al precedente si potrà allora esprimere $\int \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt[n]{R}}$, dove $m \geqslant 1$, mediante gli $r - \Sigma m_i - 1$ trascendenti

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{R}},\quad \int \frac{x dx}{\sqrt[n]{R}}, \ldots, \int \frac{x^{r-\Sigma m_i - 2} dx}{\sqrt[n]{R}}.$$

4. *Il teorema e la regola di Liouville.*

L'integrale considerato $\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{R}}$ dove P è funzione razionale di x e R è polinomio di grado r con fattori di grado $\leqslant n-1$ si può sempre considerare scritto sotto la forma $\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{T}}$, dove P è polinomio intiero è T pure polinomio intiero con fattori di grado qualunque.

Da quanto precede risulta che se questo integrale è esprimibile algebricamente si deve avere

$$\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[n]{T}} + \text{cost.}$$

dove θ è un polinomio intiero.

Cioè si deve avere

$$PT = T \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{n} \frac{dT}{dx} \tag{1}$$

si avrà così il seguente teorema dovuto a Liouville: (¹)

Se l'equazione $PT = T \frac{d\theta}{dx} - \frac{\theta}{n} \frac{dT}{dx}$ *non è sodisfatta da nessun valore intiero di* θ *l'integrale* $\int \frac{P dx}{\sqrt[d]{T}}$ *non è esprimibile algebricamente. Nel caso contrario è:*

$$\int \frac{P dx}{\sqrt[n]{T}} = \frac{\theta}{\sqrt[n]{T}} + \text{cost.}$$

Alla sola ispezione dell'uguaglianza (1) è facile comprendere che, tutte le volte che è sodisfatta, il polinomio θ ha il grado superiore di 1 al grado di P.

Dunque se P è di grado $m - 2$, θ è di grado $m - 1$, e quindi per sapere se quest'equazione è possibile basta porre:

$$\theta = Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Cx + D$$
$$\frac{d\theta}{dx} = (m-1) Ax^{m-2} + (m-2) Bx^{m-3} + \ldots + C$$

(¹) *Journal de Crelle*, Bd. 1833.

poi sostituire questi valori nella (1) e cercare se c'è mezzo di sodisfare quest'equazione determinando convenientemente i coefficienti A, B,..., C, D.

Questa è la regola che Liouville ha trovato studiando un problema più generale (l'integrazione algebrica dell'integrale $\int y dx$, dove y è una funzione qualunque di x, implicita o esplicita), senza però dare le formole di riduzione da me trovate generalizzando quelle di Abel.

Questa regola, secondo quanto dice il Liouville stesso, è assai comoda e dovrebbe essere introdotta nei trattati elementari di calcolo integrale, dove si potrebbero forse introdurre anche le formole date nella prima parte di questo lavoro.

G. Bonfantini.

DI ALCUNE IDENTITÀ ANALITICHE ED ARITMETICHE

1. Sia $f(x)$ una funzione, della quale esistano le derivate finite e determinate di ordine qualunque; e si consideri la successione di funzioni

$$\Gamma_0\ \Gamma_1\ \Gamma_2 \ldots \Gamma_n\ \Gamma_{n+1} \ldots \qquad (1)$$

definita dalle condizioni

$$\Gamma_0 = f(x) \qquad (2)$$
$$\Gamma_{n+1} = D\{\varphi(x) . \Gamma_n\} \qquad (3)$$

dove D è il solito simbolo di derivazione rispetto ad x e $\varphi(x)$ è una funzione finita e continua, della quale esistano pure le derivate finite e determinate di ordine qualunque. Si trova allora con semplice calcolo:

$$\Gamma_0 = f(x)$$
$$\Gamma_1 = \varphi' . f + \varphi . f'$$
$$\Gamma_2 = (\overline{\varphi}'^2 + \varphi\varphi'') . f + 3\varphi\varphi' . f' + \overline{\varphi}^2 . f''$$
$$\Gamma_3 = (\overline{\varphi}'^3 + \overline{\varphi}^2\varphi''' + 4\varphi\varphi'\varphi'') . f + (7\varphi\overline{\varphi}'^2 + 4\overline{\varphi}^2\varphi'') . f' + 6\overline{\varphi}^2\varphi' . f'' + \overline{\varphi}^3 . f'''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

E in generale sarà

$$\Gamma_n = G_{n+1,1} f + G_{n+1,2} f' + \ldots + G_{n+1,p} f^{(p-1)} + \ldots + G_{n+1,n+1} f^{(n)} \qquad (4)$$

dove le funzioni $G_{n+1,1} \ldots G_{n+1,n+1}$ sono polinomi interi rispetto alle $\varphi, \varphi', \varphi'' \ldots \varphi^{(n)}$, soddisfacenti ad una relazione ricorrente che è facile trovare. Difatti, poichè

$$\Gamma_{n-1} = G_{n,1} f + G_{n,2} f' + \ldots + G_{n,p-1} f^{(p-2)} + G_{n,p} f^{(p-1)} + \ldots + G_{n,n} f^{(n-1)},$$

sarà

$$\varphi . \Gamma_{n-1} = \varphi . G_{n,1} f + \varphi . G_{n,2} f' + \ldots$$
$$\ldots + \varphi . G_{n,p-1} f^{(p-2)} + \varphi . G_{n,p} f^{(p-1)} + \ldots + \varphi . G_{n,n} f^{(n-1)}$$

e quindi in $\Gamma_n = D\{\varphi\,.\,\Gamma_{n-1}\}$ il coefficiente di $f^{(p-1)}$ sarà:

$$G_{n+1,p} = G'_{n,p}\,.\,\varphi + G_{n,p}\,.\,\varphi' + G_{n,p-1}\,\varphi. \tag{5}$$

Se dunque con i coefficienti delle $f, f', f'' \dots$ che figurano successivamente nelle $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ ecc. si costruisce il quadro

$$\left.\begin{array}{lllll}
\Gamma_0) & G_{11} & & & \\
\Gamma_1) & G_{21} & G_{22} & & \\
\dots & \dots\dots & & & \\
\Gamma_n) & G_{n+1,1} & G_{n+1,2} & \dots & G_{n+1,n+1} \\
\dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right\} \tag{6}$$

si trova, come traduzione della (5), che in questo quadro *ogni elemento è uguale alla derivata di quello immediatamente superiore moltiplicato per φ, più l'elemento superiore a sinistra moltiplicato pure per φ.*

In particolare $G_{11} = 1$, onde:

$$G_{n+1,n+1} = G_{n,n}\,.\,\varphi = \overline{\varphi}^{n+1}. \tag{7}$$

L'identità (4) può acquistare forme notevoli quando sia specializzata la natura della f e della φ (1).

2. Si supponga $\varphi(x) = x$, cosicchè la successione (1) diverrà:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= f \\
\Gamma_1 &= f + xf' \\
\Gamma_2 &= f + 3xf' + x^2 f'' \\
\Gamma_3 &= f + 7xf' + 6x^2 f'' + x^3 f''' \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ed in generale sarà:

$$\Gamma_n = c_{n+1,1} f + c_{n+1,2}\, xf' + \dots + c_{n+1,p}\, x^{p-1} f^{(p-1)} + \dots + c_{n+1,n+1}\, x^n f^{(n)}, \tag{8}$$

dove i coefficienti $c_{n+1,1} \dots c_{n+1,n+1}$ soddisfano alla relazione ricorrente

$$c_{n+1,p} = p c_{n,p} + c_{n,p-1}\,. \tag{9}$$

Ed invero:

$$\Gamma_{n-1} = c_{n,1} f + \dots + c_{n,p-1}\, x^{p-2} f^{(p-2)} + c_{n,p}\, x^{p-1} f^{(p-1)} + \dots + c_{n,n}\, x^{n-1} f^{(n-1)}$$

onde

$$x\,\Gamma_{n-1} = c_{n,1}\, xf + \dots + c_{n,p-1}\, x^{p-1} f^{(p-2)} + c_{n,p}\, x^p f^{(p-1)} + \dots + c_{n,n} x^n f^{(n-1)}$$

e quindi in $\Gamma_n = D\{x\,.\,\Gamma_{n-1}\}$ il coefficiente di $x^{p-1} f^{(p-1)}$ sarà $c_{n,p-1} + p c_{n,p}$, ciò che dimostra appunto la (9).

Se si assumesse invece $\varphi(x) = x - a$ si troverebbe evidentemente

$$\Gamma_n = c_{n+1,1} f + c_{n+1,2}(x-a) f' + \dots + c_{n+1,n+1}(x-a)^n f^{(n)}$$

dove i vari coefficienti hanno lo stesso significato dei precedenti.

---

(1) Per quanto riguarda il caso in cui f sia una serie di potenze, cfr. *Una semplice proprietà delle serie di potenze ed applicazioni* (Bollett. di Matem., 1911, n. 5-6-7-8) e *Addizione alla Nota ecc.* (Bollett. di Matem., 1912, n.i 1-2).

3. Offre particolare interesse lo specchio formato dai coefficienti delle f, xf', x^2f'', ecc. che entrano nelle successive $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots \Gamma_n$ ecc.

Tale specchio [1] è:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
\Gamma_0) & 1 \\
\Gamma_1) & 1 & 1 \\
\Gamma_2) & 1 & 3 & 1 \\
\Gamma_3) & 1 & 7 & 6 & 1 \\
\Gamma_4) & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
\Gamma_5) & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 \\
\Gamma_6) & 1 & 63 & 301 & 350 & 140 & 21 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\Gamma_n) & c_{n+1,1} & c_{n+1,2} & c_{n+1,3} & c_{n+1,4} & c_{n+1,5} & \ldots & \ldots & \ldots & c_{n-1,n-1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right\} \qquad (10)$$

e si costruisce assai facilmente quando si osservi che la relazione (9) si traduce nella proprietà:

a) *Ogni elemento dello specchio* (10) *è uguale a quello immediatamente superiore moltiplicato per il numero della colonna che esso occupa, più l'elemento superiore a sinistra.*

Si può anche notare, in conseguenza di ciò, che:

b) *Gli elementi che occupano l'ultimo posto di ciascuna linea sono tutti uguali ad 1, e gli elementi del penultimo posto sono i numeri triangolari.*

c) *La somma degli elementi di ciascuna linea è uguale alla somma degli elementi della linea precedente, moltiplicati rispettivamente per 2, 3, 4, ecc.*

Applicando successivamente la (9) agli elementi $c_{n-1,p}$, $c_{n,p-1}$, $c_{n-1,p-2}$ .... sommando membro a membro le identità ottenute, e sopprimendo i termini comuni si ottiene

$$c_{n+1,p} = p \, . \, c_{n,p} + (p-1)\, c_{n-1,p-1} + (p-2)\, c_{n-2,p-2} + \ldots, \qquad (11)$$

la quale esprime che nel solito specchio (10)

d) *ciascun elemento è uguale a quello immediatamente superiore moltiplicato per il numero della colonna in cui si trova, più la somma degli elementi situati superiormente e obliquamente a sinistra di quel primo, moltiplicati pure rispettivamente per il numero della colonna occupata.*

4. Insieme con il quadro (10) si consideri il noto quadro [2] contenente le differenze di 0^n, il quale si presenta nella stessa forma del primo. Diciamo allora che

gli elementi della $1^a, 2^a, \ldots p^a \ldots$ *verticale del quadro delle differenze di* 0^n *sono uguali ai corrispondenti elementi del quadro* (10), *moltiplicati rispettivamente per* $1!, 2!, \ldots p! \ldots$

---

(1) Cfr. MELFI MOLÈ, *Due metodi generali per la somma delle potenze simili dei termini d'una qualsivoglia progressione aritmetica*; " Periodico di Matematica „ Anno XXVI, Novembre-Dicembre 1910, pag. 156.

(2) CESÀRO, *Analisi algebrica*, p. 462.

Difatti, indicando con $c'_{n,p}$ l'elemento che nel quadro delle differenze di 0^n occupa lo stesso posto che $c_{n,p}$ nel quadro (10), cioè ponendo $c'_{n,p} = \Delta^p 0^n$, e ricordando che

$$c'_{n,p} = p\,(c'_{n-1,p} + c'_{n-1,p-1})$$

si avrà, supposto che la proprietà enunciata si verifichi nella colonna p^a fino all'elemento di posto n:

$$c'_{n-1,p} = p\,(p!\,c_{n,p} + (p-1)!\,c_{n,p-1}) = p!\,(pc_{n,p} + c_{n,p-1}) = p!\,c_{n+1,p}.$$

Ma quella proprietà è certamente vera per i primi elementi delle varie colonne, che sono $1!, 2!, 3! \ldots$ nel quadro delle differenze di 0^n, mentre sono tutti uguali ad 1 nel quadro (10); e perciò la proprietà stessa, che si può esprimere con

$$\Delta^p 0^n = p!\,c_{n,p} \tag{12}$$

sarà vera in generale.

Quindi anche: *ogni relazione valida fra le differenze di* 0^n *si traduce in una relazione intercedente fra elementi del quadro* (10) *sostituendo* $p!\,c_{n,p}$ *a* $\Delta^p 0^n$.

Così per esempio, la nota formula

$$\Delta^p 0^n = p^n - \binom{p}{1}(p-1)^n + \binom{p}{2}(p-2)^n - \ldots \pm \binom{p}{p-1}$$

si traduce nella

$$c_{n,p} = \frac{1}{p!}\left\{p^n - \binom{p}{1}(p-1)^n + \binom{p}{2}(p-2)^n - \ldots \pm \binom{p}{p-1}\right\} \tag{13}$$

la quale esprime un elemento qualunque del quadro (10) indipendentemente dagli altri. [1]

5. Per ottenere un'altra relazione alla quale soddisfano le c_{ij}, si supponga sempre $\varphi(x) = x$, ed $f(x) = x^n$, cosicchè si avrà per la (8):

$$\Gamma_n = c_{n+1,1}\,x^n + nc_{n+1,2}\,x^n + n(n-1)\,c_{n+1,3}\,x^n + \ldots + n!\,c_{n+1,n-1}\,x^n.$$

D'altra parte, eseguendo direttamente per n volte su x^n l'operazione di moltiplicare per x e di derivare rispetto ad x, si ottiene

$$\Gamma_n = (n+1)^n\,x^n$$

e quindi uguagliando i due risultati e dividendo per $x^n \neq 0$:

$$(n+1)^n = c_{n+1,1} + nc_{n+1,2} + n(n-1)\,c_{n+1,3} + \ldots + n!\,c_{n+1,n+1}. \tag{14}$$

6. Si supponga ora $\varphi(x) = x$, $f(x) = e^x$; è chiaro che la (8) si convertirà nella seguente uguaglianza:

$$\Gamma_n = c_{n+1,1}\,e^x + c_{n+1,2}\,.\,xe^x + c_{n+1,3}\,x^2 e^x + \ldots + c_{n+1,n-1}\,x^n e^x,$$

---

[1] Per altre identità aventi relazione con le differenze di 0^q e quindi coi numeri del quadro (10) veggasi: CIPOLLA, *Intorno alle differenze di* 0^q *e alle identità aritmetiche*, "Periodico di Matematica", luglio-agosto 1905.

mentre che operando direttamente su e^x per n volte la moltiplicazione per x e la derivazione rispetto ad x, si avrà

$$\Gamma_n = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^n \frac{x^p}{p!} . \tag{15}$$

Se dunque si identificano i due risultati, si conclude che: (1)

$$\sum_{p=0}^{\infty} (p+1)^n \frac{x^p}{p!} = e^x (c_{n+1,1} + x c_{n+1,2} + x^2 c_{n+1,3} + \ldots + x^n c_{n+1,n+1}). \tag{16}$$

Per $x=1$ risulta di qui

$$c_{n+1,1} + c_{n+1,2} + \ldots + c_{n+1,n+1} = \frac{1}{e}\left(1 + 2^n + \frac{3^n}{2!} + \ldots + \frac{(p+1)^n}{p!} + \ldots\right) \tag{17}$$

la quale permette di esprimere la somma degli elementi di una linea qualunque del quadro (10).

7. Dalla formula del binomio si ottiene per derivazione dei due membri rispetto ad x:

$$m(1+x)^{m-1} = \binom{m}{1} + 2\binom{m}{2} x + \ldots + m\binom{m}{m} x^{m-1}. \tag{18}$$

È interessante cercare che cosa divenga la successione $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2 \ldots$ quando si assuma $f(x) = m(1+x)^{m-1}$ e $\varphi(x) = x$, cioè quali identità risultino dalla (18) applicando ripetutamente l'operazione di moltiplicare per x e di derivare rispetto ad x.

Per la formula (8) si avrà:

$$\Gamma_n = c_{n+1,1}\, m(1+x)^{m-1} + c_{n+1,2}\, x \,.\, m(m-1)(1+x)^{m-2} + \ldots$$
$$\ldots + c_{n+1,n+1}\, x^n \,.\, m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1}$$

ed invece operando direttamente sul secondo membro della (18) si avrà:

$$\Gamma_n = \binom{m}{1} + 2^{n+1}\binom{m}{2} x + 3^{n+1}\binom{m}{3} x^2 + \ldots + m^{n+1}\binom{m}{m} x^{m-1}$$

cosicchè risulterà uguagliando le due espressioni di Γ_n:

$$\binom{m}{1} + 2^{n+1}\binom{m}{2} x + \ldots + m^{n+1}\binom{m}{m} x^{m-1} = c_{n+1,1}\, m(1+x)^{m-1} + \ldots$$
$$\ldots + c_{n+1,n+1}\, x^n m(m-1)\ldots(m-n)(1+x)^{m-n-1} \tag{19}$$

nella quale si deve osservare che gli ultimi termini del secondo membro vengono a mancare quando sia $m \leqslant n$. (2)

Per i primi valori di n, e cioè per $n = 2, 3, 4, 5$, si ottengono dalla (19), con semplici riduzioni al secondo membro, le seguenti formule:

---

(1) Cfr. Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 466.

(2) E precisamente, se $n = m + k$, si annulleranno gli ultimi $k+1$ termini.

$$\left.\begin{aligned}
&\binom{m}{1} + 2^2\binom{m}{2}x + 3^2\binom{m}{3}x^2 + \ldots + m^2\binom{m}{m}x^{m-1} = \\
&\qquad = m(1+x)^{m-2}\{mx+1\}. \\
&\binom{m}{1} + 2^3\binom{m}{2}x + 3^3\binom{m}{3}x^2 + \ldots + m^3\binom{m}{m}x^{m-1} = \\
&\qquad = m(1+x)^{m-3}\{m^2x^2 + (3m-1)x + 1\}. \\
&\binom{m}{1} + 2^4\binom{m}{2}x + 3^4\binom{m}{3}x^2 + \ldots + m^4\binom{m}{m}x^{m-1} = \\
&\qquad = m(1+x)^{m-4}\{m^3x^3 + (6m^2-4m+1)x^2 + (7m-4)x + 1\}. \\
&\binom{m}{1} + 2^5\binom{m}{2}x + 3^5\binom{m}{3}x^2 + \ldots + m^5\binom{m}{m}x^{m-1} = \\
&\qquad = m(1+x)^{m-5}\{m^4x^4 + (10m^3-10m^2+5m-1)x^3 + \\
&\qquad\quad + (25m^2-30m+11)x^2 + (15m-11)x + 1\}
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

e queste si possono riguardare come estensioni della (18).

Mediante la (18) stessa, facendo $x=1$, si riesce ad *esprimere in funzione dei coefficienti* c_{ij} *del quadro* (10) *la somma degli elementi di una linea qualunque del triangolo di* TARTAGLIA, *moltiplicati rispettivamente per gli elementi della progressione aritmetica di ordine* $n+1$: 0^{n+1}, 1^{n+1}, 2^{n+1}, ...; e precisamente:

$$\binom{m}{1} + 2^{n+1}\binom{m}{2} + \ldots + m^{n+1}\binom{m}{m} = 2^{m-1}m\,c_{n+1,1} + \\
+ 2^{m-2}m(m-1)c_{n+1,2} + \ldots + 2^{m-n-1}m(m-1)\ldots(m-n)c_{n+1,n+1}. \quad (21)$$

Così in particolare per $x=1$ dalle (18) e (20) si ottiene, eseguendo evidenti semplificazioni:

$$\left.\begin{aligned}
&\binom{m}{1} + 2\binom{m}{2} + 3\binom{m}{3} + \ldots + m\binom{m}{m} = m\,2^{m-1} \\
&\binom{m}{1} + 2^2\binom{m}{2} + 3^2\binom{m}{3} + \ldots + m^2\binom{m}{m} = m(m+1)\,2^{m-2} \\
&\binom{m}{1} + 2^3\binom{m}{2} + 3^3\binom{m}{3} + \ldots + m^3\binom{m}{m} = m^2(m+3)\,2^{m-3} \\
&\binom{m}{1} + 2^4\binom{m}{2} + 3^4\binom{m}{3} + \ldots + m^4\binom{m}{m} = \\
&\qquad = m(m^3+6m^2+3m-2)\,2^{m-4} \\
&\binom{m}{1} + 2^5\binom{m}{2} + 3^5\binom{m}{3} + \ldots + m^5\binom{m}{m} = \\
&\qquad = m^2(m^3+10m^2+15m-10)\,2^{m-5}
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

8. Moltiplicando i due membri della formula del binomio per x^k e derivando rispetto ad x si ottiene:

$$\{(m+k)x+k\}(1+x)^{m-1}x^{k-1} = \\
= kx^{k-1} + (k+1)\binom{m}{1}x^k + \ldots + (k+m)\binom{m}{m}x^{m+k-1}. \quad (23)$$

Se, analogamente al caso precedente, si assume

$$f(x) = \{(m+k)\,x + k\}\,(1+x)^{m-1}\,x^{k-1} \qquad \text{e} \qquad \varphi(x) = x$$

e si applica al primo membro della (23) la formula (8), mentre sul secondo membro si eseguisce direttamente per n volte l'operazione di moltiplicare per x e di derivare rispetto ad x, si ottiene, invertendo i due membri:

$$k^{n+1}x^{k-1} + (k+1)^{n+1}\binom{m}{1}x^k + (k+2)^{n+1}\binom{m}{2}x^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + (k+m)^{n+1}\binom{m}{m}x^{k+m-1} = c_{n+1,1}f + c_{n+1,2}xf' + \ldots + c_{n+1,n+1}x^n f^{(n)} \quad (24)$$

la quale per $x=1$ diviene:

$$k^{n+1} + (k+1)^{n+1}\binom{m}{1} + (k+2)^{n+1}\binom{m}{2} + \ldots + (k+m)^{n+1}\binom{m}{m} =$$
$$= c_{n+1,1}f(1) + \ldots + c_{n+1,n+1}f^{(n)}(1). \quad (25)$$

La (25) permette di *esprimere la somma degli elementi di una linea qualunque del triangolo di* TARTAGLIA, *moltiplicati rispettivamente per gli elementi della progressione aritmetica di ordine* $n+1$: $k^{n+1}, (k+1)^{n+1}, \ldots (k+m)^{n+1}$.

Così, ad esempio, per $n = 0, 1, 2$ si hanno dalla (25) le formule:

$$\left.\begin{aligned}
&k + (k+1)\binom{m}{1} + (k+2)\binom{m}{2} + \ldots + (k+m)\binom{m}{m} = \\
&\qquad\qquad = \{m+2k\}\,2^{m-1} \\
&k^2 + (k+1)^2\binom{m}{1} + (k+2)^2\binom{m}{2} + \ldots + (k+m)^2\binom{m}{m} = \\
&\qquad\qquad = \{m^2 + (4k+1)\,m + 4k^2\}\,2^{m-2} \\
&k^3 + (k+1)^3\binom{m}{1} + (k+2)^3\binom{m}{2} + \ldots + (k+m)^3\binom{m}{m} = \\
&\qquad\qquad = \{m^3 + (6k+3)\,m^2 + (12k^2+6k)\,m + 8k^3\}\,2^{m-3}
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Si noti che il valore k non è necessariamente intero, ma può essere comunque.

9. Più in generale, si moltiplichino i due membri dello sviluppo

$$(1+x^a)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}x^a + \binom{m}{2}x^{2a} + \ldots + \binom{m}{m}x^{ma}$$

per x^c, essendo a e c numeri qualunque, e si derivino poi i due membri dell'identità ottenuta rispetto ad x; si avrà così:

$$(1+x^a)^{m-1}\,x^{c-1}\,(amx^a + cx^a + c) =$$
$$= c\binom{m}{0}x^{c-1} + (c+a)\binom{m}{1}x^{c+a-1} + \ldots + (c+ma)\binom{m}{m}x^{c+ma-1}.$$

È chiaro che operando per n volte sul secondo membro di questa uguaglianza la moltiplicazione per x e la successiva derivazione, ed applicando invece al primo membro la formula (8) quando si assuma

$$f=(1+x^{a})^{m-1}x^{c-1}(amx^{a}+cx^{a}+c),$$

si otterrà una uguaglianza dalla quale per $x=1$ verrà:

$$c^{n+1}+(c+a)^{n+1}\binom{m}{1}+(c+2a)^{n+1}\binom{m}{2}+\ldots+(c+ma)^{n+1}\binom{m}{m}=$$
$$=c_{n+1,1}f(1)+c_{n+1,2}f'(1)+\ldots+c_{n+1,n+1}f^{(n)}(1). \quad (27)$$

Dunque: *mediante i numeri dello specchio* (10) *è possibile determinare la somma degli elementi di una linea qualunque del triangolo di* TARTAGLIA, *moltiplicati rispettivamente per i termini di una progressione aritmetica di ordine qualunque.*

10. Se nella formula (19) si mutasse x in $-x$ si avrebbe

$$\binom{m}{1}-2^{n+1}\binom{m}{2}x+3^{n+1}\binom{m}{3}x^{2}-\ldots\pm m^{n+1}\binom{m}{m}x^{m-1}=$$
$$=c_{n+1,1}\,m(1-x)^{m-1}-\ldots\pm c_{n+1,n+1}\,x^{n}m(m-1)\ldots(m-n)(1-x)^{m-n-1} \quad (28)$$

e di qui per $x=1$:

$$\binom{m}{1}-2^{n+1}\binom{m}{2}+3^{n+1}\binom{m}{3}-\ldots\pm m^{n+1}\binom{m}{m}(-1)^{m+1}=c_{n+1,m}\cdot m! \quad (29)$$

formula ben nota [1] quando si ricordi che $\Delta^{p}0^{n}=p!\,c_{n,p}$, e di cui il secondo membro si trova esser zero per $m\geqslant n+2$, poichè allora tutti i termini del secondo membro della (28) contengono a fattore il binomio $1-x$.

11. Un'ultima applicazione che si potrebbe fare della formula (8) sarebbe quella di determinare la somma delle potenze simili di più numeri naturali consecutivi; basterebbe a tal fine partire dalla identità

$$\frac{x^{m+p+1}-x^{p}}{x-1}=x^{p}+x^{p+1}+\ldots+x^{p+m},$$

applicare al primo membro la formula (8), ed applicare al secondo membro per n volte l'operazione di moltiplicare per x e di derivare rispetto ad x. Passando al limite per $x=1$ ed usando la regola di L'HÔPITAL si otterrebbe appunto la somma cercata.

L. GALVANI.

(1) CESÀRO, *Analisi algebrica*, pag. 461.

SVILUPPO DI UN PARTICOLARE DETERMINANTE DI HANKEL

Oggetto di questa nota è lo sviluppo di un particolare determinante del tipo di Hankel, [1] semplice generalizzazione di determinanti che si possono formare con coefficienti binomiali.

1. Indichiamo al solito con θ l'operazione di sostituzione elementare:

$$\theta f(x) = f(x+1)$$

e con Δ l'operazione di differenza finita:

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

cosicchè si ha simbolicamente, come è noto,

$$\Delta = \theta - 1. \tag{1}$$

Il determinante in questione è

$$D = \begin{vmatrix} \varphi & \theta\varphi & \theta^2\varphi & \dots & \theta^r\varphi \\ \theta\varphi & \theta^2\varphi & \theta^3\varphi & \dots & \theta^{r+1}\varphi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^r\varphi & \theta^{r+1}\varphi & \theta^{r+2}\varphi & \dots & \theta^{2r}\varphi \end{vmatrix}, \tag{2}$$

essendo r un numero intero positivo. Quanto a φ, esso soddisfi l'equazione ricorrente del primo ordine, omogenea,

$$\theta\varphi = \psi . \varphi \tag{3}$$

essendo ψ il rapporto di due binomi di 1° grado:

$$\psi = \frac{ax+b}{cx+d}. \tag{4}$$

2. Avremo dalla (3), applicando ripetutamente l'operazione θ:

$$\theta^2\varphi = \theta\psi . \theta\varphi = \varphi . \psi . \theta\psi , \dots , \theta^i\varphi = \varphi . \psi . \theta\psi \dots \theta^{i-1}\psi.$$

Più in generale, essendo $i > j$:

$$\theta^i\varphi = \theta^j\varphi . \theta^j\psi . \theta^{j+1} \dots \theta^{i-1}\psi.$$

[1] Cfr. E. PASCAL, *I Determinanti...* (Manuale Hoepli).

Sostituendo nella (2):

$$D = \begin{vmatrix} \varphi & \varphi\,.\,\psi & \varphi\,.\,\psi\,.\,\theta\psi & \ldots & \varphi\,.\,\psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi \\ \theta\varphi & \theta\varphi\,.\,\theta\psi & \theta\varphi\,.\,\theta\psi\,.\,\theta^2\psi & \ldots & \theta\varphi\,.\,\theta\psi\,.\,\theta^2\psi\;\ldots\,\theta^r\psi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^r\varphi & \theta^r\varphi\,.\,\theta^r\psi & \theta^r\varphi\theta^r\psi\theta^{r+1}\psi & \ldots & \theta^r\varphi\,.\,\theta^r\psi\,.\,\theta^{r+1}\psi\;\ldots\,\theta^{2r-1}\psi \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi\,.\,\theta\varphi\,\ldots\,\theta^r\varphi \begin{vmatrix} 1 & \psi & \psi\theta\psi & \ldots & \psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi \\ 1 & \theta\psi & \theta\psi\theta^2\psi & \ldots & \theta\psi\,.\,\theta^2\psi\;\ldots\,\theta^r\psi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \theta^r\psi & \theta^r\psi\theta^{r+1}\psi & \ldots & \theta^r\psi\,.\,\theta^{r+1}\psi\;\ldots\,\theta^{2r-1}\psi \end{vmatrix}$$

Ora sottraendo da ciascuna linea la precedente, tutti gli elementi della prima colonna ad eccezione del primo diventano zero, quindi

$$D = \begin{vmatrix} \Delta\psi & \Delta(\psi\,.\,\theta\psi) & \ldots & \Delta(\psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi) \\ \Delta(\theta\psi) & (\Delta(\theta\psi\,.\,\theta^2\psi) & \ldots & \Delta(\theta\psi\,.\,\theta^2\psi\;\ldots\,\theta^r\psi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta(\theta^{r-1}\psi) & \Delta(\theta^{r-1}\psi\theta^r\psi) & \ldots & \Delta(\theta^{r-1}\psi\theta^r\psi\;\ldots\,\theta^{2r-2}\psi) \end{vmatrix} \varphi\,.\,\theta\varphi\,\ldots\,\theta^r\varphi$$

ed essendo le operazioni θ e Δ commutabili:

$$D = \varphi\,.\,\theta\varphi\,\ldots\,\theta^r\varphi \begin{vmatrix} \Delta\psi & \Delta(\psi\theta\psi) & \ldots & \Delta(\psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi) \\ \theta\Delta(\psi) & \theta\Delta(\psi\,.\,\theta\psi) & \ldots & \theta\Delta(\psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \theta^{r-1}\Delta\psi & \theta^{r-1}\Delta(\psi\theta\psi) & \ldots & \theta^{r-1}\Delta(\psi\,.\,\theta\psi\;\ldots\,\theta^{r-1}\psi) \end{vmatrix} \quad (5)$$

E mentre D è di ordine $r+1$, il determinante ora ottenuto è di ordine r.

3. Poniamo $h = ax + b$, $k = cx + d$, $l = ad - bc$. Per la (4):

$$\psi = \frac{h}{k}\,.$$

Avremo:

$$\Delta\psi = \Delta\,\frac{h}{k} = \frac{k\Delta h - h\Delta k}{k\theta k}$$

e con facile calcolo:

$$\Delta\psi = \frac{l}{k\theta k}\,.$$

Inoltre:

$$\Delta(\psi\,.\,\theta\psi) = \theta\psi\,.\,\Delta(\theta\psi) + \theta\psi\,.\,\Delta\psi = \frac{\theta h}{\theta k}\,\frac{l}{\theta k\,.\,\theta^2 k} + \frac{\theta h}{\theta k}\,\frac{l}{k\,.\,\theta k} =$$

$$= \frac{l\,.\,\theta h}{(\theta k)^2}\,\frac{k + \theta^2 k}{k\,.\,\theta^2 k}\,.$$

Ora k essendo un binomio di primo grado, $\Delta^2 k = 0$ cioè per la (1):

$$(\theta - 1)^2 k = 0, \qquad \theta^2 k - 2\theta k + k = 0, \qquad k + \theta^2 k = 2\,.\,\theta k.$$

Segue:

$$\Delta(\psi\,.\,\theta\psi) = \frac{2l\theta h}{k\,.\,\theta k\,.\,\theta^2 k}\,.$$

Così si stabilisce facilmente in generale:

$$\Delta(\psi\,.\,\theta\psi\ldots\theta^i\psi) = \frac{(i+1)\,l\theta h\,.\,\theta^2 h\ldots\theta^i h}{k\,.\,\theta k\ldots\theta^{i+1}k}\,,$$

Sostituendo nella (5)

$$D = \varphi\,.\,\theta\varphi\ldots\theta^r\varphi \begin{vmatrix} \dfrac{l}{k\,.\,\theta k} & \dfrac{2l\theta h}{k\theta k\theta^2 k} & \ldots & \dfrac{r\,.\,l\,.\,\theta h\ldots\theta^{r-1}h}{k\,.\,\theta k\ldots\theta^r k} \\ \dfrac{l}{\theta k\,.\,\theta^2 k} & \dfrac{2l\theta^2 h}{\theta k\theta^2 k\theta^3 k} & \ldots & \dfrac{r\,.\,l\,.\,\theta^2 h\ldots\theta^r h}{\theta k\theta^2 k\ldots\theta^{r+1}k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{l}{\theta^{r-1}k\theta^r k} & \dfrac{2l\theta^r h}{\theta^{r-1}k\theta^r k\theta^{r+1}k} & \ldots & \dfrac{r\,.\,l\,.\,\theta^r h}{\theta^{r-1}k\theta^r k\ldots\theta^{2r-1}k} \end{vmatrix}$$

e quindi anche:

$$D = \frac{\varphi\,.\,\theta\varphi\ldots\theta^r\varphi\,2\,.\,3\ldots r\,.\,l^r}{k\,(\theta k)^2\ldots(\theta^{r-1}k)^2\,\theta^2 k} \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\theta h}{\theta^2 k} & \ldots & \dfrac{\theta h\theta^2 h\ldots\theta^{r-1}h}{\theta^2 k\theta^3 k\ldots\theta^r k} \\ 1 & \dfrac{\theta^2 h}{\theta^3 k} & \ldots & \dfrac{\theta^2 h\theta^3 h\ldots\theta^r h}{\theta^3 k\theta^4 k\ldots\theta^{r+1}k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dfrac{\theta^r h}{\theta^{r+1}k} & \ldots & \dfrac{\theta^r h\,.\,\theta^{r+1}h\ldots\theta^{2r-2}h}{\theta^{r+1}k\theta^{r+2}k\ldots\theta^{2r-1}k} \end{vmatrix}$$

ed anche ponendo:

$$\psi_1 = \frac{\theta h}{\theta^2 k} = \frac{h_1}{k_1}$$

dove h_1 e k_1 sono binomi di 1° grado:

$$D = \frac{\varphi\,.\,\theta\varphi\ldots\theta^r\varphi\,.\,2\,.\,3\ldots r\,.\,l^r}{k(\theta k)^2\ldots(\theta^{r-1}k)^2\theta k} \begin{vmatrix} 1 & \psi_1 & \psi_1\theta\psi_1 & \ldots & \psi_1\theta\psi_1 & \ldots\theta^{r-2}\psi_1 \\ 1 & \theta\psi_1 & \theta\psi_1\theta^2\psi_1 & \ldots & \theta\psi_1\theta^2\psi_1 & \ldots\theta^{r-1}\psi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \theta^{r-1}\psi_1 & \theta^{r-1}\psi_1\theta^r\psi_1 & \ldots & \theta^{r-1}\psi_1\theta^r\psi_1 & \ldots\theta^{2r-3}\psi_1 \end{vmatrix}$$

e questo determinante è dello stesso tipo di quello del § 2°, ma di ordine r.

4. Poniamo allora:

$$\psi_2 = \frac{\theta h_1}{\theta^2 k_1} = \frac{h_2}{k_2}\,,\ldots \qquad \psi_i = \frac{\theta h_{i-1}}{\theta^2 k_{i-1}} = \frac{h_i}{k_i}\ldots.$$

Sarà:

$$\begin{aligned} h_i &= \theta^i h = a\,(x+i) + b = ax + (ai+b) \\ k_i &= \theta^{2i} k = c\,(x+2i) + d = cx + (2ci+d). \end{aligned} \tag{6}$$

Poniamo ancora:

$$l_i = a\,(2ci + d) - (ai + b)\,c = aci + ad - bc$$
$$l_i = l + i\,.\,ac = l_{i-1} + ac$$

onde i numeri l_i formano una progressione aritmetica di ragione ac e primo termine l.

Allora di passo in passo si può avere per D lo sviluppo:

$$D = \frac{\varphi\,.\,\theta\varphi\ldots\theta^r\varphi\,.\,l^r l_1^{\,r-1}\ldots l_{r-1}\,.\,r\,(r-1)^2\ldots 2^{r-1}}{[k(\theta k)^2\ldots(\theta^{r-1}k)^2\theta^r k]\,[k_1(\theta k_1)^2\ldots)\theta^{r-2}k_1)^2\theta^{r-1}k_1]\ldots[k_{r-2}(\theta k_{r-2})^2\theta^2 k_{r-2}]\,[k_{r-1}\theta k_{r-1}]}$$

ed anche, sostituendo a $k_1, k_2\ldots$ le loro espressioni in k date dalle (6):

$$D = \frac{\varphi\,.\,\theta\varphi\ldots\theta^r\varphi\,.\,l^r l_1^{\,r-1}\ldots l_{r-1}\,\underline{|2}\,\underline{|3}\ldots\underline{|r}}{k\,(\theta k)^2\,(\theta^2 k)^3\ldots(\theta^{r-1}k)^r\,(\theta^r k)^r\,(\theta^{r+1}k)^{r-1}\ldots(\theta^{2r-2}k)^2\,(\theta^{2r-1}k)} \qquad (7)$$

5. Per semplicità il determinante considerato si rappresenterà con $D(\varphi)$. Se poniamo in primo luogo $\varphi = \underline{|x}$ onde $\psi = x+1$ si ha facilmente dalla (7) essendo $l = l_1 = \ldots = 1$ e $k = 1$:

$$D(\underline{|x}) = \underline{|x}\,\underline{|x+1}\ldots\underline{|x+r}\,.\,\underline{|2}\,.\,\underline{|3}\,.\,\underline{|r}.$$

Si trae facilmente:

$$\begin{vmatrix} 1 & (x+1) & (x+1)(x+2) & \ldots & (x+1)\ldots(x+r) \\ 1 & (x+2) & (x+1)(x+3) & \ldots & (x+2)\ldots(x+r+1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (x+r+1) & (x+r+1)(x+r+2) & \ldots & (x+r+1)\ldots(x+2r) \end{vmatrix} = \underline{|2}\,\underline{|3}\ldots\underline{|r}.$$

e, cambiando x in $x-1$: (¹)

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{x}{1} & \binom{x+1}{1} & \ldots & \binom{x+r-1}{r} \\ 1 & \binom{x+1}{1} & \binom{x+2}{2} & \ldots & \binom{x+r}{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \binom{x+r}{1} & \binom{x+r+1}{1} & \ldots & \binom{x+2r-1}{r} \end{vmatrix} = 1.$$

In secondo luogo poniamo $\varphi = \dfrac{1}{\underline{|x}}$. È $\psi = \dfrac{1}{x+1}$; $l = l_1 = \ldots = -1$; $k = x+1$. Onde:

$$D\left(\frac{1}{\underline{|x}}\right) = \frac{\dfrac{1}{\underline{|x}}\,\dfrac{1}{\underline{|x+1}}\cdots\dfrac{1}{\underline{|x+r}}\,(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\,\underline{|2}\,\underline{|3}\ldots\underline{|r}}{(x+1)\,(x+2)^2\ldots(x+r)^r\,(x+r+1)^r\ldots(x+2r-1)^2\,(x+2r)}$$

(¹) Confr. *I Determinanti*, citati, pag. 172.

e con facile calcolo:

$$D\left(\frac{1}{|\underline{x}}\right)=(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}\frac{|\underline{2}\ |\underline{3}\ldots|\underline{r}}{|\underline{x+r}\,|\underline{x+r+1}\ldots|\underline{x+2r}}.$$

Se si pone $\varphi=\binom{x}{m}$ è

$$\psi=\frac{x+1}{x+(1-m)};\quad l=-m,\quad l_1=1-m,\quad l_2=2-m\ldots;$$
$$k=x-m+1;$$

onde:

$$D\left(\binom{x}{m}\right)=$$
$$\frac{\binom{x}{m}\binom{x+1}{m}\ldots\binom{x+r}{m}(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}m^r(m-1)^{r-1}\ldots(m-r+1)\ |\underline{2}\ |\underline{3}\ldots|\underline{r}}{(x-m+1)(x-m+2)^2\ldots(x+r-m)^r(x+r-m+1)^r\ldots(x+2r-m-1)^2(x+2r-m)}$$

ponendo $x=m+n$, $r=m$ si ricava:

$$D\left(\binom{m+n}{m}\right)=$$
$$\frac{\binom{m+n}{m}\binom{m+n+1}{m}\ldots\binom{n+2m}{m}(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}m^m(m-1)^{m-1}\ldots(m-r+1)\,|\underline{2}\ |\underline{3}\ldots|\underline{m}}{(n+1)(n+2)^2\ldots(n+m)^m(n+m+1)^m\ldots(n+2m-1)^2(n+2m)}$$

e con facile calcolo:

$$D\left(\binom{m+n}{m}\right)=(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}\ (^1).$$

Se si pone $\varphi=\binom{m}{x}$ è

$$\psi=\frac{-x+m}{x+1};\quad l=-(m+1),\quad l_1=-(m+2)\ldots;\quad k=x+1$$

onde:

$$D\left(\binom{m}{x}\right)=$$
$$\frac{\binom{m}{x}\binom{m}{x+1}\ldots\binom{m}{x+r}(-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}(m+1)^r\ldots(m+2)^{r-1}\ldots(m+r)\,.\,|\underline{2}\ |\underline{3}\ldots|\underline{r}}{(x+1)(x+2)^2\ldots(x+r)^r(x+r+1)^r\ldots(x+2r-1)^2(x+2r)}.$$

---

(1) Confr. *I Determinanti*, citati, pag. 173.

T. Rietti.

IL CALCOLO DEI MOMENTI

in relazione alle operazioni formali dell'analisi vettoriale

La teoria astratta dei vettori, ossia l'esposizione degli algoritmi vettoriali che mediante simboli e convenzioni opportune acquistano la forma stessa delle operazioni scalari di algebra e di calcolo differenziale e integrale, quando non è presentata come sistema indipendente di calcolo, (1) si fa generalmente precedere alla trattazione dei fenomeni elettrostatici, magnetostatici ed elettromagnetici: tali esposizioni introduttive dei campi vettoriali, si trovano, oltre che nei più estesi trattati generali e tecnici, nelle classiche opere di Galileo Ferraris. (2) Sulle orme di esse il prof. Roiti (3) ha felicemente volgarizzato il metodo e, abbassandone convenientemente il livello della esposizione, l'ha introdotto nelle nostre scuole.

Opino che una simile introduzione elementare e, dirò così, autonoma dei vettori, condotta coi metodi formali accennati, sarebbe non meno utile ed opportuna se fatta precedere allo studio degli elementi di Meccanica teorica. L'uso di un metodo vettoriale introduttivo, non essendo per tal guisa ristretto alla sola parte elettrica, si verrebbe a raggiungere una maggiore uniformità di metodo nella esposizione degli elementi di Fisica: essa costituirebbe inoltre una preparazione meno brusca all'ulteriore studio dei campi vettoriali, e di questo più facile perchè non complicata dall'impiego dei concetti di massa e da quello inevitabile di quantità variabili e di funzioni. Ciò, per vero, è stato fatto in trattati di istruzione superiore (4) ma con intendimenti e metodi al tutto diversi da quelli cui ho accennato.

In una tale introduzione entrerebbe intanto necessariamente lo svolgimento dei concetti fondamentali e una esposizione più larga della somma dei vettori e dei prodotti interno (scalare) e vettoriale.

Si passerebbe da qui naturalmente alla esposizione delle teorie dei momenti, delle coppie, dei vettori paralleli e dei sistemi, entrando

(1) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriale*. Bologna, 1909. *Omografie vettoriali*. Torino, 1909.

(2) *Teoria geometrica dei campi vettoriali*, in *Opere complete* edite a cura dell'A. E. I. Milano, 1902. Vol. I, pag. 389 e *Memorie della R. Acc. di Torino*, s. II, t. XLVII, pag. 259-338 (1897). *Lezioni di Elettrotecnica* dettate nel R. Museo ind. di Torino, a cura della famiglia e dell'A. E. I. Vol. I: *Fondamenti scientifici dell'Elettrotecnica*. Torino, 1899.

(3) *El. di Fisica*, 4a ed. vol. II, 1908.

(4) Paul Appell, *Traité de Mécanique rationelle de l'École polytec*. Paris, 1902. Chap. I: *Theorie des vecteurs*, t. I.

in fine nel campo vero e proprio della Meccanica con l'applicare le cose esposte allo studio delle forze, dei movimenti, delle rotazioni ecc.

Ma è necessario a tale passaggio un legame metodico atto a concatenare le teorie ultimamente accennate a quelle formali sulle operazioni dei vettori, prima esposte. Il legame si presenta spontaneo riflettendo che è facile esporre al completo le coppie, i vettori paralleli e la composizione dei sistemi usando soltanto della nozione di momento: ed è sùbito realizzato se tale nozione si riconnette in un modo qualunque a qualcuna delle sopradette operazioni formali.

Tale fine ho creduto raggiungere in questa breve nota, definendo il momento rispetto a un punto come un vettore-prodotto, mediante l'introduzione di un vettore ausiliario che, nella teoria formale, presenta la fisonomia di una distanza. A prescindere dai concetti su esposti, la presente nota, in ultima analisi, mette in relazione il calcolo formale dei vettori con la teoria dei momenti che ha applicazioni continue in Meccanica e mediante cui tutta la Statica può essere svolta. Le notazioni e i simboli usati in essa sono quelli adoperati nelle citate opere dei ch.mi proff. Burali-Forti e Marcolongo.

1. Dati nello spazio un vettore

$$\mathbf{a} = A - O$$

rappresentato dal segmento OA in grandezza, direzione e senso (fig. 1) e un punto qualunque P, purchè non giacente sulla retta in-

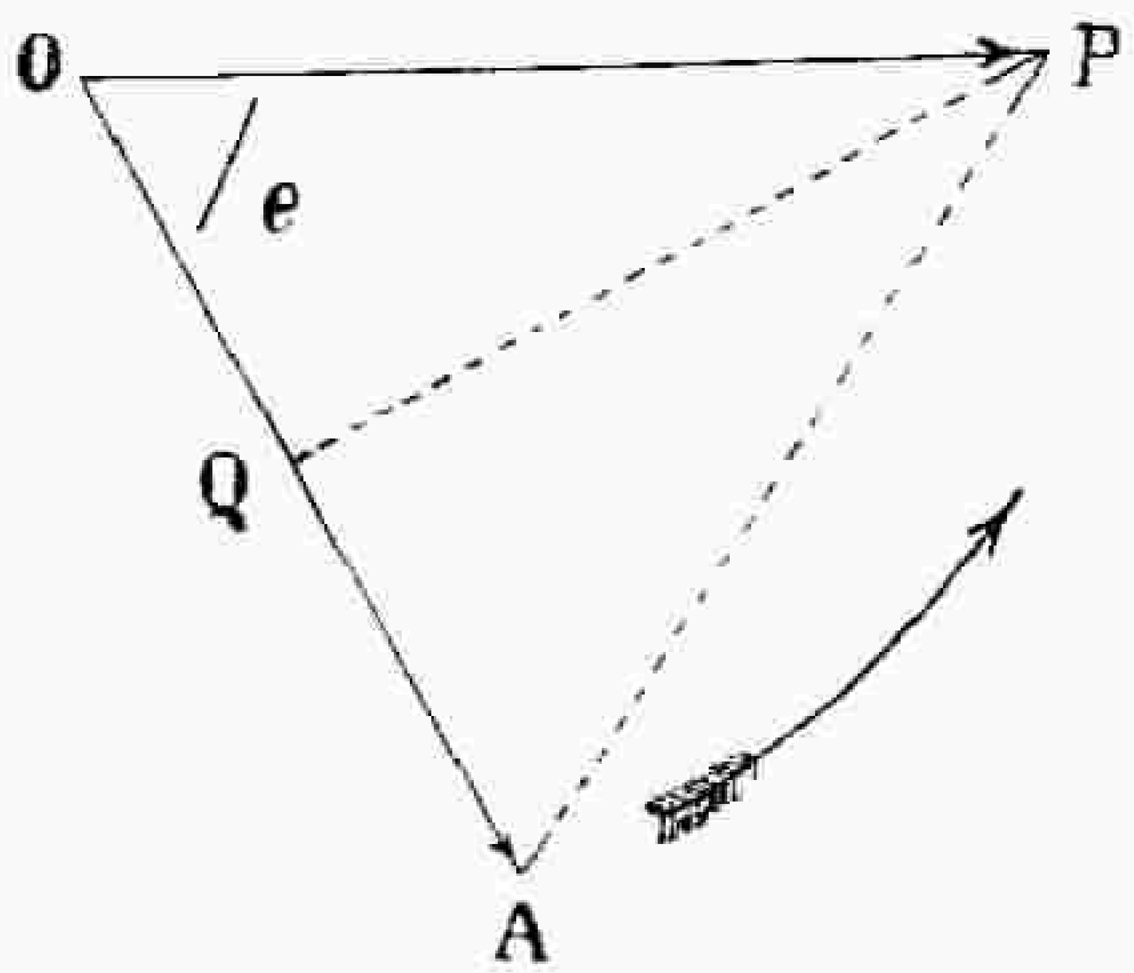

Fig. 1.

definita OA, dirò *distanza vettoriale* del vettore dato **a** dal punto dato P, o più semplicemente *vettor-distanza* di **a** da P, il vettore definito dalla relazione:

$$\mathbf{d} = P - O. \qquad (1)$$

Un tal vettore è quindi rappresentato in tutti i suoi elementi dal segmento OP, distanza fra il punto di applicazione del vettore dato e il punto dato: ed avrà il punto di applicazione in O, il modulo [1] uguale alla lunghezza OP, la direzione della retta OP e il verso da O a P. Porrò sempre, ad esempio,

$$\text{mod}\,\mathbf{d} = d$$

ossia indicherò i vettori a carattere grassetto e i moduli di essi con le medesime lettere in caratteri ordinari. [2]

2. Ciò posto, dati nello spazio **a** e P, e condotto il vettore **d**, chiamerò *momento* del vettore **a** rispetto al punto P, il vettore **m** definito dalla relazione:

$$\mathbf{m} = \mathbf{a}\Lambda\mathbf{d} \tag{2}$$

e dirò che *il momento di un vettore rispetto ad un punto è il prodotto vettoriale* [3] *del vettore dato per la distanza vettoriale di esso dal punto dato.*

Un tal vettore resta quindi determinato in ogni suo elemento mediante la definizione (2) di vettor-prodotto:

1° il suo modulo riman definito dalla relazione

$$\text{mod}\,\mathbf{m} = \text{mod}\,\mathbf{a}.\ \text{mod}\,\mathbf{d}\,.\,\text{sen}\,(\mathbf{a}, \mathbf{d})$$

o più semplicemente, ponendo

$$\text{ang}\,(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = \theta$$

esso sarà dato da:

$$m = ad\,\text{sen}\,\theta \tag{3}$$

2° il suo punto di applicazione può essere arbitrario: generalmente si prende lo stesso punto P;

3° la direzione è quella perpendicolare al piano dei due vettori **a**, **d**;

4° il senso sarà quello che prende il pollice della mano sinistra quando si dispone l'indice nel senso del primo fattore **a** e il medio nel senso del secondo fattore **d**.

Per quel che avremo da dire, risulta più conveniente osservare che il senso su detto è quello che va dai piedi alla testa di un osservatore che sta diritto sul piano di **a** e **d**, ed è disposto su quella pagina del piano guardando sulla quale, vede la rotazione che conduce il primo fattore **a** a coincidere col secondo fattore **d** per la via dell'ang (**a**, **d**), compiersi nel senso delle lancette dell'orologio ossia dalla sua sinistra alla sua destra. Nel caso per esempio della figura 1,

---

[1] Comunemente: intensità, grandezza, lunghezza, o altrimenti detto tensore (Hamilton, Ferraris, ecc.).

[2] È conveniente non complicare inutilmente le relazioni scalari con la notazione "mod", ed intuitivo adoperare il metodo adottato che si trova nella cit. op. del Ferraris. Hamilton nella teoria dei quaternioni nota col simbolo funzionale Td (tensore di d).

[3] O prodotto esterno (BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elem.* cit., pag. 28) altrimenti detto vettorprodotto (Ferraris) e variamente indicato dai diversi autori: | (ad) in Grassmann, Peano ecc.; Vad in Hamilton, Ferraris, Heaviside ecc.; [ad] del Lorentz; a×d di J. W. Gibbs (prodotto gobbo ossia *skew product*).

il vettore **m** sarà diretto dal lettore verso il foglio [1] come risulta evidente (fig. 2).

Dal punto P abbasso la perpendicolare $PQ = \delta$ sul segmento OA, ossia conduco il *braccio* del vettore **a** rispetto al punto P. Dal triangolo rettangolo OPQ si ha:

$$\delta = d \operatorname{sen} \theta \tag{4}$$

e sostituendo nella (3) si ottiene:

$$m = a\delta. \tag{5}$$

Osservando poi che la rotazione che il vettore **a** tende a produrre con braccio δ intorno al punto P è concordante con quella che con-

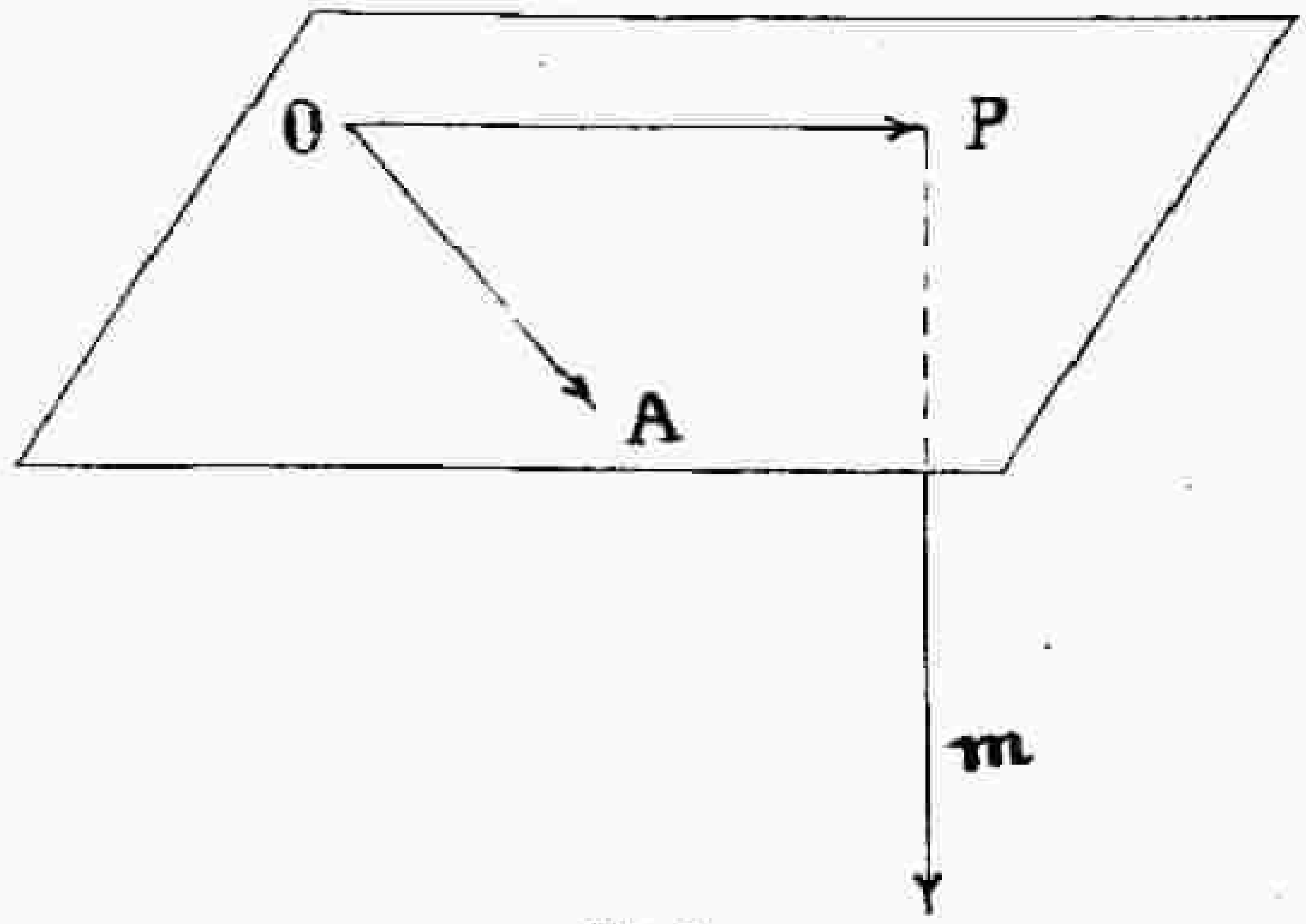

Fig. 2.

duce **a** a coincidere con **d** per la via dell'angolo θ, posso definire il momento di **a** rispetto a P come un vettore **m** avente: il punto d'applicazione nel dato punto P, il modulo uguale al prodotto dell'intensità del vettore dato per il suo braccio, la direzione perpendicolare al piano determinato dal punto dato e dal vettore dato, e per senso

---

[1] Conformi a questa sono le convenzioni adoperate da Hamilton, Tait, ecc. Questo sistema, come osservano anche BURALI-FORTI e MARCOLONGO, *Elem.* cit., nota 8, pag. 164, è contrario a quello detto della " vite destrorsa „ adoperato dal MAXWELL, *Treatise of Electricity and Magnetism.* e seguito dal GIBBS, *Elements of vector Analysis*, da O. HEAVISIDE, dal FÖPPL, dal FERRARIS, op. cit. ecc. In esso, il senso del vettorprodotto coincide col senso d'avanzamento di una vite destrorsa ordinaria. Il senso di **m** sarebbe quello nel quale bisogna guardare (intendendo il senso rivolto dagli occhi dell'osservatore al davanti di esso) perchè la terna di vettori **m**, **a**, **d** risulti destrorsa in quest'ordine di scrittura (o negli ordini di scrittura che si ottengono da questo con permutazioni cicliche); ossia il senso nel quale bisogna guardare perchè la rotazione che conduce il primo fattore **a** a coincidere col secondo fattore **d** per la via dell'angolo θ, apparisca destrorsa ossia nel senso delle lancette dell'orologio. Così, nel caso della figura 1 il senso di **m** risulta invertito e sarebbe rivolto dal foglio verso il lettore, in alto. Risulta evidente che nelle due opposte convenzioni resterebbero pure invertiti: la disposizione di una terna destrorsa, il senso del vettore rappresentativo di una rotazione meccanica, il senso dell'asse momento di una coppia, il senso di una rot (curl o giro) in rapporto a quello della circuitazione intorno a un elemento superficiale, ecc. La scelta di una convenzione piuttosto che un'altra non altera la generalità dei risultati; talchè per esempio due vettori risulteranno sempre uguali ed opposti nelle due convenzioni, se la natura della quistione è tale da generare questo risultato.

quello che va dai piedi alla testa di un osservatore diritto su esso piano e disposto su quella pagina di esso guardando alla quale vede la rotazione che il vettore dato tende a produrre col suo braccio intorno al punto dato, compiersi nel senso delle lancette dell'orologio. Tale è l'ordinaria definizione di momento. (1)

La formola vettoriale (2) e la scalare (5) presentano stretta analogia formale: la prima dà il vettore **m** mediante il prodotto (vettoriale) del vettore dato per la distanza (vettoriale) relativamente al punto P; la seconda dà pure il suo modulo mediante il prodotto del modulo del vettore dato per la distanza (2) di questo dal punto P. Tale analogia suggerisce spontanea la denominazione proposta per il vettore **d**.

Viceversa dalla definizione (5) si può passare alla (2), ottenendo dalla (4) la (3), e da questa passando alla (2) col notare al solito la concordanza di senso delle due rotazioni. Risulta poi evidente che è:

$$m = 2a_1 = a_2$$

essendo a_1 l'area del triangolo OAP ed a_2 quella del parallelogrammo costruito sui due vettori **a** e **d** presi come lati.

3. Della (5) si può dare una semplice dimostrazione analitica, partendo al solito dalla (2). Dato un sistema cartesiano ortogonale indichiamo con $\mathbf{x}_0\,\mathbf{y}_0\,\mathbf{z}_0$ ovvero con **i**, **j**, **k** (fig. 3) i vettori fondamentali di esso (versori degli assi), con xyz le coordinate di O, con XYZ i moduli delle componenti **XYZ** di **a**, con X'Y'Z' i moduli delle componenti di **d**, e con $x'y'z'$ le cordinate del punto P. Siano poi **U**, **V**, **W** le componenti di **m** sugli assi ed U, V, W i loro moduli.

Avremo allora come si sa: (3)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\Lambda\mathbf{d} &= \begin{vmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{y}_0 & \mathbf{z}_0 \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix} = \\ &= (YZ' - ZY')\,\mathbf{x}_0 + (ZX' - XZ')\,\mathbf{y}_0 + (XY' - YX')\,\mathbf{z}_0 = \\ &= U\mathbf{x}_0 + V\mathbf{y}_0 + W\mathbf{z}_0 = \mathbf{U} + \mathbf{V} + \mathbf{W} \end{aligned} \tag{6}$$

formola che, come si sa, si traduce in notazioni scalari nella seguente:

$$\begin{aligned} m^2 &= U^2 + V^2 + W^2 = \\ &= X^2(Y'^2 + Z'^2) + Y^2(Z'^2 + X'^2) + Z^2(X'^2 + Y'^2) - \\ &- 2(XYX'Y' + YZY'Z' + ZXZ'X') = \\ &= X'^2(Y^2 + Z^2) + Y'^2(Z^2 + X^2) + Z'^2(X^2 + Y^2) - \\ &- 2(X'Y'XY + Y'Z'YZ + Z'X'ZX). \end{aligned}$$

(1) Essa coincide perfettamente, anche nel senso, con quella data dall'Appell, le cui convenzioni (op. cit., § 2: *sens positif des rotations autour d'un axe*, sono pure contrarie a quelle della vite destrorsa.

(2) Nel senso ordinario di perpendicolare condotta da un punto ad una retta.

(3) Ferraris, op. cit.; Burali-Forti e Marcolongo, *Elem.* cit., pag. 42.

Abbiamo intanto per le componenti di **d**:

$$\left.\begin{aligned} X' &= x' - x \\ Y' &= y' - y \\ Z' &= z' - z \end{aligned}\right\}$$

Prendiamo ora (fig. 3) il punto dato P come origine del nostro sistema cartesiano. Allora:

$$x' = y' = z' = 0$$

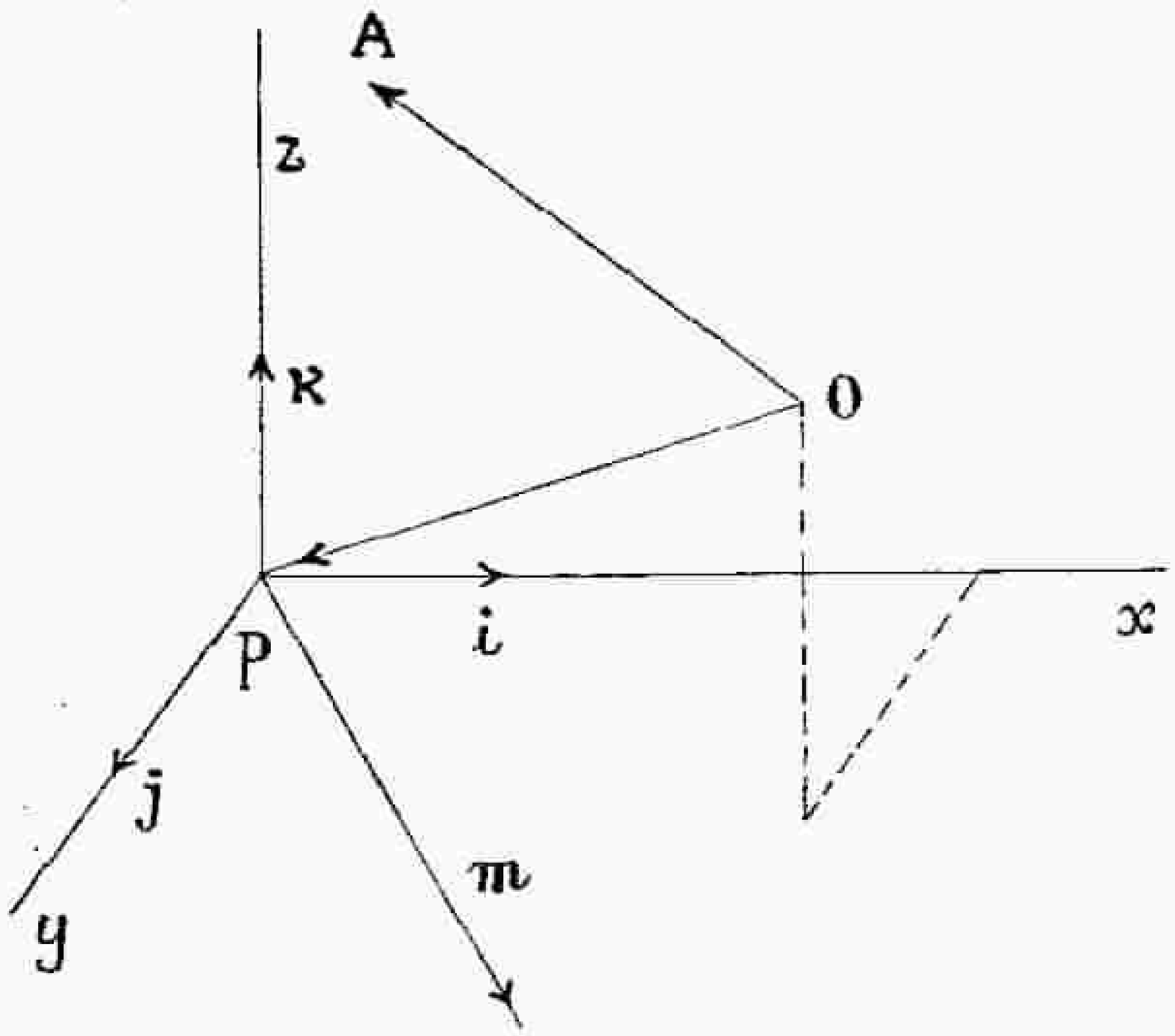

Fig. 3.

onde:

$$X' = -x, \quad Y' = -y, \quad Z' = -z$$

e sostituendo nella (6) si ha:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{d} = (Zy - Yz)\,\mathbf{x}_0 + (Xz - Zx)\,\mathbf{y}_0 + (Yx - Xy)\,\mathbf{z}_0 \tag{7}$$

la quale dimostra la (5) poichè effettivamente (Appel, *op. cit.*) i coefficienti dei vettori fondamentali,

$$L = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}$$

sono i moduli delle componenti del momento di **a**, rispetto all'origine P degli assi, ossia rispettivamente i *momenti del vettore* **a** *rispetto agli assi* x, y, z: e si avrà analogamente per essi:

$$\mathbf{m} = \mathbf{L} + \mathbf{M} + \mathbf{N}$$
$$m^2 = L^2 + M^2 + N^2.$$

Viceversa dalla (7) si passa alla (6) osservando che x, y, z sono le componenti col segno cambiato del vettore **d** sui tre assi cartesiani.

4. Dati reciprocamente i due vettori concorrenti (fig. 4)

$$\mathbf{a} = A - O$$
$$\mathbf{b} = B - O$$

e un'espressione della forma:

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} \Lambda \mathbf{b}$$

possiamo dire *che il prodotto vettoriale di due vettori qualunque si può considerare come il momento del primo fattore rispetto al punto secondo estremo del secondo fattore.*

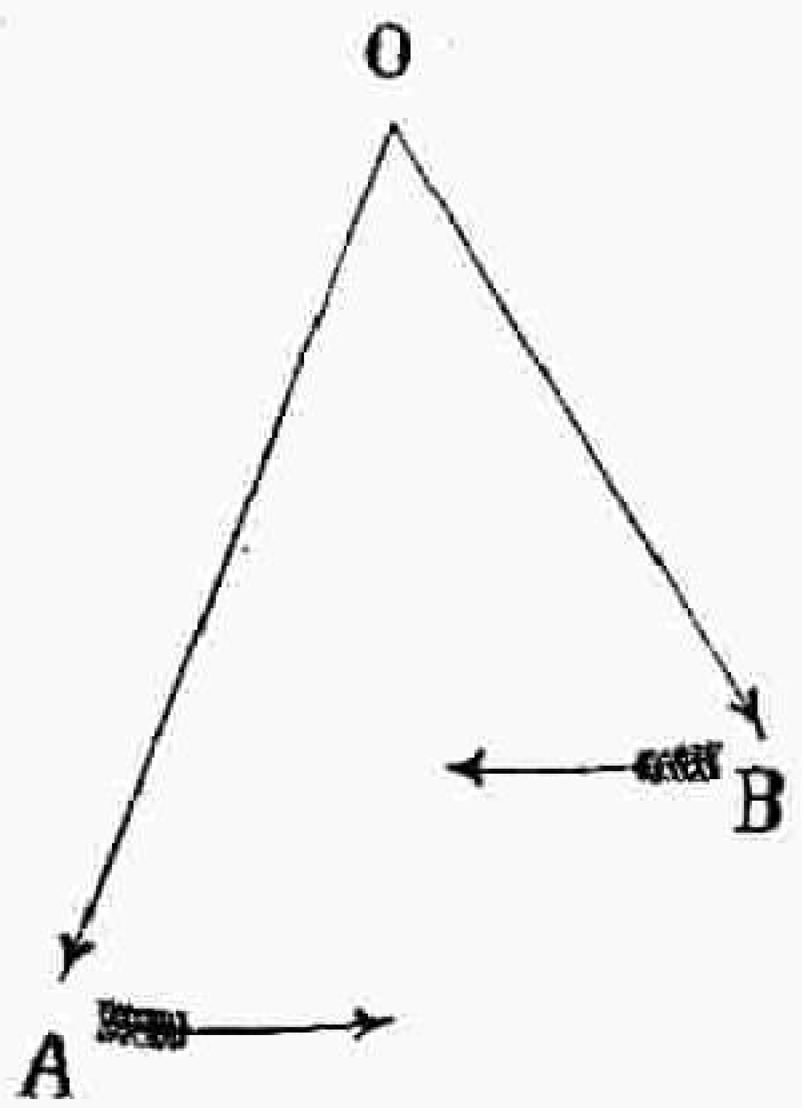

Fig. 4.

Così **p** sarà il momento di **a** rispetto al punto B, mentre

$$\mathbf{p}' = \mathbf{b} \Lambda \mathbf{a}$$

sarà il momento del vettore **b** rispetto al punto A.

E si avrà intanto, come facilmente si vede:

$$\text{mod}\, \mathbf{p} = \text{mod}\, \mathbf{p}' \qquad (8)$$

ossia:

$$p = p'.$$

Ma poichè a intorno a B tende a produrre una rotazione contraria a quella che **b** tende a produrre intorno ad A, i due vettori **p** e **p**′ in base alla definizione (5) risultano di sensi opposti, onde da ciò e dalla (8) si deduce

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}' = 0.$$

ossia:

$$\mathbf{a} \Lambda \mathbf{b} + \mathbf{b} \Lambda \mathbf{a} = 0\,, \qquad \mathbf{a} \Lambda \mathbf{b} = - \mathbf{b} \Lambda \mathbf{a}.$$

Si trova così la caratteristica inversione della proprietà commutativa del prodotto vettoriale, [1] partendo viceversa dalla quale è facile desumere che i due momenti $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ hanno risultante nulla e formano una coppia il cui braccio è precisamente la distanza AB e il cui piano è perpendicolare al piano OAB.

5. Finalmente, facendo uso della proprietà distributiva del prodotto vettoriale [2] è facile dimostrare un'estensione del teorema di Varignon che comunemente si dimostra ricorrendo a formole analitiche.

Il teorema di Varignon esprime che se n vettori $\mathbf{a}_i$ escono da un punto O e giacciono in un piano π, il momento $\mathbf{m}$, della loro risultante [3]

$$\mathbf{r} = \sum_1^n{}_i \, \mathbf{a}_i \tag{9}$$

$$\begin{aligned} r^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2\cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) + \\ + 2a_1a_3\cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) + \ldots + 2a_{n-1}\,a_n\cos(\mathbf{a}_{n-1}, \mathbf{a}_n) \end{aligned} \tag{9'}$$

rispetto a un punto P qualunque di π, è la somma algebrica dei momenti $\mathbf{m}_i$ dei vettori componenti $\mathbf{a}_i$ rispetto al medesimo punto P, ossia è:

$$\mathbf{m} = \sum_1^n{}_i \, \mathbf{m}_i, \qquad m = \sum_1^n{}_i \, m_i. \tag{10}$$

Supponiamo invece che i vettori uscenti da O non giacciano tutti nel medesimo piano: gli angoli $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_s)$ saranno in piani distinti, ma (9) e (9') varranno sempre. Preso un punto qualunque P dello spazio diciamo ancora $\mathbf{m}$ ed $\mathbf{m}_i$ i momenti di $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{a}_i$ rispetto a P. Tutti i vettori del sistema avranno evidentemente da P la medesima vettor-distanza

$$\mathbf{d} = \mathrm{P} - \mathrm{O},$$

mentre ognuno dei momenti sarà normale al piano individuato da P e dal vettore corrispondente e quindi tutti i momenti formeranno un sistema di vettori uscenti da P, e non giacenti tutti nel medesimo piano. Si ha intanto per la definizione data di momento:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{r} \Lambda \mathbf{d} \\ \mathbf{m}_i &= \mathbf{a}_i \Lambda \mathbf{d} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ma per la proprietà distributiva del vettore-prodotto:

$$\mathbf{r}\Lambda\mathbf{d} = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n)\,\Lambda\mathbf{d} = \mathbf{a}_1\Lambda\mathbf{d} + \mathbf{a}_2\Lambda\mathbf{d} + \ldots + \mathbf{a}_n\Lambda\mathbf{d}$$

ossia per le (11):

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \ldots + \mathbf{m}_n \tag{12}$$

---

(1) Ferraris, op. cit.; Burali-Forti e Marcolongo, *Elem.* cit., pag. 29, form. (4); Roiti, op. cit., § 5, form. [7].

(2) Ferraris, op. cit.; Burali-Forti e Marcolongo, *Elem.* cit., pag. 29, (3); Roiti, op. cit., § 5.

(3) Sturm Ch., *Corso di Meccanica*, trad. Vito Eugenio, Napoli, 1871, Vol. I, pag. 10.

la quale è analoga alla prima delle (10) ma, trattandosi come abbiamo visto di vettori che non agiscono lungo la stessa retta, trascina con sè l'altra:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2 + 2m_1m_2 \cos(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2) + \\ + 2m_1m_3 \cos(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3) + \ldots + 2m_{n-1}\, m_n \cos(\mathbf{m}_{n-1}, \mathbf{m}_n). \qquad (12')$$

Adunque possiamo dire che se più vettori escono da un medesimo punto e non giacciono in un medesimo piano, il momento della loro risultante rispetto a un punto qualunque dello spazio è uguale alla risultante dei momenti dei vettori componenti rispetto a quel punto. Così si può applicare in tanti altri casi la formola (2).

Nel caso del teorema di Varignon tutti i piani individuati dai vettori $\mathbf{a}_i$ e da $\mathbf{d}$ coincidono nell'unico piano π, quindi tutti i momenti avranno direzione perpendicolare a π, agiranno cioè lungo la perpendicolare condotta a π da P, e quindi la (12') si ridurrà alla seconda delle (10).

SALVATORE AUGUSTO TOSCANO.

L'n-EDRO DI "DURRANDE" NELLO SPAZIO LINEARE
con $n-1$ dimensioni

I. Dato un tetraedro $A_1A_2A_3A_4$ sussiste il teorema seguente dovuto a DURRANDE:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una sfera tangente ai sei spigoli è che si abbia:

$$A_1A_2 + A_3A_4 = A_2A_3 + A_1A_4 = A_1A_3 + A_2A_4, \qquad (1)$$

o, in altri termini:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esista una sfera che tocchi i sei spigoli di un tetraedro è che i cerchi inscritti nelle facce siano due a due tangenti.

Ogni tetraedro di queste specie lo diremo brevemente *tetraedro di Durrande.*

Nel presente articolo ci proponiamo di estendere il teorema precedente all'n-edro dello spazio lineare S_{n-1}.

Prendendo le mosse dal pentaedro dell'S_4 noi faremo vedere che sussiste il seguente

TEOREMA. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè dato un pentaedro di S_4 esista una ipersfera tangente ai 10 spigoli è che ognuno dei 5 tetraedri che si ottengono combinando i cinque vertici quattro a quattro sia un tetraedro di Durrande.*

La condizione è *necessaria*. Sia $A_1A_2A_3A_4A_5$ il pentaedro in discorso e supponiamo che esista un'ipersfera Σ tangente ai 10 spigoli. Si prenda a considerare uno qualunque degli spigoli, per es. A_1A_2, e si conducano gli S_2 determinati dalle terne $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$; essi segheranno l'ipersfera Σ secondo due circonferenze C_{123}, C_{124} inscritte rispettivamente nei triangoli $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$. Queste due circonferenze debbono toccare lo spigolo A_1A_2 nel medesimo punto, giacchè se i punti di contatto fossero distinti, la retta A_1A_2 avrebbe *due* punti — almeno — in comune con l'ipersfera Σ e quindi non sarebbe ad essa tangente secondo il supposto.

Segue da questo che se prendiamo a considerare uno *qualunque* dei cinque tetraedri di cui nell'enunciato, poichè i cerchi inscritti nelle sue facce due a due si toccano, esso ammetterà una sfera tangente a' suoi spigoli e quindi sarà un tetraedro di Durrande.

Osservazione. — Si poteva raggiungere ugualmente lo scopo in modo più breve, così:

Diciamo in generale P_{ik} il punto di contatto dell'ipersfera collo spigolo A_iA_k: dalle uguaglianze:

$$\begin{cases} A_1P_{12} = A_1P_{13} = A_1P_{14} \\ A_2P_{23} = A_2P_{24} = A_2P_{21} \\ A_3P_{31} = A_3P_{32} = A_3P_{34} \\ A_4P_{41} = A_4P_{42} = A_4P_{43} \\ A_5P_{51} = A_5P_{52} = A_5P_{53} \end{cases}$$

segue manifestamente, pel tetraedro $A_1A_2A_3A_4$,

$$\begin{aligned} A_1P_{12} + P_{12}A_2 + A_3P_{34} + P_{34}A_4 &= A_1P_{13} + P_{13}A_3 + A_2P_{24} + P_{24}A_4 \\ &= A_2P_{23} + P_{23}A_3 + A_1P_{14} + P_{14}A_4 \end{aligned}$$

ossia la (1).

La condizione è *sufficiente*. Supponiamo che ciascuno dei cinque tetraedri suddetti sia di Durrande e chiamiamo Σ_4 la sfera che tocca gli spigoli A_1A_2, A_1A_3, A_1A_5, A_2A_3, A_2A_5, A_3A_5, e Σ_5 quella che tocca gli spigoli A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4, A_3A_4. La prima sfera contiene le circonferenze C_{123}, C_{125}, C_{135}, C_{235} e la seconda contiene le circonferenze C_{123}, C_{124}, C_{234}, C_{134}. Le due sfere hanno dunque a comune la circonferenza C_{123} e tanto basta perchè esse appartengano ad una varietà sferica a 3 dimensioni di S_4: indicheremo questa varietà con Σ_{45}. Faremo vedere che Σ_{45} è precisamente l'ipersfera che tocca tutti i dieci spigoli. Intanto osserviamo che di essa fanno parte le circonferenze:

$$C_{123}\ C_{125}\ C_{135}\ C_{235}\ C_{124}\ C_{234}\ C_{134}.$$

Prendiamo ora a considerare la sfera a due dimensioni Σ_3 che tocca gli spigoli del tetraedro $A_1A_2A_4A_5$, sfera che contiene le circonferenze

$$C_{124}\ C_{125}\ C_{145}\ C_{245},$$

e chiamiamo Σ_{34} la varietà sferica a 3 dimensioni che contiene Σ_3 e Σ_4 (che hanno manifestamente in comune la C_{125}). Questa Σ_{34} contiene le circonferenze:

$$C_{123}\ C_{125}\ C_{135}\ C_{235}\ C_{124}\ C_{145}\ C_{245}.$$

Confrontando le Σ_{34} e Σ_{45} riconosciamo subito che esse hanno in comune le circonferenze:

$$C_{123}\ C_{125}\ C_{135}\ C_{235}\ C_{124}$$

ossia la Σ_4 (ciò che era prevedibile) e la circonferenza C_{124}. E siccome quest'ultima è individuata dai tre punti $P_{12}P_{24}P_{14}$ il primo dei quali fa già parte di Σ_4, potremo anche dire che Σ_{34} e Σ_{45} hanno in comune, oltre a Σ_4 i punti P_{14} e P_{24} fuori di essa, cioè in tutto 6 punti, uno più del necessario per coincidere. La Σ_{34} coincide dunque con la Σ_{45}.

Se ora consideriamo le varietà sferiche a 3 dimensioni:

$$\Sigma_{34}\ \Sigma_{45}\ \Sigma_{51}\ \Sigma_{12}\ \Sigma_{23}\ \Sigma_{31}\ \Sigma_{14}\ \Sigma_{42}\ \Sigma_{25}\ \Sigma_{53}$$

nell'ordine in cui sono scritte, vediamo subito che due qualunque di esse consecutive coincidono per quanto abbiamo detto sopra e quindi coincidono *tutte* in un'unica varietà sferica a 3 dimensioni Σ la quale tocca tutti e 10 gli spigoli. Il teorema è così dimostrato.

Rimane anche dimostrato che:

Se in S_4 si prendono 5 ipersfere che due a due si toccano, i loro punti di contatto appartengono a una medesima ipersfera.

DEFINIZIONE. — *Chiameremo "pentaedro di Durrande" ogni pentaedro di S_4 le cui facce siano tetraedri di Durrande.*

2. Andiamo ora ad estendere il teorema precedente allo spazio S_{n-1}. Faremo uso del metodo di induzione dimostrando che esso vale per l'n-edro di S_{n-1} quando si ammetta che valga per l'$(n-1)$-edro di S_{n-2}. Dimostreremo che:

La condizione necessaria e sufficiente perchè un n-edro di S_{n-1} ammetta un'ipersfera tangente a' suoi $\frac{n.(n-1)}{2}$ spigoli è che ciascuno degli $\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}$ tetraedri che si ottengono combinando gli n vertici a quattro a quattro sia di Durrande.

Ammesso dunque che un $(n-1)$-edro di S_{n-2} sia di Durrande — che esista cioè un'ipersfera tangente a' suoi spigoli — quando e solamente quando ognuno dei tetraedri che hanno per vertici quattro vertici di esso sia di Durrande, prendiamo a considerare un n-edro di S_{n-1} e andiamo a dimostrare il teorema enunciato sopra.

La condizione è *necessaria*. Infatti, dato che gli spigoli di tale n-edro siano tangenti a una ipersfera, consideriamo $n-1$ dei vertici e l'S_{n-2} da essi determinato. Questo segherà l'ipersfera secondo un'ipersfera di S_{n-2} alla quale dovranno essere tangenti gli spigoli dell'$(n-1)$-edro che ha per vertici i punti considerati. Tale $(n-1)$-edro sarà dunque di Durrande e quindi anche i tetraedri che fanno parte di esso saranno di Durrande.

Segue da questo che *tutti* i tetraedri che hanno per vertici quattro vertici dell'n-edro sono di Durrande e questo prova la prima parte.

La condizione è *sufficiente*. Infatti, detti $A_1 A_2 - A_n$ i vertici dell'n-edro in discorso, se supponiamo che tutti i tetraedri facenti parte di esso siano di Durrande, tali saranno anche gli $(n-1)$-edri che hanno per vertici $n-1$ vertici dell'n-edro. Esisteranno in particolare le sfere a $n-3$ dimensioni tangenti agli spigoli degli $(n-1)$-edri:

$$A_1 A_2 \ldots A_{n-3} A_{n-2} A_{n} \quad \text{e} \quad A_1 A_2 \ldots A_{n-2} A_n$$

che diremo rispettivamente Σ_n e Σ_{n-1}. È subito visto che queste due varietà sferiche hanno in comune la varietà sferica ad $n-4$ dimensioni $C_{12} \ldots (n-2)$ determinata dai punti di contatto degli spigoli dell'$(n-2)$-edro $A_1 A_2 \ldots A_{n-2}$ e questo ci basta per dire che esse apparterranno ad una ipersfera $\Sigma_{n \cdot n-1}$ di S_{n-1},

Analogamente, presa a considerare un'altra sfera ad $n-3$ dimensioni Σ_{n-2}, si dimostrerebbe che essa e la Σ_{n-1} appartengono a una ipersfera $\Sigma_{n-2 \cdot n-1}$ di S_{n-1}. Queste due ipersfere, la $\Sigma_{n \cdot n-1}$ e la $\Sigma_{n-1 \cdot n-2}$ debbono coincidere giacchè, oltre la Σ_{n-1} hanno in comune la varietà sferica a $n-4$ dimensioni $C_{1 \cdot 2 \ldots (n-3)(n-1)}$ e quindi *un punto almeno* in comune fuori di Σ_{n-1}.

Mostrato così che due varietà ipersferiche Σ_{hk}, Σ_{hl} aventi un indice comune coincidono, è facile far vedere che esiste un'ipersfera Σ tangente agli $\frac{n.(n-1)}{2}$ spigoli.

Distribuiamo perciò le $\frac{n(n-1)}{2}$ Σ_{hk} in $n-1$ gruppi $G_1 G_2 - G_{n-1}$ conforme al quadro seguente:

$$\begin{array}{lll}
\text{Gruppo} & G_1 & [\Sigma_{12} \;\; \Sigma_{13} \;\; \ldots\ldots\ldots \;\; \Sigma_{1n}] \\
\quad " & G_2 & [\Sigma_{23} \;\; \Sigma_{24} \;\; \ldots\ldots\ldots \;\; \Sigma_{2n}] \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad " & G_p & [\Sigma_{p \cdot p+1} \;\; \Sigma_{p \cdot p+2} \;\; . \;\; \Sigma_{p \cdot n}] \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad " & G_{n-1} & [\Sigma_{n-1 \cdot n}].
\end{array}$$

Si riconosce subito:

1° che due Σ del medesimo gruppo (eccetto l'ultimo) hanno un indice in comune;

2° che la prima Σ di un gruppo ha un indice comune colla prima Σ del gruppo successivo (eccetto l'ultimo).

Basta questo per concludere, in base all'osservazione precedente, che tutte le $\frac{n(n-1)}{2}$ Σ_{hk} coincidono in un'unica Σ tangente a tutti gli spigoli. Il teorema è così dimostrato.

Possiamo dunque dare la:

Definizione. — *Un* n*-edro di* S_{n-1} *è di Durrande se tutti i tetraedri che fanno parte di esso sono di Durrande.*

O anche:

Un n*-edro di* S_{n-1} *è di Durrande se tutti gli* $(n-1)$-edri *che fanno parte di esso sono di Durrande.*

Risultano anche dimostrati i due teoremi seguenti:

Se in S_{n-1} *si prendono* n *ipersfere tangenti due a due, i loro punti di contatto appartengono a un'ipersfera.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè le perpendicolari alle facce di un n*-edro di* S_{n-1} *nei punti di contatto dell'ipersfera inscritta passino per un punto è che l'*n*-edro sia di Durrande.*

E. Piccioli.

SULLA DEFINIZIONE DI POLIEDRO REGOLARE

1. L'argomento che mi propongo di trattare fu ancora oggetto di studio (Ciamberlini, *Bollettino di Matematica*, anno VIII, pag. 243); non credo tuttavia inutile ritornare sulla complessa ed interessante questione.

A tale scopo osservo anzitutto che una definizione, avendo l'ufficio logico di assegnare il nome od un predicato ad un ente che gode determinate proprietà, non è mai per se stessa insufficiente, ma può esserlo rispetto ad un ente già noto.

Una definizione può essere esuberante, ma ciò, mentre renderebbe imperfetto l'enunciato di un teorema e più complicata la sua dimostrazione, non nuoce affatto all'esattezza di una definizione, che, essendo aprioritica, può per questo non andare immune da tale difetto. Potrà quindi avvenire che teoremi successivi ne mettano in chiara luce eventuali esuberanze.

Ciò che solo deve evitarsi è l'inclusione di condizioni fra loro in opposizione; ed a prevenire tale inconveniente è opportuno premettere alla definizione l'accertamento dell'esistenza dell'ente definito.

2. Il cubo ha gli angoloidi regolari ed uguali. È quindi ovvio porre la

Definizione. — *Si dice regolare un poliedro avente le facce regolari ed uguali, e gli angoloidi regolari ed uguali* (Lazzeri e Bassani, Riboni).

Volendo poi indagare se in essa esistano condizioni esuberanti, si potrà far capo al noto criterio di uguaglianza dei poliedri:

Due poliedri dello stesso ordine, se hanno le facce rispettivamente uguali e disposte allo stesso modo, sono uguali.

Da questo intanto deriva che se un poliedro ha le facce uguali alle facce di un esistente poliedro regolare del medesimo ordine, è pur esso regolare. E siccome poi in qualunque poliedro si può sempre fare astrazione da una, almeno, delle sue facce, rimanendo con ciò invariato il numero e la posizione dei vertici, si ha il

TEOREMA. — *Se può esistere un poliedro regolare di emmesimo ordine a facce di* n *lati, allora un qualunque poliedro di emmesimo ordine avente* m — 1 *facce di* n *lati regolari ed uguali è regolare.*

3. Il teorema che precede appalesa *a priori* l'insufficienza, rispetto ai poliedri di PLATONE, della definizione seguente:

Un poliedro avente le facce regolari ed uguali è regolare (BORTOLOTTI, GIUDICE)

la quale, del resto, è notoriamente dimostrata insufficiente *a posteriori* dell'esistenza delle due doppie piramidi triangolari e pentagonali aventi per facce dei triangoli equilateri uguali.

Nè vale a sostegno della tesi contraria la seguente proposizione di CAUCHY:

Dans un polyèdre convexe, dont toutes les faces sont invariables, les coins compris entre les faces, ou, ce qui revient au même, les inclinaisons sur les differentes arêtes sont aussi invariables: en sorte qu'avec les mêmes faces, on ne peut construire qu'un second polyèdre convexe symétrique du premier

la quale manifestamente si riferisce ad un poliedro esistente e quindi determinato dalle sue facce; mentre poi in generale con *n* poligoni dati non si può costruire un poliedro.

4. Ad eliminare l'insufficienza di cui sopra, vale la definizione seguente:

Un poliedro è regolare se ha le facce regolari ed uguali, e gli angoloidi della stessa specie. (TESTI).

Ma, per dedurne l'uguaglianza dei diedri, si deve ricorrere al criterio di uguaglianza dei poliedri.

Altrettanto può dirsi della definizione seguente:

Un poliedro è regolare se ha le facce regolari ed uguali e gli angoloidi uguali (VERONESE).

Le due precedenti definizioni differiscono solo quando si considerino poliedri con angoloidi pentaedri; poichè per angoloidi triedri e tetraedri la condizione che siano della stessa specie si traduce nell'uguaglianza degli angoloidi. La seconda definizione però appare più giustificata ed esplicita.

5. Indipendentemente dal criterio di uguaglianza dei poliedri e dal conseguente teorema sui poliedri regolari, premessa la sola definizione (2), si possono dimostrare direttamente come proposizioni le note definizioni seguenti:

a) *Un poliedro è regolare se ha le facce regolari ed uguali, ed i diedri pure uguali* (SANNIA e D'OVIDIO, FAIFOFER).

Infatti gli angoloidi, avendo le facce uguali ed i diedri uguali, sono regolari. Per concludere poi che sono anche uguali è sufficiente osservare che angoloidi regolari con facce uguali e diedri uguali sono necessariamente della stessa specie.

b) *Un poliedro è regolare se ha le facce e gli angoloidi regolari* (BALTZER, REGGIO).

Infatti, per la regolarità degli angoloidi, sono uguali i diedri di ciascuno; ma ogni diedro è comune a due angoloidi, e quindi tutti i diedri sono uguali. Inoltre, per la regolarità dei poligoni e degli angoloidi, tutti gli angoli piani sono uguali; e per concludere che i poligoni sono uguali è sufficiente osservare che poligoni regolari con angoli uguali sono necessariamente della stessa specie. Ed allora, per la proposizione precedente, gli angoloidi sono uguali ed il poliedro è regolare.

D. FELLINI.

PROBLEMI [1]

1. Dimostrare che

$$\frac{3+\sqrt{7}}{1.2(1+\sqrt{7})(2+\sqrt{7})}+\frac{5+\sqrt{7}}{2.3(2+\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}+\frac{7+\sqrt{7}}{3.4(3+\sqrt{7})(4+\sqrt{7})}+\ldots=\frac{1}{1+\sqrt{7}}.$$

Dimostrare che

$$\frac{1}{2(2^2-1)}+\frac{1}{3(3^2-1)}+\frac{1}{4(4^2-1)}+\ldots+\frac{1}{n(n^2-1)}=$$
$$=\frac{(n-1)(n+2)}{4n(n+1)}$$

e dedurne

$$\frac{1}{2(2^2-1)}+\frac{1}{3(3^2-1)}+\frac{4}{4(4^2-1)}+\ldots=\frac{1}{4}.$$

2. L'area compresa fra la cubica

$$y=\lambda(x-B)\sqrt{\frac{x-A}{C-x}}$$

ed il suo asintoto è

$$U=\frac{\pi\lambda(C-A)(A-4B+3C)}{4}.$$

Spiegare perchè $U=0$ per $4B=A+3C$.

---

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

3. Risolvere un triangolo conoscendo un lato a, l'area S e la lunghezza l del lato del più piccolo triangolo equilatero inscritto.

4. Dimostrare che l'equazione

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{9+4x}-\sqrt[3]{9-4x}$$

ha per radice $x=\sqrt{5}$, e che per questo valore ciascuno dei membri dell'equazione è $\sqrt{5}$. Calcolare le altre radici.

5. Siano P e P' due punti fissi situati sull'asse maggiore di una ellisse equidistanti dal centro O, e M un punto variabile sulla ellisse. Ciascuno dei punti di Brocard dal triangolo MPP' descrive una curva unicursale di 8° ordine.

6. In un triangolo ABC si considerino tre *ceviane* AA_1, BB_1, CC_1, che s'incontrino in D. Siano A_2, B_2, C_2 i punti medi di DA_1, DB_1, DC_1 e A_3, B_3, C_3 i punti medi di AA_1, BB_1, CC_1. 1°. Le aree dei due triangoli $A_2B_2C_2$ e $A_3B_3C_3$ sono equivalenti; 2°. Se x, y, z sono le coordinate normali del punto I, il rapporto dell'area $A_3B_3C_3$ all'area ABC è

$$\frac{S_3}{S}=\frac{abcxyz}{2(ax+by)(ax+cz)(by+cz)}.$$

7. Siano AB una corda fissa d'un circolo O, M un punto del piano, T uno dei punti di contatto delle tangenti a O condotte da M. Il luogo dei punti M tali che $\overline{MT}^2=MA\,.\,MB$, si compone della retta AB e d'un circolo passante per A e B e di raggio $\frac{\overline{OA}^2}{2OC}$, essendo C il punto medio di AB.

8. La normale e la tangente in un punto M d'una ellisse incontrano l'asse maggiore in N e T rispettivamente. Sieno P e Q i simmetrici di M rispetto a N e T.

1°. Il luogo di P è un'ellisse;

2°. Il luogo di Q è una quartica, tale che l'area compresa fra essa ed i suoi asintoti è equivalente al triplo di quella dell'ellisse.

3°. Il luogo del punto medio S di PQ è una quartica tale che l'area compresa fra essa ed i suoi asintoti è $\frac{\pi b}{a}(2a^2-b^2)$.

9. Si consideri una cissoide retta c e la parallela d all'asintoto condotta per il punto di regresso O. La tangente e la normale in M alla cissoide incontrano d in T ed N. Siano P e Q i simmetrici di M rispetto a T ed N. Se M si sposta sulla cissoide il luogo di ciascuno dei punti P e Q è una quintica.

10. Si consideri una ellisse E ed una iperbole equilatera H avente per asintoti gli assi dell'ellisse. Dimostrare che l'iperbole d'Apollonio dell'ellisse E relativa alle normali ad E condotte dai diversi punti di H, ha il suo asse maggiore costante.

11. Sia M il punto d'incontro delle tangenti ed N il punto d'incontro delle normali nei punti A, B di un'ellisse data; M' il punto d'incontro delle rette condotte per A, B simmetricamente ad AM e BM rispetto alle direzioni degli assi, N' il punto d'incontro delle rette condotte per A e B simmetricamente ad AN e BN rispetto alle direzioni degli assi.

Dimostrare che fra le coordinate dei punti M, N, M', N' rispetto agli assi dell'ellisse esistono le relazioni

$$\frac{(x_M - x_{M'})(y_M - y_{M'})}{x_N \cdot y_N} = \text{costante}$$

$$\frac{(x_N - x_{N'})(y_N - y_{N'})}{x_{N'} \cdot y_{N'}} = \text{costante.}$$

12. Luogo del centro dei circoli che sono tangenti a una parabola e che passano per il suo vertice. Luogo del punto d'incontro delle altre due tangenti comuni al circolo e alla parabola.

(Continua)

E.-N. BARISIEN.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI WILSON GENERALIZZATO

Nella maggior parte dei Trattati elementari sulla Teoria dei numeri, il Teorema di Wilson generalizzato è lasciato un po' in ombra ed in qualcuno, per es. negli " Elemente der Zahlentheorie " del Bachmann, viene anche omesso; ed in tutti, fatta eccezione del Serret, non mi sembra al suo posto naturale.

La dimostrazione che di questo importante Teorema si legge nell' " Algèbre Supérieure " del Serret (Tomo II, §§ 292 e 296) benchè indipendente dal Teorema di Fermat e dal concetto di radice primitiva, si basa sul numero delle coppie di radici coniugate di

$$x^2 - 1 \equiv 0 \qquad \text{mod } m$$

la cui determinazione riesce piuttosto laboriosa.

In questa noterella mi propongo di mostrare come, subito dopo la generalizzazione del Teorema di Fermat, usando di una formola importante che ne è conseguenza immediata, si possa speditamente ottenere la generalizzazione del Teorema di Wilson, che si potrà poi sfruttare per la determinazione dei moduli che ammettono radici primitive.

Supponiamo già dimostrato che indicando con

$$r_1\, r_2 \ldots r_{\varphi(n)}$$

i $\varphi(n)$ residui primi con n, si ha

$$\Pi r \equiv -1 \qquad \text{mod } n$$

per $n=4$, p^ν, $2p^\nu$ che costituisce, per modo di dire, la parte positiva dell'enunciato e che si ottiene con le stesse identiche considerazioni che servono pel caso $n=p$.

Ricordiamo inoltre che dal Teorema di Fermat discende che, essendo $a, b, c \ldots$ numeri primi tra loro due a due il cui prodotto sia π, ed $\alpha_i, \beta_h, \gamma_k$ numeri rispettivamente inferiori ad $a, b, c \ldots$ e primi con essi, l'espressione

$$P_{ihk\ldots} = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\varphi(a)} . \alpha_i + \left(\frac{\pi}{b}\right)^{\varphi(b)} . \beta_h + \left(\frac{\pi}{c}\right)^{\varphi(c)} . \gamma_k \ldots$$
$$i=1,2\ldots\varphi(a); \quad h=1,2\ldots\varphi(b); \quad k=1,2\ldots\varphi(c)\ldots$$

dà il sistema dei

$$\varphi(a) . \varphi(b)\, \varphi(c) \ldots = \varphi(\pi)$$

numeri congrui mod π ai residui di π primi con esso.

Ciò premesso, passiamo a dimostrare che esclusi per n i tre casi precedentemente considerati si ha:

$$\Pi . r \equiv 1 \qquad \text{mod } n.$$

In primo luogo sia $n=2^\lambda$ $(\lambda > 2)$ e per brevità si ponga $\varphi(2^\lambda) = \nu$, e supposto che per un certo $\lambda > 2$ sia

$$\Pi r \equiv 1 \qquad \text{mod } 2^\lambda$$

facciamo vedere che ciò ha luogo pure per $2^{\lambda+1}$.

Se infatti

$$r_1\, r_2 \ldots r_\nu$$

sono i residui dispari mod 2^λ, quelli rispetto a $2^{\lambda+1}$ saranno:

$$r_1, r_2 \ldots r_\nu, (r_1+2^\lambda), (r_2+2^\lambda) \ldots (r_\nu+2^\lambda). \tag{1}$$

Se ora facciamo il prodotto dei numeri (1) omettendo quei termini che risultano esplicitamente multipli di $2^{\lambda+1}$, otteniamo:

$$P \equiv (r_1 . r_2 \ldots r_\nu) . (r_1 r_2 \ldots r_\nu) . 2^\lambda . S \qquad \text{mod } 2^{\lambda+1} \tag{2}$$

indicando con S la somma dei prodotti a $\nu-1$ a $\nu-1$ dei ν fattori r.

Ma i fattori r sono dispari ed S come somma di $\nu=2^{\lambda+1}$ numeri dispari, è manifestamente pari per cui la (2) diventa

$$P \equiv (r_1 r_2 \ldots r_\nu)^2 \qquad \text{mod } 2^{\lambda+1}. \tag{3}$$

Ammesso ora che

$$\Pi r \equiv 1 \qquad \text{mod } 2^\lambda$$

si ha:

$$\Pi r = 1 + k . 2^\lambda$$

e sostituendo in (3)

$$P \equiv 1 + k 2^{\lambda+1} + k^2 . 2^{2\lambda}$$

ed infine:

$$P \equiv 1 \qquad \mod 2^{\lambda+1}.$$

Poniamo ora che n sia divisibile per due o più fattori primi diversi escludendo il caso già considerato $n = 2 \cdot p^{\lambda}$: sia quindi

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_h^{\alpha_h}.$$

Per quanto si è precedentemente ricordato, la formola

$$A_1 r_1 + A_2 r_2 + \ldots A_i r_i + A_h r_h \qquad (4)$$

dove si è posto

$$A_i = \left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right)$$

ed r_i indica uno qualunque dei $\varphi(p_i^{\alpha_i})$ residui primi con $p_i^{\alpha_i}$, fornisce un sistema di $\varphi(n)$ residui primi con n.

S'immaginino ora scritti i $\varphi(n)$ numeri (4) l'uno sotto all'altro e si moltiplichino tra loro. Si scorge immediatamente che i prodotti parziali contenenti due o più fattori presi da colonne diverse, sono multipli di n e ne segue che il prodotto dei numeri (4) soddisfa alla congruenza:

$$P \equiv \sum_1^h A_i^{\varphi(n)} \cdot (\pi r_i)^{\varphi\left(\frac{n}{p_i^{\alpha_i}}\right)} \qquad \mod n$$

da cui segue che P diviso per $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}$, $p_h^{\alpha_h}$ dà per resto 1, cioè che $P - 1$ è divisibile per ciascun $p_i^{\alpha_i}$ e quindi pel loro prodotto n.

Resta così provato che

$$P \equiv 1 \qquad \mod n$$

U. Scarpis.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 791 E 792

791. *Essendo A, B le proiezioni ortogonali di un punto P sopra due rette x, y concorrenti in O, trovare l'inviluppo della retta AB, quando P descrive un circolo di centro O.*

D. Gambioli.

Risoluzione del prof. Giuseppe Usai di Bobbio (Pavia).

Presi come assi Cartesiani, le due rette x e y concorrenti in O ed inclinate di un certo angolo α, l'equazione del cerchio di raggio r e descritto da $P(xy)$ è:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\alpha = r^2. \qquad (1)$$

Se A, B sono le proiezioni ortogonali di P rispettivamente su x e y si trova:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PA}^2 + 2BP \cdot PA \cos\alpha$$

e poichè

$$AP = y \operatorname{sen}\alpha \qquad PB = x \operatorname{sen}\alpha$$

sostituendo nella precedente e tenendo presente la (1) si ha: $AB = r \operatorname{sen} \alpha$, cioè: la lunghezza AB è indipendente dal punto P.

Onde la proposta questione si riduce a quest'altra:

Trovare l'inviluppo di un segmento di lunghezza costante che si muove tenendo un estremo sull'asse x e l'altro estremo sull'asse y.

Ciò da luogo alla tetracuspide ($\alpha \neq 90$) il cui studio fu proposto da Merlieux nel 1842 (*Nouv. Ann.*, 1842, pag. 59, quest. 12) e l'equazione in forma simmetrica fra le coordinate fu data dal Joachmisthal. (¹)

Tali risultati si applicano facilmente al caso nostro in cui la lunghezza del segmento inscritto nell'angolo α è $r \operatorname{sen} \alpha$.

Si ponga:

$$a = OA \qquad b = OB \qquad l = r \operatorname{sen} \alpha$$

e si ha come equazione della retta mobile:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{2}$$

ove x e y sono le coordinate dei punti; a e b sono i parametri variabili legati dalla:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = l^2. \tag{3}$$

Si scriva ora l'equazione:

$$\begin{vmatrix} -\frac{x}{a^2} & -\frac{y}{b^2} \\ 2a - 2b \cos \alpha & 2b - 2a \cos \alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

rappresentante il determinante funzionale delle (2) e (3) rispetto alle a e b.

Come è noto, per avere l'inviluppo richiesto bisognerà eliminare a e b dalle (2), (3), (4).

A tal uopo, chiamando λ un fattore di proporzionalità, dalla (4) si hanno le due:

$$\frac{x}{a^2} = \lambda (a - b \cos \alpha) \qquad \frac{y}{b^2} = \lambda (b - a \cos \alpha)$$

dalle quali con facili calcoli e tenendo presenti le (2) e (3) si ha $\lambda = \frac{1}{l^2}$ sicchè:

$$xl^2 = a^2 (a - b \cos \alpha) \qquad yl^2 = b^2 (b - a \cos \alpha)$$

si faccia:

$$a + b = s \qquad ab = p$$

allora risulta:

$$s^2 = l^2 + 4p \cos^2 \tfrac{1}{2} \alpha \qquad (5) \qquad l^2 (x + y) = s (l^2 - 2p \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \alpha) \qquad (6)$$

$$l^4 xy = p^3 \operatorname{sen}^2 \alpha - l^2 p^2 \cos \alpha. \tag{7}$$

Si elevi al quadrato la (6) tenendo conto della (5) e si avrà:

$$l^4 (x + y)^2 = [l^2 + 4p \operatorname{sos}^2 \tfrac{1}{2} \alpha] [l^2 - 2p \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} \alpha]^2. \tag{8}$$

Basterà ora eliminare dalle (7) ed (8) la p e si avrà un'equazione evidentemente simmetrica fra le coordinate x e y.

(¹) *Note sur l'enveloppe d'une droite de longuer constante, inscrite dans un angle retiligne quelconque*, par le Docteur JOACHMISTHAL, agrégé à l'Université de Berlin (*Nouv. Ann.*, 1847, pagine 260-262.

ove:

$$\begin{array}{llll} A = \operatorname{sen}^2 \alpha & B = -l^2 \cos \alpha & C = 0 & D = -l^4 xy \\ A' = 4 \operatorname{sen}^2\alpha \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\alpha & B' = 4l^2 \operatorname{sen}^2\alpha [5 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\alpha - 4] & C' = 4l^4 \cos\alpha & D' = l^4 [l^2 - (x+y)^2]. \end{array}$$

Perciò mettiamo le suddette equazioni sotto la forma:

$$\begin{gathered} Ap^3 + Bp^2 + Cp + D = 0 \\ A'p^3 + B'p^2 + C'p + D' = 0. \end{gathered}$$

L'eliminazione col metodo di Bezout (¹) conduce all'equazione:

$$\begin{vmatrix} AB' & AC' & AD' \\ AC' & BC' + AD' & BD' \\ AD' & BD' & CD' \end{vmatrix}$$

ovvero sviluppando:

$$[AB' . BC' - AC'^2 + AB' . AD'] CD' - [AB' . BD' - AC' . AD'] BD' + \\ [AC' . BD' - AD'^2 - AD' . BC'] AD' = 0 \quad (9)$$

ove AB' rappresenta la differenza $AB' - BA'$ e similmente per BC' ecc....

Il termine di grado maggiore è evidentemente dato dal binomio $[AD' - DA']^2$ sicchè l'inviluppo è del sesto grado.

Eseguendo i calcoli si trova:

$$\begin{array}{lll} AB' = -3l^2 \operatorname{sen}^4 \alpha & AC' = 4l^4 \operatorname{sen}^2 \alpha \cos \alpha & AD' = M\, l^4 \operatorname{sen}^2 \alpha \\ BC' = -4l^6 \cos^2 \alpha & BD' = -Ml^6 \cos \alpha - 3l^6\, xy \operatorname{sen}^2 \alpha & \\ CD' = 4l^8\, xy \cos \alpha & \text{ove} \quad M = l^2 - x^2 - y^2 - 2xy \cos \alpha. & \end{array}$$

Se si rappresentano con P, Q, R rispettivamente i tre prodotti che compongono l'equazione (9) di modo che si ha: $P - Q + R = 0$, si ottiene:

$$\begin{aligned} P &= -4l^{14}\, xy \cos \alpha \operatorname{sen}^4 \alpha\, [4l^2 \cos^2 \alpha + 3M \operatorname{sen}^2 \alpha] \\ Q &= -l^{14} \operatorname{sen}^4 \alpha\, [M \cos \alpha + 3xy \operatorname{sen}^2 \alpha] [-M \cos \alpha + 9xy \operatorname{sen}^2 \alpha] \\ R &= -M\, l^{12} \operatorname{sen}^6 \alpha\, [12\, l^2\, xy \cos \alpha + M^2] \end{aligned}$$

e da qui:

$$\operatorname{sen}^2\alpha [-M^3 + 27x^2y^2l^2 \operatorname{sen}^2\alpha] - 2l^2xy \cos\alpha [8l^2 \cos^2\alpha + 9M \operatorname{sen}^2\alpha] - M^2l^2 \cos^2\alpha = 0$$

nel caso nostro di $l = r \operatorname{sen} \alpha$

$$-M^3 + 27x^2y^2r^2 \operatorname{sen}^4 \alpha - 2r^2xy \cos\alpha \operatorname{sen}^2\alpha [8r^2 \cos^2\alpha + 9M] - M^2r^2 \cos^2\alpha = 0 \quad (10)$$

ove $M = r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha - x^2 - y^2 - 2xy \cos \alpha$.

Si ha così un'equazione di sesto grado e la curva inviluppo è del sesto ordine ed è precisamente la curva nota sotto il nome di tetracuspide. (²)

Come caso particolare, se le rette x e y sono ortogonali, cioè se è $\alpha = \frac{\pi}{2}$ la (10) diventa:

$$-M^3 + 27\, x^2\, y^2\, r^2 = 0$$

ossia

$$M = 3x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\, r^{\frac{2}{3}} \quad (11)$$

ove

$$M = r^2 - x^2 - y^2$$

pari alla

$$r^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

(¹) Pascal, *I determinanti*, 1897, pag. 275.

(²) Molte proprietà di questa curva sono enunciate da Steiner (*Nouv. Ann.*, 1858) ulteriori studi sono dovuti a Bellavitis e Mannheim (*Nouv. Ann.*, 1878) e la rettificazione si trova in " Ma-thesis ", 1894, pag. 129.

giacchè come si può verificare, la (11) è identicamente soddisfatta quando in luogo di r^2_1 e di r^2 si mettano i valori ricavati dalla (12).

La curva (11) o (12) poi, come è noto, rappresenta un'asteroide o ipocicloide a quattro cuspidi, curva di grande importanza nella Meccanica.

GIUSEPPE USAI.

Altra risoluzione del sig. E.-N. Barisien di Parigi.

Prendiamo per assi x e y le bisettrici degli angoli formati dalle due rette date, l'angolo acuto delle quali indicheremo con 2ω. Se α, β sono le coordinate del punto P, R la sua distanza dall'origine, φ l'angolo che fa coll'asse delle x, si ha

$$\alpha = \mathrm{R} \cos\varphi, \qquad \beta = \mathrm{R} \operatorname{sen}\varphi. \tag{1}$$

Una delle rette date ha per equazione

$$y = x \,.\, \tan\omega, \qquad \text{ovvero} \qquad x \operatorname{sen}\omega - y \cos\omega = 0. \tag{2}$$

La perpendicolare ad essa condotta da P ha per equazione

$$(x - \alpha)\cos\omega + (y - b)\operatorname{sen}\omega = 0. \tag{3}$$

Risolvendo il sistema formato dalle (2), (3) si trovano le coordinate di A, che sono

$$x = \cos\omega\,(\alpha\cos\omega + \beta\operatorname{sen}\omega), \qquad y = \operatorname{sen}\omega\,(\alpha\cos\omega + \beta\operatorname{sen}\omega).$$

In simil guisa si trova che le coordinate di B sono

$$x = \cos\omega\,(\alpha\cos\omega - \beta\operatorname{sen}\omega), \qquad y = -\operatorname{sen}\omega\,(\alpha\cos\omega - \beta\operatorname{sen}\omega).$$

Perciò l'equazione della retta AB è

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (\alpha\cos\omega + \beta\operatorname{sen}\omega)\cos\omega & (\alpha\cos\omega + \beta\operatorname{sen}\omega)\operatorname{sen}\omega & 1 \\ (\alpha\cos\omega - \beta\operatorname{sen}\omega)\cos\omega & -(\alpha\cos\omega - \beta\operatorname{sen}\omega)\operatorname{sen}\omega & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$\alpha x - \beta y = \alpha^2\cos^2\omega - \beta^2\operatorname{sen}^2\omega, \tag{4}$$

e, tenendo conto delle (1),

$$x\cos\varphi - y\operatorname{sen}\varphi = \mathrm{R}\,(\cos^2\varphi\cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\varphi\operatorname{sen}^2\omega). \tag{5}$$

L'equazione derivata rispetto a φ è

$$x\operatorname{sen}\varphi + y\cos\varphi = 2\,\mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi, \tag{6}$$

ed è indipendente dall'angolo ω.

Risolvendo le (5), (6) si trovano i valori di x, y in funzione di φ

$$x = \mathrm{R}\cos\varphi\,(2 - \operatorname{sen}^2\omega - \cos^2\varphi), \tag{7}$$
$$y = \mathrm{R}\operatorname{sen}\varphi\,(2 - \cos^2\omega - \operatorname{sen}^2\varphi). \tag{8}$$

La curva inviluppo di AB è dunque una sestica unicursale. Formando

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = x\frac{dy}{d\varphi} - y\frac{dx}{d\varphi},$$

si trova facilmente per l'area di questa curva chiusa

$$\mathrm{U} = \frac{\pi\,\mathrm{R}^2\,(8\operatorname{sen}^2\omega\cos^2\omega + 1)}{8} = \frac{\pi\,\mathrm{R}^2\,(2\operatorname{sen}^2 2\omega + 1)}{8}.$$

Se le rette date sono ortogonali ($\omega = 45^\circ$), si ha

$$U = \frac{3\pi R^2}{8}.$$

D'altronde si sa che in questo caso $AB = R$ e che la retta AB inviluppa un'*ipocicloide* a quattro regressi.

792. *Se* P *è un punto del circolo* c *circoscritto ad un triangolo* ABC, *le proiezioni ortogonali di* P *sui tre lati del triangolo appartengono ad una retta* r.

Trovare l'inviluppo di r *quando* P *percorre il circolo* c.

D. GAMBIOLI.

Risoluzione del prof. Giuseppe Usai di Bobbio (Pavia).

Si assuma il vertice A del triangolo ABC come origine di un sistema di assi x e y i quali coincidano rispettivamente colle rette AB e AC.

Se α è l'angolo dei due assi, e se si pone $AB = b$, $AC = c$ si trova come equazione del circolo circoscritto:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\alpha - cy - bx = 0. \tag{1}$$

Preso ora un punto $P(xy)$ sulla circonferenza si chiamino X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 le coordinate delle proiezioni ortogonali di P rispettivamente sui lati BC, CA, AB.

Per le X_2Y_2, X_3Y_3 si trova facilmente:

$$X_2 = 0 \qquad\qquad X_3 = x + y\cos\alpha$$
$$Y_2 = y + x\cos\alpha \qquad\qquad Y_3 = 0.$$

Per avere le coordinate X_1Y_1 scriviamo l'equazione della retta BC e della perpendicolare a questa condotta da P.

Troviamo rispettivamente le due:

$$cX + bY - bc = 0 \qquad (X - x)(b - c\cos\alpha) - (Y - y)(c - b\cos\alpha) = 0$$

ove X e Y indicano le cordinate correnti.

Risolvendo queste ultime si trovano le coordinate X_1Y_1 cercate cioè:

$$X_1 = \frac{b}{a^2}[(c - y)(c - b\cos\alpha) + x(b - c\cos\alpha)]$$

$$Y_1 = \frac{c}{a^2}[(b - x)(b - c\cos\alpha) + y(c - b\cos\alpha)],$$

essendo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\alpha = \overline{CB}^2.$$

Occorre ora dimostrare che i tre punti X_1Y_1, X_2Y_2, X_3Y_3 sono in linea retta: perciò si consideri l'espressione:

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{a^2}[(c-y)(c-b\cos\alpha)+x(b-c\cos\alpha)] & \frac{c}{a^2}[b-x)(b-c\cos\alpha)+y(c-b\cos\alpha)] & 1 \\ 0 & y+x\cos\alpha & 1 \\ x+y\cos\alpha & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e si trova sviluppando secondo gli elementi della prima colonna, e tenendo conto della (1) e dei valori di a^2, che questo determinante è nullo, sicchè i punti sono allineati.

Scriviamo ora l'equazione di questa retta. Chiamando ξ ed η le coordinate correnti si ha:

$$\frac{\xi}{p} + \frac{\eta}{q} = 1 \qquad (2) \qquad \text{ove:} \qquad \begin{aligned} p &= x + y\cos\alpha \\ q &= y + x\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3)$$

Mediante le (3) facilmente si trova che la (1) si trasforma nella:

$$p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha + p(c \cos \alpha - b) + q(b \cos \alpha - c) = 0. \qquad (4)$$

Eliminiamo la p tra le (2) e (4).

La (2) dà subito $p = \frac{q\xi}{q-\eta}$ e sostituendo nella (4) troviamo:

$$q^3 + q^2(r - 2L) + q(M + s\xi - 2\eta r) - \eta\xi s + \eta^2 r = 0 \qquad (5)$$

essendosi posto:

$$\begin{matrix} b \cos \alpha - c = r \\ c \cos \alpha - b = s \end{matrix} \qquad (6) \qquad \begin{matrix} \eta + \xi \cos \alpha = L \\ \xi^2 + \eta^2 + 2\xi\eta \cos \alpha = M. \end{matrix}$$

Della (5) facciamo la derivata rispetto a q ed uguagliamola a zero.

$$3q^2 + 2q(r - 2L) + M + s\xi - 2\eta r = 0 \qquad (7)$$

allora, come è noto, per aver la curva inviluppo basta eliminare la q tra la (5) e la (7).

Indichiamo le due equazioni in questione con:

$$Aq^3 + Bq^2 + Cq + D = 0$$
$$3Aq^2 + 2Bq + C = 0$$

ove

$$A = 1 \quad B = r - 2L \quad C = M + s\xi - 2\eta r \quad D = -\eta\xi s + \eta^2 r \qquad (8)$$

L'eliminazione col metodo di Silvester porta al determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & B & C & D & 0 \\ 0 & 1 & B & C & D \\ 3 & 2B & C & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2B & C & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2B & C \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppato e ridotto dà:

$$18BCD + B^2C^2 - 4C^3 - 27D^2 - 4B^3D = 0$$

e questa si potrà considerare come l'equazione dell'inviluppo cercato, quando in luogo delle B, C, D si mettano i valori dati dalle (8) tenendo presenti le (6).

Con un semplice esame, si vede poi che i termini di grado massimo nelle coordinate ξ ed η sono del sesto grado, e si può quindi affermare che la curva cercata è del sesto ordine.

Giuseppe Usai.

BIBLIOGRAFIA

Halsted. — *Géométrie rationelle.* Traité élémentaire de la science de l'espace. Traduction Française par Paul Barbarin, avec une preface de C. A. Laisant. Paris, Gauthier-Villars, 1911.

Il Laisant nella prefazione così riassume lo scopo e lo spirito informatore del libro: " Il sig. Hilbert si è accinto a questa impresa, di mettere in evidenza gli

" assiomi necessari e sufficienti per edificare la Geometria sopra una solida base. " Il sig. Halsted si è dedicato a propagare le idee del sig. Hilbert in guisa da " renderle facilmente accessibili, e dare loro una forma per così dire elementare. " Non ha avuto la pretesa di far entrare nella sua opera tutta la scienza del- " l'estensione: si è limitato alle proposizioni fondamentali, lasciando libero un " vasto campo, alla iniziativa dei professori e degli studenti ".

L'opera si fonda sopra varî gruppi di assiomi che l'autore designa coi segnenti nomi:

1° gruppo — assiomi di associazione,
2° " " dell'ordine,
3° " " di congruenza,
4° " " delle parallele,
5° " " di Archimede.

In appendice viene data una dimostrazione (del sig. R. L. Moore) di due proposizioni dell'ordine ammesse nel testo con postulati.

La teoria delle proporzioni è esposta senza impiegare alcun assioma di continuità, e ciò permette all'autore di trattare la teoria di equivalenza nel piano indipendentemente dal postulato di Archimede.

Un capitolo (il XVI) è destinato alla geometria sferica pura. In esso vengono dedotte le proprietà delle figure sulla sfera, dei tre gruppi di assiomi " *di associazione, d'ordine, di congruenza* " (escluse le parallele e le figure simili) costituendo così una geometria non euclidea a due dimensioni di cui i risultati fanno sempre parte della geometria euclidea a tre dimensioni.

Queste poche notizie sono sufficienti a far comprendere che quest'opera ha un'alta importanza scientifica, avendo per iscopo di porre i fondamenti della geometria su basi assolutamente rigorose; non avrà forse eguale importanza pratica, se continueranno a prevalere la tendenza constatata in quasi tutti i paesi a rendere l'insegnamento della geometria prevalentemente pratica e intuitiva.

K.

DOTT. G. MARLETTA, *Trattato di geometria elementare* ad uso delle scuole superiori. — Catania, Giannotta editore, 1912, L. 4.50.

Il prof. Marletta, ben noto negli studii di geometria superiore, ha con felice fusione riunito in questo trattato i pregi che si trovano negli altri del Veronese, di Enriques e Amaldi e del De Franchis, senza esagerare nel rigore, senza dare dimostrazioni incomplete o affrettate, e inoltre ha scritto un libro di piccola mole che però è assai ricco anche nelle parti che gli ordinari testi di geometria elementare trascurano o trattano brevemente.

Vogliamo esaminare questo trattato nelle sue linee principali, in maniera assai rapida, perchè ci pare utile che sia conosciuto l'ottimo servizio reso dall'A. alla scienza e alla scuola.

Il Marletta ha avuto la cura, che alcuni potranno giudicare eccessiva in un testo per le scuole, di non conceder nulla all'intuizione per non turbare il sistema ipotetico-deduttivo e di dimostrare tutto ciò che suol esser sottinteso o lasciato allo studioso, anche quando, pur essendo talvolta intuitivamente evidente, avrebbe bisogno di una dimostrazione piuttosto laboriosa.

Egli ha assunto i punti quali enti primitivi; ha definito per postulati i segmenti insieme con le varie relazioni di appartenenza dei punti di essi; della retta ha dato una definizione mediante i prolungamenti del segmento. Ciò è ispirato ai " Principii di geometria logicamente esposti " del Peano.

La definizione delle parallele, data prima del piano, è diversa di quella del Veronese ed è indipendente dall'eguaglianza dei segmenti: infatti, secondo il nostro A., due rette si dicono parallele se esiste un semipiano avente una di esse per origine, e contenente tutti i punti dell'altra. Quanto poi alla esistenza di una (e di una sola) parallela ad una retta dato un postulato è posto nel trattato per affermarla.

Nel fatto di avere assunto l'eguaglianza dei segmenti come primitiva e di aver definito l'eguaglianza di due figure, in generale, come una speciale corrispondenza biunivoca, l'A. non si è discostato dal Veronese, ma con l'intervento di opportuni postulati egli è riuscito a semplificare la definizione generale di eguaglianza che si trova nel trattato di questo illustre geometra.

Nella teoria della proporzionalità fra grandezze, svolta prima della definizione del rapporto mediante gli equimultipli di equisummultipli, l'A. ha semplificato la solita trattazione omettendo i postulati che accompagnano ordinariamente l'introduzione delle grandezze geometriche, perchè per grandezza egli intende un segmento, o un angolo, o un arco di cerchio, o un poligono. Più tardi tra le grandezze saranno anche incluse le superficie, intendendo per superficie (piana finita) la figura contenuta in un poligono, e tale, inoltre, che ogni suo punto appartenga ad un poligono contenuto nella figura stessa.

Non vogliamo continuare l'esame delle varie parti del libro, ma osserviamo che nella teoria della misura il Marletta si serve, come il Veronese, delle classi contigue e veramente in un trattato così scrupolosamente compilato e con tanta modernità di vedute queste classi sono un po' fuor di posto, però l'A. non usa tali classi per la definizione del numero irrazionale, ma per eseguire operazioni su numeri reali.

Lo studio delle superficie equiestese, fondato su due postulati, rimanda la conoscenza del rapporto di due superficie S e S_1 a quello di due poligoni S' e S'_1, tali che S e S' e così S_1 e S'_1 siano superficie equiestese. Ora, data una superficie (piana finita), dovrebbe esser sempre possibile di trovare un poligono di superficie equiestesa; ciò può farsi derivare dalle premesse, ma l'A. avrebbe dovuto notarlo. La stessa osservazione si può fare in geometria solida, nella quale il Marletta adotta una definizione analoga, sostituendo le parole " solido " e " prisma " alle parole " superficie " e " poligono ", ma si noti che in ambedue i casi questa lacuna non toglie affatto l'esattezza delle altre deduzioni.

Notiamo infine che nel trattato abbondano gli esercizi e che vi è lucidissima la costruzione grafica delle espressioni algebriche.

È da augurarsi che i libri come questo del Marletta trovino nei colleghi volenterosi e non misoneisti buona accoglienza e che siano largamente adottati nelle nostre scuole medie.

VINCENZO AMATO.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 Maggio 1912

ALCUNE CONSIDERAZIONI DI CINEMATICA NEGLI IPERSPAZI LINEARI

1. Siano x_i, $x_j^{(0)}$ $(i, j = 1 . 2 \dots n)$ le coordinate (non omogenee) dei punti di un sistema in uno spazio lineare ad n dimensioni e in due configurazioni diverse (attuale ed iniziale): in tale ipotesi le espressioni:

$$x_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(0)} \qquad i = 1 2 \dots n \tag{1}$$

ove le a_i, a_{ij} rappresentino funzioni del tempo formanti un determinante A non nullo, caratterizzano un movimento il quale e per la natura delle equazioni e per le conseguenze che se ne ritraggono si presenta perfettamente analogo al movimento a deformate affini nello spazio ordinario.

Così si può veder subito che ai punti di un iperpiano S_{n-1} corrispondono punti di un iperpiano ed in generale ad un S_{n-k} intersezione di K iperpiani, corrisponde uno spazio ad ugual numero di dimensioni S'_{n-k}: due iperpiani paralleli hanno i loro corrispondenti paralleli e più in generale a due spazi lineari $S_{n-k}\, S_{n-k'}$, aventi fra loro un parallelismo di ordine ρ corrispondono due spazi lineari $S'_{n-k}\, S'_{n-k'}$, paralleli dello stesso ordine.

Di più mediante le formule (1) si possono stabilire i seguenti Teoremi i quali si presentano come estensioni di proposizioni note nella Meccanica ordinaria.

Teorema I. — *Il movimento dovuto alle equazioni* (1) *è determinato se si conoscono $n+1$ coppie, di punti corrispondenti in due diverse configurazioni, purchè i punti considerati di una di queste (e quindi anche dell'altra) non giacciano in un S_{n-1} o in uno spazio a dimensioni minori.*

Siano x_{hk} e $x_{hk}^{(0)}$ le coordinate dei punti in questione nelle due configurazioni; l'indice h indichi il numero d'ordine dei punti

$$(h = 1 . 2 \dots n+1)$$

e k l'ordine delle coordinate di ciascun punto $(k = 1 . 2 \dots n)$. Allora per le (1) saranno soddisfatte le $n.(n+1)$ equazioni lineari nelle a

$$x_{hk} = a_k + a_{k1}\, x_{h1}^{(0)} + a_{k2}\, x_{h2}^{(0)} + \dots + a_{kn}\, x_{hn}^{(0)} \qquad h = 1 . 2 \dots n+1 \qquad k = 1 . 2 \dots n \tag{2}$$

Questo sistema si può scindere evidentemente in n gruppi di $n+1$ equazioni ciascuno con altrettante incognite: così per avere le a_k, a_{k1}, a_{k2}, ... a_{kn} basta nelle (2) tener fisso k e far variare h. Il determinante dei coefficienti è per qualunque gruppo si consideri

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} \ldots\ldots & x_{1n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1,1}^{(0)} & x_{n+1,2}^{(0)} \ldots & x_{n+1,n}^{(0)} \end{vmatrix}$$

e questo sarà diverso da zero per le ipotesi fatte sui punti dati, sicchè le (2) dànno un'unica soluzione per le funzioni a, ed il movimento è determinato.

Teorema II. — *Se nel movimento precedente vi sono* $n+1$ *punti fissi, non giacenti in un* S_{n-l} $(l \geqslant 1)$ *allora il sistema non si muove.*

Questo Teorema si può ritenere un'immediata conseguenza del primo, però può esser dimostrato anche direttamente.

Infatti se x_{hk} sono le coordinate di questi punti fissi, le (2) diverranno:

$$x_{hk} = a_k + a_{k1} x_{h1} + a_{k2} x_{h2} + \ldots + a_{kn} x_{hn}$$
$$h = 1 . 2 \ldots n+1 \qquad k = 1 . 2 \ldots n$$

cioè:

$$\begin{cases} a_1 + x_{h1}(a_{11} - 1) + x_{h2} a_{12} + \ldots + x_{hn} a_{1n} = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_n + x_{h1} a_{n1} + x_{h2} a_{n2} + \ldots + x_{hn}(a_{nn} - 1) = 0 \end{cases}$$
$$h = 1 . 2 \ldots n+1.$$

Con un ragionamento analogo a quello del Teorema precedente, decomponendo il sistema in gruppi di $n+1$ equazioni lineari (in questo caso anche omogenee) nelle incognite

$$a_k, \ a_{k1}, \ a_{k2}, \ldots a_{kk} - 1, \ldots a_{kn}$$

si trova per ogni gruppo lo stesso determinante dei coefficienti, e poichè questo non è nullo, si hanno le soluzioni

$$a_k = 0 \qquad a_{k1} = 0 \ldots a_{kk} = 1 \ldots a_{kn} = 0.$$

Perciò le (1) si riducono alle

$$x_i = x_i^{(0)}$$

e il sistema in ogni istante ha i punti fissi.

Teorema III. — *Il rapporto dei due determinanti formati colle coordinate (non omogenee) di* $n+1$ *punti indipendenti, ovverosia non appartenenti ad un* S_{n-1} *o ad uno spazio a minor numero di dimensione, e coll'unità in due configurazioni corrispondenti è costante.*

Rappresentando come prima con x_{hk} e $x_{hk}^{(0)}$ le coordinate dei punti nelle due configurazioni si consideri il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \dots x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1,1} & x_{n+1,2} \dots x_{n+1,n} \end{vmatrix} \tag{3}$$

Esso per le formule (2) può scriversi:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, x_{1k}^{(0)} & a_2 + \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\, x_{1k}^{(0)} & \dots & a_n + \sum_k a_{nk}\, x_{1k}^{(0)} \\ 1 & a_1 + \sum_k a_{1k}\, x_{2k}^{(0)} & a_2 + \sum_k a_{2k}\, x_{2k}^{(0)} & \dots & a_n + \sum_k a_{nk}\, x_{2k}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 1 & a_1 + \sum_k a_{1k}\, x_{n+1,k}^{(0)} & a_2 + \sum_k a_{2k}\, x_{n+1,k}^{(0)} & \dots & a_n + \sum_k a_{nk}\, x_{n+1,k}^{(0)} \end{vmatrix}$$

ed è uguale al prodotto (per orizzontali) dei due

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} \dots x_{1n}^{(0)} \\ 1 & x_{21}^{(0)} & x_{22}^{(0)} \dots x_{2n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1,1}^{(0)} & x_{n+1,2}^{(0)} \dots x_{n+1,n}^{(0)} \end{vmatrix}$$

si ha quindi

$$\begin{vmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} \dots x_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1,1} & x_{n+1,2} \dots x_{n+1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{nn} \\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & x_{11}^{(0)} & x_{12}^{(0)} & x_{1n}^{(0)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{n+1,1}^{(0)} & x_{n+1,2}^{(0)} & x_{n+1,n}^{(0)} \end{vmatrix}$$

e poichè il determinante delle a non dipende dalle coordinate dei punti nelle due configurazioni, si ha che la relazione ultima dimostra il Teorema in questione.

Notando poi che il determinante (3) dà in Geometria Euclidea, il volume a meno di un fattore costante, di un $(n+1)$-gono dello spazio S_n quando si consideri l'unità come coordinata omogenea $(n+1)$ dei vertici, potremo enunciare il Teorema sotto la forma: Il rapporto di due $(n+1)$-goni corrispondenti in un movimento affine è sempre lo stesso per un medesimo istante, qualunque siano le coppie di $(n+1)$-goni che si considerino.

2. Consideriamo ora del movimento precedente il caso più interessante che si ha quando il determinante A è ortogonale: allora le inverse delle (1) saranno le:

$$x_j^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(x_i - a_i) \qquad j = 1 \,.\, 2 \dots n. \tag{1'}$$

In tale ipotesi il sistema è rigido inquantochè le $d^{(0)}$ e d distanze di due punti nelle posizioni iniziali $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$ e attuali x_i e y_i non variano.

Infatti essendo $x_i^{(0)}$ e x_i, $y_i^{(0)}$ e y_i due coppie di punti corrispondenti dovranno per le (1) esser verificate le

$$x_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(0)} \qquad y_i = a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j^{(0)}$$
$$i = 1 2 \ldots n$$

e quindi

$$y_i - x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(y_j^{(0)} - x_j^{(0)})$$

le quali dànno subito:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 = \sum_{j=1}^{n} (y_j^{(0)} - x_j^{(0)})^2 \qquad \text{cioè} \qquad d^2 = d^{(0)2} \qquad \text{c. d. d.}$$

Volendo ora studiare la natura di questo movimento estendiamo agli iperspazi il concetto di velocità. A tal uopo si osservi che nella Meccanica ordinaria, sia per il movimento di un punto in un S_1 in un S_2 o in un S_3, si perviene alla $v = \frac{ds}{dt}$ essendo ds la distanza di due posizioni infinitamente vicine del mobile corrispondenti a due valori consecutivi t e $t + dt$ del tempo e poichè questa formula la si ricava con considerazioni completamente indipendenti dalle dimensioni dello spazio in cui si opera, si può logicamente ritener valida per gli spazi ad un numero qualunque n di dimensioni. (1)

In questo caso per la nota formula della distanza di due punti

$$x_i,\ x_i + dx_i$$

si avrà:

$$ds = \sqrt{\sum_i dx_i^2} \qquad v = \sqrt{\sum \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2}$$

perciò considereremo le $\frac{dx_1}{dt} \cdots \frac{dx_n}{dt}$ quali espressioni atte a determinare la velocità di un punto in un S_n.

Deriviamo quindi le (1) osservando che le circostanze iniziali $x^{(0)}$ sono indipendenti dal tempo. Si ha allora tenendo conto delle (1') ed indicando con a' le derivate delle a

$$\frac{dx_1}{dt} = a'_1 + a'_{11} \sum_1^n a_{i1}(x_i - a_i) + a'_{12} \sum a_{i2}(x_i - a_i) + \ldots + a'_{1n} \sum_{i=1}^{n} a_{in}(x_i - a_i)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a'_n + a'_{n1} \sum_1^n a_{i1}(x_i - a_i) + a'_{n2} \sum a_{i2}(x_i - a_i) + \ldots + a'_{nn} \sum_{i=1}^{n} a_{in}(x_i - a_i)$$

(1) Ciò è anche d'accordo col concetto di velocità dato da Hertz. *Gesammelte werke*, Band III, „Principien der Mechanik „.

ed ordinando rispetto alle $x_i - a_i$

$$\frac{dx_1}{dt} = a'_1 + (x_1 - a_1)(a_{11} a'_{11} + a_{12} a'_{12} + \ldots + a_{1n} a'_{1n}) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - a_n)(a_{n1} a'_{11} + a_{n2} a'_{12} + \ldots + a_{nn} a'_{1n})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a'_n + (x_1 - a_1)(a_{11} a'_{n1} + a_{12} a'_{n2} + \ldots + a_{1n} a'_{nn}) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - a_n)(a_{n1} a'_{n1} + a_{n2} a'_{n2} + \ldots + a_{nn} a'_{nn}).$$

Si ponga ora

$$p_{ik} = a_{i1} a'_{k1} + a_{i2} a'_{k2} + \ldots + a_{in} a'_{kn} \qquad (i, k = 1 . 2 \ldots n)$$

e si noti che per l'ortogonalità di A si ha $p_{ik} = 0$ per $i = k$ e negli altri casi $p_{ik} = -p_{ki}$.

Allora le formule caratterizzanti la velocità del punto sono:

$$\frac{dx_1}{dt} = a'_1 + p_{21}(x_2 - a_2) + p_{31}(x_3 - a_3) + \ldots + p_{n1}(x_n - a_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a'_n + p_{1n}(x_1 - a_1) + p_{2n}(x_2 - a_2) + \ldots + p_{n-1,n}(x_{n-1} - a_{n-1})$$

e colle ulteriori posizioni:

$$\lambda_1 = a'_1 + p_{12} a_2 + p_{13} a_3 + \ldots + p_{1n} a_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n = a'_n + p_{n1} a_1 + p_{n2} a_2 + \ldots + p_{n, n-1} a_{n-1}$$

diventano:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_1 + p_{21} x_2 + p_{31} x_3 + \ldots + p_{n1} x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{4}$$
$$\frac{dx_n}{dt} = \lambda_n + p_{1n} x_1 + p_{2n} x_2 + \ldots + p_{n-1,n} x_{n-1} .$$

Queste espressioni dànno una generalizzazione delle celebri formule di Eulero [1] relative alla Cinematica dei corpi rigidi: in esse le $\frac{dx_i}{dt}$ sono espresse mediante le coordinate attuali dei punti e delle λ e p funzioni del tempo: queste ultime in numero rispettivamente di n ed $\frac{n(n-1)}{2}$ si presentano in modo analogo alle tre traslazioni e alle tre rotazioni che compaiono nelle formule per un S_3.

Le formule di Eulero generalizzate, ma per gli spazi a curvatura negativa si trovano in una nota del Beltrami: [2] queste a differenza

---

[1] *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum.*
[2] *Formules fondamentales de Cinématique dans les espaces de courbure constante,* " Bulletin de Sciences Mathématiques et Astronomiques " 1876.

delle (4) non sono lineari ma contengono anche termini di 2° grado: la dimostrazione semplice e geniale di questo autore la si può applicare facilmente agli spazi lineari ed offre un'altra via per pervenire alle (4) medesime.

Si consideri perciò la nota espressione

$$ds^2 = \Sigma_i\, dx_i^2$$

e si calcoli la sua variazione

$$ds\delta ds = \sum_i dx_i\, \delta dx_i \qquad \text{ovvero} \qquad \delta ds = \Sigma_i \frac{dx_i}{ds}\, d\delta x_i$$

e per l'invariabilità del sistema

$$\sum_i dx_i\, d\delta x_i = 0.$$

Si ponga ora

$$\chi_i = \delta x_i \qquad i = 1 . 2 \ldots n$$

e poichè

$$d\chi_i = \sum_r \frac{\partial \chi_i}{\partial x_r} dx_r$$

si avrà:

$$\sum_i \sum_r \frac{\partial \chi_i}{\partial x_r} dx_i\, dx_r = 0 \qquad i, r = 1 . 2 \ldots n$$

sicchè le funzioni (incognite) χ_i devono soddisfare alle

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial x_r} + \frac{\partial \chi_r}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

per tutti i valori uguali od inuguali degli indici i ed r. Da questa si ha considerando un terzo indice qualunque t

$$\frac{\partial^2 \chi_i}{\partial x_r\, \partial x_t} + \frac{\partial^2 \chi_r}{\partial x_i\, \partial x_t} = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \chi_r}{\partial x_t}\right) = 0$$

e poichè si ha

$$r,\ i,\ t = (1 . 2, \ldots n)$$

si può scrivere

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial \chi_t}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \chi_t}{\partial x_r}\right) = 0$$

e finalmente

$$\frac{\partial^2 \chi_t}{\partial x_i\, \partial x_r} = 0$$

sicchè le δx_i saranno funzioni lineari delle coordinate e si avrà la

$$\delta x_i = c_i + c_{1i}\, x_1 + \ldots + c_{ni}\, x_n \tag{6}$$

ove le c non dipendono dalle coordinate ma dal tempo: osservando poi che per le (5) si ha $c_{ir} + c_{ri} = 0$ avremo che le (6) risultano del medesimo tipo delle (4).

3. In quanto all'analisi delle equazioni (4) si osservi che se in un movimento elementare, vi sono punti fissi, le loro coordinate soddisferanno alle

$$\lambda_i + p_{1i}\,x_1 + p_{2i}\,x_2 + \ldots + p_{i-1,i}\,x_{i-1} + p_{i+1,i}\,x_{i+1} + \ldots + p_{ni}\,x_n = 0 \qquad i = 1\,.\,2 \ldots n \tag{7}$$

per l'istante considerato.

Il determinante dei coefficienti di queste equazioni è emisimmetrico sicchè nullo per n dispari, e diverso da zero (Pfaffiano) per n pari.

In quest'ultimo caso le (7) ammettono un'unica soluzione, onde in ogni istante vi è un punto fisso il quale si presenta in modo perfettamente analogo al centro istantaneo di rotazione nel movimento piano. [1] Se poi il sistema ha per tutto il movimento un punto fisso, assumendolo come vertice della piramide fondamentale (di coordinate omogenee $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0 \;\; x_{n+1} = 1$) le (7) dànno $\lambda_i = 0$ e si riducono alle

$$p_{1i}\,x_1 + \ldots + p_{ni}\,x_n = 0 \tag{8}$$

e poichè queste non hanno nessun'altra soluzione fuori delle x tutte nulle si ha che il movimento è di rotazione attorno A_{n+1}: e lo si può considerare, osservando le (8) come risultante di μ rotazioni

$$\left(\mu = \frac{n}{2}\right)$$

effettuate intorno agli S_{n-2} rettangolari

$$x_1 = x_2 = 0 \ldots x_{2\mu-1} = x_{2\mu} = 0$$

passanti per A_{n+1}. [2]

Per n dispari in generale le (7) non hanno soluzioni: fa eccezione il caso in cui risolvendo con Cramer si annullino anche i numeratori delle frazioni esprimenti le incognite: allora essendo il determinante delle p di caratteristica $n-1$ si ha in ogni istante un'infinità di punti fissi giacenti su una retta intersezione di $n-1$ iperpiani; tale risultato per $n=3$ si accorda colla Cinematica ordinaria.

Ma se il sistema ha un punto fisso durante tutto il movimento si ha che le (7) con lo stesso ragionamento di prima si riducono alle (8) e in questo caso (n dispari) vi è in ogni istante un'infinità di soluzioni alle quali corrisponde un asse istantaneo di rotazione

---

(1) L'esistenza del centro istantaneo di rotazione nel movimento piano fu scoperta per il primo da BERNOULLI, *De centro spontaneo rotationis*, Opera, t. IV, pag. 265, 1742.

(2) La proposizione per cui ogni rotazione attorno ad un punto di un sistema in uno spazio S_n (n pari) sia risultante di $\frac{n}{2}$ rotazioni intorno a degli S_{n-2} rettangolari costituisce un teorema del Jourdan e dimostrato da lui con considerazioni fondate sugli invarianti delle (1). Si veda *Essai sur la Geometrie à n dimensions* "Bulletin de la Société Mathématique de France„ 1875.

passante per A_{n+1}: si ha quindi un risultato analogo a quello del Poinsot [1] coi suoi famosi coni per il movimento sferico in un S_3. [2]

4. Sulle circostanze che determinano il movimento di un sistema rigido in un S_n si possono considerare alcuni teoremi i quali dànno come casi particolari proposizioni note di Geometria Cinematica nello spazio ordinario.

Teorema I. — *Un sistema rigido in un S_n non può muoversi se ha n punti fissi non giacenti in un S_{n-2} od in uno spazio ad un numero minore di dimensioni.*

Siano a_i^j $(i=1.2\ldots n,\ j=1.2\ldots n)$ le coordinate degli n punti fissi, essendo j il numero d'ordine dei vari punti ed i il numero d'ordine delle coordinate di ciascun punto.

Se x_i $(i=1.2\ldots n)$ è un altro punto qualunque del sistema, dovranno esser verificate le

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i^j)^2=c_j^2 \qquad j=1.2\ldots n$$

essendo le c costanti rispetto al tempo. Da queste derivando si hanno le

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_i^j)\frac{dx_i}{dt}=0 \tag{9}$$

le quali si posson considerare come lineari ed omogenee nelle $\frac{dx_i}{dt}$: per conoscere la natura delle soluzioni si osservi il determinante

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1^{(1)} & x_2-a_2^{(1)} & \ldots & x_n-a_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1-a_1^{(n)} & x_2-a_2^{(n)} & \ldots & x_n-a_n^{(n)} \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Fra i vari determinanti ad elementi monomi che lo compongono vi è quello formato colle a che non si elide coi precedenti e non è nullo perchè altrimenti i punti a determinerebbero un S_{n-k} $(k\geqslant 2)$ contrariamente all'ipotesi. Sicchè la (10) è diversa da zero e per le (9) non restano che le soluzioni $\frac{dx_i}{dt}=0$ e i punti del sistema sono fissi, c. d. d.

Un'altra dimostrazione di questo Teorema si può avere ricorrendo alle formule (4). Siano $x_i^{(j)}$ i punti fissi allora le (4) daranno:

$$\begin{matrix} 0=\lambda_1+p_{21}\,x_2^{(j)}+p_{31}\,x_3^{(j)}+\ldots+p_{n1}\,x_n^{(j)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0=\lambda_n+p_{1n}\,x_1^{(j)}+p_{2n}\,x_2^{(j)}+\ldots+p_{n-1,n}\,x_{n-1}^{(j)} \end{matrix} \qquad j=1.2\ldots n$$

---

[1] *Theorie nouvelle de la rotation des Corps.*

[2] Pure mediante considerazioni sugli invarianti delle (1), lo Schäfli arrivò ad affermare che negli spazi a numero dispari di dimensioni, ogni rotazione attorno ad un punto trae di conseguenza una rotazione attorno ad una retta. Si veda: *Ueber invariantive Elemente einer Ortogonale substitution* ecc. "Journal de Crelle„ t. 65.

dalle quali moltiplicando rispettivamente per $x_1^{(j)}$ $x_2^{(j)}$ $x_n^{(j)}$ e sommando si hanno in corrispondenza agli n valori di j le n equazioni

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 x_1^{(1)} + \lambda_2 x_2^{(1)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(1)} \\ 0 &= \lambda_1 x_1^{(2)} + \lambda_2 x_2^{(2)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(2)} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= \lambda_1 x_1^{(n)} + \lambda_2 x_2^{(n)} + \ldots + \lambda_n x_n^{(n)} \end{aligned}$$

e queste, essendo diverso da zero il determinante delle x, dànno le soluzioni $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ sicchè osservando le (4) si ha che resta sempre fisso il vertice A_{n+1} della piramide fondamentale, ma questo è un punto arbitrario, sicchè il sistema ha tutti i punti fissi, c. d. d.

Geometricamente si può considerando n ipersfere estendere il ragionamento che nello spazio ordinario si fa su tre sfere.

Se $A_1 A_2 \ldots A_n$ sono punti fissi, un punto qualunque M mobile del sistema, dovrà stare allo stesso tempo su n ipersfere di centri $A_1 A_2 \ldots A_n$ e raggi $A_1M, A_2M, \ldots A_nM$ rispettivamente. Ora n ipersfere coi centri indipendenti (come si è nel caso in questione) si intersecano tutto al più in due punti,(1) quindi il punto M non potrebbe assumere più di due posizioni e ciò è contrario ad ogni idea di movimento.

Teorema II. — *Sono determinati i movimenti di tutti i punti di un sistema rigido in un S_n quando sono dati i movimenti di* n *punti.*

Siano date infatti le traiettorie di $A_1 A_2 \ldots A_n$. In seguito ad uno spostamento che porta detti punti rispettivamente nelle posizioni $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$ un punto qualunque M del sistema, dovrà trovarsi in una posizione M' situata simultaneamente su n ipersfere di centri $A'_1 A'_2 \ldots A'_n$ e raggi $A_1M, A_2M \ldots A_nM$. Delle due intersezioni si prende poi quella che succede immediatamente ad M per la legge di continuità. Così le nuove posizioni di qualunque punto M sono pienamente determinate. I movimenti che si possono dare agli n punti $A_1 A_2 \ldots A_n$ non sono poi del tutto arbitrari, ma devono soddisfare a delle condizioni imposte dalla rigidità del sistema ed i limiti che stabiliscono tale arbitrarietà possono esser date colle due proposizioni successive.

Teorema III. — *Sono determinati i movimenti di tutti i punti di un sistema quando sono assegnate le traiettorie di* n — 1 *di essi ed* n — 2 *ipersuperficie sulle quali debba muoversi un* n *punto, purchè gli* n *punti siano indipendenti.*

---

(1) Che n ipersfere a centri indipendenti abbiano in un S_n al massimo due intersezioni (escludendo i punti ciclici) si vede facilmente per assurdo. Se i punti comuni fossero tre, essi non potendo stare in una retta, staranno in un S_2 il quale taglierà ciascuna sfera in un circolo passante per i tre punti: in tal caso le ipersfere avrebbero a comune un medesimo circolo e i centri non sarebbero più indipendenti, il che è contro l'ipotesi.

A tal uopo ogni traiettoria essendo determinata come intersezione di $n-1$ ipersuperficie, avremo per le traiettorie di $n-1$ punti, $(n-1)^2$ equazioni e queste unite con le $n-2$ equazione delle ipersuperficie diverranno in tutto n^2-n-1.

Si scrivano ora altre n equazioni stabilenti che le distanze dei punti rimangano inalterate; esse saranno distinte se, come si è supposto, i punti sono indipendenti. Così si hanno in tutto n^2-1 equazioni dalle quali eliminando le coordinate dei primi $n-1$ punti restano $n-1$ equazioni fra le coordinate dell' n punto e quindi è determinata la sua traiettoria.

Prendiamo ora un altro punto M diverso dai precedenti. Esprimiamo analiticamente che la distanza di M dai dati è invariabile, avremo altre n equazioni che insieme alle precedenti formano un sistema di n^2+n-1 equazioni: da queste eliminando le n^2 coordinate degli n punti dati restano $n-1$ equazioni fra le coordinate di M e sarà quindi determinata la sua traiettoria.

Caso particolare: per $n=3$ sono determinati i movimenti di un sistema rigido nello spazio ordinario quando si conoscono le traiettorie di due punti ed una superficie su cui debba muoversi un terzo punto.

Teorema IV. — *È determinato il movimento di ogni punto di un sistema rigido in un* S_n, *quando siano date* n^2-2n+1 *ipersuperficie, sopra le quali si muovano rispettivamente* n^2-2n+1 *punti del sistema ed altre* $n-2$ *ipersuperficie sulle quali si muova un altro punto del sistema (in modo però che di tali punti* n *non siano in un* S_{n-l}, $l \geqslant 2$).

Per i dati del Teorema abbiamo n^2-n-1 equazioni rappresentanti le superficie date. Per le equazioni relative all'invariabilità incominciamo a scriverne n, giacchè per ipotesi n punti sono indipendenti: per gli altri n^2-3n+2 punti dati scriviamo che le distanze degli n precedenti restano immutate col tempo onde altre $n^3-3_n^2+2n$ equazioni.

Sicchè complessivamente si hanno equazioni in numero di

$$n^3-2n^2+2n-1.$$

Eliminiamo le coordinate di n^2-2n+1 fra gli n^2-2n+2 punti dati, coordinate che saranno in tutto n^3-2n^2+n. Restano in tutto $n-1$ equazioni che determinano la traiettoria del punto rimanente. Il ragionamento analogo si fa per qualunque altro dei punti dati.

Preso ora un'altro punto M aggiungiamo alle precedenti altre n equazioni relative alla distanza di M da n punti (scelti indipendenti) fra i dati.

Abbiamo così n^3-2n^2+3n-1 equazioni dalle quali eliminando le n^3-2n^2+2n coordinate dei punti dati avremo $n-1$ equazioni fra le coordinate di M e così è determinata la traiettoria di questo punto.

Caso particolare nello spazio ordinario: son determinati i movimenti di un sistema rigido quando si conoscano 5 superficie sulle quali debbano muoversi 5 punti del sistema, di cui 3 non in linea retta. (1)

Del Teorema dato è utile a considerarsi il caso in cui degli n^2-2n+1 punti muoventisi rispettivamente su n^2-2n+1 ipersuperficie, ve ne siano alcuni coincidenti in uno solo.

A tal uopo si noti che se k di essi $(1 < k < n)$ coincidono in un sol punto, allora questo dovendo muoversi simultaneamente su k ipersuperficie si muoverà sulla loro intersezione cioè su una varietà V_{n-k} ad $n-k$ dimensioni.

Avremo allora il

Corollario. — Il movimento di ogni punto di un sistema rigido è determinato quando siano date una varietà V_{n-k} in cui si muove un punto dato, $n^2-2n+1-k$ ipersuperficie su cui si muovono rispettivamente altrettanti punti, ed altre $n-2$ ipersuperficie su cui si muova un altro punto. (2)

Se $k=n-1$ essendo la varietà ad una dimensione una linea, avremo che basterà dare la traiettoria di un punto, n^2-3n+2 ipersuperficie su cui si muovono altrettanti punti ed altre $n-2$ ipersuperficie su cui si muove un altro punto.

Nello spazio ordinario $n=3$ $k=2$ si ha: È determinato il movimento se è data la traiettoria di un punto e tre superficie su cui si muovono tre punti del sistema.

Se $k=n$ (3) allora essendo l'intersezione di n ipersuperficie in S_n composta di un numero finito di punti (varietà a zero dimensioni) avremo che il punto non potrà avere una traiettoria, onde non si muoverà sicchè il movimento in questione è determinato se è dato un punto fisso, n^2-3n+1 ipersuperficie su cui si muovono rispettivamente altrettanti punti ed altre $n-2$ ipersuperficie su cui si muove un altro punto.

Nello spazio ordinario $k=n=3$ basta dare un punto fisso e due superficie per altri due punti.

Più in generale se k_1 punti coincidono in un solo A_1, k_2 punti in $A_2, \ldots k_p$ in A^p $(k_s < n,\ s=1.2\ldots p)$ avremo che basta dare p varietà di dimensioni $n-k_1$, $n-k_2, \ldots n-k_p$, in cui si muovono

---

(1) Schonemann. *Monatsber der Berliner*. Acad. 1855. — Mannheim. *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable.* " Journal de l'École Politecnique „ Cahier 43, pag. 77.

(2) Invece di dire " $n-2$ ipersuperficie in cui si muova simultaneamente un altro punto „ si può dire con linguaggio iperspaziale " una varietà a due dimensioni (intersezione di $n-2$ ipersuperficie) in cui si muova un altro punto „.

(3) Il caso poi di $k>n$ non ha in generale significato perchè in tale ipotesi, k ipersuperficie in un S_n salvo casi speciali, non si intersecano.

p punti del sistema, $n^2-2n+1-\sum_{s=1}^{p} k_s$ [1] ipersuperficie sopra le quali si muovono altrettanti punti del sistema ed altre $n-2$ ipersuperficie su cui si muove un altro punto. Così per

$$n=3 \qquad k_1=2 \qquad k_2=2$$

basta dare le traiettorie di due punti ed una superficie su cui si deve muovere un terzo punto.

Nel caso di $p=n-1$ e le k uguali ad $n-1$ si avrebbero $n-1$ traiettorie per $n-1$ punti ed $n-2$ ipersuperficie su cui si muove un altro punto e ciò è d'accordo col Teorema III.

Quando poi fosse $p=n$ $k=n$ si avrebbero n punti fissi del sistema e in corrispondenza il numero precedente

$$n^2-2n+1-\sum_{s=1}^{p} k_s$$

diventa negativo il che è assurdo. Ne viene di conseguenza che il sistema non può muoversi e ciò è d'accordo col I Teorema.

G. Usai.

SOPRA UN SISTEMA Σ DI SUPERFICIE P DI S_n

1. Le equazioni: $x_i=f_i(u)+\varphi_i(v)$ $(i=1\ldots n+1)$, essendo le x_i coordinate proiettive omogenee di un punto, rappresentano in S_n una superficie che ha le stesse proprietà delle superficie P dello spazio ordinario, vale a dire: *le sviluppabili ad essa circoscritte lungo le linee coordinate sono coni.* La diremo ancora superficie P.

2. Consideriamo le equazioni

$$x_i=f_i(u)+\varphi_i(v)+\lambda_i \tag{1}$$

ove le $f_i(u)$, $\varphi_i(v)$ sono date funzioni monodrome finite e continue insieme alle loro derivate sino ad un certo ordine, in un dato campo di variabilità per u e v, con la condizione che ad un gruppo di valori dei rapporti delle x_i corrisponda in generale in quel campo una sola coppia di valori u, v.

Fissato un gruppo di valori per λ_i, le (1) rappresentano una superficie P descritta dal punto x mentre variano u e v.

Per ogni gruppo di valori attribuiti alle λ_i, si ha una determinata superficie P.

Variando dunque le λ_i si ottiene un sistema Σ di superficie P, fra le quali risulta una corrispondenza biunivoca, se consideriamo omologhi i punti di esse che corrispondono agli stessi valori di u e v.

[1] I casi in cui questo numero diventasse negativo sono da escludersi.

3. *I piani tangenti alle superficie del sistema Σ nei punti omologhi* (u, v) *passano per una retta della congruenza che ha per falde focali due linee rappresentate parametricamente da:*

$$x_i = f'_i(u), \qquad y_i = \varphi'_i(v). \tag{2}$$

Infatti, il piano tangente in un punto x_i ad una superficie, congiunge i punti di coordinate x_i, $f'_i(u)$, $\varphi'_i(v)$, e questi due ultimi rimangono fissi per punti omologhi delle superficie del sistema, mentre descrivono le linee rappresentate dalle (2) al variare di u e v.

4. Siano:

$$x_i = f_i(u) + f_i(v) + \alpha_i,$$
$$y_i = f_i(u) + f_i(v) + \beta_i,$$

due superficie del sistema. Se x_i e y_i sono due punti omologhi, si ha:

$$x_i - y_i = \alpha_i - \beta_i;$$

di qui si vede che *le congiungenti due punti omologhi passano per un medesimo punto vertice d'una* V_3 *cono su cui stanno le due superficie, le quali sono* PROSPETTIVE.

Viceversa: *se da un punto si proietta una superficie di Σ, ogni raggio proiettante contiene i punti omologhi di infinite superficie prospettive alla prima.*

Infatti, se p_i sono le coordinate del centro di proiezione P, e $x_i = f_i(u) + f_i(v) + \lambda_i$ sono le equazioni della superficie che si considera, tutte le superficie del sistema che stanno con essa su una medesima V_3 sono rappresentate da:

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \rho p_i,$$

ove ρ è funzione di due parametri.

5. *La superficie del sistema Σ in* S_n *sono* ∞^{n-1}, *purchè non siano piani o cilindri.* (1)

Infatti, assunte le x_i come coordinate cartesiane non omogenee di un punto in un S_{n-1}, le equazioni

$$x_i = f_i(u) + f_i(v) + \lambda_i$$

rappresentano in questo spazio un sistema di superficie di traslazione, le quali si possono ottenere da una qualunque di esse applicando le ∞^{n-1} traslazioni di S_{n+1}, quindi le superficie del sistema saranno ∞^{n-1}, se nessuna di esse ammette infinite traslazioni in sè, come i piani ed i cilindri.

In S_n consideriamo come proiezione di un punto di S_{n-1}, avente per coordinate x_i, quel punto le cui coordinate proiettive omogenee sono le stesse x_i, indi proiettiamo su S_n, dall'origine delle coordinate, le superficie di S_{n+1}: otterremo in S^n ∞^{n+1} superficie P costituenti il

---

(1) Questa dimostrazione è analoga a quella fatta dal prof. SEGRE nel caso di un sistema Σ di linee rappresentate da $x_i = f_i(u) + \lambda_i$. V. la nota sulla generazione delle superficie che ammettono un doppio sistema coniugato di coni circoscritti. R. A. delle Scienze (Anno 1907-08, Torino).

sistema Σ, poichè ogni superficie di S_{n-1} verrà proiettata mediante un cono a tre dimensioni che non potrà contenerne altre.

6. S_1, S_2 siano due superficie del sistema Σ. B sia il vertice della V_3 cono su cui esse stanno: siccome ogni altra superficie S di Σ sarà prospettiva ad S_1 rispetto ad un punto B_1. e ad S_2 rispetto ad un punto B_2, ne viene che i punti B, B_1, B_2, dovendo stare in tutti i piani determinati dalle terne di punti omologhi sulle tre superficie, saranno allineati.

. Si ha quindi un modo semplice per costruire geometricamente il sistema Σ: *si prendano due punti* B_1, B_2 *allineati con* B, *si considerino i raggi* B_1A_1, B_2A_2 *ove* A_1 *e* A_2 *sono due punti omologhi su* S_1, S_2, *e si determini l'intersezione* x *di tali raggi; variando la coppia* A_1A_2, x *descriverà una superficie del sistema* Σ, *la quale esaurirà il sistema cambiando la coppia* B_1B_2 *in tutti i modi possibili.*

Le V_3 che contengono tre sistemi ∞^1 di superficie P.

7. Entro al sistema Σ consideriamo ∞^1 superficie P: basta prendere le λ_i eguali a certe funzioni d'un parametro w, per le quali s'intendono soddisfatte le condizioni poste al paragrafo (2).

Il luogo di tali superficie è una V_3 rappresentata parametricamente dalle equazioni:

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w). \tag{3}$$

Per costruire ∞^1 superficie P, basta far prendere ∞^1 posizioni alla coppia dei punti B_1B_2 allineati con B. I due punti descriveranno allora due curve s_1, s_2 sopra un cono di vertice B.

Si scorge subito un modo di generazione della V_3:

Fissate due superficie S_1, S_2 *prospettive rispetto a* B, *si considerino sopra un cono ordinario di vertice* B *due curve* S_1, S_2; A_1, A_2 *sia una coppia qualunque di punti omologhi di* S_1, S_2, *e* B_1, B_2 *una coppia qualunque di punti omologhi di* s_1, s_2; *il punto* x, *intersezione dei raggi* B_1A_1, B_2A_2, *descriverà una* V_3 *rappresentabile con la* (3).

Ponendo eguale a costante successivamente ciascuno dei tre parametri, si ottengono sulla V_3 tre sistemi ∞^1 di superficie P appartenenti rispettivamente ai tre sistemi Σ.

$$\begin{cases} x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \lambda_i, \\ x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \mu_i, \\ x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \nu_i. \end{cases}$$

Diremo rispettivamente: *sist.* $u = cost.$, $v = cost.$, $w = cost.$, quei tre sistemi ∞^1 di superficie della V_3, ed indicheremo con P_u, P_v, P_w le superficie che ad essi appartengono.

8. *Due superficie d'uno stesso sistema non hanno in generale punti a comune.*

Infatti siano Pw_1, Pw_2 due superficie del sistema $v = cost.$; per un loro punto comune deve aversi:

$$f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w_1) = \rho\{f_i(u') + \varphi_i(v') + \psi_i(w_2)\};$$

Si ha un sistema di $n+1$ equazioni che in generale non è soddisfatto.

Due superficie di sistema diverso hanno a comune una linea sulla quale varia uno solo dei parametri. — Infatti pei punti comuni ad una Pv_1 e ad una Pw_1, si ha:

$$f_i(u) + \varphi_i(v_1) + \psi_i(w) = \rho\{f_i(u') + \varphi_i(v') + \psi_i(w_1)\}.$$

Il sistema è soddisfatto per $v' = v = v_1$; $w' = w = w_1$, $\rho = 1$ ed $u = u'$, ma arbitrario. I punti comuni alle due superficie costituiscono la linea rappresentata parametricamente da:

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v_1) + \varphi_i(w_1),$$

ove varia u e sono costanti v_1 e w_1.

Per un punto (u, v, w) della V_3, passa in generale una superficie P di ciascun sistema; quindi tre superficie Pu, Pv, Pw, le quali s'intersecano secondo le tre linee uscenti da quel punto.

Le linee parametriche le chiameremo per brevità linee (uv), (vw), (wu), indicando con le lettere tra parentesi i parametri che non variano lungo la linea considerata.

I tre sistemi ∞^1 di superficie P della V_3 li possiamo chiamare *sistemi caratteristici.*

9. Diremo *direttrici* della V_3 le linee dei tre sistemi Σ_i:

$$x_i = f_i(u) + \lambda_i,$$
$$x_i = \varphi_i(v) + \mu_i,$$
$$x_i = \psi_i(w) + \nu_i,$$

ai quali appartengono i tre sistemi semplicemente infiniti delle linee coordinate sulla V_3 stessa, e chiameremo *associate* tre direttrici appartenenti ciascuna ad uno dei tre sistemi Σ_i, quando $\lambda_i + \mu_i + \nu_i = 0$.

Da questa corrispondenza risulta:

I. *A due direttrici di un sistema e a due di un altro sistema sono sempre associate due direttrici di un terzo sistema tali che le tre coppie stanno su tre coni aventi i vertici allineati.*

Infatti tre coppie di direttrici associate sono:

$$\begin{cases} x_i = f_i(u) + \lambda_i, \\ y_i = f_i(u) + \mu_i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_i = \varphi_i(v) + \lambda'_i, \\ y'_i = \varphi_i(v) + \mu'_i; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_i = \psi_i(w) - \lambda_i - \lambda'_i, \\ y''_i = \psi_i(w) - \mu_i - \mu'_i. \end{cases}$$

Dalle due prime si ha:

$$x_i - y_i = \lambda_i - \mu_i,$$

dalle seconde:

$$x'_i - y'_i = \lambda'_i - \mu'_i,$$

dalle ultime:

$$x''_i - y''_i = \mu_i - \lambda_i + \mu'_i - \lambda'_i;$$

quindi le coordinate del vertice d'uno dei coni sono combinazioni lineari delle coordinate dei vertici degli altri due.

II. *Il piano che congiunge i punti* u, v, w *di tre direttrici associate passa per il punto* (u, v, w) *della* V_3.

Si ha infatti $x_i + x'_i + x''_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w)$.

Quindi, se consideriamo due linee r_1, s_1 nel primo sistema, due linee r_2, s_2 nel secondo e le loro associate nel terzo, il piano per tre punti di r_1, r_2, r_3 ed il piano che congiunge gli omologhi su s_1, s_2, s_3 determinano un punto della V_3. Variando i tre punti in tutti i possibili modi si ottiene tutta la V_3.

10. *Ad una* V_3 *rappresentata dalla* (3) *sono legate tre superficie* F *luoghi dei centri di prospettività delle superficie* P *di uno stesso sistema prese a due a due.*

Così al sistema $w =$ costante, corrisponde la superficie **F** rappresentata da:

$$x_i = \psi_i(w_1) - \psi_i(w_2).$$

Analogamente agli altri due sistemi corrispondono le altre due superficie:

$$x_i = \varphi_i(v_1) - \varphi_i(v_2),$$
$$x_i = f_i(u_1) - f_i(u_2).$$

Queste tre superficie sono anche i luoghi dei vertici dei coni che congiungono i punti omologhi (punti corrispondenti allo stesso valore del parametro variabile) di due linee coordinate di uno stesso sistema, giacenti su una medesima superficie caratteristica.

Infatti sopra una Pw_1, due linee $(v w_1)$ sono rappresentate da:

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v_1) + \psi_i(w_1)$$
$$y_i = f_i(u) + \varphi_i(v_2) + \psi_i(w_1)$$

da cui:

$$x_i - y_i = \varphi_i(v_1) - \varphi_i(v_2).$$

Ancora: *se diciamo omologhe due linee coordinate appartenenti a due diverse superficie d'un medesimo sistema caratteristico, quando corrispondono ad uno stesso valore d'uno dei parametri variabili sulle due superficie, le* F, *di cui sopra, sono i luoghi dei vertici dei coni sui quali stanno, a due a due, linee coordinate omologhe.*

Infatti, per due linee $(v_1 w_1)$, $(v_1 w_2)$ sopra due superficie caratteristiche Pw_1, Pw_2, si ha:

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v_1) + \psi_i(w_1),$$
$$y_i = f_i(u) + \varphi_i(v_1) + \psi_i(w_2),$$

e quindi:

$$x_i - y_i = \psi_i(w_1) - \varphi_i(w_2).$$

Le tre superficie F *contengono rispettivamente le linee rappresentate dalle equazioni*

$$x_i = \psi'_i(w)\,; \qquad x_i = \varphi'_i(v)\,; \qquad x_i = f'_i(u)\,;$$

essendo le $\psi'_i(w)$ *le derivate rispetto a* w *delle funzioni* $\psi_i(w)$, *analogamente per* $\varphi'_i(v)$, $f'_i(u)$.

Consideriamo infatti la superficie F rappresentata da

$$x_i = \psi_i(w_1) - \psi_i(w_2)\,;$$

essa contiene il punto di coordinate $\frac{\psi_i(w) - \psi_i(w_a)}{w - w_a}$; tale punto, variando w_a e tendendo a w, diventa il punto di coordinate $\psi'_i(w)$. Mutando w esso descrive la linea

$$x_i = \psi'_i(w).$$

Queste tre linee prese a due a due costituiscono le linee focali delle tre congruenze di rette, per ognuna delle quali escono ∞^1 piani tangenti nei punti omologhi alle superficie caratteristiche d'uno stesso sistema. (Cfr. pr. 3).

Se si considerano due linee coordinate qualunque, ma appartenenti ad un medesimo sistema, per es. due (vw):

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v_\alpha) + \psi_i(w_\beta),$$
$$y_i = f_i(u) + \varphi_i(v_\gamma) + \psi_i(w_\delta),$$

si ha, per punti omologhi:

$$x_i - y_i = \varphi_i(v_\alpha) + \psi_i(w_\beta) - \varphi_i(v_\gamma) - \psi_i(w_\delta). \tag{4}$$

Le due linee stanno su di uno stesso cono di cui il vertice descrive, al loro variare, una V_4.

Di tali V_4 se ne hanno quattro corrispondentemente ai tre sistemi ∞^2 di linee coordinate sulla V_3.

Ognuna contiene quattro sistemi semplicemente infiniti di V_3 analoghe a quella considerata. Per ogni punto ne escono quattro che si intersecano a due a due secondo sei superficie P ed a tre a tre secondo quattro linee lungo cui varia uno solo dei parametri. Esse costituiscono il sistema quadruplo ∞^3 delle linee coordinate della V_4.

Le (4) si possono scrivere:

$$x_i = [\varphi_i(v_\alpha) - \varphi_i(v_\gamma)] + [\psi_i(w_\beta) - \psi_i(w_\delta)],$$

e queste ci dicono che *se consideriamo le* ∞^4 *rette che si appoggiano a due delle superficie* F, *e su ogni retta il punto* x *avente per coordinate le somme delle coordinate omonime dei punti d' incontro con le* F, *il luogo di* x *è la* V_4 *rappresentata dalle* (4). Analogamente per le altre due V_4.

Diciamo *corde omologhe* di due superficie caratteristiche d'uno stesso sistema le congiungenti coppie di punti omologhi.

Allora *la* V_4, *le cui equazioni sono le* (4), *si può considerare come il luogo dei punti comuni delle corde omologhe delle* ∞^1 *superficie* Pu. Analogamente per le altre due.

II. Consideriamo una linea coordinata della V_3 (3), per esempio una (vw); per ogni suo punto escono una (wu) ed una (uv). In un punto x_i della (vw) considerata conduciamo la tangente alla (vu) passante per esso; sarà la congiungente i punti di coordinate x_i e

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv + \frac{\partial x_i}{\partial w} dw .$$

Nel nostro caso è:

$$dx_i = f'_i(u) du + \varphi'_i(v) dv + \psi'_i(w) dw = \psi'(w) dw,$$

essendo pei punti della (vw): $\varphi'_i(v) = f'_i(u) = 0$.

Variando x_i sulla (vw), non varia il parametro w, ne viene che la tangente variabile passa sempre per il punto di coordinate $\psi_i(w)$; costituisce quindi un cono di vertice quel punto.

Analogamente formano un cono di vertice il punto di coordinate $\varphi'_i(v)$, le tangenti alle (uw) lungo i punti della stessa (wv).

Variando questa linea si ottengono due sistemi ∞^2 di coni tangenti alla V_3 di cui i vertici stanno sulle due linee, già considerate, di equazioni:

$$x_i = \psi'_i(w), \qquad x_i = \varphi'_i(v). \tag{5}$$

Ripetendo ragionamenti analoghi per le (vu) e (uw), si conclude che la V_3 *di cui si tratta gode della proprietà che lungo ciascuna linea parametrica le si possono condurre due coni ordinari tangenti, i vertici dei quali stanno sulle linee* (5) *e sull'altra* $x_i = f'_i(u)$.

Si hanno sei sistemi ∞^2 di tali coni; per un punto di ciascuna delle tre linee suddette ne escono una semplice infinità appartenenti ad uno ed una semplice infinità appartenenti ad un altro dei sei sistemi.

Ogni linea parametrica della V_3 è pure linea parametrica delle due superficie caratteristiche da cui essa proviene come intersezione; si deduce che *quei sei sistemi di coni sono composti dei coni che si possono circoscrivere lungo le linee coordinate ai tre sistemi* ∞^1 *di superficie* P *della* V_3.

Osserviamo che, date le equazioni parametriche di tre linee di S_n:

$$x_i = \psi(w), \qquad x_i = \varphi'(v), \qquad x_i = f'_i(u),$$

integrando le funzioni dei secondi membri e sommando le funzioni integrali con gli stessi indici, si ottengono le rappresentazioni parametriche di infinite V_3 legate a quelle tre linee nel modo che si è visto.

12. Consideriamo una (vw). In un suo punto x_i generico vi sono ∞^1 piani tangenti alla V_3, i quali stanno nell'S_3 tangente in quel punto. π_u, π_v, π_w siano i piani tangenti rispettivamente alle P_u, P_v, P_w uscenti dal punto di coordinate x_i. Variando il punto lungo la (vw), π_w inviluppa il cono, già considerato, delle tangenti alle (wu) nei punti della (vw), e π_u inviluppa il cono delle tangenti alle (vu) nei punti della stessa linea.

Ciò dipende dal fatto che quei due piani variano, restando sempre tangenti lungo una linea coordinata, l'uno alla P_w, l'altro alla P_v, alle quali i due coni sono circoscritti. Il terzo piano π_u invece, varia insieme alla P_u a cui è tangente e descrive una semplice infinità di piani passanti per una retta.

Infatti ognuno di essi è determinato dai punti di coordinate: x_i, $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$ e, variando x_i lungo la (vw), restano fissi $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$.

Altrimenti: ciascuno di quei due piani contiene le tangenti alle (uw), (uv) uscenti dal punto di contatto ed intersezioni della Pu variabile colle Pw, Pv fisse; quindi contiene i due punti fissi $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$ (cfr. pr. 11).

Concludiamo che *lungo ogni linea parametrica si possono condurre due sistemi ∞^1 di piani tangenti che inviluppano due coni ed un sistema ∞^1 di piani tangenti i quali passano per una retta che contiene i vertici dei due coni.*

I coni costituiscono i sei sistemi ∞^2 considerati al pr. 11.

I piani per una retta costituiscono tre sistemi ∞^2: sono i piani tangenti in punti omologhi alle superficie d'uno stesso sistema (cfr. pr. 3 e 10).

13. L'S_3 tangente alla V_3 in un punto di coordinate $x_i(u, v, w)$ è determinato dai punti di coordinate x_i, $f'_i(u)$, $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$.

Se il punto varia lungo una (vw), restano fissi $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$; quindi si ottiene proiettando dalla retta fissa che congiunge i punti di coordinate $\varphi'_i(v)$, $\psi'_i(w)$ una retta variabile la quale, congiungendo i punti di coordinate x_i, $f'_i(u)$, è la tangente alla (vw). Quindi:

Gli S_3 tangenti alla V_3 lungo una linea coordinata hanno a comune una retta, e si ottengono proiettando da questa retta le tangenti alla suddetta linea.

Tali S_3 costituiscono, come sopra i piani, tre sistemi ∞^2.

Gli S_3 tangenti alla V_3 nei punti d'una stessa superficie P hanno a comune un punto perchè uno solo dei parametri resta fisso. Tale punto varia sulla linea

$$\begin{array}{lll} x_i = f'_i(u) & \text{per le} & P_u, \\ x_i = \varphi'_i(v) & \text{"} \quad \text{"} & P_v, \\ x_i = \psi'_i(w) & \text{"} \quad \text{"} & P_w. \end{array}$$

Se consideriamo gli ∞^3 triangoli aventi i vertici sulle tre linee suddette, abbiamo che per ognuno di essi passa uno ed uno solo S_3 tangente alla V_3.

Vi sono ∞^1 triangoli aventi a comune un lato, perciò per ogni lato passano ∞^1 S_3 tangenti alla V_3.

Vi sono ∞^2 triangoli aventi a comune un vertice, perciò per ogni vertice passano ∞^2 S_3 tangenti alla V_3.

14. Il piano osculatore in un punto di coordinate x_i ad una curva della V_3 è determinato dai punti

$$x_i = f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w)$$
$$dx_i = f'_i(u)du + \varphi'_i(v)dv + \psi'_i(w)dw.$$
$$d^2x_i = f''_i(u)(du)^2 + \varphi''_i(v)(dv)^2 + \psi''_i(w)(dw)^2 + f'_i(u)d^2u + \varphi'_i(v)d^2v + \psi'_i(w)d^2w.$$

Se fissiamo la tangente, ossia du, dv, dw, resta fisso oltre dx_i il punto di coordinate

$$y_i = f''_i(u)(du)^2 + \varphi''_i(v)(dv)^2 + \psi''_i(w)(dw)^2,$$

allora d^2x_i varia nell'S_3 dei punti:

$$x_i, \quad f'_i(u), \quad \varphi'_i(v), \quad \psi'_i(w),$$

quindi:

I piani osculatori alle curve per x_i, *aventi la stessa tangente, si ottengono proiettando da questa i punti di un* S_3 *col quale essa ha il punto* dx_i *a comune, sono perciò* ∞^3 *e riempiono l'*S_4 *determinato dai punti:*

$$x_i, \quad y_i, \quad f'_i(u), \quad \varphi'_i(v), \quad \psi'_i(w);$$

ossia l'S_4 *determinato dall'*S_3 *tangente in* x_i *alla* V_3 *e dal punto* y_i.

Al variare della tangente, y_i varia nel piano dei punti:

$$f''_i(u), \quad \varphi''_i(v), \quad \psi''(w);$$

si deduce che *fra gli* ∞^{n-4} S_4 *tangenti alla* V_3 *in* x_i, *ve ne sono* ∞^2 *i quali contengono gli* S_2 *osculatori alle curve per* x_i.

Questi ∞^2 S_4 riempiono l'S_6 determinato dai punti:

$$x_i, \quad f'_i(u), \quad \varphi'_i(v), \quad \psi'_i(w), \quad f''_i(u), \quad \varphi''(v), \quad \psi''_i(w).$$

Gli S_2 *osculatori alle curve di una* V_3 *di* S_n, *rappresentabile con le* (3), *quando è* $n > 5$ *riempiono un* S_6.

Se è $n = 5$, gli S_4 che contengono gli S_2 osculatori alle curve per x_i, sono tutti gli S_4 tangenti, i quali costituiscono un fascio.

Ognuno di essi sega la V_3 secondo una superficie avente in x_i un cono quadrico tangente di cui l'equazione è:

$$[\xi_i f''_i(u)](du)^2 + [\xi_i \varphi''_i(v)](dv)^2 + [\xi_i \psi''_i(w)](dw)^2 = 0 \qquad (6)$$

essendo le ξ_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$ le coordinate omogenee proiettive dell'S_4 che si considera e $[\xi_i f''_i(u)] = \sum_i \xi_i f_i(u)$.

Se i coefficienti della (6) sono tutti positivi il cono è immaginario.

I differenziali du, dv, dw sono le coordinate del punto dx_i nel piano $\alpha[f'_i(u), \varphi'_i(v), \psi'_i(w)]$, quindi la (6) rappresenta in questo piano la conica sezione del cono suddetto.

I quadrati $(du)^2$, $(dv)^2$, $(dw)^2$ sono le coordinate del punto y_i nel piano $\beta[f''_i(u), \varphi''_i(v), \psi''_i(w)]$. (Cfr. pag. 260), perciò la (6), interpretata in β, rappresenta la retta intersezione di questo piano con l'iperpiano ξ_i.

Gli S_4 tangenti alla V_3 in x_i costituiscono un fascio:

$$\lambda(\xi_i x_i) + \mu(\xi'_i x_i) = 0,$$

quindi formano un fascio:

$$\lambda \{[\xi_i f''_i(u)](du)^2 + [\xi_i \varphi''_i(v)](dv)^2 + \ldots\} - \mu \{(\xi'_i f''_i(u)(du)^2 \ldots\} = 0 \quad (7)$$

i coni quadrici tangenti alle ∞^1 superficie da essi segati sulla V_3. Abbiamo perciò nel piano α un fascio di coniche rappresentato dalle (7) e, corrispondentemente, nel piano β un fascio di rette rappresentato ancora dalle (7).

Il centro del fascio di rette è il punto comune al piano β e al π_3 tangente, base del fascio di S_4.

Vi sono tre S_4 che segano la V_3 secondo tre superficie con un punto doppio biplanare.

Si hanno, per determinare le coordinate dei tre S_4 e le coordinate delle tre rette doppie dei coni degeneri, le sette equazioni

$$[\xi_i f_i(u) + \varphi_i(v) + \psi_i(w)] = 0, \quad [\xi_i f'_i(u)] = 0, \quad [\xi_i \varphi'_i(v)] = 0, \quad [\xi_i \psi'_i(w)] = 0,$$
$$[\xi_i f''_i(u)](du)^2 = 0, \quad [\xi_i \varphi''_i(v)](dv)^2 = 0, \quad [\xi_i \psi''_i(w)](dw)^2 = 0. \quad (8)$$

Le prime quattro esprimono che l'iperpiano ξ_i è tangente in x_i alla V_3: le ultime tre sono le semiderivate dell'equazione (6) ed esprimono che il cono che essa rappresenta si spezza.

Supponiamo che il centro T del fascio di rette nel piano β non coincida con nessuno dei tre punti $f''_i(u)$, $\varphi''_i(v)$, $\psi''_i(w)$; dalle (8) si ha:

$$[\xi_i f''(u)] = 0, \qquad dv = 0, \qquad dw = 0,$$

oppure

$$[\xi_i \varphi''(v)] = 0, \qquad du = 0, \qquad dw = 0,$$

oppure

$$[\xi_i \psi''(w)] = 0 \qquad du = 0, \qquad dv = 0.$$

I tre iperpiani che si cercano sono quelli che segano su β le rette TA, TB, TC, essendo A, B, C i punti corrispondenti alle coordinate $f''_i(u)$, $f''_i(v)$, $\psi''_i(w)$.

Le tre rette doppie dei coni degeneri, sono quelle corrispondenti alle direzioni per cui è:

u arbitrario, $\quad v =$ costante, $\quad w =$ costante.

ovvero

$u =$ costante, $\quad v$ arbitrario, $\quad w =$ costante,

ovvero

$u =$ costante, $\quad v =$ costante, $\quad w$ arbitrario;

sono cioè le direzioni delle tre linee parametriche uscenti da x_i.

Gli iperpiani tangenti ad una V_3 i quali la segano secondo superficie avente un punto doppio biplanare si dicono *iperpiani tangenti stazionari.*

Per la V_3 di S_5 rappresentata dalle (3) possiamo dire *che le linee parametriche costituiscono tre sistemi doppiamente infiniti di linee, in ogni punto delle quali esiste un iperpiano tangente stazionario alla V_3 stessa.*

Annullando nella (6) uno dei coefficienti nei tre modi diversi, si ottengono le equazioni delle coppie di piani del fascio di coni di vertice x_i, o meglio, le equazioni dei fasci di raggi in cui degenerano tre coni del fascio.

Potrebbe darsi che per qualche punto della V_3 il centro T del fascio di rette in β cadesse in uno dei tre punti A, B, C. Supponiamo che T coincida col punto A di coordinate $f'_i(w)$; allora, tutti gli S_n passando per tale punto, l'equazione del fascio diventa:

$$\lambda\{[\xi\varphi''(v)](dv)^2+[\xi\psi''(w)](dw)^2\}+\mu\{[\xi'\varphi''(v)](dv)^2+[\xi'\psi''(w)](dw)^2\}=0$$

da cui si vede che il fascio di coni degenera in un fascio di piani contato due volte; l'asse del fascio è la tangente in x_i alla linea (vw) che vi passa.

Chiamando omologhi due piani quando provengono da uno stesso S_n, abbiamo nel fascio un'involuzione di cui i piani doppi corrispondono ai due S_4 che segano β nelle due rette AB, AC.

Le equazioni di questi due piani come sostegni di due fasci di raggi sono:

$$[\xi_i\varphi''_i(w)]\,(dw)^2=0,$$
$$[\xi_i\varphi''(v)]\;\;(dv)^2=0.$$

Dalla prima si ha: w costante ed u, v arbitrari; dalla seconda: v costante ed u, w arbitrari. Si deduce che i piani doppi dell'involuzione suddetta sono i piani tangenti in x_i rispettivamente alle Pw, Pv.

Quindi se il π_3 tangente in x_i alla V^3 contiene il punto di coordinate $f''_i(u)$, tutti gli S_4 tangenti segano la V_3 secondo superficie avente in x_i un punto doppio biplanare. Vi sono due S_4 che l'intersecano secondo due superficie aventi un punto doppio uniplanare.

15. Affinchè questo fatto si verifichi per ogni punto x_i della V_3, deve il punto $f''_i(v)$ appartenere sempre al π_3 tangente. Ciò avviene se è:

$$f''_i(u)=\alpha f''_i(u)+\beta\varphi'_i(v)+\gamma\psi'_i(w)+\delta[f_i(u)+\varphi_i(v)+\varphi''_i(w),$$

quindi: $\beta=\gamma=\delta=0$, α arbitrario e si può prendere eguale ad 1. Si ha allora:

$$f''_i(u)=f'_i(u),$$
$$f'_i(u)=a_ie^u,$$
$$f_i(u)=a_ie^u.$$

Se anche le $\varphi_i(v)$ sono di questa forma, ossia:

$$\varphi_i(v)=b_ie^v,$$

anche il punto $\varphi''_i(v)$ appartiene sempre al π_3 tangente, segue che esso ha comune con β una retta, perciò entrambi stanno in un S_4 che contiene tutti gli S_2 osculatori alle curve della V_3. Se poi è anche $\varphi_i(w)=c_i e^w$, il piano dei punti $[f''_i(u), f''_i(v), \psi''_i(w)]$ appartiene al π_3 tangente; la V_3 si riduce, come vedremo, ad un piano.

16. Consideriamo il primo caso.

Ponendo $e^u=u$, la V_3 è rappresentata da:

$$x_i=a_i u+\varphi_i(v)+\psi_i(w). \tag{9}$$

Tutti gli S_3 tangenti passano per il punto a_i che appartiene alla V_3. Quindi: *se la V_3 di cui si tratta è sempre segata dagli S_4 tangenti secondo superficie avente un punto doppio biplanare, essa è un cono di vertice un punto.*

Le linee (vw) sono le rette per il punto a_i, sono cioè le generatrici del cono.

Le P_v e le P_w sono coni ordinari di vertice a_i; le P_u sono superficie P generiche.

I due coni tangenti alla V_3 (9) lungo una (vw) si riducono a due fasci di raggi.

Dei due coni tangenti lungo una (uw), uno coincide con la P_w, così dei due coni tangenti lungo una (uv), uno coincide con la P_w.

Il cono inviluppo dei piani tangenti ad una P_w generica ed il cono inviluppo dei piani tangenti ad una P_v lungo la (vw) loro intersezione, si riducono ai piani sostegni dei due fasci suddetti, mentre costituiscono ancora una semplice infinità per una retta, che ha con ciascuno di quelli un punto a comune, i piani tangenti lungo la (vw) suddetta alle ∞^1 P_u uscente dai suoi punti.

Lungo ogni (uv) i piani tangenti alla P_v inviluppano la P_v medesima, i piani tangenti alla P_u inviluppano un cono, ed i piani tangenti alle ∞^1 P_w costituiscono una semplice infinità per una retta passante per il vertice della V_3 ed il punto $\varphi'_i(v)$.

Analogamente per le (uw).

Quindi se dal vertice della V_3 (9) si proiettano le due linee:

$$x_i=\varphi'_i(v), \qquad x_i=\psi'_i(w),$$

si ottengono due coni tali che per ogni loro generatrice passano ∞^1 piani tangente alla V_3.

Gli ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 lungo una (vw) coincidono, perchè ognuno la tocca lungo tutta la (vw) che è una generatrice.

Gli ∞^1 S_3 tangenti lungo una (uv) od una (vw) hanno a comune una retta $[a_i, \varphi'_i(v)]$ o $[a_i, \psi'_i(w)]$, sicchè per ogni generatrice di ciascuno dei due coni suddetti passano ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 lungo una linea coordinata.

Ancora hanno a comune una retta $[a_i, \varphi'_i(v)]$ gli S_3 tangenti nei punti d'una P_w. Perciò per ogni generatrice di quei due coni passano ∞^1 S_3 tangenti alla V_3 nei punti d'una superficie caratteristica.

Gli S_2 tangenti nei punti di una P_u sono ∞^2 ed hanno a comune solo il vertice della V_3.

17. Nel secondo caso la V_3 è rappresentata da

$$x_i = a_i u + b_i v + \varphi_i(w) \tag{10}$$

Per ogni valore di w le (10) ci dànno le coordinate di un punto variabile nel piano determinato dai punti di coordinate a_i, b_i, $\varphi_i(w)$. Variando w, varia il piano; quindi le P_w sono piani per la retta (a_i, b_i).

Le P_u sono coni di vertici b_i; infatti, se poniamo:

$$y_i = a_i u + \psi_i(w), \tag{11}$$

essendo u costante, le (11) rappresentano una linea; variando u si ottengono ∞^1 linee che stanno su uno stesso cono di vertice a_i. Quindi le P_u si possono rappresentare con:

$$x_i = b_i v + y_i,$$

essendo y_i i punti di una linea qualunque delle ∞^1 rappresentate dalle (11); ossia le P_u si ottengono proiettando da a_i le ∞^1 linee suddette.

Analogamente le P_v sono coni di vertice a_i. [1]

Dunque: *se la V_3 di cui si tratta ha in ogni suo punto un S_4 osculatore (nel senso ch'esso contenga gli S_2 osculatori alle curve per quel punto) essa contiene una semplice infinità di piani per una retta e due sistemi ∞^1 di coni.*

I coni di ciascun sistema hanno a comune il vertice che sta sulla retta comune ai piani.

Ogni piano contiene una generatrice di ciascun cono.

Due coni d'uno stesso sistema non hanno altri punti a comune all'infuori del vertice, perchè le linee (11) non hanno in generale punti a comune.

Due coni di sistema diverso s'intersecano secondo una linea.

Una tale V_3 si può ottenere nel seguente modo:

Si consideri in un S_4 un cono ordinario di vertice P_i il quale contenga una semplice infinità di curve:

$$x_i = f_i(u) + \lambda_i + \rho P_i, \tag{12}$$

(le λ_i sono costanti fisse) appartenenti al sistema:

$$x_i = f_i(u) + \mu_i. \text{ [2]} \tag{13}$$

Da una retta passante per P_i, la quale non giaccia però nell'S_4, si proiettano le generatrici del cono, si otterrà una semplice infinità di piani per quella retta. Da due punti presi ad arbitrio su essa, si proiet-

[1] Al sistema delle P_v apppartiene il cono $y_i = a_i u + \psi_i(w)$ corrispondenti a $V = 0$.

[2] Ad ogni gruppo di valori μ_i corrisponde una linea del sistema.

tino le curve del cono (12): si otterranno due sistemi ∞^1 di coni tali che quelli d'uno stesso sistema hanno solo il vertice a comune; un cono d'un sistema incontra i coni dell'altro sistema in curve del sistema (13), ed ogni piano contiene una generatrice di ciascun cono.

18. Nel terzo caso la V_3 è rappresentata da:

$$x_i = a_i u + b_i v + c_i w.$$

Non si ha più una vera V_3, ma un piano pei punti a_i, b_i, c_i.

Le linee coordinate sono le rette dei fasci di centri a_i, b_i, c_i.

Quindi la V^3 che si considera non può avere in ogni punto un S_3 *osculatore senza ridursi ad un piano.*

(Continua). DOTT. EMMA CAIRO.

PER LO STUDIO DI ALCUNE EQUAZIONI INDETERMINATE [1]

Il primo ad occuparsi della equazione $x^2 + axy + by^2 = z^n$, per quanto mi sappia, è stato LAGRANGE nelle " Addizioni dell'Algebra di Eulero „ e precisamente nell'ultimo § di queste, ed ha indicato un metodo, quello stesso esposto dal sig. F. FERRARI in questo *Periodico* (anno 1909-10, pag. 59 e seg.) per la ricerca di infinite soluzioni della predetta equazione. In seguito la cosa è stata ripigliata da LEGENDRE (*Theorie des Nombres*, ediz. 1830, tom. 2°, pag. 134 e seg.) seguendo le stesse orme del sommo matematico italiano e le formole che Egli dette sono state ultimamente riprodotte dal sig. E. B. ESCOTT nell'*Int. des Math.*, vol. 15°, anno 1908, pag. 153. Lo stesso ordine di idee ha ispirato al sig. DETHOVES la sua bella memoria sulla risoluzione delle equazioni $ax^m + by^m = cz^n$ (*Nouv. Ann.*, pag. 265 e seg., anno 1879). Nel 1904 mi occupai della equazione $x^2 - ay^2 = z^n$ (*Giornale di Battaglini*) ed allora mostrai che si potevano adoperare anche nella risoluzione di questa questione le funzioni U_n e V_n di LUCAS (V. *Théor. des Nombres del Lucas*, pag. 308 e seg., oppure *Periodico di Matematica*, anno 1902, pag. 320, dove trovasi un'altra applicazione da me fatta di queste stesse funzioni) sia per la facilità sia per la rapidità dell'impiego.

Ora ritorno sulla stessa questione, e ripigliando quella idea che allora mi guidò mostro anche l'uso che di quelle funzioni può farsi per la ricerca di infinite soluzioni di altre equazioni. Porta questo processo alla risoluzione generale, cioè dànno queste funzioni tutte

[1] Comunicazione al Congresso regionale della " Mathesis „ sezione pugliese.

le soluzioni delle equazioni nelle quali possono adoprarsi? A ciò non rispondo per ora, solo posso dire che i risultati che qui ottengo sono generali quanto quelli che hanno ottenuto i signori che si sono occupati della cosa.

1. Teorema. — *Indicando con* U_k *e* V_k *le funzioni numeriche del 2° ordine di Lucas*

$$U_k(2\lambda + a\mu,\ \lambda^2 + a\mu\lambda + b\mu^2), \quad V_k(2\lambda + a\mu,\ \lambda^2 + a\mu\lambda + b\mu^2),$$

dove a, b, λ, μ *sono numeri arbitrarii, le posizioni*

$$x = \frac{1}{2}[V_k - a\mu U_k], \quad y = \mu U_k, \quad z = \lambda^2 + a\mu\lambda + b\mu^2,$$

dànno infinite soluzioni della equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^k \dots \qquad \text{(I)}$$

Infatti, fra le $U_k(p, q)$, $V_k(p, q)$ sussiste la relazione

$$\left(\frac{V_k}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) U_k^2 = q^k,$$

e costruendo la (I) colle posizioni indicate si ha precisamente

$$\left(\frac{V_k}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2\mu^2}{4} - b\mu^2\right) U_k^2 = (\lambda^2 + a\mu\lambda + b\mu^2)^k;$$

ciò che dimostra la cosa.

Esempii. — *a*) La equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^2, \qquad (1)$$

riceve, dalle nostre posizioni, le infinite soluzioni:

$$x = \lambda^2 - b\mu^2, \quad y = 2\lambda\mu + a\mu^2, \quad z = \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2.$$

b) La equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^3, \qquad (2)$$

riceve, dalle nostre posizioni, le infinite soluzioni:

$$x = \lambda^3 - 3b\lambda\mu^2 - ab\mu^3, \; y = 3\lambda^2\mu + 3a\lambda\mu^2 + (a^2 - b)\mu^3, \; z = \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2.$$

c) La equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^4, \qquad (3)$$

riceve, dalle nostre posizioni, le infinite soluzioni:

$$x = \lambda^4 - 4ab\lambda\mu^3 - 6b\lambda^2\mu^2 - b(a^2 - b)\lambda^4,$$
$$y = 4\lambda^3\mu + 4(a^2 - b)\lambda\mu^3 + 6a\lambda^2\mu^2 + a(a^2 - 2b)\mu^4,$$
$$z = \lambda^2 + a\lambda\mu + b\lambda^2.$$

2. Corollarii. — 1°. *La equazione*

$$x^2 + by^2 = z^n$$

è soddisfatta da

$$x = \frac{1}{2} V_n (2\lambda, \lambda^2 + b\mu^2), \quad y = \mu U_n (2\lambda, \lambda^2 + b\mu^2), \quad z = \lambda^2 = b\mu^2.$$

2°. *La equazione*

$$x^2 + axy = z^n$$

è soddisfatta da

$$x = \frac{1}{2} [V_n (2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu) - a\mu U_n (2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu)],$$
$$y = \mu U_n (2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu), \; z = \lambda^2 + a\lambda\mu.$$

3°. *La equazione*

$$x + ay = z^n$$

è soddisfatta da

$$x = \frac{1}{2} V_n (2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu),$$
$$y = \frac{1}{2} \mu U_n (2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu), \; z = \lambda + a\mu .$$

4°. *La equazione*

$$x - ay = z^n$$

è soddisfatta da

$$x = \frac{1}{2} V_n, \quad y = \frac{1}{2} \mu U_n, z = \lambda$$

dove le U_n *e* V_n *sone quelle del corollario 3°.*

3. Per ottenere infinite soluzioni della equazione

$$x^2 + axy + by^2 = z^{rs} \tag{II}$$

possiamo procedere dalla risoluzione delle due equazioni

$$x^2 + axy + by^2 = z_1^r \quad \text{e} \quad \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2 = z_2^s.$$

La cosa si vede subito quando si osservi che la forma di z è identica alla forma del primo membro della equazione da risolvere.

Per chiarire la cosa mi varrò di un esempio. Supponiamo che sia da risolvere la equazione

$$x^2 + by^2 = z^6.$$

Risolviamo particolarmente le due equazioni

$$x_1^2 + by_1^2 = z_1^2 \qquad x_2^2 + by_2^2 = z_2^3$$

mediante le formole:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1^2 - b\mu_1^2 \\ y_1 &= 2\lambda_1\mu_1 \\ z_1 &= \lambda_1^2 + b\mu_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= \lambda_2^3 + 3b\lambda_2\mu_2^3 \\ y_2 &= 3\lambda_2^2\mu_2 - b\mu_2^3 \\ z_2 &= \lambda_2^2 + b\mu_2^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Se ora in luogo di λ_1 e μ_1 del gruppo (1) si sostituiscono i valori di x_2 ed y_2 del gruppo (2), si ha

$$\xi^2 + b\psi^2 = (x_2^2 + by_2^2)^3,$$

ma

$$x_2^2 + by_2^2 = (\lambda_2^2 + b\mu_2^2)^2,$$

epperò

$$x^2 + by^2 = (\lambda_2^2 + b\mu_2^2)^6,$$

con

$$x = (\lambda_2^2 - 3b\lambda_2\mu_2^2)^2 - b\,(3\lambda_2^2\mu_2 - b\mu_2^3)^2,$$
$$y = 2\,(\lambda_2^3 - 3b\lambda_2\mu_2^2)\,(3\lambda_2^2\mu_2 - b\mu_2^3).$$

Oppure

$$\begin{cases} x = (\lambda_1^2 - b\mu_1^2)^3 + 3b\,(\lambda_1^2 - b\mu_1^2)\,(2\lambda_1\mu_1)^2, \\ y = 3\,(\lambda_1^2 - b\mu_1^2)^2 .\, 2\lambda_1\mu_1 - b\,(2\lambda_1\mu_1)^3, \\ z = (\lambda_1^2 + b\mu_1^2)^2 + b\,(2\lambda_1\mu_1)^2. \end{cases}$$

S'intende bene che questi due sistemi di soluzioni sono identici ed entrambi risultano eguali all'unico proveniente dalle nostre formule

$$x = \frac{1}{2}\,\mathrm{V}_6\,(2\lambda, \lambda^2 + b\mu^2), \quad y = \mu\mathrm{U}_6\,(2\lambda, \lambda^2 + b\mu^2), \quad z = \lambda^2 + b\mu^2.$$

Questo (che ha importanza in se stesso) merita pure che venga rilevato, perchè in corrispondenza anche le funzioni U e V si possono adoperare in modo che non ci si debba assolutamente servire dell'indice rs, ma separatamente degli indici r ed s. Osserviamo infatti che dalle $\mathrm{V}_r\,(p, q)$ e $\mathrm{U}_r\,(p, q)$ si forma la $\mathrm{V}_{rs}\,(p, q)$ sostituendo nella V_r in luogo di p, $\mathrm{V}_s\,(p, q)$ ed in luogo di q, q^s; si forma la U_{rs} con questa stessa sostituzione moltiplicando il risultato per U_r. D'altra parte si dimostra facilmente che è

$$\left[\left(\frac{\mathrm{V}_r}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\mathrm{U}_r^2\right]^s = \left(\frac{\mathrm{V}_{rs}}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)\left(\frac{\mathrm{U}_{rs}}{2}\right)^2.$$

Tutto ciò ci porta a concludere che: se si cercano infinite soluzioni della equazione di cui in questo §, si costruiscano le due funzioni

$$\mathrm{V}_r\,(2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2), \quad \mathrm{U}_r\,(2\lambda + a\mu, \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu),$$

e mediante queste e l'altro elemento $(\lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2)^r$, si otterranno le U_{rs}, V_{rs}. In conclusione le infinite soluzioni della predetta equazione saranno date dalle formule

$$x = \frac{1}{2}\,[\mathrm{V}_r(\mathrm{V}_s, (\lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2)^r) - a\mu\mathrm{U}_r\mathrm{U}_s\,(\mathrm{V}_s, (\lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2)^r)],$$
$$y = \mu\mathrm{U}_r\mathrm{U}_s\,(\mathrm{V}_s, (\lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2)^r)$$
$$z = \lambda^2 + a\lambda\mu + b\mu^2.$$

4. Sia il polinomio

$$f\,(x_1, x_2, \ldots)$$

e supponiamo che possa mettersi sotto una delle due forme

$$(x_1+\alpha x_2)f_1(x_1,x_2,\ldots)\quad \text{oppure}\quad (x_1^2+\beta x_1x_2+\gamma x_2^2)f_2(x_1,x_2\ldots),$$

con α, β, γ, N_0 od N_1, dico che esistono infinite soluzioni della indeterminata

$$f(x_1,x_2,\ldots)=Az^n.$$

Infatti, per ipotesi è

$$(x_1+\alpha x_2)\varphi(x_1,\ldots)=f(x_1,x_2,\ldots).$$

Poniamo

$$x_1+\alpha x_2=z^n,\quad A=\varphi(x_1,x_2,\ldots),$$

allora si avrà (corollario 3° e 4°)

$$x_1=\frac{1}{2}V_n,\qquad x_2=\frac{1}{2}\mu U_n,$$

epperò

$$f\left(\frac{1}{2}V_n,\frac{1}{2}\mu U_n,x,\ldots\right)=z^n\varphi,$$

e la cosa è dimostrata. Dimostrazione perfettamente analoga per la seconda ipotesi.

È importante osservare l'arbitrarietà che lascia il teorema alla scelta delle altre incognite $x_3, x_4, \ldots$

Evidentemente se la $f(x_1,x_2,\ldots)$ può mettersi sotto la forma

$$(x_1+\alpha_1x_2)^r(x_i+\alpha_ix_i)^s\ldots(x_k^2+\alpha_kx_kx_1+\beta_kx_1^2)^t\ldots$$

si hanno diverse infinità di soluzioni.

In particolare consegue che le equazioni

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=Az^n,\quad x^m-y^m=Az^n,\quad x^{2(2k+1)}+y^{2(2k+1)}=Az^n$$

sono suscettibili di infinite soluzioni.

Espongo ora una applicazione, scelta fra le ricerche da me fatte, sulla

Equazione cubica: $x^3+A_1x^2y+A_2xy^2+A_3y^3=Az^3.\qquad$ (III)

5. Supponiamo che il suo primo membro possa mettersi sotto la forma

$$(x+\alpha y)(x^2+\beta xy+\gamma y^2),$$

dove α, β, γ sono numeri interi e razionali come si è detto innanzi.

Da quanto precede resulta che si può prendere

$$A=x+\alpha y,\quad z^3=x^2+\beta xy+\gamma y^2,$$

e corrispondentemente si avrà

$$x=\frac{1}{2}[V_3-\beta\mu U_3],\ y=\mu U_3,\ A=\frac{1}{2}[V_3+\mu(2\alpha-\beta)U_3]$$
$$z=\lambda^2+\beta\lambda\mu+\gamma\mu^2,$$

dove le U_3 e V_3 sono quelle del Teor. § 1, ossia si ha

$$(a)\quad \begin{cases} x = \lambda^3 - 3\gamma\lambda\mu^2 - \beta\gamma\mu^3, \\ y = 3\lambda^2\mu + 3\beta\lambda\mu^2 + (\beta^2 - \gamma)\mu^3, \\ z = \lambda^2 + \beta\lambda\mu + \gamma\mu^2, \\ A = \lambda^3 + 3\alpha\lambda^2\mu + 3(\alpha\beta - \gamma)\lambda\mu^2 + (\alpha\beta^2 - \beta\gamma - \alpha\gamma)\mu^3. \end{cases}$$

Si può inoltre prendere

$$A = x^2 + \beta xy + \gamma y^2, \quad z^3 = x + \alpha y,$$

e corrispondentemente si avrà

$$x = \frac{1}{2} V_3, \quad y = \frac{1}{2}\mu U_3, \quad z = \frac{1}{2}[V_3 + \mu U_3],$$
$$A = \frac{1}{4}[V_3 + \beta\mu U_3 V_3 + \gamma\mu^2 U_3^2],$$

dove le U_3 e V_3 sono quelle del corollario 3° § 2, e si ha

$$x = (\lambda + \alpha\mu)^3 + \lambda^3, \quad y = (\lambda + \alpha\mu)^3 - \lambda^3, \quad z = \lambda + \alpha\mu,$$
$$A = 2[\{(\lambda + \alpha\mu)^3 + \lambda^3\}^2 + \beta\{(\lambda + \alpha\mu)^6 - \lambda^6\} + \gamma\{(\lambda + \alpha\mu)^3 - \lambda^3\}^2].$$

Ponendo $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -1$, la (III) diviene

$$x^3 + y^3 = Az^3, \tag{III)'}$$

e corrispondentemente si ha la duplice infinità di soluzioni di questa:

$$\left\{\begin{matrix} x = (\lambda + \mu)^3 + \lambda^3, \; y = (\lambda + \mu)^3 - \lambda^3, \; z = \lambda + \mu, \\ A = 2[(\lambda + \mu)^6 + 3\lambda^6] \end{matrix}\right\} \tag{A}$$

$$\left\{\begin{matrix} x = \mu^3 - 3\lambda\mu^2 + \lambda^3, \; y = 3\mu\lambda^2 - 2\lambda\mu^3, \; z = \lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2, \\ A = \mu^3 - 6\lambda\mu^2 + 3\lambda^2\mu + \lambda^3 \end{matrix}\right\} \tag{B}$$

Le (A) possono mettersi sotto la forma più semplice

$$x = \nu^3 + \lambda^3, \quad y = \nu^3 - \lambda^3, \quad z = \nu, \quad A = 2[\nu^6 + 3\lambda^6],$$

dalle quali si può dedurre l'altra

$$x = \nu^3 + 3\rho^3, \quad y = \nu^3 - 3\rho^3, \quad z = \nu, \quad A = 2[\nu^6 + 27\rho^6].$$

Ora si tenga presente che

$$\nu^6 + 27\rho^6 = (\nu^2 + 3\rho^2)(\nu^2 - 3\nu\rho + 3\rho^2)(\nu^2 + 3\nu\rho + 3\rho^2):$$

ed allora ponendo

$$\nu^2 - 3\rho\nu + 3\rho^2 = \sigma; \quad \nu^2 + 3\nu\rho + 3\rho^2 = \tau,$$

si ha identicamente

$$(\nu^3 + 3\rho^3)^3 + (\nu^3 - 3\rho^3)^3 = \sigma\tau(\tau + \sigma)\nu^3.$$

La forma di A trovata mediante le (A), e che ora ritroveremo in altro modo, fu stabilita da Lucas come condizione necessaria e sufficiente, perchè la (III)' abbia soluzioni (*Nouv. ann.*, anno 1878, pag. 425).

Scambiando nelle (B) λ con $-\lambda$ si ha un altro gruppo di formole indicato dallo stesso Lucas (loc. cit.).

6. Le (A) stesse ci portano alla identità

$$(u+v)^3+(u-v)^3=2u(u^2+3v^2). \tag{III$''$}$$

Risolviamo ora la equazione

$$2u(u^2+3v^2)=Az^3; \tag{III$'''$}$$

ciò che possiamo fare in due modi, o ponendo

$$A=2u, \quad z^3=u^2+3v^2\ (p_1),$$

o ponendo

$$A=u^2+3v^2, \quad z^3=u\ (p_2).$$

Per le posizioni (p_1) si ha dal Teor. § 1 (esempio *b*))

$$u=\lambda^3-9\lambda\mu^2,\ \ v=3\lambda^2\mu-3\mu^3,\ \ z=\lambda^2+3\mu^2,\ \ A=2\lambda^3-18\lambda\mu^2,$$

e quindi

$$[\lambda^3+3\lambda^2\mu-9\lambda\mu^2-3\mu^3]^3+[\lambda^3-3\lambda^2\mu-9\lambda\mu^2+3\mu^3]^3=$$
$$=2\lambda(\lambda+3\mu)(\lambda-3\mu)[\lambda^2+3\mu^2]^3,$$

e se qui poniamo 3λ in luogo di λ e dividiamo per 27, si ha la identità

$$(9\lambda^3+9\lambda^2\mu-9\lambda\mu^2-\mu^3)^3+(9\lambda^3-9\lambda^2\mu-9\lambda\mu^2+\mu^3)^3=$$
$$=2\lambda(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)[3(3\lambda^2+\mu^2)]^3,$$

e finalmente trasformando questa identità colle posizioni

$$\lambda=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \mu=\frac{\alpha-\beta}{2},$$

(trasformazione indicata dal sig. Dethoves, loc. cit.), si perviene alla identità indicata da Lucas (loc. cit.)

$$[\alpha^3-\beta^3+3\alpha\beta(2\alpha+\beta)]^3+[\beta^3-\alpha^3+3\alpha\beta(2\beta+\alpha)]^3=$$
$$=\alpha\beta(\alpha+\beta)[3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)]^3.$$

Questa permette (come osservò lo stesso Lucas) di risolvere in numeri interi la equazione

$$x^3+y^3=6z^3,$$

ponendo $\alpha=1$, $\beta=2$, e dà

$$17^3+37^3=6.21^3$$

contrariamente a ciò che credeva Legendre (loc. cit., tom. II, pag. 11).

Servendosi delle posizioni (p_2) ed applicando il corollario 3° § 1 si perviene a formole già trovate.

Ponendo nelle (a) $\alpha = -1$, $\beta = \gamma = 1$ si ottiene il gruppo

$$\begin{aligned} x &= \lambda^3 - 3\lambda\mu^2 - \mu^3, \\ y &= 3\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2, \\ z &= \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2, \\ A &= \lambda^3 - 3\lambda^2\mu - 6\lambda\mu^2 - \mu^3, \end{aligned}$$

che dànno infinite soluzioni della equazione

$$x^3 - y^3 = Az^3.$$

7. È nota la impossibilità di risolvere le equazioni

$$x^3 \pm y^3 = z^3.$$

Indicando ora con $A(\lambda, \mu)$ tutti i polinomi A trovati innanzi si deduce che: *Le equazioni*

$$A(\lambda, \mu) = z^3$$

sono impossibili.

Fra queste vi è la equazione

$$\lambda\mu(\lambda + \mu) = Az^3. \tag{L}$$

Lo studio della impossibilità della (L) non si arresta qui, giacchè il Lucas ha stabilito altri casi in cui ciò si verifica. Un teorema del Lucas (*Nouv. Ann.*, 1878, pag. 513) dice:

La equazione

$$\lambda\mu(\lambda + \mu) = Az^3$$

è impossibile in numeri razionali, eccetto i valori eguali o nulli delle indeterminate, nei casi seguenti:

$$A = 1, 2, 3, 4, 18, 36, p, 2p\ (2p)^2, q, 2q^2, 4q,$$

dove p *indica un numero primo della forma* $18n + 5$ *e* q *un numero primo della forma* $18n + 11$. (1)

Tutti i valori di A di cui in questo teor. li indichiamo con $a_1(p, q)$.

La (L) è soddisfatta (Coroll. 3°, § 2) da

$$\begin{aligned} x &= \lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 6\mu^2\lambda + 4\mu^3 \\ y &= 3\lambda^2\mu + 6\lambda\mu^2 + 4\mu^3, \\ z &= \lambda + 2\mu, \\ A &= (\lambda^3 + 3\lambda^2\mu + 6\mu^2\lambda + 4\mu^2)(3\lambda^2 + 6\lambda\mu + 4\mu^2)\mu. \end{aligned}$$

Questa espressione di A la indichiamo con $A(\lambda, \mu)$. Allora possiamo dire:

La equazione

$$A(\lambda_1\mu) = a_1(p_1q)\,\nu^3$$

è impossibile.

Si possono per questa via stabilire infinite proposizioni di questo genere, così per es.:

(1) Questo teor. è stato reso ancora più generale da Sylvester e dal Pepin.

Le equazioni

$$x^3 - y^3 = z^3 a_1(p, q)$$

sono impossibili ecc.

I casi di questa equazione $a_1(p, q) = 1, 2$ sono stati studiati da EULERO (V. *Algebra*, vol. II, pag. 184, 186, 355 e seg. della Ediz. di Lione, 1774).

Impossibili sono pure le seguenti equazioni, nelle condizioni indicate dal teor. di Lucas:

$$x^6 - y^6 = 27z^6,\ x^6 - 2y^6 = 27z^6,\ 9(x^6 - 3y^6) = z^6,\ 9(2x^6 - 3y^6) = z^6 \text{ ecc.}$$

che si deducono dalla impossibilità delle equazioni

$$2(x^6 + 27y^6) = z^6 a_1(p, q).$$

Oltre al citato teor. del Lucas ve n'ha altri dello stesso autore, di Sylvester e del Pepin, sullo stesso ordine di idee (loc. c.) che permettono di enunciare altre proposizioni sul tipo delle precedenti.

Così per es.: sono impossibili le equazioni

$$p(x^3 + 6x^2y + 3xy^2 - y^3) = z^3$$

dove $p = 1, 2, 3, 4, 5$.

Finalmente, ponendo $a_2(p, q) = 1, 2, p, 2q$, dove p è un numero primo della forma $8n + 5$, sono impossibili le equazioni

$$x^2 + 2xy = a_2(p, q) z^2, \quad 2xy(x^2 + y^2) = a_2(p, q) z^4.$$

Si noti in particolare la equazione impossibile $xy(x^2 + y^2) = z^4$ che si deduce dalla seconda di queste due.

G. CANDIDO.

PROBLEMI [1]

(Continuazione — Vedi fasc. V)

13. Si consideri una parabola P di vertice O e fuoco F. Si prolunghi OF di $FA = 8 . OF$, e sia r la retta condotta per A perpendicolare all'asse della parabola. Da un punto qualunque M della r si possa condurre quattro rette che intercettano nella parabola una corda di lunghezza $8 . OF$ e che formano un fascio armonico.

Dimostrare che esiste anche una ellisse che gode della stessa proprietà.

14. Il luogo dei punti dai quali si posson condurre due tangenti perpendicolari ad una ipocicloide a 4 regressi, è una lemniscata di 6° ordine, l'area della quale è $\frac{1}{8}$ di quella della ipocicloide.

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

15. Essendo data un'ipocicloide triangolare, non esistono altri punti tali che l'una delle tangenti condotte da essi sia la bisettrice dell'angolo delle altre due, oltre quelli situati sulle tre tangenti di regresso.

(Cercando il luogo di questi punti si trova una linea di 3° ordine che si spezza nelle tre tangenti di regresso).

16. La podaria del centro di una ipocicloide triangolare è un *trifolium* regolare, l'area del quale è $\frac{1}{4}$ di quella del circolo bitangente all'ipocicloide.

17. La podaria dell'ipocicloide a 4 regressi è una sestica di cui l'area è $\frac{1}{6}$ di quella dell'ipocicloide.

18. Esistendo nell'ipocicloide a 4 regressi 4 corde che sono ad un tempo normali e tangenti alla curva. Se l'ipocicloide ha per equazione

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

la lunghezza di queste corde è $\frac{2a}{\sqrt{5}} = 0,897a.$

19. Si consideri una ellisse e i due circoli ad essa bitangenti che hanno per corde di contatto le corde focali principali PFP' e QFQ'. Sia M un punto situato su uno degli archi di ellisse PQ e P'Q', e N un punto situato su uno dei rimanenti archi.

Dimostrare che:

1° la somma dei segmenti tangenti condotti da M ai due circoli suddetti è costante;

2° la differenza dei segmenti tangenti condotti da N ai circoli stessi è costante;

3° la costante suddetta è la medesima nei due casi ed eguale a $\frac{2c^2}{a}$.

20. Il luogo dei punti tali che le tre tangenti condotte ad un ipocicloide triangolare formino un fascio armonico con la parallela ad una tangente di regresso è una cubica tale che l'area compresa fra essa e l'asintoto è equivalente a quella del circolo che passa per i tre punti di regresso.

21. Se F è il fuoco di una parabola, e MP, MQ le normali in P e Q alla medesima condotta per un punto M di essa, dimostrare che

$$\text{FM} - \text{FP} - \text{FQ} = \text{costante}.$$

22. Eliminando m fra le due equazioni

$$x = \frac{a(1-m^2)\,[1+m^2+m\sqrt{3}]}{m^4-m^2+1}, \qquad y = \frac{mx}{1-m^2},$$

si trova l'equazione di un circolo.

(Si trova

$$2^2 + y^2 - ay\sqrt{3} - a^2 = 0).$$

23. Essendo F, F', P, M i fuochi, il centro ad un punto qualunque di una elisse, dimostrare che le distanze di un punto qualunque del piano delle due rette MF e MF' sono funzioni razionali delle coordinate di M. Trovare la relazione fra le distanze di O da MF e MF' quando il punto M si sposta sull'ellisse.

24. L'area della curva

$$[(x^2+y^2)a-k^3]^2-b^2x^2(x^2+y^2)=0$$

è

$$U=\frac{2\pi k^3}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

25. Dimostrare la relazione

$$a^2b^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,(a^2\operatorname{sen}^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

26. Se N_1, N_2, N_3 sono i punti delle tre normali ad una parabola condotta da un punto M e T, T' i punti di contatto delle tangenti alla parabola condotta dallo stesso punto M, si ha

$$\frac{MN_1 \,.\, MN_2 \,.\, MN_3}{MT_1 \,.\, MT_2}=\text{costante}.$$

(Se p è il parametro della parabola si ha

$$\left.\frac{MN_1 \,.\, MN_2 \,.\, MN_3}{MT_1 \,.\, MT_2}=\frac{p}{2}\right).$$

27. Si consideri il più grande dei due circoli di Chostes d'una ellisse. Sia ABC uno dei triangoli iscritti nel circolo e circoscritto all'ellisse. Per ciascuno dei punti di contatto P, Q, R del triangolo con l'ellisse di traccia le rette simmetriche delle normali in P, Q, R rispetto alle direzioni degli assi.

Dimostrare che queste tre rette concorrono in un punto, e che il luogo di questo punto è un circolo.

(Continua).

E.-N. Barisien.

PICCOLE NOTE

Un curioso esempio di eliminazione.

Si voglia trovare l'inviluppo della retta

$$x\cos\varphi+y\operatorname{sen}\varphi=a\sqrt{\cos 2\varphi}. \qquad (1)$$

Mostreremo che tre procedimenti diversi tutti *egualmente* naturali, conducono a equazioni diverse, due di questi procedimenti introducendo fattori estranei, l'ultimo solo conducendo al resultato diretto.

1°. La derivata della (1) rispetto a φ è

$$x \operatorname{sen} \varphi - y \cos \varphi = \frac{a \operatorname{sen} 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \tag{2}$$

Bisogna eliminare φ tra la (1) e la (2).

Elevando a quadrato la (1) e la (2) e sommando, si ha

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(\cos 2\varphi + \frac{\operatorname{sen}^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right) = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$$

da cui

$$\cos 2\varphi = \frac{a^2}{x^2+y^2}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{x^2+y^2+a^2}{2(x^2+y^2)}, \quad \operatorname{sen}^2 \varphi = \frac{x^2+y^2-a^2}{2(x^2+y^2)}. \tag{3}$$

Questi valori, sostituiti nella (1) danno

$$\frac{x\sqrt{x^2+y^2+a^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} + \frac{y\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ovvero

$$x\sqrt{x^2+y^2+a^2} + y\sqrt{x^2+y^2-a^2} = a^2\sqrt{2}.$$

Facendo sparire i radicali si ha l'equazione di 8° grado

$$[(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2) - 2a^4]^2 = 4x^2y^2[(x^2+y^2)^2 - a^4]. \tag{4}$$

Si troverebbe la stessa equazione introducendo i valori (3) nella (2).

2°. Conserviamo la prima delle equazioni (3)

$$\cos 2\varphi = \frac{a^2}{x^2+y^2}. \tag{5}$$

Moltiplicando membro a membro le (1) e (2) si ha

$$(x^2-y^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi - xy \cos 2\varphi = a^2 \operatorname{sen} 2\varphi.$$

Da cui

$$\tan 2\varphi = \frac{2xy}{x^2-y^2-2a^2}. \tag{6}$$

$$\cos 2\varphi = \frac{x^2-y^2-2a^2}{\sqrt{(x^2-y^2-2a^2)^2+4x^2y^2}}. \tag{7}$$

Confrontando le (5) e (7), si ha come equazione dell'inviluppo

$$\frac{x^2-y^2-2a^2}{\sqrt{(x^2-y^2-2a^2)^2+4x^2y^2}} = \frac{a^2}{(x^2+y^2)},$$

ossia la curva di 8° ordine

$$a^4[(x^2-y^2-2a^2)^2+4x^2y^2] = (x^2+y^2)^2(x^2-y^2-2a^2)^2. \tag{8}$$

3°. Risolvendo le (1) e (2) rispetto a x ed y si ha

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \qquad y = -\frac{a \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \tag{9}$$

L'eliminazione è immediata e si ha l'iperbole equilatera

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{10}$$

CONCLUSIONE. — Da quanto abbiamo detto risulta che l'equazione (4) deve contenere un fattore estraneo di 6° grado. Si riesce a trovarlo scrivendo successivamente

$$[(x^2+y^2)^2 - a^4 + a^2(x^2-y^2-a^2)] - 4x^2y^2[(x^2+y^2)^2 - a^4] = 0.$$

$$[(x^2+y^2)^2 - a^4]^2 + 2a^2(x^2-y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2 - a^4) +$$
$$+ a^4(x^2-y^2-a^2)^2 - 4x^2y^2[(x^2+y^2)^2 - a^4].$$

$$(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)^2 + 2a^2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2) - 3a^4(x^2+y^2)^2 - 4a^6(x^2-y^2) + 4a^8 = 0.$$

$$(x^2+y^2)^2[(x^2-y^2)^2 + 2a^2(x^2-y^2) - 3a^4] - 4a^6(x^2-y^2-a^2) = 0.$$

$$(x^2+y^2)^2[(x^2-y^2) - a^2][(x^2-y^2) + 3a^2] - 4a^6(x^2-y^2-a^2) = 0.$$

$$(x^2-y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2(x^2-y^2+3a^2) - 4a^6] = 0.$$

La soluzione estranea è dunque

$$(x^2+y^2)^2(x^2-y^2+3a^2) - 4a^6 = 0. \qquad (11)$$

Un calcolo analogo mostra che l'equazione (8) si può scrivere

$$(x^2-y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2(x^2-y^2-3a^2) + 4a^6] = 0.$$

La soluzione estranea è allora la sestica

$$(x^2+y^2)^2(x^2-y^2-3a^2) + 4a^6 = 0. \qquad (12)$$

OSSERVAZIONE. — Il confronto delle (4) e (11) e quello delle (8) e (12) conduce alle due identità seguenti

$$[(x+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2) - 2a^4]^2 - 4x^2y^2[(a^2+y^2)^2 - a^4] \equiv$$
$$\equiv (x^2-y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2(x^2-y^2+3a^2) - 4a^6].$$

$$(x^2+y^2)^2(x^2-y^2-2a^2)^2 - a^4[(x^2-y^2-2a^2)^2 + 4x^2y^2] \equiv$$
$$\equiv (x^2-y^2-a^2)[(x^2+y^2)^2(x^2-y^2-3a^2) + 4a^6].$$

Sommandole si ha l'altra

$$[(x^2+y^2)^2 + a^2(x^2-y^2) - 2a^4]^2 + (x^2+y^2)^2(x^2-y^2-2a^2)^2 -$$
$$- 4x^2y^2(x^2+y^2)^2 - a^4(x^2-y^2-2a^2)^2$$
$$\equiv 2(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)(x^2-y^2-a^2).$$

E.-N. BARISIEN.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 793, 794, 795 E 796

793. *Data un'ellisse* e *per un punto arbitrario* P *si possono condurre quattro corde della* e *aventi la lunghezza* 2l.

I punti medi di queste corde appartengono ad un circolo, il centro del quale è indipendente da l.

Dimostrare poi che se P *descrive un'ellisse* e_1 *omotetica e concentrica ad* e, *il centro suddetto descrive una ellisse.*

E.-N. BARISIEN.

Risoluzione del sig. ing. Adriano Gandini di Varese.

1ª PARTE. — Posto $P = (\alpha, \beta)$, sieno rispettivamente:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \qquad (1) \qquad\qquad y - \beta = m(x - \alpha) \qquad (2)$$

l'equazione dell'ellisse e, e quella di una retta di parametro m passante per P. Si ponga:

$$\begin{cases} H = \beta - \alpha m & (3) \\ D = b^2 + a^2 m^2. & (4) \end{cases}$$

Dalla (2) avremo:

$$\begin{cases} y = H + mx & (5) \\ x = \dfrac{1}{m}(y - H). & (6) \end{cases}$$

Sostituendo successivamente con la (5) e la (6) nella (1) otteniamo rispettivamente le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} Dx^2 + 2a^2 m H x + a^2 H^2 - a^2 b^2 = 0 \\ Dy^2 - 2b^2 H y + b^2 H^2 - a^2 b^2 m^2 = 0. \end{cases}$$

Sieno x', x'', y', y'' le soluzioni di queste equazioni, e chiamiamo (X, Y) le coordinate del punto medio della corda intercetta dalla (1) sulla (2).

Avremo:

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}(x' + x'') = -\dfrac{a^2 m H}{D} & (7) \\ Y = \dfrac{1}{2}(y' + y'') = \dfrac{b^2 H}{D} & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'x'' = \dfrac{a^2 H^2 - a^2 b^2}{D} & (9) \\ y'y'' = \dfrac{b^2 H^2 - a^2 b^2 m^2}{D} & (10) \end{cases}$$

Per le (3), (4) si ha:

$$\begin{cases} a^2 b^2 m^2 = b^2 D - b^4 \\ H^2 = \beta H - \alpha m H \end{cases}$$

quindi:

$$x'x'' + y'y'' = \frac{(a^2 + b^2)(\beta H - \alpha m H) - b^2 D + b^4 - a^2 b^2}{D} \qquad (11)$$

Si ha poi:

$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = 4l^2;$$

cioè:

$$\frac{1}{4}(x' + x'')^2 + \frac{1}{4}(y' + y'')^2 = l^2 + x'x'' + y'y'' \qquad (12)$$

e per le (7), (8), (9), (10) si ha:

$$(b^4 + a^4 m^2) H^2 = l^2 D^2 + (a^2 + b^2) H^2 D - a^2 b^2 (1 + m^2) D \qquad (13)$$

la quale può essere trasformata nella seguente:

$$a^2 b^2 (1 + m^2)(D - H^2) = l^2 D^2.$$

Sostituendo a D ed a H i loro valori dopo alcune trasformazioni si ottiene l'equaz. di 4° grado in m:

$$a^2(a^2 b^2 - \alpha^2 b^2 - a^2 l^2) m^4 + 2\alpha\beta a^2 b^2 m^3 + a^2 b^2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - \beta^2 - 2l^2) m^2 + \\ + 2\alpha\beta a^2 b^2 m + b^2 (a^2 b^2 - \beta^2 a^2 - b^2 l^2) = 0 \qquad (14)$$

la quale dimostra quindi l'esistenza delle 4 corde di lunghezza eguale a $2l$. Ciò potevasi anche vedere a priori dalla (13) e dalle posizioni (3), (4).

2ª Parte. — Sieno m_1, m_2, m_3, m_4 le radici dell'equazione (14) e indichiamo con H_i, D_i; $x'_i x''_i$; $y'_i y''_i$; X_i, Y_i: i valori che assumono le funzioni (3), (4), (9), (10), (7), (8) allorchè m assume il valore m_i.

Allora i punti medi delle quattro corde in questione saranno su una stessa circonferenza se sarà nullo il determinante seguente:

$$\begin{vmatrix} X_1^2 + Y_1^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2^2 + Y_2^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3^2 + Y_3^2 & X_3 & Y_3 & 1 \\ X_4^2 + Y_4^2 & X_4 & Y_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Dimostreremo quindi ch'esso è nullo.

Le operazioni che eseguiremo su esso riguardano solo delle relazioni che esistono tra le sue colonne e quindi lo scriveremo abbreviatamente a questo modo:

$$\begin{vmatrix} X^2 + Y^2 & X & Y & 1 \end{vmatrix}.$$

Per le (7), (8), (12) si ha:

$$\begin{vmatrix} l^2 + x'x'' + y'y'' & X & Y & 1 \end{vmatrix};$$

sottraendo dai termini della 1ª colonna i termini dell'ultima moltiplicati per l^2 si ottiene:

$$\begin{vmatrix} x'x'' + y'y'' & X & Y & 1 \end{vmatrix}.$$

Sostituiamo con le (7), (8), (11) e moltiplichiamo poi rispettiv. la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª linea per D_1, D_2, D_3, D_4, dividiamo la 2ª col. per $-a^2$ e la 3ª col. per b^2. Allora risulta:

$$\begin{vmatrix} (a^2 + b^2)(\beta H - \alpha m H) - b^2 D + b^4 - a^2 b^2 & mH & H & D \end{vmatrix}.$$

Si aggiunga successivamente alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $(a^2 + b^2)\alpha$; la 3ª moltiplicata per $-(a^2 + b^2)\beta$; la 4ª moltiplicata per b^2.

Allora la 1ª nuova col. risulterà formata di termini tutti eguali a $(b^4 - a^2b^2)$. Supposto $b \neq a$ possiamo dividerla per $(b^4 - a^2b^2)$ e troveremo:

$$\begin{vmatrix} 1 & mH & H & D \end{vmatrix};$$

e per le (3), (4):

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta m - \alpha m^2 & \beta - \alpha m & b^2 + a^2 m^2 \end{vmatrix}.$$

Sottragghiamo dalla 3ª col. la 1ª moltiplicata per β e dalla 4ª col. la 1ª moltiplicata per b^2. Dividiamo poi le nuove colonne risultanti rispettiv. per $-\alpha$ e per a^2. Otterremo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta m - \alpha m^2 & m & m^2 \end{vmatrix}.$$

Infine aggiungendo alla 2ª col. la 3ª moltiplicata per $-\beta$ e la 4ª moltiplicata per α troviamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m & m^2 \end{vmatrix}.$$

Quest'ultimo determinante avendo tutti i termini della 2ª col. eguali a 0 sarà nullo e quindi i quattro punti in questione saranno conciclici. cdd.

3ª Parte. — Assumendo per coordinate variabili ξ e η, l'equazione del circolo che passa per i suddetti quattro punti sarà data da:

$$\begin{vmatrix} \xi^2+\eta^2 & \xi & \eta & 1 \\ X_1^2+Y_1^2 & X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2^2+Y_2^2 & X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3^2+Y_3^2 & X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Poniamo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix};$$

e analogamente:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} X^2+Y^2 & Y & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} X^2+Y^2 & X & 1 \end{vmatrix};$$

$$\Delta''' = \begin{vmatrix} X^2+Y^2 & X & Y \end{vmatrix};$$

avremo dalla (15):

$$\Delta(\xi^2+\eta^2) - \Delta'\xi + \Delta''\eta - \Delta''' = 0;$$

e indicando con ξ_c, η_c le coordinate del centro e con ρ il raggio, risulta:

$$\xi_c = \frac{\Delta'}{2\Delta}; \quad (16) \qquad \eta_c = -\frac{\Delta''}{2\Delta}; \quad (17) \qquad \rho^2 = \frac{\Delta'^2+\Delta''^2+4\Delta\Delta'''}{4\Delta^2}. \quad (18)$$

I. Si ha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{a^2mH}{D} & \frac{b^2H}{D} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{a^2b^2}{D_1D_2D_3}\begin{vmatrix} mH & H & D \end{vmatrix};$$

e posto:

$$D_1D_2D_3 = \delta$$

si ha:

$$\Delta = -\frac{a^2b^2}{\delta}\begin{vmatrix} mH & H & D \end{vmatrix} = -\frac{a^2b^2}{\delta}\begin{vmatrix} \beta m-\alpha m^2 & \beta-\alpha m & b^2+a^2m^2 \end{vmatrix}.$$

Alla 1ª col. aggiungiamo la 2ª moltiplicata per $\frac{\beta}{\alpha}$ e la 3ª moltiplicata per $\frac{\alpha}{a^2}$; allora la nuova 1ª col. risulterà formata da termini tutti eguali a:

$$\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha b^2}{a^2} = \frac{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}{\alpha a^2} = \frac{M}{\alpha a^2} \tag{19}$$

quindi:

$$\Delta = -\frac{a^2b^2M}{\alpha a^2\delta}\begin{vmatrix} 1 & \beta-\alpha m & b^2+a^2m^2 \end{vmatrix} = \frac{a^2b^2M}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \end{vmatrix}.$$

Poniamo:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1^2 \\ 1 & m_2 & m_2^2 \\ 1 & m_3 & m_3^2 \end{vmatrix} = (m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1);$$

abbiamo:

$$\Delta = \frac{a^2b^2MV}{\delta}.$$

II. $\Delta' = \begin{vmatrix} X^2+Y^2 & Y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l^2+x'x''+y'y'' & Y & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'x''+y'y'' & Y & 1 \end{vmatrix};$

per le (11), (8) si ha:

$$\Delta' = \frac{b^2}{\delta}\begin{vmatrix}(a^2+b^2)(\beta H - \alpha m H) - b^2 D + b^4 - a^2 b^2 & H & D\end{vmatrix}.$$

Aggiungiamo alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $-(a^2+b^2)\beta$ e la 3ª moltiplicata per b^2 e otteniamo:

$$\Delta' = \frac{b^2}{\delta}\begin{vmatrix}-(a^2+b^2)\alpha m H + b^4 - a^2 b^2 & H & D\end{vmatrix};$$

cioè:

$$\Delta' = \frac{b^2}{\delta}\begin{vmatrix}-(a^2+b^2)\alpha\beta m + (a^2+b^2)\alpha^2 m^2 + b^4 - a^2 b^2 & \beta - m\alpha & b^2 + a^2 m^2\end{vmatrix}.$$

Aggiungiamo alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $-(a^2+b^2)\beta$ e la 3ª moltiplicata per $-\frac{(a^2+b^2)\alpha^2}{a^2}$. I termini della nuova 1ª col. saranno allora tutti eguali a:

$$b^4 - a^2b^2 - \beta^2(a^2+b^2) - \frac{\alpha^2 b^2(a^2+b^2)}{a^2} =$$

$$= -\frac{(a^2+b^2)(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2) + a^2 b^2(a^2-b^2)}{a^2} = -\frac{M'}{a^2} \qquad (20)$$

quindi:

$$\Delta' = -\frac{M'}{a^2\delta}b^2\begin{vmatrix}1 & \beta - \alpha m & b^2 + a^2 m^2\end{vmatrix} = \frac{M'}{\delta}b^2\alpha\begin{vmatrix}1 & m & m^2\end{vmatrix} = \frac{\alpha b^2 M' V}{\delta}.$$

III. $\Delta'' = \begin{vmatrix}X^2+Y^2 & X & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}l^2 + x'x'' + y'y'' & X & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x'x'' + y'y'' & X & 1\end{vmatrix};$

per le (11), (7):

$$\Delta'' = -\frac{a^2}{\delta}\begin{vmatrix}(a^2+b^2)(\beta H - \alpha m H) - b^2 D + b^4 - a^2 b^2 & mH & D\end{vmatrix};$$

Aggiungiamo alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $(a^2+b^2)\alpha$ e la 3ª moltiplicata per b^2; otteniamo:

$$\Delta'' = -\frac{a^2}{\delta}\begin{vmatrix}(a^2+b^2)\beta H + b^4 - a^2 b^2 & mH & D\end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{a^2}{\delta}\begin{vmatrix}(a^2+b^2)\beta^2 - (a^2+b^2)\alpha\beta m + b^4 - a^2 b^2 & \beta m - \alpha m^2 & b^2 + a^2 m^2\end{vmatrix}.$$

Aggiungiamo alla 2ª col. la 3ª moltiplicata per $\frac{\alpha}{a^2}$ e avremo:

$$\Delta'' = -\frac{a^2}{\delta}\begin{vmatrix}(a^2+b^2)\beta^2 - (a^2+b^2)\alpha\beta m + b^4 - a^2 b^2 & \frac{b^2}{a^2}\alpha + \beta m & b^2 + a^2 m^2\end{vmatrix}$$

Aggiungiamo alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $(a^2+b^2)\alpha$. Allora tutti i termini della nuova 1ª col. risulteranno eguali a:

$$(a^2+b^2)\beta^2 + b^4 - a^2b^2 + \frac{\alpha^2 b^2(a^2+b^2)}{a^2} =$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2) - a^2 b^2(a^2-b^2)}{a^2} = \frac{M''}{a^2}; \qquad (21)$$

quindi:

$$\Delta'' = -\frac{M''}{\delta}\begin{vmatrix}1 & \frac{b^2}{a^2}\alpha + \beta m & b^2 + a^2 m^2\end{vmatrix} = -\frac{M''}{\delta}a^2\beta\begin{vmatrix}1 & m & m^2\end{vmatrix} = -\frac{\beta a^2 M'' V}{\delta}.$$

IV. $\Delta''' = \left| X^2 + Y^2 \quad X \quad Y \right| = \left| l^2 + xx''' + yy''' \quad X \quad Y \right| =$

$$= -\frac{a^2b^2}{\delta} \left| l^2D + (a^2 + b^2)(\beta H - \alpha m H) - b^2D + b^4 - a^2b^2 \quad mH \quad H \right|.$$

Aggiungiamo alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $(a^2 + b^2)\alpha$ e la 3ª moltiplicata per $-(a^2 + b^2)\beta$. Risulta:

$$\Delta''' = -\frac{a^2b^2}{\delta} \left| (l^2 - b^2)D + b^4 - a^2b^2 \quad mH \quad H \right| =$$

$$= -\frac{a^2b^2}{\delta} \left| (l^2 - a^2)b^2 + (l^2 - b^2)a^2m^2 \quad \beta m - \alpha m^2 \quad \beta - m\alpha \right|.$$

Aggiungiamo alla 2ª col. la 3ª moltiplicata per $\frac{\beta}{\alpha}$ risulta:

$$\Delta''' = -\frac{a^2b^2}{\delta} \left| (l^2 - a^2)b^2 + (l^2 - b^2)a^2m^2 \quad \frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha m^2 \quad \beta - m\alpha \right|;$$

aggiungiamo poi alla 1ª col. la 2ª moltiplicata per $\frac{(l^2 - b^2)a^2}{\alpha}$. I termini della nuova 1ª col. risultante saranno allora tutti eguali a:

$$(l^2 - a^2)b^2 + \frac{\beta^2}{\alpha} \cdot \frac{(l^2 - b^2)a^2}{\alpha} = \frac{l^2(\alpha^2b^2 + \beta^2a^2) - a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2} = \frac{M'''}{\alpha^2}. \tag{22}$$

Quindi:

$$\Delta''' = -\frac{a^2b^2}{\delta} \cdot \frac{M'''}{\alpha^2} \left| 1 \quad \frac{\beta^2}{\alpha} - \alpha m^2 \quad \beta - \alpha m \right| = -\frac{a^2b^2M'''}{\delta} \left| 1 \quad m^2 \quad m \right| =$$

$$= \frac{a^2b^2M'''}{\delta} \left| 1 \quad m \quad m^2 \right| = \frac{a^2b^2M'''V}{\delta}.$$

V. Per le (16), (17) si trova:

$$\xi_c = \frac{M'}{2a^2M}\alpha; \quad (23) \qquad\qquad \eta_c = \frac{M''}{2b^2M}\beta \quad (24)$$

e siccome le espressioni di M, M', M'' sono indipendenti da l (veggansi le (19), (20), (21)), anche il centro (ξ_c, η_c) sarà pur esso indipendente da l.

4ª Parte. — Supposto che il punto $P = (\alpha, \beta)$ descriva un'ellisse omotetica e concentrica alla e, indicando con S il rapporto costante d'omotetia, sarà:

$$\frac{\alpha^2}{(Sa)^2} + \frac{\beta^2}{(Sb)^2} = 1, \text{ cioè: } \alpha^2b^2 + \beta^2a^2 = a^2b^2S^2. \tag{25}$$

Quindi M, M', M'' sono quantità costanti rispetto alle variabili α, β; epperò per le (23) e (24):

$$\xi_c = c_1\alpha; \; \eta_c = c_2\beta:$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti rispetto ad α e β. Eliminando α e β tra queste due ultime equazioni e la (25) si trova:

$$(c_2b)^2\xi_c^2 + (c_1a)^2\eta_c^2 = (abS)^2(c_1c_2)^2. \tag{26}$$

Il luogo del centro (ξ_c, η_c) è quindi l'ellisse (26) c.d.d.

Infine per la (18) abbiamo poi:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2b^4M'^2 + \beta^2a^4M''^2 + 4a^4b^4MM'''}{4a^4b^4M^2}.$$

794. *Siano* A *e* B *i punti di contatto delle tangenti condotte ad una parabola da un punto* M *della sua direttrice; siano, inoltre,* A_1 *e* B_1 *i punti d'incontro di tali tangenti con la tangente nel vertice; sia infine,* F *il fuoco. Trovare l'inviluppo dell'asse radicale* r *dei circoli circoscritti ai triangoli* MAB, FA_1B_1.

R. Gatti.

Risoluzione del sig. ing. Adriano Gandini di Varese.

Sieno A', B', H le proiezioni di A, B, F sulla direttrice. Per noti teoremi sulla parabola i punti d'incontro A_1 e B_1 delle FA', FB' con la tangente nel vertice saranno rispettivamente i punti di mezzo dei segmenti $\overline{FA'}$, $\overline{FB'}$, e le tangenti $\overline{MA}$ e $\overline{MB}$ saranno gli assi di detti segmenti. Quindi:

$$\overline{MB'} = \overline{MF} = \overline{MA'};$$

cioè l'angolo $A'\widehat{F}B'$ è retto; il quadrilatero A_1MB_1F sarà un rettangolo del quale indicheremo con C il centro. Siccome poi:

$$M\widehat{F}A = M\widehat{A'}A = 90^\circ; \qquad M\widehat{F}B = M\widehat{B'}B = 90^\circ;$$

la corda $\overline{AB}$ passerà per F. Se M' è il punto medio di $\overline{AB}$ sarà $\overline{MM'}$ parallela ad $\overline{AA'}$ e a $\overline{BB'}$, ed essendo l'angolo $A\widehat{M}B$ retto sarà:

$$\overline{M'A} = \overline{M'M} = \overline{M'B}.$$

Poniamo:

$$H\widehat{F}M = F\widehat{M}M' = \varphi; \qquad \overline{FH} = p;$$

e assumiamo come assi cartesiani $\overline{HF}$ ed $\overline{HB'}$.

Il circoncerchio di A_1FB_1 ha il centro in C e raggio eguale a $\frac{1}{2}\overline{MF}$; e siccome le coordinate di C sono $\left(\frac{1}{2}p, \ \frac{1}{2}p\tan\varphi\right)$ ed è $\frac{1}{2}\overline{MF} = \frac{p}{2\cos\varphi}$, la sua equazione è

$$\left(x - \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}p\tan\varphi\right)^2 = \frac{p^2}{4\cos^2\varphi};$$

cioè:

$$x^2 + y^2 - px - py\tan\varphi = 0. \tag{1}$$

Il circoncerchio di AMB ha il centro in M' e raggio eguale a $\overline{MM'}$; e siccome le coordinate di M' sono $\left(\frac{p}{\cos^2\varphi}, \ p\tan\varphi\right)$ ed è $\overline{MM'} = \frac{p}{\cos^2\varphi}$, la sua equazione è

$$\left(x - \frac{p}{\cos^2\varphi}\right)^2 + (y - p\tan\varphi)^2 = \frac{p^2}{\cos^4\varphi};$$

ossia:

$$x^2 + y^2 - \frac{2px}{\cos^2\varphi} - 2py\tan\varphi + p^2\tan^2\varphi = 0. \tag{2}$$

Sottraendo la (1) dalla (2) otteniamo l'equazione dell'asse radicale dei due circoli:

$$\frac{2 - \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\, x + y\tan\varphi - p\tan^2\varphi = 0; \tag{3}$$

ed essendo:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1 + \tan^2\varphi},$$

la (3) diventa:

$$(1 + 2\tan^2\varphi)\,x + y\tan\varphi - p\tan^2\varphi = 0\,; \qquad (4)$$

od anche:

$$(2x - p)\tan^2\varphi + y\tan\varphi + x = 0$$

che è un'equazione di 2° grado in $\tan\varphi$. È noto che eguagliando il discriminante di quest'equazione a 0 si ottiene l'equazione dell'inviluppo della retta (4) allorchè φ varia tra (-90^0) e $(+90^0)$. Esso è dato dall'iperbole:

$$y^2 - 4x\,(2x - p) = 0,$$

la quale ha il suo asse focale coincidente con l'asse della parabola ed è tangente in H alla direttrice, e nel vertice alla parabola data.

Altra risoluzione del sig. **E.-N. Barisien.**

795. *Sieno* A *e* B *due punti sopra una parabola,* A' *e* B' *le loro proiezioni sull'asse,* C *il punto d'incontro della normale nel punto* A *coll'asse della parabola. Dimostrare che* AC, BC *ed* A'B' *sono i lati d'un triangolo rettangolo.*

I. L. Csada.

Risoluzione del sig. Merlonghi di Roma.

Siano (x_1, y_1); (x_2, y_2) rispettivamente le coordinate dei punti A e B della parabola d'equazione $y^2 = 2px$.

Le coordinate del punto C sono $(x_1 + p, 0)$ e quelle del punto B $(x_2, \sqrt{2px_2})$; onde

$$\overline{BC}^2 = (x_2 - x_1 - p)^2 + 2px_2 = (x_2 - x_1)^2 + p\,(p + 2x_1)$$
$$\overline{AC}^2 = (x_1 - x_1 - p)^2 + 2px_1 = p\,(p + 2x_1).$$

Essendo poi

$$\overline{A'B'}^2 = (x_2 - x_1)^2,$$

risulta

$$\overline{AC}^2 + \overline{A'B'}^2 = \overline{BC}^2.$$

Altre risoluzioni dei sigg. **E.-N. Barisien**, ing. **A. Gandini** di *Varese*, prof. **R. Gatti** R. G. di *Gioia del Colle* e **Fornari.**

796. *Il cubo della distanza di un punto dal fuoco di una parabola è eguale ad* $^1/_8$ *del prodotto dei tre raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali condotte dallo stesso punto.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del sig. prof. R. Gatti, R. Ginnasio di Gioia del Colle.

È facile vedere che il raggio ρ_i di curvatura, nel punto x_i, y_i della parabola $y^2 = 2px$, si esprima con la formola:

$$\rho_i = \frac{(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2},$$

e che, quindi, il prodotto dei raggi ρ_1, ρ_2, ρ_3, relativi a tre punti della curva, le cui ordinate sono rispettivamente y_1, y_2, y_3, è dato da

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \frac{[p^6 + p^4(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + p^2(y_1^2y_2^2 + y_1^2y_3^2 + y_2^2y_3^2) + y_1^2y_2^2y_3^2)]^{\frac{3}{2}}}{p^6}. \quad (1)$$

È noto, intanto, che le ordinate dei punti della curva pei quali le normali passano pel punto x', y', sono fornite dalla seguente equazione:

$$y^3 + 2p(p - x')y - 2p^2y' = 0.$$

Se quindi y_1, y_2, y_3 sono appunto tali ordinate, avremo:

$$\Sigma y_i = 0,$$
$$\Sigma y_i y_j = 2p(p - x')$$
$$y_1 y_2 y_3 = 2p^2 y',$$

dalle quali si ricavano le altre:

$$\Sigma y_i^2 = -4p(p - x')$$
$$\Sigma y_i^2 y_j^2 = 4p^2(p - x')^2.$$

Utilizzando tali relazioni, la (1) diventa:

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \frac{1}{p^6}\{p^6 - 4p^5(p - x') + 4p^4(p - x')^2 + 4p^4y'^2\}^{\frac{3}{2}}$$
$$= [\{p - 2(p - x')\}^2 + 4y'^2]^{\frac{3}{2}} = \{(2x' - p)^2 + 4y'^2\}^{\frac{3}{2}}.$$

E supponendo, infine, x', y' situato sulla curva, avremo:

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \{(2x' - p)^2 + 8px'\}^{\frac{3}{2}} = (2x' + p)^3 = 8\left(x' + \frac{p}{2}\right)^3,$$

formula che esprime la proprietà enunciata.

QUISTIONI PROPOSTE

798. Se il minore complementare di uno degli elementi della diagonale principale di un determinante simmetrico è nullo, il determinante stesso cambiato di segno è un quadrato perfetto.

G. L.

BIBLIOGRAFIA

G. Veronese (collab. P. Gazzaniga). — *Elementi di Geometria* ad uso delle Scuole Normali. Padova 1911, F.lli Drucker.

Il testo che il prof. Veronese, in collaborazione col prof. Gazzaniga, ha preparato per la Scuola normale risponde ad una necessità che si era imposta sin dall'apparire delle loro *Nozioni di geometria intuitiva* per la Scuola complementare. L'autorità scientifica e didattica dell'autore e del collaboratore dispenserebbe veramente dal parlare di quest'opera, che è, per il criterio informatore e l'ordinamento, una continuazione del testo già citato, e per il contenuto ed il metodo è un riflesso, un riassunto di quello per Ginnasio superiore, Liceo e 1° biennio dell'Istituto tecnico. Tuttavia, siccome il testo recente può non esser stato ancora largamente esperimentato nella scuola, si permetta a me, che lo ho adottato, di affermare qui che esso può venire utilmente adoperato nella Scuola normale e che lo seguono senza grande difficoltà anche alunne che non abbiano seguìto un testo dello stesso autore nella scuola media inferiore.

L'insegnamento di ogni materia nella Scuola normale ha duplice scopo: mentale e professionale; così, in particolare, l'insegnamento della Geometria deve dare all'allieva-maestra la sicurezza ragionata delle proprietà delle figure già riconosciute coll'osservazione e coll'intuizione, deve col metodo deduttivo allargare il campo delle proprietà note, deve abituare ad analizzare ogni questione per quanto è possibile in modo completo, deve, in ordine allo scopo professionale, per mezzo di discussioni e di critiche avviare alla scelta degli argomenti da accennare e del metodo di presentarli nella Scuola elementare. Gli *Elementi di Geometria* raggiungono il primo scopo e dànno occasione all'insegnante ed all'alunno di lavorare per il secondo nel modo ora accennato.

Può sembrare che debbano riuscire difficili agli alunni il 1° libro e i primi paragrafi del 2°, ma invece anche le alunne affatto nuove al linguaggio, alla minuziosità delle considerazioni vi si adattano presto e contraggono l'abitudine mentale dell'analisi riflessa tanto necessaria, specie a chi si dedica all'insegnamento. E se mai difficoltà vi fosse p. e. nel formarsi il concetto di *sistema lineare, sistema lineare omogeneo* gli esempi recati lo rendono accessibile a qualunque mente. Un altro scoglio apparente è l'introduzione delle rette parallele come figure opposte l'una all'altra rispetto al punto di mezzo di un segmento qualunque che abbia i suoi estremi sopra di esse: la difficoltà contro cui si urla è puramente dovuta all'inerzia mentale per cui si stenta a seguire un criterio diverso da quello altre volte seguìto in un dato argomento: e ci accorgiamo subito che difficoltà non deve esservi qualora si pensi che il concetto di simmetria su cui riposa la citata definizione ci è familiare, è anzi innato in noi, sì che spesso inconsapevolmente, spesso volontariamente, per riflessione, obbediamo ad esso come ad un bisogno, e quindi possiamo approfittarne e trovarne la sua applicazione anche in considerazioni geometriche. Razionalmente poi sembrami preferibile questo nuovo metodo di considerare il parallelismo di due rette perchè indipendente dalla nozione di piano e dal concetto di retta illimitata. Anche scientificamente questa definizione delle parallele è preferibile alle altre, perchè con essa si può dimostrare la proposizione fondamentale del piano, e cioè che *una retta avente comune col piano due punti giace nel piano*, proposizione che nel testo è data come uno di quei postulati che si dànno perchè sono proposizioni evidenti, ma che si possono dimostrare. E a questo proposito è da osservare che questo libro, come quello per il Ginnasio superiore e per il Liceo, hanno la stessa base scientifica: *I fondamenti di Geometria* dello stesso autore, come le *Nozioni di Geometria intuitiva* hanno principalmente per base l'esperienza.

Non ho trovato che presentino difficoltà alcuna i concetti di fascio di rette o di raggi e di stella e quindi la nozione di piano e di spazio, di angolo, di fascio di piani, di diedro che si deduce da quelli.

Ho parlato soltanto di quanto riguarda le nozioni prime, poichè son queste le fondamentali e quelle che stabiliscono la differenza essenziale fra questo e gli altri testi che si adoperano nelle Scuole normali; ed è qui appunto ove il romperla con la tradizione diventata parte del nostro sangue di scolari e... d'insegnanti può assumere parvenza di difficoltà o diventare tale in fatto.

In tutto il resto la scelta dei teoremi dimostrati e la semplicità delle dimostrazioni — per molte delle quali essa è dovuta al concetto di figure opposte rispetto ad un punto — rendono il libro accessibile anzi facile a chi sia già abituato a quel linguaggio e conosca già i postulati fondamentali.

Altra innovazione — a quanto so io, e in ogni caso secondo me lodevolissima — è il parlare in un testo di Geometria per la scuola normale di superficie conica completa e di superficie cilindrica e l'accennare alle sezioni coniche, per ognuna delle quali sarebbe forse opportuno dare la nomenclatura dei punti e delle rette o segmenti fondamentali e l'enunciato delle proprietà essenziali: le alunne sentono parlare in Fisica e in Geografia astronomica di queste curve, costruiscono nelle tavole di Disegno geometrico almeno l'ellisse, perchè quindi non nominarle neppure in Geometria, là ove possiamo vederle nascere?

E così pure trovo assai opportuno dare enunciati e dimostrazioni dei teoremi che conducono alla regola per il calcolo dell'area della superficie sferica, come, per complemento logico del capitolo, mi pare si potrebbero dare anche quelli per il volume, che non presentano certo maggiori difficoltà dei primi. È vero, verissimo — e lo lamento sempre anch'io — che nella scuola normale l'orario per la matematica è assai ristretto, sì che tutti noi, se ben intendiamo la necessità della nostra scuola, ci troviamo molto a disagio riguardo il programma da svolgere, e siamo costretti a limitarci nello svolgimento di più d'una parte di esso; ma è altresì vero che siamo liberi di restringere quella parte che più crediamo conveniente, e sopratutto che il libro di testo dovrebbe continuare il suo aiuto, dovrebbe sciogliere i dubbi, ricordare e chiarire le nozioni non bene apprese anche dopo compiuto il corso di studi indispensabile per conseguire il diploma, e quindi esso deve, pur restando nel campo ristretto del programma della scuola normale, contenere quanto è sufficiente per completare il poco che si può fare durante l'anno scolastico.

Gli esercizî, quasi sempre opportunamente scelti, proposti alla fine di ogni paragrafo, o argomento svolto, danno modo di invogliare e di guidare l'alunno allo studio di proprietà non trattate. Fanno eccezione, a mio parere, alcune *questioni di massimo e minimo* che seguono alla teoria dell'equivalenza delle figure piane: sono questioni piuttosto difficili per se stesse, rispetto al livello delle nostre scuole, e sono messe lì senza che le preceda alcun accenno a questioni del genere, se si eccettui il valor minimo della distanza di un punto dai punti di una retta o di un piano non passante per essa, ed altre questioni simili elementari.

Altro appunto che qualcuno può muovere al libro è di non contenere le questioni di metodo per l'insegnamento nella scuola elementare: ad esso risponde il prof. Veronese stesso nella prefazione. Ed è una lacuna, del resto, che nel campo delle mie conoscenze ho riscontrato in molti testi di geometria per le scuole normali: lacuna non grave, perchè tutto si ridurrebbe, secondo me, a dire e a mostrare come nelle scuole elementari si deve far conoscere le figure per mezzo di modelli, con cui gli alunni devono prendere grande familiarità, e pure per mezzo di figure e di esperienze far constatare loro alcune proprietà elementari, che presentino qualche interesse, perchè proprietà di figure comunissime, o perchè su di esse son basate le più semplici regole di ordinaria applicazione; e questo concetto didattico deve darlo il docente e *può* darlo e l'alunno *ricordarlo* e *farlo proprio* senza bisogno di altra guida che il proprio buon senso e la fiducia nell'esperienza e nel criterio di chi insegna: e la lacuna può, in questo senso, giovare, anzichè nuocere alla vita della scuola.

Questi *Elementi di Geometria* per le scuole normali e le *Nozioni di Geometria intuitiva* per le scuole complementari costituiscono con gli altri libri per i Ginnasi e Licei, Scuole tecniche e Istituti tecnici un'opera originale e veramente italiana,