g_j I_j].$$

Quando si pigli come funzione moltiplicatrice la f_n^2 la (2') da:

$$\theta(f_n^2 g_1, \dots f_n^2 g_s, f_n^2 f_1, \dots f_n^2 f_n) = f_n^{2(n+s-1)}[f_n^2 \theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + \\ + \sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \dots g_{j-1}, f_n^2, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n)]$$

e poichè:

$$\sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, g_2, \dots g_{j-1}, f_n^2, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \\ = 2 f_n \sum_{j=1}^{s} g_j \theta(g_1, \dots g_{j-1}, f_n, g_{j+1}, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = 2 f_n^2 \sum_{j=1}^{s} (-1)^j g_j \mathrm{I}_j$$

sostituendo si ha:

$$\theta(f_n^2 g_1, \dots f_n^2 g_s, f_n^2 f_1, \dots f_n^2 f_n) = f_n^{2(n+s)}[\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + 2 \sum_{j=1}^{s} (-1)^j g_j \mathrm{I}_j].$$

In generale si ha seguendo il medesimo procedimento:

$$\theta(f_n^r g_1, \dots f_n^r g_s, f_n^r f_1, \dots f_n^r f_n) = \\ = f_n^{r(n+s)}[\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) + r \sum_{j=1}^{s} (-1)^j g_j \mathrm{I}_j]. \quad (5)$$

Questa formula dice che moltiplicando tutte le funzioni di θ per una potenza di una funzione qualunque del secondo gruppo, il determinante che ne risulta si esprime per mezzo di un determinante θ e di tanti Iacobiani di funzioni semplici, quante sono le funzioni del primo gruppo. Per $s = 1$ cioè supposta una sola funzione g_1 che indicheremo con f si dovrà trovare la (5) dell'articolo citato. Si ha:

$$\mathrm{D}(f_n^r f, f_n^r f_1, \dots f_n^r f_n) = f_n^{r(n+1)}[\mathrm{D}(f, f_1, \dots f_n) - r f \mathrm{I}] \text{ (1)}$$

ove

$$\mathrm{I} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}.$$

7. Dalla formula (2'') si deducono alcune relazioni fra Iacobiani. Si scriva:

$$\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = \theta\left(g_1, \dots g_s, f_1 \cdot 1, f_1 \frac{f_2}{f_1}, \dots f_1 \frac{f_n}{f_1}\right) = \\ = \theta\left(g_1, \dots g_s, f_2 \frac{f_1}{f_2}, f_2 \cdot 1, f_2 \frac{f_3}{f_2}, \dots f_2 \frac{f_n}{f_2}\right) = \dots \\ \dots = \theta\left(g_1, \dots g_s, f_n \frac{f_1}{f_n}, \dots f_n \frac{f_{n-1}}{f_n}, f_n \cdot 1\right)$$

(1) Nella formula (5) dell'Occhipinti compare il segno + dinanzi all'Iacobiano I: gli è perchè l'Autore nello sviluppo del determinante in principio della pagina 84 ha considerato il valore assoluto dell'unico termine al quale esso si riduce, ed è detto valore assoluto che in sostanza importa considerare per mostrare che il determinante D delle funzioni composte lo si esprime mediante il D delle funzioni semplici e l'Iacobiano delle $f_1 \dots f_n$. Sviluppando il determinante in questione e tenendo conto anche del segno, si trova:

$$\mathrm{D}(f_1, f_1, \dots f_n) = (-1)^i \frac{\partial(f_1, f_1, \dots f_{i-1}, f_{i+1}, f_n)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots x_n)} = \\ = (-1)^i (-1)^{i-1} f_1 \frac{\partial(f_1, f_2, \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)} = -f_1 \frac{\partial(f_1 \dots f_n)}{\partial(x_1 \dots x_n)}$$

cioè il segno − invece del segno +.

e da questa mediante la (2')

$$\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = f_1^n \, \theta\left(g_1, \dots g_s, 1, \frac{f_2}{f_1} \dots \frac{f_n}{f_1}\right) =$$

$$= f_2^n \, \theta\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_2}, 1, \frac{f_3}{f_2} \dots \frac{f_n}{f_2}\right) = \dots$$

$$\dots = f_n^n \, \theta\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_n}, \dots \frac{f_{n-1}}{f_n}, 1\right).$$

Ma:

$$\theta\left(g_1, \dots g_s, 1, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots\dots\dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{n-s-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots\dots\dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} \\ 1 & 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \frac{f_2}{f_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n+s-1}}\left(\frac{f_2}{f_1}\right) \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ \frac{f_n}{f_1} & \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{f_n}{f_1}\right) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n+s-1}}\left(\frac{f_n}{f_1}\right) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^s \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_2}{f_1} \dots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots x_{n+s-1})}$$

e si trova analogamente

$$\theta\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_2}, 1, \frac{f_3}{f_2}, \dots \frac{f_n}{f_2}\right) = (-1)^{s+1} \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_2}, \frac{f_3}{f_2}, \dots \frac{f_n}{f_2}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots\dots x_{n+s-1})}$$

ed in generale:

$$\theta\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_n}, \dots \frac{f_{n-1}}{f_n}, 1\right) = (-1)^{s-n-1} \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_n}, \dots \frac{f_{n-1}}{f_n}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots x_{n+s-1})}$$

sicchè:

$$\theta(g_1, \dots g_s, f_1, \dots f_n) = f_1^n (-1)^s \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_2}{f_1}, \dots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots x_{n+s-1})} =$$

$$= f_2^n (-1)^{s+1} \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_2}, \frac{f_3}{f_2}, \dots \frac{f_n}{f_2}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots\dots x_{n+s-1})} = \dots$$

$$\dots = f_n^n (-1)^{s+n-1} \frac{\partial\left(g_1, \dots g_s, \frac{f_1}{f_n}, \dots \frac{f_{n-1}}{f_n}\right)}{\partial(x_1 \dots\dots\dots x_{n+s-1})}. \quad (6)$$

Altre proprietà tra le funzioni θ si deducono dalle (3).

Scriviamo:

$$\theta(g_1,\ldots g_s, f_1,\ldots f_n) = \theta\left(g_1 . 1, g_1\frac{g_2}{g_1},\ldots g_1\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right) =$$
$$= \theta\left(g_2\frac{g_1}{g_2}, g_2 . 1, g_2\frac{g_3}{g_2},\ldots g_2\frac{g_s}{g_2}, f_1,\ldots f_n\right) = \ldots = \theta\left(g_s\frac{g_1}{g_s},\ldots g_s . 1, f_1,\ldots f_n\right)$$

ora facendo uso della (3) si ricava:

$$\theta\left(g_1 . 1, g_1\frac{g_2}{g_1},\ldots g_1\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right) = g_1^{s-1}\left[g_1\theta\left(1,\frac{g_2}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1} f_1,\ldots f_n\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{s}\frac{g_j}{g_1}\theta\left(\frac{g_1}{g_1},\ldots,\frac{g_{j-1}}{g_1}, g_1, \frac{g_{j+1}}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right)\right]$$

ma al secondo membro si ha:

$$\theta\left(1,\frac{g_2}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right) = 0$$

e i termini del sommatorio sono tutti nulli, tranne quello che si ha per il valore $j = 1$ nel qual caso $\frac{g_1}{g_1},\ldots\frac{g_{j-1}}{g_1}$ non compaiono e resta

$$\theta\left(g_1,\frac{g_2}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right)$$

quindi:

$$\theta\left(g_1 . 1, g_1\frac{g_2}{g_1},\ldots, g_1\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right) =$$
$$= g_1^{s-1}\theta\left(g_1,\frac{g_2}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right)$$

e colle analoghe si ha sostituendo nella primitiva:

$$\theta(g_1,\ldots g_s, f_1,\ldots f_z) = g_1^{s-1}\theta\left(g_1,\frac{g_2}{g_1},\ldots\frac{g_s}{g_1}, f_1,\ldots f_n\right) =$$
$$= g_2^{s-1}\theta\left(\frac{g_1}{g_2}, g_2,\frac{g_3}{g_2},\ldots\frac{g_s}{g_2}, f_1,\ldots f_n\right) = \ldots$$
$$\ldots = g_s^{s-1}\theta\left(\frac{g_1}{g_s},\frac{g_2}{g_s},\ldots\frac{g_{s-1}}{g_s}, g_s, f_1\ldots f_n\right). \quad (7)$$

8. Mediante le relazioni (6) possiamo dimostrare il

Teorema. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè tra* $n + s$ *funzioni* $g_1, g_2,\ldots g_s, f_1,\ldots f_n$ *delle variabili* $x_1, x_2\ldots x_{n+s-1}$ *sussista una relazione della forma*

$$\Sigma\, g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2}\ldots g_s^{\alpha_s}\cdot\Psi_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s} = 0 \quad (8)$$

ove il sommatorio è da ritenersi esteso a tutti i termini per cui

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s \leqq m \text{ (}^1\text{)}$$

e le Ψ sono tutte funzioni omogenee dello stesso grado h nelle $f_1, f_2,\ldots f_n$ è che sia identicamente nullo il determinante θ.

(1) Le α sono numeri interi positivi o nulli, m è intero positivo e diverso da zero.

Infatti se sussiste la (8) e supponiamo $f_1 \neq 0$ dividendo per $f_1{}^h$ le Ψ si riducono a funzioni non omogenee di grado h nelle $\frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}$ e la (8) diventerà una relazione fra le $g_1, \ldots g_s, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}$ sicchè si avrà:

$$\frac{\partial\left(g_1 \ldots g_s, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial\left(x_1 \ldots \ldots x_{n+s-1}\right)} = 0$$

e quindi dalla (6) si ricava

$$\theta\left(g_1 \ldots g_s, f_1, \ldots f_n\right) = 0.$$

Viceversa se è $\theta = 0$ allora si ha di conseguenza

$$\frac{\partial\left(g_1 \ldots g_s, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}\right)}{\partial\left(x_1 \ldots \ldots x_{n+s-1}\right)} = 0$$

e quindi si ha una relazione fra le

$$g_1, g_2, \ldots g_s, \frac{f_2}{f_1}, \ldots \frac{f_n}{f_1}$$

e questa mediante moltiplicazione per la più alta potenza di f_1 si riduce subito alla forma (8) onde il teorema è dimostrato.

9. Come caso particolare di questo si ha un noto teorema di Casorati.

Si suppongano mancanti le funzioni g ($s = 0$) e quindi si abbiano solamente le n funzioni $f_1 f_2 \ldots f_n$ delle $n-1$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$; in questa ipotesi la (8) si ridurrà ad una funzione omogenea $\psi = 0$ delle f e il determinante θ degenererà in un determinante k.

Allora si ha che se il determinante k di n funzioni tra $n-1$ variabili è identicamente nullo, fra le funzioni esiste una relazione omogenea e reciprocamente. [1]

Quando poi ci fosse un'unica funzione g ($s = 1$) che chiameremo f e quindi in tutto $n+1$ funzioni $f f_1 f_2 \ldots f_n$ della $x_1 x_2 \ldots x_n$ allora la (8) diverrà della forma:

$$f^m \psi_1 + f^{m-1} \psi_2 + \ldots + f \psi_m + \psi_{m+1} = 0 \qquad (8')$$

ove le ψ sono omogenee dello stesso grado nelle $f_1, f_2, \ldots f_n$. In questo caso il determinante θ si riduce a un $D(f, f_1, \ldots f_n)$ e si ha il teorema dato dall'Occhipinti per cui l'annullarsi di D è condizione necessaria e sufficiente perchè fra le $f, f_1, \ldots f_n$ sussista la relazione (8').

10. Un'elegante dimostrazione diretta della proposizione data al n. 8 è la seguente la quale si può ricavare con alcune modificazioni ed estensioni da quella del Casorati per il suo teorema analogo (Istituto Lombardo, 1874, *Sui determinanti di funzioni*).

---

[1] Questo Teorema analogo al più importante Teorema sui determinanti funzionali, è conosciuto col nome di Teorema di Casorati, sebbene, prima di lui, se ne fosse servito implicitamente il Clebsch (Crelle, vol. LXIX, p. 356, 1868).

Tra le funzioni g ed f si eliminino tutte le x e sia $P(g, f) = 0$ l'equazione risultante.

Allora si avranno le equazioni:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial g_s}\frac{\partial g_s}{\partial x_1} + \frac{\partial P}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial P}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial g_s}\frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} + \frac{\partial P}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{d x_{n+s-1}} + \ldots + \frac{\partial P}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{d x_{n+s-1}} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Si supponga ora P omogenea di grado h nelle $f_1 f_2 \ldots f_n$ sarà quindi verificata anche la relazione di Eulero

$$\frac{\partial P}{\partial f_1} f_1 + \frac{\partial P}{\partial f_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial f_n} f_n = hP = 0. \tag{10}$$

Dopo di ciò si considerino le (9) e (10) come $n+s$ equazioni lineari omogenee tra le $n+s$ derivate parziali della P rispetto alle g e alle f: si deduce che per la loro coesistenza dovrà esser nullo il determinante dei coefficienti e questo è appunto il $\theta(g_1, \ldots g_s, f_1, \ldots f_n)$.

Per la dimostrazione del teorema reciproco si consideri una funzione Γ delle g e delle f e si ponga

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial f_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \Gamma}{\partial f_n} f_n = \Gamma_\gamma. \tag{11}$$

Risolvendo il sistema di questa equazione e delle seguenti:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Gamma}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Gamma}{\partial g_s}\frac{\partial g_s}{\partial x_1} + \frac{\partial \Gamma}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Gamma}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial \Gamma}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} + \ldots + \frac{\partial \Gamma}{\partial g_s}\frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} + \frac{\partial \Gamma}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} + \ldots \\ &\qquad \ldots + \frac{\partial \Gamma}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{n+s-1}} \end{aligned}$$

relativamente alle derivate parziali della Γ si ottiene:

$$i = 1.2\ldots s \quad \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & f_1 & \ldots & f_n \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_i}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial g_i}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial x_{n-s-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial g_i} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \ldots & \Gamma_\gamma & \ldots & 0 & f_1 & \ldots & f_n \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial g_s}{\partial x_{n-s-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix}$$

$$j=1.2\ldots n \begin{vmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots 0 & f_1 \ldots\ldots\ldots f_j \ldots\ldots\ldots f_n \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_j}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial f_j}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial f_j} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots 0 & f_1 \ldots\ldots\ldots \Gamma_\gamma \ldots\ldots\ldots f_n \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \cdots\cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial g_s}{\partial x_{n+s-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial \Gamma}{\partial x_{n+s-1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_{n+s-1}} \end{vmatrix}.$$

Si faccia ora $\Gamma=(g,f)$ allora per le (9) saranno nulle le derivate parziali di Γ rispetto alle x e le precedenti daranno in valore assoluto:

$$\theta(g_1,\ldots g_s, f_1,\ldots f_n)\frac{\partial P}{\partial g_i} = P_\varrho \frac{\partial(g_1\ldots g_{i-1}\, g_{i+1}\ldots g_s, f_1,\ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n+s-1})}$$

$$\theta(g_1,\ldots g_s, f_1,\ldots f_n)\frac{\partial P}{\partial f_j} = P_\varrho \frac{\partial(g_1\ldots g_s, f_1\ldots f_{j-1}, f_{j+1},\ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n+s-1})}$$

ove sia

$$\frac{\partial P}{\partial f_1} f_1 + \ldots \frac{\partial P}{\partial f_n} f_n = P_\varrho. \tag{12}$$

Se ora si suppone $\theta=0$ ma non zero tutti i minori di ordine massimo (¹) risulta che dovrà esser $P_\varrho=0$ cioè P_ϱ uguale al prodotto di P per un fattore α sicchè:

$$\frac{\partial P}{\partial f_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial P}{\partial f_n} f_n = \alpha P = 0$$

e dal computo dei gradi delle espressioni di questa uguaglianza risulta che α è costante e quindi P è omogenea nelle $f_1 f_2 \ldots f_n$ ed il teorema è dimostrato.

(¹) Questa ipotesi non costituisce limitazione.
Infatti si ha:

$$\frac{\partial(g_1\ldots g_s, f_1\ldots f_{j-1}, f_{j+1},\ldots f_n)}{\partial(x_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{n+s-1})} = \frac{\partial\theta}{\partial f_j}$$

e se queste derivate fossero nulle, θ non conterrebbe nessuna funzione f il che è assurdo.

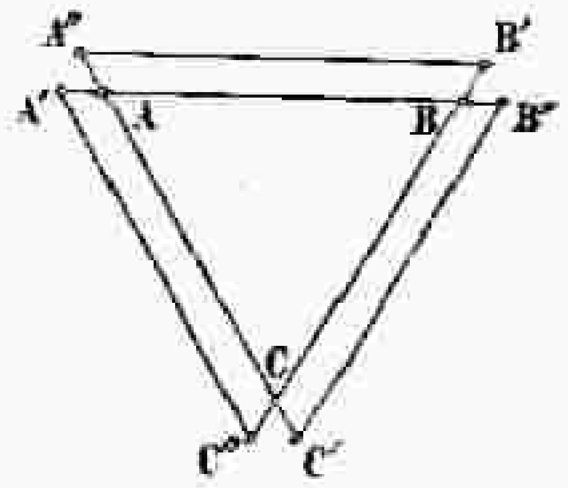
GIUSEPPE USAI.

DUE METODI GENERALI PER LA SOMMA DELLE POTENZE SIMILI
dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica.

(Continuazione — Vedi fascicoli I, II, III e V)

---

57. Un triangolo delle differenze è per se stesso inestendibile; invero, se si considera lo schema:



(102)

è chiaro che il triangolo delle differenze ABC è chiuso da ogni lato e non influisce su alcun termine esterno ad esso, sebbene possa concorrere a costruirlo; un qualsivoglia termine del lato A''B', immediatamente parallelo ad AB, è necessario e sufficiente per determinare tutti e solamente i termini di esso lato; un qualsivoglia termine del lato C'B'', immediatamente parallelo a CB, è necessario e sufficiente per determinare tutti e solamente i termini di esso lato; ed un qualsivoglia termine del lato A'C'', immediatamente parallelo ad AC, è necessario e sufficiente per determinare tutti e solamente i termini di esso lato.

Ed è pur chiaro che le formule (96) e (97) si possono scrivere

$$C + \ldots + B = B'' - C',$$

e le formule (98) e (99)

$$A + \ldots + B = B' - A'',$$

e le formule (100) e (101), rispettivamente,

$$C - \ldots \pm A = C'' \pm A'$$
$$A - \ldots \pm C = A' \pm C''.$$

58. Ciascuno dei due termini B'' e C' è vertice, omologo ad A, d'un triangolo d'ordine u e si può esprimere in funzione del lato opposto, parallelo a BC; e così pure ciascuno dei due termini B' e A'', e A' e C'', in modo analogo.

Perciò, se $u = 0, 1, 2, \ldots$ *separatamente*, si ha

$$\Delta^{\nu}(x+z) + \ldots + \Delta^{\nu+z}(x) = \sum_{0}^{u} {}_i (-1)^i \binom{u}{i} \Delta^{\nu+i}(x+z+1+u-i) -$$
$$- \sum_{0}^{u} {}_i (-1)^i \binom{u}{i} \Delta^{\nu+z+1+i}(x+u-i); \qquad (103)$$

$$\Delta^y(x)+\ldots+\Delta^y(x+z)=\sum_0^u{}_i(-1)^i\binom{u}{i}\Delta^{y-1-u}(x+z+1+u-i)-$$
$$-\sum_0^u{}_i(-1)^i\binom{u}{i}\Delta^{y-1-u}(x+u-i); \qquad (104)$$
$$\Delta^y(x)-\ldots+(-1)^z\Delta^{y+z}(x)=\sum_0^u{}_i\binom{u}{i}\Delta^{y-i}(x-1-u)+$$
$$+(-1)^z\sum_0^u{}_i\binom{u}{i}\Delta^{y-z-1-i}(x-1-u); \qquad (105)$$

e si vede bene che se $\Delta^{y-z}(x)$ è costante, i secondi sommatori delle formule (103) e (105) si annullano, e si ricavano le relazioni fra due qualsivogliano diagonali parallele d'una progressione aritmetica.

59. Si è veduto che col segno d'operazione σ un triangolo elementare ha la forma data dalla (76):

$$\begin{array}{c}\sigma_0,\, 2\sigma_0+\sigma_1\\ \sigma_0+\sigma_1,\end{array}$$

e si scelse come definizione l'espressione diretta; ma per un qualsivoglia triangolo è più semplice scegliere come definizione lo spezzamento in addendi dei termini della diagonale discendente.

Sia il triangolo d'ordine z delle differenze del termine $\Delta^y(x)$ e si ponga, per definizione,

$$\Delta^{y+i}(x)=\binom{z}{i}.\sigma_0+\ldots+\binom{z-i}{0}.\sigma_i, \qquad (106)$$

come si vede dallo schema:

$$\begin{array}{ccccc}\binom{z}{0}.\sigma_0,\ldots, & \binom{z}{i}.\sigma_0,\ldots, & \binom{z}{z}.\sigma_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ & \binom{z-i}{0}.\sigma_i,\ldots, & \binom{z-i}{z-i}.\sigma_i \\ & & \ldots \\ & & \binom{0}{0}.\sigma_z,\end{array} \qquad (107)$$

da cui, sommando verticalmente, si ha

$$\Delta^y(x),\ldots,\Delta^{y+i}(x)\ldots,\Delta^{y+z}(x).$$

È chiaro che

$$\sigma_0=\Delta^y(x), \qquad (108)$$
$$\sigma_0+\ldots+\sigma_z=\Delta^{y+z}(x), \qquad (109)$$

e sommando orizzontalmente

$$2^z.\sigma_0+\ldots+2^0.\sigma_z=\Delta^y(x)+\ldots+\Delta^{y+z}(x), \qquad (110)$$

e sommando orizzontalmente e alternatamente

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\Delta^y(x)-\ldots+(-1)^z\Delta^{y+z}(x) \qquad (111)\\ &=\Delta^y(x-1)+(-1)^z\Delta^{y+z+1}(x-1),\end{aligned}$$

per la (101).

Così definito, il simbolo σ_i dipende da *quattro* indici; tuttavia quando non è necessario distinguere, si conserva soltanto l'ultimo, ponendo

$$\sigma_i \equiv \sigma_{x,y,z,i}.$$

60. In funzione delle σ si esprime $\Delta^y(x+i)$ con la formula

$$\Delta^y(x+i) = \binom{z+i}{z}.\sigma_0 + \ldots + \binom{z}{z}.\sigma_i. \tag{112}$$

Infatti, dalla seconda delle (82) si ha

$$\Delta^y(x+i) = \binom{i}{0}\Delta^y(x) + \ldots + \binom{i}{i}\Delta^{y-i}(x),$$

e sostituendo nel secondo membro i valori che si ricavano dalla (106)

$$\begin{aligned}\Delta^y(x+i) = \binom{i}{0}&\left[\binom{z}{0}.\sigma_0\right] + \\ +\binom{i}{1}&\left[\binom{z}{1}.\sigma_0 + \binom{z-1}{0}.\sigma_1\right] + \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +\binom{i}{i}&\left[\binom{z}{i}.\sigma_0 + \binom{z-1}{i-1}.\sigma_1 + \ldots + \binom{z-i}{0}.\sigma_i\right],\end{aligned}$$

e sommando verticalmente

$$\begin{aligned}\Delta^y(x+i) = \sigma_0.&\left[\binom{i}{0}\binom{z}{0} + \binom{i}{1}\binom{z}{1} + \ldots\ldots + \binom{i}{i}\binom{z}{i}\right] + \\ +\sigma_1.&\left[\binom{i}{1}\binom{z-1}{0} + \ldots + \binom{i}{i}\binom{z-1}{i-1}\right] + \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +\sigma_i.&\left[\binom{i}{i}\binom{z-i}{0}\right].\end{aligned}$$

ed è chiaro che i coefficienti delle σ si possono considerare tutti di $i+1$ termini, perchè si annullano i coefficienti binomiali, e quindi

$$\begin{aligned}\Delta^y(x+i) = \sigma_0.&\left[\binom{i}{0}\binom{z}{0} + \ldots\ldots + \binom{i}{i}\binom{z}{i}\right] + \\ +&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ +\sigma_i.&\left[\binom{i}{0}\binom{z-i}{-i} + \ldots + \binom{i}{i}\binom{z-i}{0}\right],\end{aligned}$$

ed invertendo i secondi fattori

$$\Delta^y(x+i) = \sum_0^i{}_h\, \sigma_h \left[\binom{i}{0}\binom{z-h}{i-h} + \ldots + \binom{i}{i}\binom{z-h}{-h}\right],$$

e per la stessa seconda delle (82)

$$\begin{aligned}\Delta^y(x+i) &= \sum_0^i{}_h \binom{z+i-h}{i-h}.\sigma_h \\ &= \sum_0^i{}_h \binom{z+i-h}{z}.\sigma_h,\end{aligned}$$

che è precisamente la (112).

Da essa si ricava

$$\Delta^y(x)=\binom{z}{z}.\sigma_0$$

$$\Delta^y(x+1)=\binom{z+1}{z}.\sigma_0+\binom{z}{z}.\sigma_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^y(x+z)=\binom{2z}{z}.\sigma_0+\binom{2z-1}{z}.\sigma_1+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_z,$$

e sommando verticalmente

$$\Delta^y(x)+\ldots+\Delta^y(x+z)=\binom{2z+1}{z+1}.\sigma_0+\ldots+\binom{z+1}{z+1}.\sigma_z, \qquad (113)$$

che esprime la somma di $z+1$ termini consecutivi della successione delle differenze d'ordine y di qualsivoglia successione (x), in funzione delle σ della diagonale discendente del primo termine.

61. In funzione delle σ si esprime $\Delta^{y+1}(x+z-i)$ con la formula

$$\Delta^{y+1}(x+z-i)=\binom{2z-i}{z-i}.\sigma_0+\ldots+\binom{z-i}{z-i}.\sigma_z. \qquad (114)$$

Infatti, dalla seconda delle (82) si ha

$$\Delta^{y+i}(x+z-i)=\binom{z-i}{0}.\Delta^{y+i}(x)+\ldots+\binom{z-i}{z-i}.\Delta^{y+z}(x),$$

e si possono sostituire nel secondo membro i valori che si ricavano dalla (106); questa si può scrivere

$$\Delta^{y+i}(x)=\binom{z}{z-i}.\sigma_0+\ldots+\binom{z-i}{z-i}.\sigma_i,$$

e siccome i coefficienti di $\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_z$ si annullano, così

$$\Delta^{y+i}(x)=\binom{z}{z-i}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{z-i}.\sigma_z;$$

quindi

$$\begin{aligned}\Delta^{y+1}(x+z-i)=&\binom{z-i}{0}.\left[\binom{z}{z-i}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{z-i}.\sigma_z\right]+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+\binom{z-i}{z-i}.\left[\binom{z}{0}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{0}.\sigma_z\right],\end{aligned}$$

e sommando verticalmente

$$\begin{aligned}\Delta^{y+1}(x+z-i)=&\,\sigma_0.\left[\binom{z-i}{0}\binom{z}{z-i}+\ldots+\binom{z-i}{z-i}\binom{z}{0}\right]+\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\&+\sigma_z.\left[\binom{z-i}{0}\binom{0}{z-i}+\ldots+\binom{z-i}{z-i}\binom{0}{0}\right],\end{aligned}$$

e per la stessa seconda delle (82)

$$\Delta^{y+i}(x+z-i)=\binom{2z-i}{z-i}.\sigma_0+\ldots+\binom{z-i}{z-i}.\sigma_z,$$

che è precisamente la (114).

Da essa si ricava

$$\Delta^{y}(x+z)=\binom{2z}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta^{y+z}(x)=\binom{z}{0}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{0}.\sigma_z,$$

e sommando verticalmente

$$\Delta^{y-z}(x)+\ldots+\Delta^{y}(x+z)=\binom{2z+1}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z+1}{z}.\sigma_z. \quad (115)$$

62. Con le formule (106), (112) e (114) si possono esprimere in funzione delle σ tutt'i termini dei tre lati del triangolo d'ordine z delle differenze del termine $\Delta^{y}(x)$, ed è facile costruire tutti gli altri termini applicando le (80); ma per rendere più chiara e sensibile la costituzione dei singoli termini, giova considerare i tre estremi triangoli elementari:

$$\left.\begin{array}{c}\binom{z}{z}.\sigma_0;\quad \binom{z+1}{z}.\sigma_0+\binom{z}{z}.\sigma_1\\ \binom{z}{z-1}.\sigma_0+\binom{z-1}{z-1}.\sigma_1;\end{array}\right\} \quad (116^a)$$

$$\left.\begin{array}{c}\binom{2z-1}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}\sigma_{z-1};\quad \binom{2z}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_z\\ \binom{2z-1}{z-1}.\sigma_0+\ldots+\binom{z-1}{z-1}.\sigma_z;\end{array}\right\} \quad (116^b)$$

$$\left.\begin{array}{c}\binom{z}{1}.\sigma_0+\ldots+\binom{1}{1}.\sigma_{z-1};\quad \binom{z+1}{1}.\sigma_0+\ldots+\binom{1}{1}.\sigma_z\\ \binom{z}{0}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{0}.\sigma_z;\end{array}\right\} \quad (116^c)$$

disposti secondo il triangolo ABC dello schema (102); e siccome i coefficienti binomiali mancanti sono nulli, così si possono considerare *tutt'i termini* come polinomi di $z+1$ termini, e si ha lo schema:

$$\left.\begin{array}{c}\binom{z}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{z}.\sigma_z;\ldots;\binom{2z}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_z;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \binom{z}{0}.\sigma_0+\ldots+\binom{0}{0}.\sigma_z;\end{array}\right. \quad (117)$$

e da questo schema risultano chiaramente le formule (108) a (111) e la (113) e la (115). E non è difficile scrivere le espressioni che si ottengono, applicando a tal triangolo le formule (82), o le (84), ... (95);

come non è difficile vedere che non si possono applicare le formule (96), . . . , (101), nè le (103), . . . , (105), perchè contengono termini esterni al triangolo e quindi inesprimibili con le *stesse* σ: e ciò conferma ancora una volta che un triangolo delle differenze è un tutto a sè, chiuso e limitato dai lati, e per sè stesso inestendibile.

63. Ponendo come prima $r+s=z$, si può dare una doppia forma simmetrica alle formule (112), (106) e (114), e si ha

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{y}(x+r) &= \binom{z+r}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_r \\
\Delta^{y+r}(x) &= \binom{z}{r}.\sigma_0+\ldots\ldots+\binom{s}{0}.\sigma_r \\
\Delta^{y+r}(x+s) &= \binom{z+s}{s}.\sigma_0+\ldots+\binom{s}{s}.\sigma_z
\end{aligned}\right\} \qquad (118)$$

e

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^{y}(x+s) &= \binom{z+s}{z}.\sigma_0+\ldots+\binom{z}{z}.\sigma_s \\
\Delta^{y+s}(x) &= \binom{z}{s}.\sigma_0+\ldots\ldots+\binom{r}{0}.\sigma_s \\
\Delta^{y+s}(x+r) &= \binom{z+r}{r}.\sigma_0+\ldots+\binom{r}{r}.\sigma_z
\end{aligned}\right\} \qquad (119)$$

64. In funzione dei termini della diagonale discendente si esprime σ_i con la formula

$$\sigma_i=+(-1)^i\binom{z}{z-i}.\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^0\binom{z-i}{z-i}\Delta^{y+i}(x). \qquad (120)$$

Infatti, essa è vera per $i=0$, perchè coincide con la (108), ed è vera per $i=1$, perchè l'espressione che si ricava

$$\sigma_1=-\binom{z}{z-1}\Delta^y(x)+\Delta^{y+1}(x)$$

coincide con l'espressione di σ_1 che si ottiene dalla (106) per $i=1$, sostituendo il valore di σ_0; si consenta quindi che la (120) sia vera per $0, 1, \ldots, i-1$, e che perciò si abbia

$$\sigma_{i-1}=\sum_0^{i-1}{}_h(-1)^{i-1-h}\binom{z-h}{z-i+1}.\Delta^{y+h}(x),$$

ed i valori che si ricavano da questa, ponendo successivamente invece di $i-1$

$$i-1, \ldots, h, \ldots, 0,$$

si sostituiscano nell'espressione di σ_i che si ottiene dalla (106), cioè in

$$\sigma_i=\Delta^{y+i}(x)-\left[\binom{z-i+1}{1}.\sigma_{i-1}+\ldots+\binom{z-h}{i-h}.\sigma_h+\ldots+\binom{z}{i}.\sigma_0\right],$$

e sarà facile vedere che il coefficiente di $\Delta^{y+h}(x)$ è

$$\binom{z-h}{z-h}\binom{z-h}{i-h}-\ldots+(-1)^{i-1-h}\binom{z-h}{z-i+1}\binom{z-i+1}{1},$$

cioè, per la relazione (C),

$$\binom{z-h}{z-i}\cdot\left[\binom{i-h}{i-h}-\ldots+(-1)^{i-1-h}\binom{i-h}{1}\right],$$

cioè

$$\binom{z-h}{z-i}\cdot[-(-1)^{i-h}],$$

e quindi

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \Delta^{y+i}(x)-\sum_{0}^{i-1}{}_h\binom{z-h}{z-i}\cdot\Delta^{y-h}(x)\cdot[-(-1)^{i-h}]\\ &= \Delta^{y+i}(x)+\sum_{0}^{i-1}{}_h(-1)^{i-h}\binom{z-h}{z-i}\cdot\Delta^{y-h}(x)\\ &= \sum_{0}^{i}{}_h(-1)^{i-h}\binom{z-h}{z-i}\cdot\Delta^{y+h}(x),\end{aligned}$$

che è precisamente la (120).

Si può osservare che σ_i è indipendente dai valori

$$\Delta^{y+i+1}(x),\ldots,\Delta^{y-z}(x),$$

e perciò anche dai valori

$$\Delta^{y}(x+i+1),\ldots,\Delta^{y}(x+z),$$

come si vedrà chiaramente dalla prossima (121).

65. In funzione dei termini della successione $\Delta^y(x)$ si esprime σ_i con la formula

$$\sigma_i=+(-1)^i\binom{z+1}{i}\cdot\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^0\binom{z+1}{0}\cdot\Delta^y(x+i). \quad (121)$$

Infatti, la prima delle (82) si può scrivere, invertendo,

$$\Delta^{y+z}(x)=+(-1)^z\binom{z}{0}\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^0\binom{z}{z}\Delta^y(x+z),$$

ed i valori che si ricavano da questa per

$$z=0,\ldots,h,\ldots,i,$$

si sostituiscano nella (120) che si può scrivere

$$\begin{aligned}\sigma_i=+(-1)^i\binom{z}{z-i}\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^{i-h}\binom{z-h}{z-i}\Delta^{y+h}(x)+\ldots\\ \ldots+(-1)^0\binom{z-i}{z-i}\Delta^{y+i}(x);\end{aligned}$$

e si avrà

$$\begin{aligned}\sigma_i=&+(-1)^i\binom{z}{z-i}\left[+(-1)^0\binom{0}{0}\Delta^y(x)\right]+\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +\\ &+(-1)^{i-h}\binom{z-h}{z-i}\left[+(-1)^h\binom{h}{0}\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^0\binom{h}{h}\Delta^y(x+h)\right]+\\ &+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ +\\ &+(-1)^0\binom{z-i}{z-i}\left[+(-1)^i\binom{i}{0}\Delta^y(x)+\ldots+(-1)^{i-h}\binom{i}{h}\Delta^y(x+h)+\ldots\right.\\ &\left.\ldots+(-1)^0\binom{i}{i}\Delta^y(x+i)\right],\end{aligned}$$

e sommando verticalmente

$$\sigma_i = \sum_0^i{}_h (-1)^{i-h}\,\Delta^y(x+h)\,.\left[\binom{h}{h}\binom{z-h}{z-i} + \ldots + \binom{i}{h}\binom{z-i}{z-i}\right],$$

e siccome se nella (68) si sostituisce h ad x, $i-h$ ad y e $z-i$ a z, si ha per somma $\binom{z+1}{i-h}$, così

$$\sigma_i = \sum_0^i{}_h (-1)^{i-h}\binom{z+1}{i-h}\Delta^y(x+h),$$

che è precisamente la (121).

66. Dalla (120) si ottiene

$$\sigma_0 = \binom{z}{z}\Delta^y(x)$$

$$-\sigma_1 = \binom{z}{z-1}\Delta^y(x) - \binom{z-1}{z-1}\Delta^{y+1}(x)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^z\sigma_z = \binom{z}{0}\Delta^y(x) - \binom{z-1}{0}\Delta^{y+1}(x) + \ldots + (-1)^z\binom{0}{0}\Delta^{y+z}(x),$$

e sommando

$$\sigma_0 - \ldots + (-1)^z\sigma_z = 2^z\,.\,\Delta^y(x) - \ldots + (-1)^z\,.\,2^0\,.\,\Delta^{y+z}(x), \quad (122)$$

che fa riscontro alla (110).

E se si pone $r+s=z$, le formule (120) e (121) si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \binom{s}{s}\Delta^{y+r}(x) - \ldots + (-1)^r\binom{z}{s}\Delta^y(x)\\ &= \binom{z+1}{0}\Delta^y(x+r) - \ldots + (-1)^r\binom{z+1}{r}\Delta^y(x)\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

e

$$\left.\begin{aligned}\sigma_s &= \binom{r}{r}\Delta^{y+s}(x) - \ldots + (-1)^s\binom{z}{r}\Delta^y(x)\\ &= \binom{z+1}{0}\Delta^y(x+s) - \ldots + (-1)^s\binom{z+1}{s}\Delta^y(x)\end{aligned}\right\} \quad (124)$$

cosicchè si conserva anche per le σ la simmetria in r ed s.

67. Dalla (114) e dallo schema (117) risulta che tutt'i termini della diagonale ascendente contengono tutte le σ, perchè nessun coefficiente è nullo. Si può conchiudere da ciò che l'espressione di σ_i in funzione dei termini di essa, conterrà *tutti* questi termini e quindi, in generale, non avrà una forma semplice.

Si può però dare tale espressione sotto forma di determinante. Il sistema delle $z+1$ equazioni di primo grado nelle σ:

$$\binom{2z}{z}\,.\,\sigma_0 + \ldots + \binom{z}{z}\,.\,\sigma_z = \Delta^y(x+z)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{z}{0}\,.\,\sigma_0 + \ldots + \binom{0}{0}\,.\,\sigma_z = \Delta^{y+z}(x),$$

ha per determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} \binom{2z}{z}, \ldots, \binom{z}{z} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \binom{z}{0}, \ldots, \binom{0}{0} \end{vmatrix}$$

il cui valore, sviluppando secondo la prima verticale, è

$$\binom{2z}{z} \cdot \binom{z}{0} - \ldots + (-1)^z \binom{z}{0} \cdot \binom{z}{z} = 1 ,$$

per la terza delle (82); per conseguenza

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} \binom{2z}{z}, \ldots, \binom{2z-i+1}{z}, \Delta^y(x+z), \binom{2z-i-1}{z}, \ldots, \binom{z}{z} \\ \cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \\ \binom{z}{0}, \ldots, \binom{z-i+1}{0}, \Delta^{y-z}(x), \binom{z-i-1}{0}, \ldots, \binom{0}{0} \end{vmatrix} \tag{125}$$

. . . .

VITO MELFI MOLÈ.

(Continua)

SULLA DETERMINAZIONE DEI PUNTI DI BROCARD

per mezzo del punto di Lemoine

NOTA. — Esistono nel piano di un triangolo ABC due punti Ω, Ω' pei quali ha luogo l'uguaglianza d'angoli $\Omega AC = \Omega CB = \Omega BA = \Omega' BC = \Omega' CA = \Omega AB = \omega$. Questi punti sono i punti di BROCARD. In ogni triangolo le simmetriche delle mediane rispetto alle bisettrici interne (simediane) sono concorrenti in un punto. Questo punto è il punto di LEMOINE del triangolo.

SCHLÖMILCH enunciò la proprietà *Le rette che uniscono i punti medi dei lati di un triangolo ai punti medi delle altezze corrispondenti concorrono nel punto di Lemoine* K. GREBE indicò la seguente costruzione del punto K. Sui lati di ABC tutti internamente (o tutti esternamente) costruiamo i quadrati e sieno A_1B_1, B_2C_2, C_3A_3 i loro lati paralleli rispettivamente ad AB, BC, CA. Le coppie di rette A_1B_1, C_3A_3; A_1B_1, B_2C_2; B_2C_2, C_3A_3 s'incontrano rispett. in M_1, M_2, M_3. Le rette AM_1, BM_2, CM_3 concorrono in K. Queste proprietà esposte ci saranno utili pel seguito.

***

Io ho generalizzato i punti di Brocard (v. *Rivista di Mat., Fis., e Scien. nat.*, vol. XXIII, 1911. Pisa) ed ho dedotto per considerazioni particolari la costruzione che, modificata, trovasi a pag. 173 della *Geometria del triangolo* del prof. Alasia, nel quale libro, a pag. 173, 174, 175, sono esposte altre forme costruttive relative ai punti in discorso e dove il lettore può riscontrare notizie storiche ad essi relativi.

Qui esporremo un'altra costruzione dei punti di Brocard che mi sembra degna di nota, non tanto pel problema in se stesso, ma per le varie considerazioni cui è suscettiva.

A tal fine sieno α, β, γ le distanze che il punto di Lemoine K ha dai lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, rispettivamente. È risaputo che

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{b}{\beta} = \frac{\gamma}{c} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Ora dobbiamo osservare che si ha (v. Alasia, *loc. cit.*, pag. 165)

$$\cot g\, \omega = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}.$$

Ne dedurremo

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{2\alpha}{a} = \frac{2\beta}{b} = \frac{2\gamma}{c}$$

ed anche

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{2(\alpha + \beta + \gamma)}{a + b + c} = \frac{\nu}{p},$$

dove, evidentemente, ν è la somma della distanza che K ha da a, b, c e p è il semiperimetro del triangolo. Perciò la

Proposizione I. — *Costruendo un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale ad uno dei lati del triangolo fondamentale* ABC *e l'altro cateto uguale al doppio del segmento, che nel triangolo fondamentale rappresenta la distanza dal punto di Lemoine da quel lato, l'angolo di questo triangolo rettangolo che è adiacente a tale lato del fondamentale rappresenta l'angolo di Brocard* ω *di quest'ultimo*. E più generalmente, *costruendo un triangolo rettangolo che ha un cateto uguale al semiperimetro di* ABC *e l'altro cateto uguale alla somma delle distanze che il punto di Lemoine* K *di* ABC *ha dai lati di quest'ultimo, l'angolo di* *questo triangolo rettangolo che è adiacente al lato che rappresenta il semiperimetro è l'angolo di Brocard* ω *di* ABC.

La determinazione d'ω implica dunque la preventiva determinazione del punto di Lemoine K, e però la complessità costruttiva riferentesi alla determinazione d'ω è subordinata ai procedimenti costruttivi che si riferiscono alla determinazione di K. Ma non staremo qui certamente a dilungarci in siffatte inutili disquisizioni e ammettendo addirittura che il punto K sia stato, per esempio, determinato per la proposizione di Schlömilch, proponiamoci di determinare indi, la coppia Ω, Ω' di Brocard.

Risultano chiare, per tale scopo, le seguenti dichiarazioni.

Il triangolo che cimentiamo alla costruzione sia ABC. Costruiamo, tutti internamente, i tre rettangoli che, avendo per basi i suoi lati, abbiano gli altri lati uguali rispettivamente al doppio della distanza del punto di Lemoine corrispondente a quel lato.

I tre rettangoli sieno $BCD_1D'_1$, $CAD_2D'_2$, ABD_3D_3 dove è, come si è detto, $CD_1 = BD'_1 = 2\alpha$, $AD_2 = CD'_2 = 2\beta$, $BD_3 = AD'_3 = 2\gamma$. Ora si ha che le rette AD_3, BD_1, CD_2 sono concorrenti in un punto e le rette AD'_3, BD'_3, CD'_1 sono concorrenti in un altro punto. Sono questi i due punti Ω, Ω' del triangolo.

PROPOSIZIONE II. — *È caratteristica per l'individuazione dei punti di Brocard per mezzo del punto di Lemoine, la costruzione di Grebe per la preventiva determinazione del punto di Lemoine.*

Se teniamo presenti i procedimenti costruttivi or ora esposti e se teniamo anche presente la costruzione di Grebe citata nella *nota*, ci accorgeremo della convenienza pratica e teorica della costruzione di Grebe pel problema riferito e vedremo una certa analogia di procedimento.

PROPOSIZIONE III. — *È possibile determinare graficamente le distanze che il punto di Lemoine ha dai tre lati di un triangolo, cui appartiene; senza che in questa determinazione sia necessario conoscere la posizione del punto stesso.*

E infatti determiniamo i punti di Brocard Ω, Ω' del triangolo cui ci riferiamo, con uno dei procedimenti, che non richiedono affatto la preventiva conoscenza del punto di Lemoine K, e che si leggono, ad esempio, in (ALASIA, *loc. cit.*, pag. 173 e seg.). Ciò fatto, la costruzione sopra esposta, riguardante la determinazione di Ω, Ω' per mezzo di K, ci mette molto chiaramente in vista quanto si contiene nell'ultima proposizione.

V. G. CAVALLARO.

SULLE CATACAUSTICHE DELLA PARABOLA PER RAGGI PARALLELI

(Estratto di una lettera del sig. I. WODETZKY al prof. G. LORIA).

Budapest, 25 Aprile 1911.

. . . .

L'argomento sul quale oso domandare la vostra sapiente opinione, concerne le catacaustiche della parabola per raggi paralleli sotto un angolo arbitrario d'incidenza.

In una ricerca astronomica ho avuto bisogno di queste curve. Dopo aver cercato invano, anche in HEATH, io trovai le indicazioni più preziose e complete nel vostro trattato *Spezielle algebraische und trascendente ebene Kurven.* In esso ho trovato questo enunciato: " se i raggi " sono perpendicolari all'asse della parabola, la catacaustica un " ortogonide, specie di spirale sinusoide, di cui l'equazione è

$$54\,py^2 = x\,(2x - 9\,p)^2 \text{ "}.$$

Ma io cercavo le catacaustiche per un angolo d'incidenza qualunque. Disgraziatamente l'equazioni da voi date per la ricerca generale di queste curve sebbene eccellenti per stabilire certe proprietà generali, si prestano male in questo caso speciale; l'eliminazione delle due coordinate di un punto della curva primitiva fra tre equazioni è stata impossibile. Perciò imaginai un altro procedimento. Eccolo:

Sia:

α l'angolo della tangente alla curva data con l'asse delle x;
β l'angolo d'incidenza dei raggi paralleli con l'asse delle x;
x_1, y_1 le coordinate di un punto della curva data;
x, y le coordinate di un punto del raggio riflesso.

L'equazione del raggio riflesso è evidentemente

$$y - y_1 = \operatorname{tg}(2\,\alpha - \beta)\,(x - x_1). \tag{1}$$

La curva data sia la parabola $y_1^2 = 2\,px_1$. Si avrà

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{p}{y_1} = \frac{y_1}{2\,x_1};$$

$$y_1 = p \operatorname{cotg}\alpha\,; \qquad x_1 = \frac{p}{2}\operatorname{cotg}^2\alpha\,; \tag{2}$$

donde (per le (1), (2))

$$y - p \cot g\,\alpha = \frac{2 \cot g\,\alpha - \operatorname{tg}\beta \cot g^2\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\cot g^2\alpha - 1 + 2 \operatorname{tg}\beta \cot g\,\alpha}\left(x - \frac{p}{2}\cot g^2\alpha\right). \quad (3)$$

Poniamo $\cot g\,\alpha = z$; $\operatorname{tg}\beta = \omega$; si avrà per la (3)

$$\omega z^4 + (3\omega - \omega\xi - \eta) z^2 + 2(-1 + \xi - \omega\eta) z + (\omega\xi + \eta) = 0, \quad (4)$$

dove abbiamo posto $\xi = \frac{2x}{p}$, $\eta = \frac{2y}{p}$.

È evidente che la variazione del parametro z ci fornisce tutte le tangenti della parabola e per conseguenza anche tutti i raggi riflessi, di cui noi troveremo l'inviluppo eliminando z dalle (4) e dalla sua derivata parziale rispetto a z, cioè

$$2\omega z^3 + (3\omega - \omega\xi - \eta) z + (-1 + \xi - \omega\eta) = 0. \quad (5)$$

Poniamo

$$\begin{aligned} A &\equiv \omega\xi + \eta - 3\omega; \\ B &\equiv -\xi + \omega\eta + 1; \\ C &\equiv \omega\xi + \eta; \end{aligned}$$

moltiplicando la (4) per (-2), la (5) per $(+z)$, e sommando, si avrà

$$Az^2 + 3Bz = 2C,$$

da cui

$$z = \frac{-3B \pm \sqrt{9B^2 + 8AC}}{2A};$$

sostituendo nella (5), dopo alcune trasformazioni ovvie si ha l'equazione cercata

$$54\omega B^2 = (C - 3\omega)(C^2 - 42\omega C + 9\omega^2) \pm (C + 3\omega)^3. \quad (6)$$

Rimpiazzando B, C, ξ, η, ω coi loro valori rispettivi, si ha dunque dalla (6) secondo il segno $\pm$ davanti l'ultimo termine

1° $$(2x - p)^2 + 4y^2 = 0;$$

cioè

$$x = \frac{p}{2}, \qquad y = 0.$$

Il fuoco della parabola è dunque sempre un punto isolato

2° $$\frac{27p}{2}\operatorname{sen}\beta\left(x\cos\beta - y\operatorname{sen}\beta - \frac{p}{2}\cos\beta\right)^2 =$$
$$= (x\operatorname{sen}\beta + y\cos\beta)\left(x\operatorname{sen}\beta + y\cos\beta - \frac{9p}{2}\operatorname{sen}\beta\right)^2,$$

equazione delle catacaustiche cercate.

Effettuiamo la trasformazione

$$x \equiv \xi_1 \operatorname{sen} \beta + \eta_1 \cos \beta$$
$$y \equiv \xi_1 \cos \beta - \eta_1 \cos \beta,$$

cioè giriamo l'asse delle x di un angolo $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, e l'asse delle y di un angolo $(2\pi - \beta)$ (contato a partire dall'asse delle x); si avrà

$$3 \cdot \frac{9p}{2} \operatorname{sen} \beta \left(\eta_1 - \frac{p}{2} \cos \beta\right)^2 = \xi_1 \left(\xi_1 - \frac{9p}{2} \operatorname{sen} \beta\right)^2. \tag{7}$$

Trasportando l'origine sull'asse del segmento $\frac{p}{2} \cos \beta$ (proiezione del semiparametro sull'asse delle η_1) si ha

$$\eta_1 = \eta + \frac{p}{2}; \qquad \xi_1 = \xi,$$

e l'equazione diventa

$$3 \cdot \frac{9p}{2} \cdot \operatorname{sen} \beta \cdot \eta^2 = \xi \left(\xi - \frac{9p}{2} \operatorname{sen} \beta\right)^2, \tag{8}$$

od anche, posto $\frac{9p}{2} \operatorname{sen} \beta = a$,

$$3 a \eta^2 = \xi (\xi - a)^2, \tag{9}$$

ossia

$$\frac{\eta}{a} = \pm \left(\frac{\xi}{a} - 1\right) \sqrt{\frac{1}{3} \frac{\xi}{a}}. \tag{10}$$

La formula data a p. 405 della 1ª edizione del vostro bel trattato può evidentemente scriversi sotto la forma (8)

$$3 \cdot \frac{9p}{2} y^2 = x \left(x - \frac{9p}{2}\right)^2.$$

Il nostro risultato dimostra che tutte le catacaustiche della parabola rientrano sotto la stessa formula. Basta porre $\left(\frac{9p}{2} \operatorname{sen} \beta\right)$ al posto di $\left(\frac{9p}{2}\right)$. Dunque:

Tutte le catacaustiche della parabola sono delle ortogonoidi omotetiche; le loro dimensioni variano proporzionalmente a sen β. *L'asse delle ordinate passa per il vertice della parabola e forma l'angolo* β *col prolungamento dei raggi incidenti; l'asse delle ascisse passa per il fuoco della parabola che è sempre un punto isolato per la catacaustica.*

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 776, 782 E 785

776. *Il luogo dei punti tali che la somma delle seste potenze delle distanze dai quattro vertici di un quadrato sia costante, si compone di tre circoli, due dei quali sono sempre imaginari. Trovare la condizione perchè il terzo circolo sia reale.*

E. - N. Barisien.

Risoluzione del prof. A. L. Csada di Máramarossziget (Ungheria).

Sieno (a, o), $(o, -a)$, $(-a, o)$, (o, a) i quattro vertici del quadrato dato ed (x, y) un punto qualunque. Indicando con d_1, d_2, d_3, d_4 le distanze rispettive di questo punto dei vertici del quadrato, si ha:

$$d_1{}^2 = (x - a)^2 + y^2,$$
$$d_2{}^2 = x^2 + (y + a)^2,$$
$$d_3{}^2 = (x + a)^2 + y^2,$$
$$d_4{}^2 = x^2 + (y - a)^2,$$

e quindi

$$\Sigma d^6 = 4\,(x^2 + y^2 + a^2)\,[(x^2 + y^2 + a^2)^2 + 6a^2\,(x^2 + y^2)] = C.$$

L'equazione del luogo dei punti dati è (indicando $x^2 + y^2$ con z),

$$f(z) = z^3 + 9a^2z^2 + 9a^4z + a^6 - \frac{c}{4} = 0. \qquad (1)$$

Essendo z_1, z_2, z_3 le tre radici di quest'equazione, il luogo domandato si compone di tre circoli

$$x^2 + y^2 - z_1 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - z_2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - z_3 = 0.$$

L'equazione (1) può avere soltanto una radice positiva, poichè

$$f'(z) = 3z^2 + 18a^2z + 9a^4$$

è sempre positiva per z positiva.

Si ha

$$- z_1 z_2 z_3 = a^6 - \frac{c}{4}.$$

Supposto che z_1, z_2 siano complesse coniugate o negative, il prodotto z_1z_2 è positivo, e perciò la terza radice z_3 sarà positiva quando

$$\frac{c}{4} \geqq a^6,$$

ossia (posto $l = a\sqrt{2}$),

$$c \geqq \frac{l^6}{2}.$$

782. *I semidiametri* α, β *dell'ellisse di Steiner di un triangolo (ellisse circoscritto al triangolo ed avente per centro il baricentro di questo) verificano le condizioni*

$$\alpha\beta = \frac{4S}{3\sqrt{3}}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

dove a, b, c, S *sono le misure dei lati e dell'area del triangolo.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Cominciamo coll'osservare che una mediana $CC' = m$, relativa al lato $AB = a$, e la parallela condotta dal baricentro O a tale lato AB, costituiscono una coppia di diametri coniugati dell'ellisse di Steiner del triangolo ABC.

Riferendo perciò la sua equazione a siffatta coppia, essa sarà della forma:

$$\frac{x^2}{\alpha'^2} + \frac{y^2}{\beta'^2} = 1.$$

La determinazione di α' e β' non offre alcuna difficoltà:

$$\alpha' = \frac{2m}{3}, \qquad \beta' = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Si ha dunque:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 = \frac{4m^2}{9} + \frac{a^2}{3} = \frac{2}{9}\left(2m^2 + \frac{3}{2}a^2\right).$$

È noto intanto che $2m^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$; dunque:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{2}{9}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Sia ora φ uno degli angoli che la mediana CC' fa col lato a. Si ha:

$$S = \frac{am}{2}\,\text{sen}\,\varphi, \qquad \text{d'onde:} \qquad \text{sen}\,\varphi = \frac{2S}{am}.$$

Pertanto:

$$\alpha\beta = \alpha'\beta'\,\text{sen}\,\varphi = \frac{4S}{3\sqrt{3}}.$$

785. *Per tutti i triangoli d'area massima inscritti nell'ellisse di assi* 2a *e* 2b, *l'area del triangolo pedale del punto di Lemoine è costante ed eguale a*

$$\frac{3a^3b^3\sqrt{3}}{4(a^2+b^2)^2}.$$

E.-N. Barisien.

1ª Risoluzione del prof. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Sia O il centro dell'ellisse. Si descriva il cerchio di centro O e di raggio a. Ad ogni punto M del cerchio si faccia corrispondere sull'ellisse il punto

$$x = a\cos\varphi$$
$$y = b\,\text{sen}\,\varphi,$$

7

essendo φ l'angolo di cui s'inclina OM sull'asse maggiore. È noto che così il cerchio e l'ellisse si corrisponderanno in un'*affinità*, e pertanto il rapporto fra l'area di un triangolo inscritto nel cerchio e quella del corrispondente, inscritto nell'ellisse, è costante.

Si deduce, perciò, osservando che fra i triangoli inscritti in un cerchio gli equilateri hanno area massima, che a questi corrisponderanno i triangoli di area massima inscritti nell'ellisse e che le mediane di un siffatto triangolo passano per O.

Si ha quindi (quistione 782)

$$S = \frac{3\,ab\sqrt{3}}{4}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{9}{2}(a^2 + b^2),$$

indicando con a_1, a_2, a_3, S le misure dei lati e dell'area del triangolo d'area massima.

È noto intanto che le distanze del punto di Lemoine di un triangolo dai lati a_1, a_2, a_3 dello stesso, sono rispettivamente

$$\frac{a_1 S}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad \frac{a_2 S}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \qquad \frac{a_3 S}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

indicando con S l'area del triangolo, e che, indicando con S' l'area del triangolo pedale rispetto a tale punto, si ha quindi:

$$S' = \frac{12\,S^3}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}.$$

Nel nostro caso, perciò, avremo:

$$S' = \frac{3\,a^3 b^3 \sqrt{3}}{4\,(a^2 + b^2)^2}.$$

2ª Risoluzione del prof. Gatti, R. S. Comm. di Feltre.

Sia O il centro dell'ellisse. Si descriva il cerchio di centro O e di raggio a. Ad ogni punto M del cerchio si faccia corrispondere sull'ellisse il punto

$$x = a\cos\varphi$$
$$y = b\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

essendo φ l'angolo di cui s'inclina OM sull'asse maggiore. È noto che così il cerchio e l'ellisse si corrisponderanno in un'*affinità*; e pertanto il rapporto fra l'area di un triangolo inscritto nel cerchio e quello del corrispondente inscritto nell'ellisse è costante.

Se ne conclude, osservando che fra i triangoli inscritti in un cerchio gli equilateri hanno area massima, che a questi corrisponderanno i triangoli di area massima inscritti nell'ellisse.

Osservando ora che la *costante d'affinità* è $\frac{b}{a}$, si deduce subito che l'area dei triangoli d'area massima inscritti nell'ellisse è data da

$$S = \frac{3\,ab\sqrt{3}}{4}.$$

Siano ora α, β, γ i valori di φ relativi ai vertici di un siffatto triangolo. Avremo:

$$\beta = \alpha + 120^0, \qquad \gamma = \alpha + 240^0;$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\beta - \alpha) = \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\gamma - \beta) = \operatorname{sen}^3 (\gamma - \alpha) = \tfrac{3}{4}\\
&\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = (\operatorname{sen} \alpha \cos 60^0 + \cos \alpha \operatorname{sen} 60^0)^2 = \tfrac{1}{4} (\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha)^2\\
&\cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) = (\cos \alpha \cos 60^0 + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 60^0)^2 = \tfrac{1}{4} (\cos \alpha + \sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha)^2\\
&\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) = \operatorname{sen}^2 \alpha\\
&\cos^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) = \cos^2 \alpha\\
&\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \gamma) = (\operatorname{sen} \alpha \cos 60^0 - \cos \alpha \operatorname{sen} 60^0)^2 = \tfrac{1}{4} (\operatorname{sen} \alpha - \sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha)^2\\
&\cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \gamma) = (\cos \alpha \cos 60^0 - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} 60^0) = \tfrac{1}{4} (\cos \alpha - \sqrt{3} \operatorname{sen} \alpha)^2;
\end{aligned}$$

d'onde

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) + \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\gamma + \alpha) =\\
&\qquad = \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) + \cos^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) + \cos^2 \tfrac{1}{2} (\gamma + \alpha) = \tfrac{3}{2}.
\end{aligned}$$

È noto intanto che le distanze del punto di Lemoine di un triangolo dai lati a_1, a_2, a_3 dello stesso, sono rispettivamente.

$$\frac{a_1 \mathrm{S}}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}, \qquad \frac{a_2 \mathrm{S}}{a_1{}^2 + a_1{}^2 + a_3{}^2}, \qquad \frac{a_3 \mathrm{S}}{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2},$$

indicando con S l'area del triangolo, e che, indicando con S' l'area del triangolo pedale rispetto a tale punto, si ha quindi:

$$\mathrm{S}' = \frac{12\, \mathrm{S}^3}{(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)^2}.$$

Riferendoci dunque ad un triangolo d'area massima, inscritto nell'ellisse avremo:

$$\mathrm{S}' = \frac{3^4}{4} \cdot \frac{3\, a^3 b^3 \sqrt{3}}{4\,(a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_2{}^2)^2}.$$

È facile ora calcolare

$$a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
a_1{}^2 &= 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) (\alpha^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta) + b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta))\\
a_2{}^2 &= 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\gamma - \beta) (a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma) + b^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma))\\
a_3{}^2 &= 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\gamma - \alpha) (a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\gamma - \alpha) + b^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} (\beta - \gamma));
\end{aligned}$$

d'onde:

$$\alpha_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2 = \frac{3^2}{2} (a^2 + b^2).$$

Pertanto:

$$\mathrm{S}' = \frac{3\, a^3 b^3 \sqrt{3}}{4\,(a^2 + b^2)^2}.$$

QUISTIONI PROPOSTE

786. Sia ABC uno dei triangoli di area massima inscritti in una ellisse. Le congiungenti dei punti A, B, C con uno dei fuochi F incontrano i lati opposti in tre punti A′, B′, C′. Dimostrare che

1° le lunghezze AA′, BB′, CC′ sono eguali ai $\frac{3}{4}$ dell'asse maggiore

2° il luogo dei punti A′, B′, C′ è una quartica unicursale e binodale, formata di due ovali eguali.

L'area di uno di questi ovali è eguale alla differenza fra l'area della ellisse e i $\frac{9}{8}$ del suo circolo principale.

787. Il luogo dei centri delle ellissi di data area tangenti ad una stessa retta in un punto ed aventi in esso lo stesso circolo osculatore, è una retta.

788. Da un punto M si conducano le normali MA, MB, MC, ad una parabola e siano A_1, B_1, C_1 i vertici del triangolo formato dalle tangenti in A, B, C.

1°. Le rette AA_1, BB_1, CC_1 concorrono in un punto Q.

2°. Se M percorre una retta, Q descrive un'iperbole equilatera.

3°. In generale se M percorre una curva di ordine n, Q percorre una curva di ordine $2n$.

789. Da un punto qualunque M situato sopra una parabola P si conducano le MA, MB normali in A, B alla parabola stessa. E sia r l'asse radicale dei circoli circoscritti al triangolo MAB e al triangolo formato dalle tangenti alla parabola in M, A, B. Trovare l'inviluppo di r.

790. Le parabole che sono bitangenti ad una parabola data ed hanno il fuoco sulla parabola stessa, sono anche tangenti alle direttrici di questa.

E.-N. Barisien.

791. Essendo A, B le proiezioni ortogonali di un punto P sopra due rette x, y concorrenti in O, trovare l'inviluppo della retta AB, quando P descrive un circolo di centro O.

792. Se P è un punto del circolo c circoscritto ad un triangolo ABC, le proiezioni ortogonali di P sui tre lati del triangolo appartengono ad una retta r.

Trovare l'inviluppo di r quando P percorre il circolo c.

D. Gambioli.

BIBLIOGRAFIA

Elementi di Geometria ad uso dei Ginnasi e Licei ed Istituti Tecnici (1° biennio) del Prof. Giuseppe Veronese, Senatore del Regno, trattati con la collaborazione del Prof. Paolo Gazzaniga. (4ª edizione), 1909. Fratelli Drucker, librai-editori, Padova.

Volendo esaminare la struttura di questi Elementi in linea generale, sorvolerò sulle semplificazioni di indole didattica che questa edizione presenta, in confronto della precedente, sia nella prima che nella seconda parte. L'Autore, nell'intento di dare un indirizzo moderno all'insegnamento geometrico elementare, ha informato il suo metodo principalmente ai seguenti criteri:

a) Le proposizioni che scaturiscono da un opportuno sistema di postulati, devono essere logicamente bene determinate anche se si fa astrazione dal significato geometrico degli enti cui esse si riferiscono;

b) La definizione dell'eguaglianza (e della similitudine) viene fissata una volta per tutte le figure introducendo il concetto della corrispondenza; concetto, che nella sua più ampia generalità, costituisce il fondamento di tutta la matematica superiore.

In tal guisa il prof. Veronese è riuscito a rendere, dirò così, più stretto il contatto tra l'insegnamento geometrico elementare ed il superiore, ed a conciliare il rigore scientifico con la semplicità e quindi con le esigenze della scuola.

L'esperienza di parecchi anni d'insegnamento impartito nell'Istituto Tecnico di Venezia, mi consente di affermare, in pieno accordo col giudizio di autorevoli Colleghi, che il metodo del Veronese è ben lungi dal presentare maggiori difficoltà in confronto di altri metodi; e che anzi esso si presta molto efficacemente a destare e sviluppare l'iniziativa individuale. Esso abitua l'alunno, sia pure di media intelligenza, a quello sguardo d'insieme che tanto contribuisce a fissare durevolmente le idee fondamentali, ponendo di tratto in tratto in evidenza il nesso esistente fra le varie parti della geometria. Così, ad esempio, la corrispondenza di similitudine si presenta come un'estensione naturale della corrispondenza di eguaglianza: un principio analogo a quello di dualità in geometria proiettiva, mette in luce le proposizioni comuni al piano, alla stella, alla superficie sferica, e pone i giovani in grado di passare dalle une alle altre senza difficoltà. E tutto ciò con notevole risparmio di tempo per l'insegnante e non lieve economia di sforzo intellettuale pei discenti.

Molto opportunamente poi l'Autore ha pubblicato, in forma piana ed accessibile, le " Nozioni di geometria intuitiva " (Fratelli Drucker, librai-editori, Padova), destinate alla scuola media inferiore, le quali costituiscono un'ottima preparazione allo studio della geometria razionale secondo il metodo suaccennato.

C. A. Dell'Agnola.

Darboux. — *Leçons sur les sistèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.* Deuxième édition, augmentée. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

Il sig. Gastone Darboux presentando quest'opera all'Accademia delle Scienze il 10 ottobre 1910, si espresse in questi termini.

La nuova edizione della mia opera sulle coordinate curvilinee è compiuta in un volume. Io ho tenuto, terminando questo trattato, a mantenere gl'impegni che avevo preso verso il pubblico dei geometri. Le aggiunte per le quali quest'edizione si distingue dalla precedente sono numerose. Le indicherò rapidamente.

Nella geometria infinitesimale, come in altre teorie, s'incontrano frequentemente dei sistemi di equazioni a derivate parziali del prim'ordine, o riducibili al prim'ordine, che possono esser risolute rispetto a tutte le derivate che vi figurano delle funzioni incognite. Questi sistemi si riducono a tre tipi che io considero successivamente. Impiegando, in luogo delle serie di Cauchy, i metodi d'approssizione di cui il sig. Emilio Picard ha fatto un uso così brillante, stabilisco tre teoremi generali che fissano, per ciascuno dei tre tipi, le condizioni d'esistenza ed il grado di generalità delle soluzioni. Le applicazioni tanto analitiche quanto geometriche di questi teoremi sono numerose. La principale applicazione geometrica concerne la ricerca di due sistemi di coordinate curvilinee che siano parallele, cioè siano tali che nei punti di eguali coordinate curvilinee i piani tangenti alle superficie coordinate corrispondenti siano parallele e, per conseguenza, anche le tangenti alle curve coordinate. Si dimostra che allora i sistemi sono a linee coniugate, cioè che le curve coordinate debbono formare una rete su ciascuna superficie coordinata. Si determina il grado di generalità di tali sistemi e se ne sviluppa un gran numero di proprietà geometriche.

La considerazione dei sistemi coniugati riconduce ai sistemi tripli ortogonali, che ne sono casi particolari. Io torno sul metodo generale di ricerca di questi sistemi e dimostro un teorema che può avere delle applicazioni in fisica matematica, stabilendo che un sistema triplo-ortogonale è determinato quando si danno arbitrariamente le tre superficie che deve comprendere e che passano per un punto determinato dello spazio. Studio poi i teoremi di Combescure e di Ribaucour ed espongo il metodo di ricorrenza che costituisce il più potente mezzo di ricerca oggi conosciuto dei sistemi tripli ortogonali.

Dopo gli antichi metodi di ricerca, ne faccio conoscere uno nuovo che si fonda sull'impiego degl'imaginari e che fa dipendere la soluzione compiuta del problema da un'equazione a derivate parziali del terz'ordine che contiene tre soli termini.

L'opera termina collo studio approfondito dei sistemi tripli che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni di Combescure, e che, dall'anno 1866 in cui furono scoperti dall'autore, sono stati oggetto di ricerche d'un sì gran numero di geometri. La considerazione di certi sistemi incontrati in un caso particolare dal sig. Guichard permette di estendere notevolmente i bei resultati che, su quest'argomento, la scienza deve al sig. Egarov.

Le quattro note aggiunte al testo trattano vari argomenti. Nella prima si dimostra come l'applicazione del teorema d'Abel sugl'integrali algebrici permette d'ottenere una successione illimitata di sistemi ortogonali algebrici. Le due successive sono consacrate a quella bella superficie, troppo negletta dai geometri, che è la ciclide di Dupin, e ai sistemi tripli che comprendono una famiglia composta di tali superficie o, più generalmente, di superficie a linee di curvatura piane nei due sistemi. Infine l'ultima nota contiene dei teoremi nuovi sopra una classe particolare di deformazioni dello spazio di cui la teoria si ricollega direttamente a quelle che sono state sviluppate nel testo.

K.

Il giorno 15 maggio si spegneva, nella sua nativa Bologna

ROBERTO BONOLA.

Vi si era recato sui primi di marzo, mentre da Pavia si trasferiva a Roma per occuparvi la cattedra di Matematica in quell'Istituto Superiore di Magistero femminile, da Lui allora per concorso ottenuta. Lo fermava, invece, per sempre a Bologna l'estremo attacco del male che da tempo ne minava la fibra! Destino singolarmente crudele, e solo in questo benigno, che non gli vietò il supremo conforto di spegnersi, fra le braccia dei suoi cari, fra il compianto degli amici e dei maestri, nella sua natale città prediletta.

A Bologna, dove nacque nel novembre 1874, Egli percorse gli studi secondari e superiori, e vi rimase per qualche anno assistente di Geometria projettiva e descrittiva all'Università; fu in seguito professore alla R. Scuola Normale di Petralia Sottana (1900-901), donde, dopo un anno, passò a quella di Pavia. Qui fu, insieme, valoroso coadiutore alla cattedra di Calcolo infinitesimale dell'Università, vi ottenne la libera docenza in Geometria proiettiva e descrittiva (1908) e fu anche per qualche anno (1904-07) incaricato del corso di Matematica per gli studenti di Chimica e Scienze Naturali. La vittoria nel concorso per l'Istituto Superiore di Roma fu l'ultimo successo della sua bella carriera d'insegnante.

Dalla Scuola di Bologna e sopratutto dalla consuetudine col suo Maestro, l'ENRIQUES, trasse il **Bonola** l'amore per quell'indirizzo storico-critico degli studi matematici, che rispondeva d'altronde alle particolari attitudini del suo ingegno, ed al quale si riattacca la maggior parte dei suoi lavori scientifici. Gli studi moderni sui fondamenti della geometria, sopratutto per quanto riflette la storia, la critica e la interpretazione delle Geometrie non Euclidee, ebbero in Lui un valoroso e costante e diligente cultore. L'articolo da Lui pubblicato nel 1900 nei " Collectanea „ di F. ENRIQUES, (1) e la larghissima *Bibliografia* sui fondamenti della Geometria, (2) che pubblicò in quell'anno e nei successivi, furono accompagnati e seguiti da numerosi lavori suoi in quell'indirizzo, non vasti generalmente, ma recanti tutti qualche nuovo contributo, spesso geniale, di storia, di metodo, di costruzione. (3)

---

(1) *Sulla teoria delle parallele e sulle Geometrie non Euclidee.* — Art. VI delle *Questioni riguardanti la Geometria Elementare* per cura di F. ENRIQUES, Bologna, Zanichelli, 1900. L'articolo fu poi dal **Bonola** rifatto per la edizione tedesca dell'opera.

(2) *Bibliografia sui fondamenti della Geometria in relazione alla Geometria non Euclidea*, " Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche „. Torino, Clausen, 1899-901 - (3 note). Le opere vi sono classificate secondo i tre indirizzi: *elementare, metrico, projettivo*; vi sono elencate anche le pubblicazioni nello indirizzo *vettoriale* o di *Grassmann*, quelle d'indole *storico-filosofica*, quelle infine che si riferiscono ad applicazioni nel campo della Meccanica o della Fisica Matematica. Un'altra opera bibliografica del **Bonola** è l'*Index operum ad geometriam absolutam spectantium* pubblicata nel 1902 sotto gli auspici dell'Università di Klausenburg per le onoranze centenarie a G. BOLYAI. È l'elenco delle opere riferentisi alla Geometria assoluta pubblicata dal 1837 al 1902; la raccolta segue l'ordine cronologico ed è divisa in due parti: *scritti matematici* e *scritti storico-filosofici*.

(3) I lavori del **Bonola** che appartengono a questo indirizzo sono, cronologicamente, salvo omissione, i seguenti:

1. *Sulla introduzione degli enti impropri in Geometria Projettiva*, " Giorn. di Matem. „ Napoli, 1900;

L'estesa coltura così acquistata, e le ricerche da Lui stesso condotte in quel campo, Gli permisero di apprestare nel 1906, in un'opera di più largo disegno, una compiuta esposizione storico-critica dello svolgimento della Geometria non Euclidea, (1) con larghi accenni alle teorie che con essa hanno rapporti più stretti, quali la Statica non Euclidea, e il parallelismo di *Clifford* nello spazio di *Riemann*; opera questa ben nota agli studiosi, e che ebbe l'onore di più d'una traduzione straniera.

Escono invece dal campo degli studi Suoi prediletti qualche lavoro d'indole elementare a Lui suggerito dalla pratica assidua dell'insegnamento, ed un gruppo di Note sui sistemi lineari di omografie, (2) che furon parte della Dissertazione da Lui presentata per il conseguimento della libera docenza in Geometria projettiva e descrittiva.

Nè posso chiudere questo rapido cenno intorno all'opera Sua, senza dire dell'iniziativa a Lui dovuta per la pubblicazione di una *Enciclopedia di Matematiche elementari*, che la *Mathesis* ha intrapreso: all'idea di quest'opera, che Egli sostenne prima nella Sezione Lombarda, poi nel Congresso di *Mathesis* in Padova, (3) Egli era singolarmente affezionato e si proponeva di portarvi largo tributo di operosità: poche settimane prima della Sua morte, Egli mi scriveva serenamente del suo proposito di mettersi presto al lavoro! L'Opera rimarrà, pur troppo, priva del Suo contributo: ma alla memoria di Lui, che la propose, non mancherà la riconoscenza di quanti, insegnanti e studiosi, se ne potranno giovare.

---

2. *Determinazione per via geometrica dei 3 tipi di spazio ellittico, parabolico, iperbolico,* " Rendiconti del Circolo Matematico ", Palermo. 1901;

3. *Le proprietà metriche delle quadriche in Geometria non Euclidea* (2 note). " Rendiconti Istituto Lombardo ", 1902 e 1903;

4. *A propòs d'un recent exposé de principes des la Géométrie non Euclydienne,* (*Barbarin - La G. n. E. - Paris, Naud, 1902*). " Enseignement Math. ", Paris. 1903;

5. *Sulle proprietà del quadrilatero trirettangolo nella metrica di Lobacefski-Bolyai,* " Rendiconti Istituto Lombardo ", 1904;

6. Analisi dell'opera: *L. I. Delaporte - Essai philosophique sur les Géométres non Euclydiennes. - Paris, Naud, 1903.* " Rivista filosofica ", Pavia, 1904;

7. *I teoremi del P. G. Saccheri sulla somma degli angoli di un triangolo e le ricerche di M. Dehn,* " Rendiconti Istituto Lombardo ", 1905;

8. *Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistanti,* " Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche ", Torino. 1905;

9. *La trigonometria assoluta secondo G. Bolyai,* " Rendiconti Istituto Lombardo ", 1904;

10. *Intorno a una proprietà del parallelogrammo,* " Bollettino di Matematica ", Bologna. 1905;

11. *Il modello di Beltrami di superficie a curvatura costante negativa,* " Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche ", Torino, 1906;

12. *Osservazioni sopra una nota di Battaglini* (" Giornale di Matematica, 1863 ") *relativa alla composizione dei movimenti,* " Periodico di Matematica ", Livorno, 1909.

(1) *La Geometria non Euclidea*. Esposizione storico-critica del suo sviluppo. Bologna, Zanichelli, 1906.

(2) *Ricerche sui sistemi lineari di omografie nello spazio: 3 note* in " Rendiconti Istituto Lombardo ", 1908; *1 nota* in " Periodico di Matematica ", Livorno. 1908. — *Sistemi di omografie piane e spaziali che formano gruppo,* " Atti della Società dei Naturalisti e Matematici ", Modena, 1908.

(3) *Per la pubblicazione di una Enciclopedia di Matematiche Elementari,* " Boll. di Mathesis ", 1909.

Pavia, giugno 1911.

E. VENERONI.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 Luglio 1911