Abbachi Trigonometrici

§ **1.** L'importanza della *Nomografia* (*) si manifesta ogni dì più, colle numerosissime applicazioni che se ne vanno facendo alla *Ingegneria*, alla *Navigazione*, alla *Balistica*, all'*Arte militare*,...; ci pare quindi utile il mostrarne qui un'altra applicazione semplicissima, la quale, forse, farà sorgere in qualche lettore il desiderio di conoscere i fecondissimi metodi di questa nuova scienza.

Il metodo che seguiremo è quello dei *punti allineati a due quote*, felicemente ideato dallo stesso fondatore della *Nomografia* (**); esso è il più recente e il più notevole, e ci rende possibile la costruzione di abbachi i quali risolvano immediatamente una classe molto generale di equazioni a *sei* variabili, mentre coi notissimi diagrammi cartesiani le variabili non possono essere più di *tre*.

E comincieremo dall'esporre in modo facile e breve il metodo stesso, limitandoci al caso in cui le variabili siano *quattro* soltanto e supponendo che l'equazione sia del tipo (che più frequentemente si presenta in pratica)

$$(1) \qquad \varphi(\alpha) f_1(\gamma, \delta) + \psi(\beta) f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta) = 0,$$

dove: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono le quattro variabili; $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$ rappresentano rispettivamente una funzione qualunque solo di α e una funzione qualunque solo di β; $f_1(\gamma, \delta)$, $f_2(\gamma, \delta)$, $f_3(\gamma, \delta)$ sono tre funzioni, pure qualunque, di γ e δ.

§ **2.** Assumiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali xoy (fig. 1), (in questo paragrafo l'ortogonalità non è necessaria) e tracciamo sull'asse delle x e sulla retta $y = 1$, rispettivamente, le scale definite dalle uguaglianze

$$(2) \qquad x_1 = k_1 \varphi(\alpha), \qquad (3) \qquad x_2 = k_2 \psi(\beta),$$

dove k_1 e k_2 sono due moduli positivi arbitrari, segnando nei punti di divisione, non i valori di x_1 e di x_2, ma i valori di α e di β rispettivamente corrispondenti, che chiameremo poi *quote* di quei punti: vogliamo dimostrare che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ soddisfano alla (1), i due punti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 1)$ sono *allineati* col punto

$$(4)\; x = -\frac{k_1 k_2 f_3(\gamma_1, \delta)}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)}, \; (5)\; y = -\frac{k_1 f_2(\gamma, \delta)}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)},$$

e reciprocamente. Infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè questi tre punti siano in linea retta è

$$x_1(1 - y) + x_2 y - x = 0,$$

(*) È questo il nome attribuito dal Prof. *M. d'Ocagne* (della *École polytechnique* di Parigi) a quel ramo della *Statica grafica* che tratta della costruzione dei grafici *(abbachi)* per risolvere le equazioni a più variabili: ramo che egli ha fatto assurgere al grado di scienza colla pubblicazione del suo grande *Traité de Nomographie* Gauthier-Villars, Parigi, 1899).

(**) V. *Tr. de Nomographie*, pag. 320.

e, sostituendo a x_1, x_2, x, y i valori precedenti, questa eguaglianza si trasforma nella (1).

Se ora fra la (4) e la (5) si elimina δ, si ha un'equazione

$$(6) \qquad F_1(x, y, \gamma) = 0$$

la quale rappresenta un sistema di curve aventi per parametro γ; e, se invece si elimina γ, si ha un'altra equazione

$$(7) \qquad F_2(x, y, \delta) = 0,$$

la quale rappresenta un altro sistema di curve aventi per parametro δ: e noi diremo curve di *quota* γ le prime, curve di *quota* δ le seconde.

Avremo così due sistemi di punti (α) e (β) distribuiti su due rette parallele e due sistemi di curve (γ) e (δ); e, se $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$

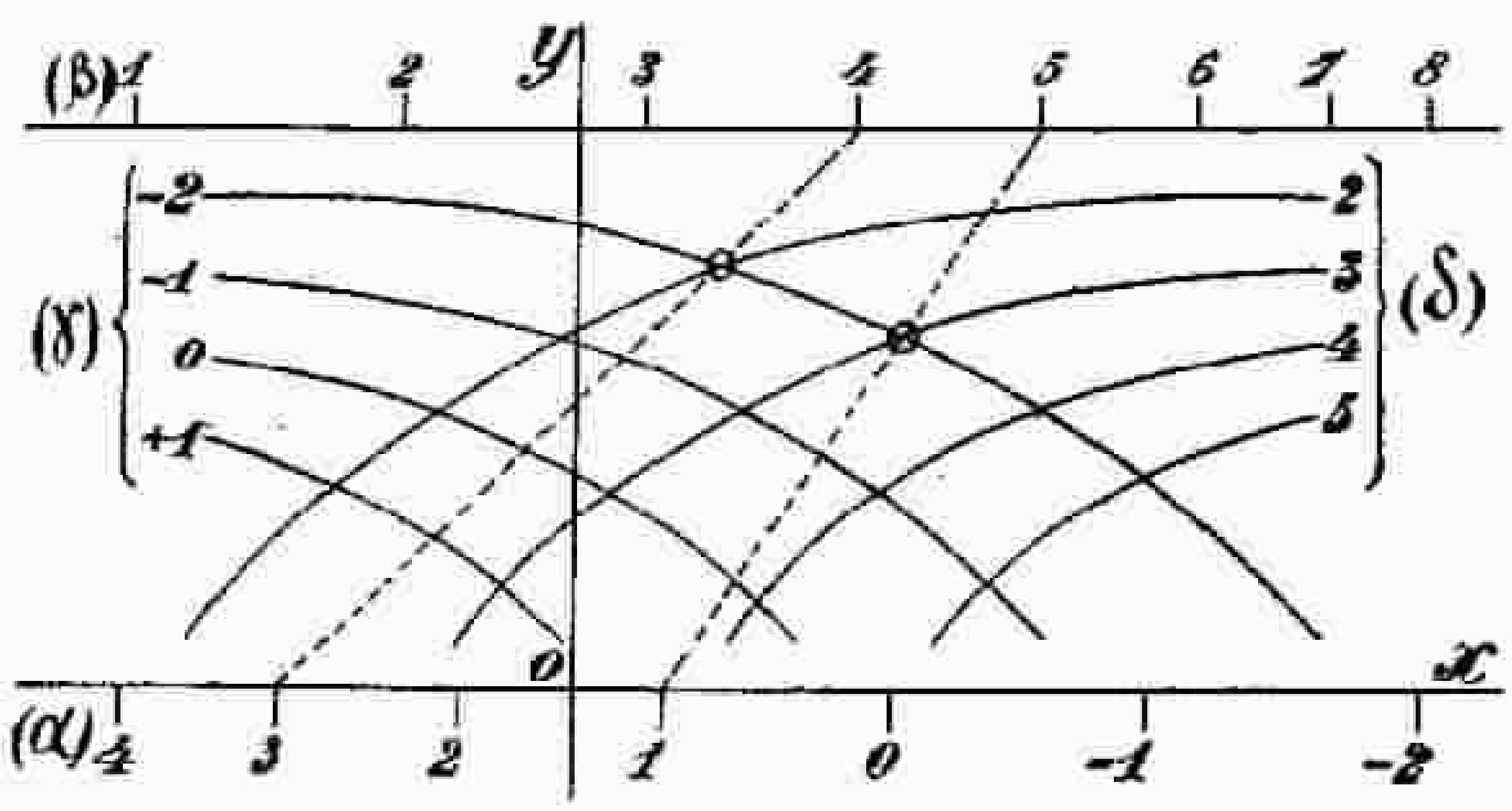

Fig. 1.

sono valori di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, rispettivamente, che soddisfino alla (1), i punti di quota α' e β' dovranno (per quanto si è detto or ora) essere allineati con una delle intersezioni della curva di quota γ' colla curva di quota δ'. Deriva da tutto ciò che, dati tre qualunque di questi quattro valori, p. es. α', β' e γ', per avere il quarto basta congiungere (preferibilmente con un filo) il punto di quota α' della scala (α), col punto di quota β' della scala (β), perchè per ciascuna delle intersezioni della congiungente con quella delle curve (γ) che è quotata γ' passerà una delle curve δ, e ciascuna delle quote corrispondenti sarà un valore di δ che assieme ad α', β', γ' soddisferà alla (1). E si vede subito come si dovrebbe procedere se l'incognita, invece di essere δ, fosse una delle altre tre variabili. Così dalla fig. 1, per $\alpha' = +1$, $\beta' = +5$, $\gamma' = -2$ (supposto che delle curve (γ) e (δ) non si considerino che gli archi tracciati) si ha $\delta' = +3$; per $\alpha' = +3$, $\gamma = -2$, $\delta' = +2$ si ha $\beta' = +4$.

Osservazione I. Dati α', β' e γ' (o α', β' e δ'), a ciascuna delle intersezioni della curva γ' colla retta che congiunge i punti α' e β' può corrispondere un valore della incognita δ (o γ); dati α', γ' e δ' (o β', γ' e δ'), a ciascuna delle intersezioni della curva γ' colla curva δ' può corrispondere un valore di $\psi(\beta)$ (o di $\varphi(\alpha)$), e ad ognuno di questi valori possono poi corrispondere più valori dell'incognita β (od α). E tutte le soluzioni, che così si trovano, sono tutte e sole le soluzioni reali che si avrebbero dalla (1).

Osservazione II. Le curve (6) e (7) si possono costruire per punti mediante la (4) e la (5); così si dovrà necessariamente procedere quando la eliminazione di δ o di γ non sia possibile; ma, in generale, sarà utile tenere questa via anche quando tale impossibilità non si presenti.

§ 3. Stabiliti per ciascuna delle due variabili α e β un limite superiore e un limite inferiore (dipendentemente dalla natura del problema che si considera), gli abbachi costruiti col metodo ora esposto vengono ad avere, generalmente, la forma di un trapezio; vogliamo far vedere come, determinando anche, opportunamente, i moduli k_1 e k_2, si possano trasformare in modo da avere la forma di un dato rettangolo, e ciò per facilitarne l'uso e migliorarne la disposizione.

Affinchè l'allineamento, sul quale è basato il metodo, sia mantenuto, bisogna che l'ordine delle linee non si alteri: ricorreremo per ciò a una trasformazione proiettiva (*), ma daremo il modo di eseguire tale trasformazione analiticamente, perchè, eseguendola geometricamente, si perde in esattezza e si va spesso incontro all'inconveniente di dover considerare dei punti posti fuori dei limiti del disegno. Le formule a ciò occorrenti si deducono facilmente dalle note formule generali di Waring (**), noi però (per il caso che ci interessa) le abbiamo potute ricavare direttamente colle semplicissime considerazioni che seguono.

Supponiamo stabiliti gli accennati limiti di α e di β, e indichiamo con P_1 e Q_1 i minimi, e con P_2 e Q_2 i massimi valori che, corrispondentemente, pigliano $\varphi(\alpha)$ e $\psi(\beta)$. Osserviamo prima di tutto che la (1) può scriversi

$$\{\varphi(\alpha) - P_1\} f_1(\gamma, \delta) + \{\psi(\beta) - Q_1\} f_2(\gamma, \delta) + \\ + P_1 f_1(\gamma, \delta) + Q_1 f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta) = 0,$$

e che quindi, invece delle (2), (3) e (4), si può porre

$$(8) \qquad x_1 = k_1 \{\varphi(\alpha) - P_1\} \qquad (9) \qquad x_2 = k_2 \{\psi(\beta) - Q_1\}$$

$$(10) \qquad x = -\frac{k_1 k_2 \{P_1 f_1(\gamma, \delta) + Q_1 f_2(\gamma, \delta) + f_3(\gamma, \delta)\}}{k_2 f_1(\gamma, \delta) + k_1 f_2(\gamma, \delta)}$$

lasciando inalterata la (5); il nuovo abbaco differirà allora dal precedente in ciò, che i segmenti contenenti le parti utili delle scale (α) e (β), invece di cominciare dai punti di ascissa $k_1 P_1$ e $k_2 Q_1$ rispettivamente, cominceranno tutt'e due dal punto di ascissa zero.

Poi possiamo determinare k_1 e k_2 in modo che le stesse due scale occupino un segmento eguale alla unità: basterà che sia

$$k_1(P_2 - P_1) = 1 \qquad k_2(Q_2 - Q_1) = 1,$$

da cui

(*) V. *Tr. de Nomographie*, pag. 135.
(**) V. p. es: Chasles, *Aperçu historique* — Paris 1875, pag. 18.

$$(11)\qquad k_1 = \frac{1}{P_2 - P_1} \qquad\qquad k_2 = \frac{1}{Q_2 - Q_1};$$

e il nuovo abbaco avrà allora la forma di un quadrato, avente per lato l'unità.

Ed ora, se l ed h sono le dimensioni del rettangolo, nel quale si vuole racchiuso l'abbaco trasformato, e la prima è quella dei lati che devono essere occupati dalle scale (α) e (β), basterà. dopo aver sostituiti nelle (8), (9), (10) e (5) a k_1 e a k_2 i valori ora indicati, moltiplicare i secondi membri delle prime tre per l e il secondo membro della quarta per h, si avrà così

$$(12)\qquad x_1 = l\,\frac{\varphi(\alpha) - P_1}{P_2 - P_1}, \qquad (13)\qquad x_2 = l\,\frac{\psi(\beta) - Q_1}{Q_2 - Q_1},$$

$$(14)\qquad x = -\,l\,\frac{P_1 f_1(\gamma,\delta) + Q_1 f_2(\gamma,\delta) + f_3(\gamma,\delta)}{(P_2 - P_1) f_1(\gamma,\delta) + (Q_3 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)},$$

$$(15)\qquad y = +\,h\,\frac{(Q_2 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)}{(P_2 - P_1) f_1(\gamma,\delta) + (Q_2 - Q_1) f_2(\gamma,\delta)}.$$

E queste definiscono completamente un abbaco della (1), il quale ha la forma del rettangolo dato ed è una trasformazione projettiva di quello definito dalle (2), (3), (4) e (5).

Osservazione. Si vede facilmente come, con il medesimo procedimento, si potrebbe trasformare l'abbaco stesso in modo che avesse la forma di un trapezio qualunque dato.

§ 4. Applicheremo ora quanto precede all'equazione

$$(16)\qquad a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$

la quale rientra nel tipo (1) allorchè si ponga

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha = a, \quad \beta = A, \quad \gamma = b, \quad \delta = c, \quad \varphi(\alpha) = a^2, \quad \psi(\beta) = \cos A, \\ f_1(\gamma,\delta) = 1, \quad f_2(\gamma,\delta) = 2\,b\,c, \quad f_3(\gamma,\delta) = -\,(b^2 + c^2), \end{cases}$$

e serve a risolvere un triangolo piano, quando se ne conoscano i tre lati o due lati e un angolo; perchè: noti a, b e c, dà A, noti b, c ed A, dà a; noti a, b ed A, dà c; e in tutti e tre i casi poi basta fare due permutazioni circolari nelle lettere della (16), per poter ricavare gli altri due angoli B e C.

Dalla (17) e dalle (2), (3), (4) e (5) si ha subito

$$(18)\qquad x_1 = k_1\,a^2, \qquad (19)\qquad x_2 = k_2 \cos A,$$

$$(20)\quad x = +\,\frac{k_1\,k_2\,(b^2 + c^2)}{k_1\,k_2 + 2\,b\,c}, \qquad (21)\qquad y = +\,\frac{k_1\,2\,b\,c}{k_1\,k_2 + 2\,b\,c},$$

dalle quali ultime, eliminando c, si ricava

$$(22)\quad y^2\{k_2^2 + k_1^2\,4\,b^4\} + k_1\,4\,b^2\,x\,y - k_1\,4\,b^2\,x - k_1^2\,8\,b^4\,y + k_1^2\,4\,b^4 = 0,$$

ed eliminando b si ha questa stessa equazione, quando vi si sostituisca c a b, perchè la (20) e la (21) sono simmetriche rispetto a b e c.

Tanto le linee di quota b quanto quelle di quota c costituiscono dunque uno stesso sistema di curve avente per equazione la (22), e queste curve sono, evidentemente, tante iperbole, aventi per centro il punto

$$(23) \qquad x = -\frac{k_2^2}{2k_1 b^2}, \quad y = 1$$

e per asintoti le rette

$$(24)\ k_1 4 b^2 x + \{k_2^2 + k_1^2 4 b^4\}\{y-1\} + 2k_2^2 = 0; \quad (25)\ y-1=0;$$

per cui, qualunque sia b, il centro è sempre sulla retta (25), che contiene la scala (20), e che è sempre uno degli asintoti.

§ **5.** Per la costruzione di queste iperbole osserviamo che, posto $y = 0$, dalla (22) si ricava

$$(26) \qquad x = k_1 b^2,$$

da cui, per la (18), deriva che l'iperbola di parametro b passa per il punto che nella scala (a) ha per quota b; di ciascuna iperbola noi conosciamo dunque gli asintoti. (24) e (25), e un punto, e quindi possiamo facilmente costruirla con un metodo notissimo.

Osserviamo inoltre che, dovendo, per la natura del problema, considerare b e c sempre positivi, i soli archi di iperbola che occorrerà di tracciare saranno quelli compresi nella semistriscia posta nel quadrante nel quale ambedue le coordinate sono positive, e limitata dalle due rette sulle quali si trovano le scale (a) ed (A): ciò risulta immediatamente dalla (20) e dalla (21).

Osserviamo pure che l'inviluppo delle (22), come facilmente si verifica, è un luogo del quarto ordine, il quale si scinde in una retta doppia (l'asintoto comune) e nelle due rette

$$(27) \qquad k_2 y - x = 0, \qquad (28) \qquad k_2 y + x = 0,$$

quindi tutti gli archi tracciati sono tangenti al segmento della retta (27) compreso fra i punti $(0;0)$, e $(k_2;1)$; e la semistriscia da essi occupata è limitata (oltre che dalle due rette accennate) dal segmento stesso.

Osserviamo finalmente che si presenta indeterminazione solo nel caso in cui sia dato, o debba risultare, $b = c$, chè allora le due iperbole coincidono; ma questa indeterminazione è solo apparente, perchè il punto limite d'intersezione di due iperbole, le cui quote tendono ad essere eguali, è il punto nel quale l'iperbole, avente per quota la quota comune, tocca l'inviluppo.

Veggasi la fig. 2., per la quale si è posto $k_1 = 1{,}1$, $k_2 = 0{,}8$, e si è preso per unità 3 cm.; in essa la scala (A) è tracciata tutta, da 0° a 180°, la scala (a) va da 0 a 1,2 soltanto, e delle iperbole si sono tracciate solo le due di quota 0,5 e 1,0. Da questa figura, dati $b = 0{,}5$, $c = 1{,}0$ ed $A = 100°$ si ha subito $a = 1{,}2$ circa; dati $b = c = 0{,}5$ ed $A = 130°$ si ha $a = 0{,}9$ circa.

§ **6.** L'abbaco occupa un trapezio avente per vertici i punti

$$(1; -k_2), \quad (1; +k_2), \quad (0;0), \quad (0; k_1 a_2^2),$$

essendo a_2 il massimo valore di a che si vuol considerare: proponiamoci di trasformarlo in modo che esso occupi un rettangolo di dimensioni l ed h (§ 3). Avremo in questo caso

$$P_1 = 0, \quad P_2 = a_2^2, \quad Q_1 = -1, \quad Q_2 = +1,$$

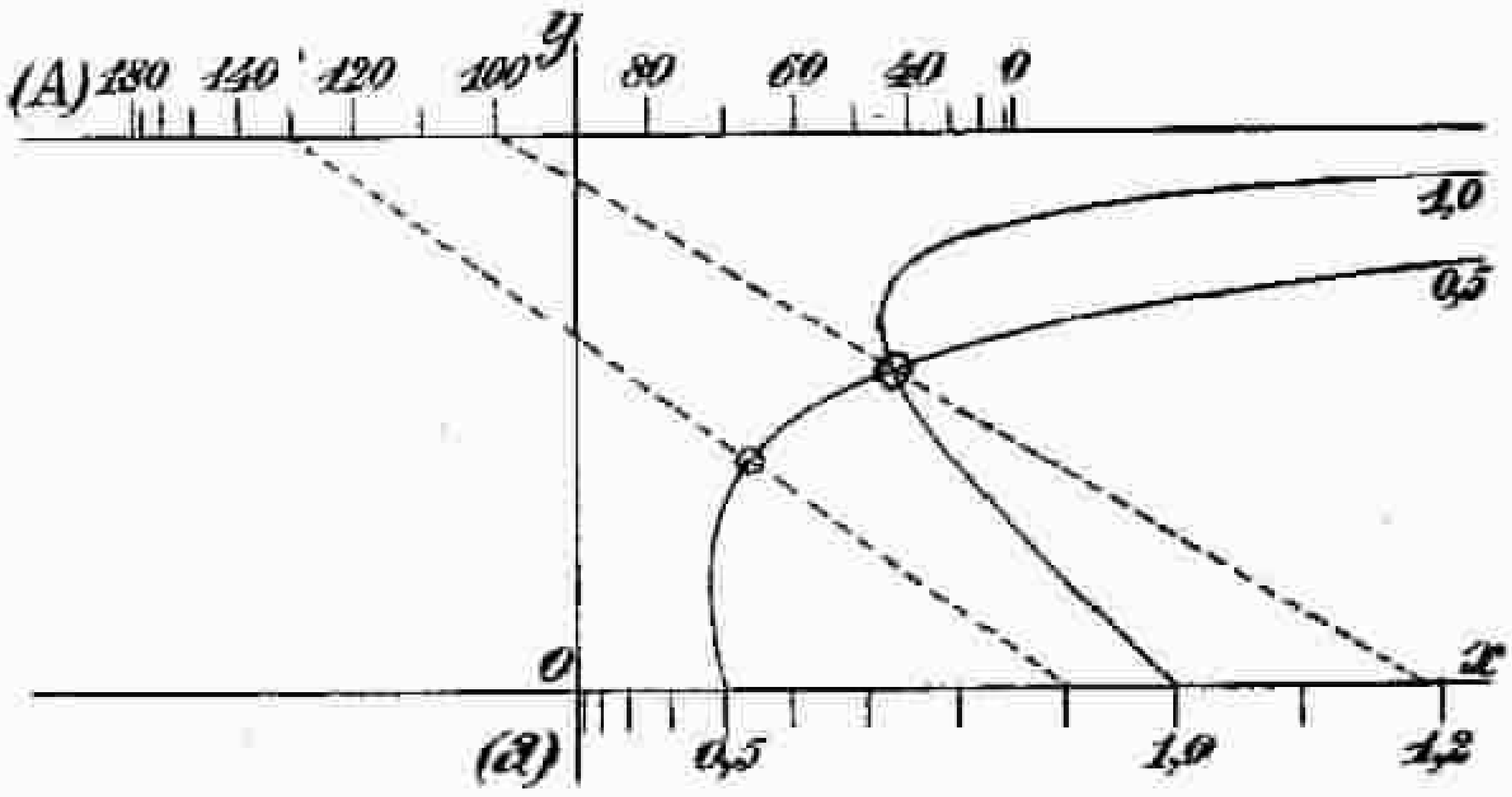

Fig. 2.

quindi dalle (17) e dalle (12), (13), (14) e (15) si avrà senz'altro

$$(29) \qquad x_1 = l \frac{a^2}{a_2^2} \qquad (30) \qquad x = l \frac{1 + \cos A}{2}$$

$$(31) \qquad x = l \frac{(b+c)^2}{a_2^2 + 4bc} \qquad (32) \qquad y = h \frac{4bc}{a_2^2 + 4bc}.$$

Eliminando poi c fra le ultime due, si avrà

$$(33) \quad y^2 l^2 (4b^2 - a_2^2)^2 + x y l h \, 16 b^2 a_2^2 - y l^2 h \, 8 b^2 (4b^2 - a_2^2) - \\ - x l h^2 \, 11 b^2 a_2^2 + l^2 h^2 \, 16 b^4 = 0$$

per equazione del sistema (22) trasformato, e le curve di questo sistema saranno ancora tante iperbole aventi per centro il punto

$$(34) \qquad x = l \frac{4b^2 - a_2^2}{8b^2}, \quad y = h$$

e per asintoti le rette

$$(35) \quad x h \, 16 b^2 a_2^2 + (y - h) \, l \, (4b^2 - a_2^2)^2 - l h \, 2 a_2^2 (4b^2 - a_2^2) = 0,$$

$$(36) \qquad y - h = 0$$

E si potranno qui ripetere tutte le considerazioni fatte al § 5 e trovare così il modo di costruire facilmente gli archi utili delle (33).

§ **7.** Ma gli accennati archi di iperbola si possono costruire per punti in un altro modo molto più semplice.

Siamo a_r ed a_s le quote di due punti qualunque della scala (a), e supponiamo $a_r < a_s$; si congiungano questi due punti rispettivamente coi punti della scala (A) che hanno per quote 0° e 180°: il punto d'intersezione delle due congiungenti è il punto che ha per quote

$$(37) \qquad b = \frac{a_s + a_r}{2} \qquad\qquad c = \frac{a_s - a_r}{2}.$$

Infatti, avendo congiunto il punto a_s col punto 180°, e il punto a_r col punto 0°, le quote del punto d'inserzione devono soddisfare alle due equazioni

(38) $a_s^2 = b^2 + c^2 + 2bc \qquad a_r^2 = b^2 + c^2 - 2bc$,

e da queste, intendendo di indicare con b il maggiore degli altri due lati, derivano immediatamente le (37).

Deriva di qui che per costruire gli archi utili delle iperbole (33) basta congiungere i punti 0° e 180° della scala (A) coi successivi punti della scala (a), segnare in ciascuno dei punti di intersezione le due quote date dalle (37) e poi tracciare gli archi di curva che passano per i punti che hanno una delle due quote costante, giacchè questa quota costante sarà evidentemente la quota dell'iperbola cui quell'arco appartiene.

La fig. 3 è uno abbozzo dell'abbaco che si può così costruire: in essa, fissata per unità il centimetro, si è preso $h = 10$ ed $l = 16$ e si è supposto $a_2 = 10$; degli archi utili di iperbole poi si sono tracciati completamente solo quelli la cui quota non è superiore a 10, degli altri si è tracciata solo quella porzione che è compresa nell'interno dell'arco di quota 10; ed è facile vedere che le quote di questi ultimi non possono superare 20 (perchè per $A = 0°$, $a = 10$, $c = 10$ si ha $b = 20$). Se quindi il lato b fosse dato, o risultasse, maggiore di 20, e uno dei lati a e c fosse dato, o risultasse, maggiore di 10, bisognerebbe dividere i lati dati per una conveniente potenza di 10 e poi moltiplicare il lato ricavato per la stessa potenza. Analogamente, se ambedue i lati dati fossero minori dell'unità.

Esempi. (Veggansi nella fig. le linee punteggiate). Dati $a = 9$, $b = 7$, $c = 3$, si ha $A = 123°$; dati $A = 70°$, $b = c = 7$, si ha $a = 8$; dati $a = 55$, $b = 7$, $A = 100°$ non si ha nessuna soluzione, perchè la congiungente del punto di quota a col punto di quota A non taglia l'arco utile dell'iperbola di quota 7.

Osservazione. Supponendo $A = 90°$ l'abbaco risolve un triangolo rettangolo dati i due cateti, o l'ipotenusa e un cateto; quindi resta solo escluso il caso in cui sia dato un lato e un angolo.

§ 8. L'abbaco precedente non risolve immediatamente un un caso solo: quello in cui sono dati due angoli e un lato, e nel quale occorre risolvere un'equazione della forma

$$(30) \qquad \frac{a}{\text{sen A}} = \frac{b}{\text{sen B}}.$$

Però, ricorrendo coll'ordinario regolo logaritmico si può determinare prima il rapporto a: sen A, che è il *modulo* del triangolo e che indicheremo con m, e poscia b mediante m e B.

Si potrebbe anche costruire un abbaco *a rotazione* o *a doppio allineamento* (*), analogo a quello che già costruimmo per una questione di *Geometria pratica* (**), e questo abbaco conterrebbe tre scale rettilinee soltanto: una per a e b, una per α e β e una per m.

(*) V. *Tr. de Nomographie*, pag. 213.
(**) « Application de la Nomographie au jaugeage des tonneaux » — Le Génie Civil. 20 mai 99.

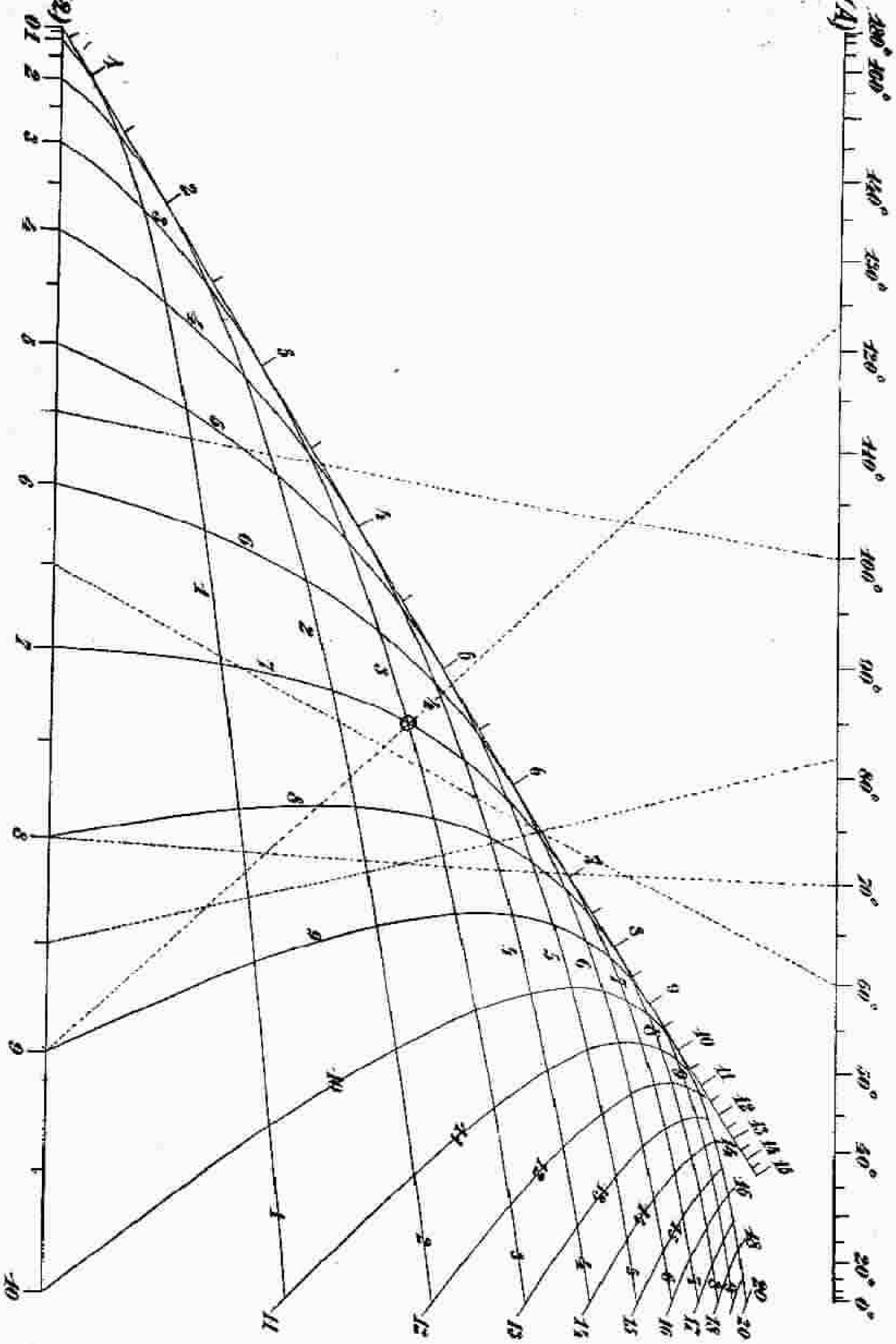

Fig. 3.

Ma l'abbaco che abbiamo già costruito può servire, quasi immediatamente, anche in questo caso. Si tracci la diagonale che fa parte dell'inviluppo del nostro sistema d'imperbole, e si consideri su di essa la scala determinata dai punti di contatto dei varî archi, colle relative quote: se si congiunge il punto di quota a col punto di quota A, è chiaro che la congiungente taglierà la nuova scala in un punto di quota

$$(40) \qquad m = \frac{a}{2} : \operatorname{sen} \frac{A}{2},$$

perchè a questa si riduce la (16) facendo $b = c = m$. E allora, per risolvere la (39), basta congiungere il punto a della scala (a) col punto 2 A della scala (A): si determinerà così sulla diagonale il punto di quota $\frac{m}{2}$; e poi congiungere questo punto col punto 2 B della scala (A), e sulla scala (a) si determinerà b.

Esempio. Dati $a = 6{,}5$, $A = 30^0$, $B = 41^0$ dall'abbaco si ha $b = 8{,}5$.

Osservazione I. Dal procedimento ora indicato risulta che della nuova scala m basterebbe tracciare solo il sopporto, perchè non occorre conoscere la quota $\frac{m}{2}$ del punto d'intersezione. Questa quota però è utile nel caso particolare che il triangolo sia rettangolo (V. Oss. al § prec.) e ne sia noto un lato e un angolo: così per $b = 8{,}5$ e $B = 41^o$ si ha per ipotenusa $m = 2 \times 6{,}5 = 13$.

Osservazione II. Aggiungendo tanto alla scala (A) che alla scala (m) un'altra graduazione che fosse il doppio di quella segnata, l'abbaco risolverebbe *immediatamente* anche il caso considerato: la scala (a) e le due nuove scale (A) ed (m) costituirebbero allora un abbaco a rotazione del tipo suaccennato.

§ **9.** Collo stesso procedimento si può costruire un abbaco dell'equazione

$$(41) \qquad \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \operatorname{sen} A,$$

la quale serve a risolvere un triangolo sferico in tutt'e sei i casi, perchè tre di questi corrispondono ai tre considerati in principio del § 4, e gli altri tre si riducono ai precedenti mediante la considerazione del triangolo polare.

Prendendo $k_1 = k_2 = g$, basterà porre (§ 2)

$$(42) \qquad x_1 = +g \cos a, \qquad (43) \qquad x_2 = -g \cos A$$

$$(44) \qquad x = \frac{g \cos b \cos c}{1 + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}, \qquad (45) \qquad y = \frac{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{1 + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}:$$

dove i moduli k_1, k_2 si sono assunti eguali, perchè, dovendo considerare tanto a che A compreso fra 0^o e 180^o, le due scale (a) ed (A) risulteranno identiche (meno in senso); e dove si è posta la (43), perchè, dovendo considerare anche b e c compresi fra 0^o e 180^o, la (45) ci darà sempre per y valori compresi fra 0 e 1, mentre che, se si fosse posto $x_2 = +g \cos A$ (come sembrerebbe più naturale), per b e c tendenti a 90^o, y tenderebbe a $-\infty$. Dalle ultime due, eliminando c, si ha

(46) $$\frac{x^2}{\cos^2 b} + \frac{g^2 y}{\operatorname{sen}^2 b} = g^2 (1-y)^2 :$$

anche qui dunque (§ 4), e per la stessa ragione, le linee di quota b e le linee di quota c costituiscono uno stesso sistema di curve, avente per equazione la (46), e queste curve sono tante ellissi, aventi per centro il punto

(47) $$x = 0, \quad y = -\tan^2 b;$$

per cui, qualunque sia b, il centro è sempre sull'asse cartesiano delle y, e questo stesso asse (come risulta dalla (46)) contiene sempre uno degli assi della ellisse.

§ **10.** L'abbaco precedente è stato costruito dal prof. d'Ocagne (*), il quale ha dato anche un metodo semplice per tracciare le varie ellissi, basato sulle seguenti considerazioni.

Posto $y = 0$, dalla (46) si ha

(48) $$x = \pm g \cos b,$$

per cui l'ellisse di parametro b passa per i due punti che nella scala (a) hanno per quote b e $180^\circ - b$, e le tangenti in questi due punti, come si verifica facilmente, passano per il punto $(0; 1)$; inoltre la stessa ellisse taglia la parte positiva dell'asse delle y nel punto

(49) $$y = \frac{\operatorname{sen} b}{1 + \operatorname{sen} b},$$

nel quale punto la tangente è parallela all'asse delle x. La costruzione di ciascuna delle ellisse (46) è dunque ricondotta al caso in cui se ne conoscano due punti, le tangenti in questi due punti, e la tangente parallela alla corda che congiunge i due punti stessi: caso nel quale la costruzione per punti si effettua facilmente con un metodo già indicato dallo stesso prof. d'Ocagne. (**)

Osserviamo che l'inviluppo delle (46) è (come quello delle (22)) un luogo del quarto ordine, il quale si scinde in quattro rette: due che hanno per equazione complessiva $x^2 = g^2$ e che sono i luoghi dei vertici della conica posti sull'asse parallelo all'asse cartesiano delle x; e due che congiungono i punti $(-g; 1)$, $(+g; 1)$ coi punti $(+g; 0)$, $(-g; 0)$ rispettivamente: di qui e dalla seconda delle (47) risulta che gli archi utili delle (46) sono quelli racchiusi nel triangolo formato da queste ultime due rette e dall'asse delle x.

Osserviamo pure che, nel caso in cui sia $b = c$, si presenta indeterminazione, ma che questa sparisce subito con una considerazione analoga a quella fatta nel § 5.

Osserviamo finalmente che, come risulta dalla (46), per due valori supplementari di b si ha una stessa ellisse e che due ellissi di quota diversa si tagliano in due punti simmetrici rispetto all'asse delle y; si presenta quindi ambiguità se, dati A, a e b (o A, a e c), si vuole c (o b), e se, dati A, b e c (o a, b e c) si vuole a (od A). Ma anche queste ambiguità spariscono, se si os-

(*) V. *Bulletin astronomique.* — Tom. XI. Gennaio 94; oppure: *Tr. de Nomographie*, pag. 331.
(**) V. *Nouvelles Annales de Math.* — 3. Serie, Tom. XII, pag. 350.

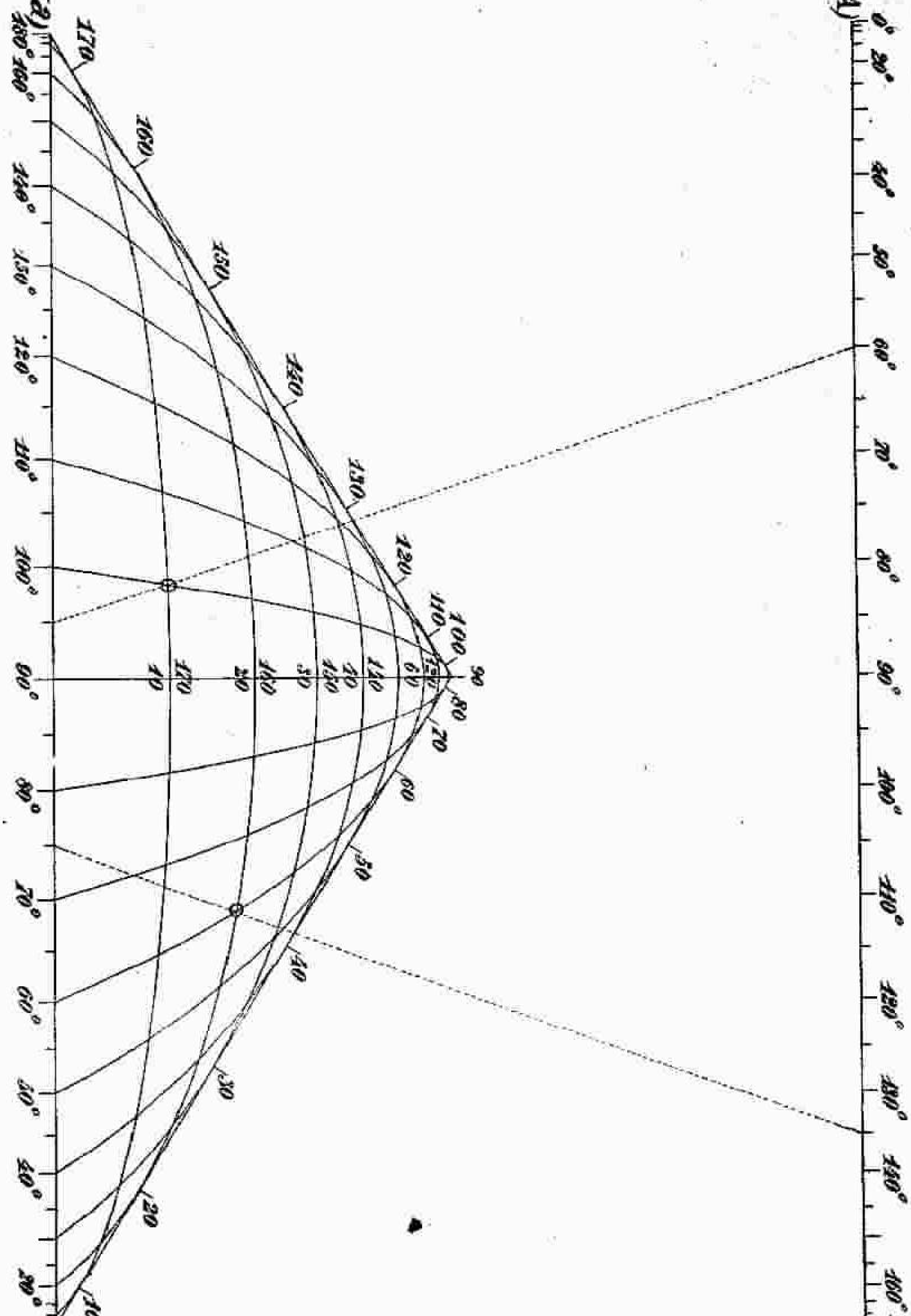

Fig. 4.

serva che, come risulta dalla (44), x è positivo o negativo secondochè b e c sono della stessa specie o di specie contraria.

§ **11.** L'abbaco così costruito ha per vertici i punti $(-g\,;1)$,

$(+g; 1), (-g; 0), (+g; 0)$: esso quindi ha già la forma di un rettangolo, e, perchè questo abbia dimensioni l, h date, basta evidentemente porre $g = \frac{l}{2}$ nelle (42), (43) e (44) e moltiplicare per h il secondo membro della (45).

Osserviamo solo che gli archi utili della (46) si possono costruire con un procedimento analogo a quello del § 7 e che è forse più semplice di quello suaccennato. Infatti, nelle stesse ipotesi del § 7, invece delle (38) avremo ora

$$\cos a_r = \cos(b - c), \quad \cos a_s = \cos(b + c)$$

e quindi anche in questo caso si avranno le (37) e altre due che daranno per c e b valori rispettivamente supplementari.

La fig. 4 è un abbozzo dell'abbaco che si può così costruire, e per essa si sono prese le stesse dimensioni della fig. 3.

Esempi. Dati $a = 95^\circ, b = 10^\circ$ e $c = 100^\circ$, si ha $A = 60^\circ$; dati $A = 135^\circ, a = 75^\circ, b = 60^\circ$ si ha $c = 20^\circ$ soltanto.

§ **12.** Disegnando il primo dei due abbachi precedenti con dimensioni triple o, al più, quadruple di quelle della fig. 3, si possono leggere le misure dei lati con due cifre esatte (e gli angoli coll'approssimazione corrispondente); e questa ci pare un'approssimazione sufficiente per quasi tutte le quistioni della *Navigazione piana* e *costiera*, per molte questioni di *Topografia* e anche per qualche questione di *Balistica*. Del resto, anche quando l'approssimazione fornita dall'abbaco non sia sufficiente, esso può sempre dare una prima approssimazione utile in molti casi.

§ **13.** Siccome quasi tutte le questioni dell'*Astronomia* si riducono, in sostanza, alla risoluzione di un triangolo sferico, il secondo degli abbachi precedenti potrebbe avere un'applicazione larghissima; ma, per raggiungere l'approssimazione che dall'*Astronomia*, generalmente, si richiede, questo abbaco dovrebbe avere dimensioni tali da renderlo praticabilmente inservibile. Però, disegnando anche questo abbaco con dimensioni triple, o quadruple, di quella della fig. 4, si può sompre ottenere una prima approssimazione, utile in molti casi; e in qualche particolare problema, questa approssimazione può essere sufficiente: come, per esempio, nella ricerca della rotta per la navigazione per circolo massimo, ricerca nella quale l'approssimazione di un grado è sufficiente e che nelle carte dell'*Hilleret* (*) richiede una costruzione.

§ **14.** L'approssimazione potrebbe aumentarsi frazionando l'abbaco in diverse parti; in tale ipotesi però si deve notare che, se in un abbaco del tipo precedente si spezza una delle due scale $(\alpha), (\beta), (\S\, 2)$ in p e l'altra in q parti, l'abbaco stesso si spezza in pq parti e viene quindi ad occupare pq fogli.

E per molti problemi dell'*Astronomia nautica* crediamo che questo numero non dovrebbe essere molto grande, perchè i valori delle incognite di questi problemi servono spesso per eseguire

(*) V. « *Instruction sur les cartes pour la navigation par l'arc de grand cercle.* » — Paris Imprimeci nationale, 1878.

delle costruzioni sulle carte di navigazione e quindi ci pare che tutta l'approsimazione, che ordinariamente si raggiunge in quei valori col calcolo numerico, non sia, generalmente necessaria.

A questo proposito ricordiamo che, per due dei più importanti problemi accennati, il Prof. E. Ippolito recentemente propose di costruire addirittura il triangolo sferico sopra un globo col raggio di 16 a 25 cm. e convenientemente sistemato (**); forse l'approssimazione che così si raggiunge si potrebbe ottenere anche coll'abbaco in questione, frazionato in nove o in sedici parti al più.

§ **15.** E fra i mezzi escogitati per risolvere immediatamente un triangolo sferico accenneremo anche a un istrumento notevolissimo inventato, più di un secolo fa, dall'Ing. *Richer* (***).

L'Accademia delle scienze di Parigi aveva aperto, per l'anno 1790, un concorso sulla seguente questione: « *Trouver pour la réduction de la distance apparente de deux astres en distance vraie un méthode sûre et rigoureuse, qui n'exige cependant dans la pratique que des calculs simples et à la portée du plus grand nombre de navigateurs.* » Ma « *parmi les piaces envoyeés au concours, il n'y en eut ancune qui remplît assez sûrement ni assez exantement l'objet de la question proposée* » e il concorso fu rimesso all'anno succsssivo. E siccome « *la plupart des concurrents étoient des artistes qui avoient fait ce qui dépendoit d'eux pour inventer des instruments capables d'opérer la réduction demandée, ... le citoyen Lagrange* » temendo « *qu'ils ne fissent de nouveaux efforts aussi infructueux que le premiers ... se proposa la recherche d'un principe qui pût servir de base à la construction de ces sortes d'instruments* ». Per ciò l'illustre matematico mostrò che l'equazione (41) può trasformarsi nell'altra

$$4 \operatorname{sen} \frac{2\,a}{2} = \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} + \operatorname{sem} \frac{b-c}{2} \right\}^2 + \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} - \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\}^2 -$$
$$- 2 \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} + \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\} \left\{ \operatorname{sen} \frac{b+c}{2} - \operatorname{sen} \frac{b-c}{2} \right\} \cos A,$$

e che quindi colla costruzione di un tringolo piano si potevano risolvere quattro dei casi che si presentano nella risoluzione dei triangoli sferici. E « *il paroît que le citoyen Richer en fut le plus frappé, car ce fut l'instrument qui il exécuta sur ce principe, qui remporta le prix en 1791.* »

Non possiamo qui riportare la descrizione di quell'istrumento, diremo solo che con leggiere aggiunte esso serve anche per i due casi esclusi (v. pag. 23 del fasc. cit.), che l'approssimazione, che si può ottenere. può arrivare fino a cinque secondi (pag. 9), che il Borda immaginò un mezzo di rendere l'istrumento « *autant exact dans ses usages que si les dimensions de cet instrument étoient plus que décuplées* (pag. 29), e che il Callet (pag. 10) dichiara

(**) V. « *Uso del globo celeste nella determinazione speditiva delle coordinate geografiche della nave.*» — Rassegna Navale, Anno II, N. 4-5.

(***) V. « *Supplément a la Trigonomitrie sphérique et a la Navigation de Bezout par François Callet* » — Imprimerie de Didot, an VI (1798).

che lo ha interessato tanto come se egli stesso ne fosse stato l'inventore *(m'intéressa autant que si j'en eusse été l'inventeur)*. In tutto il fascicolo però non si dice quali ne fossero le dimensioni, e noi supponiamo che fossero troppo grandi e che per questo l'istrumento stesso sia stato dimenticato; a noi pare che ora varrebbe forse la pena di richiamarlo dall'obblio, perchè, coi perfezionamenti introdotti nell' arte della costruzione degli istrumenti geometrici, si potrebbe forse renderlo praticamente utile.

§ **16.** Termineremo questa nota con alcune considerazioni d'ordine generale, relative agli abbachi.

Il valore di una quantità incognita si può generalmente ottenere sia col calcolo numerico, sia col calcolo grafico: il primo è quello più comunemente usato, il secondo ha preso il suo sviluppo solo in questi ultimi anni, ma (specialmente colla *Statica grafica)* è già largamente applicato in tutta l' ingegneria. Quando però, in un certo ordine di applicazioni, si presenti la necessità di risolvere frequentemente uno stesso problema, il calcolo numerico (dovendo essere rifatto, in tutto o in parte, per ogni cambiamento dei dati) richiede un tempo, spesso non breve, in una fatica arida e priva di qualunque attrattiva; e altrettando accade per il calcolo grafico, nel quale anzi si presenta un altro inconveniente: quello di richiedere che l' operatore abbia una speciale perizia nell'arte del disegno e si trovi in condizioni materiali che gli permettano di disegnare.

Sorge dunque naturale il bisogno di evitare l'un calcolo e l' altro; e, come per il calcolo numerico si ricorre a delle tavole numeriche, che comprendano i risultati CALCOLATI una volta per sempre (per i valori dei dati racchiusi entro un certo campo di variabilità), per il calcolo grafico si ricorre a degli abbachi che forniscano i risultati una volta per sempre COSTRUITI.

§ **17.** Contro l'uso degli abbachi si obbietta principalmente che con essi si raggiunge, in generale, un' approssimazione ben piccola (due o tre cifre), mentre che col calcolo numerico l'approssimazione può generalmente esser spinta a quel grado che si vuole.

Crediamo anche noi che gli abbachi non possano, *in generale*, servire per calcoli astronomici (come abbiamo già accennato), per calcoli geodetici e per calcoli finanziarî; ma esiste un larghissimo campo nelle applicazioni delle matematiche nel quale gli abbachi possono condurre a un' approssimazione sufficiente (*), mentre la maggior approssimazione che si potrebbe raggiungere col calcolo è solo illusoria. (**)

(*) Per avere un'idea delle numerosissime e utili applicazioni che si son fatte fino a tutto il 1897 col metodo dei punti allineati soltanto, veggasi la « *Revue générale des sciences* » del 15 Febbraio 1898.

(**) Così, per esempio, perchè, in *Navigazione*, calcolare la rotta con una approssimazione inferiore a un grado, mentre la nave non si può governare a meno di un grado di approssimazione? perchè, in *Geometria pratica*, calcolare la capacità di una botte ordinaria fino alle frazioni di litro, mentre questi recipienti non hanno una forma geometrica definita (e quindi la formula calcolata non può essere che empirica), e di più sono affetti nella loro costruzione da irregolarità inevitabili e sensibilissime? (basti il dire che le formule più comunemente usate conducono a risultati che possono differire dalla capacità direttamente misurata per più di tre centesimi della capacità stessa).

E neppure nei calcoli astronomici e geodetici crediamo che il loro uso debba essere *assolutamente* bandito, perchè, quando l'elemento incognito abbia un ristretto campo di variabilità (come generalmente accade per gli gli elementi di correzione), si può spesso raggiungere un'approssimazione sufficiente anche con un abbaco: noi stessi ne demmo già un esempio nell'« Abbaco per il calcolo della latitudine mediante un'altezza circummeridiana » (*) e altri se ne potrebbero dare per la formula che serve alla correzione dei cronometri col metodo delle altezze corrispondenti, per la formula che dà la latitudine con la stella polare, ...

Del resto, se l'uso degli abbachi dovesse essere bandito dalle applicazioni perchè il disegno non dà sufficiente approssimazione, per la stessa ragione si dovrebbe bandire la *Statica grafica*, e invece le applicazioni di questa recentissima scienza aumentano sempre più in numero e in importanza.

§ 18. Fra le obbiezioni di minore importanza accenneremo a quella dell'ingombro che possono portare i varî abbachi occorrenti in una determinata classe di applicazioni.

Ma a noi pare che neppure questa obbiezione, generalmente, regga. Così: gli abbachi per i calcoli topografici dovrebbero servire a tavolino (chè in campagna i campagna i calcoli non si fanno) e allora l'ingombro prodotto da pochi fogli non potrebbe essere sensibile; gli abbachi per il tiro delle artiglierie non potrebbero occupare che uno spazio insignificante fra tutto il materiale che accompagna ogni cannone; gli abbachi per i calcoli di navigazione potrebbero benissimo esser posti fra le numerose carte idrografiche, delle quali ogni nave è fornita, e anche in questo caso l'ingombro accennato sarebbe insignificante; ....

§ 19. Gli abbachi invece presentano sulle tavole numeriche numerosi e indiscutibili vantaggi.

Prima di tutto, se la funzione incognita è a due variabili indipendenti, nell'abbaco l'interpolazione si fa immediatamente a occhio, mentre nella corrispondente tavola numerica a doppia entrata occorre un calcolo numerico non molto breve.

Se la funzione è a tre variabili indipendenti, una tavola numerica a doppia entrata non basta più e ne occorrono invece tante quanti sono i valori che per una di quelle tre variabili si vogliono considerare; mentre invece i moderni metodi della *Nomografia*, permettono di costruire degli abbachi per funzioni a un numero qualunque di variabili indipendenti. (**) E ci sembra notevolissimo il fatto che con abbachi del tipo in questa nota indicato (§ 2), si possano ottenere tutte le radici reali di un'equazione numerica completa di 3°, di 4°, e anche di 5° grado (***); risultato, questo, importantissimo, perchè, se anche l'approssimazione non è sufficiente, si possono, con questi abbachi, risparmiare molti dei laboriosissimi tentativi indicati dall'*Algebra superiore*.

(*) V, *Rivista Maritt.* — Ottobre 1898.
(**) V. *Traité de Nomographie*, — pag. 312, 322.
(***) » » » — dalla pag. 333 alla pag. 341.

[illegible] che l'approssimazione sia [illegible] del calcolo numerico non è evitato, mentre [illegible] immediatamente il risultato che si avrebbe colla formula [illegible]. Un esempio si ha nel calcolo dell'angolo di pre[illegible] ad angolo fisso. (*)

[illegible] che un problema, che sarebbe utile e interessante risolvere in generale, si risolva solo in determinati casi [illegible] per evitare un calcolo laborioso; l'abbaco allora, dando [illegible] in qualunque caso e immediatamente, permette di [illegible] del vantaggio che la soluzione stessa può portare. [illegible] si ha nel calcolo della distanza di un punto elevato sulla [illegible] al di là dell'orizzonte (**), problema utilissimo [illegible] costiera, e che ordinariamente per la ragione ne[illegible] si risolve solo nel caso in cui l'altezza apparente sia nulla.

[illegible] metodi moderni permettono anche la sovrapposizione di [illegible] abbachi, ognuno dei quali dia il valore di una funzione a [illegible] variabili indipendenti; e se ne può vedere un esempio no[illegible] nell'*Abbaco del tiro navale* (***), in una pagina del quale [illegible] potuto sovrapporre *quattro* di questi abbachi, mentre [illegible] sovrapposizione dei soliti abbachi cartesiani corrispondenti [illegible] prodotto un disegno assolutamente illeggibile.

[illegible] concluderemo osservando che anche la matematica pura [illegible] forse trarre qualche vantaggio dallo studio dei moderni [illegible] della *Nomografia*, perchè questi, rendendo possibile una [illegible] grafica di funzioni a più variabili, possono met[illegible] sulla via di trovare nuove proprietà e di inventare nuovi metodi (****); non si deve dimenticare che il *Calcolo* [illegible] nacque dal problema delle quadrature e che il *Calcolo* [illegible] nacque dal problema delle tangenti.

Livorno, Febbraio 1900.

G. Pesci

(*) V. per esempio, *Parodi*, Rivista d'Artiglieria e Genio, 1889 Vol. II. e *Ronca* « Note sul tiro » (Rivista Marittima, — Agosto-Ottobre 1898, § 5).

(**) L'abbaco per l'indicato problema si può vedere nel § 5 delle « Note sul tiro » ora citate [illegible] l'abbaco da noi pubblicato nel fascicolo di Febb. 1899 della Riv. Maritt.

(***) Per l'uso e la descrizione di questa parte dell'abbaco del tiro, vedasi la nota del [illegible] ora citata (§ 7); per l'esposizione dei metodi seguiti nella sua costruzione [illegible] nostra nota: *Cenni di Nomografia* (Rivista Maritt. — Agosto, Novembre 1899 e Febb. [illegible]).

[illegible] altro esempio importantissimo si può vedere in una nota pubblicata recentissimamente dal prof. d'Ocagne (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences* — [illegible] Febbraio 1900), nella quale [illegible] sovrapposizione di quattro abbachi, si ottiene un abbaco solo che risolve immediatamente il problema delle occultazioni lunari.

(****) Un esempio molto semplice di tali vantaggi si ha nel § 33 dei *Cenni di Nomografia* ora citati, [illegible] sono potuti confrontare i risultati a cui conducono due diverse funzioni delle stesse due variabili indipendenti, sovrapponendo i corrispondenti abbachi.

SULLO SVILUPPO

in frazione continua della radice quadrata dei numeri razionali

Usando la formola di trasformazione

$$\sum_1^n v_n = \left(\frac{v_1}{1}, \frac{-v_2}{v_1+v_2}, \frac{-v_1 . v_3}{v_2+v_3}, \frac{-v_2 . v_4}{v_3+v_4}, \frac{-v_3 . v_5}{v_4+v_5}, \ldots\ldots\right),$$

si può sviluppare in frazione continua ogni espressione di cui si conosca uno sviluppo in serie. Lo sviluppo in frazione continua è anzi assai spesso più comodo: la ridotta r^{ma} è eguale alla somma dei primi r elementi della serie corrispondente.

Così, quando vale lo sviluppo in serie di Mac-Laurin e sono diversi da 0 i valori $f(0), f'(0), \ldots, f^{(r)}(0), \ldots$, abbiamo

$$f(x) = \left(\frac{f(0)}{1}, \frac{-x . f'(0)}{f(0)+x . f'(0)}, \frac{-x . f''(0) . f(0)}{2 . f'(0)+x . f''(0)}, \frac{-2x . f'''(0) . f'(0)}{3 . f''(0)+x . f'''(0)}, \ldots\ldots\right),$$

sicchè, ad es., per: $-1 < x < 1$, abbiamo:

$$(1+x)^a = \left(\frac{1}{1}, \frac{-a . x}{1+a . x}, \frac{-(a-1) . x}{2+(a-1) . x}, \frac{-2 . (a-2) . x}{3+(a-2) . x}, \frac{-3 . (a-3) . x}{4+(a-3) . x}, \ldots\ldots\right),$$

e in particolare:

$$\sqrt{1+x} = \left(\frac{1}{1}, \frac{-x}{2+x}, \frac{2 . x}{2 . 2-x}, \frac{2 . 2 . 3 . x}{3 . 2-3 . x}, \frac{3 . 2 . 5 . x}{4 . 2-5 . x}, \frac{4 . 2 . 7 . x}{5 . 2-7 . x}, \ldots\ldots\right).$$

Questo sviluppo però serve solo pei numeri positivi minori di 2 e credo non si sia ancora data una formola generale per lo sviluppo in frazione continua delle radici quadrate dei numeri non interi e maggiori di 2.

In questa breve nota mi propongo di dare un semplice e comodo sviluppo in frazione continua periodica della differenza: $\sqrt{\frac{m}{n}} - r$, indicando con $\frac{m}{n}$ un qualunque numero razionale maggiore di 1 e non quadrato perfetto, e con r la sua radice quadrata a meno di 1, ossia il numero intero tale che sia: $r^2 < \frac{m}{n} < (r+1)^2$.

Dall'eguaglianza $x = \sqrt{\frac{m}{n}} - r$ abbiamo

$$x = \frac{\left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) . \left(\sqrt{\frac{m}{n}} + r\right)}{\sqrt{\frac{m}{n}} + r} = \frac{\frac{m}{n} - r^2}{(r+x)+r} = \frac{m-nr^2}{2nr+nx} = \frac{m-nr^2}{2nr + \frac{m-nr^2}{2r+x}}$$

e quindi

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{m}{n}} - r = \left(\frac{m-nr^2}{2nr}, \frac{m-nr^2}{2r}; \frac{m-nr^2}{2nr}, \ldots\ldots\right)$$

purchè però si dimostri che tale frazione è convergente.

Indicando con N_t e D_t rispettivamente il numeratore ed il denominatore della sua ridotta t^{ma}, abbiamo:

$$N_{2s} = 2r \cdot N_{2s-1} + (m - nr^2) \cdot N_{2s-2} \quad , \quad N_{2s+1} = 2nr \cdot N_{2s} + (m - nr^2) \cdot N_{2s-1} \, ,$$
$$D_{2s} = 2r \cdot D_{2s-1} + (m - nr^2) \cdot D_{2s-2} \quad , \quad D_{2s+1} = 2nr \cdot D_{2s} + (m - nr^2) \cdot D_{2s-1} \, .$$

Ricordando che $m > nr^2$, facilmente si verificano per $s = 1$ e, ammesse per s, si dimostrano per $s + 1$ le relazioni seguenti:

$$| N_{t+1} \cdot D_t - N_t \cdot D_{t+1} | = (m - nr^2)^{t+1}$$
$$D_{2s} > (4nr^2)^s \qquad , \qquad D_{2s+1} > 2nr \cdot (4nr^2)^s .$$

Ne scende immediatamente che

$$\left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right| < \frac{(m - nr^2)^{t+1}}{2nr \cdot (4nr^2)^t} .$$

Ma da: $r^2 < \frac{m}{n} < (r + 1)^2$ scende: $nr^2 < m < 5nr^2$, e quindi $0 < \frac{m - nr^2}{4nr^2} < 1$; la successione $\left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right|$, per t crescente, converge quindi a 0 assieme alla successione: $\left(\frac{m - nr^2}{4nr^2}\right)^t$; la frazione continua proposta è dunque convergente.

Essendo poi:

$$\sqrt{\frac{m}{n}} - r = \frac{N_{2p} + \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) \cdot N_{2p-1}}{D_{2p} + \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) \cdot D_{2p-1}} ,$$

ne scende

$$0 < \frac{N_{2s+1}}{D_{2s+1}} - \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) < \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) - \frac{N_{2s}}{D_{2s}} ,$$
$$0 < \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) - \frac{N_{2s}}{D_{2s}} < \frac{N_{2s-1}}{D_{2s-1}} - \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) ,$$

donde infine

$$\left| \left(\sqrt{\frac{m}{n}} - r\right) - \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} \right| < \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{N_{t+1}}{D_{t+1}} - \frac{N_t}{D_t} \right| < r \cdot \left(\frac{m - nr}{4nr^2}\right)^{t+1} .$$

Così si conosce l'errore commesso arrestandosi ad una ridotta qualsiasi e facilmente si vede a qual ridotta conviene arrestarsi per raggiungere una data approssimazione. In pratica però, per avere, ad esempio, la $\sqrt{\frac{m}{n}}$ a meno di $\frac{1}{1000}$, basta procedere nel calcolo delle ridotte finchè se ne trovino due consecutive, che, espresse in frazioni decimali, abbiano in comune le tre prime cifre. Sommando ad r il valore approssimato comune a queste due ridotte si ha la $\sqrt{\frac{m}{n}}$ coll'approssimazione richiesta.

Dalla formola (1) abbiamo poi tosto la

$$(2) \qquad \sqrt{\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{r} \; ; \; \frac{m - nr^2}{2nr} \, , \, \frac{m - nr^2}{2r} \; ; \; \frac{m - nr^2}{2nr} \, , \, \ldots\ldots\right) ,$$

che ci dà la radice quadrata d'un qualunque numero razionale minore di 1 e non quadrato perfetto, sviluppata in funzione dei suoi due termini e della radice a meno di 1 del suo inverso.

Padova, 1900.

PAOLO CATTANEO.

BARICENTRO DI UN TRONCO DI PRISMA TRIANGOLARE

(QUISTIONE 460)

Se a', b', c' sono le lunghezze degli spigoli laterali di un tronco di prisma triangolare, B'', A'', C'' i punti di mezzo di questi, il baricentro del tronco è il baricentro dei punti A'', B'', C'' affetti dai coefficienti

$$2a' + b' + c', \qquad a' + 2b' + c', \qquad a' + b' + 2c'.$$

Sia $ABC\,A'B'C'$ il tronco dato e prendiamo per assi dalle coordinate le rette CB, CA, CC'. Il piano $C'AB$ scompone il tronco in un tetraedro $C'CAB = P_1$ e in una piramide quadrangolare $C'ABB'A' = P_2$.

Il baricentro K_1 di P_1 è quello dei punti

$$C\,(0,\ 0,\ 0),\quad B\,(a,\ 0,\ 0),\quad A\,(0,\ b,\ 0),\quad C'\,(0,\ 0,\ c'),$$

affetti da coefficienti eguali, e perciò le sue coordinate sono

$$x_1 = \frac{a}{4},\ y_1 = \frac{b}{4},\ z_1 = \frac{c}{4}.$$

Il baricentro H_2 del trapezio $ABB'A'$ è sul segmento limitato dai punti

$$A''\left(0,\ b,\ \frac{a'}{2}\right),\ B''\left(a,\ 0,\ \frac{b'}{2}\right),$$

e lo divide in due parti tali che

$$\frac{A''H_2}{H_2B''} = \frac{2b' + a'}{2a' + b'},$$

perciò le sue coordinate sono

$$x_2' = \frac{a(2b' + a')}{3(a' + b)},\quad y_2' = \frac{b(2a' + b)}{3(a' + b)},\quad z_2' = \frac{a'^2 + a'b' + b'^2}{3(a + b')}.$$

Il baricentro K_2 di P_2 si trova sul segmento limitato dai punti $C'(0, 0, c')$ e H_2, e lo divide in due parti tali che sia

$$\frac{C'K_2}{K_2H_2} = \frac{3}{1}.$$

Le sue coordinate sono dunque

$$x_2 = \frac{3x'_2}{4},\qquad y_2 = \frac{3y'_2}{4},\qquad z_2 = \frac{3z'_2 + c'}{4},$$

ovvero

$$x_2 = \frac{a(2b' + a)}{4(a' + b')},\quad y_2 = \frac{b(2a' + b')}{4(a' + b')},\quad z_2 = \frac{a^2 + b^2 + a'b' + a'c' + b'c'}{4(a' + b')}.$$

È facile vedere che

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{c'}{a' + b'},$$

perciò il baricentro del tronco è il baricentro dei punti K_1, K_2, affetti dai coefficienti c', $a' + b'$. Le sue coordinate sono dunque

$$x = \frac{c'x_1 + (a' + b')x_2}{a' + b' + c'},\quad y = \frac{c'y_1 + (a' + b')y_2}{a' + b' + c'},\quad z = \frac{c'z_1 + (a' + b')z_2}{a' + b' + c'},$$

ovvero

$$x = a \cdot \frac{a' + 2b' + c'}{4(a' + b' + c')},$$
$$y = b \cdot \frac{2a' + b' + c'}{4(a' + b' + c')},$$
$$z = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 + b'c' + c'a' + a'b'}{4(a' + b' + c')}.$$

Queste sono anche le coordinate del baricentro dei punti

$A''\left(0,\ b,\ \frac{a'}{2}\right)$ affetto dal coefficiente $2a' + b' + c'$

$B''\left(a,\ 0,\ \frac{b'}{2}\right)$ " " $a' + 2b' + c'$

$C''\left(0,\ 0,\ \frac{c'}{2}\right)$ " " $a' + b' + 2c'$

G. Lazzeri.

NOTA GEOMETRICA SULLE QUISTIONI 73, 387, 468

1°. Sieno D ed E i piedi delle bisettrici interne degli angoli B e C del triangolo ABC. Supponiamo tre forze eguali F e dirette secondo BC, BA, AC rispettivamente.

Le due prime ammettono una risultante diretta secondo la bisettrice interna dell'angolo. B e per conseguenza la risultante generale del sistema delle tre forze passa per D. La prima e la terza ammettono una risultante diretta secondo CE e per conseguenza la risultante generale passa pure per E. Ne segue che questa risultante è diretta secondo DE, e che per ciascuno dei suoi punti la somma dei momenti delle tre forze è nulla.

Sieno dunque P un punto qualunque di DE e x, y, z le sue distanze dai tre lati del triangolo; si avrà

$$x \cdot F - y \cdot F - z \cdot F = 0,$$
$$x = y + z.$$

2°. Sieno F_1, F_2, F_3 tre figure eguali ed egualmente disposte; si sa che si possono considerare come le simmetriche di una figura eguale ad F rispetto ai tre lati del triangolo O_1, O_2, O_3 di cui i vertici sono i punti doppi delle figure F_2 e F_3, F_3 e F_1, F_1 e F_2. Se P ammette come simmetrici rispetto ai tre lati i punti P_1, P_2, P_3, si sa inoltre che la circonferenza $P_1P_2P_3$ ha per centro il punto coniugato isogonale di P nel triangolo $O_1O_2O_3$. Se P descrive una retta, π descrive la trasformata isogonale di questa retta, cioè una conica circoscritta al triangolo $O_1O_2O_3$, della quale è facile determinare la natura.

3°. L'eminente Prof. Mannheim della Scuola politecnica di Parigi mi ha comunicato una soluzione geometrica quasi evidente della prima parte della quistione 468.

Sia C' il punto di mezzo di AA', ed O il punto di mezzo di FF'. Si avrà

$$FC + CO = \frac{1}{2}(FP + PF') = a.$$

Dunque

$$FC + CO = FC + CA,$$

e per conseguenza

$$CO = CA = CA'.$$

L'angolo AOA' è dunque noto.

Droz-Farny.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 485, 487, 488, 490, 493

485. *Se lungo le tangenti ad un'elica circolare si riporta, a partire dai rispettivi punti di contatto, un segmento costante l, il luogo degli estremi di questo è una nuova elica circolare, giacente in un cilindro parallelo a quello della prima; la quale taglia le tangenti di essa sotto l'angolo costante* $\theta = \operatorname{arc\,tang} \frac{l}{\rho}$, *dove* ρ *è il raggio di prima curvatura della data elica. Inoltre fra gli angoli* γ *e* γ_1 *sotto cui l'elica considerata e quella resultante tagliano le generatrici dei rispettivi cilindri, passa la relazione:* $\cos\gamma_1 = \cos\gamma \, . \cos\theta$.

M. Chini.

Risoluzione del sig. G. Marletta, studente della R. Università di Catania.

Sia t la tangente all'elica C nel punto P, e sia P_1 un punto di t, in modo da essere $PP_1 = l$. Per P_1 tirisi il piano normale alle generatrici del cilindro in cui trovasi la C, e siano K ed O i punti in cui questo piano incontra rispettivamente la generatrice del cilindro passante per P, e l'asse del detto cilindro. Nel triangolo rettangolo PKP_1 è costante l'ipotenusa PP_1 e l'angolo elicoidale γ, quindi sarà costante il cateto KP_1. Nel triangolo rettangolo OKP_1 è costante il cateto KP_1, e il cateto OK, quindi è costante l'ipotenusa OP_1, e ciò dimostra che il luogo dei punti come P_1 è una curva C_1, tracciata in un cilindro parallelo a quello in cui è la C. Se t_1 è la tangente alla curva C_1 in P_1, la t_1 deve essere e nel piano tangente al nuovo cilindro lungo la generatrice g_1 passante per P_1, e nel piano tangente all'elicoide sviluppabile il cui spigolo di regresso è la C, lungo la PP_1, il quale piano tangente è il piano osculatore alla C in P. Nel triedo di spigoli t, t_1, g_1 è costante la faccia tg_1, l'angolo delle g_1t e t_1t perchè retto (essendo C una geodetica del cilindro), ed è anche costante l'angolo delle tg_1 e t_1g_1 perchè uguale all'angolo costante $K(O)P_1$ per avere rispettivamente le facce perpendicolari ai lati del detto angolo. Adunque è anche costante l'angolo $t_1g_1 = \gamma_1$, cioè la curva C_1 è anch'essa un'elica.

La trigonometria sferica ci dà poi:

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{sen}\gamma \, . \operatorname{tg}[K(O)\rho_1] = \operatorname{sen}\gamma \, . \frac{K\rho_1}{OK} = \operatorname{sen}\gamma \, . \frac{l \operatorname{sen}\gamma}{OK} = \frac{l}{\rho};$$

ed anche si ha; $\cos\gamma_1 = \cos\gamma \, . \cos\theta$.

Altra risoluzione del Prof. Piccioli.

487. *Trovare lo inviluppo del sistema d'ellissi*

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{sen}^2\alpha} = (1-y)^2.$$

Pesci.

Risoluzione del Prof. Retali.

Ponendo $\operatorname{sen}^2\alpha = h$, l'equazione del sistema è

$$h^2 . (1-y)^2 - h . (1 - 2y + 2y^2 - x^2) + y^2 = 0$$

ed eguagliando a zero il discriminante, abbiamo per equazione dello inviluppo cercato

$$x^4 - 4x^2(y^2 - y + 1) + (1-2y)^2 = 0;$$

una quartica dell'ottava classe con due punti doppi di inflessioni, uno dei quali all'infinito.

Altra risoluzione del Comandante Barisien.

488. *Di un triangolo* ABC *non rettangolo è data la base* BC; *qual'è il luogo geometrico del vertice* A, *sapendo che la distanza dell'ortocentro dal centro del cerchio circoscritto è uguale alla metà di* BC?

DROZ-FARNY.

Risoluzione del Prof. Cardoso-Laynes.

Prendiamo per origine degli assi rettangolari il punto medio M_a di BC e sia M_aC l'asse della x. Essendo O ed H il circumcentro e l'ortocentro, supposto $BC = 2d$ ed $A \equiv (x, y)$, si ha

$$O \equiv \left(0, \frac{x^2 + y^2 - d^2}{2y}\right) \quad ; \quad H \equiv \left(x, \frac{d^2 - x^2}{y}\right)$$

e, dovendo essere $OH = d$, avremo per il luogo di A l'equazione

$$x^2 + \left\{\frac{d^2 - x^2}{y} - \frac{x^2 + y^2 - d^2}{2y}\right\}^2 = d^2,$$

la quale, dopo semplici riduzioni, diviene

$$(x^2 + y^2 - d^2)(9x^2 + y^2 - 9d^2) = 0 \qquad \text{(circolo ed ellisse)}$$

Ma il circolo non fa parte del luogo richiesto, perchè si esclude che ABC sia rettangolo; resta dunque l'ellisse

$$\frac{x^2}{d^2} + \frac{y^2}{(d\sqrt{3})^2} = 1.$$

Osservazione. — Se, più in generale, si suppone $|HO| = \delta$, $(\delta \gtreqless d)$, si ha per il luogo cercato la quartica

$$9x^4 + 10x^2y^2 + y^4 - 2y^2(3d^2 + 2\delta^2) - 18\,d^2x^2 + 9\,d^4 = 0$$

e poichè l'equazione contiene x, y soltanto con esponenti pari ed il discriminante è $\Delta = -36(d^2 - \delta^2)$, la quartica si spezza in due coniche solo se è $\delta = d$ (caso considerato dalla questione 488).

Altra risoluzione del Comandante Barisien.

490. *Da un punto* I *della tangente nel vertice di una parabola si conduca una corda* PQ *che incontri l'asse in* A. *Sia* A' *il simmetrico di* A *rispetto a* I; *i quattro punti* A, A', P, Q *formano un gruppo armonico.*

BARISIEN.

1ª Risoluzione del Prof. Retali.

Per un corollario molto noto del teorema di Desargues, se una trasversale sega una conica in due punti PQ, due sue tangenti in I I' e la corda di contatto in A, quest'ultimo punto è un punto doppio dell'involuzione definita dalle coppie PQ, II' (v. per es. CREMONA, *Geom. Projettive*, pag. 141). Assumendo per la tangente passante per I' la retta all'infinito, abbiamo il teorema: Se da un punto I di una tangente (qualunque) di una parabola si conduce una corda PQ che seghi il diametro passante pel punto di contatto in A, e prendiamo il simmetrico A' di A rispetto ad I, i quattro punti AA'PQ formano un gruppo armonico.

2ª Risoluzione del Prof. Cardoso-Laynes.

Infatti la parallela r condotta per A' alla tangente nel vertice è la polare di A rispetto alla parabola (perchè se A'' è il punto d'incontro della r con l'asse della parabola e V è il vertice di questa, è evidentemente $A''V = VA$); segue immediatamente da ciò che è $(A'PAQ) = -1$.

Altra risoluzione del signor Marletta, studente della R. U. di Catania.

493. *Dimostrare le identità:*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x)\,dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x + 2)\,dx}{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

BARISIEN.

Risoluzione e rettificazione del Prof. Retali.

Si ha

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \text{ e, mutando } x \text{ in } \frac{\pi}{2} - x, \int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

dunque $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x} = 1$. Il terzo integrale proposto può scriversi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$ e ha per valore 2.

Quanto al 2° integrale si riduce subito a integrali immediati; infatti l'integrale indefinito è

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x} - \int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{tg} x - \cot x - \sec x + \operatorname{cosec} x$$

e, osservando che il secondo membro è eguale a $\dfrac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)}$ troviamo per l'integrale definito il valore 2.

QUISTIONI PROPOSTE

497. Sieno dati due cerchi c e c' e supponiamo che una tangente mobile a c incontri c' in P e Q. Da P e Q si conducano le seconde tangenti al cerchio c, che s'incontrano in M.

1°. Trovare il luogo del punto M.

2°. Se MP ed MQ incontrano rispettivamente c' in P′ e Q′, trovare il luogo del punto d'incontro delle due rette PQ e P′Q′.

3°. Trovare il luogo dei centri delle iperbole equilatere passanti per i punti P, Q, P′ e Q′.

E.-N. BARISIEN.

498. Per a ed n interi e positivi si ha

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^n + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \dots}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \dots} = 1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{2}a^{n-2} + \binom{n}{4}a^{n-4} + \dots}{(a+1)^{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{1}a^{n-1} + \binom{n}{3}a^{n-3} + \binom{n}{5}a^{n-5} + \dots}{(a+1)^{n-1}} = \frac{a+1}{2}.$$

499. Sia C una curva piana riferita ad un sistema cartesiano OX, OY ed M un suo punto variabile. Si riporti sulla perpendicolare condotta da M all'asse x, a partire da M e nei due sensi, il segmento OM e sieno MP ed MQ tali segmenti; i punti P e Q descrivono una curva C'; si studi la trasformazione (C, C') e si dimostri in particolare che:

1° se C è una retta, C' è, in generale, un'*iperbole equilatera*.

2° se C è un circolo di centro O, C' si compone di due circoli.

3° se C è un circolo tangente all'asse x in O, C' è un *trifolium retto*.

4° se C è un circolo tangente all'asse y in O, C' è un *folium doppio*.

5° se C è una *strofoide retta* col vertice in O e avente per asse l'asse x, C' si compone di un circolo e di una *Cissoide di Diocle;*

6° se C è una *cissoide di Diocle* con la cuspide in O ed avente OX per asse, C' è una *quintica bicircolare*. (Si studi tale curva specialmente nell'intorno del suo punto quadruplo.)

7° se C è una *Cappa* che ha il punto doppio in O e tale che la tangente in O sia l'asse della x, C' si compone di due *strofoidi rette*.

8° se C è una *kreuzcurva equilatera* che ha per assi x e y, C' si compone di due inverse di *trifolium retto*.

G. Cardoso-Laynes.

500. Col centro sopra un cerchio K^2 di raggio uno si descrive nel medesimo piano e con raggio $\sqrt{3}$ un altro cerchio C^2: dimostrare che in questo secondo cerchio possono inscriversi infiniti esagoni circoscritti a K^2.

501. Dimostrare che nella quartica avente per equazione (assi rettangolari)

$$(x^2+y^2)^2 - 4ax(x^2-y^2) + 4a^2(x^2-3y^2) = 0.$$

1°. Le quattro tangenti condotte alla curva da ognuno dei suoi due punti doppi A e B formano un fascio equianarmonico.

2°. Delle otto tangenti doppie, quattro sono immaginarie e quattro reali; queste ultime, due delle quali sono isolate, concorrono in un punto, e gli otto punti di contatto sono sopra un cerchio. Trovare le otto equazioni delle tangenti doppie.

3°. Se P è un punto arbitrario della quartica, l'ortocentro del triangolo PAB cade sulla curva.

502. Dimostrare che nella quartica binodale della quistione precedente possono inscriversi esagoni di Steiner.

503. A e B sono i termini di un diametro di un cerchio fisso K^2; un raggio variabile p del fascio B sega in P il diametro perpendicolare ad $|AB|$, e l'asse del segmento $\overline{BP}$ taglia il cerchio in P_1 e P_2: trovare il luogo dei punti d'intersezione di p coi raggi $|AP_1|$, $|AP_2|$.

504. Inviluppo delle iperboli equilatere che passano pei termini di un diametro d'un cerchio fisso e segano questo cerchio sopra una tangente variabile d'una curva $C^{(n)}$ generale d'ordine n. Luogo dei centri delle medesime iperboli equilatere.

505. Inviluppo delle iperboli equilatere che passano pei termini AB di un diametro d'un cerchio fisso K^2 e segano questo cerchio sopra una tangente variabile d'un altro cerchio C^2 col centro sopra $|AB|$. Costruire le tangenti doppie dello inviluppo e i corrispondenti punti di contatto; le tangenti stazionarie coi corrispondenti flessi; le tangenti nei due punti doppi che la curva inviluppo possiede; le tangenti che arrivano alla curva da questi punti doppi.

Esaminare il caso particolare in cui C^2 ha A per centro, e per raggio il lato del triangolo equilatero inscritto in K^2.

506. Sono dati in un piano due cerchi K^2, C^2 ed AB sono i termini del diametro di K^2 sulla linea dei centri; da un punto variabile P di C^2 si conducono la perpendicolare p ad $|AB|$ e la tangente $|P\omega|$ a K^2. Determinare il luogo dei punti d'intersezione di p con le rette $|\omega A|$, $|\omega B|$ che uniscono il punto di contatto ω con A e B.

V. Retali.

BIBLIOGRAFIA

B. Niewenglowski et L. Gérard. — *Cours de géométrie élémentaire* a l'usage des éleves de mathématiques élémentaires, de mathématiques spéciales; des candidats aux écoles du gouvernement et des candidats a l'agregation. — Paris, Carré et Naud.

Géométrie plane, 1898.
Géométrie dans l'espace, 1899.

Questo libro si distingue dai libri congeneri per la gran quantità di materia raccolta in un volume relativamente piccolo, e per un bene inteso spirito di modernità che ha indotto i due egregi autori a introdurre molti concetti fin qui poco usati negli elementi, come la teoria delle antiparallele, dei vettori, delle varie trasformazioni del piano e dello spazio, ecc. — Abbiamo notato con piacere che in questo libro sono stati accettati per la prima volta in Francia (se non erriamo) alcuni concetti proposti da autori italiani. Per es. la teoria delle parallele precede quella delle perpendicolari, come nei trattati di De-Paolis, Lazzeri e Bassani. La teoria della similitudine segue quella dell'omotetia e viene usata la seguente definizione adottata per la prima volta nel trattato di Lazzeri e Bassani: *Si dice che due figure sono simili, quando l'una di esse è uguale ad una omotetica dell'altra.*

È fatto un largo posto al teorema di Stewart ed alle sue molteplici e numerose applicazioni.

Il primo volume (*geometria piana*) è diviso in quattro libri, il 1° dei quali consta di otto capitoli che trattano *degli angoli*, delle parallele, dei poligoni, delle perpendicolari e oblique, dei casi di eguaglianza dei triangoli e dei parallelogrammi.

Il 2° libro è diviso in sei capitoli, che trattano delle corde e archi di circolo, delle tangenti e normali, delle posizioni relative di due circoli, della misura degli angoli, delle costruzioni geometriche più comuni, degli spostamenti delle figure.

Il 3° libro, che è il più notevole per la varietà degli argomenti, si compone di otto capitoli, e cioè:

1°. *Vettori*. Contiene le prime nozioni sull'equipollenza e la divisione armonica dei segmenti. A dire il vero non sappiamo quale sia il nesso fra questi due argomenti.

2°. *Linee proporzionali*.

3°. *Figure omotetiche*.

4°. *Figure simili*.

5°. *Proprietà metriche del triangolo, del quadrilatero, del circolo, ecc.* Contiene i teoremi di Pitagora, di Carnot, di Stewart ecc., la potenza di un punto rispetto ad un circolo, le antiparallele, la teoria degli assi radicali, ecc., ecc.

6°. *Traversali, polari, inversione*. Contiene i teoremi di Menelao e Ceva, la nozione di rapporto anarmonico, la teoria della polare di un punto rispetto ad un circolo, i teoremi di Pascal e Brianchon per il circolo, l'inversione, i vettori isogonali, la costruzione del circolo tangente a tre circoli col metodo di Faichè.

7°. *Poligoni regolari*.

8°. *Lunghezza della circonferenza*.

Il libro 4° è diviso in due soli capitoli, destinati il primo alla misura delle aree, il secondo al confronto delle aree.

Il volume termina con tre note, nella prima delle quali è svolta brevemente la teoria delle grandezze, nella seconda sono studiate le varie trasformazioni del piano e le composizioni di queste, nella terza è trattata rigorosamente la teoria dell'equivalenza, che nel volume è studiato senza troppo rigore.

Accenneremo ad alcune piccole mende.

I postulati fondamentali non sono stabiliti con tutto il rigore e l'esattezza desiderabile, cosicchè nella dimostrazione del teorema: *per tre punti passa un solo piano* si trovano non pochi sottintesi.

A pag. 285 si trova la seguente definizione *si chiama area l'estensione di una parte limitata di superficie*, la quale definizione, che è del resto quella usata dalla maggior parte dei trattatisti, ci sembra che non definisca nulla.

Il volume secondo contiene la geometria solida divisa in tre libri (libro 5°, 6° e 7°), le curve usuali (libro 8°), i complementi e quattro Note.

Il libro 5° è diviso in diciannove capitoli, dei quali primi tre trattano delle proprietà fondamentali del piano e delle rette nello spazio, il 4° delle rette e piani perpendicolari, il 5° dei diedri, il 6° dei piani paralleli, il 7° dei piani paralleli, l'8° delle proiezioni ortogonali, il 9° degli angoloidi, il 10° del rapporto armonico di quattro piani di un fascio, l'11° delle trasiazioni e rotazioni. Per la simmetria dell'opera sarebbe stato preferibile che la teoria dei piani paralleli precedesse quella dei piani perpendicolari, a somiglianza di quanto era stato fatto nel primo volume.

Il libro 6° contiene nei primi tre capitoli le proprietà generali e le misure dei poliedri, nel 4° capitolo la simmetria e nel 5° ed ultimo l'omotetia e la similitudine.

È notevole la considerazione del tronco di piramide di *seconda specie*, cioè della figura che si ottiene tagliando i prolungamenti degli spigoli di una piramide con un piano parallelo alla base.

Il libro 7°, diviso in otto capitoli, è destinato allo studio dei corpi rotondi. — I primi cinque capitoli contengono le proprietà generali e le misure relative a tali corpi. — I capitoli 6° e 7° trattano dei piani radicali e polari e dei sistemi di sfere, l'8° la geometria sulla sfera.

Il libro 8° contiene una trattazione elementare accurata e abbastanza estesa delle proprietà dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola, prima considerate separatamente nei tre primi capitoli, mentre nel 4° sono esposte le proprietà comuni a tali curve, e nel 5° capitolo è studiata l'elica cilindrica.

I complementi sono divisi in otto capitoli, il 1° dei quali, notevolissimo, studia gli spostamenti delle figure solide indeformabili, come risultanti di simmetrie.

I capitoli 2°, 3°, 4° e 5° contengono in sunto l'ordinaria geometria proiettiva piana; l' 8° contiene le proprietà generali dei poliedri, in base al teorema di Eulero.

Le note 1ª e 2ª si riferiscono alla simmetria e alle coordinate teraedriche, la 3ª dà una trattazione rigorosa della teoria dell'equivalenza dei poliedri, la 4ª studia le geodetiche della sfera.

K.

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino.

Vol. XXXIV, disp. 15. *N. Jadanza*, Errata-corrige alla nota: " Alcune osservazioni sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie ". — *P. Pizzetti*, Sul calcolo dell'errore medio di un angolo nel metodo delle combinazioni binarie. — *O. Tedone*, Sulle equazioni della elasticità in coordinate curvilinee.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, Vol. XXXII, Fasc. 16-18. — *C. Rosati*, Sugli spazi lineari di dimensione massima contenuti in una quartica base di un fascio di quadriche in uno spazio a dimensione pari.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LVIII, Serie VIII, disp. 4-5. — *C. A. Dell'Agnola*, Estensione di un teorema di Hadamard.

Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna.

Serie V, Tomo VII, Fasc. 4. — *L. Donati*, Osservazioni sulle equazioni di Hertz e sul teorema di Poynting.

Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze nell'Istituto di Bologna.

Nuove serie, Vol. III (1898-99), Fasc. 4. — *C. Arzelà*, Sulle serie di funzioni.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa - Scienze fisiche e matematiche.

Vol. VIII (della Serie, Vol. XXI). — *O. Nicoletti*, Sulla trasformazione delle equazioni lineari del 2° ordine con due variabili indipendenti. — *A. Bemporad*, Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4, 5 dimensioni. — *P. Benedetti*, Sulla teoria delle forme iperalgebriche. — *A. Giacomini*, Sulla corrispondenza fra la Geometria conforme di S_4 e la Geometria proiettiva dello spazio ordinario.

Annali del R. Istituto Tecnico e Nautico di Napoli.

Anno XVI (1899). — *F. Cannizzo*, Studio sopra due determinanti.

Annali di Matematica pura e applicata.

Milano, Tomo III, Fasc. 1-4. — *Baire*, Sur les fonctions de variables réelles. — *Dini*, Studi sulle equazioni differenziali lineari. — *Bianchi*, Sulla teoria delle trasformazioni della superficie a curvatura costante. — *Vitali*, Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardato come elemento di un calcolo.

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal comitato di redazione dell'Associazione Mathesis.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

Fasc. 6°. — *Poincaré*, Complément à l'*Analysis Situs* (Continuaz. e fine). — *Picard*, Sur les sistèmes de lignes tracées sur una surface algébrique. — *Ciani*, I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche. — *Studnicka*, Sur la périodicité de la fonction *sin x* et *cos x*. (Démostration sans paroles.) — *Giudice*, Rettifica alla memoria. " Introduz. alle coordinate triangolari e tetraedriche ".

Il Pitagora diretto da *G. Fazzari*.

Fasc. 6°. — *F. Palatini*, Teoria della misura (Cont. e fine). — *D. Gambioli*, A proposito di una formula di Fermat. — *A. Droz-Farny*, Nota di Geometria. — *L. Bosi*, Ancora intorno alla dimostrazione di un teorema sul polinomio. — Archita. — *G. Gallucci*, Un teorema sul triangolo — Teorema intorno a quantità proporzionali — Varietà.

Fasc. 1° dell'anno VI (1900). — *C. Burali-Forti*, Sui simboli di Logica matematica. — *C. Ciamberlini*, Generalizzazione di alcune definizioni date in Geometria elementare (Contin.) — *Id.*, Una domanda agl'insegnanti di Matematica. — *G. Del Prete*, Sulla teoria delle operazioni aritmetiche — Metodo d'Archita per la soluzione del problema delle due medie proporzionali — Sul minimo multiplo. — *G. Riboni*, Contributo allo studio del triangolo — Temi a concorso.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali. — Giornale per la coltura dei maestri delle scuole elementari e degli alunni delle scuole normali, diretto da *A. Conti* (Bologna).

Fasc. 1° dell'anno I. — *Conti*, Due parole d'introduzione. — *Scoto*, Per uno svolgimento puramente geometrico della teoria della similitudine dei poligoni. — *Del Prete*, Sopra alcune definizioni in Aritmetica (Numero, Grandezza, Quantità). — *Flores*, Pro-Agraria. — *Bombicci*, Dopo gli spari di Casal Monferrato. — *Conti*, Prodigiose invenzioni d'un maestro — Rubriche intermediario-didattiche — Questioni.

Fasc. 2°. — Lettera del Presidente dell'Associazione " Mathesis ". — *Buzzi*, La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione. — *Gherardini*, Sui movimenti delle stelle. — *Scoto*, Rivista storica. — *Del Prete*, Fra i nuovi libri di testo.

Fasc. 3°. — *Conti*, Forme da evitarsi nell'insegnamento dell'Aritmetica e della Geometria. — *Hory*, L'oro nell' Eritrea. — *Ravaglia*, Un po' di geografia fisica. — *Scoto*, Rivista storica (Continuazione).

Fasc. 4° — *Ciamberlini* e *Conti*, Corrispondenza. — *Buzzi*, La genesi ecc. (Continuaz.) — *Neri*, Il Campicello come sussidio all'insegnamento agrario elementare.

Fasc. 5°. — *Garbieri*, Il buon senso nella risoluzione dei problemi aritmetici. — *Neri*, A proposito del museo scolastico. — *Del Prete*, Sopra alcune definizioni in Aritmetica. (Le operazioni aritmetiche - Addizione). — *Scoto*, Rivista storica (Continuaz.) — Rivista bibliografica.

Fasc. 6°. — *Conti*, Forme da evitarsi ecc. — *Trevisan*, Perpendicolarità e verticalità. — *Griffini*, A proposito delle distinzioni fra corpi viventi e corpi non viventi — Rivista bibliografica.

Nouvelles Annales de math. Tomo XVIII, 1899 (Paris, Gauthier-Villars.)

Fasc. 11° (novembre). — Primo concorso dei " Nouv. Annales " pel 1900. — *E. Collignon*, Problemi diversi sul metodo inverso delle tangenti. (Problema di de Beaune e problemi connessi). — *H. Piccioli*, Sopra alcune quistioni della teoria delle curve a doppia curvatura (l'A. dimostra che l'elica cilindro-conica non giace, in generale, sopra un cono di rotazione, poi dà due teoremi relativi alle lossodromie e alle geodetiche del cono). — *Lefebvre*, Studio di un sistema di due specchi sferici (l'A. studia le riflessioni multiple che si producono in un sistema di due specchi sferici; dà una classificazione dei sistemi di specchi fondata sull'omografia e costruisce gli elementi delle immagini mediante le teorie della involuzione e della omografia; finalmente trova le due condizioni geometriche necessarie affinchè il numero delle immagini sia limitato). — *S. C.*, Delle arti e manifatture, Concorso del 1899, seconda sessione — Bibliografia (Essai critique sur l'hypotése des atomes par *M. A. Hannequin*) — Solution de la question 1790 (*E. Genty*).

Fasc. 12° (dicembre). — *N. Saltykow*, Sulla teoria delle equazioni lineari alle derivate parziali del 1° ordine d'una sola funzione. — *E. Lacour*, Sul moto d'un solido pesante attorno a un punto fisso. (Applicazione delle funzioni ellittiche allo studio del moto della trottola: l'A. ritrova le formule date dai sigg. *Klein* e *Sommerfeld* a p. 420 della loro " Theorie des Kreisels " evitando una certa superficie di Riemann da essi utilizzata). — *V. Jamet*, Sul problema d'analisi dato all'aggregazione nel 1899. (L'A., stabilito il significato geometrico della quistione, la generalizza sostituendo una quadrica qualunque al paraboloide che figura nell'enunciato) — Certificati di studi superiori delle Fac. di scienze (luglio 1899). — *Caen*, Quistioni proposte 1831-1832 — Lista delle quistioni (in numero di 258) rimaste senza soluzione al 31 dicembre 1899.

Mathèsis, recuel mathématique etc., par MM. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Tomo IX, Gand, A. Hoste, editeur.

Fasc. 6° (giugno 1899). — *P. Mansion*, Continuità in senso analitico e continuità in senso volgare. — *G. Loria*, Generalizzazione d'un problema di minimo classico (dati in uno spazio euclideo lineare a n dimensioni S_n, $n+1$ punti A_0, $A_1, \dots A_n$ trovarne un altro X tale che la somma delle sue distanze ai punti dati sia un minimo: se la distanza del punto incognito da A_i è d_i e ρ un fattore di proporzionalità, l'A. trova $\rho = n!\,\mathrm{Vol.}\,(XA_{i+1} \dots A_n A_0 \dots A_{i+1}) \,.\, d_i$; poi dimostra che, analogamente a quanto accade per $n=2$, un punto X che soddisfa alla questione è in generale tale che le semirette XA_i dividono lo spazio attorno ad X in $n+1$ parti eguali). — *G. Gérard*, Sul punto di Frégier — Varietà (Accademia delle scienze ecc. di Tolosa; Soggetto del premio di Matematiche da conferirsi nel 1901) — Bibliografia — Risoluzioni di quistioni; 1129 (*Droz-Farny*); 1174 (*G. Gérard*); 1180 (*V. Cristesco* e *Barisien*); 1191 (*Buysens*, *Barisien* e *Déprez*); 1196 (*V. Retali*); 1200 — Concorso d'ammissione alla Scuola politecnica di Parigi — Quistioni d'esame — Quistioni proposte 1223-1226.

Fasc. 7° (luglio) — *G. Pirondini*, Sulla spirale logaritmica (esposizione delle principali proprietà note di questa curva). — *A. Demoulin*, Dimostrazione geometrica di una proprietà delle linee assintotiche d'una superficie rigata. (Si tratta del teorema notissimo: quattro linee assintotiche curvilinee d'una superficie rigata segano una generatrice rettilinea variabile in quattro punti di rapporto anarmonico costante.) — *L. Orlando*, Sul cerchio tangente a tre cerchi dati. (Soluzione nota del problema d'Apollonio.) — Note matematiche: Sulla determinazione di alcuni integrali (*Barisien*); Sopra un teorema di Geometria elementare (*Volkof*); Sopra un teorema del sig. *Droz-Farny* (*Neuberg*); Sui triangoli sferici (*Neuberg*); Sull'iperbole equilatera (*Barisien*); Teorema sui numeri (*G. de Rocquigny*) — Bibliografia. (Notes de Bibliographie des courbes géometriques, partie complementaire, par *H. Brocard*) — Soluzioni di quistioni: 1185, 1187, 1201 (*Déprez*, *Emmerich*, *Barisien*); 1204 (*V. Retali*); 1205, 1206 (*Barisien*); 1207 (*Emmerich*) — Quistioni di esame 894-897 — Quistioni proposte 1227-1230.

V. R.

Bulletin de sciences mathématiques et physiques, di *M. B. Niewenglowski.*

Fasc. 2° (15 ottobre 1899). — *N. Plakhowo,* Area del quadrilatero inscrittibile e circoscrittibile. (Dà le notissime formule dell'area in funzione dei lati.) — *L. Gérard,* Geometria del circolo. (Richiama le principali notazioni e definizioni: e tratta dei circoli cofasciali) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 3° (1 novembre 1899). — Soluzione premiata del concorso generale (1899) di prima classe moderna — Preparazione agli esami — Quest. risolte — Quest. prop.

Fasc. 4° (15 novembre 1899). — *G. De Rocquigny-Adanson,* Questioni d'aritmetica. (I numeri naturali disposti in linee orizzontali, in modo che la somma dei termini di un'orizzontale qualunque sia la somma di due cubi consecutivi — Generalizzazione) — Altra soluzione premiata nel concorso generale di prima classe moderna — Preparazioni agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 5° (1 dicembre 1899). — *G. L. Gérard,* Geometria del circolo (Continuazione v. Fasc. 2°) — Dimostrazione diretta di alcuni teoremi di Affolter, che ordinariamente si dimostrano coll'inversione — Preparazione agli esami — Questioni proposte.

Fasc. 6° (15 dicembre 1899). — *E. N. Barisien,* Sullo sconto in dentro e in fuori. (Indicando con e lo sconto commerciale o in fuori, con E lo sconto in dentro e E_1 un'altra specie di sconto che l'A. considera, si trova $\frac{1}{E}+\frac{1}{E_1}=\frac{2}{e}$ e $E<e<E_1$) — Preparazione agli esami — Questioni proposte — Questioni risolute — Bibliografia.

Fasc. 7° (1 gennaio 1900). — *L. Gérard,* Geometria del circolo (Continuaz. Tangenti comuni a due e a tre circoli) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 8° (15 gennaio 1900). — *E. Rebuffel,* Su un teorema di Casey. Il Casey aveva dimostrato, servendosi delle proprietà dell'inversione che, dati quattro circoli S_1, S_2, S_3, S_4, indicando con l_{ij} le lunghezze della parte di tangente esterna comune ai due circoli S_i, S_j, si ha:

$$l_{12} \,.\, l_{34} + l_{23} \,.\, l_{41} = l_{13} \,.\, l_{24}\,.$$

Il Rebuffel dimostra lo stesso teorema per altra via; e ne stabilisce il teorema inverso. — *L. G.*, Angolo sotto il quale si vede dal fuoco d'una conica il segmento di tangente mobile compreso fra due tangenti fisse — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 9° (1 febbraio 1900). — *G. Lehr,* I teoremi di Tolomeo (ottiene questi noti teoremi sul quadrilatero inscrittibile dalla relazione di *Stewart*). — *G. Fontené,* Sistema ortogonale di sei punti. (Definito come sistema ortogonale di sei punti quello in cui il piano di tre de' punti è perpendicolare a quello degli altri tre, determina il numero delle condizioni necessarie per stabilirlo: rammenta alcuni noti teoremi e dimostra che: *Data un'unica condizione, esiste un punto da cui si vedono le dieci diagonali d'un esaedro completo sotto un angolo retto.*) — *G. De Rocquigny-Adanson,* Questioni d'Aritmetica. (Date le progressioni aritmetiche $\div 1,\ 1+p,\ 1+2p \ldots . \div 1,\ 1+2p,\ 1+4p \ldots .$, dividendo i termini della seconda in gruppi in modo che il numero dei termini dell' n^0 gruppo sia eguale all' n^0 termine della prima, si ha che la somma dei termini di ciascun gruppo è un cubo perfetto. E se invece si divide in gruppi i termini della prima con legge analoga rispetto ai termini della seconda, la somma dei termini di ciascun gruppo è la somma di due cubi) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Fasc. 10° (15 febbraio 1900). — *H. Vincent*, Sugli spostamenti. — *L. G.*, Questioni di massimo e di minimo. (Dall'art. del sig. Volpi nel *Periodico* trae il metodo per dimostrare $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 x_2 \ldots x_n$). — *G. Fontené*, Sistema ortogonale di sei punti (Continuaz.) Svolge altre considerazioni sui pentaedri; ed enuncia soltanto alcuni teoremi che propone per trovarne una dimostrazione elementare) — Preparazione agli esami — Questioni risolute — Questioni proposte.

Journal de Mathématiques élémentaires de *H. Vuibert*.

Fasc. 2° (15 ottobre 1899). — *A. Goulard*, Nota d'aritmetica e d'algebra (Proprietà commutativa della somma). — *M. Moreaux*, Sull'esistenza di linee spezzate convesse di un numero qualunque di lati.

Fasc. 4° (15 novembre 1899). — *I. Girod*, Sull'applicazione d'un teorema classico relativo alle questioni di massimo. (Tratta dell'applicazione del noto teorema: Il prodotto $P = x^p y^q z^r$ dove x, y, z non numeri positivi variabili di cui la somma è costante, e p, q, r numeri positivi costanti, assume un valore massimo quando x, y, z assumono valori eguali ai numeri che si ottengono dividendo la somma in parti proporzionali agli esponenti.)

Fasc. 5° (1 dicembre 1899). — *I. Girod*, Continuaz. della nota del numero precedente. (Risolve il problema più generale: Trovare il sistema di valori che rende massima o minima la funzione $u = x^a y^b$ o l'altra $v = \frac{x^a}{y^b}$, essendo a e b numeri interi o fratti, quando le variabili x e y son soggette alla condizione di verificare un'equazione di tre termini, interi o fratti, razionali o irrazionali.)

Fasc. 6° (15 dicembre 1899). — Nota della teoria elementare della bilancia.

Fasc. 7° (1 gennaio 1900). — Osservazioni sui problemi di massimo e di minimo.

Fasc. 8° (1 febbraio 1900). — *C. Rech*, Nota su alcune identità. (Ritrova alcune note identità di Eulero e di Newton.)

E. Nannei.

*PUBBLICAZIONI MATEMATICHE ITALIANE RECENTI

G. Angelini, Nozioni elementari di algebra per le scuole tecniche e per la prima classe delle scuole normali, conforme agli ultimi programmi ministeriali. Empoli, Traversari, 1899. L. 0,90.

A. Conti, Elementi di Aritmetica razionale ad uso degli allievi delle scuole normali, 2° e 3° corso. Parte 1. Bologna, Zanichelli, 1900. L. 2,40.

P. Mola. Appunti di Trigonometria. Torino, Prete, 1899.

S. Ortu-Carboni, I complementi dell'algebra elementare per la discussione completa o sistematica dei problemi algebrici di 1° e 2° grado, con 2000 problemi (risoluti ed avviati) d'applicazione dell'algebra e della trigonometria alla geometria. Parte I (Teorie). Livorno, Giusti, 1900. L. 5.

E. Pascal, Repertorio di matematiche superiori: definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici. Vol. II (Geometria). Milano, Hoepli, 1900.

S. Pincherle. Geometria metrica e trigonometria. Milano, Hoepli (Manuali) 1900.

A. Socci, Aritmetica ad uso dei ginnasi e delle scuole tecniche. Seconda edizione. Quinta impressione. Firenze, Le Monnier, 1900. L. 2,50.

G. M. Testi, Corso di matematica ad uso delle scuole secondarie e più specialmente degli istituti tecnici. Vol. II (Algebra elementare). Seconda edizione. Livorno, Giusti, 1900. L. 2,80.

G. M. Testi, Elementi di matematica ad uso degli alunni delle scuole normali. Livorno, Giusti, 1900. Fasc. 1° cent. 80; 2°, 80; 3°, 90; 4°, 60; 5°, 70, 6°, 90.

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI A PARIGI

(6-12 AGOSTO 1900)

Il Comitato organizzatore ha inviato una circolare a tutti coloro che risposero affermativamente o negativamente all'altra circolare in data del Dicembre 1898, colla quale si domandava se l'invitato avrebbe *probabilmente* assistito o no al congresso, o solo o accompagnato da qualche persona della propria famiglia.

Risulta da questa nuova circolare che il numero degli aderenti sarà di circa 100, e 680 saranno circa le persone appartenenti alle famiglie degli aderenti che li accompagneranno.

Il prezzo della *carta di membro del congresso* è fissato in 30 franchi e quello della *carta di famiglia* in franchi 5 per persona.

Queste carte daranno diritto a partecipare a tutti i lavori, a tutte le assemblee, a tutte le visite che saranno organizzate, ma non daranno diritto di assistere al banchetto, nè a ricevere i rendiconti dei lavori del congresso.

Le ferrovie francesi hanno accordato il ribasso del 50 per cento ai soli congressisti, ma non alle persone munite della *carta di famiglia*.

Le lingue officialmente ammesse al congresso saranno la *tedesca*, l'*inglese*, la *francese* e l'*italiana*.

I lavori saranno divisi in sei sezioni: I. *Aritmetica* e *Algebra*. — II. *Analisi*. — III. *Geometria*. — IV. *Meccanica, Meccanica celeste* e *Fisica matematica*. — V. *Bibliografia e Storia*. — VI. *Insegnamento* e *Metodi*.

Tutte le comunicazioni concernenti il congresso debbono essere indirizzate a M. le *Président de la Société mathématique de France, rue des grands-Augustins, 7, Paris*.

Mentre facciamo voti per l'ottima riuscita del congresso, non possiamo astenerci dall'osservare che la scelta della data del congresso ci sembra poco felice. Chi assisterà al congresso si propone senza dubbio, unendo *utile dulci* di visitare Parigi e la grande esposizione, e ciò si fa poco bene in una stagione in cui il caldo si fa sentire dappertutto e a Parigi più che altrove.

Siamo convinti che se il congresso potesse esser rimandato alla seconda metà di Settembre il concorso, specialmente dall'Italia, sarebbe molto maggiore.

ERRATA-CORRIGE del fasc. precedente.

A pag. 170, subito dopo l'equazione (4), prima cioè delle parole " che rappresenta ecc. ", è stato omesso quanto segue:

" In particolare se è $m = n = 0$, cioè se si prende per polo il centro della conica data, si ha

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 \pm b^2 x^2) = c^4 x^2 y^2 \text{ ''.}$$

GIULIO LAZZERI — *Direttore-responsabile*

Finito di stampare il 29 Marzo 1900.

SULLO SVILUPPO DEI POLIEDRI

E SU ALCUNE NORME PRATICHE PER LA COSTRUZIONE DEI LORO MODELLI IN CARTONE

I. — Sviluppo dei poliedri.

1. Una superficie poliedrica, come quella che è formata da faccie piane, può distendersi o, come suol dirsi, svilupparsi su di un piano. La forma di questo sviluppo è, in generale, quella di un grande poligono concavo diviso internamente in tanti poligoni, eguali in numero, grandezza e forma, alle facce del poliedro.

Qualche volta questo sviluppo può effettuarsi senza sovrapposizione, tal altra, invece, una o più parti vengono a ricoprire parzialmente o totalmente altre parti dello sviluppo stesso. Per lo sviluppo di un poliedro *intrecciato* si considera, generalmente, la sola superficie esterna del poliedro.

In ciò che segue limiteremo le nostre considerazioni ai soli poliedri ordinari (euleriani) e a quelli *intrecciati*, escludendo perciò quei corpi pei quali alcune facce o l'intera superficie che li limitano, non sono *semplicemente connesse*.

Lo sviluppo di un poliedro può essere effettuato con criteri diversi; ma ordinariamente si segue o l'uno o l'altro dei due procedimenti che appresso:

1°. S'immagini che il poliedro, staccandosi da una faccia che supporremo fissa, ruoti attorno all'unico lato che lo tiene unito ad essa, finchè la faccia adiacente a quella immobile non sia venuta a distendersi sul piano di quest'ultima. Restando poi fissa questa seconda faccia si fa ancora ruotare il poliedro rimanente in modo da portare una terza faccia nel piano delle prime due. Si ripete questa operazione finchè tutte le facce non sieno condotte successivamente nel piano della prima.

2°. Poichè un angoloide può sempre distendersi su di un piano, quando lo si supponga aperto lungo uno dei suoi spigoli, così potremo sviluppare un poliedro allorchè, per mezzo di aperture praticate lungo i suoi spigoli, si sieno resi sviluppabili tutti i suoi angoloidi.

È chiaro che seguendo o l'uno o l'altro di questi due metodi, si può avere lo sviluppo di uno stesso poliedro sotto forme svariate. Infatti, col primo procedimento si può far ruotare il poliedro, e successivamente la parte di esso che via via rimane, attorno ad uno qualunque dei lati di quelle facce che si considerano come fisse. Col secondo metodo poi, la linea o le linee che si possono percorrere per passare da un vertice ad un altro, presentano, in generale, la più grande varietà.

2. A proposito del secondo procedimento indicato si può verificare che, *partendo da un vertice qualunque del poliedro, è possibile con una linea continua formata di costole del poliedro stesso, toccare tutti i vertici una volta ed una volta soltanto, senza esser costretti, per conseguenza, a dover ripassare due volte per lo stesso cammino.*

Premettiamo anzitutto una definizione. Gli n vertici di un poliedro che si trovano alle estremità delle n costole concorrenti coll'altro estremo in uno stesso vertice V, si possono riguardare come gli n vertici di un poligono piano o gobbo, di cui alcuni lati potranno essere costole del poliedro, ed altri invece diagonali di alcune di quelle facce che formano l'angoloide V. Supponiamo ora, per ognuna di queste facce, di avere sostituito alla diagonale corrispondente, quella parte del perimetro della faccia stessa che ha con quella diagonale gli estremi in comune, e che si trova dalla banda opposta del vertice V. Il poligono piano o gobbo che così si ottiene, e che risulta formato unicamente di costole del poliedro, lo chiameremo, per brevità, il *poligono corrispondente all'angoloide* V.

Ciò premesso ecco in qual modo deve effettuarsi il cammino per poter soddisfare alla condizione espressa dalla regola enunciata:

A partire dal vertice V si percorra una delle costole in esso concorrenti, fino all'altro estremo che è uno dei vertici del *poligono corrispondente all'angoloide* V; indi si percorra in un determinato senso, per esempio nel senso del movimento delle lancette dell'orologio, il perimetro di questo poligono fino al vertice $m-1$, restando per tal modo escluso dal percorso l'm^o lato di detto poligono. Se a partire da V numeriamo i vertici che via via s'incontrano secondo le serie dei numeri naturali, è evidente che quell'$(m-1)^{mo}$ vertice sarà distinto col numero m e sarà un vertice del *poligono corrispondente all'angoloide* 2. Si percorra questo secondo poligono nel senso del primo fino al penultimo lato (e cioè arrestandoci al penultimo vertice che apparterrà al poligono corrispondente all'angoloide 3, notando coi numeri naturali successivi ai precedenti, i vertici che mano a mano s'incontrano. Dopo questo poligono si percorra nello stesso modo quello corrispondente all'angoloide 3, poi quello corrispondente all'angoloide 4, e così di seguito sino a che, colla linea poligonale continua, non si sieno toccati tutti i vertici del poliedro.

Al procedimento ora spiegato sono necessarie le due avvertenze seguenti:

1°. Nel percorrere uno dei poligoni, per esempio quello corrispondente all'angoloide p^{mo}, può accadere che alcuni lati di questo sieno già stati percorsi nel descrivere il cammino di qualche altro poligono precedente. Tali lati, allora, non potranno mai incontrarsi saltuariamente in uno stesso poligono, ma si troveranno sempre l'uno di seguito all'altro formando sempre altresì l'ultima parte che nello stesso poligono rimarrebbe ancora da descrivere. Inoltre l'ultimo vertice v a cui si giunge, e oltre il quale si cadrebbe nelle parti già descritte in qualche poligono precedente, apparterrà sempre al poligono corrispondente all'angoloide successivo $(p+1)^{mo}$.

Quando si presenti adunque il caso accennato, giunti in v percorreremmo il poligono corrispondente all'angoloide $(p+1)^{mo}$.

2°. Se un lato del poligono da descriversi appartiene ad una faccia triangolare, di cui il vertice opposto a quel lato concorre alla formazione di un angoloide triedro del poliedro, dovremo, invece di quel lato, percorrere i due lati rimanenti del triangolo. Senza questa avvertenza, il vertice dell'angoloide in questione rimarrebbe per sempre escluso dalla linea poligonale che deve passare per tutti i vertici. (*)

3. Intorno agli sviluppi dei poliedri si possono fare anche le osservazioni seguenti, che ci torneranno utili per le ulteriori considerazioni che svolgeremo.

1ª. Lo sviluppo di un poliedro può sempre supporsi tutto di un pezzo quando non si escluda che possano esservi delle parti sovrapposte. Solo per evitare queste sovrapposizioni, e anche per altre ragioni che accenneremo in seguito, potrà essere conveniente di avere lo sviluppo formato di più parti distinte.

2ª. Può accadere che uno dei lati del perimetro dello sviluppo venga a adattarsi esattamente su di un altro lato del perimetro stesso; come può accadere che due parti di uno stesso sviluppo vengano a toccarsi per un vertice. Tanto nel primo quanto nel secondo caso si formano nell'interno dello sviluppo, una o più lacune.

3ª. Se un angoloide concavo di un poliedro ha la somma degli angoli piani eguale a 360°, esso si sviluppa su di un piano senza alcuna apertura lungo una qualunque delle sue costole. Questa circostanza si verifica, per esempio, nello sviluppo del dodecaedro regolare di terza specie del Poinsot.

4ª. Allorchè con un dato sviluppo si costruisce il poliedro corrispondente, la linea poligonale, piana o gobba, lungo la quale si riuniscono le diverse facce dello sviluppo, può presentare forme svariate che dipendono dalla forma particolare che è stata data allo sviluppo stesso. Questa linea la diremo la *sutura* del poliedro.

Se lo sviluppo è di un sol pezzo, la *sutura* è una linea spezzata non chiusa che, tal volta presenta la forma più semplice di una linea poligonale ordinaria piana o gobba; tal altra invece può presentare delle rami-

(*) Nella regola generale enunciata è contenuta la soluzione del „Giuoco icosiano di Hamilton" (vedi *Supplemento al Periodico di Matematica*, fasc. I, 1899), e la soluzione del „Problema dei Ponti" (EULERO. — *Memoria dell'accademia delle Scienze di Berlino*, 1759). Essa, molto probabilmente, dovrebbe anche applicarsi alla soluzione del „Problema del salto del Cavallo" nel giuoco degli scacchi.

ficazioni più o meno complicate ed estese. Se lo sviluppo è di più pezzi la detta sutura è formata da linee poligonali chiuse, ramificate o no.

5ª. Il numero dei lati del perimetro dello sviluppo di un poliedro è sempre pari, poichè nel ricostrurre quel poliedro i lati debbono venire a combaciare due a due.

6ª. Uno sviluppo non può mai essere composto di un numero dispari di pezzi ognuno dei quali abbia un perimetro con numero dispari di lati. Ciò risulta manifesto osservando che, se si immaginano riunite le diverse parti per formare lo sviluppo di un sol pezzo, la somma dei numeri dei lati dei diversi perimetri rimane diminuita di un numero pari, e conseguentemente il perimetro dello sviluppo verrebbe a contenere un numero dispari di lati, ciò che è impossibile.

4. Intorno alla *sutura* del poliedro si può ora dimostrare la seguente proprietà.

Se si percorre con continuità tutto il perimetro dello sviluppo (supposto di un sol pezzo), e si notano i lati alternativamente col segno + e —, dico che in ogni lato della sutura vengono a combaciare due lati del perimetro distinti col segno differente.

Per dimostrare questa proprietà cominciamo ad osservare che se a partire da un vertice qualunque si percorre una linea poligonale aperta, ma non ramificata, fino ad una delle estremità, poi da questa all'altro estremo, e da questo retrocedendo ancora, fino al punto di partenza, e se in questo doppio percorso si assegnano ai lati alternativamente il segno + e —, è chiaro che a cammino compiuto ogni lato della linea poligonale verrà ad essere distinto col segno + e —.

Se la linea poligonale è ramificata, essa verrà percorsa nel modo già detto coll'avvertenza d'intercalare sempre il doppio cammino delle diverse ramificazioni che mano a mano s'incontrano nel percorrere la linea principale.

Con tale avvertenza, anche in questo caso, ogni lato della linea poligonale verrà sempre ad essere distinto col segno + e —.

Si noti che due lati consecutivi della linea poligonale, che hanno in comune il vertice da cui parte una ramificazione, resultano sempre di segno differente, sia che i due lati vengano percorsi successivamente, astrazion fatta dalle ramificazioni fra essi lati interposte, sia che fra il percorso di un lato e il suo consecutivo s'intercali il doppio percorso della ramificazione medesima; e ciò per la ragione che una ramificazione, qualunque sia il numero dei suoi lati, venendo ad essere percorsa due volte, produce un numero pari di cambiamenti di segno, e quindi il lato che precede e quello che segue la ramificazione stessa, vengono egualmente ad essere di segno contrario nell'un caso e nell'altro.

Immaginiamo ora di percorrere, a partire da un vertice V, tutto il perimetro dello sviluppo di un poliedro, e di assegnare alternativamente ai lati il segno + e —. Supponiamo poi di percorrere nello stesso tempo a partire dal vertice corrispondente a V, i due bordi della *sutura* distinguendo ancora i lati alternativamente col $+$ e $-$. Siccome ogni lato, del perimetro, come abbiamo già detto, viene ad avere in ultimo il segno $+$ e $-$, così resta dimostrato che in ciascun lato della *sutura* verranno a concorrere i due lati del perimetro dello sviluppo, distinti con segno contrario.

Per l'applicazione del teorema enunciato è necessario di riguardare i perimetri delle lacune come facenti parte di un unico perimetro, che è quello che limita l'intero sviluppo; e per conseguenza dovremo supporre separati quei lati e vertici di cui abbiamo parlato al n. 3, 2^a.

Questo teorema non è privo di pratica utilità, e ne vedremo un'applicazione nella II parte n. 10 di questo scritto.

5. Veniamo ora a determinare alcune relazioni numeriche tra gli elementi: vertici, facce e lati di un poliedro, e quelli del suo sviluppo che supporremo di un sol pezzo.

Ammetteremo inoltre di riguardare sempre come disgiunti i lati e i vertici dalla unione dei quali si producono nello sviluppo, come abbiamo osservato al n. 3, 2^a, delle lacune, di guisa che, dopo tale operazione, si possa ritenere lo sviluppo stesso come semplicemente connesso.

Ammetteremo infine di avere praticato un taglio lungo uno spigolo di ciascuno angoloide che si trova nelle condizioni dette al n. 3, 3^a, in modo che questo spigolo possa riguardarsi come un doppio lato del perimetro dello sviluppo.

In ciò che segue è poi sottinteso che pei poliedri intrecciati dovremo contare come vertici, lati e facce tutti quelli che compariscono all'esterno e che a rigore non possono considerarsi come elementi del poliedro. Stabiliamo poi le notazioni seguenti: con V, C, F e v, c, f, r ppresenteremo rispettivamente il numero dei vertici delle costole e delle facce del poliedro dato e del relativo sviluppo; con v_i e v_p c_i e c_p rispettivamente i vertici interni e quelli del perimetro, le costole interne e quelle del perimetro dello sviluppo. Ricordiamo inoltre le due relazioni,

1^a. $V - C + F = 2$ (formula di Eulero),

2^a. $v - c + f = 1$ (formula di Cauchy),

che valgono rispettivamente per un poliedro chiuso e per una rete aperta di poligoni.

Ecco ora le principali relazioni relative ai numeri: V, C, F, v, c, f, v_i, v_p, c_i, c_p.

$$\left.\begin{array}{l} 3^a.\ F = f \\ 4^a.\ v = v_p + v_i \\ 5^a.\ c = c_p + c_i \end{array}\right\}\ \text{sono evidenti}$$

6^a. $v_i = 0$ ovvero che nell'interno dello sviluppo non esiste alcun vertice. Ciò appare manifesto dopo la convenzione fatta intorno allo sviluppo di quegli angoloidi pei quali la somma delle facce eguaglia 4 angoli retti, e dopo la disgiunzione dei lati e dei vertici a cui abbiamo or ora accennato.

$$\left.\begin{array}{l} 7^a.\ v = v_p \\ 8^a.\ v = c_p \end{array}\right\}\ \text{conseguenza della } 4^a \text{ e } 6^a.$$

9ª. $C = \frac{c_p}{2} + c_i$. Infatti nella costruzione del poliedro, c_i rimane invariato, e c_p si riduce a metà, perchè i lati del perimetro si riuniscono due a due per formare i lati della *sutura*.

10ª. $c_i = F - 1$. Infatti dalla 2ª, tenendo conto della 3ª e 5ª, si ricava:

$$c_p + c_i = v + F - 1$$

la quale, per la 8ª, fornisce la relazione scritta sopra.

La stessa formula, del resto, si dimostra anche direttamente, osservando che quando si effettua lo sviluppo del poliedro secondo il 1° procedimento spiegato, si ha che a partire della prima faccia, le $F - 1$ rimanenti, rimangono unite via via alla parte sviluppata per un solo lato; ciò ben inteso, nella supposizione che si tenga conto della convenzione stabilita al principio di questo numero.

11ª. $c_p = 2(V - 1)$.

Infatti dalla 9ª dalla 10ª e dalla 1ª si ricava

$$c_p = 2\ (C - c_i) = 2\,(C - F + 1) = 2\,(V - 1).$$

La stessa relazione può dimostrarsi anche direttamente, osservando che per effettuare lo sviluppo in conformità del 2° metodo spiegato, occorrono $V - 1$ tagli per andare successivamente dal 1° al V^{mo} vertice del poliedro, e questi tagli danno luogo, nello sviluppo, a $2\ (V - 1)$ lati del perimetro.

Si deduce di quì che in qualunque modo venga effettuato lo sviluppo, e comunque vari la forma di esso, il numero dei lati al perimetro rimane sempre costante.

Le relazioni 10ª e 11ª ci dicono che gli sviluppi di due poliedri qualunque, aventi uno stesso numero di facce, contengono uno stesso numero di lati interni, e i perimetri degli sviluppi di due poliedri, aventi uno stesso numero di vertici, contengono un egual numero di lati.

Nell'ipotesi di un poliedro autocorrelativo la 10ª e 11ª ci danno $c_p = 2\,c_i$, ossia che i lati al perimetro dello sviluppo, sono in numero doppio dei lati interni, o anche, per la 9ª, che il numero dei lati della *sutura* è sempre la metà del numero delle costole del poliedro.

12ª. $c = C + V - 1$. Questa eguaglianza resulta dimostrata per le relazioni 5ª, 10ª, 11ª e 1ª.

6. Si considerino ora due poliedri correlativi tra di loro; per uno di essi adotteremo tutte le notazioni già usate, e per l'altro le stesse notazioni coll'aggiunta di un apice. Avremo allora per la condizione stessa di correlatività di due poliedri,

13ª. $V = F'\ ,\ F = V'\ ,\ C = C'$.

Per la 10ª, per le relazioni precedenti e per la 1ª abbiamo,

14ª. $c_i + c'_i = F + F' - 2 = C = C'$.

Per la 11ª, per le relazioni 5ª e per la 1ª si ha pure,

15ª. $c_p + c'_p = 2\,(V + V' - 1) = 2C = 2C'$.

Sommando membro a membro la 14ª e 15ª e tenendo conto per ciascun poliedro della 5ª si ha,

16ª. $c + c' = 3C = 3\,C'$.

Le tre formule ora date ci dicono che negli sviluppi di due poliedri correlativi, la somma dei lati interni, quella dei perimetri e quella di tutti i lati degli sviluppi, hanno rispettivamente per valore una volta, due volte, tre volte il numero delle costole di ciascuno dei poliedri considerati.

Infine dalla proprietà 10ª e 11ª si deduce ancora, per due poliedri correlativi,

17ª. $c_i + c'_p = 3\,(F - 1) = 3\,(V' - 1)$.

7. Supponiamo ora che allo scopo di togliere le sovrapposizioni che possono presentarsi nello sviluppo di un poliedro, si sia separato questo sviluppo in n parti distinte, e che sieno

$$\begin{array}{l} f_1 \;\; f_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot f_n \\ v_1 \;\; v_2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot v_n \\ c_{p_1} \; c_{p_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot c_{p_n} \\ c_{i_1} \;\; c_{i_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot c_{i_n} \end{array}$$

rispettivamente i numeri delle facce, dei vertici, dei lati del perimetro, e quelli interni di ciascun pezzo; avremo allora le seguenti proprietà:

1ª. Le diverse parti dello sviluppo, allorchè si riuniscono tra di loro per formare lo sviluppo di un sol pezzo, si attaccano l'una all'altra per un sol lato, purchè si tenga conto delle convenzioni stabilite al principio del n. 5.

2ª. $\Sigma f_r = F$. Questa eguaglianza è evidente.

3ª. $\Sigma c_{p_r} = 2\,(V + n - 2)$. Infatti se lo sviluppo fosse tutto di un pezzo, si avrebbe, per la 11ª, $c_p = 2\,(V - 1)$. Ora per ogni pezzo di sviluppo che si stacca, si acquistano due lati; quindi per gli n pezzi dello sviluppo avremo,

$$\Sigma c_{pr} = 2\,(V - 1) + 2\,(n - 1) = 2\,(V + n - 2).$$

Questa relazione può anche dimostrarsi direttamente così:

Gli n pezzi di cui si compone lo sviluppo di un dato poliedro possono riguardarsi (astraendo dalle diverse facce di cui si compone ciascun pezzo) come le n facce di un nuovo poliedro avente lo stesso numero V di vertici del poliedro dato, ed un numero c_s di costole, eguale a quello contenuto nella *sutura* del poliedro. Ora per questo nuovo poliedro abbiamo in virtù della 1ª, $V - c_s + n = 2$ ovvero $c_s = V + n - 2$. Tornando di nuovo a staccare le diversi parte dello sviluppo, tutti i lati della *sutura* si raddoppiano per cui avremo

$$\Sigma c_{pr} = 2c_s = 2\,(V + n - 2).$$

4ª. $\Sigma c_{i_r} = F - n$. Infatti se lo sviluppo è di un sol pezzo, abbiamo per la 10ª, $c_i = F - 1$; ma per ogni pezzo che si stacca si perde un lato interno, quindi dopo aver ridotto lo sviluppo in n parti, avremo

$$\Sigma c_{i_r} = c_i - (n - 1) = F - 1 - (n - 1) = F - n.$$

Corollario. — Le due ultime formule, per $n = \mathrm{F}$, danno

$$\Sigma c_{pr} = 2(\mathrm{V} + \mathrm{F} - 2) = 2\mathrm{C},$$
$$\Sigma c_{ir} = 0,$$

resultati facili a prevedersi, perchè se tutte le facce dello sviluppo sono distinte, la somma dei lati di ciascuna faccia è il doppio delle costole del poliedro, e quella dei lati interni dello sviluppo si riduce a zero.

II. — Norme pratiche per la costruzione dei modelli di poliedri in cartone.

8. Per quanto, a parer mio, l'uso dei modelli nell'insegnamento della matematica non sia in generale da incoraggiarsi, tuttavia nello studio di speciali questioni può essere utile, e alcune volte indispensabile, un qualche sussidio materiale. Così per esempio nella teoria dei poliedri regolari e semiregolari di specie superiore, non è facile acquistar un concetto adeguato di questi corpi, senza che degli opportuni modelli non mettano bene in evidenza il modo particolare secondo il quale sono aggregati i diversi elèmenti che costituiscono quei poliedri; oltre a ciò la presenza di un modello può suggerire l'idea di nuove forme, e far scoprire fra queste e la fondamentale, delle relazioni importanti, che difficilmente, forse, sarebbero state ricavate da un disegno o dallo studio teorico di una determinata serie di poliedri.

Anche in cristallografia è utilissima, specie per i principianti, una buona collezione di modelli, coi quali si possa chiarire meglio il modo di derivare le diverse forme cristalline da alcuni tipi fondamentali.

Ma non sempre si possono avere sott'occhio dei modelli, o perchè non si trovano in commercio, o perchè il loro prezzo elevato non li rende accessibili allo studioso. In tal caso, mettendo da parte l'idea delle costruzioni in legno, perchè troppo costose e non sempre di facile attuazione, non vi ha altro mezzo che di costruirsi, cogli opportuni sviluppi in cartone, i modelli delle diverse forme geometriche che si desiderano. (*)

(*) Nel catalogo del materiale scolastico della Ditta Paravia, sono registrate varie collezioni dei solidi geometrici più semplici e quelle delle principali forme cristalline. Alcuni di questi modelli sono in legno, altri in fili di ferro verniciati rappresentanti la sola parte scheletrica del poliedro. — Modelli in cartone di poliedri regolari, di quelli d'Archimede, di quelli stellati del Poinsot, e di altri poliedri e forme cristallografiche diverse, possono trovarsi presso il Prof. Mariano Clavero J. Guervos, Taragona. — I bellissimi modelli dei quattro poliedri regolari di specie superiore, costruiti in legno sotto la direzione del Prof. Peri fin dal 1861, possono vedersi al R. Istituto Tecnico di Firenze ove fanno parte della numerosa e bella raccolta dei modelli in legno ed in gesso per uso della Scuola di Geometria descrittiva. Uno di questi però (l'icosaedro stellato di settima specie) è incompleto perchè mancante di alcune piccole parti che dovrebbero completare le facce triangolari. Questo difetto sembra ripetere la sua origine della stessa omissione che si verifica nella proiezione orizzontale di quel poliedro rappresentato dalla fig. 89 del *Trattato di Geometria descrittiva* dello stesso Prof. Peri.

Oltre i citati possono trovarsi in commercio i disegni, in cartoncino, di sviluppi già preparati per la costruzione di alcuni solidi. Tali sono ad esempio: 1º le collezioni che si trovano nel cata-

Qualcuno potrebbe forse ritenere occupazione puerile, nel campo della matematica, quella delle costruzioni in cartoncino; a me pare invece che esse, oltre soddisfare in molti casi ad un vero e proprio bisogno, possono offrire agli studenti, materia per utili esercitazioni di Geometria descrittiva. Stimo quindi non del tutto inutile di dare ora, per coloro che volessero dilettarsi in questo genere di lavori, alcune norme pratiche suggeritemi dal lungo esercizio che ho avuto occasione di fare nella costruzione di una numerosa collezione di poliedri. (*)

9. Per la costruzione del modello di un corpo geometrico, mediante il suo sviluppo, dovremo anzitutto, procurarci una sua rappresentazione grafica atta a fornire la vera forma e grandezza delle singole facce, e a far conoscere il loro modo di aggruppamento nella formazione dei diversi angoloidi; generalmente può bastare una rappresentazione su due piani coordinati. Lo sviluppo del corpo si disegna su di un cartoncino non troppo fine, affinchè il modello non venga a mancare di una certa solidità, nè troppo grosso per la ragione che diremo poi (n. 11). Il più conveniente è quello dei biglietti da visita (di cui io stesso mi son servito per i modelli ora ricordati) avvertendo bene che sia di qualità da potersi piegare senza troncarsi. Del resto lo spessore del cartoncino deve essere sempre in relazione colla grandezza che si vuol dare al modello.

Lo sviluppo, come abbiamo già osservato nella prima parte, può ottenersi con criterii differenti. Ma quale sarà la forma più conveniente di esso, perchè si possa disegnarlo nel modo più spedito, e perchè si presti alla più facile costruzione del modello? Generalmente la forma speciale del corpo suggerisce la forma più opportuna dello sviluppo; così per es. se la superficie poliedrica può dividersi in parti eguali tra di loro, si potrà disegnare lo sviluppo di una di queste parti; indi postala sopra tanti altri fogli sovrapposti quanti sono le rimanenti parti eguali che abbisognano, si trafora l'insieme con un ago in corrispondenza di ciascun vertice del disegno. Dopo ciò si uniscono in modo conveniente con linee a lapis (il che può farsi anche a mano libera per la ragione che diremo appresso n. 11) i vari punti, allo scopo di distinguere per ogni parte le diverse facce dello sviluppo. Questo procedimento si ripete tante volte quanti sono i gruppi distinti di parti eguali.

Se il corpo non presenta alcuna simmetria, si segue generalmente il metodo fornito dalla prima regola data al n. 1.

---

logo summentovato. — 2º. Le costruzioni n. 86. 87, 88, 89 (Origoni Bianchi, Milano), disegni su
quattro cartoncini di 24 figure da ritagliarsi. — 3º. Sviluppo e costruzione di solidi geometrici; 10 tav.
con 36 sviluppi. (Enrico Mortara, Saluzzo, tip. Lobetti). — 4º. Catalogo dei modelli e apparecchi per
l'insegnamento (Schröder, Darmstadt).
Per il disegno degli sviluppi dei 4 poliedri regolari stellati ed alcuni altri pochi di specie su-
periore, veggasi PAONI, *Nuove considerazioni sui poligoni e poliedri regolari di specie superiore.*
(Le Mounier, Firenze, 1872).
(*) La collezione a cui quì si accenna è quella dei pol. reg. e semireg. di prima specie e di specie
sup., di tutte le loro varietà e di tutti i loro correlativi. A questa sono uniti i modelli di alcuni corpi
autocorrelativi, e quelli degli sviluppi, nel nostro spazio, di alcuni corpi reg. dello spazio a quattro
dimensioni. Questi modelli (circa 200) furono costruiti negli anni 1884-85-86 e presentati alla R. Scuola
Normale Superiore di Pisa nel Giugno del 1886 per la discussione della mia tesi di abilitazione al-
l'insegnamento. Nell'anno successivo comparvero all'Esposizione Circondariale di Spezia ove dal
giurì (di cui faceva parte il Prof. Arzelà) vennero giudicati meritevoli del Diploma d'Onore.

Quando il corpo presenta una certa regolarità di forma si può anche procedere in quest'altro modo: Partendo da una faccia F di n lati, si disegnano intorno ad esso tutte le adiacenti che indicheremo con $F_1, F_2, F_3, \ldots F_n$; poi intorno ad ognuna di queste, pure tutte le respettive adiacenti $f_1, f_2, f_3, \ldots$ avendo cura di distribuire simmetricamente fra le $F_1, F_2, \ldots F_n$, quelle tra le f che fossero adiacenti a più di una F. Questo procedimento si continua via via per tutte le altre facce rimanenti. Seguendo un tal metodo lo sviluppo viene ad assumere in generale una forma stellare nella quale le diverse facce appariscono come aggregate intorno ad assi ideali che partono dalla faccia centrale secondo linee rette o curve, e con delle ramificazioni più o meno complicate. Se nel poliedro esista una faccia opposta a quella intorno alla quale è stato effettuato lo sviluppo, essa verrà disegnata in posizione conveniente, di seguito ad una delle facce che si trovano all'estremità di uno di quegli assi ideali.

Ma nel fare lo sviluppo di un poliedro si deve avere riguardo non tanto al modo più o meno semplice secondo il quale può essere disegnato, quanto a quello che offre maggiori facilitazioni per la costruzione del modello. È chiaro che una tale costruzione riuscirà tanto più agevole e perfetta quanto minore è il numero delle commettiture che avremo occasione di fare. Però sotto questo aspetto non si può ottenere alcuna facilitazione per la proprietà espressa dalla relazione 10).

Piuttosto sarà il caso di vedere quale sia la distribuzione, più opportuna da dare ai lati della *sutura,* tenendo presente che un angoloide riuscirà tanto meglio conformato quanto minore è il numero delle commettiture che si dovranno fare lungo i suoi spigoli. A questo riguardo non sarebbe quindi conveniente di ridurre ad un minimo il numero delle commettiture in alcuni di questi angoloidi per averne poi un massimo in altri. Miglior partito è dunque quello di distribuirle egualmente fra i diversi angoloidi; e perciò sarà opportuno di seguire nello sviluppo il 2° procedimento accennato al n. 1, il quale ci dà appunto una sola commettitura per il primo ed ultimo vertice della sutura, e due per tutti i vertici intermedi. Ma per l'appunto questo 2° metodo è, in generale, il meno agevole degli altri; il procedere quindi nella pratica in un modo piuttosto che in un altro, dipenderà unicamente dalla forma speciale del corpo che si deve costruire.

Non sempre lo sviluppo di un corpo può esser fatto di un sol pezzo; qualche volta perchè esso sorpasserebbe i limiti del foglio, tal altra perchè lo sviluppo stesso resulterebbe con delle sovrapposizioni. Ma anche prescindendo da queste impossibilità, spesso si preferisce in più pezzi, specialmente quando questi sono eguali, per poterlo disegnare con maggior speditezza. Certo lo sviluppo di un sol pezzo può essere utile per una maggiore esattezza del disegno potendosi spesso controllare questa esattezza col fatto che per es. alcuni lati debbano passare per uno stesso punto, o più vertici giacere su di una stessa retta, o su di una medesima circonferenza. È per questa ragione che avendo lo sviluppo in più parti, si preferisce qualche volta di riunire queste opportunamente tra di loro allo scopo di dare a ciascuna l'orientazione che loro compete, per potere in tal modo soddisfare esattamente agli eventuali controlli sopra accennati.

Se si aggiungono invece le diverse parti mano a mano che se ne presenta il bisogno nella costruzione del modello, e se la riunione non è fatta in modo perfetto, le facce estreme di quelle parti, specie se queste sono alquanto estese, possono resultare sensibilmente deviate dalla loro giusta posizione, il che può portare a delle deformazioni nel modello per lo sforzo necessario a dover ricondurre quelle facce alla loro opportuna posizione.

Altre volte invece per facilitare la costruzione di un modello di forma molto complicata, come accade ad esempio pei poliedri intrecciati, è preferibile, anche quando lo sviluppo possa farsi di un sol pezzo, di disgiungerlo in più parti che si aggiungeranno poi successivamente mano a mano che se ne presenta il bisogno nella costruzione del modello; in tal modo si evita l'inconveniente di dover maneggiare fin da principio un copioso sviluppo che potrebbe ostacolare la perfetta commettitura delle facce. Ma anche intorno a ciò non si può dare una regola assoluta; è la pratica e la forma speciale del modello che può consigliare volta per volta la via più conveniente da seguire.

Quando lo sviluppo è di più pezzi, si avrà cura di distinguere i lati lungo i quali si debbono riunire le diverse parti per formare lo sviluppo di un sol pezzo, mettendo uno stesso numero d'ordine ai due lati che debbono venire in coincidenza.

10. La costruzione del modello si fa col riunire tra di loro due a due i lati del perimetro dello sviluppo, in modo da formare un unico lato della sutura. Non potendo per il piccolo spessore del cartoncino ottenere questa riunione per i bordi delle facce, si potranno mettere ad alcune di queste delle piccole appendici, che chiameremo *linguette*, alle quali sovrapporre altrettante facce corrispondenti. Queste linguette, anzichè innestarle nella parte posteriore, ciò che porterebbe ad un lavoro più lungo e meno preciso, si preferisce di lasciarle come prolungamento delle facce.

In ogni modo è importante di avere una regola per sapere fin da principio a quali lati del perimetro dovranno esser poste quell'appendici, per evitare che lungo la sutura si presentino due lati muniti o privi di linguette; e perciò si ricorre al teorema del n. 4, il quale ci dice che le linguette si possono lasciare lungo il perimetro dello sviluppo ad un lato sì ed uno no alternativamente, a partire da uno qualunque dei lati.

L'indicazione dei lati che debbono portare quest'appendice si fa col percorrere il perimetro tracciando a mano sulla parte esterna dello sviluppo, e in direzione parallela ai diversi lati che debbono avere le linguette, una linea con lapis colorato. Se lo sviluppo è di più pezzi si percorreranno successivamente e nello stesso modo i perimetri, ricordandoci però di passare da uno ad un altro pezzo tutte le volte che nel cammino s'incontra un lato col numero progressivo il quale ricordi che a quel punto s'innesta un'altra parte dello sviluppo.

Le linguette che uniscono le diverse parti tra di loro rimangono escluse, in generale, dalla regola enunciata, e si potranno lasciare all'uno o all'altro pezzo secondo la convenienza dei casi; può quindi succedere che in alcune parti si presentino tre linguette consecutive. Solamente quando tutti i pezzi hanno un numero pari di lati, tutte le linguette per ogni pezzo separato, appariscono alternate.

Se tutti i pezzi di cui si compone uno sviluppo sono eguali, e ognuno limitato da un numero pari di lati, anche senza supporli riuniti si possono porre le linguette a ciascuno, indipendentemente l'uno dall'altro, colla regola data precedentemente, avendo solo l'avvertenza di cominciare in tutti i pezzi dal medesimo lato. Ma se avessero invece un numero dispari di lati al contorno, allora ricordando che questi pezzi non possono essere in numero dispari (n. 3, 6°) potremo riunirli due a due in modo conveniente, e dopo ciò, resultando ciascun pezzo con un numero pari di lati al perimetro, saremo ricondotti al caso precedente.

11. Disegnato lo sviluppo in tutte le sue parti e fissati i lati del perimetro che debbono portare le linguette, si noteranno con un piccolo tratto di lapis a colore tutti quei lati interni dello sviluppo che sono costole di altrettanti diedri concavi del poliedro. Dopo ciò, posto lo sviluppo su di una solida lastra di cristallo, con un temperino ben tagliente e col sussidio di righe o squadre metalliche, o almeno in legno colla costola metallica, si intaccano a mezza grossezza tutti i lati interni dello sviluppo e tutti quelli del perimetro ove si trovano delle linguette e che corrispondono a costole di diedri convessi del poliedro. Per incidere esattamente il cartone al disotto, in corrispondenza di quei lati che sono invece costole di angoli diedri concavi, si deve aver prima l'avvertenza di forare con un ago agli estremi ed anche (per evitare confusione di punti sul rovescio del foglio ove manca il disegno) alla metà dei diversi lati; poscia, rovesciando il foglio, s'incide ugualmente al disotto il cartoncino in corrispondenza dei diversi punti segnati.

Fatta questa operazione si taglia interamente il cartoncino lungo i lati del perimetro che non contengono linguette, mentre in corrispondenza di questi si fa invece il taglio parallelamente al lato, ad una distanza di circa un centimetro. Si avverta che per eseguire questi tagli e mezzi tagli basta solo di conoscere i vertici delle diverse facce; è quindi inutile, nel disegnare lo sviluppo, di tracciare i lati, a meno che questi non sieno richiesti per altra ragione. Allo scopo però di evitare confusione di punti, specie quando questi sono riportati da altro disegno mediante fori con un ago (n. 9), sarà utile di riunirli convenientemente a mano, tanto per avere un'idea della forma delle diverse facce e del loro modo di aggregazione.

Fatto questo si tolgono le parti del foglio estranee allo sviluppo lasciando le linguette approssimativamente sotto la forma di piccoli rettangoli; indi si piegano le facce e le linguette lungo le rispettive intaccature fino a far combaciare le due parti, e sempre nel senso che tende ad aprire l'intaccatura medesima.

Dicemmo già al n. 9 che il cartoncino sul quale si disegna lo sviluppo non deve essere molto grosso, e ciò per la ragione che le molteplici sovrapposizioni di facce sulle rispettive linguette venendo via via ad aumentare la superficie del poliedro, possono produrre, in ultimo, degli errori non trascurabili e delle deformazioni piuttosto sentite. Per ovviare a questo inconveniente si prende ogni linguetta tra il pollice e l'indice e si fanno poi scorrere le due dita premendo al tempo stesso coll'unghia del pollice lungo l'intaccatura, in modo da potere abbassare la linguetta stessa. Si può anche asportare facilmente la parte del cartoncino che corrisponde al mezzo taglio, e così si ottiene una risega sulla quale viene ad adattarsi lo spessore della faccia che vi si sovrappone. In ultimo se alcune linguette mancano lungo il perimetro per averle inavvedutamente tagliate, dovremo ripristinarle innestandole nella parte superiore delle facce, in modo da lasciare sempre una piccola risega corrispondente alla grossezza del cartoncino.

Prima di accingerci alla costruzione del modello è utile di riscontrare se le diverse facce dello sviluppo vengono bene a combaciare tra di loro, e, mano a mano che si fa questa operazione di prova, si ritagliano le linguette sotto forma di trapezi in modo che gli angoli adiacenti alla base sieno presso a poco eguali (cosa che si giudica ad occhio) agli angoli della faccia che deve venire a sovrapporvisi. Si profitta anche di questa prima prova di ricostruzione del poliedro, per togliere quella piccola elasticità residua che il cartoncino può ancora conservare lungo qualche piegatura, perchè è bene che le diverse parti vengano a combaciare tra di loro senza alcuno sforzo.

12. E dopo ciò si comincia a mettere insieme il modello. Per attaccare le diverse parti tra di loro non è indicata la pasta dei librai perchè non fa *presa* subito e perchè bagnando un po' troppo il cartoncino, può produrre delle deformazioni nel solido. Neppure la gomma o colla liquida in boccette soddisfa bene, perchè anch'essa inumidisce troppo, impiega sempre un po' a far *presa*, ed inoltre col tempo si screpola e le parti si staccano. Meglio di ogni altra materia agglutinante è la colla forte da falegnami, di 1ª qualità, preparata in soluzione ben dosata e leggermente scorrevole. La colla forte ha il vantaggio di seccare rapidamente e di dare forza e consistenza al modello. Si abbia però l'avvertenza, quando si adopra, di mantenerla sempre calda in apposito recipiente riscaldato a bagno-maria, e di distenderla uniformemente con un piccolo pennello di forma piatta e non molto ruvido.

È bene poi di non riunire mai due facce finchè le parti adiacenti non sono solidamente attaccate; per non perder tempo si può passare una lamina scaldata sulla attaccatura fatta, oppure si possono costruire più modelli contemporaneamente attaccando alternativamente le diverse parti in ciascuno di essi; così si guadagna tempo e il lavoro risulta più preciso. Circa l'ordine secondo il quale debbono incollarsi le diverse parti non si può dare una precisa indicazione, perchè anche in questo caso si giudica meglio all'atto pratico. Tuttavia possiamo dire in generale che, siccome le difficoltà nella costruzione del modello vanno sempre aumentando coll'avvicinarsi al termine del lavoro, così sarà utile di mettere insieme dapprima le parti più difficili; inoltre si deve procurare di chiudere il poliedro colla faccia di minore estensione e che ha il minor numero di lati, perchè per essa si richiede un minor numero di attaccature che sono sempre fatte in condizioni poco favorevoli. Per far bene aderire le parti di quest'ultima faccia, si fanno all'esterno delle leggere e convenienti pressioni in modo da produrre il contatto delle linguette sulle quali è stata stesa preventivamente la colla.

Non sempre la cosa però è facile, e tante volte è necessario di ricorrere a dei compensi che il caso suggerisce volta per volta, come ad es. quello di forare il modello, nella parte opposta all'ultima faccia con dei ferri da calza, e con questi opporre un contrasto successivamente alle diverse parti sulle quali si deve fare esternamente una leggiera pressione.

Termineremo queste norme pratiche con alcune osservazioni.

Per render più solide alcune parti del modello, come sarebbero gli angoli molto acuti e molto sporgenti, e in genere tutte quelle parti che sono soggette a guastarsi facilmente, si può colare alcune gocciole liquefatte di buona ceralacca nei punti che debbono essere rinforzati. Parimente nei modelli molto complicati, per impedire le possibili deformazioni che possono verificarsi col tempo, si assicurano le diverse parti, specialmente quelle opposte, con degli steccolini di opportuna lunghezza in modo da mantenerle sempre alla necessaria distanza.

Allo scopo poi di ottenere il modello ben pulito, specialmente se non deve essere tinto in ultimo, si devono togliere con una gomma, prima di cominciare l'incollatura, tutti i segni in lapis, ripulendo poi tutto lo sviluppo con mollica di pane. Durante il lavoro si abbia l'avvertenza di tenere le mani pulite dalla colla, per evitare che appiccicandosi al modello possano produrre dei guasti.

Si badi poi di non imbrattare lo sviluppo con la colla; le gocciole cadute qua e là per caso durante il lavoro, come pure la colla che sopravanza dalle commettiture non si deve mai togliere subito perchè si corre il rischio di sporcare maggiormente il modello. Miglior cosa è quella di aspettare che il lavoro sia terminato e tutte le parti ben seccate, ed allora con un temperino si possono asportare facilmente tutte le gocciole e tutte le sbavature.

Ultima operazione da farsi è quella di riordinare le diverse commettiture, eliminando le piccole irregolarità con un po' di carta vetrata o con una piccola lima a grana sottile; le parti più difettose possono esser corrette con un po' di stucco a colla. Dopo ciò si dà una prima mano di bianco di zinco disciolto con acqua e colla, la quale operazione oltre fare sparire le piccole riseghe lungo le commettiture, serve a rinforzare tutto il modello. Indi con carta vetrata finissima si tolgono tutte le irregolarità della superficie, poi si dà un'altra mano o di bianco di zinco o di colori differenti per le diverse facce, nel caso che queste debbano esser distinte tra di loro. Infine il modello può esser verniciato con vernice coppale, il che oltre dare un migliore aspetto al modello, lo rafforza e lo preserva più facilmente dall'umidità.

A. Andreini.

SU ALCUNI DETERMINANTI

Consideriamo alcuni determinanti in cui ogni elemento è funzione del posto che occupa. Se ogni elemento a_{rs} è funzione della sola r, evidentemente il determinante è nullo, perchè ha tutte le colonne uguali. Lo stesso dicasi se a_{rs} è funzione della sola s. Osserviamo anzi, benchè sia ovvio, che ciò che dicesi per la r vale per la s e viceversa, giacchè il sostituire in un ragionamento s ad r equivale a considerare un determinante in cui le linee dell'uno sono le colonne dell'altro. Vediamo qualche esempio di determinanti in cui a_{rs} è funzione sì di r che di s.

a) Sia $a_{rs}=f(r)\,.\,\varphi(s)$. Allora il determinante Δ dell'ordine n^0 corrispondente, sarà

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(1)\,.\,\varphi(1) & f(1)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(1)\,.\,\varphi(n) \\ f(2)\,.\,\varphi(1) & f(2)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(2)\,.\,\varphi(n) \\ f(3)\,.\,\varphi(1) & f(3)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(3)\,.\,\varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n)\,.\,\varphi(1) & f(n)\,.\,\varphi(2) & \dots\dots & f(n)\,.\,\varphi(n) \end{vmatrix}=$$

$$=f(1)\,.\,f(2)\,.\,f(3)\dots f(n)\begin{vmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) & \dots\dots & \varphi(n) \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots\dots & \varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots\dots & \varphi(n) \end{vmatrix}=0.$$

b) Sia $a_{rs}=f(r)+\varphi(s)$, ossia

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(1)+\varphi(1) & f(1)+\varphi(2) & \dots\dots & f(1)+\varphi(n) \\ f(2)+\varphi(1) & f(2)+\varphi(2) & \dots\dots & f(2)+\varphi(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(n)+\varphi(1) & f(n)+\varphi(2) & \dots\dots & f(n)+\varphi(n) \end{vmatrix}.$$

In questo caso Δ si scompone in 2^n determinanti ad elementi monomi rispetto ad f e φ, dei quali $2^n - n$ hanno due o più colonne uguali e gli altri n sono della forma

$$\begin{vmatrix} \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(1) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \\ \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(2) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi(1) & \varphi(2) \ldots\ldots & \varphi(h-1) & f(n) & \varphi(h+1) \ldots\ldots & \varphi(n) \end{vmatrix},$$

dove la colonna ad elementi disuguali occupa rispettivamente il 1°, 2°, 3° .... n° posto. Ma ognuno di essi è uguale alla somma algebrica dei prodotti degli elementi $f(1) f(2) \ldots f(n)$ pei rispettivi complementi algebrici, che sono determinanti nulli, perchè a linee uguali.

Dunque se $a_{rs} = f(r) + \varphi(s)$, $\Delta = 0$.

c) Sia $a_{rs} = \overline{f(r)}^s$. Allora è

$$\Delta = \begin{vmatrix} f(1) & f(2) & f(3) \ldots\ldots\ldots & f(n) \\ \overline{f(1)}^2 & \overline{f(2)}^2 & \overline{f(3)}^2 \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^2 \\ \overline{f(1)}^3 & \overline{f(2)}^3 & \overline{f(3)}^3 \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \overline{f(1)}^n & \overline{f(2)}^n & \overline{f(3)}^n \ldots\ldots\ldots & \overline{f(n)}^n \end{vmatrix}$$

Divisa la prima colonna per $f(1)$, la seconda per $f(2)$ .... la n^a per $f(n)$, resta un determinante di Vandermonde; epperò

$$\Delta = f(1) \,.\, f(2) \,.\, f(3) \ldots f(n) \prod_{r=1}^{r=n-1} (f(r+1) - f(r))\,(f(r+2) - f(r)) \ldots (f(n) - f(r)).$$

d) Se in particolare fosse $f(r) = r$ avremmo il determinante studiato nella quistione 472 proposta dal Prof. Cardoso-Laynes.

e) Sia $a_{rs} = (r+s)^m$. Considerando il determinante dell'n° ordine, distinguiamo tre casi, a seconda che $m \lesseqgtr n-1$.

Sia in primo luogo, $a_{rs} = (r+s)^m$ con $m < n-1$.

Ogni elemento è un polinomio di $m+1$ termini epperò il determinante Δ dell'n° ordine si scinde in $(m+1)^n$ determinanti ad elementi monomi. Ognuno di essi ha almeno due colonne o uguali o proporzionali, epperò è nullo, e tale sarà quindi anche Δ.

f) Sia $a_{rs} = (r+s)^{n-1}$. Indichiamo con Δ il determinante dell'n° ordine che ne risulta. Ogni elemento è un polinomio (omogeneo completo) di n termini, epperò Δ si scinde nella somma di n^n determinanti ad elementi monomi, dei quali sono nulli tutti quelli che si ottengono prendendo in Δ almeno due colonne di posto uguale. Sono quindi disuguali da zero solo gli $n!$ determinanti Δ' che si ottengono con colonne di posto disuguale. Ma ogni colonna dei Δ' ha per fattore comune un coefficiente binomiale e la s elevata ad uno dei numeri $0, 1, 2 \ldots, n-1$. La s poi evidentemente ha i valori $1, 2 \ldots, n$ ond'è

[illegible]

$$\Delta = \binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\cdots\binom{n-1}{n-1} 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} 3^{\mu_3}\ldots \quad [illegible]$$

dove $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n$ rappresenta una permutazione qualsiasi dei numeri $0, 1, 2, \ldots, n-1$, e $\overline{\mu}_k = (n-1) - \mu_k$. Anche $\overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 \overline{\mu}_3 \ldots \overline{\mu}_n$ è evidentemente una permutazione dei numeri $0, 1, 2 \ldots n-1$. Il valore del determinante è uguale, tranne il segno a quello di

$$(\alpha) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-1} \end{vmatrix},$$

che sappiamo essere $(n-1)!\,(n-2)! \ldots 3!\,2!\,1!$ (quistione citata).

Il segno sarà $+$ o $-$, a seconda che la permutazione $\overline{\mu}_1 \overline{\mu}_2 \overline{\mu}_3 \ldots \overline{\mu}_n$ è della 1^a o della 2^a classe. Questa sarà della stessa classe o diversa della permutazione $\mu_1 \mu_2 \mu_3 \ldots \mu_n$ a seconda che $\frac{n(n+1)}{2}$ è pari o dispari. Il determinante Δ è dunque uguale a

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1}(n-1)!\,(n-2)! \ldots 3!\,2!\,1!\,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Sigma \pm 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots$$

Ma $\Sigma \pm 1^{\mu_1} 2^{\mu_2} \ldots n^{\mu_n}$ è lo stesso determinante (α); è poi evidentemente

$$\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1}\cdots\binom{n-1}{n-1} = \frac{(n-1)^{n-1}(n-2)^{n-2}\ldots 2^2 \cdot 1}{1^{n-1} \cdot 2^{n-2} \ldots (n-2)^2 (n-1)} =$$
$$= (n-1)^{n-2}(n-2)^{n-4} \ldots 3^{-(n-6)} 2^{-(n-4)} 1^{-(n-2)},$$

onde:

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1)^{n-2}(n-2)^{n-4} \ldots 3^{-(n-6)} 2^{-(n-4)} 1^{-(n-2)} \left\{(n-1)!\,(n-2)! \ldots 3!\,2!\,1!\right\}^2.$$

g) Se fosse $a_{rs} = r^{n-1} + r^{n-2}s + r^{n-3}s^2 + \ldots + s^{n-1}$, evidentemente sarebbe

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left\{(n-1)!\,(n-2)! \ldots 3!\,2!\,1!\right\}^2$$

risultato al quale, oltrechè col fare i coefficienti binomiali uguali all'unità, si giunge tosto coll'osservare che il determinante corrispondente è il prodotto di (α) per se stesso in cui però si sia invertito l'ordine delle colonne.

h) Sia $a_{rs}=(r+s)^m$, con $m>n-1$.

Anche qui ogni elemento è un polinomio di $m+1$ termini ed il determinante Δ dell'n^o ordine, si scompone nella somma di $(m+1)^n$ determinanti ad elementi monomi, dei quali sono disuguali da zero solamente i $D_{m+1,n}=(m+1)m(m-1)\ldots(m-n+2)$ determinanti che si ottengono prendendo dagli elementi di Δ colonne di posto disuguale. Uno di questi determinanti è della forma

$$\Delta'=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}\begin{vmatrix}1^{m-\nu_1} & 1^{m-\nu_2}\ldots & 1^{m-\nu_n}\\ 2^{m-\nu_1} & 2^{m-\nu_2}\ldots & 2^{m-\nu_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ n^{m-\nu_1} & n^{m-\nu_2}\ldots & n^{m-\nu_n}\end{vmatrix}=$$

$$=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n},$$

dove $\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_n$ è una combinazione semplice di n numeri presi fra gli $m+1$ numeri $0,1,2,\ldots m$. Tenendo fissi i numeri $\nu_1\,\nu_2\,\nu_3\ldots\nu_n$ e facendone tutte le permutazioni, si ottengono $n!$ determinanti, la cui somma è

$$\Delta''=\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}.\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}.$$

Onde Δ sarà uguale sarà uguale alla somma degli $\binom{m+1}{n}$ prodotti analoghi a Δ'' che si ottengono prendendo tutte le combinazioni semplici di n dei numeri $0, 1, 2\ldots m$. Indicando con $\Sigma_{\binom{m+1}{n}}$ la somma estesa nel modo ora detto, sarà

$$\Delta=\sum_{\binom{m+1}{n}}\left\{\binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\cdots\binom{m}{\nu_n}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sum\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}.\sum\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}\right\}.$$

Ciascuno dei determinanti $\Sigma\pm 1^{\nu_1}2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n}$ e $\Sigma\pm 1^{m-\nu_1}2^{m-\nu_2}\ldots n^{m-\nu_n}$ è un determinante (generalizzazione di quello di Vandermonde o di Cauchy) esprimibile mediante le *funzioni omogenee complete* (dette *funzioni aleph* da Wronski) degli elementi di una sua linea.

Si dice funzione omogenea completa di grado k di n quantità $a_1\,a_2\ldots a_n$ lo sviluppo della potenza k^{ma} di $a_1+a_2+\ldots+a_n$ dove ai coefficienti numerici che compariscono in questo sviluppo è stata sostituita l'unità.

Denotando una tale funzione con V_k, si dimostra (cfr. TRUDI, "Intorno ad un determinante più generale di quello delle radici di un'equazione ecc.," *Giornale di Battaglini*, vol. II, pag. 152) che

$$\begin{vmatrix}a_1^{r_1} & a_2^{r_1}\ldots & a_n^{r_1}\\ a_1^{r_2} & a_2^{r_2}\ldots & a_n^{r_2}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1^{r_n} & a_2^{r_n}\ldots & a_n^{r_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \ldots 1\\ a_1 & a_2 & \ldots a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots a_n^2\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots a_n^{n-1}\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}V_{r_1}V_{r_1-1}\ldots V_{r_1-n+1}\\ V_{r_2}V_{r_2-1}\ldots V_{r_2-n+1}\\ \ldots\\ \ldots\\ V_{r_n}V_{r_n-1}\ldots V_{r_n-n+1}\end{vmatrix}$$

dove $r_1\,r_2\ldots r_n$ sono numeri interi qualunque.

In virtù di questa formola sarà

$$\Sigma \pm 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \ldots\ldots n^{\nu_n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & 2 & \ldots n \\ 1^2 & 2^2 & \ldots n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V'_{\nu_1} & V'_{\nu_1-1} & \ldots V'_{\nu_1-n+1} \\ V'_{\nu_2} & V'_{\nu_2-1} & \ldots V'_{\nu_2-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ V'_{\nu_n} & V'_{m-\nu_n-1} & \ldots V'_{m-\nu_n-n+1} \end{vmatrix},$$

e

$$\Sigma \pm 1^{m-\nu_1} 2^{m-\nu_2} \ldots n^{\nu_n} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ 1 & 2 & \ldots n \\ 1^2 & 2^2 & \ldots n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots n^{n-1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} V'_{m-\nu_1} & V'_{m-\nu_1-1} & \ldots V'_{m-\nu_1-n+1} \\ V'_{m-\nu_2} & V'_{m-\nu_2-1} & \ldots V'_{m-\nu_2-n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ V'_{\nu_n} & V'_{\nu_n-1} & \ldots V'_{\nu_n-n+1} \end{vmatrix},$$

dove con V'_i indichiamo la funzione omogenea completa di grado i dei numeri **1**, **2**, ... n. Onde possiamo porre

$$\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \{(n-1)!\,(n-2)!\,\ldots\}^2 \sum\nolimits_{\binom{m+1}{n}} \left\{ \binom{m}{\nu_1}\binom{m}{\nu_2}\ldots\binom{m}{\nu_n} \begin{vmatrix} V'_{\nu_1} V'_{\nu_1-1} \ldots V'_{\nu_1-n+1} \\ V'_{\nu_2} V'_{\nu_2-1} \ldots V'_{\nu_2-n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V'_{\nu_n} V'_{\nu_n-1} \ldots V'_{\nu_n-n+1} \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{vmatrix} V'_{m-\nu_1} V'_{m-\nu_1-1} \ldots V'_{m-\nu_1-n+1} \\ V'_{m-\nu_2} V'_{m-\nu_2-1} \ldots V'_{m-\nu_2-n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V'_{m-\nu_n} V'_{m-\nu_n-1} \ldots V'_{m-\nu_n-n+1} \end{vmatrix} \right\}.$$

i) Se fosse $a_{rs} = r^m + r^{m-1}s + \ldots + rs^{m-1} + s^m$, ossia $a_{rs} = (r,s)^m$ usando una notazione usata già dal Prof. Trudi (*loc. cit.*) per designare la funzione omogenea completa di grado m di r ed s, il determinante dell'n^o ordine (nella condizione prima posta che sia $m > n-1$) è

$$\begin{vmatrix} (1,1)^m (1,2)^m \ldots (1,n)^m \\ (2,1)^m (2,2)^m \ldots (2,n)^m \\ \ldots\ldots\ldots \\ (n,1)^m (n,2)^m \ldots (n,n)^m \end{vmatrix} =$$

$$= (1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 2!\,1!\}^2 \sum\nolimits_{\binom{m+1}{n}} \left\{ \begin{vmatrix} V'_{\nu_1} V'_{\nu_1-1} \ldots V'_{\nu_1-n+1} \\ V'_{\nu_2} V'_{\nu_2-1} \ldots V'_{\nu_2-n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V'_{\nu_n} V'_{\nu_n-1} \ldots V'_{\nu_n-n+1} \end{vmatrix} \times \right.$$

$$\left. \times \begin{vmatrix} V'_{m-\nu_1} V'_{m-\nu_1-1} V'_{m-\nu_1-n+1} \\ V'_{m-\nu_2} V'_{m-\nu_2-1} V'_{m-\nu_2-n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ V'_{m-\nu_n} V'_{m-\nu_n-1} V'_{m-\nu_n-n+1} \end{vmatrix} \right\}.$$

l) Tenendo conto del risultato del paragrafo *g*), e notando che

$$r^{n-1} + r^{n-2} + \ldots + rs^{n-2} + s^{n-1} = (r,s)^{n-1}$$

possiamo dire che il determinante dell'n^o ordine in cui ogni elemento è la funzione omogenea completa di grado $n-1$ degli indici dell'elemento stesso, è uguale a

$$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\left\{(n-1)!\,(n-2)!\ldots 3!\,2!\,1!\right\}^{2}$$

m) Sia, per ultimo, $a_{rs}=(r+s)^{r-1}$.

La prima linea del determinante Δ dell'n^{o} ordine, che ne risulta, ha per elementi dei monomi (l'unità), la seconda dei binomi, la terza dei trinomi,.... la n^{a} dei polinomi di n termini.

Si può scomporre Δ, come è noto, in n^{n} altri determinanti, supponendo tutti gli elementi polinomi di n termini, rimpiazzando collo zero quelli che mancano. Di questi determinanti sono disuguali da zero solamente gli $n!$, che si ottengono prendendo da Δ colonne di posto disuguale. In ognuno di essi le n colonne hanno, in un ordine qualsiasi, $0, 1, 2 \ldots . n-1$ primi elementi nulli, il primo elemento non nullo è in ciascuna colonna s^{r-1}; mediante scambi di colonne si può ridurre ogni determinante ad avere nulli tutti gli elementi alla destra della diagonale principale, epperò il suo valore è il prodotto degli elementi della diagonale principale stessa $1^{\mu_1}2^{\mu_2}3^{\mu_3}\ldots . n^{\mu_n}$, essendo $\mu_1\,\mu_2\,\mu_3 \ldots . \mu_n$ una permutazione di $0, 1, 2 \ldots . n-1$. Onde è

$$\Delta = \Sigma \pm 1^{\mu_1}2^{\mu_2}3^{\mu_3}\ldots . n^{\mu_n}=(n-1)!\,(n-2)!\,(n-3)!\ldots . 3!\,2!\,1!$$

Bologna, febbraio 1900.

FILIPPO SIBIRANI.

SOPRA UN PROBLEMA DI ANALISI INDETERMINATA

PROBLEMA. *Risolvere in numeri interi e non negativi l'equazione*

$$\text{(1)}\qquad ax + by = c$$

essendo a, b, c *interi non negativi ed* a *e* b *diversi da zero e primi fra loro.* (*)

RISOLUZIONE. Distingueremo quattro casi.

Primo caso. $a=1$, $b=1$. Manifestamente la (1) ha allora le $c+1$ soluzioni

$$(x=0,\ y=c),\quad (x=1,\ y=c-1)\ldots\quad (x=c,\ y=0).$$

Secondo caso. Uno (solo) dei due numeri a, b sia 1; sia per es. $a>1$, $b=1$. Allora, se q è il quoziente ed r il resto della divisione di c per a, la (1) ci dà

(*) Intendo di presentare sotto forma forse più comoda nella pratica la notissima risoluzione di questo problema.

$y = a(q - x) + r$, la quale manifestamente ha le $q+1$ soluzioni, che si ottengono per $x = 0, 1 \ldots q$,

$$(x = 0,\ y = c) \ldots \quad (x = q,\ y = r).$$

Terzo caso. $a > 1$, $b > 1$ e c divisibile per a (o per b). Sia per esempio $c = aq$. Allora dalla

$$ax + by = aq$$

segue che y è un multiplo di a; pongasi $y = az$. Resterà l'equazione

$$x + bz = q,$$

che rientra nel secondo caso.

Quarto caso. $a > 1$, $b > 1$ e c non divisibile nè per a nè per b.

Intanto lo sviluppo di $\frac{a}{b}$ in frazione continua darà luogo ad almeno due quozienti incompleti non nulli, epperò ad almeno due ridotte non nulle; l'ultima di queste è $\frac{a}{b}$; sia $\frac{p}{q}$ la penultima. Avremo

$$aq - bp = \pm 1,$$

e si potrà supporre (scambiando, ove occorra, a, p, x con b, q, y rispettivamente) che sia appunto

$$aq - bp = 1. \tag{2}$$

Da questa abbiamo

$$a\,(qc) + b\,(-pc) = c,$$

epperò ogni soluzione intera di (1) sarà della forma

$$\begin{cases} x = qc - bt \\ y = -pc + at, \end{cases} \tag{3}$$

essendo t un intero arbitrario.

Indichiamo con $\left(\frac{pc}{a}\right)$ e $\left(\frac{qc}{b}\right)$ le parti intere di $\frac{pc}{a}$ e $\frac{qc}{b}$ e con α e β i rispettivi resti. Avremo

$$\begin{cases} pc = \left(\frac{pc}{a}\right) a + \alpha, \\ qc = \left(\frac{qc}{b}\right) b + \beta; \end{cases} \tag{4}$$

e poichè a per la (2) è primo con p e per ipotesi a non divide c, sarà $\alpha > 0$. Similmente sarà $\beta > 0$.

Ciò posto le (3) si potranno scrivere

$$\begin{cases} x = \left\{\left(\frac{qc}{b}\right) - t\right\} b + \beta \\ y = \left\{t - \left(\frac{pc}{a}\right) - 1\right\} a + (a - \alpha). \end{cases} \tag{5}$$

Poniamo ora

$$u = \left(\frac{qc}{b}\right) - t, \qquad v = t - \left(\frac{pc}{a}\right) - 1,$$

che equivalgono all'unica

(6) $$u+v=\left(\frac{qc}{b}\right)-\left(\frac{pc}{a}\right)-1.$$

Allora le (5) diverranno

(7) $$\begin{cases} x=bu+\beta \\ y=av+(a-\alpha) \end{cases}$$

con u e v soddisfacenti a (6) ed interi. È chiaro che se u o v sono interi negativi le (7) ci danno per x o per y valori negativi, perchè $\beta<b$ e $a-\alpha<a$. Sicchè si otterranno tutte le soluzioni intere non negative di (1) dalle (7) prendendo u e v interi non negativi soddisfacenti a (6).

Si può avere un controllo dei resultati (7) calcolando il quoziente Q e il resto R della divisione di c per ab. Così da $c=\mathrm{Q}ab+\mathrm{R}$ si ricava

$$pc=\mathrm{Q}pab+p\mathrm{R}, \qquad qc=\mathrm{Q}qab+q\mathrm{R},$$

e quindi

(8) $$\left(\frac{pc}{a}\right)=\mathrm{Q}pb+\left(\frac{p\mathrm{R}}{a}\right), \qquad \left(\frac{qc}{b}\right)=\mathrm{Q}qa+\left(\frac{q\mathrm{R}}{b}\right).$$

e poi per le (4)

$$p\mathrm{R}=\left(\frac{p\mathrm{R}}{a}\right)a+\alpha, \quad q\mathrm{R}=\left(\frac{q\mathrm{R}}{b}\right)b+\beta;$$

e queste ultime ci provano intanto che α e β sono ancora i resti delle divisioni per a e b rispettivamente di $p\mathrm{R}$ e $q\mathrm{R}$. Inoltre da (8) abbiamo

$$\left(\frac{qc}{b}\right)-\left(\frac{pc}{a}\right)=\mathrm{Q}(qa-pb)+\left(\frac{q\mathrm{R}}{b}\right)-\left(\frac{p\mathrm{R}}{a}\right);$$

sicchè, osservando alla (2) e ponendo per brevità

(9) $$\rho=\left(\frac{q\mathrm{R}}{b}\right)-\left(\frac{p\mathrm{R}}{a}\right),$$

la (6) si può anche scrivere

(10) $$u+v=\mathrm{Q}+\rho-1.$$

Quanto a ρ dato da (9) si può vedere che è zero od uno. Infatti, essendo per la (2) $\frac{q}{b}>\frac{p}{a}$, sarà $\left(\frac{q}{b}\right)\geq\left(\frac{p}{a}\right)$ epperò $\rho\geq 0$; inoltre, avendosi

$$\rho=\frac{q\mathrm{R}-\beta}{b}-\frac{p\mathrm{R}-\alpha}{a}=\frac{\mathrm{R}(aq-bp)+b\alpha-a\beta}{ab}=\frac{\mathrm{R}+b\alpha-a\beta}{ab},$$

per essere $\mathrm{R}<ab$, $b\alpha<ab$, $a\beta<ab$ si ha $\mathrm{R}+b\alpha-a\beta<2ab$, sicchè $\rho<2$; cioè appunto $\rho=0$ oppure $\rho=1$.

Da (10) risulta che la (1) ha $\mathrm{Q}+\rho$ soluzioni intere e positive, cioè $\mathrm{Q}+1$ ovvero Q soluzioni intere e positive, secondochè $\rho=1$ oppure $\rho=0$. In particolare per $\mathrm{Q}=0$ si ottiene che la

(11) $$ax+by=\mathrm{R}$$

ha una soluzione in numeri interi e positivi o non ne ha nessuna, secondochè $\rho=1$ oppure $\rho=0$. Si può dunque concludere che *la* (1) *nel quarto caso* *ha* $Q+1$ *ovvero* Q *soluzioni intere e positive, secondochè la* (11) *ha o non ha una tale soluzione.* Questa conclusione è valida anche nei casi primo, secondo e terzo; infatti si trova allora che la (11) ha sempre una soluzione in numeri interi e non negativi e che il numero totale dei sistemi di soluzioni intere e non negative della (1) è $Q+1$. (Cfr. Bertrand, *Algebra.*)

La (10) ci dice ancora che il minimo valore di Q pel quale la (1) ha soluzioni intere e positive è nel quarto caso $Q=1-\rho$; allora poi si ha $u=0$, $v=0$; dunque, poichè le (6) ci danno in tal caso $x=\beta$, $y=a-\alpha$, vediamo che quest'ultima è la soluzione dell'equazione

$$ax+by=R+(1-\rho)\,ab;$$

e questa relazione può servire appunto di comodo controllo ai numeri α e β.

Diciamo *complementari* due numeri interi non negativi la cui somma sia ab. Se di due numeri complementari uno è multiplo di a (o di b) anche l'altro manifestamente è tale. Ora ogni numero minore di ab che sia multiplo di a è della forma $ax+by$ con $y=0$ ed $x\leq b-1$; dunque tali numeri sono in numero di b; similmente i numeri minori di ab e multipli di b sono della forma $ax+by$ e sono in numero di a. Dunque i numeri minori di ab e multipli di a o di b sono (poichè a e b sono primi fra loro) in numero di $a+b-1$. I numeri minori di ab e non multipli di a o di b saranno perciò in numero di $ab-(a+b-1)=(a-1)(b-1)$, e formeranno $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$ coppie di numeri complementari. Sia R, R' una di tali coppie. Essendo $R+R'=ab$, dalle

$$Rp=\left(\frac{Rp}{a}\right)a+\alpha \qquad Rq=\left(\frac{Rq}{b}\right)b+\beta$$

ricaveremo

$$R'p=\left\{bp-\left(\frac{Rp}{a}\right)-1\right\}a+(a-\alpha) \qquad R'q=\left\{aq-\left(\frac{Rq}{b}\right)-1\right\}b+(b-\beta)$$

epperò

$$\left(\frac{R'p}{a}\right)+\left(\frac{Rp}{a}\right)=bp-1 \qquad \left(\frac{R'q}{b}\right)+\left(\frac{Rq}{b}\right)=aq-1.$$

Da cui, se ρ' è ciò che diventa ρ quando in (9) si cangia R in R', otteniamo: $\rho'+\rho=aq-bp=1$; dunque se $\rho=0$ si ha $\rho'=1$ e se $\rho=1$ si ha $\rho'=0$. Cioè: *di due numeri complementari non multipli nè di* a *nè di* b *uno ed uno solo è della forma* ax + by.

Segue di qui: *i numeri minori di* ab *che non sono della forma* ax + by *sono in numero di* $\dfrac{(a-1)(b-1)}{2}$. Siccome poi fra questi vi sono evidentemente quei non multipli di a o di b che sono minori di $a+b$, così in particolare concludiamo: *gli* a + b − 1 *numeri*

$$ab-1,\ ab-2, \ldots\ldots ab-(a+b)+1$$

sono tutti della forma ax + by, perchè sono complementari o dei precedentemente considerati oppure di multipli di a o di b.

G. Sforza.

ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA

Si consideri un triangolo ABC *la cui base* BC = 2a *sia fissa, ed i cui angoli* B *e* C *siano legati tra loro da una relazione.* A seconda delle varie forme di questa relazione, si trovano dei resultati interessanti pei luoghi del vertice C e dell'ortocentro H del triangolo ABC.

Prendendo per assi cartesiani la retta BC e la perpendicolare ad essa condotta pel suo centro O, e designando con (α, β) le coordinate di A e con (x, y) quelle dell'ortocentro H del triangolo ABC, si trova

$$(1) \qquad \alpha = x \quad , \quad \beta = \frac{a^2 - x^2}{y},$$

cosicchè il luogo di H è la trasformata del luogo di A, cangiando nell'equazione del luogo di A, α in x e β in $\dfrac{a^2 - x^2}{y}$.

Ecco alcuni resultati, lasciando la cura di trovarne altri a quei lettori che s'interessano di questa quistione.

1° $\tan B = \tan^2 C$

Luogo di A $\quad (\alpha + a)^2 + \beta(\alpha - a) = 0$ . . . . . iperbole
Luogo di H $\quad (x - a)^2 - y(x + a) = 0$ . . . . . "

2° $\tan B = \tan^3 C$

Luogo di A $\quad (\alpha + a)^3 + \beta^2(\alpha - a) = 0$ . . . . . cissoide retta
Luogo di H $\quad (x - a)^3 + y^2(x + a) = 0$ . . . . . "

3° $\tan B = k \cot C$ o $\operatorname{tg} B \tan C = k$

Luogo di A $\quad k\alpha^2 + \beta^2 = ka^2$ . . . . conica
Luogo di H $\quad x^2 + ky^2 = a^2$ . . . . "

4° $\tan B = \cot^2 C$

Luogo di A $\quad \beta^3 = (a + \alpha)^2(a - \alpha)$ . . . . cubica
Luogo di H $\quad y^3 = (a + x)(a - x)^2$ . . . . "

5° $\tan B - \cot 2C$

Luogo di A $\quad \beta^2(3a + \alpha) = (a - \alpha)(a + \alpha)^2$ . . sferoide retta
Luogo di H $\quad x^2 + y^2 + 2ax - 3a^2 = 0$ . . . . . circolo

6° $B = 180° - 2C$

Luogo di A $\quad \alpha^2 + \beta^2 - 2a\alpha - 3a^2 = 0$ . . . . . circolo
Luogo di H $\quad y^2(3a - x) = (x - a)^2(2 + a)$ . . strofoide retta

7° $B = 2C$

Luogo di A $\quad 3\alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0$. . . . . . iperbole
Luogo di H $\quad y^2(3x - a) = (x - a)^2(2 + a)$. . . cubica

8° $\tan B + \tan C = k$

Luogo di A $k\alpha^2 + 2a\beta - ka^2 = 0$ . . . . parabola
Luogo di H $ky = 2a$ . . . . retta

9° $\dfrac{\tan B}{\tan C} = k$

Luogo di A $\alpha\,(k+1) = a\,(k-1)$ . . . . retta
Luogo di H $x\,(k+1) = a\,(k-1)$ . . . . »

10° $\dfrac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = k$

Luogo di A $(\alpha^2+\beta^2)(1-k^2)+2a\alpha(1+k^2)+a^2(1-k^2)=0$ circolo
Luogo di H $y^2[(x^2+a^2)(1-k^2)+2ax(1+k^2)]+(1-k^2)(x^2-a^2)^2=0$ quartica

11° $\tan B \tan C = -1$ o $B - C = 90°$. È il 3° caso per $k = -1$

Luogo di A $\alpha^2 - \beta^2 = a^2$ . . . . iperbole equilatera
Luogo di H $x^2 - y^2 = a^2$. . . . . »

12° $\tan B = \operatorname{sen} C$

Luogo di A $\beta^2 + 4a\alpha = 0$ . . . . parabola
Luogo di H $(x^2 - a^2)^2 + 4\,axy^2 = 0$ . . . . . . quartica

13° $\tan 2B = \operatorname{sen} 2C$

Luogo di A $\alpha\beta^2 = \alpha\,(\alpha^2 - a^2)$ . . . . cubica
Luogo di H $xy^2 = a\,(x^2 - a^2)$. . . . . »

14° $\tan B = \operatorname{sen} 2C$

Luogo di A $3\alpha^2 + \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0$ . . . . . ellisse
Luogo di H $(3x - a)\,y^2 + (x - a)^2(x + a) = 0$ cubica

15° $\tan B = -\operatorname{sen} 2C$

Luogo di A $\alpha^2 - \beta^2 - 2a\alpha - 3a^2 = 0$ . . . . . iperbole equilatera
Luogo di H $y^2\,(x - 3a) = (x + a)\,(x - a)^2$ . . cubica

16° $\tan 2B = -\operatorname{sen} 2C$

Luogo di A $\alpha\beta^2 = a\,(a^2 - \alpha^2)$ . . . . cubica
Luogo di H $ay^2 = x\,(a^2 - x^2)$. . . . . »

17° $\tan^2 B + \tan^2 C = k^2$

Luogo di A $2\beta^2\,(\alpha^2 + a^2) = k^2\,(\alpha^2 - a^2)^2$ . . . . quartica
Luogo di H $k^2y^2 - 2x^2 = 2a^2$ . . . . iperbole

(Equilatera per $k^2 = 2$)

Si può anche cercare il luogo geometrico di altri punti notevoli del triangolo. Come le coordinate dell'ortocentro H sono

$$x = \alpha \quad , \quad y = \frac{a^2 - \alpha^2}{\beta} \,. \tag{2}$$

così si trova che quelle del centro del circolo dei nove punti (X, Y) e quelle del punto di Lemoine (ξ, η) sono

$$(3)\qquad x = \frac{\alpha}{2}, \qquad y = \frac{\beta^2 - \alpha^2 + a^2}{4\beta},$$

$$(4)\qquad \xi = \frac{4a^2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 3a^2}, \qquad \eta = \frac{\beta}{2\alpha}\cdot\xi.$$

Si avrà l'equazione del luogo di (x, y), eliminando α, β fra le due equazioni (3) e l'equazione del luogo di A, e similmente quella del luogo di (ξ, η) eliminando α, β fra le due equazioni (4) e l'equazione del luogo di A.

È da notarsi che si ha

$$X = \frac{x}{2} \qquad Y = \frac{a^2 - x^2 + y^2}{4y}$$

Ecco alcuni semplici risultati relativi ai casi precedenti

3°	$4X^2 + 16kY^2(k+1)^2 = a^2$	conica
8°	$4k^2X^2 + 8akY = (k^2 + 4)\,a^2$	parabola
11°	$Y = 0$	asse x
	$(\xi^2 - 2y^2)^2 = a^2(\xi^2 - 4\eta^2)$	quartica.

Osservazione. — Le formole (4) mostrano che, se il vertice A del triangolo ABC di cui la base è fissa descrive il circolo $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, il punto di Lemoine del triangolo ABC descrive un'ellisse.

E.-N. Barisien.

SULLE FIGURE PIANE UGUALI

Nella teoria elementare delle *figure piane uguali* (argomento che viene svolto nel 2° biennio degli Istituti Tecnici) si suole ottenere il *punto unito* (corrispondente a sè stesso) *di due figure piane direttamente uguali* come l'intersezione O, se esiste, degli assi di due segmenti AA′, BB′ condotti tra punti corrispondenti; ora per questo bisognerebbe dimostrare che i due triangoli uguali AOB, A′OB′ lo sono *direttamente*, ciò che non risulta immediatamente da codesta costruzione. Riguardo poi alla *retta unita di due figure piane inversamente uguali*, essa viene ottenuta come congiungente dei punti medî di due segmenti AA′, BB′ condotti tra punti corrispondenti, e questo mediante una dimostrazione certamente non semplicissima.

Quanto ho detto può verificarsi consultando il *Trattato* dei Sannia e D'Ovidio (§ 110 delle ultime edizioni).

Ai miei giovani dell'Istituto tratto queste due questioncine giovandomi di un semplice lemma, che mi permette di dare una dimostrazione completa della prima questione, e di risolvere in modo breve e piano la seconda.

Ne espongo lo svolgimento procedendo sulle traccie dello svolgimento corrispondente che si trova nel *Trattato* dei SANNIA e D'OVIDIO, allo scopo di raccogliere la trattazione nei termini più ristretti, tralasciando quanto ivi è premesso.

LEMMA. — *Due figure piane inversamente uguali aventi un punto unito* (un punto corrispondente a sè stesso) *sono simmetriche rispetto ad una retta che passa per quel punto.*

Sia O un punto unito di due figure inversamente uguali, e siano A, A′ due punti corrispondenti: sarà $OA = OA'$. Si conduca la bisettrice OO_1 dell'angolo AOA, e si rovesci la seconda figura intorno ad OO_1: le due figure divengono direttamente uguali, e di più siccome il segmento OA′ viene a coincidere col segmento corrispondente OA, le due figure verranno a coincidere con tutti i loro punti. Segue da ciò che, se rimettiamo la seconda figura nella posizione primitiva, ogni suo punto B′ determinerà col suo corrispondente B un segmento avente per asse la OO_1; cioè le due figure sono simmetriche rispetto all'asse OO_1.

TEOREMA 1°. — *Due figure piane direttamente uguali hanno, in generale, un punto unito; e le due figure si possono rendere coincidenti rotando una di esse intorno a questo punto nel piano comune.*

Infatti, siano A, B due punti della prima figura, e A′, B′ i corrispondenti punti della seconda: sarà $AB = A'B'$. Dei segmenti AA′, BB′ conduciamo gli assi; escludendo che AA′, BB′ siano paralleli (caso che esamineremo a parte), gli assi di tali segmenti si secheranno in un punto O. Sarà $OA = OA'$, $OB = OB'$; onde i due triangoli AOB, A′OB′ saranno uguali, e lo saranno direttamente, giacchè altrimenti i due triangoli (pel lemma dimostrato) sarebbero simmetrici, e quindi le AA′, BB′ sarebbero parallele, ciò che si è escluso. Dunque se si fa rotare per esempio la seconda figura intorno ad O dell'angolo A′OA in modo che il segmento OA′ venga a coincidere col suo uguale OA, i due triangoli AOB, A′OB′ e le intere due figure direttamente uguali verranno a coincidere con tutti i loro punti.

Scolio 1°. — Sul punto unito O si può notare quanto segue:

1°. Esso è equidistante da due punti corrispondenti qualunque C, C′, e quindi esso è il punto di concorso degli assi dei segmenti come CC′.

2°. Dista egualmente da due rette corrispondenti qualunque, e quindi è il punto di concorso delle bisettrici degli angoli formati da ciascuna retta con la corrispondente presa in direzione opposta.

3°. Gli angoli A′OA, B′OB, C′OC,... risultano uguali tra loro e all'angolo di due direzioni corrispondenti.

4°. Da tale eguaglianza di angoli segue che per O passano tutte le circonferenze individuate da due punti corrispondenti e dal punto di concorso di due rette corrispondenti condotte per essi.

Scolio 2°. — Se i segmenti AB, A′B′ sono paralleli e in direzione opposta, AA′, BB′ risultano le diagonali di un parallelogrammo e il punto O coincide col loro punto medio. L'angolo A′OA risulta in tal caso un angolo piatto.

Scolio 3°. — Nella dimostrazione del teorema si è escluso che AA′, BB′, risultino paralleli. Quando ciò accada, essendo i due segmenti uguali AB, A′B′ compresi tra le rette parallele AA′, BB′, potranno darsi due casi:

1°. I due segmenti AB, A′B′ (o i loro prolungamenti) concorrono in un punto O, vertice dei due triangoli isosceli AOA′, BOB′; allora il punto di concorso O risulta unito ed AOA′ è l'angolo di cui deve rotare una delle figure per coincidere coll'altra.

2°. I due segmenti AB, A'B' sono paralleli e con la medesima direzione (equipollenti): tali risultano due segmenti corrispondenti qualunque, e i segmenti che uniscono due punti corrispondenti sono tutti equipollenti al segmento AA': quindi con la traslazione di una delle figure, per es. la seconda, lungo la A'A, quando A' sarà venuto a coincidere con A, coinciderà anche B' con B, e ciascun punto della seconda figura col suo corrispondente della prima. Manifestamente in tale caso non esistono punti uniti delle due figure.

Teorema 2°. — *Due figure piane inversamente uguali hanno sempre una retta unita; e le due figure si possono, in generale, rendere coincidenti mediante una traslazione e una rotazione secondo detta retta.*

Siano AB, A'B' due rette corrispondenti di due figure inversamente uguali. Escludendo che tali rette siano parallele (caso che esamineremo a parte), essi si secheranno in un punto O. Se O è un punto unito delle due figure, queste (pel lemma dimostrato) sono simmetriche rispetto alla bisettrice OO_1 dell'angolo AOA', e le due figure si rendono coincidenti con una semplice rotazione di una di esse intorno all'asse di simmetria (retta unita). Se invece il punto d'incontro delle AB, A'B' non è punto unito delle due figure, considerato come punto O della prima, avrà per corrispondente un punto O' della A'B', e considerato come punto P' della seconda, avrà per corrispondente un punto P della AB. Sarà OP = O'P', e i punti medî M, M' di questi segmenti saranno punti corrispondenti. Conducasi la retta MM': con la traslazione di una delle due figure, per es. della seconda, lungo la M'M fino a che M' venga a coincidere con M, le due figure inversamante uguali avranno, nella nuova posizione, il punto unito M, e saranno quindi simmetriche rispetto alla retta MM', che è bisettrice di due direzioni corrispondenti: perciò le due figure verranno a coincidere rotando una di esse intorno alla MM'. La retta MM', che è unita rispetto alle due figure simmetriche, sarà pure unita rispetto alle due figure considerate nella posizione primitiva.

Scolio 1°. — Circa alla retta MM' si può notare quanto segue:

1°. Essa passa per i punti medi dei segmenti condotti tra punti corrispondenti. Invero, siano A_1, A'_1 le proiezioni di A, A' sulla MM': quando le due figure sono rese simmetriche nel modo anzidetto, A'_1 coincide con A', e quindi sarà $AA_1 = A'A'_1$, da cui si deduce facilmente che la MM' taglia il segmento AA' nel suo punto medio. E si deduce ancora che la MM' ha distanze uguali ed opposte da due punti corrispondenti.

2°. La MM' fa con due direzioni corrispondenti qualunque angoli uguali, in modo da riuscire parallela alla bisettrice dell'angolo delle due direzioni corrispondenti.

Scolio 2°. — Nella dimostrazione del teorema si è escluso che le due rette corrispondenti AB, A'B' siano parallele. Se ciò accade potranno darsi due casi:

1°. Le due parallele AB, A'B' hanno stessa direzione. Allora la retta unita è la retta che biseca la striscia delle AB, A'B.

2°. Le due parallele AB, A'B' hanno direzione opposta. In tal caso la retta unita si ottiene conducendo pel punto d'incontro delle AA', BB' la perpendicolare alle AB, A'B'.

In entrambi questi due casi la retta unita ha le proprietà del caso generale; solamente è diverso il modo di costruirla partendosi da due rette corrispondenti speciali.

Macerata, gennaio 1900.

E. Maccaferri.

SUI NODI DELLE GEODETICHE DEL CONO

Com'è noto, per una superficie si chiama geodetica quella linea che tiene lo stesso ufficio (entro certi limiti) della retta nel piano. Per un'estesa classe di superficie, dette sviluppabili per la proprietà che hanno di potersi distendere su di un piano, si può ottenere una geodetica mediante la traccia lasciata su queste da una qualunque retta di questo piano. Limitandomi nel presente articolo a una speciale superficie di questa classe, il cono, mi propongo di far conoscere una notevole proprietà delle geodetiche di questa superficie espressa dal seguente

TEOREMA. — *Ogni geodetica di un dato cono presenta nel suo percorso un numero finito di nodi tutti reali.*

In un piano π siano dati una retta g e un punto V fuori di essa. Si abbassi da V la perpendicolare VP_0 a g e da una parte e dall'altra di VP_0, col vertice in V si costruiscano due angoli $P_0\widehat{V}P_1$, $P_0\widehat{V}P'_1$ eguali ad un angolo dato α, che si supporrà minore o tutt'al più eguale a $\frac{\pi}{2}$. Se poi α è minore od eguale a $\frac{\pi}{4}$, sempre col vertice in V si costruiscano sui lati VP_1, VP'_1 due altri angoli $P_1\widehat{V}P_2$, $P'_1\widehat{V}P'_2$ ancora eguali ad α, e così si proceda nella doppia operazione fino a che, se α è minore o tutt'al più eguale a $\frac{\pi}{2n}$, si sia pervenuti agli angoli $P_{2n-3}\widehat{V}P_{2n-2}$, $P'_{2n-3}\widehat{V}P'_{2n-2}$, non escludendo il caso che i lati $VP_{2n-2}\,VP'_{2n-2}$ possano coincidere rispettivamente coi raggi VA, VA' determinanti la parallela a g passante per V; nel qual caso i punti P_{2n-2} e P'_{2n-2} coinciderebbero col punto all'infinito P_∞ di g.

Immaginiamo ora un cono (per semplicità lo supporremo circolare) che spiegato sul piano dia luogo ad un angolo di ampiezza 2α. Collochiamo questo cono sul piano π in modo che il vertice venga a cadere su V e che VP_0 sia la generatrice di contatto. Facendo rotolare questo cono su π senza strisciare, una prima volta da una banda di VP_0, una seconda dall'altra banda, la traccia di g su di esso sarà una geodetica. In questo rotolamento è chiaro che $VP_2, VP_4 \ldots VP'_2, VP'_4 \ldots$ sono le posizioni assunte dalla generatrice di contatto iniziale, mentre $VP_1\, VP_3 \ldots VP'_1\, VP'_3 \ldots$ sono quelle assunte dalla generatrice *opposte*. A causa delle eguaglianze $VP_i = VP'_i$ ($i = 1, 2, 3 \ldots 2n-2$) ai punti P_1, P'_1 corrisponderà sulla geodetica un unico punto N_1, ai punti $P_2\,P'_2$ corrisponderà un altro punto N_2 e così via. Questi punti, in numero finito poichè corrispondenti ai punti $P_1\,P_2 \ldots$ manifestamente in numero finito, sono tali che per ciascuno d'essi la geodetica passa due volte e due soltanto. Essi sono dunque veri e propri *nodi.*

Ne concludiamo che una geodetica qualsivoglia di un cono di ampiezza 2α (minore o tutt'al più uguale a 180°), presenta nel suo percorso dei nodi in numero finito e tutti reali. Il loro numero h è dato da $E(90 : \alpha)$ cioè dal massimo intero contenuto nel quoziente $90 : \alpha$. Quando α sia summultiplo di 90° in questo numero va compreso l'ultimo nodo che allora si allontana fino a distanza infinita. Se α è più grande di 90° non vi ha alcun nodo: ciò risulta subito geometricamente come anche dalla formula trovata, che è quindi generale.

Aggiungiamo da ultimo:

Se una curva piana di ordine m simmetrica rispetto ad un asse si avvolge sopra un cono di ampiezza 2α in modo che il vertice si trovi sull'asse di simmetria, essa presenta nel suo cammino $m.\,E(90:\alpha)$ nodi computando anche quelli immaginari.

ENRICO PICCIOLI.

A PROPOSITO DELLA QUESTIONE 493

Il secondo integrale ha il numeratore che si annulla per $\operatorname{sen} x=1$ e $\cos x=1$, e quindi è divisibile per il prodotto $(1-\operatorname{sen} x)(1-\cos x)=1-\operatorname{sen} x-\cos x+\operatorname{sen} x \cos x$. Effettuando la divisione si trova $2+\operatorname{sen} x+\cos x$ per quoziente.

Il denominatore $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ diviso per lo stesso prodotto dà per quoziente

$$(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x).$$

Il secondo e terzo integrale sono dunque identici e si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\operatorname{sen}^3 x-\cos^3 x)\,dx}{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} x+\cos x+2)\,dx}{(1+\operatorname{sen} x)(1+\cos x)}=2.$$

E.-N. BARISIEN.

N. B. — Anche il prof. Ugo Fornari e il sig. Giuseppe Marletta inviarono la risoluzione della quistione 493, rilevando che i secondi membri delle ultime due equazioni devono essere 2 e non $^1/_2$.

Il sig. Valentino Golisciani inviò anche la risoluzione della quistione 488.

CORRISPONDENZA

L'articolo del sig. prof. M. CHINI (v. *Periodico di Matematica*, fasc. V, 1900, pagg. 199-200) è giusto per il caso generale. Credo che il mio procedimento sia migliore, se nella ricerca d'un'area, si voglia trovare rapidamente (abbiasi o no sotto mano un *ripetitorio* e un *formulario*) certi integrali, come $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ o $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. Il mio procedimento non è certamente *acutissimo*, ma lo credo *pratico* e per questo sarà più utile per gli allievi che per i professori.

E.-N. BARISIEN.

A proposito della recensione della *Geometria* di GÉRARD e NIEWENGLOWSKI pubblicata nel numero precedente il sig. Gérard ci scrive „ vi sarò estremamente „ riconoscente se vorrete segnalare una dimenticanza; cioè che lo scopo principale „ che ci siamo proposti scrivendo la nostra *Geometria* è d'introdurre sistematica- „ mente e *fin dal principio* la nozione di senso per i segmenti, angoli, ecc., in tutte „ le quistioni nelle quali questa nozione può intervenire utilmente „.

G. LAZZERI.

RISOLUZIONI DELLE QUISTIONI 341*, 483, 486, 492, 498, 499

341*. *Due triangoli coi lati rispettivamente paralleli sono interni l'uno all'altro, e volti nello stesso senso. Prolungando i lati dello interno si hanno tre parallelogrammi* x, y, z *e tre trapezi* t, t', t''.

Determinare x, y, z *in funzione* t, t', t'' *e del triangolo interno* T.

ALASIA.

Risoluzione del Prof. Barozzini.

Sia il triangolo interno ABC; x, y, z i *pgr*, che hanno rispettivamente un vertice in A, B, C; t, t', t'' i trapezi che hanno per lati BC, CA, AB; inoltre AR lato comune ad x e t''.

I triangoli $T + t'$ e T sono simili, quindi per nota proprietà:

$$DR : BA = \sqrt{T + t} : \sqrt{T}$$

da cui dividendo:

e similmente
$$\left.\begin{aligned} AR : BA &= \sqrt{T + t} - \sqrt{T} : \sqrt{T} \\ AS : C'A &= \sqrt{T + t'} - \sqrt{T} : \sqrt{T} \end{aligned}\right\} (1)$$

Ricavo dalle (1) i valori di AR, AS li sostituisco nella $x = AR \,.\, AS \operatorname{sen} A$ e tenendo conto della $T = \frac{1}{2} AB,\, AC \operatorname{sen} A$, ottengo:

$$x = 2\left[\sqrt{T + t'} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T + t''} - \sqrt{T}\right].$$

così
$$y = 2\left[\sqrt{T + t''} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T + t} - \sqrt{T}\right].$$
$$z = 2\left[\sqrt{T + t} - \sqrt{T}\right]\left[\sqrt{T + t'} - \sqrt{T}\right].$$

483. *Se le linee* $\varphi = \text{cost.}^e$ *sono geodetiche di una superficie il cui elemento lineare è* $\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$, *si ha:*

$$\Delta_2 \varphi + \frac{1}{\Delta}\left(G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\Delta_1 \varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\Delta_1 \varphi} = 0$$

dove $\Delta = EG - F^2$ *e* Δ_1, Δ_2 *sono rispettivamente i parametri differenziali primo e secondo.*

Supponendo che le φ *sieno geodeticamente parallele, si deduce* $\Delta_2 \varphi = 0$.

G. CARDOSO-LAYNES.

Risoluzione del sig. Gragnani.

Se $\varphi\,(uv) = \text{cost}^e$ è l'equazione di un sistema di linee tracciate sulla superficie in cui è $ds^2 = E du^2 + 2F d\,u dv + G dv^2$, abbiamo per la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_\varphi}$ di queste linee

$$-\frac{1}{\rho_\varphi} = \Delta_2 \varphi + \sqrt{\Delta_1 \varphi}\; \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right) \qquad (1)$$

dove $\Delta_1, \nabla, \Delta_2$ rappresentano rispettivamente i parametri differenziali, primo, misto e secondo. Abbiamo inoltre essendo $\Delta = EG - F^2$

$$\nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}} + \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{\Delta_1\varphi}}$$

che sostituita nella (1) da:

$$-\frac{1}{\rho\varphi} = \Delta_2\varphi + \frac{1}{\Delta}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} + \frac{1}{\Delta}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} \quad (2)$$

Se le $\varphi = \text{cost.}^e$ sono geodetiche $\frac{1}{\rho\varphi} = 0$ e se inoltre esse sono geodeticamente parallele dovendo essere $\varphi(u, v)$ un integrale dell'equazione $\Delta_1\varphi = 1$, ne viene $\frac{\partial}{\partial u}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = \frac{\partial}{\partial v}\log\sqrt{\Delta_1\varphi} = 0$ e dalla (2)

$$\Delta_2\varphi = 0$$

come si voleva.

φ è l'arco delle geodetiche ortogonali contato a partire da una linea fissa $\varphi = \varphi_0$, e le $\varphi = \text{cost.}^e$ insieme alle loro traiettorie ortogonali formano un sistema isotermo.

486. *Trovare l'inviluppo del sistema d'iperbole*

$$y^2(1 + 4a^4) + 4a^2xy - 4a^2x - 8a^4y + 4a^4 = 0.$$

PESCI.

Risoluzione del sig. Comandante Barisien di Costantinopoli e del sig. V. Golisciani, studente della R. U. di Napoli.

Questa equazione ordinata rispetto ad a^2 si può scrivere

$$4a^4(y-1)^2 + 4a^2x(y-1) + y^2 = 0.$$

La condizione affinchè i due valori di a^2 sieno eguali è

$$x^2(y-1)^2 - y^2(y-1)^2 = 0$$

ossia

$$(x-y)(x+y)(y-1)^2 = 0.$$

L'inviluppo si compone dunque delle due rette $(x - y) = 0$, $x + y = 0$ bisettrici degli angoli degli assi e dell'asintoto $y - 1 = 0$ dell'iperbole, contato due volte.

Altre risoluzioni dei Proff. Retali e Santorelli.

492. *Sia F un fuoco di una ellisse e M un punto variabile di questa curva. Si descrive il cerchio di centro M e raggio MF. Il luogo delle estremità del diametro di questo cerchio, perpendicolare ad MF è una curva la cui area è doppia di quella dell'ellisse.*

BARISIEN.

Risoluzione del Prof. Retali.

Il teorema vale anche quando invece dell'ellisse e un suo fuoco, si considera una curva chiusa qualunque e un punto arbitrario del suo piano: Se ρ, θ sono le coordinate polari di un punto variabile M della curva data, quelle del punto corrispondente della trasformata sono evidentemente

$$\rho' = \rho\sqrt{2}, \quad \theta' = \theta \pm \frac{\pi}{4}$$

dunque

$$\rho'^2 . d\theta' = 2\rho^2 . d\theta$$

e il teorema è dimostrato.

498. *Per* a *ed* n *interi e positivi si ha*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots}{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots} = -1,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots}{(a+1)^{n-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots}{(a+1)^{n-1}} = \frac{a+1}{2}.$$

A. B.

Risoluzione del sig. Angelo Pensa.

Poichè a è intero e positivo, ponendo $\frac{a-1}{a+1} = \varepsilon$, sarà $\varepsilon < 1$.

Allora, per n intero e positivo

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots} = \lim_{n=\infty} \frac{(a+1)^n + (a-1)^n}{(a+1)^n - (a-1)^n} = \lim_{n=\infty} \frac{1+\varepsilon^n}{1-\varepsilon^n} = 1.$$

Si ha poi

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots}{(a+1)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots}{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots} \cdot \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots}{(a+1)^{n-1}}$$

e tenendo conto del risultato precedente

$$\lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{0} a^{n} + \binom{n}{2} a^{n-2} + \binom{n}{4} a^{n-4} + \ldots}{(a+1)^{n+1}} = \lim_{n=\infty} \frac{\binom{n}{1} a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \binom{n}{5} a^{n-5} + \ldots}{(a+1)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \frac{(a+1)^n - (a-1)^n}{(a+1)^{n-1}} = \frac{1}{2}(a+1) - \frac{1}{2} \lim_{n=\infty} \varepsilon^n = \frac{1}{2}(a+1).$$

c. v. d.

Altra risoluzione del sig. F. Sibirani.

499. *Sia* C *una curva piana riferita ad un sistema cartesiano* OX, OY *ed* M *un suo punto variabile. Si riporti sulla perpendicolare condotta da* M *all'asse* x, *a partire da* M *e nei due sensi, il segmento* OM *e sieno* MP *ed* MQ *tali segmenti; i punti* P *e* Q *descrivono una curva* C'; *si studi la trasformazione* (C, C') *e si dimostri in particolare che:*

1° *se* C *è una retta,* C' *è, in generale, un'*iperbole equilatera.

2° *se* C *è un circolo di centro* O, C' *si compone di due circoli.*

3° *se* C *è un circolo tangente all'asse* x *in* O, C' *è un* trifolium retto.

4° *se* C *è un circolo tangente all'asse* y *in* O, C' *è un* folium doppio.

5° *se* C *è una* strofoide retta *col vertice in* O *e avente per asse l'asse* x, C' *si compone di un circolo e di una* Cissoide di Diocle;

6° *se* C *è una* Cissoide di Diocle *con la cuspide in* O *ed avente* OX *per asse,* C' *è una* quintica bicircolare. *(Si studi tale curva specialmente nell'intorno del suo punto quadruplo).*

7° *se* C *è un* Cappa *che ha il punto doppio in* O (*) *e tale che la tangente in* O *sia l'asse della* x, C' *si compone di due* strofoidi rette.

8° *se* C *è una* kreuzcurva equilatera *che ha per assi* x *e* y, C' *si compone di due inverse di* trifolium retto.

G. Cardoso-Laynes.

Risoluzione del Prof. Retali.

Se ξ, η sono le coordinate di M e x, y quelli di P abbiamo evidentemente $x = \xi$, $y = \eta \pm \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ e da queste $\xi = x$, $\eta = \dfrac{y^2 - x^2}{2y}$. La trasformazione (C, C') è dunque piana doppia quadratica specializzata e, come tale, sebbene sia stata già incontrata dal *Krafft*, (**) dai sigg. *de Longchamps, Brocard* e da altri, (***) può dirsi non ancora studiata completamente. Essa è caso particolare di una trasformazione doppia che io ho studiato altrove: (****) la *conica limite* e la *conica doppia* si riducono ora al punto-circolo O e il *polo*, col quale sono allineate le coppie di punti *congiunti*, è il punto all' infinito Y^∞ dell'asse OY. La trasformazione *congiunta* è una inversione d' Hirst *di seconda specie*, avente per conica dei punti uniti il punto-circolo O e per polo d'inversione Y^∞: la denoteremo con (H). Due punti P e Q che si corrispondono nella (H) sono sopra una stessa parallela ad OY e son visti da O sotto un angolo retto; il centro M del segmento $\overline{PQ}$ è, *nel piano doppio*, il corrispondente di P (e di Q) considerato come punto del *piano semplice*. Reciprocamente, al punto M del piano doppio corrispondono nel piano semplice i due P e Q. È chiaro che due curve *congiunte*, cioè tali che si corrispondono l'una all'altra nella inversione (H), hanno la medesima trasformata sul piano doppio. Una retta arbitraria h del piano doppio è rappresentata nel piano semplice da una conica H^2 tangente in O alla polare di Y^∞ rispetto al punto-circolo O^2; H^2 passa per i due punti imaginari coniugati segnati sopra h dal punto-circolo O^2 ed ha in questi punti le tangenti dirette a Y^∞. (*****) In altre parole H^2 *è la iperbole equilatera normale in* O *all'asse* OY *e avente per centro la proiezione ortogonale di* O *sopra* h. Questo risultato, che del resto è noto, poteva anche dedursi subito dalle formole della trasformazione date sopra. I punti fondamentali del piano semplice sono Y^∞ e i due infinitamente vicini riuniti in O sulla OX. Alle rette del piano semplice corrispondono coniche per Y^∞, bitangenti al punto-circolo O^2 sulle rette medesime, (******) ossia *iperboli con un fuoco in* O *e un assintoto parallelo a* OY. Se N è la proiezione ortogonale di O sulla retta s del piano semplice, la iperbole corrispondente S^2 ha O per fuoco, s per direttrice e $|NY^\infty|$ n'è un assintoto. A parallele ad $|OX|$ corrispondono parabole aventi quelle rette per direttrici ed O per fuoco comune.

Se una curva C, del piano doppio, è pensata come inviluppo di una retta h, la corrispondente C' è l'inviluppo delle iperboli H^2 corrispondenti ad h; i due punti ove H^2 tocca C' sono i due corrispondenti a quello ove C è toccata da h. Le intersezioni di C' con una retta arbitraria s, sono le proiezioni da Y^∞ sopra s delle intersezioni di C con S^2, corrispondente ad s nel piano doppio.

(*) Veramente il *cappa* ha il suo punto doppio all' infinito; O non è punto doppio ma bensì un tacnodo e conta per due punti doppî riuniti in O. V. R.

(**) *Commentarii Ac. Petrop.* T. III, an. 1732, pag. 101-109. *(Consideratio curvarum quarundam altioris generis, quae facile describi possunt.)*

(***) *Le Trifolium* par M. Brocard (*J. M. S.*, an. 1891). In questo lavoro si trovano numerose indicazioni bibliografiche (1874-1889).

(****) "Sopra due particolari trasformazioni ecc." (nelle *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Bologna*, Serie IV, T. X, pag. 653-671, an. 1890).

(*****) Retali, *Mem. cit.*, § 9.

(******) *Ibid.* § 11.

Le tangenti a C' nei punti P e Q (corrispondenti al punto M di C) sono le direttrici corrispondenti al fuoco O delle due iperboli che hanno O per fuoco passano per y^∞ e toccano la curva C in M. Se h è la tangente C in M, indicando con R il punto comune ad h e alla perpendicolare in O a |MO|, la tangente a C' nei punti P e Q sono respettivamente |RP| e |RQ|. Anche la costruzione della tangente nei punti P, Q era stata data dai signori *G. de Longchamps, d'Ocagne* e *Brocard* (*) i quali però, non avendo riconosciuto che si tratta di una trasformazione doppia, la ottengono con considerazioni infinitesimali più o meno semplici. Sarebbe ora facile indicare anche costruzioni per le tangenti che arrivano a C' da un punto dato, per le bitangenti di C' coi loro punti di contatto, per le tangenti stazionarie coi relativi flessi ecc. ma non vogliamo allungar troppo questa nota. Nel caso particolare in cui C è un cerchio passante per O si trova per C' il *trifolium* studiato dal sig. *Brocard* nella Memoria citata sopra, ove sono pure dati i teoremi 1°, 3° e 4° della quistione della quale ora ci occupiamo. (**) Quanto a 2° è evidente anche con la geometria elementare e del resto si ha subito, dalla formola sopra data, per trasformata di $x^2+y^2=r^2$, il pajo di cerchi eguali al dato $x^2+y^2 \pm 2ry=0$.

Veniamo dunque agli ultimi quattro enunciati della quistione:

5°. La strofoide ha per equazione $y^2(2a-x)=(x-a)^2 . x$ e la corrispondente C', cioè la

$$(2a-x)\,\frac{(y^2-x^2)^2}{4x^2}-x\,(x-a)^2=0,$$

si può scrivere nella forma

$$[2ay^2-x\,(x^2+y^2)]\,.\,(x^2+y^2-2ax)=0;$$

C' si spezza dunque nella cissoide retta avente la cuspide in O e per assintoto di inflessione $x=2a$, e nel cerchio di raggio a tangente Oy in O.

6°. Alla cissoide retta $y^2(2a-x)=x^3$ corrisponde

$$2a\,(x^2-y^2)^2=x\,(x^2+y^2)^2$$

cioè una quintica bicircolare avente nell'origine un punto quadruplo con due coincidenze, come il rosone a quattro rami.

7°. Al *cappa* $x^2(x^2+y^2)=a^2y^2$ corrisponde la sestica

$$x^2(x^2+y^2)=a^2(y^2-x^2)^2$$

che si spezza nelle due strofoidi rette simmetriche una dell'altra rispetto a |Oy|, $x\,(x^2+y^2)=\pm\, a\,(y^2-x^2)$, col punto doppio in O e |OX| per asse.

8°. Alla *Kreuzcurve* equilatera $a^2(x^2+y^2)=x^2y^2$ corrisponde

$$a^2(x^2+y^2)^3=x^2(x^2-y^2)^2$$

che si spezza nelle due cubiche $x\,(x^2-y^2)=\pm\, a\,(x^2+y^2)$, inverse rispetto ad O dei *trifolii* retti $x\,(x^2-y^2)=\pm\, a\,(x^2+y^2)^2$.

Le ragioni di queste riduzioni e spezzamenti delle trasformate che ora si presentano come risultati di calcoli semplicissimi, non possono darsi che approfondendo un poco lo studio sintetico della trasformazione doppia, ma non è qui il luogo di farlo.

Altra risoluzione del Prof. Barozzini.

(*) Brocard, *loc. cit.*, pp. 37-39.
(**) *Ibid*, pag. 38; pag. 28 (2°) e pag. 31 (3°).

QUISTIONI PROPOSTE

507. Sieno G e g polo e polare rispetto ad una conica immaginaria ω. Dato un punto P del piano di ω, sia P′ il punto della retta GP che è reciproco di P rispetto ad ω. Trovare la condizione necessaria e sufficiente affinchè una curva ρ del piano di ω sia il luogo di P′ quando P descrive una retta r.

G. MARLETTA.

508. Calcolare i seguenti integrali

$$\int e^{\alpha x} \tan^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \cot^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \tan h^m \beta x \,.\, dx,$$
$$\int e^{\alpha x} \cot h^m \beta x \,.\, dx.$$

G. L.

509. Dimostrare che

$$\int_0^a \frac{x \,.\, \sqrt[4]{x}\, dx}{\sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{x}}} = \frac{35\, \pi a^2}{64}.$$

510. Sia A un punto d'incontro di una parabola colla sua sviluppata. Il rapporto del raggio della curvatura della parabola e della sua sviluppata in questo punto è $\sqrt{6}$.

511. Essendo data la cubica $y^2 = \frac{x^3}{k}$, si consideri il punto A della curva tale che l'ordinata AA′ sia eguale all'ascissa OA′. Siano B il centro di curvatura relativo ad A e B′ la proiezione di B sull'asse x.

1°. Se U designa l'area della cubica compresa fra l'arco OA, l'asse x e l'ordinata AA′, e se U′ rappresenta l'area della sua sviluppata compresa fra l'arco OB, l'asse x e l'ordinata BB′, si ha

$$\frac{U'}{U} = \frac{2768}{63}.$$

2°. Se S′ ed S indicano gli archi OB ed OA, si ha

$$\frac{S'}{S} = \frac{2\,(13\sqrt{13} - 8)}{117\sqrt{13}}.$$

512. Dimostrare che la retta avente per equazione

$$x(1 + t^2)^2 - 2ty = at^2\,(t^2 - 1)$$

inviluppa una cubica, allorchè t varia.

513. Da un punto P della curva d'*Agnesi* $\left(\text{la cui equazione è } y^2 = \frac{a^2 x}{a - x}\right)$ si possono condurre sette normali alla curva. Dimostrare che:

1° la somma delle distanze dei piedi di queste sette normali dall'asse di simmetria della curva è in un rapporto costante col loro prodotto;

2° il luogo del punto P tale che la somma delle inverse dalle distante dei piedi dalla normale dell'asse suddetto sia costante, è una retta.

514. Essendo S, la proiezione del centro di un' iperbole equilatera $xy = k^2$ sulla tangente in un punto M e S' il simmetrico di S rispetto ad M, si dimostri:

1° che l'equazione del luogo di S' riferita agli asintoti è

$$x^{1/6}\, y^{1/6}\, (x^{2/3} + y^{2/3})\, 2k\,;$$

2° che l'area racchiusa fra gli asintoti e la curva è $U = 6k^2$.

E.-N. Barisien.

515. Sia dato un pentagono piano 12345, si conducano le diagonali 13 e 14 e 25, le due prime sieno tagliate dalla terza rispettivamente in 4' e 3', si trovino i due punti che dividono armonicamente i segmenti 24' e 23' e si congiungano con 1, si ripeta la stessa costruzione partendo da ciascuno degli altri quattro vertici del pentagono. I dieci punti così ottenuti appartengono ad una stessa conica toccata dalle dieci rette.

516. Sia dato il triangolo ABC, e sieno A_1, B_1, C_1 ed H i piedi ed il punto d'incontro delle altezze. Sui lati AB ed AC si trovino le due coppie di punti (reali se l'angolo A è acuto, immaginari se ottuso) che sono equidistanti da A e che dividono armonicamente i segmenti BC_1 e CB_1; sulle altezze BB_1 e CC_1 si trovino le due coppie di punti equidistanti rispettivamente da B_1, C'_1 e che dividono armonicamente i segmenti BH e CH. Gli otto punti così ottenuti sono in un cerchio di centro A rispettivamente al quale i poli delle altezze BB_1 e CC_1 sono rispettivamente C e B.

517. Costruite ancora le due prime coppie di punti come nell'esercizio precedente e determinate inoltre sulle altezze BB_1 e CC_1 le coppie di punti equidistanti rispettivamente da B e da C e che dividono armonicamente i segmenti B_1H e C_1H si hanno otto punti che sono un'iperbole equilatera di centro A rispetto alle quali i poli delle altezze BB_1 e CC_1 sono rispettivamente C_1 e B_1.

Valeri.

BIBLIOGRAFIA

Dott.essa Lia Predella (prof.essa nella R. Scuola Normale " G. Milli " di Roma). — *Elementi di Algebra* ad uso della prima classe normale. Ditta Paravia e Comp., 1899.

Fra i libri scolastici che tengono un posto considerevole nella copiosa produzione di questi ultimi anni, vanno certo annoverati gli *Elementi d'Algebra* della signora Lia Predella-Longhi.

È un volumetto scritto per le Scuole Normali e mi sembra riuscito per lo scopo cui tende. Il lavoro è diviso in sette capitoli; i primi sei trattano esclusivamente di nozioni di calcolo letterale fino alle equazioni di 1° grado ad un'incognita — con relativi esercizi; — l'ultimo è riserbato all'estrazione di radice quadrata e cubica.

Lodo, in generale, la sobrietà nella definizione, il loro rigore scientifico, il copioso corredo di esercizi pratici che servono a rendere dilettevole l'insegnamento togliendogli quella rigidezza che giunge facilmente a stancare alunni non avvezzi alle sottili indagini matematiche.

È chiara l'esposizione del concetto di numero negativo.

Non sarebbe stato forse opportuno svilupparlo maggiormente, specie di fronte all'obbiezione che non tutte le grandezze si trovano nei due stati opposti, che richiedono l'introduzione dei numeri negativi?

Le definizioni di somma e sottrazione dei numeri algebrici, nel capitolo 2°, sono poste in modo da eliminare ogni dubbio riguardo ai risultati offerti da queste operazioni e che pur sembrano tanto strani e contradditori ai principianti.

La moltiplicazione dei numeri algebrici è argomento di studio diligente all'A.; e qui si diversifica dai soliti testi, sia nel considerare, in generale, i numeri algebrici frazionari, comprendendo quindi gli interi come caso particolare, sia nell'ovviare alla grande difficoltà che gli inesperti trovano nel moltiplicatore negativo, col riferirsi alla funzione di questo nella moltiplicazione; e vi riesce ottimamente colla scorta di esempi da cui scende luminosamente la nota regola dei segni. Questo metodo è certamente da preferirsi (almeno per scuole come le Normali) a quello che deduce i segni, dalla definizione più lata che, anche in aritmetica, occorre dare di moltiplicazione quando si considera il moltiplicatore frazionario.

Troppo succinta è la parte riguardante il raccoglimento a fattor comune che, per la frequenza del suo uso e per la difficoltà che in esso riscontrano gli alunni, doveva essere più sviluppata e con maggior corredo di esercizii.

La risoluzione algebrica delle equazioni è esposta con chiarezza e brevità; mentre è ampiamente sviluppata l'applicazione alla risoluzione dei problemi.

Il capitolo VII è certamente il più importante e il migliore; la risoluzione algebrica ed aritmetica di problemi presi come tipi fondamentali servono mirabilmente a sviluppare nelle menti dei nostri alunni la superiorità del metodo algebrico di fronte all'aritmetico e a cogliere, nelle questioni, facilmente quel nesso di relazioni che permettono di porre in equazione le condizioni del problema.

Il capitolo VII chiude il lavoro. Ivi sono esposti rigorosamente i principali teoremi sull'estrazione di radice — come preliminari all'estrazione di radice quadrata e cubica. L'A. si astiene (e gliene dò lode) dall'esposizione delle lunghissime regole di estrazione di radice che, se vengono faticosamente imparate dagli alunni, non recano certo un'efficacia reale.

Sono convinto che il presente lavoro potrà essere adottato con grande vantaggio dagli insegnanti delle Scuole Normali; tanto più che l'A. in una nuova ristampa potrà correggere qualche piccola menda — secondo gli avvertimenti degli amici e i suggerimenti della sua esperienza nella scuola.

Alfredo Bassi.

Idem. — *Aritmetica* ad uso della prima e seconda classe normale. Ditta Paravia e Comp., 1899.

Il libro dell'autrice è diviso in cinque capitoli. Dirò partitamente di ciascuno. Nel I capitolo sono dati molto rigorosamente i concetti di numero e di unità intere, le definizioni relative alle " grandezze „ forse troppo sottili per le alunne cui vengono esposte. Secondo me, ad esempio le definizioni 20 e 21 dello stesso capitolo che sono conseguenze del Postulato. " Se di due grandezze A e B, $A > B$ esiste sempre un intero m per cui $Bm > A$ „ (estensione di quello noto d'Archimede sui segmenti) non mi sembrano adatte per alunne non abituate, certo, a sottili indagini matematiche.

Il capitolo II tratta delle quattro operazioni sui numeri interi e frazionari; dimostrazioni fatte con ordine logico, rigorose e chiare — sono ben distinte le operazioni sui numeri interi da quelle sui numeri frazionari.

Riguardo alla definizione del n. 64 " Il prodotto di un numero qualunque per una frazione $\frac{m}{n}$ è il numero che si ottiene formando del numero dato gli $\frac{m}{n}$ „, avrei creduto più opportuno mostrare che questa è una deduzione di un'altra definizione più generale. " Moltiplicare per una frazione significa eseguire sul moltiplicando le stesse operazioni che dall'unità servono a ricavare la frazione moltiplicatore „ definizione che alla mente degli alunni appare subito quale naturale estensione di quella nota sui numeri interi, data la funzione del moltiplicatore.

Il capitolo III tratta della numerazione; il nostro sistema decimale discende chiaramente come caso particolare da un sistema generale di numerazione; il IV sui rapporti e sulle proporzioni fra numeri è forse il migliore per la chiarezza dell'esposizione. Vi è anche un accenno alle equidifferenze. L'A. avrebbe anche fatto bene nell'aggiungere ai rapporti geometrico e aritmetico un breve cenno di quello armonico.

Segue lo studio sui rapporti di grandezze, da cui vengono dedotte con molto rigore scientifico la teoria delle grandezze variabili proporzionali, necessario substrato alla risoluzione delle cosidette regole del tre semplice e composta, diretta e inversa.

Il volumetto è molto ben redatto; copiosi e ben scelti esercizi, chiara risoluzione di alcuni come tipi fondamentali.

Sono convinto che il libro troverà fra gli insegnanti delle Scuole Normali quella fortuna che si merita.

ALFREDO BASSI.

Bibliotheca mathematica. — Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften.

Già da qualche mese era stato annunziato che coll'anno 1900 la *Bibliotheca mathematica*, il piccolo ma interessante giornale di storia delle matematiche pubblicato dal prof. Gustavo Eneström di Stockolma si sarebbe trasformato in un grande giornale edito dal Teubner di Lipsia. È uscito ora il primo fascicolo doppio del 1° volume della terza serie; e se è vero che il buon dì si conosce dal mattino, si può esser sicuri che la *Bibliotheca* prenderà presto un posto importantissimo fra le pubblicazioni scientifiche, e renderà segnalati servigi alla storia della matematica.

Il prof. Eneström nel presentare ai lettori la *Bibliotheca* nella sua nuova e splendida veste, espone lo scopo e il programma di questa pubblicazione, che è in primo luogo quello di dare un forte e vigoroso impulso allo studio della storia delle matematiche, di accogliere tutto ciò che di più interessante in questo campo si fa in tutto il mondo civile. In secondo luogo il giornale tratterà quistioni di metodo e pedagogiche e quistioni di attualità, fra le più importanti delle quali il prof. Eneström cita le seguenti:

una bibliografia matematica generale con continuazione annuale;

un vocabolario matematico;

vari libri da consultare, per es., un manuale biografico-letterario dei matematici viventi coi loro ritratti;

una gazzetta di letteratura matematica internazionale contemporanea;

congressi ed esposizioni matematiche;

classificazione delle scienze matematiche;

terminologia matematica;

insegnamento matematico superiore.

Il giornale è di carattere internazionale, e sino dal primo fascicolo contiene articoli in lingua tedesca, francese, italiana e inglese di Zeuthen, Duhem, Loria, Vivanti, Engel, Lampe, Tannery, Korteweg ed altri. Consterà di 35 o 36 fogli di stampa annuali del formato dei *Mathematische Annalen*, mentre fino ad ora si componeva di circa 8 fogli all'anno di piccolo formato.

Al confratello così trasformato il *Periodico* invia sinceri auguri di prosperità e di gloria.

*Sopra l'articolo del prof. Ingrami, intitolato " Dubbi „(*)

Ai " Dubbi „ sugli *Elementi di Geometria* del prof. VERONESE (vol. I, 2ª ediz.) sollevati dal prof. G. Ingrami nel fasc. IV del *Periodico* sembrerebbe a me non difficile rispondere con opportuni motivi e schiarimenti: ma penso: è prudente il tentarlo, considerando quei dubbi solo come dubbi, dato che chi li muove non è già di quelli che insegnerebbero la Geometria secondo quegli *Elementi*, ma l'autore di altri *Elementi* informati agli stessi metodi, e sopratutto dato l'aere infido e non ancora sgombro da recente bufera? E d'altra parte, posso tacere io che, avendo avuto l'onore di essere chiamato a collaborare, per quanto modestissimamente in quegli *Elementi* avrei forse tutta quanta la colpa di non aver reso fedelmente ed appieno il pensiero dell'autore, e potrei esser stato cagione involontaria delle oscurità e delle incertezze, a cui i " Dubbi „ stessi si riferiscono? Solo quest'ultimo riflesso principalmente mi indusse a rispondere; e ciò farò più brevemente che potrò, al prof. Ingrami; tanto più che egli dice " *non intendo mancare di rispetto all'autore, nè di screditare il suo libro* „. Però chi leggerà queste poche righe badi che qui non si tratta di polemica alcuna, e sopratutto voglia aver la bontà di tener presenti, per gli opportuni confronti, e gli *Elementi* del prof. VERONESE e l'articolo del prof. Ingrami.

***

I dubbi del prof. Ingrami sono raccolti in 17 osservazioni, delle quali solo due o tre includono propriamente un dubbio.

Le osservazioni 1ª, 2ª, 3ª e 4ª si riferiscono al post. della retta, che nella 2ª ediz. degli *Elementi* è il 2°. E precisamente nella 1ª si domanda " *se non si doveva in qualche modo preporre la esistenza del segmento rettilineo* „; nella 2ª si impugna la definizione I di segmenti rettilinei eguali; nella 3ª viene espresso il desiderio che sia soppressa la eguaglianza $a \equiv a$ e si assuma come postulato la legge transitiva della eguaglianza; e nella 4ª poi si muove un dubbio sulla terza parte del postulato della retta, su quella cioè concernente la invertibilità del segmento rettilineo.

È noto che nella 1ª ediz. degli *Elementi*, la quale è proposta per i Licei e per gli Istituti tecnici, l'esistenza di segmenti aventi la proprietà compresa ed indicata dal vocabolo *eguale* era postulata: e questo è il metodo che scientificamente è da preferirsi. Nella 2ª ediz. la quale è destinata ad uso dei Ginnasi (notabene) per la parte I, e ad uso dei Licei per la II, per ragioni didattiche si è creduto opportuno di far precedere al postulato della retta un periodo che sarebbe stato meglio intitolare *dichiarazione*, anzichè definizione, il quale dice: *L'espressione: il segmento rettilineo* a *è eguale al segmento rettilineo* b, *significa che si può stabilire fra i punti di* a *e* b *una corrispondenza univoca e del medesimo ordine, e che ogni proposizione che si può enunciare di* a *o di una sua parte, considerati l'uno e l'altra separata-*

N. B. — Gli articoli segnati con asterisco sono inviati dal Comitato di redazione dell'Associazione MATHESIS.

(*) Il presente scritto venne consegnato alla Presidenza quando si iniziava la stampa del precedente fascicolo; ma per ritardi sopraggiunti nella revisione del Comitato di redazione non potè più trovar posto nel fascicolo stesso.

mente, si può enunciare ecc.; e affinchè il postulato stesso della retta non riuscisse troppo lungo, si è anche posto prima di esso la definizione I ora citata. Di guisa che ciò, che nella 1ª ediz. postulavasi sul conto de' segmenti della retta, nella 2ª si riduce ad ammettere che si sappia cosa significa: *proposizione che si può enunciare di un segmento o di una sua parte;* della qual cosa è pur fatto amplio cenno nell'osservazione emp. precedente, ricorrendo all'oggetto rettilineo della figura. Chi insegna queste cose nella scuola dirà, come lo posso affermare io, che questo modo, mentre in sostanza non differisce da quello seguito nella 1ª ediz. (perchè il postulato sul vocabolo eguale è ricacciato, per così dire, in quello di giudizio che si può fare di un oggetto, ecc.) presenta nella pratica minori difficoltà di quelle che si presenterebbero, e io dico che si presentarono, nel primitivo modo. Aggiungasi che, dovendosi dare, secondo il metodo del prof. Veronese, fra le proprietà della retta anche quelle dell'invertibilità del segmento, qualora si fosse assunto come postulativo anche il significato del vocabolo *eguale,* come vorrebbe il prof. Ingrami, si avrebbe complicata la cosa, intercalando nella subsumzione $AB \equiv BA$ un postulato entro un altro postulato. D'altronde il prof. Ingrami che nel suo libro postula il concetto di segmenti eguali, seguendo il prof. Veronese (v. 1ª ediz., pag. 9-10) ha creduto opportuno, ed ha fatto bene, di far precedere le seguenti parole " *noi diciamo comunemente che due cose sono eguali quando l'una può esser scambiata con l'altra per ogni operazione o giudizio che si voglia fare sopra una di esse, considerata in se; nè troviamo altre parole per chiarire meglio questo concetto derivato per noi dalla pratica* ". Ebbene nella 1ª ediz. che, ripeto, è destinata anche per i ginnasiali, si è posta la definizione I che in sostanza ma in termini meno vaghi, è la dichiarazione che non solo l'Ingrami ma altri autori hanno potuto incolumemente riportare. Mi piace anzi qui trascrivere qualche brano di un articolo recente. (*) " *La relazione* x = y *che si legge:* x *è eguale ad* y *esprime che ogni proprietà di* x *è altresì una proprietà di* y ". E più sotto, traducendo in simboli la proposizione precedente, cioè ponendo:

$$x = y . = : a \varepsilon \mathrm{cls} . x \varepsilon a . \supset_a . y \varepsilon a \tag{1}$$

" *Dalla* (1) *si deduce che:*

$x = x$ (2), $\quad x = y . \supset . y = x$ (3) $\quad x = y . y = z . \supset . x = z$ " (4).

E più sotto ancora: " *La* (1) *esprime la comune idea di eguaglianza intendendosi di regola, nel linguaggio usuale, che gli oggetti* x *ed* y *siano eguali quando ogni proprietà dell'uno è proprietà dell'altro. Però talvolta il termine: ogni: non ha il senso di totalità,* così ad esempio.... ecc. ". Questo, in quanto alla definizione prima. Riguardo poi all'aver collocato questa definizione prima del postulato della retta, e non tra la prima parte e la seconda di detto postulato dissi già che ciò fu fatto per non render troppo lungo il postulato stesso; ed ora aggiungo che ciò consuona con quanto il prof. Veronese scrisse nella prefazione alla 1ª ediz. e cioè che " *come i postulati sono dati quando se ne presenta la necessità, così le definizioni sono date immediatamente prima o più spesso dopo che si è dimostrata l'esistenza delle figure a cui si riferiscono....* ", cosa che si verifica di frequente nei migliori trattati, per maggior semplicità di esposizione. Aggiungasi che ove l'insegnante si trovasse dinnanzi a scolari di Liceo e non credesse opportuno accettare la definizione I può

(*) C. Burali-Forti, " Sui simboli di logica matematica ". *Il Pitagora,* n. 1-2, anno VI.

benissimo incominciare il postulato della retta così: Esiste un sistema lineare di punti che chiamasi retta, tale che: 1ª vi sono in esso segmenti aventi la proprietà espressa del vocabolo eguale, e aventi l'uno per primo, l'altro per secondo estremo,... ecc.; 2ª come prima; 3ª idem. Forse che soltanto gli insegnanti della Geometria del prof. Veronese siano incapaci di fare, ove lo credano giusto, qualche spostamento nel loro testo, senza per questo venir meno al metodo nè al concetto del libro? Io credo di no. Veggasi in proposito la prefazione della 2ª ediz., pag. XI.

Quanto alla inutilità della eguaglianza $a \equiv a$ la quale secondo l'Ingrami " *ha sempre fatto ridere gli scolari* „ via, lasciamo andare. Ciò non è vero; e se essa mancasse del tutto, chiunque avrebbe ragione di rilevarlo. E una volta poi accettata la definizione I di eguaglianza, e dato che $a \equiv b$ e $b \equiv c$ l'Ingrami sa meglio di me che non si deve postulare, ma si deve considerare come teorema la proposizione $a \equiv c$ non solo, ma che la dimostrazione tanto per i segmenti $a\,b\,c$ quanto per le parti $a'\,b'\,c'$ corrispondentisi univocamente e nello stesso ordine, secondo la definizione I è tanto facile che si può tralasciare. Egli è appunto per ciò che nel testo e sotto il modesto titolo di: Osservazione 1ª questa e le altre proprietà evidenti della eguaglianza si sono soltanto enunciate dicendo: dalla definizione I deducesi tosto ecc. (*)

Sulla osservazione 4ª poi riferentesi al post. AB≡BA mi sia concesso di intrattenermi un poco. Il prof. Veronese dopo aver definito il sistema lin. come gruppo di punti dotato di due ordini l'uno inverso dell'altro, come soli ordini possibili, e il segm. AB come una parte del sistema stesso compresa fra due punti A e B aggiunge: il segm. considerato nel verso da A a B si indica con AB, e il segm. inverso con BA. In questo caso dunque, e qui non v'ha dubbio, il segmento è una serie. Orbene, un postulato come quello di AB≡BA non può contenere alcun che di contradditorio, per la ragione che non sono contradditori i concetti di serie eguali e di serie inverse l'una rispetto all'altra. Ad es. il gruppo di lettere ABCDCBA e l'inverso di esso sono due gruppi eguali e anche inversi, conforme la nozione di pag. 3; e la propos. AB≡BA dice in sostanza che i punti del segm. AB e quelli di BA costituiscono due serie eguali ed inverse: nè più nè meno. Si badi che le serie AB e BA per la definizione 1ª sono considerate separatamente cioè indipendentemente dal fatto che una è inversa dell'altra; soltanto all'ordine da A a B della 1ª corrisponde l'ordine da B ad A della 2ª di guisa che ai punti A e B della 1ª corrispondono B ed A della 2ª e ad un punto C della 1ª un punto C′ della 2ª tale che AC≡BC′ e BC≡AC′. Quello che bisogna aver in mente qui si è che il criterio dell'ordine è bensì in un primordiale concetto di eguaglianza fra due figure elemento precipuo, indispensabile; ma il successivo svolgersi della teoria si emancipa grado a grado da esso, cosicchè in fine sono bastevoli per la eguaglianza delle figure la corrispondenza univoca dei punti e l'eguaglianza di taluni elementi corrispondenti soltanto.

***

Le osservazioni 5ª, 6ª e 7ª, sono le meno opportune. Nella 5ª, " *sembra che la definizione di somma sia data solo per segmenti della stessa retta* „ e nella 7ª si dice solo che " *come la definizione di somma dà un modo per costruirla così mi sembra dovrebbe esser per la definizione di resto* „. Via, questo mi sembra un torto massiccio che il collega Ingrami scaglia, senza volerlo, alla capacità degli insegnanti degli *Elementi* del prof. Veronese! Nella 5ª si osserva ancora che il postulato IV

(*) V. Prefazione, pag. XIV-XV.

“sembra che non sia sufficiente perchè non dice se, e come si debba tener conto del verso”; questo dubbio però è sciolto dopo l'osservazione precedentemente fatta sul sistema lineare e suoi ordini; e perchè la somma dei lati di un poligono (non il perimetro che è l'insieme o gruppo dei lati stessi) si ottiene segnando su una retta i segmenti consecutivi e dello stesso verso, eguali ciascuno a ciascuno ai lati del poligono. Ma quello che poi è assolutamente ingiusto si è il dire con la 6ª che la dimostrazione nella quale da:

$$a \equiv LM \qquad b \equiv MN \qquad c \equiv NP$$

si trae successivamente:

$$a + b \equiv LM + MN \equiv LN \qquad b + c \equiv MN + NP \equiv MP$$
$$a+(b + c) \equiv LM + MP \equiv LP \qquad (a+b) + c \equiv LN + NP \equiv LP$$

“non è convincente, perchè basata sulla visione della figura”. Le pare, egregio collega?! Ma tiriamo innanzi.

*
* *

La vicinanza della definizione di figura rettilinea di tre punti e di quella di triangolo ha motivato senza dubbio l'osservazione 8ª *“il triangolo come è definito al n. 13 non sembra una figura rettilinea secondo la definizione precedente”* non che la 16ª. Il poligono di pag. 64 del libro del prof. Veronese come il triangolo di pag. 21 non sono la figura rettilinea dei vertici, e nemmeno il perimetro, ma la figura determinata da più punti e dai segmenti che uniscono questi punti in un determinato ordine ecc. Tutti poi sappiamo che spesso col vocabolo poligono o triangolo si intende anche la figura rettilinea determinata dai vertici, nella stessa guisa che col vocabolo cerchio designamo anche la circonferenza, quando, ben inteso, non vi sia pericolo di equivoco. Queste e simili avvertenze le saprà fare nella sua scuola il sagace insegnante; speriamo.

*
* *

L'osservazione 9ª vorrebbe che la definizione di figure eguali fosse *più chiarita*, e aggiungerebbe per la dimostrazione del teorema 1° susseguente, quanto segue: *“La retta è figura rettilinea, così deve essere ogni figura F′ ad essa eguale (perchè la corrispondenza di eguaglianza è definita fra due figure rettilinee e non rettilinee) quindi A′C′ appartiene ad F′ ed al punto B di AC (e di F) deve corrispondere un punto B′ di A′C′ (e di F′) quindi non un altro B′ per la corrispondenza univoca, ecc.”* il che non mi sembra più chiaro del testo.

*
* *

Quanto all'osservazione 10ª sulla coppia di rette, rispetto alla quale *“la fig. del n. 16 ed una frase del post. V farebbero credere che a determinare la coppia di rette ci entri anche il loro verso”* rispondo negativamente, perchè secondo il prof. Veronese la coppia di rette è una figura in cui l'elemento è la retta, come la coppia di spazi a tre dimensioni ha per elemento lo spazio a tre dimensioni. Nel testo si ha la coppia di rette, come figura determinata da due rette, senz'altro; poi si ha quella di due raggi cioè di due rette limitate ad un punto comune; e quando si dice che la coppia di rette (ab) è inversa della coppia (ba) si vuol tener conto dell'ordine in cui si seguono le due rette nella costruzione della figura rettilinea determinata dalle due rette stesse. In ciò non vi è dunque nulla di oscuro. Nel postulato V invece è detto esplicitamente che le rette della coppia sono considerate ciascuna in un determinato verso; ed anche in ciò non vi è nulla di contraddittorio con quanto sta prima.

***

Per quanto poi io abbia diligentemente cercato, non sono mai riuscito a persuadermi che, come dice la osservazione 11ª " *nel corollario del n. 16, nel teorema 17 ed altrove si applica il principio: in due coppie eguali di rette sono corrispondenti le rette che le determinano* „. Al n. 16 certamente no, perchè ivi si dice solo che le coppie di raggi (ab) e (ba) sono due figure corrispondenti, nelle coppie (rs) ed (sr) del postulato V; lo che è esattissimo. E quanto al n. 17 ivi si dice solo che essendo $(rs) \equiv (sr)$, ed essendo $aa'bb'$ raggi di (rs) ed inoltre $b'b\,a'a$ raggi corrispondenti di (sr), alla figura determinata dalla coppia di raggi a e b in (rs) corrisponde in (sr) quella determinata dai raggi $b'a'$; donde ecc.

***

Circa l'osservazione 13ª la conclusione del teorema I, 23 è esattissima, perchè i due angoli ad es. γ ed α' della fig. 60 sono figure corrispondenti in figure opposte rispetto al punto O, dal momento che ad ogni raggio di γ corrisponde un raggio opposto dell'angolo α' rispetto ad O; da cui appunto $\gamma \equiv \alpha'$ per il teorema III, 18. E quanto al teorema del n. 24 l' Ingrami non ha forse osservato che *nella corrispondenza di eguaglianza dei due semipiani di vertice* M, *e aventi per lati i raggi della retta* MP *gli angoli* AMP *e* BMP *sono figure corrispondenti;* forse sarà opportuno aggiungere alla terz' ultima riga di pag. 49 e dopo la parola *quindi*, le parole qui sottolineate: questo, a schiarimento della osservazione 14ª.

***

Sulla osservazione 12ª circa la dimostrazione del Lemma: Se due coppie di raggi con vertice sono eguali, gli angoli determinati dai loro lati sono eguali, la quale il prof. Ingrami dice " *che vale solo per gli angoli convessi* „ non ostante le ultime righe che si leggono dopo la definizione II a pag. 35, e che la eguaglianza di due angoli concavi sia ovvia ed elementar conseguenza di quella degli angoli convessi che da quelli sono determinati, non mi fermerò anche per non dilungarmi troppo. Come pure non mi fermerò sulla osservazione 17ª la quale l' Ingrami stesso dice essere di minor conto. Solo non lascio passare inosservato che a riguardo del post. I il quale secondo l' Ingrami non dice nulla quanto al numero dei punti da ammettere, si può stare in proposito tranquillissimi non essendo ciò affatto necessario; anzi la subsumzione aggiunta dal prof. Ingrami nei suoi *Elementi* al post. del prof. Veronese di *infiniti* punti è affatto superflua, oltre che oscura.

***

Per la parte didattica che mi concerne, circa gli *Elementi*, io non ho qui altro da dire. Solo aggiungerò a mo' di chiusa una esclamazione — che non è mia, ma del collega Ingrami — ed una interrogazione. La esclamazione dice: " *chi scrive un libro elementare ha da invocare per il giudizio le circostanze attenuanti... perchè il libro dovrebbe soddisfare lo scienziato, l' insegnante, lo scolaro, i programmi... e gli altri colleghi per il coordinamento....; e non sembra cosa molto facile* „. Proprio così!

E la interrogazione, fatta in aria, s'intende, è questa: *Quando avverrà che sopra lo stesso argomento (poniamo ad es. sulla retta, il piano e le figure piane eguali, sulle figure simili, ecc.) o meglio su tutto l'organismo della Geometria elementare razionale verrà alla luce uno studio critico comparativo degli Elementi di Geometria, fatto, si intende, da persone competenti, senza partito preso, e possibilmente non autori di libro analogo?* (*)

Padova, febbraio 1900.

P. GAZZANIGA.

---

*DA GIORNALI E RIVISTE

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Tomo LIX, serie VIII, tomo II, disp. 1-3 (1898-1900). — *A. Dall'Acqua*, Ricerche sulle congruenze di curve in una varietà qualunque di tre dimensioni.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere.

Serie II, vol. XXXII, fasc. 19-20, vol. XXXIII, fasc. 1°. — *E. Veneroni*, Aggiunta alla Nota " Sopra i complessi del 3° grado costituiti da fasci di rette ". — *C. Severini*, Sull'integrazione approssimata di un'equazione a derivate parziali lineare.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino.

Serie II, tomo XLIX. — *T. Levi-Civita*, Tipi di potenziali che si possono far dipendere da due sole coordinate. — *M. Pieri*, Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo; monografia del punto e del moto.

Il Pitagora, diretto da *G. Fazzari.*

Anno VI (1900), fasc. 3-4. — Problemi dei ponti di Koenigsberg. — *C. Burali-Forti*, Quistioni a concorso. — Sulla divisione aritmetica. — *D. Gambioli*, Nota su alcune quistioni di massimo e minimo (continua). — Dimostrazione del teorema relativo alla perpendicolare ad un piano. — Un passo des Lalitavistara. — Di un esagono particolare. — Platone. — *G. Riboni*, Su un triangolo notevole. — Costruzione della media proporzionale fra due segmenti.

Fasc. 5-6. — *C. Burali-Forti*, Sui simboli di Logica matematica. — *R. Bettazzi*, I numeri limiti. — Il giuoco Pitagora. — *D. Gambioli*, Note su alcune questioni di massimo e minimo (continua). — *G. Riboni*, Relazione sui lavori presentati nel concorso bandito dal Pitagora per l'anno 1899. — *G. Pelliccetti*, Risoluzione di questioni. — Eugenio Beltrami.

Il Bollettino di matematiche e di scienze fisiche e naturali, diretto da *A. Conti.*

Fasc. 7°. — *Minio*, Sull'insegnamento delle " nozioni varie " nelle scuole elementari. — *Bisson-Minio*, Osservazioni sulle regole pratiche per le quattro operazioni fondamentali dell'aritmetica. — *Scoto*, Rivista storica (continuaz.) — Rivista bibliografica.

(*) A questo indirizzo si avvicina lo scritto, uscito di recente, del prof. dott. H. THIEME dal titolo: *Die Umgestaltung der Elem. Geometrie* (Beilage zum Jahresbericht der K. Berger-Gymnasiums und der Berger-Oberrealschule zu Posen) dove l'A. dopo un esame del libro *Elementi* del VERONESE (1a ediz.) e di altri autori, conchiude " *Als Ganzes wie im einzelnen stellt jedenfalls die Arbeit Veronese's seinen Vongängen gegenüber einen wesentichlen Fortschritt dar* ": e raccomanda come necessario lo studio degli *Elementi* del VERONESE agli insegnanti tedeschi.

Fasc. 8°. — *Enriques*, **Sul preteso raddrizzamento dalle immagini nella visione.**— *Buzzi*, La genesi del calcolo numerale attraverso l'evoluzione (continuaz.) — *Ciamberlini*, Un'osservazione sull'insegnamento dell'aritmetica nella II classe elementare. — *Scoto*, Approfittando dell'esercizio di calcolo mentale in V classe elementare. — *Conti*, Fine di una polemica. — Rubrica Intermediario. — Ricreazione scientifica. — (Sulla copertina): Spigolature (da un articolo del prof. Bettazzi).

Fasc. 9°. — *Manaira*, Due parole intorno ai problemi di aritmetica (continua).— *Pitoni*, Isocronismo delle piccole oscillazioni. — *Ciamberlini*, Sull'insegnamento delle frazioni ordinarie nelle scuole elementari. — *Genovesi*, Nomenclatura dei termini della sottrazione.— Rivista bibliografica.— Rubrica didattica.— Corrispondenza.

Fasc. 10°. — *Conti*, Forme da evitarsi nell'insegnamento dell'aritmetica e della geometria (continuaz.) — *Del Chicca*, Sull'insegnamento delle " nozioni varie „ nelle scuole elementari. — *Manaira*, Due parole intorno ai problemi di aritmetica (continuaz. e fine). — Rivista bibliografica. — (Sulla copertina): Spigolature.

The Mathematical Gazette.

Vol. I, fasc. 19° (febbraio 1900.) — *C. A. Scott*, Sulla " Géométrie der Lage „ di Staudt, breve esposizione del sistema di Staudt. — Rivista. — Piccola nota.

Fasc. 20° (marzo 1900.) — *C. A. Scott*, Sulla " Géométrie der Lage „ di Staudt. — *T. J. I'a Bromwich*, Esempi di porismi trigonometrici. — Rivista. — Piccola nota.

(R. B.)

Mathèsis, recueil mathématique etc., par MM. *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Gand, A. Hoste, éditeur.

Fasc. 8° (agosto-settembre). — Necrologia (Félix Dange). — *G. Fontené*, Costruzione del poligono di 17 lati. — *L. Ripert*, Sulle trasformazioni quadratiche involutorie. — *Deguelдre*, Sopra due fasci di coniche. — Bibliografia. — *Stuyvaert*, Note matematiche (sopra alcune identità; applicazione del binomio di Newton; inscrizione del pentagono regolare). Risoluzione di quistioni proposte; 910(*) (*Meurice*), 932 (*Neuberg*); 1065, 1208 (*J. Déprez*); 1209 (*Barisien* e *Retali*); 1210 (*Gérard, Déprez, Emmerich, Rose*); 1211 (*Gérard* e *Retali*); 1212, 1213 (*Retali* e *Orlando*). — Quistioni d'esame 898-906 (la 900 è del prof. *Lazzeri*).— Quistioni proposte 1231-1238.

Fasc. 9° (ottobre). — *Ripert*, Sulle trasformazioni ecc. (seguito e fine). — *H. Mandart*, Sul prodotto degli *n* primi numeri. — *Barisien*, Sui triangoli inscritti in un'ellisse e circoscritti a un cerchio concentrico. — Concorso generale del 1899 (*Ploumen*). — Bibliografia — Risoluzione di quistioni proposte 1089, 1091, 1193 (*R. Buysens*); 1202(**) (*Déprez, Soons, Emmerich, Van Dorsten, Deguelдre*); 1203 (*Emmerich*); 1222 (*E. Cesàro*). — Quistioni di esame 907-909. — Quistioni proposte 1239-1242.

Fasc. 10° (novembre). — *E. Barbette*, Metodo per la scomposizione dei grandi numeri in fattori primi. — *V. Retali*, Sulla trasformazione pseudo-newtoniana. — *E. Barisien*, Sui triangoli che sono inscritti ecc. (continuaz.) — *Déprez*, Sulla quistione di geometria analitica; concorso generale 1899. — Risoluzione di quistioni proposte: 1013 e 1226 (*Buysens*); 1084 (*Droz-Farny*); 1086 (*Cristesco* e *Droz-Farny*); 1087 (*Déprez*); 1178, 1223. — Quistioni d'esame 910-915. — Quistioni proposte 1243-1246.

Fasc. 11° (decembre). — *De Tilly*, Sopra la somma degli angoli in un triangolo (ammesso che la somma degli angoli d'un triangolo tenda verso due retti

(*) Una costruzione assai più semplice di quelle indicate dall'A. è la seguente: condotta la mediana BD e la parallela BE ad AC, *le tangenti alle due curve nei punti corrispondenti* M *ed* M' *si segano sulla polare di* A *rispetto all'angolo* DBE. (V. R.)

(**) Gli A. delle soluzioni non sembra abbiano rimarcato che il problema dipende da una trasformazione piana doppia speciale per la quale la conica doppia e la conica limite degenerano in un medesimo cerchio infinitesimo: si trova allora subito geometricamente che il luogo si compone di due coniche aventi un fuoco comune in F', *le quali toccano in* F *la perpendicolare a* |F'F| *e si segano sulla direttrice dell'elisse data relativa al fuoco* F. (V. R.)

quando l'area del triangolo tende comunque verso zero, l'A. dimostra i due teoremi seguenti: 1°. Se due triangoli sono equivalenti essi hanno la stessa somma degli angoli; 2° lo eccesso angolare di un triangolo (eccesso positivo nullo o negativo della somma dei suoi angoli sopra due retti) è proporzionale alla sua area). — *Moreau*, Frazioni decimali periodiche ottenute senza divisione. — *Barisien*, Sui triangoli che sono inscritti ecc. (continuaz.) — Bibliografia. — Risoluzione di quistioni proposte: 1109, 1182 (*Merlin*); 1218 (*Gérard*). — Quistioni d'esame 916-921. — Quistioni proposte 1246-1250. — Tavola delle materie.

El Progreso matematico, Revista de matematicas puras y aplicadas; Director *D. Z. G. De Galdeano*; Zaragoza.

T. I_2, 1899, fasc. 2° (giugno). — *J. Durán-Loriga,* Sui circoli notev. del triang. (Mem. presentata al congresso di Nantes dell'A. F. in continuazione alle " Notes de Géometrie „ Congr. di Saint-Etienne, 1897). — *J. Rius y Casas,* Relazione formale fra due oggetti, la loro sintesi e i tre oggetti reciproci. — *Z. G. de G.*, La Matematica e il suo insegnamento. — *De Galdeano,* La moderna organizzazione della matematica (estratto della 2ª conferenza tenuta dall'A. nell'università di Madrid). — Bibliografia. — Cronaca (programma di premi pel concorso del 1900 bandito dalla R. Acc. delle scienze di Madrid). — Quistioni risolute: 256 (*V. Retali*); 162 (*V. Retali*); 240bis (*D. Juan V. Alonso*); 231 (*B. Sollertinsky*); 176 (*D. Ricardo Caro*). — Quistioni proposte 257-269.

Fasc. 3° (luglio). — *G. Loria,* Un probl. di aritmetica che si presenta nello studio delle rodonee (la rodonea rappresentata dalla equazione $\rho = R \operatorname{sen}\left(\frac{p}{q}\omega\right)$ è dell'ordine $p+q$ se p e q sono entrambi impari, e dell'ordine $2(p+q)$ se uno di questi due numeri è pari e l'altro dispari). — *D. J. Durán-Loriga,* Sopra i circoli notevoli del triangolo (continuaz). — *Z. G. De G.*, La Matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *De Galdeano,* La moderna organizzazione della matematica (seguito, v. Fasc. 2°). — Bibliografia. — Quistioni risolute: 113 (*Brocard*); 226 (*D. Alonso*). — Quistioni proposte: 270-274.

Fasc. 4° (agosto). — *A. Aubry,* Osservazioni sulla serie logaritmica. — *J. Durán-Loriga,* sopra i circoli notevoli del triangolo (continuaz.) — *De Galdeano,* La Moderna organizzazione della matematica (continuaz.) — Bibliografia — Quistioni risolute: 259 (*V. Retali*); 266 (*D. Luis de Alba*); 273 (*Lemoine*); 274 (*Lemoine*); 260 (*Rius y Casas* e *V. Retali*). — Quistioni proposte 275-279.

Fasc. 5° (settembre). — *A. Aubry,* Storia del problema delle tangenti. — *G. Pirondini,* Sulle linee cilindriche. — *D. E. Octavio de Toledo,* Teoria formale delle progressioni. — *De Galdeano,* La moderna organizzazione della matematica (cont. e fine della 2ª conferenza). — Quistioni risolute: 226 (*D. Alfonso*); 268 (*V. Retali*). — Quistioni proposte 280-285.

Fasc. 6° (ottobre). — *Gomes Teixeira (F),* Sopra una curva notevole (area della curva detta, da Bellavitis, tetracuspide). — *Aubry,* Storia del problema delle tangenti (continuaz.) — *Pirondini,* Sulle linee cilindriche (cont. e fine). — *De Galdeano,* La moderna organizzazione della matematica (continuaz.) — Cronaca — Bibliografia. — Quistioni risolute: 275 (*Lemoine*); 268 (*Schiappa-Monteiro*). — Quistioni proposte 286-291.

Fasc. 7° Serie 2ª, Tomo II (gennaio 1900). — *G. Fontené,* Metrica aninvolutiva (riassunto della Mem. del A. Iperspazio, proprietà metriche d'una correlazione generale, 1892). — *Hatzidakis,* Osservazione sopra una formola del signor *Pirondini* (l'A osserva che la formola data dal signor Pirondini, nel 11 di settembre pag. 138, vale non solo per linee cilindriche ma anche per una linea tracciata sopra una sviluppabile qualunque, aggiungendo che tale formola è conseguenza immediata di formole da lui date nel T. CXXVIII, p. 923 dei C. R. de l'Ac. des Sc., 1899). — *G. Vivanti,* Osservazione sopra un determinante speciale (l'A. dim. che un certo determinante d'ordine $m+n$ è identicamente eguale a $(-1)^n(a_0x^m + \dots + a_m)^n$ e osserva che due casi particolari di tale determinante furono considerati per incidenza dal signor *Goursat* nelle *Leçons sur l'integration* etc. T. I, p. 25 e T. II, p. 299). — *R. Guimaraes*, Equazione del circolo di Joachimsthal. — *Aubry*, Sulla formola di Wallis (esposizione in stile moderno della dimostrazione del Wallis, la quale occupa oltre 40 pagine in folio). — *De Galdeano*, La matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *De Galdeano*, La moderna organizzazione ecc. (continuaz.) — Bibliografia. — Quistioni risolute: 39 (*Brocard*). — Quistioni proposte 292-301.

Fasc. 8° (febbraio). — *A. Aubry*, Studio elementare sulla teoria dei massimi e minimi. — *De Galdeano*, La matematica e il suo insegnamento (continuaz.) — *G. Pirondini*, sopra una formola relativa alle linee (l'A. in risposta all'osservazione del signor *Hatzidakis*, fa notare ch'egli aveva riconosciuta la validità della formola in quistione, per linee tracciate sopra una superficie sviluppabile qualunque, fino dal 1893; *Ann. di Mat.*, T. XXI). — *De Galdeano*, La moderna organizzazione ecc. (continua). — Bibliografia — Quistioni risolute: 39 (*Brocard*); 262 (*Rius y Casas* e *Retali*); 290 (*Hatzidakis*); 288 (*Lemoine*); 283 (*Fontené*); 265 (*Krahe*); 257 (*Krake*); 261 (*Droz-Farny* e *Retali*); Programma di premio pel concorso del 1901 bandito dalla R. Acc. della Sc. di Madrid. — Quistioni proposte 302-309.

V. R.

GIUSEPPE BERTRAND

il 3 aprile scorso dopo lunga e penosa malattia si è spento a Parigi, dove era nato l'11 marzo 1822. Universalmente noto per i trattati elementari che sono stati per molti anni adoperati come testi in quasi tutte le scuole francesi e italiane, egli ha occupato uno dei posti più importanti fra gli scienziati del suo paese e del mondo per le moltissime memorie di meccanica e geometria, e per molte opere importantissime. Fra queste sono da notarsi il *Trattato di calcolo differenziale e integrale* (del quale il terzo libro non fu pubblicato perchè il manoscritto andò perduto negli incendi della Comune), la *Meccanica analitica di Lagrange* con note e commenti importantissimi, le lezioni sul calcolo delle probabilità, sulla elettricità, sulla termodinamica tenute al Collegio di Francia. — Lascia inoltre importanti studi critici su Alembert, Lavoisier, Comte, Pascal.

Appena uscito dalla Scuola Politecnica, entrò nell'amministrazione delle Miniere, e successivamente fu nominato professore al Liceo S. Luigi, alla Scuola Politecnica, alla Scuola normale e infine al Collegio di Francia. — Nel 1856 succedè a Sturm nell'Accademia delle Scienze di Parigi, e nel 1874 ne divenne Segretario perpetuo. Infine nel 1884 entrava all'Accademia francese in sostituzione di Giambatista Dumas.

Giulio Lazzeri — *Direttore responsabile*

Finito di stampare il 10 Maggio 1900.