.

INTRODUZIONE ALLA GEOMETRIA
di Franco Eugeni

L'inderogabile necessità di conoscere, che è propria dello spirito umano, ha portato l'uomo a riflettere sul modo con cui egli ragiona; si è così convinto, dopo centenarie analisi, che le operazioni del suo pensiero obbediscono a regole ben determinate che formano la base e la guida di ogni investigazione o ricerca. All'insieme di tali regole si dà il nome di "logica" ed a quelle fra queste che sono indipendenti dall'oggetto particolare della singola ricerca si dà il nome di "logica formale". È merito di Beltrand. Russell l'aver provato che, ad esempio, la matematica può essere basata soltanto sui principi della logica formale e sul postulato dell'infinito.
Spesso, nello sviluppo di una teoria, risulta opportuno, soprattutto per ragioni di semplicità, di usare un nuovo segno (simbolo o parola), o una nuova combinazione di segni al posto di un'altra combinazione il cui significato sia noto. Ognuna di tali convenzioni dicesi una definizione (esplicita). Non tutti i segni possono essere definiti; i primi segni che occorrono, cioè raffiguranti i concetti (idee, nozioni) dai quali si vuole iniziare una trattazione logica, non possono avere una definizione esplicita.
Tali segni, ed i concetti che essi indicano, si diranno "primitivi".

E il dimostrare ? che senso ha ? come funziona?

Al di la di farene una teoria ragioniamone un po'!
E' evidente che l'uomo nel suo operare con proposizioni teoriche e della vita assume capacità di giudizi che asseriscono o negano una proposizione. L'asserzione di una proposizione **Q ,** spesso può essere considerata una conseguenza dell'asserzione di un'altra proposizione **P**.
Si dice allora che "**Q** *è vera per deduzione da* **P**" oppure che "**P** *implica* **Q". ** All'interno di una teoria logico-formale riconosceremo assieme ai concetti primitivi l'elenco delle proposizioni base che li caratterizzano e l'insieme delle regole logiche che assegniamo per poter costruire le implicazioni e riconoscere così i giudizi corretti all'interno della teoria.

Si è spesso detto che in una teoria logico-formale un teorema, ovvero una affermazione, una implicazione

"(I) *implica* **(T)**"

che non sia immediata conseguenza dei postulati viene *verificta da una catena di implicazioni,* del tipo :

"**(I)** *implica* $\mathbf{P_1}$" , " $\mathbf{P_1}$ *implica* $\mathbf{P_2}$" .... "$\mathbf{P_{n-1}}$ *implica* P_n" , "P_n *implica* **(T)**"

mediante le quali la tesi **(T)** viene derivata all'ipotesi **(I)**.

Oggi sempre più ci si chiede se:
a) E' valida la deduzione anche se n è talmente grande che un singolo individuo non è in grado di comprendere l'intero processo? (Esistono esempi come nel cosiddetto teorema delle15.000 pagine).
Si tratta della classificazione dei gruppi finiti sporadici. Il corpo di questa classificazione è costituito da un gruppo di note di vari autori avuti in vari tempi in circa 15.000 pagine.

b) Parte o tutte le implicazioni sono dedotte sperimentalmente da un elaboratore, in una esperienza ripetibile ma in tempi proibitivi (ad esempio molti mesi di lavoro macchina, e utilizzo di più computers e di molto personale) e a costi notevoli. I teoremi "*viziati dall'uso di tecniche elaborative esaustive*" sono detti ***tecno-remi***.

Esistono esempi come *il teorema dei quattro colori* e la *non esistenza del piano di ordine dieci*
È facile provare che una qualsiasi carta geografica si può colorare con 5 colori in maniera che regioni contigue (non per un punto) sono colorati con colori differenti. Lo stesso problema non è risolvibile con tre colori. La domanda che per tanti anni non ha trovato risposta è se fossero sufficienti 4 colori. La prova è venuta: "***4 colori bastano***", ma la prova è essenzialmente dovuta ad un processo esaustivo di computer di tipo ripetibile. Anche la non esistenza del piano di ordine 10 è stata provata con l'ausilio del computer. Ritornando all'esame di una teoria logico-formale ritorniamo all'esame di quelle proposizioni base che caratterizzano i concetti primitivi.

Generalmente per definire lo spazio della geometria in modo razionale si fa ricorso al metodo assiomatico, metodo con il quale si è operato nel corso dei secoli dai postulati nella forma più ingenua del tempo di Euclide a quelli in forma più logica e moderno del tempo di David Hilbert con un raffinamento e un processo durato ben 2200 anni dal 300 a.C (Euclide) al 1899 dell'opera di Hilbert.
Euclide di Alessandria (III sce a.C.) visse molto probabilmente durante il regno di Tolomeo I (367 a.C. ca. - 283 a.C.) . Euclide noto come autore degli "Elementi", la più importante opera di geometria dell'antichità. Di lui si sa pochissimo ma sembra che Tolomeo I lo abbia chiamato ad operare nella Biblioteca di Alessandria. Euclide è menzionato in un brano di Pappo, mentre controversa è la notizia che lo fa giovane allievo di Platone. Euclide fu un personaggio storico che scrisse gli Elementi e le altre opere a lui attribuite. Ancora controversa la questione se Euclide non fosse il capo, o uno pseudonimo, di un'equipe di matematici che lavoravano per la Biblioteca di Alessandria e che contribuirono a scrivere "gli Elementi" di Euclide, continuando a scrivere opere a suo nome anche dopo la sua eventuale morte.

Il testo "*Grundlagen der Geometrie*" (letteralmente : *Fondamenti di Geometria*) pubblicato nel 1899 da David Hilbert (1862-1943) sostituisce agli ingenui assiomi di Euclide un insieme formale, composto di 21 assiomi, che evita le contraddizioni derivanti da quello di Euclide. Da notare che in modo indipendente da Hilbert e quasi contemporaneamente, un diciannovenne studente americano, Robert Moore pubblicò un insieme di postulati equivalenti. È interessante notare che, sebbene alcuni assiomi siano gli stessi, qualche assioma di Moore è un teorema nel sistema di Hilbert, e viceversa.

David Hilbert (Königsberg, 1862 – Gottinga, 1943) è stato uno dei più eminenti matematici operanti a cavallo tra e XX secolo. Laureatosi all'Università di Königsberg cosegùi il dottorato con Lindemann, nel 1885 , dove fu collega di Hermann Minkowski al quale fu legato da profonda amicizia e i due avranno modo di influenzarsi reciprocamente neivari momenti dei loro percorsi scientifici. Nel 1895, per interessamento di Klein ottenne la cattedra di Matematica nella Università di Göttingen, la più prestigiosa sede, per la matematica al tempo, dove rimase fino alla sua morte. Tra le sue molteplici attività ricordiamo la riformulazione della Geometria euclidea.

Chiediamoci:

cos'è un punto - *cos'è un retta* - *cos'è un piano*

vi sarà difficile scrivere una frase nella quale la parola *punto – retta - piano,* assunta come soggetto, prenda significato dal resto della frase. Posso scrivere:

la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro!

e questa è la *definizione esplicita* di circonferenza, ammesso che sappia già i concetti di punto ed equidistanza. Ma non posso fare la stessa cosa per il concetto di punto (o di retta o di piano) perché essi sono un punto di partenza e hanno una primitività nella teoria.
Ma se non possiamo dare definizioni esplicite dei concetti primitivi di *punto – retta- piano* possiamo ricorrere a quelle che diciamo le *definizioni implicite o assiomatiche.* Ciò consiste nell'assegnare nominalmente i concetti di punto retta e piano come elementi di un insiemi e parti di esso ed elencare le proprietà degli oggetti, nominalmente indicati, con una serie di proposizioni, che ne specificano le proprietà, proposizioni che sono dette *i postulati.*
Ed infatti Hilbert utilizza concetti primitivi specificandone le proprietà esclusivamente tramite gli assiomi; in questo contesto non è necessario assegnare alcun significato "a priori" ai concetti primitivi di punto, retta, piano , sono solo nomi che potrebbero essere sostituiti, come dice Hilbert, dalle parole tavoli, sedie, boccali da birra e da altri oggetti. Hilbert dapprima enumera i concetti primitivi ma ad essi aggiunge alcune relazioni anch'esse considerate primitive quali le relazioni di *giacere su* (come relazione di appartenenza insiemistica tra punto, retta e piano), *stare fra* (come relazioni d'ordine dei punti d'una retta) , congruenza di segmenti ed angoli (come relazioni di equivalenza tra figure). Naturalmente le relazioni di *appartenenza*, di *ordine* e di *equivalenza* abbastanza sfumate nella trattazione di Hilbert hanno preso maggior evidenza con la trattazione insiemistica alla quale noi facciamo riferimento e diffusa dopo la teoria di Hilbert. Il sistema di assiomi di Hilbert infine riunisce in un unico sistema assiomatico sia la geometria euclidea piana che la solida.
La scelta dei concetti primitivi è,"*in certo qual modo*", arbitraria. L'arte del creatore di una nuova teoria logico-formale sta nel comprendere cosa significhi quel "*in un certo qual modo*".
Ad esempio può essere l'esperienza dell'intuito visivo a suggerire come formalizzare una teoria ed è questo il caso della geometria, nella quale il processo di formalizzazione corretta di tipo logico-formale è durato quasi duemila anni. Precisamente da Euclide ad Hilbert. Tuttavia il percorso può essere diverso e il desiderio di astrazione può essere utilizzato anche per trovare cosa può esserci di comune alla base di diversi ambiti di studio. Ritornando ai concetti primitivi è bene però che essi siano pochi e semplici, così da poterne dare brevemente e facilmente una descrizione che ne rilevi le proprietà primordiali, cioè le proprietà che si presentano all'inizio, nell'ordine logico della trattazione.

L'attenzione, di cui è capace un essere umano, può portarlo a riconoscere se un oggetto è composto da altri oggetti (analisi), o se diversi oggetti hanno proprietà comuni(sintesi), ed, in quest'ultimo caso a (cercare) di concepire un ente ideale che riassume quelle sole proprietà (astrazione).
Introdotti con arte i concetti primitivi i postulati, da un lato, hanno il compito di definire implicitamente gli enti fondamentali, dall'altro devono indicare le loro principali proprietà elementari, che sono necessariamente il punto di partenza per ogni successiva deduzione, deduzioni che riguardano non solo gli enti primitivi, *punti – rette- piani, giacere su - stare fra* (intesi come relazioni opportune tra concetti primitivi), e ancora congruenza di segmenti ed angoli (intesi come relazioni opportune tra figure. Il sistema di assiomi di Hilbert, inoltre, riunisce in un solo sistema assiomatico quella che fu la geometria euclidea piana e solida. Ancora la nozione di figura come insieme di punti prende significato sempre da insiemi di proprietà (suggerite dall'intuizione) come nelle figure dette *segmenti – angoli - triangoli – poligoni – circonferenze – curve etc.*
Definizione. *Una figura è un insieme di più enti primitivi (in numero finito o infinito), aggregati tra tra loro con una qualche regola costruttiva. (*Si pensi ad esempio ad un triangolo definito come una figura costituita da tre punti, non allineati, A, B, C e dai segmenti AB, BC, CA, oppure alla circonferenza come luogo di punti) .

Continuando il nostro discorso risulta ora necessario introdurre un opportuno formalismo logico matematico che, insieme al particolare linguaggio utilizzato, come afferma Campedelli [2] *" desta forse parecchia preoccupazione nei profani e una forma di riluttanza in tutti coloro che cercano di avvicinarsi alla nostra scienza. Occorre forse pensare che, almeno inizialmente, anche la Matematica, come ogni scienza, ha bisogno di un proprio modo di espressione, sinonimo di precisione e di chiarezza".* In altre parole anche la matematica ha un suo linguaggio proprio, difficile ai profani, che va imparato per capire!

Ancora una questione : ***come sono stati scelti i postulati di cui si sente tanto parlare?***

E' naturale rimarcate che tutto l'edificio geometrico è nato, nei tempi, dall'osservazione e dall'esperienza,dunque tutti i postulati sono proprietà chiaramente visibili in quel modello fisico-intuitivo che nasce dall'esperienza e dalla ingenua formulazione euclidea. Tale modello ci viene presentato ed è da noi studiato nei vari gradini della conoscenza, quindi nelle scuole elementari un primo approccio, nelle medie un approccio più avanxzato, ancora nei primi anni della scuola media superiore si inizia a considerare anche l'aspetto dimostrativo in quel modello misto che è intuitivo nei preliminari ed è dimostrartivo da un certo punto in poi, quasi a ripercorrere la forma di scienza dimostrativa aristotelica imperante per 2.200 anni. Tale modello, con fondamenti deboli ed intuitivi, è quel modello detto della "geometria elementare", la cui trattazione più diffusa è quella, a nostro avviso, del testo dell'Enriques-Amaldi e dei derivati di quell'opera che hanno dominato gli ultimi 50 anni della nostra scuola.
La conquista geometrica è lenta, ma usualmente si passa dalla costruzione delle figure geometriche, sulla base di oggetti materiali disegnati, tagliati, costruiti, descritti quindi da modelli concreti, ad oggetti sempre più descritti con corretta terminologia e sempre più astratti della realtà stessa, riuscendo il matematico subito a riconoscere alcune proprietà generali delle figure di cui si

occupa, anche delle più elementari (punti, rette, piani, …), supportato soprattutto dall'osservazione, dall'esperienza e dall'intuizione.
Nascono anche "*certe mode*" . Dalla geometria molto intuitiva fino agli anni '30 si passa al breve periodo dell'imperante bourbakismo nel quale sono abolite le figure e si scrive "abbasso euclide". Oggi la didattica è una vera scienza e le nuove tecnologie ci insegnano a lavorare con le figure con programmi interessanti come i vari "Cabrì" che ci permettono di sperimentare la geometria ! Ma la didattica è ora nelle mani di specialisti della didattica che conoscono anche le scienze cognitivi e gli approcci psicologici e che quindi perseguiranno le vie corrette abolendo le avventure come quelle della geometria senza figure.
Se questa è la storia della geometria nell'insegnamento lo studio dell'assiomatica riguarda qualcosa di successivo, di più avanzato, riguarda la critica dei fondamenti della geometria. Tale critica viene letta e approfondita dal docente colto ma il lavorarci sopra è opera di specialisti, ed invade profondamente anche il campo della logica.
Hilbert utilizza concetti primitivi e specifica le loro proprietà esclusivamente tramite gli assiomi; precisa che non è necessario assegnare alcun significato esplicito ai concetti primitivi. Essi sono elementi e parti di un insieme astratto che nominalmente chiamiamo <u>punto</u>, <u>retta</u>, <u>piano</u> e altri, potrebbero chiamare, come diceva Hilbert, <u>tavoli</u>, <u>sedie</u>, <u>boccali da birra</u> ! Naturalmente, se la geometria tratta di "oggetti astratti", gli assiomi non sono certo verità evidenti in sé, ma devono essere considerati arbitrari.
Non vogliamo imbrogliare, è anche vero che quando enuncio le prime proprietà, esplicitamente formulate in termini della più larga generalità ("due punti determinano una ed una sola retta", "tre punti individuano un piano", etc.), faccio chiaramente riferimento a proprieta ispiranti intuitive, ma gli assiomi complessivamente scelti obbediscono a due sole regole globali:

a) gli assiomi sono tra loro non contradittori (compatibilità)
b) gli assiomi sono indipendenti.

La comprensione e la verifica di queste proprietà non è facile affatto.

Il problema della compatibilità, banale da verificare è invece difficile da comprendere.
Dicendo che le proposizioni primitive devono essere compatibili si intende che fra le loro deduzioni non si trovi l'asserzione e la negazione simultanea di una stessa proposizione. È curioso il fatto che fin dal Medio Evo, da quanto ci risulta dalla ricerca dei logici medioevali, sappiamo che

Teorema dello Pseudo-Scoto *(*attribuito a Scoto Eriugene). *Se in una teoria ammettiamo una proposizione **P** e la sua negazione **nonP** da queste asserzioni segue la validità di una qualsiasi proposizione **X** :*

$$\mathbf{P} \ \& \ \text{non}\mathbf{P} \longrightarrow \boldsymbol{X} \text{ (qualsiasi)}$$

ben formulato dagli Scolastici nella forma : *ex falso sequitur quodlibet* e ripresa e "dimostrata" da Hilbert.

Dal teorema logico dello Pseudo-Scoto consegue che se in una teoria ammettimo una proposizione e la sua contraria la teoria è la teoria totale fatta di tutte le possibili proposizione del tutto inutile perché troppo piena!
Giovanni Scoto Eriugene (?801 – ?872) di origini irlandesi (S*coto*, della *Scotia Maior/*'Irlanda) si firmava *Eriugena (*nato (*gena*) in *Eriu/* Irlanda). Nel 843 si trasferí in Francia per dirigere la Schola Palatina di Carlo il Calvo; questi gli affidò anche il compito di tradurre dal greco il Corpus Areopagiticum di Dionigi l'Areopagita, che Scoto studiò e commentò in latino. La sua filosofia si avvicina al Neoplatonismo e si mantiene sulla linea di Sant'Agostino, ma in caso di contraddizione ritiene che debba essere la ragione a e prevalere sul credo. Condannato per eresia, la persecuzione non si fermò con la sua morte per secoli. Nel 1210 fu emanata una condanna conciliare postuma, con la condanna al rogo e nel 1225 papa Onorio III chiese la raccolta di ogni copia del suo libro *De divisione naturae* da spedire a Roma per esservi bruciata.

Se è facile stabilire a priori la compatibilità di un sistema di proposizione base o assiomi della teoria è ben aperto il problema di sapere se nella teoria si potranno dedurre come vere due proposizioni A e nonA che sono l'una la negazione dell'altra. Questo problema detto della ***non contraddittorietà*** ha avuto il suo epilogo nei ben noti teoremi di Godel, che ricorderemo tra breve.

Il problema dell'indipendenza dei postulati è al contrario facile da capire ma molto difficile da verificare; esso si può enunciare come segue:

Dato un qualsiasi sistema assiomatico definito dai postulati $P_1, P_2, ..., P_n$ *diremo che il postulato* P_n *è dipendente dagli altri se, supposti veri i rimanenti* $P_1, P_2, ..., P_{n-1}$, *il postulato* P_n *è dimostrabile a partire da essi, dalle loro composizioni e dalla logica usata per dedurre.*

Dimostrare quindi l'indipendenza dei postulati di Hilbert non è cosa breve in quanto per verificarla occorre negare uno qualunque di essi e quindi costruire un modello dove valgono tutti i i postulati meno quello accantonato per la verifica di indipendenza. Noi accetteremo l'indipendenza che è stata provata da Hilbert stesso e da altri e la verificheremosolo per alcuni assiomi quali quello delle parallele, quello di Archimede, e per il secondo postulato dell'ordine.
Così va sottolineato che, in base alle particolari scelte dei postulati da verificare, ad esempio delle varie scelte del V postulato, ci si possa trovare di fronte a vari tipi di geometria:
geometrie non–euclideee: sono quelle per le quali valgono tutti i postulati euclidei con la sola esclusione di quello delle parallele;
geometrie non–archimedee: sono quelle per le quali valgono tutti i postulati euclidei con la sola esclusione di quello di Eudosso ed Archimede;
geometrie finite per le quali valgono i postulati di appartenenza e delle parallele con l'esclusione dei postulati di ordinamento e successivi sostituiti dal postulato secondo cui su ogni retta esiste un numero finito di punti.

Nel passato, del resto, furono compiuti vari tentativi nel cercare di dimostrare l'assioma delle parallele come se fosse un vero e proprio teorema, sulla scorta degli altri postulati. Tale dimostrazione, però, non poteva esistere poiché, come si provò successivamente, il postulato delle parallele era indipendente. Tuttavia ciò non è molto chiaro ai non esperti e spesso vi sono ancor oggi persone che inviano alle riviste, inutili dimostrazione del V postulato.

2. Riflessioni su Gödel e Russell

Gödel ha pubblicato il suo più famoso risultato nel 1931 quando, 25-enne, operava presso l'Università di Vienna. Il teorema di Gödel nasce in relazione alle ricerche volte a realizzare il programma di Hilbert, che chiedeva di trovare un linguaggio matematico che potesse provare da solo la propria consistenza o coerenza.

Kurt Gödel (1906 – 1978) nasce in Moravia da famiglia di lingua tedesca. Nel 1924 si iscrive all'Università di Vienna, si occupa di matematica e filosofia, frequenta il Circolo di Vienna, studia Bertrand Russell. Dopo una conferenza di David Hilbert sopra le questioni di completezza e consistenza dei sistemi matematici sposta i suoi interessi sulla logica matematica e nel 1929, dopo essere diventato cittadino austriaco, ottiene il dottorato e trascorre un anno negli USA dove stringe amicizia con Albert Einstein. Nel 1938, si trasferisce negli Stati Uniti presso l'Institute for Advanced Study a Princeton, dove rimarrà fino alla fine della sua vita. Muore il 14 gennaio 1978, lasciandosi uccidere dalla fame a causa dei suoi disturbi ipocondriaci della personalità.

Il suo lavoro conteneva i famosi due Teoremi di incompletezza che da lui prendono il nome e che con qualche semplificazione possono essere enunciati come segue:

1.- In ogni formalizzazione coerente della matematica che sia sufficientemente potente da poter assiomatizzare la teoria elementare dei numeri naturali è possibile costruire una proposizione sintatticamente corretta che non può essere né dimostrata né confutata all'interno dello stesso sistema.

2.- Nessun sistema coerente può essere utilizzato per dimostrare la sua stessa coerenza.

Molti non compresero in pieno il senso delle affermazioni di Gödel, ritenendo che il suo teorema avesse definitivamente distrutto la possibilità di accedere a verità matematiche di cui avere assoluta certezza. Andando a considerazioni anche più vaghr ricordiamo che, come ha sostenuto Marvin Minsky, l'intelligenza umana può commettere errori e può **comprendere** affermazioni che sono in realtà incoerenti o false. Ciò nonostante, Marvin Minsky narra che Kurt Gödel ebbe a dirgli di una sua convinzione del fatto che gli esseri umani possiedono una modalità intuitiva, non solo computazionale, per arrivare ad una verità e che quindi il suo teorema non pone limiti a ciò che può essere riconosciuto come vero dall'uomo.

Un altro risultato, di cui spesso si parla a sproposito, è la dimostrazione nel 1970 dell'esistenza di Dio, La prova ontologica di Dio non fu mai resa nota dall'autore, probabilmente per timore di essere frainteso; essa rimase sconosciuta fino a quando venne pubblicata postuma negli Stati Uniti, nove anni dopo la sua morte, all'interno di una raccolta contenente altri scritti inediti appartenuti al matematico boemo.

Nella logica matematica Russell presentò un paradosso, che successivamente prese il suo nome. Tale paradosso minava irrimediabilmente il progetto di Gottlob Frege di ridurre la matematica alla logica. Nondimeno, Russell assieme a Alfred North Whitehead, scrisse i *Principia Mathematica*, nel quale presentano un sistema assiomatico dove tutte le affermazioni della matematica potevano essere costruite, ma che restava di fatto incompleto.

Bertrand Russell (1872-1970) nacque in Inghilterra, a Ravenscroft, da nobile famiglia, rimase preso orfano e fu educato dal nonno, lord John Russell. Nel periodo 1890-94 effettuò i suoi studi a Cambridge, dove si cominciava a respirare un aria di anticonformismo, e dove Russell si interessò soprattutto di matematica e di filosofia. Gli interessi per la matematica e per la logica lo portarono a studiare Leibniz, nel volume *Esposizione critica della filosofia di Leibniz* del 1900. Il 1900 fu per lui un anno decisivo: incontrò a Parigi Giuseppe Peano di cui subì l'influsso per la sua opera *I princìpi della matematica* , pubblicati nel 1903, a cui avrebbero fatto seguito la sua opera dal titolo *Principia mathematica* (1910-1913) composti da B.Russell e A. N. Whitehead. Durante la guerra, per via della sua attività pubblica a favore del movimento pacifista, Russell fu allontanato dall'insegnamento a Cambridge e condannato a sei mesi di reclusione in carcere, durante i quali compose l' *Introduzione alla filosofia matematica* . Da allora la sua attività filosofica fu sempre intrecciata a battaglie politiche e sociali; nel 1920 fece un viaggio nell'Unione Sovietica, di cui condannò il totalitarismo nel volume *Teoria e pratica del bolscevismo* (1920). Nel 1920-1921 insegnò a Pechino e nel 1927 aprì con la seconda moglie una scuola sperimentale, dove era applicata una pedagogia non autoritaria. Tutto questo, unitamente ad una serie di scritti popolari, come *L'educazione dei nostri figli* (1926), *Matrimonio e morale* (1929), *La conquista della felicità* (1930) , *Religione e scienza* (1935), nei quali abbracciava posizioni spregiudicate su questioni religiose ed etiche, anche nel campo dell'etica sessuale, suscitò critiche dei benpensanti. A parere di Russell gli enunciati etici non hanno una dimensione conoscitiva, ma esprimono desideri, che nascono dall'esperienza immediata dell'individuo, sebbene mantengano una portata universale, nel senso che sono mossi dall'intento che il proprio desiderio diventi il desiderio di tutti. Nel 1944, Russell rientrò in Inghilterra e ricevette un incarico di insegnamento a Cambridge, che egli tenne fino al 1950: frutto di tale insegnamento fu la sua vasta ed ultima opera filosofica, *La conoscenza umana* , del 1948. Nel 1950 ricevette il premio Nobel per la letteratura. Gli ultimi anni della sua vita lo videro intervenire durante la crisi di Cuba, con lettere a Kennedy e Kruscev, e durante la guerra del Vietnam, con l'istituzione di un tribunale per i crimini della guerra, denominato Tribunale Russell. Nel 1970 lo colse la morte.

La riflessione epistemologica di Russell è passata attraverso diverse fasi. Russell pensa che l'uomo possa conoscere solo i dati sensoriali, percezioni momentanee e soggettive di colori e suoni, e che ogni altra cosa, compresi gli stessi oggetti fisici cui vengono riferite le nostre percezioni sensoriali, non possono essere conosciute direttamente. Russell è generalmente considerato uno dei fondatori della filosofia analitica. Assieme a George Edward Moore è stato protagonista della "rivoluzione contro l'idealismo" della filosofia anglosassone d'inizio Novecento (che fu echeggiata trent'anni dopo a Vienna, dalla "rivoluzione contro la metafisica" del positivismo logico). Russell e Moore hanno lottato per eliminare quello che essi ritenevano una filosofia incoerente e priva di significato e per raggiungere la chiarezza e la precisione del ragionamento. Gli scritti logici redatti assieme a Whitehead hanno continuato questo progetto. Russell fu maestro di Ludwig Wittgenstein tra il 1911 e il 1914, e lo aiutò a trovare un editore per la pubblicazione del Tractatus logicus-philosophicus oltre che garantirgli un incarico all'Università di Cambridge. Tuttavia, Russell disapprovò l'approccio ai problemi filosofici dell'ultimo Wittgenstein, che a sua volta accusò il suo antico maestro di essere "superficiale e falso". L'opera e il pensiero di Russell hanno influenzato i lavori di Willard Van Orman Quine, Karl Popper e molti altri.