

Le successioni delle  $(u)$  e  $(r)$  sono:

$$1, 0, -2, -4, -4, 0, 8, 16, 16, 0, -32, -64, -64 \dots (u)$$

$$1, 2, 2, 0, -4, -8, -8, 0, 16, 32, 32, 0, -64 \dots (v)$$

e risulta per  $h$  positivo intero:

$$u_{4h-2} = 0$$

$$u_{4h-1} = (-1)^h 2^{2h-1}$$

$$u_{4h} = (-1)^h \cdot 2^{2h}$$

$$u_{4h+1} = u_{4h} = 2u_{4h-1}$$

ed ancora:

$$r_{4h} = 0$$

$$r_{4h+1} = (-1)^h 2^{2h}$$

$$r_{4h+2} = (-1)^h 2^{2h+1}$$

$$r_{4h+3} = r_{4h+2} = 2r_{4h+1}$$

Applicando la 3ª delle (13), si trova riguardo alle  $\tau_i$ :

$$\tau_{i,4h} = (-1)^{h-1} 2^{2h-1} (\tau_{i2} - 2\tau_{i1})$$

$$\tau_{i,4h+1} = (-1)^h 2^{2h} \tau_{i1}$$

$$\tau_{i,4h+2} = (-1)^h 2^{2h} \tau_{i2}$$

$$\tau_{i,4h+3} = (-1)^h 2^{2h+1} (\tau_{i2} - \tau_{i1}).$$

15°. Sia  $p = q = \frac{1}{2}$ . È uno dei casi n. 3. Si ha  $a = \frac{1}{4}$ ;  $b = \frac{3}{4}$ ;  $r = 9$ . Risulta dalle (8') ed (u):

$$u_n = \frac{2^{n+1} (-1)^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0,2,\dots,n} \binom{n}{i} 3^i$$

$$r_n = \frac{2^{n+1} (-1)^{n-1}}{3 \cdot 2^{n-1}} = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{i=1,3,\dots,n} \binom{n}{i} 3^{i-1}.$$

Inoltre:

$$u_n = \frac{(-1)^n \cdot 3}{2^{n+1}} + u_{n-1}$$

$$r_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + r_{n-1}.$$

La 1ª, 6ª, 7ª delle (13) diventano:

$$\tau_{in} = \frac{2\tau_{i2} + \tau_{i1}}{3} + \frac{(-1)^n (\tau_{i2} - \tau_{i1})}{3 \cdot 2^{n-2}}$$

$$\tau_{i,n-1} + \tau_{in} = \frac{2(2\tau_{i2} + \tau_{i1})}{3} + \frac{(-1)^n (\tau_{i2} - \tau_{i1})}{3 \cdot 2^{n-1}}$$

$$\tau_{i,n-1} - \tau_{in} = \frac{(-1)^{n-1} (\tau_{i2} - \tau_{i1})}{2^{n-1}}.$$

Averemo adunque:

$$\lim \tau_{in} = \frac{2\tau_{i2} + \tau_{i1}}{3} = \frac{2}{3} \left( \tau_{i2} + \frac{\tau_{i1}}{2} \right).$$

Tale è il limite verso cui converge una successione di numeri che comincia con  $\gamma_1, \gamma_2$  e nella quale ciascun termine è media aritmetica dei due che lo precedono. (1)

(1) Si può giungere in altro modo alla suddetta espressione di  $\gamma_n$  in funzione di  $\gamma_1, \gamma_2$ . Siano  $l_1, l_2, l_3, \dots$  i termini di una successione determinata dai valori iniziali  $l_1, l_2$  e dalla condizione di dover risolvere l'equazione ricorrente  $l_n = l_{n-1} + 2l_{n-2}$ . Sia  $l'_1, l'_2, l'_3, \dots$  la successione che risolve un'analoga equazione e che è determinata dai valori iniziali  $l'_1, l'_2$ . Per la (13) l'espressione del termine generale  $l'_n$  è data da:

$$l'_n = 2 \frac{\gamma_1}{2} l_{n-1} + \gamma_2 l_n.$$

Ora se  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$  è soluzione dell'equazione ricorrente

$$\gamma_n = \frac{1}{2} \gamma_{n-1} + \frac{1}{2} \gamma_{n-2}$$

applicando quanto è stato detto alla fine del § 2<sup>o</sup> sulle equazioni ricorrenti della forma

$$\gamma_n = \frac{\alpha}{k} \gamma_{n-1} + \frac{\beta}{k} \gamma_{n-2},$$

si ha:

$$\gamma_n = \frac{1}{2^{n-2}} l'_n \quad \text{ovvero:} \quad \gamma_n = \frac{l_{n-1} \gamma_1 + l_n \gamma_2}{2^{n-2}}.$$

L'espressione di  $l_n$  si ha dalla 3<sup>a</sup> delle (13), tenuto conto che  $l_1 = 0, l_2 = 1$ . Risulta  $l_n = c_{n-1}$ , essendo  $c_{n-1}$  dato in funzione di  $n$  (v. n. II c) dalla formola

$$l_n = c_{n-1} = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}.$$

Risulta adunque:

$$\gamma_n = \left( \frac{\gamma_1}{3} + \frac{(-1)^{n-1} \gamma_1}{3 \cdot 2^{n-2}} \right) + \left( \frac{2\gamma_2}{3} + \frac{(-1)^n \gamma_2}{3 \cdot 2^{n-2}} \right)$$

che non differisce da quella già trovata, e mostra ancora che  $\lim \gamma_n = \frac{2}{3} \gamma_1 + 2\gamma_2$ .

Indicando ora con  $b_1, b_2, b_3, \dots$  la successione determinata dai valori iniziali  $b_1, b_2$ , e dalla relazione  $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n-2}}$ , tale adunque che ciascun termine sia media geometrica dei due che lo precedono, si trova facilmente che:

$$b_n = \sqrt[n]{b_1^{n-1} b_2}.$$

Sostituendo ad  $l_{n-1}, l_n$  le loro espressioni in funzione di  $n$ , risulta poi:

$$\lim b_n = \sqrt[3]{b_1 b_2^2} = b_1 \sqrt[3]{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2}.$$

Le relazioni  $\lim a_n = \frac{2}{3} \left( a_2 + \frac{a_1}{2} \right)$ , essendo  $a_1, a_2, \dots$  una successione tale che ogni ter-

mine sia la media aritmetica dei due precedenti e  $\lim b_n = b_1 \sqrt[3]{\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2}$ , essendo  $b_1, b_2, \dots$  una successione tale che ciascun termine sia la media geometrica dei due precedenti, trovansi proposte per la dimostrazione in <sup>2</sup> FUBINI, *Lezioni di Analisi Algebrica*, Torino, S. T. E. S., pag. 120, esercizi sui limiti, n. 9 e 10. Di tali successioni si parla anche brevemente nella mia nota già citata (*P. Mat.*, fase. IV, 1904).

V. — Particolari equazioni ricorrenti di ordine superiore al 2°.

Consideriamo ancora gli sviluppi:

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= a + b \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a + b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a + b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\ (a + b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

ed in ognuno dei secondi membri scegliamo i termini che occupano i posti 1°, 4°, 7°, 10°, ... (i posti essendo contati da sinistra a destra) e sommiamoli. Consideriamo le somme ottenute quali elementi di una successione  $u_1, u_2, u_3, \dots$ . Del pari scegliamo in ognuno dei secondi membri i termini di posto 2°, 5°, 8°, 11°, ... e sommiamoli dopo averli divisi per  $b$ ; colle somme formiamo una successione  $v_1, v_2, v_3, \dots$ ; infine scegliamo i termini che occupano i posti 3°, 6°, 9°, 12°, ... e sommiamoli dopo averli divisi per  $b^2$ ; colle somme formiamo una successione  $w_1, w_2, w_3, \dots$ . Adunque  $u_n, v_n, w_n$  sono le somme dei termini rispettivamente di posto 1°, 4°, 7°, ...; 2°, 5°, 8°, ... divisi per  $b$ ; 3°, 6°, 9°, ... divisi per  $b^2$ , nello sviluppo di  $(a + b)^n$ . Le tre successioni sono adunque:

$$\begin{array}{cccccc} a, & a^2, & a^3 + b^3, & a^4 + 4ab^3, & a^5 + 10a^2b^3, & a^6 + 20a^3b^3 + b^6, \dots & (u) \\ 1, & 2a, & 3a^2, & 4a^3 + b^3, & 5a^4 + 5ab^3, & 6a^5 + 15a^2b^3, \dots & (v) \\ 0, & 1 & 3a, & 6a^2, & 10a^3 + b^3 & 12a^4 + 6ab^3, \dots & (w) \end{array}$$

Passano tra gli elementi di tali successioni notevoli relazioni. Notiamo ad esempio le seguenti:

$$\begin{aligned} a(u_n + v_{n-1} + w_{n-2}) &= u_{n-1} \\ u_n + av_n &= v_{n-1} \\ v_n + av_n &= w_{n-1} \\ au_n + b^3w_n &= u_{n-1} \\ u_n + bv_n + b^2w_n &= (a + b)^n \\ au_n + b^3v_{n-1} + ab^3w_{n-1} &= u_{n+1} \end{aligned}$$

ecc. Ma assai più importante per noi è notare che le tre successioni sono tre soluzioni della equazione ricorrente lineare del 3° ordine a coefficienti costanti:

$$r_n = 3ar_{n-1} - 3a^2r_{n-2} + (a^3 + b^3)r_{n-3}$$

come è agevole constatare.

Sia ora una equazione ricorrente lineare di 3° ordine

$$\tau_{3n} = \alpha\tau_{3n-1} + \beta\tau_{3n-2} + \gamma\tau_{3n-3} \quad (24)$$

e sia  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \dots$  una successione che risolva tale equazione, determinata dai valori iniziali  $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$ .

Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono tali che sia possibile determinare due numeri  $a, b$  per modo che:

$$\alpha = 3a; \quad \beta = -3a^2; \quad \gamma = a^3 + b^3$$

ovvero:

$$a = \frac{\alpha}{3} = \pm \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}}; \quad b = \sqrt[3]{\gamma - \frac{\alpha^3}{27}} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{27\gamma - \alpha^3}$$

(il segno del  $\sqrt[3]{\quad}$  è determinato, poichè esso deve valere  $\frac{\alpha}{3}$ ).

Posto

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 + b^3 \\ 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 = \gamma \neq 0$$

la (24) ci permette scrivere:

$$\tau_{3n} = \frac{1}{a^3 + b^3} \left\{ \begin{array}{l} u_n \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \end{vmatrix} + v_n \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 + b^3 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & 3a \end{vmatrix} + \\ + w_n \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 + b^3 \\ 1 & 2a & 3a^2 \\ \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \end{vmatrix} \end{array} \right\}$$

ovvero:

$$\tau_{3n} = \frac{1}{a^3 + b^3} [u_n(\tau_{13} - 3a\tau_{12} + 3a^2\tau_{11}) + v_n(-a\tau_{13} + 3a^2\tau_{12} - (2a^3 - b^3)\tau_{11}) + \\ + w_n(a^2\tau_{13} - (2a^3 - b^3)\tau_{12} - (2ab^3 - a^4)\tau_{11})]. \quad (25)$$

Si ha poi:

$$u_n = \sum_{0, 3, 6, \dots, 3n'} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{0, 3, 6, \dots, 3n'} \binom{n}{i} a^{n-i} (\gamma - a^3)^{\frac{i-1}{3}}$$

$n'$  essendo il maggior intero, anche nullo, tale che  $3n' \leq n$ ; ( $n \geq 1$ );

$$v_n = \sum_{1, 4, 7, \dots, 3n'+1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-1} = \sum_{1, 4, 7, \dots, 3n'+1} \binom{n}{i} a^{n-i} (\gamma - a^3)^{\frac{i-1}{3}} \quad (26)$$

$n'$  essendo il maggior intero, anche nullo, tale che  $3n' + 1 \leq n$ ; ( $n \geq 1$ );

$$w_n = \sum_{2, 5, 8, \dots, 3n'+2} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-2} = \sum_{2, 5, 8, \dots, 3n'+2} \binom{n}{i} a^{n-i} (\gamma - a^3)^{\frac{i-2}{3}}$$

$n'$  essendo il maggior intero, anche nullo, tale che  $3n' + 2 \leq n$ ; ( $n \geq 2$ ).

La (25) ci permette di esprimere  $\tau_n$  in funzione dei valori iniziali  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  e delle costanti  $\alpha, \beta, \gamma$ . Osserviamo ancora che si è supposto di assumere per  $b$  il valore reale soddisfacente all'equazione  $\gamma = a^3 + b^3$ ; ma possono assumersi anche i valori complessi. Infatti le (26) mostrano che  $u_n, v_n, w_n$  risultano sempre reali, e quindi la (25) è valida anche se si assumono per  $b$  i valori complessi.

Es.: sia  $\tau_1 = 1; \tau_2 = 2; \tau_3 = 3$

$$\tau_n = 6\tau_{n-1} - 12\tau_{n-2} + 35\tau_{n-3}$$

talchè:  $a = 2; b = 3$ .

Le successioni delle  $u, v, w$  sono:

|    |    |     |      |               |     |
|----|----|-----|------|---------------|-----|
| 2, | 4, | 35, | 232, | 1112. . . . . | (u) |
| 1, | 4, | 12, | 59,  | 350. . . . .  | (v) |
| 0, | 1, | 6,  | 24,  | 107. . . . .  | (w) |

La successione delle  $\eta$  è

|    |    |    |     |              |
|----|----|----|-----|--------------|
| 1, | 2, | 3, | 29, | 208. . . . . |
|----|----|----|-----|--------------|

Si ha dalla (25) ad es. per  $n = 5$ :

$$\tau_5 = \frac{1}{35} [(3-12+12)1112 + (-6+24+11)350 + (12+22-92)107] = 208.$$

\* \* \*

Consideriamo nuovamente gli sviluppi delle potenze di  $(a + b)$ , e formiamo quattro successioni  $u_1, u_2, u_n, \dots; v_1, v_2, \dots, v_n, \dots; w_1, w_2, w_n, \dots; z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ ; essendo  $u_n$  la somma dei termini che occupano i posti  $1^\circ, 5^\circ, 9^\circ, \dots$  nello sviluppo di  $(a + b)^n$ ;  $v_n$  la somma di quelli che occupano i posti  $2^\circ, 6^\circ, 10^\circ, \dots$  divisi per  $b$ ;  $w_n$  la somma di quelli che occupano i posti  $3^\circ, 7^\circ, 11^\circ, \dots$  divisi per  $b^2$ , e  $z_n$  la somma di quelli che occupano i posti  $4^\circ, 8^\circ, 12^\circ, \dots$  divisi per  $b^3$ . Tali successioni sono adunque:

|      |        |         |              |                |                         |     |
|------|--------|---------|--------------|----------------|-------------------------|-----|
| $a,$ | $a^2,$ | $a^3,$  | $a^4 + b^4,$ | $a^5 + 5ab^4,$ | $a^6 + 15a^2b^4, \dots$ | (u) |
| 1,   | $2a,$  | $3a^2,$ | $4a^3,$      | $5a^4 + b^4,$  | $6a^5 - 6ab^4, \dots$   | (v) |
| 0,   | 1,     | $3a,$   | $6a^2,$      | $10a^3,$       | $15a^4 - b^4, \dots$    | (w) |
| 0,   | 0,     | 1,      | $4a,$        | $10a^2,$       | $20a^3, \dots$          | (z) |

ed è agevole constatare che ognuna di esse è soluzione dell'equazione ricorrente lineare del 4° ordine

$$\tau_n = 4a\tau_{n-1} - 6a^2\tau_{n-2} + 4a^3\tau_{n-3} + (b^4 - a^4)\tau_{n-4}.$$

Sia ora

$$\tau_n = \alpha\tau_{n-1} + \beta\tau_{n-2} + \gamma\tau_{n-3} + \delta\tau_{n-4}$$

un'equazione ricorrente lineare del 4° ordine a coefficienti costanti e siano  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  tali che possano determinarsi due numeri  $a, b$  per modo che:

$$\alpha = 4a; \quad \beta = -6a^2; \quad \gamma = 4a^3; \quad \delta = b^4 - a^4$$

ovvero:

$$a = \frac{\alpha}{\pm} = \pm \sqrt[4]{-\frac{\beta}{\alpha}} = \sqrt[4]{\frac{\gamma}{\alpha}}; \quad b = \sqrt[4]{\frac{\delta}{\alpha} + a^4}.$$

(il segno del radicale  $\sqrt[4]{-\frac{\beta}{\alpha}}$  è determinato, dovendo esso valere  $\frac{\alpha}{\pm}$ ).

Posto:

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 - b^4 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 0 & 1 & 3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4a \end{vmatrix} = a^4 - b^4 = -\delta \neq 0$$

risulta dalle (4):

$$\begin{aligned} r_n = \frac{1}{a^4 - b^4} & \left\{ u_n \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 0 & 1 & 3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4a \end{vmatrix} + v_n \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 - b^4 \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 1 & 3a & 6a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4a \end{vmatrix} + \right. \\ & \left. + w_n \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 - b^4 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 4a \end{vmatrix} + z_n \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 - b^4 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 0 & 1 & 3a & 6a^2 \\ r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \end{vmatrix} \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

che serve ad esprimere  $r_n$  in funzione di  $r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

Si ha poi:

$$u_n = \sum_{i=0, 4, 8, \dots, 4n'} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i = \sum_{i=0, 4, 8, \dots, 4n'} \binom{n}{i} a^{n-i} (\delta + a^4)^{i/4}$$

$n'$  essendo il maggior intero tale che  $4n' \leq n$ ; ( $n \geq 1$ )

$$v_n = \sum_{i=1, 5, 9, \dots, 4n'+1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-1} = \sum_{i=1, 5, 9, \dots, 4n'+1} \binom{n}{i} a^{n-i} (\delta + a^4)^{(i-1)/4}$$

$n'$  essendo il maggior intero tale che  $4n' + 1 \leq n$ ; ( $n \geq 1$ )

$$w_n = \sum_{i=2, 6, 10, \dots, 4n'+2} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-2} = \sum_{i=2, 6, 10, \dots, 4n'+2} \binom{n}{i} a^{n-i} (\delta + a^4)^{(i-2)/4}$$

$n'$  essendo il maggior intero tale che  $4n' + 2 \leq n$ ; ( $n \geq 2$ )

$$z_n = \sum_{i=3, 7, 11, \dots, 4n'+3} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-3} = \sum_{i=3, 7, 11, \dots, 4n'+3} \binom{n}{i} a^{n-i} (\delta + a^4)^{(i-3)/4}$$

$n'$  essendo il maggior intero tale che  $4n' + 3 \leq n$ ; ( $n \geq 3$ ).

Si può assumere quale valore di  $b$ , una qualsiasi radice dell'equazione  $b^4 = \delta + a^4$ ; le  $u, v, w, z$  risultano sempre reali, epperò la (27) è valida in ogni caso.

Es. sia

$$\tau_n = 8\tau_{n-1} - 24\tau_{n-2} + 32\tau_{n-3} + 65\tau_{n-4}$$

talchè:  $a = 2; b = 3$ . Le successioni  $(u), (v), (w), (z)$  sono:

|    |    |     |     |                |       |
|----|----|-----|-----|----------------|-------|
| 2, | 4, | 8,  | 97, | 842, . . . . . | $(u)$ |
| 1, | 2, | 12, | 32, | 161, . . . . . | $(v)$ |
| 0, | 1, | 6,  | 24, | 80, . . . . .  | $(w)$ |
| 0, | 0, | 1,  | 8,  | 40, . . . . .  | $(z)$ |

Posto  $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 0, \tau_4 = 3$ , la successione delle  $\tau$  è:

|    |    |    |    |      |                 |          |
|----|----|----|----|------|-----------------|----------|
| 1, | 2, | 0, | 3, | 153, | 1282, . . . . . | $(\tau)$ |
|----|----|----|----|------|-----------------|----------|

I determinanti moltiplicatori di  $u_n, v_n, w_n, z_n$  nella (27) valgono rispettivamente  $-19, -27, 54, 152$  e per  $n = 5$  si ha:

$$\tau_5 = 153 = -\frac{1}{65} \{842(-19) + 161(-27) + 80 \cdot 54 + 40 \cdot 152\}.$$

\* \* \*

Occupiamoci ora di una particolare equazione ricorrente lineare di ordine  $m$ . Per  $m = 2, 3, 4$  si ricadrà appunto nei casi già considerati. Osserviamo anzitutto che sottraendo nel determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^m + b^m & \binom{m-1}{m-1} a^{m-1} & \binom{m-2}{m-2} a^{m-2} & \dots & a^3 & a^2 & a \\ \binom{m}{m-1} a^{m-1} & \binom{m-1}{m-2} a^{m-2} & \binom{m-2}{m-3} a^{m-3} & \dots & 3a^2 & 2a & 1 \\ \binom{m}{m-2} a^{m-2} & \binom{m-1}{m-3} a^{m-3} & \binom{m-2}{m-4} a^{m-4} & \dots & 3a & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{m}{3} a^3 & \binom{m-1}{2} a^2 & \binom{m-2}{1} a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{m}{2} a^2 & \binom{m-1}{1} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \binom{m}{1} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

da ciascuna verticale (l'ultima eccettuata) la successiva moltiplicata per  $a$ , poi in quello ottenuto sottraendo da ciascuna verticale (le ul-

time due eccettuate) la successiva moltiplicata per  $a$  ecc... ripetendo quante volte è possibile tale operazione, si ottiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b^m & 0 & \dots & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

ovvero, sviluppando secondo gli elementi della 1<sup>a</sup> linea:

$$\Delta = b^m \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{m-1} a \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

epperò:

$$\Delta = b^m (-1)^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}} + a^m (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

Ne risultano i seguenti casi:

| $m,$               | $\frac{(m-1)(m-2)}{2},$ | $\frac{m(m-1)}{2},$ | $\Delta$     |
|--------------------|-------------------------|---------------------|--------------|
| $4h; h > 0$        | dispari                 | pari                | $a^m - b^m$  |
| $4h + 1; h > 0$    | pari                    | pari                | $a^m + b^m$  |
| $4h + 2; h \geq 0$ | pari                    | dispari             | $b^m - a^m$  |
| $4h + 3; h \geq 0$ | dispari                 | dispari             | $-a^m - b^m$ |

Consideriamo ora gli sviluppi di  $(a+b)^1, (a+b)^2, \dots, (a+b)^n, \dots$ . Formiamo una prima successione colle espressioni ottenute sommando i termini che occupano i posti  $1^o, (m+1)^{mo}, (2m+1)^{mo}, (3m+1)^{mo}, \dots$  rispettivamente nel 2<sup>o</sup> membro dello sviluppo di  $(a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3, \dots$  talchè l' $n^{mo}$  elemento di essa è la somma dei termini  $1^o, (m+1)^{mo}, (2m+1)^{mo}, \dots$  di  $(a+b)^n$ . Sia  $u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, \dots$  tale successione. Del pari formiamone una seconda  $u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \dots$  essendo l' $n^{mo}$  termine di essa  $u_n^{(2)}$  la somma dei termini di posto  $2^o, (m+2)^{mo}, (2m+2)^{mo}, (3m+2)^{mo}, \dots$ , divisi per  $b$ , dello sviluppo di  $(a+b)^n, \dots$  una  $j^{ma}, u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots$  essendo  $u_n^{(j)}$  la somma dei termini di posto  $j^{mo}, (m+j)^{mo}, (2m+j)^{mo}, \dots$ , divisi per  $b^{j-1}$ , dello sviluppo di  $(a+b)^n, \dots$  infine una  $m^{ma}, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}, \dots$  essendo  $u_n^{(m)}$  la somma dei termini di posto  $m^{mo}, 2m^{mo}, 3m^{mo}, \dots$ , divisi per  $b^{m-1}$ , nello sviluppo di  $(a+b)^n$ .

Tali successioni sono:

|             |  |
|-------------|--|
| $u^{(1)}$   | $a, a^2, a^3, a^4, \dots, a^r, \dots, a^{m-1}, a^m + b^m, a^{m-1} + \binom{m+1}{1} ab^m, \dots$  |
| $u^{(2)}$   | $1, 2a, 3a^2, 4a^3, \dots, \binom{r}{1} a^{r-1}, \dots, \binom{m-1}{1} a^{m-2}, \binom{m}{1} a^{m-1}, \binom{m+1}{1} a^m + b^{m-1}, \dots$ |
| $u^{(3)}$   | $0, 1, 3a, 6a^2, \dots, \binom{r}{2} a^{r-2}, \dots, \binom{m-1}{1} a^{m-3}, \binom{m}{2} a^{m-2}, \binom{m+1}{2} a^{m-1}, \dots$          |
| $\vdots$    | $\vdots$   |
| $u^{(r)}$   | $\dots, \dots, \binom{r-1}{r} a, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$  |
| $u^{(r+1)}$ | $\dots, \dots, 1, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots$  |
| $\vdots$    | $\vdots$   |
| $u^{(m-1)}$ | $0, 0, \dots, 0, \dots, 1, \binom{m}{m-1} a, \binom{m+1}{m-1} a^2, \dots$  |
| $u^{(m)}$   | $0, 0, \dots, 0, \dots, \binom{m-1}{m-2} a, \binom{m}{m-2} a^2, \binom{m+1}{m-2} a^3, \dots$   |

Per comporre una verticale di questo specchio di successioni p. es. la  $r^{ma}$ , basta, cominciando dall'alto, scrivere nella 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, ... orizzontale, i successivi termini dello sviluppo di  $(a + b)^r$ , avvertendo, dopo arrivati all'ultima orizzontale, di ricominciare dalla prima, e di dividere per  $b^1, b^2, b^3, b^4, \dots$  i termini scritti nelle orizzontali 2<sup>a</sup>, 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup>, 5<sup>a</sup>, ... , rispettivamente, intendendo infine sommati i termini appartenenti ad una stessa orizzontale e verticale.

Risultano evidentemente le seguenti proprietà:

$$u_n^{(i)} + a u_n^{(i-1)} = u_{n+1}^{(i-1)}, \quad u_n^{(1)} + b u_n^{(2)} + b^2 u_n^{(3)} + \dots + b^{m-1} u_n^{(m)} = (a + b)^n$$

cioè: 1° un elemento di una successione vale il precedente di essa moltiplicato per  $a$ , più il precedente della successione immediatamente anteriore;

2° la somma dei prodotti degli elementi  $u_n^{(i)}$  delle successioni moltiplicati rispettivamente per  $b^0, b^1, b^2, \dots, b^{m-1}$  vale  $(a + b)^n$ .

Si ha infine:

$$u_n^{(i)} = \sum_{j=1, m+j-1, 2m+j-1, \dots, km+j-1} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-j+1}$$

$km + j - 1$  essendo il maggior intero tale che  $km + j - 1 \leq n$  ed  $n \geq j - 1$ .

Ora le  $m$  successioni suddette risolvono l'equazione lineare ricorrente di ordine  $m$ :

$$\eta_n = \binom{m}{1} a \eta_{n-1} - \binom{m}{2} a^2 \eta_{n-2} + \dots + (-1)^{r-1} \binom{m}{r} a^r \eta_{n-r} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{m-2} \binom{m}{m-1} a^{m-1} \eta_{n-m+1} + (b^m + (-1)^{m-1} a^m) \eta_{n-m}. \quad (28)$$

Data adunque l'equazione ricorrente lineare di ordine  $m$ , a coefficienti costanti:

$$\eta_n = p_1 \eta_{n-1} + p_2 \eta_{n-2} + \dots + p_r \eta_{n-r} + \dots + p_m \eta_{n-m}$$

se  $\eta_1, \eta_2, \dots$  è una soluzione di essa determinata dagli  $m$  valori iniziali  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ , dalla (4) si ha l'espressione dell'elemento generale  $\eta_n$  di essa in funzione di  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m, p_1, \dots, p_m$ :

$$\eta_n = -\frac{1}{\Delta} \sum_j u_n^{(j)} D_j^{(j)} \quad (29)$$

nella quale: 1°.  $\Delta = a^m - b^m, a^m + b^m, b^m - a^m, -a^m - b^m$  secondochè:  $m$  è della forma  $4h, 4h+1, 4h+2, 4h+3$ .

2°.  $D^{(j)}$  è il determinante ottenuto da

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & \dots & a^r & \dots & a^{m-1} & a^m + b^m \\ 1 & 2a & 3a^2 & \dots & \binom{r}{1} a^{r-1} & \dots & \binom{m-1}{1} a^{m-2} & \binom{m}{1} a^{m-1} \\ 0 & 1 & 3a & \dots & \binom{r}{2} a^{r-2} & \dots & \binom{m-1}{2} a^{m-3} & \binom{m}{2} a^{m-2} \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \binom{r}{r-1} a & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \binom{m-1}{m-2} a & \binom{m}{m-2} a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & 1 & \binom{m}{m-1} a \end{vmatrix}$$

(che ha per elementi 1°, 2°, ...  $m^{\text{mo}}$  della linea ad es.  $s^{\text{ma}}$ , gli elementi  $u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, u_3^{(s)}, \dots$  della successione delle  $u^{(s)}$ ), sostituendo agli elementi della  $j^{\text{ma}}$  linea i numeri  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_m$ .

3°.  $a$  e  $b$  sono due numeri determinati dalle relazioni, che supponiamo simultaneamente possibili,

$$p_1 = \binom{m}{1} a; \quad p_2 = -\binom{m}{2} a^2; \quad \dots \quad p_r = (-1)^{r-1} \binom{m}{r} a^r; \quad \dots$$

$$\dots \quad p_{m-1} = (-1)^{m-2} \binom{m}{m-1} a^{m-1}; \quad p_m = b^m + (-1)^{m-1} a^m.$$

Basterà ricavare  $a$  dalla prima relazione ed il valore così ottenuto verificherà, per l'ipotesi fatta, tutte le rimanenti, l'ultima esclusa. Si risolverà poi l'ultima rispetto a  $b$ , dopo aver sostituito ad  $a$  il valore trovato.

4°  $u_n^{(j)}$  è dato dalla relazione:

$$u_n^{(j)} = \sum_{j-1, m+j-1, 2m+j-1, \dots, km+j-1}^i \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i-j-1} =$$

$$= \sum_{j-1, m+j-1, 2m+j-1, \dots, km+j-1}^i \binom{n}{i} a^{n-i} (p_m + (-1)^m a^m)^{\frac{i-j+1}{m}}.$$

Si potrà assumere quale valore di  $b$  una qualsiasi radice dell'equazione  $b^m = p_m + (-1)^m a^m$ . Le  $u_n^{(j)}$  risultano evidentemente reali e tali quindi sono pure le  $\eta$  date dalla (29).

Le equazioni ricorrenti del 2°, 3°, 4° ordine precedentemente studiate sono quelle alle quali si riduce la (28) quando  $m = 2, 3, 4$ . L'equazione ricorrente lineare del 2° ordine a coefficienti costanti è adunque caso speciale non soltanto dell'equazione ricorrente lineare generale di ordine  $m$ , a coefficienti costanti, ma anche dell'equazione (28) nella quale i coefficienti costanti, l'ultimo eccettuato, sono della forma  $(-1)^{r-1} \binom{m}{r} a^r$ , ( $r = 1, 2, \dots, m-1$ ),  $a$  essendo una costante, e l'ultimo è della forma  $b^m + (-1)^{m-1} a^m$ ,  $b$  essendo un'altra costante. Due adunque di essi, il primo e l'ultimo, possono considerarsi come dati ed indipendenti; i rimanenti potendo senz'altro essere dedotti dal primo.

N. TRAVERSO.

## SULLA DEFORMAZIONE DELLE IPERSUPERFICIE

negli spazi euclidei ad  $n$ -dimensioni

I. Nella presente nota mi propongo di ricercare quali sono le ipersuperficie deformabili in uno spazio euclideo ad  $n$ -dimensioni. I risultati che ottengo mostrano quanta importanza abbiano certe ipersuperficie speciali, che per lo spazio a quattro dimensioni sono state da me indicate con la notazione  $I_2$  e già studiate in una nota comparsa in questo periodico nel fascicolo III del marzo 1914. Risulterà da queste ricerche che le uniche ipersuperficie deformabili, oltre agli iperpiani, sono:

a) le sniluppabili, cioè le ipersuperficie costituite da una doppia infinità di  $S_{n-2}$ , come è noto da tempo;

b) certe ipersuperficie speciali, costituite da una doppia infinità di  $S_{n-3}$ , che nella presente nota indico con  $I_{n-1}$ , le quali per lo spazio a quattro dimensioni si riducono precisamente alle  $I_2$ .



punto  $n - 1$  raggi principali di curvatura i quali sono determinati mediante le  $\Omega_{ik}$  e le  $a_{ik}$  dalla equazione: <sup>(1)</sup>

$$\begin{vmatrix} a_{11} - R\Omega_{11} & a_{12} - R\Omega_{12} & \dots & a_{1n-1} - R\Omega_{1n-1} \\ a_{21} - R\Omega_{21} & a_{22} - R\Omega_{22} & \dots & a_{2n-1} - R\Omega_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} - R\Omega_{n-1} & a_{n-2} - R\Omega_{n-2} & \dots & a_{n-1} - R\Omega_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

3. Passiamo ora a ricordare la proposizione interessantissima relativa alla deformazione delle ipersuperficie, dovuta al Beez della quale darò anzitutto l'enunciato che trovasi nel Killing: <sup>(2)</sup>

" Quando non sono soddisfatte particolari condizioni una varietà ad  $(n - 1)$ -dimensioni, contenuta in uno spazio  $n$ -dimensioni, non può venire deformata ..

L'autore citato si occupa anche di dare le condizioni particolari per le quali la ipersuperficie può risaltare deformabile e precisamente osserva che detta varietà ad  $(n - 1)$ -dimensioni può deformarsi anche quando  $n$  supera tre se i determinanti minori del terzo ordine del discriminante della  $\zeta$  sono tutti uguali a zero. Questa circostanza tenuto conto della equazione (6) che determina i raggi di curvatura, esprime che  $n - 3$  curvatures principali sono nulle in ogni punto della ipersuperficie. Fino a questo punto le deduzioni sono esatte: ma poi il Killing è in errore quando afferma che queste condizioni analitiche portano di conseguenza che la varietà deve contenere una semplice infinità di  $S_{n-2}$  e quindi deve risultare una sviluppabile.

Il Schur in una memoria inserita nei *Mathematische Annalen* <sup>(3)</sup> dà del teorema il seguente enunciato:

" Una varietà ad  $(n - 1)$ -dimensioni non può essere deformata in uno spazio lineare ad  $n$ -dimensioni se non sono soddisfatte particolari condizioni, che trovano la loro espressione nell'annullarsi di tutti i minori del terzo ordine del discriminante  $\Omega$  della forma differenziale  $\zeta$  ..

Dato questo enunciato l'autore aggiunge:

" Il signor Killing crede veramente di poter precisare queste condizioni ed afferma che la varietà ad  $(n - 1)$ -dimensioni deve contenere una serie di  $S_{n-2}$  ad  $(n - 2)$ -dimensioni " wie nicht näher bewiesen werden soll , <sup>(4)</sup> siccome io non conosco questa dimostrazione così mi sono limitato a dare l'enunciato nella forma superiore ..

<sup>(1)</sup> Per quanto riguarda il modo di stabilire le formole contenute in questo paragrafo rimandiamo alla seguente opera:

LUIGI BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, seconda edizione, volume I, n. 164. Pisa, Spoerri, 1902.

<sup>(2)</sup> WILHELM KILLING, *Die nicht Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*. Leipzig, Teubner, 1886.

<sup>(3)</sup> SCHUR, " Ueber die Deformationen eines dreidimensionalen Raumes in einem ebenen vierdimensionalen Raume .. *Mathematische Annalen*, Bd. 27, 1886, pag. 244.

<sup>(4)</sup> W. KILLING, *op. cit.*, pag. 236.

La proposizione coll'espressione datagli dal Schur diviene indubbiamente rigorosa, però rappresenta un passo indietro nello stabilire le condizioni di validità del teorema, perchè viene a contenere le sole condizioni analitiche che erano rigorose anche nella formulazione del Killing.

Il Schur d'altra parte osserva che per i risultati a cui vuole pervenire in quella memoria basta la forma rigorosa da lui data alla proposizione e fa semplicemente notare la difficoltà che offre la soluzione completa del problema.

Il prof. Luigi Bianchi nelle sue lezioni di geometria differenziale, (1) dà un enunciato pure rigoroso dello stesso teorema, che sebbene non risolva completamente la questione è migliore di quello dello Schur in quanto tiene conto di una parte delle circostanze geometriche espresse dal Killing, cioè lo svanire di  $(n - 3)$  curvatures principali. Ecco l'enunciato in parola:

*\* Nello spazio euclideo a più di tre dimensioni ogni ipersuperficie è indeformabile (non può flettersi); un'eccezione può presentarsi soltanto nel caso che tutti i raggi principali di curvatura dell'ipersuperficie, tranne due al più siano infiniti \*.*

Dei tre enunciati qui riprodotti quello al quale più sovente mi riferirò nella presente nota sarà quest'ultimo. Una domanda intanto si presenta subito spontanea: quali sono le ipersuperficie che hanno tutti i raggi di curvatura infiniti tranne due al più? Il Killing risponde affermando che queste ipersuperficie sono le ordinarie sviluppabili; il Schur dubita di questa affermazione ed il Bianchi non se ne occupa.

Io mi propongo di dimostrare errata l'affermazione del Killing precisando in pari tempo le condizioni geometriche che corrispondono alle condizioni analitiche formulate rigorosamente da tutti e tre gli autori.

4. Per ogni ipersuperficie si definiscono linee di curvatura, quelle linee lungo le quali le normali alla ipersuperficie risultano tangenti ad una curva dello spazio: cioè generano una superficie sviluppabile; il valore (algebrico) del segmento che intercede fra il piede della normale ed il suo punto di contatto colla detta curva, rappresenta il corrispondente raggio di curvatura principale. (2)

Limitandomi ora, per maggior chiarezza, allo spazio a quattro dimensioni si può subito vedere che le generatrici delle ipersuperficie rigate  $I_3$  già studiate nella mia nota inserita nel fascicolo III del marzo 1914 di questo periodico sono linee di curvatura.

Infatti ricordo che le rigate speciali  $I_3$  godono di questa interessante proprietà: *L'iperpiano tangente in un punto è pure tangente*

(1) L. BIANCHI. *Lezioni di geometria differenziale*, già citato, pag. 476.

(2) L. BIANCHI, *op. cit.*, pag. 471.

lungo una retta, la generatrice che passa per quel punto. Dopo questo è evidente che le normali alla ipersuperficie  $I_3$  lungo una generatrice qualunque costituiscono un piano dovendo risultare normali ad uno stesso  $S_2$  tangente lungo quella generatrice; dunque dette normali formano una sviluppabile, cioè le generatrici sono linee di curvatura. Allora il raggio di curvatura corrispondente è infinito e ci troviamo proprio nel caso in cui tutti i raggi di curvatura, che per una  $I_3$  di uno spazio a quattro dimensioni sono tre, sono infiniti tranne due ed a senso del teorema di Beez l'ipersuperficie è deformabile.

Le usuali sviluppabili sono caratterizzate, nello spazio a quattro dimensioni dal fatto che contengono una semplice infinità di piani e l'iperpiano  $S_2$  tangente in un punto è tangente anche in tutti i punti di un piano. Ne deriva che ogni curva tracciata in uno di questi piani è una linea di curvatura: dei tre raggi principali di curvatura che l'ipersuperficie possiede in un punto, due devono considerarsi infiniti ed uno solo finito, per cui, sempre per il teorema di Beez, la ipersuperficie sarebbe deformabile venendo in questo caso ad avere infiniti tutti i raggi principali di curvatura tranne uno.

Finalmente per un iperpiano tutte le curve in esso tracciate sarebbero linee di curvatura e questo iperpiano considerato come ipersuperficie verrebbe ad avere infiniti tutti i raggi principali di curvatura. Anche un iperpiano risulta dunque deformabile.

Riassumendo possiamo ora enunciare il teorema di Beez nel caso dello spazio a quattro dimensioni nel modo seguente:

*Nello spazio euclideo a quattro dimensioni ogni ipersuperficie è indeformabile (non può flettersi); fanno semplicemente eccezione le rigate  $I_3$ , le sviluppabili e gli iperpiani.*

5. Prima di procedere e dare le condizioni di validità del teorema di Beez, in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, mi fermerò alquanto sui risultati ottenuti per caratterizzare con un'equazione differenziale gli involuipi  $I_3$ . È noto che nell'ordinario spazio euclideo a tre dimensioni le sviluppabili sono caratterizzate dalla seguente equazione alle derivate parziali: (\*)

$$rt - s^2 = 0$$

dove  $r, s, t$  rappresentano come è noto le tre derivate seconde (notazioni di Monge):

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

dimostrerò ora che per le ipersuperficie  $I_3$  rigate vale una equazione analoga.

(\*) Vedi ad es. U. DINI, *Lezioni di analisi infinitesimale*, volume I, parte II, pag. 537. Pisa, Nistri, 1907.

Prendiamo perciò a considerare l'equazione che dà i raggi principali di curvatura di una  $V_3$  in uno spazio a quattro dimensioni; per quanto si è detto al n. 2 detta equazione sarebbe la seguente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - R\Omega_{11} & a_{12} - R\Omega_{12} & a_{13} - R\Omega_{13} \\ a_{21} - R\Omega_{21} & a_{22} - R\Omega_{22} & a_{23} - R\Omega_{23} \\ a_{31} - R\Omega_{31} & a_{32} - R\Omega_{32} & a_{33} - R\Omega_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Ma quando questa equazione si intende applicata ad una rigata  $I_3$ , cioè ad una ipersuperficie che deve in ogni punto avere infinito uno dei raggi principali di curvatura, si comprende che deve essere nullo il coefficiente di  $R^3$  nello sviluppo del determinante deve cioè essere:

$$\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Questa sarà l'equazione differenziale alla quale devono soddisfare le equazioni parametriche perchè esse rappresentino una  $I_3$ . Per dare alla equazione (8) una forma più somigliante alla equazione:

$$rt - s^2 = 0$$

traduciamola in coordinate cartesiane in luogo che in coordinate curvilinee.

Supponiamo allora che l'equazione della ipersuperficie sia:

$$x_4 = f(x_1, x_2, x_3)$$

ed introduciamo le notazioni:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial x_4}{\partial x_1}, & p_2 &= \frac{\partial x_4}{\partial x_2}, & p_3 &= \frac{\partial x_4}{\partial x_3} \\ s_{11} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1^2}, & s_{12} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1 \partial x_2}, & s_{13} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_1 \partial x_3} \\ s_{22} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_2^2}, & s_{23} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_2 \partial x_3}, & s_{33} &= \frac{\partial^2 x_4}{\partial x_3^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Cosicchè le coordinate curvilinee sulla ipersuperficie sarebbero le  $x_1 = \text{cost.}$ ,  $x_2 = \text{cost.}$ ,  $x_3 = \text{cost.}$  Allora i coefficienti della forma fondamentale (2) verrebbero ad avere i seguenti valori:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + p_1^2, & a_{22} &= 1 + p_2^2, & a_{33} &= 1 + p_3^2 \\ a_{12} &= p_1 p_2 = a_{21}, & a_{13} &= p_1 p_3 = a_{31}, & a_{23} &= p_2 p_3 = a_{32}, \end{aligned}$$

mentre i coefficienti della forma fondamentale (4) verrebbero in forza della (5) ad avere le seguenti espressioni:

$$\Omega_{rt} = \frac{1}{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & s_{r1} \\ 1 & 0 & 0 & p_1 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 1 & p_3 \end{vmatrix},$$

cioè:

$$\Omega_{11} = \frac{s_{11}}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \quad \Omega_{12} = \frac{s_{12}}{\sqrt{1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \text{ ecc.}$$

Dunque il determinante (8) che indicheremo brevemente con  $\Omega_{rs} = 0$  viene ad avere la seguente espressione:

$$(1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^{\frac{3}{2}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = 0$$

e siccome non può essere:

$$1 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0$$

così si avrà:

$$\begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

dove naturalmente  $s_{ri} = s_{ir}$ . Questa è l'equazione che nello spazio a quattro dimensioni generalizza l'equazione delle sviluppabili dell'ordinario spazio.

6. Volendo ora con un procedimento analogo determinare le equazioni differenziali delle ipersuperficie sviluppabili, basta ricordare che per queste ultime, in ogni punto sono infiniti due raggi di curvatura e conseguentemente l'equazione (9) deve avere i coefficienti di  $R^3$  ed  $R^2$  nulli. Si avrà dunque il seguente sistema di due equazioni a derivate parziali:

$$\left. \begin{aligned} & \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} = 0 \\ & \begin{vmatrix} a_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ a_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ a_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{11} & a_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & a_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & a_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & a_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & a_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

il quale sistema esprime la condizione perchè le equazioni (1) che in questo caso si riducono alle seguenti:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2, u_3) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2, u_3) \\ x_3 &= x_3(u_1, u_2, u_3) \\ x_4 &= x_4(u_1, u_2, u_3) \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

rappresentino una sviluppabile. Con metodo analogo a quello usato al n. precedente si potrebbero trasformare le condizioni (11) in coordinate cartesiane.

7. Prima di abbandonare questo argomento voglio far notare la semplicità che acquistano i risultati ai quali sono pervenuto quando

si introduca il concetto di curvatura di Gauss relativo ad una ipersuperficie.

*Se si chiamano curvature principali di una ipersuperficie i valori inversi de' raggi principali di curvatura, allora si può definire curvatura totale o di Gauss della ipersuperficie in un punto, il prodotto di tutte le curvature principali. (1)*

Se allora si immagina sviluppata la equazione (7) secondo le potenze di  $\frac{1}{R}$  si vede immediatamente che la curvatura totale viene ad essere rappresentata dall'espressione:

$$K = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (13)$$

e siccome il denominatore è per ipotesi diverso da zero così l'essere  $K=0$  dà la condizione necessaria e sufficiente perchè sussista la equazione (8), quindi si può concludere:

*La condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie dello spazio  $S_4$  sia deformabile è che si abbia  $K=0$ .*

Se poi si indica con  $K_1$  la somma dei prodotti a due a due delle curvature principali con che risulta per  $K_1$  la seguente espressione:

$$AK_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ a_{21} & \Omega_{22} & \Omega_{23} \\ a_{31} & \Omega_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{11} & a_{12} & \Omega_{13} \\ \Omega_{21} & a_{22} & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & a_{32} & \Omega_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & a_{13} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & a_{23} \\ \Omega_{31} & \Omega_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (14)$$

ottenuta sempre in forza della (7) si può concludere quanto segue:

*Se  $K=0$  senza che sia  $K_1=0$  si ha una ipersuperficie  $I_3$ ; se è contemporaneamente  $K=0$ ,  $K_1=0$  allora la ipersuperficie è sviluppabile.*

Si vede dunque che mentre nello spazio ordinario le superficie sono deformabili solamente in altre che possiedono uguale curvatura totale, nello spazio a quattro dimensioni non si può parlare di deformazione se non è zero la curvatura totale, e quando effettivamente quest'ultima svanisce resta poi sempre a determinare in quale altra ipersuperficie, quella data, è deformabile problema solo in parte risolto per cui si può dire che quando è  $K=K_1=0$  la ipersuperficie si può deformare e cambiarla in un iperpiano, ma quando è  $K=0$  con  $K_1 \neq 0$  ancora non è stata definita la classe di ipersuperficie a cui dà luogo con deformazione una data varietà.

(1) Vedi ad es. W. KILLING, già citato, parag. 115. Il BIANCHI nelle sue lezioni, già citate, cenna ma non introduce questo concetto, vedi nota alla pag. 372.

Dopo queste osservazioni spero di aver richiamata l'attenzione dei matematici sulla estensione al caso degli spazi a più dimensioni dell'importante concetto di curvatura di Gauss, alquanto dimenticato per l'importanza che acquista negli iperspazi un altro concetto di curvatura, affatto diverso da quello di Gauss, voglio appunto accennare alla curvatura del Riemann che porta ad importantissime deduzioni specialmente negli spazi ove l'elemento lineare è espresso da una forma differenziale quadratica qualunque.

Da quanto precede si vede chiaramente che la condizione  $K=0$ , mentre nello spazio a tre dimensioni porta a concludere che la superficie è sviluppabile nello spazio a quattro dimensioni serve invece a caratterizzare le ipersuperficie  $I_3$  e solamente congiunta all'altra condizione  $K_1=0$  ci assicura che la ipersuperficie è sviluppabile.

8. Terminerò la presente nota dando un cenno sul modo di estendere agli spazi ad  $n$ -dimensioni i risultati dati per lo spazio a quattro dimensioni.

Denotiamo al solito con  $x_1, x_2, \dots, x_n$  le coordinate cartesiane dello spazio lineare euclideo  $S_n$  nel quale faccio le presenti ricerche. L'equazione:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (15)$$

rappresenta un  $S_{n-1}$ . Se i coefficienti  $a_i$  li supponiamo funzioni di due parametri  $\alpha$  e  $\beta$  l'equazione (15) viene a rappresentare una doppia infinità di  $S_{n-1}$  e se daremo ai parametri  $\alpha, \beta$  due corrispondenti accrescimenti infinitesimi  $d\alpha, d\beta$  verremo a determinare un  $S'_{n-1}$  vicinissimo all' $S_{n-1}$  rappresentato dall'equazione (15). Supposto che in generale si abbia:

$$a_i = a_i(\alpha, \beta) \quad (16)$$

e che si ponga:

$$\bar{a}_i = a_i(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta) \quad (17)$$

l'equazione dell' $S'_{n-1}$  vicinissimo sopra accennato, viene allora ad essere:

$$\bar{a}_0 + \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \bar{a}_3x_3 + \dots + \bar{a}_nx_n = 0. \quad (18)$$

Se ora supponiamo soddisfatte le condizioni per cui alle funzioni (16) è applicabile la formola del Taylor e si abbia quindi:

$$\bar{a}_i = a_i + \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial a_i}{\partial \beta} d\beta + \varepsilon \quad (19)$$

dove  $\varepsilon$  rappresenta un infinitesimo di secondo ordine almeno, l'equazione (18) può scriversi:

$$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n + \left[ \frac{\partial a_0}{\partial \alpha} + \frac{\partial a_1}{\partial \alpha} x_1 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial \alpha} x_n \right] d\alpha + \\ + \left[ \frac{\partial a_0}{\partial \beta} + \frac{\partial a_1}{\partial \beta} x_1 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial \beta} x_n \right] d\beta = 0 \quad (20)$$

avendo però trascurato gli infinitesimi d'ordine superiore al primo.

Volendo ora considerare l'intersezione dell'iperpiano (15) con l'iperpiano (18) si potrà sostituire a quest'ultima equazione l'altra data dalla (20): oppure considerare l'equazione (15) assieme ad una combinazione lineare della (15) stessa, colla (20). In ultima analisi si può determinare l'intersezione dei due iperpiani individuati dalle equazioni (15) e (18) mediante il sistema di equazioni:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= 0 \\ \left[ \frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial x} x_1 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x} x_n \right] dx + \\ &+ \left[ \frac{\partial a_0}{\partial \beta} + \frac{\partial a_1}{\partial \beta} x_1 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial \beta} x_n \right] d\beta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

La forma della seconda equazione di questo sistema porta evidentemente a concludere che qualunque siano i valori delle due quantità infinitesime  $dx$ ,  $d\beta$  e qualunque sia il valore verso cui tende il rapporto  $\frac{d\beta}{dx}$  i due iperpiani ad  $(n-1)$ -dimensioni rappresentati singolarmente dalle due equazioni del sistema stesso vengono a passare per l' $S_{n-3}$  intersezione dei tre iperpiani rappresentati dalle tre equazioni del sistema seguente:

$$\left. \begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= 0 \\ \frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial x} x_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x} x_2 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial x} x_n &= 0 \\ \frac{\partial a_0}{\partial \beta} + \frac{\partial a_1}{\partial \beta} x_1 + \frac{\partial a_2}{\partial \beta} x_2 + \dots + \frac{\partial a_n}{\partial \beta} x_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

In altri termini tutti gli iperpiani  $S'_{n-1}$  infinitamente vicini all' $S_{n-1}$  rappresentato dall'equazione (15) vengono a passare tutti per un  $S_{n-3}$  situato su quell' $S_{n-1}$ . Ora siccome l'equazione (15) rappresenta, come già si è fatto notare una doppia infinità di  $S_{n-1}$ , così si avrà anche una doppia infinità di  $S_{n-3}$  che diremo l'involuppo degli iperspazi dati dall'equazione (15). Quando però questa doppia infinità di  $S_{n-3}$  si voglia considerare come luogo di punti allora si viene ad originare una ipersuperficie involuppo di iperpiani che indicheremo con  $I_{n-1}$ ; e questa speciale ipersuperficie ad  $n-1$  dimensioni gode della particolare proprietà che l'iperpiano ad essa tangente in un punto è tangente lungo tutti i punti di un  $S_{n-3}$ .

È infatti facile dimostrare con procedimento analogo a quello tenuto nella mia nota \* *Sopra alcune ipersuperficie rigate ottenute come involuppo di iperpiani*,<sup>(1)</sup> che l'involuppo  $I_{n-1}$  è tangente al-

(1) Già citata, vedi fascicolo III del marzo 1914 di questo *Periodico di Matematica*.

l'iperpiano rappresentato dall'equazione (15) in ogni punto che con esso ha a comune.

Volendo l'equazione parametrica dell'involuppo  $I_{n-1}$  basta ricavare i valori di  $x_1, x_2, x_3$  dal sistema (22), cosicchè queste quantità diventano funzioni lineari delle restanti incognite  $x_4, x_5, \dots, x_n$  ed i coefficienti di queste funzioni lineari che indicheremo con  $b_i$  risulterebbero funzioni dei due parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .

Si otterrà dunque il seguente sistema:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1 x_4 + b_2 x_5 + \dots + b_n x_n + b_{n+1} \alpha \\ x_2 &= c_1 x_4 + c_2 x_5 + \dots + c_{n-3} x_n + c_{n-2} \alpha \\ x_3 &= f_1 x_4 + f_2 x_5 + \dots + f_{n-3} x_n + f_{n-2} \alpha \\ x_4 &= x_4 \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= x_n \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

che rappresenterà la  $I_{n-1}$ .

Dopo quanto si è detto è evidente che ogni curva appartenente ad un  $S_{n-3}$  che costituisce l'ipersuperficie, è una linea di curvatura, perchè le normali lungo questa linea formano un cilindro cioè una sviluppabile. La ipersuperficie  $I_{n-1}$  deve dunque considerarsi come avente in ogni punto infiniti  $(n-3)$ -raggi principali di curvatura mentre due restano finiti. Essa è dunque deformabile.

Le usuali sviluppabili involuppo di una semplice infinità di  $S_{n-1}$  vengono ad essere costituite da  $\infty^1 S_{n-2}$  ed hanno in ogni punto generico  $n-2$  raggi principali di curvatura infiniti, mentre uno solo resta finito, ed anch'esse sono deformabili.

Infine possiamo formulare il teorema di Beez nel modo seguente:

*Le ipersuperficie degli spazi ad  $n$ -dimensioni sono indeformabili, l'unico caso di eccezione si presenta per gli involuppi  $I_{n-1}$ , per le sviluppabili e per gli iperpiani.*

EZIO BEGGI.

## SU ALCUNE FORMOLE DI ANALISI COMBINATORIA

1°. Prendiamo la formola (1) del prof. N. TRAVERSO (*Periodico di Matematica*, a. XXIX, p. 98)

$$\begin{aligned} a \binom{p}{i} + (a+b) \binom{p+1}{i+1} + (a+2b) \binom{p+2}{i+2} + \dots + (a+kb) \binom{p+k}{i+k} = \\ = (a+kb) \binom{p+k+1}{k+i} - a \binom{p}{i-1} - b \binom{p+k+1}{k+i-1} + b \binom{p+1}{i-1} \quad (1) \end{aligned}$$



per conseguenza

$$\begin{aligned}
 & a^2 \binom{p}{i} + (a+b)^2 \binom{p+1}{i+1} + \dots + (a+kb)^2 \binom{p+k}{i+k} = \\
 & = (a+kb)^2 \binom{p+k+1}{k+i} - a^2 \binom{p}{i-1} - b(a+kb) \binom{p+k+1}{k+i-1} + \\
 & + ab \binom{p+1}{i-1} - b(a+kb) \binom{p+k+1}{i+k-1} + b(a+b) \binom{p+1}{i-1} + \\
 & + b^2 \binom{p+k+1}{i+k-2} - b^2 \binom{p+2}{i-1} + b^2 \binom{p+k+2}{i+k-1} - b^2 \binom{p+2}{i-1} = \\
 & = (a+kb)^2 \binom{p+k+1}{k+i} - 2b(a+kb) \binom{p+k+1}{i+k-1} + b^2 \binom{p+k+1}{i+k-2} + \\
 & + b^2 \binom{p+k+2}{i+k-1} - a^2 \binom{p}{i-1} + ab \binom{p+1}{i-1} + b(a+b) \binom{p+1}{i-1} - \\
 & - 2b^2 \binom{p+2}{i-1} = (a+kb)^2 \binom{p+k+1}{k+i} - 2b(a+kb) \binom{p+k+1}{i+k-1} + \\
 & + b^2 \binom{p+k+1}{i+k-2} + b^2 \binom{p+k+2}{i+k-1} - a^2 \binom{p}{i-1} + 2ab \binom{p+1}{i-1} + \\
 & + b^2 \binom{p+1}{i-1} - 2b^2 \binom{p+2}{i-1}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

È questa la prima delle formole che volevamo ottenere.

In particolare se  $b=1$  è:

$$\begin{aligned}
 & a^2 \binom{p}{i} + (a+1)^2 \binom{p+1}{i+1} + \dots + (a+k)^2 \binom{p+k}{i+k} = \\
 & = (a+k)^2 \binom{p+k+1}{k+i} - 2(a+k) \binom{p+k+1}{i+k-1} + \binom{p+k+1}{i+k-2} + \\
 & + \binom{p+k+2}{i+k-1} - a^2 \binom{p}{i-1} + 2a \binom{p+1}{i-1} + \binom{p+1}{i-1} - 2 \binom{p+2}{i-1}. \tag{2'}
 \end{aligned}$$

E se  $a=b=1$ , è

$$\begin{aligned}
 & \binom{p}{i} + 2^2 \binom{p+1}{i+1} + \dots + (k+1)^2 \binom{p+k}{i+k} = (k+1)^2 \binom{p+k+1}{k+i} - \\
 & - 2(k+1) \binom{p+k+1}{i+k-1} + \binom{p+k+1}{i+k-2} + \binom{p+k+2}{i+k-1} - \binom{p}{i-1} + \\
 & + 3 \binom{p+1}{i-1} - 2 \binom{p+2}{i-1} = (k+1)^2 \binom{p+k+1}{i+k} - 2(k+1) \binom{p+k+1}{i+k-1} + \\
 & + \binom{p+k+1}{i+k-2} + \binom{p+k+2}{i+k-1} - \binom{p+1}{i-2} + \binom{p}{i-2} \tag{2''}
 \end{aligned}$$



$$= -(a+kb)^2 \binom{p-k}{i-k-1} - 2b(a+kb) \binom{p-k+1}{i-k-1} - b^2 \binom{p+k+2}{i-k-1} - b^2 \binom{p-k+1}{i-k-2} +$$

$$+ a^2 \binom{p+1}{i} + ab \binom{p+1}{i-1} + b(a+b) \binom{p+1}{i-1} + 2b^2 \binom{p+1}{i-2}. \quad (3')$$

È questa la 2ª formola che volevamo ottenere.

In particolare se poniamo  $a=b=1$ , si ha

$$\binom{p}{i} + 2^2 \binom{p-1}{i-1} + 3^2 \binom{p-2}{i-2} + \dots + (1+k)^2 \binom{p-k}{i-k} =$$

$$= -(1+k)^2 \binom{p-k}{i-k-1} - 2(1+k) \binom{p-k+1}{i-k-1} - \binom{p+k+2}{i-k-1} -$$

$$- \binom{p-k+1}{i-k-2} + \binom{p+1}{i} + 3 \binom{p+1}{i-1} + 2 \binom{p+1}{i-2}. \quad (3'')$$

3º. Consideriamo ora la formola (3) del prof. N. TRAVERSO (l. c., pag. 100)

$$a \binom{p}{i} + (a+b) \binom{p-1}{i} + (a+2b) \binom{p-2}{i} + \dots + (a+kb) \binom{p-k}{i} =$$

$$= a \binom{p+1}{i+1} - (a+kb) \binom{p-k}{i+1} + b \binom{p+1}{i+2} - b \binom{p-k+1}{i+2}.$$

Moltiplicando questa per  $a$ , poi cambiando  $a$  in  $a+b, a+2b, \dots, (a+kb)$  e corrispondentemente  $p$  in  $p-1, p-2, \dots, p-k$ , indi moltiplicando le relazioni ottenute per  $b$ , si hanno le  $k+1$  relazioni

$$a^2 \binom{p}{i} + a(a+b) \binom{p-1}{i} + a(a+2b) \binom{p-2}{i} + \dots + a(a+kb) \binom{p-k}{i} =$$

$$= a^2 \binom{p+1}{i+1} - a(a+kb) \binom{p-k}{i+1} + ab \binom{p+1}{i+2} - ab \binom{p-k+1}{i+2},$$

$$b(a+b) \binom{p-1}{i} + b(a+2b) \binom{p-2}{i} + \dots + b(a+kb) \binom{p-k}{i} =$$

$$= b(a+b) \binom{p}{i+1} - b(a+kb) \binom{p-k}{i+1} + b^2 \binom{p}{i+2} - b^2 \binom{p-k+1}{i+2},$$

$$\dots$$

$$b(a+kb) \binom{p-k}{i} = b(a+kb) \binom{p-k+1}{i+1} - b(a+kb) \binom{p-k}{i+1} +$$

$$+ b^2 \binom{p-k+1}{i+2} - b^2 \binom{p-k+1}{i+2},$$

e sommandole

$$\begin{aligned}
 a^2 \binom{p}{i} + (a+b)^2 \binom{p-1}{i} + (a+2b)^2 \binom{p-2}{i} + \dots + (a+kb)^2 \binom{p-k}{i} &= \\
 = a^2 \binom{p+1}{i+1} - (a+kb)^2 \binom{p-k}{i+1} - b(a+kb) \binom{p-k+1}{i+2} + \\
 + ab \binom{p+1}{i+2} + b \left[ (a+b) \binom{p}{i+1} + \dots + (a+kb) \binom{p-k+1}{i+1} \right] + \\
 + b^2 \left[ \binom{p}{i+2} + \dots + \binom{p-k+1}{i+2} \right] &= \\
 = -(a+kb)^2 \binom{p-k}{i+1} - b(a+kb) \binom{p-k+1}{i+2} + a^2 \binom{p+1}{i+1} + ab \binom{p+1}{i+2} + \\
 + b \left[ (a+b) \binom{p+1}{i+2} - (a+b) \binom{p-k+1}{i+2} + b \binom{p+1}{i+3} - b \binom{p-k+2}{i+3} \right] + \\
 + b^2 \left[ \binom{p+1}{i+3} - \binom{p-k+1}{i+3} \right] &= \\
 = -(a+kb)^2 \binom{p-k}{i+1} - 2b(a+kb) \binom{p-k+1}{i+2} - b^2 \binom{p-k+2}{i+3} - b^2 \binom{p-k+1}{i+3} + \\
 + a^2 \binom{p+1}{i+1} + ab \binom{p+1}{i+2} + b(a+b) \binom{p+1}{i+2} + 2b^2 \binom{p+1}{i+3}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

che è la 3ª formola.

In particolare se  $a=b=1$ ,

$$\begin{aligned}
 \binom{p}{i} + 2^2 \binom{p-1}{i} + 3^2 \binom{p-2}{i} + \dots + (1+k)^2 \binom{p-k}{i} &= \\
 = -(1+k)^2 \binom{p-k}{i+1} - 2(1+k) \binom{p-k+1}{i+2} - \binom{p-k+2}{i+3} - \\
 - \binom{p-k+1}{i+3} + \binom{p+1}{i+1} + 3 \binom{p+1}{i+2} + 2 \binom{p+1}{i+3}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

4ª. Consideriamo finalmente la formola (4) del prof. N. TRAVERSO (l. c., pag. 101)

$$\begin{aligned}
 a \binom{p}{i} + (a+b) \binom{p+1}{i} + \dots + (a+kb) \binom{p+k}{i} &= \\
 = (a+kb) \binom{p+k+1}{i+1} - a \binom{p}{i+1} - b \binom{p+k+1}{i+2} + b \binom{p+1}{i+2}.
 \end{aligned}$$

Da questa, come precedentemente, si ricavano le altre

$$\begin{aligned}
 a^2 \binom{p}{i} + a(a+b) \binom{p+1}{i} + \dots + (a+kb) \binom{p+k}{i} &= \\
 = a(a+kb) \binom{p+k+1}{i+1} - a^2 \binom{p}{i+1} - ab \binom{p+k+1}{i+2} + ab \binom{p+1}{i+2}
 \end{aligned}$$



## MASSIMI E MINIMI COL METODO DI GRILLET

Credo riassumere qui nel *Periodico* quanto risulta, o si può immediatamente dedurre, da alcune note da me pubblicate lo scorso anno nel *Supplemento*.<sup>(1)</sup>

Per la ricerca col metodo di GRILLET, cioè mediante i *moltiplicatori indeterminati*, dei massimi e minimi di una funzione razionale intera  $f(x)$  scomposta in fattori di 1° grado, si richiede:

I) definire i massimi e minimi *relativi*, giacchè sono appunto questi che si ottengono;

II) far notare che se una funzione di 1° grado  $ax + b$  è positiva per  $x = x_0$ , lo sarà pure in un intervallo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , essendo  $\delta$  abbastanza piccolo.

Ora, le condizioni I), II) non sono spesso osservate da coloro che spiegano, sia pure attraverso qualche esempio, il metodo sopradetto.<sup>(2)</sup>

Inoltre, è conveniente

III) assumere tanti moltiplicatori quanti sono i fattori di 1° grado (e non uno di meno, come di solito), per evitare che risulti una somma negativa, e perciò si abbia qualche complicazione nelle deduzioni, a danno della semplicità e uniformità del procedimento.

Io ho fatto vedere che con questo metodo applicato ad una funzione razionale intera  $f(x)$  scomposta in fattori lineari, e opportunamente completato con la considerazione ulteriore delle potenze dei fattori lineari, si ottengono **TUTTI** i massimi e minimi (relativi) della funzione, quali sono dati dal *Calcolo infinitesimale*.

Nell'applicazione pratica del metodo suddetto si hanno le seguenti conclusioni.

Nei limiti della risoluzione delle equazioni di 2° grado si ottengono tutti i massimi e minimi per le seguenti funzioni:

A) funzioni scomposte in fattori di 1° grado, e non contenenti più di tre fattori differenti: per esempio, le funzioni

$$(x + 1)(x - 1)(x - 3), \quad (x + 1)^6(x - 1)^3(x - 3)^2,$$

di cui la prima ha un massimo e un minimo, e la seconda ha 4 tra massimi e minimi, dei quali due derivano dalle potenze d'esponente pari  $(x + 1)^6$ ,  $(x - 3)^2$ ;

(1) Anno XIV, fasc. I, III, VI-VII. (Il cortese lettore corregga qualche errore di scrittura o di stampa.)

(2) Cfr.: FAZZINI, *Complementi d'Algebra*; FRATTINI, *Lezioni d'Algebra ecc.*, vol. I; PADOA, *Sui massimi e minimi delle funzioni algebriche*, in *Questioni riguardanti le Matematiche elementari dell'ENRIQUES*, vol. II.

B) funzioni di 3° grado  $ax^3 + bx^2 + cx + d$ , anche non scomposte in fattori di 1°, purchè si abbia  $b^2 - 3ac \geq 0$ ; (1) esempio, le

$$x^3 - 3x^2 + 2x - 5, \quad x^3 - 6x^2 + 10x - 8.$$

Valendosi poi della risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado, si potranno ottenere col metodo suddetto tutti i massimi e minimi per

C) funzioni scomposte in fattori di 1° grado, e non contenenti più di cinque fattori diversi; esempio

$$(2x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 2)^4 \cdot (3x - 1) \cdot (x - 3)^2.$$

Non ponendo infine alcun limite alla risolubilità delle equazioni di qualunque grado, le cui radici reali si potranno calcolare con procedimenti d'approssimazione, si otterranno col metodo sopraddetto tutti i massimi e minimi per

D) funzioni razionali intere di qualsivoglia grado scomposte in fattori lineari.

Ho fatto vedere ancora che il metodo suddetto si può applicare per la ricerca di massimi e minimi di funzioni  $F(x)$  che siano prodotti di espressioni lineari di una funzione continua qualunque  $u(x)$ , di cui si conoscono i massimi e minimi e gli intervalli in cui è crescente e decrescente (e ho ottenuto una "regola", che ho poi generalizzato nel *Periodico* (2) per le *funzioni di funzione*): esempio, la funzione

$$F(x) = \sin x (\sin x - 1) (\sin x - 2),$$

per la quale nell'intervallo  $(0, 2\pi)$  si trovano due massimi e due minimi tra loro alternati.

Appare adunque la grande potenzialità del metodo di GRILLET dei moltiplicatori, il quale inoltre, come è noto, ammette estensioni alle funzioni di più variabili.

E. MAUCAFERRI.

## DI DUE PROPRIETÀ CARATTERISTICHE PER SUPERFICIE ELICOIDALI

Nota di MARIO PIERI. (3)

I. Considerando il sistema di tutte le *eliche circolari* che hanno a comune il *verso*, l'*asse* ed il *passo*, si osserva che per un punto proprio qualunque dello spazio ne passa sempre una ed una sola:

(1) Questa è appunto la condizione per l'esistenza delle radici reali della prima derivata  $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ , secondo i procedimenti del Calcolo differenziale.

(2) Anno XXVIII, fasc. V.

(3) Questo lavoro del rimpianto matematico venne pubblicato in opuscolo a parte (Lucca: Tip. Giusti 1893), epperò raggiunse scarsa notorietà, già è divenuto una rarità bibliografica e sembra destinato a scomparire dalla letteratura matematica, ora siccome i risultati ivi esposti toccano

ed è anche facile a vedersi, come quel punto ed il piano normale all'elica in esso si corrispondano in un sistema nullo ordinario. Invero, se  $\rho$  indica la distanza del punto stesso dall'asse dell'elica, vale a dire il raggio di questa, e  $\theta$  è l'inclinazione della medesima sull'asse, sarà sempre  $\tan \theta = \frac{2\pi\rho}{\lambda}$ , dove  $\lambda$  rappresenti il passo comune a tutte le eliche del sistema. Dipoi essendo  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$  l'inclinazione del piano normale all'elica sull'asse di questa  $\tan \theta' = \frac{\lambda}{2\pi\rho}$ , sarà ancora  $\rho \tan \theta' = \frac{\lambda}{2\pi}$ : cioè che dimostra appunto l'asserto. La stessa proprietà si potrà anche enunciare dicendo che se un'elica varia conservando il verso, l'asse ed il passo, le sue  $\infty^2$  normali generano un complesso lineare di raggi — di guisa che ogni retta, la quale incontra normalmente un'elica di cosiffatto sistema, ne taglierà normalmente  $\infty^1$ ; ecc. (1)

Ora una superficie elicoidale è il luogo di  $\infty^1$  eliche aventi a comune il verso, l'asse ed il passo: per la qual cosa è chiaro, che le  $\infty^2$  normali di una elicoidale qualunque stanno sempre in un complesso lineare.

Una proprietà siffatta non appartiene a nessun'altra superficie. Invero sia  $S$  una superficie, di equazione  $z = z(x, y)$ , e le sue normali giacciono in un complesso lineare  $\Gamma$ . Come coordinate della normale ad  $S$  nel punto  $(x, y, z)$  si potranno assumere i numeri

$$l : m : n : L : M : N = p : q : -1 : y - qz : -x - pz : py - qx,$$

$p$  e  $q$  essendo le derivate parziali della funzione  $z(x, y)$ ; e senza scapito di generalità si potrà anche supporre, che  $\Gamma$  abbia per asse (principale) l'asse delle  $z$ ; o, se l'asse di  $\Gamma$  è improprio, che esso sia la giacitura del piano  $xy$ ; onde l'equazione di  $\Gamma$  sarà, denotando con  $\frac{C}{c} = k$  una costante arbitraria:

$$Cn + cN = 0.$$

Pertanto la condizione imposta alla  $S$  verrà a tradursi nell'equazione differenziale:

$$-C + c(py - qx) = 0,$$

ossia

$$py - qx = k,$$

un'ampia ed importante classe di superficie e siccome si riferiscono a questioni di cui, contemporaneamente al PIERI, si occuparono altri da differenti punti di vista (v. J. SOBOTKA, *Ueber Krümmung und Indicatricen der Helikoiden*: Sitzungsber. der Akad. in Wien, T. LI, 1892. II Abth. p. 899-910) così una ristampa di esso sembra utile alle scienze e giovevole alla memoria di un acuto investigatore troppo presto rapito alla patria.

(1) Tale proprietà si può anche far discendere da un notissimo teorema di M. CHANLES sullo spostamento infinitesimo d'un corpo rigido: V. *Aperçu historique etc.*, seconda edizione, pag. 614. (Nota di G. LOBIA.)

e questa mediante integrazione si trova essere equivalente all'altra:

$$z = f(x^2 + y^2) + k \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{y},$$

che è l'equazione cartesiana di tutte le superficie elicoidali descritte con passo  $2\pi k$  intorno all'asse delle  $z$ . — Per  $k=0$  la  $S$  è una superficie *rotonda* e il complesso  $\Gamma$  è *speciale*; per  $k=\infty$  la  $S$  è una superficie *cilindrica* e  $\Gamma$  il sistema delle rette parallele a un piano fisso. Resta dunque provato, che *dalle elicoidi in fuori non si danno altre superficie appartenenti per le normali ad un complesso lineare.* (1)

2. La proprietà suddetta circa le normali di un'elicoide qualunque può volgersi ad utili applicazioni nel campo della Geometria descrittiva. Così p. e. a voler costruire i piedi delle normali abbassate da un punto qualunque  $O$  sopra un'elicoide  $S$  (come sarebbero i punti di *massima illuminazione* della superficie rispetto ad un lume posto in  $O$ ) basterà trovare il piano *polare* di  $O$  rispetto a  $\Gamma$ : indi, operando nella sezione di questo piano sulla superficie, determinare i piedi delle normali condotte a questa curva da  $O$ .

La costruzione del piano polare di  $O$  rispetto a  $\Gamma$  potrà farsi ad es. come segue. Dal punto  $O$  si abbassi la perpendicolare  $o$  sull'asse dell'elicoide  $S$ ; poi, scelta a piacere una retta  $h$  che tagli normalmente una qualunque delle eliche di  $S$  e non ne incontri l'asse si determini il punto comune a quest'asse ed al piano  $Oh$ , e in detto punto s'innalzi il piano che è perpendicolare all'asse medesimo: allora la traccia  $H$  di questo piano sulla retta  $h$  sarà il polo del piano  $Oh$ , e per conseguenza il piano  $oH$  sarà il piano polare di  $O$ . (2)

Dalla considerazione di un piano, il quale contenga due normali infinitamente prossime della superficie  $S$ , si deduce immediatamente che se  $E$  è un punto di un'elicoide non degenera, i due piani condotti per la normale in  $E$  alla superficie e per le due tangenti principali uscenti da  $E$  hanno per poli rispetto a  $\Gamma$  i due centri principali di curvatura della superficie stessa nel punto  $E$ . Ciò permette di risolvere coi mezzi ordinari della Geometria descrittiva il seguente:

**PROBLEMA.** — “In un punto  $E$  dato a piacere sopra una elicoide rigata  $S$  si voglion costruire i due raggi di curvatura principali ..”

Se  $S$  è un'elicoide rigata d'area minima, le due tangenti principali in  $E$  saranno due rette inclinate di  $45^\circ$  sulla generatrice di  $S$  che passa per  $E$ . E se  $S$  è un'elicoide rigata qualsivoglia, le tangenti principali saranno i due raggi coniugati ortogonali dell'involutione, in cui un raggio doppio è la generatrice che passa per  $E$  e due raggi coniugati sono la tangente in  $E$  all'elica di  $S$  che passa per questo punto e la proiezione ortogonale della retta condotta da  $E$  parallela-

(1) Di qui nasce (se si pensa che una linea è sempre il *flone* di una superficie canale) che anche l'elica circolare si distingue da ogni altra linea per avere tutte le sue normali in un complesso lineare.

(2) V. p. es. REYE, *Die Geometrie der Lage*, seconda edizione, parte 2<sup>a</sup>, pag. 72.

mente all'asse dell'elicoide sopra il piano tangente in E. <sup>(1)</sup> Ma una volta trovate le due tangenti principali si sanno anche costruire i due centri principali di curvatura, come sopra si è detto; poichè basta a tal uopo cercare il polo di ognuno dei due piani contenenti la normale E alla superficie ed una delle due tangenti principali.

Lo stesso problema si potrà anche risolvere sopra un'elicoide qualunque S, allorchè per es. sia nota la tangente  $i$  nel punto E alla linea *isofota* che passa per esso, nella ipotesi che la superficie abbia luce da una direzione arbitraria, che non sia quella dell'asse di S. Invero, se  $i, i'$  sono risp.<sup>a</sup> la tangente in E all'isofota in questione e la proiezione ortogonale del raggio luminoso che passa per E sul piano tangente in questo punto, e se  $e, e'$  sono come dianzi la tangente all'elica e la proiezione della parallela all'asse condotta per E, saranno  $i$  ed  $i'$ ,  $e$  ed  $e'$  coppie di tangenti *coniugate*; <sup>(2)</sup> e quindi i raggi ortogonali nell'involuzione da esse individuata saranno le tangenti principali.

3. Tra le  $\infty^3$  rette seganti ortogonalmente le eliche di un'elicoide qualunque S sono comprese le  $\infty^3$  tangenti alle traiettorie ortogonali delle eliche di S; ond'è che *le traiettorie ortogonali delle eliche di una elicoide qualunque appartengono per le tangenti ad un medesimo complesso lineare*. Reciprocamente si dimostra che ogni linea sghemba  $\gamma$ , la quale appartenga per le tangenti ad un complesso lineare  $\Gamma$  giace sempre in una determinata superficie elicoidale S, sulla quale essa è traiettoria ortogonale delle eliche. Sia infatti  $z$  l'asse e  $k$  il parametro di  $\Gamma$ . Il piano osculatore a  $\gamma$  in un suo punto qualunque E sarà il piano polare di E rispetto a  $\Gamma$ , e passerà in conseguenza per la normale abbassata da E su  $z$ . Ora se  $\rho$  è la lunghezza di questa perpendicolare e  $\Theta$  l'inclinazione di detto piano sull'asse  $z$ , sarà per tutti i punti della curva  $\rho \operatorname{tang} \Theta = k$ ; per la qual cosa, se in ogni punto E di  $\gamma$  s'innalzi la perpendicolare al relativo piano osculatore e si rappresenti con  $\Theta'$  l'angolo di questa normale con l'asse sarà ancora  $\rho \operatorname{cotang} \Theta' = k$ ; e per conseguenza tutte le anzidette normali toccheranno nei singoli punti di  $\gamma$  altrettante eliche aventi per comune asse la retta  $z$  e per comun passo l'intervallo  $\lambda = 2\pi k$ . Nè altro è da aggiungere a prova di ciò che è detto, se non che imponendo alla curva  $\gamma$  un movimento elicoidale di parametro  $k$  intorno all'asse  $z$  e secondo la direzione di una qualunque di dette normali, si verrà necessariamente a descrivere un'elicoide S, su cui le successive posizioni di  $\gamma$  saranno traiettorie ortogonali delle eliche.

Anche l'anzidetta proprietà è caratteristica per questo genere di superficie, o, in altri termini: *una superficie, la quale contenga un si-*

(1) V. un mio articolo: "Intorno alle superficie elicoidali", nel *Giornale della Società di Lettere scientifiche di Genova*, 1887.

(2) V. una mia nota: "Sopra le linee uniformemente illuminate di una superficie qualunque", negli *Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino*, 1892.

stema di  $\infty^1$  geodetiche sghembe appartenenti per le tangenti ad un medesimo complesso lineare, è necessariamente una elicoide, su cui quelle geodetiche sono le traiettorie ortogonali delle eliche.

Invero, per un notissimo teorema sulle congruenze di raggi, le  $\infty^2$  tangenti di quelle geodetiche saranno traiettorie ortogonali di  $\infty^1$  superficie  $S'$  evolventi della data superficie  $S$  rispetto al dato sistema di geodetiche; e queste nuove superficie per ciò che precede (n. 1) saranno elicoidi parallele: di più le geodetiche in parola sopra  $S$  corrisponderanno ad uno dei due sistemi di linee di curvatura sopra  $S'$ . D'altra parte è pur noto che l'evolvente di un'elicoide rispetto alle linee di curvatura di uno stesso sistema è ancora un'elicoide, su cui le traiettorie ortogonali delle eliche sono immagini di quelle linee di curvatura (1); laonde ecc., ecc.

Lucca, agosto 1893

---

## PROBLEMI (2)

(continuazione — Vedi fasc. III)

---

115. Il luogo del punto d'incontro di due tangenti ortogonali alla curva antipodaria dell'ellisse rispetto al suo centro è una quartica la cui area è doppia di quella dell'ellisse.

116. Essendo  $P, Q$  le proiezioni di un punto  $A$  di un'ellisse sugli assi della medesima, e  $B, C$  i punti d'incontro della retta  $PQ$  con l'ellisse, il luogo del baricentro del triangolo  $ABC$  è una curva unicursale, la cui area è eguale ad  $\frac{1}{6}$  di quella dell'ellisse, e il perimetro della sua evolvente è equivalente al perimetro dell'evolvente dell'ellisse.

117. La curva luogo delle proiezioni di un punto  $M$  d'un'ellisse sulla tangente nel punto opposto  $M'$  ha per area

$$U = \pi ab + 4\pi ab \left( \frac{a-b}{a+b} \right);$$

e la sua evolvente ha per lunghezza totale

$$l = \frac{4(2a^2 - b^2)^2}{a(4a^2 - 3b^2)} - \frac{4(2b^2 - a^2)^2}{b(4b^2 - 3a^2)}.$$

---

(1) BIANCHI, - Sulle superfici applicabili, negli *Annali della Scuola Normale di Pisa*, 1878, pag. 49.

(2) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoriti dal Comandante BARISIERI, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

118. Date due ellissi concentriche e con gli assi disposti sulle stesse rette, calcolare l'area della curva luogo dei punti medi delle corde dell'una tangenti all'altra.

119. Dati un punto A ad una retta  $r$  fissa, sia P un punto mobile di  $r$ , e sulla AP si prenda un punto M tale che

$$AM^2 + AP^2 = \text{costante.}$$

Il luogo di M è una quartica, della quale si domanda l'area.

120. Se in un triangolo ABC la base BC è fissa ed è  $\hat{A} = 2\hat{C}$ , il luogo di A è una trisettrice di Mac Laurin. Essendo A', B', C', i piedi delle altezze di questo triangolo si trovino:

- 1) le curve inviluppi della retta B'C', C'A', A'B';
- 2) i luoghi dei punti medi dei lati del triangolo A'B'C';
- 3) il luogo dell'ortocentro del triangolo ABC;

e si calcolino le aree di tutte queste curve.

121. Essendo O il centro di un circolo, A un punto fisso di esso ed M un punto mobile su di esso, trovare in coordinate polari l'equazione del luogo dal punto di Gergonne del triangolo OAM e dei luoghi dei tre punti associati al punto stesso.

Calcolare l'area di queste curve.

122. Essendo F un fuoco d'un'ellisse, M un punto variabile su di essa ed  $r$  la perpendicolare ad MF nel suo punto medio, si dimostri che la retta  $r$  tocca il suo inviluppo nel punto in cui essa è incontrata dalla normale in M alla ellisse; e che l'area dell'inviluppo suddetto è  $\frac{\pi a}{8b} (3b^2 - a^2)$ .

123. Trovare l'area della curva, le cui equazioni parametriche sono

$$x = \frac{A \operatorname{sen} \varphi - B \operatorname{cos} \varphi}{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cos}^2 \varphi} \quad y = \frac{A' \operatorname{sen} \varphi + B' \operatorname{cos} \varphi}{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cos}^2 \varphi}$$

dove A, B, A', B',  $a$ ,  $b$  sono delle costanti. Si consideri particolarmente il caso

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}$$

(Si trova

$$\frac{\pi(a^2 + b^2)}{2a^2b^2} (AB - BA').$$

124. Dimostrare che gli integrali

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cos}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad \int_0^{2\pi} \frac{(a^4 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^4 \operatorname{cos}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cos}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi.$$

sono funzioni dell'integrale ellittico

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + b^2 \operatorname{cos}^2 \varphi} \cdot d\varphi.$$

125. Dimostrare che

$$\int_0^\pi \frac{(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - \lambda \cos 2\theta)}{(1 - \lambda \cos \theta)^2 (1 + \lambda \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta + \lambda^2 \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta [2 \operatorname{sen} \theta + \cos \theta - \lambda \cos 2\theta] [\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - \lambda \cos 2\theta]}{(1 - \lambda \cos \theta)^3 (1 + \lambda \operatorname{sen} \theta)^3} d\theta = \frac{\pi (\lambda^4 + 2\lambda^2 - 4)}{\sqrt{1 - \lambda^2} (\lambda^2 - 2)^2}$$

126. Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} \theta \frac{\sqrt{A^2 \operatorname{sen}^2 \theta + B^2 \cos^2 \theta}}{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

127. Dimostrare che

$$\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{b + \cos x} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx}{1 - \cos^2 x} = \frac{4}{a^2} \int_0^a \frac{x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx}{a^2 - x^2} = \pi (3 - 2\sqrt{2}).$$

128. Dimostrare la relazione

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 b^3 d\theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta)^2}$$

senza calcolare i due integrali.

129. Dimostrare che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a^n \cos^2 \theta - b^n \operatorname{sen}^2 \theta)^2}{(a^n \cos^2 \theta + b^n \operatorname{sen}^2 \theta)^2 (a^4 \cos^2 \theta + b^4 \operatorname{sen}^2 \theta)} d\theta = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{2a^2 b^2 (a + b)^2}$$

130. Dimostrare che

$$\frac{1}{a + b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a \operatorname{sen}^2 x + b \cos^2 x)}{(a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} dx = \frac{1}{a - b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a \operatorname{sen}^2 x - b \cos^2 x)}{(a^2 \operatorname{sen}^2 x + b^2 \cos^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4a^2 b^2}$$

131. Indicando con M un punto qualunque di una parabola di vertice O, con C il corrispondente centro di curvatura, con M' il piede della terza normale alla curva, uscente da C, dimostra che:

1° il centro del circolo circoscritto al triangolo MOM' appartiene alla retta MC';

2° i luoghi del circumcentro e dell'ortocentro del triangolo MOM' sono due evolute di parabola;

3° il circolo circoscritto al triangolo MOM' inviluppa una quartica.

132. Il triangolo ABC è inscritto in un circolo ed ha il vertice A fisso e il lato BC di lunghezza costante. Si dimostri che il luogo del suo ortocentro è un circolo.

133. Essendo ABC un triangolo d'area massima inscritto in un'ellisse, H il suo ortocentro, D il piede della quarta normale all'ellisse condotta da H (gli altri tre sono A, B, C) dimostrare che:

1° la retta AD è normale ad una ellisse fissa;

2° i circoli osculatori in A, B, C si incontrano nel punto E simmetrico di D rispetto al centro dell'ellisse;

3° il luogo di H è una ellisse;

4° se P, Q sono i punti d'incontro degli assi con la normale considerata, H divide per metà il segmento PQ.

Dedurre la seguente proprietà: La normale in un punto M d'una ellisse incontra gli assi nei punti R, S, e T, U, V sono i piedi delle altre tre normali condotte all'ellisse dal punto medio I del segmento RS. Se  $\varphi$  è l'anomalia eccentrica di M, quelle di T, U, V sarà rispettivamente

$$\frac{\varphi}{3}, \quad \frac{\varphi + \pi}{3}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{3}.$$

134. Se i numeri  $a, b, c, \dots, l$  verificano la condizione

$$a + b + c + \dots + l = 0,$$

ossia

$$\Sigma a = 0,$$

la somma  $\Sigma a^m$  (dove  $m$  rappresenta un numero dispari) è multiplo di  $m$ .

135. Essendo data la funzione

$$y = \frac{a(1 + \cos^2 x)}{\cos x},$$

risolvere l'equazione

$$y^2 + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - y \left( \frac{d^2y}{dx^2} \right) = 0.$$

(Un calcolo assai laborioso dimostra che l'equazione è soddisfatta da

$$\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

136. Le due equazioni

$$\begin{aligned} x^2(x-a) - a(x-a+b)^2 &= 0, \\ x^2(x-b) - b(x+a-b)^2 &= 0, \end{aligned}$$

hanno una sola radice reale.

137. Essendo O il punto medio del segmento AB, trovare e costruire la curva luogo dei punti tali che sia

$$MA + MB + MC = k.$$

138. È dato un angolo  $xOy$  ed un punto  $P$ . Una retta variabile attorno a  $P$  incontra gli assi  $Ox$ ,  $Oy$  in  $A$  e  $B$ . Le tre perpendicolari condotte ad  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $AB$  per i punti  $A$ ,  $B$ ,  $P$  rispettivamente formano un triangolo. I luoghi dei vertici di questo triangolo sono tre iperboli.

139. Essendo  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  i piedi delle normali condotte ad un'ellisse da un punto  $M$  della medesima, si consideri la conica che posa per  $M$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  e per un fuoco  $F$  dell'ellisse. Trovare:

- 1° l'involuppo di questa conica;
- 2° il luogo del suo centro.

140. L'area racchiusa fra la *kreuzcurve iperbolica*  $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$  ed uno dei suoi asintoti è finita ed eguale a  $2ab$ . Il baricentro di quest'area è sull'asse della  $x$  alla distanza  $OG = \frac{\pi a}{4}$ .

141. Trovare il volume generato da una sviluppata di ellisse, rotando di un intero giro attorno alle sue tangenti di regresso.

(Si trovano i seguenti valori:

$$V_{ox} = \frac{32 \pi c^5}{105 ab^2}, \text{ se rota attorno ad } x$$

$$V_{oy} = \frac{32 \pi c^5}{105 a^2 b} \text{ se rota attorno ad } y).$$

142. Costruire la curva

$$[2(x^2 + y^2) + 11ax - 6a^2]^2 = 12a^2(2x - a)(x^2 + y^2 + 4ax - 3a^2)$$

che si compone di due ovali.

(Per  $y = 0$  si ha

$$x \left(x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{3a}{2}\right) (x + 4a) = 0.$$

Per  $x = 0$  si ha

$$y^2(y^2 - 3a^2) = 0.$$

Risolta rispetto ad  $y^2$  l'equazione della curva diventa.

$$y^2 = \frac{(a - 2x)(x + 3a) \pm 3a \sqrt{a(a - 3x)}}{2}.$$

e questa facilita la costruzione della curva).

E.-N. BARISIEN.

(Continua)

## PICCOLE NOTE

Due nuove serie che rappresentano il numero  $e - 1$ . Dall'eguaglianza

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

si deduce

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Prendendo le derivate dei due membri, si ha

$$\frac{x e^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \quad (1)$$

Ponendo  $x = 1$ , si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Derivando di nuovo la (1) si ha

$$\begin{aligned} \frac{[e^x(x-1) + e^x]x^2 - 2x[e^x(x-1) + 1]}{x^3} &= \\ &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

e quindi, ponendo  $x = 1$ ,

$$e - 2 = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \quad (3')$$

Risulta dunque per  $e$  lo sviluppo

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \quad (4)$$

Confrontando questa serie con l'altra classica

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots \quad (5)$$

si ricava

$$\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Questa eguaglianza ci dimostra anche direttamente senza ricorrere alla serie (6).

Infatti si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (n+2)} = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n (n+2)}$$

e quindi

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n} - \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) (n+2)} =$$

$$= \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n (n+2)},$$

ossia

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots - \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \right)$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \right].$$

Per la (2) si ha

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \dots = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

e quindi la relazione precedente diviene

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots -$$

$$\dots - \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots \right) = 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

che è appunto la (5).

OSSERVAZIONE. — La serie (3') che dà il valore di  $e$  ha i suoi termini più piccoli dei corrispondenti della serie classica (4): essa è dunque meno rapidamente convergente di questa, e perciò non sembra molto interessante tuttavia, pare possibile con un processo analogo a quello indicato o con un altro qualsiasi di trovare l'espressione di  $e$  per mezzo di una serie più rapidamente convergente di quella classica. Sottopongo questa quistione ai lettori del *Periodico*.

2. Ecco un altro sviluppo in serie di  $e$ .

La formola (3) si può scrivere

$$\frac{x^3 e^x - 2x [e^2 (x-1) + 1]}{x^4} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots$$

$$\frac{e^x (x^2 - 2x + 2) - 2}{x^2} = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \dots$$

Derivando, si ha

$$\frac{[e^x (x^2 - 2x + 2) + e^x (2x - 2)] x^3 - 3x^2 [e^x (x^2 - 2x + 2) - 2]}{x^6}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{x}{1 \cdot 5} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \dots$$

d'onde, ponendo  $x=1$ , si ricava

$$e - 3(e - 2) = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{x}{1 \cdot 5} + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \dots$$

ossia

$$2e = 6 - \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \dots \right),$$

e

$$e = 3 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \dots \right). \quad (7)$$

3. Confronto delle formole precedenti che danno  $e$ .

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$

$$e = 2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} + \dots \quad (4)$$

$$e = 3 - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} + \right. \\ \left. + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} + \dots \right) \quad (7)$$

Calcoliamo i termini di ciascuna di quelle tre serie con 5 decimali e coi termini scritti qui sotto:

| Serie classica  |           | Serie (4)                                     |           | Serie (7)   |           |
|---|-----------|---|-----------|---|-----------|
| 2   | = 2,00000 | 2   | = 2,00000 | $\frac{1}{1 \cdot 4}$                                 | = 0,25000 |
| $\frac{1}{1 \cdot 2}$                                 | = 0,50000 | $\frac{1}{1 \cdot 3}$                         | = 0,33333 | $\frac{1}{1 \cdot 5}$                                 | = 0,20000 |
| $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$                         | = 0,16666 | $\frac{1}{1 \cdot 4}$                         | = 0,25000 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 6}$                         | = 0,08333 |
| $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$                 | = 0,04166 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 5}$                 | = 0,10000 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}$                 | = 0,02389 |
| $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$         | = 0,00833 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6}$         | = 0,02777 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8}$         | = 0,00521 |
| $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ | = 0,00139 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}$ | = 0,00595 | $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9}$ | = 0,00093 |
| $e$   | = 2,71804 | $e$   | = 2,71705 | $S$   | = 0,56336 |
|   |           |   |           | $\frac{S}{2}$   | = 0,28168 |
|   |           |   |           | $e = 3 - \frac{S}{2}$                                 | = 2,71832 |

Il vero valore di  $e$  essendo

$$e = 2,718281828\dots$$

risulta che con i primi 6 termini di ciascuna delle tre serie, si ha:

per la serie classica

0,00024 in meno

per la serie (4)

0,00123 in meno

per la serie (7)

0,00004 in più.

La serie (7) è dunque più convergente che la serie classica.

E.-N. BARIEN.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 15 luglio 1914

# MOMENTI STATICI. MOMENTI D'INERZIA E MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE

## I. — Baricentro.

1. DEFINIZIONI. — 1<sup>a</sup>. Essendo  $d_1, d_2 \dots d_n$  le distanze di un punto P da  $n$  piani (o rette, o punti) il prodotto  $a \cdot d_1 \cdot d_2 \dots d_n$  si chiama *momento di grado  $n$*  del punto P, affetto dal coefficiente  $a$ , rispetto agli  $n$  piani (o rette, o punti).

2<sup>a</sup>. Essendo  $d$  la distanza di un punto P da un piano (o retta, o punto), il prodotto  $a \cdot d^n$  si chiama *momento di grado  $n$*  del punto P, affetto dal coefficiente  $a$ , rispetto al piano (o retta, o punto).

3<sup>a</sup>. Si chiama *momento di grado  $n$*  rispetto a  $n$  piani (o rette, o punti) di un gruppo di punti  $P_1, P_2 \dots P_s$ , affetti dai coefficienti  $a_1, a_2 \dots a_s$  la somma algebrica dei momenti di grado  $n$  di questi punti.

4<sup>a</sup>. I momenti di primo grado rispetto ad un piano (o ad una retta o ad un punto) si chiamano *momenti statici*.

5<sup>a</sup>. I momenti di secondo grado rispetto ad un piano (o retta, o punto) si chiamano *momenti d'inerzia*.

2. TEOREMA. — *L'involuppo dei piani rispetto ai quali è nullo il momento statico di un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$  è generalmente un punto.*

Indichiamo con  $x_i, y_i, z_i$  le coordinate cartesiane del punto P riferite ad un sistema di assi qualunque e con  $u, v, w$  le coordinate plückeriane di un piano qualunque  $\pi$  rispetto agli stessi assi.

È noto che la distanza del punto  $P_i$  da  $\pi$  è

$$d = k (ux_i + vy_i + wz_i + 1),$$

dove, indicando con  $\lambda, \mu, \nu$  gli angoli degli assi,  $\lambda = (\gamma z)$ ,  $\mu = (z x)$ ,  $\nu = (x y)$ , è

$$k^2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \cos \nu & \cos \mu & u \\ \cos \nu & 1 & \cos \lambda & v \\ \cos \mu & \cos \lambda & 1 & w \\ u & v & w & 1 \end{vmatrix}},$$

e, se gli assi sono ortogonali, è

$$k^2 = \frac{1}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Perciò il momento statico del sistema di punti dati è

$$(1) \quad M = k \{u \Sigma a_i x_i + v \Sigma a_i y_i + w \Sigma a_i z_i + \Sigma a_i\}.$$

Dunque l'involuppo dei piani rispetto ai quali il momento del dato sistema di punti è nullo è rappresentato dall'equazione lineare

$$(2) \quad u \Sigma a_i x_i + v \Sigma a_i y_i + w \Sigma a_i z_i + \Sigma a_i = 0,$$

ossia è un punto.

Se  $\Sigma a_i \neq 0$ , questo punto ha le coordinate

$$(3) \quad x_0 = \frac{\Sigma a_i x_i}{\Sigma a_i}, \quad y_0 = \frac{\Sigma a_i y_i}{\Sigma a_i}, \quad z_0 = \frac{\Sigma a_i z_i}{\Sigma a_i},$$

e quindi esso è a distanza finita.

Se  $\Sigma a_i = 0$ , l'equazione precedente diviene

$$u \cdot \Sigma a_i x_i + v \cdot \Sigma a_i y_i + w \cdot \Sigma a_i = 0$$

ed esprime la condizione necessaria e sufficiente perchè il piano  $\pi$  sia parallelo alla retta

$$\frac{x}{\Sigma a_i x_i} = \frac{y}{\Sigma a_i y_i} = \frac{z}{\Sigma a_i z_i},$$

dunque l'involuppo è il punto all'infinito di questa retta.

Se è anche  $\Sigma a_i x_i = 0$  questa retta è parallela al piano  $yz$ ;

" "  $\Sigma a_i y_i = 0$  " " " "  $zx$ ;

" "  $\Sigma a_i z_i = 0$  " " " "  $xy$ .

Ne segue che:

se è  $\Sigma a_i y_i = 0, \Sigma a_i z_i = 0$  la retta suddetta è parallela all'asse  $x$ ;

"  $\Sigma a_i z_i = 0, \Sigma a_i x_i = 0$  " " " " "  $y$ ;

"  $\Sigma a_i x_i = 0, \Sigma a_i y_i = 0$  " " " " "  $z$ .

Soltanto nel caso in cui sia contemporaneamente

$$(4) \quad \Sigma a_i x_i = 0, \quad \Sigma a_i y_i = 0, \quad \Sigma a_i z_i = 0, \quad \Sigma a_i = 0,$$

l'equazione (2) è indeterminata, cioè  $M = 0$  per qualsiasi piano.

DEFINIZIONE. — Si chiama *baricentro* di un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$  il punto involuppo dei piani rispetto ai quali è nullo il momento statico del sistema. Quando il baricentro è indeterminato diremo che il sistema è *abaricentrico*.

COROLLARI. — 1°. Il baricentro è un punto a distanza finita, se  $\Sigma a_i \neq 0$ ; è un punto all'infinito, se  $\Sigma a_i = 0$ .

2°. Se  $\Sigma a_i \neq 0$ , il momento statico del sistema rispetto ad un piano qualunque è uguale al momento del suo baricentro affetto dal coefficiente  $\Sigma a_i$  rispetto al piano stesso.

Infatti dalla (1), tenendo conto delle (3), risulta

$$M = k \cdot (u \cdot x_0 + v \cdot y_0 + w \cdot z + 1) \cdot \Sigma a_i,$$

ossia

$$M = k (ux_0 + vy_0 + wz + 1) \cdot \Sigma a_i = d \cdot \Sigma a_i,$$

indicando con  $d$  la distanza del baricentro dal piano.

3°. Il momento statico di un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$ , tali che sia  $\Sigma a_i = 0$ , rispetto a qualsiasi piano è nullo quando è nullo rispetto a tre piani non paralleli ad una retta.

Infatti presi questi tre piani per piani fondamentali si ha

$$\Sigma a_i x_i = 0, \quad \Sigma a_i y_i = 0, \quad \Sigma a_i z_i = 0, \quad \Sigma a_i = 0$$

e per conseguenza  $M = 0$  per qualsiasi valore di  $u, v, w$ .

3. TEOREMA. — Se un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$  ha momento nullo rispetto a quattro piani non concorrenti in un punto ha momento nullo rispetto a tutti i piani.

Siano  $u_s, v_s, w_s$  ( $s = 1, 2, 3, 4$ ) le coordinate dei quattro piani considerati, per i quali cioè

$$u_s \Sigma a_i x_i + v_s \Sigma a_i y_i + w_s \Sigma a_i z_i + \Sigma a_i = 0.$$

Poichè il determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \\ u_4 & v_4 & w_4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

perchè per ipotesi i quattro piani non passano per un punto, si deve avere

$$\Sigma a_i x_i = 0, \quad \Sigma a_i y_i = 0, \quad \Sigma a_i z_i = 0, \quad \Sigma a_i = 0$$

e perciò il momento del sistema rispetto ad un piano qualunque è pure nullo.

4. Diamo qualche esempio di sistemi abaricentrici di punti, tali cioè che il momento sia nullo rispetto a qualsiasi piano dello spazio.

1°. Siano dati cinque punti tali che quattro non siano in un piano, ed applichiamo ad essi coefficienti proporzionali ai volumi  $v_i$  dei tetraedri che hanno per vertici i quattro punti rimanenti cioè ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

È evidente che sono verificate le quattro condizioni (4) e il sistema è abaricentrico.

2°. Se vogliamo che quattro punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  siano abaricentrici è necessario che le loro coordinate verifichino le quattro equazioni omogenee (4), le quali in questo caso contengono le quattro incognite  $a_i$ , e perciò si deve avere

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

cioè i quattro punti devono stare in un piano. Prendiamo questo per piano  $z=0$ , allora  $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0$  e la terza delle equazioni (4) diventa una identità, cosicchè il sistema si riduce ad

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 + a_4y_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0, \end{cases}$$

che è soddisfatto prendendo  $a_1, a_2, a_3, a_4$  proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

cioè alle aree dei triangoli  $P_2P_3P_4, P_3P_4P_1, P_4P_1P_2, P_1P_2P_3$ .

3°. Se vogliamo applicare ai tre punti  $P_1, P_2, P_3$  coefficienti tali che il sistema sia abaricentrico, preso il loro piano per piano  $z=0$ , il sistema (4) diventa

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0, \end{cases}$$

e perciò deve essere

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Cioè i tre punti devono essere in linea retta.

Preso questa retta per asse della  $x$ , anche la seconda equazione (4) diventa un'identità, e il sistema si riduce a

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0, \end{cases}$$

che è soddisfatta prendendo  $a_1, a_2, a_3$  proporzionali ai minori della matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

cioè ai segmenti  $P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2$ .

4°. Per due punti distinti  $P_1, P_2$  non è possibile determinare dei coefficienti tali che il sistema sia abaricentrico.

Infatti presa la retta  $P_1P_2$  per asse  $x$ , il sistema (3) diventa

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0, \end{cases}$$

che è verificata soltanto se

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè se i due punti coincidono.

## II. — Momenti d'inerzia. - Quadriche d'inerzia.

5. DEFINIZIONE. — *Centro relativo ad un piano  $\pi$  rispetto ad un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $\alpha_i$  è il baricentro dei punti stessi affetti da coefficienti proporzionali ai momenti statici dei medesimi punti rispetto a quel piano.*

TEOREMA. — *L'involuppo dei piani rispetto ai quali è nullo il momento d'inerzia di un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $\alpha_i$  è una quadrica, che ha per centro il baricentro del sistema di punti.*

Infatti (come abbiamo detto nel § 3) la distanza del punto  $P_i$  dal piano di coordinate  $u, v, w$  è

$$d_i = k (ux_i + vy_i + wz_i + 1),$$

e quindi il momento d'inerzia del sistema è

$$(5) \quad I = \sum \alpha_i d_i^2 = k^2 \sum \alpha_i (ux_i + vy_i + wz_i + 1)^2,$$

ovvero, ponendo

$$(6) \quad \begin{cases} \sum \alpha_i x_i^2 = \alpha_{11}, & \sum \alpha_i y_i z_i = \alpha_{23}, & \sum \alpha_i x_i = \alpha_{14}, \\ \sum \alpha_i y_i^2 = \alpha_{22}, & \sum \alpha_i z_i x_i = \alpha_{31}, & \sum \alpha_i y_i = \alpha_{24}, \\ \sum \alpha_i z_i^2 = \alpha_{33}, & \sum \alpha_i x_i y_i = \alpha_{12}, & \sum \alpha_i z_i = \alpha_{34}, \end{cases} \quad \sum \alpha_i = \alpha_{44},$$

si ha

$$I = k^2 \cdot f(u, v, w),$$

dove

$$(7) \quad f(u, v, w) = \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 + 2\alpha_{23}vw + 2\alpha_{31}wu + 2\alpha_{12}uv + \\ + 2\alpha_{14}u + 2\alpha_{24}v + 2\alpha_{34}w + \alpha_{44}.$$

I piani pei quali è  $I = 0$  verificano dunque l'equazione di 2° grado

$$f(u, v, w) = 0,$$

cioè inviluppano una quadrica.

DEFINIZIONE. — La quadrica inviluppo dei piani rispetto ai quali il momento di un sistema è nullo, si chiama *prima quadrica d'inerzia* o *quadrica di Binet*.

6. TEOREMA. — I centri relativi ai piani dello spazio rispetto ad un dato sistema di punti ed i piani stessi si corrispondono univocamente in una polarità che ha per quadrica fondamentale la prima quadrica d'inerzia.

Il momento statico del punto  $P_i (x_i, y_i, z_i)$  affetto dal coefficiente  $a_i$  rispetto al piano  $\pi (u, v, w)$  essendo

$$m_i = ka_i (ux_i + vy_i + wz_i + 1),$$

il baricentro del sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $m_i$ , indicando con  $u', v', w'$  le coordinate plückeriane correnti, è rappresentato dall'equazione

$$u' \sum m_i x_i + v' \sum m_i y_i + w' \sum m_i z_i + \sum m_i = 0,$$

ossia

$$(8) \quad u' (\alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w + \alpha_{14}) + v' (\alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w + \alpha_{24}) + \\ + w' (\alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w + \alpha_{34}) + (\alpha_{41}u + \alpha_{42}v + \alpha_{43}w + \alpha_{44}) = 0$$

Le equazioni che stabiliscono la polarità fra i piani dello spazio e i loro centri relativi sono dunque

$$(9) \quad \begin{cases} \mu x = \alpha_{11}u + \alpha_{12}v + \alpha_{13}w + \alpha_{14} \\ \mu y = \alpha_{21}u + \alpha_{22}v + \alpha_{23}w + \alpha_{24} \\ \mu z = \alpha_{31}u + \alpha_{32}v + \alpha_{33}w + \alpha_{34} \\ \mu = \alpha_{41}u + \alpha_{42}v + \alpha_{43}w + \alpha_{44}. \end{cases}$$

Se poniamo:

$$(10) \quad \Lambda = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix},$$

e indichiamo con  $A_{11}$  il minore complementare di  $\alpha_{11}$  in questo determinante, si trova facilmente che le formule inverse delle precedenti sono (supposto  $\Lambda \neq 0$ )

$$(11) \quad \begin{cases} vx = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + A_{14} \\ vy = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + A_{24} \\ vw = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + A_{34} \\ v = A_{41}x + A_{42}y + A_{43}z + A_{44}, \end{cases}$$

avendo posto  $v = \frac{\Lambda}{\mu}$ .

È opportuno osservare che  $A$  è il determinante della  $f(u, v, w) = 0$ , equazione della quadrica di BINET in coordinate di piani, e perciò l'equazione di questa quadrica in coordinate di punti è

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & y \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & z \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & 1 \\ x & y & z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero

$$(13) \quad F(x, y, z) = A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{23}yz + 2A_{31}zx + 2A_{12}xy - 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0.$$

**COROLLARIO.** — *La prima quadrica d'inerzia ha per centro il baricentro del sistema.*

Infatti ponendo nella (8)  $u = v = w = 0$ , coordinate del piano all'infinito, essa diventa la (2) che rappresenta il baricentro.

7. Supposto  $A \neq 0$ , possiamo prendere come assi una terna di diametri due a due coniugati ed allora l'equazione deve ridursi a quattro termini (quelli contenenti  $x^2, y^2, z^2$  ed il termine noto) perciò le equazioni (7), (13) della conica di BINET diventano, come è facile verificare,

$$(14) \quad \begin{cases} \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 + \alpha_{44} = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha_{11}} + \frac{y^2}{\alpha_{22}} + \frac{z^2}{\alpha_{33}} + \frac{1}{\alpha_{44}} = 0 \end{cases}$$

e le formule (9), che stabiliscono le relazioni per passare dalle coordinate di un piano a quelle del suo centro relativo diventano

$$(15) \quad \begin{cases} \mu x = \alpha_{11}u \\ \mu y = \alpha_{22}v \\ \mu z = \alpha_{33}w \\ \mu = \alpha_{44}, \end{cases}$$

dalle quali si trae (supposto  $\alpha_{44} = 0$ )

$$(16) \quad \begin{cases} x = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} u \\ y = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} v \\ z = \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} w \end{cases} \quad (17) \quad \begin{cases} u = \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{11}} x \\ v = \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{22}} y \\ w = \frac{\alpha_{44}}{\alpha_{33}} z \end{cases}$$

È opportuno osservare che quando le  $\alpha_i$  sono tutte di egual segno, anche  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}$  sono di egual segno, e perciò la prima quadrica d'inerzia è un ellissoide immaginario.

8. DEFINIZIONE. — Si chiama *seconda quadrica d'inerzia di un sistema di punti*  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$ , pei quali  $\Sigma a_i \neq 0$ , la quadrica base della polarità che si ottiene come prodotto di quella esistente fra i piani e i rispettivi centri relativi e della simmetria rispetto al baricentro.

Riferendoci a tre diametri coniugati, se  $P$  è il polo del piano  $\pi$  rispetto alla prima quadrica d'inerzia e  $P'$  è il simmetrico di  $P$  rispetto al baricentro, le coordinate di  $P'$  sono quelle di  $P$ , date dalle formole (15) del § precedente, cambiate di segno: così le formole della nuova polarità sono

$$(18) \quad \begin{cases} x = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} u \\ y = -\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} v \\ z = -\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} w \end{cases} \quad (19) \quad \begin{cases} u = -\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{11}} x \\ v = -\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{22}} y \\ w = -\frac{\alpha_{44}}{\alpha_{33}} z \end{cases}$$

La quadrica base di questa polarità cioè la quadrica involuppo dei piani che contengono il rispettivo polo e luogo di questi punti, è dunque rappresentata in coordinate plückeriane e cartesiane dalle equazioni

$$(20) \quad \begin{cases} \alpha_{11}u^2 + \alpha_{22}v^2 + \alpha_{33}w^2 - \alpha_{44} = 0 \\ \frac{x^2}{\alpha_{11}} + \frac{y^2}{\alpha_{22}} + \frac{z^2}{\alpha_{33}} - \frac{1}{\alpha_{44}} = 0, \end{cases}$$

che si ottengono eliminando  $x, y, z$  (oppure  $u, v, w$ ) fra le (18) (oppure le (19)) e l'equazione

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

che esprime la condizione affinché un piano  $\pi$  contenga il proprio polo.

È opportuno osservare che mentre la 1<sup>a</sup> quadrica d'inerzia si può considerare come il *luogo dei punti autoconiugati* e l'involuppo dei piani autoconiugati nella polarità che intercede fra piani e centri relativi, la 2<sup>a</sup> quadrica d'inerzia si può considerare come luogo delle coppie di punti coniugati o come involuppo delle coppie di piani coniugati rispetto alla stessa polarità e simmetrici rispetto al baricentro.

9. Dalle formole dei §§ 7 e 8 risulta che si possono dare i casi seguenti, nella ipotesi  $\alpha_{44} = \Sigma a_i \neq 0$ .

a)  $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \alpha_{44}$  sono tutte dello stesso segno. Posto

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} = a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} = b^2, \quad \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} = c^2,$$

le equazioni (14), (20) divengono:

$$1^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ elissoide immaginario,}$$

$$2^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ elissoide reale.}$$

b) I tre coefficienti  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$ , hanno segno contrario a quello di  $\alpha_{44}$ . Posto

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} = -a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} = -b^2, \quad \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} = -c^2,$$

avremo:

$$1^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ elissoide reale,}$$

$$2^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 + c^2 w^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ elissoide immaginario.}$$

c) Dei tre coefficienti  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$ , due hanno lo stesso segno di  $\alpha_{44}$  ed una segno contrario. — Potremo porre per es.

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} = a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} = b^2, \quad \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} = -c^2$$

ed avremo:

$$1^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperboloide a 2 falde,}$$

$$2^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 + b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperbol. ad una falda.}$$

d) Dei tre coefficienti  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{33}$  uno ha lo stesso segno di  $\alpha_{44}$  e gli altri due segno contrario. Potremo porre per es.

$$\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} = a^2, \quad \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{44}} = -b^2, \quad \frac{\alpha_{33}}{\alpha_{44}} = -c^2,$$

ed avremo:

$$1^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 - b^2 v^2 - c^2 w^2 + 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperbol. ad una falda.}$$

$$2^a \text{ quadrica d'inerzia } \left\{ \begin{array}{l} a^2 u^2 - b^2 v^2 - c^2 w^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{ iperbol. a due falde.}$$

10. Prendiamo ora in esame il caso in cui sia  $a_{44} = \Sigma a_i = 0$ . In questo caso la  $f(u, v, w) = 0$  è verificata dalle coordinate del piano all'infinito ( $u = v = w = 0$ ) cioè la 1<sup>a</sup> quadrica d'inerzia è in questo caso un paraboloido.

Scegliendo per piani  $y = 0, z = 0$  due piani diametrali coniugati e per piano  $x = 0$  il piano tangente nel punto in cui il diametro ad essi comune taglia la quadrica, l'equazione di questa si riduce a tre soli termini (quelli che contengono  $v^2, w^2, u$ ); si deve dunque avere

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{12} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{44} = 0;$$

e le equazioni (7) e (13) diventano

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{22} v^2 + \alpha_{33} w^2 + 2\alpha_{14} u = 0 \\ \frac{v^2}{\alpha_{22}} + \frac{w^2}{\alpha_{33}} + \frac{2u}{\alpha_{14}} = 0; \end{array} \right.$$

e le (9) che stabiliscono la polarità fra i piani e i loro centri relativi, diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu x = \alpha_{14} \\ \mu y = \alpha_{23} v \\ \mu z = \alpha_{33} w \\ \mu = \alpha_{14} u; \end{array} \right.$$

e da esse si ricava

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{u} \\ y = \frac{\alpha_{23} v}{\alpha_{14} u} \\ z = \frac{\alpha_{33} w}{\alpha_{14} u} \end{array} \right. \quad (23) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x} \\ v = \frac{\alpha_{14} y}{\alpha_{23} x} \\ w = \frac{\alpha_{14} z}{\alpha_{33} x}. \end{array} \right.$$

È evidente che la quadrica è in questo caso un iperboloide ellittico o iperbolico secondo che  $\alpha_{22}, \alpha_{33}$  sono di egual segno o di segno contrario.

11. Per discutere a priori la natura della 1<sup>a</sup> quadrica d'inerzia bisogna, com'è noto, ricorrere ai quattro invarianti assoluti, i quali,

se per semplicità ci limitiamo all'ipotesi che gli assi primitivi siano ortogonali, sono

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \end{vmatrix},$$

$$C = B_{11} + B_{22} + B_{33},$$

$$D = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$$

(ove  $B_{in}$  è il minore complementare di  $\alpha_{in}$  nel determinante B).

Se al posto delle  $\alpha_{in}$  mettiamo i loro valori dati dalle (6) si trova

$$A = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \\ a_1 z_1 & a_2 z_2 & \dots & a_n z_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \\ a_1 z_1 & a_2 z_2 & \dots & a_n z_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \\ a_1 z_1 & a_2 z_2 & \dots & a_n z_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 z_1 & a_2 z_2 & \dots & a_n z_n \\ a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_1 x_1 & a_2 x_2 & \dots & a_n x_n \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & \dots & a_n y_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{vmatrix}$$

$$D = a_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + a_2 (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) + \dots + a_n (x_n^2 + y_n^2 + z_n^2).$$

Poniamo

$$V_{ijklm} = \begin{vmatrix} x_i & x_l & x_j & x_m \\ y_i & y_l & y_j & y_m \\ z_i & z_l & z_j & z_m \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$V_{iml} = \begin{vmatrix} x_i & x_l & x_j \\ y_i & y_l & y_j \\ z_i & z_l & z_j \end{vmatrix},$$

$$T_{in}^2 = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_n & y_n & z_n \end{vmatrix}^2,$$

$$d_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2,$$

cioè indichiamo, essendo  $O$  l'origine delle coordinate:

con  $V_{ihlm}$  il sestuplo del volume del tetraedro  $P_i P_h P_l P_m$   
 "  $V_{ih}$  " " " " " "  $OP_i P_h P_l$   
 "  $T_{ih}$  il doppio dell'area del triangolo " " " " " "  $OP_i P_h$   
 "  $d_i$  la distanza dell'origine  $O$  da  $P_i$ ;

ed avremo

$$(24) \quad \begin{cases} A = \sum a_i a_h a_l a_m V_{ihlm}^2 \\ B = \sum a_i a_h a_l V_{ih}^2 \\ C = \sum a_i a_h a_l T_{ih}^2 \\ D = \sum a_i d_i^2. \end{cases}$$

Abbiamo limitato questo calcolo al caso che gli assi di riferimento sieno ortogonali, ma è facile verificare che anche nel caso di assi obliqui si ottengono gli stessi risultati.

Dai segni delle quattro quantità  $A, B, C, D$  si deduce la specie della quadrica, applicando regole note di cui ricordiamo la parte più importante (limitata all'ipotesi  $A \neq 0$ ),

|            |         |                               |   |
|------------|---------|-------------------------------|---|
| $B=0$      | $A > 0$ | $C > 0, BD > 0$<br>altri casi | elissoide immaginaria<br>iperboloide ad una falda |
|            | $A < 0$ | $C > 0, BD > 0$<br>altri casi | elissoide reale<br>iperboloide a due falde        |
| $B \neq 0$ | $A < 0$ | $C > 0$                       | paraboloide ellittica                             |
|            | $A > 0$ | $C < 0$                       | "<br>iperbolica                                   |

Giova osservare che se le  $a_i$  sono tutte di egual segno, risulta

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad D > 0,$$

e perciò la prima quadrica d'inerzia è un elissoide immaginaria come abbiamo osservato nel § 7.

**12. TEOREMA.** — *Affinchè il centro  $B$  relativo ad un piano  $\beta$  appartenga ad un piano  $\gamma$  è necessario e sufficiente che il momento di 2° ordine del sistema rispetto ai due piani  $\beta, \gamma$  sia nullo.*

Se  $\beta, \gamma$  non sono paralleli, prendendo per piani  $x=0, y=0$ , i due piani  $\beta, \gamma$ , e per piano  $z=0$  un terzo piano qualunque ad essi non parallelo, sappiamo che le coordinate del centro  $B$  relativo a  $\beta$ , se  $\sum a_i x_i \neq 0$ , sono

$$x_\beta = \frac{\sum a_i x_i^2}{\sum a_i x_i}, \quad y_\beta = \frac{\sum a_i x_i y_i}{\sum a_i x_i}, \quad z_\beta = \frac{\sum a_i x_i z_i}{\sum a_i x_i}.$$

e se  $\Sigma a_i x_i = 0$  il centro B è il punto all'infinito della retta

$$\frac{x}{\Sigma a_i x_i^2} = \frac{y}{\Sigma a_i x_i y_i} = \frac{z}{\Sigma a_i x_i z_i}.$$

In ambedue i casi, affinchè B appartenga a  $\gamma$  è necessario e sufficiente che sia

$$\Sigma a_i x_i y_i = 0.$$

Se i due piani  $\beta, \gamma$  sono paralleli, si prenda  $\beta$  per piano  $x=0$  e sia  $x=h$  l'equazione di  $\gamma$ . La prima coordinata del centro B relativo a  $\beta$  è, supposto  $\Sigma a_i x_i \neq 0$ ,

$$x_\beta = \frac{\Sigma a_i x_i^2}{\Sigma a_i x_i}.$$

Affinchè B giaccia in  $\gamma$  è necessario e sufficiente che sia  $x_\beta = h$  cioè

$$\Sigma a_i x_i^2 = h \Sigma a_i x_i, \quad \text{ossia} \quad \Sigma a_i x_i (x_i - h) = 0.$$

Il primo membro di questa equazione è il momento di 2° ordine rispetto ai piani  $\beta, \gamma$  e così il teorema è dimostrato.

Se poi fosse  $\Sigma a_i x_i = 0$ , il punto B sarebbe un punto improprio del piano  $\beta$  e quindi anche di  $\gamma$ , che è parallelo a  $\beta$ .

**COROLLARIO.** — *Se il centro B relativo ad un piano  $\beta$ , appartiene al piano  $\gamma$ , anche il centro C relativo a  $\gamma$  appartiene a  $\beta$ .*

Infatti se B appartiene a  $\gamma$  il momento di 2° ordine rispetto ai piani  $\beta, \gamma$  deve esser nullo, ed essendo nullo questo momento, C deve appartenere a  $\beta$ .

Questo corollario serve a dimostrare di nuovo per altra via il teorema del § 6 che cioè i piani dello spazio ed i rispettivi centri relativi ad un dato sistema di punti si corrispondono in una polarità.

Infatti è noto che una polarità è una corrispondenza biunivoca involutoria fra piani e punti tale che, se il punto B (polo), corrispondente ad un piano  $\beta$ , appartiene ad un piano  $\gamma$ , viceversa il punto C (polo) corrispondente a  $\gamma$  appartenga a  $\beta$ .

Se dunque si verifica che due piani comunque scelti non hanno lo stesso centro relativo, si può asserire che fra i piani dello spazio ed i loro centri relativi esiste una polarità.

### III. — Raggi d'inerzia.

**13. DEFINIZIONE.** — Si chiama *raggio d'inerzia*, rispetto ad un piano  $\pi'$ , di un sistema di punti  $P_i$  affetti da coefficienti  $a_i$ , la somma dei quali non sia nulla, la distanza  $d$  dal piano  $\pi$  alla quale deve essere collocato un punto, affetto dal coefficiente  $\Sigma a_i$ , affinchè

abbia un momento d'inerzia eguale a quello del sistema dato rispetto a  $\pi$ .

In altre parole il raggio d'inerzia rispetto ad un piano  $r$  è dato dalla eguaglianza

$$\rho^2 = \left| \frac{\sum a_i d_i^2}{\sum a_i} \right|$$

essendo  $d_i$  la distanza di  $P_i$  da  $\pi$ .

**TEOREMA I.** — *Il raggio d'inerzia rispetto ad un piano  $\pi$  che passa pel baricentro è eguale alla distanza da esso dell'estremo del diametro coniugato a  $\pi$  rispetto ad una delle quadriche d'inerzia.*

Prendiamo per assi una terna di diametri coniugati, di cui due  $x, y$  stiano in  $\pi$ , e quindi  $z$  sia il diametro coniugato al piano  $\pi$ . La lunghezza  $\rho_1$  di questo semidiametro è data, come si vede dalle formule (14) o (20), dalla relazione

$$\rho_1^2 = \left| \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{44}} \right| = \left| \frac{\sum a_i z_i^2}{\sum a_i} \right|$$

ed il raggio d'inerzia  $\rho$  indicando con  $\theta$  l'angolo dell'asse  $z$  col piano  $\pi$  è dato da

$$\rho^2 = \left| \frac{\sum a_i z_i^2 \cdot \text{sen}^2 \theta}{\sum a_i} \right|;$$

perciò

$$\rho^2 = (\rho_1 \cdot \text{sen} \theta)^2.$$

Si osservi che il diametro  $z$  dell'una o dell'altra quadrica d'inerzia è sempre reale.

**TEOREMA II.** — *Il raggio d'inerzia rispetto ad un piano  $\pi$ , che non passa pel baricentro, è la media geometrica delle distanze del polo di  $\pi$  e del baricentro dal piano medesimo.*

Conservando le notazioni precedenti, e indicando con  $x_\pi, y_\pi, z_\pi$  le coordinate del centro relativo al piano  $\pi$  ( $z=0$ ), si ha

$$\sum a_i z_i^2 = z_\pi \cdot \sum a_i z_i = z_\pi \cdot z_0 \cdot \sum a_i$$

$$\rho^2 \cdot \left| \sum a_i \right| = \left| \sum a_i z_i^2 \cdot \text{sen}^2 \theta \right|$$

e quindi

$$\rho^2 = \left| z_\pi \text{sen} \theta \cdot z_0 \text{sen} \theta \right|.$$

**TEOREMA III.** — *Il raggio d'inerzia rispetto ad un piano  $\pi$  che non passa pel baricentro è uguale all'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha per cateti il raggio d'inerzia rispetto al piano  $\pi'$  parallelo a  $\pi$  condotto pel baricentro e la distanza  $h$  di questi due piani.*

Indicando con  $\rho_\pi, \rho_{\pi'}$  i raggi d'inerzia rispetto ai piani  $\pi, \pi'$ , con  $h$  la distanza di questi piani, con  $d_i, d'_i$  le distanze di un punto  $P_i$  da  $\pi$  e da  $\pi'$ , si ha  $d_i = d'_i + h$ , e quindi

$$\rho_\pi^2 \cdot \sum a_i = \sum d_i^2 a_i = \sum a_i (d'_i + h)^2$$

ossia

$$\rho_{\pi}^2 \cdot \Sigma a_i = \Sigma a_i d_i'^2 + 2h \cdot \Sigma a_i d_i' + h^2 \cdot \Sigma a_i.$$

Ma siccome  $\pi'$  passa per il baricentro, il suo momento statico è nullo, cioè

$$\Sigma a d_i' = 0,$$

Inoltre è  $\rho_{\pi'}^2 \cdot \Sigma a_i = \Sigma a_i d_i'^2$ , dunque

$$\rho_{\pi}^2 = \rho_{\pi'}^2 + h^2.$$

I teoremi enunciati servono a dare il modo di determinare il raggio d'inerzia e quindi del momento d'inerzia di un sistema rispetto ad un piano qualsiasi quando siano conosciute le quadriche d'inerzia.

#### IV. — Momenti d'ordine superiore.

14. Le proprietà svolte nei §§ precedenti possono estendersi ai momenti di ordine superiore.

DEFINIZIONE. — Si chiama *n*<sup>mo</sup> involuppo d'inerzia di un sistema di punti  $P_1, P_2, \dots, P_s$  affetti dai coefficienti  $a_1, a_2, \dots, a_s$  l'involuppo dei piani per i quali il momento di grado  $n$  del sistema è nullo. Lo indicheremo con  $\Gamma_n$ .

TEOREMA. — L'involuppo d'inerzia *n*<sup>mo</sup> rispetto ad un gruppo di punti è una superficie di classe  $n$ .

Sieno  $x^{(i)}, y^{(i)}, z^{(i)}$  le coordinate cartesiane di un punto  $P_i$  affetto dai coefficienti  $a_i$ , e  $u, v, w$  le coordinate cartesiane di un piano  $\pi$  rispetto allo stesso sistema d'assi.

L'equazione del piano  $\pi$ , posta sotto forma normale è

$$k (ux + vy + wz + 1) = 0,$$

ove  $k$  ha il significato assegnatogli nel § 2, e quindi la distanza  $d_i$  di  $P_i$  da  $\pi$  è

$$d_i = k (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1),$$

ed il momento  $I_n$  d'ordine  $n$  del gruppo dei punti  $P_1, P_2, \dots, P_s$  rispetto a  $\pi$  è

$$(25) \quad I_n = k^n \cdot \Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^n.$$

L'involuppo dei piani per i quali è  $M_n = 0$  è dunque rappresentato dalla equazione

$$(26) \quad \Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^n = 0$$

ossia è di classe  $n$ .

L'equazione (23) si può rendere omogenea facendo

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}, \quad u = \frac{u_1}{u_4}, \quad v = \frac{u_2}{u_4}, \quad w = \frac{u_3}{u_4}$$

e diviene

$$(27) \quad f_n(u_i) = \Sigma a_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)} + u_4 x_4^{(i)})^n = 0.$$

Abbiamo già visto che il primo involuppo d'inerzia è il baricentro ed il secondo è la quadrica di Binet.

15. TEOREMA. — *L'involuppo d'inerzia  $(n-1)^{\text{mo}}$  è il primo polare del piano all'infinito rispetto all'involuppo  $n^{\text{mo}}$  d'inerzia.*

Infatti per il piano all'infinito si ha  $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ ,  $u_4 = 1$ ; e perciò il primo involuppo polare rispetto a  $\Gamma_n$  di esso piano all'infinito è rappresentato da

$$\Sigma a_i (u_1 x_1^{(i)} + u_2 x_2^{(i)} + u_3 x_3^{(i)} + u_4 x_4^{(i)})^{n-1} = 0$$

cioè è  $\Gamma_{n-1}$ .

16. DEFINIZIONE. — Si chiama  $k^{\text{mo}}$  centro del sistema dei punti  $P_i$  affetti dai coefficienti  $a_i$  rispetto ad un piano  $\pi$  il baricentro dei punti stessi affetti da coefficienti proporzionali ai momenti di ordine  $k$ . Lo indicheremo con  $R_k$ .

TEOREMA. — *Il punto  $R_{n-1}$  è il polo (involuppo polare  $(n-1)^{\text{mo}}$ ) del piano  $\pi$  rispetto a  $\Gamma_n$ .*

L'equazione dell'involuppo  $R_{n-1}$  (chiamando  $u'_1, u'_2, u'_3, u'_4$  le coordinate plückeriane correnti) è

$$u'_1 \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_1} + u'_2 \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_2} + u'_3 \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_3} + u'_4 \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_4} = 0,$$

ossia le coordinate omogenee di  $R_{n-1}$  sono

$$(28) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_1} \\ x_2 = \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_2} \\ x_3 = \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_3} \\ x_4 = \frac{\partial f_n(u_i)}{\partial u_4} \end{cases}$$

e per conseguenza le sue coordinate cartesiane sono

$$(29) \quad \begin{cases} x = \frac{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1} x^{(i)}}{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1}} \\ y = \frac{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1} y^{(i)}}{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1}} \\ z = \frac{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1} z^{(i)}}{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1}} \end{cases}$$

17. DEFINIZIONE. — Si chiama  $n^{\text{mo}}$  raggio d'inerzia l'espressione

$$\rho_n = \sqrt[n]{\frac{I_n}{\Sigma a_i}}$$

TEOREMA. — L' $n^{\text{mo}}$  raggio d'inerzia di un piano  $\pi$  è la media geometrica delle distanze da esso dei primi  $n - 1$  centri relativi e del baricentro, purchè  $\pi$  non appartenga a nessuno degli involuipi  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ .

Se indichiamo con  $\delta_k$  e  $\delta_0$  la distanza di  $\pi$  del suo centro  $R_k$ , e dal baricentro, essendo

$$I_n = k^n \Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^n$$

$$I_{n-1} = k^{n-1} \Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1},$$

si ha per le (29),

$$\frac{I_n}{I_{n-1}} = k \frac{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^n}{\Sigma a_i (ux^{(i)} + vy^{(i)} + wz^{(i)} + 1)^{n-1}} = \delta_{n-1};$$

si ha dunque

$$\delta_0 = \frac{I_1}{\Sigma a_i}, \quad \delta_1 = \frac{I_2}{I_1}, \quad \delta_2 = \frac{I_3}{I_2}, \dots, \delta_{n-1} = \frac{I_n}{I_{n-1}},$$

e moltiplicando queste equazioni membro a membro

$$\delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_{n-1} = \frac{I_n}{\Sigma a_i} = \rho_n^n,$$

ossia

$$\rho_n = \sqrt[n]{\delta_0 \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_{n-1}}.$$

(Continua)

G. LAZZERI.

## SOPRA I MASSIMI E I MINIMI DELLE FIGURE PIANE

1. Preliminari storici. — Tra le figure piane, limitate dalle curve chiuse d'una stessa lunghezza, a quale spetta l'area massima? Quale solido, con una data area della superficie, ha il volume massimo? Qual'è il triangolo che fra tutti i triangoli di perimetro dato ha la massima area?

Simili questioni sopra i massimi ed i minimi valori delle grandezze geometriche dovevano presentarsi alla mente dell'uomo già nella antichità lontana — quando egli ha cominciato a riflettere sopra la economia del lavoro e della materia nelle costruzioni diverse.

Infatti, l'evoluzione della tecnica e della architettura vien dominata, principalmente, dalle questioni del *minimo* prezzo e della *massima* utilità delle sue produzioni, e queste ultime questioni molto spesso stanno in una connessione stretta colle *proprietà di massimo e di minimo* delle forme geometriche.

Già nella Grecia antica era noto che il *cerchio* ha area maggiore di quella di ogni altra figura dello stesso perimetro, e che la *sfera* ha il volume massimo rispetto a tutti i solidi, che hanno la superficie della medesima grandezza. Qualche storico vuole vedervi la spiegazione della nota sentenza di PITAGORA: " il più bello fra i solidi è la sfera, e la più bella figura piana è il cerchio „. Più tardi questioni di questo genere hanno subito, senza dubbio, una estensione notevole; infatti, nel principio del secondo secolo av. C. il geometra greco ZENODORO scrisse un trattato speciale " sopra le figure che hanno la medesima periferia „. Benchè quel libro sia perduto, PAPPO e TEONE ci hanno conservate 14 proposizioni che facevano parte di esso. Fra queste proposizioni si trovano, oltre le già citate (sopra il cerchio e la sfera), anche p. es. le seguenti: " dati il numero dei lati ed il perimetro, il poligono regolare ha area maggiore che ogni poligono irregolare „; " di due poligoni regolari con uno stesso perimetro la maggiore area appartiene a quello, che ha maggior numero di lati „.

Nei tempi moderni, e cioè alla fine del secolo XVIII, si è occupato in modo speciale di tali questioni il geometra ginevrino LHULLIER. <sup>(1)</sup> Come è noto, a quest'epoca lo strumento principale di Analisi matematica — il calcolo infinitesimale — era già adattato alla risoluzione di questioni sopra i valori massimi e minimi, nella forma di una disciplina speciale che ha ricevuto il nome di *Calcolo delle Variazioni*. In vista dei successi, ottenuti da questa disciplina, i geometri di quel tempo abbandonarono completamente il metodo antico, chiamato *sintetico*, per il nuovo metodo *analitico*. <sup>(2)</sup> Ed ecco LHULLIER prende sotto la sua protezione il metodo *sintetico*, dichiarandolo pure preferibile al metodo analitico nelle ricerche geometriche sopra gli isoperimetri. Secondo STEINER, LHULLIER " ha raccolto con prudenza tutto ciò che fu trovato dai suoi predecessori in questa via, dai primi principj dei greci fino agli studi di R. SIMSON ed altri; lo ha migliorato ingegnosamente e considerevolmente esteso; ma purtroppo i suoi successori hanno abbandonato questo metodo naturale; benchè essi abbiano spesso citato il lavoro di LHULLIER e tolto da esso qualche

<sup>(1)</sup> *De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum, geometricè considerata: seu de maximis et minimis, pars prior, elementaris, Varsaviae, 1782.*

<sup>(2)</sup> Per il metodo *sintetico* nella geometria è caratteristico, che durante tutto il ragionamento si tratta delle figure studiate stesse, mentre che nel metodo *analitico* le figure appaiono non più come un tutto o un insieme, ma piuttosto come aggregati di punti, i cui legami vengono espressi con equazioni, e le proprietà delle figure si trovano per mezzo della discussione di queste equazioni coi metodi di Analisi. In questo senso, tutta la *geometria dei Greci* ci apparisce come una applicazione esclusiva del metodo *sintetico*.

esempio — essi non hanno seguito il metodo che ivi domina „. Essi ne hanno preso soltanto i *risultati*, verificandoli per via del *calcolo*. Questa tendenza verso i metodi analitici nella storia della matematica moderna, mi pare si possa spiegare come segue: l'Analisi fornisce spesso metodi uniformi per la risoluzione di classi estese di problemi e così fino ad un certo punto permette per così dire di "meccanizzare" il processo della risoluzione di un problema, mentre che il *metodo sintetico* non ci dà, il più spesso, altro che una *guida generale*, cosicchè la discussione dei singoli problemi col suo aiuto richiede in una certa misura la facoltà inventiva. Non c'è niente di sorprendente, dunque, se i metodi analitici si fanno strada più facilmente e soppiantano i metodi sintetici.

Un mezzo secolo passò prima che si trovasse un geniale difensore e promulgatore delle idee di LHUILIER, il geometra tedesco già nominato JACOPO STEINER. STEINER tenne più volte nella Università di Berlino un corso dedicato alle "proprietà di massimo e minimo delle figure nel piano, sopra la sfera e nello spazio", e nell'anno 1841 presentò all'Accademia di Parigi due memorie collo stesso titolo. (1) Senza sostenere le idee intransigenti di LHUILIER, STEINER crede che in questioni tanto complesse e difficili sia in generale necessaria la collaborazione di tutti e due i metodi. Ma il metodo sintetico appare allo STEINER più adatto per stabilire le proposizioni fondamentali, che permettono di ottenere tutte le altre proposizioni come loro conseguenze naturali e che ne fanno conoscere "la intima natura e la vera ragione". Lasciando all'Analisi l'estensione e l'applicazione ulteriore dei risultati ottenuti ai problemi nuovi, STEINER fa uso nelle memorie citate *esclusivamente del metodo sintetico*.

**2. Esistenza della figura massima.** — Le memorie citate di STEINER — un vero capolavoro per la eleganza e la semplicità dei mezzi — contengono una discussione della questione trattata tanto completa che lasciano nel lettore l'impressione che non resti niente da aggiungere. Ma se infatti i risultati ottenuti da STEINER ci paiono esaurire il campo, nondimeno lo spirito matematico moderno ha trovato una breccia importantissima nel fondamento stesso delle ricerche dello STEINER. Questa breccia è di natura puramente logica e consiste nella *manca* di una dimostrazione rigorosa (benchè STEINER dia *parecchie* diverse dimostrazioni) del teorema già citato — cioè che il cerchio ha area maggiore di ogni altra figura piana dello stesso perimetro — teorema che lo STEINER stesso chiama *principale*, perchè esso serve di base e di fonte per tutte le proprietà studiate.

(1) La traduzione francese della prima memoria è inserita nel *Journal de mathématiques pures et appliquées* di LIOUVILLE (t. VI, p. 105-179) e nel *Journal für reine und angewandte Mathematik* di GRILLE (Bd. XXIV, S. 93-162), e quella della seconda memoria, in quest'ultimo giornale (Bd. XXIV, S. 189-250). Il testo tedesco originale si trova nel *tomo secondo* di JACOB STEINER'S *Gesammelte Werke* (1882), S. 177-305.

Il ragionamento, comune a tutte le cinque dimostrazioni fornite da STEINER, può essere riassunto nel modo seguente. Supponiamo che noi possiamo trasformare una certa figura A di guisa tale che la figura nuova B abbia lo stesso perimetro, ma l'area più grande che A; allora possiamo concludere che A non è la figura *massima* di dato perimetro. Mostrando che tale ingrandimento dell'area — pur conservando la lunghezza del perimetro — si può infatti realizzare per ogni figura diversa dal cerchio, STEINER conchiude che il *cerchio* è la cercata figura *massima*.

Infatti le supposizioni ammesse ci autorizzano soltanto a dire che nessuna figura, diversa dal cerchio è massima. Ma questa ultima affermazione non è identica a quella di STEINER. Ci manca ancora di sapere, che la figura massima *esiste* in generale! Invece di cercare di dimostrare quest'ultima asserzione, STEINER fa notare, che le figure di perimetro dato non possono aver l'area grande a piacere, perchè esse possono essere contenute in un cerchio di diametro uguale a quel perimetro.

Ma in realtà tutti gli elementi di un insieme possono esser minori (o maggiori) di un numero L senza che esista un elemento *massimo* (o *minimo*), appartenente allo stesso insieme.

Ecco un esempio, dovuto, mi pare, a FELIX KLEIN. Consideriamo tutte le linee fra due punti A e B, che incontrano in A ad angolo retto la AB. Tutte queste linee hanno lunghezza maggiore del segmento AB, ma tra esse *non esiste* una linea di lunghezza minima, perchè sempre si può costruire (idealmente, si capisce) una linea della nostra classe, la cui lunghezza differisca tanto poco quanto si vuole da quella del segmento AB.

Dunque, per rendere rigorosi i ragionamenti di STEINER manca la dimostrazione dell'esistenza della figura massima. Ma invece di dividere la dimostrazione del teorema fondamentale sopra il cerchio in due parti, cioè:

1° la figura cercata massima *non* può essere diversa da un cerchio;

2° questa figura *esiste*,

si potrebbe cercare di far vedere immediatamente che il cerchio è più grande d'ogni altra figura dello stesso perimetro. Ed infatti nell'anno 1882 EDLER e poi nell'anno 1910 CARATHÉODORY e STUDY hanno dato dimostrazioni rigorose del teorema dello STEINER, seguendo quest'ultima via. Alla fine di questo articolo io darò le dimostrazioni rigorose di EDLER e di CARATHÉODORY; ora passerò a dare una idea del *primo dei cinque metodi*, contenuti nelle memorie di STEINER; questo primo metodo occupa tutta la prima memoria ed è dichiarato dall'autore stesso come il più importante. Più tardi, a proposito della dimostrazione di EDLER, avrò l'occasione d'esporre il *quinto* metodo di STEINER.

**3. Proprietà generali delle figure massime.** — Prima di esporre i principi del primo metodo di STEINER, stabiliremo *due condizioni* ge-

nerali *necessarie* — ma non affatto sufficienti — a cui deve soddisfare una figura di dato perimetro  $p$  per avere l'area massima.

1°. Prima di tutto una tale figura deve essere *convessa*, cioè ogni sua corda deve stare completamente nell'interno della figura. Infatti, supponiamo che una figura massima  $F$  di perimetro  $p$  abbia una corda  $AB$  (fig. 1) tutta esterna. Denotiamo con  $F'$  la figura che si ottiene dalla figura  $F$  sostituendo la corda  $AB$  all'arco  $\alpha$  corrispondente, cosicchè l'area di  $F'$  sarà più grande ed il suo perimetro sarà più piccolo che l'area ed il perimetro di  $F$ . Sia  $F''$  una terza figura, di

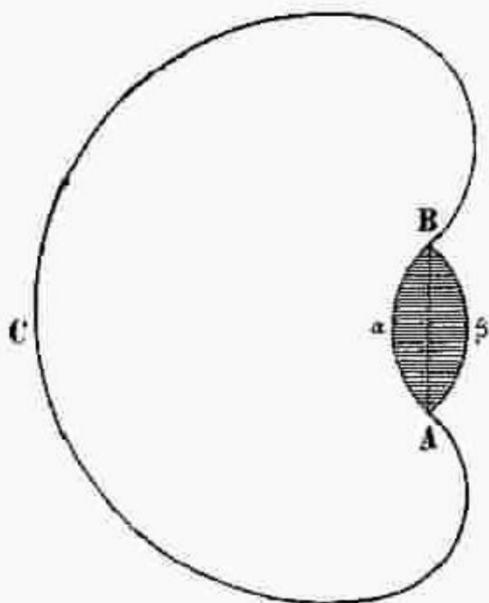


Fig. 1.

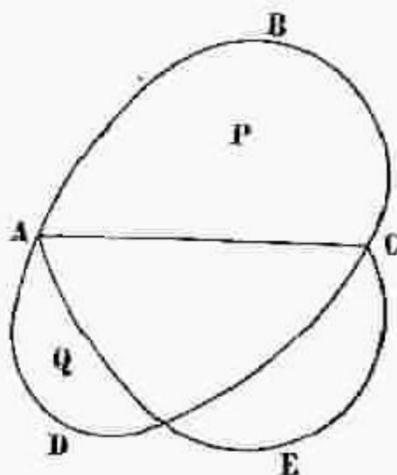


Fig. 2.

perimetro  $p$  e simile alla figura  $F'$ . L'area di  $F''$  sarà più grande che l'area di  $F'$  ed *a fortiori* più grande che l'area di  $F$ , cosicchè  $F$  non è una figura massima.

2°. " Ogni corda  $AC$  (fig. 2), che divide il perimetro  $ABCD$  della figura massima  $F$  in due parti eguali  $ABC$  e  $ADC$ , divide anche l'area di  $F$  in due parti di area eguale  $P$  e  $Q$  „.

Supponiamo che l'area  $P$  della figura  $ABC$  sia più grande che l'area  $Q$  della figura  $ADC$ . Costruiamo una nuova figura  $ABCE$ , sostituendo all'arco  $ADC$  l'arco  $AEC$ , simmetrico all'arco  $ABC$  rispetto all'asse  $AC$ . L'area della nuova figura, uguale a  $2P$ , è più grande che l'area della figura  $ABCD$ , uguale a  $P + Q$ , mentre il perimetro della nuova figura è uguale a quello della figura primitiva. Ma ciò è contrario all'ipotesi.

4. Due teoremi fondamentali ed il problema del cerchio. — Il primo metodo di STEINER consiste nell'applicazione sistematica delle due proposizioni seguenti che lo STEINER stesso chiama " fondamentali „.

I. *Fra tutti i triangoli, di cui due lati sono dati, quello, in cui questi lati sono perpendicolari l'uno all'altro, ha l'area massima.*

DIMOSTRAZIONE. — Prendiamo uno dei lati dati come base del triangolo e facciamo prendere all'altro lato dato tutte le posizioni possibili. L'area aumenterà insieme con l'altezza del triangolo, e

questa ultima sarà massima, quando il secondo lato sarà perpendicolare alla base.

Già questa proposizione tanto semplice, permette a STEINER di dimostrare che *soltanto il cerchio può essere la figura massima*, quando il perimetro è dato. <sup>(1)</sup> Invero, sia ABCD (fig. 3) una figura piana di perimetro  $p$  diversa dal cerchio; facciamo vedere ch'essa non ha l'area massima.

Supponiamo che ABCD sia *convessa* (vedi § 3). Preso sul perimetro un punto A, determiniamo sullo stesso perimetro il punto C tale, che l'arco ABC sia uguale all'arco CDA. Com'è dimostrato nel § 3, l'area P della figura ABC deve essere eguale all'area Q della figura CDA.

Poichè la figura ABCD non è un cerchio, almeno l'una delle parti ABC e ADC, p. es. ABC, non è un semicerchio. Se l'altra parte (ADC)

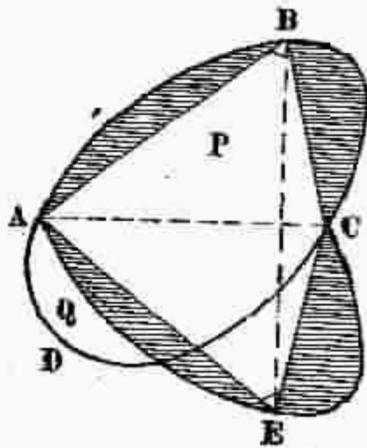


Fig. 3.

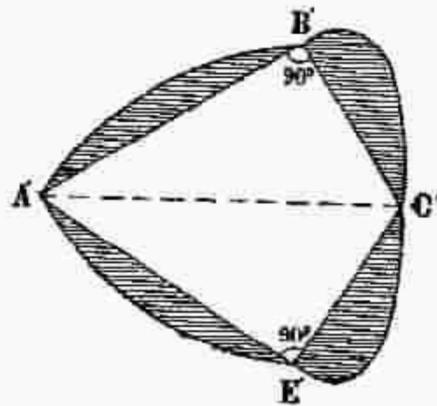


Fig. 4.

non è simmetrica alla prima rispetto all'asse AC, si può sostituirla colla figura AEC, dotata di questa simmetria. Questa sostituzione non cambia nè l'area, nè il perimetro della figura intera.

Ma siccome ABC non è un semicerchio, si trovano su di esso dei punti, da cui il segmento AC è visto sotto un angolo non retto. Sia B un tal punto ed E il suo simmetrico sull'arco AEC. Disponendo i lati AB, BC ad angolo retto e facendo lo stesso per i lati AE, EC, le ipotenuse risulteranno uguali e si potranno far coincidere, ottenendo i due triangoli rettangoli A'B'C', A'E'C' (fig. 4). Applicando ai lati A'B', B'C', C'E', E'A' i segmenti che nella figura ABCD (fig. 3) sono tratteggiati, avremo la figura A'B'C'E' (fig. 4) dello stesso perimetro  $p$  della figura ABCD, ma di area maggiore.

Dunque, nessuna figura diversa dal cerchio ha area massima.

Come si è detto (§ 2), questa conclusione non ci autorizza ancora a riconoscere il cerchio come la figura massima. Rimettendo alla fine

<sup>(1)</sup> Qui, come anche altrove, io espongo i ragionamenti di STEINER nella sostanza ma non sempre nella forma. Così, p. es., nel caso presente STEINER dice, che il cerchio è la figura massima.

del presente articolo le dimostrazioni rigorose di quest'ultima asserzione, vogliamo pel momento ammetterla per seguire i ragionamenti di STEINER.

II. *Di due triangoli aventi lo stesso perimetro e la stessa base, quello che ha il minimo ed il massimo tra gli angoli alla base ha l'area minore.*

DIMOSTRAZIONE. — Disponiamo i triangoli ACB e ADB (fig. 5) sopra la base comune AB di tal guisa che i lati più lunghi escano dallo stesso vertice A, cosicchè  $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$  e  $\hat{\gamma} < \hat{\delta}$ . Supponiamo che sia  $\hat{CAB} > \hat{DAB}$ ; il vertice D si troverà allora fuori del triangolo ACB, perchè altrimenti la spezzata ACB sarebbe più lunga della spezzata ADB, cioè che è impossibile per l'uguaglianza dei perimetri.

Dunque  $\hat{CBA} < \hat{DBA}$  e si ha finalmente:  $\hat{\delta} > \hat{\beta} > \hat{\alpha} > \hat{\gamma}$ . Si vede che il più grande angolo  $\hat{\delta}$  ed il più piccolo  $\hat{\gamma}$  appartengono ad uno stesso triangolo ADB, cosicchè sparisce l'incertezza apparente nell'enunciato del teorema.

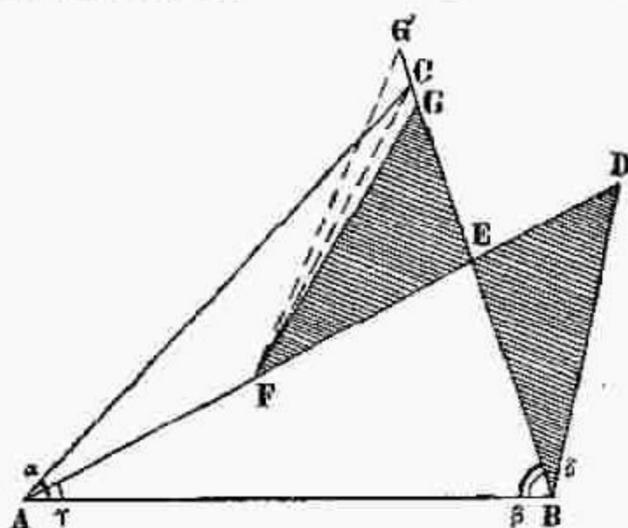


Fig. 5.

Ora STEINER dimostra come segue che l'area del triangolo ADB è minore dell'area del triangolo ACB.

Dalla disuguaglianza  $\hat{\gamma} < \hat{\beta}$  segue che  $BE < AE$ . Dunque il punto F sul lato EA tale, che  $EF = EB$ , si trova fra A ed E. Denotiamo con G un punto sulla retta EC tale, che  $EG = ED$ . Si può dimostrare, che G cade fra E e C. Si supponga, infatti, p. es. che G coincida con C. Allora i triangoli CEF e DEB sarebbero uguali. Ma, per ipotesi,

$$AC + CB = AD + DB,$$

cioè

$$AC + CE + EB = AF + FE + ED + DB,$$

e poichè

$$CE = ED, \quad EB = EF,$$

si trova che

$$AC = AF + DB = AF + FC,$$

ciò che è impossibile.

In modo analogo si dimostra che G non può cadere fuori del segmento EC.

Dall'uguaglianza dei triangoli EDB e EFG segue che l'area del triangolo ADB, uguale alla somma delle aree dei triangoli AEB e EFG, è minore dell'area del triangolo ACB, c. d. d.

COROLLARIO. — *Il triangolo isoscele è più grande di ogni altro triangolo dello stesso perimetro e della stessa base.*

Infatti, poichè gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali, il più grande ed il più piccolo angolo alla base appartengono all'altro triangolo, che avrà perciò l'area minore.

5. **Triangolo equilatero e quadrato.** — La seconda proposizione fondamentale permette a STEINER di dimostrare rigorosamente la seguente proprietà:

*Fra tutti i triangoli dello stesso perimetro  $p$ , il triangolo equilatero ha l'area massima.*

Prima si dimostrava questa proprietà indirettamente, e cioè così. Sia  $ABC$  il triangolo massimo di dato perimetro  $p$  e supponiamo, p. es.,  $AB \neq BC$ . Allora si potrebbe costruire sopra la base  $AC$  un triangolo  $AB'C$  dello stesso perimetro  $p$ , ma isoscele:  $AB' = B'C$ , e questo triangolo, secondo l'ultimo corollario, sarebbe più grande del primo.

STEINER, pure trovando questo ragionamento giusto e rigoroso, lo dichiara non del tutto soddisfacente, nel senso che esso non fa immediatamente vedere, perchè, dati due triangoli isoperimetrici, uno equilatero e altro non equilatero, quest'ultimo sia minore del primo. Noi diremmo che la dimostrazione precedente *suppone l'esistenza* del triangolo massimo e questa supposizione implicita lascia nello STEINER il sentimento di qualche mancanza. È da maravigliarsi che STEINER non veda che dello stesso difetto soffre anche la sua dimostrazione del teorema principale sopra il cerchio.

Secondo STEINER, LHULLIER ha cercato di sfuggire a questo inconveniente con un procedimento di approssimazione (od *asintotico*, secondo DIRICHLET); trasformando il triangolo dato (non equilatero) in un triangolo isoscele dello stesso perimetro, questo in un altro triangolo isoscele isoperimetrico ecc., si avvicina sempre più al triangolo equilatero.

Sia  $U$  il triangolo dato. Sia  $G$  un triangolo isoscele di eguale base e perimetro, cosicchè  $G > U$ . Denotiamo con  $u$  la differenza tra la base ed il lato del triangolo  $G$ . Sopra l'uno dei lati di  $G$  come base costruiamo un nuovo triangolo isoscele  $G_1$ , dello stesso perimetro. È facile vedere che la differenza della base e del lato di  $G_1$  è uguale a  $\frac{u}{2}$ . Infatti, se  $b$  ed  $a$  sono la base ed il lato di  $G$ , e  $c$  è il lato di  $G_1$ , si ha:

$$u = |b - a|; \quad a + 2c = b + 2a; \quad c = \frac{b + a}{2}$$

$$|c - a| = \left| \frac{b + a}{2} - a \right| = \left| \frac{b - a}{2} \right| = \frac{u}{2}.$$

D'altra parte,  $G_1 > G$ , perchè, considerando come base comune il lato di  $G$ , su cui è costruito  $G_1$ , quest'ultimo è isoscele e  $G$  non lo è.

Così continuando, si vede che la differenza fra base e lato sarà ogni volta la metà della precedente, cosicchè i triangoli  $G_n$  avranno per limite un triangolo equilatero  $T$  di egual perimetro; e poichè le aree di  $G_n$  vanno aumentando, LHULLIER ne conclude che  $T$  è più grande di  $U$ .

Ma nemmeno questo ragionamento appare a STEINER assolutamente soddisfacente, ed ecco la dimostrazione elegante ch'egli stesso propone.

Sia dato un triangolo *non equilatero*  $U$  di perimetro  $p$ . Trasformiamolo nel triangolo *isoscele*  $G$  dello stesso perimetro, prendendo per base il più grande lato (o uno dei più grandi lati) di  $U$ ; sarà  $G \geq U$  (il segno  $=$  avrà luogo se lo stesso  $U$  è già isoscele e la sua

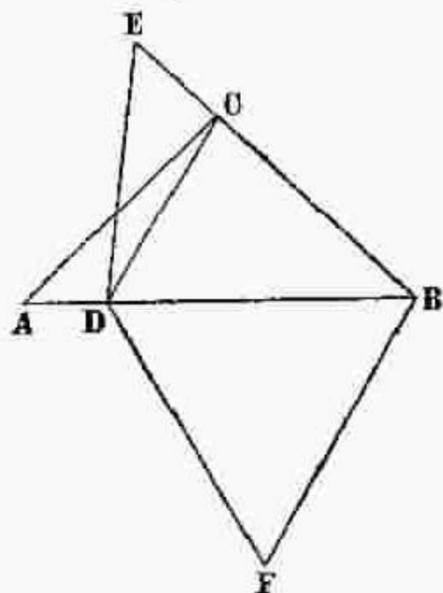


Fig. 6.

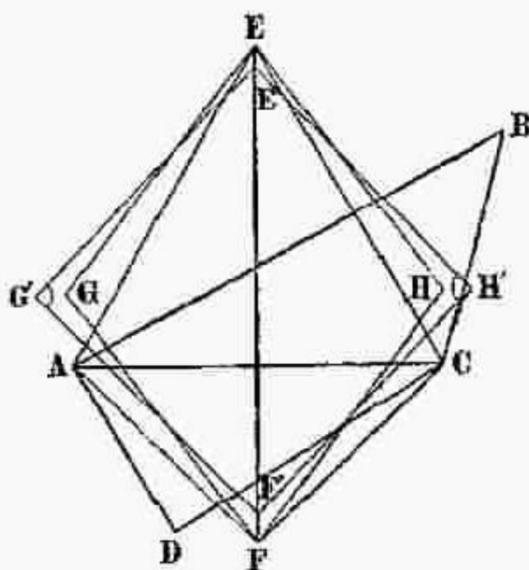


Fig. 7.

base è maggiore dei lati). Sia  $ABC$  (fig. 6) questo triangolo  $G$ . Poichè  $AB > AC$ , sarà  $AB > \frac{p}{3}$ , quindi, facendo  $BD = \frac{p}{3}$ , il punto  $D$  starà fra  $B$  ed  $A$ . Sopra la retta  $BC$ , al di là di  $C$ , si prenda un punto  $E$  tale che sia  $DE + EC = DA + AC$ ; i perimetri dei triangoli  $ABC$  e  $DEB$  saranno uguali.

Essendo  $BC < \frac{p}{3}$ , è  $BC < BD$  e  $\widehat{BCD} > \widehat{BDC}$ ; dunque  $\widehat{DCE} < \widehat{ADC}$ . Applicando perciò il secondo teorema fondamentale (§ 4) si vede che  $\triangle ADC < \triangle DEC$ , da cui aggiungendo  $\triangle DCB$ :

$$\triangle ACB < \triangle DEB.$$

Ora si costruisca sopra la base  $BD$  un triangolo *isoscele*  $DFB$  di perimetro  $p$ . La sua area è maggiore dell'area di  $DEB$ ; ma poichè la base è uguale a  $\frac{p}{3}$ , esso è *equilatero*. Dunque il triangolo dato  $U$  è minore del triangolo equilatero dello stesso perimetro  $p$ .

**TEOREMA.** — *Fra tutti i quadrangoli di dato perimetro, il quadrato ha l'area massima.*

Infatti sia  $ABCD$  (fig. 7) un quadrangolo di perimetro  $p$ . Si costruiscano i triangoli isosceli  $AEC$  ed  $AFC$  aventi la base comune  $AC$  ed isoperimetrici ai triangoli  $ABC$  e  $ADC$  rispettivamente. Poichè questi ultimi triangoli sono minori dei primi (§ 4, Il coroll.), il quadrangolo  $AECF$  è più grande del quadrangolo primitivo  $ABCD$ .

Trasformiamo i triangoli simmetrici  $EAF$  e  $ECF$  nei triangoli isosceli  $EGF$  ed  $EHF$  di base comune  $EF$ , conservando i perimetri.

Si vede che la nuova figura  $GEHF$  è un rombo ed è più grande della figura  $AECF$ . Riducendo finalmente gli angoli  $G, H$  ad esser retti, avremo un quadrato  $E'H'F'G'$  di perimetro  $p$ , maggiore del rombo (§ 4, I) e quindi anche della figura primitiva  $ABCD$ .

**6. Teoremi inversi.** — Nei problemi ora trattati, relativi al cerchio, al triangolo equilatero ed al quadrato, il perimetro era dato e si cercava la figura di area massima. Ad ogni problema di questo genere corrisponde un altro problema, che forse si potrebbe chiamare *inverso*, nel quale cioè è data l'area e la figura da trovare deve avere il perimetro minimo. Per esempio, al problema fondamentale di STEINER sopra il cerchio corrisponde il problema seguente: fra tutte le figure piane di data area qual'è quella che ha il perimetro minimo?

La figura cercata è il cerchio, e STEINER lo dimostra come segue, supponendo già dimostrato il teorema fondamentale. Sia  $V$  un cerchio e  $W$  un'altra figura piana qualsiasi della stessa area. Si denoti con  $V'$  un nuovo cerchio, isoperimetrico con  $W$ . Secondo il teorema citato  $V' > W$ , quindi  $V' > V$ ; dunque il perimetro di  $V'$  o di  $W$  è più grande di quello di  $V$ , e. d. d.

Analogamente si può dimostrare che il triangolo equilatero ha perimetro minore di ogni altro triangolo della stessa area; che il perimetro di un quadrato è minore di quelli di tutti gli altri quadrangoli della medesima area.

Io voglio esporre qui un altro ragionamento che rende più evidente la connessione fra i teoremi diretti ed inversi del genere indicato.

In ogni figura si può distinguere la *forma* e la *grandezza* (dimensioni). Tutte le figure simili fra loro hanno la stessa forma, ma diverse dimensioni. Ora i teoremi di cui si tratta si possono enunciare nel modo seguente:

1°. " Fra tutte le figure di *egual perimetro* ed appartenenti ad una data classe di forme  $C$ , la *massima area* appartiene alla figura della forma  $F$  „ (teorema diretto).

2°. " Fra tutte le figure della *stessa area* ed appartenenti ad una data classe di forme  $C$ , ha il *perimetro minimo* la figura della (stessa) forma  $F$  „ (teorema inverso).

Qui la classe di forme  $C$  consta nell'uno caso delle forme di tutte le figure piane, nell'altro caso, delle forme di tutti i triangoli, o di tutti i quadrangoli, ecc. La forma  $F$  corrispondente è *cerchio, triangolo equilatero, quadrato* ecc. corrispondentemente.

Ora, si sa che le aree delle figure della stessa forma, cioè delle figure simili tra loro, sono proporzionali ai quadrati dei perimetri. Dunque, se  $S_1, S_2, S_3, \dots$  sono le aree e  $p_1, p_2, p_3, \dots$  sono i perimetri corrispondenti delle figure d'una stessa forma  $F$ , si avrà:

$$\frac{S_1}{p_1^2} = \frac{S_2}{p_2^2} = \frac{S_3}{p_3^2} = \dots = k_F.$$

Questo rapporto comune  $k_F$  non dipende che dalla forma considerata  $F$ , se per unità d'area si prende un quadrato, il cui lato è uguale all'unità di lunghezza scelta. Dunque ad ogni forma  $F$  (della figura piana) corrisponde un valore ben definito di questo rapporto  $k_F$ , e si ha sempre la relazione:

$$S = k_F \cdot p^2$$

tra l'area  $S$  ed il perimetro  $p$  di ogni figura della forma  $F$ .

Ora sia data una classe di forme  $C$ . Alle forme di questa classe corrispondano dei valori ben definiti del coefficiente  $k$ .

Supponiamo che fra tutti questi valori di  $k$  vi sia un valore massimo  $k_M$ , e sia  $\Phi$  una delle forme corrispondenti a questo valore (almeno una tale forma si troverà sempre nella classe  $C$ ). Consideriamo tutte le figure aventi uno stesso perimetro  $p_0$  ed appartenenti alla nostra classe di forme  $C$  (cioè le figure, le cui forme appartengono a  $C$ ). La formola:

$$S = k \cdot p_0^2$$

fa subito vedere che alla figura della forma  $\Phi$  appartiene la massima area  $S_M$ :

$$S_M = k_M \cdot p_0^2.$$

D'altra parte, le figure della classe  $C$  con una data area  $S_0$  hanno il perimetro  $p$  calcolabile colla formola:

$$p = \sqrt{\frac{S_0}{k}};$$

dunque, al massimo valore  $k_M$  di  $k$  corrisponde il minimo perimetro  $p_m$ :

$$p_m = \sqrt{\frac{S_0}{k_M}},$$

cioè la figura della stessa forma  $\Phi$  (corrispondente al valore  $k_M$  del coefficiente) ha il minimo perimetro.

Reciprocamente, se data la classe  $C$  si sa che alla forma  $\Phi$  corrisponde l'area massima o il perimetro minimo, il coefficiente corrispondente  $k_\Phi$  sarà più grande che tutti gli altri valori di  $k$  appartenenti alla classe  $C$ .

Dunque il problema diretto ed il problema inverso, rispetto ad una stessa classe di forme  $C$ , avranno o no simultaneamente una stessa soluzione, secondo che l'aggregato dei valori di  $k$  corrispondenti alla classe  $C$  avrà o no un elemento massimo.

DMITRI KRYJANOVSKY.

(Continua)

## ALCUNI TEOREMI E COSTRUZIONI SUI POLIEDRI REGOLARI CONVESSI

1. Assai facili e talvolta eleganti relazioni sussistono fra i raggi delle sfere inscritte, circoscritte e tangenti ai lati ne' poliedri regolari convessi (pd. r. c.) e gli apotemi e i raggi delle loro facce e la lunghezza degli spigoli: relazioni espresse dai teoremi seguenti, e che derivano da risapute considerazioni, qui brevemente accennate.

Il teorema di Dostor<sup>(1)</sup> sul tetraedro regolare, non è che un caso particolare.

2. I centri delle facce di un qualsivoglia pd. r. c. o ne' suoi vertici, i piani tang. alla sfera circoscritta danno, com'è noto, i vertici o le facce del polare-reciproco; ed è ovvio che ne' due poliedri, l'un dall'altro così dedotti (evidentemente concentrici) reciprocamente si scambiano fra loro gli assi dei vertici e delle facce<sup>(2)</sup> mentre comuni sono invece quegli degli spigoli (risp. perpendicolari ne' due poliedri).

D'onde il seguente

**TEOREMA I.** — In ogni coppia polare di pd. r. c. epperò in due correlativi qualsivogliono

1°. *L'angolo fra l'asse, in uno, di due qualsivogliono facce opposte e la congiungente due vertici opposti di esse, è uguale, nell'altro, a quello fra la congiungente due qualsivogliono vertici opposti con l'asse di due opposte facce che risp. li contengono.*

2°. *Del pari uguali sono reciprocamente, in quei poliedri, l'angolo che l'asse di due qualsivogliono spigoli opposti, fa, in uno, col più vicino asse delle facce o, nell'altro, dei vertici.*

3. Ma ecco, più conciso, il contenuto di quel teorema.

*In ogni coppia ecc. l'angolo triedro che si ottiene, in uno, congiungendone il centro con quello di una faccia, col medio di un lato di essa e con uno dei suoi estremi, è uguale (per simmetria, non per sovrapposizione) a quello analogo dell'altro.*

**4. TEOREMA II.** — *In ogni coppia ecc. sono eguali, ordinatamente considerandoli.*

1°. *I rapporti fra i raggi delle sfere inscritta e circoscritta<sup>(3)</sup> e il raggio della faccia (V. in entrambe le fig. 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> i triang. rett. BiO).*

<sup>(1)</sup> F. J. — *Éléments de Géom.* Paris. Ch. Poussielgue (pag. 286: Es. 764).

<sup>(2)</sup> Cfr. "Sulla genesi e la geom. descr. de' poliedri ecc." (*Periodico di Matem.*, Livorno, 1910) ove si chiamano assi dei vertici, delle facce o degli spigoli di un pd. r. c. (il tetraedro escluso) le congiungenti due vertici opposti o i centri di due facce o di due spigoli opposti (diametri risp. della sfera circoscritta, inscritta o tang. ai lati del poliedro ecc.).

<sup>(3)</sup> Che in due polari pd. r. c. sia comune il rapporto fra quei due raggi erasi già notato (Cfr. G. L. *Repertorio di Matem. e Fisica*; Livorno, R. Giusti, 1904) ma non se n'era, ch'io mi sappia, nè formulato, nè esteso il teorema relativo.

2°. I rapporti, in uno, fra il semispigolo e i raggi delle sfere tang. ai lati e circoscritta; e nell'altro, fra l'apotema della faccia e i raggi delle sfere inscritta e tang. ai lati.

Ciò risulta dal paragone, (reciprocamente accoppiandoli nelle due fig.) dei triang. rett.  $tiO$  e  $CtO$ .

5. **TEOREMA III.** — Il rapporto in ogni pd. r. c. fra i raggi delle sfere tang. ai lati e inscritta (circoscritta) è, nel correlativo, inverso di quello fra i raggi delle sfere tang. ai lati e circoscritta (inscritta).

Anche ciò dai triang. precedenti.

6. Sott'altra forma può enunciarsi quel teorema, cioè:

Sono fra loro eguali, in ogni coppia di correlativi fra quei poliedri, i prodotti dei raggi delle sfere inscritta in uno e circoscritta all'altro; ed entrambi quanto il prodotto dei raggi delle due sfere risp. tang. ai loro lati.

7. Di quel teorema, quest'altro è facile conseguenza:

**TEOREMA IV.** — Se gli spigoli di due qualsivogliano correlativi o reciproci fra i pd. r. c. toccano la stessa sfera, ne sarà il raggio medio geometrico fra quelli delle sfere recipr. inscritta in uno e circoscritta all'altro.

D'onde il

**COROLLARIO.** — Nel tetraedro regolare il raggio della sfera tangente agli spigoli è medio geom. fra quelli delle sfere inscritta e circoscritta (DOSTOR).<sup>(1)</sup>

8. Preparando, infine, convenientemente (Fig. 3<sup>a</sup> 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup>) le proiezioni di quei poliedri, p. es. il cubo sur un piano perpendicolare ad una diagonale di una sua faccia o ad uno spigolo per gli altri, e considerandovi i raggi delle sfere e dei cerchi anzidetti, sarà ben facile, applicando il teorema di Pitagora ai triang. rett. che ne risultano, giustificare quest'ultimo.

**TEOREMA V.** — Sono eguali in ogni pd. r. c.

1°. La somma dei quadrati del semispigolo e del raggio della sfera tang. ai lati, e la somma dei quadrati del raggio della sfera inscritta e del cerchio circoscritto alla faccia; ed entrambe quanto il quadrato del raggio della sfera circoscritta.

2°. Il quadrato del raggio della sfera tang. ai lati eguaglia la somma del raggio della sfera inscritta e dell'apotema della faccia.

9. Ed eccoci ora ad alcune costruzioni su quei solidi.

Particolari proj. ortog. de' poliedri reg. convessi (pd. r. c.) sulle quali torno ad insistere, permettono, la determinazione del loro angolo diedro, non solo, ma simult. anche quella dei raggi delle sfere

(1) Ho dato di proposito una dimostrazione molto elementare del teorema, che è del resto conseguenza immediata di due fatti, cioè: 1° Che la figura polare di un pd. r. c. rispetto alla sfera tang. a' suoi spigoli, è il poliedro polare-reciproco del dato con gli spigoli tang. alla stessa sfera in quegli stessi punti di contatto; 2° Che rispetto a tale sfera, la sfera circoscritta (inscritta) al primo è polare reciproca di quella inscritta (circoscritta) al secondo.

inscritte, circoscritte e tang. ai lati, e dei cerchi inoltre inscritti e circoscritti alle facce, senza per altro segnarne il contorno. Ma importa notare, soprattutto, che dato lo spigolo, le espressioni analitiche dei primi fra quei raggi, è bensì facile ottenere, indipendentemente dalla Trig. sfer. a cui si suol ricorrere. (1)

II. Basta proiettare infatti, quei poliedri (il tetraedro escluso) su di un piano perp. ad un loro asse degli spigoli. Così, p. es. la Fig. 1<sup>a</sup> rappresenta le suddette proj. del cubo e del tetraedro e l'ottaedro in esso inscritti (il primo, cioè, formato con metà delle diagonali delle sue facce, e l'altro coi vertici nei centri di queste). Ne risulta, com'è evidente:

a) In vera grandezza le diag.  $AA_1$ ,  $BB_1$  del cubo e il loro angolo: le distanze tra facce opposte o spigoli opposti, ossia le dimensioni risp. dei raggi delle sfere circoscritta, inscritta e tang. agli spigoli del cubo; sicchè ponendo per es.  $AB_1 = a$ , sarà  $AB = a\sqrt{2}$  ed  $AA_1 = BB_1 = a\sqrt{3}$ : ed essendo  $N$ ,  $N_1$ ,  $C$  ed  $L$  i medii risp. dei lati del rett.  $A_1BAB_1$ , le  $AA_1$  e  $BB_1$  sono perp. tagliate in parti eguali da  $CB$ ,  $LBB_1$ , e dalle  $CA$ ,  $LA_1$ ; similmente fanno le  $CN_1$  ed  $OB$  rispetto alle  $CB$  ecc. (2)

b) Il triang. isoscele  $ACB$  è proj. sul piano perp. allo spigolo  $CD$  del suddetto tetraedro inscritto; i lati eguali  $AC$  e  $CB$  ne misurano l'altezza della faccia e l'angolo al vertice  $C$  il diedro. Si ha pertanto  $AB = a\sqrt{2}$ ,  $CL = a$ ,  $CO = OL = \frac{a}{2}$ ,  $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $Or = \frac{OA}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$  (valori da dividere per  $\sqrt{2}$  considerando il tetraedro di spig.  $a$ ); inoltre sono  $Ar$  ed  $rC$  il raggio e l'apotema di una faccia. (3)

La proj. del tetraedro sul piano di una faccia di quel cubo è un quadrato con le sue diagonali.

c) Il rombo  $CkLi$  e la sua minor diagonale  $ik$  danno la proj. di quell'ottaedro inscritto su di un piano perp. a due spigoli, epperò parallelo a due altri che si proiettano al vero sovrapposti in  $ik$ ; gli angoli maggiori ne misurano il diedro (supplementare quindi a quello del tetraedro. Inoltre sono  $OC'$ ,  $Or$ ,  $Oi$  i raggi risp. delle sfere anzidette (da moltiplicare per  $\sqrt{2}$  se il solido è di spigolo  $a$ );  $Cr$  ed  $ri$  il raggio e l'apotema della faccia ecc. ( $Cr = 2ri$  ed il punto  $r$

(1) Proprietà dovuta a Dostor, ed ora meglio ritrovata, poichè dualisticamente dedotta da un caso generale.

(2) ROUCHÉ ET DE COMBROUÈSE, *Geom.*, Gauthier-Villars. Paris, 1883.

(3) Prop. non so perchè, come altrove già dissi, neglette; mentre, pur essendo meno appariscenti, sono, credo più importanti delle consuete sul piano di una faccia o normalmente a un asse dei vertici: giacchè queste non danno che due soltanto di quei raggi; e le prime, invece, tutti e tre, e lo spigolo in altre e il diedro, in vera grandezza.

Si confronti in proposito, la *Geom. Descr.* di E. Catalan, l'unico parmi che la disegni nel dodecaedro, senza i particolari per altro da me indicati (non v'ha neanche un cenno sull'evidente proprietà degli eguali e fra loro perp. assi di simmetria di cui gode quel contorno).

L'A. vi consacra per intero una grande tavola fuori testo: quella proj. avendo indirettamente dedotto attraverso reiterati e laboriosi cambiamenti dei piani di riferimento, che sono, come ho dimostrato, completamente superflui.

proj. del centro della faccia). Si noti l'eguaglianza del rapporto  $1:\sqrt{2}$ , fra le diag. di quel rombo e i lati del rett.  $A_1BAB_1$ .

II. Ora è facile dedurre dalla precedente osservazione come debbono essere esagonali e regolari i contorni delle proj. del cubo sur un piano perp. od una sua diagonale e dell'ottaedro sul piano di una sua faccia.

Ma anche subito si ricavano le proj. di quei solidi sopra un piano perp. al primo: risultando infatti sei vertici del cubo, tre a tre, distribuiti su due piani trisecanti normalmente in parti eguali la diagonale che passa per gli altri due vertici. <sup>(1)</sup> Si ha inoltre che la distanza fra due facce opposte  $rr_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , come risulta dal T. di

Pitagora nel triang. rett.  $rOi$  dove è  $Oi = \frac{a}{2}$  ed  $ir = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ ; epperò sono  $Oi = \frac{a}{2}$ ,  $Or = \frac{1}{2}rr_2 = \frac{a}{\sqrt{6}}$  ed  $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$  risp. i raggi delle sfere tang. ai lati, inscritta e circoscritta a quel poliedro.

12. Le Fig. 2<sup>a</sup> e 3<sup>a</sup> sono le proiezioni risp. dell'icosaedro e del dodecaedro su di un piano perp. ai loro spigoli opposti per  $N$  ed  $N_1$ : piano parallelo all'altra coppia di spigoli opposti  $AB, A_1B_1$  ed agli altri due che anche al vero si proiettano sovrapposti in  $SE$  ecc. Si hanno quindi in vera grandezza i due assi dei vertici (diametri della sfera circoscritta)  $AA_1$  e  $BB_1$  ed il loro angolo; lo stesso per gli assi delle facce  $rr_1$  ed  $r^*r_1^*$  risp. perp. alle loro proj. rettilinee, non che infine, per gli assi degli spigoli  $NN_1$  ed  $MM_1$  (diametri della sfera tang. agli spigoli). Ed essendo inoltre i punti  $r$  ed  $r_1$ ;  $r^*$  ed  $r_1^*$  proj. risp. dei centri delle facce di quei poliedri (facce risp. perp. al piano iconico) i segmenti  $rA$  ed  $rN$  danno al vero i raggi dei cerchi ad esse inscritti e circoscritti ecc.

È poi ovvio che gli angoli  $N = N_1$  misurano risp. i diedri di quei solidi; e che prolungando convenientemente quattro lati di quei contorni o le proiezioni, ad essi interne, di taluni spigoli, com'è indicato nelle figure <sup>(2)</sup> è facile osservare che:

a) Nelle due fig. reciprocamente simili a quelli esterni  $NTN_1L$  sono i rombi interni  $NEN_1S$ ; la diag. minore di ognuno di quei rombi parte maggiore o minore risp. dell'altra (basta rammentare, infatti, il noto rapporto fra la diag. e il lato del pentagono regolare). Inoltre  $NS = \Delta O$ .

b) Gli angoli maggiori quindi è i lati di quei rombi interni misurano il diedro e il raggio della sfera circoscritta.

13. Ma ecco ora alcune facili relazioni tra i raggi di quelle sfere e di quei cerchi con lo spigolo del poliedro, utili per disegnarne

<sup>(1)</sup> Cfr. BALTZER, *Geometria*.

<sup>(2)</sup> L'evidenza del tracciato rende superflui ulteriori chiarimenti sulla sua costruzione.

le proiezioni anche sul piano di una faccia o perp. ad una asse dei vertici.

a) Nell'icosaedro (fig. 2<sup>a</sup>) la  $AA_1$  è normalmente divisa in sezione aurea dalle  $NB$  e  $B_1N_1$  (sezioni del solido perp. al piano iconico) essendo  $Ac = c_1A_1$  quanto il lato del decagono regolare di raggio  $cB = cc_1$ , ecc.: sarà quindi  $AA_1$  quanto quel raggio aumentato del doppio di quel lato ecc.

b) Inoltre anche le parallele  $SB_1$  ed  $EB$  tagliano perp. ed in sezione aurea la  $rr_1$  (distanza di due facce opposte) i cui punti  $R_{12}$  ed  $R_{12}^*$  anche similmente dividono gli eguali segmenti  $rt$  ed  $r_1t_1$ ; onde la  $R_{12}R_{12}^*$  è in parti eguali divisa dai punti  $t$  e  $t_1$ , ed è facile mostrare che è  $rt = rA$  (raggio della faccia triang. del poliedro).

Sicchè chiamando  $a$  e  $d$  rispettivamente il lato e la diagonale del pentagono regolare (sezione diag. del solido) sarà la  $rr_1$  anzi detta quanto la somma dei raggi dei triang. equilateri di lati  $a$  e  $d$  rispettivamente.

c) Analogamente si ha pel dodecaedro (fig. 3<sup>a</sup>) che l'asse dei vertici  $AA_1$  è normalmente secato in parti eguali dalle parallele  $NV_1$  e  $VN_1$  mentre le  $VB$  e  $B_1V_1$  parallele ad esse tagliano in sezione aurea risp. gli eguali segmenti  $Ai$  ed  $A_1i_1$ . Inoltre l'asse delle facce  $rr_1$  è normalmente diviso in sezione aurea dalle  $BK$  e  $B_1K_1$  e si ha  $rt = rA$  (raggio della faccia, pent.) Quindi  $tt_1$  quanto il lato del decagono inscritto nel cerchio che ha quel raggio: sarà perciò  $rr = 2$  volte quel raggio + il lato di quel decagono, ovvero quanto la somma dei raggi dei due pent. reg. di lati  $a$  e  $d$  rispettivamente.

d) Si noti, in fine, che i contorni interni  $oo_1Eo^* \dots$  (fig. 2<sup>a</sup>) ed  $R_{12}vER_{12}^* \dots$  risp. ottenuti come indica il disegno, sono reciprocamente simili a quelli esterni  $ANB_1A_1 \dots$  dell'altra figura.

È ovvio poi come sia un quadrato di lato  $d$  (fig. 3<sup>a</sup>) il contorno  $VKV_1K_1$  giacchè proj. sul piano di una sua faccia di un cubo inscritto nel dodecaedro (avente cioè per lati diag. conv. scelte delle facce di questo).

14. Ed è ben facile ora (senza ricorrere alla Trig. sf.) di assegnare, per ognuno di quei poliedri, i valori analitici dei raggi delle tre sfere in essi considerate, quando ne sia nota la lunghezza dello spigolo: basta tener presente la relazione  $a = \frac{d}{2} (-1 + \sqrt{5})$  ovvero, cioè che è lo stesso,  $d = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5})$  fra il lato e la diag. del pent. regolare. Si ha infatti (fig. 2<sup>a</sup>)  $MM_1 = \frac{a}{2} (1 + \sqrt{5})$  e pel T. di Pitagora nel triang.  $AMO$  si ha che il raggio della sfera circoscritta all'icosaedro, cioè  $AO = \frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ , mentre dal triang. rett.  $NOR$ , dove  $NO = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5})$  ed  $Nr = a : 2\sqrt{3}$ , si ha che il raggio della

sfera inscritta, cioè  $rO = \frac{a\sqrt{3}}{12} (3 + \sqrt{5})$ ; ed infine sarà il raggio della sfera tang. agli spigoli, cioè  $NO = OM = \frac{a}{4} (1 + \sqrt{5})$ .

Parimenti si ha pel dodecaedro (fig. 3<sup>a</sup>)

$$MM_1 = a + d = \frac{a}{2} (3 + \sqrt{5}).$$

e quindi dai triang. rett. AMO ed NrO ne viene che è

$$AO = \frac{a\sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{5}) \quad \text{ed} \quad Or = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$$

ed infine  $ON = \frac{a}{4} (3 + \sqrt{5})$ : lunghezze risp., com'è ovvio, dei raggi delle sfere circoscritta inscritta e tang. ai lati del dodecaedro di spigolo  $a$ .

Epperò, tenendo presenti gli analoghi risultati già ottenuti per gli altri poliedri, si ha il seguente quadro dei

VALORI DEI RAGGI DELLA SFERA

|            | inscritta                                       | circoscritta                         | tang. agli spigoli           |
|------------|---|--------------------------------------|------------------------------|
| Tetraedro  | $a : 2\sqrt{6}$                                 | $a : \sqrt{3} : 2\sqrt{2}$           | $a : 2\sqrt{2}$              |
| Cubo       | $a : 2$   | $a\sqrt{3} : 2$                      | $a\sqrt{2} : 2$              |
| Ottaedro   | $a : \sqrt{6}$                                  | $a\sqrt{2} : 2$                      | $a : 2$                      |
| Dodecaedro | $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$ | $\frac{a\sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{5})$ | $\frac{a}{4} (3 + \sqrt{5})$ |
| Icosaedro  | $\frac{a\sqrt{3}}{12} (3 + \sqrt{5})$           | $\frac{a}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$  | $\frac{a}{4} (1 + \sqrt{5})$ |

15. L'esattezza dei valori di quello specchietto può anche controllarsi applicando i teoremi precedenti (n. 2-3) sulle relazioni fra i raggi di sfere e cerchi che si considerano in quei poliedri ecc.

Così p. es. in ogni coppia di correlativi ecc. è costante il rapporto fra i raggi delle sfere circoscritta ed inscritta in ciascun poliedro: quel rapporto è  $\sqrt{3}$  per la coppia cubo-ottaedro ed è  $\sqrt{3(5 - 2\sqrt{3})}$  per l'altra dodecaedro-icosaedro.

È costante inoltre, in ogni coppia ecc., il prodotto dei raggi delle sfere reciprocamente inscritte e circoscritte nei due poliedri, e quanto quello dei raggi delle sfere tangenti agli spigoli. Quei prodotti danno infatti  $\frac{a^2}{2\sqrt{3}}$  ed  $\frac{a^2}{4} (2 + \sqrt{3})$  risp. per le coppie anzidette.

F. P. PATERNO.

## UN GRUPPO DI NOTEVOLI COSTRUZIONI SULL'ANGOLO DI BROCARD

Le nuove costruzioni che qui dò sull'angolo di BROCARD, più come risoluzione del problema in sè stesso, servono anche di base a certe altre costruzioni di genere ben differente. In esse, infatti, si fa uso di certi criteri costruttivi così semplici, ma anche così importanti, che la totale costruzione si presenta sotto forma elegante e suscettiva di varie considerazioni.

Scriviamo le note formule della recente Geometria del triangolo [confr. ALASIA, *La Geometria del triangolo*, p. 152, 161, 165]

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{[I]}$$

$$\frac{s_a}{a} = \frac{s_b}{b} = \frac{s_c}{c} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{[II]}$$

$$\rho = \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \text{[III]}$$

nelle quali  $\omega$  è l'angolo di BROCARD,  $s_a, s_b, s_c$  le distanze del punto di LEMOINE K dai lati  $BC = a, CA = b, AB = c$  del triangolo fondamentale ABC, di area  $\Delta$ ,  $\rho$  il raggio del secondo circolo di LEMOINE o circolo del coseno (circolo che passa per i sei punti in cui i lati del triangolo fondamentale sono incontrati dalle antiparallele ai lati condotte per K).

Il seguente importante gruppo di formule [confr. V. G. CAVALLARO, "Memoria sulla Geometria del triangolo", in *Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali*, a. XII, 1911, n. 143]

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \omega}\right)^2 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \omega}\right)^2 \\ \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{c}\right)^2 &= \left(\frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} \omega}\right)^2, \end{aligned} \quad \text{[IV]}$$

nel quale  $\alpha, \beta, \gamma$  sono gli angoli del fond. di vertice A, B, C, dà

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \omega} = 2R \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}, \quad 2R \operatorname{sen} \omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} \quad \text{[V]}$$

purchè in esso si faccia  $\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$ , separatamente. R è, come è ovvio, il raggio del circoncerchio di ABC.

Da [I] e [II] viene

$$\text{tang } \omega = \frac{2s_a}{a} = \frac{2s_b}{b} = \frac{2s_c}{c} \quad \text{[VI]}$$

e dalla [III]

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{abc}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{abc \cdot 4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2 \cdot 4\Delta} = \\ &= \frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} R = R \text{ tang } \omega. \quad \text{[VIII]} \end{aligned}$$

La formula ultima:  $\frac{\rho}{R} = \text{tang } \omega$ , è importantissima.

Ora esporremo il procedimento delle varie costruzioni sull'angolo  $\omega$ , giustificandolo poi per osservazioni sulle formule scritte.

a) Si consideri la figura 1 nel triangolo ABC della quale P, Q sono i punti medi dei lati BC, CA; AA<sub>1</sub>, BB<sub>1</sub> le altezze corrispondenti e D, E i punti medi di esse: le rette PD, QE s'incontrano nel punto K [teorema di SCHLÖMILCH].

Il segmento A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, che è uno dei lati del triangolo ortico, è antiparallelo rispetto ad AB, dunque se da K tiriamo la MN parallela ad A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, sarà MN antiparallela rispetto ad AB e però KM = KN =  $\rho$ . Per determinare il circoncentro O, e però R, osserviamo che trovansi già parzialmente eseguiti i procedimenti geometrici che ordinariamente servono a determinarlo. Conduciamo CX perpendicolare in C a BC e prendiamo su di essa CS = 2s<sub>a</sub> e poi, fatto CL = CO = R, conduciamo per L la parallela a BS chiamando T il punto d'incontro con CX.

Dico che CT =  $\rho$  e che i due angoli SBC, TLC, che sono uguali, sono ciascuno l'angolo di BROCARD  $\omega$  di ABC.

Ciò è subito visto se osserviamo le form. (VI), (VII).

OSSEVAZIONI. — Il procedimento determinante  $\omega$  di figura 1 può considerarsi una determinazione d' $\omega$  per mezzo di K. Le (VI), (VII) ci offrono separatamente i due procedimenti compendiatissimi in figura 1 rispetto al lato BC. Noi parlammo già nel *Periodico*, anno XXVI, fasc. VI, 1911 della determinazione di  $\omega$ , e però dei punti di BROCARD, per mezzo di K e ci fondammo sulla (VI); ora possiamo considerare il procedimento già esposto in figura 1, relativamente all'angolo TLC, come una determinazione dei punti di Brocard per mezzo della coppia

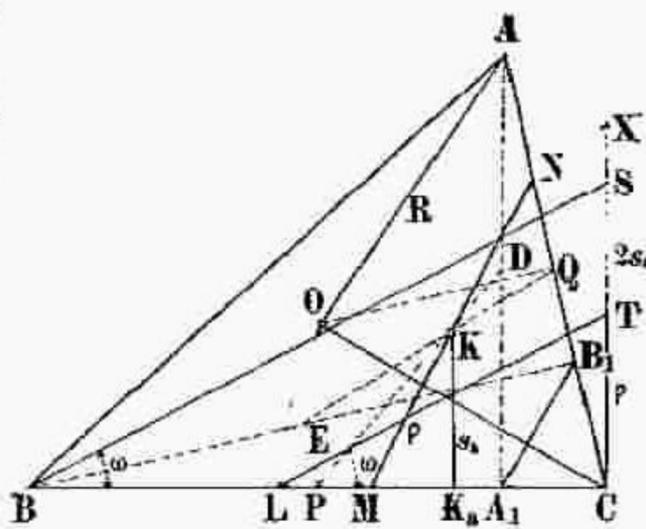


Fig. 1.

di raggi  $R$ ,  $\rho$  purchè s'intendano estese le costruzioni agli altri lati, convenientemente, e si completino le costruzioni.

Non è necessario conoscere la posizione di  $K$  perchè rimangono determinati  $\rho, s_a$  con le costruzioni dette (cioè tirando  $KK_a = s_a$  perpendicolare a  $BC$  e  $KM = \rho$  parallela ad  $A_1B_1$ ). Basta, invero, adoperare uno dei procedimenti geometrici noti determinativi d' $\omega$  a prescindere dalla conoscenza di  $K$  (ALASIA, l. cit. p. 173, 174, 175) ovvero uno dei procedimenti seguenti *b*), *c*) perchè si possa determinare su  $CS$ ,  $2s_a$ ,  $\rho$  e ciò per intersezione di  $CS$  con i lati dei due angoli  $\omega$  di vertice  $B, L$  aventi un lato comune  $BC$ .

Nella figura 2  $ABC$  sia il triangolo fondamentale. Prolunghiamo il lato  $BC$  di  $CN = 2AA_1$ , essendo  $AA_1$  l'altezza relativa al lato  $BC$

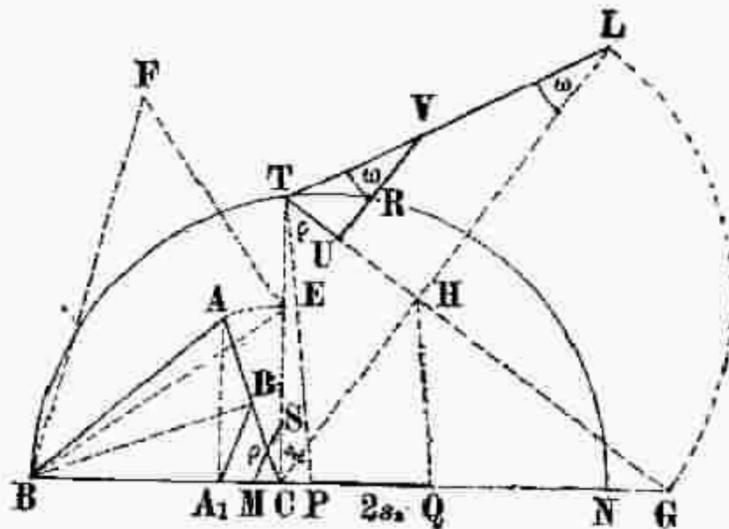


Fig. 2.

considerato e  $CT$  sia il segmento medio proporzionale tra  $BC, CN$ . Poi, fatto  $CE = CA$ , uniamo  $B$  con  $E$  e sul segmento  $BE$ , così ottenuto, costruiamo il triangolo rettangolo in  $E$ ,  $BEF$ , il cui cateto  $EF$  sia uguale ad  $AB$ . Fatto quindi  $CG = BF$ , conduciamo  $CH$  perpendicolare a  $TG$  e prolunghiamola di  $HL = HG$ .

Unito poi  $T$  con  $L$ , dico che l'angolo  $TLC$ , così ottenuto, è l'angolo BROCARD  $\omega$  di  $ABC$ .

I due segmenti,  $CT, CG = BF$ , cateti del triangolo rettangolo  $TCG$ , hanno per misura  $\sqrt{4\Delta}, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  rispett. e però:

$$\frac{TH}{GH} = \frac{TH}{HL} = \frac{CT^2}{CG^2} = \frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} = \text{tang } \omega,$$

per la form. (I).

OSSERVAZIONI. — Si noti quanta importanza ha la semplice proprietà, di cui facciamo largo uso in altre ricerche già pubblicate, che il rapporto tra i due segmenti dell'ipotenusa determinati dal piede della altezza corrispondente è uguale al rapporto tra i quadrati dei cateti adiacenti.

È per questa proprietà che varie costruzioni acquistano forma elegante.

Facciamo  $GQ = BC = a$ , uniamo Q con H e tiriamo TP parallela a QH. Sarà allora  $PQ = 2s_a$ .

Infatti

$$\frac{PQ}{a} = \frac{HT}{GH} = \frac{CT^2}{CG^2} = \frac{4\Delta}{a^2 + b^2 + c^2};$$

poi

$$PQ = 2 \frac{2\Delta a}{a^2 + b^2 + c^2} = 2s_a,$$

per la (II).

Così senza conoscere la posizione di K possiamo determinare le sue distanze dai lati del triangolo fondamentale.

Fatto  $CS = s_a = \frac{1}{2} PQ$ , conduciamo SM parallela al lato  $A_1B_1$  del triangolo ortico. Il segmento SM è uguale al raggio  $\rho$  del circolo del coseno e ciò risulta dalle considerazioni fatte sulla figura 1, quindi fatto  $TU = \rho$  il segmento UV parallelo ad HL è uguale al raggio R del circoncerchio (form. VII).

Possiamo così determinare il raggio del circoncerchio di un triangolo fondamentale senza fare uso dei punti medi dei suoi lati e il circoncentro O anziché essere determinato come incontro di due mediatrici può essere costruito come incontro di due archi.

c) Il triangolo ABC sia inscritto nel circolo di centro O e  $CE = CA$  sia perpendicolare in C a BC. Uniamo B con E e sia  $CF = h_1$  perpendicolare in F a BE. Prolunghiamo EB e fatto poi  $FM_1 = AB$ , uniamo C con  $M_1$  e sia  $FG = h$  e unito T con L, dico che l'angolo TLC è l'angolo  $\omega$  di ABC.

Osserviamo infatti che  $(a^2 + b^2) h_1^2 = CE^2 h_1^2 = a^2 b^2$ , quindi

$$\frac{1}{h_1^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Siccome  $FM_1 = BE = c$  abbiamo analogamente

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

ed

$$h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = 2R \operatorname{sen} \omega,$$

per la (V).

Perciò l'angolo TLC del triangolo rettangolo CTL, di ipotennusa  $2R$ , che è opposto al cateto  $h$ , è proprio l'angolo di BROCARD  $\omega$  di ABC.

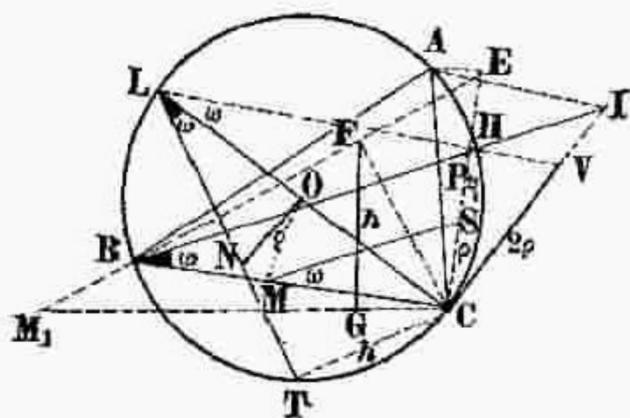


Fig. 3.

OSSERVAZIONI. — Osserviamo che il segmento ON perpendicolare in O a CL è il raggio  $\rho$  del circolo del coseno.

Dalla figura 3 possiamo ricavare, oltre di  $\rho$ , qualche altro elemento notevole.

Fatto su CE,  $CS = \rho$  e riportando su BC il segmento  $CM = R$ , basta condurre da B la parallela ad MS perchè questa incontri CE in un punto P che dista da C di  $2s_a$ .

Sulla costruzione di figura 3 possiamo semplicemente completare quella che il BROCARD espose al congresso d'Algeri nel 1881 (cfr. ALASIA, l. cit., p. 175) per la determinazione dell'angolo che porta il suo nome.

Basta condurre AJ parallela BC e CI perpendicolare ad OC: l'angolo IBC è uguale ad  $\omega$  e quindi, anche per questa via, la CE risulta incontrata in un punto P che dista da C di  $2s_a$ .

Se poi uniamo L con H è chiaro, per quel che precede, che il segmento CV è uguale a  $2\rho$ , giacchè l'angolo CLV =  $\omega$ .

Qui si vede quanto istruttiva è la figura 3.

Il procedimento di figura 3 può essere, in parte, ripetuto sostanzialmente nella determinazione d' $\omega$  per mezzo dei raggi dell'incirchio e degli ex cerchi e di qualche altro elemento: da

$$\Delta = pv = v_a(p - a) = v_b(p - b) = v_c(p - c)$$

con

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

viene facilmente

$$\frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\Delta^2};$$

poi, per la (I),

$$\text{ctg } \omega + \frac{\Delta}{4} \left[ \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2} \right].$$

Se  $h$  è il segmento per il quale

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{v_a^2} + \frac{1}{v_b^2} + \frac{1}{v_c^2} + \frac{1}{v^2},$$

sarà

$$\text{tang } \omega = \frac{(2h)^2}{\Delta}$$

e noi, servendoci delle linee già tracciate preventivamente in figura, possiamo subito, uniformandoci agli esposti metodi, costruire l'angolo  $\omega$ .

V. G. CAVALLARO.

## RISOLUZIONE DELLA QUISTIONE 810

**810.** Due punti  $P, P'$  percorrono due linee in un piano  $c, c'$  con velocità costanti  $v, v'$ , e in ogni istante la retta  $PP'$  fa angoli costanti con le tangenti alle curve stesse nei punti  $P, P'$ . Trovare tutte le coppie di linee  $c, c'$  che possano verificare la detta condizione.

G. L.

Risposta del prof. I. L. Csada di Modor (Ungheria).

Sieno  $P, P_1, P_2 \dots$  le posizioni del punto mobile  $P$  nei tempi  $t, t + \Delta t, t + 2\Delta t$ , e  $P', P'_1, P'_2 \dots$  quelle del punto  $P'$ ; sia  $Q$  il punto d'incontro delle rette  $PP_1$  e  $P'P'_1$  ed  $R$  il punto d'incontro delle rette  $PP'$  e  $P_1P'_1$ ; poniamo

$$\begin{aligned} \overline{PP_1} &= \Delta s, & \text{angolo } (\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{PP'}) &= \alpha, \\ \overline{P'P'_1} &= \Delta s', & \text{angolo } (\overrightarrow{P'P'_1}, \overrightarrow{P'P}) &= \alpha', \\ \overline{PP'} &= p, & \text{angolo } (\overrightarrow{PP_1}, \overrightarrow{P_1P_2}) &= \Delta\omega, \\ & & \text{angolo } (\overrightarrow{P'P'_1}, \overrightarrow{P'_1P'_2}) &= \Delta\omega', \\ & & \text{angolo } (\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{P_1P'_1}) &= \Delta\omega''. \end{aligned}$$

Essendo gli angoli  $\alpha, \alpha'$  costanti, si vede facilmente, eseguendo la figura, ch'è

$$(1) \quad \Delta\omega'' = \Delta\omega' = \Delta\omega.$$

Indicando con  $\rho_{\Delta t}$  e  $\rho'_{\Delta t}$  rispettivamente i raggi dei cerchi passanti l'uno pei punti  $P, P_1, P_2$  l'altro pei punti  $P', P'_1, P'_2$ , si hanno le relazioni

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta\omega = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\Delta s}{2\rho_{\Delta t}}, \\ \Delta\omega' = 2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\Delta s'}{2\rho'_{\Delta t}}, \end{cases}$$

e perciò

$$(3) \quad \frac{\Delta\omega''}{\Delta t} = \frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\Delta s}{2\rho_{\Delta t}}}{\Delta t} = \frac{2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{\Delta s'}{2\rho'_{\Delta t}}}{\Delta t};$$

al limite per  $\Delta t = 0$ , si ha

$$(4) \quad \frac{d\omega''}{dt} = \frac{v}{\rho} = \frac{v'}{\rho'},$$

dove  $\rho, \rho'$  sono i raggi di curvatura delle curve  $c, c'$  rispettivamente nei punti  $P, P'$ .

Dal triangolo  $PP_1, R$ , si ha

$$PR = \Delta s \cdot \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \Delta\omega)}{\operatorname{sen} \Delta\omega''} = \left( \frac{\Delta s}{\Delta t} : \frac{\operatorname{sen} \Delta\omega''}{\Delta t} \right) \cdot \operatorname{sen}(\alpha - \Delta\omega),$$

e passando al limite per  $\Delta t = 0$ , si ha

$$PR = v \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)}$$

Si ha quindi

$$p = PR - PR = \frac{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}{\left(\frac{d\omega''}{dt}\right)},$$

da cui

$$(5) \quad \frac{d\omega''}{dt} = \frac{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}{p}$$

Dalle (4) e (5) segue

$$(6) \quad \frac{v}{\rho} = \frac{v'}{\rho'} = \frac{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}{p}$$

Il  $p$  può essere una funzione arbitraria di  $\rho, \rho', s, s', t$ ; si ha dunque

$$\rho = \frac{v \cdot p(s, s', \rho, \rho', t)}{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}, \quad \rho' = \frac{v' \cdot p(s, s', \rho, \rho', t)}{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}$$

Essendo

$$\frac{s}{s'} = \frac{v}{v'}, \quad \frac{\rho}{\rho'} = \frac{v}{v'}, \quad t = \frac{s}{v} = \frac{s'}{v'}$$

le equazioni di tutte le coppie di linee che possono verificare la detta condizione si possono scrivere

$$(7) \quad \rho' = \frac{v \cdot p\left(s, \frac{v'}{v} s, \rho, \frac{v'}{v} \rho, \frac{s}{v}\right)}{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}, \quad (8) \quad \rho' = \frac{v' \cdot p\left(\frac{v}{v'} s', s', \frac{v}{v'} \rho', \rho' \frac{s'}{v}\right)}{v' \text{sen } \alpha' - v \text{sen } \alpha}$$

Ecco alcune proprietà delle curve  $c, c'$ . Dalle (4) e (5) seguono le relazioni

$$PR = \rho \text{sen } \alpha, \quad PR = \rho' \text{sen } \alpha'$$

Costruiamo il centro di curvatura  $C$  corrispondente al punto  $P$  e la sua proiezione  $C_1$  sulla retta che passa per  $P$  e che forma colla tangente in  $P$  un angolo dato  $\alpha$ . Il punto  $C_1$  è il luogo di  $R$ . Le coppie di linee  $c, c'$  sono caratterizzate per la seguente proprietà: 1°. Nei punti corrispondenti coincidano le rette  $PC_1, P'C'_1$  ed i punti  $C_1, C'_1$ . 2°. Le tangenti corrispondenti formano un angolo costante.

Risoluzione del proponente.

Riferendoci ad un sistema di assi ortogonali, indichiamo con  $x, y$  le coordinate del punto  $P$ , con  $X, Y$  quelle del punto  $P'$ , con  $m, m'$  le tangenti degli angoli formati dalla retta  $PP'$  colle tangenti alle due traiettorie e poniamo  $\frac{v}{v'} = k$ . Per le condizioni poste dal problema si deve avere il sistema di equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} dx^2 + dy^2 = k^2 (dX^2 + dY^2) \\ (X - x) \left(m - \frac{dy}{dx}\right) + (Y - y) \left(1 + m \frac{dy}{dx}\right) = 0 \\ (X - x) \left(m' - \frac{dY}{dX}\right) + (Y - y) \left(1 + m' \frac{dY}{dX}\right) = 0. \end{cases}$$

Infatti la prima di queste esprime che il rapporto della velocità di P a P' è k. La seconda si trova esprimendo che la retta PP', la quale ha per coefficiente angolare  $\frac{Y-y}{X-x}$ , e la tangente alla traiettoria in P, la quale ha per coefficiente angolare  $\frac{dy}{dx}$ , formano un angolo che ha per tangente m, di guisa che, per una nota formula si deve avere la relazione

$$m = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{Y-y}{X-x}}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{Y-y}{X-x}},$$

che con semplici riduzioni si trasforma nella seconda delle (1). In modo simile si trova la terza equazione esprimendo che la retta PP' (di coefficiente angolare  $\frac{Y-y}{X-x}$ ) e la tangente alla traiettoria di P' (di coefficiente angolare  $\frac{dY}{dX}$ ) formano un angolo che ha per tangente m'.

1°. Consideriamo prima il caso in cui sia  $m = m'$ .

Dalle ultime due per sottrazione si ottiene l'equazione

$$\left(\frac{dY}{dX} - \frac{dy}{dx}\right) [(X-x) - m(Y-y)] = 0,$$

che si scinde nelle due

$$(2) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx}, \quad (3) \quad X-x = m(Y-y).$$

Se è verificata la (2), la prima delle (1) diventa

$$dx^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} = k^2 dX^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 \right\}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} dx = k dX \\ dy = k dY. \end{cases}$$

Ne risulta

$$\begin{cases} x = kX + c \\ y = kY + c'; \end{cases}$$

e scegliendo convenientemente l'origine delle coordinate, si può porre

$$\begin{cases} x = kX \\ y = kY. \end{cases}$$

Allora la seconda e terza delle (1) diventano

$$(4) \quad \begin{cases} x \left(m - \frac{dy}{dx}\right) + y \left(1 + m \frac{dy}{dx}\right) = 0 \\ X \left(m - \frac{dY}{dX}\right) + Y \left(1 + m \frac{dY}{dX}\right) = 0, \end{cases}$$

che sono l'equazioni differenziali di due spirali eguali aventi per polo l'origine delle coordinate: infatti esse si ottengono esprimendo che la tangente dell'angolo vettore colla tangente sia eguale ad m.

Se è verificata la (3), la terza delle (1) diventa

$$m(Y-y) \left( m - \frac{dY}{dX} \right) + (Y-y) \left( 1 + m \frac{dY}{dX} \right) = 0,$$

cioè

$$(Y-y)(m^2+1) = 0$$

ossia

$$Y = y, \quad \text{e quindi} \quad X = x.$$

Questo caso dunque non si può verificare altro che quando i punti A, B sono sempre coincidenti.

2°. Supponiamo ora  $m, m'$  disuguali.

Dalla seconda e terza delle (1) eliminando  $X-x$  e  $Y-y$ , si trova

$$\begin{vmatrix} m - \frac{dy}{dx} & 1 + m \frac{dy}{dx} \\ m' - \frac{dY}{dX} & 1 + m' \frac{dY}{dX} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ m' & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 \\ \frac{dY}{dX} & 1 \end{vmatrix} + mm' \begin{vmatrix} 1 & \frac{dy}{dx} \\ 1 & \frac{dY}{dX} \end{vmatrix} - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dY}{dX} \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m' \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(5) \quad (m-m') \left( 1 + \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dY}{dX} \right) - (1+mm') \left( \frac{dy}{dx} - \frac{dY}{dX} \right) = 0.$$

Posto  $a = \frac{m-m'}{1+mm'}$ , si ha anche

$$(6) \quad \frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dy}{dx} - a}{1 + a \cdot \frac{dy}{dx}}.$$

Questa equazione si trova anche direttamente esprimendo che l'angolo delle tangenti in A, B alle due curve è costante.

Sostituendo questo valore nella prima delle (1) si trova

$$1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = k^2 \left\{ 1 + \frac{\left( \frac{dy}{dx} - a \right)^2}{\left( 1 + a \frac{dy}{dx} \right)^2} \right\} \cdot \left( \frac{dX}{dx} \right)^2,$$

$$\left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \left( 1 + a \frac{dy}{dx} \right)^2 = k^2 (1+a^2) \left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\} \left( \frac{dX}{dx} \right)^2,$$

da cui

$$1 + a \frac{dy}{dx} = k \sqrt{1+a^2} \frac{dX}{dx};$$

e integrando

(7)

$$x + ay = k \sqrt{1+a^2} X + c_1.$$

Dalla prima delle (1) e dalla (6) si ha anche

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = k^2 \left\{ \frac{\left(1 + a \frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx} - a\right)^2} + 1 \right\} \frac{dY}{dx},$$

ossia

$$\left(\frac{dy}{dx} - a\right)^2 \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} = k^2 (1 + a^2) \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} \left(\frac{dY}{dx}\right)^2,$$

ossia

$$\frac{dy}{dx} - a = k \sqrt{1 + a^2} \frac{dY}{dx}, \quad \text{ossia} \quad dy - a dx = k \sqrt{1 + a^2} dY,$$

e quindi

$$(8) \quad y - ax = k \sqrt{1 + a^2} Y + c_2.$$

Posto  $m = \tan \alpha$ ,  $m' = \tan \alpha'$ , si ha

$$a = \tan(\alpha - \alpha'), \quad \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} = \sin(\alpha - \alpha'), \quad \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = \cos(\alpha - \alpha');$$

perciò le (7), (8), scegliendo convenientemente l'origine delle coordinate in guisa che sia  $c_1 = c_2 = 0$ , si possono scrivere

$$\begin{cases} KX = y \sin(\alpha - \alpha') + x \cos(\alpha - \alpha') \\ KY = y \cos(\alpha - \alpha') - x \sin(\alpha - \alpha'). \end{cases}$$

La seconda delle (1) si può scrivere

$$\frac{dy}{dx} \{m(Y - y) - (X - x)\} + m(X - x) + (Y - y) = 0.$$

Moltiplicando per  $k$  e sostituendo a  $kX$ ,  $kY$  i valori trovati, si ha

$$dy [m \{y \cos(\alpha - \alpha') - x \sin(\alpha - \alpha') - ky\} - \{y \sin(\alpha - \alpha') + x \cos(\alpha - \alpha') - kx\}] + dx [m \{y \sin(\alpha - \alpha') + x \cos(\alpha - \alpha') - kx\} + \{y \cos(\alpha - \alpha') - x \sin(\alpha - \alpha') - ky\}] = 0.$$

Se poniamo

$$p = m \cos(\alpha - \alpha') - \sin(\alpha - \alpha') - mk = \frac{\sin \alpha \cos(\alpha - \alpha') - \cos \alpha \sin(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha} - km = \frac{\sin \alpha' - k \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

$$q = m \sin(\alpha - \alpha') + \cos(\alpha - \alpha') - k = \frac{\sin \alpha \sin(\alpha - \alpha') + \cos \alpha \cos(\alpha - \alpha')}{\cos \alpha} - k = \frac{\cos \alpha' - k \cos \alpha}{\cos \alpha},$$

l'equazione precedente diventa

$$dy(py - qx) + dx(qy + px) = 0.$$

Per integrare questa equazione, si ponga

$$y = z \cdot x, \quad \text{da cui} \quad dy = z dx + x dz.$$

Essa diventa

$$(z dx + x dz)(pzx - qx) + dx(qzx + px) = 0.$$

ossia

$$p(1+z^2)dx + x(pz - q)dz = 0.$$

Se è  $p = 0$ , si ha  $qdz = 0$  ossia  $z = c$ 

$$\frac{y}{x} = c, \quad y = cx.$$

Se è  $q = 0$ , si ha

$$x^2 + y^2 = c^2$$

Se  $p$  e  $q$  sono diversi da zero, si ha

$$\frac{dx}{x} + \frac{pz - q}{p(1+z^2)} dz = 0$$

da cui successivamente si ricava

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{2zdz}{1+z^2} - \frac{q}{p} \int \frac{dz}{1+z^2} = C'$$

$$\log x + \frac{1}{2} \log(1+z^2) - \frac{q}{p} \operatorname{arc} \tan z = \log C,$$

$$\log \left\{ x \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \right\} = \frac{q}{p} \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} = \log C,$$

$$\log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{q}{p} \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} = \log C, \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{C} = e^{\frac{q}{p} \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x}}.$$

Se si passa a coordinate polari mediante le formule

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho, \quad \operatorname{arc} \tan \frac{y}{x} = \omega,$$

si ha

$$\frac{\rho}{C} = e^{\frac{q}{p} \omega},$$

che rappresenta una spirale logaritmica.

Lo stesso procedimento può adoperarsi per trovare l'equazione del luogo di B e si ottengono identici risultati.

Concludendo si ha: *Le traiettorie di P, P' sono o due rette, o due cerchi, o due spirali.*


---

## BIBLIOGRAFIA

---

DUILIO GIGLI, *Lezioni di aritmetica e di algebra elementare ad uso delle Scuole secondarie superiori. Parte 1<sup>a</sup>: I numeri interi; i numeri razionali.* Pagine vi-263. Pavia, Battei e C., 1914. — L. 2.50.

La critica dei fondamenti dell'Aritmetica, alla quale fra noi il prof. PEANO e la sua scuola portarono contributi essenziali, ha permesso di dare a quella Scienza, considerata come sistema logico deduttivo, un assetto che potremmo dire definitivo, fondandola sopra un complesso di nozioni e di proposizioni, di

carattere formale, la cui enunciazione, cioè, può farsi indipendentemente dalla genesi e dal contenuto dei concetti di numero, di uguaglianza e di somma. Se un risultato scientifico così notevole deve indubbiamente rivolgersi a beneficio dell'insegnamento, non deve tuttavia la scuola trascurare l'esperienza delle cose, e l'osservazione della realtà dalle quali per l'appunto le idee primitive e i postulati ripetono la origine, e dalle quali, in un primo studio, allontanerebbe anche l'adozione sia pure parziale di quell'apposito simbolismo che pure nelle citate ricerche fu strumento poderoso. Chè anzi ogni concetto che si introduca e ogni proposizione che si postuli debbon trovare nell'esperienza la propria spiegazione e la propria giustificazione, per modo che l'osservazione delle cose preceda e accompagni come il migliore dei commenti lo svolgersi della teoria, e ad ogni tratto sia possibile applicare ai problemi concreti i risultati che si vanno ritrovando.

Le *Lezioni* del prof. GIULI obbediscono per l'appunto a tale doppia esigenza: avere sempre presenti i risultati della critica, non trascurare mai la genesi e il contenuto dei concetti. Perciò, tracciato nel capo I del Libro 1° (*sui numeri interi*) uno schema che direi sperimentale sulle *collezioni*, egli lo sfrutta nel II presentando il concetto di numero (*intero non nullo*) sotto il doppio aspetto di carattere di una collezione, e di carattere comune a collezioni equivalenti, e traducendo nelle *nozioni principali* e nelle *proposizioni fondamentali* le già riscontrate proprietà delle collezioni; segue (Cap. III a VII), la trattazione delle due operazioni dirette, delle potenze, e delle due operazioni inverse in quanto siano possibili nel campo degli interi non nulli. Alle progressioni aritmetiche e geometriche è dedicato il Cap. VIII; anticipo questo che è in contrasto colla nostra tradizione scolastica, ma si deve notare che tale teoria, nel campo degli interi non nulli, può a questo punto ottimamente trattarsi con opportune restrizioni relative al problema della inserzione dei medi, che essa è fonte di esercizi svariati, e che infine la nozione di progressione aritmetica serve all'A., per presentare, con chiara semplicità, il concetto di quoziente incompleto.

Finite di esporre nei cap. IX e X, colla Teoria dei divisori, dei multipli e dei numeri primi, le proprietà dei numeri interi non nulli che non dipendono dal sistema di numerazione, l'A. passa nel cap. XI alla costruzione di un sistema siffatto con base assegnata, e mostra con singolare evidenza la necessità di un nuovo segno, lo zero, e la convenienza di attribuirgli significato di numero, estendendo in corrispondenza la nozione di collezione alle collezioni nulle. Ampliato così collo zero il campo degli interi, si ricostruisce, com'è necessario per il campo così esteso, l'assieme delle proposizioni fondamentali, e rapidamente si adattano al nuovo campo, insistendo nelle necessarie restrizioni, le teorie precedenti. Chiuso, con un capitolo sul sistema decimale, il libro 1°, uno sguardo sintetico al cammino percorso serve all'A. anche per porre in rilievo quei cenni di logica che, per criteri puramente formali, non certo per convenienze didattiche, si permettono di solito a ogni trattazione. ●

Ripreso nel Cap. XIII, che è il primo del libro 2° (*sui numeri razionali*), il concetto fondamentale dell'opera, col trarre dalla considerazione delle *grandezze* i mezzi per costruire la Teoria dei numeri razionali non nulli pensati come rapporti di grandezze commensurabili, l'A. stabilisce (Cap. XIV) pel campo dei numeri razionali non nulli l'assieme delle *nozioni principali* e delle *proposizioni fondamentali*, che presuppone l'analogo per i numeri interi non nulli; ha così modo di trattare nello stesso campo le quattro operazioni, le potenze, le progres-

sioni, e, tratto da molteplici esempi concreti il concetto di grandezze proporzionali, di svolgere in pochi teoremi la teoria delle proporzioni fra numeri e quindi le numerose applicazioni che ne discendono. La considerazione delle grandezze nulle condotta sull'esempio dei segmenti, serve all'autore per introdurre lo zero nel campo razionale, dopodichè sono estese al campo dei numeri razionali nulli e non nulli le *proposizioni fondamentali* e, colle necessarie avvertenze, le teorie precedenti. In tal modo così il 1° libro sui numeri interi, come il 2° sui numeri razionali sono nettamente divisi in due parti e nelle seconde solamente si tratta dello zero; son così poste in luce le considerazioni speciali che lo zero richiede e i capitoli dai quali deve essere escluso. Qualche dissimetria può notarsi circa al modo di introdurre lo zero nel campo intero e nel campo razionale; se non che l'A. ha cura di rilevare come la considerazione dello zero anche nel campo razionale sia principalmente importante per la formazione dei simboli e nell'esecuzione delle operazioni: il rilievo è qui fatto, come basta, per il sistema decimale, cosicchè trova qui luogo la trattazione dei numeri decimali, la cui scrittura è introdotta in modo simile, anche per chiarezza e semplicità, all'analogo tenuto nel Cap. XI. Il volume si chiude con un capitolo (XVIII) sulle *serie decimali periodiche* considerate come risultato del procedimento di divisione applicate a frazioni non uguali a numeri decimali; la chiarezza e il rigore della trattazione fanno di questo capitolo uno dei più attraenti del libro.

Accompagnano lo svolgersi della Teoria numerosi esercizi e di genere vario: alcuni strettamente teorici, altri numerici, altri che sono problemi di applicazione, di modo che, come volle l'A., il rigore degli svolgimenti non fa mai perdere di vista i loro raccordi colle cose. Il libro si raccomanda, inoltre, per qualità apparentemente secondarie, che sono invece dell'insegnamento di importanza grandissima; la cura con cui son poste in rilievo tutte le simmetrie di trattazione, ed è indicato il posto che ciascun capitolo ha nella Teoria com'è tracciata o potrebbe avere in un altro ordine di pensiero, e, non ultima, la paziente diligenza con cui l'A. ha voluto che anche per virtù della forma tipografica apparisse chiara l'architettura del libro, così come fu pensata. È veramente augurar bene alla scuola l'augurare a questo libro, del quale speriamo di veder presto la parte II, la fortuna che gli merita l'intelligenza e il grande amore che l'A. ha posto nel costruirlo.

E. VENERONI.

BRAUDE, *Les Coordonnées intrinsèques. Théorie et applications.* "Scientia", n. 34. Paris, Gauthier-Villars, 1914.

La geometria intrinseca, come è noto, è stata creata dal compianto Cesàro, il quale si occupò dei sistemi di coordinate indipendenti dalla posizione della curva in varie note e memorie e principalmente nelle sue geniali *Lezioni di geometria intrinseca* pubblicate a Napoli nel 1895 e, tradotte in tedesco col titolo *Vorlesungen über natürliche Geometrie*, nel 1911.

L'elegante volumetto del BRAUDE si propone di vulgarizzare e diffondere la conoscenza dei metodi della geometria intrinseca. Esso si compone di quattro capitoli, il primo dei quali è destinato ad un breve studio storico e alla esposizione dei principi generali sui quali il metodo si fonda e delle sue applicazioni in generale; i tre seguenti sono destinati a dare esempi particolari dell'applicazione del metodo della geometria intrinseca a curve speciali. Più precisamente il

capitolo secondo è destinato alla *curva di Mannheim*, cioè della curva luogo del centro di curvatura corrispondente al punto di contatto, di una curva che rotola sopra una retta o sopra una curva fissa qualunque, e alle generalizzazioni e casi particolari di questa: Il capitolo terzo è destinato alle *arcuidi* delle curve: il quarto alle *roulettes* e alle loro numerosissime e interessanti applicazioni.

RANELLETTI, *Elementi di geometria descrittiva* ad uso dei R.R. Istituti tecnici.

— — *Applicazioni di geometria descrittiva*. Manuali Hoepli, Milano, 1914.

L'importante collezione dei Manuali Hoepli si è accresciuta di questi due volumi, il primo dei quali contiene gli elementi di geometria descrittiva che si sogliono svolgere negli Istituti tecnici ed è diviso in dodici capitoli, dei quali ecco i titoli:

I. *Rappresentazione del punto*. — II. *Rappresentazione della retta*. — III. *Rappresentazione del piano*. — IV. *Problemi relativi al piano*. — V. *Rotazione della figura obiettiva intorno ad un asse*. — VI. *Ribaltamenti*. — VII. *Introduzione di nuovi piani di proiezione*. — VIII. *Del triedro*. — IX. *Poliedri*. — X. *Superficie geometriche*. — XI. *Proiezioni assonometriche*. — XII. *Proiezioni quotate*.

Il secondo volumetto si divide in tre parti, cioè:

I. *Teoria delle ombre*. — II. *Taglio delle pietre*. — III. *Taglio dei legnami*.

Esso ha carattere essenzialmente pratico ed è redatto in guisa che possa essere adatto non soltanto agli studenti degli istituti tecnici, ma anche a quelli delle scuole professionali.

WIELEITNER, *Algebraische Kurven*. Neue Bearbeitung. I. Gestaltliche verhältnisse. Sammlug Göschen 435. Berlin, 1914.

In questo *Periodico* (Vol. 21, p. 143, anno 1906) fu data notizia dell'opera pubblicata sotto lo stesso titolo dal Prof. WIELEITNER nel 1905 nella bella collezione Schubert. La stessa opera completamente rifusa e ridotta a minor mole, compare ora nella piccola collezione Göschen, che, almeno per il formato, ricorda molto la collezione Höepli.

Nella nuova veste il libro non si propone esattamente lo stesso scopo dell'opera originaria, cioè di sviluppare regole adatte alla discussione sistematica di date equazioni di curve; principalmente esso si propone di far conoscere tutte le possibili forme esteriori delle curve.

Principalmente vengono rappresentate le varie curve di terzo e quarto ordine e della terza e quarta classe, in quanto sono proiettivamente distinte le une dalle altre.

Il libro è diviso in quattro parti:

I. *Considerazioni generali*. — II. *Le relazioni con gli elementi all'infinito*. — III. *Le curve come involuppi di tangenti*. — IV. *Singolarità di ordine superiore*. *Curve approssimate*.

È interessante osservare che il libretto è alla portata di chiunque abbia conoscenza degli elementi di geometria analitica.

K.