Bollettino dell'AFSU
Vol 1(1), 2018, p. n-nn
ISSN: 0000-0000
eISSN: 0000-0000

Il paradosso di Zenone quantistico

Alessio Giuseppe Ferraioli* e Canio Noce#

* Università degli Studi di Salerno, Via Giovanni Paolo II, Fisciano (SA) a.ferraioli40@studenti.unisa.it

Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno, Via Giovanni Paolo II, Fisciano (SA) cnoce@unisa.it

Sunto

Il filosofo presocratico Zenone di Elena nei suoi paradossi mostrava come semplici assunzioni di geometria e aritmetica elementare potessero portare a conclusioni fisicamente assurde. Allo stesso modo, i fisici indiani Misra e Sudarshan hanno mostrato come le leggi della meccanica quantistica applicate allo studio di un decadimento radioattivo portano a un risultato apparentemente inspiegabile, che hanno denominato paradosso di Zenone quantistico. Nel calcolare la probabilità che un sistema quantistico instabile, come un nucleo radioattivo, decada in un intervallo di tempo finito, hanno trovato che se il sistema è sotto continua osservazione il decadimento non dovrebbe mai avvenire. Ciò è in palese contrasto con l'esperienza quotidiana, poiché i decadimenti radioattivi avvengono indipendentemente dalla presenza di un "osservatore". Il rapporto che ha il paradosso con la teoria della misura sarà qui discusso per concludere che esso, pur essendo una caratteristica genuina della meccanica quantistica, riguarda i più svariati ambiti della fisica. Analizzeremo quali sono gli aspetti paradossali dell'effetto e il significato di una sua eventuale conferma sperimentale.

Parole chiave: Meccanica quantistica, teoria della misura, paradosso di Zenone quantistico, riduzione della funzione d'onda, decadimenti radioattivi, misure senza interazione.

1. Introduzione

Tra i tanti problemi concettuali irrisolti della meccanica quantistica, il paradosso di Zenone quantistico, seppure noto dalla metà del secolo scorso, non ha mai catturato l'attenzione della comunità scientifica. Per lungo tempo è stato considerato non più di un artificio matematico causato da assunzioni troppo semplicistiche riguardo la teoria della misura e confinato solo ad aree circoscritte e marginali della fisica. Solo negli ultimi venti anni l'importanza di questo fenomeno è stata rivalutata, come testimonia un crescente numero di esperimenti e pubblicazioni al riguardo. Il paradosso di Zenone è oggi considerato una caratteristica genuina della meccanica quantistica e inoltre, poiché la sua derivazione è indipendente dai dettagli del sistema in questione, riguarda i più svariati ambiti della fisica.

La prima menzione del fenomeno è dovuta ad Alan Turing, in alcune corrispondenze private con il suo collaboratore e amico Robin Gandy risalenti al 1954 (Teuscher, Hofstadter, 2004). Turing esprime nella lettera i suoi dubbi riguardo le basi concettuali della meccanica quantistica, le quali portano ad alcuni risultati apparentemente paradossali, e perciò avverte la necessità di una nuova formulazione della teoria. Trascorrono venti anni prima che ne venga formulata una prima descrizione rigorosa, ad opera di Degasperis, Fonda e Ghirardi (Degasperis, Fonda, Ghirardi, 1974). È tuttavia nel 1977 che l'argomento viene presentato nella veste in cui lo conosciamo attualmente, quando Misra e Sudarshan pubblicano un articolo intitolato "The Zeno's paradox in quantum theory" (Misra, Sudarshan, 1977), il quale costituisce ancora oggi il punto di riferimento per lo studio del fenomeno.

Il nome viene dal paradosso della freccia formulato dal filosofo presocratico Zenone di Elea nel V secolo a.C.: il moto di una freccia in volo è composto da infiniti istanti di tempo di durata nulla, in ognuno dei quali essa non compie spostamento. La freccia è, dunque, ferma in ogni istante elementare e, poiché il moto è fatto dal susseguirsi di questi istanti, non dovrebbe essere capace di avanzare. Con questa argomentazione, Zenone voleva sottolineare come alcune assunzioni apparentemente elementari di geometria e aritmetica possono portare a conclusioni fisicamente assurde. Allo stesso modo, Misra e Sudarshan hanno utilizzato le leggi della meccanica quantistica per calcolare la probabilità che un nucleo radioattivo decada nel corso di un intervallo di tempo finito. Con grande sorpresa, la loro conclusione è stata che, se il nucleo è posto sotto osservazione continua, ovvero è presente uno strumento con lo scopo di rivelare un decadimento, esso non dovrebbe mai decadere! Nella realtà, i nuclei radioattivi sono molto meno "riservati" di quanto previsto e decadimenti vengono osservati in laboratorio quotidianamente. Questa incongruenza tra predizione teorica ed esperienza comune è ciò che costituisce il paradosso di Zenone quantistico.

Per esaminare il fenomeno partiremo dallo studio della probabilità di sopravvivenza di un sistema quantistico instabile; vedremo che nelle prime fasi del decadimento essa presenta una dipendenza dal tempo t dell'ordine t^2. È questa dipendenza funzionale dal tempo che gioca un ruolo fondamentale nel paradosso di Zenone quantistico. Valuteremo il rapporto del paradosso con le varie teorie della misura, per concludere che esso è indipendente dalla particolare interpretazione adottata. Discuteremo quali aspetti rendono il fenomeno paradossale, dandone una definizione rigorosa. Infine, esamineremo alcune evidenze sperimentali e valuteremo se corrispondono alle nostre aspettative teoriche.

2. Dipendenza temporale della probabilità di decadimento

Prima di studiare come varia la probabilità di decadimento di un sistema quantistico in funzione del tempo, esaminiamo il comportamento di un sistema classico. Prendiamo come esempio l'evoluzione temporale di una reazione chimica, anche se le considerazioni che faremo sono del tutto generali. Il comportamento del sistema è descritto da una somma di termini esponenziali, ognuno rappresentante un diverso processo, che tende a una situazione di equilibrio termodinamico. I cambiamenti nelle concentrazioni in soluzione saranno proporzionali a t, ovvero il tasso di cambiamento sarà indipendente dal tempo. Supponiamo che P_0 sia la concentrazione di una particolare specie chimica e che al tempo $t = 0$ sia pari a 1. La sua evoluzione è espressa dalla semplice legge

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0, \tag{2.1}$$

che ha come soluzione

$$P_0 = e^{-\lambda P_0}. \tag{2.2}$$

Abbiamo assunto che non ci sia rigenerazione, ovvero che una volta avvenuta la reazione non possa avvenire la reazione inversa. Questo comportamento esponenziale gode della proprietà dei semigruppi:

$$P_0(t_1 + t_2) = P_0(t_1)P_0(t_2). \tag{2.3}$$

Questo significa che un processo di decadimento che avviene per un tempo t_1, seguito da un'interruzione, o una misurazione, e poi un altro periodo di decadimento fino a t_2, è equivalente a un decadimento ininterrotto per un tempo $t_1 + t_2$. Tale caratteristica è ciò che rende i processi classici concettualmente semplici da trattare e inizialmente si pensò che anche i decadimenti quantistici obbedissero alle stesse leggi. Le prime evidenze sui decadimenti radioattivi, all'inizio del '900, rivelarono un comportamento esponenziale e i successivi studi a riguardo trattarono il fenomeno con un approccio classico. Ulteriori prove empiriche e teoriche hanno rivelato che lo sviluppo è solo approssimativamente esponenziale e, in aggiunta, il comportamento a tempi brevissimi o lunghissimi presenta caratteristiche inaspettate. Per tempi brevi, il decadimento segue solitamente una legge quadratica, mentre per tempi lunghi può assumere comportamenti vari come potenze negative e oscillazioni. La **dipendenza iniziale da t^2** è la causa essenziale del paradosso di Zenone.

Lo studio del decadimento di uno stato quantistico equivale a determinare la probabilità che il sistema al tempo t sia ancora nello stato iniziale $\phi_0 \equiv \phi(t=0)$, detta **probabilità di sopravvivenza**. Essa equivale al modulo quadro della proiezione di ϕ_0 sullo stato al tempo t. Il sistema evolve secondo l'equazione di Schrödinger, pertanto al tempo t la funzione d'onda sarà $\phi(t) = \exp(-iHt/\hbar)\phi_0$, con H l'Hamiltoniano del sistema che supponiamo indipendente dal tempo. La probabilità di sopravvivenza è quindi:

$$P_s = |\langle\phi_0|\phi(t)\rangle|^2 = \left|\langle\phi_0|e^{-iHt/\hbar}|\phi_0\rangle\right|^2. \tag{2.4}$$

Sviluppando l'esponenziale per tempi piccoli, si evidenzia la dipendenza da t^2:

$$P_s = \left|\langle\phi_0|e^{-iHt/\hbar}|\phi_0\rangle\right|^2 = 1 - {(\Delta H)^2 t^2}/{\hbar^2} + \ldots, \tag{2.5}$$

con $(\Delta H)^2 = \langle\phi_0|H^2|\phi_0\rangle - (\langle\phi_0|H|\phi_0\rangle)^2$. Un risultato importante è la regola di Fleming (Fleming, 1973), la quale dà un limite alla velocità di crescita della probabilità di decadimento:

$$P_s \geq \cos^2({\Delta H\, t}/{\hbar}) \qquad \text{per } t < {\hbar\pi}/{2\Delta H} \tag{2.6}$$

Una semplice dimostrazione (Home, Whitaker, 1986) parte dal principio di indeterminazione generalizzato:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \tfrac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}], \tag{2.7}$$

con $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due osservabili qualsiasi e $(\Delta\hat{A})^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$ (similmente per $\hat{B}$). Prendendo come $\hat{B}$ l'Hamiltoniano H del sistema e usando

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = [\hat{A},H], \tag{2.8}$$

otteniamo

$$\Delta\hat{A} \geq \frac{\hbar}{2\Delta H}\left|\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle\right|. \tag{2.9}$$

Prendendo come $\hat{A}$ il proiettore

$$\hat{A} = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|, \tag{2.10}$$

abbiamo

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle = P_s(t), \tag{2.11}$$

avendo sfruttato la proprietà di idempotenza. Possiamo riscrivere la (1.9) come

$$(P_s - {P_s}^2)^{1/2} \geq \frac{\hbar}{2\Delta H}\left|\frac{dP_s}{dt}\right|. \tag{2.12}$$

Integrando ambo i membri:

$$\int_1^{P_s} \frac{dP_s'}{(P_s - {P_s}^2)^{1/2}} \leq \frac{2\Delta H}{\hbar} t, \tag{2.13}$$

ricaviamo la regola di Fleming (2.6) la quale ci dice che la probabilità di decadimento cresce al massimo come il $\cos^2({}^{\Delta H\, t}/_{\hbar})$.

La regola d’oro di Fermi, una legge che definisce la probabilità di transizione da uno stato quantistico all’altro, è spesso considerata incompatibile con la dipendenza t^2. La probabilità di passare da uno stato m a un insieme di stati k caratterizzata da una densità di stati ρ_k sotto una perturbazione V è (Home, Whitaker, 1986):

$$P(t) = \tag{2.14}$$
$$= \frac{1}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{\infty} |\langle m|V|k\rangle|^2 \rho_k \frac{sin^2(\frac{E_k - E_m - \hbar\omega}{2\hbar}t)}{\left(\frac{E_k - E_m - \hbar\omega}{2\hbar}\right)^2} dE_k$$

L'approccio usuale a questa espressione consiste nel considerare che il termine $\sin^2 \alpha/\alpha^2$ è piccolo tranne che per un ristretto range di α ed è dunque possibile considerare $|\langle m|V|k\rangle|^2\rho_k$ costante su questo range. Si ottiene così la forma nota della regola d'oro:

$$P(t) = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle m|V|k\rangle|^2\rho_k t, \tag{2.15}$$

in cui compare la dipendenza lineare da t come nel caso classico. Tuttavia, le approssimazioni effettuate sono intrinsecamente per tempi lunghi, perché minore è t, più ampio è il range in cui l'integrando rimane grande e perciò $|\langle m|V|k\rangle|^2\rho_k$ non può essere considerato costante. Un'approssimazione adeguata per tempi brevi è data da:

$$P(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} |\langle m|V|k\rangle|^2\rho_k dE_k\right] t^2, \tag{2.16}$$

in cui naturalmente compare la dipendenza da t^2.

Nonostante la terminologia di decadimento e sopravvivenza sia legata ai fenomeni radioattivi, i risultati ottenuti sono generali e tale comportamento è la norma per i sistemi quantistici instabili. Ad esempio (Home, Whitaker, 1997), consideriamo una particella con spin $\frac{1}{2}$, come un neutrone, all'interno di un campo magnetico B_z diretto lungo l'asse z. Il neutrone può assumere due orientazioni di spin: χ_+ e χ_-. Supponiamo che esista la possibilità di inversione dello spin a causa di un campo magnetico B_x orientato lungo l'asse x. Se a $t = 0$ la particella si trova nello stato χ_+, possiamo identificare questo come stato non decaduto ϕ_s e χ_- come stato decaduto ϕ_d. La funzione d'onda del neutrone sarà la loro combinazione lineare, con dei coefficienti dipendenti dal tempo:

$$\phi(t) = a_s(t)\phi_s + a_d(t)\phi_d \tag{2.17}$$

L'equazione che descrive l'evoluzione temporale del sistema è

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_s \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & V \\ V & -\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_s \\ a_d \end{pmatrix}, \tag{2.18}$$

avendo posto $\varepsilon = |\mu|B_x/2$ e $V = |\mu|B_z/2$, con μ momento magnetico di spin. I coefficienti $a_s(t)$ e $a_d(t)$ risultano

$$a_s(t) = \cos(\omega_0 t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar\omega_0}\sin(\omega_0 t), \tag{2.19a}$$

$$a_d(t) = -\frac{iV}{\hbar\omega_0}\sin(\omega_0 t), \tag{2.19b}$$

con

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\varepsilon^2 + V^2}. \tag{2.20}$$

La probabilità di decadimento è il modulo quadro del coefficiente $a_d(t)$:

$$P_d(t) = \frac{V^2}{\hbar^2{\omega_0}^2}\sin^2(\omega_0 t), \tag{2.21}$$

che per tempi piccoli mostra chiaramente la dipendenza da t^2, senza la presenza di termini lineari in accordo con la regola di Fleming:

$$P_d(t) = \frac{V^2}{\hbar^2} t^2 + \cdots \tag{2.22}$$

Anche se la dipendenza da t^2 si basa su assunzioni molto generali, non può essere considerata universale. Nello sviluppo della probabilità per tempi piccoli abbiamo implicitamente assunto che ΔH sia finito; possono esistere casi in cui viene ottenuto un comportamento esponenziale per ogni t (Nakazato, Namiki, Pascazio, 1994). Ciononostante, la dipendenza iniziale da t^2 deve essere considerata la norma ed è su di essa che si basa il paradosso di Zenone quantistico.

3. Paradosso di Zenone quantistico

Abbiamo visto che la probabilità che in un intervallo di tempo avvenga un decadimento è proporzionale a t^2 nei primi istanti del processo. La probabilità di sopravvivenza, ovvero che all'istante t il decadimento non sia ancora avvenuto è banalmente il suo complementare:

$$P_s(t) = 1 - kt^2 \tag{3.1}$$

Supponiamo che al tempo ${}^{t}/_{2}$ venga effettuata una misura per verificare lo stato del sistema. La probabilità che venga trovato non decaduto è ovviamente

$$P_s\left({}^{t}/_{2}\right) = 1 - k\left({}^{t}/_{2}\right)^2 \tag{3.2}$$

Se la misura ha evidenziato che la transizione di stato non è ancora avvenuta, utilizzando il postulato di riduzione riportiamo la funzione d'onda allo stato iniziale, di fatto azzerando il processo di decadimento. La probabilità di ottenere nuovamente un decadimento al tempo t sarà

$$P_s{}'(t) = \left[1 - k\left({}^{t}/_{2}\right)^2\right]^2 \\ = 1 - k\,{}^{t^2}/_{2} + k^2\left({}^{t}/_{2}\right)^4. \tag{3.3}$$

Per tempi piccoli possiamo trascurare il termine in t^4. Confrontando allora la (3.3) con la (3.1) notiamo che l'atto di misura ha dimezzato la probabilità di decadimento rispetto al sistema non osservato. Se nell'intervallo di tempo t vengono effettuate n misure, la probabilità diminuisce di $n-1$ volte. Facendo tendere n all'infinito, cioè effettuando infinite misure istantanee, la probabilità di decadimento si annulla e il sistema non evolve mai. Un sistema osservato continuamente non dovrebbe mai decadere. Questo è il fenomeno noto come **paradosso di Zenone quantistico** come definito da Misra e Sudarshan. La dipendenza t^2 è la causa del rallentamento del decadimento, oltre al fatto che le misure siano del primo tipo; infatti, nel caso classico, in cui abbiamo una dipendenza lineare:

$$\tilde{P}_s(t) = 1 - kt, \tag{3.4}$$

la probabilità di sopravvivenza non è influenzata da una misura al tempo ${}^{t}/_{2}$, ma resta invariata:

$$P_s{}'(t) = \left[1 - k\left({}^{t}/_{2}\right)\right]^2 \cong 1 - kt, \tag{3.5}$$

avendo trascurato i termini di grado superiore. In generale, per una probabilità dipendente da t^m, del tipo:

$$\tilde{P}_s(t) = 1 - kt^m, \tag{3.6}$$

per $m > 1$ le misure causano un rallentamento del decadimento, per $m = 1$ non lo influenzano e per $m < 1$ lo velocizzano. Non sono note situazioni in cui quest'ultima condizione è soddisfatta, ma questo esempio fa capire l'imprescindibilità della dipendenza da t^2 (o in generale da t^m con $m > 1$, anche se solo il caso $m = 2$ è stato osservato).

4. Il paradosso di Zenone quantistico è indipendente dal postulato di riduzione

Seguendo la trattazione originale, per introdurre il paradosso abbiamo usato il postulato di riduzione, condizione sufficiente ma non necessaria. Tuttavia, per molti anni è stato generalmente accettato che il paradosso fosse legato intrinsecamente al postulato: negare l'uno significava negare l'altro e viceversa. Questa era la posizione di Ballentine (Ballentine, 1990), sostenitore delle teorie ad ensemble, il quale vedeva nel paradosso di Zenone un metodo per smentire empiricamente l'ipotesi di riduzione. È interessante anche la posizione presa in uno studio di Inagaki (Inagaki, Namiki, Tajiri, 1992), dove vengono analizzate due differenti modalità di rilevazione di spin-flip di neutroni, allo scopo di mostrare come il paradosso sia legato al postulato di riduzione. Il primo processo presenta la riduzione della funzione d'onda ad ogni step, mentre il secondo no. Gli autori, contrariamente alle loro aspettative, non hanno evidenziato nessuna differenza tra i risultati dei due metodi. Più recentemente, si è diffusa sempre più la convinzione che il postulato non sia necessario. Riportiamo ad esempio le argomentazioni di Home e Whitaker (Home, Whitaker, 1997), che partono da interpretazioni della misura che non richiedono collasso, come la teoria a molti mondi o a ensemble. Questo approccio consiste nell'includere nella funzione d'onda studiata anche quella dell'apparato di misura. Consideriamo il caso già accennato dello spin-flip di un neutrone in un campo magnetico. Esso può assumere due stati ϕ_s e ϕ_d, con rispettive energie E_s e E_d. Prendiamo come zero dell'energia il valor medio $(E_s + E_d)/2$, e definiamo $E_s = -E_d = \varepsilon$ rispetto al nuovo zero. La funzione d'onda iniziale (prima di una misura) è

$$\Psi(t) = \{a_s(t)\phi_s + a_d(t)\phi_d\};\psi, \qquad (4.1)$$

con ψ che rappresenta l'apparato di misura. Se a $t = 0$ la particella si trova nello stato ϕ_s, ovvero $a_s(0) = 1$ e $a_d(0) = 0$, l'evoluzione temporale è descritta dalle

(2.18) e (2.19). Se si lascia evolvere il sistema indisturbato per un tempo $2\tilde{t}$, si ottengono due contributi allo sviluppo di a_s. Il primo è dovuto all'evoluzione di a_s conformemente alla (2.18), pari a $[a_s(\tilde{t})]^2$. Il secondo tiene conto della possibilità di spin-flip inverso e possiamo chiamarlo "termine di rigenerazione"; si ricava risolvendo la (2.18) con condizioni iniziali $a_s(0) = 0$ e $a_d(0) = 1$ e risulta essere $[a_d(\tilde{t})]^2$. La probabilità è quindi:

$$P_s(2\tilde{t}) = 1 - \frac{V^2}{\hbar^2}(2\tilde{t})^2 + \cdots \tag{4.2}$$

Ciò è coerente con il risultato che avremmo avuto semplicemente sostituendo $2\tilde{t}$ nella probabilità di decadimento calcolata precedentemente (2.22) e facendone il complementare. In altri termini, ciò significa che:

$$[a_s(\tilde{t})]^2 + [a_d(\tilde{t})]^2 = a_d(2\tilde{t}), \tag{4.3}$$

com'è facile verificare dalla (2.19). Se per qualche motivo il termine di rigenerazione non è presente, la probabilità diventa

$$P_s{}'(2\tilde{t}) = |a_s(\tilde{t})|^4 = 1 - \frac{1}{2}\frac{V^2}{\hbar^2}(2\tilde{t})^2 + \cdots. \tag{4.4}$$

La probabilità di decadimento viene dimezzata, come previsto dal paradosso di Zenone quantistico. Ma in che modo può venir rimosso il termine di rigenerazione? La soppressione della rigenerazione può essere effettuata separando gli stati ϕ_s e ϕ_d all'istante $\tilde{t}$. Un'alternativa è usare il postulato di riduzione, il quale è perciò uno strumento semplice e veloce per spiegare l'effetto, anche se non è l'unico. In altre situazioni la separazione può avvenire naturalmente: ad esempio, nell'analisi di un decadimento radioattivo, questi stati sono effettivamente separati se si include nella funzione d'onda anche quella dell'apparato:

$$\Psi(\tilde{t}) = a_s(\tilde{t})\phi_s\psi_s + a_d(\tilde{t})\phi_d\psi_d. \qquad (4.5)$$

Qui ψ_s e ψ_d rappresentano l'apparecchio dopo la misura, rispettivamente in cui non ha registrato un decadimento e in cui lo ha registrato. Poiché alla registrazione corrisponde l'annerimento permanente di un punto dello schermo, è chiaro che il secondo termine della somma non può più rappresentare lo stato non decaduto. La rigenerazione è ineffettiva e viene ottenuto l'effetto di Zenone. Queste argomentazioni sono valide per il caso di un nucleo radioattivo; da un punto di vista più generale, possiamo vedere invece come la (4.5) evolve per tempi successivi:

$$\begin{aligned}\Psi(2\tilde{t}) = [a_s(\tilde{t})]^2\phi_s\psi_s &+ a_s(\tilde{t})a_d(\tilde{t})\phi_d\psi_s \\ &+ a_d(\tilde{t})a_s^*(\tilde{t})\phi_d\psi_d \\ &+ [a_d(\tilde{t})]^2\phi_s\psi_d.\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Tutti questi termini sono mutuamente ortogonali, grazie al fatto di aver incluso esplicitamente la funzione d'onda dell'apparato. Possiamo quindi considerare individualmente il contributo di ogni termine. Il primo contribuisce alla probabilità con un fattore di ordine dell'unità, il secondo e il terzo con ordine t^2 e il quarto con ordine t^4. Possiamo trascurare dunque l'ultimo termine, il quale costituirebbe il termine di rigenerazione (il sistema è nello stato sopravvissuto dopo che il rivelatore ha segnalato un decadimento) e dunque ottenere una probabilità del tipo (4.4). Queste argomentazioni servono a mostrare che il paradosso di Zenone quantistico è indipendente dalla particolare teoria della misura utilizzata, ma è una conseguenza delle leggi standard della meccanica quantistica e pertanto va considerato come un elemento essenziale della teoria.

4. Effetto Zenone quantistico generalizzato

Finora abbiamo rimarcato più volte che la dipendenza t^2 è il punto fondamentale nel rallentamento del decadimento ad opera delle misurazioni. Dopo la prima fase t^2, la probabilità segue uno sviluppo approssimativamente esponenziale. Se fosse esattamente esponenziale, come nel caso classico, la misura non avrebbe nessun effetto su di esso. Alcuni autori, tra cui Whitaker (van der Merwe, Selleri, Tarozzi, 1992), definiscono un **effetto Zenone generalizzato** come qualsiasi modifica del decadimento causato da una deviazione dallo sviluppo identicamente esponenziale. L'influenza sul decadimento da parte di un sistema macroscopico di misura sarebbe dunque presente in ogni fase del processo, seppur non sempre facilmente apprezzabile. Recentemente, Koshino e Shimizu hanno analizzato l'effetto Zenone nel contesto di misure reali, a differenza delle misure ideali trattate nella formulazione tradizionale (Koshino, Shimizu, 2003). Secondo questi studi, una misura reale potrebbe causare una modifica nell'evoluzione temporale anche nel caso di un'esponenziale esatto. L'occorrenza di questo effetto sarebbe dunque ancor più ampia di quanto assunto in precedenza.

5. Cosa c'è di paradossale?

Cerchiamo ora di capire cosa ha di tanto strano e peculiare questo fenomeno da meritare il nome di paradosso. Misra e Sudarshan hanno applicato le leggi standard della meccanica quantistica per calcolare la probabilità che avvenga un decadimento in un intervallo di tempo finito. La straordinaria quanto bizzarra conclusione è stata che un sistema sotto continua osservazione non dovrebbe decadere mai. Ciò è fisicamente inaccettabile e in totale contrasto con l'esperienza, perché un nucleo radioattivo prima o poi decade, che sia presente o no un rivelatore. Di conseguenza, se le probabilità sono ricavate correttamente, bisogna concludere che la meccanica quantistica è una teoria **incompleta**, perché non riesce a fornire un metodo di calcolo adeguato di queste probabilità. Molti hanno liquidato banalmente la questione asserendo che il fenomeno non ha nulla di paradossale, ma è semplicemente causato dall'interazione continua dello strumento di misura sull'oggetto quantistico (Peres, 1993). Se così fosse, l'effetto non presenterebbe alcuna difficoltà concettuale, ma sarebbe facilmente spiegabile in termini classici. Il fatto realmente paradossale è che un sistema microscopico sembra essere influenzato dalla mera presenza di un apparato di misura macroscopico, posto a distanza macroscopica da esso. Innanzitutto, questo effetto è **non locale**. Dai lavori sul paradosso EPR siamo abituati alla possibilità di non località in meccanica quantistica (Bell, 1964). In questo caso, però, l'interazione è tra un sistema microscopico e uno macroscopico, separati fra loro e senza alcuna storia precedente di interazione che possa giustificare una correlazione. La misurazione è bensì effettuata con una modalità **a risultato negativo**: l'esito sperimentale è ottenuto non dal verificarsi di un evento fisico, ma dalla sua assenza. Prendiamo un atomo eccitato, che emette un fotone quando torna allo stato fondamentale. Se si monitora il processo con un fotorivelatore, quest'ultimo non riporta nessun segnale finché il decadimento non avviene. Si può concludere che l'atomo è ancora nello stato eccitato dal fatto che all'apparato "non succede nulla" e per questo una tale misura viene detta a risultato negativo. La difficoltà concettuale di questi esperimenti sta nella possibilità che la misura modifichi la funzione d'onda del sistema senza alcuna interazione fisica tra apparato e oggetto osservato. Questo è ciò che succede nel paradosso di Zenone quantistico, in cui il decadimento è arrestato per la presenza di un rivelatore, il quale però rimane infinitamente "in attesa" di percepire una particella senza interagire con l'atomo. Anche nel caso meno radicale in cui il decadimento viene rallentato invece che congelato, la presenza dello strumento di misura influenza il sistema prima di scambiare qualsiasi interazione, ritardando il momento in cui il fotone viene espulso. Home e Whitaker definiscono il paradosso di Zenone quantistico come qualsiasi rallentamento del decadimento di un sistema quantistico causato da una misura senza interazione e non locale (Home, Whitaker, 1997). Riserviamo il nome di paradosso solo ai casi in cui siano soddisfatte queste precise condizioni. Qualsiasi altro fenomeno in cui il rallentamento avviene a causa dell'interazione con uno strumento di misura, come quelli considerati da Peres, non ha difficoltà concettuali e possiamo chiamarlo **effetto Zenone quantistico**. Gli studi sull'effetto Zenone quantistico sono di grande interesse come prova dell'esistenza della regione t^2, ma sono più simili al cosiddetto "effetto cane da guardia" (Kraus, 1981), per il quale l'evoluzione temporale è alterata dall'interazione continua con l'ambiente.

Parlando di misure senza interazione sorgono diverse perplessità riguardo la possibilità di considerarle continue. Diverse argomentazioni sia tecniche che concettuali suffragano l'idea che una misura non possa durare un tempo nullo e non possa essere ripetuta con frequenza infinita. Questo è sicuramente il caso di una misura a risultato positivo, a causa del tempo finito necessario all'interazione. Dopo aver prodotto un risultato, l'apparato rimane ineffettivo per un certo tempo in cui è incapace di rivelare una nuova particella. Non è chiaro però per quale motivo in una misura a risultato negativo, in cui l'apparato passivamente "aspetta" che arrivi una particella, debba esistere un limite alla continuità dell'osservazione. Se il dispositivo non rivela niente all'istante $\tilde{t}$, non ha molto senso immaginare che $\tilde{t}$ sia seguito da un "tempo morto" in cui una eventuale particella sfuggirebbe alla misura. A causa del ruolo passivo dell'osservatore, ci si può domandare se il concetto di misura sia applicabile: se lo sperimentatore non fa nulla, è ancora possibile parlare di misura? Questa domanda si riconduce alla questione di cosa costituisce una misura e il ruolo dell'osservatore; purtroppo non c'è nessun consenso generale al riguardo.

Home e Whitaker hanno proposto dei procedimenti senza interazione "pro-attivi", cioè che richiedono una partecipazione attiva e volontaria dello sperimentatore (Home, Whitaker, 1986). In questo modo, possiamo momentaneamente scacciare il disagio provocato da domande fondamentali come "che cos'è una misura?" e concentrarci sul paradosso. L'esperimento mentale proposto posiziona il sistema in decadimento al centro di una sfera, le cui pareti interne sono dei perfetti rivelatori. Quando una particella giunge alla sfera, si crea un annerimento macroscopico e permanente. Si suppone che la sfera sia costituita di un materiale perfettamente estendibile e contraibile, come un pallone di gomma, e che la sua dimensione sia controllata dallo sperimentatore. Il pallone viene mantenuto esteso, con un raggio molto maggiore di $\tilde{t}v$, dove $\tilde{t}$ è il tempo passato dall'inizio del decadimento e v è la velocità a cui viaggiano le particelle prodotte. In questo stato nessun decadimento può essere captato dallo strumento. Per effettuare una misura, lo sperimentatore contrae velocemente il pallone fino a che sia piccolissimo, per poi di nuovo espanderlo e riportarlo istantaneamente nella situazione iniziale (assumiamo che il pallone possa muoversi molto più velocemente dei prodotti di decadimento). In questo modo le pareti avranno catturato qualsiasi particella prodotta da un decadimento avvenuto in un istante compreso tra 0 e $\tilde{t}$. Allo stesso modo, il procedimento può essere utilizzato per effettuare più misure, ai tempi $\tilde{t}/n$, $2\tilde{t}/n$,

$3\tilde{t}/n$ ecc… L’intera procedura può essere ripetuta per vari n e, a causa del paradosso di Zenone quantistico, si prevede che le statistiche di decadimento dipendano da n. Questo è un esempio di misura a risultato non negativo a intervalli discreti. Seppure l’aspetto che ha più attirato l’attenzione è il totale congelamento della funzione d’onda per misure continue, anche una serie di misure discrete dovrebbe avere effetti apprezzabili sul decadimento. Non ci sono eppure chiare evidenze che la vita media di un sistema sia influenzata da questo tipo di misure e ulteriori studi sono necessari.

Misra e Sudarshan hanno studiato il fenomeno assumendo che le misure siano ideali, cioè dotate di range di sensibilità infinito e con errore nullo. Negli esperimenti reali, in cui queste condizioni sono tutt’altro che soddisfatte, la teoria alla base del paradosso di Zenone potrebbe essere fortemente modificata, fino a giungere a conclusioni drasticamente nuove. Nel XXI secolo molti studi sono stati indirizzati all’indagine del paradosso in questo contesto. In particolare, ci si chiede in che modo diversi procedimenti di misura possano portare a diversi effetti. Di grande rilevanza è il lavoro di Hotta e Morikawa che tratta il paradosso di Zenone per misure senza interazione (Hotta, Morikawa, 2004). Lo studio conclude che a seguito di alcune assunzioni – che gli autori sostengono essere comunemente soddisfatte nelle misure reali – il paradosso di Zenone non si verifica e non è atteso nessun rallentamento, in accordo con l’esperienza comune. Contemporaneamente, Koshino e Shimizu hanno mostrato delle condizioni per misure reali sotto le quali il paradosso si verificherebbe (Koshino, Shimizu, 2005). Nell’articolo viene citato anche il lavoro di Hotta e Morikawa, sostenendo che si basi su ipotesi diverse e che quindi non c’è incompatibilità tra i due studi. L’analisi del paradosso di Zenone in relazione alle misure reali resta un argomento di grande interesse ed ancora grandemente inesplorato.

6. Evidenze sperimentali

Molti degli esperimenti che hanno trattato fenomeni identificabili come paradosso di Zenone quantistico in realtà non soddisfano la definizione che abbiamo dato nel precedente paragrafo. Questi comprendono i casi in cui l’alterazione del decadimento del sistema può essere spiegata classicamente tramite l'interazione con l'apparato di misura. Tali fenomeni, che abbiamo chiamato effetto Zenone quantistico, non presentano nulla di paradossale o concettualmente difficile. Ciononostante, sono di grande interesse perché provano l'esistenza della regione di dipendenza t^2. Seppure sia concettualmente semplice mostrarne l'esistenza, è difficile stimare quanto duri e ancor più difficile osservarla poiché solitamente si esaurisce in tempi brevissimi. Serot ad esempio ha stimato la durata della regione t^2 per un decadimento α per il ^{212}Po a circa $10^{-21}\ s$ (Serot, Carjan, Strottman, 1994). In particolare, la dipendenza t^2 esiste per un tempo particolarmente breve nei fenomeni di transizioni spontanee, rendendo perciò molto difficile studiarli (Ghirardi, Omero, Weber, 1979). Per questo i primi esperimenti sull'effetto Zenone si sono concentrati su transizioni indotte. Il più famoso è di certo l'esperimento di Itano del 1990, presentato in un articolo intitolato semplicemente "Quantum Zeno effect" (Itano et al., 1990). L'esperimento esamina le transizioni indotte tra due livelli di struttura iperfine del $^9Be^+$. Indicando con 1 il livello fondamentale, esiste uno stato 2 meta-stabile e uno stato 3 eccitato. Non è possibile nessuna transizione tra gli stati 2 e 3, ma solo tra 1 e 3. Viene considerata trascurabile qualsiasi transizione spontanea tra 1 e 2. Applicando un impulso laser di particolare frequenza, è possibile creare uno stato di sovrapposizione $1 + 2$. A questo punto, un secondo laser viene attivato per produrre la riduzione della funzione d'onda allo stato 1 oppure 2. Nel primo caso, lo ione comincia ad oscillare tra i livelli 1 e 3 emettendo fotoni, finché la stimolazione non viene interrotta. Nel secondo caso, invece, lo ione rimane nel livello 2 e nulla succede. Questa seconda alternativa è quella che Itano considera come misura a risultato negativo, condizione prevista per il paradosso di Zenone quantistico. Nonostante lo strumento di misura non rilevi effettivamente nessun fotone, ciò non basta a qualificare l'esito come paradossale. L'interazione del laser è ciò che in questo caso costituisce la vera misura e, includendo essa nell'Hamiltoniano del sistema è possibile spiegare il risultato da un punto di vista realista (Frerich, Schenzle, 1991). I risultati ottenuti sono in ottimo accordo con quelli previsti dall'effetto Zenone quantistico, il che mostra che la matematica della dipendenza t^2 è corretta, ma l'esperimento non getta alcuna luce sugli aspetti paradossali riscontrati da Misra e Sudarshan. L'esperimento di Itano è stato sviluppato ulteriormente da Plenio, il quale ha elaborato un modo per esaminare il decadimento in processi atomici spontanei invece che indotti (Plenio, Knight, Thompson, 1996). Il metodo si basa sull'estendere la durata della regione t^2, inizialmente di 10^{-16} s, fino a otto ordini di grandezza. La misura è effettuata con modalità simili a quelle di Itano, tramite l'interazione con un laser e perciò anche in questo caso i risultati possono essere spiegati con argomentazioni semiclassiche.

Gli esperimenti finora esaminati non soddisfano i criteri per un autentico paradosso di Zenone quantistico poiché presentano un rallentamento dovuto all'interazione tra apparato e sistema osservato. Sono però di considerevole importanza perché evidenziano la dipendenza da t^2 e recentemente effetti di questo tipo sono stati sfruttati per scopi pratici. Nel campo dell'informatica quantistica, Kalb ha messo a punto un metodo per ridurre gli errori osservando continuamente il sistema (Kalb et al., 2016). L'unità fondamentale dell'informatica quantistica è il qubit, che, a differenza del bit classico, può assumere oltre che i valori 0 e 1 anche uno stato di sovrapposizione dei due. Ciò permette capacità di calcolo e velocità irrealizzabili con la tecnologia tradizionale. Tuttavia, un qubit è per sua natura molto fragile e costantemente può evolvere in modo incontrollato a causa di interazioni non volute con l'ambiente, causando errori di calcolo. Il team di ricercatori è riuscito a diminuire gli errori tramite l'effetto Zenone quantistico. Osservando continuamente i qubit, codificati nello spin di atomi di diamante, le trasformazioni di stato non volute vengono inibite.

Un altro interessante esperimento è quello di Kwiat (Kwiat et al., 1995) che ha lo scopo di sfruttare l'effetto Zenone per migliorare l'efficacia di misure EV senza interazione (Elitzur e Vaidman, 1993). Lo schema di misura EV si basa sull'utilizzo di un interferometro Mach-Zehnder, uno strumento in cui il raggio incidente viene sdoppiato da un beam splitter e guidato lungo due percorsi tramite degli specchi fino a giungere a due uscite, A e B, dove sono presenti rivelatori. Il sistema è arrangiato in maniera tale che un fotone incidente uscirà con certezza dalla porta A e mai dalla porta B. Se in un braccio dell'interferometro viene però posto un oggetto perfettamente assorbente si crea una situazione differente: esiste ora una probabilità non nulla che il fotone esca dalla porta B. Questa differenza di comportamento è dovuta alla doppia natura del fotone, che in assenza dell'oggetto si comporta come onda, facendo interferenza, altrimenti come particella. L'esistenza dell'oggetto può essere dunque accertata dal fatto che viene rilevato un fotone nella porta B. La misura è senza interazione, perché se il fotone avesse interagito con l'oggetto sarebbe stato assorbito da esso. Possiamo immaginare anche, come suggerisce Kwiat, di sostituire l'oggetto perfettamente assorbente con una sensibilissima bomba, pronta ad esplodere se percepisce anche un solo fotone. Un fotone rilevato in B sarebbe in questo modo una prova della presenza della bomba senza però aver interagito con essa, poiché non è stata innescata l'esplosione. La limitazione delle misure EV è che la probabilità che un fotone esca dalla porta B è al più 50%, mentre i casi in cui esca dalla porta A non danno nessuna informazione riguardo alla presenza della bomba. Kwiat ha dunque messo a punto un sistema molto ingegnoso per affinare a piacere l'efficienza della misura. Egli sostiene che, misurando un numero arbitrariamente grande di volte lo stato del fotone nell'interferometro, l'effetto Zenone può inibire la transizione verso la porta A. L'apparato di Kwiat consiste in una serie di N interferometri EV. Ogni interferometro ha una certa riflettanza, così che il fotone viene un po' alla volta trasferito verso l'uscita A (i.e. nella sua funzione d'onda diventa maggiore il termine riferito all'uscita A). Se però in ogni interferometro viene posto un rivelatore, il trasferimento all'uscita A viene ostacolato. Maggiore il numero di interferometri, maggiore è la probabilità che il fotone esca dalla porta B, fino a ottenere la certezza assoluta nel caso in cui N tenda all'infinito. La matematica dietro l'esperimento di Kwiat è molto simile a quella del paradosso di Zenone; anche in questo caso, infatti, il termine di rigenerazione viene reso inefficace e ciò causa una diminuzione della probabilità di un fattore che dipende dal numero di misure effettuate. Home e Whitaker sostengono però che la fisica coinvolta è completamente diversa da quella di Zenone (Home, Whitaker, 1997). I rivelatori non hanno nessun ruolo nel monitorare il fotone e il loro unico scopo è quello di bloccarlo per evitare un suo ulteriore sviluppo. La stessa soppressione potrebbe avvenire in molti altri modi, come ad esempio rimuovendo gli specchi o variando il cammino ottico in modo da rendere inefficace il termine di rigenerazione. Per questo motivo l'effetto sfruttato dall'esperimento non solo non ha a che fare con Zenone quantistico, ma è anche "classico nel senso che un fisico del diciannovesimo secolo non avrebbe nessuna difficoltà a comprendere e spiegare il risultato sulla base della fisica del diciannovesimo secolo".

Nel 2015, Peise ha eseguito un esperimento basato su quello di Kwiat, ma con alcune modifiche che, a detta degli autori, lo renderebbero "[..] la prima osservazione dell'effetto Zenone quantistico con una misura continua, indiretta e a risposta negativa, condizioni considerate come le più stringenti da [Koshino e Shimizu, i quali si basano sulla definizione di Home e Whitaker]" (Peise et al., 2015). In questo studio, vengono effettuate delle misure EV su un condensato di Bose-Einstein. Nel sistema, i bosoni aventi spin 1 sono preparati tramite un campo magnetico in modo da avere s_z inizialmente pari a 0. Due particelle possono urtarsi, convertendosi in una coppia in cui un bosone ha $s_z = +1$ e l'altro -1. L'analogo dell'assorbitore EV è realizzato da un laser risonante, il quale causa una diminuzione effettiva di particelle al livello -1. Per il paradosso di Zenone quantistico, la presenza del laser previene la formazione di coppie di particelle per urti di spin. Una misura EV della presenza del laser può essere dunque effettuata senza interazione contando il numero di atomi nel livello $+1$: se il risultato è zero, la presenza del laser è confermata senza alcuna interazione con esso. Seppure il lavoro di Peise è stato citato come punto di riferimento nello studio delle dinamiche di spin in condensati di Bose-Einstein (Li et al., 2016; Szigeti et al., 2017), non esistono ancora evidenze che discutano la genuinità dell'effetto secondo i criteri da noi osservati. Il campo di ricerca è dunque ancora aperto e ulteriori studi devono essere condotti.

7. Conclusioni

Applicando le leggi standard della meccanica quantistica nello studio di un decadimento radioattivo, Misra e Sudarshan arrivarono alla conclusione paradossale che un nucleo osservato continuamente non dovrebbe mai decadere. Abbiamo mostrato che questo effetto, chiamato paradosso di Zenone quantistico, non dipende dalla particolare teoria della misura adottata (postulato di riduzione, teoria ad ensemble, ecc..) ma è una caratteristica genuina della meccanica quantistica, coerentemente con il fatto che non esiste modo di distinguere empiricamente le varie interpretazioni. Abbiamo visto che il paradosso di Zenone quantistico si basa sulla dipendenza t^2 della probabilità di transizione di stato nei primi istanti del processo ed esaminato alcune prove sperimentali di questo effetto. Abbiamo rimarcato il fatto che l'effetto, seppure studiato inizialmente per decadimenti radioattivi, è del tutto generale perché basato su principi comuni alla maggior parte dei sistemi che presentano una transizione di stato, come atomi eccitati, neutroni in un campo magnetico, condensati di Bose-Einstein e così via. Ogni rallentamento dello sviluppo della funzione d'onda causato dalla misura può essere identificato come effetto Zenone quantistico, tuttavia il nome di paradosso viene riservato solo ai fenomeni che soddisfano le seguenti condizioni: il paradosso di Zenone quantistico è un effetto non locale in cui un apparato di misura macroscopico, tramite una misura a risultato negativo, inibisce o rallenta lo sviluppo di un sistema microscopico, posto a una distanza macroscopica da esso e senza alcuna interazione. Un effetto del genere è realmente particolare e una sua conferma sperimentale susciterebbe un grande interesse. Al momento non esiste un'evidenza chiara e condivisa che getti luce sugli aspetti paradossali di questo fenomeno, seppure negli ultimi anni l'argomento ha suscitato un crescente interesse. L'effetto descritto da Misra e Sudarshan resta ancora un elemento dubbioso, sconcertante e, per l'appunto, paradossale della meccanica quantistica. Negli ultimi anni è stata ridotta la convinzione generale che fosse solo una conseguenza artificiosa di qualche assunzione affrettata o che fosse solo confinato ad aree ristrette della fisica. Il paradosso di Zenone quantistico è invece di interesse trasversale nei vari ambiti e il suo studio ha rilevanza per le basi teoriche della meccanica quantistica. Come sostenuto da Misra e Sudarshan, se fosse provato che le probabilità calcolate dalle leggi standard quantistiche non rispecchiano la realtà fisica, si ammetterebbe che la meccanica quantistica è una teoria incompleta. Il paradosso di Zenone quantistico occupa quindi un posto rilevante nella folta schiera di problemi concettuali riguardo i fondamenti della meccanica quantistica.

Bibliografia

Ballentine Leslie (1990), *Quantum Mechanics, A Modern Development*, New Jersey, Prentice Hall.

Degasperis Antonio, Fonda Luciano, Ghirardi Gian Carlo (1974), *Does the lifetime of an unstable system depend on the measuring apparatus?*, Il Nuovo Cimento A. 21 (3).

Bell John Stewart (1964), *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics. 1 (3): 195-200.

Bell John Stewart (1987), *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Elitzur Avhsalom, Vaidman Lev (1993), *Quantum mechanical interaction-free measurements*, Found. Phys. 23, 987.

Fleming Gordon (1973), *A Unitary Bound on the Evolution of Nonstationary States*, Il Nuovo Cimento, A 16, 232.

Frerichs V., Schenzle Axel (1991), *Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet*, Phys. Rev. A 44, 1962.

Ghirardi Gian Carlo, Omero C., Weber Tullio (1979), *Quantum vs. classical laws for sequential-decay processes*, Il Nuovo Cimento 52A, 421.

Griffiths David Jeffrey (1994), *Introduction to Quantum Mechanics*, New Jersey, Prentice Hall.

Inagaki Shigeru, Namiki Mikio, Tajiri Takeyoshi (1992), *Hindered decay of an unstable system: a quantum Zeno effect*, Phys. Lett. A 166, 5.

Home Dipankar, M. A. B. Whitaker (1986), *Reflections on the quantum Zeno paradox*, J. Phys. A: Math. Gen. 1986, 1847.

Home Dipankar, Whitaker M. A. B. (1997), *A conceptual analysis of Quantum Zeno; paradox, measurement, and experiment*, Annals of Physics 258, 237-285.

Hotta Mitsuru, Morikawa Hitoshi (2004), *Impossibility of distant indirect measurements of the quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A69, 052114.

Itano Wayne M., Heinzen Daniel J., Bollinger John J., Wineland David Jeffrey, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A 41, 2295, 1990.

Kalb Norbert, Cramer Julia, Twitchen Daniel J., Markham M. L., Hanson R. , Taminiau T. H. (2016), *Experimental creation of quantum Zeno subspaces by repeated multi-spin projections in diamond*, Nature Communications 7, 13111.

Koshino Kazuki, Shimizu Akira (2003), *Quantum Zeno Effect for Exponentially Decaying Systems*, Phys. Rev. A67 042101.

Kraus Karl (1981), *Measuring processes in quantum mechanics I. Continuos observation and the watchdog effect*, Foundations of Physics, 11 (7-8): 547-576.

Kwiat Paul, Weinfurter Harald, Herzog Thomas, Zeilinger Anton, Kasevich Mark A. (1995), *Interaction-free measurements*, Phys. Rev. Lett. 74, 4763.

Li Dong, Gard Bryan T., Gao Yanh, Yuan Chun-Hua, Zhang Weiping, Lee Hwang, Dowling Jonathan P. (2016), *Phase sensitivity at the Heisenberg limit in an SU(1,1) interferometer via parity detection*, Phys. Rev. A 94, 063840.

Misra Biswapriya Biswavas, Sudarshan Ennackal Chandy George, *The Zeno's paradox in quantum theory*, Journal of Mathematical Physics 18, 756, 1977.

Nakazato Hiromichi, Namiki Mikio, Pascazio Saverio, *Exponential behaviour of a quantum system in a macroscopic medium*, Phys. Rev. Lett. 73, 1063, 1994.

Peise Jan, Lücke Bernd, Pezzè Luca, Deuretzbacher Frank, Ertmer Wolfgang, Arlt Jochen, Smerzi Augusto, Santos Luis, Klempt Carsten (2015), *Interaction-free measurements by quantum Zeno stabilization of ultracold atoms*, Nature Communications volume 6, 6811.

Peres Asher (1993), *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Dordrecht, Kluwer.

Plenio Martin Bodo, Knight Peter L., Thompson Richard C. (1996), *Control of spontaneous emission in the presence of collisions*, Opt. Comm. 123, 278.

Serot O, Carjan Nicolae, Strottman Daniel (1994), *Transient behaviour in quantum tunneling: time-dependent approach to alpha decay*, Nucl. Phys. A 569, 562.

Szigeti Stuart S., Lewis-Swan Robert J., Haine Simon A. (2017), *Pumped-Up SU(1,1) Interferometry*, Phys. Rev. Lett. 118, 150401.

Teuscher Christof, Hofstadter Douglas (2004), *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Berlino, Springer.

Whitaker M. A. B., in A. van der Merwe Alwyn, Selleri Franco, Tarozzi Giuseppe (1992), *Bell's Theorem and the Foundations of Modern Physics*, Singapore, World Scientific.

von Neumann John (1955), *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New Jersey, Princeton University Press.