CONSIDERAZIONI SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

per E. CESÀRO

. . . . . . souvenez-vous de nos conventions: si vous n'êtes qu'un pédant, ce n'est pas la peine de me lire. (*)

La misura della probabilità mediante il rapporto fra il numero n dei casi favorevoli ad un avvenimento ed il numero totale N dei casi possibili, supposti tutti *egualmente possibili*, non esaurisce il contenuto del concetto di probabilità, ma basta appena ad eseguirne una parzialissima rappresentazione. Con questa scambiano taluni lo stesso concetto quando affermano che in certi casi la parola *probabilità* non ha più senso, mentre è la definizione matematica datane che, nei termini in cui vien formulata, diventa insufficiente ad accogliere un più vasto contenuto. Occorre allora risalire all'intimo concetto per tentare di estrinsecarlo sotto più ampie forme, tendendo così a crearne una rappresentazione completa. Altri non cadono nell'accennata confusione, ma vogliono *tutto* definire prima di procedere. Come i *geometri* di Pascal, essi « hanno lo spirito retto purchè loro si spieghi bene ogni cosa per definizioni e principii; altrimenti sono falsi ed insopportabili, in quanto sono retti solo su principii bene assodati » (**). Conseguenti alla circospezione impostasi, quei puri geometri rifiutano di varcare i confini d'un certo campo, entro il quale pretendono aver racchiuso tutto ciò che nel calcolo delle probabilità può esser portato a precisione matematica. Così, accettando le idee poste a fondamento d'una recente pubblicazione, (***) non sembra che si possa accordare serietà di scienza allo studio degli avvenimenti non assimilabili alla solita estrazione di palle dall'urna. È vero che

(*) ROUSSEAU. *Émile ou de l'éducation*, (livre II).
(**) PASCAL. *De l'esprit géometrique.*
(***) BERTRAND. *Calcul des probabilités*, (Paris, 1890).

in tale angusta cerchia resta sufficiente l'ordinaria definizione della probabilità; ma è lecito domandare che cosa in essa intendesi per casi *ugualmente possibili?* Sospendano i geometri ogni loro studio finchè non abbiano definito anche questo, a meno che non si persuadano dell'assoluta necessità di mescolare alla pura logica dei loro ragionamenti l'inevitabile *dato sperimentale,* che nel calcolo delle probabilità suole assumere una forma per così dire subiettiva. Dai più semplici giuochi di azzardo alle questioni di probabilità geometrica, da queste alla teoria degli errori, alle leggi della statistica, allo studio matematico delle men precise questioni economiche e giudiziarie, l'elemento morale, che non manca mai, si va sempre più imponendo, ed è vana l'opera di quelli che tentano separarlo dal puro elemento logico. Eliminarlo non si può: solo a circoscriverlo può esser diretta l'opera del matematico, a fin di render minimo il necessario intervento degli apprezzamenti personali, massima l'efficacia delle deduzioni puramente logiche. Vano è per conseguenza ogni sforzo tendente ad isolare in un campo limitato quelle leggi del *caso,* che si credono sole suscettibili di venir trattate matematicamente. A quale *dose* di elemento morale vorrà fermarsi il geometra intollerante? Quel campo conviene che sia nullo o infinito, nullo con ogni altro campo di ricerche, non escluso quello della pura geometria, (*) o infinito quale noi lo vogliamo, sconfinato e libero. Bene ha detto Cesare Lombroso che « il progresso cesserebbe il giorno in cui non si lasciasse più errare o anche divagare la scienza in piena libertà ».

La meno seria obbiezione mossa contro il naturale esplicamento del concetto di probabilità concerne gli avvenimenti suscettibili di infinite manifestazioni. Allora, si dice, i numeri n ed N sono generalmente infiniti, il loro rapporto è indeterminato. Ma si ammette forse che quei numeri possano immaginarsi infiniti? Nulla si oppone allora a che si concepisca ben determinato anche il loro rapporto. Respinta la possibilità del numero *attualmente* infinito si vuole invece dire soltanto che i numeri stessi sono grandi a piacere, ma ognora finiti? In tal caso il loro rapporto, che non cessa mai di misurare

(*) Fintantochè non avranno i puri matematici definito la linea retta o dimostrato il postulato di Euclide la probabilità secondo l'ordinaria definizione, è costantemente determinato, e se col crescere di N tende ad un limite p, questo rappresenterà ad ogni mente sana la probabilità dell'avvenimento considerato, nel senso che, immaginato l'avvenimento come possibile in N modi, essendo *N finito sempre,* benchè arbitrariamente grande, la probabilità è misurata da un numero che *non è p,* ma che da p differisce tanto poco quanto si vuole. Molti, mentre ammettono che l'infinito come numero non ha senso, vengono poi a riconoscergliene implicitamente uno quando *distinguono* il numero finito dall'infinito. Appunto perchè questa distinzione non ha ragione di essere, non esitiamo ad affermare che il criterio per la misura della probabilità sussiste intatto, all'indefinito crescere del numero dei casi, e che, a prescindere da impossibilità puramente analitiche, conduce a risultati ben determinati. A dir vero, perchè si possa ritenere senza ulteriori schiarimenti che l'ordinaria definizione della probabilità non soffre mutamenti quando il numero dei casi cresce oltre ogni limite, fa d'uopo ancora che questi casi restino numerabili e separabili, come avviene comunemente. Ben s'intende poi che, accettata l'impossibilità del numero attualmente infinito, gli infiniti casi non possono considerarsi nel loro insieme, ma occorre che l'enunciato della questione lasci scorgere il modo più naturale di farne indefinitamente crescere il numero, e la probabilità richiesta, come già si è detto, si presenta allora come limite d'una probabilità variabile, nè può fallirne la determinazione se non nel caso che quella probabilità variabile non tenda ad un limite determinato. Ciò avviene in casi eccezionali, che non bastano a consigliare l'abbandono d'una teoria dotata di risorse preziose ed innumerevoli, tanto più che a quei casi ancora si può provvedere ricorrendo a più larghi criterii per l'apprezzamento della probabilità, sia svolgendo nuove parti dell'intimo concetto, sia estendendo la nozione stessa di limite.

Può anche darsi che il valore della probabilità, calcolato come limite, varii con l'ordine di successione degli eventi; ma ciò non ha nulla di strano se quell'*ordine* è per se stesso una circostanza di fatto, della quale bisogna pure tener conto. Nella storia della teoria delle serie si riscontra alcunchè di analogo alla presente ostruzione promossa dai puritani della matematica nel calcolo delle probabilità. Quella teoria è forse stata abbandonata sol perchè esistono serie che hanno somma variabile a seconda dell'ordine in cui ne vengono scritti i termini? Tali serie vengono oggidì sottoposte con tutto rigore al calcolo, ed altrettanto avverrà per le stesse serie indeterminate. Già qualcuno scrive

$$(1-1+1-1+\ldots)^2=1-2+3-4+\ldots\ldots,$$

asserendo che ciascun membro è uguale ad $\frac{1}{4}$. Si noti poi che in certe questioni, specialmente di probabilità geometrica, gli infiniti casi sembrano presentarsi simultaneamente, per così dire, proprio come *a posteriori* si è riconosciuto lecito per i termini delle serie assolutamente convergenti. Invece in altre questioni, per esempio quando si dice che $\frac{1}{2}$ è la probabilità di incontrare un termine negativo in una serie semplicemente convergente, i cui termini vanno decrescendo in valore assoluto, quel valore della probabilità è subordinato alla condizione che i segni si vadano esaminando nell'ordine in cui si trovano scritti, e ciò, ripetiamo, non deve sorprendere, dal momento che quella condizione è un dato di fatto, che necessariamente influisce sul valore della probabilità. Il lavoro di paziente analisi eseguito per le serie si andrà ripetendo per la teoria delle probabilità, le cui difficoltà vanno affrontate e risolute, non lasciate in disparte. Ad esse rivolgano i giovani matematici tutta la loro attenzione, rifuggendo dalle ingombranti e sterili sottigliezze.

È ben vero che i casi sembrano diventare non enumerabili, non separabili, quando il loro numero cresce oltre ogni limite; ma ci soccorre allora il concetto di *densità*, del quale non può sconoscere la spontaneità e la necessità logica chi non intenda ritornare puramente e semplicemente alle conclusioni del dilemma di d'Alembert. Un nostro corrispondente ha osato dire che la densità è « un elemento introdotto arbitrariamente » ed in questa convinzione ci ha voluto mostrare come si possa, mediante opportune rappresentazioni e trasformazioni geometriche, far sì che n riesca superiore ad N. Il paradossale risultato avrebbe dovuto far nascere qualche sospetto nell'animo del nostro egregio amico circa la validità delle considerazioni adoperate; ma egli, sicuro di sè, non esita a versare tutta la colpa su N infinito, e non nutre il menomo dubbio sull'*arbitrarietà* delle sue trasformazioni, nè si accorge che queste implicano la miracolosa possibilità di *casi favorevoli non compresi fra i possibili!* Invece di perder tempo a confutare opinioni che il più elementare buon senso condanna, passiamo a mostrare, mediante alcuni esempii, che l'indeterminazione di certi risultati è realmente dovuta ad erronei apprezzamenti della densità, e notiamo fin d'ora che, se la facilità di simili errori è accresciuta dal fatto di N infinito, non è tuttavia da considerarsi come nulla quando N è finito. Valga per tutti l'esempio che ci porge lo stesso Bertrand nel terzo paragrafo del suo libro.

Negli enunciati delle questioni di probabilità si trovano nominate grandezze *prese ad arbitrio*, che per necessità variano in campi identici ed ugualmente densi, e non bisogna, come alcuni pretendono, che queste condizioni compariscano esplicite nell'enunciato. Un simile enunciato sarebbe scientificamente ed esteticamente difettoso. Quando si cerca la probabilità che $x^2 - yz$ riesca positivo per valori reali di x, y, z, *presi ad arbitrio*, è tacitamente imposto che i campi di variazione di x, y, z siano identici in tutto, e solo se ciò *non* dovesse essere si avrebbe l'obbligo di introdurne l'esplicita dichiarazione nell'enunciato. Quando invece di $x^2 - yz$ si considera $\frac{1}{4}x^2 - yz$, a qualcuno sembra che non si dovrebbe trovare un altro valore della probabilità, perchè $\frac{1}{2}x$ è, come x, una quantità variabile da $-\infty$ a $+\infty$. Ma l'identità dei campi di variazione di x ed $\frac{1}{2}x$, apparentemente vera in *estensione*, è insussistente per l'*intensità*. Scrivere $\frac{1}{4}x^2 - yz$ invece di $x^2 - yz$ equivale appunto a porre nel primo enunciato l'esplicita dichiarazione che x debba variare in un campo due volte più denso degli altri due. Fintantochè questa condizione non viene imposta, non si ha veruna ragione di non trattare equamente le diverse variabili, assolutamente arbitrarie e non vincolate fra loro. Del resto è facile persuadersi che la probabilità di ottenere per $kx^2 - yz$ un valore positivo, quando x, y, z sono, per esempio, numeri positivi presi ad arbitrio, è variabile con k, perchè quella probabilità, manifestamente nulla per $k=0$, tende a convertirsi in certezza quando k cresce all'infinito. L'errore sta nel credere che il processo seguito nel formare l'espressione $x^2 - y z$, benchè chiaramente indicato dall'arbitrarietà e dalla mutua indipendenza di x, y, z, non sia una condizione essenziale del problema, della quale debbasi per assoluta necessità tener conto nella soluzione. Se l'enunciato dice che x deve prendersi ad arbitrio, perchè permettersi di prendere arbitrariamente kx e dividerlo poi per k? Similmente, prendere ad arbitrio x fra 0 ed 1 non equivale a prendere arbitrariamente x^2 nello stesso intervallo, assumendo poi la radice quadrata del risultato come valore di x. La probabilità che x riesca superiore ad $\frac{1}{2}$ è $\frac{1}{2}$ nel primo caso, $\frac{3}{4}$ nel secondo; ma i due risultati rispondono a questioni essenzialmente diverse, ed è strano che il Bertrand affermi invece che « i due problemi sono identici » (*). Nel primo di essi la densità non dipende da x, nel secondo è proporzionale ad x. Se, chiamati ad operare sopra un *cilindro*, si comincia dal trasformarlo in un *cono*, si perde il diritto di riferire al cilindro il risultato dell'operazione. Il mezzo di evitare simili errori è semplicissimo: consiste nel rispettare scrupolosamente la formazione delle grandezze, quale si trova prescritta dagli enunciati.

Tutte a difettosi apprezzamenti della densità son dovute le apparenti indeterminazioni segnalate dal Bertrand nel primo capitolo del suo trattato. La probabilità che *un piano preso ad arbitrio* nello spazio faccia coll'orizzonte un angolo minore di 45° è proprio $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ e non $\frac{1}{2}$, come sembra suggerire un falso buon senso. È infatti *il piano* che si deve prendere ad arbitrio, non *l'angolo*. Il primo risultato suppone una equa distribuzione in orientamento dei piani dello spazio, e però risponde alla questione proposta. Questa non è « mal posée » come afferma il Bertrand, ma è « mal résolue » e le risposte contraddittorie provano soltanto che uno almeno dei risultati è falso. Ed è certamente falso il secondo, ottenuto attribuendo uguale frequenza a tutti gli angoli, mentre per un punto si possono condurre *infiniti* piani verti-

(*) *loc. cit.*, p. 4.

cali, *un solo* orizzontale. Si può precisare asserendo che la densità dell'angolo x è sen x. La probabilità che, preso ad arbitrio il piano, questo faccia con l'orizzonte un angolo inferiore a 45° è

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen} x \, dx = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

e l'*angolo probabile* non è 45°, bensì

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x \, dx = 1,$$

cioè 57° 17′ 44″, 8. Il confronto fra il risultato del calcolo e quello che l'osservazione ha fornito per gli angoli che l'eclittica fa con le orbite delle comete, sembra svelare nelle comete stesse una tendenza ad avvicinarsi al piano dell'eclittica. Questa conclusione è respinta con orrore dai *geometri* di Pascal. Eppure nessuno pretende aver constatato indiscutibilmente quella tendenza. Si è voluto semplicemente dire: — abbiamo qualche ragione di pensare che una tendenza esiste in un senso piuttostochè nell'altro. La *ragione* che di ciò si presenta viene abbandonata all'apprezzamento individuale, quanto al grado di certezza morale che può indurre negli animi. Nè si vorrà negare che se altre ragioni dello stesso genere si andassero accumulando concordi, quel sospetto d'una tendenza ingigantirebbe sempre più, beninteso senza giungere mai ad aver forza di certezza matematica. E se qualche moderno scienziato non sa che farsi degli indizii così apprestati dalla teoria delle probabilità, non dimentichi che nella mente d'un Laplace essi possono diventare strumenti potentissimi di scientifica indagine.

Ancora si prenda in esame il problema della corda iscritta ad arbitrio in una circonferenza. Dice il Bertrand che la probabilità di veder riuscire la lunghezza della corda inferiore a quella del lato del triangolo equilatero iscritto può essere $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. Ma per ottenere la vera soluzione bisogna anzitutto immaginare una equa distribuzione di quelle rette del piano che incontrano la circonferenza. Tale distribuzione si ottiene facendo uniformemente ruotare nel piano un sistema di parallele equidistanti. Quando si fissa un estremo della corda, o di questa si prende ad arbitrio il punto medio, si viene a turbare l'equità della distribuzione, attribuendo a ciascuna retta un coefficiente di frequenza non consentito dall'enunciato. La densità del rapporto fra la corda ed il diametro, intorno al valore x, è rappresentata, per le tre distribuzioni considerate, da

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad 2x,$$

rispettivamente, e la probabilità richiesta prende i valori

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{3}, \quad 2\int_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}^1 x\,dx = \frac{1}{4},$$

che *rispondono a problemi differenti.* Similmente i numeri

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi}, \quad 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3},$$

rappresentano i valori probabili di x in tre diversi problemi, e si può rigorosamente dire: — 1° la corda che ogni circonferenza stacca da una *secante presa ad arbitrio* nel piano ha per lunghezza probabile il quarto della circonferenza stessa; — 2° la distanza probabile di due *punti presi ad arbitrio* sopra una circonferenza è uguale al diametro moltiplicato per $\frac{2}{\pi}$; ecc. Come si vede, l'indeterminazione esiste solo nell'immaginazione dei critici frettolosi. Similmente, quando si vogliono considerare le infinite *forme* di triangoli, le quantità da prendere ad arbitrio sono *gli angoli*, ed il risultato $\frac{1}{4}$ ottenuto per misurare la probabilità che un triangolo preso ad arbitrio sia acutangolo è perfettamente esatto, checchè ne dicano certuni, ed è falso l'altro $1-\frac{\pi}{4}$, che misura invece la probabilità di veder riuscire acutangolo un triangolo, *i cui lati son presi ad arbitrio.* Le condizioni dei due problemi sono sostanzialmente diverse, ed è naturale che il processo prescritto per la costruzione del triangolo influisca sul valore della probabilità.

Altrettanto dicasi delle questioni relative alla distribuzione delle stelle sulla volta celeste. « Prendere ad arbitrio due punti sulla superficie d'una sfera » è indicazione sufficiente perchè si giunga a trovare un valore determinato per la probabilità che la distanza angolare di quei punti sia, per esempio, inferiore a 10′. Fissare un circolo massimo, come fa il Bertrand, ed immobilizzarne un punto, significa compiere illecite deformazioni di densità, significa cambiare a capriccio le condizioni del problema, ed è questo il caso di esclamare: « les réponses contradictoires en sont la preuve ». Tanto varrebbe sostenere che un corpo dato ha il centro di gravità in uno qualunque dei suoi punti, adducendo a prova che la materia di cui quel corpo è composto si può addensare e diradare in modo da conseguire la voluta distribuzione di massa. È proprio questa la maniera nuovissima di argomentare, adoperata dal Bertrand e dai suoi celeri seguaci. Adottandola ci faremmo forti di provare che un'equazione di primo grado ammette tutte le radici di questo mondo, ed altre ancora. Del resto si noti che la soluzione del Bertrand implica l'assimilazione della superficie sferica ad un fascio di circoli massimi, implica dunque l'esclusione d'una infinità di archi, fra i quali sono manifestamente più numerosi gli archi più grandi. Attribuendo così maggiore importanza alle *piccole* distanze angolari è naturale che si ottenga un risultato centinaia di volte più forte del vero.

Quanto all'ingegnosa applicazione che del problema precedente è stata fatta dal Mitchell, le critiche del Bertrand hanno per unico fondamento il partito preso di osteggiare tutto ciò che non è riducibile ad arido meccanismo matematico, come se il servirsi della forma matematica per condurre a maggior precisione ed evidenza le proprie idee non costituisse un potente mezzo di progresso scientifico. Così non si *compromette* ma si *promuove* la matematica, cui il pensatore ama chiedere indizii, che pur non avendo per lui il valore di prove inoppugnabili, valgono nondimeno ad illuminarne la mente ed a mostrargli talvolta la via della verità. L'osservazione del Mitchell, ancorchè sia ben lungi dal rendere incontestabile l'esistenza di legami naturali fra gli astri, colpisce nonpertanto, e potrebbe forse condurre ad ulteriori riflessioni, delle quali non è possibile prevedere l'importanza. Certo è notevole che il numero delle stelle doppie sia, in diverse regioni del cielo, centinaia di volte più grande di quello che risulterebbe da una distribuzione veramente arbitraria degli astri, e nessuno vorrà negare che, se *tutte* le stelle si sdoppiassero al telescopio, questo fatto non avrebbe cessato di tormentare migliaia di generazioni, che dall'una all'altra si sarebbero trasmessa la certezza morale che l'apparente coincidere di tanti astri fosse dovuto a qualche causa misteriosa. Ora si faccia crescere da 0 ad 1 il rapporto fra il numero delle stelle doppie ed il numero totale delle stelle visibili ad occhio nudo, e si dica: — quando bisogna fermarsi perchè il sospetto dell'esistenza di legami fisici fra gli astri cominci a diventare legittimo? — Via dunque gli ostacoli, si lasci ognuno libero di pensare e condurre l'indagine scientifica a suo talento, e tutto l'acume dei critici puristi si volga al perfezionamento degli strumenti di calcolo.

Un'altra singolare obbiezione ci è stata mossa sotto la seguente forma: — « la probabilità che il *peso* specifico d'una sostanza ignota stia fra 7 ed 8, o fra 8 e 9, è la stessa; ma invece è diversa la probabilità che il suo *volume* specifico stia fra $\frac{1}{7}$ ed $\frac{1}{8}$, o fra $\frac{1}{8}$ ed $\frac{1}{9}$ ». Grave difficoltà! Anzitutto chi ci assicura che la distribuzione dei pesi specifici sia, come gratuitamente si asserisce nell'enunciato, regolare o equamente densa? Suppongasi che nella materia non si trovino pesi specifici superiori ad un certo valore, e questo si assuma ad unità. Sia $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che il peso specifico d'un corpo preso ad arbitrio cada fra x e $x+dx$, dimodochè il numero

$$p = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

rappresenti la probabilità che il detto peso cada nell'intervallo (a, b). Il problema è obbiettivamente determinato, e non dà luogo ad alcuna difficoltà, perchè nel campo di variazione dei volumi specifici la densità non è $\varphi(x)$, ma $\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, e però la probabilità che il *volume* specifico d'un corpo preso ad arbitrio cada nell'intervallo $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ è

$$\int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{a}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x^2} = \int_a^b \varphi(x)\,dx = p,$$

coincide cioè con la probabilità che il *peso* specifico del medesimo corpo sia compreso nell'intervallo (a, b). Solo per una specialissima ipotesi le densità dei pesi e dei volumi specifici potrebbero seguire la medesima legge, quando cioè si avesse

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot x^{1+\log x}}.$$

Nella questione a noi rivolta è tacitamente supposto $\varphi(x) = 1$, ciò che non è; ma quando ciò fosse, nulla vedremmo di strano nell'ineguale frequenza dei volumi specifici, poichè si tratta di due grandezze, non solo *vincolate* fra loro, ma *non arbitrarie*, e quindi non varianti in campi necessariamente omogenei. L'arbitrario, nel problema attuale, è il *corpo*, non il peso o il volume, e se si ammette che i pesi specifici della materia siano equamente distribuiti sulla scala delle grandezze, non deve recar meraviglia che altrettanto non possa dirsi dei volumi specifici. È chiaro pertanto che, delle due affermazioni contenute nell'enunciato dell'obbiezione, una è *arbitraria*, l'altra *inesatta*.

Adunque, riassumendo, i criterii per la misura della probabilità sussistono intatti e conducono a risultati determinati qualora si abbia cura di scegliere le variabili che dall'enunciato della questione emergono come veramente arbitrarie, quindi si concedano soltanto ad esse campi omogenei di variazione, identici fra loro per estensione ed intensità quando le variabili sono della stessa natura, e finalmente si sappiano apprezzare in densità i campi pertinenti alle variabili che dalle prime dipendono. Per dare un esempio del modo di procedere a siffatte valutazioni riprendiamo la ricerca della probabilità che, assunti ad arbitrio i numeri positivi x, y, z, risulti $x^2 - yz > 0$. Dire che il campo di variazione di x si estende da 0 a $+\infty$ non può significare altro se non questo: — il campo è $(0, a)$, ed a è grande quanto si vuole. Mantenendo fermo per un istante a, è dunque $(0, a)$ il comune campo di variazione di x, y, z, giacchè l'enunciato non autorizza a trattare in differenti modi quei tre numeri. Ora ad ogni altra variabile compete un campo di variazione ben determinato per estensione e densità, e non è lecito abbandonarsi ad arbitrarie definizioni dei campi stessi, come usano i soliti critici. Così le variabili x^2 ed yz percorrono entrambe l'intervallo $(0, a^2)$, ma le loro densità, che devono soddisfare alle condizioni

$$\int_0^{a^2} \varphi(x)\, dx = 1\,, \quad \int_0^{a^2} \psi(x)\, dx = 1\,,$$

sono

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\sqrt{x}}, \quad \psi(x) = \frac{2\log a - \log x}{a^2}.$$

Ciò posto, qualunque siano φ e ψ, la probabilità di vedere x^2 superare yz è data evidentemente da ognuna di queste formole:

$$p = \int_0^{a^2} \Psi(x)\, \varphi(x)\, dx\,, \quad 1 - p = \int_0^{a^2} \Phi(x)\, \psi(x)\, dx.$$

Le funzioni

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx\,, \quad \Psi(x) = \int_0^x \psi(x)\, dx$$

sono, nel caso attuale,

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{x}}{a}, \quad \Psi(x) = (1 + 2\log a - \log x)\, \frac{x}{a^2}.$$

Dunque

$$p = \int_0^{a^2} (1 + 2\log a - \log x)\, \frac{\sqrt{x}\, dx}{2a^3} = \frac{5}{9}.$$

Se qualcuno trova $p \gtrless \frac{5}{9}$ può liberamente imputar ciò, non all'imperfezione della teoria, ma alla propria inabilità.

Più generalmente, presi ad arbitrio i numeri $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ nell'intervallo $(0, a)$, osservando che le densità di x^n e di $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$ sono

$$\varphi(x) = \frac{1}{n\,a\,x^{1-\frac{1}{n}}}, \quad \psi(x) = \frac{\left(\log \frac{a^n}{x}\right)^{n-1}}{(n-1)!\,a^n},$$

si ottiene, per la probabilità di trovare $x^n > x_1 x_2 \ldots x_n$,

$$p = 1 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

e però la probabilità che la n^{esima} potenza d'un numero positivo arbitrario non superi il prodotto di altri n numeri positivi, presi ad arbitrio, è vicinissima ad $\frac{1}{e}$ quando n è molto grande. Allo stesso risultato si perviene in modo più semplice osservando che, se u_0 è il valore probabile d'una funzione del campo $(0, a)$, variabile in questo campo, il rapporto $\frac{u_0}{a}$ misura la probabilità di vedere u superare un numero arbitrario del campo stesso. Ora, prendendo

$$u = \sqrt[n]{x_1\,x_2\,x_3 \ldots x_n}\,,$$

si trova che la densità di u in $(0, a)$ è

$$\frac{n^n\,x^{n-1}}{(n-1)!\,a^n}\left(\log \frac{a}{x}\right)^{n-1},$$

e però

$$u_0 = \frac{n^n}{(n-1)!}\int_0^a \left(\log \frac{a}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{x}{a}\right)^n dx = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n a.$$

È dunque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$ la probabilità che la *media geometrica* di n numeri positivi arbitrarii superi un altro numero positivo, preso ad arbitrio. Invece per la *media aritmetica* si trova sempre $\frac{1}{2}$.

(Continua).

SUI SISTEMI DI NUMERAZIONE PER I NUMERI REALI

1. Quando si convenga, come suol sempre farsi, di indicare i numeri interi con segni differenti, sia ricorrendo a lettere diverse, sia servendosi di un sistema di numerazione, tutte le frazioni si possono rappresentare con simboli, dei quali ciascuno è composto soltanto di due dei segni proposti per i numeri interi (numeratore e denominatore) e del segno — di divisione.

Lo scopo della nostra ricerca è quello di riconoscere se qualcosa di simile possa farsi per i numeri irrazionali, e quindi per tutti i numeri reali.

Ci proponiamo perciò la domanda:

« È possibile esprimere tutti i numeri reali con un sistema di nu-
« merazione che, per ciascuno di essi, impieghi un numero *finito* di
« segni (non necessariamente uguale per tutti) scelti fra quelli di un
« gruppo finito od infinito?

« In particolare è possibile questo, se il gruppo di segni da usarsi
« comprende quelli dei numeri interi, e quelli di certe operazioni, che
« siano in numero finito, o, se sono infinite, siano tali da potersi nu-
« merare (cioè da potersi indicare una dopo l'altra in modo da giun-
« gere, spingendosi in là sufficientemente, a indicare quella che si
« vuole)? ».

Per rispondere alla domanda fatta, incominceremo col dimostrare un teorema sui gruppi di punti o di numeri.

2. Richiamiamo anzitutto per chiarezza alcune definizioni relative ai gruppi di punti ed alla loro corrispondenza (Cantor. *Acta Mathematica,* vol. II, fasc. IV).

Due gruppi di punti o di numeri si dicono *equivalenti* o di *ugual* *potenza*, quando si possono far corrispondere univocamente i loro elementi. Se ciò non è possibile in nessun modo, si dice di *potenza maggiore* quello dei due gruppi in cui, tentando di stabilire tale corrispondenza, avanzano dei punti.

La potenza più piccola di gruppi infiniti è quella del gruppo dei numeri interi, e si dice *prima potenza*. I gruppi che hanno la 1ª potenza sono detti anche *numerabili*, per il fatto che, essendo corrispondenti i loro termini uno ad uno coi numeri interi, si può ad essi termini assegnare un posto determinato, in modo da contarli, da numerarli tutti.

Il continuo lineare (cioè l'insieme di tutti i numeri reali, considerati anche in un tratto limitato), ha potenza maggiore della prima. Non è ancora provato (almeno, che io sappia) se fra la 1ª potenza e quella del continuo ve ne siano altre; ma è molto probabile che non ve ne siano, e che quindi quella del continuo sia la 2ª potenza.

Un gruppo somma di più gruppi di 1ª potenza, che siano in numero finito od anche in numero infinito, purchè in questo ultimo caso costituiscano un gruppo numerabile di gruppi, è della 1ª potenza esso pure. Se dunque da un gruppo di potenza superiore alla prima si sottrae un gruppo di 1ª potenza, il residuo non può essere di 1ª potenza.

I numeri razionali formano un gruppo numerabile; l'insieme di tutti i numeri reali è invece, come si è detto, di potenza superiore alla 1ª. Il gruppo dei numeri irrazionali, ottenuto sottraendo da quello dei numeri reali quello dei razionali, è quindi di potenza superiore alla prima.

3. Teorema. — « Dato un gruppo numerabile di enti differenti « fra loro, se si dice *simbolo* un gruppo qualunque di questi enti e si « considerano diversi simboli ottenuti prendendo gli enti in tutti i « modi possibili quanto al loro ordine ed al loro numero (purchè finito) « ed ammettendo che in uno stesso simbolo il medesimo ente si possa « considerare anche più di una volta, l'insieme di questi simboli è di « 1ª potenza (numerabile) rispetto ai simboli, considerati come suoi « elementi ».

Il gruppo cercato, che chiameremo G, sarà costituito dall'insieme dei seguenti gruppi $g_1, g_2, g_3, \ldots\ldots g_n, \ldots\ldots$

$$G = \text{somma di} \begin{cases} g_1 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{un} \text{ ente } \textit{solo} \\ g_2 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{due} \text{ enti} \\ g_3 = \text{gruppo di tutti i simboli di } \textit{tre} \text{ enti} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_n = \text{gruppo di tutti i simboli di } n \text{ enti} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{cases}$$

dove i gruppi $g_1, g_2, g_3, \dots. g_n, \dots$ sono tanti quanti gli enti, e quindi costituiscono per dato una serie numerabile.

Il gruppo g_1, coincidendo con quello degli enti dati, è numerabile.

Per i gruppi $g_2, g_3, \dots. g_n, \dots$ si dimostra in generale, che se g_n è numerabile, dev'esser tale anche g_{n+1}, qualunque sia n. E infatti g_n contiene tutti i simboli con n enti, g_{n+1} tutti quelli con $n+1$. Se in un simbolo di g_{n+1} si sopprime un ente qualunque, il simbolo si trasforma in una di quelli di g_n: talchè se a tutti i simboli di g_n si aggiunge in tutte le posizioni possibili ciascuno degli enti, si ottengono tutti i simboli di g_{n+1} e ciascuno più di una volta, potendosi un medesimo simbolo di g_{n+1} ottenere da $n+1$ di quelli di g_n (almeno quando è composto di enti tutti disuguali) coll'aggiunta di ciascuno dei suoi $n+1$ enti a uno conveniente dei simboli di n enti. Se dunque si dimostra numerabile l'insieme dei simboli che così si ottengono da g_n, sarà tale *a fortiori* anche il gruppo g_{n+1}. Ora si osservi che ad un simbolo di g_n si può aggiungere un ente determinato in $n+1$ modi (rispetto all'ordine) e ciò può farsi infinite volte, una cioè per ogni ente che si può aggiungere: si ottiene così una serie somma di $n+1$ serie tutte numerabili, che è numerabile essa pure. Ogni simbolo di g_n genera dunque un gruppo numerabile di simboli: l'insieme di tutti quelli ottenuti da tutti i simboli di g_n, che sono infiniti ma numerabili, sarà dunque numerabile.

Così è dimostrato che g_{n+1} è numerabile. Essendo già stato dimostrato numerabile il gruppo g_1, tale sarà quindi g_2, e perciò anche g_3 ecc. e quindi sono numerabili tutti i gruppi che compongono G. E siccome i gruppi di G formano un gruppo numerabile, così si conclude che è numerabile anche G, c. d. d..

4. Venendo ora alla nostra questione, si vede che le combinazioni di segni destinati a rappresentare i numeri in un sistema di numera-

zione com'è indicato nel § 1, e che potremo dire *simboli numerici*, devono esser tanti quanti i numeri reali, e, più propriamente, trattandosi di enti in numero infinito, devono uno ad uno corrispondere ai numeri reali. Il gruppo che ha per enti questi simboli numerici e quello dei numeri reali devono quindi essere della stessa potenza.

Il gruppo dei segni dato per cavarne il sistema di numerazione, sia ora finito, o infinito di 1ª potenza. L'insieme di tutti i simboli numerici ottenuti da esso e differenti fra loro per la qualità, per il numero e per l'ordine dei segni, costituisce un gruppo simile al gruppo G del teorema precedente, ed è quindi un gruppo numerabile. Esso non è dunque della medesima potenza del gruppo dei numeri reali, e neppure del gruppo degli irrazionali: talchè con esso è impossibile lo stabilire un sistema di numerazione.

Possiamo quindi rispondere così ad una parte della questione che ci eravamo proposti:

« È impossibile un sistema di numerazione col quale si rappresen-
« tino i numeri reali tutti od i soli irrazionali, il quale si serva per
« ognuno di essi soltanto di un numero finito di segni scelti in un
« gruppo infinito, ma numerabile. »

Se si toglie la condizione che i numeri reali si debbano indicare con un numero *finito* di segni, allora un sistema di numerazione è possibile. Uno semplice già esiste, solo che si usino i segni dei numeri razionali e gli altri:

$$(,)\ ,\ \lim,$$

giacchè ogni numero (razionale od irrazionale) è limite di serie convergenti di numeri razionali: e se questi sono $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ si scrive;

$$\lim\,(a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots).$$

5. Si vede dalle cose precedenti (come del resto già si sa per altre vie) che i numeri irrazionali non possono essere tutti radicali, giacchè i simboli $\sqrt[n]{a}$ (con a, n numeri razionali) abbisognano di 3 soli segni, cioè:

$$a,\ n,\ \sqrt{}$$

scelti nel gruppo numerabile di segni composto del segno $\sqrt{}$ e di quelli dei numeri razionali. Così pure non ci danno tutti i numeri irrazionali nè ciascuna delle formule

$$\log_n a,\ \log_n \sqrt[p]{a},\ \log_n^{(p)} a = \overset{1}{\log_n} \overset{2}{\log_n} \ldots\ldots \overset{p}{\log_n} a. \ldots.$$

nè il loro insieme ecc.

È caso particolare del teorema del § precedente quello del Cantor, che i numeri algebrici reali non sono tutti i numeri reali, costituendo un gruppo numerabile. Infatti si osservi che, intendendosi per numero algebrico reale ogni radice reale di un'equazione non identica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

dove $n, a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$, sono numeri interi, e tale equazione avendo al più n radici reali differenti, possiamo indicare ogni numero algebrico reale col simbolo stesso della sua equazione, aggiuntovi uno dei numeri $1, 2, 3, \ldots. n$ che stia a distinguerlo dalle altre radici dell'equazione, scrivendo così:

$$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0)_r.$$

Ora i simboli numerici che così si ottengono discendono dalla serie di segni

$$0, 1, 2, 3, \ldots. n, \ldots., +, =, x, (,),$$

di cui solo un numero finito si usa per ogni simbolo. La serie precedente essendo evidentemente numerabile, si conclude che con essa non possono indicarsi tutti i numeri reali; dunque i numeri reali algebrici, che con essa si indicano, non sono tutti i numeri reali.

Si sa infatti che π non è un numero algebrico reale (Lindemann).

6. Se si volesse in qualche modo ideare un sistema di numerazione per tutti i numeri reali, il quale facesse uso per ogni simbolo di un numero finito di segni, esso, per quello che si è detto, dovrebbe essere attinto ad un gruppo di segni non numerabile, cioè di potenza superiore alla prima. Dunque si conclude, rispondendo alla questione del § 1:

« Per fare un sistema di numerazione per tutti i numeri reali

« 1. o, per alcuni numeri reali si usano infiniti segni,

« 2. o, usandone un numero finito per ogni numero, i segni che « occorrono costituiscono una serie non numerabile, i cui elementi « non sono quindi descrivibili ad uno ad uno, e non si possono esporre « sistematicamente uno dopo l'altro, in modo da poterci in questa « enumerazione spingere fino a quel segno che ci piace, come si fa per « i numeri interi ».

La serie dei segni necessari nel 2° caso deve quindi esser di potenza superiore alla 1ª. Se è vera l'idea del Cantor, che cioè la potenza del continuo lineare sia quella che immediatamente segue la potenza del gruppo dei numeri interi, allora un gruppo di segni con cui potere esprimere tutti i numeri reali dovrebbe essere di potenza uguale a quella dei numeri stessi che si vogliono esprimere, e conterrebbe quindi tanti segni quanti sono i numeri reali. Il sistema di numerazione più semplice sarebbe quindi quello che consistesse nel far corrispondere un diverso segno ad ogni numero reale, e si vede che neppure esso recherebbe vantaggio alcuno dal punto di vista della numerazione. Altrettanto *a fortiori* dicasi di un sistema nel quale i numeri fossero indicati con simboli composti di più di uno dei segni ora detti.

Del resto al concetto del sistema di numerazione più semplice a cui ora si accennava risponde l'Algebra (Aritmetica generale), la quale indica ogni numero con una lettera differente, almeno con l'intenzione; giacchè i segni di cui può disporre effettivamente a questo scopo sono le lettere e gli indici e gli apici, e non sono che un gruppo numerabile.

7. Fermiamoci un momento in particolare ai sistemi di numerazione fondati sugli ordinari concetti, e nei quali, a somiglianza di quello che si fa pei numeri frazionarii, si usi soltanto un numero finito di segni, scelti fra quelli dei numeri interi e di opportune operazioni in numero finito od infinito.

Le operazioni fra i numeri si indicano in generale con un segno (p. es.: —, +, log, $\sqrt{}$,) alcune si indicano senza segno sempre (p. es.: la potenza ecc.) altre talora col segno, talora no (p. es.: la moltiplicazione). Ma per il nostro scopo, quando l'indicazione di un'operazione fra numeri consista nello scrivere in un determinato modo questi numeri senza per altro far uso di nessun segno speciale, per maggior chiarezza intenderemo supplire introducendo un apposito segno, per tener conto anche di quell'operazione come delle altre.

Non occorrerà introdurre o scrivere *effettivamente* questo segno: basterà che esso stia nella nostra mente a rappresentare quell'operazione. Così p. es.: nell'espressione $(a\,b)^c$, avremo, secondo questa convenzione, 7 segni, cioè: 3 numeri a, b, c, le due parentesi, il segno della moltiplicazione e quello dell'elevazione a potenza. Per il nostro scopo, se si prende $\times$ per segno della moltiplicazione e $|$ per quello di potenza, l'espressione precedente è da considerarsi così:

$$(a \times b) \mid c$$

Per semplicità, diciamo indistintamente *enti* od *elementi numerici* tanto i segni dei numeri interi, quanto quelli delle operazioni che si vogliono usare, ed il gruppo di tutti gli elementi numerici si dica *gruppo* S.

Dal gruppo S presi n elementi numerici, con essi non si può fare che un numero finito di simboli numerici aventi significato di numero, vale a dire tanti *al più* quanti sono quelli che si possono ottenere da uno di tali simboli cambiando l'ordine degli elementi, tanti al più dunque quante sono le permutazioni P_n di n oggetti. Si è detto *al più*, giacchè alcuni dei simboli così ottenuti possono non rappresentar nessun numero. Così, p. es.: se si prosegue ad usare il segno $|$ interposto fra due numeri per indicare la potenza che ha per base il 1° numero e per esponente il secondo, dal simbolo $a \mid b$, in cui a e b sono numeri interi, si rilevano 6 permutazioni, che sono:

$$a|b,\ \ a\,b|,\ \ b\,a|,\ \ b|a,\ \ |a\,b,\ \ |b\,a,$$

delle quali solo la 1ª e la 4ª rappresentano numeri, mentre le altre sono prive di significato. Il numero dei simboli numerici fatto con n determinati segni ed aventi significato di numero, è quindi finito, ed è $\leqq P_n$. — Simboli numerici di due segni aventi significato di numero non ne esistono, giacchè un simbolo composto di un numero e di un segno di operazione o di due segni di operazione non vuol dir niente, e i simboli che contengono due soli numeri devono contenere un segno d'operazione espresso o sottinteso, talchè si raggiunga il numero di 3 segni.

Si vede dunque che i simboli numerici che possono utilmente servire in un sistema di numerazione sono non più (potremmo anzi senz'altro dir *meno*) di quelli che si ottengono dal gruppo S aggruppandone gli elementi in tutti i modi possibili quanto al loro ordine ed al loro numero. Ora se il gruppo dei segni di operazione proposti è infinito ma numerabile, tale sarà il gruppo S degli elementi numerici: quindi, applicando le conclusioni tratte in generale al § 4, si conclude che:

« È impossibile un sistema di numerazione col quale si rappresen-
« tino i numeri reali tutti, quando esso si giovi per ogni numero sol-
« tanto di un numero finito di segni scelti fra quelli dei numeri interi
« e quelli di operazioni, le quali siano solo finite o in numero infinito
« ma costituenti allora un gruppo numerabile, cioè segni di operazione
« indicabili coi numeri progressivi 1, 2, 3, ... — in modo da potere,
« contando, arrivare fino a quello che più ci piace ».

Si può osservare che lo stesso risultato negativo si otterrebbe se si tentasse un sistema di numerazione usando anche i segni delle frazioni oltre quelli dei numeri interi, giacchè tutti i numeri razionali (interi o frazionari) formano essi pure un gruppo di 1ª potenza, e quindi il gruppo S risulta pure numerabile e si giunge alla stessa conclusione precedente. Oltre a ciò, le frazioni stesse s'indicano appunto coi numeri interi o col segno d'operazione —, cosicchè rientrano fra i numeri che si ottengono colle considerazioni precedenti, se fra i segni di operazioni scelti v'era il segno —, e quindi non aggiungono nulla al sistema di numerazione.

8. Le conclusioni ottenute mostrano come sia inutile al nostro scopo lo studiare di estendere il numero d'operazioni note, quand'anche si facesse divenire infinito (purchè numerabile) come sarebbe il caso in cui si indicasse il mezzo di ottenere da ogni operazione un'altra nuova, nel modo stesso che dall'addizione si fa discendere la moltiplicazione, da questa la potenza, giacchè il modo stesso di generazione di queste operazioni fa sì che sono prodotte una alla volta insieme colle loro inverse, ed esse vengono quindi naturalmente a costituire un gruppo numerabile.

Si capisce anche come il metodo analitico di introduzione dei numeri (*) limitato alla sua forma più pura, non possa mai condurre al pieno concetto di tutti i numeri reali. Infatti, in quel metodo si generano i numeri colle operazioni, e queste, anche generalizzate successivamente, si è visto ora che sono impotenti ad esaurirli tutti. È questa la ragione per cui nel metodo analitico si nota quella specie di lacuna e di cambiamento di procedimento nel passaggio al numero irrazionale.

Il metodo sintetico d'introdurre i numeri presenta su quello analitico un notevole vantaggio, offrendo una maggiore omogeneità. Il perchè è facile a vedersi, e si desume dalle considerazioni del § 6. Infatti, il metodo analitico per la sua natura dispone solo di enti in numero infinito, ma di 1ª potenza, mentre il sintetico parte da classi di grandezze già costituite e che sono della potenza del continuo lineare, e quindi posseggono già tanti elementi quanti sono i numeri reali, sufficienti ad introdurli tutti contemporaneamente.

9. Concludendo, nello stato attuale della scienza si può senz'altro enunciare l'impossibilità di una numerazione per gli irrazionali, fondata sugli ordinari concetti. Potrebbe nascere speranza di qualche risultato, solo se si potesse dimostrare che fra la potenza del continuo e quella dei numeri interi ve ne sono altre, giacchè i gruppi di segni aventi una di queste potenze intermedie potrebbero *forse* servire a fondare un sistema di numerazione. Se si dimostra invece che ciò non è, allora la numerazione cogli ordinari concetti è impossibile affatto.

Per gli irrazionali non resta dunque che ricorrere ad indicarli con infiniti numeri razionali, e col concetto di limite, quello stesso che li genera, deviando pertanto dall'indole e dallo scopo della numerazione, che è quello di indicare i numeri con espressioni finite.

10. Ci piace, prima di terminare, di togliere un dubbio.

Potrebbe sembrare di risolvere la questione della numerazione con un numero finito di segni anche per gli irrazionali, usando, per indicare gli infiniti numeri razionali della serie convergente che ha per limite l'irrazionale, un segno unico generale a_r, dove a_r sia poi definito come funzione del numero r che percorre la serie dei valori 1, 2,

(*) Cfr. Il mio articolo: *Sul concetto di numero*. Periodico di Matematica. Anno II, fasc. IV e V.

3, ecc. Il numero sarebbe allora propriamente da indicarsi così:

$$\lim_{a_r = f(r)} (a_r),$$

dove si usano, oltre quelli dei numeri interi, solo i segni

$$\lim\,,\ =\,,\ a_r\,,\ (,)\,,$$

e quelli necessari per indicare la forma della funzione.

Si osservi peraltro che questa funzione serve a darci tutti i numeri razionali che definiscono un irrazionale, e quindi deve differire da un numero irrazionale ad un altro; le diverse funzioni $f(r)$ devono perciò esser tante quante i numeri irrazionali da rappresentare. Ora queste funzioni possibili sono in numero infinito, ma numerabile. Infatti se si vuole che si prestino ad un sistema di numerazione, devono indicare ciascuna un numero finito di operazioni da farsi su un numero finito di numeri (razionali), e i segni di cui constano sono da scegliersi fra tutti quelli dei numeri razionali (in numero infinito, gruppo numerabile) e fra i segni di operazione in numero finito, o, se infinito, numerabile, per evitare l'inutilità dell'introduzione di segni formanti gruppi di potenza superiore alla 1ª rilevata già al § 6. I segni di cui si può disporre essendo quindi in numero finito per ogni funzione, o da scegliersi in un gruppo numerabile di segni, ci conducono per il Teorema del § 3, ad un gruppo di funzioni solamente numerabile, che è quindi insufficiente allo scopo che ci proponiamo.

Pisa, ottobre 1890.

RODOLFO BETTAZZI.

ALCUNI TEOREMI

DELLA RECENTE GEOMETRIA DEL TRIANGOLO

I notevoli progressi fatti dalla geometria del triangolo negli ultimi tempi hanno dato origine presso le colte nazioni d'oltralpe a monografie più o meno complete sull'argomento. In Italia, per quanto ci consta, il soggetto non è stato ancora svolto in modo sistematico, così che il lettore digiuno delle nuove teoriche possa procurarsene adeguato concetto.

A noi parve che in questo Periodico, meglio che altrove, avesse a trovar sede un'esposizione siffatta. Se imperiose ragioni di spazio non l'avessero impedito avremmo procurato di pubblicare la traduzione dall'inglese dell'eccellente lavoro del Sig. J. Casey che ha per titolo *Geometria elementare recente*, di cui esiste anche un'edizione francese; ma ciò non potendo avvenire ci siamo proposti di esporre in alcuni brevi articoli i teoremi *elementari* più notevoli di queste nuove teorie. Quello che ora pubblichiamo comprende i primissimi teoremi, ai quali poi devesi l'origine della recente geometria, e, eccezion fatta dal n. 9, esso riposa sulle nozioni più ovvie della Planimetria.

Nella redazione di questo scritto oltre alla citata opera del Professor Casey ci siamo valsi delle pubblicazioni: A. I. G. T.: *A Syllabus of modern plane geometry* e D.r A. Emmerich: *Der Brocardsche Winkel des Dreiecks.*

1. Se nel triangolo ABC (Tav. I, fig. 1ª) da un punto qualunque C_1 di AB si tira una retta C_1B_1, a tagliare AC in B_1, cosicchè sia ang. $AC_1B_1 =$ ang. BCA, C_1B_1 chiamasi *antiparallela* a BC. I triangoli AB_1C_1, ABC sono simili e i quattro punti B, C, B_1, C_1 sono nella medesima circonferenza o conciclici.

Se per A conducesi la tangente PN al circolo O circoscritto ad ABC, ang. $BAP = BCA = AC_1B_1$, onde, PN è parallela a C_1B_1 e determina colla propria direzione quella delle antiparallele a BC. Segue poi che il raggio OA è perpendicolare a C_1B_1.

I lati del triangolo *ortico* di ABC, ossia del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze, sono rette antiparallele ai lati di ABC.

2. Sia ora MNP il triangolo formato dalle tre tangenti al cerchio ABC nei vertici del triangolo primitivo e conducasi per M una parallela a PN fino ad incontrare i lati AB, AC in C_2, B_2; C_2B_2 sarà antiparallela al lato BC e si avrà evidentemente $C_2M = MB = MC = MB_2$, onde AM biseca le antiparallele a BC. Similmente BN, CP bisecano le antiparallele a CA, AB. Le rette AM, BN, CP

chiamansi *simediane* del triangolo ABC rispetto ai lati BC, CA, AB rispettivamente.

Poichè $MB = MC$, $NC = NA$, $PA = PB$, pel teorema di Ceva, risulta subito che le tre simediane d'un triangolo passano per uno stesso punto K. Questo punto nomasi punto o centro delle simediane o *punto di Lemoine*.

Così se A', B', C' sono i punti medî dei lati del triangolo ABC, le parallele a questi lati sono bisecate dalle mediane AA', BB', CC' (che concorrono nel baricentro G), mentre le antiparallele sono bisecate dalle simediane AM, BN, CP (che concorrono in K). Le proposizioni reciproche sono anche vere.

3. Le congiungenti K e G ai vertici di ABC sono ugualmente inclinate alle bisettrici degli angoli interni. Infatti dalla similitudine dei triangoli ABC, AB_2C_2, deducesi $AB : AB_2 = BA' : B_2M$ talchè anche i triangoli ABA', AB_2M sono simili e si ha ang. $A'AB = B_2AM$.

Rette che formano angoli uguali colla bisettrice dell'angolo interno d'un triangolo son chiamate *coniugate isogonali* rispetto a quest'angolo e coppie di punti come G e K, che sono intersezioni di rette isogonali, denominansi coniugati isogonali.

4. Se nel triangolo ABC (fig. 2ª) le rette AX, AY siano coniugate isogonali, condotte da due punti qualunque X ed Y di esse le perpendicolari XM, YN ad AC e le perpendicolari XP, YQ a BA, si ha che il triangolo AXM è simile ad AYQ e il triangolo AXP simile ad AYN, onde

$$AX : XM = AY : YQ, \qquad XP : AX = YN : AY;$$

moltiplicando segue $XP : XM = YN : YQ$ ovvero $XP \cdot YQ = XM \cdot YN$. La proposizione reciproca è pure vera, poichè avendosi $XP : YN = XM : YQ$, i quadrilateri $APXM$, $ANYQ$ sono simili (inversamente) e le rette omologhe AX, AY formano angoli uguali coi lati omologhi AM, AQ.

Risulta da ciò che se AX, BX, CX sono tre trasversali del triangolo ABC, passanti per lo stesso punto X, e AY, BY, CY le loro coniugate isogonali, pure queste passano per uno stesso punto Y.

I rettangoli delle perpendicolari calate da G e K ai lati del triangolo ABC sono fra loro uguali.

5. Il punto K ha dai tre lati distanze proporzionali ai lati medesimi. Invero indicando con x, y, z queste distanze e calando dal punto A' di BC (fig. 3ª), intersezione di BC con AG, le perpendicolari $A'E$, $A'D$ ad AB, AC, si ha (4): $A'E \,.\, z = A'D \,.\, y$, ma $A'E \,.\, AB = A'D \,.\, AC$, onde, dividendo $\frac{z}{c} = \frac{y}{b}$ eguale anche ad $\frac{x}{a} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$.

6. La somma dei quadrati delle distanze di K ai lati di ABC è minima, poichè se x, y, z indicano le distanze di un punto qualunque del piano del triangolo dai lati, partendo dall'identità

$$(x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 = (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2$$

ed avendosi $ax + by + cz = 2\Delta$ e $a^2 + b^2 + c^2$ costante, $x^2 + y^2 + z^2$ diverrà minima quando il 2° membro ha il minor valore possibile, ciò che avviene per $x : a = y : b = z : c$.

7. Rette congiungenti punti dei lati d'un triangolo equidistanti dalle estremità, col vertice opposto, son chiamate *coniugate isotomiche*. Se siano Aa', Bb', Cc' (fig. 4ª) tre trasversali d'un triangolo passanti per uno stesso punto O', Aa'', Bb'', Cc'' le loro coniugate isotomiche, risulta subito, pel teorema di Ceva, che pure queste si tagliano in uno stesso punto O''. Punti come O', O'' denominansi *isotomici* rispetto al triangolo ABC od anche *reciproci*.

8. Se in un triangolo ABC (fig. 5ª) si descrive per C un cerchio O tangente ad AB e in esso si tira la corda AD parallela a BC, BD taglia questo circolo in un punto Ω, pel quale si ha evidentemente ang. $\Omega BC = \Omega CA = \Omega AB$. Ciascuno di questi angoli è chiamato *angolo di Brocard* del triangolo ed è denotato con ω.

L'angolo di Brocard è lo stesso per tutti i triangoli simili. Infatti se sia $A'B'C'$ un triangolo simile ad ABC, O' il centro del cerchio tangente ad $A'B'$, passante per C', e D' il punto in cui la parallela a $B'C'$ taglia questo cerchio, si ha che i due triangoli AOC, $A'O'C'$ sono simili, come pure sono simili i triangoli AOD, $A'O'D'$. Segue da ciò che $AB : A'B' = AD : A'D'$ onde anche i triangoli DAB, $D'A'B'$ sono simili e quindi ang. $B'D'A' = BDA = \omega$.

Se il cerchio O taglia BC in C_1, l'angolo ω di Brocard pel triangolo ABC_1, simile ad ABC, è evidentemente uguale a quello del triangolo ABC.

9. Dai triangoli ΩBC, ΩCA, ΩAB, si ha

$$\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(C-\omega)} = \frac{\Omega C}{\Omega B}, \quad \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(A-\omega)} = \frac{\Omega A}{\Omega C}, \quad \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(B-\omega)} = \frac{\Omega B}{\Omega A},$$

onde

$$\operatorname{sen}^3\omega = \operatorname{sen}(C-\omega)\operatorname{sen}(A-\omega)\operatorname{sen}(B-\omega)$$

e sviluppando

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}^3\omega = \\ (\operatorname{sen} C\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos C)(\operatorname{sen} A\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos A)(\operatorname{sen} B\cos\omega - \operatorname{sen}\omega\cos B) \\ = \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos^3\omega - \\ (\cos A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C + \cos B\operatorname{sen} C\operatorname{sen} A + \cos C\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B)\cos^2\omega\operatorname{sen}\omega \\ + (\cos A\cos B\operatorname{sen} C + \cos B\cos C\operatorname{sen} A + \cos C\cos A\operatorname{sen} B)\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega \\ - \cos A\cos B\cos C\operatorname{sen}^3\omega.\end{gathered}$$

Ma dalla Trigonometria si ha che

$$\begin{gathered}\sum\cos A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C = 1 + \cos A\cos B\cos C, \\ \sum\operatorname{sen} A\cos B\cos C = \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C,\end{gathered}$$

per cui

$$\begin{gathered}\operatorname{sen}^3\omega = \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos^3\omega - (1 + \cos A\cos B\cos C)\cos^2\omega\operatorname{sen}\omega \\ + \operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos\omega\operatorname{sen}^2\omega - \cos A\cos B\cos C\operatorname{sen}^3\omega.\end{gathered}$$

Trasportando tutto in un membro e raccogliendo, risulta

$$\begin{gathered}\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C\cos\omega(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega) - \\ (1 + \cos A\cos B\cos C)\operatorname{sen}\omega(\cos^2\omega + \operatorname{sen}^2\omega) = 0\end{gathered}$$

e quindi

$$\begin{gathered}\cot\omega = \frac{1 + \cos A\cos B\cos C}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C} = \\ \frac{\cos A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C + \cos B\operatorname{sen} C\operatorname{sen} A + \cos C\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C} = \\ \cot A + \cot B + \cot C.\end{gathered}$$

È facile esprimere $\cot\omega$ anche in funzione dei lati del triangolo. Si ha invero

$$\cot\omega = \frac{2\,b\,c\,.\cos A}{2\,b\,c\,.\operatorname{sen} A} + \frac{2\,c\,a\,.\cos B}{2\,c\,a\,.\operatorname{sen} B} + \frac{2\,a\,b\,.\cos C}{2\,a\,b\,.\operatorname{sen} C} =$$
$$\frac{(c^2+b^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)+(b^2+a^2-c^2)}{4\,\Delta} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\,\Delta}$$

e poichè si è già trovato che la distanza x del punto di Lemoine dal lato $a \equiv BC$, soddisfa alla relazione $\frac{x}{a} = \frac{2\,\Delta}{a^2+b^2+c^2}$, si può assumere anche per definizione dell'angolo di Brocard l'espressione $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\omega$. — Notisi che $\operatorname{sen}\omega = \frac{2\,\Delta}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

La relazione $\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C$, ora trovata, conferma che l'angolo di Brocard dipende esclusivamente dalla forma del triangolo.

Mostreremo ora come quest'angolo ha $30°$ per suo valore massimo. Si ha

$$0 \leqq (b^2-c^2)^2 + (c^2-a^2)^2 + (a^2-b^2)^2,$$

ovvero sviluppando, dividendo per 2 e trasportando:

$$-a^4 - b^4 - c^4 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \leqq 0,$$

quindi

$$-a^4 - b^4 - c^4 + 2\,b^2c^2 + 2\,c^2a^2 + 2\,a^2b^2 \leqq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$
$$16\,\Delta^2 \leqq b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$$

e introducendo il valore notato di $\operatorname{sen}\omega$

$$\operatorname{sen}\omega \leqq \frac{1}{2} \qquad \text{c. d. d..}$$

Il valor massimo $30°$ di ω, si ha quando il triangolo ABC è equilatero.

10. Il punto Ω è chiamato il punto *positivo* di Brocard. Il punto *negativo* di Brocard Ω' (fig. 8ª) è quello pel quale ang. $\Omega'CB = \Omega'AC = \Omega'BA = \omega$.

I punti Ω, Ω' sono coniugati isogonali, conseguentemente il rettangolo delle perpendicolari condotte da essi a ciascun lato è il medesimo (4). Si ha inoltre ang. $B\Omega C = 180° - C = C\Omega' A$, ang. $C\Omega A = 180° - A = A\Omega' B$, ang. $A\Omega B = 180° - B = B\Omega' C$.

11. Nel triangolo ABC, pel punto K delle simediane, conducansi le $F'KE$, $D'KF$, $E'KD$ parallele ai lati (fig. 6ª), dimostreremo intanto che i sei punti D, D', E, E', F, F' sono in un circolo che chiamasi *circolo di Lemoine*.

Tirisi FE'; il quadrilatero $AFKE'$ è un parallelogrammo, onde AK biseca FE', la quale per ciò (2) è antiparallela a BC nel triangolo ABC. Similmente DF' è antiparallela a CA, ED' ad AB. Sarà dunque ang. $AFE' = BCA = BF'D$, onde il trapezio $F'DE'F$ è isoscele, ossia $E'F = F'D$: analogamente $F'D = D'E$. Ora sia O il centro del cerchio circoscritto ad ABC, sarà OA perpendicolare ad FE' (1), sicchè la congiungente i punti medii di FE' e KO risulta perpendicolare ad FE' ed uguale alla metà del raggio del circumcircolo. Le FE', DF', ED' oltrechè uguali sono anche equidistanti dal punto medio σ di KO, per cui le loro estremità D, D', E, E', F, F' giaciono nella circonferenza di un circolo il cui centro è σ.

L'esagono che ha per vertici questi punti chiamasi poi *esagono di Lemoine*.

12. Dai triangoli simili ABC, KDD' le cui altezze, rispetto alle basi sovrapposte, siano AH, KP, si ha. $DD' : KP = BC : AH = a^2 : a.AH$, onde $DD' = \frac{a^2 . KP}{2\Delta} = \frac{a^2 . x}{2\Delta}$, ma si è trovato (5): $\frac{x}{a} = \frac{2\Delta}{a^2 + b^2 + c^2}$ quindi anche $DD' = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + c^2}$. Similmente $EE' = \frac{b^3}{a^2 + b^2 + c^2}$; $FF' = \frac{c^3}{a^2 + b^2 + c^2}$, per cui $DD' : EE' : FF' = a^3 : b^3 : c^3$. In causa di questa proprietà il cerchio di Lemoine è nominato anche *cerchio di rapporto triplo*.

13. Avendosi evidentemente $AF : FE' = AC : CB$, $F'B : DF' = CB : AC$ ed osservando che $FE' = DF'$, segue, per divisione, $AF : F'B = b^2 : a^2$. Ma si ha ancora $FF' : AE' = AB : AC$, $AE' : AF = AB : AC$ onde $FF' : AF = c^2 : b^2$, sicchè $AF : FF' : F'B = b^2 : c^2 : a^2$. Analogamente risulta: $BD : DD' : D'C = c^2 : a^2 : b^2$, $CE : EE' : E'A = a^2 : b^2 : c^2$, per cui i lati del triangolo ABC sono divisi simmetricamente dal cerchio di Lemoine.

14. Il trapezio $F'DE'F$ essendo isoscele (11), consegue $FD = F'E'$. Analogamente potrà concludersi $DE = D'F'$, $EF = E'D'$: i triangoli FDE, $E'F'D'$ sono perciò uguali. Ma essendo inscrittibile l'esagono $DD'EE'FF'$ è ang. $DEF = DE'F = AFE' = BCA$, ed ang. $EFD = EF'D = BDF' = CAB$ onde il triangolo FDE, e quindi anche $E'F'D'$, è simile ad ABC. Confrontando FDE con ABC, sono vertici omologhi F ad A, D a B, E a C, confrontando invece $E'F'D'$ con ABC sono vertici omologhi E' ad A, F' a B, D' a C.

15. Se Ω, Ω' sono punti di Brocard del triangolo ABC, Ω, K sono i punti di Brocard del triangolo FDE e K, Ω' quelli del triangolo $E'F'D'$.

Per dimostrare la prima parte, si descrivano le circonferenze BDF, CED, AFE; queste si tagliano in un punto determinato Q (fig. 6ª e 7ª) che coincide con Ω: infatti detto Q (fig. 6ª) il punto d'intersezione delle prime due, si ha ang. $CQB = DQB + CQD = DFB + CED = (180° - ABC - BDF) + (180° - BCA - EDC) = (180° - BDF - EDC) + (180° - ABC - BCA) = FDE + CAB$, ma ang. $FQE = 360° - EQC - BQF - CQB = 360° - EDC - BDF - FDE - CAB = 180° - CAB$, onde la terza circonferenza passa pure per Q (*). Dall'eguaglianza $CQB = FDE + CAB$, sapendo che ang. $FDE = ABC$ (14) segue poi ang. $CQB = ABC + CAB = 180° - C$. In modo analogo si prova che $AQC = 180° - A$ onde (10) Q coincide con Ω. Ora poi si ha evidentemente (fig. 6ª): $\omega = \Omega CE = \Omega DE = \Omega BD = \Omega FD = \Omega AF = \Omega EF$, talchè Ω è punto positivo di Brocard del triangolo FDE. Per essere $F'E$ parellela a BC consegue ang. $DEK = DEF' = EDD' = EFD' = EFK = FEE' = FDE' = FDK$ talchè K è punto negativo di Brocard dello stesso triangolo. — In modo consimile si dimostra che K, Ω' sono i punti positivo e negativo di Brocard del triangolo $E'F'D'$.

Può utilmente osservarsi che le tre circonferenze BDF, CED, AFE sono rispettivamente tangenti ai lati DE, EF, FD del trian-

(*) Questa proprietà sussiste comunque si scelgano i punti F, D, E.

golo FDE (14), e le tre altre $BD'F'$, $CE'D'$, $AF'E'$, che si tagliano in Ω', sono tangenti ai lati $F'E'$, $D'F'$, $E'D'$ del triangolo $E'F'D'$.

16. Se K è il punto di Lemoine e O il centro del circolo circoscritto al triangolo ABC (fig. 8ª), descrivendo sopra OK come diametro un circolo, il cui centro σ coincide col centro del circolo di Lemoine (11), quel circolo chiamasi *circolo di Brocard.*

Se per O si conducono le perpendicolari OX, OY, OZ ai lati di ABC e si denotano con A', B', C' i punti in cui queste incontrano il circolo di Brocard, A', B', C' saranno evidentemente sulle parallele $F'E$, $D'F$, $E'D$ ai lati di ABC, condotte per K. Risulta da ciò che $A'X$, $B'Y$, $C'Z$ sono le distanze del punto K dai lati, quindi proporzionali a questi lati (5). Condotte $A'B$, $B'C$, $C'A$ e detto Ω il punto d'intersezione di $A'B$ con $B'C$, i triangoli BXA', CYB', AZC' risultano simili, poichè X, Y, Z sono i punti medi di BC, CA, AB, e perciò è l'ang. $XA'B = OA'\Omega = YB'C = \Omega B'O$. I punti A', B', O, Ω sono dunque sulla circonferenza del circolo di Brocard e le BA', CB' si tagliano su questa circonferenza. Analogamente CB' ed AC' si tagliano sulla medesima circonferenza, cosicchè le rette BA', CB', AC' concorrono in uno stesso punto il quale non è altro che il punto positivo Ω di Brocard del triangolo ABC.

In modo consimile si prova che le rette AB', BC', CA' si tagliano sul circolo di Brocard nel punto negativo Ω' di Brocard.

È chiaro che ang. $\Omega\sigma K = 2\Omega A'K = 2\Omega BC = 2ABC' = 2KC'\Omega' = K\sigma\Omega' = 2\omega$.

Per essere ang. $C'OA' = ABC = C'B'A'$, ang. $A'OB' = BCA = A'C'B'$, risulta poi che il triangolo $A'B'C'$ è inversamente simile ad ABC.

17. Se pel punto K delle simediane (fig. 9ª), si tirano le antiparallele fKe', dKf', eKd' a BC, CA, AB rispettivamente, dimostreremo che i sei punti d, d', e, e', f, f' sono tutti nello stesso circolo chiamato *secondo circolo di Lemoine.*

Considerando il triangolo fKf', si ha ang. $BCA = Kf'f = Kff'$, onde $Kf = Kf'$, similmente risulta $Kd' = Kd$ e poichè K biseca fe', df', ed' (2), segue $fK = Ke' = eK = Kd' = dK = Kf'$, ciò che v. d.. — Ciascuna delle figure come $def'd'$ è poi un rettangolo, talchè i triangoli inscritti fde, $e'f'd'$ hanno i loro lati perpendicolari a quelli del triangolo ABC.

Notisi che $\frac{dd'}{d'e} = \cos A$, $\frac{ee'}{ed'} = \cos B$, $\frac{ff'}{fe'} = \cos C$, e poichè $d'e = fe'$ i segmenti che questo circolo intercetta sui lati di ABC sono proporzionali ai coseni degli angoli, onde il nome di *circolo del coseno* datogli dagli inglesi.

18. Se A', B', C' sono i vertici del triangolo ortico di ABC (fig. 9ª) ed α, β, γ i punti medî di $A'B'C'$ e se $\beta\gamma$ taglia CA, AB in N', H, $\gamma\alpha$ taglia AB, BC in H', M, $\alpha\beta$ taglia BC, CA in M', N rispettivamente, i sei punti H, H', M, M', N, N', sono tutti nella circonferenza del circolo nominato *circolo di Taylor* il cui centro è nel centro del circolo inscritto al triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Infatti, poichè $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ sono parallele rispettivamente a $C'B'$, $A'C'$ e quindi antiparallele a BC, CA (1), (2). sarà ang. $H'H\gamma = BCA = \gamma H'H$, per cui $H\gamma = \gamma H'$. Similmente $M\alpha = \alpha M'$, $N\beta = \beta N'$. Per essere poi γ un punto della simediana KC ed HN' parallela ad fe', MH' parallela a df', segue $Kd : Ke' = \gamma M : \gamma N'$, ed avendosi (17) $Kd = Ke'$, si deduce che $\gamma M = \gamma N'$ e che $N'M$ è parallela ad AB e per conseguenzaanti parallela ad $M'N$ nel triangolo CNM'. I punti M', M, N', N sono dunque conciclici (1). Ma com'è $\gamma M = \gamma N'$ così è $\alpha N = \alpha H'$, $\beta H = \beta M'$, onde $NM' = HN' = MH'$ e la circonferenza $M'MN'N$ passa per H' e H.

È chiaro poi che questa circonferenza ha il suo centro nelle bisettrici degli angoli interni del triangolo $\alpha\beta\gamma$, poichè sono isosceli i triangoli $\alpha M'M$, $\beta N'N$, $\gamma H'H$, dunque nel centro del cerchio inscritto a questo triangolo.

Se poi si osserva che per essere $\gamma N'$ parallela a Ke', $\gamma A'$ a Kd', e K, γ punti della medesima retta, $Kd' : \gamma A' = Ke' : \gamma N'$, talchè $A'N'$ risulta parallela a $d'e'$, e che quest'ultima retta è perpendicolare a CA (17), il punto N' è la proiezione di A' su CA. Analogamente N è la proiezione di C' su CA. A motivo di questa proprietà si definisce anche il circolo di Taylor, come quello la cui circonferenza passa per le proiezioni dei vertici del triangolo ortico sui lati di ABC che non passano per essi.

19. Indicando con T_1, T_2, T_3 i circoli di Taylor dei triangoli COB, AOC, BOA, dove O è l'ortocentro di ABC, si ha la proprietà che i centri di questi circoli coincidono coi centri dei cerchi ex-inscritti al triangolo $\alpha\beta\gamma$.

Infatti nel triangolo COB della fig. 9ª supponendo cambiata la lettera O in A e nel triangolo ABC la lettera A in O (fig. 10ª), sarà O l'ortocentro di ABC e i triangoli $A'B'C'$, $\alpha\beta\gamma$ saranno gli stessi, salvo la diversa denominazione dei vertici. Avendosi ora qui come precedentemente (18), $\alpha M = \alpha M'$, $\beta N = \beta N'$, $\gamma H = \gamma H'$ è chiaro che il cerchio Taylor T_1 relativo al triangolo COB della fig. 9ª od ABC della fig. 10ª, avrà il suo centro nella bisettrice dell'angolo interno α e nelle bisettrici degli angoli esterni β e γ del triangolo $\alpha\beta\gamma$, quindi nel centro del cerchio ex-inscritto a questo triangolo relativo al lato $\beta\gamma$. Altrettanto vale per i cerchi di Taylor T_2, T_3 relativi ai triangoli AOC, BOA della fig. 9ª.

20. Se K è il punto delle simediane del triangolo ABC (fig. 11ª) e sopra KA, KB, KC si prendono i punti A', B', C' cosicchè $KA' : KA = KB' : KB = KC' : KC =$ rapporto costante e $B'C'$ taglia i lati CA, AB in E, F', $C'A'$ taglia AB, BC in F, D', $A'B'$ taglia BC, CA in D, E', i sei punti D, D', E, E', F, F' sono sulla circonferenza d'un circolo nominato *circolo di Tucker* il cui centro biseca la distanza dei centri O, O' dei circoli circoscritti ad ABC, $A'B'C'$.

Tirata KO e trovato quel punto O' di essa pel quale $KO' : KO = KA' : KA$, poi condotte $A'O'$, $B'O'$, $C'O'$; AO, BO, CO, si ha subito $A'O' : AO = B'O' : BO = C'O' : CO$, quindi $A'O' = B'O' = C'O'$ talchè O' è centro del circumcircolo di $A'B'C'$. Ed ora ragionando come al n. 11 segue che l'esagono $DD'EE'FF'$ è inscrivibile.

Con ragionamento analogo a quello del n. 14 si dimostra poi che i triangoli FDE, $E'F'D'$ sono eguali fra loro e simili ad ABC.

21. I circoli circoscritti e di Lemoine, il secondo circolo di Lemoine e il circolo di Taylor sono tutti casi particolari dei circoli di Tucker.

Il circolo circoscritto è il circolo di Tucker che risulta dal supporre ridotti ad un punto i lati FE', DF', ED', dell'esagono inscrittibile, antiparalleli ai lati di ABC.

Il primo circolo di Lemoine è il circolo di Tucker che si ottiene immaginando che il triangolo $A'B'C'$, si riduca al punto K.

Il secondo circolo di Lemoine è il circolo di Tucker che si ha supponendo le antiparallele FE', DF', ED', ai lati di ABC, passanti pel punto K.

Finalmente poichè dalla fig. 9ª, essendo i punti H', H, M', M, N', N conciclici ed MH' antiparallela ad AC e NM' antiparallela ad AB nel triangolo ABC, si ha ang. $MNH = MH'H = BCA$, ang. $NHM = NM'M = CAB$, risulta che il triangolo HMN è simile ad ABC: il suo cerchio circoscritto è perciò uno dei cerchi del sistema di Tucker.

A. Lugli.

ALCUNI TEMI DI MATEMATICA

PROPOSTI

PER LA LICENZA NEI LICEI DI FRANCIA

1. Algeri. 29 aprile 1889. — Due mobili M ed N, soggetti alla sola azione della gravità, discendono lungo due piani inclinati OP, OQ formanti gli angoli α e β coll'orizzonte. Essi partono senza velocità iniziale, l'uno dal punto A di OP, l'altro dal punto B di OQ. Si dà $OA = a$, $OB = b$. Calcolare dopo quanto tempo la retta MN che congiunge i due mobili sarà orizzontale. Dare le condizioni di possibilità del problema. — Applicazione numerica senza l'uso dei logaritmi: $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, $a = 40^m$, $b = 10^m$.

Si adotterà per la misura dell'accelerazione dovuta alla gravità $g = 9^m, 81$.

2. Bordeaux. 29 aprile 1889. — 1.° È dato un cerchio O, di raggio r; sul raggio OA prolungato, si prenda un punto P e da questo punto si conducano le tangenti PM, PN alla circonferenza O. Queste tangenti tagliano in R ed S la tangente al cerchio condotta pel punto A.

Studiare la variazione del rapporto della superficie del triangolo PRS alla superficie del triangolo PMN allorchè il punto P si muove sulla retta OA.

2.° Siano, in un piano, OA, OB, OC tre rette tali che si abbia angolo COA = ang. $AOB = 60°$; si abbassino da un punto P, situato nell'angolo AOB, le perpendicolari PQ, PR, PS rispettivamente su OA, OB, OC. Mostrare che si ha, qualunque sia il punto P, $PQ + PR = PS$.

3. Caen. 29 aprile 1889. — 1.° Conoscendo il lato d'un poligono regolare di $2n$ lati inscritto in un cerchio dato, calcolare il lato del poligono regolare

di n lati inscritto nello stesso cerchio. Determinare, col mezzo della formola trovata, il lato del pentagono regolare in funzione del raggio del cerchio circoscritto.

2.° Calcolare gli angoli B e C d'un triangolo ABC, sapendo che l'angolo A è uguale a 45° e che il lato a è doppio della differenza $b - c$.

— 1 maggio 1889. — 1.° Trovare un numero intero x, tale che il doppio del suo logaritmo volgare superi d'una unità il logaritmo del numero $x + \frac{11}{10}$.

2.° Risolvere un triangolo rettangolo conoscendo la lunghezza dell'ipotenusa e quella della bisettrice dell'angolo retto.

3.° Un raggio luminoso AB si riflette in B sopra uno specchio M, secondo BC, poi secondo CD sopra un secondo specchio M'. Chiamando O il punto di intersezione di AB, CD si domanda di determinare l'angolo di deviazione $DOA = COB$, conoscendo l'angolo α che fanno i due specchi.

4. Clermont. 29 aprile 1889. — 1.° Volume generato da un segmento di cerchio nel ruotare intorno ad un diametro del cerchio che non attraversa il segmento.

2.° È dato un triangolo ABC, rettangolo in A; per A si conduce un cerchio di centro F tangente in B all'ipotenusa; si conduce un secondo cerchio di centro G passante per A e tangente in C all'ipotenusa. Si domanda: — a) di dimostrare che questi due cerchi sono tangenti; — b) i lati del triangolo ABC essendo dati, di calcolare i raggi dei cerchi F e G e i segmenti AD, AE determinati da questi cerchi sui lati AC, AB prolungati; — c) il lato $BC = a$ essendo soltanto conosciuto, di determinare gli altri due lati AB, AC, in modo che si abbia $CD + BE = m$.

— 1 maggio 1889. — M è un punto del primo quadrante d'una circonferenza. Quale dev'essere la posizione del punto M perchè la superficie totale del cilindro generato da $MQOP$ uguagli πa^2? Massimo di questa superficie totale e calcolo numerico dei valori di OP ed OQ a meno di $\frac{1}{10000}$, prendendo il raggio per unità.

5. Digione. 30 aprile 1889. — Risolvere le equazioni

$$x^4 + y^4 = b^4, \qquad x - y = a;$$

x ed y indicando le incognite, a e b delle quantità date.

— 2 maggio 1889. — Qual valore bisogna attribuire ad a perchè quello dei valori positivi di x che rende massima o minima l'espressione $\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x}{2} - 1$ sia precisamente uguale a questo massimo o minimo?

6. Grenoble. 29 aprile 1889. — 1.° Si danno i raggi R ed r dei cerchi inscritto e circoscritto ad un triangolo isoscele. Trovare la distanza dei centri di questi cerchi e la base di questo triangolo.

2.° Una sfera pesante M è lanciata dal basso in alto secondo la linea di maggior pendenza AX d'un piano inclinato di 30° sull'orizzonte. Quale dev'essere la velocità iniziale V_0, diretta secondo AX, perchè il mobile si arresti alla fine di 10 secondi per ridiscendere. Calcolare allora la velocità del mobile quando passerà, sia salendo, sia discendendo, in un punto M, tale che $AM = 183^m,75$. Si trascurerà l'attrito e si prenderà $g = 9,8$.

7. Lilla. 29 aprile 1889. — Sono dati un cerchio O, di raggio R, e due diametri rettangolari OA, OB. Determinare su OA un punto M esterno al cerchio tale che se si conduce da questo punto la tangente MP al cerchio, l'area del triangolo OPM sia all'area del triangolo OPB in un rapporto dato m^2. — Discussione.

8. Lione. 29 aprile 1889. — In un triangolo rettilineo, si danno gli angoli $A = 81^0.47'.12'',5$; $B = 38^o.12'.47'',5$ ed il raggio del cerchio inscritto $r = 1518^m,2$. Si domanda di calcolare i lati a, b, c a meno d'un decimetro e la superficie in centiare.

— 30 aprile 1889. — È dato un triangolo ABC e si domanda di condurre una parallela MN alla base AB in modo che il trapezio $AMNB$ sia uguale ai due terzi del triangolo MCN.

Dati numerici $AB = 53^m,40$, ang. $BAC = 50^0.25'.25''$, ang. $ABC = 62^0.40'.50''$.

9. Marsiglia. 29 aprile 1889. — Dato un cono ABC, lo si tagli con un piano parallelo alla base, si domanda: — 1.° di valutare il volume del cono $A'B'C'$ che ha per base la sezione $B'C'$ e per vertice il centro A' della base del primo cono; — 2°. come dev'essere condotto il piano secante $B'C'$ perchè il volume $A'B'C'$ sia massimo; — 3.° operando sul cono $A'B'C'$ come sul primo, si ottiene un terzo cono $A''B''C''$ sul quale si continua la stessa costruzione, e così di seguito, in modo che l'altezza di ciascuno di questi coni sia a quella del cono che lo precede come l'altezza di $A'B'C'$ sta a quella di ABC.

Trovare la somma dei volumi di questi coni il cui numero cresce indefinitamente.

— 1 maggio 1889. — Trasformare il numero $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ in una somma di due radicali semplici.

— 3 maggio 1889. — È dato un esagono regolare. I vertici incontrati percorrendo il perimetro in un senso determinato sono successivamente $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6$. Al vertice A_1 si ponga un peso di 1^{kg}; al vertice A_2 un peso di 2^{kg}; al vertice A_3 un peso di 3^{kg}, e così di seguito fino al vertice A_6, in cui si pone un peso di 6^{kg}. Dimostrare che il centro di gravità di questi sei pesi è situato nella linea $A_2\,A_5$ ad una distanza da A_5 uguale ai $\frac{5}{7}$ del lato dell'esagono.

10. Montpellier. 29 aprile 1889. — È dato un circolo di centro O e raggio R. Si prendano sul cerchio due punti A, B e si dia l'angolo AOB, che si chiamerà θ.

Ciò posto si domanda d'inscrivere nel cerchio un trapezio d'area data i cui lati paralleli passino rispettivamente pei punti A e B.

Discutere il problema e dimostrare che fra i trapezi considerati, quello pel quale l'area è massima è un rettangolo.

— 1 maggio 1889. — Due cerchi tangenti esternamente hanno per raggi R ed R'. Calcolare: 1.° — i lati; 2.° — la superficie; 3.° — gli angoli del triangolo formato dalle tangenti comuni ai due cerchi.

Cercare quale dev'essere il rapporto dei raggi perchè questo triangolo sia rettangolo.

— 3 maggio 1889. — Risolvere il sistema d'equazioni

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a;\ \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 y = 8a^3.$$

Trovare fra quali limiti dev'essere compreso il numero a perchè il sistema ammetta soluzioni. Trovare la condizione necessaria e sufficiente perchè queste equazioni ammettano un sistema di soluzioni formato da due archi complementari.

— 8 maggio 1889. — Determinare gli angoli A e B posto che

$$\operatorname{tang} A \operatorname{tang} B = m,\ \operatorname{tang}\frac{1}{2}A \operatorname{tang}\frac{1}{2}B = n,$$

dove m ed n sono dati. (Si potrà prendere per incognita $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ e $\operatorname{tang}\frac{1}{2}B$).

11. Nancy. 29 aprile 1889. — 1.° Essendo data una sfera solida, si domanda: — *a*) di determinare il suo raggio; — *b*) di far passare un cerchio massimo per due punti dati della superficie di questa sfera; — *c*) di far passare un cerchio minore per tre punti dati di questa superficie.

2.° Esprimere $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$ in funzione di $\operatorname{tg}\varphi$. Indicare i segni della formola a trovare, secondo che φ è compresa fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, fra $\frac{\pi}{2}$ e π, fra π e $\frac{3\pi}{2}$ e fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π.

3.° Si fa arrivare sulla faccia 1 d'un prisma un raggio radente questa faccia; questo raggio sorte per la faccia 2, facendo colla normale a questa faccia un angolo α. Sia φ l'angolo del prisma e n il suo indice, dimostrare che si ha

$$\sqrt{n^2-1} = \frac{\cos\varphi + \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

— 1 maggio 1889. — 1.° Spiegare la conversione delle frazioni ordinarie in frazioni decimali e i differenti casi che possono presentarsi.

2.° A quali condizioni deve soddisfare l'angolo α perchè, qualunque sia il valore reale attribuito ad x, il trinomio $x^2 + x + \operatorname{tg}\alpha$ sia superiore a $\frac{3}{4}$?

12. Parigi. 29 aprile 1889. — 1.° Essendo dato un cerchio di raggio R ed una tangente fissa AB, trovare sulla circonferenza un punto M tale che abbassando da questo punto la perpendicolare MP sulla tangente AB, si abbia $MP + AP = a$, a indicando una lunghezza data. Discussione.

2.° Volume generato da un segmento di cerchio ABC ruotante intorno ad un diametro DD' esterno al segmento. Dimostrazione.

— 1 maggio 1889. — È dato un cerchio ed uno de' suoi diametri AOB.

Si domanda di condurre un secondo diametro COC' in modo che facendo ruotare i segmenti circolari AMC ed $AM'C'$ intorno ad AB, il volume V' generato dal secondo segmento sia il triplo del volume V generato dal primo. Si calcolerà il coseno dell'angolo AOC.

13. Rennes. 29 aprile 1889. — Dimostrare che il prodotto dei valori di x pei quali $\dfrac{x^2-2}{x^2+px+q}$ è massima o minima è costante ed uguale a 2.

— 30 aprile 1889. — Un punto A, posto alla distanza $OA = a$ dal centro O d'una circonferenza data, di raggio r, e interno ad essa, è il vertice di un angolo MAN la cui misura 2α è data. Calcolare l'inclinazione della bisettrice dell'angolo MAN sulla OA, in modo che il rapporto delle due corde MAM', NAN' sia uguale ad un numero dato h.

— 2 maggio 1889. — A e B essendo due punti fissi ed Ox la proiezione su di un piano P (orizzontale per esempio) della retta OAB che li congiunge e incontra questo piano in O, si tracci nel piano P una linea OI inclinata rispetto ad Ox dell'angolo α. Trovare su questa linea un punto M tale che la somma dei quadrati delle sue distanze da A e B abbia il valore s^2: $MA^2 + MB^2 = s^2$.

Minimo di questa somma e posizione corrispondente di M. Come cambierà questo punto M pel quale s è minima quando si farà variare α?

Dati: ang. $xOA = \beta$, $OA = a$, $OB = b$.

TEMI DI MATEMATICA

PER LA LICENZA NEL R. LICEO DI BOLOGNA

1. Si costruisca un triangolo di cui sono date le tre altezze.
2. Si determini l'equazione di condizione che deve vincolare i coefficienti delle due equazioni:

$$x^2 + px + q = 0, \quad y^2 + p'y + q' = 0$$

affinchè una delle due radici di una di esse sia reciproca di una delle due radici dell'altra.

(Sessione di luglio, 1890).

1. Si abbassi di grado l'equazione

$$4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 6x + 18 = 0$$

sapendosi che ha una coppia di radici uguali.

2. Si calcoli la somma delle quinte potenze delle radici dell'equazione

$$x^2 + px + q = 0.$$

3. Si calcoli la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno d'un esagono regolare ai lati di esso, noto essendone il perimetro.

4. Noto il diametro della sfera che circoscrive un esaedro regolare, si determini la somma delle perpendicolari condotte da un punto qualunque interno di esso esaedro alle sue facce.

(Sessione d'ottobre, 1890).

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI 66*, 67, 68 e 71*

66*. *Trovare una formola pel termine* n.° *della serie* a, b, a, b, ...

(D. Besso).

Soluzione di *P. P. Rizzuti*, allievo del R. Liceo di Catanzaro, e di *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

La formola chiesta è:

$$\frac{(a+b)-(-1)^n(a-b)}{2}.$$

Infatti, se n è dispari $(-1)^n = -1$ e quindi la formola diviene:

$$\frac{(a+b)+(a-b)}{2} = \frac{2\,a}{2} = a;$$

se n è pari $(-1)^n = 1$ e la formola diviene:

$$\frac{(a+b)-(a-b)}{2} = \frac{2\,b}{2} = b. \qquad \text{c. d. d.}$$

Soluzione di *O. Manfredi*, allievo del R. Istituto tecnico di Reggio Emilia.

Il termine n.° avrà la forma $a^x\,b^y$ dove sarà $x = 1$ per n dispari ed $x = 0$ per n pari. L'opposto accadrà per y. Ne segue che si potrà porre

$$x = \operatorname{sen}^2\left(n\frac{\pi}{2}\right); = y \ \cos^2\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

od anche

$$x = \frac{1}{2}\left(1-(-1)^n\right); \ y = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^n\right).$$

67. *Trovare una formola pel termine* n.° *della serie* $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_m, \ldots\ldots\ldots$

(D. Besso),

Soluzione del Prof. *F. Viaggi.*

Pongo

$$S_h = 1 + \cos\frac{2h\pi}{m} + \cos\frac{4h\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{2(m-1)h\pi}{m}.$$

Nella identità

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\,.\,\cos\frac{2(l-1)h\pi}{m} = \mathrm{sen}\,\frac{(2l-1)h\pi}{m} - \mathrm{sen}\,\frac{(2l-3)h\pi}{m}$$

fo successivamente $l = 2, 3, \ldots, m$, addiziono le eguaglianze risultanti e dopo semplificazioni ottengo:

$$2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\left[\cos\frac{2h\pi}{m} + \cos\frac{4h\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{2(m-1)h\pi}{m}\right] = \mathrm{sen}\,\frac{(2m-1)h\pi}{m} - \mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$$

il 2^0 membro è identicamente eguale a $-2\,\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$, perciò trasportando tutto a 1^0 membro e dividendo per 2, ho:

$$\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}\,.\,S_h = 0.$$

Dalla quale risulta che se h non è multiplo di m, e quindi $\mathrm{sen}\,\frac{h\pi}{m}$ non è zero, è $S_h = 0$; se è poi h multiplo di m dalla definizione di S_h si vede che $S_h = m$.

Perciò il termine $n.^0$ della serie proposta è fornito dalla espressione

$$\frac{1}{m}\left(S_{n-1}\,a_1 + S_{n-2}\,a_2 + \ldots + S_{n-m}\,a_m\right).$$

Osservazione. — S_h è anchè la somma delle potenze h^{esime} delle radici dell'equazione $x^m - 1 = 0$.

Soluzione del Prof. *R. Bettazzi.*

Si ha (Genocchi, Peano - *Calcolo Differenziale*) che la posizione

$$F(x) = \lim_{t=\infty}\frac{(1+\mathrm{sen}\,\pi x)^t - 1}{(1+\mathrm{sen}\,\pi x)^t + 1}$$

ha il valore 0 per x intero, il valore ± 1 per x non intero, la funzione

$$f(x) = 1 - \left[F(x)\right]^2$$

avrà quindi il valore 1 per x intero e il valore 0 per x non intero.

Allora

$$\varphi(n, m) = a_1\,f\left(\frac{n-1}{m}\right) + a_2\,f\left(\frac{n-2}{m}\right) + \ldots + a_m\,f\left(\frac{n-m}{m}\right)$$

è un' espressione per il termine $n.^{\circ}$ della serie $a_1, a_2, \ldots a_m, a_1, a_2, \ldots a_m, \ldots$ poichè $\varphi(n, m) = a_r$ quando $n \equiv r \pmod m$ (*).

68. *Se il punto d' incontro degli archi bisettori degli angoli d' un triangolo sferico coincide col punto d' incontro degli archi mediani dei lati, è necessario che il triangolo sia equilatero?* (D. Besso).

Soluzione del Prof. *F. Viaggi* (*).

Sia ABC un triangolo sferico, A_1 il punto antipodo di A, M il punto medio di BC. Suppongo AB, AC supplementari. Perciò AB, AC sono rispettivamente eguali a CA_1, BA_1; onde i triangoli conseguenti ABC, A_1CB hanno i tre lati eguali ai tre lati e se ne conchiude l'eguaglianza degli angoli ABC, A_1CB: ed ora i triangoli ABM, A_1CM vengono ad avere due lati eguali a due lati ed eguali gli angoli compresi, se ne deduce l'eguaglianza degli angoli BAM, MA_1C e quindi anche di BAM, MAC. Ossia: « Se due lati d'un triangolo « sferico sono supplementari (e quindi tali anche gli angoli opposti), l'arco bisettore e il mediano, che partono dal loro vertice comune, coincidono (e sono eguali « a un quadrante) ». Agevolmente si dimostra la reciproca: « Se l'arco bisettore e il mediano, che partono da un vertice di un triangolo, coincidono, e « i lati che passano per lo stesso vertice non sono eguali, questi sono supplementari ».

Premessi i quali teoremi, si vede che i triangoli e i soli che soddisfano alle condizioni del problema, sono quelli in cui due lati sono supplementi del terzo: questo terzo è evidentemente minore di 120°.

71*. *a). Il massimo comun divisore di due numeri è 24. Facendone la ricerca col metodo delle divisioni, si trovano i numeri 3, 4, 5 e 6 come quozienti delle successive divisioni che occorre fare. Quali sono i due numeri?*

b). Generalizzare il problema ed il metodo per risolverlo. (G. Frattini).

Soluzione del Sig. *C. Aiello*, allievo del R. Liceo V. E. di Napoli (***).

a). Chiamo con A e B i due numeri il cui m. c. d. è 24 e, supponendo $A > B$, fo il solito quadro per trovare il m. c. d. col metodo delle divisioni successive:

	3	4	5	6
A	B	a	b	24
a	b	24	0	

Come si vede da questo quadro noi conosciamo tutto fuorchè A e B ed i resti successivi a e b. Ora $b = 6 \cdot 24$ ed $a = 5b + 24 = 5 \cdot 6 \cdot 24 + 24 =$

(*) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *L. Carlini*.

(**) Un'altra soluzione venne inviata dal Sig. Prof. *S. Catania*.

(***) Altre soluzioni pervennero da *R. Beneivenga* (Collegio militare Roma), *S. Lopriore* (Regio Liceo Bari), *A. Restifa* (R. Liceo Acireale).

31 . 24. Cogniti a e b, si conoscono anche A e B, perchè $B = 4a + b$ e $A = 3B + a$, onde $B = 3120$ e $A = 10104$.

b). Sieno x e y due numeri il cui m. c. d. è m ed i quozienti successivi $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$. Ecco il quadro per le operazioni:

	a	a_1	a_2	a_3			a_n
x	y	β	β_1	β_2	β_3		m
β	β_1	β_2	β_3			0	

Da questo quadro si ricava

$$\frac{x}{y} = a + \frac{\beta}{y} = a + \cfrac{1}{\cfrac{y}{\beta}}:$$

ma $\dfrac{y}{\beta} = a_1 + \dfrac{\beta_1}{\beta} = a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\beta}{\beta_1}}$, quindi:

$$\frac{x}{y} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{\beta}{\beta_1}}}.$$

Seguitando così si giunge a trovare:

$$\frac{x}{y} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots\ldots \atop \ldots\ldots\ldots\ldots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

la quale frazione continua si può mettere nella forma $\dfrac{p}{q}$ in cui p e q sono primi fra loro, e allora sarà $x = mp$, $y = mq$.

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **75.**^{bis} dal Sig. *S. Catania, A. de Zolt, G. Fumanti, L. Mariscotti, F. Viaggi*; **76**^{bis}. *R. Catani, S. Catania, A. de Falco, G. Fumanti, S. Gatti, L. Mariscotti, F. Viaggi*; **77***. *G. Calvitti, R. Catani, G. Ezio, F. Marantoni, A. Mucci, A. Ognissanti, G. Paoli, P. P. Rizzuti, G. Trapani*; **79***. *A. Baldassarre, M. Canci, R. Catani, A. Dal Buono, G. Fumanti, P. Marano, F. Marantoni, G. Paoli, A. Perna, G. Trapani* — soluzioni alle quali si darà evasione nei venturi fascicoli.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

80. Risolvere l'equazione

$$x^6 + 4x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = 0.$$

81*. Verificare l'eguaglianza

$$tang\, 20^\circ\; tang\, 30^\circ\; tang\, 40^\circ = tang\, 10^\circ.$$

82*. Dimostrare che *log* 2 (base 10) è compreso fra $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{13}$. Trovare, mediante queste limitazioni, il numero delle cifre della potenza 64ª di 2.

D. Besso.

83. Dimostrare che, se $\varphi_1, \varphi_2, \ldots\ldots \varphi_n$ sono funzioni lineari a coefficienti interi delle n incognite $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$; e se le lettere a, le b, le μ e le A significano numeri interi, dei quali μ_1 è primo con A_1, μ_2 primo con A_2, ecc., il sistema delle n congruenze di 1° grado con n incognite:

$$\begin{array}{c} a_1\varphi_1 \equiv b_1 - \mu_1 x_1 \ (\mathrm{mod.}\ A_1) \\ a_2\varphi_2 \equiv b_2 - \mu_2 x_2 \ (\mathrm{mod.}\ A_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n\varphi_n \equiv b_n - \mu_n x_n \ (\mathrm{mod.}\ A_n) \end{array}$$

è sempre risolubile quando una potenza di a_1 sia divisibile per A_1; una potenza di a_2 sia divisibile per A_2; e via così.

84. Dimostrare che, se p è un numero primo, e se D e λ sono due numeri interi non divisibili per p, la congruenza

$$x^2 - Dy^2 \equiv \lambda \ (\mathrm{mod.}\ p)$$

ammette $\frac{p-1}{2}$ soluzioni quando la congruenza

$$z^2 \equiv D \ (\mathrm{mod.}\ p)$$

è risolubile, e ne ammette $\frac{p+1}{2}$ nel caso contrario.

(*) Le quistioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre Scuole.

Avvertenza. — Una soluzione ($x = \alpha$, $y = \beta$) si consideri come identica all'altra ($x = -\alpha$, $y = -\beta$); epperò due soluzioni siffatte si contino per una sola.

G. FRATTINI.

85. Determinare i numeri di due cifre tali che i loro valori siano multipli del prodotto delle loro rispettive cifre.

S. GATTI.

86*. Dimostrare che esistono due soli triangoli isosceli tali che il punto medio della retta che congiunge il vertice del triangolo col punto di concorso delle altezze ed i piedi delle medesime, sono i vertici d'un quadrato.

G. RUSSO.

87*. Si assegnino in modo generale i due limiti del numero delle cifre del quoziente di $a\,b\,c\,\ldots\,l$ per $a'\,b'\,c'\,\ldots\,l'$, n ed n' essendo il numero dei fattori di ciascun prodotto, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ ed $\alpha', \beta', \gamma' \ldots \lambda'$ i numeri delle cifre dei differenti fattori.

B. CARRARA.

88*. In un cerchio di raggio R si tiri un diametro AB, sul quale si prenda un punto H in modo che sia $HA = \frac{1}{3} AB$. Da H si conduca la corda CD perpendicolare ad AB, e dal punto medio G di HD tirisi la corda EF perpendicolare a CD. Calcolare le diagonali e l'area del quadrangolo convesso $CEDF$, e dimostrare che i lati FC, ED sono i cateti d'un triangolo rettangolo di cui l'ipotenusa è il diametro.

S. CATANIA.

89. Dimostrare la disuguaglianza

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right\} > \left(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-1\right)+\left(\sqrt[n+1]{\frac{n+2}{n+1}}-1\right)+\ldots\ldots > \frac{l}{n}.$$

F. GIUDICE.

90*. Se A, B, C, D, E sono punti d'una circonferenza e con centri rispettivamente in B, C, D, E e raggi BA, CA, DA, EA si descrivono altrettante circonferenze, dimostrare che i punti in cui queste s'intersecano sono tre a tre in linea retta.

A. LUGLI.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

Prof. S. PINCHERLE. — *Gli elementi dell'aritmetica a uso delle Scuole secondarie inferiori.* Bologna, N. Zanichelli, 1891. — Prezzo: L. 2.

Questo libro elementare scritto dal prof. Pincherle, riputatissimo fra i cultori delle discipline matematiche, non deve passare inosservato tra coloro cui stanno a cuore la buona biblioteca e i buoni metodi delle nostre scuole. Dirne a lungo i pregi sarebbe un fuor d'opera. L'esposizione dei vari argomenti procede per vie semplici e naturali, sempre informata a criterio scientifico; conseguentemente risulta assai ordinata e chiara. Nella trattazione degli argomenti medesimi niente manca di essenziale, ma niente sovrabbonda; così che, mentre si fa la debita stima dell'opera del maestro, il quale nella scuola deve pur esserci per qualche cosa, si concentra il molto in piccola mole, ciò che conferisce assaissimo a rendere il libro scolastico accetto agli studiosi, come i maestri ben sanno. Pur di non venir meno al rigore scientifico che s'è imposto, l'autore non è schivo di savie concessioni all'opportunità didattica. Così egli non allude neppur lontanamente alla ricerca aprioristica della generatrice d'una frazione decimale periodica: invece, posta la generatrice, dimostra ch'essa è veramente tale. Non si poteva far meglio, considerato l'ordine delle scuole alle quali il prof. Pincherle destina il proprio libro. Non già ch'io reputi il libro stesso scevro d'ogni difetto. Che anzi tra le osservazioni di cose men buone che leggendolo m'è avvenuto di fare, voglio qui riportarne una, che m'è sembrata di qualche conto. Premetto tuttavia che essendo essa, come le altre, d'indole didascalica, non senza esitazione m'induco a farne parola: perchè so bene, che muovendo la critica didascalica da criteri nella massima parte soggettivi, potrebbe esser pregio d'un libro di scuola quello che a taluno parve difetto.

È comune opinione che l'insegnamento dell'aritmetica debba mirare a due fini principali. Primo di questi l'agile maneggio delle proprietà algoritmiche dei numeri, in quanto è mezzo a conteggiare correttamente e *per le vie più spicce.* L'altro è lo studio delle proprietà *chimiche* dei numeri interi, e voglio dire di quelle proprietà, più recondite, che metton capo ai fattori primi dei numeri medesimi. Non v'ha quasi compenetrazione fra le due serie di proprietà: che anzi la chimica dei numeri non feconda punto il campo dell'algoritmo. Se non che, mentre lo studio delle proprietà chimiche dei numeri, per l'artificio ond'è rivestito e per altre ragioni, riesce difficilissimo ai principianti, le regole dell'algoritmo, che in sostanza non sono se non quelle del volgare buon senso tradotte in cifre, si possono insegnare e dimostrare, non solamente con poca difficoltà, ma altresì con diletto dei giovanetti studiosi. Sembra adunque che nelle scuole secondarie inferiori si debba dare una grande importanza allo studio sia ragionato sia pratico dell'algoritmo, come a quello che, mentre è ordinato ad un fine di somma utilità, meglio si adatta alla capacità dei giovinetti che frequentano le dette scuole. La mescolanza di questa parte dell'aritmetica con quella che tratta la chimica dei numeri, mescolanza che non giova allo scopo algoritmico, come ho detto di sopra, metterà sempre a dura prova, e fors'anche sterile, nelle scuole inferiori, maestri ed alunni. A questo ha certo pensato il prof. Pincherle: e lo dimostra il fatto che solamente nelle note in fondo del libro, egli tratta di alcuni teoremi i quali, a mio credere e suo, debbono essere riservati alle scuole superiori. Tuttavia ho notato che qualche volta nel corso dell'opera essi vengono richiamati, esplicitamente o tacitamente (*), per ricavarne qualche conseguenza, e questo, a dir vero, non mi piace. So benissimo che gli alunni non dovrebbero imparare che il solo enunciato di quei teoremi. Ma ne comprenderanno il significato e lo spirito? Ne dubito. Se io dico ad un ragazzo che il risultato della scomposizione d'un numero in fattori primi è indipendente dal metodo che si tiene per eseguirla, egli troverà la cosa naturalissima, e quasi si meraviglierà che cervelli matematici abbiano potuto pensare alla dimostrazione di una simile inezia!! Gli è che lo spirito e l'importanza di quel teorema vuol essere chiarita agli studiosi di lunga mano, dal confronto con ciò che avviene quando si tratti di fattori non primi, e dalle conseguenze più assai che dai termini del teorema stesso. Confido pertanto che il prof. Pincherle, ristampando il libro, il che certamente avverrà presto, vorrà spogliarlo di quei richiami all'aritmetica superiore che vi si riscontrano, e rafforzarne la compagine algoritmica (**), corroborandola con opportuni esercizi per la scuola. Le note in fondo costituiranno sempre un bel complemento, utilissimo per le scuole superiori.

Queste mie osservazioni, spero, faranno apparire agli occhi del chiaro autore più sincera e veritiera la lode che fin dal principio ho tributato al suo libro, al quale do il benvenuto nelle scuole, augurandogli lunga vita e prospera fortuna.

GIOVANNI FRATTINI.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Bibliotheca mathematica. Journal d'histoire des mathématiques publié par G. ENESTRÖM. Stockholm: n. 4, 1890.

Giornale di Matematiche, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Volume XXVIII. Settembre-Ottobre 1890.

Sommario: — A. DEL RE: Escursioni matematiche diverse. — F. GIUDICE: Sulle serie a termini positivi. — F. GIUDICE: Prodotti infiniti – An-

(*) Al § 81 si espone per via dimostrativa la condizione di divisibilità di due numeri interi e vi si asserisce che $2^5 \times 5^3 \times 7$ non è divisibile per $2^6 \times 5^2 \times 7$, perciocchè questo numero ammette 2^6 come fattore e l'altro no. Questa asserzione non implica un richiamo al teorema citato al § 80, che cioè: « qualunque sia il metodo che si tiene per scomporre un numero in un prodotto di fattori primi, la scomposizione dà sempre il medesimo risultato? »

(**) Fra le regole che riguardano il calcolo delle potenze si fa menzione soltanto di quelle relative alla moltiplicazione e alla divisione di due potenze d'ugual base. Perchè di queste e non delle altre?

nunzio bibliografico. — O. TOGNOLI: Intorno alla risoluzione algebrica delle equazioni.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 3e Série, XIV année. N. 11, 12. Novembre, Décembre, 1890. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Table des matières: — N. 11: — L. BÉNÉZECH: Équation de la sphère circonscrite au tétraèdre de référence (coordonnées barycentriques). — A. MOREL: Étude sur la Géométrie des sections coniques. — G. DE LONGCHAMPS: Sur les triangles caractérisés. — Bibliographie. — Solutions de questions. — Questions proposées. = N. 12: — E. LAUVERNAY: Sur un problème de géométrie. — A. MOREL: Étude sur la Géométrie élémentaire des sections coniques. — Correspondance. — Questions d'examen. — Agrégation de l'enseignement secondaire spécial (Énoncés). — Solution de la question 318. — Questions proposées.

Journal des Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT. 15e année. N. 3, 4, 5 e 6. Paris, M. Nony et C., 17 rue des Écoles, 1890.

Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr. F. GOMES TEIXEIRA. Vol. IX, n. 6. Coimbra 1890.

Sommario: — M. D'OCAGNE: Sur le développement de sin $n\varphi$ et de cos $n\varphi$ suivant les puissances de cos φ. — G. TEIXEIRA: Note sur l'integration des équations aux derivées partielles du second ordre. — J. A. MARTINS DA SILVA: Sur trois formules de la théorie des fonction élliptiques. — Bibliographie: — Extraitos das publicações recentes.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Tome X. Novembre, Décembre, 1890. Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Sommaire: — Novembre: — E. CATALAN. Sur l'analyse indéterminée du premier degré. — ED. LUCAS. Sur les differents systèmes de numération. — Bibliographie. — A. POULAIN. Sur quelques séries de points remarquables dans le plan du triangle. — Notes mathématiques. — Solutions de questions proposées. — Question d'examen. — Questions proposées. = Décembre: — LAC DE BOSREDON. Détermination des foyers, des directrices et des axes dans les coniques. — E. CATALAN. Sur l'analyse indeterminée du premier degré. — Bibliographie. — Solutions de questions proposées. — Questions d'examen. — Questions proposées.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tomo IV, Fasc. VI. Novembre, Dicembre 1890.

Sommario: — GEBBIA: Su certe funzioni potenziali di masse diffuse in tutto lo spazio infinito. — JUNG: Delle famiglie associate di sistemi lineari e delle superficie univocamente rappresentabili sul piano. — VIVANTI: Alcune formole relative all'operazione Ω. — VENTURI: Sopra un caso generale di compensazione angolare. — ALAGNA: Intorno ad alcuni casi di multiplicità delle radici dell'equazione d'ottavo ordine. — NOETHER: Extraits de une lettre adressée a M. G. B. Guccia.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2a, Vol. IV. Fasc. 9o, 10o, 11o; 1890.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. N. 1, 2, 3. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Sommaire: — N. 1: — Concours de 1890: École polytechnique, École centrale (1re session), Agrégation des sciences mathématiques. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées. = N. 2: — G. PAPELIER: Sur les expressions indéterminées qui sont fonctions algébriques irrationnelles de la variable. — Concours de 1890: École navale, École normale supérieure, École des ponts et chaussées. — Algèbre. — Géométrie analytique. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées. = N. 3:

Concours de 1890: École centrale, Concours général de mathématiques spéciales. — Physique. — Algèbre. — Questions posées aux examens oraux. — Questions proposées.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXI Jahrgang. 7, 8 Heft. Leipzig, B. G. Teubner

Inhaltsverzeichnis. — 7 Heft. — AD. JOS. PICK: Sternwarten und Lehrerbildung. — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal. — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben; *C*) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc.. = 8 Heft. — Der Kongress von Lehrern der Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Lehranstalten Deutschlands zu Jena vom 25. bis. 28. Sept. 1890. — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc.

AGAMENNONE (G.) — Il terremoto a Roma del 23 febbraio 1890 ed il sismometrografo Brassart (Annali Uff. Cent. Meteorologia e Geodinamica. - Parte IV, Vol. X. 1888).

ARZELÀ (C). — Trattato di algebra elementare ad uso dei Licei. 2ª edizione. Firenze, Successori Le Monnier, 1890.

BIFFIGNANDI (A.) — Dimostrazione d'un teorema di Dupin e sua applicazione. (Giornale di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).

CHISTONI (C). — Teoria del metodo di Lloyd per la misura dell'intensità magnetica. (Mem. della Società degli Spettroscopisti italiani, Vol. XIX, 1890).

DE MARCHI (L.) — Sulla dinamica dei temporali. (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXIII).

GIUDICE (F.) — Sulle serie a termini positivi. — Prodotti infiniti. — (Giornale di Battaglini, Vol. XXVIII, 1890).

LORIA (G.) — Sulla classificazione delle trasformazioni razionali dello spazio, in particolare sulle trasformazioni di genere zero (Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXIII).

MACÉ DE LÉPINAY (A.) — Compléments d'algèbre et notions de Géométrie analitique. Premier fascicule: Compléments d'algèbre. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

MOSNAT (E.) = Problèmes de Géométrie analytique. Tome premier. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Ecoles, 1891.

PADOVA (E.) — Estensione del problema di De St. Venant. (Rend. della Regia Accademia dei Lincei, 1890). — Sulla teoria generale delle superficie. (Mem. della R. Acc. di Bologna, 1890).

RICCARDI (P.) — Intorno al trattato di Prosdocimo de' Beldomandi sull'Astrolabio (Bibliotheca Mathematica di G. Eneström, 1890).

ROZZOLINO (G.) — Una proprietà metrica fra poli e polari in una conica dotata di centro.

SCHLÖMILCH (O.) — Elementi di Geometria metrica. Prima versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte 1ª planimetria: L. 2,40; parte 2ª: trigonometria piana: L. 2. — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891.

VIVANTI (G.) — Luoghi geometrici del baricentro del triangolo nel manovellismo di spinta rotativa. (L'ingegneria civile e le arti industriali, 1890).

Chiusura della redazione il dì 15 gennaio 1891.

CONSIDERAZIONI SUL CONCETTO DI PROBABILITÀ

per E. CESÀRO

(Continuazione e fine).

. . . . . . souvenez-vous de nos conventions: si vous n'êtes qu'un pédant, ce n'est pas la peine de me lire. (*)

Dalle ultime considerazioni risulta chiara l'utilità di scrivere un nuovo capitolo, interessantissimo, nella teoria delle probabilità. Suo scopo esser dovrebbe la *composizione delle densità*, vale a dire il calcolo della densità di qualunque funzione composta con altre arbitrarie o vincolate, quando sian date le densità delle funzioni componenti. Nel caso di due sole variabili, legate dalla relazione

$$f(x, y) = 0,$$

le densità sono evidentemente in ragione inversa delle variazioni infinitesime delle rispettive variabili, purchè ciascuna di queste varii sempre in un senso determinato, in modo da non dar luogo a *sovrapposizioni* di valori. Allora fra le densità φ e ψ esiste il vincolo

$$\frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial f}{\partial x} = \pm \frac{1}{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ne risulta che, se u e v sono funzioni inverse, dimodochè

$$u\left(v(x)\right) = x,$$

e se $\varphi(x)$ è la densità di x, quelle di u e v sono, a prescindere dal segno,

$$\varphi(v) \frac{dv}{dx}, \quad \varphi(u) \frac{du}{dx}.$$

Per esempio, le densità di

$$kx, \quad \frac{1}{x}, \quad \log x, \quad e^x \quad \sqrt{x}, \quad \ldots\ldots$$

(*) ROUSSEAU. *Émile ou de l'éducation,* (livre II).

sono rispettivamente

$$\frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right),\quad \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{1}{x}\right),\quad e^x\varphi(e^x),\quad \frac{1}{x}\varphi(\log x),\quad \pm 2x\varphi(x^2),\quad \ldots\ldots$$

Quando avvengano sovrapposizioni di valori, si sovrappongono anche le densità relative ai diversi valori reali della funzione inversa. Così, osservando che la funzione inversa di x^2 ha i valori $\pm\sqrt{x}$, si vede subito che *la densità di* x^2 *è*

$$\frac{\varphi(\sqrt{x})+\varphi(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

per $x > 0$, ed è nulla per $x < 0$. Similmente *la densità di* $\operatorname{sen} x$ *è*

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi\left[(-1)^n \operatorname{arc\,sen} x + n\pi\right].$$

Passando al caso di tre variabili sarebbe anzitutto utile cercare la densità delle più semplici funzioni delle variabili u e v, supposte fra loro indipendenti, conoscendo le densità φ e ψ delle variabili stesse. Così, per determinare la *densità della somma* $u+v$, basta osservare che la probabilità $\chi(x)\,dx$ di vedere $u+v$ cadere nell'intervallo $(x, x+dx)$ è

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x-u}^{x-u+dx}\varphi(u)\,\psi(v)\,du\,dv.$$

La densità cercata è dunque rappresentata dalla funzione

$$\chi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-t)\,\psi(t)\,dt.$$

Invece la *densità della differenza* $u-v$ è

$$\chi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x+t)\,\psi(t)\,dt.$$

Similmente, per esprimere la *densità del prodotto* uv si ha, in generale, la formola

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \psi(t) \frac{dt}{t},$$

e, per la *densità del quoziente* $\frac{u}{v}$,

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tx)\, \psi(t)\, t\, dt.$$

Dall'una all'altra di queste formole si passa agevolmente mercè le regole date in principio. Per esempio, supponendo nota la densità di uv, se si vuol trovare quella di $u+v$, si consideri il prodotto $e^u . e^v$, i cui fattori hanno le densità

$$\frac{1}{x}\varphi(\log x), \quad \frac{1}{x}\psi(\log x).$$

Applicando la formola per la moltiplicazione si ottiene, come densità di e^{u+v},

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{\infty} \varphi\left(\log \frac{x}{t}\right) \psi(\log t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{x}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\log x - t)\, \psi(t)\, dt,$$

e però la densità di $u+v$ è

$$\chi(x) = e^x f(e^x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - t)\, \psi(t)\, dt.$$

Per fare un esercizio sul calcolo delle densità si riprenda l'espressione $x^2 - yz$, formata con numeri arbitrarii del campo $(0, a)$. Poichè $\frac{1}{a}$ è la densità delle tre variabili, la densità di x^2 è

$$\varphi(x) = \frac{1}{2a\sqrt{x}},$$

e quella di yz si deduce dalla formola per la moltiplicazione limitando il variare di t e quello di $\frac{x}{t}$ al campo $(0, a)$. Si ottiene subito

$$\psi(x) = \frac{1}{a^2} \int_{\frac{x}{a}}^{a} \frac{dt}{t} = \frac{2 \log a - \log x}{a^2}.$$

Ora la densità di $x^2 - yz$ intorno ad un valore negativo si deduce nello stesso modo dalla formola per la sottrazione, limitando al campo $(0, a^2)$ le variazioni di t e di $x + t$. Si ha

$$\chi(x) = \frac{1}{2a^3} \int_{-x}^{a^2} (2 \log a - \log t) \frac{dt}{\sqrt{x+t}} = \frac{1}{a^3} \int_{0}^{a^2+x} \frac{\sqrt{t}\, dt}{t - x},$$

cioè

$$\chi(x) = \frac{2}{a^3} \left(\sqrt{a^2 + x} - \sqrt{-x} \operatorname{arctg} \sqrt{-\frac{a^2+x}{x}} \right) = \frac{2}{a^2} (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta),$$

dopo aver posto $x = -a^2 \cos^2 \theta$. Per esempio, se p è la probabilità di vedere x^2 superare yz, si ha

$$1 - p = \int_{-a^2}^{0} \chi(x)\, dx = 4 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \cos \theta\, d\theta;$$

quindi, ancora una volta,

$$p = 1 - \frac{2}{3} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta\, d\theta = \frac{5}{9}.$$

Inoltre, se si vuole la media dei valori positivi di $yz - x^2$, basta calcolare l'integrale

$$-\int_{-a^2}^{0} x\, \chi(x)\, dx = 4a^2 \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} \theta - \theta \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta\, d\theta,$$

che si riduce subito a

$$\frac{a^2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta\, d\theta = \frac{8\,a^2}{75},$$

ed il valore probabile del radicale $+\sqrt{yz - x^2}$, supposto reale, è dato dall' integrale

$$\int_{-a^2}^{0} \sqrt{-x}\,\chi(x)\,dx = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta\, d\theta,$$

che si riduce a

$$\frac{a}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{\pi a}{16}.$$

Come si vede, le poche regole da noi date già permettono di guidare con sicurezza il calcolo, fra varie complicazioni di densità, a risultati ben determinati, rispondenti a svariati problemi. Segnalare queste regole ci sembra opera ben più utile che non sia il « mettere in guardia » i calcolatori inesperti contro le immaginarie indeterminazioni dei problemi di probabilità in cui è infinito il numero dei casi.

Analogamente, applicando una dopo l'altra le regole per l'elevazione al quadrato, l'addizione e l'estrazione di radice quadrata, si trova, dopo una facile trasformazione, che *la densità di* $\sqrt{u^2 + v^2}$ *è*, per $x > 0$,

$$\chi(x) = x\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(x\operatorname{sen}\theta) + \varphi(-x\operatorname{sen}\theta)]\,[\psi(x\cos\theta) + \psi(-x\cos\theta)]\,d\theta.$$

Così, per esempio, nel tiro al bersaglio, supponendo le deviazioni ugualmente facili in tutte le direzioni, la densità dei colpi alla distanza x dal centro è

$$\chi(x) = 4x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x\operatorname{sen}\theta)\,\varphi(x\cos\theta)\,d\theta,$$

dove $\varphi(x)\,dx$ rappresenta la probabilità che il projettile colpisca, sopra un raggio *dato*, l'intervallo $(x, x + dx)$. Ammessa la legge

$$\varphi(x) = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-k^2 x^2}$$

si perviene subito al risultato notissimo (*)

$$\chi(x) = 2\,k^2\,x\,e^{-k^2 x^2}.$$

Similmente, quando con velocità data si lancia un corpo nello spazio, in un determinato piano verticale, e si rappresenta con $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che, sulla traccia orizzontale del detto piano, il projettile cada nell'intervallo $(x, x + dx)$, si ha la prima delle seguenti uguaglianze

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{4\sqrt{1 - |x|}},$$

supponendo che si assuma ad unità il massimo valore di x: la seconda uguaglianza risponde all'ipotesi che l'angolo della verticale con la velocità iniziale abbia una densità uguale al proprio seno. Dunque la densità dei colpi sull'orizzonte, alla distanza x dal punto di partenza, ha una di queste forme:

$$\chi(x) = \frac{4\,x}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - x^2 \operatorname{sen}^2\theta)\,(1 - x^2 \cos^2\theta)}},$$

$$\chi(x) = \frac{x}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - x \operatorname{sen}\theta)\,(1 - x \cos\theta)}}.$$

La prima forma definisce la distribuzione dei colpi sull'orizzonte, supponendo il projettile lanciato, con data velocità, in un piano verticale arbitrario. Diversa è la distribuzione nel caso di projettili *lanciati ad arbitrio nello spazio*, ed è facile accorgersene osservando che, in questa ipotesi, la direzione verticale è possibile in un modo solo, mentre nel primo caso si presenta infinite volte. Nel

(*) Bertrand, *loc. cit.*, pag. 237.

secondo problema è la seconda forma della densità che bisogna adottare. Si ha così un altro esempio di risultati diversi, riferentisi apparentemente ad uno stesso problema, ma che non saranno mai scambiati fra loro da chi sa rettamente interpretare gli enunciati delle questioni proposte.

Quando, nel caso di infinite possibilità, viene a mancare l'ordinaria misura della probabilità mediante il limite d'una probabilità variabile, vi si supplisce considerando il *valore probabile* del limite stesso. Si è in tal modo condotti a sostituire al limite d'una successiono $a_1, a_2, a_3, \ldots$ il valor medio dei suoi termini, cioè, detta $\varphi(x)\,dx$ la probabilità che un termine, preso ad arbitrio, cada nell'intervallo $(x, x + dx)$ si assume

$$\mathfrak{M}\, a_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx$$

come ampliata misura del limite, osservando che si ha

$$\mathfrak{M}\, a_n = \lim_{n=\infty} .\, a_n$$

quando esiste il secondo membro. Le proprietà dei limiti sussistono generalmente sotto forme più vaste; ma alcune conservano la forma attuale. Per esempio, se si vuole il medio valore di $f(a_n)$, si ha in virtù della definizione, e richiamando un'osservazione precedente,

$$\mathfrak{M}\, f(a_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(g(x))\, d\, g(x),$$

dove $g(x)$ rappresenta la funzione inversa di $f(x)$: assumendola a variabile indipendente si ottiene

$$\mathfrak{M}\, f(a_n) = \int f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

fra limiti convenienti, e prescindendo sempre da eventuali restrizioni sulla natura della funzione. L'ultima eguaglianza non è che l'estensione dell'altra

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n),$$

ma non è subordinata, come questa, alla continuità di $f(x)$, intesa nel senso attuale. Se $\psi(x)$ è la densità dei termini di un'altra successione $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$, si ha

$$\mathfrak{M}(a_n + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x+y)\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy,$$

quindi

$$\mathfrak{M}(a_n + b_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x + \mathfrak{M}\, b_n)\,\varphi(x)\,dx = \mathfrak{M}\, a_n + \mathfrak{M}\, b_n.$$

Analogamente, osservando che

$$\mathfrak{M}\, a_n b_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,\varphi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy,$$

si ottiene subito

$$\mathfrak{M}\, a_n b_n = \mathfrak{M}\, a_n \cdot \mathfrak{M}\, b_n.$$

Ciò che si è detto per le funzioni di variabile intera sussiste in generale per tutte le funzioni. Così, dette φ e ψ le densità di u e v, i valori medii di queste funzioni sono

$$u_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx, \qquad v_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\psi(x)\,dx,$$

ed il valore medio di $w = u + v$ è

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,\chi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x-t)\,\psi(t)\,dx\,dt.$$

Ora si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x-t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x+t)\,\varphi(x)\,dx = u_0 + t,$$

e però .

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_0 + t)\, \psi(t)\, dt = u_0 + v_0.$$

Similmente, il valore medio di $w = uv$ è

$$w_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \chi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{t}\, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) \psi(t)\, dx\, dt\,,$$

ed essendo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{t}\, \varphi\left(\frac{x}{t}\right) dx = t \int_{-\infty}^{+\infty} x\, \varphi(x)\, dx = t u_0,$$

si ha pure

$$w_0 = u_0 \int_{-\infty}^{+\infty} t\, \psi(t)\, dt = u_0\, v_0.$$

Adunque le uguaglianze

$$\lim\,(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n, \quad \lim a_n\, b_n = \lim a_n \,.\, \lim b_n$$

sussistono intatte, purchè non interceda alcun vincolo fra a_n e b_n. Ed anche rimane vera la nota proprietà

$$\lim \frac{1}{n}\,(a_1 + a_2 + \ldots . + a_n) = \lim a_n$$

quando, almeno nel secondo membro, al simbolo *lim* si sostituisce $\mathfrak{M}$. Invece l'altra

$$\lim \sqrt[n]{a_1\, a_2\, a_3 \ldots . a_n} = \lim a_n$$

prende una forma più generale. Si ha infatti, se i termini son tutti positivi,

$$\mathfrak{M} \sqrt[n]{a_1\, a_2\, a_3 \ldots . a_n} = e^{\int_0^{\infty} \varphi(x) \log x\, dx}.$$

Ne segue che la prima delle uguaglianze

$$\mathfrak{M}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx,\quad \log \mathfrak{M}\sqrt[n]{u_n}=\int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx$$

trae seco la seconda. Osservando poi la disuguaglianza

$$\int_0^\infty \varphi(x)\log x\,dx<\int_0^\infty (x-1)\,\varphi(x)\,dx=\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx-1,$$

si vede che, se il primo valor medio è inferiore all'unità, altrettanto può dirsi del secondo. Ora sarebbe interessante esaminare se in questi casi la serie $u_1+u_2+u_3+\ldots$ è convergente nel senso lato, se cioè esiste il numero $\mathfrak{M}(u_1+u_2+\ldots+u_n)$. Ad analogo esame bisognerebbe sottoporre i varii criterii di convergenza, ed in particolare sarebbe utile indagare se il significato del simbolo $\mathfrak{M}$ si può talmente ampliare da rendere la condizione

$$\mathfrak{M}\,n\,u_n=0$$

necessaria per la convergenza, intesa nel senso più stretto. Qui si noti che, se $\varphi(x)$ è la densità di nu_n,

$$\mathfrak{M}\,|n\,v_n|=\int_0^\infty [\varphi(x)+\varphi(-x)]\,x\,dx:$$

il contegno di $\varphi(x)$ intorno allo zero può dunque influire sul convergere assoluto o semplice. É d'altronde naturale che per l'assoluta convergenza diventi necessario imporre a $\varphi(x)$ condizioni non richieste per la convergenza semplice, dal momento che a questa basta l'eguaglianza fra gli integrali

$$\int_0^\infty x\,\varphi(x)\,dx,\quad \int_0^\infty x\,\varphi(-x)\,dx,$$

mentre per quella si richiede inoltre l'annullamento simultaneo degli integrali stessi (*). Dalle considerazioni sinora svolte si scorge abbastanza come l'uso del concetto di probabilità nelle questioni di pura analisi valga a temperare con una giusta elasticità di vedute la soverchia rigidità matematica, e tenda inoltre a provocare il totale esplicamento dei concetti di *limite* e di *probabilità*. Infatti la più larga interpretazione data al criterio per la misura della probabilità, introdotta nella già ampliata nozione di limite, vi apporta una seconda estensione, da cui deriva novello impulso alla nozione di probabilità, e così le due generalizzazioni, aiutandosi a vicenda, progrediscono e parallelamente progredisce l'analisi tutta, grazie alle successive estensioni che ne ricevono i concetti di *integrabilità, continuità, derivabilità,* ecc..

Le considerazioni precedenti ci sono state suggerite da una corrispondenza tenuta a proposito di alcuni articoli, recentemente comparsi in questo periodico (**). Esse risolvono, in linea generale le difficoltà sollevate per l'indefinito crescere di N; ma, da un altro punto di vista, una nuova obbiezione ci è stata mossa dal sig. Vivanti nei seguenti termini: — « la teoria delle probabilità è nata da problemi pratici, ed i suoi risultati sono confermati dall'esperienza. Or che cosa ci dice l'esperienza riguardo ai problemi in cui il numero delle possibilità è infinito? Il ponte di passaggio fra la probabilità teorica e la pratica è costituito dalla *legge dei grandi numeri* di Poisson, la quale asserisce che, quando il numero delle prove sia assai grande, tutte le possibilità si presentano un numero pressochè uguale di volte; ma bisogna intendere questo enunciato nel senso che il numero delle prove sia assai grande *relativamente al numero dei casi possibili*. È dunque chiaro che la legge di Poisson non può applicarsi a problemi in cui il numero dei casi è infinito, giacchè, per quanto grande sia il numero delle prove, esso sarà sempre finito e quindi infinitamente più piccolo del numero delle possibilità ». Per noi l'obbiezione è oziosa, attesochè non riusciamo ad immaginarci alcun problema nel quale possa *non* essere

---

(*) Questa osservazione potrebbe fornire una troppo facile risposta a certe mal ponderate critiche del sig. Pringsheim (*Mathematische Annalen*, XXXV B., p. 348), le cui rimanenti esigenze si riducono in sostanza a ben poco, a volere cioè che gli avverbii, *difficilmente, eccezionalmente, semplicemente, comunemente*, ecc., si riferiscano, non al patrimonio matematico acquisito, ma a quello che esiste anche fuori delle nostre attuali conoscenze, come se nell'*esporre* una ricerca non fosse lecito usare i vocaboli nel loro più *intelligibile* significato.

(**) Articoli dei signori *Murer, Rindi, Frattini, Giudice* (1889, p. 161; 1890, pp 41, 72, 73) finito il *numero* delle possibilità, e d'altra parte il valore della probabilità, cui si riferisce la legge di Poisson, non è mai il numero p, misura della probabilità limite, ma un numero che da p differisce tanto poco quanto si vuole, e quindi anche meno di quantità inaccessibili alla misura sperimentale. Del resto il numero delle prove si può sempre supporre arbitrariamente grande, ed alla legge di Poisson, considerata teoricamente, non importa che le prove siano effettive, basta che siano possibili. Considerata poi praticamente, quella legge non è da riguardarsi come richiedente una sanzione sperimentale cui debba per necessità sottoporsi la teoria, ma vuole al contrario esser presa come una garanzia del calcolo contro eventuali esperimenti, in quanto indica la condizione cui va soggetto il risultato dell'esperienza perchè valga a scuotere la fiducia nel corrispondente risultato teorico. D'altronde, dal punto di vista sperimentale, perchè sia lecito impiantare una determinata teoria è sufficiente che questa non urti i risultati dell'esperienza, ma non è necessario che da essi riceva una diretta ed effettiva conferma. Se così non fosse, occorrerebbe respingere *a priori* tutte le teorie della fisica matematica, ed in ispecie quelle, tanto utili e così attraenti, che concernono l'intimo giuoco delle molecole. Occorrerebbe dunque condannare la teoria delle probabilità, nel caso di N infinito, sol perchè non è possibile, secondo il sig. Vivanti, sottoporla ad esperimento, e ciò in omaggio alla legge di Poisson, mentre questa ci avverte che bisogna eventualmente negar fiducia ai risultati delle prove, non a quelli del calcolo, che andrebbero soggetti al solo controllo della pura logica qualora fra questa e l'esperienza venisse a a mancare il « ponte di passaggio » indicato dal sig. Vivanti. Ma, si rassicurino tutti, questo *ponte* non manca mai.

Ed è appunto la legge dei grandi numeri che garantisce dai sarcasmi del Bertrand e dalle invettive di Stuart Mill le più ardite applicazioni del calcolo delle probabilità. Quasi tutte le piacevolezze critiche dell'illustre matematico francese riposano infatti sull'*isolamento* di qualche caso, val quanto dire su violazioni più o meno aperte della legge di Poisson. Così, in una possibile applicazione delle matematiche alla ricerca delle leggi storiche, è facile mettere in ridicolo chi dalla teoria cerca trarre indizii sulla probabilità d'un avvenimento, non suscettibile di ripetersi identicamente; ma prima il critico noti che, nel computo delle possibilità *a priori*, il calcolatore non tiene presente quell'unico fatto, ma lo schiera fra moltissimi altri già compiuti, assimilabili all'avvenimento aspettato per analogia di circostanze, di persone, di ragioni determinanti, di eventi precursori, ecc. Un tal calcolo si compie ogni giorno nella mente dello statista, ed il successo arride a chi, osservando inconsciamente la legge di Poisson, sa più giudiziosamente far tesoro d'un maggior numero di riflessioni sugli eventi del passato. Propizia è la sorte a chi pensa col Bertrand che « le hasard est sans vertu » e che « impuissant dans les grandes affaires, il ne trouble que les petites ». Simili calcoli mentali di probabilità sono comuni e frequenti. Senza dubbio è grande l'ardire di chi tenta dar loro forma matematica, poichè facilmente si erra in problemi dominati da una grande mobilità di condizioni e da una confusa abbondanza di dati, che in gran parte sfuggono all'analisi minuziosa e meglio si prestano ad essere con rapida intuizione sintetizzati. Ma chi può vantarsi di esser giunto a scoprire qualche verità fondamentale senza aver attraversato selve di errori? Prorompano dunque libere e svelte le applicazioni della matematica per tutte le vie che trovansi aperte all'indagine scientifica, ed allo scherno dei critici si risponda, con un geniale poeta: « .... puissiez-vous trouver, quand vous en voudrez rire, — à dépecer nos vers le plaisir qu'ils nous font! — Qu'importe leur valeur? La muse est toujours belle, — même pour l'insensé, même pour l'impuissant; — car sa beauté pour nous c'est notre amour pour elle » (*).

Avvertenza. — In questo ed in altri (**) lavori sulle applicazioni puramente matematiche del calcolo delle probabilità abbiamo sempre dato il nome di *valore probabile* di x alla media aritmetica di tutti i possibili valori di x, fondandoci sulla considerazione che questa media, quando x rappresenta una somma eventuale, misura l'*importanza* della somma stessa, ed è in qualche modo il valore che *si spera* (e sembra quindi probabile) veder prendere ad x. Ma alla medesima denominazione si attribuisce un significato ben diverso nella teoria degli errori,

(*) A. de Musset. *Namouna* (Chant deuxième).
(**) « *Sui canoni del calcolo degli addensamenti e su alcune loro applicazioni* ». Rendiconti dell'Istituto Lombardo, 1891.

nelle questioni di mortalità, ecc., e ci sembra perciò più conveniente lasciare al numero $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\varphi(x)\,dx$ il nome di *media* dei valori di x, cui si può anche, nella teoria generale, dare il nome di *valor medio* di x, benchè queste ultime denominazioni non abbiano, nella particolare teoria degli errori, ugual significato. Il valore probabile α sarà invece definito dall'eguaglianza

$$\int_{\alpha}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2};$$

esso è appunto ciò che Poisson ed altri chiamano impropriamente valor medio. In ulteriori lavori avremo cura di adottare le denominazioni generalmente adoperate.

SUI LIMITI

1. Per la ricerca di limiti si conoscono molti particolari artifici che possono essere utilmente impiegati da chi ha pratica di calcolo (*). La seguente osservazione può riuscire di gran giovamento in molti casi: Se s'incontrano difficoltà per la determinazione del limite d'una somma, o d'un prodotto, si tenti una conveniente scomposizione in somme, o prodotti, parziali con opportune trasformazioni.

Sia proposto ad esempio

$$\lim_{x=\infty} . \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots\dots + \frac{1}{hx}\right]$$

Essendo

$$l\,\frac{x+p+1}{x+p} = l\left(1+\frac{1}{x+p}\right) = \frac{1}{x+p} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x+p}\right)^2 + \dots\dots$$

(*) V. p. es. *Uebungsbuch zum studium der Höheren Analysis* von Dr. Oskar Schlömilch. Leipzig, 1888.

possiamo porre

$$l\,\frac{x+p+1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{\lambda(p)}{(x+p)^2}\qquad 0<\lambda(p)<\frac{1}{2}$$

epperò:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\dots\dots+\frac{1}{hx}$$

$$=l\,\frac{x+2}{x+1}+l\,\frac{x+3}{x+2}+\dots+l\,\frac{hx+1}{hx}+\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\frac{\lambda(2)}{(x+2)^2}+\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}$$

$$=l\,\frac{hx+1}{x+1}+\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\frac{\lambda(2)}{(x+2)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}$$

ma è

$$\lim_{x=\infty} l\,\frac{hx+1}{x+1}=l\,h$$

ed, essendo $\qquad 0<\lambda(p)<\frac{1}{2},\qquad$ è:

$$0<\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}<\frac{1}{2}\,\frac{(h-1)x}{(x+1)^2}<\frac{h-1}{2x}$$

per cui è

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{\lambda(1)}{(x+1)^2}+\dots\dots+\frac{\lambda(hx-x)}{h^2x^2}\right]=0$$

$$\lim_{x=\infty}\left[\frac{1}{x+1}+\dots\dots+\frac{1}{hx}\right]=l\,h.$$

Sia ora proposto

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{hx}\right).$$

Essendo

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+p}\right)^3+\dots\dots$$

possiamo porre

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{1}{x+p}-\frac{\mu(p)}{(x+p)^3}\qquad 0<\mu(p)<\frac{1}{3}.$$

Avremo così:

$$1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+p}=\frac{x+p+1}{x+p}-\frac{\mu(p)}{(x+p)^3}=\frac{x+p+1}{x+p}\cdot\left(1-\frac{\mu(p)}{(x+p)^2(x+p+1)}\right)$$

$$\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{kx}\right)$$

$$=\frac{x+2}{x+1}\cdot\frac{x+3}{x+2}\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\frac{kx+1}{kx}\cdot\left(1-\frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)$$

$$\cdot\left(1-\frac{\mu(2)}{(x+2)^2(x+3)}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)$$

$$=\frac{kx+1}{x+1}\cdot\left(1-\frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)$$

ma è

$$\lim_{x=\infty}.\ \frac{kx+1}{x+1}=k$$

ed, essendo $\qquad 0<\mu(p)<\frac{1}{3},\qquad$ è:

$$1>\left(1-\frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)$$

$$>\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{(kx-1)(kx+1)}{k^2x^2}$$

$$=\frac{x}{x+1}\cdot\frac{kx+1}{kx}$$

per cui è

$$\lim_{x=\infty}.\left(1-\frac{\mu(1)}{(x+1)^2(x+2)}\right)\cdot\ldots\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{\mu(kx-x)}{k^2x^2(kx+1)}\right)=1$$

$$\lim_{x=\infty}.\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+1}\right)\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x+2}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{kx}\right)=k.$$

(Continua).

F. GIUDICE.

PICCOLE NOTE E SUNTI DI NOTE

Somma degli angoli di un poligono piano. — Negli *Elemente der Geometrie der Ebene* del Sig. KRUSE trovasi esposta questa teoria in modo che parmi non intieramente esatto. Credo perciò opportuno trattare l'argomento interessante con quelle modificazioni che mi son parse necessarie.

L'A. considera un n–gono qualunque come generato da rotazioni di una retta e da un punto mobile su di essa, in modo che ciascuno dei due movimenti avvenga sempre in uno stesso senso; e poichè la retta compie un numero intero r di *giri* (bene inteso nell'ipotesi euclidea), si avrà, indicando con S_n la somma degli angoli descritti dalla retta, $S_n = 4\,r\,R$, dove $1 \leq r \leq n - 1$. Inoltre la somma dell'ang. descritto dalla retta e dell'ang. ad esso adiacente (intendendosi sempre per ang. adiacente ad un dato la rotazione positiva che deve descrivere la direzione positiva del secondo lato per soprapporsi alla direzione negativa del primo) è $2\,R$ o $6\,R$, secondochè la retta ruota di un ang. convesso ($< 2\,R$) o di un ang. concavo ($> 2\,R$). Ora sia P_n la somma di tutti gli angoli adiacenti suddetti, cioè degli angoli su di una stessa banda dell'n-gono, dei quali p concavi; avremo

$$P_n + S_n = 6\,p\,R + 2\,(n - p)\,R = 2\,(n + 2\,p)\,R$$

ovvero

$$P_n = 2\,[n + 2\,(p - r)]\,R = P_{n\,(p,\,r)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad [1]$$

cioè P_n dipende da n, p ed r. Sia r' il numero dei giri corrispondenti agli angoli sull'altra banda; su questa ci sono invece $n - p$ angoli concavi, e quindi

$$P_{n\,(n-p,\,r')} = 4\,n\,R - 2\,[n + 2\,(p - r)]\,R = 2\,[n + 2\,(n - p) - 2\,r']\,R,$$

donde $r' = n - r$ (come è facile vedere anche direttamente), e quindi

$$P_{n\,(n-p,\,n-r)} = 2\,[n + 2\,(r - p)]\,R = P_{n\,(r,\,p)}, \text{ cioè:}$$

Se nell'espressione della somma degli angoli su di una banda dell' n*-gono si permutano* p *ed* r*, si ha la somma degli angoli sull'altra banda.*

Dalla limitazione evidente $p\,(2\,R) < P_{n\,(p,\,r)} < (n - p)\,(2\,R) + p\,(4\,R)$, si ricava per la [1]

$$\frac{p}{2} < r < \frac{p+n}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad [2]$$

Tuttavia *non si può supporre* $p = r = 1$. Infatti (*), sia $A_0\,A_1 \ldots A_{n-1}$ un n-gono pel quale, se è possibile, $p = r = 1$, e $A_0\,X_0, A_1\,X_1, \ldots, A_{n-1}\,X_{n-1}$ i prolungamenti dei suoi lati $A_{n-1}\,A_0, A_0\,A_1, \ldots, A_{n-2}\,A_{n-1}$ nelle direzioni positive. Sia A_1 l'ang. concavo, e per $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ si conducano le direzioni $A_1\,Z_1, A_2\,Z_2, \ldots, A_{n-2}\,Z_{n-2}$ parallele ad $A_0\,X_0$ e nello stesso verso. La direzione $A_1\,A_2\,X_2$ cadrà nell'ang. convesso $A_0\,A_1\,Z_1$, poichè l'ang. $A_0\,A_1\,A_2$ è concavo e la somma delle due rotazioni in A_0 e A_1 dev'essere p. i. $< 4\,R$. La direzione $A_2\,A_3\,X_3$ cadrà nell'ang. convesso $X_2\,A_2\,Z_2$, poichè la somma delle tre rotazioni in A_0, A_1, A_2 dev'essere p. i. $< 4\,R$; per ciò stesso la direzione $A_3\,A_4\,X_4$ cadrà nell'ang. convesso $X_3\,A_3\,Z_3$, e così via. Adunque tutti i vertici $A_2, A_3, \ldots, A_{n-1}$ cadranno dalla stessa banda della retta $A_0\,A_1\,X_1$ e proprio in quella ove cade $A_0\,X_0$; il che è assurdo, dovendo A_{n-1} cadere necessariamente dall'altra banda.

Considereremo della *stessa specie* quegli n-goni pei quali sull'una o sull'altra banda p ed r sono i medesimi. Allora per contare queste specie basterà degli

(*) In questa dimostrazione e nelle seguenti mi distacco interamente dall'A.

$n+1$ valori di p $(0, 1, \ldots, n)$ considerare soltanto quelli $\leq \frac{n}{2}$, perchè gli altri appartengono agli stessi n–goni presi dall'altra banda. Ciò posto, sia n *pari*. — La limitazione [2] dà allora per p *pari* $\frac{n}{2}-1$ valori di r, e per p *dispari* ne dà $\frac{n}{2}$. Ora, se $\frac{n}{2}$ è *pari* il numero dei valori dispari di p è $\frac{n}{4}$, e quindi avremo in tutto $\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n}{4}$ coppie di valori di p ed r. Ma per $p=\frac{n}{2}$ i corrispondenti valori di r sono

$$\frac{n}{4}+1,\ \frac{n}{4}+2, \ldots\ldots, \frac{n}{2}, \ldots\ldots, \frac{n}{4}+\frac{n}{2}-1,$$

e in questa serie la somma di due termini equidistanti dal medio $\frac{n}{2}$ è uguale ad n; perciò le r di ognuna di queste coppie corrispondono alle due bande dello stesso n–gono, essendochè in questo caso p è il medesimo per le due bande. Così per $p=\frac{n}{2}$ possono intanto trascurarsi $\frac{n}{4}-1$ coppie di valori di p ed r; e poichè non può essere $p=r=1$, si possono anzi trascurare $\frac{n}{4}$ di tali coppie. Si ottengono perciò in questo caso *al più*

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

specie di n–goni. Se invece $\frac{n}{2}$ è *dispari*, il numero dei valori dispari di p è $\frac{\frac{n}{2}-1}{2}+1=\frac{n+2}{4}$, e quindi avremo in tutto $\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)+\frac{n+2}{4}$ coppie di valori di p ed r. Per $p=\frac{n}{2}$ i corrispondenti valori di r sono

$$\frac{n+2}{4},\ \frac{n+2}{4}+1, \ldots\ldots, \frac{n}{2}, \ldots\ldots \frac{n+2}{4}+\frac{n-2}{2},$$

cioè in numero di $\frac{n}{2}$. Anche qui la somma di due termini equidistanti dal medio $\frac{n}{2}$ è uguale ad n, e perciò con lo stesso ragionamento fatto sopra si vede che per $p=\frac{n}{2}$ sono qui da trascurare $\frac{n-2}{4}$ coppie di valori di p ed r; trascurando inoltre $p=r=1$, si ottengono di nuovo al più

$$\left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

specie di n–goni.

Sia poi n *dispari*. — La limitazione [2] dà allora per ogni valore di p $\frac{n-1}{2}$ valori di r. Si hanno così in tutto $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}$ coppie di valori di p ed r, e trascurando anche qui $p = r = 1$, si ottengono al più $\frac{n+1}{2} \cdot \frac{n-1}{2} - 1$ specie di n-goni. Resta così provato che *in tutti i casi, diminuendo di* 1 *il prodotto del numero dei numeri pari per quello dei numeri dispari nella serie dei numeri naturali da* 1 *a* n, *si ottiene un risultato non minore del numero delle specie di* n*-goni* (*).

I poligoni in cui $r - p = 0$ diconsi *rovesciabili* (*überschlagen*), perchè hanno eguali le somme degli angoli dalle due bande. I poligoni, che da quella banda per la quale $p \leq \frac{n}{2}$ dànno $r - p = 1$, diconsi *comuni;* sono comuni p. e. tutti i poligoni a contorno non intrecciato, ma non inversamente.

Oltre alla questione fatta nella nota (*) propongo al lettore la seguente:

Da quali caratteri del contorno del poligono si può desumere direttamente il valore di r?

Foggia, gennaio 1891. G. Rozzolino.

SOLUZIONI DELLE QUISTIONI
69*, 70*, 72*, 76, 75^bis, 76^bis

69*. *In un quadrilatero qualunque circoscritto ad un cerchio, la differenza dei rettangoli dei lati opposti è uguale al rettangolo della somma e della differenza delle congiungenti i punti medi dei lati opposti.*

(U. Dainelli).

Soluzione del Sig. *G. M. Nobile*, allievo del R. Istituto tecnico di Chieti.

Sia $ABCD$ un quadrangolo circoscritto a un cerchio e sieno M, N, P, Q i punti medî dei lati AB, BC, CD, DA; MP, NQ, per nota proprietà di un quadrangolo qualunque, si dimezzano scambievolmente in un punto O.

Essendo OM, OP mediane dei triangoli AOB, COD si hanno le eguaglianze:

$$\frac{1}{2}\overline{AB}^2 + 2 \, . \, \overline{OM}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2, \quad \frac{1}{2}\overline{CD}^2 + 2 \, . \, \overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$$

dalle quali, sommando e ricordando che $OM = OP = \frac{1}{2} MP$, si deduce:

(*) Secondo l'A. questo risultato è proprio il numero delle specie di n-goni; ma, secondo me, resta a provare che per ciascuna delle coppie di valori di p ed r ammissibili esiste effettivamente un n-gono.

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2\right) + \overline{MP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2;$$

analogamente:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{DA}^2\right) + \overline{NQ}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2$$

e dal confronto delle ultime due eguaglianze:

$$\frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{CD}\right)^2 + \overline{MP}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}^2 + \overline{DA}^2\right) + \overline{NQ}^2 \ldots\ldots (\alpha)$$

Ora, essendo il quadrangolo circoscritto a un cerchio, è:

$$AB + CD = BC + DA;$$

quadrando, dividendo per 2 e sottraendo da (α):

$$\overline{MP}^2 - AB \,.\, CD = \overline{NQ}^2 - BC \,.\, DA.$$

Donde

$$AB \,.\, CD - BC \,.\, DA = (MP - NQ)(MP + NQ)$$

che dimostra il teorema (*).

70*. *Sommando la serie finita*

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots + nx^{n-1}$$

e facendo poi $x = \dfrac{n+1}{n}$, *si ottiene l'identità:*

$$1 + 2\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

(U. Dainelli).

Soluzione del Sig. *P. Marano* studente privato a Catania (**).

La serie proposta può scriversi nel seguente modo:

$$\begin{array}{r}
1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\
+ x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ x^{n-2} + x^{n-1} \\
+ x^{n-1}
\end{array}$$

I termini d'ogni riga costituiscono una progressione geometrica il cui quoziente è x. Sommando perciò queste progressioni ed addizionando le somme ottenute, si ha:

(*) Inviarono soluzioni sostanzialmente analoghe i Sigg. *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *R. Bencivenga* (Collegio militare Roma), *O. Manfredi* (R. Istituto tecnico Reggio Emilia).

(**) Analoghe soluzioni pervennero dai Sigg. *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *R. Bencivenga* (Collegio militare Roma), *G. Bitonti* (Istituto tecnico Catanzaro), *S. Lopriore* (R. Liceo Bari), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti).

$$\frac{n x^n - \left\{ 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \right\}}{x - 1}$$

che si riduce ad $\dfrac{x^n \left\{ xn - n - 1 \right\} + 1}{(x-1)^2}$. Ponendo qui $x = \dfrac{n+1}{n}$ si ottiene, fatta ogni riduzione, n^2.

Così resta dimostrato che:

$$1 + 2\left(\frac{n+1}{n}\right) + 3\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \ldots\ldots + n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = n^2.$$

72*. *Pei centri* A *e* B *di due circoli eguali e tangenti esternamente in* F, *e dalla stessa parte di* AB, *si conducono i raggi* AC, BD *paralleli fra loro; su* CD, *come diametro, si descrive un mezzo cerchio esternamente ai cerchi dati, si ottiene così una figura (drepanoide) formata dal suddetto mezzo cerchio e dagli archi* FC, FD. *Mostrare che il raggio* ρ *del cerchio inscritto nel drepanoide è legato al raggio* r *dei cerchi dati ed all'angolo* $ABD = \alpha$, *dalla relazione*

$$\rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha}$$ (G. Russo).

Soluzione del Sig. *R. Bencivenga*, allievo del Collegio militare di Roma (*).

Sia O il centro del cerchio inscritto nel drepanoide. Essendo $OA = OB$, sarà OF perpendicolare ad AB. Inoltre se si chiama H il centro del mezzo cerchio descritto su CD come diametro, HO passerà pel punto di contatto di quest'ultimo semicerchio col cerchio inscritto O. — Ciò posto dal triangolo OFH, si ha:

$$\overline{OH}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FH}^2 - 2\, OF \,.\, FH \cos OFH,$$

ma $OH = (r - \rho)$, $OF = \sqrt{\overline{OB}^2 - r^2} = \sqrt{\rho^2 + 2r\rho}$, $FH = r$, $\cos OFH = \operatorname{sen} HFB = \operatorname{sen} \alpha$, talchè sostituendo risulta:

$$(r-\rho)^2 = \rho^2 + 2r\rho + r^2 - 2r\sqrt{\rho^2 + 2r\rho} \,.\, \operatorname{sen} \alpha$$

e, riducendo:

$$2\rho = \operatorname{sen} \alpha \sqrt{\rho^2 + 2r\rho}.$$

Da questa equazione, quadrando e risolvendo rispetto a ρ, si ottiene:

$$\rho = \frac{2r \operatorname{sen}^2 \alpha}{4 - \operatorname{sen}^2 \alpha}.$$

(*) Inviarono soluzioni di questa questione pure *C. Aiello* (R. Liceo V. E. Napoli), *G. M. Nobile* (R. Istituto tecnico Chieti).

76. *Trovare una relazione tra i coseni degli angoli* A′AB, B′BC, C′CA *che le rette* AA′, BB′, CC′, *fra loro parallele e situate da una stessa banda del piano* ABC, *formano coi lati* AB, BC, CA *del triangolo* ABC, *supposto equilatero.* (D. Besso).

Soluzione del Sig. Prof. *R. Bettazzi.*

Proponiamoci il problema nel caso più generale in cui il triangolo ABC sia qualunque. Sieno A, B, C gli angoli di questo, P, Q, R rispettivamente i tre angoli $B'BC$, $C'CA$, $A'AB$ indicati nell'enunciato; α, β, γ i diedri colle costole rispettive BC, CA, AB, formati ciascuno dal semipiano contenente il triangolo ABC, e da quello delle due relative semiparallele date.

In A si avrà un triedro le cui facce sono R, A, $\pi - Q$ ed in cui il diedro opposto ad R è β: in C un altro triedro colle facce Q, C, $\pi - P$, in cui il diedro opposto a $\pi - P$ è pure β. Le note formole fondamentali della Trigonometria Sferica danno in questi due triedri:

$$\cos R = \cos A \cos(\pi - Q) + \operatorname{sen} A \operatorname{sen}(\pi - Q) \cos\beta$$
$$\cos(\pi - P) = \cos C \cos Q + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} Q \cos\beta$$

ossia, riducendo,

$$\cos R = -\cos A \cos Q + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} Q \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots [1]$$
$$-\cos P = \cos C \cos Q + \operatorname{sen} C \operatorname{sen} Q \cos\beta. \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

Moltiplicando [1] per sen C, [2] per sen A, sottraendo, e riducendo coll'osservare che $\operatorname{sen}(A + C) = \operatorname{sen}(180^0 - B) = \operatorname{sen} B$, si ha:

$$\cos R \operatorname{sen} C + \cos P \operatorname{sen} A = -\cos Q \operatorname{sen} \beta$$

da cui

$$\operatorname{sen} A \cos P + \operatorname{sen} B \cos Q + \operatorname{sen} C \cos R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots [3]$$

che è la relazione cercata; essa, per uno stesso triangolo e qualunque sia la direzione delle parallele, può indicarsi così:

$$p \cos P + q \cos Q + r \cos R = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [4]$$

dove p, q, r sono tre costanti proporzionali a sen A, sen B, sen C.

Nel caso speciale del triangolo equilatero, sarà $A = B = C$, e quindi $p = q = r$, e la [3] e la [4] diverranno:

$$\cos P + \cos Q + \cos R = 0$$

Osservazione. — Nella [4] in luogo di p, q, r si possono porre i tre lati a, b, c del triangolo ABC, che sono appunto proporzionali a sen A, sen B, sen C: allora la [4] diviene:

$$a \cos P + b \cos Q + c \cos R = 0$$

ed esprime che « la somma delle proiezioni dei lati del triangolo dato su quella « delle parallele con cui concorre a formare l'angolo indicato nel problema, è « nulla, quando si considerino di segno opposto le proiezioni che stanno da « parti opposte del piano » giacchè tali proiezioni sono da un lato o dall'altro, secondochè l'angolo relativo P, Q, R è acuto od ottuso.

Soluzione del Sig. Prof. *G. Riboni.*

1.° Sieno ang. $A'AB = \alpha_1$ $B'BC = \alpha_2$, $C'CA = \alpha_3$. Se si considera il triedro in A (le cui facce sono $CAA' = \pi - \alpha_3$, $A'AB = \alpha_1$, $BAC = \frac{\pi}{3}$), per la nota relazione fra tre facce ed un diedro, si ha:

$$\cos(\pi - \alpha_3) = \cos\alpha_1 \cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\alpha_1 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cos\overline{AB}$$

($\overline{AB}$ è il diedro opposto alla faccia $\pi - \alpha_3$). Similmente dal triedro in B (le cui facce sono $ABB' = \pi - \alpha_1$, $B'BC = \alpha_2$, $CBA = \frac{\pi}{3}$) si ha:

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \alpha_1)\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}(\pi - \alpha_1)\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos\overline{AB}.$$

Eliminando $\cos\overline{AB}$ dalle due relazioni e riducendo si ha:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0.$$

2.° Si consideri ora un poligono regolare $ABCD \ldots H$ di n lati e si conducano le AA', BB', ... HH' parallele e nella stessa direzione e sieno ang. $A'AB = \alpha_1$, $B'BC = \alpha_2$, $C'CD = \alpha_3$ ..... $H'HA = \alpha_n$.

Dai triedri in A ed in B, analogamente a quanto si è fatto più sopra, coll'eliminazione di $\cos\overline{AB}$ si ottiene:

$$\cos\alpha_n + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = 0,$$

dai triedri in B ed in C, eliminando $\cos\overline{BC}$, si ha:

$$\cos\alpha_1 + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = 0$$

e così di seguito fino a considerare i triedri in H ed in A, da cui si otterrà:

$$\cos\alpha_{n-1} + 2\cos\frac{n-2}{n}\pi\cos\alpha_n + \cos\alpha_1 = 0.$$

Sommando le relazioni ottenute e riducendo si ha:

$$2\left(1 + \cos\frac{n-2}{n}\pi\right)(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n) = 0$$

e poichè $1 + \cos\frac{n-2}{n}\pi$ non può essere nullo, dovrà essere:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots.. + \cos\alpha_n = 0$$

ossia la relazione più sopra trovata si estende al caso di un poligono regolare qualunque.

Osservazione. — Se AA', BB', ... HH' sono gli spigoli laterali di un prisma e si immagina che un osservatore percorrendo il contorno della base in un dato senso proietti ciascuno spigolo laterale sul corrispondente lato della base, la somma di queste proiezioni (detta s la lunghezza di uno spigolo) è data da:

$$s(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n)$$

che, in causa della relazione già trovata, è nulla (*).

75[bis]. *Dimostrare che, se ciascun lato d'un triangolo sferico viene diviso in due segmenti in modo che il prodotto dei coseni di tre segmenti non consecutivi sia eguale al prodotto dei coseni degli altri tre, i circoli massimi perpendicolari ai tre lati condotti pei rispettivi punti di divisione passano per gli estremi di uno stesso diametro.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *F. Viaggi* (**).

Sia il triangolo sferico ABC i cui lati AB, BC, CA sieno divisi nei punti C', A', B' in modo che

$$\frac{\cos AC'}{\cos BC'} \cdot \frac{\cos BA'}{\cos CA'} \cdot \frac{\cos CB'}{\cos AB'} = 1 \quad \ldots\ldots \quad [\alpha]$$

Sui lati AB, BC, CA si prendano i punti C_1, A_1, B_1 tali che $C'C_1$, $A'A_1$, $B'B_1$ sieno quadranti; si ha

$$AC' = AC_1 - C'C_1 \qquad BC' = BC_1 - C'C_1$$

donde

$$\cos AC' = \operatorname{sen} C'C_1 \,.\, \operatorname{sen} AC_1 \qquad \cos BC' = \operatorname{sen} C'C_1 \,.\, \operatorname{sen} BC_1$$

e quindi

$$\frac{\cos AC'}{\cos BC'} = \frac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} BC_1}.$$

In virtù della ultima uguaglianza e delle analoghe la condizione $[\alpha]$ si trasforma nella seguente

$$\frac{\operatorname{sen} AC_1}{\operatorname{sen} BC_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} BA_1}{\operatorname{sen} CA_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} CB_1}{\operatorname{sen} AB_1} = 1$$

la quale prova (cf. *Trig.* del Baltzer § 7, 6) che A_1, B_1, C_1 sono su un circolo massimo; perciò i circoli massimi di cui A_1, B_1, C_1 sono poli, e che sono quindi perpendicolari in A', B', C' ai lati del triangolo dato, passano pei poli del circolo $A_1 B_1 C_1$.

76[bis]. *Dimostrare che, se in un esagono convesso equilatero sono eguali fra loro le congiungenti le coppie di vertici opposti, queste congiungenti devono passare per uno stesso punto.* (D. Besso).

Dimostrazione del Sig. Prof. *S. Gatti*.

Osservo primieramente che si può giungere ancora a questa conclusione restringendo in parte l'ipotesi del teorema. — Infatti nell'esagono convesso $ABCDEF$,

(*) Soluzioni di questa quistione vennero pure inviate dai Sigg. Prof. *S. Catania, L. Mariscotti, F. Palatini, F. Viaggi*.

(**) Altre dimostrazioni furono inviate dai Prof. *S. Catania, A. de Zolt, L. Mariscotti* e dall'alunno *G. Fumanti* del R. Istituto tecnico di Roma.

siano ordinatamente uguali i lati opposti AF, CD, le congiungenti AD, CF le coppie di vertici opposti A, D; C, F ed i lati AB, BC, concorrenti in B, non che i lati FE, ED, concorrenti nel vertice F, opposto a B: dico che la congiungente BE passa pel punto d'intersezione O delle diagonali AD, CF.

Conducendo AC, BO, OF e considerando le coppie di triangoli ACF, ACD; AOB, BOC; FOE, EOD, la prima coppia, per essere $AF = CD$, $FC = DA$ e lato AC comune, mostra che ang. $ACF = CAD$ e per conseguenza che $AO = OC$, $OD = OF$. La seconda e terza coppia, costituite dopo ciò da triangoli coi lati eguali, conducono alla conseguenza che BO, EO sono bisettrici degli angoli opposti al vertice COA, FOD, e così le congiungenti i vertici opposti dell'esagono considerato passano per uno stesso punto.

Osservazioni. — 1.° Nel caso che si avverino tutte le condizioni espresse nella quistione proposta, dalla dimostrazione precedente, discende che CF è bisettrice degli angoli DOB, AOE e che quindi gli angoli in O sono tutti eguali all'angolo del triangolo equilatero, come pure che le tre diagonali sono bisettrici degli angoli dell'esagono ai cui vertici hanno termine. Sono poi eguali i sei triangoli AOB, BOC, ..., eguali gli angoli dell'esagono di posto dispari e quelli di posto pari ed eguali le distanze da O dei tre vertici di posto dispari e quelle dei vertici di posto pari.

2.° La costruzione dell'esagono considerato nell'enunciato, dati che siano il lato e la congiungente di due vertici opposti, dipende evidentemente, dopo ciò che si è detto, da quella del noto problema: costruire un triangolo conoscendone un angolo, il lato opposto e la somma degli altri due.

3.° Emerge pure dalle considerazioni precedenti che se un esagono convesso equilatero ha uguali gli angoli di posto dispari ed uguali gli altri tre, le congiungenti le coppie di vertici opposti devono essere uguali e passare per uno stesso punto.

I Sigg. Prof. *S. Catania* e *F. Viaggi*, che pure inviarono soluzioni di questa questione, osservano che i due triangoli ACE, DFB sono omotetici inversi rispetto al centro O (*).

Si dichiara inoltre ricevimento delle soluzioni seguenti: quistione **80.** dal Sig. *A. Baldassarre, S. Catania, A. Ceci, A. Giuffra, L. Mariscotti, A. Ognissanti, F. Palatini, A. Perna, G. Riboni, G. Rozzolino, G. Russo, G. Santorelli, D. Taverna, F. Viaggi*; **81*.** *G. Calvitti, A. Ceci, C. Lavarello, A. Longo, P. Marano, S. Marvasi, A. Ognissanti, A. Perna, G. Santorelli, G. Trapani*; **82*.** *G. Calvitti, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, G. Federici, A. Longo, A. Ognissanti, A. Perna*; **83.** *U. Scarpis*; **84.** *U. Scarpis, F. Viaggi*; **85.** *G. Calvitti, S. Catania, A. Ceci, F. Palatini, A. Perna, G. Riboni, G. Russo, F. Viaggi*; **86*.** *A. Baldassarre, G. Calvitti, A. Ceci, C. Chigiotti, A. Dal Buono Sidoli,*

(*) Altre soluzioni pervennero dai Sigg. Prof. *L. Mariscotti, R. Catani* e *G. Fumanti* (alunni del R. Istituto tecnico Roma), *A. de Fulco* (alunno R. Istituto tecnico Napoli).

A. de Falco, C. Ghetti, E. Goti, E. La Fianza, A. Longo, P. Marano, A. Ognissanti, G. Paoli, A. Perna, P. Viscidi; **87*.** *M. Appugliese, A. Baldassarre, A. Ceci, A. Longo, A. Perna;* **88*.** *A. Baldassarre, N. Bottini, G. Calvitti, A. Ceci, A. Dal Buono Sidoli, A. Gandolfi, E. Goti, E. La Fianza, N. Leo, A. Longo, P. Marano, A. Mucci, A. Ognissanti, G. Paoli, A. Perna, T. Rebollo, G. Roccheth, G. Santorelli, O. Scilla, D. Taverna, G. Trapani, P. Viscidi;* **89.** *G. Riboni, F. Viaggi;* **90*.** *G. Calvitti, A. Ceci, C. Lavarello, A. Longo, C. Magretti, A. Ognissanti, L. Pece* — soluzioni alle quali verrà data evasione nei venturi fascicoli.

La Redazione.

QUISTIONI PROPOSTE (*)

91*. Dimostrare che $13453^7 - 13452^7 - 1$ è divisibile per 180969757.

92*. Risolvere l'equazione

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0.$$

D. Besso.

93*. Se A, B, C indicano gli angoli d'un triangolo, m, m', m'' le sue mediane, e si pone $\operatorname{tang} A : \operatorname{tang} B : \operatorname{tang} C = p : q : r$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{t}$, dimostrare che si ha:

$$m^2 : m'^2 : m''^2 = \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{p}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{q}\right) : \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{r}\right).$$

A. Lugli.

94. Se nel piano di una conica di centro O sono dati due punti M ed N, e P e Q sono rispettivamente i punti d'incontro delle polari di M ed N coi diametri NO ed MO, i triangoli MOP ed NOQ sono equivalenti.

G. Rozzolino.

95. Due recipienti A e B contengono quantità disuguali di uno stesso liquido, e propriamente A contiene a litri di più di quanti ne contiene B. Ora s'immagini che dal recipiente A sieno tolti gli $\frac{r}{n}$

(*) Le questioni contrassegnate con asterisco sono esclusivamente indirizzate agli alunni delle nostre scuole.

del suo contenuto e versati in B, e poi tolti da B gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in A; indi tolti nuovamente dal recipiente A gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in B, e poi tolti da B gli $\frac{r}{n}$ del suo nuovo contenuto e versati in A; e così continuando fino a fare p volte la doppia operazione di versare gli $\frac{r}{n}$ del contenuto di A in B e gli $\frac{r}{n}$ del nuovo contenuto di B in A. Conoscendosi il rapporto k del contenuto di A al contenuto di B dopo le p coppie di operazioni accennate, determinare la quantità di liquido contenuta in ciascuno dei due recipienti A e B prima delle suddette operazioni.

Indicando con x il numero dei litri di liquido contenuti nel recipiente B, si deve trovare:

$$x = \frac{[n^{2p} - (n-r)^{2p}](n-r)k - [n^{2p+1} + (n-r)^{2p+1}]}{[2n^{2p+1} - r(n-r)^{2p}] - [2n^{2p} + r(n-r)^{2p-1}](n-r)k} \cdot a.$$

Determinare inoltre fra quali limiti deve variare il rapporto k per essere possibile il problema.

D. AMANZIO.

96. Dimostrare che, se la congruenza generale di 2° grado e di modulo primo p

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \text{mod. } p$$

non è parabolica, se cioè $b^2 - 4ac$ non è 0, mod. p, essa, in generale, cioè quando $ae^2 + cd^2 + fb^2 - bde - 4acf$ non è 0 mod. p, ha $p-1$ soluzioni se è iperbolica, se cioè $b^2 - 4ac$ è resto quadratico mod. p, e ne ha $p+1$ se è ellittica.

97. Dimostrare che, se p è un numero primo e g radice primitiva, mod. p, si ha:

$$2(1+g)^2(1+g^2)^2(1+g^3)^2 \ldots \left(1+g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p$$

ed anche

$$2(1-g)^2(1-g^2)^2(1-g^3)^2 \ldots\ldots \left(1-g^{\frac{p-3}{2}}\right)^2 \equiv g^{-\frac{p^2-1}{8}} \text{ mod. } p.$$

Dedurne i noti teoremi di *Fermat*, riguardanti il carattere quadratico di 2, mod. p.

98*. Verificare che ponendo

$$x = \frac{m}{2}(m^2+3) \qquad y = \frac{1}{2}(m^2+1)$$

si soddisfa all'equazione

$$x^2 - (m^2+4)\,y^2 = -1 \ (*).$$

99*. Verificare che ponendo

$$x = \frac{m^2-m+2}{2} \qquad y = \frac{m-1}{2}$$

si soddisfa all'equazione

$$x^2 - (m^2+4)\,y^2 = m \ (*).$$

G. Frattini.

RIVISTA BIBLIOGRAFICA

FERDINANDO DEL CHICCA, professore di matematica, scienze fisiche e naturali, nella R. Scuola normale femminile superiore di Venezia. — *Elementi di aritmetica teorico-pratica ad uso delle scuole preparatorie, normali, tecniche e ginnasiali.* Venezia, Ferrari Carlo ed., 1890. Prezzo L. 2. 50.

Tutti gli insegnanti, specialmente delle scuole normali femminili, sanno come me, quanta difficoltà e noia provano la maggior parte delle adolescenti (sic) *nello studio dell'aritmetica, giudicandolo non altro che intellettuale tortura.* — Così l'autore nella prefazione. Il resto s'indovina. Scopo del libro il recar un qualche sollievo a quelle poverette, vagliando, facilitando, allettando, ricreando.

Non si può negare che l'esperienza dell'autore sarebbe un buon argomento a suffragio della lamentata tortura, se frutto dell'esperienza medesima dovesse credersi il libro che ha fatto. Ma che per aver lode d'un'opera, ch'era meglio non pubblicare, siasi invocata la testimonianza di tutti gl'insegnanti, e, fra questi, dei professori di matematica, gente alla buona, mite, e che avrebbe a sdegno il farsi ministra di tortura, per lo meno quanto il dire una bugia per far piacere all'autore, m'è sembrato ingenuità, per non dir altro.

Vengo al libro. Non isciuperò tempo e fatica in lunghi commenti. Poche citazioni testuali diranno il tutto nel migliore dei modi.

(*) Supponendo m intero e dispari, si ottiene una soluzione dell'equazione in numeri interi.

A pag. 41. — *La divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione. Essa serve a rendere un numero chiamato dividendo un certo numero di volte più piccolo di un altro chiamato divisore.* (*)

A pag. 72. — (Si pretende di dimostrare che un numero non si può decomporre in più maniere in fattori primi). — *Supponiamo il numero non primo* $N = a \times b \times c$ (??) *e lo stesso numero* $N = a' \times b' \times c'$ (?). *Avremo:*

$$a \times b \times c = a' \times b' \times c'.$$

Il fattore primo a *divide il prodotto* $a \times b \times c$ *e* (sic) *divide l'altro* $a' \times b' \times c'$; *il fattore* a' *divide il prodotto* $a' \times b' \times c'$ *e* (sic) *l'altro* $a \times b \times c$; *dunque* $a = a'$ (!!!). — Ecc..

A pag. 73. — (Cito, come saggio di chiarezza): — *Perchè due numeri siano divisibili l'uno per l'altro è necessario e sufficiente che il dividendo contenga tutti i fattori primi del divisore elevati ad un esponente per lo meno eguale.* — *Infatti l'eguaglianza* $N = a \times q$ (!) *mostra che il divisore* a *deve soddisfare alle condizioni dell'enunciato, altrimenti vi sarebbero due maniere per scomporre un numero in fattori primi.* (Detto questo, l'autore passa ai corollari).

A pag. 80. — *La grandezza di una frazione dipende dalla grandezza del suo numeratore e dalla piccolezza del suo denominatore.*

A pag. 82. — (Si pretende di dimostrare che $\frac{8}{7}$ è uguale al quoziente 8 : 7). *Se* $\frac{8}{7}$ *sarà il quoziente della divisione di 8 per 7, avremo:*

$$8 = 7 \times \frac{8}{7}.$$

Ed eliminando (sic) *nel secondo membro 7, che moltiplica e divide* (!!) *nello stesso tempo, otteniamo realmente il dividendo.* — (Petizioni di principio, come questa, pullulano di tratto in tratto e sono quasi l'abito del libro).

A pag. 84, 85. — *Quando si moltiplica il denominatore d'una frazione per un numero qualunque, la frazione resta divisa per questo numero.* — *Si moltiplichi per 3 il denominatore della frazione* $\frac{6}{9}$, ecc. Conclusione: *Dunque* $\frac{6}{9}$ *è maggiore* (dico maggiore, e non 3 volte maggiore) *di* $\frac{6}{27}$. — (Questo qui pro quo del § 233, ritorna, mutatis mutandis, ai § 234 e 235, e suggella le petizioni di principio contenute in tutti e tre i paragrafi).

A pag. 86, 87. — (Subito dopo il titolo generale): *Questo ultimo teorema* (quale?) *ci fa vedere che una stessa grandezza può essere espressa da un numero infinito di frazioni differenti di forma e che i termini di ciascuna* (!!) *di esse siano* (sic) *equimultipli dei termini delle altre.*

A pag. 109 — (Una promozione a teorema!). — Teorema. *Le cifre successive collocate alla destra dell'unità principale esprimono decimi, centesimi, millesimi* ecc. (Evidentemente si tratta della scrittura dei decimali).

(*) Per debito di giustizia soggiungo che, nell'*errata corrige*, ho trovato quest'altra versione: *Essa serve a rendere un numero chiamato dividendo un certo numero di volte più piccolo, cioè* (sic) *quante sono le unità di un altro chiamato divisore.*

A pag. 131. — *Certi corpi hanno una forma irregolare perchè* (sic) *se ne possa geometricamente determinare il volume, altri sono troppo voluminosi per essere pesati, per cui la densità ha per oggetto di rimediare a questi inconvenienti* (?!). E poi: *Supponiamo di voler determinare il peso di un pezzo di marmo di Çarrara* ecc. *Sapendo che un dm^3* (sic) *di questo marmo ha per densità Kg. 2,717* (!!!), ecc.

A pag. 143. — (Brano di scrittura in formole, a mosaico di controsensi):

$$14^\circ\, 19' = (14^\circ \times 60) + 19 = 859'$$

$$3^h\, 4^m\, 45^s = \frac{11085}{3600}.$$

Seguita il mosaico a pag. 144 e 145).

A pag. 149. — *Si chiama radice quadrata di un numero quel numero che elevato al quadrato riproduce questo numero.* — Passi, salvo la forma. Ma a pag. 150 si legge: *la radice di 45 è 5 più una frazione* (!), *e quindi 45 non* (!!) *è un quadrato perfetto, perchè la sua radice innalzata al quadrato non riproduce 45* (!!!).

Mi pare che basti. Peraltro è d'uopo riconoscere che, se l'autore mancò d'altro, le buone intenzioni non gli vennero meno. Ma queste, purtroppo, non bastano: anzi sovente guastano, ed eccone qualche prova.

L'autore, volendo porgere alle *adolescenti* materia di studio succulenta e ricreativa provocandone ad un tempo istesso la natural curiosità, mette loro questa pulce nell'orecchio: se $3 + 4$ sia eguale a $4 + 3$, e più generalmente, se cangi la somma di più numeri interi al cangiare dell'ordine delle parti. Qualcuno potrebbe lodarnelo: ma nessuno gli menerebbe buona la seguente dimostrazione, che si legge a pag. 16, pel caso di due numeri.

$$3 + 4 = 4 + 3.$$

Infatti

$$3 + 4 = 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$$
$$4 + 3 = 4 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

Ora, i secondi membri di queste eguaglianze essendo identici, si ha: $3 + 4 = 4 + 3$. — Lo stesso deve dirsi dell'uso delle parentesi, del quale l'autore s'occupa, anzi si preoccupa, tanto, da inaugurare pei numeri un vero regime cellulare. Si legge infatti a pag. 16: *Allorquando vogliamo esprimere la somma di due numeri, per esempio di 8 e di 6, e conservarne sempre le parti che la formano* (?), *scriveremo così:*

$$(8 + 6)$$

E a pag. 31:

$$(9 \times 4) - (6 \times 4)$$

invece di

$$9 \times 4 - 6 \times 4.$$

E fin qui, niente di male. Il male comincia a pag. 95, dove le mansuete cifre, tanto mortificate per l'innanzi, rompono i gusci e prendono il largo. Ivi si legge, e per ben tre volte:

$$8+\frac{3}{4}-5+\frac{2}{7}$$

invece di

$$\left(8+\frac{3}{4}\right)-\left(5+\frac{2}{7}\right).$$

Quei numeri all'aperto mi fanno sentire il bisogno d'un po di svago. E faccio punto.

GIOVANNI FRATTINI.

Pubblicazioni ricevute dalla Redazione del Periodico

Giornale di Matematiche ad uso degli Studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del Prof. G. BATTAGLINI. Vol. XXVIII, Novembre-Dicembre, 1890. Napoli, B. Pellerano, editore.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de M. DE LONGCHAMPS. 3ᵉ Série, XV année. N. 1, 2, Janvier, Février 1891. Paris, librairie Ch. Delagrave.

Table des matières: — N. 1: — L. BÉNEZECH: Coordonnées quadripolaires. — C. A. LAISANT: Sur l'évaluation des moyennes. — E. VIGARIÉ: Les progrés de la géométrie du triangle, en 1890. — Variétés: HUMBERT: Essai sur un programme de mathématiques à l'usage de la classe de mathématiques élémentaires. — Correspondance. — Bibliographie. — Solutions de questions. — Questions proposées. — N. 2: — L. BÉNEZECH: Coordonnées quadripolaires. — E. VIGARIÉ: Les progrés de la géométrie du triangle, en 1890. — Variétés: HUMBERT: Essai sur un programme de mathématiques de la classe de mathématiques élémentaires. — LORMEAU: Des coordonnées angulaires. — Solutions de la question 356. — Questions proposées.

Journal des Mathématiques élémentaires, publié par H. VUIBERT, 15ᵉ année. N. 7, 8, 9, 10 e 11. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

Mathesis, recueil mathématique publié par P. MANSION et J. NEUBERG. Deuxième série. Tome I. Janvier, Février, 1891. Gand, Ad. Hoste, éditeur.

Sommaire: — Janvier: — Préface. — ED. LUCAS: Sur les théorèmes énoncés par Fermat, Euler, Wilson, Staudt et Clausen. — Nécrologie. J. Casey — Madame PRIM: Questions de géométrie. — Bibliographie. — D'OCAGNE: Sur le terme complémentaire de la série de Taylor — Solutions de questions proposées. — Question d'examen. — Questions proposées. = Février: — J. NEUBERG: Sur les quadrangles complets. — P. M.: Questions d'enseignement. — P. M.: Bibliographie. — Solutions de questions proposées. — Questions d'examens. — Questions proposées. — E. CESÀRO: Étude intrinsèque des coniques et des cassinoïdes.

Rendiconti dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli). Serie 2ª, Vol. IV, Fasc. 12º, 1890. — Vol. V, Fasc. 1º, 1891.

Revue de Mathématiques spéciales, rédigée par M. B. NIEWENGLOWSKI. N. 4, 5, 6. Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles.

Sommaire: — N. 4: — Algèbre. — Géométrie analytique. — Chimie: Concours général de mathématiques spéciales (1890). — Questions posées aux examens oraux: Ecole polytechnique (1890). — Concours de 1890: École normale supérieure, École polytechnique — Questions proposées. = N. 5: — Algèbre. — Géométrie analytique. — Questions posées aux examens oraux: École polytechnique (1890). — Concours de 1890: Ecole centrale, Bourses de licence. — Question proposée. = N. 6: Algèbre. — Géométrie analytique. — Géométrie descriptive. — Questions proposées.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN. XXII Jahrgang. 1, Heft. Leipzig, B. G. Teubner, 1891.

Inhaltsverzeichnis: — H. GERLACH: Zur Definition des Winkels — Kleinere Mitteilungen. — Sprech - und Diskussions Saal. — Zum Aufgaben - Repertorium: *A*) Auflösungen; *B*) Neue Aufgaben; *C*) Aufgaben aus nichtdeutschen Fachzeitschriften. — Litterarische Berichte. — Pädagogische Zeitung etc..

Rivista di matematica diretta da G. PEANO. Fasc. 1º, 2º e 3º. Gennaio, Febbraio, Marzo, 1891. Torino, Fratelli Bocca.

Sommario: — Fasc. 1º: — G. PEANO: Principii di Logica Matematica. — (P.) Sommario dei Libri VII, VIII e IX d' Euclide. — E. NOVARESE: Sulla velocità di un punto. — Recensioni. = Fasc. 2º e 3º: Recensioni. — E. NOVARESE: Necrologia, Sofia Kowalevscki. — E. BERTINI: Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche. — G. PEANO: Formole di Logica Matematica. — C. BURALI-FORTI: La risoluzione dei problemi d'aritmetica. — C. SEGRE: Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche.

BERNARDI (L.) — Euclide. Libro primo con numerosi esercizi e relativi indirizzi alle soluzioni dei medesimi. *Appendice* sui metodi di dimostrazione e soluzione dei teoremi e problemi. Udine, tip. Bardusco, 1891. Prezzo L. 1. 25.

CAPELLI (A.) — Sulla teoria delle funzioni algebriche di più variabili.

CESÀRO (E) — Sui canoni del calcolo degli addensamenti e su alcune loro applicazioni (Rendiconti R. Istituto Lombardo, serie II, vol. XXIV).

LE PAIGE (C). — Un astronome belge du XVII siècle. - *Godefroid Wendelin* (Bullettin de l'Acad. roy. de Belgique, 3ᵉ sér., t. XX).

LORIA (G.) — Le trasformazioni razionali dello spazio determinate da una superficie generale di terz'ordine. (Atti R. Acc. delle Scienze di Torino, Volume XXVI).

MACÈ DE LÉPINAY (A.) — Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analitique. Second fascicule: Notions de Géométrie analytique. — Paris, Librairie Nony et C., 17 rue des Écoles, 1891.

MANSION (P.) — Notes sur la géométrie euclidienne et sur la géométrie non euclidienne. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, t. XV).

MOLLO (C.) — Sui sistemi di due cubiche binarie. (Giornale di Battaglini, Volume XXVIII).

NIEWENGLOWSKI (B.) — Cours d'algèbre à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique. Paris, A. Colin et C., Éditeurs. — Prix: 12 francs.

PALATINI (F.) — Sopra i triangoli formati coi lati dell'esagrammo di Pascal i quali possono ridursi ad un punto — Palmi, tip. G. Lopresti, 1891.

PASTORE (G.) — Avviamento alla risoluzione delle questioni geometriche. — Bologna, Stab. G. Civelli, 1891. — Prezzo L. 3.

RICCARDI (P.) — Commemorazione del prof. Felice Storchi. (Memorie R. Acc. Scienze, Lettere ed Arti. Modena, vol. VIII, serie II, 1891).

SCHLÖMILCH (O.) — Elementi di Geometria metrica. Prima versione italiana dei professori D. Gambioli e V. Bernardi. — Parte 3ª: Stereometria, trigonometria sferica e geometria descrittiva — Ditta G. B. Paravia e Comp., 1891. Prezzo: L. 4.

TANO (F.) — Sur quelques théorèmes de Dirichlet (Journal für reine u. angewandte Mathematik, Band 105). — Sur quelques points de la théorie des nombres. (Bulletin des Sciences math:, 2ᵉ série, t. XIV).

Chiusura della redazione il di 22 marzo 1891.

SUI LIMITI

(*Continuazione: Vedi pagina 60*).

2. Molte questioni interessanti sui limiti si trattano con facilità e speditezza per mezzo delle seguenti proposizioni.

Indicheremo, per comodo, con $M(a, b, c, \ldots)$ un numero medio tra $a\ b\ c \ldots\ldots$, cioè più piccolo del maggiore e più grande del minore se questi numeri non sono tutti eguali tra loro ed eguale a ciascuno di essi se hanno tutti lo stesso valore.

Teorema I. *Se* A B k *sono numeri aritmetici, razionali od irrazionali, si ha*

$$\frac{A^k - B^k}{A - B} = M(k A^{k-1}, k B^{k-1}).$$

Dimostrazione. Se $p\ q\ a\ b$ sono interi aritmetici ed è $p > q$ $a > b$, si ha dall'algebra elementare che sussiste la relazione

$$q \cdot a^{q-1} > \frac{a^q - b^q}{a - b} > q \cdot b^{q-1}$$

per cui, essendo

$$(p-q) \cdot a^{p-q} > b \cdot (a^{p-q-1} + a^{p-q-2} b + \ldots\ldots + a b^{p-q-2} + b^{p-q-1})$$
$$= b \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$
$$(p-q) \cdot b^{p-q} < a \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$

sarà pure

$$(p-q)\, a^{p-q} \cdot \frac{a^q - b^q}{a - b} > q\, b^q \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$
$$(p-q)\, b^{p-q} \cdot \frac{a^q - b^q}{a - b} < q\, a^q \cdot \frac{a^{p-q} - b^{p-q}}{a - b}$$

da cui si ricava

$$\frac{p}{q}\, a^{p-q} > \frac{a^p - b^p}{a^q - b^q} > \frac{p}{q}\, b^{p-q}.$$

Da queste, facendo $a^q = x$ $b^q = y$, si ottiene

$$\frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} > \frac{x^{\frac{p}{q}} - y^{\frac{p}{q}}}{x - y} > \frac{p}{q} \cdot y^{\frac{p}{q}-1}$$

e, facendo $a^p = u$ $b^p = v$, si ottiene

$$\frac{q}{p} \cdot u^{\frac{q}{p}-1} < \frac{u^{\frac{q}{p}} - v^{\frac{q}{p}}}{u - v} < \frac{q}{p} \cdot v^{\frac{q}{p}-1}.$$

Resta così dimostrato che: se A B k sono numeri aritmetici e k è razionale, si ha

$$\frac{A^k - B^k}{A - B} = M\,(k\,A^{k-1},\ k\,B^{k-1}).$$

Pensando che k percorra una successione di valori razionali tendenti ad un limite irrazionale e ricordando le più elementari proposizioni sui limiti, si riconosce che l'ultima relazione sussiste anche se k è irrazionale.

Teorema II. *Se due frazioni con denominatori dello stesso segno sono diseguali, dividendo la somma dei loro numeratori per quella dei loro denominatori s' ottiene una frazione minore della più grande e maggiore della più piccola di quelle.*

Dimostrazione. Siano m n due numeri dello stesso segno e la frazione $\frac{a}{m}$ sia maggiore dell'altra $\frac{b}{n}$, per cui sarà:

$$m \cdot n > 0 \qquad a \cdot n - b \cdot m > 0.$$

Si ha così:

$$\frac{a}{m} - \frac{a+b}{m+n} = \frac{an - bm}{m^2 + mn} > 0 \qquad \frac{a+b}{m+n} - \frac{b}{n} = \frac{an - bm}{n^2 + mn} > 0$$

epperò

$$\frac{a}{m} > \frac{a+b}{m+n} > \frac{b}{n}.$$

Corollario I. Se più frazioni hanno i denominatori dello stesso segno, dividendo la somma dei loro numeratori per quella dei loro denominatori s'ottiene una frazione media tra quelle.

Teorema III. *Se due radicali con radicandi aritmetici ed indici d' egual segno sono diseguali, il radicale che ha per radicando il* *prodotto dei loro radicandi e per indice la somma dei loro indici è minore del più grande e maggiore del più piccolo di quelli.*

Dimostrazione. Potremmo ricavare questo teorema dal precedente ma preferiamo darne dimostrazione diretta.

Siano m n due numeri d'egual segno; m b siano numeri aritmetici o sia $\sqrt[m]{a} > \sqrt[n]{b}$, per cui sarà

$$m \,.\, n > 0 \qquad a^n > b^m.$$

Si ha:

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m+n]{a\,.\,b} = \sqrt[m^2+mn]{a^n : b^m} > 1$$
$$\sqrt[m+n]{a\,.\,b} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n^2+mn]{a^n : b^m} > 1$$

per cui, trattandosi di valori aritmetici, è

$$\sqrt[m]{a} > \sqrt[m+n]{a\,b} > \sqrt[n]{b}.$$

Corollario II. Se più radicali hanno radicandi aritmetici ed indici d'egual segno, il radicale che ha per radicando il prodotto dei loro radicandi e per indice la somma dei loro indici è medio tra quelli.

Teorema IV. *Se* a_n b_n $\frac{1}{c_n}$ *non crescono indefinitamente ed è*

$$\lim_{n=\infty} a_n = a \quad \lim.\, b_n = b \quad \lim.\, c_n = c \quad \lim.\,(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) = \infty$$

è pure

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_1\, b_n + a_2\, b_{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1}\, b_2 + a_n\, b_1}{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_{n-1} + c_n} = \frac{a\, b}{c}.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{a_1\, b_n + \ldots. + a_n\,.\, b_1}{c_1 + \ldots. + c_n} = \frac{a_1\, b_n + \ldots. + a_k\, b_{n-k+1} + a_{n-k+1}\, b_k + \ldots. + a_n\,.\, b_1}{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n}$$
$$+ \frac{a_{k+1}\, b_{n-k} + a_{k+2}\, b_{n-k-1} + \ldots\ldots + a_{n-k-1}\, b_{k+2} + a_{n-k}\, b_{k+1}}{c_{2k+1} + c_{2k+2} + \ldots\ldots + c_{n-1} + c_n}$$
$$\cdot \frac{c_{2k+1} + \ldots\ldots. + c_n}{c_1 + \ldots\ldots. + c_n}.$$

Se k è numero fisso, crescono indefinitamente con n anche $n - 1$, $n - 2 \ldots\ldots. n - k$ per cui essendo

$$\lim . a_n = a \quad \lim . b_n = b \quad \lim . (c_1 + \dots + c_n) = \infty,$$

è:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \dots + a_k b_{n-k+1} + a_{n-k+1} b_k + \dots + a_n b_1}{c_1 + \dots + c_n}$$

$$= \lim . \frac{(a_1 + \dots + a_k) . b + (b_k + \dots + b_1) . a}{c_1 + \dots + c_n} = 0$$

$$\lim_{n=\infty} . \frac{c_{2k+1} + \dots + c_n}{c_1 + \dots + c_n} = \lim . \left(1 - \frac{c_1 + \dots + c_{2k}}{c_1 + \dots + c_n}\right) = 1$$

per cui, supponendo k abbastanza grande perchè $c_{2k+1}\ c_{2k+2} \dots\dots$ siano tutte del segno del limite c, si ha pel corollario I:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \dots + a_n b_1}{c_1 + \dots + c_n}$$

$$= M\left(\frac{a_{k+1} b_{n-k}}{c_{2k+1}}, \frac{a_{k+2} b_{n-k-1}}{c_{2k+2}}, \dots\dots, \frac{a_{n-k} b_{k+1}}{c_n}\right)$$

dove k può venir fissato arbitrariamente grande cosicchè, facendolo crescere indefinitamente, si riconosce appunto essere (*)

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1 b_n + \dots + a_n . b_1}{c_1 + \dots + c_n} = \frac{a\, b}{c}.$$

Corollario III. Facendo

$$a_n = f_n - f_{n-1} \quad f_0 = 0 \quad c_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} \quad \varphi_0 = 0 \quad b_n = 1$$

si trova che:

Se esiste $\lim . (f_n - f_{n-1}) : (\varphi_n - \varphi_{n-1})$ ed è $\lim . \varphi_n = \infty$, esiste anche $\lim . f_n : \varphi_n$ ed è precisamente:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{f_n}{\varphi_n} = \lim . \frac{f_n - f_{n-1}}{\varphi_n - \varphi_{n-1}}$$

e se si fa $\varphi_n = n$ si trova che (**):

Se esiste $\lim . (f_n - f_{n-1})$, è:

$$\lim . \frac{1}{n} f_n = \lim . (f_n - f_{n-1}).$$

Si riconosce subito che può esistere $\lim . \frac{1}{n} f_n$ senza che esista $\lim . (f_n - f_{n-1})$ perchè se è, p. es.,

(*) Facendo $c_n = 1$ si ottiene un teorema dimostrato recentemente dal prof. Cesàro che se ne servì per dimostrare molto semplicemente il teorema d'Abel sulla moltiplicazione delle serie. — *Bulletin des sciences mathématiques*. Maggio 1890.

(**) Cauchy. *Analyse algébrique*.

$$\lim . \frac{1}{n} f_n = \lim . (f_n - f_{n-1}) = \lambda$$

si scelga α_n in modo che non tenda ad alcun limite $\alpha_n - \alpha_{n-1}$ e sia invece $\lim . \frac{1}{n} \alpha_n = 0$, ciò che si può ottenere, p. es., prendendo capricciosamente tutti i numeri $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ ...... in un assegnato intervallo finito; facendo $f_n + \alpha_n = \varphi_n$ si avrà così $\lim . \frac{1}{n} \varphi_n = \lambda$ mentre non tenderà ad alcun limite $\varphi_n - \varphi_{n-1}$.

(Continua). F. GIUDICE.

SULLA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$x^2 - (a^2 + 1)\, y^2 = \pm N$

IN NUMERI INTERI

Qui appresso, parlando di soluzioni dell'equazione

$$x^2 - (a^2 + 1)\, y^2 = \pm N,$$

nella quale a ed N denotano due numeri interi e positivi qualunque, diversi da 0, si allude sempre a soluzioni in numeri interi e positivi. I valori della x e della y in tali soluzioni crescono o decrescono insieme, qualunque sia il segno del 2° membro dell'equazione. I valori minimi della x e della y che soddisfano all'equazione medesima ne costituiscono la così detta *soluzione minima*.

La ricerca della soluzione minima dell'una o dell'altra delle equazioni

$$x^2 - (a^2 + 1)\, y^2 = N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$
$$x^2 - (a^2 + 1)\, y^2 = - N \quad \ldots\ldots\ldots [2]$$

dipende da un teorema assai semplice, che è argomento di questa Nota. In essa si stabiliscono ancora le formole che danno tutte le soluzioni dell'equazioni suddette per mezzo di quelle soluzioni dell'equa-

L'insegnamento, che verrebbe press' a poco diviso in due parti eguali, si potrebbe impartire così:

Primo anno. — Generalità - Uguaglianze e disuguaglianze - Relazioni di posizione.

Secondo anno. — Teoria dell'equivalenza, delle proporzioni e della misura (*).

Quest'idea, che non è del tutto mia ma che in parte dividono persone d'autorità non dubbia, mi pare sia pratica ed utile.

Qualunque sia il suo valore, vorrei che ci fosse chi la meditasse e discutesse, specialmente fra quelli (e confesso che non so chi sieno) che sono incaricati di modificare, ahi! troppo spesso, i nostri programmi.

Torino, aprile 1891.

RODOLFO BETTAZZI.

SULLA TEORIA DELLE PROBABILITÀ

BREVE RISPOSTA AL SIGNOR *GIULIO VIVANTI*

Mi giunge aperta, pel tramite della *Rivista di matematica* (1891, p. 69), una lettera del signor Giulio Vivanti, relativa alle considerazioni da me svolte in questo *Periodico* (1891, p. 1 e 49) sul concetto di probabilità. Raccolgo subito, in fondo alla lettera, questa dichiarazione: *presentandosi un problema qualsiasi, è possibile porre tal cura nel formularne l'enunciato, che il modo più naturale di cercarne la soluzione apparisca in ogni caso senza equivoco.* Siccome questo, e non altro, ho sostenuto nelle predette *considerazioni*, potrei dispensarmi dal rispondere al signor Vivanti, ed accettare la sua lettera come un atto di adesione alle critiche da me rivolte al signor Giuseppe Bertrand, nelle quali critiche io mi sono appunto occupato

(*) Se si credesse essere opportuno l'insegnamento della geometria nel ginnasio, allora converrebbe, nel mio modo di vedere, portare nel ginnasio superiore tutta la geometria, che nel presente scritto è assegnata al primo anno del liceo, e la restante dividere fra il primo ed il secondo anno.

degli enunciati matematici delle questioni e non dei legami esistenti fra essi e le quistioni *date in fatto*. La determinazione di questi legami è affidata all'acume ed al senso pratico di colui che si propone di studiare una questione, in quanto che il passaggio dal *fatto* all'enunciato matematico delle circostanze che lo caratterizzano non si compie per via di logica, ma è opera del *sentimento*, di quel sentimento che Buffon chiama *un ragionamento implicito, meno chiaro, ma spesso più sottile, e sempre più sicuro dell'immediato prodotto della ragione*. Or come fa il signor Vivanti ad *esigere* che, non solo l'enunciato della questione, ma *la sua stessa essenza* lasci scorgere il modo più naturale di trattarla matematicamente? Una questione di fatto bisogna prenderla come si offre, e nulla si può per mutarne l'essenza. E se accade che osservatori, variamente dotati di quel sentimento della realtà delle cose, di cui parla Buffon, pervengano ad interpretazioni sostanzialmente diverse, ciò non toglie che *una* soltanto di esse possa corrispondere al fatto osservato. E però quando il signor Vivanti, dopo aver citato due questioni, che comportano due soluzioni differenti, domanda il perchè della diversità dei risultati in problemi *che ogni persona non prevenuta giudicherebbe identici*, io rispondo che basta la diversità dei risultati per *prevenire* la persona che così giudica, ed ammonirla che le condizioni nelle quali ci si pone per compiere un esperimento non sono senza influenza sul risultato di esso. Domanda il signor Vivanti: *Se si tirasse a capriccio un milione di corde, o si segnasse ad arbitrio un milione di coppie di punti sulla circonferenza, il numero delle corde non maggiori del lato del triangolo equilatero iscritto risulterebbe vicino a 500000 od a 666666?* È facile rispondere: a 500000 nel primo caso, a 666666 nel secondo, purchè ogni volta si sperimenti nelle precise condizioni imposte dagli enunciati. Suppongasi, per esempio, che, *dopo* aver tirato a capriccio milioni di rette in un piano, si tracci una circonferenza che ne incontra un milione. Si può predire che da circa 500000 rette la circonferenza staccherà corde inferiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Immaginando poi che la circonferenza si sposti nel piano in modo continuo, si ha il mezzo di *compiere infinite prove*, eludendo così l'obiezione fondata dal signor Vivanti sulla legge di Poisson. Suppongasi invece che si divida in n parti uguali una circonferenza, e si numerino i punti di divisione. Si proceda poi ad un'estrazione di coppie di numeri da un'urna che racchiude i primi n numeri interi. Tracciando le corde corrispondenti alle varie estrazioni si compie l'esperimento nelle condizioni volute dal secondo enunciato, e si è per questo in diritto di aspettarsi che circa un terzo delle corde riescano superiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Ogni sabato l'estrazione del lotto ci dà occasione di tracciare *quaranta* corde: le due cifre di ciascun numero estratto individuano una corda, che riesce superiore al lato del triangolo equilatero iscritto quando la differenza assoluta fra le dette cifre è 4, 5 o 6. Il calcolo predice che *dodici* numeri sui quaranta estratti debbono trovarsi nelle condizioni accennate, e l'estrazione del ***23 maggio*** ultimo ne ha forniti *tredici*. Un esperimento analogo si può fare esaminando, negli *Annuarii* delle Università, i numeri delle abitazioni del personale: le corde individuate dalle ultime due cifre sono, per l'Università di Palermo, ***centosessanta***, e ***quarantanove*** di esse, invece delle *quarantotto* indicate dalla teoria, sono superiori al lato del triangolo equilatero iscritto. Non vale il dire che qui non si è più nel caso di infinite possibilità: facendo, infatti, crescere n, è possibile avvicinarsi quanto si vuole alla probabilità $\frac{1}{3}$, e, d'altra parte, non esiste un valore di n, a partire dal quale cessi l'accordo fra il risultato dell'esperienza e quello del calcolo. È vero che il numero delle prove necessarie dovrà anch'esso andare crescendo; ma in quel campo pratico, che serve di sostegno alla critica del signor Vivanti, chi è che conosce l'*infinito?* Sopra una circonferenza lunga un metro nessuno saprebbe contare più di poche migliaia di punti, e solo ricorrendo alla teoria delle interferenze si può giungere ai *sette milioni*. Così, adoperando i più delicati mezzi di misura, la probabilità di trovare una corda superiore al lato del triangolo equilatero iscritto è inferiore ad $\frac{1}{3}$ appena di $\frac{1}{21000000}$, quantità sperimentalmente trascurabile. Questa osservazione non differisce, in sostanza, da quella che lo stesso signor Vivanti fa a proposito del *problema dell'ago*, tranne che io la ritengo applicabile sempre, e non a quel solo problema. Non nego, tuttavia, la possibilità di problemi pratici, che difficilmente lascino scorgere il modo di fissarne le circostanze caratteristiche in un enunciato matematicamente fedele e preciso; ma da ciò non deriva la necessità di abbandonare lo studio *generale* di simili questioni, sì bene quella di sviluppare ed acuire negli studiosi le peculiari qualità intellettive che si richiedono per tali studî. Al quale scopo io ritengo sommamente utile la teoria delle probabilità geometriche, e deploro sinceramente che un ingegno come quello del Vivanti *non sappia* accordarle alcun valore. Non io vado soggetto a diplopia, come sembra credere il signor Vivanti, ma siamo tutti più o meno affetti da una specie di *bertrandismo* o daltonismo intellettuale, a curare il quale nulla è tanto efficace quanto lo studio della teoria delle probabilità geometriche, perchè, come ben dice A. Quêtelet, *les variations de la probabilité sont pour l'entendement ce que les nuances des couleurs sont pour un oeil exercé, ou ce que l'échelle diatonique serait pour l'oreille qui pourrait en apprécier tous les degrés.*

E. Cesàro.

SOPRA UN PROBLEMA DELLA TEORIA DEI NUMERI

1. Diremo che un gruppo di numeri interi è primo o non primo con un numero intero k, secondo che il massimo comun divisore dei numeri del gruppo è primo o no con k.

Premesso ciò, consideriamo i k numeri successivi

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots,\ k;$$

se immaginiamo scritta questa serie n volte, formeremo dei gruppi contenenti ciascuno n numeri, prendendo in tutti i modi possibili un numero in ogni serie. I gruppi che così si otterranno saranno diversi gli uni dagli altri o per i numeri che li costituiscono o per l'ordine di questi; il numero di tali gruppi è evidentemente uguale a k^n.

Si tratta di determinare quanti sono i gruppi primi con k. Il numero cercato si otterrà quindi levando da k^n il numero dei gruppi non primi con k.

2. È chiaro intanto che se k è un numero primo, esisterà un sol gruppo non primo con k, quello cioè formato di numeri tutti uguali a k; il numero dei gruppi primi con k è quindi in tal caso

$$k^n - 1.$$

3. Supponiamo k non primo e siano $a_1, a_2, \ldots, a_m$ i suoi divisori primi; indichiamo con d_{rs} un divisore di k formato dal prodotto di s di questi divisori primi, sicchè per ogni valore di $s = 1, 2, 3, \ldots, m$, il numero di tali divisori è uguale ad $\binom{m}{s}$.

Posto

$$k = k_{rs} d_{rs}$$

e formando colla serie

$$d_{rs}, 2 d_{rs}, 3 d_{rs}, \ldots\ldots, k_{rs} d_{rs} \ldots\ldots \quad [1]$$

nel modo prima dichiarato, i gruppi contenenti n di tali numeri, otterremo k_{rs}^n gruppi non primi con k.

Ad ogni valore di s corrisponde un sistema di gruppi non primi con k; sicchè otterremo in tutto m sistemi che diremo *primo*, *secondo*, ecc.

Consideriamo uno qualunque di questi sistemi, per esempio l'*essesimo*. Per formare tutti i gruppi appartenenti a questo sistema, dovremo operare nel modo detto, separatamente sopra ciascuna delle $\binom{m}{s}$ serie che si deducono dalla [1] variando r da 1 ad $\binom{m}{s}$; quindi l'*essesimo* sistema conterrà

$$k_{1s}^n + k_{2s}^n + k_{3s}^n + \ldots\ldots = S_s \ldots\ldots \quad [2]$$

gruppi. Ogni serie fornirà gruppi tutti diversi o per i numeri che li costituiscono o per l'ordine di questi; ma uno stesso gruppo potrà esser generato da due o più serie ed appartenere anche a due o più sistemi.

Supponiamo infatti che il massimo comun divisore dei numeri d'un gruppo appartenente all'essesimo sistema abbia μ fattori semplici diversi comuni col numero k, essendo $\mu > s$. Con questi fattori si potranno formare $\binom{\mu}{s}$ delle serie originanti l'essesimo sistema, e poichè tutti i numeri del gruppo considerato sono multipli dei $\binom{\mu}{s}$

numeri che si hanno moltiplicando s ad s in tutti i modi possibili i μ fattori semplici, segue che fra i gruppi originati da ciascuna di queste serie, si troverà anche il nostro gruppo, il quale pertanto nell'essesimo sistema si troverà ripetuto $\binom{\mu}{s}$ volte. Dunque nel primo sistema il gruppo si troverà ripetuto μ volte, nel secondo $\binom{\mu}{2}$ volte, ecc. nel μ^{mo} una sol volta.

Da quanto precede risulta che al nostro gruppo corrispondono μ unità di S_1, $\binom{\mu}{2}$ unità di S_2, ecc., un'unità di S_μ. Osservando poi che si ha sempre

$$\mu - \binom{\mu}{2} + \binom{\mu}{3} - \ldots\ldots \pm 1 = 1,$$

si scorge che al gruppo considerato corrisponde una sola unità dell' espressione

$$S_1 - S_2 + S_3 - \ldots\ldots\ldots,$$

la quale pertanto rappresenta il numero dei gruppi diversi non primi con k.

Quindi, indicando col simbolo $\varphi\binom{k}{n}$ il numero dei gruppi primi con k, si avrà in base alle [2]

$$\begin{aligned}\varphi\binom{k}{n} = k^n &- [k_{11}^n + k_{21}^n + k_{31}^n + \ldots\ldots] \\ &+ [k_{12}^n + k_{22}^n + k_{32}^n + \ldots\ldots] \\ &- [k_{13}^n + k_{23}^n + k_{33}^n + \ldots\ldots] \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

da cui, osservando che $k_{rs} = \frac{k}{d_{rs}}$ e riducendo, si ricava infine

$$\varphi\binom{k}{n} = k^n \left(1 - \frac{1}{a_1^n}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^n}\right) \ldots\ldots\ldots \left(1 - \frac{1}{a_m^n}\right).$$

Quest'uguaglianza nel caso di $n = 1$ esprime il noto teorema d'Eulero. Infatti per $n = 1$ il simbolo $\varphi\binom{k}{n}$ equivale al simbolo $\varphi(k)$ introdotto nella scienza dei numeri da Gauss, per indicare il numero dei numeri inferiori a k e primi con esso. (*)

4. Se è $k = a \,.\, b \,.\, c \ldots\ldots$, essendo a, b, c, ecc. numeri primi

(*) Dirichlet, *Zahlentheorie* § 11.

fra loro due a due, una prima proprietà della funzione $\varphi\binom{k}{n}$ è espressa dall'uguaglianza

$$\varphi\binom{k}{n}=\varphi\binom{a}{n}\varphi\binom{b}{n}\varphi\binom{c}{n}\dots\dots$$

5. In secondo luogo, per brevità, diremo *divisore d'un gruppo* un divisore comune a tutti i numeri del gruppo.

Indichiamo con δ un divisore qualunque di k; nella serie 1, 2, 3 .... k si avranno i numeri δ, 2δ .... $\Delta\delta$, $\left(\Delta=\frac{k}{\delta}\right)$ e solo questi divisibili per δ. Il numero dei gruppi aventi con k il massimo comun divisore δ, coincide col numero dei gruppi primi con Δ, ottenuti colla serie 1, 2, ..., Δ. Quindi $\varphi\binom{\Delta}{n}$ indica il numero dei gruppi che hanno con k il massimo comun divisore δ.

Se δ', δ'', δ''', ... sono tutti i divisori di k, posto

$$k=\Delta'\delta'=\Delta''\delta''=\Delta'''\delta'''=\dots\dots$$

i simboli $\varphi\binom{\Delta'}{n}$, $\varphi\binom{\Delta''}{n}$, ecc., rappresenteranno rispettivamente il numero dei gruppi aventi con k per massimo comun divisore δ', δ'', ecc. In riguardo a ciò i k^n gruppi che si deducono dalla serie 1, 2, ..., k, possono raccogliersi in *classi*, ed è chiaro che ciascun gruppo prenderà posto in una classe ed in una soltanto. Quindi, osservando che i numeri Δ', Δ'', ecc., sono i divisori di k, si ricava il seguente teorema: *Se Δ assume successivamente tutti i valori dei divisori di* k, *è*

$$\sum\varphi\binom{\Delta}{n}=k^n.$$

Siano, per esempio, $k=20$ ed $n=2$; i divisori di 20 sono 1, 2, 4, 5, 10, 20. Ora si ha

$$\varphi\binom{1}{2}=1,\quad \varphi\binom{2}{2}=3,\quad \varphi\binom{4}{2}=12,\quad \varphi\binom{5}{2}=24,$$
$$\varphi\binom{10}{2}=72,\quad \varphi\binom{20}{2}=288$$

e la somma di tutti questi numeri è effettivamente $=20^2$.

Lendinara, gennaio 1891.

Prof. Luigi Carlini.

SULLA DIVISIBILITÀ DEI POLINOMI PER IL BINOMIO $x^r - a^r$ e per il polinomio $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}x + a^m$

Il metodo da me seguito altra volta per trovare le forme dei quozienti e dei resti che si ottengono dividendo un polinomio per $x - a$, o per $x^r - a^r$ (*), fu fondato sull'estensione ai polinomi interi di uno dei principali teoremi relativi alla divisibilità dei numeri (*V.* appresso n. 1, teor. II). Ma poichè agli stessi polinomi si può estendere anche un altro teorema fondamentale della divisibilità (n. 1, teor. I), non sarà discaro ai lettori di questo periodico il vedere (n. 2) la notevole semplificazione che dall'unione dei due teoremi viene arrecata alla ricerca dei resti e dei quozienti nella divisione di un polinomio per $x^r - a^r$ ($r \geqq 1$), e le deduzioni che se ne possono trarre (n. 3 e 4) circa la divisibilità dei polinomi per un divisore della forma $x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} + \ldots\ldots + a^{m-1}x + a^m$.

Mi riserbo di pubblicare in un'altra Nota i resultati a cui son giunto considerando il caso generale della divisione di due polinomi interi.

1.

Intendendo che tutti i polinomi i quali vengono in considerazione siano interi e ordinati per le potenze decrescenti della x, si stabiliscono facilmente i due teoremi:

I. *Il resto della divisione d'una somma di polinomi per un altro polinomio* D, *è uguale alla somma dei resti ottenuti dividendone per* D *i singoli termini.*

II. *Il resto della divisione per* D *d'un prodotto di polinomi, è uguale al resto della divisione per* D *del prodotto dei resti trovati col dividerne per* D *i singoli fattori.*

Per la dimostrazione del primo di questi teoremi basta osservare che se si ha

$$P = P_1 + P_2 + \ldots + P_m$$

(*) *V.* le due Note inserite in questo periodico (Anno II, fasc. VI e anno III, fasc. V).

e se

$$P_s = DQ_s + R_s, \quad (s = 1, 2, \ldots. m),$$

troveremo sostituendo:

$$P = D(Q_1 + Q_2 + \ldots. + Q_m) + (R_1 + R_2 + \ldots. + R_m);$$

e poichè per essere singolarmente le R_s di grado inferiore a D, tale è anche la loro somma, avremo, denotando con Q ed R il quoziente ed il resto della divisione di P per D:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots. + Q_m$$
$$R = R_1 + R_2 + \ldots. + R_m.$$

La dimostrazione del secondo teorema, in cui si suppone $P = P_1 P_2 \ldots. P_m$, è altrettanto facile e può qui essere omessa per brevità. (*)

2.

Applichiamo simultaneamente questi due teoremi ai casi particolari di $D = x - a$, $D = x^r - a^r$.

1.° $D = x - a$. Supposto

$$P^{(n)} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots.. + a_{n-1} x + a_n,$$

uno qualunque dei suoi termini $a_{n-s} x^s$ altro non è che il prodotto della quantità a_{n-s}, indipendente dalla x, per la potenza x^s, e questa, alla sua volta, è il prodotto di s fattori uguali ad x. Ora, poichè x diviso per $x - a$ dà di resto a, avremo, per il teorema II, che x^s diviso per $x - a$ darà di resto a^s; che $a_{n-s} x^s$ darà il resto $a_{n-s} a^s$, e infine, pel teorema I, che $P^{(n)}$ diviso per $x - a$ darà il notissimo resto:

$$R = a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \ldots. + a_{n-1} a + a_n.$$

2.° $D = x^r - a^r$. Il fattore x^s di un termine $a_{n-s} x^s$ in cui sia $s < r$, diviso per $x^r - a^r$ dà di resto il fattore stesso. Se $s = r$ la divisione di x^r per $x^r - a^r$ dà per resto a^r, e se finalmente $s > r$ allora posto

$$s = tr + s' \quad (s' < r)$$

(*) Cfr. la mia Nota: *Su alcuni teoremi relativi alla divisione algebrica* » (Anno II, fasc. VI).

resulterà:

$$x^s = x^{tr+s'} = (x^r)^t \cdot x^{s'}$$

e, per il teorema II, il resto della divisione di x^s per $x^r - a^r$ sarà:

$$(a^r)^t \cdot x^{s'} = a^{tr}\, x^{s'}.$$

Ciò rende evidente che il resto della divisione del polinomio $P^{(n)} = a_0\, x^n + \ldots. + a_n$ per $x^r - a^r$ dev'essere:

$$\begin{aligned} R = & (a_{n-kr+1}\, a^{(k-1)r} + a_{n-(k-1)r+1}\, a^{(k-2)r} + \ldots\ldots + a_{n\ 2r+1}\, a^r + a_{n-r+1})\, x^{r-1} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (a_{n-kr-1}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r-1}\, a^{(k-1)r} + \ldots + a_{n-r-1}\, a^r + a_{n-1})\, x \\ & + (a_{n-kr}\, a^{kr} + a_{n-(k-1)r}\, a^{(k-1)r} + \ldots + a_{n-r}\, a^r + a_n), \end{aligned}$$

dove tra $n, k, r,$ ha luogo la relazione

$$n = kr + h \quad (h < r).$$

Essendo poi

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots. + Q_m$$

si possono avere con facilità in ambedue i casi anche le forme dei quozienti. (*)

(Continua). E. Sadun.

SUI LIMITI

(Continuazione e fine: Vedi pagina 81).

Teorema V. *Se* a_n b_n $\frac{1}{c_n}$ *non crescono indefinitamente ed* a_n *prende soli valori aritmetici, ed è*

$$\lim . a_n = a \quad \lim . b_n = b \quad \lim . c_n = c \quad \lim . (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = \infty$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} \cdot a_2^{b_{n-1}} \cdot \ldots\ldots \cdot a_n^{b_1}} = \sqrt[c]{a^b}.$$

(*) V. la mia Nota: *Condizioni di divisibilità d'un polinomio per un binomio della forma* $x^r - a^r$ (Anno III, fasc. V).

Dimostrazione. È:

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots . a_n^{b_1}}$$

$$= \lim . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots\ldots + c_n]{(a_1 . \ldots\ldots . a_k)^b . (b_k . \ldots\ldots . b_1)^a}$$

$$\times \left[\sqrt[c_{2k+1} + \ldots\ldots + c_n]{a_{k+1}^{b_{n-k}} . \ldots\ldots . a_{n-k}^{b_{k+1}}}\right]^{\frac{c_{2k+1} + \ldots\ldots + c_n}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}}$$

$$= \lim . (a_1 . \ldots\ldots . a_k)^{\frac{b}{c_1 + \ldots\ldots + c_n}} \times (b_k . \ldots\ldots . b_1)^{\frac{a}{c_1 + \ldots . + c_n}}$$

$$\times \sqrt[c_{2k+1} + \ldots\ldots c_n]{a_{k+1}^{b_{n-k}} . \ldots\ldots . a_{n-k}^{b_{k+1}}}$$

per cui, essendo

$$\lim . b : (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = \lim . a : (c_1 + \ldots\ldots + c_n) = 0$$

supposto k abbastanza grande perchè $c_{2k+1}\ c_{2k+2} \ldots\ldots$ abbiano tutte il segno del limite c, si ha pel corollario II

$$\lim . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots\ldots . a_n^{b_1}}$$

$$= M\left(\sqrt[c_{2k+1}]{a_{k+1}^{b_{n-k}}}, \ldots\ldots\ldots, \sqrt[c_n]{a_{n-k}^{b_{k+1}}}\right)$$

dove k può essere fissato arbitrariamente grande cosicchè, facendolo crescere indefinitamente, si riconosce appunto essere (*)

$$\lim_{n=\infty} . \sqrt[c_1 + \ldots\ldots + c_n]{a_1^{b_n} . \ldots\ldots . a_n^{b_1}} = \sqrt[c]{a^b}$$

Corollario IV. Facendo

$$c_n = \psi_n - \psi_{n-1} \quad \psi_0 = 0 \quad a_n = f_n : f_{n+1} \quad f_1 = 1 \quad b_n = 1$$

si trova che:

Se esiste

$$\lim . \sqrt[\psi_n - \psi_{n-1}]{f_n : f_{n-1}}$$

(*) Facendo $c_n = b_n = 1$ si ottiene un teorema di Cauchy.

ed è $\lim . \psi_n = \infty$, esiste ancora

$$\lim \sqrt[\psi_n]{f_n}$$

ed è precisamente

$$\lim . \sqrt[\psi_n]{f_n} = \lim . \sqrt[\psi_n - \psi_{n-1}]{f_n : f_{n-1}}$$

e se si fa $\psi_n = n$ $f_n = u_n$ si trova che:

Se esiste $\lim . u_n : u_{n-1}$, si ha:

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} = \lim . \frac{u_n}{u_{n-1}}$$

Si riconosce facilmente che può esistere $\lim . \sqrt[n]{u_n}$ senza che esista (*) $\lim . u_n : u_{n-1}$ perchè se, p. es., fosse

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} = \lim . u_n : u_{n-1} = \lambda$$

si potrebbe scegliere α_n in modo che $\alpha_n : \alpha_{n-1}$ non tenda ad alcun limite e sia $\lim . \sqrt[n]{\alpha_n} = 1$; facendo $u_n . \alpha_n = v_n$ si avrebbe così

$$\lim . \sqrt[n]{v_n} = \lambda$$

mentre $v_n : v_{n-1}$ non tenderebbe ad alcun limite: si potrebbe, p. es., fare α_n eguale al numero dei divisori di n.

Credo tuttavia opportuno far osservare che l'importanza dell'espressione $\sqrt[n]{u_n}$ relativamente all'altra $u_n : u_{n-1}$, come carattere di convergenza e divergenza delle serie numeriche a termini positivi, non è che apparente perchè se si ha

$$\lim . \sqrt[n]{u_n} < \lambda < 1$$

essendo $\lim . \sqrt[n]{n^2} = 1$ si finirà per avere sempre

$$u_n < \frac{1}{n^2}$$

(*) V. Rend. Circ. Mat. di Palermo. — Adunanza 13 luglio 1890. = CAUCHY: *Analyse algébrique*.

per cui si potrà riconoscere immediatamente la convergenza della

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

confrontandola colla serie convergente

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots$$

Può quindi restar dubbio sulla convergenza solamente se $\sqrt[n]{u_n}$ finisce per non esser mai maggiore di 1, ma ha questo numero per limite almeno quando n cresca indefinitamente percorrendo opportune successioni.

APPLICAZIONI.

1. Se nel teorema I si fa

$$A = 1 + x \qquad B = 1$$

si riconosce essere

$$\lim_{x=0} . \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k.$$

2. Se nel corollario III si fa

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \varphi_n = \sqrt{n}$$

si trova (*):

$$\lim_{n=\infty} . \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \lim . \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \lim . \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} = 2.$$

3. Facendo nel corollario III

$$f_n = a_1^k + a_2^k + \ldots\ldots\ldots + a_n^k \qquad \varphi_n = a_n^{k+1}$$

si trova, ricorrendo anche al teorema I, che:

(*) D. Besso. *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario.* - Gennaio-Febbraio 1890.

Se è

$$\lim . a_n = \infty \quad \lim . a_n : a_{n-1} = 1 \quad \lim . (a_n - a_{n-1}) = \alpha$$

si ha:

$$\lim_{n=\infty} . \frac{a_1^k + a_2^k + \dots\dots + a_n^k}{a_n^{k+1}} = \frac{1}{(k+1)\alpha}$$

e se si fa $a_n = n$ epperò $\alpha = 1$, si trova una relazione, di cui si è fatto grande uso nelle integrazioni definite che precedettero la scoperta del calcolo differenziale (*).

4. Facendo nel corollario IV

$$f_n = n^k \qquad \psi_n = n$$

si trova essere

$$\lim . \sqrt[n]{n^k} = 1.$$

5. Facendo nel corollario IV

$$f_n = \frac{1}{n^n} \cdot (a+b)(a+2b) \dots\dots (a+nb) \qquad \psi_n = n$$

e ponendo, come s'usa,

$$\lim . \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

si trova

$$\lim . \frac{1}{n} . \sqrt[n]{(a+b)(a+2b) \dots . (a+nb)} = \frac{b}{e}$$

da cui si deduce

$$\lim . \frac{1}{n} . \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{e}.$$

6. Ponendo nel corollario IV

$$f_n = n! \, (a-1) . (\sqrt{a} - 1) . (\sqrt[3]{a} - 1) \dots . (\sqrt[n]{a} - 1)$$
$$\psi_n = n \quad a > 1$$

(*) *V.* Nota in fine.

e ricordando essere (*)

$$\lim . n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=l\,a$$

si trova, mediante facili trasformazioni,

$$\lim . \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)\ldots .\left(1+a^{\frac{1}{n}}+a^{\frac{2}{n}}+\ldots+a^{\frac{n-1}{n}}\right)}$$
$$=\frac{a-1}{l\,a}\cdot\frac{1}{e}.$$

Da questa, facendo tendere a ad 1 ed osservando essere

$$\lim_{a=1} . \frac{a-1}{l\,a}=1,$$

come si riconosce immediatamente dallo sviluppo in serie di $l\,(1+x)$, si trova di nuovo

$$\lim . \frac{1}{n}\sqrt[n]{n\,!}=\frac{1}{e}.$$

Nota. Le origini del teorema espresso dalla

$$\lim_{m=\infty} . \frac{1^n+2^n+\ldots .+m^n}{m^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$$

si trovano in Archimede, nel libro: *De Lineis spiralibus*. Cavalieri, nelle sue *Exercitationes geometricae*, lo enuncia per n intero positivo. Wallis, nella sua *Arithmetica infinitorum*, considera particolarmente l'espressione

$$\lim_{m=\infty} . \frac{0^n+1^n+2^n+\ldots .+m^n}{m^n+m^n+m^n+\ldots .+m^n}=\lim . \frac{1^n+2^n+\ldots .+m^n}{(m+1)\,.\,m^n}$$

che per $n>0$ non differisce, sostanzialmente, dalla precedente: dimostra che tal limite è $\frac{1}{n+1}$ per $n=1, 2, \ldots, 6$ (V. Johannis Wallis; *Opera Mathematica*, Oxoniae, MDCXCV); procedendo per induzione afferma successivamente, senza darne dimostrazione, che ciò sussiste per qualsiasi valore positivo intero, frazionario od anche irrazionale dell'esponente; osserva che per $n=-1$ il denominatore, $n+1$, divien zero e quel limite infinito; per $n<-1$ osserva che il denominatore discende sotto zero ed egli, intuendo sempre giustamente, afferma che allora il detto limite è più che infinito. Pascal ha dimostrata, rigorosamente, quella relazione per n intero positivo qualunque.

(*) V. Lagrange. *Théorie des fonctions analytiques.* — Pag. 48.