fascio, che ha per origine $O_2(O_1)$ giacciono da parti opposte della retta O_1O_2; *contraversi* se essi giacciono da una stessa parte della stessa retta. Se i due fasci avessero lo stesso centro, li diremo *equiversi* se identici, *contraversi* se distinti.

31. Dall'ultima definizione risulta evidente la proprietà riflessiva (A).

32. Per dimostrare la proprietà (B) occorre dimostrare il lemma: *In un triangolo* ABC *gli angoli* (*convessi*) $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ *determinano fasci equiversi.*

Basta osservare che se H e K sono due punti posti sui prolungamenti di BC dalla parte di B e di C rispettivamente, il verso di $\widehat{ABC}$ è quello dell'angolo piatto $\overline{HBC}$ che contiene A, o dell'angolo piatto $\overline{CBH}$ che non contiene A; mentre il verso di $\widehat{BCA}$ è quello dell'angolo piatto $\overline{BCK}$ che contiene A. Per la definizione del n. 30 gli angoli piatti considerati e quindi gli angoli $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ determinano fasci equiversi.

33. Ciò posto, siano $O_1(\omega_1)$, $O_2(\omega_2)$, $O_3(\omega_3)$ tre fasci ordinati di π, e i primi due siano equiversi al terzo. Se O_1, O_2 e O_3 non sono allineati, si consideri il triangolo $O_1O_2O_3$ e i suoi angoli convessi; uno degli angoli contraversi $O_1\widehat{O_3}O_2$, $O_2\widehat{O_3}O_1$ apparterrà ad $O_3(\omega_3)$; sia questo il primo. Allora per il lemma precedente, $O_2\widehat{O_1}O_3$ apparterrà ad un fascio equiverso ad $O_3(\omega_3)$ quindi a $O_1(\omega_1)$, e così pure $O_3\widehat{O_2}O_1$ apparterrà ad $O_2(\omega_2)$. Ma, sempre per lo stesso lemma, $O_2\widehat{O_1}O_3$ e $O_3\widehat{O_2}O_1$ determinano fasci equiversi, dunque $O_1(\omega_1)$ e $O_2(\omega_2)$ sono equiversi.

Se poi O_1, O_2 e O_3 sono allineati, consideriamo un punto O_4 fuori della retta $O_1O_2O_3$ e il fascio $O_4(\omega_4)$ equiverso a $O_3(\omega_3)$; per il caso precedente, $O_4(\omega_4)$ sarà equiverso a $O_1(\omega_1)$ e a $O_2(\omega_2)$, e quindi questi due fasci saranno equiversi tra loro. È così dimostrata in ogni caso la proprietà transitiva (B).

34. Possiamo assumere come *coniugato* di un fascio ordinato $O_2(\omega_2)$ il suo fascio opposto $O_2(\omega'_2)$ col medesimo sostegno. Infatti ritornando alla definizione del n. 30, e osservando che i due angoli piatti di origine $O_2(O_1)$ e appartenenti rispettivamente a $O_2(\omega_2)$ e a $O_2(\omega'_2)$ giacciono da parti opposte di O_1O_2, è chiaro che un fascio $O_1(\omega_1)$ contraverso a $O_2(\omega_2)$ risulterà equiverso a $O_2(\omega'_2)$. È così dimostrata la proprietà (C).

35. Risulta dai n. precedenti la possibilità di definire un *verso* del piano, come proprietà comune a tutti i fasci ordinati equiversi; un verso del piano è definito da un fascio ordinato, e questo da un angolo ordinato. La classe di tutti i fasci ordinati o di tutti gli angoli ordinati di un piano π aventi un dato verso Ω si dirà *piano* ordinato $\pi(\Omega)$. Un piano π è *sostegno* di due piani ordinati opposti.

36. È stato già dimostrato che in un triangolo ABC gli angoli $\widehat{CBA}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$ sono equiversi (cioè appartengono a fasci equiversi);

questa proprietà si può estendere ad ogni poligono convesso e collegare con un'altra che ora dimostreremo.

Sia $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligono convesso; è facile dedurre dalla definizione del n. 30 che due angoli consecutivi $A_3\widehat{A_2}A_1$, $A_4\widehat{A_3}A_2$ sono equiversi. In altro modo, si consideri un punto O interno al poligono; avremo facilmente:

$$\text{verso } A_2\widehat{O}A_3 = \text{verso } O\widehat{A_3}A_2 = \text{verso } A_4\widehat{A_3}A_2$$
$$\text{verso } A_2\widehat{O}A_3 = \text{verso } A_3\widehat{A_2}O = \text{verso } A_3\widehat{A_2}A_1$$

e nello stesso modo seguitando otteniamo:

$$\text{verso } A_1\widehat{O}A_2 = \text{verso } A_2\widehat{O}A_3 = \ldots = \text{verso } A_{n-1}\widehat{O}A_n = \text{verso } A_n\widehat{O}A_1 =$$
$$= \text{verso } A_2\widehat{A_1}A_n = \text{verso } A_3\widehat{A_2}A_1 = \ldots$$
$$\ldots = \text{verso } A_n\widehat{A}_{n-1}A_{n-2} = \text{verso } A_1\widehat{A_n}A_{n-1}.$$

Concludendo, qualunque sia il punto O interno al poligono, gli angoli di ciascuna delle congiungenti OA_1, OA_2, $\ldots OA_4$ con la seguente sono equiversi, ed equiversi agli angoli che ciascun lato del poligono forma col precedente. Questo verso costante può dirsi *verso* del poligono $A_1A_2 \ldots A_n$, così ordinato; un poligono convesso ordinato determina dunque un verso nel piano.

37. Dalla definizione precedente segue il corollario:

Due poligoni convessi ordinati aventi a comune un lato sono equiversi o contraversi secondo che cadono da una stessa parte o da parti opposte del lato comune.

§ 6. — Versi nella stella.

38. Dovendo considerare nella stella di centro O un fascio orientato $r\,(\rho, \omega)$ è chiaro che all'indicazione del verso ρ può sostituirsi la scelta sulla costola del raggio r' di r che ha l'origine in O e il verso ρ. Perciò diremo in seguito per indicare un tale fascio orientato *fascio* $r'\,(\omega)$, e r' sarà considerato come *asse* del fascio.

Ciò posto, essendo $r'_1\,(\omega_1)$, $r'_2\,(\omega_2)$ due fasci ordinati della stella, essi si diranno *equiversi* se il diedro piatto del primo fascio che ha per origine il semipiano $r'_1(r'_2)$ e il diedro piatto del secondo fascio che ha per origine il semipiano $r'_2\,(r'_1)$ cadono da parti opposte del piano $r'_1\,r'_2$, *contraversi* se essi cadono da una stessa parte di questo piano. Questa definizione cade in difetto se r'_1 e r'_2 sono coincidenti od opposti; nel primo caso i fasci saranno *equiversi* se coincidenti, *contraversi* se distinti; nel secondo caso *equiversi* se appartengono a fasci ordinati distinti, *contraversi* se a fasci ordinati coincidenti. In altre parole uno stesso fascio ordinato cambia verso cambiando l'ordinamento dell'asse.

39. Dalla identità di definizione segue l'identità di proprietà tra il caso della stella e il caso del piano (§ 5); resta solo da considerare qui il caso dei fasci di asse opposto, che nel paragrafo precedente non aveva luogo di sussistere. Per questo caso dobbiamo dimostrare la proprietà (B) e (C); limitandoci per la prima ai casi non evidenti, dovremo dimostrare che se r'_1 e r'_2 sono raggi opposti e ω_1 ω_2 sono versi opposti intorno alla retta $r'_1 r'_2$, un fascio orientato $s'(\sigma)$ equiverso a $r'_1(\omega_1)$ sarà equiverso a $r'_2(\omega)$.

Infatti se il diedro piatto $r'_1\overline{s'}r'_2$ appartenente a un certo semispazio Σ fa parte del fascio $s'(\sigma)$, è chiaro per la definizione che al fascio equiverso $r'_1(\omega_1)$ appartiene il diedro piatto (di Σ) $s''\overline{r'_1}s'$, essendo s'' il raggio opposto di s'; ad $r'_2(\omega_2)$ apparterrà quindi il diedro (di Σ) $s'\overline{r'_2}s''$. Ora confrontando $s'\overline{r'_2}s''$ con $r'_1\overline{s'}r'_2$ si vede che essi definiscono fasci equiversi; dunque $s'(\sigma)$ e $r'_2(\omega_2)$ sono equiversi.

Per la (C) la verifica è immediata.

40. Abbiamo così i risultati necessari per definire il *verso* di un fascio orientato in una stella; e possiamo poi definire come nel n. 36 il *verso* di un triedro $a'b'c'$ e poi di un angoloide convesso qualunque $a'_1 a'_2 \dots a_n$, in modo perfettamente analogo a quello che si è fatto per le analoghe figure del piano. La considerazione del verso di un triedro è importante perchè per il triedro il verso è funzione unicamente dell'ordine dei tre spigoli, in quanto sulle costole dei diedri è già determinato il verso adottato; ciò che può avere importanza in una esposizione didattica.

41. Dalle definizioni ora accennate segue subito:

a) *I triedri* a'b'c', b'c'a', c'a'b' *sono equiversi; i triedri* a'c'b', c'b'a', b'a'c' *sono equiversi tra loro e contraversi agli altri tre.*

b) *I triedri* a'b'c', a'b'd' *sono equiversi e contraversi secondochè* c' *e* d' *giacciono da una stessa parte o da parte opposta del piano* a'b'.

Se a'', b'', c'' *sono i raggi opposti ad* a', b', c', *i triedri* a'b'c', a''b''c'' *sono contraversi.*

Infatti $a'b'c'$ è contraverso a $a''b'c'$, questo ad $a''b''c'$ e questo ad $a''b''c''$. Segue pure dal confronto di due diedri corrispondenti dei due triedri, secondo la def. del n. 38.

42. Tutte le precedenti considerazioni si possono estendere senz'altro alla geometria della sfera; si può quindi ritenere definito il *verso* di un fascio di cerchi massimi *intorno ad un suo centro*; esso è opposto di quello che si ha rispetto al centro opposto. La sfera ha quindi due versi opposti.

§ 7. — Versi nello spazio.

43. Resta infine da considerare il confronto tra due stelle ordinate intorno a due centri O_1, O_2. Se i centri coincidono, diremo *equiverse* due stelle coincidenti, *contraverse* se distinte; altrimenti considerando il fascio di asse $O_1(O_2)$ appartenente alla stella $O_1(\omega_1)$, e quello di asse $O_2(O_1)$ appartenente alla stella $O_2(\omega_2)$ e i due fasci ordinati a cui essi appartengono, diremo che le stelle sono *equiverse* se questi due fasci sono distinti, *contraversi* se essi coincidono.

44. La proprietà (A) è inclusa nella definizione.

45. Per dimostrare la proprietà (B), tralasciando la verifica dei casi più semplici, dimostriamo il teorema:

Nel tetraedro OABC *i diedri orientati* A (BO) C, B (CO) A, C (AO) B *definiscono stelle equiverse.*

Infatti p. es., alla prima stella appartiene (n. 39) il diedro O (BC) A, alla seconda il diedro A (CB) O, i quali appartengono a fasci ordinati opposti.

46. Ciò posto siano $O_1(\omega_1)$, $O_2(\omega_2)$ due stelle equiverse alla $O_3(\omega_3)$; $O_1O_2O_3$ non siano in linea retta. Sia $O_3(O_3P)\,O$, un diedro della terza stella; per il teorema ora dimostrato $O_3(O_1P)\,O_2$ apparterrà alla prima, $O_1(O_3P)\,O_3$ alla seconda. Ma questi due diedri per il teorema stesso definiscono stelle equiverse, dunque $O_1(\omega_1)$ e $O_2(\omega_2)$ sono equiverse.

Le $O_1O_2O_3$ fossero allineati, si potrà imitare la dimostrazione del n. 33, servendosi di una quarta stella O_4. È così stabilita la proprietà (B).

47. Per stabilire la (C) basta osservare che se $O_1(\omega_1)$ e $O_2(\omega_2)$ sono contraverse e $O_2(\omega'_2)$ è la stella opposta di $O_2(\omega_2)$ i fasci orientati di asse $O_2(O_1)$ ed appartenenti a $O_2(\omega_2)$, $O_2(\omega'_2)$ sono ordinati in modo opposto e che quindi $O_1(\omega_1)$ risulterà equiversa a $O_2(\omega'_2)$.

48. Le precedenti proprietà definiscono il *verso* di una stella nello spazio, e distinguono le stelle dello spazio in due classi; ogni classe determina ciò che possiamo dire un *verso dello spazio*. Un tale verso è determinato da un diedro orientato; è quindi funzione di due versi, uno *sopra* una retta e uno *intorno* a una retta; muta cambiando uno di questi versi, non muta cambiandoli tutti e due. Per lo stesso scopo può servire un triedro, o un angoloide convesso. (1)

(1) I versi dello spazio sono anche detti *versi elicoidali* perchè possono essere definiti opportunamente da archi di elica. Se infatti l'arco AB di elica si proietta in A'B' sull'asse dell'elica, si determina così il diedro orientato A(A'B')B che definisce un verso dello spazio, che è indipendente dall'ordine degli estremi A e B.

§ 8. — Proprietà proiettive dei versi.

49. *Proiettando da un punto una retta ordinata si ottiene parte di un fascio ordinato di raggi.*

Basterà dimostrare che raggi o segmenti equiversi sono proiettati in angoli (convessi) equiversi. Si tratti prima di due raggi equiversi A(H) B(H) proiettati da un punto O negli angoli $A\widehat{O}L$, $B\widehat{O}L$, essendo OL il raggio parallelo ed equiverso ad AH e BH. È chiaro che OA e OB cadono da una stessa parte di OL e il teorema è dimostrato.

Il caso dei segmenti si può dedurre da questo; ma per evitare la considerazione delle parallele si può procedere altrimenti. Siano AB, A'B' i due segmenti, H un punto comune ai raggi A(B), A'(B'). Poichè $A\widehat{O}B$ è equiverso a $B\widehat{A}O$ che coincide con $H\widehat{A}O$, e questo è equiverso a $O\widehat{H}A$, $A\widehat{O}B$ è equiversa a $O\widehat{H}A$, e così $A'\widehat{O}B'$ a $O\widehat{H}A'$. Ma OHA e OHA' coincidono, e ciò dimostra il teorema.

Viceversa se una retta taglia tutti i lati di angoli equiversi di un fascio, le sezioni sono segmenti equiversi.

50. Il teorema precedente si può generalizzare nel seguente:

Proiettando rette ordinate equiverse (contraverse) da due punti situati da una stessa parte o da parti opposte del loro sostegno si ottengono parti di fasci ordinate equiverse (contraverse) o contraverse (equiverse).

Se infatti la retta ordinata $r(\rho)$ si proietta dai punti O, O' si ottengono due parti di fasci ordinati, che saranno equiverse o contraverse secondochè tali sono due angoli di essi $A\widehat{O}B$, $A\widehat{O'}B$. Ora questi due angoli sono equiversi agli altri $O\widehat{B}A$, $O'\widehat{B}A$ e questi sono equiversi o contraversi secondochè A e A' cadono da una stessa parte o da parti opposte di r.

Se invece si proietta da O la $r(\rho)$ e da O' la retta opposta $r(\rho')$ si ottengono due parti di fasci di raggio tali che se alla prima appartiene $A\widehat{O}B$ alla seconda appartiene $B\widehat{O'}A$ che è sempre contraverso ad $A\widehat{O'}B$; ciò dimostra il teorema.

51. *Un fascio ordinato di raggi è proiettato da una retta passante per il suo centro in un fascio ordinato di semipiani.*

La dimostrazione risulta subito dall'osservazione che la corrispondenza posta tra i diedri del fascio di semipiani e gli angoli del fascio di raggi è tale che ad un angolo piatto fa corrispondere un diedro piatto, e viceversa; ad un angolo parte di un altro un diedro parte del corrispondente del primo, ecc.; dimodochè la relazione *equiverso* tra due angoli del fascio è equivalente alla relazione *equiverso* tra i diedri corrispondenti.

Vale quindi anche il teorema inverso che è superfluo enunciare.

52. *Una retta ordinata è proiettata da una retta (ordinata) sghemba ad essa in una parte di un fascio ordinato (orientato) di semipiani.*

Segue subito dai n. 49 e 51. Il teorema si inverte facilmente.

53. Dal teorema precedente e dal n. 45 risulta facilmente l'altro.

Proiettando da una retta ordinata $r(\rho)$ una retta sghemba ordinata $s(\sigma)$, e viceversa, si ottengono parti di fasci orientati equiversi.

Se infatti AB è un segmento di $r(\rho)$ e CD un segmento di $s(\sigma)$, al primo fascio appartiene il diedro C(AB)D, equiverso ad A(DB)C quindi ad B(DC)A ed infine ad A(CD)B che appartiene al secondo fascio. Si vede così che due rette sghembe ordinate, indipendentemente dal loro ordine, determinano un verso dello spazio.

54. *Un piano ordinato è proiettato da un punto* O *in parte di una stella ordinata, intendendo su ogni raggio per* O *assunto il verso che va dal punto al piano.*

Basta dimostrare che due fasci equiversi di π sono proiettati da O secondo fasci orientati equiversi; per questo si considerino in π i fasci $O_1(\omega_1)$ e $O_2(\omega_2)$, e si costruiscano gli angoli piatti $O_2(O_1)H$ del primo fascio e $O_1(O_2)K$ del secondo i quali resulteranno da parti opposte della retta O_1O_2. Anche gli angoli diedri piatti $O_2(OO_1)H$, $O_1(OO_2)K$ risulteranno da parti opposte del piano O_1OO_2 e ciò prova che essi definiscono fasci orientati equiversi.

55. *Un piano ordinato è proiettato da due punti che cadono da una stessa parte o da parti opposte di esso in due stelle ordinate equiverse o contraverse.*

Basta provare che un diedro della prima stella e uno della seconda sono in un caso equiversi e nell'altro contraversi. Si consideri perciò nel piano ordinato $\pi(\Omega)$ un angolo MNP che si proietti da O_1 e O_2 nei diedri orientati $M(O_1N)P$, $M(O_2N)P$. Per il n. 53 essi sono rispettivamente equiversi agli altri $O_1(MP)N$, $O_2(MP)N$, i quali sono equiversi o contraversi secondochè O_1 e O_2 giacciono da una stessa parte o da parti opposte di π.

Anche qua il teorema si inverte facilmente. Si vede da esso che un verso dello spazio è determinato da un semispazio e da un verso del piano che lo limita.

§ 9. — Applicazioni.

56. A titolo di esempio, per mostrare cioè l'utilità di una esatta definizione dei *versi* geometrici per trattare con precisione molte questioni elementari, accenniamo qui ad alcuni teoremi di carattere metrico i quali dipendono essenzialmente dalla nozione di verso, e che per solito non sono dimostrati con tutto il rigore. (1)

57. *Una similitudine trasforma una retta ordinata, un fascio ordinato, un fascio di piani ordinato, od orientato, ecc. in enti della stessa specie.*

La dimostrazione risulta dai due fatti che le relazioni *equiverso* o *controverso* sono funzioni delle relazioni grafiche elementari, cioè dipendono dal verificarsi o no di queste relazioni elementari; e che la similitudine, come è noto, non altera tali relazioni. In altre parole può dirsi che *la similitudine muta un verso di una forma in un verso della forma corrispondente.*

58. Ciò posto, se una forma Σ si trasforma in sè mediante una similitudine, i versi di Σ si trasformano complessivamente in sè stessi; quindi o ciascuno si muta in sè, o ciascuno nell'opposto. Da ciò la distinzione delle similitudini in *dirette* e *inverse.* (2)

59. Ciò che si è ora detto vale per tutte le corrispondenze che conservino le proprietà grafiche elementari; tali sono le *affinità* e in generale le *omografie* in un campo che non contenga elementi limiti.

60. *Due angoli i cui lati possono ordinarsi in coppie di raggi paralleli ed equiversi (o contraversi) sono (uguali ed) equiversi.*

Non vi è che da completare la solita dimostrazione; essendo $r\widehat{O}s$, $r'\widehat{O'}s'$, gli angoli dati, si consideri il punto $O''\equiv rs'$ e per esso si conducano i raggi r'', s'' equiversi ad r ed s; essi saranno equiversi anche ad r' ed s'. Ciò posto, dal criterio fondamentale del n. 30 segue facilmente che $\widehat{rs}$ è equiverso ad $\widehat{r''s''}$ e questo a $\widehat{r's'}$, ciò che dimostra il teorema.

61. Un teorema analogo vale per i triedri e per gli angoloidi e la dimostrazione è analoga alla precedente.

62. *Se* AB *e* CD *sono segmenti paralleli equiversi ed uguali, anche* AC *e* BD *sono paralleli ed uguali.*

È questo un notissimo teorema sui pllgr. di cui crediamo inutile ripetere qui la dimostrazione. Notiamo invece il teorema analogo per i segmenti equiversi di una stessa retta, che usualmente viene applicato senza dimostrazione:

Se sulla retta r AB *e* CD *sono segmenti equiversi ed uguali, tali sono anche* AC *e* BD.

Esso può dedursi dal precedente, ma stimiamo più opportuna, come indipendente dalla teoria delle parallele, un'altra dimostrazione

---

(1) Crediamo però che questa stessa teoria possa essere utilmente applicata a questioni più complesse, come quelle relative alla connessione dei poligoni e dei poliedri, e alla teoria generale delle curve piane studiata con i criteri geometrici del Brounker e del Benedetti.

(2) La questione si può invertire; cioè si può ricercare un criterio indipendente per la distinzione delle due specie di similitudini, e dedurre da esso una definizione del verso. Si può ad esempio chiamare *diretta*, secondo il Pieri, ogni similitudine che sia quadrato di un'altra similitudine; o valersi della proprietà degli elementi uniti. Debbo alla cortesia del prof. G. Scorza la lettura di una elegante esposizione della teoria dei versi secondo quest'ultimo metodo.

che presuppone stabilita la teoria della *simmetria* sulla retta, come *congruenza inversa* avente per necessità un punto unito. Poichè AB e CD sono equiversi, AB e DC sono contraversi, quindi definiscono una congruenza inversa che è una simmetria rispetto a un punto O, punto medio di AD e BC.

Tale simmetria essendo involutoria, sono corrispondenti anche AC e DB, che sono quindi uguali e contraversi; perciò AC e BD sono uguali e equiversi.

63. Un teorema perfettamente analogo sussiste nel fascio di raggi ed è il fondamento della teoria della *rotazione*. La dimostrazione è assolutamente simile alla precedente. (1)

GUIDO ASCOLI.

SULLE IPERSUPERFICIE INVILUPPO

I. I concetti di inviluppo, caratteristiche di Monge e spigolo di regresso, per le superficie dello spazio ordinario (2) si possono estendere in modo facile ed interessante al caso delle ipersuperficie in uno spazio lineare ad n dimensioni: tale estensione per ciò che a me consta, non è stata ancora effettuata.

Rappresentiamo una famiglia di ipersuperficie in un S_n coll'equazione:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n, \alpha) = 0 \qquad (1)$$

essendo α un parametro variabile ed $x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n$ le coordinate dei punti.

Consideriamo un'ipersuperficie di parametro determinato α ed un'altra vicinissima di parametro $\alpha + h$ (corrispondente alla variazione di h di α). Esse si intersecheranno in una varietà ad $n-2$ dimensioni V_{n-2}, la quale col tendere di h a zero, converge in generale (3) nella prima ipersuperficie ad una posizione limite che chiameremo prima Caratteristica dell'Ipersuperficie α e la indicheremo V'_{n-2}.

Le sue equazioni saranno:

$$f(x_1\, x_2 \dots x_n\, \alpha) = 0 \qquad \lim_{h=0} f(x_1\, x_2 \dots x_n\, \alpha + h) = 0$$

(1) Per una trattazione didattica degli argomenti qui esposti possono vedersi i miei recenti *Complementi di Geometria* (Giusti, Livorno, 1913).

(2) Confronta ad esempio BIANCHI. *Geometria Differenziale*, 2ª edizione, vol. I, pag. 22.

(3) Escludiamo i casi di eccezione e supponiamo che tutte le funzioni e derivate di cui faremo uso siano finite e continue.

ovvero, come facilmente si vede, indicando con f la funzione:

$$f=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0. \tag{2}$$

Tale prima caratteristica situata nella ipersuperficie α incontrerà la ipersuperficie $\alpha+h$ in una V_{n-3} la quale tenderà col tendere di h a zero ad una posizione limite che diremo seconda caratteristica della ipersuperficie α, V^{α}_{n-3} di equazioni:

$$f=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad \lim_{h=0} f(x_1 x_2 \dots x_n, \alpha+h)=0. \tag{a}$$

Ma si ha:

$$f(x_1 x_2 \dots x_n, \alpha+h)=f+h\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}+\varepsilon$$

ove ε è un infinitesimo almeno di terzo ordine rispetto ad h, sicchè l'ultima delle (a) osservando le prime due potrà scriversi:

$$\lim_{h=0}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}+\frac{2\varepsilon}{h^2}\right) \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0$$

sicchè in definitiva le equazioni della V^{α}_{n-3} saranno:

$$f=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0. \tag{3}$$

Così continuando potremo chiamare i^{ma} caratteristica della ipersuperficie α la varietà ad $n-i-1$ dimensioni V^{α}_{n-i-1} $(i \leqslant n-1)$ rappresentata dalle equazioni:

$$f=0 \; \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0 \; \dots \; \frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i}=0.$$

Essa risulterà la posizione limite dell'intersezione della caratteristica $(i-1)^a$ dell'ipersuperficie α, colla ipersuperficie $\alpha+h$ quando si faccia tendere h a zero.

Per $i=n-1$ avremo la caratteristica $(n-1)^a$ la quale risulterà composta di un numero finito di punti (varietà a zero dimensioni) e sarà rappresentata mediante le equazioni:

$$f=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0 \; \dots \; \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \alpha^{n-1}}=0.$$

2. Determiniamo ora i luoghi delle caratteristiche del medesimo ordine.

Diremo inviluppata ogni ipersuperficie della famiglia (1), primo inviluppo il luogo di tutte le prime caratteristiche, secondo inviluppo il luogo delle seconde caratteristiche e così via.

L'equazione del primo inviluppo si avrà dalle (2) eliminando α ossia ricavandola p. es. dalla seconda e sostituendola nella prima.

Sicchè potremo dire che la $f = 0$ per $\alpha =$ costante, dà un'inviluppata per α espresso in funzione di $x_1 x_2 \dots x_n$ ricavata dalla $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ dà il primo inviluppo. (Ipersuperficie inviluppo.)

Per le equazioni del secondo inviluppo basta eliminare α dalle (3) sicchè le $f = 0$ $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ per $\alpha =$ costante danno una prima caratteristica, per α espressa in funzione delle x e ricavata dalla $\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$ danno il secondo inviluppo (varietà ad $n - 2$ dimensioni inviluppo).

Generalizzando si ha l'equazione dell'inviluppo i^{mo} mediante l'eliminazione di α dalle equazioni che danno le caratteristiche i^{me}. Esso sarà una varietà ad $n - i$ dimensioni rappresentabile mediante le equazioni:

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0 \ \dots \ \frac{\partial^{i-1} f}{\partial \alpha^{i-1}} = 0 \tag{4}$$

quando ad α sostituiamo il valore ricavato dalla $\frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i} = 0$.

L'ultimo inviluppo ossia di ordine $n - 1$ sarà una varietà ad una dimensione (curva) data dalle equazioni:

$$f = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \ \dots \ \frac{\partial^{n-2} f}{\partial \alpha^{n-2}} = 0$$

quando in luogo di α si metta il valore ricavato dalla $\frac{\partial^{n-1} f}{\partial \alpha^{n-1}} = 0$.

3. Da quanto si è detto in precedenza si deduce subito quanto segue:

a) Il numero delle caratteristiche di ciascuna ipersuperficie di una famiglia ed il numero degli inviluppi precedentemente definiti sono entrambi uguali alle dimensioni dello spazio meno un'unità.

b) Ogni caratteristica racchiude entro di sè, tutte le caratteristiche di ordine maggiore, purchè appartenenti alla stessa ipersuperficie, e ciascun inviluppo contiene gli inviluppi di ordine maggiore.

Tali risultati si accordano con quelli ben noti per $n = 3$ ed $n = 2$. Così, nel primo caso, abbiamo una famiglia di superficie nello spazio ordinario e due caratteristiche nel senso da noi definito: la prima è una curva (o varietà ad una dimensione) e coincide con l'ordinaria caratteristica della superficie α nel senso ben noto di Monge: la seconda è formata da un numero finito di punti, cioè i punti d'intersezione della caratteristica suddetta con la superficie di parametro $\alpha + h$ quando si faccia tendere h a zero (punti limiti della caratteristica α).

In quanto agli inviluppi il primo è l'ordinario inviluppo ossia la superficie luogo di tutte le caratteristiche di Monge, il secondo è la curva luogo dei punti limiti delle varie caratteristiche ossia il cosidetto spigolo di regresso.

Per $n=2$ si ha una famiglia di curve piane ed un'unica caratteristica costituita in questo caso dalle posizioni limiti dei punti in cui si intersecano le due curve α ed $\alpha+h$ quando si faccia tendere h a zero ed il luogo di questi punti costituisce la curva inviluppo. Possiamo ora dimostrare il seguente:

TEOREMA. — *I differenziali* dx_r *delle coordinate* x_r $(r=1,2,\dots n)$ *presi lungo l'inviluppo* i^{mo} $(i \leqslant n-1)$ *coincidono coi differenziali presi lungo le caratteristiche* $(i-1)^e$.

Per la dimostrazione basta tener presente [1] quanto si è detto prima, cioè le equazioni:

$$f=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0 \;\dots\; \frac{\partial^{i-1} f}{\partial \alpha^{i-1}}=0$$

danno per $\alpha=$ costante una caratteristica $(i-1)^a$ mentre determinano l'inviluppo i^{mo} per $\alpha=\alpha(x_1 x_2 \dots x_n)$ ricavato dalla $\frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i}=0$.

Avremo quindi che le dx_r considerate lungo l'inviluppo i^{mo} dovranno verificare le:

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_r}+\frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x_r}\right)dx_r=0\\
&\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x_r}+\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x_r}\right)dx_r=0\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial^i f}{\partial \alpha^{i-1}\partial x_r}+\frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i}\frac{\partial \alpha}{\partial x_r}\right)dx_r=0
\end{aligned} \qquad (5)$$

mentre soddisferanno alle relazioni:

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_r}dx_r=0 \qquad \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial x_r}=0 \;\dots\; \sum_{r=1}^{n}\frac{\partial^i f}{\partial \alpha^{i-1}\partial x_r}=0 \qquad (5')$$

quando si considerino lungo le caratteristiche $(i-1)^e$.

Ma per i punti dell'inviluppo i^{mo} si hanno le:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}=0 \;\dots\; \frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i}=0$$

cchè le (5) si riducono alle (5') e ciò dimostra quanto si voleva.

4. Come caso particolare nello spazio ordinario $n=3$ applicando teorema per $i=1$ le equazioni (5) e (5') diventano identiche e come

[1] Tale teorema sussiste per $i=1$ purchè si considerino come caratteristiche di ordine zero ipersuperficie della famiglia.

conseguenza di ciò si trova che i piani tangenti all'inviluppo ed all'inviluppato nei punti in comune (caratteristica) coincidono e per $i=2$ si ha la coincidenza delle rette tangenti allo spigolo di regresso ed alle caratteristiche: si ricavano quindi i noti teoremi:

Ogni inviluppata tocca l'inviluppo lungo tutta la caratteristica e lo spigolo di regresso tocca ogni caratteristica lungo i punti limiti, mentre nel piano per $n=2$ $i=1$ si ha che la curva inviluppo è tangente ad ogni inviluppata.

GIUSEPPE USAI.

UNA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA RELATIVO ALLA POSSIBILITÀ
della congruenza binomia di grado n e di modulo primo (1)

Premettiamo il seguente

LEMMA. — *Se* δ *è un divisore di* $p-1$ *e se*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots \; a_\lambda \tag{1}$$

è un sistema completo di $\varphi(\delta)$ *numeri incongrui rispetto al modulo primo* $p>2$ *e appartenenti all'esponente* δ, *le potenze*

$$a_1^s, \quad a_2^s, \quad \ldots \; a_\lambda^s, \tag{2}$$

il cui esponente s *sia primo con* δ, *formano ancora un tale sistema.*

DIMOSTRAZIONE. — Innanzi tutto che ogni termine a^s della successione (2) appartenga all'esponente δ, si vede osservando che ove sia

$$(a^s)^{\delta'} = a^{s\delta'} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p),$$

dev'essere $s\delta'$ un multiplo di δ e quindi, essendo s e δ primi tra loro, δ' stesso è necessariamente divisibile per δ, e che d'altra parte è

$$(a^s)^\delta = (a^\delta)^s \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p).$$

Resta ora da dimostrare che i numeri (2) sono incongrui (mod. p). Ciò è evidente quando sia $s \equiv 1$ (mod. δ), giacchè in tale caso i termini delle due successioni (1) e (2) sono ordinatamente congrui tra

(1) Il teorema si dimostra comunemente fondandosi sulla nozione di indice; così per es. nelle *Lezioni sulla teoria dei numeri* di P. G. DIRICHLET, § 31. Una dimostrazione indipendente dalla nozione di indice è data nella *Teoria delle congruenze* di P. L. TCHEBICHEF, trad. ital. di I. MASSARINI. Roma, Loescher. 1895, cap. V. § 32. La dimostrazione che dò io nella presente *Nota* è pure indipendente dalla teoria degli indici ed ha forse il pregio di una notevole semplicità. Perciò giudicai utile pubblicarla.

loro (mod. p); e poichè per $\delta = 2$ (ed s dispari per ipotesi) non può verificarsi che questo caso, possiamo supporre $\delta > 2$ e quindi

$$\varphi(\delta) \geqq 2.$$

Ragioniamo per assurdo e supponiamo per es. che si abbia

$$a_\mu^s \equiv a_\nu^s \qquad (\text{mod. } p) \tag{3}$$

dove a_μ ed a_ν sono due termini distinti della successione (1). Considerando le δ potenze incongrue (mod. p)

$$a_\mu^0, \quad a_\mu, \quad a_\mu^2, \ldots a_\mu^{\delta-1}, \tag{4}$$

notiamo che tra esse ve ne sono $\varphi(\delta)$ aventi esponente primo con δ e che, per quanto precede, appartengono dunque all'esponente δ (mod. p), come la loro base a_μ. Queste $\varphi(\delta)$ potenze di a_μ sono quindi rispettivamente congrue, salvo l'ordine, ai termini della successione (1); perciò esiste un numero *m minore di* δ tale che

$$a_\mu^m \equiv a_\nu \qquad (\text{mod. } p). \tag{5}$$

Ora, da questa congruenza si ha, tenendo presente la (3),

$$a_\mu^{ms} \equiv a_\mu^s \qquad (\text{mod. } p),$$

onde, essendo s primo con δ,

$$m \equiv 1 \qquad (\text{mod. } \delta)$$

donde, perchè $m < \delta$, si deduce $m = 1$. Ma dalla (5) risulta allora

$$a_\mu \equiv a_\nu \qquad (\text{mod. } p)$$

contro l'ipotesi. Così il Lemma è dimostrato.

Corollario. — *Se* $x_1, x_2, \ldots x_p$ *è un sistema completo di numeri incongrui rispetto al modulo primo* $p\,(> 2)$ *e se* n *è un numero primo con* $\varphi(p) = p - 1$, *anche le potenze* $x_1^n, x_2^n, \ldots x_p^n$ *formano un tale sistema (e ciascuna di esse, che non sia divisibile per* p, *appartiene all'esponente della propria base).*

Dopo queste premesse possiamo dare una dimostrazione semplice, e indipendente dalla teoria degli indici, del seguente

Teorema. — *Se* $p > 2$ *è un numero primo che non divida* D, *affinchè la congruenza*

$$x^n \equiv D \qquad (\text{mod. } p) \tag{6}$$

sia possibile è necessario e sufficiente che sia

$$D^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p), \tag{7}$$

dove δ *è il massimo divisore comune di* n *e* $p - 1$; *e allora la congruenza ammette* δ *e soltanto* δ *radici.*

DIMOSTRAZIONE. — I. *La condizione è necessaria.* Infatti, se la congruenza ammette una radice x_1, si ha

$$x_1^n \equiv D \qquad (\text{mod. } p);$$

quindi, ponendo per semplicità $\nu = \frac{p-1}{\delta}$ ed essendo x_1 primo con p, per il teorema di *Fermat* avremo

$$D^\nu \equiv (x_1^n)^\nu \equiv (x_1^{p-1})^{\frac{n}{\delta}} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p)$$

II. *La condizione è sufficiente.* Nel caso particolare che sia $\delta = 1$, se $x_1, x_2, \ldots x_p$ è un sistema completo di numeri incongrui (mod. p), esiste, in virtù del precedente Corollario, nella successione

$$x_1^n, \quad x_2^n, \ \ldots \ x_p^n$$

un numero ed uno solo x_μ^n tale che

$$x_\mu^n \equiv D \qquad (\text{mod. } p).$$

In questo caso dunque la congruenza possiede la sola radice x^μ, come appunto richiede il teorema.

Sia $\delta > 1$. Evidentemente D, che soddisfa alla (7), appartiene ad un esponente Δ che divide ν.

Ora, se $D_1, D_2, \ldots D_\lambda$ è un sistema di $\varphi(\Delta)$ numeri incongrui (mod. p) ed appartenenti allo stesso esponente Δ, possiamo affermare, in forza del Lemma premesso, che tra cotesti numeri ve n'è *uno* D_r tale che

$$D_r^{\frac{n}{\delta}} \equiv D \qquad (\text{mod. } p). \tag{8}$$

Considerando ora la congruenza

$$x^{p-1} - 1 \equiv x^{p-1} - D_r^\nu \equiv (x^\delta)^\nu - D_r^\nu \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ossia

$$(x^\delta - D_r)(x^{\delta(\nu-1)} + x^{\delta(\nu-2)} D_r + \ldots + x^\delta D_r^{\nu-2} + D^{\nu-1}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

la quale pel teorema di *Fermat* ammette $p-1$ radici, si deduce che

$$x^\delta \equiv D_r \qquad (\text{mod. } p) \tag{9}$$

possiede δ radici. Qui notiamo che *se fosse* n *un divisore di* $p-1$, sarebbe $n = \delta$ e quindi, per la (8),

$$D_r \equiv D \qquad (\text{mod. } p),$$

epperò la (9) si ridurrebbe alla nostra congruenza (6) e il teorema sarebbe ormai dimostrato, giacchè una congruenza non può avere un numero di radici superiore al suo grado. Se invece n non divide $p-1$, elevando i due membri della (9) ad $\frac{n}{\delta}$ e tenendo presente la (8) si ricava la congruenza (6). Ciò vuol dire che quest'ultima ammette tutte le δ radici della (9).

Resta soltanto da dimostrare che essa non può avere altre radici. A tal fine consideriamo la congruenza

$$x^{\nu} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } p), \tag{10}$$

la quale, come s'è visto, possiede ν radici $D', D'', \dots D^{(\nu)}$, giacchè

$$\nu = \frac{p-1}{\delta}$$

è un divisore di $p-1$, e formiamo le ν congruenze

$$x^n \equiv D', \qquad x^n \equiv D'', \; \dots \; x^n \equiv D^{(\nu)} \qquad (\text{mod. } p). \tag{11}$$

Ciascuna di queste è possibile perchè il suo secondo membro soddisfa la congruenza (10), e ammette anzi, per quello che s'è già dimostrato, almeno δ radici. Ora queste radici delle congruenze (11)

$$x_1', \;\; x_2', \; \dots \; x_\delta'; \qquad x_1'', \;\; x_2'', \; \dots \; x_\delta''; \; \dots \; x_1^{(\nu)}, \;\; x_2^{(\nu)}, \; \dots \; x_\delta^{(\nu)}$$

sono numeri tutti incongrui (mod. p) e non divisibili per p, essendo tali anche $D', D'', \dots D^{(\nu)}$. E siccome il loro numero complessivo è $\delta\nu = p-1$, ne viene che ciascuna delle congruenze (11), e quindi anche la (6), non ha altre radici oltre le δ indicate.

Così il teorema è dimostrato.

Osservazione. — Dalla nostra dimostrazione emerge che la risoluzione della congruenza (6) si riduce a quella della (9). Però è necessario a tal fine determinare il numero D_r. Si consideri perciò un numero η che soddisfi la congruenza

$$\frac{n}{\delta}\,\eta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } \nu), \tag{12}$$

il che è possibile, essendo $\frac{n}{\delta}$ e ν primi tra loro; allora per la (8) si ha:

$$D_r^{\frac{n}{\delta}\eta} \equiv D^{\eta} \qquad (\text{mod. } p). \tag{13}$$

Ma D_r, rispetto al modulo p, appartiene ad un esponente Δ divisore di ν, quindi dalla (12) si ha

$$\frac{n}{\delta}\,\eta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } \Delta),$$

onde

$$D_r^{\frac{n}{\delta}\eta} \equiv D_r \qquad (\text{mod. } p),$$

e infine per la (13)

$$D_r \equiv D^{\eta} \qquad (\text{mod. } p).$$

Dunque, determinato η, per trovare tutte le δ radici della (6) basterà risolvere la congruenza

$$x^{\delta} \equiv D^{\eta} \qquad (\text{mod. } p).$$

UMBERTO CONCINA.

SUL SIGNIFICATO ANALITICO DELL'ESPRESSIONE

PUNTI INTERNI AD UN POLIGONO SEMPLICE [1]

Chiamasi punto $P(x, y)$ la coppia di numeri reali (x, y) nell'ordine in cui sono dati. Il primo elemento della coppia dicesi *ascissa*, il secondo *ordinata*, l'uno e l'altro *coordinate del punto*.

L'insieme di tutti i possibili punti è *il piano*.

Dati due punti distinti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ dicesi segmento $\overline{P_1P_2}$ l'insieme di tutti i punti le cui coordinate ci sono date dalle formole:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{1}$$

per uno stesso valore del parametro t, variabile nell'intervallo (0,1), mentre dicesi retta P_1P_2 l'insieme di tutti i punti le cui coordinate ci sono date dalle (1) per qualsivoglia valore reale di t. Tutti e soli i punti della retta P_1P_2 soddisfano all'equazione:

$$(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_1 - x_2)(y - y_1) = 0.$$

Data l'equazione di una retta, le coordinate di un punto qualsivoglia o la soddisfano ed allora esso appartiene alla retta oppure ne rendono il primo membro positivo o negativo.

Si dice che due punti non appartenenti ad una retta stanno dalla stessa banda o da bande opposte rispetto ad essa secondo che le loro coordinate fanno acquistare al primo membro dell'equazione della retta valori dello stesso segno o di segno opposto.

TEOREMA I. — *Secondo che due punti stanno da bande opposte o dalla stessa banda rispetto ad una retta, il segmento da essi determinato ha un sol punto o nessun punto comune con la retta.*

[1] Sullo stesso argomento vedasi un lavoro per via sintetica del prof. Marletta, "Bellettino di Matematica", 1906.

Sia data per es. la retta P_1P_2 e siano $P_3(x_3, y_3)$, $P_4(x_4, y_4)$ due punti da banda opposta rispetto ad essa.

Introducendo le equazioni parametriche nel segmento $\overline{P_3P_4}$ nel primo membro dell'equazione della retta si ha una funzione di primo grado in t che assume per ipotesi valori di segno opposto per $t=0$ e per $t=1$, e poichè essa è una funzione continua si annulla almeno per un valore di t compreso tra 0 ed 1; non può poi esistere più di un tal valore di t perchè allora essendo la funzione di primo grado dovrebbe annullarsi in tutti i punti dell'intervallo $(0,1)$ e quindi anche negli estremi, ciò che è contro l'ipotesi.

Dati tre punti distinti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ non appartenenti alla stessa retta chiameremo *triangolo di vertici* P_1, P_2, P_3, l'insieme dei tre segmenti $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_1}$, i quali si diranno *lati del triangolo.*

Indichiamo con

$$\varphi_1(x, y) = 0, \quad \varphi_2(x, y) = 0, \quad \varphi_3(x, y) = 0,$$

le equazioni delle tre rette P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2, scritte però in modo che si abbia

$$\varphi_1(x_1, y_1) > 0, \quad \varphi_2(x_2, y_2) > 0, \quad \varphi_3(x_3, y_3) > 0.$$

Un punto $P(x, y)$ non appartenente al triangolo si dirà interno se sostituendo le sue coordinate nella (3) le renda tutte e tre positive, esterno in ogni altro caso.

L'insieme dei punti interni ad un triangolo non è vuoto. Basta infatti, tenendo presente il teorema I, considerare l'insieme dei punti interni ad un segmento avente per estremi un vertice ed un punto interno del lato opposto.

Dati più punti distinti $A_1(a_1b_1)$, $A_2(a_2b_2)$, ... $A_n(a_nb_n)$, di cui tre successivi non appartengono ad una stessa retta dicesi poligonale $A_1A_2 \dots A_n$ l'insieme dei segmenti $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_{n-1}A_n}$, e poligono $A_1A_2 \dots A_n$ l'insieme dei segmenti $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3} \dots \overline{A_{n-1}A_n}, \overline{A_nA_1}$.

I punti si dicono i vertici, i segmenti si dicono i lati della poligonale o del poligono.

Sia dato il triangolo $P_1P_2P_3$; di cui $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ siano l'equazioni dei lati e si consideri per semplicità una poligonale $A_1A_2 \dots A_n$ che non passi per i vertici triangolo e che non abbia i vertici sopra i lati del triangolo.

Teorema II. — *Se la poligonale ha gli estremi A_1, A_n interni al triangolo essa o non ha punti in comune col triangolo o ne ha un numero pari, e se la poligonale ha un estremo interno e un estremo esterno essa ha un numero dispari di punti comuni col triangolo.*

I punti del triangolo sono per definizione o quelli in cui si annullano due φ (vertici) o quelli in cui una delle φ è nulla e le altre due positive.

Facciamo percorrere ad un punto la poligonale partendo da A_1 ed osserviamo i valori che assumono le tre φ. Queste in A_1 ed in A_n sono positive per ipotesi, se adunque esse non si annullano mai la poligonale è costituita di punti tutti interni al triangolo. Escluso questo caso, quando il punto avrà percorso una certa parte della poligonale, una delle φ, per es.: φ_1, dovrà annullarsi per la prima e poi assumere valori negativi.

Il punto in cui φ_1 allora si annulla è un punto del triangolo, e poichè φ_1 assume dopo valori negativi e dovrà trovarsi alla fine in A_n con valore positivo, ci sarà un secondo punto in cui φ_1 tornerà ad annullarsi per cambiar segno. Allora o delle φ_2 e φ_3 nessuna è negativa e allora vuol dire che abbiamo attraversato per la seconda volta il triangolo e ci troviamo in un punto interno, o qualcuna delle φ_2, φ_3 è negativa e allora seguitiamo a percorrere la poligonale fino a che avvenga quel primo annullamento di qualcuna delle φ dopo il quale tutte e tre si trovano positive; anche allora abbiamo attraversato il triangolo e ci troviamo in un punto interno. Tanto basta per la dimostrazione della prima parte del teorema.

Per la seconda parte, sia A_1 l'estremo interno, A_n l'estremo esterno al triangolo $P_1P_2P_3$. Percorrendo la poligonale partendo da A_n s'incontrerà necessariamente il triangolo, perchè le tre funzioni $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ in A_n non hanno segni eguali come in A_1.

Avvenuto quel primo annullamento di qualche φ dopo il quale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ si trovano tutte e tre positive avremo attraversato il triangolo e ci troviamo in un punto interno. Per la prima parte del teorema, se allora seguitiamo a muoverci, e non incontreremo più il triangolo, o lo incontreremo in un numero pari di punti, che è quanto volevamo dimostrare.

Un *poligono* si dice *semplice*, se due lati qualsiansi non consecutivi non hanno punti comuni. Un segmento che unisce due vertici non consecutivi si chiama *diagonale*.

Teorema III. — *Dato un poligono semplice* $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ *è sempre possibile per ogni vertice tirare almeno una diagonale, che non abbia altri punti comuni col poligono che i due vertici che la determinano.*

Si prenda il vertice A_1 e consideriamo i due consecutivi ed un segmento che abbia un estremo in A_1 e l'altro in un punto P del lato $\overline{A_2A_3}$. Facciamo percorrere a P con continuità questo lato, allora o il segmento A_1P non viene a contenere mai un vertice ed in tal caso la diagonale A_1A_3 è quella richiesta, oppure il *segmento* $\overline{A_1P}$ viene nel suo movimento a contenere per primo il vertice $A_i (i \neq n)$ ed allora A_1A_i è la diagonale richiesta. Se poi $i = n$, si osservi che A_{n-1} è esterno al triangolo $A_1A_2A_3$ e si considerino i tre vertici A_1, A_n, A_{n-1}, ripetendo allora il ragionamento fatto sostituendo ai punti A_2, A_3 i punti A_n, A_{n-1} si riuscirà nell'intento.

TEOREMA IV. — *Sia dato un poligono semplice $A_1A_2 \ldots A_n$ e due punti M, N non appartenenti al poligono. Uniamo M con N mediante una poligonale, che non passi per nessuno dei vertici del poligono; dico, che se una tale poligonale incontra il poligono in un numero dispari (pari)* [1] *di punti, ogni altra cosifatta poligonale lo incontrerà sempre in un numero dispari (o pari) di punti.*

Il teorema è stato dimostrato per i triangoli, ammettiamolo quindi per i poligoni semplici di un numero di lati minore di n e dimostriamolo per i poligoni di n lati.

Dato un poligono di n lati $A_1A_2 \ldots A_n$ tiriamo una diagonale che non abbia altri punti comuni col poligono che i suoi estremi A_1, A_i.

Consideriamo i due poligoni semplici $A_1A_2 \ldots A_i$, $A_iA_{i+1} \ldots A_nA_1$ e due poligonali (P), (P′) aventi per estremi M, N. Possiamo supporre che (P) e (P′) non abbiano alcun vertice sulla diagonale A_1A_i poichè se fosse altrimenti potremmo sostituire questo con uno o due punti infinitamente vicini in modo però che i punti d'incontro delle poligonali così ottenute col poligono dato restino inalterati.

Le poligonali (P) e (P′) incontrino il poligono A_1, A_2, A_i rispettivamente in μ e μ' punti ed il poligono $A_iA_{i+1} \ldots A_nA_1$ in ν e ν' punti.

Per ipotesi μ e μ' sono ambedue numeri pari o dispari e così pure ν e ν' e quindi lo stesso si può dire per $\mu + \nu$ e $\mu' + \nu'$.

Adunque se nè (P) nè (P′) incontrano la diagonale $\overline{A_1A_i}$, esse incontreranno il poligono $A_1A_2 \ldots A_n$ rispettivamente in $\mu + \nu$ e $\mu' + \nu'$ ed il teorema è dimostrato, se poi (P) e (P′) incontrano la diagonale A_1A_i rispettivamente in m ed n punti esse incontreranno il poligono $A_1A_2 \ldots A_n$ rispettivamente in

$$\mu + \nu - 2m, \qquad \mu' + \nu' - 2n$$

punti; cosicchè il teorema è da ritenersi dimostrato in ogni caso.

Dato un poligono semplice, diremo che due punti non appartenenti ad esso sono della stessa classe se una poligonale che li ammette per estremi incontra il poligono in un numero pari di punti, in caso contrario diremo che sono di classe diversa.

Da questa definizione e dal teorema precedente sorge che le classi possibili di punti non appartenenti al poligono sono due. Queste classi non sono vuote.

Infatti, per un punto C interno ad un lato del poligono tracciamo una retta che non contenga questo lato. Se su questa retta prendiamo due punti A, B tali che il segmento $\overline{AB}$ contenga C e nessun altro punto d'incontro della retta col poligono, avremo due punti di classe diversa, se invece prendiamo A, B in modo che il segmento $\overline{AB}$ non comprenda *neppure* C avremo due punti della stessa classe.

[1] Lo zero è da considerarsi come numero pari.

Si chiama classe di *punti esterni* al poligono quella che comprende i punti di ascisse maggiori di quelle dei vertici del poligono, l'altra si dice classe dei punti interni.

VITTORIO STRAZZERI.

UNA REGOLA DI CALCOLO INFINITESIMALE

Nell'esame di una questioncella elementare di massimi e minimi [1] ho avuto occasione di formulare e applicare una proposizione di Calcolo infinitesimale che non ho trovato nei trattati a mia disposizione, e che non so se sia stata finora enunciata e dimostrata, almeno in forma esplicita e completa. Ad ogni modo questa Nota varrà, spero, a richiamare l'attenzione su di una " regola „ che mi pare notevole per la sua semplicità e generalità.

Detta proposizione è la seguente:

Se si ha una funzione di funzione

$$F(x) = f[\varphi(x)]$$

e si conoscono i massimi e minimi (relativi) della $f(u)$ *e della* $\varphi(x)$, *i massimi e minimi (relativi) della* $F(x)$ *rimangono così determinati:*

a) *La* $F(x)$ *ha i massimi e minimi della* $f(u)$, *sempre che i punti* u *corrispondenti cadano nel campo di variabilità della* $\varphi(x)$.

b) *La* $F(x)$ *ha inoltre come punti di massimo e minimo i punti di massimo e minimo della* $\varphi(x)$, *con questa corrispondenza, che ad un massimo (ovvero ad un minimo) della* $\varphi(x)$ *in* x_1 *corrisponde un massimo o un minimo (ovvero un minimo o massimo) della* $F(x)$, *secondochè la* $f(u)$ *è crescente o decrescente per* $u = \varphi(x_1)$.

Di questa proposizione o regola darò due dimostrazioni, l'una indipendente dalla teoria delle derivate, e l'altra come applicazione di tale teoria; dalle due dimostrazioni si vedrà quali sono le *condizioni* che si ammettono per le $f(u)$, $\varphi(x)$, e quali sono i possibili *casi d'eccezione.*

Sia la funzione $f(u)$ continua nell' intervallo $\overline{m, n}$ in cui è data (potendo anche essere $m = -\infty$, $n = +\infty$); e si abbia che in ogni punto di tale intervallo la $f(u)$ è crescente o decrescente ovvero ha

[1] Vedi: " Sui massimi e minimi „ nel *Supplemento al Periodico di Matematica*, anno XVI, fascicoli I e III.

un massimo o un minimo (cioè per ogni punto u_0 di $\overline{m, n}$, preso un σ piccolo a piacere, la differenza $f(u_0 + \delta) - f(u_0)$, per δ abbastanza piccolo in valore assoluto, ha sempre il segno di δ, o il segno opposto a δ, ovvero è sempre negativa o sempre positiva). Negli estremi dell'intervallo $\overline{m, n}$ la $f(u)$ si considera massima o minima, solamente (per es. per $x = m$ la $f(u)$ è minima se la differenza $f(m + \delta) - f(m)$, per δ positivo abbastanza piccolo, è positiva).

Così pure la $\varphi(x)$ sia continua nell'intervallo $\overline{\alpha, \beta}$ in cui è data (potendo essere $\alpha = -\infty$, e $\beta = +\infty$). e sia $\overline{p, q}$ l'intervallo di variabilità di tale funzione (cioè siano p, q il limite inferiore ed il limite superiore di $\varphi(x)$ in $\overline{\alpha, \beta}$). Inoltre per ogni punto di $\overline{\alpha, \beta}$ la $\varphi(x)$ sia crescente o decrescente, ovvero abbia un massimo o un minimo; negli estremi dell'intervallo considerando di avere i soli casi di massimo o minimo, come fu detto per la $f(u)$ e come dovrà intendersi pure per la $F(x)$.

Ciò premesso le due parti della nostra proposizione risultano dimostrate nel seguente modo intuitivo, semplicissimo.

A) Sia u_0 un punto di *massimo* per la $f(u)$; se $x = x_0$ è una radice della $u_0 = \varphi(x)$, nell'intorno $\overline{x_0 - \varepsilon, \cdot x_0 + \varepsilon}$, per ε positivo abbastanza piccolo, sarà $\varphi(x)$ compresa tra $u_0 - \delta$ e $u_0 + \delta$, con δ positivo piccolo a piacere; epperò, per ε abbastanza piccolo i valori della $F(x) = f(u)$ in quell'intorno saranno sempre minori di

$$F(x_0) = f(u_0),$$

che rappresenterà adunque un *massimo* per la $F(x)$.

Analoga dimostrazione partendo da un punto di *minimo* per la $f(u)$.

B) Si supponga ora che per $x = x_1$ la $\varphi(x)$ ammetta un *massimo*, essendo $\varphi(x_1) = u_1$. Se u_1 cade nell'intervallo $\overline{m, n}$ in cui è data la $f(u)$, a seconda che la $f(u)$ è in u_1 crescente o decrescente (i punti di massimo e minimo della $f(u)$ si son già considerati) la $F(x)$ nell'intorno $\overline{x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon}$, per ε abbastanza piccolo, avrà in x_1 il suo valore *massimo* o *minimo*.

E analogamente si ragiona partendo da un punto di *minimo* per la $\varphi(x)$.

Le due dimostrazioni precedenti A), B) vengono a mancare se negli intorni $\overline{x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon}$ ovvero $\overline{x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon}$ la funzione $F(x)$ non esiste che per $x = x_0$ ovvero per $x = x_1$, cioè se x_0 o x_1 sono *punti isolati* per la $F(x)$. [1]

La proposizione enunciata può venir dimostrata altrimenti mediante la teoria delle derivate, ricordando la regola che dà la de-

[1] Ciò può accadere, per es., nel caso in cui $\varphi(x_1) = u_1$ è un massimo per la $\varphi(x)$ e u_1 coincide coll'estremo inferiore m dell'intervallo in cui è data la $f(u)$.

rivata di una funzione di funzione, e ricordando che " la derivata " di una funzione passa da valori positivi a valori negativi in un " punto di massimo della funzione, e viceversa in un punto di mi- " nimo ".

Siano adunque le funzioni $y = f(u)$ ed $u = \varphi(x)$, da cui si deduce la funzione

$$y = f[\varphi(x)] = F(x).$$

Oltre alle ipotesi poste per la prima dimostrazione, ammetteremo la derivabilità delle $f(u)$ e $\varphi(x)$, e la continuità delle prime derivate. [1] Avremo la formula

$$F'(x) = f'(u) \,.\, \varphi'(x), \tag{α}$$

essendo

$$u = \varphi(x).$$

Divideremo anche questa dimostrazione in due parti:

A) Si supponga dapprima che la $f(u)$ abbia un *massimo* y_0 in $u = u_0$, e si abbia $u_0 = \varphi(x_0)$, non essendo nè u_0, nè x_0 estremi degli intervalli in cui le due funzioni sono date. Dico che la $F(x)$ ha il *massimo* y_0 in $x = x_0$.

Per l'ipotesi posta sarà $f'(u_0) = 0$, e quindi, per la (α), avremo

$$F'(x_0) = f'(u_0) \,.\, \varphi'(x_0) = 0 \,.\, \varphi'(x_0) = 0.$$

Di più, per la proposizione citata sopra, sarà

$$f'(u_0 - \delta) > 0\,, \qquad f'(u_0 + \delta) < 0 \tag{β}$$

per δ (positivo) abbastanza piccolo.

Qui è necessario distinguere quattro casi:

1°. $\varphi(x)$ *crescente* in x_0; avremo:

$$\varphi'(x_0) \gtrapprox 0\,, \qquad \text{e} \qquad \varphi'(x_0 \mp \varepsilon) > 0$$

per ε abbastanza piccolo, e ancora

$$\varphi(x_0 - \varepsilon) = u_0 - \delta\,, \qquad \varphi(x_0 + \varepsilon) = u_0 + \delta'$$

con δ, δ' positivi, piccoli a piacere con ε; onde, per le (α) e (β), sarà

$$F'(x_0 - \varepsilon) = f'(u_0 - \delta) \,.\, \varphi'(x_0 - \varepsilon) > 0\,,$$
$$F'(x_0 + \varepsilon) = f'(u_0 + \delta') \,.\, \varphi'(x_0 + \varepsilon) < 0\,.$$

Sicchè in questo caso la $F(x)$ ha un massimo in x_0.

---

[1] Si esclude qui che le due derivate $f'(u)$, $\varphi'(x)$ possano divenire infinite; si potrebbe tuttavia considerare anche questo caso, sempre che esista determinata la $F'(x)$; ma di questo caso, per semplicità, non ci occuperemo. Inoltre anche per questa dimostrazione si hanno i casi di eccezione indicati per la dimostrazione precedente e che corrispondono a possibili punti isolati della $F(x)$.

2°. $\varphi(x)$ *decrescente* in x_0:

$$\varphi'(x_0) \leqq 0, \qquad \varphi'(x_0 \mp \varepsilon) < 0,$$
$$\varphi(x_0 - \varepsilon) = u_0 + \delta, \qquad \varphi(x_0 + \varepsilon) = u_0 - \delta',$$
$$F'(x_0 - \varepsilon) = f'(u_0 + \delta) \cdot \varphi'(x_0 - \varepsilon) > 0,$$
$$F'(x_0 + \varepsilon) = f'(u_0 - \delta') \cdot \varphi'(x_0 + \varepsilon) < 0.$$

3°. $\varphi(x)$ *massima* in x_0:

$$\varphi'(x_0) = 0, \qquad \varphi'(x_0 - \varepsilon) > 0, \qquad \varphi'(x_0 + \varepsilon) < 0,$$
$$\varphi(x_0 - \varepsilon) = u_0 - \delta, \qquad \varphi(x_0 + \varepsilon) = u_0 - \delta',$$
$$F'(x_0 - \varepsilon) = f'(u_0 - \delta) \cdot \varphi'(x_0 - \varepsilon) > 0,$$
$$F'(x_0 + \varepsilon) = f'(u_0 - \delta') \cdot \varphi'(x_0 + \varepsilon) < 0.$$

4°. $\varphi(x)$ *minima* in x_0:

$$\varphi'(x_0) = 0, \qquad \varphi'(x_0 - \varepsilon) < 0, \qquad \varphi'(x_0 + \varepsilon) > 0,$$
$$\varphi(x_0 - \varepsilon) = u_0 + \delta, \qquad \varphi(x_0 + \varepsilon) = u_0 + \delta',$$
$$F'(x_0 - \varepsilon) = f'(u_0 + \delta) \cdot \varphi'(x_0 - \varepsilon) > 0,$$
$$F'(x_0 + \varepsilon) = f'(u_0 + \delta') \cdot \varphi'(x_0 + \varepsilon) < 0.$$

Dunque in tutti i quattro casi la $F(x)$ ha un *massimo* in x_0, che sarà

$$y_0 = f(u_0) = F(x_0).$$

Analogamente si dimostra che se la $f(u)$ ha un *minimo* y_0 in $u = u_0$, allora la $F(x)$ ha il *minimo* y_0 in x_0.

B) Si consideri ora un punto $x = x_1$ in cui la $\varphi(x)$ è *massima*, essendo la $f(u)$ *crescente* o *decrescente* in $u_1 = \varphi(x_1)$; anche qui si suppone che x_1 e u_1 non siano estremi degli intervalli in cui le $\varphi(x)$ ed $f(u)$ sono date. Dico che corrispondentemente la $F(x)$ è *massima* o *minima* in x_1.

Per l'ipotesi posta sarà $\varphi'(x_1) = 0$, e quindi

$$F'(x_1) = f'(u_1) \cdot \varphi'(x_1) = f'(u_1) \cdot 0 = 0;$$

inoltre, per ε abbastanza piccolo, avremo

$$\varphi'(x_1 - \varepsilon) > 0, \qquad \varphi'(x_1 + \varepsilon) < 0,$$
$$\varphi(x_1 - \varepsilon) = u_1 - \delta, \qquad \varphi(x_1 + \varepsilon) = u_1 - \delta'.$$

Distingueremo ora due casi:

1°. Se la $f(u)$ è *crescente* in u_1, avremo $f'(u_1 \mp \delta) > 0$; onde

$$F'(x_1 - \varepsilon) = f'(u_1 - \delta) \cdot \varphi'(x_1 - \varepsilon) > 0,$$
$$F'(x_1 + \varepsilon) = f'(u_1 - \delta') \cdot \varphi'(x_1 + \varepsilon) < 0;$$

sicchè in questo caso la $F(x)$ è *massima* in x_1.

2°. Se la $f(u)$ è *decrescente* in u_1, avremo $f'(u_1 \pm \varepsilon) < 0$, da cui si deduce che la $F(x)$ è *minima* in x_1.

Analogamente si dimostra che se la $\varphi(x)$ è *minima* in x_1, essendo la $f(u)$ *crescente* o *decrescente* in $u_1 = \varphi(x_1)$, la $F(x)$ è corrispondentemente *minima* o *massima* in x_1.

Le dimostrazioni precedenti A), B) si possono estendere, con opportune modificazioni, a punti estremi degli intervalli in cui le funzioni sono date (considerati, come fu detto, quali punti di massimo o minimo per le funzioni), sempre che non diano luogo a punti isolati per la $F(x)$, che sono i soli casi d'eccezione della nostra regola.

E. Maccaferri.

SULLA CURVA DI GUTSCHOVEN

e varie curve ad essa connesse

1. In una lettera indirizzata il 18 agosto 1662 da Sluse a Huygens apparisce una curva del 4° ordine che era stata segnalata da Gerard von Gutschoven all'attenzione di Sluse. Le sue equazioni polare e cartesiana sono:

$$r = a \operatorname{tang} \theta,$$
$$x^2(x^2 + y^2) = a^2 y^2;$$

è questa la quartica cui il sig. Aubry ha recentemente dato il nome di curva *kappa*, a causa della sua forma che ricorda quella della lettera greca di tal nome. Se ne trova uno studio nelle opere del prof. Gino Loria (*Spezielle ebene Kurven*, I, pp. 196-204) e del sig. Gomes Teixeira (*Traité des courbes spéciales remarquables*, I, pp. 274-277). In dette opere sono esposte due costruzioni differenti della tangente in un punto.

In un recente lavoro (*Exercices et Compléments de Mathématiques générales*, Paris, Delagrave, 1912, pp. 171-175 e pp. 271-272), il professor H. Bouasse ed io abbiamo considerata la curva kappa come la trasformata di un circolo di centro O in una certa trasformazione definita mediante la squadra rettangolare. Per un punto A d'una curva data, si fa passare un lato di una squadra, il cui vertice dell'angolo retto è soggetto a restar fisso in O; l'altro lato dell'angolo retto incontra la parallela all'asse fisso Ox condotta dal punto A in un punto M. Quando A descrive la curva data, il punto M genera la curva trasformata.

Tra le coordinate (x, y) di A e (X, Y) di M esistono le due relazioni:

$$Y = y, \qquad X = -\frac{y^2}{x};$$

la trasformazione così definita è evidentemente involutoria.

Siano t e T le ascisse respettive dei punti nei quali le tangenti corrispondenti alla curva ed alla sua trasformata incontrano l'asse Ox. Risulta, dalle formule precedenti, che fra T, t, X e x, esiste sempre la relazione

$$\frac{T}{X} + \frac{t}{x} = 0.$$

Questa relazione generale permette d'effettuare la costruzione della tangente alla curva trasformata, conoscendo la tangente alla curva data.

Quando la curva data è un circolo di centro O, la curva trasformata è la curva *kappa*: la definizione di quest'ultima non è se non quella data da SLUSE, ma la costruzione della tangente risultante dalla relazione precedente, e che è quindi un'applicazione d'un metodo più generale, è diversa da quella di SLUSE.

2. Dopo avere indicate varie costruzioni della curva kappa e della sua tangente, il prof. GINO LORIA indica in modo speciale la seguente definizione: *La curva kappa è il luogo geometrico del punto di contatto delle tangenti che si possono condurre da un punto fisso* O *ai circoli di raggio costante che hanno centri su l'asse fisso* Ox.

Recentemente, E. N. BARISIEN ha posto, sotto il n. 4048, nell'*Intermédiaire des mathématiciens* (1912, pp. 147, 212-215 e 1913, pp. 11-14) una quistione che permette di generalizzare in un certo senso la curva di Gutschoven. Quando, dall'origine O, si conducono delle tangenti OM ai circoli, di raggio costante a ed aventi i centri su Ox, il luogo dei punti M di contatto è la curva kappa, d'equazione polare:

$$r = a \operatorname{cotang} \theta.$$

Consideriamo più generalmente l'insieme dei circoli descritti su le ordinate di una curva data (C) come diametri. Dall'origine O, si possono condurre due tangenti a questi circoli: una di esse è fissa ed è solo l'asse Ox; l'altra OM permette di definire una certa curva (Γ) come luogo dei punti di contatto M. Sia $m\,(x, y;\, r, \theta)$ il punto di (C) da cui parte l'ordinata considerata; siano ρ e ω le coordinate del punto M associato a m; le formule di corrispondenza tra i due punti m e M sono:

$$\rho = x,$$
$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = \frac{y}{2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\theta.$$

Da esse discende la relazione

$$\rho^2 d\omega = \frac{r^2 d\theta}{1 + \frac{1}{4}\operatorname{tang}^2\theta},$$

che permetterà, in molti casi, d'eseguire la quadratura della curva (Γ): è così che nel caso di una ellisse di centro O e d'equazione polare:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{b^2},$$

si ottiene l'espressione,

$$\frac{2\pi\, a^2 b}{2a + b},$$

dall'area della curva (Γ): è questa la soluzione della quistione ricordata.

Tra i casi particolari interessanti, si possono citare:

1° quello pel quale la curva (C) è una retta $x = \text{cost}$; la curva (Γ) corrispondente è evidentemente un circolo $\rho = \text{cost.}$ di centro O;

2° quello pel quale (C) è una retta $y = \text{cost}$: (Γ) è allora una strofoide retta;

3° quello in cui (C) è la parabola

$$y = x^2,$$

che porta pure ad una strofoide retta.

Uno dei casi che sono certamente più interessanti è quello pel quale la quadratura da farsi per ottenere l'area della curva (Γ) si presenta sotto la forma:

$$\int \rho^2 d\omega = 4a^2\theta;$$

bisogna che la curva (C) sia la curva circolare di quarto grado:

$$r^2 = a^2(4 + \operatorname{tang}^2\theta);$$

essa può facilmente costruirsi punto per punto partendo dalla curva kappa.

Questa curva che generalizza, a causa della forma della sua stessa equazione, la curva kappa porta ad una curva (Γ) d'equazione:

$$\rho^2 = \frac{8a^2}{5 - 3\cos\omega};$$

è questa una quartica circolare che può venir dedotta da un'ellisse di fuoco O con una trasformazione semplice operante sul raggio vettore; questa trasformazione è definita dalle relazioni:

$$\rho_1 = \rho^2, \qquad \omega_1 = \omega;$$

e resulta tosto la formula:

$$\operatorname{tang} V = 2 \operatorname{tang} V_1 ;$$

ueste varie formule permettono di costruire la curva (Γ) punto per unto e tangente per tangente.

La stessa trasformazione del BARISIEN applicata alla *quadratrice Dinostrato*, definita dall'equazione

$$x = \theta,$$

nduce, a causa delle relazioni

$$\rho = x, \qquad \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tang} \theta,$$

una curva trascendente d'equazione polare:

$$2 \operatorname{tang} \frac{\omega}{2} = \operatorname{tang} \rho ;$$

forma di quest'equazione l'avvicina alle curve di SPURGE citate dal f. GINO LORIA (*Spezielle ebene Kurven,* II, p. 221).

3. Ho incontrato un fascio di quartiche che generalizzano la curva ppa nello studio della quistione seguente. Suppongo che un'ellisse, semiassi a, b variabili, si deformi in un piano restando fisso un tice dell'asse minore; pongo inoltre la condizione che sia fisso he il circolo osculatore in questo vertice fisso B.

Prendo B per origine, e la tangente fissa per asse delle x. Pongo ale all'unità il raggio del circolo osculatore in B. In tali condi-i, i vertici dell'asse maggiore hanno per coordinate $(\pm a, b)$ ed ro luogo è la stessa parabola:

$$x^2 = y.$$

ogo dei fuochi è il circolo descritto sul raggio che passa per B, circolo osculatore dato, preso per diametro:

$$x^2 + y^2 = y ;$$

mpre il circolo osculatore della parabola precedente nel suo ice B.

uanto alla figura attuale, possiamo proporci varie quistioni; re per esempio l'inviluppo della retta che unisce il vertice B' sse minore con uno de' vertici dell'asse maggiore (parabola)..., ogo de' centri di curvatura corrispondenti ai vertici dell'asse giore (folium parabolico retto)... ecc.... Fra tali quistioni, la nte specialmente ha attirata la mia attenzione.

Qual'è il luogo dei punti dell'ellisse variabile in cui il raggio di curvatura dell'ellisse stessa prende un valore costante?

Se si introduce l'anomalia eccentrica di un punto dell'ellisse, cioè se si rappresenta questa ellisse colle equazioni

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b + b\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

si ha l'espressione seguente del raggio di curvatura:

$$\rho^2 = \frac{(a^2\,\mathrm{sen}^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^3}{a^2b^2};$$

poniamo $\rho = \mathrm{K}^3$ e teniamo conto della relazione $a^2 = b$; ne viene quindi:

$$\mathrm{sen}^2\varphi + a^2\cos^2\varphi = \mathrm{K}^2.$$

Un punto del luogo è dunque definito dalle equazioni

$$x = \sqrt{\mathrm{K}^2 - \mathrm{sen}^2\varphi},$$
$$y = \frac{\mathrm{K}^2 - \mathrm{sen}^2\varphi}{1 - \mathrm{sen}\,\varphi};$$

queste possono venir facilmente trasformate nelle seguenti

$$\begin{cases} x = \mathrm{K}\cos\omega, \\ y = \dfrac{\mathrm{K}^2\cos^2\omega}{1 - \mathrm{K}\,\mathrm{sen}\,\omega}, \end{cases}$$

le quali permetterebbero di dimostrare che la curva è unicursale.

L'eliminazione di ω, porta all'equazione cartesiana

$$x^2(x^2 + y^2) - 2yx^2 - \delta^2y^2 = 0,$$

essendo δ una costante dipendente solo da ρ.

Si può altresì costruire facilmente questa stessa equazione partendo dalla relazione nota

$$\rho^2 = \frac{(a^2 + b^2 - r^2)^3}{a^2b^2},$$

la quale esprime il raggio di curvatura dell'ellisse in funzione del raggio vettore centrale.

Si ottiene dunque un fascio di quartiche dipendenti da δ, cioè da ρ. Tali curve rientrano nella categoria studiata dal prof. Gino Loria sotto il nome di " *Rationale Kurven vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten* „ (I, p. 196).

La forma di una delle precedenti quartiche è assai analoga a quella di una curva kappa: un asse di simmetria Oy, un punto di contatto della curva con se stessa, due asintoti paralleli ad Oy. La curva si compone pure di due rami che si toccano; uno di questi è di natura uguale ai rami della curva kappa; ma l'altro esce dall'intervallo compreso tra gli asintoti ed ha due inflessioni.

Ogni quartica di questi fasci è suscettibile di generazione analoga a quella della curva *kappa*, già sopra indicata. Basta applicare la trasformazione mediante la squadra rettangolare definita dalle equazioni

$$X = x, \qquad Y = -\frac{x^2}{y},$$

al circolo d'equazione:

$$X^2 + Y^2 + 2Y - c^2 = 0.$$

Queste quartiche e la curva kappa provengono dunque dai circoli aventi i centri sull'asse x, d'equazione generale:

$$X^2 + Y^2 + 2mY + C = 0;$$

la trasformazione genera per $m = 0$ la curva kappa; per $m = 1$ si hanno le precedenti quartiche.

Aggiungerò che il circolo $m = 3$, $C = 1$ porta per la stessa trasformazione alla curva

$$x^2(x^2 + y^2) - 6x^2y + y^2 = 0,$$

studiata e rappresentata negli *Esercizi di Calcolo infinitesimale* di F. Frenet (p. 157). Ma a causa del cambiamento di segno del termine di secondo grado, detta curva è chiusa.

4. Tra le quartiche unicursali del precedente fascio, se ne trova una che si presenta quale luogo geometrico in una nuova quistione, relativa ai poligoni regolari.

Sia una linea poligonale regolare di centro O; siano A, B, C, D... vari vertici consecutivi. Allorchè si prolungano i lati successivi AB, BC, CD,... di uguali lunghezze ed in senso definito, si hanno i vertici A' sopra AB, B' sopra BC, C' sopra CD,... di una nuova linea poligonale regolare A'B'C'D'.

Sia θ il semi-angolo al centro della linea poligonale regolare, sia x la lunghezza comune di BA', CB', DC'... Il raggio del circolo circoscritto ad ABCD... è R. Affinchè la linea A'B'C'D'... venga circoscritta al circolo in cui ABCD è inscritto, bisogna che x soddisfi alla condizione:

$$x^2 + 2R \operatorname{sen}\theta \,.\, x - R^2 \operatorname{tang}^2\theta = 0.$$

Quest'equazione di secondo grado ammette due soluzioni in x rappresentanti la linea A'B'C'D' desiderata e l'identica linea avuta prolungando BA, CB, DC,....

In tali condizioni, suppongo che il vertice B ed il circolo circoscritto alla linea poligonale ABCD... siano fissi. Gli altri vertici A, C, D... sono variabili su questo circolo, dovendo la linea rimaner regolare. Ad ogni linea ABCD... unisco la linea A'B'C'D'... che ne deriva e che è circoscritta al circolo fisso. Il luogo del punto A' è una certa curva, la cui equazione polare è evidentemente

$$r^2 + 2R \operatorname{sen} \theta \,.\, r - R^2 \operatorname{tang}^2 \theta = 0,$$

prendendo per polo B e per asse polare la tangente al circolo.

Prendendo dunque B per punto d'origine, la tangente al circolo per asse Bx ed il raggio BO per asse By, l'equazione cartesiana di questo stesso luogo del punto A' è:

$$x^2(x^2 + y^2) + 2Rx^2y - R^2y^2 = 0;$$

questa quartica è quindi omotetica a quella delle curve del fascio già esaminato, il cui parametro δ è uguale all'unità.

Poitiers, 18 febbraio 1913.

EMILIO TURRIÈRE.

SU UNA TERZA CURVATURA DELLE LINEE DI UNA SUPERFICIE

In una mia nota [1] ho considerato, per le linee gobbe, una terza curvatura, limite del rapporto fra l'angolo delle normali principali in due punti e l'arco compreso quando uno dei due punti tende all'altro. L'espressione di questa curvatura $\frac{1}{S}$ per mezzo della flessione $\frac{1}{R}$ e della torsione $\frac{1}{T}$ è:

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}}. \tag{1}$$

Ora, considerando le curve di una superficie, passanti per un punto, chiameremo *terza curvatura geodetica* in un punto della linea, la terza curvatura della geodetica, che tocca la linea in quel punto. Siccome la flessione di questa geodetica è la curvatura normale della linea in quel punto, possiamo dire, in base alla formola che precede, che per ottenere la terza curvatura geodetica di una linea della su-

[1] " Sulla curvatura delle linee gobbe ", *Periodico di Matematica*. Livorno, Anno XXVIII, fasc. II, 1° novembre 1912.

perficie in un punto basta *comporre* la curvatura normale e la torsione geodetica della linea in quel punto. È notissimo (1) che queste curvature son date dalle formole:

$$\frac{1}{R} = -\frac{\varphi}{f}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{-I}{f \cdot \sqrt{EG - F^2}}$$

dove f, φ, I dinotano rispettivamente la prima forma fondamentale, la seconda ed il jacobiano fra queste. Ne segue subito la formola:

$$\frac{1}{S} = \frac{\sqrt{\varphi^2 (EG - F^2) + I^2}}{f \sqrt{EG - F^2}}$$

per il calcolo della terza curvatura geodetica. Io l'applicherò alle linee caratteristiche (2) e mi propongo di dimostrare che la terza curvatura geodetica in un punto di una linea caratteristica è uguale alla radice quadrata della curvatura totale in quel punto, risultato che credo non noto.

Pigliando, per semplicità, per sistema coordinato u, v quello delle linee di curvatura, si ha, come equazione delle linee caratteristiche:

$$D du^2 - D'' dv^2 = 0, \qquad \text{donde} \qquad \frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{D}{D''}};$$

allora:

$$\frac{1}{R} = -\frac{D du^2 + D'' dv^2}{E du^2 + G dv^2} = \frac{2DD''}{GD + ED''},$$

$$\frac{1}{T} = \frac{(GD - ED'')\, du\, dv}{\sqrt{EG}\,(E du^2 + G dv^2)} = \frac{(GD - ED'')\sqrt{DD''}}{(GD + ED'')\sqrt{EG}}.$$

Ne segue:

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\frac{4EGD^2D''^2 + DD''(GD - ED'')^2}{EG(GD + ED'')^2}} = \sqrt{\frac{DD''}{EG}} = \sqrt{K}$$

indicando K la curvatura totale. La proposizione è così dimostrata. Io dico inoltre che la proprietà dimostrata caratterizza le linee in discorso. Invero, se in ogni punto P di una linea la terza curvatura geodetica pareggia la radice quadrata della curvatura totale della superficie, preso come sistema u, v quello delle linee di curvatura passanti per P, si avrà in questo punto:

$$\frac{(D du^2 + D'' dv^2)^2}{(E du^2 + G dv^2)^2} + \frac{(GD - ED'')^2 du^2 dv^2}{EG(E du^2 + G dv^2)^2} = \frac{DD''}{EG}$$

(1) Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, 2a edizione, pag. 130 e pag. 199.

(2) Queste linee sono state considerate da Pucci [*Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, vol. V, 1° semestre, pagg. 501-507]. Per ogni punto ellittico della superficie passano sempre due linee caratteristiche; le loro direzioni sono ad un tempo coniugate ed isocline sulle linee di curvatura.

e questa può scriversi:

$$\mathrm{GD}''(\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})\left(\frac{dv}{du}\right)^4+(\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\mathrm{ED}(\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})=0.$$

Siccome è da escludere il caso $\mathrm{ED}''-\mathrm{GD}=0$ altrimenti, essendo ancora $\mathrm{F}=\mathrm{D}'=0$, la superficie sarebbe sferica o piana, (1) resta l'equazione:

$$\mathrm{GD}''\left(\frac{dv}{du}\right)^4+(\mathrm{ED}''-\mathrm{GD})\left(\frac{dv}{du}\right)^2-\mathrm{ED}=0,$$

dalla quale:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2=\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}''} \qquad \text{oppure} \qquad \left(\frac{dv}{du}\right)^2=-\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}};$$

quest'ultima è però da rigettarsi essendo E, G positivi; l'altra soluzione ci dà le direzioni delle due linee caratteristiche passanti per P.

È qui il caso di far notare l'analogia fra la proposizione ora dimostrata ed il teorema di Enneper relativo alla torsione delle assintotiche. Per queste linee (come per tutte quelle che hanno le normali principali egualmente inclinate sulle normali alla superficie) la torsione assoluta non differisce dalla torsione geodetica; inoltre la flessione è nulla, dunque il teorema di Enneper può anche enunciarsi così:

La terza curvatura geodetica in ogni punto di una assintotica pareggia la radice quadrata della curvatura totale cambiata di segno.

In riguardo al segno di K è da notare che nel sistema coordinato delle linee di curvatura, le equazioni delle linee assintotiche e caratteristiche essendo rispettivamente

$$\mathrm{D}du^2+\mathrm{D}''dv^2=0 \qquad \mathrm{D}du^2-\mathrm{D}''dv^2=0$$

nelle regioni a punti iperbolici (dove esistono le assintotiche) D e D″ sono di segni contrari, epperò K è negativo; invece nelle regioni a punti ellittici (dove esistono le linee caratteristiche) D e D″ sono dello stesso segno, epperò K è positivo.

Ed ora possiamo affermare che il teorema di Enneper, così enunciato, caratterizza le linee assintotiche, a meno che la superficie sia ad area minima. Invero, se in ogni punto P di una linea è:

$$\sqrt{\frac{1}{\mathrm{R}^2}+\frac{1}{\mathrm{T}^2}}=\sqrt{-\mathrm{K}}$$

preso come sistema coordinato u, v quello delle linee di curvatura passanti per P, sarà:

$$\mathrm{EG}(\mathrm{D}du^2+\mathrm{D}''dv^2)^2+(\mathrm{GD}-\mathrm{ED}'')^2\,du^2dv^2=-\mathrm{DD}''(\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2)^2$$

---

(1) BIANCHI, *l. c.*, vol. I, pag. 121 (in nota).

cioè:

$$ED(GD + ED'')\,du^4 + GD''(GD + ED'')\,dv^4 + (GD + ED'')^2\,du^2dv^2 = 0.$$

e poichè è da escludere il caso $GD + ED'' = 0$ altrimenti, essendo anche $F = 0$ sarebbe nulla la curvatura media H e la superficie sarebbe minima, rimane:

$$GD''\left(\frac{dv}{du}\right)^4 + (GD + ED'')\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + ED = 0$$

che dà:

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = -\frac{D}{D''}, \qquad \text{oppure} \qquad \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = -\frac{E}{G};$$

quest'ultima però non dà valori reali per $\frac{dv}{du}$, l'altra soluzione ci dà le direzioni delle assintotiche passanti per P.

Per altra applicazione della (1) considererò i doppi sistemi di linee della superficie, isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura, da me considerati altrove [1] (linee isogone).

Pigliando come sistema coordinato (u, v) quello delle bisettrici anzidette (linee di torsione) si hanno, fra i coefficienti delle prime due forme fondamentali, le relazioni: [2]

$$F = 0, \qquad \frac{D}{E} = \frac{D''}{G} = \lambda. \tag{3}$$

Ciò premesso, siano l e l' due linee isogone, $\frac{1}{R}$ ed $\frac{1}{R'}$ le rispettive curvature normali; avremo allora:

$$\frac{1}{R} = -\frac{D + 2D'v' + D''v'^2}{E + Gv'^2}, \qquad \frac{1}{R'} = \frac{D - 2D'v' + D''v'^2}{E + Gv'^2}$$

dove si è posto, per brevità, $v' = \frac{dv}{du}$. Ne segue intanto:

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -2\,\frac{D + D''v'^2}{E + Gv'^2}$$

e, badando alle (3):

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -2\lambda.$$

Cioè: *La somma delle curvature normali di due linee isogone, per uno stesso punto della superficie è costante, epperò eguale alla somma delle curvature principali in quel punto.*

---

(1) « Linee isocline rispetto alle bisettrici delle linee di curvatura », (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXXVI, 2° sem. 1913).

(2) Ciò resulta senz'altro dall'equazione differenziale di queste linee (v. la mia nota citata) oppure dalla semplice osservazione che quelle linee sono ortogonali $(F = 0)$ ed isocline sulle linee di curvatura $(GD = ED'')$.

Inoltre, la torsione geodetica $\frac{1}{T}$ di una qualsiasi delle due linee isogone è:

$$\frac{1}{T} = \frac{D'(Gv'^2 - E)}{\sqrt{EG}\,(Gv'^2 + E)}$$

dunque la terza curvatura geodetica di l è data, per la (1) da:

$$\frac{1}{S^2} = \frac{EG(D + 2D'v' + D''v'^2)^2 + D'^2(Gv'^2 - E)^2}{EG(Gv'^2 + E)^2} =$$

$$= \lambda^2 + \frac{2EGD'^2v'^2 + 4EGD'\lambda(Gv'^2 + E)v' + D'^2(G^2v'^4 - E^2)}{EG(Gv'^2 + E)^2}.$$

Per la linea l' basterà semplicemente cambiare v' in $-v'$. Ne segue allora:

$$\frac{1}{S^2} + \frac{1}{S'^2} = 2\lambda^2 + 2D'^2\frac{2EGv'^2 + G^2v'^4 + E^2}{EG(Gv'^2 + E)^2} =$$

$$= 2\lambda^2 + \frac{2D'^2}{EG} = 2\,\frac{DD'' + D'^2}{EG}.$$

Poichè $\frac{DD'' + D'^2}{EG}$ rappresenta nel nostro sistema coordinato la curvatura di Casorati, possiamo enunciare così il risultato:

La somma dei quadrati delle terze curvature geodetiche di due linee isogone, per uno stesso punto della superficie, è costante ed eguale al doppio della curvatura di Casorati in quel punto.

R. Occhipinti.

PROBLEMI [1]

(Continuazione — Vedi fasc. III)

46. Se F, F' sono i fuochi di una ellisse, S la sua area, M un punto qualunque del piano di questa $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ i raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali condotte da M, si dimostri che:

1° qualunque sia M,

$$\frac{\overline{MF}^3 \cdot \overline{MF'}^3}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4} = \frac{\pi^2\,\overline{FF'}^6}{64\,S^2},$$

2° il luogo dei punti M tali che sia

$$\rho_1^{\frac{2}{3}} + \rho_2^{\frac{2}{3}} + \rho_3^{\frac{2}{3}} + \rho_4^{\frac{2}{3}} = \text{costante}$$

è un'iperbole.

[1] In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriteci dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni o generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

47. Se F, F' sono i fuochi e O il centro di un'ellisse, T, T' i punti di contatto delle tangenti all'ellisse condotte per un punto M, e $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sono le lunghezze delle normali all'ellisse condotte da M e S_1 l'area del quadrilatero MTOT', si ha la relazione

$$\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4 = \frac{4 \cdot MF \cdot MF'}{\overline{FF'}^2} \cdot S_1^2.$$

48. Se $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ sono le lunghezze delle normali condotte da un punto M ad un'ellisse, $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \mu'_4$ quelle dei segmenti di queste normali compresi fra gli assi, $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ i raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali suddette:

1° il luogo del punto M tale che sia

$$\frac{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4}{\mu'_1 \cdot \mu'_2 \cdot \mu'_3 \cdot \mu'_4} = k$$

è un'ellisse concentrica e omotetica a quella data,

2° qualunque sia il punto M, si ha

$$\frac{\mu'_1 \cdot \mu'_2 \cdot \mu'_3 \cdot \mu'_4}{MF \cdot MF'} = \frac{c^6}{a^2 b^2},$$

3° $$\frac{\mu_1'^3 \cdot \mu_2'^3 \cdot \mu_3'^3 \cdot \mu_4'^3}{\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 \cdot \rho_4} = \frac{c^{24}}{a^8 \cdot b^8}.$$

(1°. Se l'ellisse ha per equazione $b^2x^2 + a^2y^2 = ab^2$ $(c^2 = a^2 - b^2)$ l'equazione del luogo richiesto è

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 + \frac{kc^3}{a^2b^2}.$$

Il confronto della 2ª e 3ª dà

$$\mu'_1 \mu'_2 \mu'_3 \mu'_4 \ \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4 = \overline{MF}^4 \cdot \overline{MF'}^4 \Big).$$

49. Siano ρ_1, ρ_2, ρ_3 i raggi di curvatura corrispondenti ai piedi delle normali condotte ad una parabola da un punto M. Dimostrare che, se M appartiene al circolo di raggio R avente per centro il fuoco della parabola, si ha

$$\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = \frac{R^3}{8}.$$

50. Essendo F ed O il fuoco ed il vertice di una parabola, M_1, M_2, M_3 i piedi delle normali ad essa condotte da un punto M, C_1, C_2, C_3 i corrispondenti centri di curvatura, S_2 l'area del triangolo $M_1M_2M_3$, si ha la relazione

$$\frac{M_1C_1 \cdot M_2C_2 \cdot M_3C_3}{MC_1 \cdot MC_2 \cdot MC_3} = \frac{8\,\overline{OF}^3 \cdot \overline{MF}^2}{S_2^2}.$$

51. Date due ellissi di semiassi a_1b_1 e a_2b_2 situati sulle stesse rette, il luogo dei punti di mezzo delle corde dell'una tangenti all'altra è una quartica, la cui area è $\pi\,\dfrac{a_2^2\,b_1^2 + a_1^2\,b_2^2}{2a_2\,b_2}$.

52. Se la normale in un punto M di una ellisse incontra l'asse maggiore AA' in N, e P è la proiezione di N sulla retta AM, il luogo di P è una quartica di cui l'area è

$$U = \frac{\pi b^4}{4a^2} + \frac{\pi b(a-b)(a+2b)}{a+b}.$$

53. Sia I il punto di mezzo di una corda MN di un'ellisse normale in M; P, Q, R i piedi delle altre tre normali condotte da I, O il centro della ellisse.

1°. Il baricentro del triangolo PQR è situato sulla retta simmetrica di OM rispetto agli assi.

2° Quando M percorre l'ellisse, il luogo del baricentro di PQR è una sestica, di cui l'area è $\pi \frac{ab(a^4+b^4)}{(a^2+b^2)^2}$.

3°. Il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo PQR è una sestica la cui area è $\frac{3\pi abc^4}{8(a^2+b^2)^2}$.

4°. Il luogo dell'ortocentro e quello del centro del circolo dei nove punti del triangolo PQR sono delle sestiche di cui si può calcolare l'area.

54. Sia C il centro di curvatura di una ellisse corrispondente ad un punto M di quella, P e Q i piedi delle altre normali condotte da C.

1°. Il luogo del punto medio di PQ è una sestica di cui l'area è la metà di quella dell'ellisse.

2°. Il luogo del baricentro del triangolo MPQ è una sestica di cui l'area è $\frac{1}{18}$ di quella dell'ellisse.

3°. Il luogo del centro del circolo circoscritto al triangolo MPQ è una sestica di cui l'area è $\frac{1}{12}$ dell'area della evoluta dell'ellisse.

4°. Il luogo dell'ortocentro e del centro del circolo dei nove punti del triangolo MPQ sono sestiche unicursali di cui si possono determinare le aree.

55. La normale in un punto M di un'ellisse di centro O incontra gli assi della medesima in N ed N'. Le proiezioni di N, N' sulla retta OM sono P e P'. Le perpendicolari ad NN' nei punti N, N' incontrano la OM in Q e Q'. I luoghi seguenti sono delle sestiche di cui le aree sono quelle a fianco indicate.

1°. Luogo di P

$$\frac{\pi bc^4(2a+b)}{2a^2(a+b)^2}.$$

2°. Luogo di P'

$$\frac{\pi ac^4(2b+a)}{2b^2(a+b)^2}.$$

3°. Luogo di Q

$$\frac{3\pi b^5c^4}{8a^7}.$$

4°. Luogo di Q'

$$\frac{3\pi a^5 c^4}{8b^7}.$$

5°. Luogo del punto medio di PP'

$$\frac{\pi(a-b)^2}{2a^2b^2}[(a+b)^2(a^2+b^2)-4a^2b^2].$$

6°. Luogo del punto medio di QQ'

$$\frac{\pi c^4}{32a^3b^3}(3a^4+3b^4-2a^2b^2).$$

7°. Inviluppo di PN

$$\frac{\pi c^4}{8ab}.$$

8°. Inviluppo di P'N'

$$\frac{\pi c^4}{8ab}.$$

9°. Inviluppo di QN

$$\frac{\pi b c^4}{8a^3}.$$

10°. Inviluppo di Q'N'

$$\frac{\pi a c^4}{8b^3}.$$

(Continua). E.-N. BARISIEN.

INVITO

ad unificare — per accordi internazionali — le notazioni e la terminologia nelle teorie del potenziale e dell'elasticità

È manifesta l'opportunità di provocare un'intesa degli studiosi d'ogni paese sui termini e sulle notazioni da usare in una qualsiasi scienza pura o applicata all'industria.

Nel campo delle matematiche e della fisica teorica le teorie del potenziale e della elasticità sono indubbiamente quelle che meglio si presterebbero fin d'ora all'accennata intesa, purchè il tentativo si faccia secondo un piano appropriato e con vedute abbastanza larghe.

A. — Limiti entro cui l'unificazione dei termini e delle notazioni dovrebbe per il momento rimanere circoscritta.

1. Non potendosi adottare proprio la stessa parola per designare una stessa nozione nelle diverse lingue, converrebbe fissare i termini in modo da rendere le traduzioni quanto più facili si può.

2. L'unificazione della terminologia e delle notazioni abbraccerebbe — nel progetto in parola — soltanto la teoria del potenziale e quella dei mezzi elastici isotropi in riposo. Dovrebbe poi essere presa in considerazione, salvo a discuterne in seguito, l'estensione delle convenzioni alla teoria generale delle equazioni di tipo ellittico.

Saranno naturalmente da adottarsi i termini e le notazioni che più si avvicinano a quelli maggiormente in uso.

B. — Piano esecutivo.

Il comitato organizzatore si rivolge, con questa prima circolare, agli astronomi, matematici e fisici, pregandoli di rispondere al quesito seguente:

Quali sono le nozioni e le notazioni che è desiderabile unificare?

Le risposte, pervenute entro l'anno corrente, saranno classificate il più presto possibile. Durante il 1914, una seconda circolare inviterà a far proposte sui termini e sulle notazioni da adottare.

Non essendo presumibile un completo accordo di tali proposte, il comitato si riserva di far conoscere per mezzo di una terza circolare (primavera 1916) i punti che avranno dato luogo a divergenze d'opinioni, e di provocare una discussione su questi punti al prossimo congresso internazionale dei matematici (1916). Una quarta circolare (1917) darà conto di questa discussione, invitando in pari tempo i colleghi, che non avranno potuto intervenire al congresso, a far conoscere il loro pensiero.

Dopo aver studiate e vagliate proposte e discussioni, il comitato organizzatore, indicherà, con una quinta circolare (1919) i punti su cui l'intesa si presenti probabile, e indirà una votazione su quelli per cui persistessero inconciliabili divergenze.

La votazione seguirà nel 1920, al congresso internazionale dei matematici, che si terrà in tale anno.

Potranno votare per iscritto anche i cultori, interessati comunque all'iniziativa, che non assisteranno al congresso.

Il comitato organizzatore comunicherà, con una sesta circolare (1921), l'esito della votazione, e avrà cura di pubblicare poco dopo le convenzioni internazionali così acquisite.

Si prega di mandare tutte le lettere (in lingua francese, inglese, italiana o tedesca) all'indirizzo seguente

Herrn Arthur Korn, *Charlottenburg*, Schlüterstrasse 25.

Il comitato organizzatore
per l'unificazione delle notazioni e della terminologia
nelle teorie del potenziale e dell'elasticità

Max Abraham (Milano), Alfred Ackermann-Teubner (Leipzig), Robert D'Adhémar (Lille), Paul Appell (Paris), Serge Bernstein (Charkow), Kristian Birkeland (Kristiania), Wilhelm Bjerknes (Leipzig), Marcel Brillouin (Paris), Orest Chwolson (Petersburg), Eugène Cosserat (Toulouse), François Cosserat (Paris), Gaston Darboux (Paris), Paul Ehrenfest (Leiden), Henri Fehr (Genève), Leopold Fejér (Budapest), Richard Gans (La Plata), Heinrich Graf (Bern), Sir George Greenhill (London), Jacques Hadamard (Paris), Wilhelm Hallwachs (Dresden), Fritz Hasenöhrl (Wien), Tsuruichi Hayashi (Sendai), Pierre de Heen (Liège), David Hilbert (Göttingen), Gustav Jäger (Wien), Eugen Jahnke (Berlin), Paul Köbe (Leipzig), Walter König (Giessen), Arthur Korn (Charlottenburg), Horace Lampe (Manchester), Emil Lampe (Berlin), Sir Joseph Larmor (Cambridge), Otto Lehmann (Karlsruhe), Eugenio Elia Levi (Genova), Tullio Levi-Civita (Padova), Leon Lichtenstein (Berlin), Augustus Edward Hough Love (Oxford), Roberto Marcolongo (Napoli), Max Mason (Madison, Wis.), Friedrich Wilhelm Franz Meyer (Königsberg), Albert Abraham Michelson (Chicago), Gösta Mittag-Leffler (Stockholm), Ernst Richard Neumann (Marburg), Niels Nielsen (Kobenhavn), Wilhelm Oseen (Upsala), Michel Petrovitch (Belgrad), Émile Picard (Paris), Friedrich Pockels (Heidelberg), Demètre Pompeiu (Bukaresti), Georgios Remundos (Atene), Karl Schwarzschild (Potsdam), Carlo Somigliana (Torino), Wladimir Stekloff (Petersburg), Orazio Tedone (Genova), Francisco Gomes Teixeira (Porto), Esteban Terradas (Barcellona), Vito Volterra (Roma), Albert Wangerin (Halle), Otto Wiener (Leipzig), Stanislas Zaremba (Kraków).

AVVISO DI CONCORSO A PREMIO PER LE MATEMATICHE

La Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna, a richiesta del Sig. Cav. Dott. Adolfo Merlani, mette a concorso il seguente tema:

" Esporre, con metodo storico-critico, lo sviluppo organico della teoria delle " funzioni ellittiche ed i vari punti di vista sotto ai quali questa teoria è stata " considerata dalla fine del secolo XVIII fino ai nostri giorni. Indicare l'influenza " che hanno avuto, su altri rami dell'analisi, le vedute presentatesi successiva" mente nella nominata teoria ". (1)

A chi presenterà, per giudizio dell'Accademia, il miglior lavoro, il Cav. Dott. Adolfo Merlani corrisponderà la somma di L. 500, quale contributo alle spese per il compimento del lavoro stesso.

Il concorso si chiude il 31 Dicembre 1914.

Condizioni di concorso.

a) Non può concorrere al premio chi, a qualsiasi titolo, faccia parte dell'Accademia delle Scienze suddetta.

b) I lavori presentati al concorso devono essere scritti leggibilmente in lingua italiana, e devono essere inediti.

c) Possono prendere parte al concorso an[illegible] stranieri.

d) Il lavoro presentato sarà anonimo. Su[illegible] stesso dovrà essere segnato un motto, che sarà riprodotto su una bust[illegible] contenente il nome del concorrente. Le buste relative ai lavori no[illegible] ranno bruciate senza essere state aperte.

e) Il premio è indivisibile.

f) I manoscritti, premiati o no, ri[illegible] prietà dell'Accademia.

(1) Questo medesimo tema fu posto a co[illegible] condizioni e con scadenza al 31 Dicembre 1912. Non essendosi presentato [illegible] la Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia di Bologna ha deliberato [illegible]

g) I lavori che aspirano al premio devono essere indirizzati al Segretario della Classe di Scienze Fisiche della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Via Zamboni, 33. Non si terrà conto dei lavori pervenuti all'Accademia dopo la mezzanotte del 31 Dicembre 1914.

Bologna, 16 Febbraio 1913.

Il Presidente
PIETRO ALBERTONI

Il Segretario
ERCOLE GIACOMINI.

BIBLIOGRAFIA

F. PALATINI. — *Aritmetica ed algebra*, ad uso delle scuole medie superiori. — 2ª edizione, edit. Petrini-Gallizio, Torino. — L. 4.

Il sollecito bisogno di una 2ª edizione di questo libro, comparso da tre anni soltanto, mostra quanto i suoi pregi siano stati riconosciuti dagli insegnanti italiani. Non si tratta però di una semplice ristampa; l'A. ha invece voluto fare moltissime modificazioni al suo lavoro, notevolmente migliorandolo. Sempre più intima, ad es., è stata resa la fusione fra la teorica dei numeri e quella delle grandezze; ricorrendo sempre al significato operativo per ciascuna classe di numeri e per le operazioni con essi, si ottiene un'assai maggiore semplicità ed uniformità di trattazione e si ha inoltre il vantaggio di poter coordinare molto meglio lo studio dell'aritmetica con quello della geometria.

In questa 2ª edizione il libro è diviso in 2 parti, corrispondenti ai programmi del 1° e del 2° corso d'istituto tecnico: la 1ª parte tratta la teoria dei numeri razionali, terminando cogli elementi di calcolo letterale razionale e colla risoluzione delle equazioni e dei sistemi di primo grado; la 2ª parte contiene la teoria dei numeri reali con un cenno su quella dei numeri complessi e si occupa inoltre dei limiti, delle proporzioni, della proporzionalità diretta ed inversa, delle progressioni, delle equazioni di grado superiore al primo, con un cenno sulle equazioni irrazionali. Essendo talvolta opportuno, per condizioni speciali della scolaresca, di ridurre lo svolgimento dei primi capitoli d'aritmetica, c'è poi un'appendice col riassunto della teoria delle frazioni assolute e dei numeri razionali segnati; la riduzione della teoria dei numeri naturali può ovviamente esser fatta, con opportuni tagli, dall'insegnante stesso, come giustamente osserva l'A. Il libro termina con una bella raccolta di 1450 fra esercizi e problemi.

In questa 2ª edizione la materia è meglio ordinata che non lo fosse nella 1ª e notevoli sono le semplificazioni fatte, ad es. nella teoria della divisibilità;.... qualche altra però sarebbe desiderabile, ad es. nel capitolo sui sistemi di equazioni lineari, nel quale riterrei opportuno occuparsi, e più ampiamente, di essi soltanto, riservando alla 2ª parte i teoremi generali sulla risoluzione dei sistemi. Molto opportunamente furono aggiunte le nozioni necessarie per l'uso delle tavole logaritmiche e fu tolta l'appendice che si occupava del modo col quale si possono dedurre i logaritmi dalle progressioni; furono inoltre ommessi lo sviluppo della potenza n^{ma} di un binomio e l'analisi indeterminata di primo grado, che veramente esorbitavano i limiti che l'A. si era posti per il suo libro. Il qual libro, si badi, oltre che nell'istituto tecnico, può essere usato assai utilmente anche nel ginnasio superiore e nel liceo.

PAOLO CATTANEO.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 17 Maggio 1913.

SOPRA LE FRAZIONI DI LAMBERT

Mi propongo in questa breve memoria di determinare le principali proprietà delle *frazioni di Lambert* (dette anche *frazioni ascendenti*): non è a mia conoscenza alcun lavoro su di esse e soltanto qualche accenno ho rinvenuto nella *Encyclopédie des Sciences Mathématiques.*

I simboli che userò saranno in massima parte quelli che il Pringsheim adotta nel suo articolo sulle frazioni ascendenti nella detta Enciclopedia; per le denominazioni poi mi sono ispirato alle analogie formali che corrono fra le frazioni ascendenti e le continue. Ho diviso la trattazione in due parti: occupandomi nella prima solo delle frazioni ascendenti limitate, nella seconda delle illimitate.

Frazioni ascendenti limitate.

I. *Prime proprietà.*

1. Chiameremo *frazione ascendente limitata*, una frazione della forma seguente

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} + \dfrac{b_n}{a_n} \\ \dfrac{b_1}{a_1} + \dfrac{b_2}{a_2} + \cdot \end{array}$$

$$(a_i \neq 0, \quad i = 1, \ 2, \ldots, n),$$

dove le a_i, b_i (in numero finito) sono quantità reali affatto arbitrarie; e la rappresenteremo brevemente con uno di questi simboli:

$$\left\{ \frac{b_\nu}{a_\nu} \right\}_1^n, \qquad \left\{ \frac{b_1, b_2, \ldots, b_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n} \right\}.$$

Chiameremo poi ridotta i (*esima*) della frazione ascendente $\left\{ \frac{b_\nu}{a_\nu} \right\}_1^n$ a frazione ascendente $\left\{ \frac{b_\nu}{a_\nu} \right\}_1^i$ e la rappresenteremo con F_i; in paricolare facendo $i = n$ potremo dire che la frazione ascendente $\left\{ \frac{b_\nu}{a_\nu} \right\}_1^n$ oincide con la sua n (*esima*) ridotta, e potremo scrivere:

$$\left\{ \frac{b_\nu}{a_\nu} \right\}_1^n = F_n;$$

alla frazione $\frac{b_i}{a_i}$, che indicheremo con φ_i, daremo il nome di i (*esima*) *frazione integrante* della F_n. Se le b_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ sono uguali all'unità, diremo che la F_n è *ridotta a forma normale.*

2. Trasformando la F_i a forma di ordinaria frazione, avremo (se non compiamo alcuna riduzione di fattori comuni tra numeratore e denominatore) una frazione il cui numerarore indicheremo con N_i e il cui denominatore indicheremo con D_i, per modo che si avrà identicamente:

$$F_i = \frac{N_i}{D_i}. \tag{1}$$

Facilmente poi si trovano per la ridotta i (*esima*) le relazioni

$$\left.\begin{aligned} N_i &= N_{i-1}\, a_i + b_i & (\alpha) \\ D_i &= D_{i-1}\, a_i = a_1\, a_2 \ldots a_i & (\beta) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$F_i = F_{i-1} + \frac{b_i}{D_i} \tag{3}$$

dalle quali

$$F_n = \sum_1^n{}_i \frac{b_i}{D_i}. \tag{4}$$

La (4) permette di trasformare la F_n in una somma; viceversa data una somma $\sum_1^n{}_i\, a_i$ $(a_i \mp 0,\ i=1, 2, \ldots, n)$, si ha facilmente:

$$\sum_1^n{}_i\, a_i = \left\{\frac{1}{\dfrac{a_{i-1}}{a_i}}\right\}_1^n \tag{5}$$

avendo posto $a_0 = 1$.

La (5) permette di ridurre ogni frazione ascendente a forma normale: infatti applicando alla somma

$$\frac{1}{\dfrac{a_1}{b_1}} + \frac{1}{\dfrac{a_1}{b_1}\cdot\dfrac{a_2\, b_1}{b_2}} + \ldots + \frac{1}{\dfrac{a_1}{b_1}\cdot\dfrac{a_2\, b_1}{b_2}\cdots\dfrac{a_n\, b_{n-1}}{b_n}}$$

che coincide poi con la F_n, la formula (5) risulta l'altra

$$\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{\dfrac{b_{\nu-1}}{\varphi_\nu}}\right\}_1^n \qquad b_0 = 1 \tag{6}$$

che acquista la forma speciale

$$\left\{\frac{a_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{a_{\nu-1}}\right\}_1^n \qquad a_0 = 1 \tag{6*}$$

quando $\varphi_\nu = 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). Si osservi che nella (6*) la $\left\{\frac{1}{a_{\nu-1}}\right\}_1^n$ è indipendente da a_n.

3. Dando nella (1), (α) alla i successivamente i valori $1, 2, \ldots, n$, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{l} N_n - N_{n-1}\,a_n = b_n \\ \quad N_{n-1} - N_{n-2}\,a_{n-1} = b_{n-1} \\ \quad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad\quad\quad N_2 - N_1\,a_2 = b_2 \\ \quad\quad\quad\quad N_1 = b_1 \end{array}\right\} \tag{I}$$

da cui, poichè il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -a_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

è in ogni caso uguale ad uno, risulta

$$N_n = \begin{vmatrix} b_n & -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{n-1} & 1 & -a_{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{n-2} & 0 & 1 & -a_{n-2} & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

e quindi infine l'uguaglianza

$$F_n = \begin{vmatrix} \varphi_n & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_{n-1} & \frac{1}{a_{n-1}} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_{n-2} & 0 & \frac{1}{a_{n-2}} & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{a_1} \end{vmatrix} \tag{8}$$

che assume la forma particolare

$$F_n = \begin{vmatrix} \varphi_n & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_{n-1} & \varphi_{n-1} & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varphi_{n-2} & 0 & \varphi_{n-2} & -1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \varphi_1 \end{vmatrix} \tag{8*}$$

quando la frazione è ridotta a forma normale.

Sia r la *caratteristica* di N_n, cioè del determinante dell'uguaglianza (7); allora per k intero e positivo e $r<n$, il minore

$$\begin{vmatrix} b_{r+k} & -a_{r+k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{r+k-1} & 1 & -a_{r+k-1} & 0 & \dots & 0 \\ b_{r+k-2} & 0 & 1 & -a_{r+k-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

è zero, è zero cioè la ridotta $(r+k)$ (*esima*) della frazione.

Adunque se la caratteristica di N_n *è uguale ad* r, *le ridotte*

$$r+1, \quad r+2, \dots, n, (esime)$$

sono tutte nulle.

In quanto poi alla F_r può darsi che essa sia o no nulla: ma facendo $i=r+1$ nella (3) risulta

$$-F_r = \frac{b_{r+1}}{D_{r+1}}$$

quindi: *perchè* F_r *sia zero occorre e basta, quando la caratteristica di* N_n *è* r, *che* $b_{r+1}=0$; in questo caso poi, sempre dalla (3), si ricava $b_s=0$ per $s=r+1$, $r+2, \dots, n$; mentre invece nel caso in cui $F_r \neq 0$ è solo $b_s=0$ per $s=r+2$, $r+3, \dots, n$. In particolare, considerando il caso in cui tutte le b_k $(k=1, 2, \dots, n)$ sono diverse da zero, se $F_n=0$, certo la caratteristica di N_n è $n-1$, ed anzi il minore (9), ove si faccia $k=n-r-1$ è diverso da zero.

Da quanto precede risulta che *se una frazione ascendente, in cui le* b_k *sian diverse da zero, è zero qualsiasi ridotta (all'infuori dell'ultima) è diversa da zero; se invece la frazione ascendente è diversa da zero e tutte le* b_k *sono anch'esse diverse da zero, allora una sola ridotta, che non può esser l'ultima, può esser nulla.*

In quest'ultimo caso se poniamo in generale:

$$\rho_{i,p} = \left\{\frac{b_r}{a_r}\right\}_{i+1}^{p}$$

abbiamo, supposto $F_i=0$ $(i<n)$:

$$F_n = \frac{\rho_{i,n}}{D_i}. \tag{10}$$

4. Tra le $\rho_{i,n}$ e le N_i corrono poi alcune relazioni interessanti alle quali accenneremo. Dal sistema di uguaglianze

$$\rho_{i-1,n}\, a_i - \rho_{i,n} = b_i \qquad (i=1, 2, \dots, n) \quad \rho_{n,n}=0 \tag{II}$$

si ricava subito:

$$\sum_1^n{}_i\, \rho_{i,n} = \sum_0^{n-1}{}_i\, \rho_{i,n}\, a_{i+1} + \sum_1^n{}_i\, b_i \qquad (a_{n+1}=0)$$

e poichè dalle (I) si ottiene:

$$\sum_1^n{}_i\, N_i = \sum_0^{n-1}{}_i\, N_i\ a_{i+1} + \sum_1^n{}_i\, b_i \qquad (N_0 = 0)$$

si hanno l'uguaglianze:

$$\sum_1^n{}_i\, (N_i + \rho_{i,n})\,(1 - a_{i-1}) = F_n$$

$$\sum_1^n{}_i\, (N_i - \rho_{i,n})\,(1 - a_{i+1}) = - F_n + 2 \sum_1^n{}_i\, b_i$$

dalle quali ricaviamo la relazione:

$$\sum_1^n{}_i\, b_i = \sum_1^n{}_i\, N_i\,(1 - a_{i+1})$$

che assume la forma particolare

$$n = \sum_1^n{}_i\, N_i\,(1 - a_{i+1})$$

quando la frazione è ridotta a forma normale.

Di qui si vede subito *che date due frazioni ascendenti uguali o no, purchè di ugual numero di ridotte e poste sotto forma normale, in esse l'espressioni*

$$\sum_1^n{}_i\, N_i\,(1 - a_{i+1})$$

hanno un medesimo valore.

II. *Condizioni perchè due frazioni ascendenti siano uguali.*

5. Ritorniamo a considerare il determinante dell'uguaglianza (7): si aggiungano alla prima colonna l'ultima moltiplicata per r_1, la penultima per $r_2 \ldots$, la seconda per r_{n-1}, dove $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ sono quantità arbitrarie (anche nulle). Poichè con questa trasformazione non s'altera il valore di N_n, *segue che ai numeratori* $b_1, b_2, \ldots, b_n$, *possiamo sostituire le quantità qui scritte senza che la* F_n *cambi valore*:

$$\begin{array}{llllll} \text{a} & b_1 & \text{si può sostituire} & & & b_1 + r_1 \\ " & b_2 & " & " & " & b_2 - r_1 a_2 + r_2 \\ \ldots & & & & & \ldots \\ " & b_i & " & " & " & b_i - r_{i-1}\, a_i + r_i \\ \ldots & & & & & \ldots \\ " & b_n & " & " & " & b_n - r_{n-1}\, a_n\,. \end{array} \qquad \text{(III)}$$

È bene osservare che non si può mediante le (III) cambiare un numeratore delle frazioni integranti delle F_n senza dover cambiare opportunamente il successivo o il precedente.

Questo tipo di trasformazione di una frazione ascendente in un'altra diversa per forma dalla prima, ma uguale in valore è assai differente da quello che abbiamo già visto e dato colla formula (6).

Là, considerando le successive ridotte della $\left\{\frac{1}{\frac{b_{\nu-1}}{\varphi_\nu}}\right\}_1^n$, esse sono successivamente ed ordinatamente uguali alle successive ridotte della $\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n$; nella trasformazione data in questo paragrafo, le successive ridotte della nuova frazione trasformata non tutte certo possono (a meno che tutte le $r_i = 0$) essere successivamente ed ordinatamente uguali a quella della frazione primitiva. Vedremo in seguito altri casi di trasformazione che appartengono o al primo o al secondo tipo. Osserveremo per il momento che, chiamando *equivalenti* due frazioni uguali tali che l'una si possa considerare ottenuta con una trasformazione del primo tipo dall'altra, *data una frazione ascendente, ne esiste una ed una sola ridotta a forma normale ad essa equivalente*. Questo è evidente e la formula di trasformazione è precisamente la (6).

In modo analogo potremo dire che la frazione $\left\{\frac{1}{\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}}\right\}_1^n$ è oltre che uguale alla somma $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma_\nu}}\, a_\nu$ *equivalente* ad essa, nel senso che la F_i della $\left\{\frac{1}{\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}}\right\}_1^n$ è uguale a $\overset{i}{\underset{1}{\Sigma_\nu}}\, a_\nu$, e questo per $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Ma il fatto che alla b_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ possiamo, in generale, sostituire $b_i - r_{i-1}\, a_i + r_i$ senza che il valore della F_n s'alteri, ci conduce e permette di studiare le condizioni per le quali dato un sistema di valori β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, risulti $\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{\beta_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n$ nel caso in cui β_i sia funzione razionale intera di una variabile x.

Dalle (III) infatti ricaviamo subito il seguente sistema d'equazioni nell'incognite $r_1, r_2, \ldots$

$$\left.\begin{array}{lr} r_1 & = \beta_1 - b_1 \\ -r_1 a_2 + r_2 & = \beta_2 - b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & r_{n-1}\, a_n = \beta_n - b_n \end{array}\right\} \qquad \text{(IV)}$$

e quindi condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (IV) ammetta soluzioni è che il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_1 - b_1 \\ -a_2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & \beta_2 - b_2 \\ 0 & -a_3 & 1 & 0 & \ldots & \beta_3 - b_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_n - b_n \end{vmatrix}$$

sia zero; condizione che, in virtù della (7), si riduce all'altra espressa dall'eguaglianza:

$$\left\{\frac{\beta_i - b_i}{a_i}\right\}_1^n = 0. \tag{11}$$

Supposto

$$\beta_i = f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ricaviamo dalla (11)

$$\left\{\frac{f_i(x) - b_i}{a_i}\right\}_1^n = 0. \tag{12}$$

Sia p il grado massimo con cui la x compare nella

$$f_i(x) = \sum_0^p{}_r\, \lambda_{i,r}\, x^{p-r}$$

e posto

$$\overline{f}_i(x) = \lambda_{i,0}\, x^p + \lambda_{i,1}\, x^{p-1} + \ldots + \lambda_{i,p-1}\, x + \lambda_{i,p} - b_i$$

e ancora

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lambda}_{i,k} &= \frac{\lambda_{i,k}}{a_1 a_2 \ldots a_i} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p-1) \\ \overline{\lambda}_{i,p} &= \frac{\lambda_{i,p} - b_i}{a_1 a_2 \ldots a_i} \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ricaviamo dalla (12) l'equazione in x

$$x^p \sum_1^n{}_i\, \overline{\lambda}_{i,0} + x^{p-1} \sum_1^n{}_i\, \overline{\lambda}_{i,1} + \ldots + \sum_1^n{}_i\, \overline{\lambda}_{i,p} = 0 \tag{13}$$

che possiamo ancora scrivere

$$x^p \left\{\frac{\lambda_{i,0}}{a_i}\right\}_1^n + x^{p-1}\left\{\frac{\lambda_{i,1}}{a_i}\right\}_1^n + \ldots + \left\{\frac{\lambda_{i,p} - b_i}{a_i}\right\}_1^n = 0.$$

Risoluta questa equazione determineremo i valori di x perchè sia soddisfatta la (12). Può darsi però il caso in cui la (13) sia un' identità; dovremo avere allora:

$$\sum_1^n{}_i\, \overline{\lambda}_{i,k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, p)$$

da cui ricaviamo

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_{1,0}(a_2 a_3 \ldots a_n) + \lambda_{2,0}(a_3 \ldots a_n) + \ldots + \lambda_{n,0} = 0 \\ \lambda_{1,1}(a_2 a_3 \ldots a_n) + \lambda_{2,1}(a_3 \ldots a_n) + \ldots + \lambda_{n,1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda_{1,p} - b_1)(a_2 a_3 \ldots a_n) + (\lambda_{2,p} - b_2)(a_3 \ldots a_n) + \ldots + (\lambda_{n,p} - b_n) = 0 \end{array}\right\} \text{(V)}$$

Quindi *condizione necessaria e sufficiente affinchè la* (12) *sia identicamente soddisfatta per qualunque valore di* **x**, *è che il sistema di* *equazioni*

$$\left.\begin{aligned}&\sum_1^n{}_i\,\lambda_{i,k}\,x_i=0 \qquad (k=0,1,\ldots,p-1),\\&\sum_1^n{}_i\,(\lambda_{i,p}-b_i)\,x_i=0\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

ammetta la soluzione

$$x_i=a_{i+1}\,a_{i+2}\ldots a_n\,a_{n+1} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

dove a_{n+1} *è un'arbitraria qualsiasi diversa da zero.*

Il risultato ottenuto si può anche enunciare dicendo che *condizione necessaria e sufficiente perchè la* (12) *sia identicamente soddisfatta è che le frazioni ascendenti:*

$$\left\{\frac{\lambda_{i,0}}{a_i}\right\}_1^n,\quad \left\{\frac{\lambda_{i,1}}{a_i}\right\}_1^n,\ldots,\left\{\frac{\lambda_{i,p-1}}{a_i}\right\}_1^n$$

siano zero e che inoltre sia

$$\left\{\frac{\lambda_{i,p}}{a_i}\right\}_1^n=\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_1^n.$$

Indicando con $\chi^{(1)},\chi^{(2)},\ldots,\chi^{(n-r)}$ (r essendo la caratteristica della matrice del sistema (V)) le $n-r$ soluzioni fondamentali del sistema stesso, un'altra soluzione qualsiasi $\overline{\chi}$ si potrà porre dunque sotto la forma:

$$\overline{\chi}=\lambda^{(1)}\chi^{(1)}+\lambda^{(2)}\chi^{(2)}+\ldots+\lambda^{(n-r)}\chi^{(n-r)}$$

ed in particolare il valore di $\overline{x_i}$ sarà:

$$\overline{x_i}=\sum_1^{n-r}{}_\mu\,\lambda_i^{(\mu)}\,x_i^{(\mu)} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

e se vogliamo che

$$\overline{x_i}=a_{i+1}\,a_{i+2}\ldots a_n\,a_{n+1}$$

avremo

$$a_{i+1}\,a_{i+2}\ldots a_n\,a_{n+1}=\sum_1^{n-r}{}_\mu\,\lambda_i^{(\mu)}\,x_i^{(\mu)}$$

e pertanto condizione necessaria e sufficiente perchè per qualunque valore della x risulti

$$\left\{\frac{f_i(x)}{a_i}\right\}_1^n=\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_1^n$$

è *che si possono determinare dei moltiplicatori* $\lambda_i^{(\mu)}$ *in guisa che*

$$a_i=\frac{\sum_1^{n-r}{}_\mu\,\lambda_{i-1}^{(\mu)}\,x_{i-1}^{(\mu)}}{\sum_1^{n-r}{}_\mu\,\lambda_i^{(\mu)}\,x_i^{(\mu)}}$$

ossia *che la frazione ascendente* $\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_1^n$ *risulti equivalente alla somma*

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^{n-r}{}_\mu \lambda_i^{(\mu)} x_i^{(\mu)}. \tag{14}$$

D'altra parte se non si può soddisfare il sistema (V) con una soluzione per cui abbia luogo l'equivalenza tra la somma (14) e la $\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_1^n$ il problema è determinato per la x e di grado m essendo $p+1-m$ il primo coefficiente, contando da sinistra, diverso da zero nell'equazione. Adunque, *condizione necessaria e sufficiente perchè una frazione ascendente* $\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_1^n$ *sia uguale all'altra* $\left\{\frac{f_i(x)}{b_i}\right\}_1^n$ *qualunque sia il valore della* x *nei polinomi*

$$f_i(x) = \Sigma_r \lambda_{i,r} x^{p-r} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

è che il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \sum_1^n{}_i \lambda_{i,k} x_i = 0 & (k = 0, 1, \ldots, p-1) \\ \sum_1^n{}_i (\lambda_{i,p} - b_i) x_i = 0 & \end{cases}$$

ammetta una soluzione χ *tale che la somma* $\Sigma_i x_i$ *sia equivalente alla frazione* $\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_1^n$.

7. Al caso trattato nel precedente paragrafo, di trovare cioè le condizioni per cui dato un sistema di valori β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ risulti $\left\{\frac{b_i}{a_i}\right\}_1^n = \left\{\frac{\beta_i}{a_i}\right\}_1^n$, si riconduce l'altro analogo di determinare le condizioni per cui risulti, dato un sistema di valori α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{\alpha_i}\right\}_1^n.$$

Per questo prendiamo delle quantità arbitrarie

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

per cui si abbia

$$\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{\beta_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n;$$

i numeri β_ν dovranno soddisfare alle condizioni espresse al § 6. Applicando la (6) alla $\left\{\frac{\beta_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n$ si ha:

$$\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{a_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}}\right\}_1^n.$$

Fissiamo ora β_ν in modo che

$$a_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu} = \alpha_\nu .$$

Posto allora

$$\frac{\alpha_\nu}{a_\nu} = A_\nu$$

avremo le formule

$$\begin{aligned} 1 &= \beta_1 A_1 \\ \beta_1 &= \beta_2 A_2 \\ &\cdots\cdots \\ \beta_{n-1} &= \beta_n A_n \end{aligned}$$

ed infine

$$\beta_i = \frac{1}{A_1 A_2 \ldots A_i} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_i}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

D'altra parte data la frazione $\left\{\frac{1}{\alpha_\nu}\right\}_1^n$ esiste solo il sistema di valori dato dalla (15) per $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ in modo che si abbia equivalentemente:

$$\left\{\frac{1}{\alpha_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{\alpha_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}}\right\}_1^n .$$

Il problema è quindi ricondotto a determinare le condizioni per poter trasformare la $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^n$ nella $\left\{\frac{\beta_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n$ dove $\beta_\nu = \frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu}{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu}$; cosa questa che abbiamo già trattata.

Possiamo ora dare la *condizione necessaria e sufficiente affinchè due frazioni ascendenti* (di un medesimo numero di ridotte) (¹) *siano uguali.* Infatti, siano le frazioni

$$\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n \quad \text{e} \quad \left\{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right\}_1^n$$

ridotte a forma normale, si ha equivalentemente:

$$\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n = \left\{\frac{1}{a_\nu \frac{b_{\nu-1}}{b_\nu}}\right\}_1^n ; \qquad \left\{\frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu}\right\} = \left\{\frac{1}{\alpha_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}}\right\}_1^n .$$

Allora posto:

$$\bar{a}_\nu = a_\nu \frac{b_{\nu-1}}{b_\nu} ; \qquad \bar{\alpha}_\nu = \alpha_\nu \frac{\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}$$

(¹) Se le frazioni non fossero di ugual numero di ridotte facilmente ci si riconduce a questo caso. Vedi fine del § 8.

avremo come condizione:

$$\left\{\frac{\frac{\bar{a}_1\,\bar{a}_2\ldots\bar{a}_\nu}{\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_\nu}}{\bar{a}_\nu}\right\}_1^n=\left\{\frac{1}{\bar{\alpha}_\nu}\right\}$$

da cui ponendo

$$A_i=\frac{\alpha_i}{a_i}, \qquad B_i=\frac{\beta_i}{b_i}$$

si ha infine

$$\left\{\frac{\frac{B_\nu}{A_1\,A_2\ldots A_\nu}-1}{a_\nu\,\frac{b_{\nu-1}}{b_\nu}}\right\}_1^n=0.$$

III. *Operazioni tra frazioni ascendenti.*

8. Date due frazioni ascendenti, ci proponiamo ora di dare la maniera con cui si può determinare la frazione ascendente somma (differenza, prodotto, quoziente) delle due date, per modo che sia sotto la forma normale e che la ridotta *i* (*esima*) della frazione somma (differenza ecc.) sia la somma (la differenza ecc.) delle ridotte *i* (*esime*) $[i=1, 2, \ldots, n]$ delle frazioni date.

Siano le frazioni

$$F_n=\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n, \qquad F'_n=\left\{\frac{b'_\nu}{a'_\nu}\right\}_1^n$$

che per semplicità supporremo di ugual numero di ridotte; sia Φ_n la frazione somma (o differenza) delle F_n, F'_n; avremo allora, indicando con Φ_i la *i* (*esima*) ridotta di Φ_n

$$\Phi_i=F_i\pm F'_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Posto di chiamare α_i il denominatore dell'*i* (*esima*) frazione integrante di Φ_n sarà

$$\Phi_1=\frac{1}{\alpha_1}$$

$$\Phi_2=\Phi_1+\frac{1}{\alpha_1\,\alpha_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Phi_n=\Phi_{n-1}+\frac{1}{\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

da cui

$$\alpha_i=\frac{(F_{i-1}\pm F'_{i-1})-(F_{i-2}\pm F'_{i-2})}{(F_i+F'_i)-(F_{i-1}+F'_{i-1})}$$

avendo posto

$$\Phi_0=0, \qquad \Phi_{-1}=-1.$$

In modo completamente analogo nel caso, che si vogliano determinare le frazioni, prodotto e quoziente delle due date, si trovano rispettivamente come valori del denominatore dell'*i* (*esima*) frazione integrante l'espressioni:

$$\frac{F_{i-1} \cdot F'_{i-1} - F_{i-2} \cdot F'_{i-2}}{F_i \cdot F'_i - F_{i-1} \cdot F'_{i-1}}, \qquad \frac{\dfrac{F_{i-1}}{F'_{i-1}} - \dfrac{F_{i-2}}{F'_{i-2}}}{\dfrac{F_i}{F'_i} - \dfrac{F_{i-1}}{F'_{i-1}}}.$$

Le analogie, nei quattro casi, tra le espressioni trovate sono evidenti; nell'ipotesi in cui il numero delle ridotte d'una delle frazioni date fosse maggiore del numero delle ridotte dell'altro, basta, per ricondursi al caso trattato, aumentare di un numero uguale alla differenza tra il numero delle ridotte dell'una e quello dell'altra, il numero delle frazioni integranti di quella che ne ha un numero minore, con delle frazioni integranti (il cui numeratore sia zero e il denominatore arbitrario, purchè diverso da zero) da scriversi dopo quelle della frazione stessa.

9. Consideriamo ora dei casi speciali. Date due frazioni

$$F_n = \left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^n, \qquad F'_m = \left\{\frac{b'_\nu}{a'_\nu}\right\}_1^m \quad \text{se è} \quad \prod_1^n{}_i\, a_i = 1,$$

allora:

$$F_n + F'_m = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1\, a_2} + \ldots + \frac{b_n}{a_1\, a_2 \ldots a_n} + \frac{b'_1}{a_1\, a_2 \ldots a_n\, a'_1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{b'_n}{a_1\, a_2 \ldots a_n\; a'_1\, a'_2 \ldots a'_n} = \left\{\frac{b_1, b_2, \ldots, b_n, b'_1, b'_2, \ldots, b'_n}{a_1, a_2, \ldots, a_n, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n}\right\}.$$

Sia ora

$$\prod_1^n a_\nu = \prod_1^n a'_\nu$$

e le due frazioni siano ridotte a forma normale: allora

$$F_n = \frac{1}{\prod_1^n a_\nu} \left\{\frac{1}{\dfrac{1}{a_{n-\nu+2}}}\right\}_1^n \qquad (a_{n+1} = 1)$$

e (¹) quindi subito

$$F'_m + F_n = \left\{\frac{1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1}{a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_m,\ 1,\ \dfrac{1}{a_n},\ \dfrac{1}{a_{n-1}},\ \ldots,\ \dfrac{1}{a_2}}\right\}.$$

(¹) L'ultima formula scritta si stabilisse subito così in modo generale. Sia la frazione $\left\{\frac{1}{x_i}\right\}_1^n$ si ha:

$$\left\{\frac{1}{x_i}\right\}_1^n = \sum_1^n{}_i \frac{1}{x_1\, x_2 \ldots x_i} = \frac{1}{x_1\, x_2 \ldots x_n} \cdot (1 + x_n + x_n\, x_{n-1} + \ldots + x_n\, x_{n-1} \ldots x_2),$$

e quindi applicando alla somma $1 + x_n + x_n\, x_{n-1} + \ldots + x_n\, x_{n-1} \ldots x_2$, la (5) è:

$$\left\{\frac{1}{x_i}\right\}_1^n = \frac{1}{x_1\, x_2 \ldots x_n} \left\{\frac{1}{\dfrac{1}{x_{n-i+2}}}\right\}_1^n, \qquad x_{n+1} = 1.$$

Proprietà analoghe a quelle indicate sussistono anche nel caso in cui si parli di differenza tra le frazioni F_n, F'_m.

IV. *Sviluppo di un numero razionale in frazione ascendente limitata.*

10. Dalla formula (3) che dà il modo di formazione delle successive ridotte segue che il valore di una frazione ascendente *limitata* appartiene al campo di razionalità comune ai numeratori e ai denominatori delle frazioni integranti. In particolare se supponiamo che la frazione sia ridotta a forma normale e che i denominatori delle frazioni integranti siano interi, il valore di tutta la frazione è un numero razionale. Questo valore poi risulta minore di uno e maggiore di -1 quando detti denominatori siano differenti dall'unità. Infatti

$$|F_n| = \left|\left\{\frac{1}{a_r}\right\}_1^n\right| \leqslant \frac{1}{|a_1|} + \frac{1}{|a_1 a_2|} + \ldots + \frac{1}{|a_1 a_2 \ldots a_n|}$$

e poichè il più piccolo valore di $|a_i|$ è 2 si ricava

$$|F_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Viceversa vogliamo ora dare una maniera per svolgere un numero razionale $\left|\frac{r}{s}\right| < 1$ in frazione ascendente limitata in modo che sia ridotta a forma normale e che i successivi denominatori delle frazioni integranti siano interi.

Consideriamo il caso di s, r positivi (gli altri si riducono facilmente a questo) e consideriamo il sistema d'uguaglianze

$$\begin{array}{ll}
s = rq_1 + r_1 & |r_1| < r \\
s = r_1 q_2 + r_2 & |r_2| < |r_1| \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
s = r_{n-1} q_n & |r_{n-1}| < |r_{n-2}|.
\end{array}$$

Abbiamo allora

$$\frac{r}{s} = \frac{1 + \frac{-r_1}{s}}{q_1}$$

$$\frac{-r_1}{s} = \frac{1 + \frac{-r_2}{s}}{-q_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{-r_{n-1}}{s} = \frac{1}{-q_n}.$$

Da cui

$$\frac{r}{s} = \frac{1 + \frac{1 + \cdot^{\cdot^{\cdot} + \frac{1}{-q_n}}}{-q_2}}{q_1} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3}, \text{ ecc.}$$

Si potrebbe pensare che questo sviluppo di un numero razionale in frazione ascendente fosse unico, ma non è vero. Infatti si considerino le due espressioni

$$\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y\,z}+\ldots\right),\quad \frac{1}{x'}\left(1+\frac{1}{y'}+\frac{1}{y'z'}+\ldots\right)$$

che rappresentano gli sviluppi delle due frazioni ascendenti

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{z}}{y}}{x}\ ,\qquad \cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{z'}}{y'}}{x'}$$

e lasciamo per adesso le

$$x,\ y,\ z\ldots,\quad x',\ y',\ z'\ldots$$

indeterminate, pur supponendole intere, e poniamo

$$\left.\begin{aligned}\frac{r}{s}&=1+\frac{1}{y}+\frac{1}{y\,z}+\ldots &&(r,\ s\ \text{interi})\\ \frac{r'}{s'}&=1+\frac{1}{y'}+\frac{1}{y'z'}+\ldots &&(r',\ s'\ \text{interi})\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

facciamo allora

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{r}{s}=\frac{1}{x'}\cdot\frac{r'}{s'}$$

da cui

$$\frac{x}{x'}=\frac{r}{s}\cdot\frac{s'}{r'}\,.\qquad(17)$$

Diamo ora a $y,\ z\ldots$ valori arbitrari interi e calcolati dalla (16) $r,\ r',\ s,\ s'$ si prendano due numeri $x,\ x'$ tali che sia soddisfatta la (17); allora le due frazioni ascendenti

$$\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{z'}}{y'}}{x'}\ ,\qquad \cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cdots}{z}}{y}}{x}$$

sono uguali e i denominatori delle frazioni integranti dell'una saranno in generale diversi dai corrispondenti dell'altra.

Frazioni ascendenti illimitate.

V. *Prime proprietà.*

11. Consideriamo l'algoritmo illimitato

$$\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdot^{\cdot^{\cdot}}+\frac{b_n}{a_n}+\cdot^{\cdot^{\cdot}} \qquad a_i \neq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n,\ldots)$$

che rappresenteremo brevemente col simbolo $\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^\infty$ e che chiameremo *frazione ascendente illimitata.* In essa porremo

$$F_i=\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^i=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdot^{\cdot^{\cdot}}+\frac{b_i}{a_i}=\frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_1 a_2}+\ldots+\frac{b_i}{a_1 a_2 \ldots a_i}$$

e qualora F_i, per i che tende ad ∞, converga o diverga o rimanga indeterminata, diremo *che la frazione* $\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^\infty$ *converge, diverge, è indeterminata* e chiameremo, nel primo caso, valore della frazione il limite di F_i per $i=\infty$.

Adunque per convenzione abbiamo, posto $\lim\limits_{i=\infty} F_i=F$,

$$F=\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^\infty=\sum_1^\infty{}_\nu \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_\nu}.$$

All'espressione F_i daremo il nome di ridotta i (*esima*) della

$$\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^\infty;$$

alle $\frac{b_i}{a_i}=\varphi_i$ il nome di i (*esime*) frazioni integranti della frazione data; porremo inoltre $\rho_{i,n}=\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_{i+1}^n$.

12. Poichè F_i è una frazione limitata, per essa potrà applicarsi la formula (8) e avremo quindi:

$$F_i=\begin{vmatrix} \varphi_i & -1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ \varphi_{i-1} & \frac{1}{a_{i-1}} & -1 & 0 & \ldots 0 \\ \varphi_{i-2} & 0 & \frac{1}{a_{i-2}} & -1 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \frac{1}{a_1} \end{vmatrix} \tag{18}$$

e poichè

$$N_i = \begin{vmatrix} b_i & -a_i & 0 & \dots & 0 \\ b_{i-1} & 1 & -a_{i-1} & \dots & 0 \\ b_{i-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

applicando un procedimento analogo a quello del § 6 abbiamo *che anche in una frazione illimitata si può fare, sopra un numero finito di numeratori delle singole frazioni integranti le sostituzioni date dalle* (III) *senza che il carattere della frazione s'alteri, e se è convergente ne venga alterato il valore.* [1]

È evidente poi che considerando la serie

$$\sum_1^\infty{}_\nu \frac{b_\nu}{a_1 a_2 \dots a_\nu}$$

si può applicare il procedimento del § 2 e quindi avere, quando $b_\nu \neq 0$ $(\nu = 1, 2, \dots, n, \dots)$,

$$\left\{\frac{b_\nu}{a_\nu}\right\}_1^\infty = \left\{\frac{1}{\dfrac{b_{\nu-1}}{\varphi_\nu}}\right\}_1^\infty \tag{19}$$

formula che permette di ridurre a forma normale una frazione illimitata. Viceversa data una serie $\sum_1^\infty{}_\nu a_\nu$ applicando il procedimento del § 2 si ricava

$$\sum_1^\infty{}_\nu a_\nu = \left\{\frac{1}{\dfrac{a_{\nu-1}}{a_\nu}}\right\}_1^\infty . \qquad (a_0 = 1)$$

Qualunque sia poi il carattere della frazione ascendente si può senza che questo s'alteri (e se è convergente s'alteri il valore) sostituire a b_ν l'espressione $b_\nu + \rho_{\nu, k}$ con k arbitrariamente grande, e togliere poi le $\varphi_{\nu+1}, \varphi_{\nu+2}, \dots, \varphi_{\nu+k}$; e questo si potrà fare anche un numero infinito di volte, quando la frazione sia convergente, senza che s'alteri il valore.

Se poi $b_i = 0$ si può togliere la φ_i purchè si moltiplichi a_{i+1} per a_i: noi supporremo pertanto le $b_i \neq 0$ e precisamente per la formula (19) sempre uguali ad uno.

VI. *Convergenza.*

13. Dal teorema di Cauchy sulla convergenza delle serie, si deduce che *condizione necessaria e sufficiente perchè una frazione ascen-*

[1] Dalla (18), quando $\lim_{i=\infty} F_i = F$, si vede facilmente come si possa trasformare la F in determinante infinito.

dente illimitata $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^\infty$ *converga è che preso un numero* σ *arbitrariamente piccolo e positivo si possa determinare un indice* h *tale che qualunque sia* p (intero e positivo) *si abbia per* $m \geqq h$:

$$\left|\frac{1+\rho_{m.p}}{a_1 a_2 \dots a_m}\right| < \sigma.$$

Da qui si deduce intanto che condizione *necessaria di convergenza è la divergenza del prodotto infinito*

$$|a_1 a_2 \dots a_m \dots|$$

e perchè detto prodotto diverga ricordiamo, per il seguito, che basta che $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ siano in valore assoluto maggiore d'uno e che da esse si possa trarre una successione $a_i, a_{i+r}, a_{i+t} \dots$ di un numero infinito di termini tale che ognuno sia maggiore di un medesimo numero maggiore di uno.

Se le a_i *da un certo punto in poi si mantengono sempre positive*, le differenze $F_i - F_{i-1}$ mantengono sempre un medesimo segno, allora *perchè la frazione converga è sufficiente che* a_ν *diventi e rimanga per* ν *che cresce all'infinito maggiore di un numero maggiore di uno. Se invece le* a_i *da un certo punto in poi sono sempre negative* le dette differenze cambiano successivamente di segno e allora *condizione sufficiente di convergenza è la divergenza del prodotto infinito*

$$|a_1 a_2 \dots a_m \dots|.$$

In particolare quindi, quando da un certo punto in poi le a_i mantengono un medesimo segno perchè la frazione converga basta che

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = R > 1. \tag{20}$$

14. Sia data una frazione ascendente convergente $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^\infty$; sarà ancora convergente la frazione $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty$ qualunque sia n e se supponiamo che sia

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = R > 1$$

avremo che fissato n comunque grande si potrà determinare un numero $\varepsilon < 1$ sufficientemente piccolo e positivo per cui sia:

$$R - \varepsilon < a_\nu < R + \varepsilon$$

e sarà

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon = 0;$$

allora

$$\left|\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty\right| \leqq \frac{R-\varepsilon}{R-\varepsilon-1}$$

da cui

$$\lim_{n=\infty}\left|\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty\right| \leqq \frac{R}{R-1}$$

e se a_ν si mantiene sempre positivo da un certo punto in poi, avremo proprio

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty = \frac{R}{R-1}.$$

Infatti è

$$\frac{R+\varepsilon}{R+\varepsilon-1} < \left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty \leqq \frac{R-\varepsilon}{R-\varepsilon-1}$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty = \frac{R}{R-1}.$$

Adunque in una frazione convergente in cui le a_ν *sono da un certo punto in poi sempre positive ed è soddisfatta la* (20), *il limite, al crescere indefinito di* n, *verso cui tende* $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty$ *è determinato, finito e maggiore dell'unità, ed è precisamente* $\frac{R}{R-1}$.

15. Supponiamo ora d'alterare in una frazione ascendente illimitata e convergente l'ordine delle frazioni integranti; se l'alterazione nell'ordine è effettuata sopra un numero finito di frazioni, allora la frazione rimane convergente perchè $\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty$ è convergente qualunque sia n. Supponiamo che invece l'alterazione venga effettuata sopra un numero infinito di frazioni integranti: allora la condizione necessaria di convergenza sussiste ancora quando il prodotto infinito

$$|a_1 a_2 \dots a_n \dots|$$

si mantenga divergente dopo l'alterazione delle a_i.

In particolare se

$$\lim_{n=\infty} |a_\nu| = R > 1,$$

supposto d'aver sostituito ad $\frac{1}{a_i}$ in generale $\frac{1}{\bar{a}_i}$, la frazione $\left\{\frac{1}{\bar{a}_i}\right\}_n^\infty$ sarà ancora convergente e avremo

$$\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_n^\infty = \lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{\bar{a}_\nu}\right\}_n^\infty$$

quando le a_i si mantengano da un certo punto in poi positive.

16. Ma è facile dimostrare che in una frazione illimitata e convergente, anche nel caso in cui essa non cambi carattere per un'alterazione d'ordine sopra un numero finito o no, di a_i non può in generale mantenere il medesimo valore. Infatti supponiamo data una frazione ascendente convergente $\left\{\frac{1}{a_r}\right\}_1^\infty$, e di sostituire a a_r, $a_{r'}$, e di avere qualunque sia la sostituzione

$$\left\{\frac{1}{a_r}\right\}_1^\infty = \left\{\frac{1}{a_{r'}}\right\}_1^\infty.$$

Nella $\left\{\frac{1}{a_r}\right\}_1^\infty$ troviamo due denominatori a_r, a_{r+1} successivi e diseguali (il che sarà possibile, altrimenti non si potrebbe parlar più di vera alterazione nell'ordine delle frazioni integranti). Dovremo avere allora:

$$\sum_1^{r-1}{}_i \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_i} + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r} + \sum_{r+1}^{\infty}{}_i \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_i}$$
$$= \sum_1^{r-1}{}_i \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_i} + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_{r+1}} + \sum_{r+1}^{\infty}{}_i \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_i}$$

da cui

$$a_r = a_{r+1}$$

il che è contro il supposto.

Adunque perchè l'alterazione nell'ordine delle diverse frazioni integranti mantenga oltre il carattere anche il valore primitivo della frazione non può essere che una alterazione particolare.

17. Supponiamo ora di fare una trasposizione tra due sole frazioni integranti, non successive, di una frazione ascendente convergente. (Qualora trasponiamo due frazioni integranti successive perchè la frazione rimanga inalterata è condizione necessaria e sufficiente che queste siano uguali tra loro, come risulta dal paragrafo precedente.) Trasponiamo adunque a_i con a_{i+r} e sia $a_i \neq a_{i+r}$; avremo allora indicando con F′ il valore della frazione dopo la trasposizione

$$F = \sum_1^{i-1}{}_r \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} + \sum_i^{i+r-1}{}_r \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} + \sum_{i+r}^{\infty}{}_r \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}$$

$$F' = \sum_1^{i-1}{}_r \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r} + \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{i-1} a_{i+r}} (\rho_{i,i+r-1} + 1) + $$
$$+ \sum_{i+r}^{\infty}{}_r \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_r}$$

e se vogliamo che sia $F = F'$ *occorre e basta che sia*

$$\rho_{i,i+r-1} = -1.$$

Risultato analogo si ottiene quando si faccia comunque una sostituzione di frazioni integranti tra loro purchè non si mutino di posto due consecutive.

Supponiamo di sostituire ai denominatori *successivi* e non *consecutivi*

$$a_i\,,\ a_{i+r}\,,\ a_{i+s}\,,\ a_{i+t}\,,\ldots$$

corrispondentemente gli altri

$$a_{i+\varrho}\,,\ a_{i+\sigma}\,,\ a_{i+\tau}\,,\ldots$$

dove

$$a_{i+\varrho}\,,\ a_{i+\sigma}\,,\ a_{i+\tau}\,,\ldots$$

non sono che le a_i, a_{i+r}, a_{i+s}, ... in altro ordine. Abbiamo allora, chiamando F′ il valore della frazione dopo l'alterazione dell'ordine, e posto $D_i = a_1 a_2 \ldots a_i$

$$F = \sum_1^{i-1}{}_{\nu} \frac{1}{D_\nu} + \frac{1}{D_{i-1}\,a_i} + \ldots + \frac{1}{D_{i-1}\,a_i\,a_{i+1}\ldots a_{i+r}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{D_{i-1}\,a_i\,a_{i+1}\ldots a_{i+r}\ldots a_{i+s}} + \ldots$$

$$F' = \sum_1^{i-1}{}_{\nu} \frac{1}{D_\nu} + \frac{1}{D_{i-1}\,a_{i+\varrho}} + \ldots + \frac{1}{D_{i-1}\,a_{i+\varrho}\,a_{i+1}\ldots a_{i+r-1}\,a_{i+\sigma}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{D_{i-1}\,a_{i+\varrho}\,a_{i+1}\ldots a_{i+r-1}\,a_{i+\sigma}\,a_{i+r+1}\ldots a_{i+s-1}\,a_{i+\tau}} + \ldots \quad (21)$$

e se vogliamo che sia $F = F'$ bisogna che sia

$$\frac{1}{D_{i-1}}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+\varrho}}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+1}\ldots a_{i+r-1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{D_{i-1}}\left(\frac{1}{a_i\,a_{i+r}} - \frac{1}{a_{i+\varrho}\,a_{i+\sigma}}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{i+r+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+r+1}\ldots a_{i+s-1}}\right) +$$

$$+ \text{ecc.} \ldots = 0$$

e per questa basta che sia

$$\varrho_{i,\,i+r-1} = \varrho_{i+r,\,i+s-1} = \varrho_{i+s,\,i+t-1} = \ldots = -1.$$

Adunque se s'altera l'ordine delle frazioni integranti in una frazione ascendente convergente di guisa che ai successivi e non consecutivi denominatori

$$a_i\,,\quad a_{i+r}\,,\quad a_{i+s}\,,\quad a_{i+t}\,,\ldots$$

vengano corrispondentemente ad essere sostituiti i denominatori

$$a_{i+\varrho}\,,\quad a_{i+\sigma}\,,\ldots$$

(*dove* $a_{i+\varrho}$, $a_{i+\sigma}$, ... *non sono che le* a_i, a_{i+r}, a_{i+s}, a_{i+t}, ... *in altro ordine*) *se le frazioni*

$$\varrho_{i,\,i+r-1}\,,\qquad \varrho_{i+r,\,i+s-1}\,,\ldots$$

sono uguali a -1, *il valore della frazione non cambia.*

Ed è evidente poi, che detto valore non cambia, in quest'ipotesi, nemmeno per un'altra qualsiasi sostituzione fatta sempre sulle

$$a_i\,, \qquad a_{i+r}\,, \qquad a_{i+s}\,, \ldots$$

e che infine il valore della frazione non cambia permutando comunque le:

$$\rho_{i+r}\,, \qquad \rho_{i+r,\, i+s-1}\,, \ldots$$

18. *Viceversa se supponiamo che si possano in un modo qualunque sostituire alle*

$$a_i\,, \qquad a_{i+r}\,, \qquad a_{i+s}\,, \ldots$$

tutte diverse tra loro le

$$a_{i+\varrho}\,, \qquad a_{i+\sigma}\,, \ldots$$

(dove le $a_{i+\varrho}$, $a_{i+\sigma}, \ldots$ *non sono che le* a_i, $a_{i+r}, \ldots$ *in altro ordine) e che il valore della frazione rimanga inalterato, dico che*

$$\rho_{i,\, i+r-1} = \rho_{i+r,\, i+s-1} = \ldots = -1.$$

Infatti supponiamo di sostituire a a_i, $a_{i+r}, \ldots$ corrispondentemente $a_{i+\varrho}$, $a_{i+\sigma}, \ldots$ avremo in questo caso la (21), e supponiamo di scambiare poi due consecutive tra le $a_{i+\varrho}, a_{i+\sigma}, \ldots$, ad esempio $a_{i+\varrho}$, $a_{i+\sigma}$. Avremo la relazione

$$\frac{1}{D_{i-1}}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+\varrho}}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+1} \ldots a_{i+r-1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{D_{i-1}}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+\sigma}}\right)\left(1 + \frac{1}{a_{i+1}} + \ldots + \frac{1}{a_{i+1} \ldots a_{i+r-1}}\right)$$

e se supponiamo $a_{i+\varrho} \neq a_{i+\sigma}$ deve essere $\rho_{i,\, i+r-1} = -1$. Analogamente si procede per dimostrare $\rho_{i+r,\, i+s-1} = -1$ ecc.

19. Vien naturale allora domandarsi se esistano frazioni ascendenti convergenti tali che per esse si possano determinare dei numeri interi positivi $m < n < p < \ldots$ in numero finito, per cui si abbia:

$$\rho_{m,\, n-1} = \rho_{n,\, p-1} = \ldots = -1.$$

Frazioni siffatte sarebbero tali che qualunque sostituzione si facesse sulle infinite frazioni integranti φ_m, φ_n, $\varphi_p, \ldots$ rimarrebbero non solo convergenti, ma manterrebbero il loro valore primitivo. Vedremo che frazioni siffatte esistono. Per questo dimostriamo che è possibile costruire una frazione limitata

$$F_n = \left\{\frac{1}{\alpha_r}\right\}_1^n = -1$$

in cui

$$\alpha_1 < 1, \qquad \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n > 1.$$

Infatti supponiamo risoluto il problema, avremo allora:

$$F_n = F_{n-1} + \frac{1}{D_{n-1}\alpha_n}$$

da cui

$$-\alpha_n = \frac{1}{D_{n-1} N_{n-1}}$$

e bisogna che sia

$$|D_{n-1} + N_{n-1}| < 1 \tag{22}$$

e poichè N_{n-1} e $\frac{D_{n-1}}{\alpha_1}$ hanno il medesimo segno e tanto N_{n-1} quanto D_{n-1} sono in valore assoluto > 1, perchè la (22) sia soddisfatta occorre e basta $\alpha_1 < 0$, disuguaglianza questa contenuta nell'altra data, per ipotesi, $\alpha_1 < -1$.

La (22) dà poi, inquantochè $\alpha_n > 1$

$$-1 < D_{n-1} + N_{n-1} < 0$$

da cui, poichè $\alpha_2, \alpha_3, \ldots,$ sono positivi, risultano per α_1 le limitazioni

$$\begin{gathered} -1 - \frac{2}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}} - \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} - \ldots - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}} < \alpha_1 \\ \alpha_1 < -\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} - \ldots - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}} \\ \alpha_1 < -1, \end{gathered} \tag{23}$$

Viceversa fissate arbitrariamente le

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} > 1$$

si prenda

$$\alpha_1 > -1 - \frac{2}{\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}} - \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} - \ldots - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}}$$

e minore del minore dei numeri -1, e

$$-\frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} - \ldots - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-2}}.$$

Avremo così soddisfatte le (23) e la (22) e preso

$$\alpha_n = \frac{-1}{D_{n-1} + N_{n-1}}$$

avremo $F_n = -1$.

Dal processo stesso tenuto risulta come si possano costruire razionalmente infinite frazioni che corrispondono alle volute condizioni del problema.

20. Costruiamo di dette frazioni

$$\lambda_i = \left\{\frac{1}{\alpha_\nu^{(i)}}\right\}_1^{p_i} = -1$$

un numero infinito e consideriamo una frazione limitata

$$\Lambda = \left\{\frac{1}{\alpha_\nu}\right\}_1^n$$

ed un numero infinito di quantità μ_i tutte maggiori di una quantità $R > 1$. Consideriamo la frazione ascendente illimitata ottenuta prolungando la Λ con la frazione integrante μ_1 e ordinatamente con le successive di λ_1, la frazione così ottenuta prolungando con la frazione integrante μ_2 e ordinatamente con le successive di λ_2 ecc. La frazione così ottenuta è convergente perchè soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente di convergenza.

Infatti preso un numero σ arbitrariamente piccolo e positivo consideriamo i prodotti successivi dei denominatori delle frazioni integranti: essi tendono monotonamente, in valore assoluto, ad infinito. Infatti dal termine $n+1$ (*esimo*) (che è μ_1) essi sono tutti in valore assoluto maggiore d'uno e tra essi le quantità, in numero infinito $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ formano una successione di quantità maggiori di $R > 1$. Per tanto si potrà fissare un indice

$$k = n + p_1 + p_2 + \ldots + p_s + s$$

per cui risulti

$$\left|\frac{1}{D_k}\right| < \sigma.$$

Consideriamo allora la ridotta F_k che è evidentemente uguale alla n (*esima*) ed un'altra qualsiasi $(k+t)$ (*esima*). Se t si potrà porre uguale a

$$p_{s+1} + p_{s+2} + \ldots + p_{s+h} + h$$

allora

$$F_{k+t} - F_k = 0;$$

se invece non è

$$t = p_{s+1} + p_{r+2} + \ldots + p_{s+h} + h$$

allora l'ultima frazione integrante coinciderà con una di quelle di

$$\lambda_i \, (i > s)$$

ovvero con una $\mu_i \, (i > s)$.

Consideriamo il primo caso e sia $\frac{1}{\alpha_\nu^{(i)}}$ l'ultima frazione integrante della F_{k+t}. Sarà:

$$\frac{1 + \frac{1}{\alpha_1^{(i)}} + \frac{1}{\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(i)}} + \ldots + \frac{1}{\alpha_1^{(i)}\alpha_2^{(i)}\ldots\alpha_\nu^{(i)}}}{D_k(\mu_{s+1}\alpha_1^{(s+1)}\ldots\alpha_{p_{s+1}}^{(s+1)})(\mu_{s+2}\alpha_1^{(s+2)}\ldots\alpha_{p_{s+2}}^{(s+2)})\ldots(\mu_{i-1}\alpha_1^{(i-1)}\ldots\alpha_{p_{i-1}}^{(i-1)})\mu_i} =$$
$$= |F_k - F_{k+t}|$$

e poichè il numeratore della frazione scritto nel primo membro dell'uguaglianza è <1 risulta che $|F_k - F_{k+t}|$ potrà rendersi piccola a piacere. Considerando il caso rimasto, allora si ha supposto $\frac{1}{\mu_i}$ l'ultima frazione integrante:

$$\frac{1}{D_k(\mu_{s+1}\alpha_1^{(s+1)}\dots\alpha_{p_{s+1}}^{(s+1)})(\mu_{s+2}\alpha_1^{(s+2)}\dots\alpha_{p_{s+2}}^{(s+2)})\dots(\mu_{i-1}\alpha_1^{(i-1)}\dots\alpha_{p_{i-1}}^{(i-1)})\mu_i} = \\ = |F_k - F_{k-t}|$$

e quindi la condizione di Cauchy è soddisfatta.

Adunque esistono frazioni convergenti siffatte che in esse si possono determinare un numero infinito di frazioni integranti (due qualsiasi non successive), permutando comunque le quali il valore della frazione non s'altera.

Per esse varranno le proprietà del § 18. *Viceversa se una frazione convergente è tale che si possano sostituire comunque alle*

$$\alpha_i,\ \alpha_{i+r},\ \dots,\quad le\quad \alpha_{i+\varrho},\ \alpha_{i+\sigma},\ \dots$$

(dove le $\alpha_{i+\varrho}$, $\alpha_{i+\sigma}\dots$ non sono che le α_i, α_{i+r} ecc. in altro ordine, e dove queste possono essere anche in numero infinito) dovrà aversi

$$\rho_{i,\,i+r-1},\quad \sigma_{i+r,\,i+s-1},\ \dots$$

uguali a -1 e quindi il valore della frazione è evidentemente F_i.

VII. *Frazioni ascendenti periodiche.*

21. Diremo infine qualcosa sulle frazioni ascendenti illimitate

$$\left\{\frac{1}{a_\nu}\right\}_1^\infty$$

tali che da un certo punto in poi le successive frazioni integranti si ripetano periodicamente ed indefinitamente: frazioni cosiffatte le chiameremo *periodiche*; e più precisamente le distingueremo in periodiche miste e in periodiche semplici analogamente a quello che si fa per le frazioni continue.

Dimostreremo *che una frazione ascendente periodica convergente ha per limite un numero appartenente al medesimo campo di razionalità delle frazioni integranti.*

Supponiamo che la frazione sia convergente e dimostriamo il teorema detto quando la frazione è periodica semplice. Abbiamo, se la frazione è convergente ed ha per valore α:

$$\alpha = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdot^{\cdot^{\cdot}} + \frac{1}{a_n} + \alpha \qquad (24)$$

dove si è supposto che il periodo della frazione fosse

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Dalla (24) ricaviamo subito:

$$\alpha = \frac{N_n}{D_n - 1} \tag{25}$$

($D_n \neq 1$, e questo è certo se si vuole α convergente).

Questo resultato possiamo ottenerlo anche in altro modo, modo che ci permetterà di determinare la condizione necessaria e sufficiente di convergenza della frazione. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{D_2} + \ldots + \frac{1}{D_n} &+ \\ \frac{1}{D_n D_1} + \frac{1}{D_n D_2} + \ldots + \frac{1}{D_n D_n} &+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1}{D_n^i D_1} + \frac{1}{D_n^i D_2} + \ldots + \frac{1}{D_n^i D_n} &+ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots &\end{aligned}$$

epperò

$$\alpha = \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \ldots + \frac{1}{D_n}\right)\left(1 + \frac{1}{D_n} + \frac{1}{D_n^2} + \ldots + \frac{1}{D_n^i} + \ldots\right)$$

e quindi la condizione *necessaria e sufficiente di convergenza* è

$$|D_n| > 1$$

e quando questa sia soddisfatta si ricava

$$\alpha = \frac{N_n}{D_n - 1}.$$

Il caso in cui la frazione non sia immediatamente periodica si riconduce subito al precedente.

Notiamo che in una frazione periodica semplice si ha anche la proprietà

$$\frac{N_{rn}}{D_{rn} - 1} = \frac{N_n}{D_n - 1}$$

dove r è un intero positivo arbitrario.

22. *Data una frazione* F_n (*limitata*) *in cui sia* $|D_n + 1| > |$ *si può subito trasformarla in una periodica semplice.*

Infatti poichè N_n è indipendente da a_1 basterà cambiare a_1 in a'_1 per modo che risulti

$$a_1 a_2 \dots a_n = a'_1 a_2 \dots a_n - 1$$

ossia

$$a'_1 = a_1 + \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}$$

perchè allora per la (25), la frazione periodica

$$\frac{1}{a'_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a'_1} + \dots$$

sia convergente ed abbia per valore

$$\frac{N_n}{a'_1 a_2 \dots a_n - 1} = \frac{N_n}{a_1 a_1 \dots a_n} = F_n .$$

GIOVANNI POLVANI.

UN' OSSERVAZIONE SOPRA UNA TRASFORMAZIONE DI CURVE

Nelle *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. BIANCHI è trattato, a proposito della determinazione di tutte le curve di Bertrand [1] il seguente problema:

Data una curva C, *trovarne una seconda* C' *che corrisponda alla* C *per eguaglianza d'archi ed abbia in ogni punto la normale principale parallela a quella nel punto corrispondente di* C.

L'illustre Autore trova che, chiamando σ l'angolo (costante) di due tangenti corrispondenti a C e C', le curvature $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{T'}$ di C' debbono essere legate alle curvature $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ di C dalle relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho'} &= \pm \left(\frac{\cos\sigma}{\rho} + \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T}\right) \\ \frac{1}{T'} &= \frac{\cos\sigma}{T} - \frac{\operatorname{sen}\sigma}{\rho} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

[1] Vol. I, pag. 52 (seconda edizione).

cioè si ottengono le curvature di C' operando sulle curvature di C una sostituzione ortogonale, da cui segue, come Egli osserva, che *la somma dei quadrati delle due curvature è un invariante per questa trasformazione.* Pertanto, in grazia del significato geometrico di questa somma [1] quel risultato può così enunciarsi: *Se due curve sono trasformate l'una dell'altra per eguaglianza d'archi, ed in modo che le normali principali nei punti corrispondenti siano parallele, saranno, in questi punti, eguali le terze curvature.*

Viceversa, supponiamo che due curve siano trasformate l'una dell'altra per eguaglianza d'archi ed in modo che le terze curvature nei punti corrispondenti siano eguali; allora, dovendo essere, in tutti i punti corrispondenti, $\frac{1}{\rho'^2}+\frac{1}{T'^2}=\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{T^2}$, segue che le $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{T'}$, sono legate alle $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ da una sostituzione ortogonale cui si può sempre dare la forma (1) con σ costante. Ora, data la curva C, cioè assegnate le funzioni $\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{T}$ dell'arco s, si conoscono, per le (1) le equazioni intrinseche della curva corrispondente: questa è quindi individuata a meno di movimenti dello spazio. Inoltre, siccome la curva C' le cui tangenti nei punti corrispondenti fanno l'angolo costante σ, verifica le (1), ne segue che le curve corrispondenti a C, potranno ridursi ad avere come la C' le normali principali parallele nei punti corrispondenti. Epperò:

Affinchè due curve trasformate l'una dell'altra per eguaglianza d'archi, possano ridursi ad avere le normali principali parallele nei punti corrispondenti, occorre e basta che siano ivi eguali le terze curvature.

R. Occhipinti.

DELLE POTENZE SIMILI DEI NUMERI CHE SONO PRIMI CON UN DATO NUMERO

In una mia recente *Nota* ho considerato la somma $Z(k,n)$ delle potenze n° di un sistema completo di numeri primi con un dato numero k ed incongrui (mod. k) e ho dimostrato il seguente teorema:

Se n *e* $k=2^{\lambda}a^{\alpha}b^{\beta}\dots h^{\eta}=2^{\lambda}L=a^{\alpha}A=b^{\beta}B=\dots=h^{\eta}H$ $(\lambda\geqq 0, \alpha\geqq 0,\dots \eta\geqq 0)$ *sono numeri naturali ed* $a, b, \dots h$ *sono i differenti divisori primi dispari di* k, *sussiste la congruenza*

$$Z(k,n)\equiv\varphi(k)\{\varepsilon_2 L^{\varphi(2^{\lambda})}+\varepsilon_a A^{\varphi(a^{\alpha})}+\dots+\varepsilon_h H^{\varphi(h^{\eta})}\} \pmod{k} \quad (1)$$

[1] *Periodico di Matematica.* Livorno, anno XXVIII, fasc. II.

ove $\varepsilon_2 = 0$ *se* n *è dispari e* $\lambda > 1$, *è invece* $\varepsilon_2 = 1$ *in ogni altro caso,* $\varepsilon_a = 1$ *ovvero* $= 0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $a - 1$; $\varepsilon_b = 1$ *ovvero* $= 0$ *secondo che* n *è o non è un multiplo di* $b - 1$, *e così via.* (1)

La congruenza (1) permette di decidere della divisibilità di $Z(k, n)$ per k e di calcolare in ogni caso il resto della divisione. Ma questo calcolo può riuscire talvolta molto laborioso, anche adottando gli artifizi indicati nella citata *Nota*. Perciò ho cercato di stabilire un procedimento semplice, applicabile in tutti i casi, che qui riporto a complemento del sopra citato teorema.

Premettiamo la seguente proposizione che è una facile conseguenza del Teorema di Fermat generalizzato:

Se è $k = pqr \ldots u = pP = qQ = Rr = \ldots = uU$, *dove* $p, q, r, \ldots u$ *sono numeri primi tra loro a due a due, e se* $m\,(\geqq 1)$ *è primo con* k, *sussiste la congruenza* (2)

$$(mP)^{\varphi(p)} + (mQ)^{\varphi(q)} + (mR)^{\varphi(r)} + \ldots + (mU)^{\varphi(u)} \equiv 1 \quad (\text{mod.}\, k). \qquad (2)$$

Per la dimostrazione basta soltanto osservare che si hanno le congruenze

$$1 \equiv m^{\varphi(p)}\ (\text{mod.}\, p), \quad 1 \equiv m^{\varphi(q)}\ (\text{mod.}\, q) \ldots 1 \equiv m^{\varphi(u)}\ (\text{mod.}\, u)$$

$$PP^{\varphi(p)-1} \equiv 1\ (\text{mod.}\, p), \quad QQ^{\varphi(q)-1} \equiv 1\ (\text{mod.}\, q) \ldots UU^{\varphi(u)-1} \equiv 1\ (\text{mod.}\, u)$$

e applicare un ben noto teorema. (3) Del resto si riconosce immediatamente che la (2) sussiste quando al modulo k si sostituisca uno qualunque dei suoi fattori $p, q, r, \ldots u$, primi tra loro a due a due; perciò essa si verifica anche pel modulo k.

Come corollario si ha

Se è $k = 2^\lambda a^\alpha b^\beta \ldots h^\eta = 2^\lambda L = a^\alpha A = b^\beta B = \ldots = h^\eta H$, *dove* $a, b \ldots h$ *sono i differenti divisori primi dispari di* k, *sussiste la congruenza*

$$L^{\varphi(2^\lambda)} + A^{\varphi(a^\alpha)} + B^{\varphi(b^\beta)} + \ldots + H^{\varphi(h^\eta)} \equiv 1 \qquad (\text{mod.}\, k).$$

Una prima conseguenza di questa proposizione è che se nella congruenza (1) *tutte* le ε sono uguali all'unità, secondo le condizioni espresse nel teorema, essa si riduce alla semplice forma

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \qquad (\text{mod.}\, k),$$

e poichè $\varphi(k) < k$, essendo $k > 1$, il resto della divisione di $Z(k, n)$ per k è $\varphi(k)$. (4)

---

(1) U. Concina, « Sulla divisibilità della somma di potenze simili di numeri interi consecutivi pel numero dei suoi termini », *Periodico di Matematica*, a. XXVIII, fasc. IV.

(2) Se si suppone $k = p \times 1$, onde $P = 1$, $Q = R = \ldots = U = p$, si ritrova la congruenza $m^{\varphi(p)} \equiv 1$ (mod. p), cioè si ricade nel teorema di Fermat generalizzato.

(3) Cfr. per es. *Lezioni sulla Teoria dei numeri* di Dirichlet-Dedekind, § 25.

(4) Nella citata *Nota* questo resultato è stato rilevato, giacchè emergeva in modo evidente dalla dimostrazione del teorema. Si noti che questo caso particolare della (1) è la generalizzazione di quello analogo, in cui k è una potenza di un numero primo (*Nota* citata, Teorema IV).

Così abbiamo p. e. per $k = 300 = 2^2 . 3 . 5^2$ ed $n = 8$

$$Z(300,8) \equiv \varphi(300) \{75^{\varphi(2^2)} + 100^{\varphi(3)} + 12^{\varphi(5^2)}\} \equiv \varphi(300) \equiv 80 \quad (\text{mod. } 300).$$

Se invece soltanto taluna delle ε è uguale all'unità, [1] p. e. $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$, si può procedere nel seguente modo. Ponendo per brevità $s = a^\alpha b^\beta c^\gamma$ e $k = ms$ ed essendo in virtù della (2)

$$A^{\varphi(a^\alpha)} + B^{\varphi(b^\beta)} + C^{\varphi(c^\gamma)} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } s),$$

la congruenza (1) che ora si presenta nella forma

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \{A^{\varphi(a^\alpha)} + B^{\varphi(b^\beta)} + C^{\varphi(c^\gamma)}\} \qquad (\text{mod. } k), \tag{3}$$

ci dà subito

$$Z(k, n) \equiv \varphi(k) \qquad (\text{mod. } s).$$

D'altra parte, essendo A, B, C divisibili per m, si ha per la (3)

$$Z(k, n) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } m).$$

Ciò posto, indicando con x il resto della divisione di $Z(k, n)$ per k, le ultime due congruenze ci dànno

$$x \equiv \varphi(k) \qquad (\text{mod. } s), \tag{4}$$

$$x \equiv 0 \qquad (\text{mod. } m), \tag{5}$$

le quali bastano per determinare x senza ambiguità. Invero, per la (5) possiamo porre $x = my$ e sostituendo nella (4) si ricava la congruenza di primo grado

$$my \equiv \varphi(k) \qquad (\text{mod. } s),$$

la quale ammette una sola radice ρ, perchè m ed s sono primi tra loro. Ora poichè ρ si può sempre determinare in modo che sia positiva e minore di s, dalla $x = my$ si ricava

$$x = m\rho < k.$$

Questo procedimento, in applicazione della formula (1) per determinare il resto della somma $Z(k, n)$ divisa per k, si può riassumere nella seguente regola: Se tutte le ε sono uguali all'unità, secondo le condizioni enunciate nel teorema, il resto è $\varphi(k)$; nel caso contrario il resto si può trovare calcolando la minima soluzione positiva delle congruenze (4) e (5), nelle quali il modulo s è il prodotto delle potenze di quei fattori primi di k che sono indici delle ε uguali all'unità e il modulo m è uguale a $k : s$.

---

[1] Per l'annullarsi delle ε conviene qui tener conto anche delle osservazioni fatte nella *Avvertenza* contenuta nella citata *Nota*, ma non è *necessario* farlo.

Applichiamo questa regola ai seguenti esempi:

1°. Sia $k = 492 = 2^2 . 3 . 41$ ed $n = 6$. Poichè $n = 6$ è pari e divisibile per $3 - 1$ e non per $41 - 1$, si ha

$$Z(492,6) \equiv \varphi(492) \{123^{\varphi(2^2)} + 164^{\varphi(3)}\} \qquad (\text{mod. } 492).$$

Inoltre, per ciò che si è osservato nella citata *Avvertenza*, questa congruenza può ridursi alla seguente

$$Z(492,6) \equiv \varphi(492) . 164^{\varphi(3)} \qquad (\text{mod. } 492).$$

Abbiamo dunque $s = 3$ ed $m = 164$, quindi, essendo $\varphi(492) = 160$,

$$x = 164y, \qquad 164y \equiv 160 \qquad (\text{mod. } 3).$$

Semplificando si ottiene

$$2y \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 3),$$

onde $y = 2$ ed $x = 328$.

2°. Sia $k = 735 = 3 . 5 . 7^2$ ed $n = 18$. Poichè $n = 18$ è divisibile per $3 - 1$ e $7 - 1$, ma non per $5 - 1$, si ha

$$Z(735,18) \equiv \varphi(735) \{245^{\varphi(3)} + 15^{\varphi(7^2)}\} \qquad (\text{mod. } 735).$$

Inoltre, per ciò che si è osservato nella citata *Avvertenza*, essendo $7 - 1$ divisibile per 3, questa congruenza può ridursi alla seguente

$$Z(735,18) \equiv \varphi(735) . 15^{\varphi(7^2)} \qquad (\text{mod. } 735).$$

Abbiamo dunque $s = 7^2 = 49$ ed $m = 15$; quindi, essendo $\varphi(735) = 336$,

$$x = 15y, \qquad 15y \equiv 336 \qquad (\text{mod. } 49).$$

Semplificando si ottiene

$$5y \equiv 14 \qquad (\text{mod. } 49),$$

onde, risolvendo questa congruenza con uno dei noti metodi e prendendone la minima soluzione positiva, si ricava $y = 42$; e perciò è $x = 630$.

UMBERTO CONCINA.

SULL'INTEGRAZIONE DI UN TIPO DI EQUAZIONI

alle derivate parziali

1. Per un'equazione alle derivate parziali risoluta per la derivata d'ordine massimo e contenente al 2° membro oltre le variabili indipendenti x e y la funzione incognita z e quelle delle sue derivate da cui si ottiene la derivata del 1° membro derivando rispetto ad entrambe le variabili, si dimostra che, col solo ammettere la continuità del 2° membro, esiste una soluzione dell'equazione che insieme con le derivate successive, pure rispetto ad x e rispetto ad y, di convenienti ordini coincide su due rette parallele agli assi con prefissate funzioni della x o della y.

La dimostrazione che ne ho data in una Nota inserita negli *Atti del R. Istituto Veneto*, [1] fa vedere che analoga proposizione vale per un sistema di equazioni cosiffatte. L'ammettere inoltre verificata pei secondi membri la nota condizione di Lipschitz, porta l'unicità del sistema di soluzioni. [2]

Per un sistema di equazioni del tipo precedente, in cui le derivate per le quali esse sono risolute sono della forma $\frac{\partial^{2r_i} z_i}{\partial x^{r_i} \partial y^{r_i}}$, mostro qui la esistenza di un sistema di soluzioni z_i che insieme con le derivate $\frac{\partial^{2p_i} z_i}{\partial x^{p_i} \partial y^{p_i}}$ fino a $p_i = r_i - 1$ coincidono con prefissate funzioni sopra due rette parallele agli assi; ed ancora la unicità di codesto sistema di soluzioni, ammessa verificata la condizione di Lipschitz per i secondi membri delle equazioni.

Per il sottotipo lineare a coefficienti costanti ho mostrato [3] che si può compiere la effettiva integrazione mediante funzioni di Bessel, dipendendo essa, al pari di quella di un sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti, dalla risoluzione di un'equazione algebrica. Se i coefficienti sono funzioni di x e y mostro qui che la ricerca delle soluzioni del sistema, soddisfacenti a condizioni iniziali sì della prima specie che della seconda, si può ridurre alla risoluzione di una unica equazione integrale.

(1) SIBIRANI, " Esistenza degli integrali in alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali ". *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, Tomo CXVII, parte 2a (1908).

(2) SIBIRANI, " Unicità dell'integrale in alcuni tipi di equazioni alle derivate parziali ". *Periodico di Matematica*, 1908.

(3) SIBIRANI, " Su l'integrazione di alcune equazioni alle derivate parziali mediante funzioni di Bessel ". *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei*, 1909.

2. Se è dato un sistema di equazioni

$$\frac{\partial^{2m_i} z_i}{\partial x^{m_i} \partial y^{m_i}} = F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

ove le F_i possono contenere oltre le variabili indipendenti x e y le funzioni incognite z_h e le derivate parziali loro $\frac{\partial^{p+q} z_h}{\partial x^p \partial y^p}$ con $p \leqq m_h - 1$, $q \leqq m_h - 1$ si dimostra, sotto l'ipotesi della continuità delle F_i, che esiste un sistema di soluzioni che soddisfano alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^{m_i - k} z_i}{\partial x^{m_i - k}}\right)_{x=\alpha} = \varphi_{ik}(y); \qquad \left(\frac{\partial^{m_i - k} z_i}{\partial y^{m_i - k}}\right)_{y=\beta} = \psi_{ik}(x), \tag{2}$$

$$(k = 1, 2, \ldots m_i; \quad i = 1, 2, \ldots n),$$

essendo le $\varphi_{ik}(y)$ e le $\psi_{ik}(x)$ funzioni prefissate ad arbitrio per le quali si suppongono verificate le relazioni

$$\varphi_{ih}^{(m_i - h)}(\beta) = \psi_{ih}^{(m_i - k)}(\alpha),$$

$$(h = 1, 2, \ldots m_i; \quad k = 1, 2, \ldots m_i; \quad i = 1, 2, \ldots n).$$

Quando si supponga che le F_i soddisfino, rispetto agli argomenti z, e loro derivate, alla condizione di Lipschitz, si dimostra pure l'unicità del sistema di soluzioni soddisfacente alle condizioni (2). Ma ora possiamo far vedere che del sistema (1) esiste sempre un sistema di soluzioni, che è unico se la condizione di Lipschitz è verificata, le quali soddisfano alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^{2(m_i - r)} z_i}{\partial x^{m_i - r} \partial y^{m_i - r}}\right)_{x=\alpha} = \pi_{ir}(y); \qquad \left(\frac{\partial^{2(m_i - r)} z_i}{\partial x^{m_i - r} \partial y^{m_i - r}}\right)_{y=\beta} = \rho_{ir}(x), \tag{3}$$

$$(r = 1, 2, \ldots m_i - 1; \quad i = 1, 2, \ldots n),$$

le $\pi_{ir}(y)$ e $\rho_{ir}(x)$ essendo funzioni arbitrariamente scelte, purchè soddisfacenti alle relazioni

$$\pi_{ir}(\beta) = \rho_{ir}(\alpha), \qquad (r = 1, 2, \ldots m_{i-1}; \quad i = 1, 2, \ldots n). \tag{4}$$

3. A quest'uopo premettiamo la dimostrazione di questa proposizione.

Se $z(x, y)$ *è una funzione continua con derivate parziali*

$$\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h \partial y^k}, \quad \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^k \partial y^h}, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots h; \quad h = 1, 2, \ldots n)$$

continue lungo le rette $x = \alpha$, $y = \beta$ *ove sono nulle la* z *e le derivate*

$$\frac{\partial^{2r} z}{\partial x^r \partial y^r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots m),$$

allora sulle stesse rette sono nulle tutte le derivate dianzi indicate. Se z *è nulla sulle rette* $x = \alpha$, $y = \beta$ *e si ha*

$$\left(\frac{\partial^r z}{\partial x^r}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^r z}{\partial y^r}\right)_{y=\beta} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots m),$$

tutte le derivate sopradette sono nulle sopra le rette $x = \alpha$, $y = \beta$.

Dall'essere

$$z(\alpha, y) = z(x, \beta) = 0,$$

ne discende

$$\left(\frac{\partial^r z}{\partial y^r}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^r z}{\partial x^r}\right)_{y=\beta} = 0,$$

qualunque sia r. D'altra parte dall'essere

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)_{y=\beta} = 0,$$

ne segue

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=\alpha} = \text{costante}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{y=\beta} = \text{costante};$$

ma

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = 0;$$

con ciò è provato che $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ si annullano sopra $x = \alpha$, $y = \beta$ ed ancora che, qualunque sia r,

$$\left(\frac{\partial^{r+1} z}{\partial x\, \partial y^r}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^{r+1} z}{\partial x^r\, \partial y}\right)_{y=\beta} = 0.$$

Dal sapere che $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ e $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2}$ sono nulle sopra le rette $x = \alpha$ e $y = \beta$, si deduce, per ciò che or ora si è dimostrato, che sono nulle sulle rette $x = \alpha$, $y = \beta$ le derivate $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\, \partial y}$ e $\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2}$. Saranno per ciò costanti $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=\alpha}$ e $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=\beta}$ e poichè

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = 0,$$

ne segue anche

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{y=\beta} = 0,$$

cioè sulle dette rette si annullano $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ e di più

$$\left(\frac{\partial^{r+2} z}{\partial x^2\, \partial y^r}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^{r+2} z}{\partial y^2\, \partial x^r}\right)_{y=\beta} = 0.$$

Dall'essere nulle sopra le rette $x=\alpha$ e $y=\beta$ le $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\, \partial y^2}$, $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3\, \partial y^3}$ ne discende senz'altro, da ciò che precede, che sulle stesse rette sono nulle $\frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x\, \partial y^3}$, $\frac{\partial^5 z}{\partial x^3\, \partial y^2}$, $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2\, \partial y^3}$; si deduce la costanza di

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_{x=\alpha} \text{ e } \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_{y=\beta}$$

e poichè è

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_{\substack{x=\alpha\\ y=\beta}} = 0,$$

ne segue

$$\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\right)_{y=\beta} = 0,$$

cioè le due derivate terze pure si annullano sopra le dette rette.

Così procedendo, si dimostra completamente la prima parte dell'enunciata proposizione. Per dimostrare la seconda parte, si osservi che dall'essere

$$\left(\frac{\partial^r z}{\partial x^r}\right)_{x=\alpha} = 0, \qquad \left(\frac{\partial^r z}{\partial y^r}\right)_{y=\beta} = 0,$$

ne discende

$$\left(\frac{\partial^{2r} z}{\partial x^r\, \partial y^r}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^{2r} z}{\partial x^r\, \partial y^r}\right)_{y=\beta} = 0,$$

con che si è ricondotti al caso della prima parte.

4. Si indichi con $[f(x, y)]_k$ il risultato della integrazione rispetto ad x fra α e x e rispetto ad y fra β e y eseguita successivamente k volte.

Allora se poniamo in (1)

$$z_i = u_i + \sum_{s=1}^{m_i-1} [\pi_{i,s}(y) + \rho_{i,s}(x) - \pi_{i,s}(\beta)]_{m_i-s-1} \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

le funzioni z_i soddisferanno alla (1) stessa e alle condizioni (3) se le u_i soddisfano al sistema

$$\frac{\partial^{2m_i} u_i}{\partial x^{m_i}\, \partial y^{m_i}} = \Phi_i, \qquad (i=1, 2, \ldots n) \tag{6}$$

ove le Φ_i sono ciò che diventano le F_i coll'indicata sostituzione, e se di più

$$\left(\frac{\partial^{2(m_i-r)} u_i}{\partial x^{m_i-r}\, \partial y^{m_i-r}}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^{2(m_i-r)} u_i}{\partial x^{m_i-r}\, \partial y^{m_i-r}}\right)_{y=\beta} = 0, \tag{7}$$

$$(r=1, 2, \ldots m_i; \quad i=1, 2, \ldots n).$$

Ma del sistema (6) esistono le soluzioni u_i che soddisfano alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^{m_i-r} u_i}{\partial x^{m_i-r}}\right)_{x=\alpha} = \left(\frac{\partial^{m_i-r} u_i}{\partial y^{m_i-r}}\right)_{y=\beta} = 0, \quad (r=1,2,\dots m_i;\ i=1,2,\dots n), \tag{8}$$

le quali per la proposizione del § 3 soddisferanno pure alle condizioni (7). E poichè unico è il sistema di soluzioni di (6) soddisfacenti alle (8) se la condizione di Lipschitz è verificata per le F_i, unico sarà pure, sotto queste ipotesi, il sistema di soluzioni di (1) soddisfacenti alle condizioni (3).

5. Si abbia il sistema di n equazioni lineari

$$\frac{\partial^{2m_i} z_i}{\partial x^{m_i}\partial y^{m_i}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1} A_{k,i}(x,y)\frac{\partial^2 z_i}{\partial x^k \partial y^k} = R_i(x,y), \quad (i=1,2,\dots n), \tag{9}$$

del quale si vogliano le soluzioni soddisfacenti alle condizioni (2).

Fatte le sostituzioni

$$z_i = u_i + \sum_{s=0}^{m_i-1}\left[\varphi_{i,s+1}(y) - \sum_{p=0}^{m_i-1}\varphi_{i,s+1}^{(p)}(\beta)\frac{(y-\beta)^p}{p!}\right]\frac{(x-\alpha)^{m_i-1-s}}{(m_i-1-s)!} +$$
$$+\sum_{p=0}^{m_i-1}\psi_{m_i-p}(x)\frac{(y-\beta)^p}{p!}, \quad (i=1,2,\dots n), \tag{10}$$

le z_i soddisferanno e al sistema (9) e alle condizioni (2) se le u_i soddisfano al sistema trasformato mediante le (10)

$$\frac{\partial^{2m_i} u_i}{\partial x^{m_i}\partial y^{m_i}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1} A_{ki}(x,y)\frac{\partial^{2k} u_i}{\partial x^k \partial y^k} = T_i(x,y), \quad (i=1,2,\dots n),$$

e alle condizioni (8), o, ciò che per il § 3 fa lo stesso, alle (7).

Se vogliamo di (9) le soluzioni z_i che soddisfano alle condizioni (3), fatte le sostituzioni (5), basta determinare del sistema trasformato le soluzioni u_i soddisfacenti alle (7).

6. In sostanza, si è condotti a determinare le soluzioni u_i di un sistema

$$\frac{\partial^{2m_i} u_i}{\partial x^{m_i}\partial y^{m_i}} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{m_i-1} A_{ki}(x,y)\frac{\partial^{2k} u_i}{\partial x^k \partial y^k} = S_i(x,y) \tag{11}$$

che soddisfano alle condizioni (7).

Indichiamo con $\theta_{i0}(x,y)$ la funzione u_i e con $\theta_{ik}(x,y)$ la derivata $\frac{\partial^{2k} u_i}{\partial x^k \partial y^k}$; si tratta allora di determinare $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ funzioni θ per le quali sia

$$\begin{gathered}\theta_{ik}(x,y) - \int_\alpha^x ds \int_\beta^y \theta_{i,k+1}(s,t)\,dt = 0,\\ \theta_{i,m_i-1}(x,y) + \sum_{k=0}^{m_i-1}\int_\alpha^x ds\int_\beta^y A_{hi}(s,t)\,\theta_{ih}(s,t)\,dt = \int_\alpha^x ds\int_\beta^y S_i(s,t)\,dt,\\ (k=0,1,2,\dots m_i-2;\quad i=1,2,\dots n).\end{gathered} \tag{12}$$

Ma queste costituiscono un sistema di M equazioni integrali lineari in altrettante funzioni incognite, le quali debbono annullarsi sopra le rette $x = \alpha$, $y = \beta$.

Ma quando è dato un sistema di n equazioni integrali

$$\psi_i(x, y) + \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} ds \int_{\beta_1}^{\beta_2} K_{ih}(x, y; s, t)\, \psi_h(s, t)\, dt = \varphi_i(x, y),$$
$$(i = 1, 2, \dots n),$$

esso si può ridurre alla sola equazione

$$\Psi(x, y) + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} ds \int_{\beta_1}^{n(\beta_2-\beta_1)+\beta_1} G(x, y; s, t)\, \Psi(s, t)\, dt = \Phi(x, y),$$

qualora siano definite le funzioni $G(x, y; s, t)$, $\Psi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ colle seguenti condizioni

$$\left.\begin{array}{c} G(x, y; s, t) = K_{ih}(x, y-(i-1)(\beta_2-\beta_1); s, t-(h-1)(\beta_2-\beta_1)) \\ \beta_1 + i(\beta_2-\beta_1) > y > \beta_1 + (i-1)(\beta_2-\beta_1) \\ \beta_1 + h(\beta_2-\beta_1) > t > \beta_1 + (h-1)(\beta_2-\beta_1) \\ (i = 1, 2, \dots n;\quad h = 1, 2, \dots n), \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Phi(x, y) = \varphi_i(x, y-(i-1)(\beta_2-\beta_1)) \\ \beta_1 + i(\beta_2-\beta_1) > y > \beta_1 + (i-1)(\beta_2-\beta_1) \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

$$\left.\begin{array}{c} \Psi(x, y) = \psi_i(x, y-(i-1)(\beta_2-\beta_1)) \\ \beta_1 + i(\beta_2-\beta_1) > y > \beta_1 + (i-1)(\beta_2-\beta_1) \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

le quali formule si ottengono generalizzando quelle ottenute da Fredholm [1] per il caso di una variabile sola.

Applicando questo procedimento al nostro sistema (12) si ottiene l'unica equazione integrale da cui dipende la soluzione del sistema di equazione alle derivate parziali (11).

Filippo Sibirani.

SOPRA UNA PROPRIETÀ DELLE RETI DI SFERE

(Estratto di una lettera del prof. G. Loria)

... A proposito della Sua nota " Una proprietà delle reti di sfere „ pubblicata nel *Periodico di Matematica* (vol. XXVI, pag. 230) ho cercato nei principali trattati classici di geometria se la proprietà di cui Lei parla è conosciuta; ma non ho trovato nulla. Però ho osservato che si può stabilirla molto semplicemente con un ragionamento

(1) " Sur une classe d'équations fonctionelles. *Acta Math.* t. 27, pp. 378 e 379.

puramente geometrico e considerarla come una conseguenza del teorema notissimo: "Se i quattro punti A, B, C, D sono armonici *ogni* circolo che passa per la coppia AC è ortogonale al circolo di diametro BD „.

Il circolo descritto sul segmento P'P'' come diametro è ortogonale al circolo Γ_1, rispetto al quale P', P'', sono coniugati secondo la definizione. Questo stesso circolo di diametro P'P'' è per una ragione analoga ortogonale all'analogo circolo Γ_2. In queste condizioni il centro di questo circolo, cioè il punto di mezzo del segmento P'P'', è sull'asse radicale dei due circoli, come luogo dei centri dei circoli ortogonali a Γ_1 e Γ_2.

Questo ragionamento s'applica identicamente allo spazio. La sfera descritta sul segmento P'P'' come diametro è ortogonale a ciascuna delle tre sfere considerate (a ciascuna delle sfere della rete). Il punto di mezzo di P'P'' è sull'asse radicale delle sfere di questa rete....

Poitiers, 7 novembre 1912.

E. TURRIÈRE.

ERRATA-CORRIGE. — Nell'articolo: *Sulle ipersuperficie inviluppo* del prof. G. USAI, inserito nel Fasc. V, in luogo delle ultime 2 righe della pag. 208 e delle prime 21 della pag. 209, si sostituisca quanto segue:

Le equazioni della V_{n-2} saranno:

$$f(x_1 x_2 \dots x_n \alpha) = 0, \qquad f(x_1 x_2 \dots x_n, \alpha + h) = 0$$

oppure:

$$f(x_1 x_2 \dots x_n \alpha) = 0, \qquad \frac{f(x_1 x_2 \dots x_n, \alpha + h) - f(x_1 x_2 \dots x_n \alpha)}{h} = 0$$

mentre per le equazioni delle V^{α}_{n-2} indicando con f la funzione si avranno le:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{2}$$

Si considerino ora le caratteristiche $V^{\alpha}_{n-2}\, V^{\alpha+h}_{n-2}$ appartenenti rispettivamente alle due ipersuperficie α ed $\alpha + h$. Esse si intersecheranno in una varietà V_{n-3} ad $n-3$ dimensioni, la quale tenderà col tendere di h a zero ad una posizione limite che diremo seconda caratteristica della ipersuperficie α, V^{α}_{n-3} le cui equazioni, come facilmente si deduce, sono:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0. \tag{3}$$

Così continuando potremo chiamare i^{esima} caratteristica della ipersuperficie α la varietà ad $n - i - 1$ dimensioni V^{α}_{n-i-1} $(i \leqslant 1)$ rappresentata dalle equazioni:

$$f = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0, \dots, \frac{\partial^i f}{\partial \alpha^i} = 0.$$

Essa risulterà la posizione limite dell'intersezione della caratteristica $(i-1)^a$ dell'ipersuperficie α colla caratteristica $(i-1)^a$ dell'ipersuperficie $\alpha + h$, quando si faccia tendere h a zero.

PICCOLE NOTE

Sul metodo dei moltiplicatori nella ricerca dei massimi e minimi di un prodotto di fattori lineari.

Nello spiegare ai miei scolari di 3° e 4° Corso d'Istituto tecnico il così detto " metodo dei moltiplicatori " per la ricerca dei massimi e minimi di un prodotto di funzioni lineari di una variabile, ho visto che un notevole vantaggio di precisione e di chiarezza si ottiene presentando il detto metodo sotto la forma di un semplice teorema. Non essendomi occorso di vederlo nei trattati più in uso, credo non del tutto inutile il pubblicarlo.

" *Sia*

$$f(x) = (a_1x + b_1)^{n_1}(a_2x + b_2)^{n_2}\dots(a_rx + b_r)^{n_r}$$

un prodotto di potenze, con esponente intero e positivo, di funzioni lineari di una variabile x, *le quali si annullino in punti distinti. Ogni radice reale* θ *della equazione*

$$\frac{n_1a_1}{a_1x + b_1} + \frac{n_2a_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{n_ra_r}{a_rx + b_r} = 0 \tag{1}$$

è un punto di massimo o di minimo della funzione $f(x)$ *secondochè è* $f(\theta) \gtrless 0$.

L'equazione (1) si dirà per brevità *equazione derivata* dal prodotto $f(x)$.

Supponiamo anzitutto che i fattori lineari che compongono il prodotto $f(x)$ abbiano tutti nel punto θ un valore positivo.

Il punto θ è allora interno alle semirette in cui sono positivi i fattori stessi, e si potrà quindi costruire un intervallo $\alpha\dots\beta$, comprendente θ, in cui tutti i fattori del prodotto $f(x)$ si mantengono positivi. Intanto, essendo θ una radice dell'equazione (1), si avrà l'identità

$$\frac{n_1a_1}{a_1\theta + b_1} + \frac{n_2a_2}{a_2\theta + b_2} + \dots + \frac{n_ra_r}{a_r\theta + b_r} = 0, \tag{2}$$

la quale può scriversi anche sotto la forma

$$\frac{n_1b_1}{a_1\theta + b_1} + \frac{n_2b_2}{a_2\theta + b_2} + \dots + \frac{n_rb_r}{a_r\theta + b_r} = n_1 + n_2 + \dots + n_r. \tag{3}$$

Considerando ora la nuova funzione

$$F(x) = \left[\frac{n_1}{a_1\theta + b_1}(a_1x + b_1)\right]^{n_1}\left[\frac{n_2}{a_2\theta + b_2}(a_2x + b_2)\right]^{n_2}\dots\left[\frac{n_r}{a_r\theta + b_r}(a_rx + b_r)\right]^{n_r},$$

vediamo che le basi delle potenze che compongono il prodotto $F(x)$ sono tutte positive mentre x varia nell'intervallo $\alpha\dots\beta$, e che la loro somma, in virtù dell'identità (2), è costante ed uguale ad $n_1 + n_2 + \dots + n_r$, per la forma (3) che abbiam dato alla stessa identità. E poichè le basi stesse per $x = \theta$ divengono rispettivamente uguali ad $n_1, n_2, \dots n_r$, si deduce, per un noto principio, che θ è un punto di massimo per la funzione $F(x)$, e quindi anche per $f(x)$ che differisce da $F(x)$ per un fattore costante positivo.

Nel caso che non tutti i fattori del prodotto $f(x)$ siano positivi nel punto θ, si cambi il segno a quei fattori che in θ divengono negativi. Si ottiene così una funzione $\varphi(x)$, e sarà manifestamente $f(x) = \pm\varphi(x)$ secondochè sarà pari o dispari la somma degli esponenti dei fattori lineari che nel punto θ sono negativi, cioè secondochè è $f(\theta) \gtrless 0$. Osservando che l'equazione derivata dal prodotto $\varphi(x)$ è l'equazione (1) stessa, si deduce che θ è un punto di massimo o di minimo per $f(x)$ secondochè è $f(\theta) \gtrless 0$.

CARLO ROSATI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 781, 799, 800, 801 E 802

781. *Trovare il luogo dei vertici degli angoli retti i cui lati sono rispettivamente tangenti a due curve, rappresentate in coordinate plückeriane dalle equazioni*

$$F(u, v) = 0, \qquad f(u, v) = 0.$$

Caso in cui una curva o ambedue le curve suddette sono circoli.

K.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

Indicando con u', v' le coordinate plückeriane d'una tangente della curva $f(u, v) = 0$, con u, v le coordinate di una tangente della curva $F(u, v) = 0$, a quella perpendicolare, e con ξ, η le coordinate cartesiane del loro punto d'intersezione, si hanno le relazioni

$$\xi u + \eta v + 1 = 0 \tag{1}$$

$$\xi u' + \eta v' + 1 = 0 \tag{2}$$

$$uu' + vv' = 0 \tag{3}$$

$$F(u, v) = 0 \tag{4}$$

$$f(u', v') = 0. \tag{5}$$

Le (1), (2) esprimono che il punto (ξ, η) è sulla tangente (u, v) e sulla tangente (u', v') rispettivamente, la (3) dice che (u, v) ed (u', v') formano un angolo retto.

Eliminando u, v, u', v' dalle equazioni precedenti, si ricava l'equazione del luogo richiesto.

1°. Se $f(u, v) = 0$ è l'equazione di un circolo, cioè

$$f(u', v') \equiv r'^2(u'^2 + v'^2) - (a'u' + b'v' - 1)^2 = 0. \tag{5*}$$

Dalle (2) e (3) si ha

$$u' = -\frac{v}{\xi v - \eta u}, \qquad v' = \frac{u}{\xi v - \eta u};$$

sostituendo questi valori nella (5*), abbiamo

$$[(\xi + a')^2 - r'^2]\, v^2 - 2(\xi + a')(\eta + b')\, uv + [(\eta + b')^2 - r'^2]\, u^2 = 0. \tag{6}$$

Dalla (6) e (1) si ricava

$$\left.\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(\xi + a')\,H + r'^2\xi \pm r'\eta K}{H^2 - \rho^2 r'^2}, \qquad \left.\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-(\eta + b)\,H + r'^2\eta \mp r'\xi K}{H^2 - \rho^2 r'^2}. \tag{7}$$

dove per brevità si è posto

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2, \qquad H = \rho^2 + a'\xi + b'\eta, \qquad K^2 = (\xi + a')^2 + (\eta + b')^2 - r'^2.$$

L'equazione richiesta è

$$F(u_1, v_1) \,.\, F(u_2, v_2) = 0.$$

2°. *a*) Se anche l'altra curva è un cerchio, cioè se

$$F(u,v) \equiv R^2(u^2 + v^2) - 1 = 0,$$

dalle (7) si ottiene:

$$\frac{\{(H^2 - \rho^2 r'^2)^2 - R^2[H^2(K^2 - r'^2) + r'^2\rho^2(K^2 + r'^2)]\}^2 - 4r^2R^4H^2K^2(\eta a' - \xi b')^2}{(H^2 - \rho^2 r'^2)^4} = 0, \qquad (8)$$

che è una curva algebrica.

Nel caso speciale di $a' = 0$, $b' = 0$, dalla (8) si trova

$$\frac{[\rho^2 - R^2 + r'^2]^2}{(\rho^2 - r'^2)^2} = 0,$$

che rappresenta un circolo concentrico a quello dato

b) Sia

$$F(u, v) \equiv r^2(u^2 + v^2) - (au + bv - 1)^2 \qquad (4^*)$$

un cerchio in generale. Dalla (1), (3) e (4*) si ricava un'equazione analoga alla (6):

$$[(\xi + a)^2 - r^2]\, v'^2 - 2(\xi + a)(\eta + b)\, u'v' + [(\eta + b^2)^2 - r^2]\, u'^2 = 0 \qquad (6^*)$$

da cui, essendo $v' = -\dfrac{u}{v}\, u'$,

$$[(\eta + b)^2 - r^2]\, v^2 + 2(\xi + a)(\eta + b)\, u v + [(\xi + a)^2 - r^2]\, u^2 = 0. \qquad (9)$$

Dalle (6) e (7) si trova

$$\begin{vmatrix} (\eta + b)^2 - r^2 & (\xi + a)^2 - r^2 \\ (\xi + a')^2 - r'^2 & (\eta + b')^2 - r'^2 \end{vmatrix}^2 =$$

$$= 4 \begin{vmatrix} -(\xi + a)(\eta + b) & (\xi + a)^2 - r^2 \\ +(\xi + a')(\eta + b') & (\eta + b')^2 - r'^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (\eta + b)^2 - r^2 & -2(\xi + a)(\eta + b) \\ (\xi + a)^2 - r'^2 & +2(\xi + a')(\eta + b') \end{vmatrix}$$

799. *Indicando con* R *ed* r *i raggi sferici del circolo circoscritto e del circolo inscritto a un triangolo sferico qualunque, e con* d *la distanza sferica dei loro centri sferici, dimostrare che*

$$\text{sen}(R + r + d) \,.\, \text{sen}(-R + r + d) \,.\, \text{sen}(R - r + d) \,.\, \text{sen}(R + r - d) =$$
$$= -\text{sen}^4 r \cos^4 R - \text{sen}^2 r \cos^2 R \,\text{sen}\, 2R \,\text{sen}\, 2r.$$

G. Pesci.

Risoluzione del sig. V. Costa, R. U. di Pisa.

Indicando con A il primo membro dell'uguaglianza da dimostrare si può scrivere:

$$A = -\text{sen}[d + (r + R)] \,.\, \text{sen}[d - (R - r)] \,.\, \text{sen}[d + (R - r)] \,.\, \text{sen}[d - (R + r)]$$
$$A = [(\cos^2 d\, \text{sen}^2(R+r) - \text{sen}^2 d \cos^2(R+r)]\, [\text{sen}^2 d \cos^2(R-r) - \cos^2 d\, \text{sen}^2(R-r)]$$
$$= [(1 - \text{sen}^2 d)[1 - \cos^2(R + r)] - \text{sen}^2 d \cos^2(R + r)].$$
$$[\text{sen}^2 d \,.\, \cos^2(R - r) - [1 - \cos^2(R - r)](1 - \text{sen}^2 d)]$$
$$= [\cos^2 d - \cos^2(R + r)]\, [\cos^2(R - r) + \text{sen}^2 d - 1]. \qquad (1)$$

E tenendo conto, della relazione nota (Cfr. Alasia, *Geom. e Trigon. della Sfera*, Man. Hoepli)

$$\cos^2 d = \cos^2 R \,.\, \text{sen}^2 r + \cos^2(R - r)$$

da cui si trae:

$$\cos^2(R - r) = \cos^2 d - \cos^2 R \operatorname{sen}^2 r;$$

la (1) diventa:

$$\begin{aligned} A &= -[\cos^2 R . \operatorname{sen}^2 r + \cos^2(R - r) - \cos^2(R + r)] \cos^2 R . \operatorname{sen}^2 r \\ &= -[\cos^2 R . \operatorname{sen}^2 r + 4 \operatorname{sen} R . \cos R . \operatorname{sen} r . \cos r] \cos^2 R . \operatorname{sen}^2 r \\ &= -\operatorname{sen}^4 r . \cos^4 R - \operatorname{sen}^2 r . \cos^2 R . \operatorname{sen} 2R . \operatorname{sen} 2r. \end{aligned}$$ c. d. d.

800. *Essendo* $x_1, x_2, \ldots x_n$ *variabili positive, trovare il minimo della funzione*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\sqrt{x_n \sqrt{x_{n-1} \ldots \sqrt{x_3 \sqrt{x_2 x_1}}}}}.$$

F. NEDELCU.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

Poniamo

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_i + \ldots + x_n,$$

$$N = x_1^{\frac{1}{a_1}} x_2^{\frac{1}{a_2}} \ldots x_i^{\frac{1}{a_i}} \ldots x_n^{\frac{1}{a_n}},$$

e

$$\varphi = \frac{S}{N}. \tag{1}$$

La funzione proposta è un caso particolare della φ, corrispondente ad

$$a_1 = 2^{n-1},\quad a_2 = 2^{n-1},\quad a_3 = 2^{n-2}, \ldots,\quad a_i = 2^{n-i+1}, \ldots,\quad a_n = 2^1. \tag{2}$$

Dalle condizioni di minimo della funzione φ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \frac{N \frac{\partial S}{\partial x_i} - S \frac{\partial N_i}{\partial x_i}}{N^2} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

segue che, essendo tutte le x_i diverse da zero,

$$\begin{array}{ccccccccc} (1 - a_1) x_1 + & x_2 + & \ldots + & x_i + & \ldots + & x_n = 0 \\ x_1 + & (1 - a_2) x_2 + & \ldots + & x_i + & \ldots + & x_n = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 + & x_2 + & \ldots + & (1 - a_i) x_i + & \ldots + & x_n = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1 + & x_2 + & \ldots + & x_i + & \ldots + & (1 - a_n) x_n = 0. \end{array} \tag{3}$$

Da questo sistema di equazioni lineari si ricavano i valori di x_i che corrispondono ad un massimo o minimo estremo di φ.

Ma il determinante del sistema

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - a_1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 - a_2 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 - a_i & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 - a_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

è zero.

Infatti, il valore di questo determinante è

$$\Delta = (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_i \ldots a_n + (-1)^{n-1} \Sigma\, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_{n-1}},$$

dove $i_1, i_2, \dots i_{n-1}$ sono in tutti i modi possibili, $n-1$ indice scelti fra $1, 2, \dots, n$. (V., per es., Pascal, *I determinanti*, 1897, pag. 186.) Cioè

$$\Delta = (-1)^{n-1} a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_i} + \dots + \frac{1}{a_n} - 1\right].$$

Usando i valori (2), si trova che

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{a_i} = 1,$$

e quindi è Δ uguale a zero.

Dal sistema (3) si possono ottenere i rapporti delle incognite $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ che sono eguali a quelli di $\Delta_1, \Delta_2 \dots \Delta_i \dots \Delta_n$, indicando con $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_n$ i complementi algebrici degli elementi dell'ultima linea del determinante (4), ovvero i determinanti di grado $(n-1)$ della matrice seguente:

$$\left\| \begin{matrix} 1-a_1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-a_2 & \dots & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1-a_i & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1-a_{n-1} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Per calcolare Δ_i $(i = 1, 2 \dots, n-1)$, aggiungiamo agli elementi delle prime $(n-2)$ colonne quelli della colonna $(n-1)^{ma}$ moltiplicati per -1.

$$\Delta_i = \left| \begin{matrix} -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -a_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a_{i-1} & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{i+1} & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & \dots & -a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right|.$$

Da cui

$$\Delta_i = (-1)^{n-1} \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{a_i},$$
$$(i = 1, 2, \dots, (n-1)).$$

Usando i valori (2), si ha

$$\Delta_i = (-1)^{n-1} 2^s . 2^{i-2}, \qquad (5)$$
$$(i = 1, 2, \dots, (n-1)),$$

dove s indica la somma

$$s = 2 + 3 + \dots + i + \dots + (n-1).$$

Il determinante Δ_n è del tipo (4), dunque il valore di esso è

$$\Delta_n = (-1)^{n-2} a_1 a_2 \dots a_i \dots a_{n-1} \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_i} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - 1\right].$$

Mediante le (2) facilmente si trova dopo un breve calcolo.

$$\Delta_n = (1-)^{n-1} 2^s . 2^{n-2}. \qquad (5^*)$$

Si ha, come è noto,

$$x_1 : x_2 : \dots : x_i . : \dots : x_n = \Delta_1 : \Delta_2 : \dots : \Delta_i . : \dots : \Delta_n,$$

ovvero

$$x_i = \lambda \Delta_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove λ indica un fattore arbitrario; posto

$$\rho = (-1)^{n-1} 2^n \lambda$$

abbiamo

$$x_i = 2^{i-1}\rho. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Passiamo a calcolare il valore della funzione φ nel punto $(x_1, x_2, \ldots x_i, \ldots, x_n)$.

Si trova

$$S_m = \Sigma x_i = 2^{n-1}\rho,$$
$$N_m = \Pi x_i^{\frac{1}{a_i}} = 2^u \rho^v,$$

dove u, v indicano le somme seguenti

$$u = \frac{1}{a_3} + \frac{2}{a_4} + \ldots + \frac{i-2}{a_i} + \ldots + \frac{n-2}{a_n},$$
$$v = \Sigma \frac{1}{a_i} = 1.$$

Applicando la formula

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + ix^{\nu-1} + \ldots + \nu x^{\nu-1} = \frac{1-x^\nu}{(1-x)^2} - \frac{\nu x^\nu}{1-x},$$

si ottiene

$$u = \frac{1}{2^{n-2}} + (n-3),$$

ed infine

$$\varphi_m = \frac{S_m}{N_m} = \frac{2^2}{2^{\frac{1}{2^{2n-2}}}}.$$

Il valore richiesto è dunque

$$\varphi_m = \frac{4}{\sqrt[1]{\sqrt[2]{\ldots\sqrt[i]{\ldots\sqrt[n-2]{2}}}}}. \tag{7}$$

Dimostriamo poi che la funzione φ ha nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ un minimo.

Per differenziazione si trova

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i} = -\frac{2}{Na_ix_i} + \frac{\varphi}{a_ix_i^2} + \frac{\varphi}{a_i^2x_i^2},$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} = -\frac{1}{Na_ix_i} - \frac{1}{Na_kx_k} + \frac{\varphi}{a_ia_kx_ix_k};$$

Nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ si hanno dunque

$$a_{ii} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2}\right)_m = \varkappa \cdot \frac{1}{2^{i-1}},$$
$$a_{ik} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k}\right)_m = -\varkappa\frac{1}{2^n},$$

dove $\varkappa$ indica un numero positivo essendo

$$\varkappa = \frac{1}{2^{n-4} \cdot 2^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdot \rho^2}.$$

I determinanti hessiani sono

$$H_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} = (-1)^i \cdot \frac{x^i}{2^{i^2}} \cdot \begin{vmatrix} -2^i & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2^{i-1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -2^{i-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & -2^1 \end{vmatrix}.$$

L'ultimo determinante è del tipo (4); il valore di esso è dunque

$$D = (-1)^{i+1}(1+2)(1+2^2)\dots(1+2^i)\left[1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^i}\right];$$

cioè

$$H_i = (-1)^i \frac{x^i}{2^{i^2}} D = (-1)^{2i+1} \times \text{per un numero positivo.}$$

I determinanti $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots, H_n$ hanno sempre il medesimo segno; la funzione φ ha dunque in punto $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ un valore minimo.

801. *Da un punto* M *si conducano le normali ad una parabola nei punti* N_1, N_2, N_3. *Se* L_1, L_2, L_3 *sono i punti d'incontro di esse con l'asse,*

1° *qualunque sia* M *e qualunque sia la parabola, posto*

$$\frac{MN_1}{L_1N_1} = \mu_1, \qquad \frac{MN_2}{L_2N_2} = \mu_2, \qquad \frac{MN_3}{L_3N_3} = \mu_3,$$

si ha

$$2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) = 3;$$

2° *se il punto* M *si sposta sopra una parallela all'asse, si ha*

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \text{costante}, \qquad \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = \text{costante}:$$

3° *il luogo dei punti* M *tali che sia* $\mu_1\mu_2\mu_3 = \text{costante}$ *è una parabola.*

E.-N. Barisien.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

1°. Sia

$$y = \frac{x^2}{2p} \tag{1}$$

l'equazione della parabola data; si ha

$$y' = \frac{x}{p}.$$

Il coefficiente angolare della retta passante pei punti $M(\xi, \eta)$ ed $L_i(0, v_i)$ è

$$\alpha_i = \frac{\eta - v_i}{\xi},$$

dunque la retta ML_i è una normale alla parabola data se

$$\alpha_i y'_i + 1 = 0,$$

ovvero

$$\frac{\eta - v_i}{\xi} \cdot \frac{x_i}{p} + 1 = 0. \tag{2}$$

Per una formola nota si ha

$$x_i = \frac{\xi}{1 - \mu_i}, \qquad y_i = \frac{\eta - \mu_i v_i}{1 - \mu_i}. \tag{3}$$

Eliminando r_1, x_1, y_1 fra le (1), (2) e (3), si trova l'equazione

$$p\mu_i^3 - (\eta + 2p)\mu_i^2 + (2\eta + p)\mu_i - \left(\eta - \frac{\xi^2}{2p}\right) = 0, \tag{4}$$

che ha per radici i valori μ_1, μ_2, μ_3. Da questa equazione cubica si hanno le relazioni

$$\Sigma\mu_i = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \frac{\eta + 2p}{p},$$

$$\Sigma\mu_i\mu_j = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = \frac{2\eta + p}{p},$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = \eta - \frac{\xi^2}{2p}.$$

$$2\Sigma\mu_1 - \Sigma\mu_i\mu_j = 2 . \frac{\eta + 2p}{p} - \frac{2\eta + p}{p} = 3. \qquad \text{q. e. d.}$$

2°. Se il punto M si sposta sopra una retta data parallela all'asse della parabola, è $\eta =$ costante; si ha dunque

$$\Sigma\mu_i = \frac{\eta + 2p}{p} = \text{costante}. \qquad \Sigma\mu_i\mu_j = \frac{2\eta + p}{p} = \text{costante}.$$

3°. L'equazione del luogo dei punti M tali che sia $\mu_1\mu_2\mu_3 = c$ è

$$\eta - \frac{\xi^2}{2p} = c;$$

questa curva è una parabola congruente alla parabola data; più precisamente è la parabola data spostata nella direzione dell'asse della parabola stessa.

802. *Chiamo espressione probabile di una funzione* f (x) *relativamente ad un dato triangolo di lati* a, b, c *la* E_f *che misura la probabilità di chiudere un altro triangolo con i valori* f (p), f (q), f (r) *essendo* p, q, r *le perpendicolari condotte sui lati del triangolo dato da un punto preso a caso nel suo interno.*

Il Lemoine *ha studiato il caso di* f (x) = x *ed ha trovato*

$$E_f = \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Io ho esaminato il caso di f (x) = x + k, *essendo* k *una costante arbitraria positiva o negativa nel* Giornale di Battaglini, *anno 1894, pag. 358.*

Ricercare la E_f *per* f (x) = x².

F. VERDE.

Risoluzione del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

1°. Sieno x_1, x_2, x_3, le coordinate trilineari di un punto P del piano rispetto al dato triangolo ABC.

Sia il centro del circolo inscritto nel triangolo fondamentale ABC il punto-unità; si hanno le equazioni

$$x_1 = \nu p, \qquad x_2 = \nu q, \qquad x_3 = \nu r; \qquad \nu \neq 0$$

ed

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\nu\Delta, \tag{1}$$

dove Δ indica l'area del triangolo dato.

Pei punti P che sono nell'interno del triangolo ABC le coordinate x_1, x_2, x_3 hanno lo stesso segno uguale al segno di ν. I valori

$$f(p)=f\left(\frac{x_1}{\nu}\right), \qquad f(q)=f\left(\frac{x_2}{\nu}\right), \qquad f(r)=f\left(\frac{x_3}{\nu}\right)$$

sono le lunghezze di lati in un triangolo se sono verificate le inequazioni

$$\begin{aligned}
\nu F_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv -f\left(\frac{x_1}{\nu}\right)+f\left(\frac{x_2}{\nu}\right)+f\left(\frac{x_3}{\nu}\right)\geqq 0, \ldots (C_1)\\
\nu F_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv \quad f\left(\frac{x_1}{\nu}\right)-f\left(\frac{x_2}{\nu}\right)+f\left(\frac{x_3}{\nu}\right)\geqq 0, \ldots (C_2)\\
\nu F_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv \quad f\left(\frac{x_1}{\nu}\right)+f\left(\frac{x_2}{\nu}\right)-f\left(\frac{x_3}{\nu}\right)\geqq 0, \ldots (C_3)
\end{aligned} \qquad (2)$$

L'insieme dei punti P che soddisfano le condizioni (2) è un campo del piano. Indicando con F l'area della parte comune a questo campo col triangolo dato, si ha:

$$E_f = \frac{F}{\Delta}. \qquad (3)$$

2°. Nel caso nostro è

$$f(x) = x^2,$$

dunque per le (2) si ha, perchè $\nu \neq 0$,

$$\begin{aligned}
F_1(x_1, x_2, x_3) &\equiv -x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geqq 0 \ldots (C_1)\\
F_2(x_1, x_2, x_3) &\equiv \quad x_1^2-x_2^2+x_3^2 \geqq 0 \ldots (C_2)\\
F_3(x_1, x_2, x_3) &\equiv \quad x_1^2+x_2^2-x_3^2 \geqq 0 \ldots (C_3)
\end{aligned} \qquad (2^*)$$

È facile vedere che queste ineguaglianze determinano un triangolo limitato da archi di conica. Le tre coniche (2*) concorrono due a due in punti situati sui lati del triangolo.

La conica C_3 divide, come è noto, il piano in due parti: nella prima di essi la funzione F_3 è sempre di segno positivo, nella seconda essa è sempre di segno negativo; sul limite comune delle due parti è $F_3 = 0$. Perchè $F_3(0, 0, x_3) < 0$, il punto C è sulla parte negativa di C_3; similmente si trova che B è nella parte negativa di C_2 e A è nella parte negativa di C_1.

Indicheremo con t_a l'area della figura limitata dai lati b, c e dalla conica C_1 di (2*); t_b, t_c hanno significati simili.

Dunque, si ha

$$F = \Delta - (t_a + t_b + t_c)$$

e quindi

$$E_f = 1 - \frac{\Delta}{t_a + t_b + t_c}. \qquad (3^*)$$

3°. *Calcolo di* t_c. — Indicando con α, β, γ gli angoli del triangolo ABC, sieno

$$p = \rho \operatorname{sen} \varphi, \qquad q = \rho \operatorname{sen} \psi = \rho \operatorname{sen}(\gamma - \varphi)$$

e $\dfrac{q}{p} = \lambda$, dove ρ, φ sono le coordinate polari del punto $P(x_1, x_2, x_3)$ rispetto al centro C e l'asse a. Si ha

$$x_1 = \nu\rho \operatorname{sen}\varphi, \qquad x_2 = \lambda\nu\rho \operatorname{sen}(\gamma - \varphi); \qquad (4)$$

$$\lambda = \frac{\operatorname{sen}(\gamma - \varphi)}{\operatorname{sen}\varphi}. \qquad (5)$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 fra le (1), (2^*C_3) e (4) si trova l'equazione polare della conica $C_3 : F_3 = 0$; si ha

$$\rho = \frac{2\Delta}{(a + b\lambda) \mp c\sqrt{1 + \lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}. \tag{6}$$

I punti della conica che appartengono al segno superiore nella (6) sono nell'area del triangolo dato. Infatti, l'equazione polare del lato AB, come si dimostra con un breve calcolo, è

$$R = \frac{2\Delta}{a + b\lambda} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi},$$

e quindi i punti che sono nel triangolo ABC sono dati dalla formola seguente:

$$\rho = \frac{2\Delta}{\operatorname{sen}\varphi} \cdot \frac{1}{(a + b\lambda) + c\sqrt{1 + \lambda^2}}. \tag{7}$$

Si ha

$$t_c = \frac{1}{2}\int_0^{\gamma} \rho^2 \, d\varphi$$

$$= \frac{2\Delta^2}{\operatorname{sen}\gamma}\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\left[(a + b\lambda) + c\sqrt{1 + \lambda^2}\right]^2}. \tag{8}$$

Abbiamo usato, per formare $d\varphi$, nella trasformazione dell'integrale, la formula (5).

Sostituendo nella (8)

$$\sqrt{1 + \lambda^2} = t - \lambda,$$

si ha:

$$t_c = \frac{4\Delta^2}{\operatorname{sen}\gamma}\int_1^{\infty} \frac{(1 + t^2)\, dt}{\left[-(b - c) + 2at + (b + c)t^2\right]^2} =$$

$$= \Delta\left[\frac{ab}{(a + c)(b + c)} + \frac{(a + b + c)\,abc}{(a + c)(b + c)\,\delta_c} + \frac{abc}{\delta_c\sqrt{\delta_c}}\log\frac{a + b + c - \sqrt{\delta_c}}{a + b + c + \sqrt{\delta_c}}\right],$$

dove abbiamo usato la seguente relazione:

$$2\Delta = ab \operatorname{sen}\gamma; \qquad \text{e dove} \qquad \delta_c = a^2 + b^2 - c^2.$$

Si ha:

$$\frac{t_c}{\Delta} = \frac{ab}{(a + c)(b + c)} + \frac{(a + b + c)\,abc}{(a + c)(b + c)\,\delta_c} + \frac{abc}{\delta_c\sqrt{\delta_c}}\log\frac{a + b + c - \sqrt{\delta_c}}{a + b + c + \sqrt{\delta_b}}.$$

4°. Indicando con $\Sigma\Phi(\delta_c)$ la somma seguente

$$\Sigma\Phi(\delta_c) = \Sigma\Phi(\delta_a) + \Phi(\delta_b) + \Phi(\delta_c),$$

si trova che dalla (3*):

$$Ef = \frac{2\,abc}{(a + b)(b + c)(c + a)} -$$

$$-\left[\frac{(a + b + c)\,abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}\,\Sigma\frac{a + b}{\delta_c} + abc\,\Sigma\frac{1}{\delta_c\sqrt{\delta_c}}\log\frac{a + b + c - \sqrt{\delta_c}}{a + b + c + \sqrt{\delta_c}}\right] \tag{9}$$

dove

$$\delta_a = -a^2 + b^2 + c^2, \qquad \delta_b = a^2 - b^2 + c^2, \qquad \delta_c = a^2 + b^2 - c^2.$$

Se il triangolo è rettangolo, dei termini contenenti il log. uno sarà zero, uno sarà imaginario e diviene una funzione di arctg.

5°. Applicando ora per es. la (9) nel caso del triangolo equilatero, si trova

$$Ef = 3 \operatorname{logtan} 2 - 2 = 0{,}0793.$$

QUISTIONI PROPOSTE

804. Dato un sistema di coniche omofocali S, trovare:

a) l'inviluppo delle polari di un punto (α, β);

b) il luogo del polo di una retta (u, v);

c) l'inviluppo delle normali tali che le tangenti ai punti d'incidenza passino per un punto fisso (α, β).

NEPPI MODONA.

805. Data un'ellisse e di assi $2a$, $2b$ si considerino i due circoli (di Chasles) c, c' di raggi $a+b$ e $a-b$ concentrici ad e. Esistono infiniti triangoli inscritti a c e circoscritti ad e. Gli ortocentri di questi triangoli si trovano su c'.

806. Trovare il luogo dei punti tali che conducendo le quattro normali ad un'ellisse, la somma dei quadrati dei raggi di curvatura nei piedi delle dette normali sia costante.

E.-N. BARISIEN.

Società Italiana per il progresso delle Scienze

La settima riunione sarà tenuta in Siena dal 22 al 27 settembre prossimo. L'inaugurazione sarà fatta il 22 a ore 9 nella sala del Mappamondo del Palazzo Comunale con un discorso del prof. *Garbasso* " Sui principi della meccanica ". Per le adunanze a classi riunite sono annunziati discorsi dai proff. *Bonucci, Ferrara, Manasse, Millosevich Elia, Nasini, Rossi, Sclaro* e *Valenti*.

La Società italiana di Fisica e la Società italiana di Biochimica terranno le loro riunioni in coincidenza col Congresso.

Il Municipio di Siena e la R. Accademia dei Rozzi offriranno ciascuno un ricevimento ai congressisti.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 2 Settembre 1913.