Così anche *il tetraedro ultrarmonico di 3° ord.* S_{aa3} [ABC] *oltre ad* *ere gli spigoli opposti* BC, AS_{aa3} *uguali, ha varie altre proprietà co-* *uni col tetraedro ultrarmonico di 1° ord.*, ecc.

Sia ABC biconveniente. Siano Δ_a, Δ_b le aree dei triangoli ob- ettivi BCA_1, CAB_1. È

$$\Delta = \Delta_a \cos \xi_a, \qquad \Delta = \Delta_b \cos \xi_b,$$

ıde [form. I, III]

$$\Delta_a = -\Delta \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{cotg} \beta, \qquad \Delta_b = -\Delta \operatorname{cotg} \gamma \operatorname{cotg} \alpha. \qquad [IX]$$

Detti V_a, V_b i volumi dei tetraedri ortogonali armonici S_a [ABC] [ABC], è

$$V_a : V_b = AK_0 : BH_0 = AS_a : BS_b$$

per la VI, sarà

$$V_a = V_b \sqrt{\frac{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}}. \qquad [X]$$

entre è

$$V_a = \frac{1}{12} b^2 \frac{ac}{R} \sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\beta}\right]^2 - 1}, \qquad V_b = \frac{1}{12} a^2 \frac{bc}{R} \sqrt{\left[\frac{\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha}\right]^2 - 1},$$

rchè si faccia uso della formula

$$V_a = \frac{1}{3} \Delta . AK_0 = \frac{1}{3} \Delta . AS_a$$

si ponga

$$\Delta = \frac{abc}{4R}.$$

Si ha pure

$$V_a = \frac{1}{6} abc \sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta}, \qquad V_b = \frac{1}{6} abc \sqrt{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Quando si tratti d'un triangolo ultraconveniente di 1° ord. ri- etto al vertice A, sarà

$$S_{aa1}[ABC] = V_{aa1} = \frac{1}{3} \Delta . R = \frac{1}{3} \frac{abc}{4R} . R = \frac{1}{12} abc.$$

unque *il volume del tetraedro ultrarmonico di 1° ord.*, S_{aa1} [ABC], *guale alla dodicesima parte del prodotto dei numeri che misurano i* *i della sua faccia base.*

E quando si tratti d'un triangolo ultraconveniente di 3° ord., ıti V_{aa3}, V_{ba3} i volumi dei tetraedri S_{aa3} [ABC], S_{ba3} [ABC], sarà, rm. X]

$$V_{aa3} : V_{ba3} = \sqrt{\frac{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\beta}{\cos^2\gamma - \operatorname{sen}^2\alpha}}$$

ed il secondo membro per la $[\lambda, p]$ è uguale a $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}$ e però al rapporto $\frac{a}{b}$ come doveva essere.

Ricerche sul prisma. — Facciamo l'ipotesi, non illusoria, che la sezione retta (s. r.) ABC di un prisma triangolare P_1, sia tale che i suoi punti di Brocard Ω, Ω' scindono questo triangolo nei triangoli ΩBC, ΩCA, ΩAB; Ω'BC, Ω'CA, Ω'AB biconvenienti. In tal caso denominiamo P_1 *prisma biarmonico*. E, ove i sei predetti triangoli

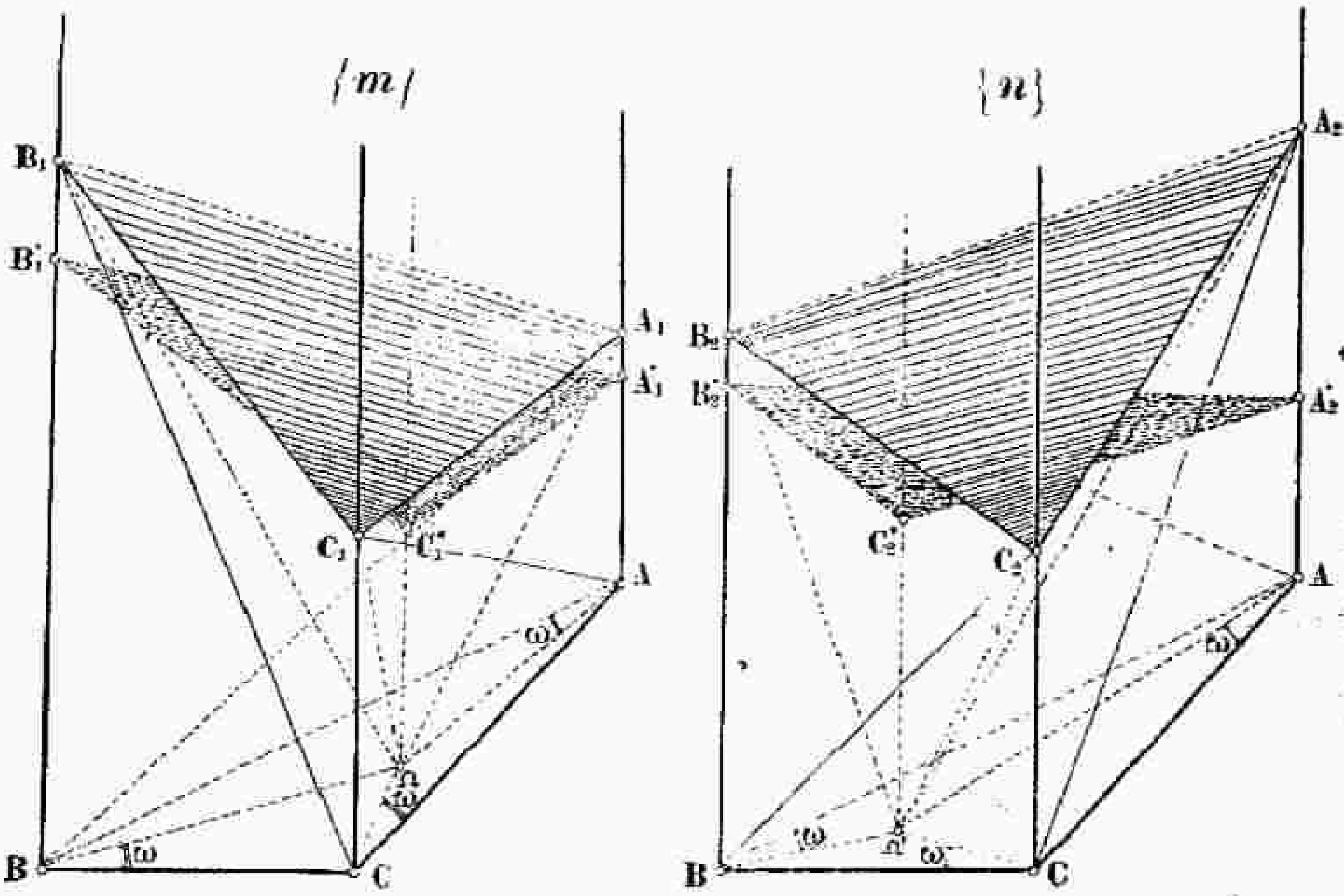

Fig. 3.

sieno convenienti o non biconvenienti simultaneamente, denomineremo P_1 *prisma armonico*.

Un triangolo ABC che abbia un angolo (ad es. quello in C) abbastanza ottuso può essere s. r. di un prisma biarmonico; e noi, supposto di aver da fare con un siffatto prisma, consideriamo provvisoriamente i triangoli ΩBC, ΩCA, ΩAB della s. r. ABC come semplicemente convenienti rispetto ai vertici dell'angolo di Brocard ω, talchè saranno BC, ΩC, ΩA i loro lati principali, rispettivamente (fig. 3, *m*).

Ciò posto, costruiamo il segmento caratteristico relativo al vertice A del triangolo ΩAB e poi, sullo spigolo del prisma passante per A, prendiamo i segmenti $AA_1 = AA'_1$ uguali al segmento caratteristico or ora menzionato.

Questa operazione si ripeta identicamente rispetto agli spigoli del prisma passante pei vertici B, C dei triangoli ΩBC, ΩCA. In tal modo otterremo i due triangoli $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ che hanno i vertici ıgli spigoli del prisma e sono simmetrici rispetto alla sua s. r. ABC: si *corrispondono* al punto Ω di Brocard.

Presi a considerare i triangoli Ω'BC, Ω'CA, Ω'AB riguardiamoli r ora semplicemente convenienti rispetto ai vertici dell'angolo di ɪocard ω, talchè saranno Ω'C, CA, Ω'B i loro rispettivi lati prinpali (fig. 3, *n*).

Sullo spigolo del prisma passante per A prendiamo i segmenti $A_2 = AA'_2$ uguale al segmento caratteristico relativo al vertice incipale A del triangolo Ω'CA e identiche operazioni si facciano ıpetto ai rimanenti spigoli passanti pei vertici principali B, C dei 'angoli Ω'AB, Ω'BC. In tal modo otterremo i due triangoli $A_2B_2C_2$, $_2B'_2C'_2$ che fanno i vertici sugli spigoli del prisma e sono simmeici rispetto alla sua s. r. ABC: essi *corrispondono* al punto Ω' di ɪocard.

I triangoli ΩBC, ΩCA, ΩAB si sono supposti biconvenienti, talchè ranno BCΩ, CAΩ, ABΩ angoli dei corrispondenti vertici princili Ω, A, B.

Sugli spigoli del prisma uscenti da A, B prenderemo i segmenti $A_1{}^* = AA'_1{}^*$, $BB_1{}^* = BB'_1{}^*$ uguali rispettivamente ai segmenti catteristici corrispondenti ai vertici principali A, B e sulla perpencolare al piano di ABC condotta per Ω, faremo $\Omega C_1{}^* = \Omega C'_1{}^*$ uguale segmento caratteristico corrispondente al vertice principale Ω. tal modo otterremo i due triangoli $A_1{}^*B_1{}^*C_1{}^*$, $A'_1{}^*B'_1{}^*C'_1{}^*$ un verɪe dei quali non sta sugli spigoli del prisma e corrispondono al ınto Ω di Brocard.

I triangoli Ω'BC, Ω'CA, Ω'AB sono biconvenienti, talchè saranno BC, CΩ'A, Ω'AB angoli dei corrispondenti vertici principali B, Ω, A. ıgli spigoli del prisma uscenti da A, B prenderemo i segmenti $A_2{}^* = AA'^{2*}$, $BB_2{}^* = BB'_2$ uguali rispettivamente ai segmenti catteristici corrispondenti ai vertici principali A, B; e sulla perpencolare al piano di ABC condotta per Ω' faremo $\Omega' C^*_2 = \Omega C'_2$ uguale segmento caratteristico corrispondente al vertice principale Ω'. tal modo otterremo i due triangoli $A_2{}^*B_2{}^*C_2{}^*$, $A'{}^*B'{}^*C'{}^*$ un verɪe dei quali non sta sugli spigoli del prisma e corrispondono al ınto Ω' di Brocard.

In un prisma biarmonico, *fissata di posizione* la sez. ret. ABC, iste dunque un gruppo di 8 triangoli (4 simmetrici di altri 4 rietto al piano della s. r.), e noi riferiremo le ulteriori consideraɪni alla quaterna giacente da una stessa banda del piano della s. r. ıpetto alla quale, distingueremo la coppia di triangoli che ha tutti vertici sugli spigoli del prisma da quella per la quale ciascuno dei e triangoli che vi appartiene ha un vertice sulla perpendicolare piano della s. r. ABC condotta per Ω ed Ω'.

E precisamente denomineremo *triangoli prismatici principali* i angoli $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ entranti nella prima coppia e *triangoli pri-*

smatici secondari i triangoli $A_1^*B_1^*C_1^*$, $A_2^*B_2^*C_2^*$ entranti nella seconda coppia.

Il simbolo O(MN) indichi l'angolo di vertice O e i cui lati passino per M, N. Allora è

$$\begin{array}{ll} \Omega\,(AB) = \pi - \beta & \Omega' = (AB) = \pi - \alpha \\ \Omega\,(BC) = \pi - \gamma & \Omega' = (BC) = \pi - \beta \\ \Omega\,(CA) = \pi - \alpha & \Omega' = (CA) = \pi - \gamma. \end{array}$$

Scriviamo le formule [1]

$$\begin{array}{ll} \Omega A = b \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{sen} \omega & \Omega' = c \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{sen} \omega \\ \Omega B = c \operatorname{cosec} \beta \operatorname{sen} \omega & \Omega' = a \operatorname{cosec} \beta \operatorname{sen} \omega \\ \Omega C = a \operatorname{cosec} \gamma \operatorname{sen} \omega & \Omega' = b \operatorname{cosec} \gamma \operatorname{sen} \omega, \end{array} \qquad [x]$$

che ci serviranno nel calcolo dei segmenti caratteristici, talchè sarà

$$[\Omega] \begin{cases} AA_1 = b \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{sen} \omega \sqrt{\left[\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\omega)}\right]^2 - 1} \\ BB_1 = a \sqrt{\left[\dfrac{\cos(\gamma-\omega)}{\operatorname{sen}\gamma}\right]^2 - 1} \\ CC_1 = a \operatorname{cosec} \gamma \operatorname{sen} \omega \sqrt{\left[\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}\right]^2 - 1} \end{cases}$$

$$[\Omega'] \begin{cases} AA_2 = b \sqrt{\left[\dfrac{\cos(\gamma-\omega)}{\operatorname{sen}\gamma}\right]^2 - 1} \\ BB_2 = a \operatorname{cosec} \beta \operatorname{sen} \omega \sqrt{\left[\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}\right]^2 - 1} \\ CC_2 = b \operatorname{cosec} \gamma \operatorname{sen} \omega \sqrt{\left[\dfrac{\cos\beta}{\operatorname{sen}(\beta-\omega)}\right]^2 - 1} \end{cases}$$

e però i lati dei triangoli prismatici principali ci vengono dati dalle formule

$$\begin{array}{ll} A_1B_1^2 = c^2 + [AA_1 - BB_1]^2 & \\ B_1C_1^2 = a^2 + [BB_1 - CC_1]^2 & [XI] \\ C_1A_1^2 = b^2 + [CC_1 - AA]^2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} A_2B_2^2 = c^2 + [AA_2 - BB_2]^2 & \\ B_2C_2^2 = a^2 + [BB_2 - CC_2]^2 & [XII] \\ C_2C_2^2 = b^2 + [CC_2 - AA_2],^2 & \end{array}$$

dove, per i segmenti caratteristici in parentesi, s'intendano scritte le formule [Ω], [Ω'] che ne danno i valori in funzione degli elementi della s. r.

Dalle formule [Ω], [Ω'] si ricava poi:

$$\frac{AA_1}{CC_2} = \frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec}\gamma}, \qquad \frac{BB_1}{AA_2} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{CC_1}{BB_2} = \frac{\operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{cosec}\beta},$$

(1) Vedi V. G. Cavallaro, "Mem. sulla recente geometria del triangolo". *Rivista di Fisica, Matematica e Scienze Naturali*, a. XII, n. 143, 1911.

chè è

$$\frac{AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1}{AA_2 \,.\, BB_2 \,.\, CC_2} = \frac{a \operatorname{cosec} \alpha}{b \operatorname{cosec} \beta} = \frac{2R}{2R} = 1,$$

de

$$AA_1 \,.\, BB_1 \,.\, CC_1 = AA_2 \,.\, BB_2 \,.\, CC_2. \qquad [XIII]$$

Calcoliamo i valori dei segmenti che uniscono i punti di Bro-
rd Ω, Ω' della s. r. ai vertici dei corrispondenti triangoli prisma-
i principali:

$$\begin{aligned} \Omega A_1 &= b^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \omega \, [1 + \Theta] \\ \Omega B_1 &= c^2 \operatorname{cosec}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \omega + a^2 \Sigma \\ \Omega C_1 &= a^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \omega \, [1 + \Phi] \end{aligned} \qquad [XIV]$$

$$\begin{aligned} \Omega' A_2{}^2 &= c^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \operatorname{sen}^2 \omega + b^2 \Sigma \\ \Omega' B_2{}^2 &= a^2 \operatorname{cosec}^2 \beta \operatorname{sen}^2 \omega \, [1 + \Phi] \\ \Omega' C_2{}^2 &= b^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \omega \, [1 + \Theta] \end{aligned} \qquad [XV]$$

re Θ, Σ, Φ sono simboli rappresentativi delle espressioni sotto i
icali delle formule [Ω], ordinatamente.

In modo analogo si possono scrivere le formule che dànno le
tanze di Ω' dai vertici A_1, B_1, C_1 e le distanze di Ω dai vertici
, B_2, C_2. Questo non ha importanza pel seguito.

Le formule dei gruppi [XIV], [XV] son tali che

$$\Omega A_1 \,.\, \Omega B_1 \,.\, \Omega C_1 = \Omega' A_2 \,.\, \Omega' B_2 \,.\, \Omega' C_2. \qquad [XVI]$$

La coppia di triangoli prismatici principali, giacente
una medesima banda del piano della s. r. di un prisma
rmonico, è caratterizzata dunque dalle seguenti pro-
età che si possono, per analogia, riguardare come una
ensione al prisma di talune proprietà fondamentali re-
ive ai punti di Brocard di un triangolo piano.

a)
$$\begin{aligned} A_1(\Omega B) &= B_1(\Omega C) = C_1(\Omega A) = \omega \\ A_2(\Omega' C) &= B_2(\Omega' A) = C_2(\Omega' B) = \omega, \end{aligned}$$

*a i vertici di questi triangoli, sono i punti sugli spigoli del prisma
monico per i quali gli angoli che hanno i vertici in questi punti ed
i lati passino per gli estremi dei segmenti che si ottengono unendo
corrispondente punto di* Brocard *della* s. r. *ai vertici della* s. r.
sa, sono uguali all'angolo di Brocard ω *della* s. r. *menzionata.*

b) *In ciascuno dei triangoli prismatici principali, il prodotto delle
nze dei suoi vertici dai vertici omonimi della* s. r. *è costante.*

c) *Il prodotto delle distanze di uno dei punti di* Brocard *della* s. r.
vertici del corrispondente triangolo prismatico principale è costante
XVI).

Scriviamo ora le formule che si riferiscono ai triangoli prismatici secondari:

$$AA_1^* = b \operatorname{cosec}\alpha \operatorname{sen}\omega \sqrt{\left[\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\omega}\right]^2 - 1} = b \operatorname{cosec}\alpha \sqrt{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\omega}$$

$$BB_1^* = c \operatorname{cosec}\beta \operatorname{sen}\omega \sqrt{\left[\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\omega}\right]^2 - 1} = c \operatorname{cosec}\beta \sqrt{\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\omega} \quad [XVII]$$

$$\Omega C_1^* = a \operatorname{cosec}\gamma \operatorname{sen}\omega \sqrt{\left[\frac{\cos(\gamma-\omega)}{\operatorname{sen}\omega}\right]^2 - 1} = a \operatorname{cosec}\gamma \sqrt{\cos^2(\gamma-\omega) - \operatorname{sen}^2\omega}.$$

Analogamente:

$$\begin{aligned} AA_2^* &= c \operatorname{cosec}\alpha \sqrt{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\omega} \\ BB_2^* &= a \operatorname{cosec}\beta \sqrt{\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\omega} \\ \Omega' C_2^* &= b \operatorname{cosec}\gamma \sqrt{\cos^2(\gamma-\omega) - \operatorname{sen}^2\omega}. \end{aligned} \quad [XVIII]$$

I lati dei triangoli prismatici secondari son dati dalle formule

$$\begin{aligned} A_1^*B_1^{*2} &= c^2 + [AA_1^* - BB_1^*]^2 \\ B_1^*C_1^{*2} &= c^2 \operatorname{cosec}^2\beta \operatorname{sen}^2\omega + [BB_1^* - \Omega C_1^*]^2 \\ C_1A_1^{*2} &= b^2 \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{sen}^2\omega + [\Omega C_1^* - AA_1^*]^2 \end{aligned} \quad [XIX]$$

$$\begin{aligned} A_2B_2^{*2} &= c^2 + [AA_2^* - BB_2^*]^2 \\ B_2C_2^{*2} &= a^2 \operatorname{cosec}^2\beta \operatorname{sen}^2\omega + [BB_2^* - \Omega' C^*]^2 \\ C_2A_2^{*2} &= c^2 \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{sen}_2\omega + [\Omega' C_2^* - AA_2^*] \end{aligned} \quad [XX]$$

dove, al solito, ai simboli in parentesi si sostituiscano i valori [XVII, XVIII].

Dai gruppi [XVII], [XVIII] si ha poi:

$$\frac{AA_1^*}{AA_2^*} = \frac{b}{c}, \quad \frac{BB_1^*}{BB_2^*} = \frac{c}{a}, \quad \frac{\Omega C_1^*}{\Omega C_2^*} = \frac{a}{b}; \quad [XXI]$$

talchè

$$AA_1^* \,.\, BB_1^* \,.\, \Omega C_1^* = AA_2^* \,.\, BB_2^* \,.\, \Omega' C_2^*. \quad [XXII]$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{AA_1^*}{BB_1^*} &= \frac{b}{c}\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\omega}{\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\omega}}, \\ \frac{AA_2^*}{BA_2^*} &= \frac{c}{a}\,\frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}\sqrt{\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\omega}{\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\omega}}. \end{aligned} \quad [XXIII]$$

Le formule che dànno le distanze di uno dei punti di Brocard dai vertici del corrispondente triangolo prismatico secondario sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \Omega A_1^{*2} &= b^2 \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{sen}^2\omega\,[1 + X] \\ \Omega B_1^{*2} &= c^2 \operatorname{cosec}^2\beta \operatorname{sen}^2\omega\,[1 + Y] \\ \Omega C_1^{*2} &= a^2 \operatorname{cosec}^2\gamma \operatorname{sen}^2\omega \,.\, H \end{aligned} \quad [XXIV]$$

$$\begin{aligned} \Omega' A_2^{*2} &= c^2 \operatorname{cosec}^2\alpha \operatorname{sen}^2\omega\,[1 + X] \\ \Omega' B_2^{*2} &= a^2 \operatorname{cosec}^2\beta \operatorname{sen}^2\omega\,[1 + Y] \\ \Omega' C_2^{*2} &= b^2 \operatorname{cosec}^2\gamma \operatorname{sen}^2\omega \,.\, H \end{aligned} \quad [XXV]$$

avendo chiamato con X, Y, H le differenze sotto i radicali delle form. XVII, ordinariamente.

Da [XXIV], [XXV] segue

$$\frac{\Omega A_1^*}{\Omega' A_2^*} = \frac{b}{c}, \qquad \frac{\Omega C_1^*}{\Omega' B_2^*} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{\Omega C_1^*}{\Omega' C_2^*} = \frac{a}{b}, \qquad \text{[XXVI]}$$

talchè

$$\Omega A_1^* \,.\, \Omega B_1^* \,.\, \Omega C_1^* = \Omega' A_2^* \,.\, \Omega' C_2^* \,.\, \Omega' C_2^* . \qquad \text{[XXVII]}$$

La coppia dei triangoli prismatici secondari è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

a) *In ciascuno dei triangoli prismatici secondari è costante il prodotto delle distanze dei suoi vertici dai vertici omonimi della* s. r. *e dal punto di* Brocard *corrispondente.* (XXII.)

b) *Il prodotto delle distanze di uno dei punti di* Brocard *della* s. r. *dai vertici del corrispondente triangolo prismatico secondario è costante.* (XXVII.)

c) *Il rapporto dei lati della* s. r. *concorrenti nel vertice di uno degli angoli acuti è eguale al rapporto delle distanze dei vertici dei triangoli prismatici secondari giacenti sullo spigolo uscente da quel vertice dal vertice stesso ed uguale anche al rapporto delle distanze dei medesimi vertici dai corrispondenti punti di* Brocard *della* s. r. (XXI, XXVI.)

Coseni degli angoli caratteristici di rotazione. — Ai segmenti caratteristici:

$$AA_1, \quad BB_1, \quad CC_1; \qquad AA_2, \quad BB_2, \quad CC_2;$$

corrispondono rispettivamente gli angoli caratteristici

$$\xi_{1a}, \quad \xi_{1b}, \quad \xi_{1c}; \qquad \xi_{2a}, \quad \xi_{2b}, \quad \xi_{2c};$$

e noi, riferendoci alla [I], avremo:

$$\begin{array}{ll}
\cos\xi_{1a} = \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}(\beta-\omega) & \cos\xi_{2a} = \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}(\gamma-\omega) \\
\cos\xi_{1b} = \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}(\gamma-\omega) & \cos\xi_{2b} = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}(\alpha-\omega) \qquad \text{[XXVIII]} \\
\cos\xi_{1c} = \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}(\alpha-\omega) & \cos\xi_{2c} = \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}(\beta-\omega),
\end{array}$$

dalle quali:

$$\begin{array}{ll}
\cos\xi_{1c} = \cos\xi_{2b}, & \cos\xi_{1a} = \cos\xi_{2c}, \\
\cos\xi_{1a} = \cos\xi_{2b}, & \Sigma\cos\xi_1 = \Sigma\cos\xi_2, \qquad \text{[XXIX]}
\end{array}$$

$$\cos\xi_{1a}\cos\xi_{1b}\cos\xi_{1c} = \cos\xi_{2a}\cos\xi_{2b}\cos\xi_{1c} =$$
$$= \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\beta \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}(\alpha-\omega) \operatorname{tang}(\beta-\omega) \operatorname{tang}(\gamma-\omega). \qquad \text{[XXX]}$$

Similmente, ai segmenti caratteristici

$$AA_1^*, \quad BB_1^*, \quad \Omega C_1^*; \qquad AA_2^*, \quad BB_2^*, \quad \Omega C_2^*;$$

corrispondono gli angoli caratteristici

$$\xi_{1a}^*, \quad \xi_{1b}^*, \quad \xi_{1c}^*; \qquad \xi_{2a}^*, \quad \xi_{2b}^*, \quad \xi_{2c}^*,$$

pei quali è:

$$
\begin{array}{ll}
\cos \xi_{1a}^* = \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\omega & \cos \xi_{2a}^* = \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\omega \\
\cos \xi_{2b}^* = \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{tang}\,\omega & \cos \xi_{2b}^* = \mathrm{tang}\,\beta\,\mathrm{tang}\,\omega \qquad [\mathrm{XXXI}] \\
\cos \xi_{3c}^* = \mathrm{tang}\,(\gamma-\omega)\,\mathrm{tang}\,\omega & \cos \xi_{2c}^* = \mathrm{tang}(\gamma-\omega)\,\mathrm{tang}\,\omega,
\end{array}
$$

dalle quali:

$$\xi_{1a}^* = \xi_{2a}^*, \quad \xi_{1b}^* = \xi_{2b}^*, \quad \xi_{2c} = \xi_{2c}^*, \quad \Sigma \cos \xi_1^* = \Sigma \cos \xi_2^* \qquad [\mathrm{XXXII}]$$

$$\cos \xi_{1a}^* \,.\, \cos \xi_{1b}^* \cos \xi_{1c}^* = \cos \xi_{2a}^* \,.\, \cos \xi_{2b}^* \,.\, \cos \xi_{2c}^* =$$
$$= \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tanz}\,\beta\,\mathrm{tang}\,(\gamma - \omega)\,\mathrm{tang}^2\,\omega. \qquad [\mathrm{XXXIII}]$$

Questi angoli caratteristici *corrispondono* convenientemente ai triangoli prismatici.

Dalle [XXIX] si deduce che i triangoli

$$[C_1\Omega A,\ B_2\Omega' A], \qquad [A_1\Omega B,\ C_2\Omega' B], \qquad [B_1\Omega C,\ A_2\Omega' C]$$

soddisfano alla proprietà seguente: i vertici C_1, B_2 di quelli entranti nella prima parentesi girano di uno stesso angolo ξ_{1c} attorno ΩA, $\Omega' A$ per venire a coincidere col piano della s. r., ed analogamente dicasi per le due rimanenti coppie di triangoli. Insomma *il vertice* C_1, *per esempio, del triangolo prismatico principale* $A_1B_1C_1$ *ruoterà attorno alla retta* ΩA *dello stesso angolo di cui dovrà ruotare il vertice* B_2 *del triangolo prismatico principale* $A_2B_2C_2$ *attorno alla retta* $\Omega' A$ *perchè possa venire a coincidere col piano della* s. r., *ecc.*

Così dalle [XXXI] si deduce che *i vertici omonimi dei triangoli prismatici secondari giacenti sopra lo spigolo uscente da uno dei vertici della* s. r. *gireranno di uno stesso angolo attorno alle rette che, passando pei punti di* Brocard *della* s. r., *passino per gli estremi del lato opposto a quel vertice, perchè possano venire a coincidere col piano della* s. r. *Ed il coseno dell'angolo di rotazione è dato dal prodotto delle tangenti dell'angolo di* Brocard *e dell'angolo della* s. r. *corrispondente al vertice scelto.*

Dalla 3ª form. delle [XXXI] s'inferisce che *il vertice* C_1^* *che sta sulla perpendicolare* ΩC_1^* *al piano della* s. r. *girerà attorno* BC *dello stesso angolo di cui dovrà ruotare il vertice* C_2^*, *che sta sulla perpendicolare* $\Omega' C_2^*$ *al piano della* s. r., *attorno a* CA, *perchè possa venire a coincidere col piano della* s. r.

Le [XXX] dicono che *in ciascuno dei triangoli prismatici principali è costante il prodotto dei coseni della terna d'angoli caratteristici che vi corrisponde ed uguale al prodotto delle tangenti degli angoli della* s. r. *per il prodotto delle tangenti degli angoli che da questi si deducono togliendo l'angolo di* Brocard *della* s. r. *stessa.*

Le [XXXIII] dicono che *in ciascuno dei triangoli prismatici secondari è costante il prodotto dei coseni della terna d'angoli caratteristici che vi corrisponde.*

Indichiamo con

$$V_{a1},\quad V_{b1},\quad V_{c1};\qquad V_{a2},\quad V_{b2},\quad V_{c2}$$

i volumi dei tetraedri

$$A_1\,[A\Omega B],\qquad B_1\,[B\Omega C],\qquad C_1\,[C\Omega A];$$

$$B_2\,[A\Omega' C],\qquad B_2\,[B\Omega' A],\qquad C_2\,[C\Omega' B]$$

e con

$$V_{a1}^*,\quad V_{b1}^*,\quad V_{c1}^*;\qquad V_{a2}^*,\quad V_{b2}^*,\quad V_{c2}^*$$

i volumi dei tetraedri

$$A_1^*\,[A\Omega C],\qquad B_1^*\,[B\Omega A],\qquad C_1^*\,[C\Omega B];$$

$$A_2^*\,[A\Omega' B],\qquad B_2^*\,[B\Omega' C],\qquad C_2^*\,[C\Omega' A].$$

Facciamo uso, per il calcolo del volume, della formula

$$V = \frac{1}{3}\,\Delta\,h$$

dove Δ è l'area della base ed h l'altezza che vi corrisponde. Nel nostro caso calcoleremo l'area D facendo uso della formula del seno in base ai valori (x) ed h sarà in ogni formula del volume, rappresentato da un conveniente segmento caratteristico.

Scritte queste formule si deduce immediatamente:

$$V_{a1}\,.\,V_{b1}\,.\,V_{c1} = V_{a2}\,.\,V_{b2}\,.\,V_{c2}$$

$$V_{a1}^*\,.\,V_{b1}^*\,.\,V_{c1}^* = V_{a2}^*\,.\,V_{b2}^*\,.\,V_{c2}^*,$$

talchè:

In ciascuno dei triangoli prismatici principali (secondari) è costante il prodotto dei volumi della terna di tetraedri ortogonali armonici che vi corrisponde.

Intese bene le precedenti fondamentali considerazioni esse possono essere di base ad altre indagini geometriche o per estensione o stabilendo speciali vincoli tra i lati o tra le funzioni goniometriche degli angoli del triangolo fondamentale. Avremo in tal modo una feconda sorgente di ricerche.

V. G. CAVALLARO.

SOPRA DUE CUBICHE NOTEVOLI

nel piano di un triangolo

Dato un triangolo ABC e un punto P del suo piano, diremo *terna podaria* di P rispetto ad ABC quella formata dalle proiezioni ortogonali di P sui lati di ABC, e *terna ceviana* di P rispetto ad ABC quella formata dalle proiezioni di P dai vertici di ABC sui lati opposti. È facile verificare che per molti punti notevoli del piano del triangolo la terna podaria è terna ceviana di un altro punto, il quale gode evidentemente della proprietà inversa. Così hanno la prima proprietà i vertici, il circoncentro, l'ortocentro, i centri dei cerchi tangenti ai lati; la seconda i vertici, il baricentro, l'ortocentro, i punti di Gergonne; e molti altri ne fornisce uno studio più accurato. Guidato forse da queste osservazioni il sig. E. Piccioli proponeva nel 1905 in questo *Periodico* sotto il n. 696 (pag. 237) una questione, che col linguaggio ora adottato si può enunciare:

Trovare il luogo dei punti del piano di un triangolo la cui terna podaria rispetto al triangolo sia terna ceviana di un altro punto del piano; o viceversa.

Della questione non apparve mai sul *Periodico* alcuna risoluzione, nè pare che altri se ne sia occupato; pubblico quindi i risultati di una mia ricerca in proposito, che mi sembrano abbastanza eleganti per meritare di esser conosciuti. Tanto più che l'applicazione di qualche teorema di Geometria superiore alle due cubiche che costituiscono i luoghi cercati fornisce proprietà elementari di certi punti notevoli, difficili certo a ritrovare per altra via. (1)

1. Sia P un punto qualunque del piano di un triangolo ABC, XYZ la sua terna podaria; volendo le condizioni perchè essa sia terna ceviana di un altro punto del piano, possiamo ricorrere ad una facile considerazione analitica. Notiamo cioè che le coordinate proiettive dei punti X, Y, Z sono funzioni lineari intere di quelle di P; tali sono quindi quelle delle rette AX, BY, CZ; ed esprimendo allora la condizione che queste tre rette concorrano in un punto

(1) Debbo alla cortesia del prof. E. Piccioli alcune spiegazioni e suggerimenti sulla elegante questione che ha dato origine al presente articolo; tra gli altri, quello di estendere al tetraedro la ricerca e studiare i luoghi relativi che sono certo assai interessanti. Pur non essendomi potuto occupare di ciò, tengo a manifestargli i miei ringraziamenti.

ediante l'annullamento di un determinante di terzo ordine otteamo l'equazione di una cubica, luogo dei punti P dotati di questa 'oprietà. Preferiamo invece seguire una via geometrica, deterinando quanti punti del luogo stanno sopra una retta generica r el piano.

Per questo si consideri il punto $P' \equiv (BY, CZ)$; esso è in corriondenza biunivoca con P, evidentemente quadratica, perchè se P scrive una retta r, Y e Z descrivono due punteggiate proiettive, Y, CZ due fasci proiettivi non prospettivi, e infine P' una coca r' passante per B, C e per il simmetrico A_1 di A rispetto al nto medio di BC; e se viceversa P' descrive una retta s', P derive analogamente una conica passante per i punti all'infinito H'' H''' nelle direzioni perpendicolari ad AC e AB e per il punto A_0 nmetrico di A rispetto al circoncentro O di ABC. [1] Se allora P' si oietta da A in X' su BC, tra X e X' intercede una corrisponnza (1, 2), al variare di P su r; essa ha quindi tre coincidenze r le quali evidentemente XYZ è terna ceviana di P'. Il luogo 'cato ha dunque tre punti su ogni retta del piano ed è perciò a cubica γ.

Il luogo di P' è la curva trasformata di γ nella descritta corriondenza quadratica; e poichè γ passa, come subito si vede, per i nti fondamentali H'', H''', A_0 del suo piano, è noto che questa trarmata γ' è ancora una cubica, passante pure per i punti fondameni B, C, A_1, del suo piano.

Lasciamo al lettore di verificare che γ si scinde nel caso del triano isoscele in una retta e in una conica e nel caso del triangolo ilatero in tre rette; e che lo stesso avviene per γ'. [2]

2. La cubica γ. — Dalla definizione della cubica γ e da notissime 'prietà dei punti notevoli del triangolo segue subito che γ *passa i vertici* A, B, C, *per il circoncentro* O, *per l'ortocentro* H, *per l'in*tro I, *per gli excentri* I', I'', I'''. Inoltre la verifica diretta prova che *rovano su* γ *i punti all'infinito* H', H'', H''' *delle rette* AH, BH, CH, *simmetrici* A_0, B_0, C_0 *di* A, B, C *rispetto ad* O.

Segue allora che la cubica simmetrica di γ rispetto ad O ha con 1 a comune i dieci punti O, A, B, C, A_0, B_0, C_0, H', H'', H'''; essa ıcide dunque con γ. Ne segue:

La cubica γ è simmetrica rispetto al circoncentro O *e quindi* O *è γ un punto di inflessione.*

Alla stessa conclusione si giunge osservando che se si indica ericamente con P_0 il simmetrico di un punto P rispetto ad O,

---

[1] Si ottengono questi punti fissi di r' e di s specializzando convenientemente le posizioni su r e di P' su s'.

[2] Avendo voluto conservare le lettere usuali per denotare gli elementi notevoli del trianho dovuto sacrificare talvolta nel seguito la regolarità della notazione; non mi sembra che ossa portare molto pregiudizio alla chiarezza.

le terne podarie di P e P_0 sono *isotomiche*, e quindi se l'una è terna ceviana di un certo punto del piano, lo sarà anche l'altra. Di più:

A due punti di γ *simmetrici rispetto ad* O *corrispondono su* γ' *due punti isotomici, di modo che* γ' *è invariante per la trasformazione del piano per punti isotomici.*

Ritornando a γ osserviamo che la conica polare di O, che è un flesso, si scinde nella tangente a γ in O e in una retta, detta *polare armonica* di O, luogo dei coniugati armonici di O rispetto alle ulteriori intersezioni di γ con le rette per O. La provata simmetria dimostra che questa polare è la retta impropria del piano; e poichè essa taglia γ in H', H'' e H''', le tangenti alla cubica in questi punti passeranno per O. Concludendo:

Gli asintoti di γ *sono gli assi dei lati di* ABC *e quindi passano per* O.

Come si vede γ è una *iperbole cubica.*

3. Consideriamo la trasformazione detta *arguesiana* o *isogonale*; essa è una trasformazione quadratica involutoria che ha ABC per punti fondamentali, I, I', I'', I''' per elementi uniti. Per essa la cubica γ viene trasformata in una cubica passante ancora per A, B, C; e poichè γ passa per O, H, I, I', I'', I''', A_0, B_0, C_0, H', H'', H''', la sua isogonale passerà per i trasformati di questi punti, che essendo H, O, I, I', I'', I''', H', H'', H''', A_0, B_0, C_0 rispettivamente, coincidono in complesso con i punti stessi.

Le due cubiche avendo allora quindici punti in comune, coincidono (dieci, come si sa, sarebbero sufficienti). Sicchè:

La cubica γ *resta invariata per la trasformazione isogonale del piano.*

Volendo studiare più minutamente questo fatto si ricordi che per un classico teorema di Weyr-Segre [1] le corrispondenze biunivoche su una cubica generale si possono tutte ottenere mediante proiezione della cubica su se stessa da un suo punto o mediante prodotto di due tali proiezioni. Si distinguono le corrispondenze del primo tipo per avere quattro elementi uniti, mentre quelle del secondo non ne hanno affatto. Sicchè avendosi nel nostro caso i quattro elementi uniti I, I', I'', I''' si potrà assicurare che la corrispondenza è del primo tipo, e si otterrà cioè mediante proiezione della cubica da un punto di essa, che dovendo essere sulle rette OH, A_0H', B_0H'', C_0H''' che uniscono punti corrispondenti è evidentemente il simmetrico H_0 di H rispetto ad O.

Si può confermare il medesimo risultato in modo più elementare

(1) E. Weir, "Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curven dritter Ordnung", *Sitzungsb. der Kais. Ak. der Wiss. zu Wien*, B. 87. 1883. — G. Segre, "Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche", *Atti dell'Acc. di Scienze di Torino*, vol. 24, 1889.

ervando che in generale il luogo dei punti di un piano allineati i loro corrispondenti in una trasformazione quadratica del piano sè e con un punto fisso è una cubica; la dimostrazione è analoga uella del n. 1; applicando questo risultato alla trasformazione gonale e al punto H_0 si verifica che su questa cubica si trovano oliti 15 punti di γ, sicchè essa coincide con γ. Si può dire ndi:

La cubica γ *è il luogo delle coppie di punti del piano isogonali ri-to al triangolo* ABC *e allineati con* H_0.

In particolare:

Le tangenti a γ *in* I, I', I'', I''', *concorrono in* H.

4. Applichiamo queste proprietà a determinare la tangente a γ), che sembra difficile trovare per altra via. Si consideri perciò onica polare di H rispetto a γ; essa è tangente a γ in H e con-e poi i coniugati armonici di H rispetto alle ulteriori interse-i di γ con le rette condotte per H. In particolare, considerando ecanti HAH', HBH'', HCH''', HOH_0 si vedrà che questa conica φ sa per i simmetrici di H rispetto ad A, B, C e per un punto della a di Eulero HO, che subito si riconosce per il simmetrico G_0 del icentro G rispetto ad O. Per una omotetia di rapporto $\frac{1}{2}$ di tro H, φ si trasforma in una conica φ' tangente a γ in H e pas-se per A, B, C e per il punto medio di HG_0 cioè per G. A sua a φ' si trasforma per isogonalità in una retta tangente a γ), isogonale di H, e passante per il punto K isogonale di G. ique:

La tangente a γ *in* O *passa per il punto di Lemoine* K *di* ABC.

5. Posseggono notevoli proprietà i punti U, V, W che la cu-γ ha a comune con le rette BC, CA, AB, oltre i vertici A, B, C. esse alcune seguono anche dalle proprietà finora dimostrate; per osservando che A deve considerarsi come isogonale di U, poichè A corrispondono tutti i punti di BC, si vede che H_0U passa per A. hè:

La terna ceviana U, V, W *di* H_0 *giace su* γ.

È però più opportuno applicare in modo sistematico certe pro-tà di allineamento dei punti della cubica; e specialmente la se-nte: *Se due rette* r, r' *segano una cubica nei punti* ABC, A'B'C', *le iori intersezioni delle rette* AA', BB', CC' *con la cubica sono alli-*; la indicheremo nel seguito con α). Essa è un notissimo corol-dell'altra fondamentale: *Le cubiche che passano per otto punti del piano hanno tutte un nono punto a comune.*

l teorema α) applicato alle secanti BCU, HH'A dà subito che le UA, $H''B_0$ si segano sulla cubica, cioè che UA passa per H_0 a erma di quanto si è ora trovato per altra via.

nvece dalle terne BCU, H_0A_0H' si ricava che le rette UH', VH'' si segano sulla cubica; nello stesso punto segherà la cubica anche la WH''', sicchè può dirsi:

I punti UVW *sono le proiezioni ortogonali sui lati di* ABC *di un certo punto* Θ *di* γ.

Dalle terne BCU, IAI' si deduce che le rette UI', VI'' si incontrano sulla cubica in un punto Λ per cui passerà evidentemente anche WI'''. Potendosi poi vedere facilmente che I'_0I è perpendicolare a BC, applicando il teor. α) alle terne $\Theta O\Theta_0$, HI'_0I si troverà che per Λ passa anche Θ_0I. Sicchè:

Le rette UI', VI'', WI''', Θ_0I *si incontrano in un punto* Λ *della cubica.*

E si potrebbero ottenere anche altri risultati consimili. (¹)

6. Vogliamo ora determinare le tangenti a γ in alcuni dei punti notevoli di essa. Sappiamo già che le tangenti a γ in H', H'', H''' concorrono in O, e che quelle in I, I', I'', I''' concorrono in H_0; e conosciamo altresì la tangente in O che è la retta OK. Per determinare la tangente in A consideriamo le terne $UH'\Theta$, H_0HO; il teorema α) ci dà che la tangente a γ in A e la retta ΘO si incontrano su γ; sicchè la tangente in A passerà per Θ_0. Oltre le tangenti in B e C passa per Θ_0 anche la tangente in H_0, come risulta dalle terne $UH'\Theta$, AA_0O. Concludendo:

Le tangenti a γ *in* A, B, C, H_0 *passano per* Θ_0.

Poichè la retta $H_0\Theta_0$ incontra γ ulteriormente in H_0 si può anche asserire che:

Il punto Θ_0 *è l'isogonale di* H_0.

Infine l'applicazione del medesimo teorema α) alle terne $AA\Theta_0$, $H_0H_0\Theta_0$ porta a concludere che la tangente a γ in U e in Θ_0 si incontrano su γ. E lo stesso valendo per V e W, si avrà:

Le tangenti a γ *in* U, V, W, Θ_0 *si incontrano in uno stesso punto di* γ.

Questi risultati si prestano facilmente a verificare le note proprietà della cubica relative ai punti tangenziali, alle tangenti condotte da un punto di essa, ecc. (²)

7. La cubica γ. — Questa seconda cubica non offre così notevoli circostanze come la prima, pure merita che ne rileviamo alcune semplici proprietà.

Per definizione, tra i punti di γ e di γ' sussiste una corrispondenza biunivoca la quale può intendersi subordinata su esse da tre distinte corrispondenze quadratiche del piano. Da ciò segue una serie di proprietà, giacchè, ad esempio, a tre punti di γ posti in linea retta corrisponderanno su γ' tre punti posti in una conica con i punti fondamentali di ciascuna trasformazione quadratica (cioè B,

(¹) Chi volesse vedere come ai punti U, V, W si possa giungere per via elementare può esaminare la 134ª quistione a concorso da me proposta nel *Supplemento* di questo *Periodico*, di cui la risoluzione è apparsa nel fasc. VII di quest'anno.

(²) Per es. si verificherà che i punti diagonali del quadrangolo determinato da quattro punti che hanno, come I, I', I'', I''', il medesimo punto tangenziale, stanno sulla cubica; che i punti tangenziali di tre punti allineati sono pure allineati; e così via.

, A_1, oppure C, A, B_1; A, B, C_1). Ma non crediamo che esse possano
uscire di molto interesse.

Consideriamo invece i punti notevoli del triangolo situati su γ'. I
orrispondenti dei seguenti punti di γ:

$$A,\ B,\ C,\ H,\ H',\ H'',\ H''',\ I,\ I',\ I'',\ I''',\ \Theta,\ O$$

ono rispettivamente:

$$A,\ B,\ C,\ H,\ A_1,\ B_1,\ C_1,\ \Gamma,\ \Gamma',\ \Gamma'',\ \Gamma''',\ H_0,\ G;$$

uesti punti, tra i quali compariscono quelli del gruppo di Gergonne,
anno dunque su γ'. Siccome poi a punti di γ simmetrici rispetto
d O corrispondono punti di γ' isotomici rispetto ad ABC, segue che
i punti I_0, I'_0, I''_0, I'''_0 corrisponderanno i punti N, N', N'', N''', del
ruppo di Nagel; ad A_0, B_0, C_0 tre punti D', E', F' isotomici sui
ti dei piedi D, E, F delle altezze; ad H_0 l'isotomico H_1 di H, cioè
intersezione di AD', BE', CF'.

Notiamo poi che la corrispondenza dei punti isotomici su γ' si
ova nelle condizioni stesse di quella dei punti isogonali su γ, sicchè
nche essa sarà generata da una proiezione di γ' su se stessa, ese-
uita da un suo punto. Per vedere quale esso sia basta pensare alle
oppie AD', BE', CF'; il punto cercato è dunque H_1. Abbiamo così:

La cubica γ' è il luogo delle coppie di punti isotomici rispetto ad ABC
llineati con un punto fisso H_1, *isotomico dell'ortocentro.*

Come caso particolare, poichè i punti Γ, Γ', Γ'', Γ''' di Gergonne
ono isotomici dei punti N, N', N'', N''' di Nagel, mentre G, A_1, B_1, C_1
ono uniti nell'isotomia, si ha:

*Le rette che congiungono ogni punto di Gergonne con il corri-
ondente punto di Nagel, e le tangenti a γ' in* G, A_1, B_1, C_1 *con-
orrono in* H_1.

Siccome poi la retta H_1H deve tagliare ulteriormente γ' nell'iso-
mico di H_0, cioè in H_1, segue che la tangente a γ' in H_1 passa
er H. E poichè dalle terne di punti allineati di γ' BE'H_1, F'CH_1
er il teor. α) segue che le tangenti a γ' in H_1 e in A si incontrano
1 γ_1, segue subito:

Le tangenti a γ' in A, B, C, H_1 *si incontrano in* H (*su* γ').

8. Il procedimento ora seguito per la corrispondenza dei punti
otomici su γ' si può generalizzare; presa cioè su γ la corrispon-
enza biunivoca ottenuta per proiezione di γ su se stessa da un
io punto, e che ha, come si è detto, quattro elementi uniti, ad
sa corrisponde su γ' una corrispondenza dello stesso tipo, cioè
univoca con quattro elementi uniti; sicchè anche essa sarà gene-
ita da una proiezione di γ' su se stessa da un certo suo punto. (1)

(1) Evidentemente potremmo servirci utilmente anche della teoria delle *serie lineari*; si tratta
i infatti di g_2^1 sopra curve ellittiche.

In altre parole:

Ai punti di γ allineati con un suo punto fisso corrispondono punti di γ' allineati con un suo punto fisso.

Di questo principio possono farsi svariate applicazioni; scelgo quelle che mi sembrano più interessanti. Considerando che in H concorrono le congiungenti AH′, BH″, CH‴, e le tangenti a γ in I_0, I'_0, I''_0, I'''_0 si avrà che le rette AA_1, BB_1, CC_1 e le tangenti a γ' in N, N′, N″, N‴ concorreranno in un punto; esso è evidentemente G. Sicchè:

Le tangenti a γ' nei punti di Nagel concorrono in G.

Nello stesso modo poichè in H_0 concorrono la HO e le tangenti a γ in I, I′, I″, I‴, avremo che la HG e le tangenti a γ' in Γ, Γ′, Γ″, Γ‴ concorreranno in un punto di γ' che evidentemente è H_0. Dunque:

Le tangenti a γ' nei punti di Gergonne concorrono in H_0.

Avendosi infine le coppie OA_0, HH′, II′, I″I‴ allineate con A, le coppie corrispondenti GD′, HA_1, ΓΓ′, Γ″Γ‴ saranno allineate con un punto di γ'. Da ciò segue:

I punti diagonali del quadrangolo ΓΓ′Γ″Γ‴ *stanno su γ' e determinano un triangolo omologico a* D′E′F′ *rispetto al centro* G, *e al triangolo* $A_1B_1C_1$ *rispetto al centro* H.

Analogamente:

I punti diagonali del quadrangolo NN′N″N‴ *stanno su γ' e determinano un triangolo omologico ad* ABC *rispetto al centro* G *e al triangolo* $A_1B_1C_1$ *rispetto al centro* H_1. (1)

9. È facile trovare mediante un calcolo diretto le equazioni di γ e di γ' in coordinate trilineari o baricentriche cioè in coordinate proiettive aventi ABC per punti fondamentali e I o G per punto unità. Ma arriviamo più presto allo scopo esprimendo che un punto di γ (o di γ') e il suo isogonale (o isotomico) sono allineati con H_0 (o con H_1). Siano x, y, z le coordinate trilineari di un punto di γ; siano x_0, y_0, z_0 quelle di H_0: si avrà l'equazione:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0$$

cioè:

$$x_0 x (y^2 - z^2) + y_0 y (z^2 - x^2) + z_0 z (x^2 - y^2) = 0.$$

Un facile calcolo dà $x_0 = \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma$ ecc.

Analogamente, essendo ξ, η, ζ le coordinate baricentriche di un punto di γ', si trova l'equazione:

$$\xi_0 \xi (\eta^2 - \zeta^2) + \eta_0 \eta (\zeta^2 - \xi^2) + \zeta_0 \zeta (\xi^2 - \eta^2) = 0$$

---

(1) Il presente studio ci ha condotto a determinare *cinque* delle nove intersezioni di γ e γ'; esse sono A, B, C, H, H_0. Di queste, le prime quattro erano subito prevedibili; non così la quinta. Ciò costituisce una proprietà assai singolare del punto H_0.

ve ξ_0, η_0, ζ_0, coordinate di H_1, sono le reciproche di quelle di H, oè

$$\xi_0 = \operatorname{ctn} \alpha, \quad \eta_0 = \operatorname{ctn} \beta, \quad \zeta_0 = \operatorname{ctn} \gamma.$$

Le formule di passaggio da un sistema all'altro sono, come è noto:

$$\xi = ax \text{ ecc.} \qquad \text{oppure} \qquad \xi = x \operatorname{sen} \alpha, \text{ ecc. } ^{(1)}$$

G. Ascoli.

LE $n-2$ IPERSFERE RELATIVE ALL'n-EDRO ORTOCENTRICO DI S_{n-1}

§ 1. — Preliminari.

Nello spazio a quattro dimensioni S_4 fissiamo un sistema di assi tesiani ortogonali e rispetto a questo siano

$$\left.\begin{array}{llllllll} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \text{le coordinate di} & & & A_1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & " & " & " & A_5 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

(1) Tra i mezzi meno elementari che possono utilmente servire in questa o in simili ricerche o qui uno che mi è stato di grande giovamento: voglio dire la rappresentazione parametrica punti di una cubica mediante le funzioni ellittiche di Weierstrass pu, $p'u$. È noto che ad ogni to della cubica si può far corrispondere un valore di u, determinato a meno di multipli dei odi 2ω, $2\omega'$, in modo che, a meno di una trasformazione proiettiva le coordinate dei punti a cubica risultino $x = pu$, $y = p'u$. La condizione perchè tre punti siano allineati è in tal caso ra che la somma dei corrispondenti valori di u sia $\equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'}$. Indicando allora con ttera stessa che indica un punto della nostra cubica γ il valore corrispondente del parametro rova che si può scrivere:

$$O \equiv 0, \quad H' \equiv \omega, \quad H'' \equiv \omega', \quad H''' \equiv \omega + \omega';$$
$$I \equiv I, \quad I' \equiv I + \omega, \quad I'' \equiv I + \omega', \quad I''' \equiv I + \omega + \omega';$$
$$H_0 \equiv -2I, \quad A \equiv -2I + \omega, \quad B \equiv -2I + \omega', \quad C \equiv -2I + \omega + \omega';$$
$$\Theta_0 \equiv 4I, \quad U \equiv 4I + \omega, \quad V \equiv 4I + \omega', \quad W \equiv 4I + \omega + \omega';$$

generale

$$P + P_0 \equiv 0.$$

E analogamente sulla cubica γ':

$$G \equiv G, \quad A_1 \equiv G + \omega, \quad B_1 \equiv G + \omega', \quad C_2 \equiv G + \omega + \omega';$$
$$H_1 \equiv -2G, \quad A \equiv -2G \equiv \omega, \quad B \equiv -2G + \omega', \quad C \equiv -2G + \omega + \omega';$$
$$\Gamma \equiv \frac{5G}{2}, \quad \Gamma' \equiv \frac{5G}{2} + \omega, \quad \Gamma'' \equiv \frac{5G}{2} + \omega', \quad \Gamma''' \equiv \frac{5G}{2} + \omega + \omega;$$
$$N \equiv -\frac{G}{2}, \quad N' \equiv -\frac{G}{2} + \omega, \quad N'' \equiv -\frac{G}{2} + \omega', \quad N''' \equiv -\frac{G}{2} + \omega + \omega';$$
$$H \equiv 4G, \quad D' \equiv 4G + \omega, \quad E' \equiv 4G + \omega', \quad F' \equiv 4G + \omega + \omega';$$
$$H_0 \equiv -5G.$$

Queste formule possono servire di verifica delle proprietà trovate e come mezzo di ricerca uove proprietà.

Se un punto generico P_{1234} di S_4 di coordinate cartesiane $\xi_{1234 \cdot i}$ è proiettato sulle rette degli spigoli dagli S_3 che contengono gli elementi opposti in modo che sia

$$A_i P_{ik} : P_{ik} A_k = x_{ik} \qquad (i < k), \tag{2}$$

con la condizione che x_{ik} sia positivo o negativo a seconda che P_{ik} risulta interno o esterno allo spigolo $A_i A_k$, seguendo un procedimento del tutto analogo a quello esposto nel mio articolo, (1) si trova:

$$\xi_{1234 \cdot i} = \frac{a_{4i} x_{14} + a_{3i} x_{13} + a_{2i} x_{12} + a_{1i}}{x_{15} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1}. \tag{3}$$

I numeri x_{ik} sono le *coordinate baricentriche* di P_{1234}: esse non sono indipendenti ma soddisfano a *dieci* relazioni del tipo

$$x_{ik} = x_{il} \cdot x_{lk} \tag{4}$$

dove i, l, k sono tre dei numeri 1, 2, 3, 4, 5 disposti in ordine crescente.

I punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sono i *pinti fondamentali* del sistema baricentrico.

Le (3) ci dicono che l'equazione dell'iperpiano in coordinate baricentriche è:

$$M_{15} \cdot x_{15} + M_{14} \cdot x_{14} + M_{13} \cdot x_{13} + M_{12} \cdot x_{12} + M = 0. \tag{5}$$

L'equazione

$$x_{15} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1 = 0 \tag{6}$$

rappresenta l'iperpiano all'infinito.

L'equazione che si ottiene combinando linearmente le (5), (6) e ugualiando a zero, rappresenta un qualunque iperpiano parallelo all'iperpiano (5). Il parametro che comparisce in questa combinazione varia col variare dell'iperpiano del fascio e si può determinare in modo che l'iperpiano passi per un punto assegnato dello spazio.

Il sistema di *due* equazioni del tipo (5) rappresenta un *piano*, quello di *tre* una retta.

L'equazione di una superficie ipersferica si può porre sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned} &(A_5 x_{15} + A_4 x_{14} + A_3 x_{13} + A_2 x_{12} + A_1) \cdot (x_{15} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1) \\ &\quad = \sum_{2}^{5}{}_{ik}\, l_{ik}^2\, x_{1i}\, x_{1k} + \sum_{2}^{5}{}_{r}\, l_{1r}^2\, x_{1r} \qquad (i, k, r = 1, 2, 3, 4, 5). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

---

(1) " Le due sfere dei dodici punti pel tetraedro ortogonale ", *Periodico di Matematica*, A. XXX, fasc. IV, pag. 167.

'equazione

$$\sum_{2}^{5}{}_{ik}\, l_{1r}^2\, x_{1i}\, x_{1k} + \sum_{2}^{5}{}_{r}\, l_{1r}^2\, x_{1r} = 0 \tag{8}$$

resenta la ipersfera circoscritta al pentaedro in discorso.
ottraendo membro a membro le equazioni di due ipersfere si
ne quella di un'ipersfera del fascio; essa si spezza in due iper-
, uno che rappresenta l'iperpiano all'infinito l'altro l'*iperpiano*
ale delle due ipersfere. L'ipersfera (7) e l'ipersfera (8) hanno
perpiano radicale quello di equazione

$$A_5 x_{15} + A_4 x_{14} + A_3 x_{13} + A_{12} x_{12} + A_1 = 0. \tag{9}$$

§ 2. — La prima ipersfera dei venti punti.

rchiamo se possono i punti medi degli spigoli di un pentaedro
appartenere ad una ipersuperficie sferica: sono 10 condizioni
i vengono ad imporre e quindi il pentaedro sarà necessaria-
e un *particolare* pentaedro.
coefficienti A_i dell'equazione (7) dovranno soddisfare alle

$$\left.\begin{aligned} 2\,.(A_1 + A_2) &= l_{12}^2 \\ 2\,.(A_1 + A_3) &= l_{13}^2 \\ 2\,.(A_1 + A_4) &= l_{14}^2 \\ 2\,.(A_1 + A_5) &= l_{15}^2 \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

fetto del passaggio per i punti medi di A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5.
passaggio per i punti medi degli spigoli rimanenti porta alle
sei

$$\left.\begin{aligned} 2\,.(A_2 + A_3) &= l_{23}^2 \\ 2\,.(A_2 + A_4) &= l_{24}^2 \\ 2\,.(A_3 + A_4) &= l_{34}^2 \\ 2\,.(A_2 + A_5) &= l_{25}^2 \\ 2\,.(A_3 + A_5) &= l_{35}^2 \\ 2\,.(A_4 + A_5) &= l_{45}^2 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

queste 10 equazioni seguono le uguaglianze

$$\left.\begin{aligned} l_{12}^2 + l_{34}^2 = l_{13}^2 + l_{24}^2 = l_{14}^2 + l_{23}^2 &= q_5^2 \\ l_{12}^2 + l_{35}^2 = l_{13}^2 + l_{25}^2 = l_{15}^2 + l_{23}^2 &= q_4^2 \\ l_{12}^2 + l_{45}^2 = l_{14}^2 + l_{25}^2 = l_{15}^2 + l_{24}^2 &= q_3^2 \\ l_{24}^2 + l_{35}^2 = l_{23}^2 + l_{45}^2 = l_{25}^2 + l_{34}^2 &= q_1^2 \\ l_{13}^2 + l_{45}^2 = l_{14}^2 + l_{35}^2 = l_{15}^2 + l_{43}^2 &= q_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Queste ci dicono che i cinque tetraedri che costituiscono le facce del pentaedro in discorso sono *ortogonali*.

L'equazione della ipersfera di cui si tratta è facile scriverla una volta espressi i coefficienti per le l_{ik} che son dati dal gruppo:

$$A_i = \frac{1}{24} \cdot \{ 4\sigma_{ii}^2 - \sigma^2 \} \tag{13}$$

dove:

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{11}^2 = l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{14}^2 + l_{15}^2 \\ \sigma_{22}^2 = l_{21}^2 + l_{23}^2 + l_{24}^2 + l_{25}^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_{55}^2 = l_{51}^2 + l_{52}^2 + l_{53}^2 + l_{54}^2 \end{array}\right\} \tag{14}$$

e

$$\sigma^2 = \Sigma_{ik}\, l_{ik}^2. \tag{15}$$

Essa sarà:

$$\begin{aligned} \{ (4\sigma_{55}^2 - \sigma^2) \,.\, x_{15} + (4\sigma_{44}^2 - \sigma^2) \,.\, x_{14} + (4\sigma_{33}^2 - \sigma^2) \,.\, x_{13} + \\ + (4\sigma_{22}^2 - \sigma^2)\, x_{12} + (4\sigma_{11}^2 - \sigma^2) \} \,.\, (x_{15} + x_{14} + x_{13} + x_{12} + 1) = \\ = 24 \,.\, \{ \sum_{2}^{5}{}_{ik}\, l_{ik}^2\, x_{1i}\, x_{1k} + \sum_{2}^{5}{}_{r}\, l_{1r}^2\, x_{1r} \}. \end{aligned} \tag{16}$$

Seghiamo questa ipersfera coll'iperpiano di una faccia, per es. con quello della faccia $A_1A_2A_3A_4$: troveremo per sezione, come è naturale, la *prima sfera dei dodici punti* relativa al tetraedro ortogonale $A_1A_2A_3A_4$.

La (15) dunque contiene le prime sfere dei dodici punti relative alle facce e quindi i cerchi d'EULERO dei triangoli esistenti nel pentaedro. Ne consegue che apparterranno ad essa i piedi delle altezze dei dieci triangoli sopra ricordati, cioè altri *dieci* punti; in tutto 20 punti.

La chiameremo la *prima ipersfera dei venti punti*.

§ 3. — La seconda ipersfera dei venti punti.

Cerchiamo se possono i baricentri delle facce triangolari del pentaedro di S_4 appartenere ad una ipersfera.

Riprendiamo l'equazione (7) e scriviamo che la corrispondente ipersfera contiene il baricentro di $A_1A_2A_3$: troveremo la condizione:

$$3 \,.\, (A_1 + A_2 + A_3) = l_{12}^2 + l_{13}^2 + l_{23}^2 \tag{17}$$

e poi successivamente altre *nove* che con la (17) si possono comprendere nell'unica:

$$3 \,.\, (A_i + A_h + A_k) = l_{ih}^2 + l_{ik}^2 + l_{hk}^2. \tag{18}$$

Da queste si traggono nuovamente le (12) che ci dicono che i tetraedri facenti parte del pentaedro sono ortogonali.

Sommando le (18) membro a membro segue:

$$A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1 = \frac{\sigma^2}{6}. \tag{19}$$

Sommando poi membro a membro quelle delle (18) che contengono, per es., la sola A_1 troveremo:

$$9 . A_1 + 9 . (A_5 + A_4 + A_3 + A_2 + A_1) = 3 . \sigma_{11}^2 + \sigma_1^2. \tag{20}$$

Tenendo conto e della (19) e dell'altra:

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_1^2 = \sigma^2 \tag{21}$$

si ricava il valore:

$$A_1 = \frac{4 . \sigma_{11}^2 - \sigma^2}{18} \tag{22}$$

e in generale

$$A_i = \frac{4 . \sigma_{ii}^2 - \sigma^2}{18}. \tag{23}$$

È facile allora scrivere l'equazione della nostra ipersfera: essa è:

$$\left.\begin{aligned} &\{(4\sigma_{55}^2-\sigma^2)x_{15}+(4\sigma_{44}^2-\sigma^2)x_{14}+(4\sigma_{33}^2-\sigma^2)x_{13}+(4\sigma_{22}^2-\sigma^2)x_{12}+ \\ &\quad + (4\sigma_{11}^2-\sigma^2)\} . (x_{15}+x_{14}+x_{13}+x_{12}+1) = \\ &\qquad 18 . (\sum_2^5 l_{ik}^2 x_{1i} . x_{1k} + \sum_2^5 l_{1r}^2 . x_{1r}). \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Per trovare l'equazione della sezione della (24) con l'iperpiano di uno dei tetraedri facce, per es. con l'iperpiano $A_1A_2A_3A_4$, basta porre nella (24) stessa $x_{15} = 0$ e fare sparire a mezzo delle (12) ogni traccia delle l_{15}, l_{25}, l_{35}, l_{45}. Si trova così l'equazione della seconda sfera dei dodici punti relativa al tetraedro ortogonale $A_1A_2A_3A_4$.

Questa ipersfera contiene dunque le seconde sfere dei dodici punti relative ai tetraedri ortogonali che costituiscono le facce del pentaedro e quindi contiene i cerchi relativi ai triangoli del pentaedro che furono da noi studiati nel sopracitato articolo. Essa sarà detta seconda ipersfera dei 20 punti perchè contiene oltre che i baricentri, anche gli ortocentri di tutti i triangoli che fanno parte del pentaedro.

Si noti che le equazioni (16) e (24) differiscono solo per i coefficienti preposti al secondo membro: vedremo che un'osservazione analoga vale anche per la terza ipersfera dei venti punti che studiamo nel paragrafo successivo.

§ 4. — La terza ipersfera dei venti punti.

Continuando le nostre ricerche sul pentaedro riprendiamo l'equazione (7) e scriviamo che l'ipersfera corrispondente contiene i baricentri dei tetraedri del pentaedro $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Avremo *cinque* condizioni che servono a determinare i coefficienti medesimi.

Scrivendo che l'ipersfera passa per il baricentro di $A_1A_2A_3A_4$ veniamo ad imporre la condizione

$$4\,.(A_1+A_2+A_3+A_4)=l_{12}^2+l_{13}^2+l_{14}^2+l_{23}^2+l_{24}^2+l_{34}^2. \tag{25}$$

Ponendo

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1^2&=l_{23}^2+l_{24}^2+l_{25}^2+l_{34}^2+l_{35}^2+l_{55}^2=\sigma^2-\sigma_{11}^2\\
\sigma_2^2&=l_{13}^2+l_{14}^2+l_{15}^2+l_{34}^2+l_{35}^2+l_{45}^2=\sigma^2-\sigma_{22}^2\\
\sigma_3^2&=l_{12}^2+l_{14}^2+l_{15}^2+l_{24}^2+l_{25}^2+l_{45}^2=\sigma^2-\sigma_{33}^2\\
\sigma_4^2&=l_{12}^2+l_{13}^2+l_{15}^2+l_{23}^2+l_{25}^2+l_{35}^2=\sigma^2-\sigma_{44}^2\\
\sigma_5^2&=l_{12}^2+l_{13}^2+l_{14}^2+l_{23}^2+l_{24}^2+l_{34}^2=\sigma^2-\sigma_{55}^2
\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

la (25) e analoghe si possono scrivere

$$\left.\begin{aligned}
4(A_1+A_2+A_3+A_4)&=\sigma_5^2\\
4(A_1+A_2+A_3+A_5)&=\sigma_4^2\\
4(A_1+A_2+A_4+A_5)&=\sigma_3^2\\
4(A_1+A_3+A_4+A_5)&=\sigma_2^2\\
4(A_2+A_3+A_4+A_5)&+\sigma_1^2
\end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Sommando queste membro a membro si trova

$$16\,.(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)=3\,.\,\sigma^2. \tag{28}$$

D'altra parte, sommando fra le (17) quelle che contengono, per esempio, la A_4, si trova

$$4A_4+12\,.(A_1+A_2+A_3+A_4+A_5)=\sigma_{44}^2+2\sigma^2. \tag{29}$$

Da questa e dalla (28) segue

$$A_4=\frac{4\sigma_{44}^2-\sigma^2}{16} \tag{30}$$

e in generale

$$A_i=\frac{4\sigma_{ii}^2-\sigma^2}{16}. \tag{31}$$

L'equazione di questa ipersfera è dunque:

$$\left.\begin{aligned}
\{(4\sigma_{55}^2-\sigma^2)\,.\,x_{15}+.\,(4\sigma_{44}^2-\sigma^2)\,.\,x_{14}+(4\sigma_{33}^2-\sigma^2)x_{13}+(4\sigma_{22}^2-\sigma^2)x_{12}+\\
+(4\sigma_{11}^2-\sigma_2)\}\,.\,(x_{15}+x_{14}+x_{13}+x_{12}+1)\\
=16\,.\,\{\sum_2^5{}_{hk}\,l_{hk}^2\,x_{1h}\,x_{1k}+\sum_2^5{}_r\,l_{1r}^2\,x_{1r}\}\,.
\end{aligned}\right\}. \tag{32}$$

Il pentaedro a cui ci siamo riferiti qui è un pentaedro generico, s'intendono cioè soddisfatte le condizioni (12) come per la prima econda ipersfera dei 20 punti. Se si suppone che le (12) siano ificate, l'ipersfera (32) conterrà anche gli ortocentri dei tetraedri e del pentaedro. Al cortese lettore lasciamo la verifica di questa prietà; egli potrà inoltre riconoscere che le (12) stesse esprimono ondizioni necessarie e sufficienti perchè le altezze del pentaedro corrano in un punto H, ortocentro del pentaedro, e che i punti esse sono incontrate da questa ipersfera dividono i segmenti ipresi tra i vertici e l'ortocentro H nel rapporto di 3 a 1.

Questa ipersfera passa per altri cinque punti situati sulle mee e facilmente determinabili: in tutto 20 punti. E questo giuca la denominazione di terza ipersfera dei venti punti data a sta ipersfera relativa al pentaedro ortocentrico.

Osservazione I. — Sarebbe interessante studiare un po' più da no l'ipersfera di equazione (32) per un pentaedro qualunque.

Osservazione II. — La conformazione delle equazioni (16), (24), ci mostra che l'ipersfera circoscritta e le tre ipersfere dei venti ti relative al pentaedro ortocentrico hanno il medesimo iperio radicale la cui equazione si ottiene eguagliando a zero il primo ore del primo membro di ciascuna delle (16), (24), (32).

§ 5. — Estensione dei precedenti resultati all'n-edro ortocentrico di S_{n-1}.

Occupiamoci in questo paragrafo della ricerca delle equazioni $n-2$ ipersfere, $n-3$ delle quali riguardano l'n-edro ortocen- di S_{n-1}, l'ultima si riferisce a un n-edro generico. Sviluppe- i calcoli per la prima e per la seconda ipersfera e questo ci volerà la ricerca nel caso generale.

È subito visto che l'equazione di una ipersuperficie sferica di S_{n-1} seguente:

$$\ldots x_{1\cdot n} + A_{n-1} \cdot x_{1,n-1} + A_{n-2} \cdot x_{1\cdot n-2} + \ldots$$
$$\ldots + A_2 x_{12} + A_1) \cdot (x_{1n} + x_{1\cdot n-1} + \ldots + 1)$$
$$= \sum_2^n{}_{hk} l_{hk}^2 \cdot x_{1h} \cdot x_{1k} + \sum_3^n{}_r l_{1r}^2 x_{1r} . \qquad (33)$$

e scriviamo che essa ipersfera contiene i punti medi degli spi- i coefficienti A_i verranno ad esser legati da un sistema di equazioni della forma

$$2 \cdot (A_i + A_k) = l_{ik}^2 . \qquad (34)$$

Nei primi membri di queste equazioni A_i figura $2 . (n-1)$ volte, per cui se sommiamo le (34) membro a membro e poniamo

$$\sigma^2 = \Sigma\, l_{ik}^2, \tag{35}$$

troveremo

$$2 . (n-1) . \Sigma A_i = \sigma^2 . \tag{36}$$

Consideriamo ora fra le (34) quelle che contengono una determinata A, per es., la A_i: sono in numero di $n-1$. Se le sommiamo membro a membro otteniamo una relazione che potremo manifestamente scrivere

$$2 . (n-2) . A_i + 2 . \Sigma A_l = \sigma_{ii}^2 \tag{37}$$

dove σ_{ii}^2 rappresenta la somma dei quadrati di tutte le l che hanno un indice uguale a i.

Moltiplicando ambo i membri della (37) per $n-1$ e facendo ricorso alla (36) si trova

$$A_i = \frac{(n-1)\,\sigma_{ii}^2 - \sigma^2}{2 . (n-1) . (n-2)} . \tag{38}$$

L'n-edro a cui ci riferiamo non è generico giacchè se n, come possiamo supporre, è maggiore di 3, le equazioni sono in numero superiore a quello delle incognite.

Si trova facilmente che tutti i tetraedri dell'n-edro in discorso sono ortogonali, che cioè l'n-edro è ortocentrico: le sue altezze concorrono in un punto H, ortocentro dell'n-edro.

Questa *prima* ipersfera contiene i cerchi d'EULERO di tutti i triangoli dell'n-edro.

Passiamo alla *seconda* ipersfera e per questo scriviamo le condizioni che debbono esser soddisfatte dai coefficienti, perchè essa contenga i baricentri delle facce triangolari: troveremo $\binom{n}{3}$ equazioni della forma

$$3 . (A_i + A_h + A_k) = l_{ih}^2 + l_{ik}^2 + l_{hk}^2 . \tag{39}$$

Nei primi membri di queste equazioni la A_i figura $3 . \binom{n-1}{2}$ volte e ciascuna l_{ik} figura nei secondi membri $n-2$ volte, per cui se sommiamo le $\binom{n}{3}$ equazioni membro a membro troveremo:

$$3 . \binom{n-1}{2} . \Sigma A_p = (n-2) . \sigma^2$$

ovvero:

$$3 . (n-1) . \Sigma A_p = 2 . \sigma^2 . \tag{40}$$

Consideriamo ora fra le (39) quelle che contengono la sola A_i: sono tante quante le combinazioni 2 a 2 di $n-1$ elementi. In queste

A_i figura $3.(n-1)$ volte e ogni altra A con indice differente da i ura $3.(n-2)$ volte, per cui sommando i primi membri si trova

$$3.\left\{\binom{n-1}{2}-(n-2)\right\}.A_i+3(n-2).\Sigma A_p;$$

nmando i secondi membri, troveremo:

$$(n-3).\sigma_{ii}^2+\sigma^2$$

vremo così l'eguaglianza

$$\binom{n-1}{2}-(n-2)\Big\}.A_i+3.(n-2).\Sigma A_p=(n-3)\,\sigma_{ii}^2+\sigma^2 \quad (41)$$

e σ_{ii}^2 indica, come si disse sopra, la somma dei quadrati delle l_{ik} cui indice è i.

La (41) può scriversi anche:

$$\frac{3(n-2)(n-1)}{2}A_i+3.(n-2).\Sigma A_p=(n-3)\,\sigma_{ii}^2+\sigma^2. \quad (42)$$

Eliminando ΣA_p fra la (40) e la (42) si trova:

$$A_i=\frac{(n-1)\,\sigma_{ii}^2-\sigma^2}{\frac{3\cdot(n-1).(n-2)}{2}}. \quad (43)$$

inche qui l'n-edro non è generico: si vede subito che esso deve re ortocentrico.

'ossiamo dopo ciò passare a studiare la p-esima ipersfera cioè la che contiene i baricentri delle facce a p dimensioni. Le equa- di condizione sono in numero di $\binom{n}{p+1}$ e hanno la forma

$$(p+1).\{A_i+A_h\ldots A_k\}=l_{ih}^2+l_{ik}^2+\ldots+l_{hk}^2 \quad (44)$$

le A dentro la graffa sono in numero di $p+1$ e le l del se- o membro sono $\frac{p(p+1)}{2}$.

p è minore di $n-2$, le equazioni sono più delle incognite nostro n-edro è ortocentrico, mentre se $p=n-2$, l'n-edro è ico, a meno che non mettiamo noi stessi altra condizione.

ei primi membri delle (44) la A_i figura $(p+1).\binom{n-1}{p}$ volte scuna l figura nei secondi membri $\binom{n-2}{p-1}$ volte per cui som- o queste equazioni membro a membro troveremo:

$$(p+1).\binom{n-1}{p}.\Sigma A_r=\binom{n-2}{p-1}.\sigma^2$$

ovvero

$$(p+1).(n-1).\Sigma A_r = p.\sigma^2. \tag{45}$$

Consideriamo ora fra le (44) quelle che contengono la sola A_i: esse sono $\binom{n-1}{p}$. Nei primi membri di queste la A_i figura

$$(p+1).\binom{n-1}{p} \text{ volte,}$$

mentre ogni altra A vi figura

$$(p+1).\binom{n-2}{p-1} \text{ volte.}$$

Sommando i primi membri troviamo

$$(p+1).\left\{\binom{n-1}{p}-\binom{n-2}{p-1}\right\}.A_i+(p+1).\binom{n-2}{p-1}.\Sigma A_r,$$

e sommando i secondi membri

$$\binom{n-2}{p-1}\sigma_{ii}^2+\binom{n-3}{p-2}.\sigma_i^2,$$

ovvero per la formula

$$\binom{n-2}{p-1}=\frac{n-2}{p-1}.\binom{n-3}{p-2} \tag{46}$$

tenendo presente la:

$$\sigma_i^2+\sigma_{ii}^2=\sigma^2, \tag{47}$$

la:

$$\binom{n-3}{p-2}\left\{\frac{n-p-1}{p-1}\sigma_{ii}^2+\sigma^2\right\}. \tag{48}$$

Si perviene così alla relazione

$$\left.\begin{aligned}(p+1)\left\{\binom{n-1}{p}-\binom{n-2}{p-1}\right\}.A_i+(p+1).\binom{n-2}{p-1}.\Sigma A_r\\ =\binom{n-3}{p-2}.\left\{\frac{n-p-1}{p-1}\sigma_{ii}^2+\sigma^2\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Ora

$$\binom{n-1}{p}=\frac{n-1}{p}.\binom{n-2}{p-1}$$

per la (46), per cui la (49) diventa

$$\left.\begin{aligned}(p+1).\binom{n-2}{p-1}.\left\{\left(\frac{n-1}{p}-1\right).A_i+\Sigma A_r\right\}\\ =\binom{n-3}{p-2}.\left\{\frac{n-p-1}{p-1}\sigma_{ii}^2+\sigma^2\right\}.\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Questa formula per la (46) si trasforma in

$$(p+1)\cdot\frac{n-2}{p-1}\cdot\left\{\frac{n-p-1}{p}\,A_i + \Sigma\, A_r\right\} = \frac{n-p-1}{p-1}\,\sigma_{ii}^2 + \sigma^2$$

vvero in

$$\frac{p+1).(n-p-1)}{p}\,A_i + (p+1)\,.\,\Sigma\, A_r = \frac{\frac{n-p-1}{p-1}\,\sigma_{ii}^2 + \sigma^2}{\frac{n-2}{p-1}}\,. \quad (51)$$

Moltiplicando ambo i membri per $(n-1)$ e tenendo presente (45):

$$\frac{(n-1)\,.\,(p+1)\,(n-p-1)}{p}\,.\,A_i + p\sigma^2 = \frac{\frac{n-p-1}{p-1}\,\sigma_{ii}^2 + \sigma^2}{\frac{n-2}{p-1}}\,. \quad (52)$$

Da questa, con leggieri calcoli, segue

$$A_i = \frac{(n-1)\,.\,\sigma_{ii}^2 - \sigma^2}{\frac{(p+1)\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)}{p}}\,. \quad (53)$$

Si giunge così alla conclusione

"I baricentri delle facce a p dimensioni di un n-edro ortocen-co di S_{n-1} giacciono sopra un'ipersfera la cui equazione in coor-ate baricentriche è

$$\left.\begin{aligned} &A'_r\, x_{1r} + A_1)\,(x_{1n} + x_{1\cdot n-1} + \ldots + 1) = \\ &\qquad \frac{(p+1)\,(n-1)\,(n-2)}{p}\cdot\left\{\sum_2^n{}_{hk}\, l_{hk}^2\, x_{1h}\,.\,x_{1k} + \sum_2^n{}_r\, l_{1r}^2\, x_{1r}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (54)$$

'e per A'_r va posta l'espressione

$$(n-1)\,\sigma_{1r}^2 - \sigma^2\,. \quad (55)$$

Se $p = n-2$, l'n-edro non è di necessità ortocentrico: se lo è, ersfera corrispondente contiene gli ortocentri delle facce e altri ti facilmente determinabili, fra i quali quelli che dividono i seg-iti compresi fra i vertici e l'ortocentro nel rapporto di $n-2$ a 1. È così provata per l'n-edro ortocentrico di S_{n-1} l'esistenza di 2 ipersfere. La (53) dà le potenze dei vertici rispetto a queste sfere: tutte queste hanno due a due — compresa l'ipersfera cir-ritta all'n-edro — il medesimo iperpiano radicale, di equazione

$$\sum_2^n{}_i\,\{(n-1)\,.\,\sigma_{1i}^2 - \sigma^2\}\,x_{1i} + A_1 = 0\,. \quad (56)$$

Si aggiunge da ultimo che:

" Dato un numero razionale e positivo k, se l'equazione

$$(x+1)\,.\,(y-1)\,.\,(y-2)=k\,.\,x \qquad (57)$$

ammette una soluzione

$$x=p, \qquad y=n, \qquad (p,\ n \text{ interi e positivi})$$

esiste un n-edro ortocentrico di S_{n-1} e tale che i baricentri dei $(p+1)$-edri del pentaedro sono sopra una ipersfera di equazione:

$$\left.\begin{aligned}&[A_1+\sum_2^n{}_l\{(n-1)\,\sigma_{ll}^3]\,.\,(x_{1,n}+x_{1,n-1}+\ldots+1)\\&\qquad\qquad=k\,.\,\{\sum_2^n{}_{hs}\, l_{hs}^2\, x_{1h}\,.\,x_{1s}+\sum_2^n{}_r\, l_{1r}^2\, x_{1r}\}\ ".\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

E. Piccioli.

SUL CONCETTO ARITMETICO-FILOSOFICO DI EGUAGLIANZA E DI RIPETIZIONE

I.

1. La parola *eguaglianza* non ha, assolutamente parlando, alcun significato; il suo significato le viene da una convenzione, spesso tacita, riguardante le note che si possono trascurare nel paragone di due oggetti. Ordinariamente, quando si dice che *due oggetti sono eguali*, si intende dire che essi differiscono fra loro soltanto per la loro posizione nello spazio o nel tempo, o per l'uno e per l'altro simultaneamente; il significato di eguaglianza è, dunque, *variabile* a seconda della convenzione che si adotta, come può del pari essere variabile il campo degli oggetti ai quali s'intende applicato.

Nella tecnica matematica (o meglio: algebrico-aritmetica), il campo degli oggetti è costituito dalle cosiddette *formole* le quali, benchè di aspetto differentissimo, si definiscono *eguali* fra loro tutte le volte che rappresentino lo stesso numero. La formola conserva, dunque, il suo significato se si scriva (o si pensi), durante uno stesso calcolo, in posizioni differenti di spazio o di tempo o le si sostituisca un'altra la quale rappresenti operazioni differenti dalle primitive, conducenti però allo stesso risultato. Così, ad es., una stessa lettera a rimane eguale a sè stessa, cioè rappresenta sempre lo stesso numero, quand'anche, durante il calcolo, venga scritta più volte in diversi punti del foglio (il che porta seco diversità di luogo e di tempo, pur non tenendo conto della diversità dell'inchiostro, ecc.); così pure (per lasciar questo esempio troppo triviale e venire ad un altro che meglio mostri l'importanza della nozione di eguaglianza matematica) si dice che il simbolo $(a^2+2ab+b^2)$ è eguale al simbolo $(a+b)^2$ perchè (le lettere a, b del primo, sottintendonsi avere, come testè si è notato, lo stesso senso numerico in entrambe le formole) le operazioni rappresentate dal primo simbolo danno risultato identico a quello dato dalle operazioni rappresentate dal secondo.

Perciò si ha:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2.$$

La tecnica analitica non ha, in fondo, altro scopo che quello di indicar la via per dedurre da certe eguaglianze date (che bene spesso si pongono ipoteticamente) tutte le altre possibili eguaglianze.

Per lo più, nelle eguaglianze che si ricercano, si impongono *a priori* certe condizioni che determinano, piu o meno completamente, il problema da risolversi; così, ad es., ammesso ipoteticamente che i due numeri x e y soddisfino alle eguaglianze:

$$ax^2+by^2=1 \qquad ax^2+bxy+cy^2=d$$

si potrà ricercare un'eguaglianza della forma

$$x=f(y,\ a,\ b,\ c,\ d)$$

cioè un'eguaglianza il cui primo membro sia x ed il cui secondo membro non contenga x, ma soltanto gli altri simboli a, b, c, d, y. Sarebbe questo un caso semplice dei cosiddetti problemi di *eliminazione*.

2. Tornando al caso generale, cioè a tutti gli oggetti del nostro mondo intellettuale, notiamo che quella convenzione, o quell'insieme di convenzioni, mediante le quali certi oggetti vengon dichiarati uguali porta nella Scienza il nome di *definizione*. Così, ad es.: definire il *vegetale* significa stabilire chiaramente quali sono le note essenziali che debbono essere possedute da un oggetto affinchè possa esser detto *vegetale*; ne seguirà che certi oggetti: *rosa* e *foglia* dovran dichiararsi eguali fra loro, secondo questa definizione, mentre potranno non esserlo secondo un'altra (per es., secondo la definizione di *fiore*, che si otterrà aggiungendo a quelle di vegetale altre note specificanti il fiore).

È chiaro che la *definizione* dà origine ad un'aggregazione (genere, specie, ecc.) giacchè, per es.: tutti gli oggetti che hanno la qualità di vegetali verranno, per ciò stesso, a considerarsi come aggregati fra loro e separati da tutti gli altri oggetti, dando così origine all'aggregato dei vegetali.

Come si vede, l'operazione combinatoria di *definizione* ha una stretta affinità con quella di *astrazione*; infatti la definizione succede ordinariamente all'astrazione e si può forse dire che essa altro non fa che prendere atto dell'aggregato che ha dato origine all'astrazione, caratterizzandolo ed estendendolo al tempo stesso colla descrizione precisa della *nota astratta* comune a tutti gli elementi dell'aggregato. Così, per es., dopo aver esaminato un aggregato $\overline{A}$ di certe qualità di fiori ed aver riconosciuto che essi hanno in comune certe note a, b il cui insieme ci dà la nota caratteristica astratta α comune a tutti, si potrà definire come fiore ogni oggetto nel quale si riscontri la nota α; all'astrazione segue così la definizione: ma mentre l'astrazione non verrà originata che da soli certi oggetti, l'aggregato di questi oggetti si potrà estendere indefinitamente, dopo l'operazione di definizione, includendovi anche altri nuovi oggetti nei quali si riscontri la nota caratteristica α. Esso non sarà più altro che una parte dell'aggregato più numeroso rappresentato dalla parola: *fiori*.

II.

3. La nozione di *ripetizione* si può considerare come contenuta, quale caso particolare, in quello di eguaglianza. Se un certo ente A viene composto con delle note speciali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, dandosi così origine ai nuovi enti $A_1, A_2, \ldots A_n$, si usa spesso di dire che gli oggetti $A_1, A_2, \ldots$ altro non sono che l'oggetto A ripetuto, quando le note $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ sono, per se stesse, di poca importanza nella questione che interessa. Ordinariamente queste note sono note di spazio e di tempo; cosicchè in linea ordinaria *ripetere un ente* significa trasportarlo (materialmente o moralmente) in un'altra posizione di spazio o di tempo; cioè, più rigorosamente parlando, comporlo con certi punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ dello spazio o con certi istanti $\beta_1, \beta_2 \ldots$ del tempo.

Abbiamo detto che la ripetizione è un caso particolare dell'eguaglianza; ciò può esser chiarito maggiormente. Se noi dicessimo semplicemente che gli oggetti $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono eguali fra loro, verremmo ad affermare trovarsi nella composizione di essi una nota comune a tutti, la quale potrebbe, però, non essere (anzi, in generale, non è) alcuno degli stessi oggetti $A_1, A_2, \ldots A_n$. Quando, invece, diciamo che gli oggetti $A_1, A_2, \ldots A_n$ sono una ripetizione di A non soltanto veniamo ad affermare che, sotto un certo punto di vista, gli oggetti $A_1, A_2, \ldots A_n$ son fra loro uguali, ma altresì che la nota comune ad essi (alla quale è dovuta la loro eguaglianza) è uno di questi oggetti, e precisamente l'oggetto A; quello che si dirà esser ripetuto.

Così, ad es., se, in un calcolo matematico, dopo aver dato il si-
ficato di una certa lettera a, si presenta, dopo qualche tempo, la
ssa lettera a, una o più volte, diremo che la lettera a si trova
etuta nel corso del calcolo una o più volte; se invece si presenti
guaglianza:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

non diremo certamente che il secondo membro è una ripeti-
ne del primo, giacchè la nota comune ai due membri che dà ori-
e all'eguaglianza, cioè il valore del numero da essi rappresentato,
ci dà per se stessa il contenuto di uno dei due membri, in cia-
no dei quali, invece, quella nota comune si trova composta con
e differenti. corrispondenti alla diversa *forma* dei due membri.
Concludiamo: *nella ripetizione è implicita l'eguaglianza*; ma la re-
oca non è vera, poichè *può esservi eguaglianza senza che vi sia
tizione.*

4. Il fenomeno della ripetizione si presenta continuamente nel-
rcizio della memoria; l'oggetto richiamato alla mente non diffe-
e da quello che si era formato nella mente, per la prima volta,
tto della percezione, se non in quanto vien composto con una
va *nota di tempo*, talora, per di più, anche con una nuova nota
pazio e con altre note secondarie le quali non hanno importanza
ria, ma solo per aver servito a richiamarlo alla mente; queste
ne potrebbero chiamarsi *note associative*. L'oggetto od ente *ricor-*
una o più volte si presenta, insomma, come un oggetto o nota
uta una o più volte, secondo la nozione di ripetizione da noi
lata.

. Dall'avere il fenomeno della ripetizione tanta importanza nello
gimento intellettuale umano, si può già prevedere che esso debba
e un riflesso tutto speciale nelle forme grammaticali, principale
nento di questo svolgimento. Ed infatti alla distinzione fra ente
o ed ente ripetuto corrisponde, in ogni grammatica, la distin-
fra singolare e plurale, che è, come tutti sanno, d'importanza
mentale in tutte le lingue.

Notiamo, per ultimo, che il concetto specifico di ripetizione si
nta nelle matematiche, oltrechè nei casi triviali sopra menzio-
anche in certe speciali teorie nelle quali esso ha somma im-
nza. Sono da ricordarsi, in primo luogo, quelle questioni di
si combinatoria che studiano quei raggruppamenti nei quali
stesso oggetto può essere ripetuto un numero limitato od illi-
o di volte; si parla, infatti, per es., delle combinazioni con ri-
one di m oggetti, n ad n.

nche le quistioni di partizione di numeri implicano spesso la
ne di ripetizione; tali questioni, del resto, hanno il loro fon-
nto più o meno immediato nell'analisi combinatoria.

III.

7. Torniamo sul concetto di eguaglianza per esaminare se, e fino a qual punto, sia in esso contenuto il principio che *due cose eguali ad una terza sono eguali fra loro.* Abbiamo già detto che due cose A e B si dicono eguali, *secondo un certo ordine di idee*, quando non differiscono che per note trascurabili, secondo il detto ordine di idee; ciò va chiarito maggiormente: vediamo che cosa, cioè, s'intenda precisamente di dire quando si afferma che A e B differiscono solo per certe note $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ che si ritengono trascurabili.

Il concetto si può precisare così: che, cioè, A e B si deducono componendo, *mediante certe speciali leggi di composizione ben determinate*: $Z_1, Z_2, \ldots$, uno stesso oggetto M con degli oggetti:

$$a_1, a_2, \ldots b_1, b_2, \ldots$$

trascurabili secondo il detto ordine di idee. Prima di parlare di eguaglianza, affinchè questa parola abbia un significato ben chiaro, è necessario che sia stato determinato il *campo di eguaglianza* rispetto al quale le eguaglianze devono intendersi sussistere. Per *campo di eguaglianza* dobbiamo intendere l'insieme delle leggi di composizione $Z_1, Z_2, \ldots$ e degli enti trascurabili $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ fra i quali possono scegliersi le:

$$a_1, a_2 \ldots b_1, b_2, \ldots;$$

noi lo rappresentiamo col simbolo:

$$(Z_1, Z_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

che ricorda quello dei campi di operabilità in matematica (di cui sono casi particolari i campi di razionalità, definibili spesso mediante certi elementi generatori).

Ciò posto, supponiamo dato un aggregato ben determinato $\overline{M}$ di enti $M_1, M_2, M_3, \ldots$ e si tratti di vedere quali di questi enti siano fra loro uguali secondo un certo campo di eguaglianza:

$$(Z_1, Z_2, \ldots, \alpha_1, \alpha_2, \ldots);$$

non è necessario supporre che anche gli enti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ facciano parte dell'aggregato $\overline{M}$. Se due oggetti M_1 ed M_2 sono eguali secondo il campo $(\overline{Z}, \alpha)$ esisterà nell'aggregato $\overline{M}$ un oggetto M_s dal quale si dedurranno entrambi con operazioni del campo $(\overline{Z}, \overline{\alpha})$; cioè, per es. M_1 si dedurrà da M_i, componendo M_i successivamente con

$$a_1, a_2, \ldots a_\mu,$$

le composizioni successive essendo fatte rispettivamente colle leggi $l_1\ l_2 \ldots l_\mu$ scelte fra la Z e similmente M_2 dallo stesso M_i composto successivamente con $b_1\, b_2 \dots b_\sigma$ secondo le leggi $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_\sigma$, tutte del pari fra le Z; le $a_1\, a_2 \dots b_1\, b_2 \dots$ sono poi appartenenti all'aggregato $\overline{\alpha}$.

Potremo rappresentare M_1 col simbolo $M_i\, a_1^{l_1}\, a_2^{l_2} \dots a_\mu^{l_\mu}$ e similmente per M_2. Per esprimere che i due simboli M_1 ed $M_i\, a_1^{l_1}\, a_2^{l_2} \dots a_\mu^{l_\mu}$ rappresentano lo stesso oggetto, potremo scrivere:

e similmente
$$\left.\begin{aligned} M_1 &\equiv M_i\, a_1^{l_1}\, a_2^{l_2} \dots a_\mu^{l_\mu} \\ M_2 &\equiv M_i\, b_1^{\lambda_1}\, b_2^{\lambda_2} \dots b_\sigma^{\lambda_\sigma} \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

Sia, ora, d'altra parte, M_2 eguale ad M_3, secondo lo stesso campo di eguaglianza, cosicchè si avrà similmente:

$$\left.\begin{aligned} M_2 &\equiv M_j\, c_1^{\nu'_1}\, c_2^{\nu'_2} \dots c_{\mu'}^{\nu'_{\mu'}} \\ M_3 &\equiv M_j\, d_1^{\lambda'_1}\, d_2^{\lambda'_2} \dots d_{\sigma'}^{\lambda'_{\sigma'}} \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Non si vede come, in generale, dalle (1) e (2) si possa dedurre l'eguaglianza di M_1 con M_3. È però ragionevole ammettere che il sistema $\overline{Z}$ sia *invertibile*, cioè: che per ogni legge Z contenuta in $\overline{Z}$ ne esista in $\overline{Z}$ un'altra, che indicheremo con $-Z$, la quale distrugga l'effetto di Z, nel senso che se, componendo un oggetto M con α mediante Z si ottenga M', componendo poi M' con lo stesso α mediante $-Z$, si ritorni ad M. Allora dalla seconda delle (1) si deduce

$$M_i \equiv M_2\, b_\sigma^{-\lambda_\sigma} \dots b_1^{-\lambda_1}.$$

quindi, sostituendo nella prima

$$M_1 \equiv M_2\, b_\sigma^{-\lambda_\sigma} \dots b_1^{-\lambda_1}\ a_1^{l_1} \dots a_\mu^{l_\mu}. \tag{3}$$

Similmente dalla (2) si dedurrà:

$$M_3 \equiv M_2\, c_{\mu'}^{-\nu'_{\mu'}} \dots c_1^{-\nu'_1}\ d_1^{\lambda'_1}\, d_2^{\lambda'_2} \dots d_{\sigma'}^{\lambda'_{\sigma'}} \tag{4}$$

ed ora dalle (3) e (4) si deduce, evidentemente, $M_1 = M_3$ (il che significa che M_1 è uguale ad M_3 secondo il campo di eguaglianza

$$(\overline{Z}, \overline{\alpha});$$

e si dovrà badare a non scrivere $M_1 \equiv M_3$, il che esprimerebbe *cose non vere*, cioè che M_1 ed M_3 rappresentano uno stesso oggetto dell'aggregato $\overline{M}$).

8. Quanto abbiamo detto si può anche riassumere (e dimostrare più speditamente) come segue:

Sia $\overline{\Omega}$ un certo aggregato di enti dei quali si tratti di decidere quali siano fra loro eguali rispetto ad un certo campo di eguaglianza C. Per campo di eguaglianza C s'intenderà l'insieme di certe operazioni consistenti nel comporre l'oggetto su cui si opera con certi enti prestabiliti secondo certe leggi di composizione del pari stabilite.

Ciò premesso, due oggetti A e B si diranno eguali se sia possibile dedurre A da B mediante operazioni del campo C. Questa definizione delle eguaglianze può però non essere legittima, cioè non aver per conseguenza necessaria che due oggetti eguali ad un terzo siano uguali fra loro.

Quest'ultimo principio si verificherà però necessariamente se il campo C sia tale, che, tutte le volte che da un oggetto A di $\overline{\Omega}$ si possa dedurre un altro oggetto B di $\overline{\Omega}$ mediante operazioni di C, reciprocamente, sia anche possibile dedurre A e B mediante operazioni dello stesso campo.

Infatti, se da A si può dedurre B mediante l'operazione δ e, da B, C mediante δ', è senz'altro manifesto che da A si dedurrà C mediante $\delta\delta'$. Se invece da A si deduce B mediante δ e da C si deduce B mediante δ', esisterà un'operazione $(\delta')^{-1}$ mediante la quale da B si dedurrà C, onde, come nel caso precedente, si potrà poi dedurre da A, C, mediante l'operazione $\delta(\delta')^{-1}$.

9. Dato l'aggregato $\overline{A}$ degli enti $A_1\, A_2\, A_3 \ldots$ si può anche stabilire un sistema completo di eguaglianze e disuguaglianze fra questi enti, seguendo dei criteri affatto arbitrari, purchè tali che, scelti a piacere due oggetti A_i ed A_j di $\overline{A}$, si possa rispondere, immediatamente dopo l'applicazione dei criteri stessi, in modo unico, alla domanda: se A_i ed A_j siano fra loro eguali o diseguali. Se gli oggetti sono in numero finito n, è chiaro che, mediante $\frac{n(n-1)}{2}$ *giudizi* (formulati in base ai criteri scelti) il sistema delle eguaglianze o diseguaglianze sarà completo; cioè di due oggetti qualunque di A si potrà dire se siano eguali o diseguali. In generale però potrà accadere che due oggetti dichiarati eguali ad un terzo si troveranno invece di essere stati dichiarati diseguali fra loro. Così, ad es. se in un pubblico concorso l'individuo A sia stato dichiarato di pari valore dell'individuo B, e, in un altro, l'individuo B di pari valore dell'individuo C, vi sarebbe ragione di ritenere che in un terzo concorso cui prendessero parte A e C, dovrebbero questi essere del pari dichiarati di egual valore. Invece può anche accadere il contrario, perchè l'indole, i criteri e la sincerità dei concorsi possono non esser tali da assicurare la *legittimità* del sistema di eguaglianza (nel senso che valga il principio che: due cose eguali ad una terza siano eguali fra loro).

A. PALOMBY.

SUI CONCETTI DI NUMERO E DI ORDINE

I.

1. Le operazioni fondamentali della mente umana che dànno ori-
ine alla *Scienza dei numeri* sono le seguenti:

1° pensare *un* oggetto;

2° pensare *un* oggetto ed *un* oggetto; o, come suol dirsi: pensare
na *coppia* di oggetti;

3° pensare *un* oggetto, *un* oggetto ed *un* oggetto; o, come suol
rsi: pensare una *terna* di oggetti;

così di seguito.

Una qualunque di queste operazioni, a cominciare dalla seconda,
può riassumere nelle parole: *pensare un aggregato di oggetti*, ov-
ro: *pensare più oggetti*.

2. Il concetto di numero naturale deriva dal concetto di *aggre-
to* e da quello di *corrispondenza*. Esso nasce quando, paragonando
loro un aggregato di oggetti ed un altro aggregato, riconosciamo
e, fra gli elementi dell'uno e quelli dell'altro, si può stabilire una
rdinazione (corrispondenza biunivoca, od univoca bilaterale, od
ivoca in senso assoluto). [1] .

---

[1] Questa coordinazione fra due aggregati (e quindi anche il concetto di numero) si offre
ntaneamente sin dai primi atti del nostro pensiero. Invero, la vista di un aggregato qua-
ique di oggetti materiali:

$$\overline{\Omega} \equiv A, B, C, \ldots, D$$

duce nel nostro cervello una immagine corrispondente:

$$A', B', C', \ldots, D'$$

npressione lasciata da una sensazione). Quando, poi, vedendo un altro aggregato $\overline{\Omega}_1$ noi lo
cepiamo, cioè riconosciamo in esso lo stesso tipo di $\overline{\Omega}$ e diciamo:

$$\overline{\Omega}_1 \text{ \textit{è un} } \overline{\Omega}$$

umendo $\overline{\Omega}$ come campione della specie), ciò avviene perchè riconosciamo nella immagine:

$$A'_1, B'_1, \ldots, D'_1,$$

iata nel nostro cervello dalla impressione di:

$$\overline{\Omega}_1 \equiv A_1, B_1, \ldots, D_1,$$

perfetta somiglianza colla immagine lasciata da $\overline{\Omega}$. Confrontando le due immagini:

$$A', B', \ldots, D' \quad \text{e} \quad A'_1, B'_1, \ldots, D'_1$$

cesso di percezione), nel riconoscere la perfetta somiglianza, non possiamo fare a meno di
varne al tempo stesso la coordinabilità: cioè che ad A' corrisponde A'_1, a B' corrisponde B'_1
sì via.

Il concetto di numero nasce dunque collo stesso uso del pensiero da cui è inseparabile,
chè esso, *se pur non precede*, è almeno simultaneo al concetto di *percezione*.

Vedi anche CAPELLI " Sull'ordine di precedenza fra le operazioni fondamentali dell'Aritme-
" (*Rend. della R. Accademia di Napoli*, giugno del 1900).

Siano $\overline{A}$ e $\overline{B}$ due aggregati di oggetti tutti diversi, ma tali che ad ogni oggetto di $\overline{A}$ si possa far corrispondere un oggetto di $\overline{B}$ e reciprocamente; in tal caso si dirà che i due aggregati si compongono dello stesso *numero* di oggetti: e, quando si faccia astrazione da tutto il resto, si potranno rappresentare con uno stesso simbolo o *cifra* che dir si voglia.

Il modo più semplice di stabilire come sia possibile questa corrispondenza si è: di *sostituire* successivamente gli oggetti di $\overline{A}$ con quelli di $\overline{B}$; i due aggregati si potranno, quindi, anche dire *sostituibili* fra loro.

È facile riconoscere che due aggregati sostituibili ad un terzo sono anche sostituibili fra loro, cosicchè daranno luogo alla stessa cifra.

A rappresentare l'unico oggetto, ovvero una coppia di oggetti, ovvero una terna di oggetti... ecc. si usano da noi le cifre: 1, 2, 3, ... che si leggono: *uno, due, tre*, ...

Pertanto, in luogo di dire: *una coppia di oggetti*, si potrà dire: *un aggregato di oggetti il cui numero è due*, ovvero: *un aggregato di cifra due*, o più semplicemente: *un aggregato di due oggetti*, o più semplicemente ancora: *due oggetti.*

Così in luogo di dire *un oggetto, un oggetto ed un oggetto*, si dirà: *un aggregato di tre oggetti*, e così via.

3. L'operazione per la quale, dato un aggregato di più oggetti, si determina la cifra che ad esso corrisponde, si chiama *enumerazione.* Per enumerare un aggregato $\overline{A}$ di oggetti, cioè: per determinare il numero di oggetti di cui si compone, lo si paragonerà successivamente agli aggregati che si sono scelti la prima volta come tipo per costruire le cifre 1, 2, 3, ... finchè si trovi un aggregato i cui individui si possano far corrispondere, uno per uno, agli oggetti di $\overline{A}$.

È importante, anzi necessario, di notare che il risultato dell'operazione, cioè la cifra che si assegnerà all'aggregato, sarà sempre la stessa, comunque si proceda nello stabilire le corrispondenze con un aggregato tipico che ha dato luogo alle cifre 1, 2, 3, ...; ossia, in altri termini, che uno stesso aggregato $\overline{A}$ non si può far corrispondere univocamente a due diversi aggregati tipici. Invero, se ciò fosse possibile, sarebbe anche possibile far corrispondere univocamente fra loro due aggregati tipici diversi, per es. ABC ed ABCDE; ora la impossibilità di fare ciò possiamo ritenerla come un postulato di esistenza.

II.

Dall'esame di quanto si è detto dobbiamo concludere che la facoltà fondamentale della mente umana si è di poter formare, mediante due oggetti (*idee semplici* ovvero *idee parziali*) A e B, un vo oggetto (*idea composta*) che si può rappresentare con AB intendo così di significare che all'oggetto B si *appone* l'oggetto B, ero con parole, dicendo A *e* B. Il nuovo oggetto si chiamerà *disposizione binaria* (o *composto binario*). L'operazione mediante quale viene generato il nuovo oggetto si chiamerà *composizione*. È chiaro che, mediante i due oggetti A e B si possono fare due osizioni binarie, cioè: AB e BA che si annuncieranno dicendo ettivamente A *e* B, e B *e* A.

Prendiamo ora un terzo oggetto C; si potrà comporre l'oggetto AB oggetto C ottenendo così un nuovo oggetto che si potrà rappresare con ABC ed annunciare colle parole A, B *e* C.

È chiaro che cogli oggetti ABC si possono ottenere, in questo o, sei nuovi oggetti, *o disposizioni ternarie*, rappresentati da:

$$ABC, \quad BCA, \quad CAB, \quad ACB, \quad CBA, \quad BAC. \qquad (1)$$

Se si paragonano le due disposizioni binarie AB e BA, e si fa azione dall'ordine, si ha il concetto di semplice *coppia* (*combinae binaria*), nel quale i due elementi generatori A e B intervenallo stesso modo. Così, se paragoniamo le disposizioni terna-1), si riconosce che esse hanno in comune la qualità di essere *tuibili* (o *coordinabili oggetto per oggetto*) ad una determinata fra Questa nota comune dà origine ad un nuovo oggetto che si ma *combinazione ternaria*, il quale è caratterizzato semplicemente natura degli oggetti che lo generano, senza stabilire fra essi n ordine di precedenza. Così procedendo, cioè componendo uno unque degli oggetti (1) con un nuovo oggetto nei vari modi pos-, poi *astraendo* dall'ordine, acquisteremo successivamente i condi *disposizione quaternaria* e *combinazione quaternaria* e così via. notevole il fatto che il concetto di *combinazione* n^{ria}, apparennte più semplice che quello di *disposizione* n^{ria} sembra non poacquistare che dopo aver già acquistato quest'ultimo, ciò si rderebbe col fatto che il modo più semplice per calcolare il ero delle combinazioni di m oggetti k a k consiste nel calcolare a il numero delle disposizioni degli m oggetti k a k e dividere questo numero pel numero delle disposizioni di k oggetti.

III.

e cose dette sin qui sembranmi mettere abbastanza in chiaro nesi del concetto di *numero* e del concetto di *ordine*, concetti esentati dalle cifre

$$1, 2, 3, \ldots,$$

le parole

primo, secondo, terzo, ...

nonchè delle operazioni rappresentate dai verbi *enumerare* (o contare) ed *ordinare*. Si noti che, di queste operazioni, la prima presuppone la seconda: poichè, volendo, per es., calcolare la cifra che spetta al composto ABCD, conviene riconoscere che si può stabilire una corrispondenza univoca fra gli oggetti A, B, C, D e le cifre 1, 2, 3, 4 (cioè appunto, stabilire un ordine fra le A, B, C, D).

Composizione e *coordinazione* son dunque le operazioni fondamentali che dànno origine alla *enumerazione* e quindi al concetto di *numero*.

A. PALOMBY.

SUL CALCOLO DI UNA CLASSE DI FUNZIONI SIMMETRICHE RAZIONALI

Il problema 146 del sig. BARISIEN pubblicato nel n. III (pag. 137) del corrente anno di questo *Periodico* può essere trattato in generale senza dar luogo a soverchie difficoltà od ingombro di procedimenti o di calcoli.

Può considerarsi cioè la seguente questione:

Sia data un'equazione algebrica qualunque:

$$\varphi(x) \equiv p_0x^n + p_1x^{n-1} + \ldots + p_n = 0. \tag{1}$$

Si voglia calcolare una funzione simmetrica razionale delle sue radici della seguente forma:

$$g = \sum_{r=1}^{n} \frac{f(x_r)}{F(x_r)},$$

dove f, F *sono funzioni razionali intere. Si supponga che* φ *ed* F *siano prime tra loro, e si suppongano di più determinate le radici di*

$$F(x) = 0. \tag{2}$$

Invece di adoperare i metodi più noti sul calcolo delle funzioni simmetriche, cioè ridurre la funzione g ad una frazione e calcolare poi le funzioni simmetriche intere a numeratore ed a denominatore, assai più speditamente si può procedere così:

Siano $a, b, \ldots l$ le radici della (2) rispettivamente coi gradi di multiplicità $\alpha, \beta, \ldots \lambda$.

Si decomponga

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

in frazioni semplici.

Giacchè le equazioni (1) e (2) non hanno radici comuni, si avrà allora:

$$\begin{aligned} g = \sum_r \mathrm{I}(x_r) &+ \mathrm{A}_1 . \sum_r \frac{1}{x_r - a} + \mathrm{A}_2 . \sum_r \frac{1}{(x_r - a)^2} + \ldots + \mathrm{A}_\alpha . \sum_r \frac{1}{(x_r - a)^\alpha} \\ &+ \mathrm{B}_1 . \sum_r \frac{1}{x_r - b} + \mathrm{B}_2 . \sum_r \frac{1}{(x_r - b)^2} + \ldots + \mathrm{B}_\beta . \sum_r \frac{1}{(x_r - b)^\beta} \\ &+ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ \mathrm{L}_1 . \sum_r \frac{1}{x_r - l} + \mathrm{L}_2 . \sum_r \frac{1}{(x_r - l)^2} + \ldots + \mathrm{L}_\lambda . \sum_r \frac{1}{(x_r - l)^\lambda} \end{aligned} \quad (3)$$

dove le sommatorie sono da 1 ad n; x_r rappresentano le radici della (1), dove le A, B, … L sono costanti determinabili con metodi noti ed $\mathrm{I}(x_r)$ è una funzione intera.

Il primo termine della (3) si calcola coi metodi dati nella teoria lelle funzioni simmetriche intere. Per gli altri termini si osservi he notoriamente si ha:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{x - x_r}.$$

Il primo membro è la derivata logaritmica di $\varphi(x)$. Indicando tale derivata, presa col segno cambiato, con $\Phi(x)$ e derivando successivamente rispetto ad x si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_r (x_r - x)^{-1} &= \Phi(x); \\ \sum_r (x_r - x)^{-2} &= \Phi'(x); \\ 2 . \sum_r (x_r - x)^{-3} &= \Phi''(x); \qquad \text{ecc.} \end{aligned}$$

In generale, si deduce

$$\sum_r \frac{1}{(x_r - x)^i} = \frac{\Phi^{(i-1)}(x)}{\underline{|i-1}}. \qquad (4)$$

Sostituendo nella (3) si ricava infine:

$$\begin{aligned} g = \sum_r \mathrm{I}(x_r) &+ \mathrm{A}_1 . \Phi(a) + \mathrm{A}_2 . \Phi'(a) + \ldots + \frac{\mathrm{A}_\alpha}{\underline{|\alpha - 1}} . \Phi(\alpha - 1)(a) \\ &+ \mathrm{B}_1 . \Phi(b) + \mathrm{B}_2 . \Phi'(b) + \ldots + \frac{\mathrm{B}_\beta}{\underline{|\beta - 1}} . \Phi(\beta - 1)(b) \\ &+ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ &+ \mathrm{L}_1 . \Phi(l) + \mathrm{L}_2 . \Phi'(l) + \ldots + \frac{\mathrm{L}_\lambda}{\underline{|\lambda - 1}} . \Phi(\lambda - 1)(l) \end{aligned} \quad (5)$$

risolve la questione propostaci.

Applicando questo procedimento, ad esempio, alla funzione simmetrica esaminata nel problema 146, però per un'equazione (1) qualunque, si ha immediatamente:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}\right].$$

Allora:

$$g \equiv \sum_{r=1}^{n} \frac{x_r}{x_r^2 - 1} = \frac{1}{2}[\Phi(1) + \Phi(-1)].$$

E se la (1) è l'equazione proposta nell'esercizio 146, cioè:

$$\varphi(x) \equiv x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0,$$

si ha

$$\Phi(x) \equiv -\frac{4x^3 - 42x^2 + 142x - 154}{x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120}$$

allora

$$g = \frac{1}{2}\left[\frac{25}{12} + \frac{19}{20}\right] = \frac{91}{60}.$$

E. GENNARI.

BIBLIOGRAFIA

SIBIRANI F. — *Riassunto-formulario di geometria analitica, algebra, calcolo infinitesimale, calcolo vettoriale e meccanica razionale.* " Athenaeum ", Roma, 1915.

Come dice il titolo, questo libro è qualcosa più di un formolario e qualcosa meno di un trattato. In circa 540 pagine viene condensata tutta la materia che fa parte dell'insegnamento matematico del primo biennio universitario, trattata con sufficiente larghezza e con la massima concisione. Il libro non si propone dunque di servire di guida a chi studia per la prima volta la materia, poichè riuscirebbe troppo arido e difficile; il suo scopo è ben dichiarato dall'autore nella prefazione con le parole seguenti: " Raccogliendo le definizioni, gli enunciati dei " teoremi nella loro successione logica, i principali problemi e le loro soluzioni, " le formule che queste e quelli traducono in simboli matematici, io ho voluto " offrire a quanti hanno già studiate le indicate materie il mezzo di rivedere " sinteticamente lo svolgersi delle varie teorie, di richiamare i legami che esi- " stono fra esse e di ravvivare la memoria di concetti, di risultati e di regole " e di formule già note ".

Basta dare una scorsa anche sommaria al libro per riconoscere che lo scopo è perfettamente e brillantemente raggiunto. Il libro può anche servire per ritrovare rapidamente formule o teoremi imperfettamente ritenuti a memoria, perchè un dettagliato indice alfabetico rende facili e sollecite le ricerche.

(K.)

ERRATA-CORRIGE. — Nel fascicolo III, a pag. 138, linea 7, *invece di:* il punto; *leggasi:* i punti d'insieme. — Nella stessa pagina, linea 14 (formula), alla lettera l sostituire b. — Alla pagina 139, linea 7 (formula), *invece di:* $\frac{\operatorname{sen}^7 \varphi \, dy}{\cos \varphi}$; *leggasi:* $\int \frac{\operatorname{sen}^7 \varphi \, d\varphi}{\cos \varphi}$. — Nella stessa pagina, linea 9 (formula), aggiungasi il segno $\int$.

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 18 Settembre 1915

SULLA DISTRIBUZIONE DEI NUMERI DISPARI NON PRIMI

Con $\alpha_\lambda(d_k)$, dove $d_k = 2k + 1$, ho indicato in un altro lavoro [1] il
ımero dei numeri dispari, non superiori a d_k, decomponibili in λ
ttori primi. In questa Nota io riprendo la considerazione di queste
nzioni $\alpha_\lambda(d_k)$, per esporre, sul comportamento dei valori di esse,
cune proprietà non prive forse d'importanza, da me ricavate ser-
ndomi sempre dei metodi di ricerca, che ho adoperati in miei pre-
denti lavori.

Non vi è certamente da aspettarsi di leggere qui l'ultima parola
l problema di cui ci occupiamo: questo lavoro è un tentativo, che
alora, continuato nella medesima direzione, conducesse a nuovi
tevoli risultati, condurrebbe poi anche evidentemente ad illumi-
re di non poco il problema della distribuzione dei numeri primi. [2]

§ 1. — Teoremi ed osservazioni preliminari.

Nel numero dispari

$$d_k = 2k + 1 \tag{1}$$

dentemente k indica l'ordine di successione del numero dato nella
ie naturale dei numeri dispari, in cui si considera 3 come il primo
nero della serie.

Dalla (1) si ricava:

$$k = \frac{d_k - 1}{2},$$

adoperando la notazione $o(d_k)$ per indicare l'ordine del numero
pari d_k, si avrà anche:

$$k = o(d_k) = o(2k + 1).$$

Ciò premesso, noi dimostreremo il seguente

Teorema I. — *La successione*

$$\frac{o(3^n) - o(5)}{5}; \quad \frac{o(3^{n+1}) - o(5^2)}{5^2}; \ldots; \frac{o(3^{n+p}) - o(5^{p+1})}{5^{p+1}}; \ldots \tag{2}$$

---

[1] Cfr. "Sui numeri primi compresi fino ad un limite assegnato" (*Giornale di Battaglini*, 1900).

[2] E. Landau si occupa della distribuzione dei numeri non primi nei seguenti lavori: "Sur
ques problèmes relatifs à la distributions des nombres premiers" (*Bulletin de la Société Ma-
tique de France*, Vol. 28, 1900). — "Ueber die mittlere Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen
bis x in drei Factoren" (*Math. Ann.*, Vol. 54, 1901). — *Handbuch der Lehre von Verteilung
Primzahlen* (Vol. I, pag. 205 e seg., Leipzig, Teubner, 1909).
risultati qui ottenuti non sono riportati, nè compresi, mi pare, in quelli di questo Autore.

dove n *e* p *sono numeri interi e positivi* ($n \geqq 3$) *è decrescente ed è dato da* $[x+2]$ [1] *l'ordine del primo termine di essa che ha un valore minore di* 2, *essendo* x *definito dall'equazione*

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^2}{3^n}.$$

Dalle relazioni tra i numeri dispari e i rispettivi ordini è facile ricavare che, per m intero e positivo, è in generale

$$o(3^m) = 3 \,.\, o(3^{m-1}) + 1,$$
$$o(5^m) = 5 \,.\, o(5^{m-1}) + 2,$$

dimodochè per un termine qualsiasi della (2) si ha:

$$\begin{aligned}\frac{o(3^{n+p}) - o(5^{p+1})}{5^{p+1}} &= \frac{3 \,.\, o(3^{n+p-1}) - 5 \,.\, o(5^p) - 1}{5^{p+1}} \\ &= \frac{3\,\{o(3^{n+p-1}) - o(5^p)\} - \{2 \,.\, o(5^p) + 1\}}{5^p \,.\, 5} \\ &= \frac{3}{5}\,\frac{o(3^{n+p-1}) - o(5^p)}{5^p} - \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Più semplicemente, indicando con $T_0, T_1, T_2, \ldots T_p, \ldots$ i termini della (2), può dirsi che fra un termine di essa e il suo precedente sussiste la relazione

$$T_p = \frac{3}{5}\,T_{p-1} - \frac{1}{5},$$

la quale prova che la successione data è decrescente.

Esprimiamo ora un termine qualsiasi T_p, di posto $(p+1)^{mo}$, in funzione del 1°, T_0.

Successivamente si ha:

$$T_1 = \frac{3}{5}\,T_0 - \frac{1}{5},$$

$$T_2 = \frac{3}{5}\,T_1 - \frac{1}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 T_0 - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{5}$$

. . . .

. . . .

$$\begin{aligned}T_p &= \left(\frac{3}{5}\right)^p . T_0 - \left(\frac{3}{5}\right)^{p-1} . \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^{p-2} . \frac{1}{5} - \ldots - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^p T_0 - \frac{1}{5}\left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^p - 1}{\frac{3}{5} - 1}\right\} \\ &= \left(\frac{3}{5}\right)^p T_0 + \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^p - 1}{2}.\end{aligned}$$

---

[1] Con $[x]$, oppure $E(x)$, indichiamo il maggiore numero intero contenuto nel numero reale x.

Ponendo al posto di T_0 il proprio valore, si ha:

$$T_p = \frac{o(3^n) - o(5)}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^p + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^p - \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Per essere eguale a 2 l'espressione del 2° membro della (3), l'espo-te x deve soddisfare la relazione:

$$\frac{o(3^n) - o(5)}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^x - \frac{1}{2} = 2,$$

si può scrivere:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \frac{2 \,.\, o(3^n) - 2 \,.\, o(5) + 5}{10} = \frac{5}{2},$$

ı, essendo $o(5) = 2$,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \frac{2 \,.\, o(3^n) + 1}{10} = \frac{5}{2},$$

ncora:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \frac{3^n}{10} = \frac{5}{2},$$

ui finalmente:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^2}{3^n}. \qquad (4)$$

sservando che il valore di x soddisfacente alla (4) non può es-intero, che $\frac{3}{5} < 1$ e tenendo presente la (3), può dirsi che è

$$T_p > 2,$$

$= [x]$, ed è invece

$$T_p < 2,$$

$= [x+1]$.

quest'ultima ipotesi l'ordine di T_p è espresso da

$$p + 1 = [x+1] + 1 = [x+2],$$

ane così dimostrata anche la 2ª parte del teorema enunciato.

SERVAZIONE I. — Dalla (4) si ricava:

$$x = \frac{2\log 5 - n\log 3}{-(\log 5 - \log 3)} = -2 + (n-2)\frac{\log 3}{\log 5 - \log 3}.$$

endendo i logaritmi nella base e a meno di $\frac{1}{10^8}$ si ha:

$$\frac{\log_e 3}{\log_e 5 - \log_e 5} = 2 + \frac{7696105}{51082562}.$$

Da questo risultato e dall'espressione di x si deduce:

1°. *I valori di* x *corrispondenti rispettivamente a due valori consecutivi di* n *differiscono fra di loro almeno di* 2.

2°. *Il valore di* x *corrispondente ad un valore di* n *della forma* $9+7\mathrm{t}\,(\mathrm{t}=0,1,2,\ldots)$ *differisce da quello che lo precede, corrispondente cioè ad* $\mathrm{n}-1$, *almeno di* 3.

Si osservi infine che:

$$\text{per } n=3,\quad [x]=0,\quad [x+2]=2;$$
$$\text{per } n=4,\quad [x]=2,\quad [x+2]=4;\ \text{ecc.}$$

Teorema II. — *Essendo* x *definito dall'equazione*

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\mathrm{x}}=\frac{5^2}{3^{\mathrm{n}}},$$

la successione

$$\sum_{k_1} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}})-o(d_{\mathrm{k}_1})}{d_{\mathrm{k}_1}}-(k_1-1)\right\};\ \sum_{k_1,k_2} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}+1})-o(d_{\mathrm{k}_1}d_{\mathrm{k}_2})}{d_{\mathrm{k}_1}d_{\mathrm{k}_2}}-(k_2-1)\right\};\ldots$$
$$\ldots\sum_{k_1,\ldots k_2,k_{\mathrm{p}}} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1})-o(d_{\mathrm{k}_1}d_{\mathrm{k}_2}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})}{d_{\mathrm{k}_1}d_{\mathrm{k}_2}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}}}-(k_{\mathrm{p}}-1)\right\};\ldots \tag{5}$$

è crescente ordinatamente nei primi suoi $[\mathrm{x}+1]$ *termini. Il valore di tutti gli altri termini è costante ed eguale a quello del termine d'ordine* $[\mathrm{x}+1]^{\mathrm{mo}}$. (¹)

Siano

$$\sum_{k_1\ldots k_{\mathrm{p}}} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1})-o(d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})}{d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}}}-(k_{\mathrm{p}}-1)\right\} \tag{6}$$

$$\sum_{k_1\ldots k_{\mathrm{p}+1}} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}})-o(d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}+1}})}{d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}+1}}}-(k_{\mathrm{p}+1}-1)\right\} \tag{7}$$

due espressioni consecutive della successione data.

Consideriamo un termine qualsiasi della (6) corrispondente ad un determinato sistema di valori per i p indici $k_1, k_2, \ldots, k_{\mathrm{p}}$; esso può essere rappresentato da

$$\mathrm{T}=\mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1})-o(d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})}{d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}}}-(k_{\mathrm{p}}-1)\right\}.$$

Ora, evidentemente:

$$\mathrm{T}=\mathrm{E}\left\{\frac{\{3\,.\,o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1})+1\}-\{3\,.\,o(d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})+1\}}{3\,.\,d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}}}-(k_{\mathrm{p}}-1)\right\},$$

ed osservando che

$$o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}})=3\,.\,o(3^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1})+1,$$
$$o(d_1\,d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})=3\,.\,o(d_{\mathrm{k}_1}\ldots d_{\mathrm{k}_{\mathrm{p}}})+1,$$

(¹) I termini della (5) si trovano considerati nel lavoro: "Sui numeri primi ecc.", *l. c.*, n. 4, 5 e 6.

si ha:

$$T = E\left\{\frac{o\,(3^{n+p}) - o\,(d_1 d_{k_1} \ldots d_{k_p})}{d_1 d_{k_1} \ldots d_{k_p}} - (k_p - 1)\right\}.$$

Il 2° membro dell'ultima relazione esprime intanto un termine della (7), corrispondente, propriamente, ai $p+1$ indici $1, k_1, k_2, \ldots k_p$; cosicchè un termine della (6) si trasforma nel modo indicato, conservando il proprio valore, in un termine della (7), il cui primo fattore, nel denominatore, è d_1. Supponendo tale operazione di trasformazione eseguita su tutti i termini della (6), si ricava che l'espressione (7) è almeno eguale alla (6), ossia che *un termine della successione data è almeno eguale al suo precedente.*

Nella (7) non vi sono, oltre quelli provenienti nel modo indicato dalla (6), altri termini il cui denominatore abbia per primo fattore d_1; se uno di tali termini infatti esistesse, eseguendo su di esso le operazioni inverse di quelle che fanno passare dai termini della (6) a quelli della (7), si otterrebbe un termine della (6) e ciò è contro l'ipotesi che quello che si considera non provenga dalla (6). Nella espressione (7) stessa possono però esservi altri termini i cui primi fattori, nei rispettivi denominatori, siano $d_2, d_3 \ldots$. Essi anzi effettivamente vi sono se il suo ordine nella successione data è minore di $[x+2]$.

Infatti, se per tale ordine, espresso da $p+1$, si ha

$$p + 1 \leqslant [x+1],$$

per il *Teorema I* è

$$\frac{o\,(3^{n+p}) - o\,(d_2^{p+1})}{d_2^{p-1}} > 2$$

e quindi anche:

$$E\left\{\frac{o\,(3^{n+p}) - o\,(d_2^{p+1})}{d_2^{p-1}} - 1\right\} \geqslant 1.$$

La (5) *è dunque crescente nei suoi primi* $[x+1]$ *termini.*

Quando invece è

$$p + 1 \geqslant [x+2],$$

sempre per il *Teorema I* si ha:

$$\frac{o\,(3^{n+p}) - o\,(d_2^{p+1})}{d_2^{p+1}} < 2,$$

e quindi

$$E\left\{\frac{o\,(3^{n+p}) - o\,(d_2^{p+1})}{d_2^{p+1}} - 1\right\} = 0.$$

A *fortiori* sono poi nulle le espressioni in cui vi siano fattori maggiori di quelli considerati nella precedente.

Il valore massimo dei termini della (5) lo si ha dunque in quello d'ordine $[x+1]^{mo}$, valore che si mantiene poi costante per i termini che lo seguono.

Osservazione II. — Consideriamo nella (5) l'espressione di ordine $[x+2]^{mo}$, il cui valore è eguale a quello dell'espressione d'ordine $[x+1]^{mo}$. I termini di essa, eguali corrispondentemente a quelli dell'espressione precedente, differiscono da questi ultimi, nei denominatori, per la presenza in più del fattore d_1. Così, passando dai termini dell'espressione $[x+2]^{ma}$ a quelli della $[x+3]^{ma}$ s'introduce un altro fattore d_1 nei denominatori e così via.

Può dirsi dunque che in ogni termine dell'espressione d'ordine $[x+2]^{mo}$ vi è almeno un fattore d_1 nel denominatore, ve ne sono almeno due, d_1^2, nei denominatori di tutti i termini di quella d'ordine $[x+3]^{mo}$ ed in generale almeno n, d_1^n, nei termini dell'espressione d'ordine $[x+n+1]^{mo}$.

Osservazione III. — Indichiamo, per una più chiara intelligenza di ciò che segue, con

$$T_2, T_3, \ldots, T_p, T_{p+1}, \ldots$$

i successivi termini della (5). Allora il termine, il cui ordine è p, ha per indice $p+1$, ed il teorema precedente ci permette di dire che *sono eguali fra loro quei termini per i quali il loro indice* p *soddisfa alla relazione*

$$p \geqq [x+2].$$

E se indichiamo con

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, \ldots$$

i valori di x che nell'equazione

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^2}{3^n}$$

corrispondono rispettivamente ai valori di

$$3, 4, \ldots n, \ldots$$

per l'esponente n e poniamo

$$[x_1+2]=p_1, \quad [x_2+2]=p_2; \ldots; [x_n+2]=p_n; \ldots$$

può anche dirsi che *nella* (5) *sono eguali fra loro quei termini il cui indice* p *soddisfa alla condizione*

$$p \geqq p_{n-2}.$$

Così anche, queste nuove posizioni ci conducono ad enunciare i risultati dell'Oss. II nel seguente modo:

I termini della (5) *il cui indice* p *soddisfa alla relazione*

$$p = p_{n-2} + g$$

hanno almeno g *fattori* d_1 *nei rispettivi denominatori.*

Dall'Oss. I deducesi poi che tra i numeri p_n sussiste la relazione

$$p_n \geqslant p_{n-1} + 2,$$

da cui, esprimendo in funzione p_1,

$$p_n \geqslant p_1 + 2(n-1),$$

ed anche, essendo $p_1 = 2$,

$$p_n \geqslant 2n.$$

§ 2. — Richiamo di alcune proprietà note.

Per facilitare l'intelligenza della dimostrazione del teorema che segue, richiamiamo alcune proprietà sul comportamento dei valori delle ripartizioni di certi m oggetti dati in n parti o gruppi e delle quali abbiamo discorso in altri lavori,(1) almeno implicitamente per le più evidenti di esse.

Nel prosieguo di questa Nota noi avremo dunque da richiamare i seguenti fatti:

1°. Se consideriamo le ripartizioni di m oggetti qualsiasi (distinti, identici, solo in parte distinti) in n parti o gruppi, aggiungendo un altro oggetto ai primitivi m, differente da essi, le ripartizioni del nuovo gruppo di $m+1$ oggetti in $n+1$ parti sono in numero maggiore delle precedenti, e si ha cioè, adoperando le notazioni già adottate:

$$R_{\overline{m}, n} < R_{\overline{m+1}, n+1}.$$

Se invece si aggiungesse un oggetto identico ad uno dei primitivi m, allora si avrebbe tuttavia

$$R_{\overline{m}, n} < R_{\overline{m+1}, n+1},$$

quando, essendo $m - n = d$, l'oggetto considerato si ripetesse in tutto, nel complesso degli m oggetti dati, per meno di $2d$ volte. Mentre, se tale oggetto si ripetesse per un numero di volte eguale o maggiore di $2d$ si avrebbe:

$$R_{\overline{m}, n} = R_{\overline{m+1}, n+1},$$

(1) Cfr. "Principii di analisi combinatoria con applicazioni ai problemi di decomposizione e partizione dei numeri (*Giornale di Battaglini*, Annate 1907 e 1909). — "Sul problema di ripartizione" (*Periodico di Matematica*, Novembre 1913).

e più generalmente ancora

$$R_{\overline{m},n} = R_{\overline{m+\mu},n+\mu}, \qquad (\mu = 1, 2, 3 \ldots)$$

intendendo di aggiungere contemporaneamente altri μ oggetti identici a quello che si considera e lo stesso numero di nuovi gruppi ai primitivi n.

2°. Nelle ripartizioni indicate e numerate dall'espressione generale

$$R_{\overline{m},n},$$

se un certo oggetto che si ripete, fra gli m dati compare in tutto m' volte $(1 < m' \leqslant m)$, si avranno, essendo $m - n = d$, g gruppi identici contenenti ciascuno l'oggetto considerato, se

$$m' = 2d + g.$$

§ 3. — Teorema fondamentale.

Si cominci ad osservare che la successione

$$\alpha_2(3^n), \quad \alpha_3(3^{n+1}), \ldots, \quad \alpha_p(3^{n+p-2}), \ldots$$

per $n = 2$ diviene:

$$\alpha_2(3^2), \quad \alpha_3(3^3), \ldots, \quad \alpha_p(3^p), \ldots$$

ed è evidentemente:

$$1 = \alpha_2(3^2) = \alpha_3(3^3) = \ldots = \alpha_p(3^p) = \ldots$$

L'unico valore numerato dalla funzione $\alpha_p(3^p)$ è composto di p fattori eguali a 3, e può dirsi, in altra forma, che tale valore è composto di

$$p - p_0$$

fattori eguali, convenendo di porre $p_0 = 0$.

Teorema. — *Essendo* x_{n-2} *determinato dall'equazione*

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x_{n-2}} = \frac{5^2}{3^n},$$

la successione

$$\alpha_2(3^n), \quad \alpha_3(3^{n+1}), \ldots, \quad \alpha_p(3^{n+p-2}), \ldots$$

è crescente ordinatamente nei suoi primi $[x_{n-2} + 1]$ *termini.*

Il valore di tutti gli altri termini è costante ed eguale a quello del termine d'ordine $[x_{n-2} + 1]^{mo}$. (1)

---

(1) Diamo soltanto la dimostrazione della 2ª parte del teorema. Quella della 1ª, dipendente da alcune proprietà delle ripartizioni di cui non abbiamo ancora trattato, la daremo in momento più opportuno.

1°. Per $n = 3$ la (8) diventa

$$\alpha_2(3^3),\quad \alpha_3(3^4),\ \ldots,\quad \alpha_p(3^{p+1}),\ \ldots.$$

E in questo caso $[x_1] = 0$; $[x_1 + 1] = 1$; $p_1 = [x_1 + 2] = 2$. (Oss. I e III, § 1).

Si tratta di dimostrare che

$$\alpha_2(3^3) = \alpha_3(3^4) = \ldots = \alpha_p(3^{p+1}) = \ldots.$$

I valori dei 2 termini consecutivi $\alpha_p(3^{p+1})$ e $\alpha_{p+1}(3^{p+2})$ sono così espressi:

$$\alpha_p(3^{p+1}) = \sum_{k_1, k_2, \ldots k_{p-1}} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{p+1}) - o(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{p-1}})}{d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_{p-1}}} - (k_{p-1} - 1)\right\} +$$
$$- \{\alpha_{p+1}(3^{p+1})\} \mathrm{R}_{\overline{p+1},\, p},$$

$$\alpha_{p+1}(3^{p+2}) = \sum_{k_1, k_2, \ldots k_p} \mathrm{E}\left\{\frac{o(3^{p+2}) - o(d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_p})}{d_{k_1} d_{k_2} \ldots d_{k_p}} - (k_p - 1)\right\} +$$
$$- \{\alpha_{p+2}(3^{p+2})\} \mathrm{R}_{\overline{p+2},\, p+1}.$$

Per $p \geqslant p_1$, le parti Σ delle 2 precedenti espressioni sono eguali (Teor. II, Oss. III).

Si ha poi: [1]

$$\alpha_{p+1}(3^{p+1}) = (1)_{o_{p+1}};\qquad \alpha_{p+2}(3^{p+2}) = (1)_{o_{p+2}};$$

onde:

$$\{\alpha_{p+1}(3^{p+1})\} \mathrm{R}_{\overline{p+1},\, p} = \mathrm{R}_{o_{p+1},\, p};\qquad \{\alpha_{p+2}(3^{p+2})\} \mathrm{R}_{\overline{p+2},\, p+1} = \mathrm{R}_{o_{p+2},\, p+1}$$

ed è intanto, per $p \geqslant p_1$, ossia per $p \geqslant 2$, (§ 2, 1).

$$\mathrm{R}_{o_{p+1},\, p} = \mathrm{R}_{o_{p+2},\, p+1}.$$

Rimane così dimostrato che

$$\alpha_p(3^{p+1}) = \alpha_{p+1}(3^{p+2}).$$

Osservazione. — Occorre stabilire per la dimostrazione del teorema nei casi successivi di $n = 4, 5, \ldots$, la composizione dei valori numerati da $\alpha_p(3^{p+1})$, vedere propriamente quanti fattori eguali tra

---

(1) Per gli sviluppi delle funzioni $\alpha_h(3^k)$ ed altri chiarimenti su di essi si vegga "Sui numeri primi ecc.", n. 5 e 6, *l. c.* Ricordiamo, da questo stesso lavoro, che la notazione simbolica

$$\{\alpha_h(3^k)\} \mathrm{R}_{\overline{h},\, n}\ (h \geqslant n),$$

va intesa nel senso che determinata la composizione dei valori di $\alpha_h(3^k)$ [in questo caso $\alpha_p(3^p)$ ha un unico valore composto di p fattori eguali,epperò $\alpha_p(3^p) = (1)_{o_p}$], bisogna moltiplicare il numero di quelli che appartengono ad uno stesso tipo per il valore di $\mathrm{R}_{\overline{h},\, n}$, in cui gli h oggetti da ripartirsi in n gruppi abbiano una composizione identica a quella dei valori del tipo che si considera.

di loro, a 3, contengono i numeri, non maggiori di 3^{p-1}, decomponibili in p fattori primi.

Nell'espressione di $\alpha_p(3^{p+1})$, tenendo presente il significato della parte Σ e quanto si è detto nelle Oss. II e III, si ha che per $p = p_1 + g$, vi sono in tutti i termini da essa Σ numerati almeno

$$g = p - p_1 \tag{9}$$

fattori eguali a d_1.

Per quanto riguarda la composizione dei valori numerati da

$$\{\alpha_{p-1}(3^{p+1})\} \, R_{\overline{p+1},p} = R_{v_{p+1},p},$$

si ricordi (§ 2, 2) che essendo

$$(p+1) - p = 1,$$

si avranno, se

$$p + 1 = 2 + g,$$

almeno g gruppi identici in tutte le ripartizioni indicate in $R_{v_{p-1},p}$ (tali gruppi identici sarebbero questa volta costituiti ciascuno da un fattore d_1), ossia se ne avranno in numero di

$$g = p - 1. \tag{10}$$

Ricordando che $p_1 = 2$, dai risultati (9) e (10) si ricava che tutti i valori numerati dalla funzione $\alpha_p(3^{p+1})$, *di indice* p, contengono almeno

$$p - p_1$$

fattori eguali a d_1.

2°. Trattiamo ora il caso generale, essendo n qualsiasi.

Dovremo dimostrare questa volta che nella successione

$$\alpha_2(3^n), \quad \alpha_3(3^{n+1}), \ldots, \qquad \alpha_p(3^{n+p-2}), \ldots \tag{11}$$

per $p \geqq p_{n-2}$, essendo $p_{n-2} = [x_{n-2} + 2]$ (Oss. III, § 1), si ha

$$\alpha_p(3^{n+p-2}) = \alpha_{p-\mu}(3^{n+p+\mu-2}) \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Possiamo ammettere già dimostrato il teorema per i valori

$$3, 4, \ldots \, n-1$$

di n, e faremo vedere che esso è vero, passando da $n-1$ ad n.

È lecito altresì supporre, per quanto si è stabilito precedentemente, che tutti i valori dati dalle funzioni di indice p,

$$\alpha_p(3^p), \quad \alpha_p(3^{p+1}), \quad \alpha_p(3^{p+2}), \ldots, \quad \alpha_p(3^{p+n-3}), \ldots$$

(corrispondenti ordinatamente ai valori $2, 3, 4, \ldots, n-1$ di n), hanno rispettivamente almeno

$$p - p_0, \quad p - p_1, \quad p - p_2, \ldots \quad p - p_{n-3}, \ldots$$

fattori identici.

Ciò premesso, per due funzioni consecutive della (11) si hanno i seguenti sviluppi:

$$\alpha_p(3^{n+p-2}) = \sum_{k_1, k_2, \dots k_{p-1}} E\left\{\frac{o(3^{n+p-2}) - o(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{p-1}})}{d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_{p-1}}} - (k_{p-1} - 1)\right\} +$$
$$- \sum_{i=2}^{i=n-1} \{\alpha_{n+p-i}(3^{n+p-2})\} R_{\overline{n+p-i}, p} = \qquad (12)$$
$$= T_1 - T_2;$$

$$\alpha_{p-1}(3^{n+p-1}) = \sum_{k_1, k_2, \dots k_p} E\left\{\frac{o(3^{n+p-1}) - o(d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_p})}{d_{k_1} d_{k_2} \dots d_{k_p}} - (k_p - 1)\right\} +$$
$$- \sum_{i=2}^{i=n-1} \{\alpha_{n-p-i-1}(3^{n+p-1})\} R_{\overline{n+p-i+1}, p+1} = \qquad (13)$$
$$= T'_1 - T'_2.$$

Per $p \geqslant p_{n-2}$ i termini T_1 e T'_1 sono eguali (Teor. II, Oss. III).

Consideriamo ora due termini qualsiasi di T_2 e T'_2 corrispondenti ad uno stesso valore $i = k$ $(2 \leqslant k \leqslant n-1)$.

Essi sono:

$$\{\alpha_{n+p-k}(3^{n+p-2})\} R_{\overline{n+p-k}, p} \quad \text{e} \quad \{\alpha_{n+p-k+1}(3^{n+p-1})\} R_{\overline{n+p-k+1}, p+1}$$

che dimostreremo essere eguali.

Si cominci ad osservare che le funzioni

$$\alpha_{n+p-k}(3^{n+p-2}), \qquad \alpha_{n+p-k+1}(3^{n+p-1})$$

sono due termini consecutivi della successione (8) corrispondente al valore k di n, ed essendo $k \leqslant n-1$, per esse vale il teorema in discorso e si ha cioè:

$$\alpha_{n+p-k}(3^{n+p-2}) = \alpha_{n+p-k+1}(3^{n+p-1}),$$

e può anche dirsi, per quanto si è dianzi premesso, che tutti i valori di queste stesse funzioni numerati ammettono rispettivamente almeno

$$(n+p-k) - p_{k-2}, \qquad (n+p-k+1) - p_{k-2}$$

fattori identici.

Si noti intanto che dalle condizioni

$$p \geqslant p_{n-2}; \qquad p_{n-2} \geqslant 2(n-2), \qquad (\S\ 1,\ \text{Oss. III})$$

si trae

$$p \geqslant 2(n-2)$$

e tenendo presente che è $n-2 > k-2$ ed ancora le relazioni tra i numeri p_n (§ 1, Oss. I e III), si ricava inoltre che p_{n-2}, ed a maggior ragione quindi p, supera eventualmente $2(n-2)$, quanto o più di quanto p_{k-2} supera eventualmente $2(k-2)$.

Si ha quindi:

$$(n+p-k) - p_{k-2} \geqslant \{n + 2(n-2) - k\} - 2(k-2)$$
$$\geqslant 3(n-k).$$

In modo analogo si sarebbe ottenuto:

$$(n+p-k+1)-p_{k-2} \geqslant 3(n-k)+1,$$

epperò può dirsi che tutti i valori numerati dalle funzioni

$$\alpha_{n+p-k}(3^{n+p-2}) \qquad \text{ed} \qquad \alpha_{n+p-k+1}(3^{n+p-1})$$

ammettono rispettivam. almeno $3(n-k)$, $3(n-k)+1$ fattori identici.

Questi risultati ci permettono di stabilire l'eguaglianza:

$$\{\alpha_{n+p-k}[3^{n+p-2})\}\, R_{\overline{n+p-k},\,p} = \{\alpha_{n+p-k+1}(3^{n+p-1})\}\, R_{\overline{n+p-k-1},\,p+1}$$

poichè nelle ripartizioni in essa indicate, la differenza tra il numero degli oggetti e quello dei gruppi è data da $n-k$ (§ 2, 1).

Si può perciò affermare l'eguaglianza fra i termini T_2 e T'_2 delle espressioni (12) e (13) e stabilire infine, riassumendo, che

$$\alpha_p(3^{n+p-2}) = \alpha_{p+1}(3^{n+p-1})$$

per $p \geqslant p_{n-2}$, c. v. d.

Tavola annessa al lavoro.

Le successive verticali del quadro seguente danno il comportamento delle successioni (8) corrispondenti ordinatamente ai valori $2, 3, 4, \ldots$ di n. In ciascuna verticale hanno eguale valore, che è poi il massimo raggiunto dai termini delle singole successioni, le funzioni con carattere grassetto, mentre le altre, che precedono quest'ultime, contando dall'alto in basso, hanno dei valori ordinatamente crescenti.

$\alpha_2(3^2)$	$\alpha_2(3^3)$	$\alpha_2(3^4)$	$\alpha_2(3^5)$	$\alpha_2(3^6)$	$\alpha_2(3^7)$	$\alpha_2(3^8)$	$\alpha_2(3^9)$	$\alpha_2(3^{10})$	$\alpha_2(3^{11})$	. . .
$\alpha_3(3^3)$	$\alpha_3(3^4)$	$\alpha_3(3^5)$	$\alpha_3(3^6)$	$\alpha_3(3^7)$	$\alpha_3(3^8)$	$\alpha_3(3^9)$	$\alpha_3(3^{10})$	$\alpha_3(3^{11})$	$\alpha_3(3^{12})$	. . .
$\alpha_4(3^4)$	$\alpha_4(3^5)$	$\alpha_4(3^6)$	$\alpha_4(3^7)$	$\alpha_4(3^8)$	$\alpha_4(3^9)$	$\alpha_4(3^{10})$	$\alpha_4(3^{11})$	$\alpha_4(3^{12})$	$\alpha_4(3^{13})$	. . .
$\alpha_5(3^5)$	$\alpha_5(3^6)$	$\alpha_5(3^7)$	$\alpha_5(3^8)$	$\alpha_5(3^9)$	$\alpha_5(3^{10})$	$\alpha_5(3^{11})$	$\alpha_5(3^{12})$	$\alpha_5(3^{13})$	$\alpha_5(3^{14})$	. . .
$\alpha_6(3^6)$	$\alpha_6(3^7)$	$\alpha_6(3^8)$	$\alpha_6(3^9)$	$\alpha_6(3^{10})$	$\alpha_6(3^{11})$	$\alpha_6(3^{12})$	$\alpha_6(3^{13})$	$\alpha_6(3^{14})$	$\alpha_6(3^{15})$	. . .
$\alpha_7(3^7)$	$\alpha_7(3^8)$	$\alpha_7(3^9)$	$\alpha_7(3^{10})$	$\alpha_7(3^{11})$	$\alpha_7(3^{12})$	$\alpha_7(3^{13})$	$\alpha_7(3^{14})$	$\alpha_7(3^{15})$	$\alpha_7(3^{16})$	. . .
$\alpha_8(3^8)$	$\alpha_8(3^9)$	$\alpha_8(3^{10})$	$\alpha_8(3^{11})$	$\alpha_8(3^{12})$	$\alpha_8(3^{13})$	$\alpha_8(3^{14})$	$\alpha_8(3^{15})$	$\alpha_8(3^{16})$	$\alpha_8(3^{17})$	. . .
$\alpha_9(3^9)$	$\alpha_9(3^{10})$	$\alpha_9(3^{11})$	$\alpha_9(3^{12})$	$\alpha_9(3^{13})$	$\alpha^9(3^{14})$	$\alpha_9(3^{15})$	$\alpha_9(3^{16})$	$\alpha_9(3^{17})$	$\alpha_9(3^{18})$	. . .
$\alpha_{10}(3^{10})$	$\alpha_{10}(3^{11})$	$\alpha_{10}(3^{12})$	$\alpha_{10}(3^{13})$	$\alpha_{10}(3^{14})$	$\alpha_{10}(3^{15})$	$\alpha_{10}(3^{16})$	$\alpha_{10}(3^{17})$	$\alpha_{10}(3^{18})$	$\alpha_{10}(3^{19})$	. . .
$\alpha_{11}(3^{11})$	$\alpha_{11}(3^{12})$	$\alpha_{11}(3^{13})$	$\alpha_{11}(3^{14})$	$\alpha_{11}(3^{15})$	$\alpha_{11}(3^{16})$	$\alpha_{11}(3^{17})$	$\alpha_{11}(3^{18})$	$\alpha_{11}(3^{19})$	$\alpha_{11}(3^{20})$	. . .
$\alpha_{12}(3^{12})$	$\alpha_{12}(3^{13})$	$\alpha_{12}(3^{14})$	$\alpha_{12}(3^{15})$	$\alpha_{12}(3^{16})$	$\alpha_{12}(3^{17})$	$\alpha_{12}(3^{18})$	$\alpha_{12}(3^{19})$	$\alpha_{12}(3^{20})$	$\alpha_{12}(3^{21})$	. . .
$\alpha_{13}(3^{13})$	$\alpha_{13}(3^{14})$	$\alpha_{13}(3^{15})$	$\alpha_{13}(3^{16})$	$\alpha_{13}(3^{17})$	$\alpha_{13}(3^{18})$	$\alpha_{13}(3^{19})$	$\alpha_{13}(3^{20})$	$\alpha_{13}(3^{21})$	$\alpha_{13}(3^{22})$	. . .
$\alpha_{14}(3^{14})$	$\alpha_{14}(3^{15})$	$\alpha_{14}(3^{16})$	$\alpha_{14}(3^{17})$	$\alpha_{14}(3^{18})$	$\alpha_{14}(3^{19})$	$\alpha_{14}(3^{20})$	$\alpha_{14}(3^{21})$	$\alpha_{14}(3^{23})$	$\alpha_{14}(3^{23})$	. . .
$\alpha_{15}(3^{15})$	$\alpha_{15}(3^{16})$	$\alpha_{15}(3^{17})$	$\alpha_{15}(3^{18})$	$\alpha_{15}(3^{19})$	$\alpha_{15}(3^{20})$	$\alpha_{15}(3^{21})$	$\alpha_{15}(3^{22})$	$\alpha_{15}(3^{23})$	$\alpha_{15}(3^{24})$	. . .
$\alpha_{16}(3^{16})$	$\alpha_{16}(3^{17})$	$\alpha_{16}(3^{18})$	$\alpha_{16}(3^{19})$	$\alpha_{16}(3^{20})$	$\alpha_{16}(3^{21})$	$\alpha_{16}(3^{22})$	$\alpha_{16}(3^{23})$	$\alpha_{16}(3^{24})$	$\alpha_{16}(3^{25})$	. . .
$\alpha_{17}(3^{17})$	$\alpha_{17}(3^{18})$	$\alpha_{17}(3^{19})$	$\alpha_{17}(3^{20})$	$\alpha_{17}(3^{21})$	$\alpha_{17}(3^{22})$	$\alpha_{17}(3^{23})$	$\alpha_{17}(3^{24})$	$\alpha_{17}(3^{25})$	$\alpha_{17}(3^{26})$	. . .
$\alpha_{18}(3^{18})$	$\alpha_{18}(3^{19})$	$\alpha_{18}(3^{20})$	$\alpha_{18}(3^{21})$	$\alpha_{18}(3^{22})$	$\alpha_{18}(3^{23})$	$\alpha_{18}(3^{24})$	$\alpha_{18}(3^{25})$	$\alpha_{18}(3^{26})$	$\alpha_{18}(3^{27})$	. . .
$\alpha_{19}(3^{19})$	$\alpha_{19}(3^{20})$	$\alpha_{19}(3^{21})$	$\alpha_{19}(3_{22})$	$\alpha_{19}(3^{23})$	$\alpha_{19}(3^{24})$	$\alpha_{19}(3^{25})$	$\alpha_{19}(3^{26})$	$\alpha_{19}(3^{27})$	$\alpha_{19}(3^{28})$	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

S. Minetola.

SOPRA UNA CLASSE D'EQUAZIONI INTEGRALI

1. Supponiamo nota la teoria del FREDHOLM; [1] ricordiamo sol-
nto che data l'equazione integrale *omogenea* (senza secondo membro):

$$) \quad \varphi(x)+\lambda\int_0^1 k(xy)\,\varphi(y)\,dy=0$$

FREDHOLM studia le proprietà della serie:

$$) \quad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1x_2\ldots x_p \\ y_1y_2\ldots y_p \end{matrix}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\ldots$$

$$\ldots\int_0^1 \begin{vmatrix} k(x_1y_1) & k(x_1y_2) & \ldots & k(x_1y_p) & k(x_1s_1) & k(x_1s_2) & \ldots & k(x_1s_n) \\ k(x_2y_1) & k(x_2y_2) & \ldots & k(x_2y_p) & k(x_2s_1) & k(x_2s_2) & \ldots & k(x_2s_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(x_py_1) & k(x_py_2) & \ldots & k(x_py_p) & k(x_ps_1) & k(x_ps_2) & \ldots & k(x_ps_n) \\ k(s_1y_1) & k(s_1y_2) & \ldots & k(s_1y_p) & k(s_1s_1) & k(s_1s_2) & \ldots & k(s_1s_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k(s_ny_1) & k(s_ny_2) & \ldots & k(s_ny_p) & k(s_ns_1) & k(s_ns_2) & \ldots & k(s_ns_n) \end{vmatrix} ds_1ds_2\ldots ds_n$$

ve il determinante di ordine $n+p$ è generato dal *nucleo* $k(xy)$
la nota [1] legge. Egli chiama la serie (2) *un minore di ordine* p
rchè contiene p parametri) della serie:

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\ldots\int_0^1 \begin{vmatrix} k(s_1s_1) & k(s_1s_2) & \ldots & k(s_1s_n) \\ k(s_1s_2) & k(s_2s_2) & \ldots & k(s_2s_n) \\ \vdots & & & \\ k(s_ns_1) & k(s_ns_2) & \ldots & k(s_ns_n) \end{vmatrix} ds_1ds_2\ldots ds_n$$

imostra il seguente:

TEOREMA DI FREDHOLM. — *Se λ annulla la $D(\lambda)$ e tutti i suoi mi-
i D fino a quelli di ordine $p-1$ inclusi, allora e soltanto allora,
uazione omogenea (1) ha le p soluzioni linearmente indipendenti:*

$$\varphi_h(x)=D\left(\lambda \begin{matrix} x_1x_2\ldots x_{h-1}\ x\ x_{h+1}\ldots x_p \\ y_1y_2\ldots y_{h-1}\ y_h\ y_{h+1}\ldots y_p \end{matrix}\right)$$
$$h=1,2,\ldots,p$$

quazione omogenea coniugata

$$\psi(x)+\lambda\int_0^1 k(yx)\,\psi(y)\,dy=0$$

---

[1] FREDHOLM, *Sur une classe d'équations fonctionelles.* Acta Math., 27, 1903.

ha le p *soluzioni*

$$\psi_h(x) = D\begin{pmatrix} \lambda & x_1 x_2 \dots x_{h-1} x_h x_{h+1} \dots x_p \\ & y_1 y_2 \dots y_{h-1} x \; y_{h+1} \dots y_p \end{pmatrix} \qquad (6)$$
$$h = 1, 2, \dots p.$$

Ciò posto, supponiamo che il nucleo $k(xy)$ sia della forma:

$$k(xy) = \sum_{h=1}^{m} u_h(x) v_h(y) \qquad (7)$$

nella quale sono evidentemente comprese le funzioni intere di x e di y. Le u e le v sono tutte funzioni indipendenti fra loro. Anche in questo caso potremo applicare le formule risolutive (4) e (6); ma il calcolo di tutti i determinanti letterali che compaiono nei termini delle somme D e le successive integrazioni multiple, rendono praticamente difficile determinare l'effettiva forma analitica delle funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$. Lo scopo di questa nota è di mettere in vista le proprietà che godono in questo caso le somme D e di servirci di queste proprietà per trovare una formola risolutiva molto più facile a calcolarsi della (4) e che inoltre ci darà contemporaneamente la soluzione dell'equazione omogenea (1) e della sua coniugata (5).

2. Cominciamo a osservare che, quando il nucleo è del tipo (7), il determinante della serie (2), che chiameremo K, è il prodotto per linee di due matrici simili:

$$K = \begin{vmatrix} u_1(x_1) & u_2(x_1) & \dots & u_m(x_1) \\ u_1(x_2) & u_2(x_2) & \dots & u_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1(x_p) & u_2(x_p) & \dots & u_m(x_p) \\ u_1(s_1) & u_2(s_1) & \dots & u_m(s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1(s_n) & u_2(s_n) & \dots & u_m(s_n) \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} v_1(y_1) & v_2(y_1) & \dots & v_m(y_1) \\ v_1(y_2) & v_2(y_2) & \dots & v_m(y_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(y_p) & v_2(y_p) & \dots & v_m(y_p) \\ v_1(s_1) & v_2(s_1) & \dots & v_m(s_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1(s_n) & v_2(s_n) & \dots & v_m(s_n) \end{vmatrix}$$

e poichè questo prodotto è nullo per $p + n > m$ cioè per $n > m - p$, si ha intanto che *la serie* (2) *si riduce a una somma di* $m - p + 1$ *termini al più, e quindi di grado al più eguale ad* $m - p$ *rispetto* λ. È poi facile riconoscere [1] che questo prodotto può scriversi sotto la forma:

$$\Sigma \begin{vmatrix} v_{i_1}(y_1)\, u_{i_1}(x_1) & v_{i_2}(y_1)\, u_{i_2}(x_2) \dots & v_{i_p}(y_1)\, u_{i_p}(x_p) & v_{i_{p+1}}(y_1)\, u_{i_{p+1}}(s_1) \dots & v_{i_{p+n}}(y_1)\, u_{i_{p+n}}(s_n) \\ v_{i_1}(y_2)\, u_{i_1}(x_1) & v_{i_2}(y_2)\, u_{i_2}(x_2) \dots & v_{i_p}(y_2)\, u_{i_p}(x_p) & v_{i_{p+1}}(y_2)\, u_{i_{p+1}}(s_1) \dots & v_{i_{p+n}}(y_2)\, u_{i_{p+n}}(s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{i_1}(y_p)\, u_{i_1}(x_1) & v_{i_2}(y_p)\, u_{i_2}(x_2) \dots & v_{i_p}(y_p)\, u_{i_p}(x_p) & v_{i_{p+1}}(y_p)\, u_{i_{p+1}}(s_1) \dots & v_{i_{p+n}}(y_p)\, u_{i_{p+n}}(s_n) \\ v_{i_1}(s_1)\, u_{i_1}(x_1) & v_{i_2}(s_1)\, u_{i_2}(x_2) \dots & v_{i_p}(s_1)\, u_{i_p}(x_p) & v_{i_{p+1}}(s_1)\, u_{i_{p+1}}(s_1) \dots & v_{i_{p+n}}(s_1)\, u_{i_{p+n}}(s_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{i_1}(s_n)\, u_{i_1}(x_1) & v_{i_2}(s_n)\, u_{i_2}(x_2) \dots & v_{i_p}(s_n)\, u_{i_p}(x_p) & v_{i_{p+1}}(s_n)\, u_{i_{p+1}}(s_1) \dots & v_{i_{p+n}}(s_n)\, u_{i_{p+n}}(s_n) \end{vmatrix}$$

[1] Cfr. CESÀRO, *Analisi Algebrica*. F. Bocca, Torino, 1894, pag. 21-23.

a somma essendo estesa a tutte le disposizioni senza ripetizione $i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+n}$ degli m numeri $1, 2, \dots, m$ a $p+n$ a $p+n$. Met-endo in evidenza i fattori $u_{i_1}, u_{i_2}, \dots u_{i_p}$ che moltiplicano le prime p olonne, e portando i fattori $u_{i_{p+1}}, u_{i_{p+2}}, \dots, u_{i_{p+n}}$ delle ultime n co-onne, a moltiplicare invece le ultime n linee, e ponendo in generale

$$a_{hk} = \int_0^1 v_k(s)\, u_h(s)\, ds$$

vremo, integrando rispetto $s_1, s_2, \dots s_n$ le ultime n linee del deter-inante K:

$$(8) \qquad \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 K\, ds_1 ds_2 \dots ds_n =$$

$$= \Sigma\, u_{i_1}(x_1)\, u_{i_2}(x_2) \dots u_{i_p}(x_p) \begin{vmatrix} v_{i_1}(y_1) & v_{i_2}(y_1) \dots v_{i_p}(y_1) & v_{i_{p+1}}(y_1) \dots v_{i_{p+n}}(y_1) \\ v_{i_1}(y_2) & v_{i_2}(y_2) \dots v_{i_p}(y_2) & v_{i_{p+1}}(y_2) \dots v_{i_{p+n}}(y_2) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ v_{i_1}(y_p) & v_{i_2}(y_p) \dots v_{i_p}(y_p) & v_{i_{p+1}}(y_p) \dots v_{i_{p+n}}(y_p) \\ a_{i_{p+1} i_1} & a_{i_{p+1} i_2} \dots a_{i_{p+1} i_p} & a_{i_{p+1} i_{p+1}} \dots a_{i_{p+1} i_{p+n}} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{i_{p+n} i_1} & a_{i_{p+n} i_2} \dots a_{i_{p+n} i_p} & a_{i_{p+n} i_{p+1}} \dots a_{i_{p+n} i_{p+n}} \end{vmatrix}$$

I termini di questa somma si otterranno facendo, come si è detto, itte le $D_{m,n+p}$ disposizioni senza ripetizione $i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} \dots i_{p+n}$ degli numeri $1, 2, \dots, m$ a $p+n$ a $p+n$. Ma siccome

$$D_{m,n+p} = D_{m,p} \,.\, D_{m-p,n} = p!\, C_{m,p} \,.\, D_{m-p,n}$$

oi potremo fare prima tutte le $C_{m,p}$ combinazioni $i_1 i_2 \dots i_p$ degli m ımeri $1, 2, \dots, m$ a p a p, eseguire poi su ogni combinazione tutte $p!$ permutazioni, e completare infine ogni permutazione con tutte disposizioni dei rimanenti $m-p$ numeri a n a n.

Se $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ è una particolare delle $C_{m,p}$ combinazioni, $p!$ permutazioni effettuate su essa ci daranno $p!$ determinanti fferenti solo pel segno, e da prendersi col segno $+$ o $-$, secondo e la permutazione dedotta dalla fondamentale $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ sia classe pari o di classe dispari. Basterà dunque considerare nella (8) ltanto il determinante (che chiameremo V) corrispondente alla per-ıtazione fondamentale $i_1 < i_2 \dots < i_p$ e moltiplicarlo per la somma:

$$\Sigma \pm u_{i_1}(x_1)\, u_{i_2}(x_2) \dots u_{i_p}(x_p)$$

e comprende $p!$ prodotti da prendere col $+$ o col $-$ secondo pra si è detto. Questa somma rappresenta per definizione il deter-inante:

$$u(x_1 x_2 \dots x_p) = \begin{vmatrix} u_{i_1}(x_1) & u_{i_1}(x_2) \dots u_{i_1}(x_p) \\ u_{i_2}(x_1) & u_{i_2}(x_2) \dots u_{i_2}(x_p) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ u_{i_p}(x_1) & u_{i_p}(x_2) \dots u_{i_p}(x_p) \end{vmatrix}$$

sicchè alla combinazione particolare da noi scelta $i_1 < i_2 < \dots < i_p$, rrisponderà la somma

$$\Sigma\, u(x_1 x_2 \dots x_p)\, V\, (y_1 y_2 \dots y_p)$$

estesa alle disposizioni senza ripetizione $i_{p+1}\, i_{p+2} \ldots i_{p+n}$ dei rimanenti $m-p$ indici a n a n.

Ma siccome

$$D_{m-p,n} = n!\, C_{m-p,n}$$

potremo fare prima tutte le combinazioni senza ripetizione a n a n ed eseguire poi su ciascuna di esse le $n!$ permutazioni.

Se $i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_{p+n}$ è una particolare di queste $C_{m-p,n}$ combinazioni, si riconosce subito che, eseguendo su essa le $n!$ permutazioni, queste danno nella (8) $n!$ determinanti eguali in valore assoluto ed in segno, perchè l'inversione di due qualunque degli indici $i_{p+1} i_{p+2} \ldots i_{p+n}$ produce lo scambio simultaneo di due delle ultime n linee e di due delle ultime n colonne. La somma di questi $n!$ determinanti eguali si otterrà dunque moltiplicando per $n!$ il determinante V corrispondente alla permutazione fondamentale

$$i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_{p+n}.$$

Potremo dunque concludere che alla combinazione iniziale scelta $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ corrisponde la somma:

$$n!\, \Sigma\, u\,(x_1 x_2 \ldots x_p)\, V\,(y_1 y_2 \ldots y_p)$$

estesa soltanto alle combinazioni $i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_{p+n}$ dei rimanenti $m-p$ indici a n a n.

Sostituendo questo risultato nella espressione della $D\left(\lambda \begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x \\ y_1 y_2 \ldots y \end{matrix}\right)$ e ricordando che [pag. 2] n varia da 0 fino ad $m-p$ al più, avremo:

$$(9) \qquad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1 x_2 \ldots x_p \\ y_1 y_2 \ldots y_p \end{matrix}\right) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} u\,(x_1 x_2 \ldots x_p) \sum_{n=0}^{m-p} \lambda^n\, V\,(y_1 y_2 \ldots y_p)$$

dove nel determinante V bisognerà eseguire (per ogni combinazione $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ e per ogni valore di n) tutte le combinazioni $i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_{p+n}$ dei rimanenti $m-p$ indici a n a n. Ma è facile riconoscere che i termini della $\sum_{n=0}^{m-p}$ si ottengono sviluppando secondo le potenze crescenti di λ il determinante:

$$\begin{vmatrix} v_{i_1}(y_1) & v_{i_2}(y_1) \ldots\ldots v_{i_p}(y_1) & v_{i_{p+1}}(y_1) \ldots\ldots\ldots v_{i_m}(y_1) \\ v_{i_1}(y_2) & v_{i_2}(y_2) \ldots\ldots v_{i_p}(y_2) & v_{i_{p+1}}(y_2) \ldots\ldots\ldots v_{i_m}(y_2) \\ \vdots & & \\ v_{i_1}(y_p) & v_{i_2}(y_p) \ldots\ldots v_{i_p}(y_p) & v_{i_{p+1}}(y_p) \ldots\ldots\ldots v_{i_m}(y_p) \\ \lambda a_{i_{p+1} i_1} & \lambda a_{i_{p+1} i_2} \ldots \lambda a_{i_{p+1} i_p} & 1 + \lambda a_{i_{p+1} i_{p+1}} \ldots \lambda a_{i_{p+1} i_m} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{i_m i_1} & \lambda a_{i_m i_p} \ldots \lambda a_{i_m i_p} & \lambda a_{i_m i_{p+1}} \ldots\ldots\ldots 1 + \lambda a_{i_m i_m} \end{vmatrix}$$

In questo determinante si ha per ipotesi

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_p \qquad \text{e} \qquad i_{p+1} < i_{p+2} < \ldots < i_m:$$

però potrà darsi che sia $i_{p+k} < i_h$ per

$$k = 1, 2, \ldots, n \qquad \text{e per} \qquad h = 1, 2, \ldots, p;$$

cioè le funzioni v non saranno in generale disposte secondo l'ordine crescente dei loro indici. Se vogliamo che compaiano nel determinante disposte in quest'ordine, dovremo trasportare le prime p colonne ad occupare rispettivamente il posto delle colonne $i_1^{ma}\, i_2^{ma} \dots i_p^{ma}$. Così il determinante cambierà in generale di segno; per evitare ciò noi trasporteremo anche le prime p linee al posto delle linee $i_1^{ma}\, i_2^{ma} \dots i_p^{ma}$ e così avremo disposto linee e colonne nell'ordine naturale dei loro indici, senza alterare neppure il segno del determinante. In seguito a queste trasformazioni la formola (9) potrà scriversi sotto la forma:

$$
\text{10)} \qquad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ y_1 y_2 \dots y_p \end{matrix}\right) =
$$

$$
= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \begin{vmatrix} u_{i_1}(x_1) & u_{i_1}(x_2) \dots u_{i_1}(x_p) \\ u_{i_2}(x_1) & u_{i_2}(x_2) \dots u_{i_2}(x_p) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ u_{i_p}(x_1) & u_{i_p}(x_2) \dots u_{i_p}(x_p) \end{vmatrix}
\begin{array}{c}
\begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \dots\dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & 1+\lambda a_{22} \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1(y_1) & v_2(y_2) \dots\dots & v_m(y_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1(y_2) & v_2(y_2) \dots\dots & v_m(y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1(y_p) & v_2(y_p) \dots\dots & v_m(y_p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \dots\dots & 1+\lambda a_{mm} \end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ i_1^{ma} \text{ linea} \\ \\ i_2^{ma} \text{ linea} \\ \\ i_p^{ma} \text{ linea} \\ \\ \\ \end{array}
$$

ove la somma a 2° membro conterrà $\binom{m}{p}$ termini, quante sono le combinazioni $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ degli m numeri $1, 2, \dots m$ a p a p.

In particolare per $p = 0$, le u e v scompaiono e resta:

$$
\text{)} \qquad D[\lambda] = \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \dots\dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & 1+\lambda a_{22} \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \dots\dots & 1+\lambda a_{mm} \end{vmatrix}
$$

Possiamo concludere col:

TEOREMA I. — *Se il nucleo* k(xy) *dell'equazione* (1) *è del tipo* (7) *le ie* (2) *e* (3) *si riducono a somme: la somma* (3) *può trasformarsi nel erminante* (11), *e la* (2) *è dello stesso tipo del nucleo, cioè una somma prodotti d'una funzione delle sole variabili* $x_1 x_2 \dots x_p$ *per una fune delle sole variabili* $y_1 y_2 \dots y_p$.

Osservando ora che nel determinante di ordine m della (10), la rice delle $m - p$ linee non contenenti le funzioni v, appartiene leterminante $D[\lambda]$, questa matrice sarà nulla, se $D[\lambda]$ ha la caeristica $m - p - 1$. Ma in tal caso anche il determinante stesso enticamente nullo. E allora la (10) ci dice che:

COROLLARIO. — *Condizione necessaria e sufficiente perchè i minori redholm (cioè le somme* (2)) *siano tutti nulli identicamente fino a i di ordine* p *inclusi (cioè con* p *parametri) è che la caratteristica leterminante* $D[\lambda]$ *sia* $m - p - 1$.

3. Il teorema primo e il suo corollario, oltre rivelarci una proprietà interessante delle somme (2) e (3) ci permetteranno ora di pervenire alla formola risolutiva che cerchiamo.

Indichiamo in generale con $A\begin{pmatrix} a\,b\ldots c \\ \alpha\,\beta\ldots\gamma \end{pmatrix}$ il minore del determinante $D[\lambda]$ formato colle linee $a, b, \ldots, c$ e colle colonne $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ col segno che gli compete secondo che sia di classe pari o dispari. Immaginando allora sviluppato il determinante di ordine m della (10) secondo i minori della matrice delle p linee $i_1 i_2 \ldots i_p$ potremo scrivere:

$$(12)\qquad D\begin{pmatrix} \lambda & x_1 x_2 \ldots x_p \\ & y_1 y_2 \ldots y_p \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \begin{vmatrix} u_{i_1}(x_1) & u_{i_1}(x_2) \ldots u_{i_1}(x_p) \\ u_{i_2}(x_1) & u_{i_2}(x_2) \ldots u_{i_2}(x_p) \\ \vdots & \\ u_{i_p}(x_1) & u_{i_p}(x_2) \ldots u_{i_p}(x_p) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \sum_{r_1 < r_2 < \ldots < r_p} \begin{vmatrix} v_{r_1}(y_1) & v_{r_2}(y_1) \ldots v_{r_p}(y_1) \\ v_{r_1}(y_2) & v_{r_2}(y_2) \ldots v_{r_p}(y_2) \\ \vdots & \\ v_{r_1}(y_p) & v_{r_2}(y_p) \ldots v_{r_p}(y_p) \end{vmatrix} A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} \ldots i_m \\ r_{p+1} & r_{p+2} \ldots r_m \end{pmatrix}.$$

Ricordo ora d'aver rigorosamente dimostrato in una mia nota [1] il seguente teorema: *se un determinante di ordine* m *è nullo ed ha la caratteristica* m — p (p = 1, 2, ..., m — 1), *allora i minori di ordine* m — p *d'ogni matrice di* m — p *colonne sono proporzionali ai corrispondenti minori d'ordine* m — p *d'ogni altra matrice di* m — p *colonne.* Ciò posto supponiamo che la caratteristica del determinante $D(\lambda)$ sia $m - p$. In virtù del citato teorema potremo scrivere:

$$(13)\qquad \frac{A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} \ldots i_m \\ r_{p+1} & r_{p+2} \ldots r_m \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} j_{p+1} & j_{p+2} \ldots j_m \\ r_{p+1} & r_{p+2} \ldots r_m \end{pmatrix}} = \frac{A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} \ldots i_m \\ \rho_{p+1} & \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} j_{p+1} & j_{p+2} \ldots j_m \\ \rho_{p+1} & \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix}}$$

Sostituendo in (12) l'espressione di A ricavata da (13) segue:

$$(14)\qquad D\begin{pmatrix} \lambda & x_1 x_2 \ldots x_p \\ & y_1 y_2 \ldots y_p \end{pmatrix} = \frac{1}{A\begin{pmatrix} j_{p+1} & j_{p+2} \ldots j_m \\ \rho_{p+1} & \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix}} \times$$

$$\times \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \begin{vmatrix} u_{i_1}(x_1) & u_{i_1}(x_2) \ldots u_{i_1}(x_p) \\ u_{i_2}(x_1) & u_{i_2}(x_2) \ldots u_{i_2}(x_p) \\ \vdots & \\ u_{i_p}(x_1) & u_{i_p}(x_2) \ldots u_{i_p}(x_p) \end{vmatrix} A\begin{pmatrix} i_{p+1} & i_{p+2} \ldots i_m \\ \rho_{p+1} & \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sum_{r_1 < r_2 < \ldots < r_p} \begin{vmatrix} v_{r_1}(y_1) & v_{r_2}(y_1) \ldots v_{r_p}(y_1) \\ v_{r_1}(y_2) & v_{r_2}(y_2) \ldots v_{r_p}(y_2) \\ \vdots & \\ v_{r_1}(y_p) & v_{r_2}(y_p) \ldots v_{r_p}(y_p) \end{vmatrix} A\begin{pmatrix} j_{p+1} & j_{p+2} \ldots j_m \\ r_{p+1} & r_{p+2} \ldots r_m \end{pmatrix}.$$

[1] " Generalizzazione d'un teorema sui determinanti ". *Periodico di Matematica*, Anno XXIX, fasc. II, novembre 1913.

Si vede che mentre in (12) la seconda Σ dipende dalla prima a causa degli indici $i_{p+1}\, i_{p+2} \ldots i_m$. invece nella (14) le due Σ sono affatto indipendenti l'una dall'altra, e ciascuna rappresenta un determinante di ordine m, di modo che la (14) può scriversi nel modo seguente:

$$(15) \qquad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_p \\ y_1\, y_2 \ldots y_p \end{matrix}\right) = \frac{1}{A\begin{pmatrix} j_{p+1}\; j_{p+2} \ldots j_m \\ \rho_{p+1}\; \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix}} \times$$

$$\begin{array}{c} \\ \times \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \text{colonna} & \text{colonna} & \text{colonna} \\ & & \rho_1^{\text{ma}} & \rho_2^{\text{ma}} & \rho_p^{\text{ma}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \ldots\ldots u_1(x_1) \ldots u_1(x_2) \ldots u_1(x_p) \ldots\ldots \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & 1+\lambda a_{22} \ldots u_2(x_1) \ldots u_2(x_2) \ldots u_2(x_p) \ldots\ldots \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \ldots\; u_m(x_1) \ldots u_m(x_2) \ldots u_m(x_p) \ldots 1+\lambda a_{mm} \end{vmatrix} \end{array} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} 1+\lambda a_{11} & \lambda a_{12} \ldots\ldots \lambda a_{1m} \\ \vdots & \vdots \\ v_1(y_1) & v_2(y_1) \ldots\ldots v_m(y_1) \\ \vdots & \vdots \\ v_1(y_2) & v_2(y_2) \ldots\ldots v_m(y_2) \\ \vdots & \vdots \\ v_1(y_p) & v_2(y_p) \ldots\ldots v_m(y_p) \\ \vdots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} \ldots 1+\lambda a_{mm} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ j_1^{\text{ma}} \text{ linea} \\ \\ j_2^{\text{ma}} \text{ linea} \\ \\ j_p^{\text{ma}} \text{ linea} \\ \\ \\ \end{array}$$

dove i due determinanti sviluppati rispettivamente secondo le p colonne $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p$ e secondo le p linee $j_1 j_2 \ldots j_p$ danno rispettivamente le due somme che figurano nella (14).

Le $m-p$ linee $j_{p+1}\, j_{p+2} \ldots j_m$ e le $m-p$ colonne $\rho_{p+1} \rho_{p+2} \ldots \rho_m$ possono evidentemente essere scelte a piacere, senza che varii il secondo membro della (15), purchè $A\begin{pmatrix} j_{p+1}\, j_{p+2} \ldots j_m \\ \rho_{p+1}\, \rho_{p+2} \ldots \rho_m \end{pmatrix}$ sia diverso da zero. Indicando allora con $\frac{1}{c}$ questo determinante A costante e con Φ e Ψ i due determinanti funzionali della (15), e confrontando la (15) colla (4) e colla (6) se ne ricavano le due eguaglianze:

$$(16) \quad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_{h-1}\; x\;\; x_{h+1} \ldots x_p \\ y_1\, y_2 \ldots y_{h-1}\, y_h\, y_{h+1} \ldots y_p \end{matrix}\right) =$$

$$= c\,.\,\Phi\,(x_1\, x_2 \ldots x_{h-1}\, x\, x_{h+1} \ldots x_p)\,.\,\Psi\,(y_1\, y_2 \ldots y_p) \qquad h = 1, 2, \ldots p,$$

$$(17) \quad D\left(\lambda \begin{matrix} x_1\, x_2 \ldots x_{h-1}\, x_h\, x_{h+1} \ldots x_p \\ y_1\, y_2 \ldots y_{h-1}\; x\;\; y_{h+1} \ldots y_p \end{matrix}\right) =$$

$$= c\,.\,\Phi\,(x_1\, x_2 \ldots x_p)\,.\,\Psi\,(y_1\, y_2 \ldots y_{h-1}\, x\, y_{h+1} \ldots y_p) \qquad h = 1, 2, \ldots p.$$

Se ne deduce il seguente notevole

Teorema II. — *Se λ è radice dell'equazione* $D(\lambda) = 0$ *ed* **annulla** *tutti i minori di Fredholm fino a quelli di ordine* $p - 1$ ***inclusi*** [*se cioè* (*v. Corollario di pag.* 5) *il determinante* (11) *ha la caratteristica* $m - p$] *allora e soltanto allora, la soluzione* (4) *dell'equazione omogenea e la soluzione* (6) *dell'equazione coniugata si spezzano nel prodotto di una funzione delle* $x_1 x_2 \dots x_p$ *per una funzione delle* $y_1 y_2 \dots y_p$.

Questo teorema ci permette di trasformare il teorema di Fredholm, enunciato a pag. 1, nei due corollari che seguono, i quali esprimono un risultato assai più utile e semplice in pratica, *quando il nucleo* $k(xy)$ *sia del tipo* (7).

Sostituendo infatti la (16) in (1) e dividendone poi ambo i membri pel fattore numerico diverso da zero $c\Psi(y_1 y_2 \dots y_p)$ segue il

Corollario I. — *Le* p *soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono espresse dal determinante*

$$(18) \qquad \varphi(x) = \Phi(x_1\, x_2 \dots x_{h-1}\, x\, x_{h-1} \dots x_p) \qquad h = 1, 2, \dots, p.$$

Analogamente sostituendo la soluzione (17) in (5) e dividendone poi ambo i membri pel fattore numerico diverso da zero $c\Phi(x_1 x_2 \dots x_p)$ se ne deduce il

Corollario II. — *Le* p *soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione coniugata sono espresse dal determinante*

$$(19) \qquad \psi(x) = \Psi(y_1\, y_2 \dots y_{h-1}\, x\, y_{h+1} \dots y_p) \qquad h = 1, 2, \dots, p.$$

Cosicchè nelle due funzioni Φ e Ψ che figurano nella (15) noi abbiamo scoperto contemporaneamente e rispettivamente la soluzione dell'equazione omogenea e quella della sua coniugata.

È chiaro che se il nucleo è simmetrico le due soluzioni Φ e Ψ sono comuni alla (1) e alla (5).

4. Crediamo ora opportuno verificare l'esattezza delle formole (18) e (19) con un esempio numerico.

Dato ad es. il nucleo

$$\begin{aligned} k(xy) &= 30x^2y^2 - 10y^2 - 24xy + 12y + 1 \\ &= (3x^2 - 1)\,10y^2 + (1 - 2x)\,12y + 1 \end{aligned}$$

potremo porre:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 3x^2 - 1 \qquad & v_1(y) &= 10y^2 \\ u_2(x) &= 1 - 2x & v_2(y) &= 12y \\ u_3(x) &= 1 & v_3(y) &= 1. \end{aligned}$$

E allora si trova facilmente:

$$D[\lambda] = \begin{vmatrix} 1 + \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & 1 + \lambda_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & 1 + \lambda_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{8}{3}\lambda & 3\lambda & 0 \\ -\frac{5}{3}\lambda & 1 - 2\lambda & 0 \\ \frac{10}{3}\lambda & 6\lambda & 1 + \lambda \end{vmatrix}$$

ıe per $\lambda = -1$ si annulla ed ha la caratteristica 1, essendo:

$$D[-1] = \begin{vmatrix} -\frac{5}{3} & -3 & 0 \\ \frac{5}{3} & 3 & 0 \\ -\frac{10}{3} & -6 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Per la formola (18) avremo allora che l'equazione

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 k(xy)\, \varphi(y) = 0.$$

rà per $\lambda = -1$ le due soluzioni linearmente indipendenti:

$$\varphi_1(x) = \begin{vmatrix} -1 & u_1(x_1) & u_1(x) \\ 1 & u_2(x_1) & u_2(x) \\ -2 & u_3(x_1) & u_3(x) \end{vmatrix} \qquad \varphi_2(x) = \begin{vmatrix} -1 & u_1(x) & u_1(x_2) \\ 1 & u_2(x) & u_2(x_2) \\ -2 & u_3(x) & u_3(x_2) \end{vmatrix}$$

ando si scelgano per x_1 e x_2 due numeri diversi. Ad es. per $x_1 \equiv 0$, $=1$ si trova che

$$\varphi_1(x) = 3x^2 - 2x \qquad \varphi_2(x) \equiv x^2 - 2x + 1$$

ıo due soluzioni linearmente indipendenti dalla (1), com'è facile ificare mediante sostituzione.

Analogamente per la formola (19) avremo che l'equazione

$$\psi(x) + \lambda \int_0^1 k(yx)\, \psi(y)\, dy = 0$$

netterà per $\lambda = -1$, le due soluzioni linearmente indipendenti:

$$\psi_1(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ v_1(y_2) & v_2(y_2) & v_3(y_2) \\ \frac{5}{3} & 3 & 0 \end{vmatrix} \qquad \psi_2(x) = \begin{vmatrix} v_1(y_1) & v_2(y_1) & v_3(y_1) \\ v_1(x) & v_2(x) & v_3(x) \\ \frac{5}{3} & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

ıdo si scelgano per y_1 e y_2 due numeri diversi fra loro. Ad es. $y_2 = 0$, $y_1 = 1$ si trova che

$$\psi_1(x) = 2x - 3x^2 \qquad \psi_2(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

due soluzioni linearmente indipendenti della (5), com'è facile ficare mediante sostituzione.

LUIGI TOCCHI.

SULLE MISURE DEI RAGGI DELLE TRE SFERE DI "LEMOINE"

pel tetraedro isodinamico

1. Il prof. NEUBERG nel suo bellissimo *Mémoire sur le tétraèdre* pubblicato a Bruxelles nel 1884, espresse il desiderio che fossero calcolati i raggi delle tre sfere di LEMOINE relative al tetraedro isodinamico, cioè al tetraedro pel quale sono costanti i prodotti delle misure degli spigoli opposti. In un mio articolo, pubblicato nel *Bollettino di Matematica*, nel quale studiai la prima famiglia delle sfere di TUCKER, e particolarmente la prima sfera di LEMOINE, esposi un procedimento atto a trovare la misura del raggio ρ_1 di questa sfera; ivi pervenni alla formula (29). Ma un esame più accurato del laborioso calcolo all'uopo richiesto mi portò a conoscenza di un errore nella formula (19) dell'articolo stesso, la quale deve avere il p^8 affetto dal coefficiente $\frac{1}{16}$.

Naturalmente alcune delle formule che seguono la (19) e la (29) stesse sono alterate: senza riportare qui le formule modificate — cosa che il cortese lettore può fare da sè — segno qui sotto come dev'essere scritta la formula là segnata col numero (29): essa diventa

$$\rho_1 = \frac{p^2 \, . \, \sigma \, . \, \mathrm{R}}{2 \, . \, s \, . \sqrt{3}} \tag{1}$$

dove è

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_1^4{}_{ik} l_{ik}^{\,2} \\ s &= \sum_1^4{}_i \mathrm{R}_i \alpha_i \\ p^2 &= l_{12} \, . \, l_{34} = l_{13} \, . \, l_{24} = l_{14} \, . \, l_{23} \end{aligned} \right. \tag{2}$$

ed R indica la misura del raggio della sfera circoscritta al tetraedro.

Voglio esporre in questo pregevole *Periodico* — che spero accoglierà con la consueta cortesia le mie analoghe ricerche sul pentaedro di S_4 — il procedimento per calcolare la misura del raggio ρ_2 della seconda e del raggio ρ_3 della terza sfera di LEMOINE e comincio dal calcolo di ρ_3.

(1) In omaggio alla denominazione impostale dal prof. NEUBERG, continuo a chiamare *terza sfera di* LEMOINE la sfera in discorso. In un mio articolo sul *pentaedro isodinamico o di egual momento di* S_4 ho chiamato *seconda ipersfera* di LEMOINE la corrispondente di questa sfera per ragione di simmetria.

2. È noto che se per il punto di LEMOINE di un tetraedro isodinamico — punto comune alle congiungenti i vertici coi punti di LEMOINE delle facce opposte — conduciamo i piani paralleli ai piani tangenti nei vertici alla sfera circoscritta, questi piani segano le rette degli spigoli in *dodici* punti giacenti sopra una sfera — *terza sfera di* LEMOINE.

Indichiamo ora con A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici del tetraedro in discorso e poniamo anche qui:

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1P_{12}:P_{12}A_2 = x'_{12}; & A_2P_{23}:P_{23}A_3 = x'_{23}; & A_3P_{31}:P_{31}A_1 = x'_{13} \\ A_1Q_{12}:Q_{12}A_2 = x_{12}\,; & A_2Q_{23}:Q_{23}A_3 = x_{23}\,; & A_3Q_{31}:Q_{31}A_1 = x_{13} \\ A_4P_{41}:P_{41}A_1 = x'_{14}; & A_2P_{24}:P_{24}A_4 = x'_{24}; & A_3P_{34}:P_{34}A_1 = x'_{34} \\ A_4Q_{41}:Q_{41}A_1 = x_{14}\,; & A_2Q_{24}:Q_{24}A_4 = x_{24}\,; & A_3Q_{34}:Q_{31}A_1 = x_{34}. \end{array}\right.$$

Si dimostra che le equazioni:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{12} = \dfrac{1}{x'_{13}} = \dfrac{1}{x'_{14}} \\ x_{23} = x_{24} = \dfrac{1}{x'_{12}} \\ x_{13} = x_{34} = \dfrac{1}{x'_{23}} \\ x_{14} = \dfrac{1}{x'_{24}} = \dfrac{1}{x'_{34}} \end{array}\right.$$

definiscono una famiglia di sfere che chiameremo *terza famiglia delle sfere di* TUCKER.

Queste danno, essendo λ una funzione simmetrica e del secondo grado nelle l_{ik}:

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} x_{12} + 1 = \dfrac{l_{13}\,.\,l_{12}}{l_{23}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ x_{23} + 1 = \dfrac{l_{12}\,.\,l_{23}}{l_{13}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ x_{13} + 1 = \dfrac{l_{13}\,.\,l_{23}}{l_{12}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ x_{14} + 1 = \dfrac{l_{14}\,.\,l_{24}}{l_{12}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}. \end{array}\right.$$

A un determinato valore di λ corrisponde una sfera della famiglia: per trovare il valore di λ che individua la *terza sfera di* LEMOINE occorre un procedimento non molto breve, che non è opportuno qui riportare perchè si trova esposto per il pentaedro di S_4 in un mio articolo già inserito in questo pregevole *Periodico.* [1]

[1] Perchè il lettore possa leggere l'articolo sopra citato e metterlo nel medesimo tempo in corrispondenza con l'articolo presente si noti che le posizioni (3) di quest'ultimo sono in parte modificate: si faccia in proposito il confronto.

Si perviene al valore di λ seguente:

$$\lambda = \frac{9}{16} \cdot \frac{p^8}{s^2} . \tag{6}$$

Allora le (5) possono completarsi così:

$$\left\{ \begin{aligned} x_{12} + 1 &= 1 + \frac{1}{x'_{13}} = 1 + \frac{1}{x'_{14}} = \frac{s}{3 \,.\, R_1\alpha_1} \\ x_{23} + 1 &= 1 + x_{24} = 1 + \frac{1}{x'_{12}} = \frac{s}{3 \,.\, R_2\alpha_2} \\ x_{13} + 1 &= 1 + x_{34} = 1 + \frac{1}{x'_{23}} = \frac{s}{3R_3\alpha_3} \\ x_{14} + 1 &= 1 + \frac{1}{x'_{24}} = 1 + \frac{1}{x'_{34}} = \frac{s}{3R_4\alpha_4} \end{aligned} \right. \tag{7}$$

e da queste si traggono, in particolare, i valori di

$$P_{12}Q_{12}, \qquad Q_{12}Q_{14}, \qquad Q_{12}Q_{23}$$

sotto le forme:

$$\left\{ \begin{aligned} (P_{12}Q_{12})^2 &= \frac{l_{12}^2}{s^2} \Big[(s - 3R_1\alpha_1) \,.\, \{ s - 3R_1\alpha_1 - 6R_2\alpha_2 \} + 9(R_2\alpha_2)^2 \Big] \\ (Q_{12}Q_{14})^2 &= \frac{l_{12}^2}{s^2} \Big[(s - 3R_1\alpha_1) \,.\, \{ s - 3R_2\alpha_2 - 3R_4\alpha_4 \} + 9R_2\alpha_2R_4\alpha_4 \Big] \\ (Q_{12}Q_{13})^2 &= \frac{l_{12}^2}{s^2} \Big[(s - 3R_1\alpha_1) \,.\, \{ s - 3R_2\alpha_2 - 3R_3\alpha_3 \} + 9R_2\alpha_2R_3\alpha_3 \Big] . \end{aligned} \right. \tag{8}$$

3. Chiamiamo ora V′ il volume del tetraedro $P_{12}Q_{12}Q_{13}Q_{14}$ inscritto nella terza sfera di Lemoine e T′ l'area del triangolo i cui lati sono misurati da:

$$(P_{12}Q_{12})(Q_{13}Q_{14}) \qquad (P_{12}Q_{13})(Q_{12}Q_{14}) \qquad (Q_{12}Q_{13})(P_{12}Q_{14}) \tag{9}$$

osservando che per essere equilateri ed uguali i triangoli

$$P_{12}Q_{13}Q_{14}, \qquad Q_{12}P_{23}P_{24}, \qquad P_{13}P_{24}Q_{23}, \qquad Q_{24}P_{14}Q_{34},$$

i lati del triangolo di area T′ sono proporzionali a $P_{12}Q_{12}$, $Q_{12}Q_{14}$ e il rapporto di proporzionalità è

$$\frac{3 \,.\, p^4}{s} . \tag{10}$$

Faremo ricorso alla formula di Staudt:

$$6 \,.\, \rho_3 \,.\, V' = T'. \tag{11}$$

e chiamiamo per un momento S l'area del triangolo i cui lati sono uguali a $P_{12}Q_{12}$, $Q_{12}Q_{14}$ e $Q_{12}Q_{13}$, o per maggior semplicità, uguali ad a, b, c.

Avremo:

$$(4S)^2 = a^2 \cdot \left\{ 2 \cdot b^2 + 2c^2 - a^2 - \frac{(b^2 - c^2)^2}{a^2} \right\} \tag{12}$$

e successivamente

$$\left\{ \begin{array}{l} b^2 - c^2 = \dfrac{3l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot (s - 3R_1\alpha_1 - 3R_2\alpha_2)(R_3\alpha_3 - R_4\alpha_4) \\ \dfrac{(b^2 - c^2)^2}{a^2} = 9 \cdot \dfrac{l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot (R_3\alpha_3 - R_4\alpha_4)^2; \end{array} \right. \tag{13}$$

poi è

$$\begin{aligned} 2(b^2 + c^2) - a^2 = \frac{l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot [\{3s + 3R_1\alpha_1 - 6R_2\alpha_2 - 6R_3\alpha_3 - 6R_4\alpha_4\}(s - 3R_1\alpha_1) + \\ + 18R_2\alpha_2R_3\alpha_3 + 18R_2\alpha_2R_4\alpha_4 - 9(R_2\alpha_2)^2] = \\ = \frac{3l_{12}^{\,2}}{s^2}\{-(s - 3R_1\alpha_1)^2 + 6R_2\alpha_2R_3\alpha_3 + 6R_2\alpha_2R_4\alpha_4 - 3(R_2\alpha_2)^2\}. \end{aligned}$$

Facendo allora le sostituzioni nella (12), si trova:

$$\begin{aligned} (4S)^2 = (P_{12}Q_{12})^2 \cdot \frac{3l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot \{-(s - 3R_1\alpha_1)^2 + 6R_2\alpha_2R_3\alpha_3 + 6R_2\alpha_2R_4\alpha_4 - \\ - 3(R_2\alpha_2)^2 - 3(R_3\alpha_3 - R_4\alpha_4)^2\} = \\ = (P_{12}Q_{12})^2 \frac{3l_{12}^{\,2}}{s^2}\{-(-2R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2 + R_3\alpha_3 + R_4\alpha_4)^2 + 6R_2\alpha_2R_3\alpha_3 + \\ + 6R_3\alpha_3R_4\alpha_4 + 6R_2\alpha_2R_4\alpha_4 - 3(R_2\alpha_2^{\,2}) - 3(R_3\alpha_3)^2 - 3(R_4\alpha_4)^2\} = \\ = (P_{12}Q_{12})^2 \frac{3l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot \{-(R_1\alpha_1 + R_2\alpha_2 + R_3\alpha_3 + R_4\alpha_4)^2 + 6R_1\alpha_1R_2\alpha_2 + \\ + 6R_1\alpha_1R_3\alpha_3 + 6R_1\alpha_1R_4\alpha_4 + 6R_2\alpha_2R_3\alpha_3 + 6R_3\alpha_3R_4\alpha_4 \\ + 6R_2\alpha_2R_4\alpha_4 - 3(R_1\alpha_1)^2 - 3(R_2\alpha_2)^2 - 3(R_3\alpha_3)^2 - 3(R_4\alpha_4)^2\} \\ = (P_{12}Q_{12})^2 \cdot \frac{3l_{12}^{\,2}}{s^2} \cdot \frac{p^4 \cdot \sigma^2 - 16 \cdot L^2}{4}, \end{aligned}$$

n

$$L^2 = \Sigma R_i^{\,2}\alpha_i^{\,2}.$$

Ora, siccome è:

$$s^2 = L^2 + \frac{p^4 \cdot \sigma^2}{8}, \tag{}$$

precedente formula diventa:

$$(4S)^2 = (P_{12}Q_{12})^2 \cdot \frac{3l_{12}^{\,2}}{4s^2} \cdot (3p^4 \cdot \sigma^2 - 16s^2). \tag{}$$

Avendosi poi

$$T' = \frac{9 \cdot p^8}{16 s^2} \cdot S,$$

sarà per la (15)

$$(16) \qquad T' = \frac{9 \cdot p^8}{16 \cdot s^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{l_{12}}{s} \cdot (P_{12}Q_{12}) \cdot \sqrt{3p^4 \cdot \sigma^2 - 16 \cdot s^2}.$$

Ricordiamo che si ha anche:

$$(17) \qquad V' = \frac{(P_{12}Q_{12})}{l_{12}} \cdot \frac{(A_1Q_{14})}{l_{14}} \cdot \frac{(A_1Q_{13})}{l_{13}} \cdot V$$

dove V indica il volume del tetraedro $A_1A_2A_3A_4$, volume che è misurato da $\frac{p^4 \cdot \sqrt{3}}{24 \cdot R}$.

Ma:

$$(18) \qquad (A_1Q_{14}) = 3 \cdot \frac{R_4\alpha_4}{s} \cdot l_{14}, \qquad (A_1Q_{13}) = 3 \cdot \frac{R_3\alpha_3}{s} \cdot l_{13},$$

per cui la (17) prende la forma:

$$(19) \qquad V' = \frac{3 \cdot p^8 \cdot (P_{12}Q_{12}) \cdot l_{12} \cdot \sqrt{3}}{128 \cdot R \cdot s^2}.$$

Dalla (11) e dalla (19) segue allora

$$(20) \qquad \rho_3 = \frac{R \cdot \sqrt{3p^4 \cdot \sigma^2 - 16s^2}}{2s}.$$

Questa dà la misura del raggio della terza sfera di Lemoine pel tetraedro isodinamico.

4. Il raggio ρ_2 della seconda sfera si può calcolare facendo ricorso a una formula data dal prof. Neuberg nella citata opera: essa è

$$(21) \qquad \rho_2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{R^2 + 4 \cdot \rho_3^2}.$$

Facendo in questa la sostituzione servendosi della (20) si trova:

$$\rho_2 = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{s^2} \cdot (3p^4 \cdot \sigma^2 - 16s^2)}$$

$$= \frac{R}{3s} \cdot \sqrt{3 \cdot p^4 \cdot \sigma^2 - 15s^2}$$

$$(22) \qquad = \frac{R \cdot \sqrt{p^4\sigma^2 - 5s^2}}{s \cdot \sqrt{3}}.$$

Riassumendo, abbiamo trovato:

$$(23)\quad \begin{cases} \rho_1 = \dfrac{p^2 . \sigma . R}{2s . \sqrt{3}} \\ \rho_2 = \dfrac{R . \sqrt{p^4\sigma^2 - 5s^2}}{s\sqrt{3}} \\ \rho_3 = \dfrac{R . \sqrt{3p^4\sigma^2 - 16s^2}}{2s} . \end{cases}$$

Ma della seconda sfera — che contiene i punti ove le parallele agli spigoli condotte pel punto di LEMOINE incontrano le facce — vogliamo trattare un po' più diffusamente: lo faremo in un prossimo articolo.

ENRICO PICCIOLI.

INTORNO AD UN TEOREMA DEL SIGNOR JORDAN

I. Supponiamo che fra le variabili

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

e:

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

si pongano delle relazioni algebriche:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (1)$$

dove le φ posson sempre supporsi funzioni razionali intere. Sia:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

una funzione variabile per ogni sostituzione fra le x; cosicchè, come è noto, ciascuna delle x si esprimerà in funzione razionale di V e delle funzioni simmetriche elementari:

$$\begin{cases} p_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \\ p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{m-1}x_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m = x_1x_2 \ldots x_m \end{cases} \qquad (2)$$

La φ_1 può assumer la forma:

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) = \varphi'_1(V_1; p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \quad (3)$$

dove potremo sempre ritenere φ'_1 funzione razionale rispetto alle p, z ed intera rispetto a V che, come sappiamo, è radice di una certa [1] equazione, di grado $N = m!$:

$$\Pi(V) = 0 \quad (4)$$

i cui coefficienti sono formati razionalmente nelle p.

2. Se consideriamo le due funzioni intere in X:

$$\begin{cases} \varphi'(X; p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \Pi(X) \end{cases}$$

potremo scriver sempre, identicamente rispetto all'indeterminata X:

$$\varphi'(X; p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) = \rho(X)\Pi(X) + AN^{N-1} + BX^{N-2} + \ldots \quad (5)$$

cosicchè la (3) si riduce sempre alla forma:

$$AX^{N-1} + BX^{N-2} + \ldots = 0. \quad (6)$$

Le A, B, ... sono funzioni razionali delle p, z; esse non saranno tutte nulle identicamente, poichè altrimenti le (1), che sono conseguenza delle (6), sarebbero delle semplici identità, non delle vere relazioni fra le variabili x, z. Se, dunque, talune delle A, B, ... sono nulle, la (6) si ridurrà sempre alla forma:

$$\sigma(X) \equiv A_1X^M + B_1X^{M-1} + \ldots = 0 \quad (7)$$

in cui:

$$M \leqslant N - 1$$

ed A_1 non è nullo identicamente.

3. Se dividiamo $\sigma(X)$ pel coefficiente A_1 e cerchiamo il massimo comun divisore $\Delta(X)$ fra la funzione di X così costruita e la $\Pi(X)$, i coefficienti di Δ si presenteranno come funzioni razionali delle p, z; d'altra parte, poichè le radici di (4) sono esprimibili con funzioni razionali delle x, anche i coefficienti di:

$$\Delta(X) = (X - V_1)(X - V_2)\ldots(X - V_\lambda) \quad (8)$$

saranno funzioni razionali delle x. Dalla identificazione di queste due diverse forme di $\Delta(X)$ otterremo delle relazioni della forma:

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_1(p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi_2(p_1, p_2, \ldots, p_m; z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad (9)$$

il cui complesso equivale le (1).

---

[1] JORDAN, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Art. 352. (Paris, 1870).

Così asserisce il signor Jordan [1] e ciò è giustificato dalle altre ipotesi, da lui fatte, circa la irreduttibilità delle equazioni fondamentali per le z, x; ipotesi che noi qui non facciamo.

4. Nel nostro caso converrà aggiungere alle (9) le solite equazioni di condizione:

$$\begin{cases} z_1(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ z_2(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (10)$$

che esprimono che i due polinomi $\sigma(X)$ e $H(X)$ hanno un divisore comune di grado λ. Ciò non pregiudica il risultato poichè tali equazioni (10) sono evidentemente della stessa forma delle (2) delle quali sarebbero un caso particolare.

Se, intanto, sono soddisfatte le (7) e le (10), l'equazione:

$$\sigma(X) = 0$$

avrà per radici:

$$V_1, V_2, \ldots, V_\lambda;$$

onde, se nella identità (5) poniamo $X = V$ (essendo V una qualunque delle $V_1, V_2, \ldots V_\lambda$) e teniamo presente la (4), si avrà come conseguenza delle (9):

$$\varphi'(V;\ p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

ossia, per la (3), appunto:

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0.$$

Concludiamo, dunque, che: *ad un sistema di un numero qualunque di relazioni della forma* (1) *può sempre sostituirsi un sistema equivalente della forma:*

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_1(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_2(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad (11)$$

5. Passiamo a dimostrare come ogni sistema della forma (11) si possa ulteriormente semplificare.

Come è noto, si può sempre costruire una funzione razionale:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

tale da aversi:

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = R(\Psi_1, \Psi_2, \ldots;\ p_1, p_2, \ldots, p_m)$$

---

[1] l. c., Art. 384.

e contemporaneamente:

$$\begin{cases} \Psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathrm{R}_1(\Psi;\ p_1, p_2, \ldots, p_m) \\ \Psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathrm{R}_2(\Psi;\ p_1, p_2, \ldots, p_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad (12)$$

dove le R sono simboli di funzioni razionali a coefficienti costanti (indipendenti, cioè, dalle variabili x e z). Dalle (11), allora, deduciamo, evidentemente, mediante le (12):

$$\begin{cases} \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \mathrm{R}(\Phi_1, \Phi_2, \ldots; p_1, p_2, \ldots, p_m) = \Phi(p_1, \ldots, p_m; z_1, \ldots, z_n) \\ \Phi_1(p_1, \ldots, p_m; z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{R}_1[\Phi(p_1, \ldots, p_m; z_1, \ldots, z_n); p_1, p_2, \ldots, p_m] \\ \Phi_2(p_1, \ldots, p_m; z_1, \ldots, z_n) = \mathrm{R}_2[\Phi(p_1, \ldots, p_m; z_1, \ldots, z_n); p_1, p_2, \ldots, p_m] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

e da questo sistema si può, inversamente, avvalendosi delle *identità* (12) dedurre il sistema (11) e quindi, pel prec. art., il sistema (1).

Si ha dunque il:

TEOREMA. — *Ad un sistema qualunque di relazioni della forma* (1) *si può sempre sostituire un sistema equivalente costituito da una unica relazione della forma:*

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

e da un certo numero di relazioni della forma:

$$\Theta(p_1, p_2, \ldots, p_m;\ z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0$$

essendo Ψ, Φ, Θ *funzioni razionali a coefficienti costanti.*

A. PALOMBY.

SU ALCUNE PROPRIETÀ DEI GRUPPI DI SOSTITUZIONI

1. È noto che un gruppo G di sostituzioni su elementi si può dare per mezzo di un certo numero $s_1, s_2, \ldots s_h$, delle sue sostituzioni, dette *generatrici*; allora si scrive

$$\mathrm{G} = [s_1,\ s_2, \ldots s_h]$$

intendendo, con questa scrittura, che le sostituzioni di G si ottengono tutte, per moltiplicazione, dalle s_i e dalle loro potenze.

Così, per es., il gruppo

$$G = [s]$$

è il gruppo ciclico formato da s e dalle sue potenze; il gruppo

$$G = [s_1, s_2]$$

conterrà tutte le sostituzioni della forma $s_1^{\alpha_1}, s_2^{\alpha_2}, \ldots$ con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ interi qualunque. Evidentemente nel gruppo precedente sono contenuti, come sottogruppi, i gruppi ciclici $[s_1]$, $[s_2]$; anzi possiamo anche scrivere

$$G = \{[s_1], [s_2]\}.$$

Più in generale se

$$H = (h_1, h_2, \ldots h_h); \qquad K = (k_1, k_2, \ldots k_k)$$

sono due gruppi di sostituzione sugli stessi elementi, degli ordini h e k risp., colla scrittura

$$G = [h_1, h_2, \ldots h_h; k_1, k_2, \ldots k_k] = [H, K]$$

intenderemo il gruppo delle sostituzioni che si ottengono moltiplicando, in un modo qualunque, le sostituzioni di H con quelle di K e viceversa.

Nasce qui adesso la quistione della determinazione dell'ordine, della transitività ecc. del gruppo generato da date sostituzioni o gruppi di sostituzioni.

Non è, in generale, agevole risolvere la quistione: noi qui ci limiteremo ad esporre un teorema che ha una certa generalità e a dedurne da esso altri ormai a tutti noti.

Due gruppi

$$G = (g_1 = 1, g_2, g_3, \ldots g_m)$$
$$G' = (g_1' = 1, g_2', g_3', \ldots g'_{m'})$$

degli ordini m ed m' si dicono *permutabili fra loro se*

$$g_\alpha \cdot g'_\beta = g'_{\beta_1} \cdot g_{\alpha_1} \tag{1}$$

per tutti i valori di α e β e per convenienti valori di α_1 e β_1.

Combinando, per moltiplicazione, le sostituzioni di G con quelle di G' si ha il gruppo $[G_m, G'_{m'}]$; determiniamo il suo ordine.

Se indichiamo con $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\mu)$ il loro sottogruppo comune, possiamo distribuire le sostituzioni di G e quelle di G' nei quadri:

$$G = \begin{cases} \gamma_1 = 1 \;\; \gamma_2 \;\; \gamma_3 \ldots \gamma_\mu \\ t_2 \;\; \gamma_2 t_2 \;\; \gamma_3 t_2 \ldots \gamma_\mu t_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ t_n \;\; \gamma_2 t_n \;\; \gamma_3 t_n \ldots \gamma_\mu t_n \end{cases} \qquad G' = \begin{cases} \gamma_1 = 1 \;\; \gamma_2 \;\; \gamma_3 \ldots \gamma_\mu \\ t'_2 \;\; \gamma_2 t'_2 \;\; \gamma_3 t'_2 \ldots \gamma_\mu t'_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ t'_{n'} \;\; \gamma_2 t'_{n'} \;\; \gamma_3 t'_{n'} \ldots \gamma_\mu t'_{n'} \end{cases} \tag{2}$$

formati dai periodi di 1ª specie di G e G', preso Γ per loro primo periodo comune, per cui $m = n\mu$, $m' = n'\mu$.

Si riconosce subito che tutte le sostituzioni di [G, G'] si riducono, per la (1), al tipo gg'. Tutti i possibili prodotti gg' sono formalmente in numero di $m \, . \, m'$, ma per valutare il numero effettivo di quelli diversi fra loro, procediamo come segue.

Avendosi, per (2)

$$g = \gamma_i \, t_h \, , \qquad g' = \gamma_j \, t'_k$$

sarà

$$gg' = \gamma_i \, t_h \, \gamma_j \, t'_k = \gamma_i \, (t_h \, \gamma_j) \, t'_k$$

ma, per (1)

$$t_h \, \gamma_j = \gamma_\lambda \, t_r$$

segue

$$gg' = \gamma_i \, \gamma_\lambda \, . \, t_r \, . \, t'_k = \gamma_l \, . \, t_r \, . \, t'_k \, .$$

Otterremo dunque tutti i prodotti distinti $g \, . \, g'$ dalla

$$\gamma_l \, t_r \, t'_k \, ,$$

facendo

$$l = 1, 2, \ldots \mu$$
$$r = 1, 2, \ldots n$$
$$k = 1, 2, \ldots n' ;$$

e quindi essi sono in numero di $\mu \, n \, n' = \frac{m \, . \, m'}{\mu}$.

Queste $\frac{m \, . \, m'}{\mu}$ sostituzioni sono poi tutte effettivamente distinte, poichè da

$$\gamma_l \, t_r \, t'_k = \gamma_{l'} \, t_{r'} \, t'_{k'}$$

seguirebbe

$$(\gamma_{l'} \, t_{r'})^{-1} \, . \, \gamma_l \, t_r = t'_{k'} \, t'^{-1}_k \, ,$$

onde la $t'_{k'} \, t'^{-1}_k$ di G' sarebbe anche di G e quindi di Γ, cioè

$$t'_{k'} = \gamma \, t'_k \, ,$$

contro la proprietà fondamentale dei periodi (2) di G'.

Si ha quindi

Teorema I. — *Se* G *e* G' *sono due gruppi di sostituzioni sopra lettere, degli ordini* m *ed* m' *risp., permutabili fra loro ed aventi il sottogruppo comune* Γ, *d'ordine* μ, *moltiplicando le sostituzioni del primo per quelle del secondo si ottiene un gruppo* [G, G'] d'ordine

$$N = \frac{m \, . \, m'}{\mu} \, . \text{ (1)}$$

(1) Cfr. anche Capelli, *Ist. di Analisi algebrica* (Napoli, 1909) pag. 108, nota 3. Per $\mu = 1$, si ha $N = m \, . \, m'$. Cfr. Petersen, *Teor. delle equaz. alg.*, traduzione Sforza-Rozzolino, pag. 96 (Napoli, 1891).

Reciprocamente:

Teorema II. — *Se moltiplicando (da una stessa parte) le sostituzioni di un gruppo* G *di ordine* m *per quelle di un gruppo* G′ *d'ordine* m′, *si forma un gruppo* H *di ordine* $N=\frac{m \cdot m'}{\mu}$, G *e* G′ *sono permutabili fra loro ed hanno a comune un sottogruppo* Γ *d'ordine* μ.

Infatti le sostituzioni $h=gg'$ di H si possono distribuire nei due quadri

$$\left\{\begin{array}{ccccc} g_1=1 & g_2 & g_3 & \ldots & g_m \\ t_2 & g_2 t_2 & g_3 t_2 & \ldots & g_m t_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{\frac{N}{m}} & g_2 t_{\frac{N}{m}} & g_3 t_{\frac{N}{m}} & \ldots & g_m t_{\frac{N}{m}} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} g'_1=1 & g'_2 & g'_3 & \ldots & g'_{m'} \\ s_2 & g'_2 s_2 & g'_3 s_2 & \ldots & g'_{m'} s_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{\frac{N}{m'}} & g_2' s_{\frac{N}{m'}} & g_3 s_{\frac{N}{m'}} & \ldots & g'_{m'} s_{\frac{N}{m'}} \end{array}\right.$$

ed una h pel 1° quadro è della forma $g_i t_h$ cioè gg', pel 2° è della forma $g'_j s_k$ cioè $g'g$, quindi i due gruppi G e G′ sono permutabili. Se poi si indica con μ′ l'ordine del loro sottogruppo comune Γ′ si vede facilmente, con ragionamento analogo a quello del teorema I, che $\mu'=\mu$ e quindi $\Gamma=\Gamma'$.

Il teor. I si generalizza facilmente come segue:

Se $G_{m_1}, G_{m_2}, G_{m_3}, \ldots G_{m_h}$ *sono* h *gruppi di sostituzioni sugli stessi elementi, e poniamo*

$$G_{N_{12}}=[G_{m_1}, G_{m_2}]$$
$$G_{N_{123}}=[G_{N_{12}}, G_{m_3}] \text{ ecc.}$$

inoltre G_{m_1} *e* G_{m_2} *sono permutabili fra loro ed hanno il sottogruppo comune* $\Gamma_{\mu_{12}}$; $G_{N_{12}}$ *e* G_{m_3} *sono permutabili fra loro ed hanno il sottogruppo comune* $\Gamma_{\mu_{123}}$ *ecc.; sarà:*

$$G=[G_{m_1}, G_{m_2}, \ldots G_{m_h}]$$

dell'ordine

$$N_{12\ldots h}=\frac{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_h}{\mu_{12} \cdot \mu_{123} \ldots \mu_{12\ldots h}}.$$

Dal I teorema deduciamo alcune conseguenze.

Se due gruppi G_m e $G'_{m'}$ sono tali che ciascuno di essi sia permutabile con ogni sostituzione dell'altro, allora, se Γ_μ è il loro sottogruppo comune, pel teor. I l'ordine di $H=[G_m, G'_{m'}]$ è $\frac{mm'}{\mu}$ e, per di più, in H i sottogruppi G e G′ saranno sottogruppi invarianti e pure Γ sarà sottogruppo invariante in H.

Infatti, indicando con $h=g \cdot g'$ una qualunque sostituzione di H, si ha:

$$h^{-1} G h=g'^{-1} g^{-1} G\, gg'=g'^{-1} G\, g'=G,$$

similmente

$$h^{-1} G' h=G'.$$

Per cui G e G′ sono sottogruppi invarianti in H e quindi tale sarà il loro sottogruppo comune Γ. Si ha così: [1]

TEOREMA III. — *Se* G_m *e* $G'_{m'}$ *sono due gruppi di sostituzioni degli ordini* m *ed* m′, *permutabili ciascuno con ogni sostituzione dell'altro, col sottogruppo comune* Γ_μ, *d'ordine* μ, *allora* $H = [G_m, G'_{m'}]$ *sarà dell'ordine* $\frac{mm'}{\mu}$ *e conterrà* G, G′ *e quindi* Γ *come sottogruppi invarianti.*

Sempre nelle stesse ipotesi si ha, indicando con g, g' due sostituzioni qualunque, l'una di G l'altra di G′, che la sostituzione

$$(gg')^{-1} \cdot (g'g) = (g'^{-1} g^{-1} g') \cdot g = g'^{-1} \cdot (g^{-1} g' g),$$

essendo $g'^{-1} g^{-1} g'$ in G e $g^{-1} g' g$ in G′, è sia in G che in G′ e quindi in Γ, per cui

$$g'g = gg' \cdot \gamma_i .$$

Cioè: [2]

TEOREMA IV. — *Se due gruppi* G *e* G′ *sono tali che ognuno di essi è permutabile con tutte le sostituzioni dell'altro, ogni singola sostituzione dell'uno sarà permutabile ad ogni singola sostituzione dell'altro a meno di una sostituzione del loro sottogruppo comune.*

Si abbia ora il gruppo H_h di ordine h e permutabile colla sostituzione T: il gruppo $[H_h, T]$ è dell'ordine $h\lambda$, essendo λ il più piccolo intero positivo pel quale T^λ appartiene ad H_h.

Infatti, poniamo

$$H = (h_1, h_2, \ldots h_h),$$

sia a il periodo di T, sarà

$$[h_1, h_2, \ldots h_h, T] = [h_1, h_2, \ldots h_h ; T, T^2, \ldots T^a].$$

Se λ è il più piccolo intero positivo per cui T^λ appartiene ad H_h, o, come si dice, il *periodo relativo* di T rispetto ad H_h, le sostituzioni $T^\lambda, T^{2\lambda}, \ldots T^{k\lambda} = T^a = 1$ formano il sottogruppo comune ad H_h e [T], e quindi, essendo H_h permutabile con [Γ], il gruppo $[H_h, T]$ ha l'ordine $\frac{ha}{k} = h\lambda$.

Le sostituzioni di $[H_h, T]$ si dispongono poi nei periodi

$$H_h, H_h T, H_h T^2, \ldots H_h T^{\lambda-1};$$

il che è ovvio perchè questi sono formati da sostituzioni di $[H_h, T]$ il cui numero è $h\lambda$, e tutte distinte, poichè se fosse $h_i T^r = h_j T^\rho$ (supposto $\rho > r$) si avrebbe

$$h_j^{-1} h_i = T^{\rho - r}$$

---

[1] Cfr. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni* ecc. (Pisa, 1900, pag. 39).
[2] Cfr. CAPELLI, *op. cit.*, pag. 108, nota 4.

e quindi, per l'ipotesi fatta su λ, $\rho = r$ e $i = j$. È appena necessario avvertire che il periodo relativo λ di T rispetto ad H, è divisore del periodo assoluto a. Si ha quindi [1]

Teorema V. — *Se il gruppo* H_h *dell'ordine* h *è permutabile colla sostituzione* T, *il gruppo* $[H_h, T]$ *è dell'ordine* $h\lambda$, *essendo* λ *il periodo relativo di* T *rispetto ad* H_h. *Precisamente, le sostituzioni di* $[H_h, T]$ *sono date dai* λ *periodi*

$$H_h, \ H_h T, \ H_h T^2, \dots H_h T^{\lambda-1},$$

ed il periodo relativo λ *di* T *è un divisore del periodo assoluto* a.

2. Sia G_m un gruppo d'ordine m, H_h un suo sottogruppo qualunque (invariante o no) d'ordine h e sia i l'indice di H in G, cioè $m = hi$. L'insieme K di tutte le sostituzioni di G, che trasformano H in sè medesimo, forma evidentemente un sottogruppo di G (che può coincidere anche con G) contenente H come sottogruppo invariante: allora le sostituzioni di G, rispetto a K, si distribuiscono nei periodi:

$$K, \ Kt_2, \ Kt_3, \dots Kt_j, \tag{1}$$

avendo indicato con j l'indice di K in G, per cui, se con k indichiamo l'ordine di K, sarà $m = kj$.

Ad ogni sostituzione g di G corrisponde una sostituzione

$$\gamma = \begin{pmatrix} Kg, & Kt_2g, \dots & Kt_jg \\ K, & Kt_2, \dots & Kt_j \end{pmatrix}$$

fra i periodi (1), tutte le γ così ottenute formano, come ben si sa, il *gruppo complementare* (*destrorso*) di G rispetto a K. Se lo si indica con Γ si scriverà $\Gamma = \frac{G}{K}$ e sarà Γ, in generale, isomorfo meriedricamente rispetto a G. Detto ρ il numero delle sostituzioni di G che danno origine ad una medesima in Γ, per avere ρ basta cercare quante sono le sostituzioni di G cui corrisponde l'identica in Γ. Se g è una siffatta sostituzione di G, si dovrà avere

$$Kg = K, \ Kt_2g = Kt_2, \dots Kt_jg = Kt_j,$$

ossia g si dovrà trovare in ciascuno dei gruppi

$$K, \ t_2^{-1}Kt_2, \dots t_j^{-1}Kt_j$$

che possono anche tutti od in parte coincidere.

All'identità del gruppo complementare $\Gamma = \frac{G}{K}$ corrispondono quindi in G tutte e sole le sostituzioni del sottogruppo Σ comune

[1] Cfr. Capelli, *op. cit.*, pag. 105, articoli 279-80.

a K ed a tutti i suoi trasformati $t_2^{-1}Kt_2$, $t_3^{-1}Kt_3$, $\ldots t_j^{-1}Kt_j$ in G. L'isomorfismo fra G e Γ sarà $(\rho, 1)$ se ρ è l'ordine di Σ.

Il gruppo Γ che opera sugli j elementi K, $Kt_2, \ldots Kt_j$ è certamente transitivo potendosi portare il suo primo elemento K in un altro qualunque Kt_s mediante la sostituzione di Γ corrispondente alla t_s di G.

Nel caso particolare di K invariante in G allora Σ coincide con K stesso e l'ordine del gruppo complementare $\Gamma = \frac{G}{K}$ è l'indice di K in G.

Indichiamo con ν l'ordine di Γ; alle k sostituzioni di G, formanti il gruppo K, corrispondono in Γ sostituzioni che non spostano il primo elemento K e perciò formanti un gruppo. Quale è l'ordine di questo gruppo? Basta evidentemente cercare il numero delle sostituzioni distinte di Γ che corrispondono alle k di K: alle ρ sostituzioni di K formanti il gruppo Σ corrisponde in Γ l'identità, per cui, distribuendo le sostituzioni di K rispetto a Σ, si vede che $\frac{k}{\rho}$ è l'ordine del sottogruppo di Γ le cui sostituzioni non spostano il primo elemento K. Segue di qui, per l'ordine ν di Γ, che è [1]

$$\nu = \frac{k}{\rho} \cdot j = \frac{m}{\rho}.$$

Da questa formola, per un noto teorema, [2] deduciamo che se k è minore di $j-1$, Γ non è due volte transitivo, ed in generale se è $k < (j-1)(j-2)\ldots(j-t+1)$ il gruppo Γ non è t volte transitivo. Quindi:

Teorema I. — *Se l'ordine* k *di un sottogruppo* K *di* G, *di indice* j *in* G, *è minore di* $(j-1)(j-2)\ldots(j-t+1)$, *il grado di transitività di* $\Gamma = \frac{G}{K}$ *è minore di* t.

Siccome Γ opera su j elementi è

$$\nu = \frac{kj}{\rho} \leqslant |\underline{j},$$

ossia

$$k \leqslant \rho\, |\underline{j-1}. \tag{1}$$

Costruendo $\frac{G}{H}$, oppure osservando semplicemente che $h < k$ (essendo h divisore di K), come pure $j < i$, si ha

$$h \leqslant \rho\, |\underline{j-1} \quad \text{e} \quad h \leqslant \rho\, |\underline{i-1}.$$

---

(1) Pel teor. 260, pag. 98, Capelli, *op. cit.* Del resto la $\nu = \frac{m}{\rho}$ si deduce subito anche dalla relazione d'isomorfismo $(\rho, 1)$ fra G e Γ.

(2) Bianchi, *op. cit.*, pag. 22, § 10; Netto, *Teoria delle sostituzioni* ecc., pag. 72 (Traduz. Battaglini, 1885).

Se il gruppo G è semplice, $\rho = 1$, e le formole precedenti diventano:

$$h \leqslant \underline{|j-1}\,, \qquad h \leqslant \underline{|i-1}\,,$$

che dicono:

Teorema II. — *Per un gruppo semplice* G *l'ordine* h *di un qualunque sottogruppo* H *di indice* i *in* G, *non può superare* $(i-1)!$ [1] *ma neppure* $(j-1)!$, *essendo* j *l'indice, rispetto a* G, *del sottogruppo* K *di* G *formato da quelle sostituzioni di* G *che trasformano* H *in se stesso, oppure, che è lo stesso, il numero dei sottogruppi di* G *coniugati con* H. [2]

Prendiamo adesso per G il gruppo alterno su m lettere, che, [3] eccettuato il caso $m = 4$, è semplice: per H_h prenderemo un gruppo qualunque di sostituzioni tutte di classi pari sulle stesse lettere, di ordine h ed indice i rispetto a G, per cui

$$h \, . \, i = \frac{\pi(m)}{2}.$$

Sia K_k il sottogruppo di G le cui sostituzioni trasformano H in se stesso, j il suo indice in G: sarà per (1)

$$k \leqslant \underline{|j-1}\,, \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\pi(m)}{2\,.\,j} \leqslant \underline{|j-1}\,.$$

Di qui

$$\pi(m) \leqslant 2\,\pi(j)$$

onde evidentemente

$$j \geqslant m.$$

Quindi:

Teorema III. — *Per qualunque gruppo di sostituzioni su* m *lettere* $(m > 4)$, *composto di sole sostituzioni di classe pari, e che non sia l'alternato, esistono almeno* m *gruppi ad esso coniugati (nel gruppo alternato).*

Essendo $i \geqslant j$, si ha $i \geqslant m$, per cui essendo $i' = 2i$, l'indice assoluto di H_h, cioè l'indice di H_h rispetto al gruppo simmetrico, su m lettere, si ha pure:

$$i' = 2i \geqslant 2m.$$

Teorema IV. — *L'indice di un gruppo di sostituzioni tutte di classe pari, che non sia l'alterno, non può essere inferiore a* 2m *(con* $m > 4$*).*

Fa eccezione il caso $m = 4$, perchè infatti il gruppo totale G_{24} ammette due soli sottogruppi invarianti e cioè il gruppo alterno G_{12} ed il sottogruppo (anarmonico)

$$H_4 = [1,\ (ab)(cd),\ (ac)(bd),\ (ad)(bc)]$$

il cui indice 6 è inferiore ad 8.

---

[1] Capelli, *op. cit.*, pag. 117.
[2] Cfr. Palomby, *Periodico di Matematica*, 1 maggio 1915.
[3] Bianchi, *op. cit.*, pag. 54 e seg.

Il numero j dei gruppi coniugati con H_h nel gruppo alterno $G_{\frac{\pi(m)}{2}}$, è pel teorema III, non inferiore ad m: quanti sono i gruppi coniugati con H_h nel gruppo totale $G_{\pi(m)}$?

Basta cercare l'ordine del sottogruppo K' di $G_{\pi(m)}$ le cui sostituzioni trasformano H_h in se stesso: ora K è certamente un sottogruppo di K', il quale quindi o coincide con K, oppure, contenendo sostituzioni di classe pari e di classe dispari, (¹) sarà dell'ordine $2k$.

Nel primo caso, indicando con t una qualunque sostituzione di classe dispari di $G_{\pi(m)}$ le sostituzioni di questo, rispetto a K, si dispongono nei periodi

$$G_{\pi(m)} = \begin{cases} K, & Kt_2, \ldots Kt_j \\ Kt, & Kt_2t, \ldots Kt_jt; \end{cases}$$

di qui si vede che le sostituzioni della prima orizzontale (gruppo alterno), trasformano H in $H_1 = H$, $H_2, \ldots Hj$, gruppi distinti, e quelle della seconda in altrettanti

$$H'_1 = t^{-1}H_1t,\ H'_2 = t^{-1}H_2t, \ldots H'_j = t^{-1}H_jt$$

gruppi distinti fra loro e dai precedenti: H avrà quindi in tal caso $2j$ gruppi con esso coniugati nel gruppo totale $G_{\pi(m)}$.

Nel secondo caso, se indichiamo con t una sostituzione di classe dispari, di $G_{\pi(m)}$ che trasforma H_h in se stesso, il sottogruppo K' di $G_{\pi(m)}$ che trasforma H_h in se stesso, è

$$K' = \begin{cases} K \\ Kt, \end{cases}$$

e le sostituzioni di $G_{\pi(m)}$, rispetto a K', si distribuiranno quindi nei periodi

$$G_{\pi(m)} = \begin{cases} K', \ldots & K,\ Kt \\ K't_2, \ldots & Kt_2,\ Ktt_2 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ K't_j, \ldots & Kt_j,\ Ktt_j \end{cases}$$

ed i sottogruppi di $G_{\pi(m)}$, coniugati con H, saranno

$$H_1 = H,\ H_2, \ldots Hj$$

cioè in numero di j.

Ricordando il teorema III si ha

Teorema V. — *Sia* H_h *un gruppo di sostituzioni tutte di classe pari, su* m *lettere, che non siano l'alterno: se il numero dei gruppi con esso coniugati, nel gruppo totale, uguaglia quello dei gruppi ad esso coniugati nell'alterno, questo numero non è inferiore ad* m, *altrimenti, risulta doppio, e quindi non inferiore a* 2m.

(¹) Capelli, *op. cit.*, pag. 96, artic. 255.

Sia adesso R un gruppo qualunque di sostituzioni su m lettere, diverso dall'alterno, dico che il numero dei gruppi con esso coniugati, non è inferiore ad m.

Se le sostituzioni di R fossero tutte di classi pari ciò seguirebbe dal teorema precedente; in caso contrario, esse sarebbero metà di classe pari e metà di classe dispari, le prime poi formano un gruppo H, per cui le sostituzioni di R si dispongono sulle orizzontali

$$R = \begin{cases} H \\ Ht \end{cases}$$

essendo t una sostituzione di classe dispari di R.

Sia K_k il sottogruppo di $G_{\pi(m)}$ le cui sostituzioni trasformano H in se stesso, se j è il suo indice, in $G_{\pi(m)}$, è $\pi(m) = k \cdot j$: se con $K'_{k'}$ indichiamo adesso il sottogruppo di $G_{\pi(m)}$, le cui sostituzioni trasformano R in se medesimo, sarà $\pi(m) = k' \cdot j'$, se j' è l'indice di K' in $G_{\pi(m)}$.

Ogni sostituzione K' di $K'_{k'}$ trasformando R in se medesimo, trasformerà tutte le sostituzioni di classe pari di R, cioè H, in sostituzione di R pure di classe pari, cioè in H stesso: quindi K' sarà sottogruppo di K.

Nella

$$k \cdot j = k' \cdot j' = \pi(m)$$

essendo k' divisore di k sarà j divisore di j', cioè $j \leqslant j'$, ma

$$j \geqslant 2m \qquad \text{o} \qquad j \geqslant m$$

quindi anche

$$j' \geqslant 2m \qquad \text{o} \qquad j' \geqslant m.$$

si ha cioè l'importante

Teorema VI. — *Per ogni gruppo di sostituzioni su* m *lettere* (m > 4), *che non sia il gruppo alterno, se il numero dei gruppi con esso coniugati, è inferiore a* 2m *esso non è inferiore ad* m.

Questo teorema stabilisce una maggiore determinazione pel noto teorema di Bertrand, che di qui può dedursi come corollario.

Infatti, pel gruppo qualunque R dato essendo il numero j'; dei sottogruppi di $G_{\pi(m)}$ con esso coniugati, un divisore del suo indice i, è:

$$i \geqslant j'$$

e quindi

$$i \geqslant 2m \qquad \text{o} \qquad i \geqslant m.$$

Teorema di Bertrand. — *Con* m *lettere* (m > 4) *non si possono formare, all'infuori del gruppo alternato, gruppi di sostituzioni il cui indice sia inferiore ad* m.

Indicando con r l'ordine del gruppo qualunque R, diverso dall'alterno, si ha $\frac{\pi(m)}{r} \geqslant m$, di qui

$$r \leqslant \pi(m-1).$$

Corollario. — *Il solo gruppo di ordine* $\pi(m)$, *nel gruppo totale su* m *lettere, è il gruppo alterno.*

Per questo teorema (di Abel) non occorre la restrizione $m > 4$.

Come applicazione dei teoremi precedenti risolviamo il problema: *Cercare la " serie di composizione „ del gruppo totale* $G_{\pi(m)}$; la cui risoluzione è di importanza fondamentale per la risolubilità algebrica delle equazioni.

Dal teor. VI segue l'altro:

Teorema VII. — *Eccettuato il caso* $m=4$ *non esiste nel gruppo totale alcun altro sottogruppo invariante all'infuori del gruppo alterno.*

Infatti, per un sottogruppo qualunque R di $G_{\pi(m)}$, che non sia l'alterno, il numero dei sottogruppi coniugati di esso è sempre non inferiore ad m, mentre pel solo gruppo alterno tale numero è 1.

Ricordando l'altro teorema: *Eccetto il caso* $m=4$ *il gruppo alterno è semplice*; risulta che per $m>4$ il gruppo totale $G_{\pi(m)}$ ha un'unica serie di composizione formata del gruppo totale $G_{\pi(m)}$, del gruppo alterno $G_{\frac{\pi(m)}{2}}$ e della identità, coi *fattori di composizione* 2, $\frac{\pi(m)}{2}$; lo stesso vale, come è evidente, per $m=2, 3$.

Una ricerca diretta (¹) per $m=4$ porta che la serie di composizione di G_{24} è data da

$$G_{24},\ G_{12},\ H_4=[1,\ (ab)\ (cd),\ (ac)\ (cd),\ (ad)\ (bc)],\ H_2,\ 1$$

ove H_2 è uno dei tre sottogruppi di 2° ordine di H_4, con i fattori di composizione 2, 3, 2, 2.

Come ultima applicazione osserviamo quanto segue, a proposito della formola trovata:

$$r \leqslant \pi(m-1).$$

Nel gruppo totale $G_{\pi(m)}$ di sostituzione su m elementi

$$a_1,\ a_2,\ldots\ a_m,$$

il sottogruppo H formato da tutte quelle sostituzioni che lasciano fissa una stessa lettera, per es. a_1, è il gruppo totale sulle $m-1$

(¹) Per la ricerca della composizione dei gruppi vedasi ad es. Bianchi, *op. cit.*, § 18 e segg.

lettere $a_2, a_3, \ldots a_m$ restanti, e quindi dell'ordine $\pi(m-1)$ e di indice m.

Sia $K_{\pi(m-1)}$ un altro sottogruppo di $G_{\pi(m)}$ pure di ordine $\pi(m-1)$ (ed indice m); esso, come è evidente, non conterrà, come sottogruppo, l'alterno.

Le sostituzioni di $G_{\pi(m)}$ si distribuiscono, rispetto a K, nei periodi:

$$K, Kt_2, Kt_3, \ldots Kt_m;$$

costruiscasi adesso il gruppo complementare (destrorso)

$$\Gamma = \frac{G}{K}$$

che è isomorfo a G. Questo isomorfismo, dico, è oloedrico; infatti l'ordine ρ del sottogruppo Σ, (di K) invariante in G, cui corrisponde l'identità in Γ, deve essere uguale ad uno, altrimenti, contenendo G, come unico sottogruppo invariante, l'alterno (v. teor. VII) ne deriverebbe $\Sigma = G_{\frac{\pi(m)}{2}}$ e quindi $G_{\frac{\pi(m)}{2}}$ sarebbe contenuto in K, il che non è.

L'isomorfismo fra G e Γ essendo oloedrico al sottogruppo

$$K_{\pi(m-1)}$$

di G corrisponde in Γ un sottogruppo d'uguale ordine, sia

$$K'_{\pi(m-1)}.$$

Le sostituzioni di $K'_{\pi(m-1)}$ lasciano fermo il primo periodo K, risulta di qui che $K'_{\pi(m-1)}$ è il gruppo simmetrico sugli $m-1$ periodi restanti

$$Kt_2, Kt_3, \ldots Kt_m.$$

Se cambiamo denominazioni a questi periodi, e li chiamiamo colle stesse lettere $a_2, a_3, \ldots a_m$, su cui opera H, il gruppo $K'_{\pi(m-1)}$ coincide con $H_{\pi(m-1)}$. Si conclude:

TEOREMA VIII. — *I sottogruppi di ordine* $\pi(m-1)$ *contenuti nel gruppo totale* $G_{\pi(m)}$, *su* m *lettere, sono isomorfi (oloedricamente) fra loro.*

ANTONIO CERONE.

Alcune osservazioni su due articoli di A. Palomby

Il sig. A. Palomby ha pubblicato nell'ultimo fascicolo del *Periodico* due articoli, uno " Sul concetto aritmetico-filosofico di eguaglianza e di ripetizione ", l'altro " Sui concetti di numero e di ordine ".

Nel primo sottoponendo a un'interessante analisi filosofica il concetto di uguaglianza, osserva che questo non ha un significato assoluto, ma piuttosto un significato convenzionale relativo alle note che si possono trascurare nel paragone di due oggetti, secondo un certo ordine di idee.

Ricercando poi sotto quali condizioni è vero il noto principio: " Due cose uguali a una terza sono uguali fra loro ". il Palomby conclude che " se $\overline{\Omega}$ è un certo aggregato di enti dei quali si tratti di decidere quali siano fra loro uguali rispetto a un certo campo di eguaglianza C (insieme di certe operazioni consistenti nel comporre l'oggetto su cui si opera con certi enti prestabiliti trascurabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, mediante certe leggi stabilite $Z_1, Z_2 \ldots$), il detto principio si verificherà tutte le volte che C sia tale che se da un oggetto A di $\overline{\Omega}$ si può dedurre un altro oggetto B di $\overline{\Omega}$ con operazioni di C, reciprocamente si possa dedurre A da B pure con operazioni di C ".

Ora questa conclusione non ci sembra giusta.

Sia infatti $\overline{\Omega}$ l'aggregato delle misure $M_1, M_2, \ldots$ di certe grandezze fisiche omogenee, e gli enti trascurabili $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, siano costituiti dagli ordinari errori di osservazione, i quali però saranno trascurabili purchè non superino un certo limite λ, dipendente dal grado di precisione che ci interessa ottenere nelle nostre misure.

In quest'ordine di idee due grandezze A, B, potranno ritenersi uguali se le loro misure M_1, M_2, differiscono fra di loro per quantità minori di λ, limite assegnato agli errori di osservazione, cioè quando si abbia:

$$M_1 = M_2 \pm \alpha_1, \quad \alpha_1 < \lambda. \tag{1}$$

Analogamente la grandezza B si riterrà uguale a una terza grandezza C, se indicando con M_3 la misura di questa, si ha:

$$M_2 = M_3 \pm \alpha_2, \quad \alpha_2 < \lambda. \tag{2}$$

Dalle (1) (2) si trae:

$$M_1 = M_3 \pm \alpha_1 \pm \alpha_2,$$

ma non è lecito dedurne in generale A = C, perchè pur essendo

$$\alpha_1 < \lambda, \quad \alpha_2 < \lambda,$$

può essere

$$\pm \alpha_1 \pm \alpha_2 \geqq \lambda.$$

Ecco dunque che la condizione indicata dal signor Palomby non sembra sufficiente ad asserire la validità del detto principio. Forse questa è una delle ragioni per le quali nella matematica si mira ormai ad adoperare la parola uguale nel significato logico di identità. Le cosiddette teorie intrinseche degli enti numerici si prefiggono appunto, fra gli altri, di raggiungere questo scopo.

Nel secondo articolo il Palomby espone in succinto alcune vedute sul concetto di numero, già messe in luce dall'illustre e compianto prof. Capelli in una sua geniale costruzione dei fondamenti dell'aritmetica.

Anche qui però vi è un'osservazione inesatta da rilevare.

Nella fine del suo articolo il Palomby infatti dice: " volendo per es. calcolare la cifra che spetta al composto ABCD, conviene riconoscere che si può stabilire una corrispondenza univoca fra gli oggetti A, B, C, D e le cifre 1, 2. 3, 4 (*cioè appunto, stabilire un ordine fra le* A, B, C, D) ".

Abbiamo sottolineato l'ultima frase che è appunto erronea, perchè, come dice poco prima lo stesso Palomby, " è importante, anzi necessario, di notare che il risultato dell'operazione [di enumerare], cioè la cifra che si assegnerà all'aggregato, sarà sempre la stessa, comunque si proceda nello stabilire la corrispondenza con un aggregato tipico... ".

Il Russell (*The principles of mathematics*) e il Couturat (*Les principes des mathèmatiques*), hanno messo in chiaro come il concetto di numero cardinale di una classe (aggregato) sia indipendente dall'idea di ordine.

A. Natucci.

PROBLEMI (¹)

(Continuazione — Vedi fasc. III).

179. Se PM, PM′ sono le tangenti ad una parabola condotta per un punto P dell'asse, e Q, R sono i punti d'incontro di esse con una tangente variabile; dimostrare che:

1° il punto medio di QR è sulla tangente nel vertice;

2° si ha $PQ + PR = PM$.

(¹) In massima non pubblicheremo le risoluzioni di questi problemi favoritici dal Comandante Barisien, ma accetteremo volentieri le osservazioni e generalizzazioni che i nostri lettori vorranno inviarci.

180. Date due coniche c, c' siano A, B i punti d'incontro di c con una tangente a c'. Trovare il luogo del punto d'incontro delle normali a c in A, B. Caso in cui le due coniche c, c' sono le parabole $y^2-2px=0$, $y^2-2p'x=0$.

181. Si considerino tutte le ellissi che hanno per fuoco un punto dato e sono tangenti a due rette ortogonali Ox, Oy. Si trovi: 1° il luogo dei loro centri; 2° il luogo del secondo fuoco; 3° il luogo dei vertici; 4° la curva inviluppo dell'asse minore.

182. Dimostrare la relazione

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)^2\,(b^6\cos^2\theta+a^6\operatorname{sen}^2\theta)}}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\, d\theta}{(b^2\cos^2\theta+a^2\operatorname{sen}^2\theta)\,(b^6\cos^2\theta+a^6\operatorname{sen}^2\theta)^2}}=a^2b^2.$$

183. Sono dati due circoli c, c' di centri O, O' ed un punto fisso P. Una retta variabile passante per P ha per poli rispetto ai circoli c, c, due punti T, T'. Trovare: 1° l'inviluppo di TT'; 2° il luogo del punto medio di TT'; 3° il luogo del punto d'incontro delle rette TO', T'O.

184. Si considerino le ellissi che hanno un vertice dell'asse maggiore in un punto fisso A d'una retta r e sono tangenti a r. 1° Se queste ellissi hanno inoltre la corda focale principale di lunghezza costante, il luogo dei vertici sull'asse minore è una parabola; 2° Se le dette ellissi hanno eccentricità costante, il luogo dei vertici dell'asse minore si compone di due rette.

185. Se FA, FB sono due raggi vettori uscenti da un fuoco F di una ellisse, situati da una stessa parte dell'asse maggiore ed egualmente inclinati su di esso, la retta AB passa per il punto d'incontro dell'asse colla direttrice corrispondente ad F.

186. (Suggerita dalla questione 1721, *Mathesis*, 1909, p. 144). Siano A, B, C, D quattro punti d'incontro di una conica centrale e delle normali ad essa condotta da un punto P. Le tangenti nei punti A, B, C, D prese tre a tre formano quattro triangoli, i cui ortocentri sono sopra la retta che passa per P e per il centro della data conica.

187. Sia A un vertice sull'asse maggiore, B un vertice sull'asse minore di una ellisse di centro O, MM' una corda variabile coniugata ad un diametro. Dimostrare che qualunque sia la corda, si ha

$$\operatorname{tg} MAO \,.\, \operatorname{tg} M'AO \,.\, \operatorname{tg} MBO \,.\, \operatorname{tg} M'BO = 1.$$

188. Risolvere il sistema

$$(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(x+z-y)^3-(x+y-z)^3=a^3,$$
$$(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(x+z-y)^5-(x+y-z)^5=b^5,$$
$$(x+y+z)^7-(y+z-x)^7=(x+z-y)^7-(x+y-z)^7=c^7.$$

(Sciogliendo le parentesi, le equazioni diventano

$$24xyz = a^3, \tag{1}$$

$$80xyz\,(x^2 + y^2 + z^2) = b^5, \tag{2}$$

$$8xyz\,[21\,(x^4 + y^4 + z^4) + 70\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)] = c^7. \tag{3}$$

Dunque

$$xyz = \frac{a^3}{24}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3b^5}{10a^3}. \tag{4}$$

e la (3) diventa

$$3\,(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4\,(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = \frac{3c^7}{7a^3}.$$

Perciò

$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{c^7}{7a^3} - \frac{9b^{10}}{100a^6}\right).$$

Ne risulta che x^2, y^2, z^2 sono radici dell'equazione di 3° grado in T

$$\mathrm{T}^3 - \frac{3b^5}{10a^3}\,\mathrm{T}^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{c^7}{7a^3} - \frac{9b^{10}}{100a^6}\right)\mathrm{T} - \frac{a^6}{576} = 0.)$$

189. La normale in un punto M d'un ellisse, che ha per centro O e per un fuoco F, incontra l'asse minore in N. Siano P la proiezione di O su MN, Q la proiezione di N su MF. Calcolare le coordinate di M nei casi seguenti: 1° P è sull'ellisse; 2° Q è sull'ellisse.

190. Il luogo dei punti M tali che conducendo le tre normali a una parabola, la somma dei quadrati dei raggi di curvatura nei tre piedi di queste normali. sia costante, è una cubica.

191. Le coordinate parametriche

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\,(a^2 - b^2)\cos\varphi\,[a^2\,(a^2 + 2b^2)\,\mathrm{sen}^2\,\varphi - b^4\cos^2\varphi]}{(a^2 + b^2)\,(a^4\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + b^4\cos^2\varphi)} \\[2ex] y = \dfrac{-\,b\,(a^2 - b^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,[b^2\,(b^2 + 2a^2)\cos^2\varphi - a^4\,\mathrm{sen}^2\,\varphi]}{(a^2 + b^2)\,(a^4\,\mathrm{sen}^2\,\varphi + b^4\cos^2\varphi)} \end{cases}$$

rappresentano l'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)^2}.$$

192. Siano F, F' i fuochi di un'ellisse, M un punto variabile su di essa, N, N' due punti presi sulla normale in M tali che

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MN'} = k\,.\sqrt{\mathrm{MF}\,.\,\mathrm{MF'}}.$$

Al variare di M, i punti N, N' descrivono due ellissi. Queste diventano i circoli di Chasles, se $k = 1$; e una di esse diventa una retta, se k è eguale al rapporto dei semiassi.

193. Siano C il centro di curvatura relativo a un punto M d'una ellisse e, C_1 il centro di curvatura dell'evoluta di e relativa al punto C, O il centro di e, P e Q le proiezioni di M sugli assi di e. Dimostrare che il rapporto dei raggi di curvatura $\frac{CC_1}{MC}$ è in un rapporto costante con l'area del rettangolo MPOQ.

(Si trova

$$\frac{CC_1}{MC} = MPOQ \times \frac{3c^2}{a^2 b^2}\Big).$$

194. Se A, B, C, D sono i punti d'incontro di un'ellisse con le quattro normali ad essa condotta da un punto P, il centro K delle medie distanze dei quattro centri dei circoli di Joachimstal è situato sul segmento OM e si ha $OK = \frac{OM}{4}$.

195. Trovare il massimo della frazione

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x - \cos^3 x}.$$

196. Se AB è una corda parallela all'asse maggiore di una ellisse, P il suo polo, dimostrare che il circolo circoscritto a PAB passa per i fuochi.

197. Se dU e ds sono i differenziali dell'area e dell'arco della curva inviluppo della retta

$$x \cos\varphi + y \operatorname{sen}\varphi = F(\varphi)$$

si ha la relazione

$$dU = \frac{1}{2} F(\varphi) \,.\, ds.$$

198. Risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{gathered} xyz(x^2 + y^2 + z^2) = a^5, \\ xyz = b^2(x + y + z), \\ x^3 + y^3 + z^3 = c^3(x + y + z), \end{gathered}$$

e dimostrare che si riduce alla risoluzione di un'equazione di 3° grado. Caso in cui $c = b\sqrt{3}$.

(Posto $x + y + z = X$, $xy + xz + yz = Y$, $xyz = Z$ il sistema diviene

$$\begin{cases} Z(X^2 - 2Y) = a^5 \\ Z = b^2 X \\ X^3 - 3XY + 3Z = c^2 X; \end{cases}$$

donde si ha l'equazione di 3° in X

$$b^2X^3 - 2b^2(3b^2 - c^2)X - 3a^5 = 0 \qquad (1)$$

che dà

$$X_1,\ X_2,\ X_3, \qquad Y = \frac{b^4X^3 - a^5}{2b^2X}, \qquad Z = b^2X.$$

Si hanno dunque tre soluzioni

$$(X_1Y_1Z_1), \qquad (X_2Y_2Z_2), \qquad (X_3Y_3Z_3),$$

Ora x, y, z sono radici dell'equazione di 3° grado

$$x^3 - Xx^2 + Yx - Z = 0.$$

Si hanno dunque in tutto nove soluzioni.

Se $c = b\sqrt{3}$, $c^2 = 3b^2$, allora la (1) diventa

$$X^3 = \frac{3a^5}{b^2}$$

$$X = a\sqrt[3]{\frac{3a^2}{b^2}}, \qquad Y = \frac{a^4}{b^2}\sqrt[3]{\frac{b^2}{3a^2}}, \qquad Z = ab^2\sqrt[3]{\frac{3a^2}{b^2}}$$

$$XY = \frac{a^5}{b^2}, \qquad YZ = a^5.)$$

199. Si consideri una ellisse di centro O e una diagonale r del rettangolo degli assi. Se PQ è la polare di un punto M di r, dimostrare che il quadrilatero OPMQ è inscrittibile in un circolo.

200. Si consideri una ellisse e ed un'iperbole equilatera h aventi gli stessi vertici reali A, A'. Siano F, F' i fuochi di e e F_1, F'_1 quelli di h: M un punto qualunque di e e P un punto qualunque di h: t, t' le tangenti nei vertici A, A'. Dimostrare che

1° i centri dei circoli exinscritti al triangolo MFF' (interni gli angoli F, F') si trovano sulle rette r', r;

2° i centri del circolo iscritto al triangolo $PF_1F'_1$ e di quella exinscritta (intorno all'angolo P) appartengono pure alle rette r, r'.

(Continua) E.-N. Barisien.

BIBLIOGRAFIA

Bianchi. — *Lezioni di geometria analitica*. Pisa, Spoerri, 1914.

Questo ottimo libro pubblicato solamente lo scorso anno per le stampe, non è veramente una novità; migliaia di giovani e anche di provetti insegnanti di scienze e d'ingegneri, che sono passati per l'Università di Pisa, lo conoscono nelle sue linee principali dalla viva voce dell'illustre maestro. Esso infatti (come dichiara l'Autore nella prefazione) riproduce, con qualche maggiore larghezza il corso di lezioni che da molti anni svolge nella R. Università di Pisa, e che apparvero già litografate, sotto diverse forme, una prima volta nel 1903-904 ed una seconda nel 1908-909. L'opera è dunque lungamente pensata, sapientemente studiata sia dal punto di vista scientifico sia dal punto di vista didattico, passata per la prova del fuoco di un lungo esperimento nella scuola; tanto è vero che nella seconda edizione litografata l'A. per opportunità di programma aveva introdotto molte modificazioni alla prima edizione; ma nel fare la prima edizione stampata è tornato al primitivo disegno, e crediamo che abbia fatto molto bene. Non è dunque il caso di parlare minutamente di una tale opera già nota a molti e basterà di dare poche indicazioni di carattere generale.

Secondo l'uso ormai universalmente adottato, essa si divide in tre parti. La prima, divisa in 10 capitoli, è destinata a stabilire e svolgere il concetto di coordinate per le forme geometriche fondamentali di prima, seconda e terza specie e a studiarne le principali applicazioni nel campo lineare; la seconda, divisa in quattro capitoli, è destinata allo studio delle coniche; la terza, divisa in cinque capitoli, allo studio delle quadriche.

Il libro si chiude con una interessante Appendice nella quale vengono esposte con brevità e chiarezza mirabili le principali proprietà delle forme quadratiche, la loro riduzione a forma canonica per sostituzione ortogonale, l'equazione secolare, ecc.

In tutto il libro si fa uso principalmente delle coordinate cartesiane, come quelle che vengono usate di preferenza in tutte le applicazioni, di guisa che è indispensabile che non solo i futuri insegnanti, ma anche i futuri ingegneri si addestrino di buon ora a famigliarizzarsi coll'uso di esse. In appositi capitoli, particolarmente nel nono, viene data la nozione di coordinate cartesiane omogenee e di coordinate generali proiettive, ed esposte con sobrietà e chiarezza le loro proprietà caratteristiche. Queste coordinate vengono poi adoperate per lo studio delle proprietà di carattere proiettivo e per quelle quistioni relative agli elementi impropri alle quali mal si prestano le coordinate cartesiane.

Tale ordinamento è perfettamente conforme alle tendenze relative all'indirizzo da darsi all'insegnamento matematico, rivelatesi in tutti gli ultimi congressi. La geometria proiettiva serve a dare grande luce e generalità alle concezioni geometriche, ma in pratica i problemi di geometria metrica sono quelli che si presentano più comunemente; occorre dunque dare a questi problemi e ai metodi che ad essi si riferiscono la precedenza, limitando le nozioni di proiettiva ai concetti più importanti e generali.

Ecco l'indice dell'opera:

Giulio Lazzeri — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 30 Ottobre 1915