ARCHIMEDE

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI
DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

ANNO VI - N. 4-5 LUGLIO-OTTOBRE 1954

ANNO LII DI "IL BOLLETTINO DI MATEMATICA"

Sommario

M. Benedicty – *La geometria algebrica astratta e i campi di funzioni algebriche.*

B. Varini – *Il calcolo tensoriale da un punto di vista elementare.*

C. Sgarbazzini – *Visione sintetica della « nomografia ».*

A. Natucci – *Saggio di una classifica delle dimostrazioni del teorema di Pitagora.*

L. Santoboni – *Ancora sullo sconto commerciale.*

G. Furlani – *La caccia agli errori nell'insegnamento della fisica.*

U. Bini – *Sul numero delle soluzioni intere dell'equazione* $x^3 + y^3 = K$.

S. Nicotra – *Una costruzione geometrica della formula delle lenti.*

G. Gentile – *Sulle formule di addizione della goniometria.*

T. Collodi – *La Società di Fisica e la sperimentazione didattica.*

C. Longo – *Il Congresso internazionale dei matematici.*

B. de Finetti – *È difficile capire la matematica?*

Sezione storico-bibliografica:

V. G. Cavallaro – *Quadrilatero completo. – Nota storico-bibliografica.*

L. Conte – *La risoluzione delle equazioni algebriche nella produzione matematica di G. C. de' Toschi di Fagnano.*

CASA EDITRICE **FELICE LE MONNIER** - FIRENZE

ARCHIMEDE

RIVISTA PER GLI INSEGNANTI E I CULTORI DI MATEMATICHE PURE E APPLICATE

Anno LII di

IL BOLLETTINO DI MATEMATICA

Fondato dal prof. ALBERTO CONTI

" Volgere i progressi della Scienza a beneficio della Scuola "

FRATTINI.

RIVISTA BIMESTRALE

DIREZIONE - *Via Giacinto Carini, 64 A - Tel. 585-472* - ROMA
REDAZIONE - *Via Fornovo, 3 - Tel. 367-261* - ROMA
AMMINISTRAZIONE - *Casa Editrice F. LE MONNIER, Via San Gallo, 33* - FIRENZE

MATERIA DELLA RIVISTA

Sintesi relative a singoli rami delle matematiche. - Sviluppo storico di concetti e teorie in rapporto con le matematiche elementari. - Filosofia, metodologia e didattica della matematica. - Profili di grandi matematici. - Indirizzi e metodi dell' insegnamento scientifico nelle scuole straniere. - Applicazioni elementari della matematica alle scienze e alla tecnica. - Intermediario fra cultori di matematiche pure e applicate.

Questioni proposte e risolte. - Rubrica del candidato ai concorsi. - Varietà: curiosità, sussidi didattici, concorsi a premi ecc. - Congressi e riunioni. - Notiziario utile agli insegnanti e cultori delle matematiche.

Sezione storico-bibliografica.

Ricerche storiche - Bollettino bibliografico - Recensioni di opere italiane e straniere, ecc.

La Rivista si pubblica in sei fascicoli annuali di 44 pagine ciascuno.
I manoscritti, anche se non pubblicati, non si restituiscono.
Degli scritti originali pubblicati in questa Rivista è riservata la proprietà letteraria.
I volumi inviati in dono saranno annunziati nell'elenco « LIBRI RICEVUTI ».
La Rivista pubblicherà le recensioni dei volumi, a sua scelta.

CONDIZIONI DI ABBONAMENTO :

ANNUALE PER L' ITALIA L. **1200** - SEMESTRALE L. **700**
PER L' ESTERO L. **2000** - UN NUMERO SEPARATO L. **300**

I versamenti devono essere effettuati direttamente alla Casa Editrice LE MONNIER (c. c. Postale 5/2173)

Direttore responsabile : ROBERTO GIANNARELLI — *Segretario di Redazione :* BIAGIO GIANNELLI

Inscritto nel Registro del Tribunale di Firenze al n. 79 in data 5-III-1949

Firenze, Tipografie « Enrico Ariani » e « L'Arte della Stampa »

Estratto da ARCHIMEDE - Fasc. 4-5 - 1954

UNA COSTRUZIONE GEOMETRICA DELLA FORMULA DELLE LENTI

1. – È noto che in una lente sottile di piccola apertura le distanze p e p' dell'oggetto e dell'immagine dalla lente e la distanza focale f sono legate dalla relazione:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \cdot \tag{1}$$

Vogliamo indicare una semplice, interessante costruzione geometrica di questa formula con la quale si può agevolmente studiare, a colpo d'occhio, il modo di variare di p' al variare di p.

2. La costruzione della formula. – Si costruisca un angolo di 120° (fig. 1). Sulla retta b della bisettrice di esso e sulle rette x, x' dei suoi lati si fissi un sistema di ascisse con origine comune il punto O, come chiaramente risulta in figura.

Sia F il punto della bisettrice di ascissa f: qualunque retta r passante per F seca x, x' in due punti P, P', rispettivamente, le cui ascisse p, p' soddisfano la (1).

Infatti, le due punteggiate (proprie) x, x', potendosi considerare sezioni dello stesso fascio di rette di centro F, sono *prospettive*: cioè sono *proiettive* in modo che due punti corrispondenti qualunque sono allineati col punto F. Il punto O, comune alle due punteggiate, è il *punto unito* della proiettività.

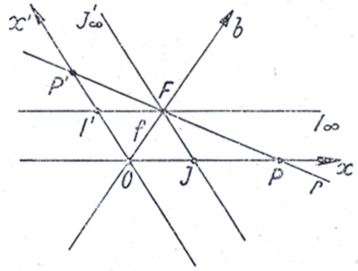

Fig. 1.

Sia J il punto d'incontro della parallela ad x' condotta da F con x ed I' il punto d'incontro della parallela ad x condotta da F con x'. Allora, J è l'omologo del punto improprio $J'\infty$ di x' ed I' è l'omologo del punto improprio $I\infty$ di x. Insomma I' ed J sono i *punti limiti* della proiettività esistente fra x ed x'. Onde, poichè J ed I' sono proprî, se P e P' sono due punti corrispondenti qualunque, di ascisse p, p', rispettivamente, pel teorema di Steiner, il prodotto $\overline{PJ} \,.\, \overline{P'I'}$, cioè il prodotto delle distanze dai rispettivi punti limiti di due punti omologhi qualunque, è costante; e siccome, prendendo per corrispondenti i punti che coincidono nel punto O, è $\overline{OJ}\,.\,\overline{OI'} = f^2$, la *potenza della proiettività* è f^2. Dunque si ha:

$$\overline{PJ}\,.\,\overline{P'I'} = f^2$$

cioè:

$$(p - f)\,(p' - f) = f^2$$

la quale, dopo semplicissime trasformazioni, diventa:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}\,,$$

che è la (1).

3. Applicazione alla lente convergente. – Consideriamo una lente convergente e notiamo che a valori positivi di p' corrispondono immagini reali (1) e a valori negativi di p' corrispondono, invece, immagini virtuali (2). Partiamo dalla posizione in cui r è parallela ad x (fig. 2): in tal caso il punto luminoso è all'infinito

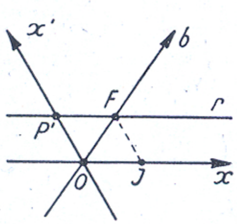

Fig. 2.

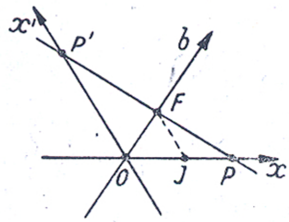

Fig. 3.

($p = \infty$) e il punto immagine è nel fuoco ($p' = f$) (3). Facendo ruotare la retta nel verso orario P si avvicina alla lente mentre l'immagine P', sempre reale, se ne allontana (fig. 1).

Quando è $p = 2\,f$, ossia quando P dista dalla lente del doppio della distanza focale f (fig. 3), anche $p' = 2f$, cioè l'immagine, ancora reale, si forma ad una distanza

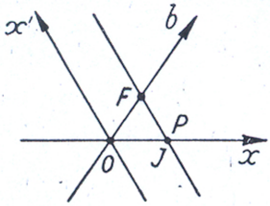

Fig. 4.

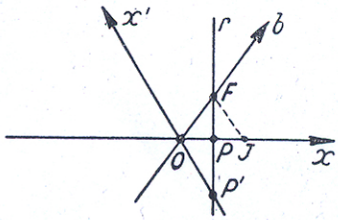

Fig. 5.

anch'essa doppia della distanza focale (4). Continuando a ruotare la retta r, P si avvicina ad J e P' si allontana indefinitamente dalla lente, finchè, quando P coincide con J (fig. 4), è $p' = \infty$, cioè l'immagine si forma all'infinito.

Ruotando ancora la retta (fig. 5), si ha: $o < p < f$ e p' negativa, cioè l'immagine

---

(1) Cioè immagini che si formano dalla parte dei raggi emergenti, ossia dalla parte opposta a quella nella quale si trova il punto luminoso.

(2) Cioè immagini che si formano dalla parte dei raggi incidenti, ossia dalla medesima parte in cui si trova il punto luminoso.

(3) Si osservi che il triangolo $OP'F$ è, in tal caso, equiangolo e quindi equilatero.

(4) Infatti, dai triangoli simili (fig. 3) OPP', JPF, si ha: $OP : JP = OP' : JF$, cioè $OP : JF = OP' : JF$, donde $OP = OP'$.

diventa virtuale e col diminuire di p diminuisce in valore assoluto anche p' sicchè punto luminoso e punto immagine si avvicinano entrambi alla lente finchè, per il punto luminoso nel vertice, punto luminoso e punto immagine coincidono.

4. Applicazione alla lente divergente. – Passiamo ora a considerare la lente divergente. Il fuoco di essa essendo virtuale, la distanza focale f è negativa onde il punto F è situato sulla semiretta negativa (fig. 6).

Anche qui partiamo dal caso in cui P è a distanza infinita; facendo ruotare r intorno ad F in senso antiorario, qualunque sia la posizione assunta da P, p' è sempre negativa ed in valore assoluto minore di f, ossia l'immagine è sempre virtuale e compresa tra il fuoco e la lente.

Se, infine, si fa ancora ruotare la retta r intorno ad F, sempre nel verso antiorario, finchè essa venga a porsi parallela ad OI', allora p è negativa (in valore assoluto non maggiore di f), cioè il punto luminoso è virtuale, e p' risulta positiva, ossia l'immagine reale. Dunque anche le lenti divergenti possono dare immagini reali e ciò avviene quando il punto luminoso è virtuale. Si realizza questo caso (fig. 7) mediante un fascio di raggi incidenti sulla lente e convergente in un punto dietro la lente ad una distanza minore, in valore assoluto, della distanza focale.

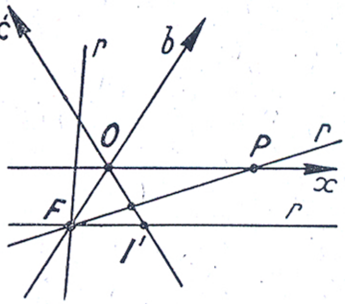

Fig. 6.

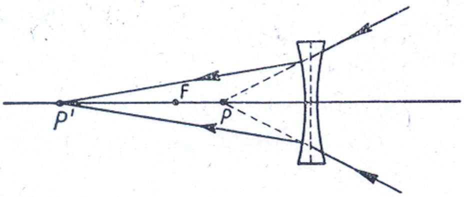

Fig. 7.

5. Osservazione. – Poichè la formula (1) vale anche per gli specchi sferici di piccola apertura, è evidente che la costruzione indicata e le considerazioni fatte sono valide anche in questo caso.

6. Dimostrazione elementare. – Della precedente costruzione si può dare la seguente dimostrazione elementare.

Costruito l'angolo di 120° e fissati sulle rette x, x', b i versi positivi, come in fig. 1, sulla bisettrice dell'angolo e sul suo lato x si prendano, a partire dal vertice O, i segmenti OF e OP di lunghezze eguali, rispettivamente, ad f e p. La retta r, congiungente i punti F e P, determinerà, sul rimanente lato dell'angolo, un segmento OP' di lunghezza eguale a p'.

Infatti, condotta da F la parallela ad x' e detto J il punto d'intersezione di essa con x, dai triangoli simili JPF, OPP' si trae la proporzione:

$$\frac{JF}{OP'} = \frac{JP}{OP}$$

a quale, per essere $JP = OP - OJ$, può scriversi:

$$\frac{JF}{OP'} = \frac{OP - OJ}{OP}.$$

Ma il triangolo OJF è, evidentemente, equiangolo e per conseguenza, essendo $OJ = JF = OF$, la precedente diventa:

$$\frac{OF}{OP'} = \frac{OP - OF}{OP}.$$

Passando alle misure si ha:

$$\frac{f}{OP'} = \frac{p - f}{p}$$

cioè

$$\frac{f}{\overline{OP'}} = 1 - \frac{f}{p}.$$

Trasponendo f/p e dividendo ambo i membri per f si ottiene, infine:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{\overline{OP'}} = \frac{1}{f}$$

la quale, confrontata con la (1), mostra appunto che $\overline{OP'}$ è eguale a p'.

Salvatore Nicotra.