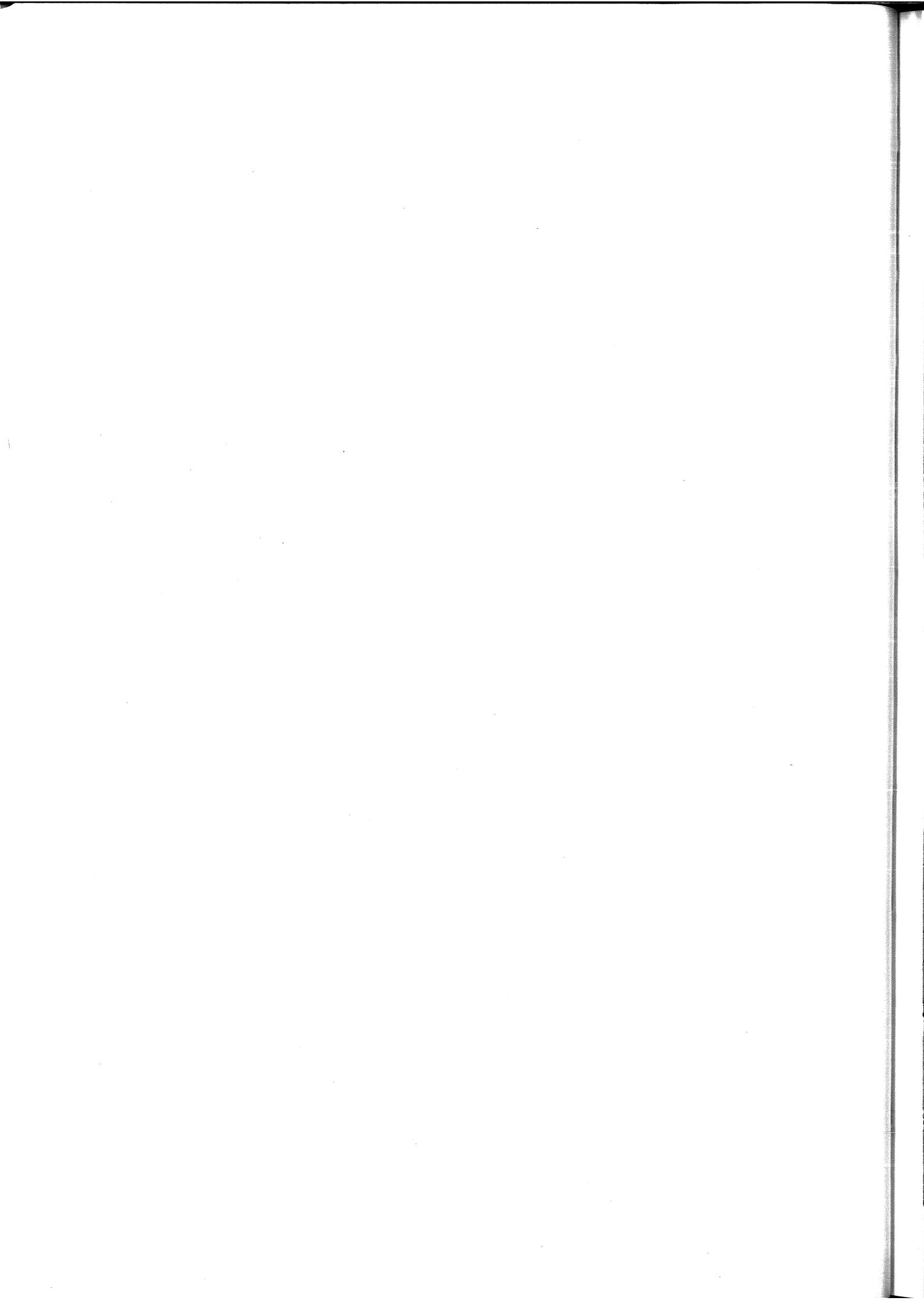


**PROBABILISMO.  
SAGGIO CRITICO SULLA TEORIA DELLE PROBABILITÀ  
E SUL VALORE DELLA SCIENZA**

**Biblioteca di Filosofia (diretta da A. Aliotta), Napoli – Città di Castello; Libreria  
Editrice F. Perrella, 1931, pp. 1-57**



BIBLIOTECA DI FILOSOFIA  
DIRETTA DA ANTONIO ALIOTTA

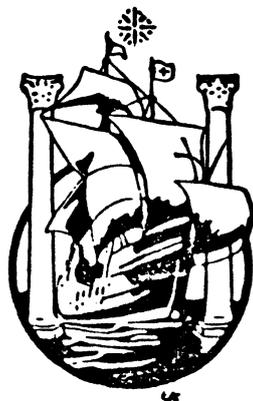
---

BRUNO DE FINETTI

---

# PROBABILISMO

*Saggio critico sulla teoria delle probabilità  
e sul valore della scienza.*



LIBRERIA EDITRICE FRANCESCO PERRELLA S. A.  
NAPOLI - CITTÀ DI CASTELLO  
1931 - IX

\* \* \*  
PROPRIETÀ LETTERARIA  
\* \* \*

---

« Perciò a lui premeva insegnare  
« con quali cautele e quali accor-  
« gimenti si possa giungere a otte-  
« nere delle proposizioni che ab-  
« biano un senso ».

GIOVANNI PAPINI (1)

1. — « La verità non è più in un'immaginaria equazione dello spirito con ciò che è fuori di lui, e che, se è fuori di lui, non si vede in che modo potrebbe toccarlo ed esserne appreso: essa è nell'atto stesso del pensiero che pensa. L'assoluto non è al di là delle nostre conoscenze, in un regno di tenebre e di mistero ove l'uomo avrebbe bisogno di andarlo a cercare: è nella nostra conoscenza stessa. Il pensiero non è affatto uno specchio in cui si riflette immutata una realtà esterna a noi: è semplicemente una funzione biologica, un mezzo per orientarsi nella vita, per conservarla ed arricchirla, per rendere possibile e facile l'azione, per fare i conti con la realtà e dominarla ».

Per chi condivide tale punto di vista, che è anche il mio, ma che meglio non avrei saputo scolpire che con queste incisive frasi del TILGHER (2), qual'è il valore che potrà avere la scienza? Con quale spirito le si potrà accostare?

Certo, non si potrà ammettere il determinismo; non si potrà ammettere l'«esistenza», in quel famoso preteso regno di tenebre e di mistero, di «leggi» immutabili e necessarie che regolano l'universo, e non si potrà ammettere che ciò sia vero per il semplice motivo che, al lume della nostra logica, ciò è privo di un significato qualsiasi. La scienza, intesa come scopritrice di verità assolute, rimane dunque, e naturalmente, *disoccupata* per mancanza

---

(1) G. PAPINI, *Stroncature*. Quattordici: « Mario Calderoni », p. 248.

(2) A. TILGHER, *Relativisti contemporanei*, IV ed. 1923, p. 49, 47, 23-24.

di verità assolute. Ma questo non porta a distruggere la scienza, porta soltanto a una diversa concezione della scienza. Nè si potrebbe dire, «a una svalutazione della scienza»: fra concezioni tanto eterogenee non è possibile un'unità di misura comune. Se cade infranto il freddo idolo marmoreo di una scienza perfetta, eterna e universale, che noi potremmo cercare soltanto di sempre meglio conoscere, ecco in sua vece al nostro fianco una creatura viva, la scienza che il nostro pensiero liberamente crea. Creatura viva: carne della nostra carne, frutto del nostro tormento, compagna nella lotta e guida alla conquista.

La natura non le apparirà più come un mostruoso incorreggibilmente esatto congegno d'orologeria di precisione, dove tutto accade quel che deve accadere, perchè non potrebbe non accadere, e dove tutto si può prevedere, purchè si sappia come funzionano gli ingranaggi che entrano in gioco. La natura non sarà morta per la scienza viva; sarà viva, e sarà per lei come un'amica, di cui, nella dolce intimità, si possa imparare a penetrare l'animo e lo spirito, a conoscere i gusti e le tendenze, a comprendere il carattere, gli slanci e gli abbandoni.

Così nessuna scienza ci permetterà di dire: il tale fatto accadrà, andrà così e così, perchè ciò è conseguenza di tale legge, e tale legge è una verità assoluta, ma tanto meno ci condurrà a concludere scetticamente: la verità assoluta non esiste, e quindi tale fatto può accadere e può non accadere, può andare così e può andare in tutt'altro modo, nulla io ne so.

Quel che si potrà dire è questo: *io prevedo* che il tale fatto avverrà, e avverrà nel tal modo, perchè l'esperienza del passato e l'elaborazione scientifica cui il pensiero dell'uomo l'ha sottoposta mi fanno sembrare ragionevole questa previsione.

La differenza essenziale da rilevare è nell'attribuzione del «perchè»: non cerco *perchè* IL FATTO che io prevedo *accadrà*, ma *perchè* IO *prevedo* che il fatto accadrà. Non sono più i fatti che hanno bisogno di una causa per prodursi: è il nostro pensiero che trova comodo di immaginare dei rapporti di causalità per spiegarli, coordinarli, e renderne possibile la previsione. Soltanto così la scienza può sentirsi perfettamente in regola di fronte alla lapalissiana obiezione che il nostro spirito non può pensare nulla che non sia un suo pensiero, non può concepire nulla che non sia una sua concezione, non può ragionare di nulla che non sia un suo ragionamento; nulla può contenere che sia esterno a lui.

2. — Quale la portata di simile capovolgimento? È necessario precisarlo: troppi sarebbero a questo punto tentati di affrettatamente concludere che in quest'ordine di idee la possibilità stessa della scienza dovrebb'essere logicamente preclusa, e troppi altri non meno affrettatamente concluderebbero, viceversa, che tutto si riduce a una sottile distinzione filosofica, interessante al più per la critica della scienza, ma priva d'importanza per lo sviluppo della scienza.

Rassicuriamo i primi nel modo più categorico: la nuova concezione può eventualmente allargare, ma in nessun caso restringere, la portata pratica della scienza. Ogni conseguenza pratica di quelle che, in un determinato stadio delle nostre conoscenze, l'antica concezione considererebbe « leggi naturali » è ovviamente, e a fortiori, un evento di cui attendiamo con certezza pratica il verificarsi: tutte queste « leggi naturali » continuano così a valere immutate come *leggi del pensiero* per la previsione dei fenomeni naturali.

Esse conservano quindi per noi lo stesso identico valore pratico che avrebbero se, senza accorgerci di dire una frase senza senso, dicessimo « che esse sono vere ».

Il mio punto di vista è, si potrebbe dire, l'analogo del positivismo del MACH quando per « fatto positivo » ciascuno intenda di poter prendere soltanto le sue proprie impressioni soggettive. Una proposizione la potrà dire « vera » se, ciò dicendo, intende affermare che l'impressione che mediante essa vuole esprimere è effettivamente una sua impressione; pensare che essa abbia un valore e un senso di per sè, prima che lui stesso gli avesse dato il valore e il senso di esprimere quella data sua impressione, è un'antinomia logica come dire « il minimo numero intero non definibile con meno di mille parole » mentre, così dicendo, lo si definisce con dieci parole, e le altre analoghe ben note (1). « Tutti gli oggetti, uomini e cose, di cui parlo, non sono, in ultima analisi, che contenuti del mio presente atto di pensiero: la stessa affermazione che essi esistono fuori e indipendentemente da me, è atto del mio pensiero: PENSARLI COME INDIPENDENTI DA ME NON POSSO SE NON PENSANDOLI, CIOÈ FACENDOLI DIPENDENTI DA ME (2) ».

---

(1) DI BURALI-FORTI, RUSSELL, RICHARD, ecc. Cfr. D. HILBERT u. ACKERMANN, *Grundzüge der theoretischen Logik*, Berlino, 1928, pp. 92 e sgg. Un accenno in forma elementare: F. SEVERI — *Moderni indirizzi nelle matematiche*, « Atti Soc. It. per il Progresso delle Scienze » 1928, p. 112.

(2) A. TILOHER, *op. cit.*, pp. 73-74.

Sarebbe però un errore credere che tutto si esaurisca in questa precisazione del valore soggettivo e relativo del concetto di « verità ». Il valore pratico della nuova concezione è immenso. Sgombrando la via da tutti gli inesplicabili pregiudizi che per tanto tempo oscurarono e intralciarono la nostra libertà di ragionamento si aprono al nostro spirito orizzonti illimitati. Già nella matematica pura si è raggiunta la coscienza esatta che una proposizione non ha senso alcuno se non se, e in quanto, e dal momento in cui, noi le abbiamo per libera convenzione (definizione nominale), attribuito quello che le vogliamo attribuire, e solo così fu possibile alle matematiche — come fecero nell'ultimo secolo — di attingere il rigore più impeccabile e aprirsi nuove e vaste possibilità di sviluppo.

La matematica, la logica, la geometria, sono ora immuni dalla pseudo-ipotesi (per chiamarla così) dell'esistenza del mondo, dell'esistenza di una realtà esterna dell'esistenza di una realtà metafisica, e non mi sembra possibile dubitare che se tutto il nostro pensiero si rendesse completamente immune da quella imbarazzante e misteriosa pseudo-ipotesi avrebbe tutto da guadagnare — in chiarezza, in profondità, in rigore — in ogni altro campo, non meno che in quello delle scienze formali, dove, per la loro stessa natura, il pericolo di di deviazioni metafisiche è molto minore.

3. — Nel mondo del razionalismo, la Scienza aveva come base la Logica; sferrando contro il Razionalismo il suo travolgente attacco, il pensiero relativista (1) non può, a mio modo di vedere,

---

(1) DI VAHINGER, ROUGIER, SPENGLER, (per cui cfr. TILGHER, *op. cit.*), di ALIOTTA, ecc.

Dell'ALIOTTA credo necessario, ad evitare un equivoco che potrebbe esser facile, riportare il seguente passo.

« Bisogna distinguere relativismo da relativismo. Vi è una forma di esso (ed è quella a cui comunemente si guarda quando si fanno quelle accuse (*di scetticismo*) che chiude la nostra conoscenza nel regno del relativo, ma per contrapporre ad essa una realtà assoluta che le sfuggirebbe in eterno. In questa forma il relativismo si colorisce d'una tinta scettica e agnostica e si accompagna spesso al misticismo. Dinanzi all'abbagliante luce dell'assoluto il nostro mondo relativo si svaluta degradandosi a vana ombra apparente. Noi siamo il sogno, esso è la realtà. E la vita diviene il penoso inseguirsi di quelle ombre cercanti invano di farsi esse medesime luce.

Ma vi è un'altra forma di relativismo (ed è il mio), in cui il relativo è esso medesimo la realtà e non lascia nulla fuori di sé. Ciò che noi cogliamo non è l'ombra, ma la luce, non una copia, ma il vero e concreto originale » (*Relativismo e idealismo*, p. 92).

Esattamente questa è la mia opinione; per un più completo rigore, vorrei

sfuggire ai due corni di un ferreo dilemma: o distruggere la Scienza, o negare alla logica la pretesa d'informare di sè la Scienza. Parlando della previsione ho già fatto cenno del mio punto di vista in proposito: esso consiste appunto nel non rinunciare alla Scienza, ma nell'assumere come strumento fondamentale del pensiero scientifico, in luogo della logica ordinaria, categorica, rigida, fredda, una logica viva, elastica, psicologica.

Lo strumento logico che ci occorre è la teoria soggettiva delle probabilità, e di essa appunto voglio trattare. Essa non è, in sostanza, nient'altro che l'interpretazione prettamente soggettivistica della teoria classica delle probabilità, e quel che diremo si potrà pertanto considerare, e potrà essere interessante, sotto due aspetti diversi: come esempio di applicazione della mentalità relativista a un ramo sempre più importante delle moderne matematiche qual'è il calcolo delle probabilità, e come parte essenziale della nuova visione della scienza che vogliamo prospettare sotto forma irrazionalista, e, come diremo, probabilista (1).

C'è anche un terzo aspetto, al quale pure tengo molto, ed anzi, come matematico, in modo particolare, ma non è il caso qui più che d'accennarvi. È la critica dei principi del calcolo delle probabilità, tutt'ora lontano dal rigore formale già oggi forse raggiunto in tutti gli altri campi delle matematiche (2).

---

anzi avvertire che la frase « il relativo *non lascia nulla fuori di se* » non va intesa nel senso che si affermi FALSA la frase « *esiste qualche cosa fuori del relativo* »; si afferma invece che non ha senso, così che non si può nemmeno porre la questione della sua verità o falsità. È tale interpretazione, del resto, che risponde anche al pensiero dell'ALLOTTA, come chiaramente appare poco più avanti ove l'« *essere in sè delle cose fuori d'ogni rapporto* » si giudica « una delle tante enunciazioni verbali, a cui non corrisponde nessuna idea, e che sono divenute veri e propri rompicapo in filosofia » (*Ibid.*).

(1) Il termine « *probabilismo* » è impiegato usualmente per indicare un aspetto importante della filosofia della Nuova Accademia, che ha qualche punto di contatto colle vedute qui esposte. Dice ad es. E. MORSELLI (*Principi di Logica*, p. 150): « I filosofi della Nuova Accademia, soprattutto ARCESILAO e CARNEADE, acuti osservatori della vita, sostengono che in nessun dominio del sapere noi possiamo raggiungere la verità e, per conseguenza, la certezza assoluta, ma che dobbiamo in ogni caso accontentarci di semplici probabilità ». Per più ampie notizie cfr. A. ALLOTTA, *Il problema della scienza nella storia* (p. 31 e sgg.) e F. ENRIQUES, *Per la storia della logica* (p. 44); dal loco ult. cit. in modo particolare apparirà quanto il senso di tali critiche fosse tuttavia, nella sua essenza, lontano dal nostro (e precisam. pel motivo di cui alla nota preced.).

(2) V. *Sul significato soggettivo della probabilità*, in corso di stampa in

4. — «Grâce a la généralisation, chaque fait observé nous en fait prévoir un grand nombre; seulement nous ne devons pas oublier que le premier seul est certain, que tous les autres ne sont que probables. Si solidement assise que puisse nous paraître une prévision, nous ne sommes jamais sûrs *absolument* que l'expérience ne la démentira pas, si nous entreprenons de la vérifier. Mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter. Mieux vaut prévoir sans certitude que de ne pas prévoir du tout».

«Ainsi, dans une foule de circonstances, le physicien se trouve dans la même position que le joueur qui suppute ses chances. Toutes le fois qu' il raisonne par induction, il fait plus ou moins consciemment usage du calcul des probabilités».

Così si esprime il POINCARÈ (1), mostrando d'aver chiaramente compreso che solo un fatto compiuto è certo, che la scienza non può limitarsi a teorizzare i fatti compiuti, ma deve prevedere, che quindi la scienza non è certa, e il suo strumento veramente propulsivo non è la logica, ma il calcolo delle probabilità.

«À ce compte, toutes les sciences ne seraient que des applications inconscientes du calcul des probabilités; condamner ce calcul, ce serait condamner la science toute entière» (2).

Tutto ciò va benissimo, e non avrei forse da cambiare una sillaba per esprimere fino a questo punto la mia opinione con le

« *Fundamenta Mathematicae* » (Rend. del Sem. Mat. di Varsavia); *Fondamenti logici del ragionamento probabilistico*, « Boll. Un. Matem. It. », 1930; *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, « Rend. R. Acc. Naz. d. Lincei », 1930, II sem.; *Sui fondamenti logici del ragionamento probabilistico* « Atti Soc. It. Progr. Scienze », Congr. Bolzano-Trento, 1930, Vol. II.

Fin dall'aprile 1928 avevo pronta un'esposizione completa dei fondamenti della teoria delle probabilità secondo il mio punto di vista; avendo incontrato difficoltà che ero lontano dal supporre, non solo a far accogliere, ma addirittura a far esattamente comprendere la mia tesi, dovetti però accingermi a svilupparne più ampiamente i punti essenziali. Ciò che ho fatto col presente saggio per quanto concerne le critiche filosofiche, e coi lavori sopra citati per quanto si riferisce alla definizione della probabilità (probabilità subordinata esclusa) e alla critica dei principi e dei teoremi fondamentali. La trattazione analoga relativa al caso delle probabilità subordinate sarà svolta quanto prima. Un argomento particolare che, pur ricollegandosi direttamente alle mie critiche (come ved. al N. 22) potrebbe anche considerarsi nell'ambito della teoria classica delle probabilità, è quello trattato nella Mem. ivi cit.

(1) H. POINCARÈ — *La Science et l'Hypothèse*, pp. 171 e 214.

(2) *Op. cit.*, p. 217.

parole del POINCARÈ. Ma poi dobbiamo andare oltre: perchè egli si ferma? Perchè il suo punto di vista, come forse qualunque punto di vista, vivo, intelligente, sottile, conduce — a pensarlo fino in fondo — al relativismo e al soggettivismo assoluto. Vi sono molti che hanno orrore di una simile conclusione e si fermano a mezza strada. Così il POINCARÈ. Nè si può dire che egli abbia misconosciuto il valore soggettivo della probabilità, «cet instinct obscur» come dice a un certo punto, del quale «nous ne pouvons nous en passer». Ma sembra non voglia contentarsi di considerarla per quello che è, voglia darci un valore oggettivo, sia per delle obiezioni di cui analizzeremo più tardi il valore, sia perchè, attraverso il calcolo delle probabilità, il soggettivismo sarebbe dilagato in ogni campo della scienza.

Se noi non temiamo questa conclusione, se al contrario è appunto su di essa che la nostra concezione essenzialmente si basa, potremo sviluppare spregiudicatamente e fino alle conseguenze più estreme il «Probabilismo». Il Probabilismo, che, nei passi citati del grande pensatore francese, affiora e si afferma senza aver raggiunto ancora la piena coscienza di sè.

5. — Non si può ammettere che il concetto di probabilità abbia un valore obbiettivo. E precisiamo anzitutto cosa intendiamo dire dicendo così, chè, dopo avere affermato che tutto è soggettivo, potrebbe sembrare incoerente spender parole per dimostrare che un concetto particolare è soggettivo.

D'ora in avanti useremo le parole «oggettivo» e «soggettivo» nel senso corrispondente alla concenzione empirica, che mantiene anche per noi un significato ben definito. Un empirista direbbe che sono oggettivi i *fatti*, che hanno un valore oggettivo quelle proposizioni che sono vere o false a seconda che un evento ben determinato si verifica o non si verifica, quelle proposizioni la cui verità o falsità si riduce a una pura e semplice constatazione che ci è imposta. Ora poco importa, dal punto di vista formale, che io creda effettivamente che tali fatti costituiscano una realtà esterna, o li consideri soltanto delle mie sensazioni; resta questo di indiscutibile: che, una proposizione siffatta, so sempre in quali circostanze io debbo dire che è vera e in quali altre che è falsa. Che io la dica vera o falsa, ciò non implica da parte mia nessuna manifestazione affettiva, ciò non significa un giudizio, ciò non ha nessun valore concettuale.

Chiamare col nome di «realtà empirica» quella parte delle no-

stre impressioni che dipendono esclusivamente e immediatamente dalle nostre sensazioni è una convenzione di linguaggio che siamo liberissimi di fare, e la intendiamo stabilita. Allora possiamo dire *oggettive* quelle proposizioni che riguardano la realtà empirica. E praticamente questa definizione avrà lo stesso valore (quanto meno la stessa estensione) che avrebbe nella bocca di un empirista che credesse alla realtà di questa «realtà»; la differenza pertanto sussiste, ed è quella che passerebbe fra due italiani che conoscessero e usassero entrambi la parola «luna», ma dei quali uno dicesse che i tedeschi sbagliano credendo che si chiami «Mond» quell'astro che invece «è la luna»!

Negando alla probabilità ogni valore oggettivo, intendo dunque affermare che, comunque un individuo valuti la probabilità di un dato evento, nessun'esperienza potrà dargli ragione e nessuna potrà dargli torto, e, più in generale, nessun criterio può immaginarsi che doni un senso qualunque, obbiettivo, alla distinzione che si vorrebbe qui stabilire fra ragione e torto.

Ma allora, si dirà, la probabilità non ha nessun valore? Tutt'altro. Ho già detto che essa, per me, è lo strumento primo del nostro pensiero. La contraddizione è solo apparente, e lo chiarirò precisando le mie idee: spiegherò appunto quale e quanto sia il valore del concetto di probabilità sebbene non abbia nulla di oggettivo, e spiegherò perchè non abbia nulla d'oggettivo nonostante tante e autorevoli opinioni in contrario.

6. — Cosa vogliamo dire, nel linguaggio ordinario, dicendo che un avvenimento è più o meno probabile? Vogliamo dire che proveremmo un grado più o meno grande di meraviglia apprendendo che quell'evento non s'è verificato. Vogliamo dire che ci sentiamo di fare un grado più o meno grande d'affidamento sull'eventualità che esso abbia ad avverarsi. La probabilità, in questo senso ancor vago ed oscuro, è costituita dal grado di dubbio, d'incertezza, di convincimento, che il nostro istinto ci fa sentire pensando a un avvenimento futuro, o, comunque, a un avvenimento di cui non conosciamo l'esito.

Questo istinto obbedisce a delle leggi? E perchè deve obbedirvi? Ecco un capitolo di critica logico-psicologica dei principi della teoria delle probabilità che qui è necessario sorvolare (1): ac-

---

(1) Cfr. in proposito i miei lavori cit. a p. 4, nota (2).

cennerò soltanto che per misurare la probabilità mediante un numero e per dimostrare che esso si combina secondo i classici teoremi ben noti, si possono seguire almeno tre vie, due ispirate a procedimenti usuali, e la terza del tutto originale. Personalmente, soltanto quest'ultima mi soddisfa.

Comunque dimostrate od ammesse, queste leggi rappresentano le relazioni che debbono sussistere fra i valori che il mio istinto (non il mio capriccio) è a priori libero di attribuire alle probabilità dei diversi eventi perchè non ci sia fra di loro un'intrinseca contraddizione.

Un cabalista che, ritenendo assai probabile nella prossima estrazione (e per una data ruota) l'uscita del 7 e del 39 concludesse che è pure notevolmente probabile che esca l'ambo 7-39 ragionerebbe in modo non meno legittimo, secondo la logica delle probabilità, di un individuo che giudica tutti gli ambi ugualmente probabili. Ad esempio, chi valutasse rispettivamente a  $9/10$  e  $8/10$  la probabilità che sorta il 7 e il 39, dovrebbe necessariamente, per essere conseguente, valutare non minore di  $7/10$  la probabilità dell'ambo 7-39. In questo esempio abbiamo considerato uno stato d'animo — quello del cabalista — che ci appare ridicolo. Non esitiamo a dargli del pazzo, e dire che chiunque attribuisce valori diversi alle probabilità dei diversi numeri manca di buon senso.

Io sono pienamente d'accordo, ma non pretendo che questo mio stato d'animo, per quanto profondamente radicato al mio istinto, e per quanto universalmente condiviso, abbia alcun significato recondito, alcun valore positivo. Se uno mi dice che la bevanda più deliziosa è l'olio di ricino, certo rabbrivisco d'orrore per il suo pessimo gusto, ma cosa vorrei dire dicendo che egli è in errore? Se uno mi disegna una casa rispettando alla perfezione le leggi della prospettiva, ma scegliendo il punto di vista nel modo più innaturale, posso dire che egli ha sbagliato? Orbene: questo secondo esempio può tradursi in una effettiva interpretazione geometrica del problema che ci interessa. Immaginando un'opportuna rappresentazione geometrica dei diversi casi logicamente possibili, le diverse opinioni non intrinsecamente incoerenti sulle loro probabilità si possono considerare, con una certa analogia, come tutte quelle prospettive che se ne possono ottenere variando comunque il nostro punto di vista.

Ogni giudizio sulle probabilità dei diversi eventi possibili dipende dalle relazioni logiche che li legano, ma varia all'infinito al variare del punto di vista che l'istinto può determinare. Allo stesso

modo che la prospettiva di un oggetto è vincolata per il fatto che esso ha una forma sua propria, ma varia a seconda del punto di vista, e ogni punto di vista è, a priori, equivalente ad ogni altro. Il gusto di ciascuno guiderà tale scelta nel modo per lui migliore, e potranno darsi dei casi ove il gusto estetico della maggioranza, o, ammettiamolo pure, della totalità degli uomini concordi più o meno esattamente in tale scelta. E vediamo infatti migliaia e migliaia di fotografie tutte uguali riprodurre il medesimo monumento nella medesima prospettiva. Ma sarebbe lecito — meglio: sarebbe comodo — interpretare una libera coincidenza di gusti e di opinioni come l'espressione di un'arcano verità metafisica?

7. — Ma — si potrà obiettare — la probabilità non è forse, per definizione, il rapporto del numero dei casi favorevoli e dei casi possibili? E cosa c'è allora di soggettivo?

È noto però che i casi debbono essere *ugualmente probabili*, e se ammetto di sapere cosa significhi dire che due casi sono ugualmente probabili ho già superato quel che ci può essere di concettualmente difficile nel definire la probabilità. Non voglio dire con ciò che la definizione classica contenga il circolo vizioso che molti hanno creduto di vedervi: dico soltanto che essa non può affatto definire e nemmeno chiarire il concetto di probabilità, ma può soltanto introdurre tutt'al più, dopo che il concetto di probabilità sia stato acquisito, un criterio opportuno ma affatto convenzionale per rappresentare la probabilità mediante un numero. Il suo ufficio, il suo valore, è puramente matematico-formale, e noi non abbiamo qui nessun motivo d'occuparcene allo stesso modo che per chi volesse analizzare le sensazioni di caldo e di freddo non avrebbe nessuna importanza il sapere che le temperature si sogliono misurare in centigradi o in gradi FAHRENHEIT. Quello che è interessante e anche necessario analizzare, nel modo classico di procedere per la definizione della probabilità, sono le ragioni, a prima vista abbastanza convincenti, per cui la distinzione di «casi ugualmente probabili», e quindi la probabilità, dovrebbe avere, almeno in certe questioni, un valore obiettivo. Così i 90 numeri del lotto, le 6 facce d'un dado, le 40 carte d'un gioco, sarebbero effettivamente casi ugualmente probabili, perchè si producono in circostanze che sono effettivamente uguali, perchè possiamo escludere che vi siano delle cause che rendono diverse tali probabilità.

Ha senso una simile affermazione? Osserviamo intanto che essa ha senso soltanto per chi sa già cosa significhi «probabile»; chi,

non sapendolo ancora, la considerasse come un postulato (che sarebbe del resto difficile precisare in modo soddisfacente), potrebbe costruirvi sopra a suo piacimento un algoritmo sterile, di cui egli stesso non comprenderebbe la ragione. Per uno invece che desse già alla parola «probabile» un valore oggettivo, la nostra affermazione non potrebbe più essere un principio, ma soltanto o un teorema o una verità sperimentale (1): uno che sa cosa vuol dire «peso» potrebbe forse considerare come un principio l'affermazione «due palle di ferro d'ugual volume hanno pesi uguali»? (2).

L'unico caso in cui essa potrebbe sostenere un ruolo essenziale si avrebbe dunque se servisse, una volta acquisito il concetto soggettivo di «probabilità», a mostrare che esso «corrisponde a qualche cosa di obiettivo» (3). È questo uno dei modi di procedere più usuale ed è espresso con lodevole chiarezza dal LÉVY, (4) che forse più d'ogni altro mostra di preoccuparsi delle questioni cui s'ispirano le mie critiche.

Io attribuisco una probabilità uguale alla sortita di uno qualunque dei 90 numeri del lotto, cioè, restando sul terreno soggettivo, non sento d'attendere con maggior fiducia che sortano certi numeri piuttosto che certi altri. Ho ragione? Ho torto? Sarei in errore se attendessi con maggior fiducia i numeri suggeritimi da un cabalista?

---

(1) Così fa il FRÉCHET, coerentemente col suo punto di vista che esamineremo in seguito.

(2) Non si può affermare contemporaneamente che una proposizione è vera «a priori» ed è dimostrata dall'esperienza: è bene insistere su questo punto «dont tout le monde ne s'est pas toujours bien rendu compte», come dice a ragione il POINCARÉ.

«Nous ne pouvons pas admettre à la fois qu'il est impossible d'imaginer l'espace à quatre dimensions et que l'expérience nous démontre que l'espace a trois dimensions. L'expérimentateur pose à la nature une interrogation: est ce ceci ou cela? et il ne peut la poser sans imaginer les deux termes de l'alternative. S'il était impossible de s'imaginer l'un de ces termes, il serait inutile et d'ailleurs impossible de consulter l'expérience. Nous n'avons pas besoin d'observation pour savoir que l'aiguille d'une horloge n'est pas sur la division 15 du cadran, puisque nous savons d'avance qu'il n'y en a que 12, et nous ne pourrions pas regarder à la division 15 pour voir si l'aiguille s'y trouve puisque cette division n'existe pas» (*La Valeur de la Science*, p. 67).

(3) Ciò che sarebbe peraltro possibile nei soli casi in cui si ammettesse che il giudizio soggettivo di tutti gli individui da considerarsi normali debba esattamente coincidere.

(4) P. LÉVY; *Calcul des probabilités*.

Si dirà: a casi *uguali* sarebbe assurdo attribuire probabilità disuguali. Ma in che senso sono *uguali* questi casi? Non si tratta certo dell'identità logica che sola permette una deduzione a priori: «se A e B sono casi uguali, la probabilità di A è uguale alla probabilità di B» (1). Vi sono certo delle differenze fra i diversi casi, ad esempio, per il lotto, due palline diverse differiscono di certo almeno per il fatto che portano due numeri diversi e che, al momento dell'estrazione, occupano nell'urna due posizioni diverse. Perché queste circostanze non si prendono in considerazione?

La domanda sembrerà puerile, e si crederà forse sufficiente rispondere che la diversità del numero non è una *causa* che possa influire sull'estrazione, e che la posizione della pallina, anche se, come è ragionevole, si ammette che possa avere qualche influenza, non è conosciuta, e non possiamo tenerne conto. I casi «*uguali*» sono quindi soltanto dei casi che differiscono per circostanze che o non sono conosciute o non hanno relazione di causalità col loro verificarsi.

8. — Appare quindi, da un lato, che il concetto di probabilità è relativo: il fatto che due casi ci appaiano ugualmente probabili dipende dal gruppo di circostanze che ci sono note od ignote.

«On peut parier, au jeu de pile et face, alors que la pièce, déjà lancée, est en l'air, et que par conséquent son mouvement est déterminé. On peut parier même une fois que la pièce est tombée, sous la seule condition de ne pas voir sur quelle face elle repose. La probabilité ne résulte pas de ce que tel événement est indéterminé (au sens plus ou moins philosophique du mot) mais bien de ce que nous sommes dans l'incapacité de *prévoir* quelle éventualité se produira, ou, ce qui revient au même, de *savoir* quelle éventualité s'est produite» (2).

In ciò consiste il carattere essenzialmente relativo della probabilità; basta questo per distruggere il feticcio di una probabilità *vera*, esistente nel «regno di tenebre e di mistero» della realtà ultrasensibile, per abbattere una specie di semi-determinismo che considera due casi ugualmente probabili come due casi di fronte a cui la natura è ancor libera di scegliere, e che, non presentando

---

(1) «Quaecumque sunt idem, ita se habent, quod quidquid praedicatur de uno, praedicatur et de alio» Divi THOMAE AQUINATIS, *Summa Theologica*, Romae 1886, pars I, quaestio XL, art. 1, 3).

(2) E. BOREL *Traité de Calcul des Probabilités* — T. II, Fasc. I, *Applications à l'arithmétique, etc.*, Ch. I.

nessuna caratteristica per farsi preferire, mettono la natura nell'atroce imbarazzo dell'asino di BURIDANO.

Sembra impossibile, ma qualcuno pensa proprio così: che la probabilità dipenda dal fatto che un evento non è ancora « deciso ».

« Quelle est la probabilité pour qu'il pleuve demain? » — Si chiede il BERTRAND (1). — « Elle n'existe pas. Non pas parce qu'elle varie d'un jour à l'autre avec l'état du ciel et la direction des vents; mais parce que dans aucune circonstance ella n'a de valeur *objective*, la même pour tous ceux qui l'évaluent sans se tromper.

Il pleuvra ou il ne pleuvra pas, l'un des deux événements est certain, *dès à présent*, et l'autre impossible. Les forces physiques dont dépend la pluie sont aussi bien déterminées, soumises à des lois aussi précises que celles qui dirigent les planètes ».

Ma cos'è per il BERTRAND una probabilità oggettiva? È una probabilità che ha « une valeur *objective*, indépendante des renseignements connus et du bon jugement de celui qui en fait usage »! (2).

Questo concetto è per sè stesso un controsenso. « Si nous n'étions pas ignorants, il n'y aurait pas de probabilité, il n'y aurait de palace que pour la certitude » (3). La probabilità non esiste se non per me in funzione del grado d'ignoranza in cui momentaneamente mi trovo; sarebbe assurdo, anche se non fosse vuoto di senso, considerare la probabilità come una misteriosa e inafferrabile entità metafisica, esistente in astratto, e dalla quale dovrebbe dipendere, chissà in quale modo, l'avverarsi di un evento.

9. — La probabilità di un evento è dunque relativa al nostro grado d'ignoranza; si può però ancora pensare che essa abbia un valore in un certo senso obbiettivo. Si può pensare cioè che un individuo il quale conosca un certo ben determinato gruppo di circostanze e ignori le altre debba logicamente valutare le probabilità, almeno di certi eventi, in un modo ben determinato (4).

Se è evidentemente relativa — relativa al nostro grado d'igno-

(1) J. BERTRAND, *Calcul des probabilités*, Paris 1889, p. 90.

(2) J. BERTRAND, *op. cit.*, p. 91.

(3) H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, p. 220.

(4) Questo mi sembra sia il punto di vista del KEYNES; non posso però ben giudicare non avendo avuto che l'occasione di sfogliare rapidamente il suo trattato.

ranza — la distinzione fra circostanze note e circostanze incognite, si può ancora pensare che abbia un significato obbiettivo la distinzione fra circostanze che possono o non possono essere in relazione di causa ed effetto col verificarsi di un dato evento. Ciò permetterebbe, se non di affermare che i diversi casi che enumeriamo sono — in senso assoluto — ugualmente probabili, almeno di dire che sono ugualmente probabili in relazione alle circostanze a noi note. Diremmo allora che due casi che non differiscono per nessuna circostanza nota che possa influire sul loro avverarsi sono ugualmente probabili, e tutto andrà bene se riusciremo a spiegare quali sono le circostanze che possono influire.

Ma facciamo un esame di coscienza, e vediamo un po' quand'è che una circostanza ammettiamo possa influire su un certo fatto. Non è forse appunto quando la sua conoscenza influisce sul nostro giudizio di probabilità? Vogliamo dire qualche cosa di più? Gira e rigira, qualunque cosa si dica o si pensi, in fondo andiamo sempre a finire lì: il concetto di causa non è che soggettivo, e dipende essenzialmente dal concetto di probabilità.

Io osservo una concomitanza e mi chiedo se essa è fortuita o è dovuta a un nesso causale. Cosa voglio dire? Finchè mi limito al passato, voglio dire soltanto: è o non è suggestivo mettere in rilievo questo fatto? serve o non serve a chiarire le mie idee? ferisce o non ferisce la mia immaginazione? Ma in questo caso l'essenza dell'idea di causa sfugge completamente: essa non balza nella sua vera luce che quando dalla conoscenza del già noto passiamo alla previsione dell'ignoto, quando i dati di fatto servono a plasmarci uno stato d'animo, quando dalla scienza del poi (di cui sono piene le fosse) vogliamo ricavare una norma d'azione per il futuro (1).

Supponiamo si sia osservato che, molte volte, dopo un'eclisse scoppia una guerra. Perchè io non dico che l'eclisse è una causa di guerra e perchè delle genti superstiziose lo possono credere? e perchè le chiamo superstiziose? Dicendo che l'eclisse non è una causa di guerra io intendo dire che, se domani vedrò un'eclisse, non per questo lo scoppio di una guerra mi apparirà più verosimile

---

(1) Per lo scopo che qui mi prefiggo, posso anche concedere, benchè non sia questa la mia opinione, che il concetto di causa abbia un valore obbiettivo quando si suole esprimere mediante una relazione necessaria e invariabile. Allora la critica si riferirebbe soltanto al concetto di « causa » nel senso di circostanza che « ha una certa influenza, ma non decisiva ».

che se l'eclisse non fosse avvenuta. Chi dicesse che l'eclisse è una causa di guerra intenderebbe dire che lui, al contrario, dopo un'eclisse vedrebbe imminente una minaccia di guerra. Io lo dico superstizioso perchè il suo stato d'animo differisce da quello che è mio e della civiltà cui appartengo, perchè ripugna con la concezione del mondo che è il frutto più intimo della mia immaginazione e dell'immaginazione del mio secolo. Ma se io voglio per un momento spogliarmi di quanto nel mio pensiero è creazione mia, se delle mie opinioni voglio distillare ciò che è oggettivo, e cioè puramente logico o puramente empirico, dovrò riconoscere che non ho nessuna ragione di preferire lo stato d'animo mio a quello d'un superstizioso se non la ragione appunto che io sento effettivamente lo stato d'animo che è mio, mentre quello d'un superstizioso mi ripugna.

L'esempio che ho riportato è un caso estremo e può sembrare paradossale. Ve ne sono altri infiniti in cui non meraviglierei affatto un mio contemporaneo dicendo che non so bene distinguere se una relazione causale esiste o non esiste, ve ne sono infiniti che giorno per giorno danno luogo a discussioni in questo senso. Ho detto la mia opinione in proposito: il concetto di causa è soggettivo, chi dubita se ammettere o non ammettere un certo nesso causale, e vuole appurare la verità per mezzo di esperimenti fisici e deduzioni logiche, raggiunge lo scopo come gettando frecce nelle tenebre. Non è il caso di cercare la verità, ma soltanto di acquistare la coscienza della propria opinione. Non è il caso d'interrogare la natura, ma soltanto di fare un esame di coscienza. Tutt'al più posso interrogare la natura perchè mi dia dei dati di fatto come elementi di giudizio, ma non è nei fatti la risposta; è nel mio stato d'animo che essi non possono vincolare, ma che da essi può eventualmente e spontaneamente sentirsi vincolato.

E se dall'idea di causa deduco un criterio per giudicare dei casi ugualmente probabili, anche il concetto di probabilità ne avrà, e a maggior ragione, un valore non soltanto relativo, ma soggettivo.

10. -- È gran tempo che le mie orecchie non hanno pace: mi sembra di sentire mille voci avvertirmi e gridarmi in tutti i toni che non si può parlare della probabilità — quanto meno in senso obbiettivo — di un evento singolo. Dobbiamo immaginare che esso si ripeta un gran numero di volte, forse addirittura che si possa pensarne infinite ripetizioni; allora la probabilità acquista un senso obbiettivo, perchè ha un significato obbiettivo la frequenza. Ecco venuto il momento di discutere quest'opinione.

Cosa intendiamo intanto dicendo che due eventi sono *prove* d'un medesimo *fenomeno* (1)? Per poco che si analizzi si vedrà bene che ciò non ha che un senso convenzionale, caso per caso. Due eventi sono «prove d'un medesimo fenomeno» se appartengono entrambe a una classe d'eventi caratterizzata da un nome speciale, o, se si preferisce, a una classe d'eventi che può essere interessante considerare riuniti in una classe. La morte di Tizio e la morte di Caio sono prove d'uno stesso fenomeno? Se considero il fenomeno «morte di un individuo», sì; ma Tizio non è soltanto un individuo, sarà per esempio un avvocato di 40 anni, di nazionalità italiana, e allora se considero i fenomeni «morte di un avvocato», «morte di un individuo di 40 anni», «morte di un italiano», «morte di un italiano di 40 anni», «morte di un avvocato italiano», la morte di Tizio rientra in tutte queste denominazioni e in quante altre, più o meno interessanti, si creda introdurne. E fra esse ve ne saranno certo molte che convengono anche a Caio, ma anche molte che non gli convengono.

Il concetto di «prove di uno stesso fenomeno» è arbitrario come lo è in logica quello di «elementi di una stessa classe». Due oggetti qualunque si possono sempre riunire in una medesima classe o in classi distinte; tra le innumerevoli classi che si possono formare, ce n'è però di quelle praticamente interessanti, per cui si ritiene che l'introdurre una denominazione speciale sia utile. La Vipera e il Cavallo appartengono entrambi alle classi «vertebrato», «animale con due occhi», «animale con nome italiano trisillabo», ma alle classi «rettile», «animale dal morso velenoso», «animale con nome italiano d'iniziale V» appartiene soltanto la Vipera. In relazione alla loro importanza pratica, la prima delle tre classi nominate è sempre la più notevole, e l'ultima sempre la più inutile. Ma non è che questione d'utilità e questione di grado: cercare un sostrato filosofico sarebbe vano, e vano sarebbe pensare al concetto di «prove d'un medesimo fenomeno» come a qualcosa che di per sé dica qualcosa.

Ciò non ha del resto importanza se non per togliere il problema da una nebbia metafisica, sempre e dovunque deleteria. Quando

---

(1) Molti Autori dicono «prove d'un medesimo evento»; io preferisco dire, in questo senso, «fenomeno», riservando la denominazione di «evento» per indicare una singola prova o, in genere, un fatto isolato. Mi sembra più opportuno e più conveniente.

parleremo di « prove d'un medesimo fenomeno » non dovremo sentirci autorizzati, per il fatto di usare questa denominazione, a mettere al riparo qualche punto delicato — tabù — contro lo spillo della logica. Ecco tutto.

11. — Se gioco a testa e croce, e dico che la probabilità di ottenere testa in una determinata prova è  $1/2$ , l'esperienza non mi può nè confermare nè smentire, ma se ripeto la prova ad esempio 1000 volte ottengo una successione di « testa » (T) e « croce » (C) in numero press'a poco uguale, e posso concludere che la probabilità è *effettivamente*  $1/2$ . Il calcolo delle probabilità conduce alla legge dei grandi numeri, e la legge dei grandi numeri è confermata dall'esperienza. In questo senso il calcolo delle probabilità è confermato dall'esperienza, e ha un valore obbiettivo.

Questo ragionamento è veramente sorprendente. Cosa ottengo facendo 1000 prove? Ottengo una delle  $2^{1000}$  successioni di 1000 lettere T o C. Che l'abbia determinata in mille prove, lettera per lettera, o che l'avessi estratta in un sol colpo, poco importa; quello che conta è che tutte le  $2^{1000}$  successioni possibili siano ugualmente probabili. Ma, qualunque sia la successione ottenuta, come faccio a concludere che effettivamente tutte le successioni possibili erano ugualmente probabili? C'è forse qualche differenza logica per il fatto che un'esperienza consti di più prove successive? Non è una circostanza affatto esteriore, inessenziale, apparente?

Resta il fatto, si dirà, che io posso prevedere, quasi con certezza, le frequenze. Questo è un fatto obbiettivo. E questo fatto non è per nulla sminuito dalla paradossale osservazione fatta poc'anzi, che si compiace di una forma lontana dallo spirito con cui il calcolo delle probabilità deve essere retamente usato perchè sia possibile rilevarne l'aderenza alla realtà.

Ma quando posso io dire che l'osservazione di una frequenza *prova* una valutazione di probabilità? Non forse sol quando ammetto di poter valutare la probabilità in base alla frequenza? Qual'è effettivamente la nostra posizione?

Ricordiamo che noi *non sappiamo ancora* cosa sia la probabilità, almeno in senso obbiettivo. Abbiamo dimostrato che credere al significato obbiettivo dei criteri « a priori » è illusorio: essi non danno che probabilità soggettive. Se uno non si contenta di questo valore soggettivo, ma vuol trovare un modo per renderlo obbiettivo, non può ormai pensare se non di ricavarlo da criteri « a posteriori », come l'osservazione di frequenze. Ma soltanto se la frequenza os-

servata permette di calcolare la probabilità questa idea ha un fondamento, perchè solo allora posso fare un confronto.

Questo modo di ragionare farà credere forse a prima vista che, chi ha il coraggio di sostenerlo, di probabilità non ne capisce nulla.

Ma è inevitabile che la fase negativa e demolitrice della critica, per quanto esauriente, lasci sempre perplessi, finchè la seconda fase, la fase ricostruttiva, non interviene a dileguare i timori e chiarificare le idee. Non c'è errore che non contenga qualcosa di vero, e che, quando l'errore è attaccato, temiamo di veder sepolto sotto le macerie. Timore umanamente comprensibile! ma dalle macerie, ecco, che sorge, alta, sfolgorante? Quella verità che s'intravedeva deformata attraverso l'errore, e ci appare ora nuova.

Chiedo quindi un pò di pazienza per poter dire una cosa per volta, e spero che, in questo desiderio almeno, non sembrerò irragionevole.

12. — « Ordinariamente su un gran numero di prove la probabilità e la frequenza differiscono di poco ». Cosa possiamo dedurre da questo enunciato? A rigore, dato che noi non sappiamo ancora cos'è la probabilità, non possiamo vedervi che una specie di definizione; per di più c'è la condizione che le prove siano indipendenti e fatte nelle medesime condizioni, e ricadiamo nella critica svolta per i « casi ugualmente probabili » e il concetto di « prove d'uno stesso fenomeno ». Ma sorvoliamo su tutte le difficoltà che ci distrarrebbero dal centro del bersaglio che voglio colpire. Ammettiamo che la valutazione della probabilità e le condizioni in cui sono fatte le prove siano tali da soddisfare il mio ipotetico contraddittore, e non fermiamoci a rilevare che il fatto stesso di sentirsi soddisfatto è soggettivo. Cosa può egli concludere? Che la frequenza su un gran numero di prove è vicina alla probabilità?

Per rendere una tale asserzione suscettibile di conferma o di smentita, dovremmo dire ad esempio « la frequenza su  $n$  prove differisce dalla probabilità per meno di  $\epsilon$  (in valore assoluto) ». È ciò che si vuol dire? No. E' ben noto che non possiamo scegliere  $n$  ed  $\epsilon$  in modo da poter affermare così. Però, si possono scegliere  $n$  ed  $\epsilon$  in modo che la condizione sia soddisfatta con *certezza pratica*. Ma la certezza pratica non è soltanto un grado di probabilità molto elevato? E allora non è soggettiva come il concetto di probabilità di per sé stesso? No, si dirà. Se un fenomeno è praticamente certo esso si verifica effettivamente sempre o quasi sempre. Se un feno-

meno è praticamente impossibile, esso non si verifica effettivamente mai o quasi mai.

Ma anche ora, se una tale asserzione si vuol rendere suscettibile di conferma o di smentita, dev'essere formulata in modo meno sibillino, che ci comprometta effettivamente. Non è serio dire che una frase ha valore sperimentale e avanzare contemporaneamente delle riserve tali da svalutare completamente a priori il responso dell'esperienza. E non solo non è serio: è un nonsenso. E' come se, dopo d'aver convenuto di chiamare « peso » d'un corpo la forza con cui esso è attratto dalla terra, ammettessi che possano esistere dei corpi « pesanti » che non sono però attratti dalla terra.

Nel caso in questione è ovvio che al concetto di certezza pratica non può attribuirsi un valore obbiettivo, « per la contraddizione che non l'consente ». Se dicessimo che un fenomeno è praticamente impossibile quando la sua probabilità è tale che non gli permette di verificarsi più d'una volta su mille prove, o su un milione, un miliardo, di prove, ricadremmo nella difficoltà precedentemente rilevata: che il nesso fra probabilità e frequenza non si può esprimere con una limitazione effettiva. L'artificio di considerare, anziché una serie numerosa di prove, un gran numero di tali serie, non fa che complicare inutilmente le idee. Se su un gran numero di serie di prove quelle che danno luogo a una frequenza approssimativamente uguale alla probabilità sono la grande maggioranza, possiamo riunire tutte le serie in una serie unica, e la frequenza complessiva sarà essa pure approssimativamente uguale alla probabilità. Invece di cambiare l'enunciato basta aumentare il numero delle prove: non si fa che eliminare una condizione inutilmente restrittiva, e si ha il vantaggio di capire subito, per riduzione all'assurdo, che l'artificio non ci dà nulla di nuovo, non ci consente nessuna conclusione. Invece, volendo approfittare dell'oscurità e della complicazione che porta, si è pensato utile di raddoppiarla, triplicarla, introducendo le serie di serie di serie di prove, le serie di serie di serie di serie di prove, e avanti! all'infinito! Singolare pretesa di voler ottenere una condizione oggettiva accumulando una sopra l'altra infinite condizioni prive d'ogni valore oggettivo! Del resto, indipendentemente da quest'osservazione generica, sussiste il fatto dimostrato che introdurre serie di serie o complicazioni maggiori non serve a nulla più che non serva considerare una serie più numerosa.

13. — Cosa mi si potrà obbiettare?

Mi figuro due tipi. L'uno è un pallido teorico astratto non im-

mune da contagi metafisici che vorrebbe trasformare la certezza pratica in certezza assoluta facendo crescere il numero delle prove fino a considerarne un'infinità numerabile (1), e per lui basteranno due parole. L'altro è un pratico che in nome della pratica mi rifiuterà il diritto di ragionare con troppa logica in questioni che non la sopportano. Ed esso ha un po' più di ragione, ma ha delle idee confuse, ed è un peccato, perchè altrimenti potremmo trovarci d'accordo.

Facciamo crescere il numero delle prove all'infinito. La probabilità che la frequenza coincida — con un grado d'approssimazione comunque fissato — con la probabilità, cresce avvicinandosi indefinitamente ad 1, e la probabilità di un evento certo è 1. Cosa si può concludere? Nulla. Intanto non è vera la reciproca: « se un evento ha probabilità = 1, esso è logicamente certo ». E poi, entrando nel merito della conclusione « in ogni successione numerabile di prove il limite della frequenza è la probabilità », si vede subito che essa è assurda. Perchè una particolare successione la soddisfi (per valori della probabilità compresi tra 0 e 1, estremi esclusi) è infatti necessario che essa contenga delle successioni parziali di infinite prove tutte favorevoli o tutte sfavorevoli, e queste successioni parziali non soddisfano la condizione. Le obiezioni a questo ragionamento sono facilmente immaginabili ma ancor più facilmente superabili da chi mi ha seguito fin qui. Mi limito ad aggiungere, in tutt'altro ordine di idee, che anche se per assurdo esistesse il teorema della tendenza a un limite della frequenza, nel senso matematico, esso sarebbe praticamente inutile finchè non si conoscesse la rapidità della convergenza, (2) che sola giustifica una valutazione approssimata partendo da un numero finito di dati, e questa è per sè stessa e di nuovo una supposizione assurda.

14. — Ma sentiamo piuttosto cosa direbbe uno che guardasse dal punto di vista empirico. Dirà che le osservazioni fatte sono giuste, ma non fanno che precisare la differenza tra certezza pratica e certezza assoluta. Non fanno quindi che portar vasi a Samo.

D'altronde, non possiamo rinunciare a basarci sul concetto di certezza pratica, perchè su di esso si basano tutte le scienze speri-

(1) Per questo indirizzo cfr. ad es. VON MISSES, « Math. Zeitschrift », Vol. 5, e DU PASQUIER, *Comun. al Congr. Int. dei Matem.*, Bologna, 1928, Sez. IV-A.

(2) Dovrebbe essere superfluo avvertire che non si parla qui della rapidità della convergenza in senso stocastico, cui si riferiscono ad es. il teorema di KHINTCHINE e le ricerche di KOLMOGOROFF, LÉVY, ecc.; quella che occorrerebbe, e che è impossibile, è una limitazione *matematicamente certa*.

mentali. « Questa nozione, poco ortodossa, di certezza può ferire il matematico puro che non conosca altra scienza oltre la propria. Ma chi si libera da ogni veduta ristretta, sa bene che, all'infuori della matematica, è questa la sola certezza di cui si abbia il diritto di parlare. Nel mondo fisico, in tutto ciò che interessa la vita, è *certo* un evento che sia immensamente probabile (1) ». La relazione tra probabilità e frequenza è un postulato empirico che dobbiamo accettare in base a « un'esperienza millenaria », e se non ci fosse un postulato e un'esperienza che lo conferma il calcolo delle probabilità non potrebbe avere nessun'importanza pratica.

Il calcolo delle probabilità « non può mai prevedere il risultato di un'effettiva esperienza finchè non venga connesso col campo concreto mediante qualche osservazione empirica ». I termini in cui è lecito formulare una previsione sono imprecisi e lasciano adito al dubbio, ma « è da avvertire che l'imprecisione è inevitabile tutte le volte che si stabilisce un raffronto tra una nozione astratta e un dato empirico ».

Il calcolo delle probabilità darebbe dunque una specie di schema ideale, suggerito dall'esperienza e dall'esperienza sufficientemente convalidato per poterlo ritenere approssimativamente vero nella pratica. Tutte le scienze sperimentali che si valgono della matematica non procedono d'altronde se non così: costruiscono uno schema puramente logico, un mondo di simboli astratti che non ha nè può avere nessun significato fisico, nessun significato positivo, finchè non si spiega, in forma necessariamente imprecisa, qual'è la relazione che si vuol stabilire fra i concetti esatti ma vuoti della teoria e le nozioni pratiche ma vaghe dell'esperienza. Una teoria matematica non ha un valore sperimentale; è soltanto una certa interpretazione concreta dei simboli che vi intervengono che lo può avere, e può risultare più o meno giusta, o, per dir meglio, secondo POINCARÉ, più o meno utile. E un simile legame fra la teoria e le applicazioni è sempre necessariamente impreciso, per il fatto stesso che le nozioni empiriche sono essenzialmente imprecise, e non si potrebbe pretendere che non lo fossero.

E allora perchè meravigliarsi che anche il calcolo delle probabilità, come qualunque altra scienza positiva, sia collegato alle applicazioni da un postulato empirico alquanto impreciso? Il paral-

---

(1) G. CASTELNUOVO, *Calcolo delle Probabilità*, Vol. I, p. XXV e (per le citazioni successive) pp. 4 e 5.

lismo è perfetto: dobbiamo « considérer la probabilité comme une notion purement expérimentale, la notion d'une *constante physique* dont la mesure approchée s'obtient par l'observation positive de la fréquence d'un fait », dobbiamo « utiliser les théorèmes généraux comme autant de règles de calcul numérique en vue de la prévision d'événements futurs », dobbiamo trattare infine « la théorie des probabilités comme une science positive, où les mathématiques interviennent, il est vrai, à chaque instant, mais qui doit prendre son point de départ dans un certain nombre de notions de fait, tirées de l'expérience; et qui ne valent que dans la mesure où elles correspondent à des réalités ».

Così dice il FRÉCHET (1), il più notevole forse, tra quanti condividono queste idee, per la coerenza con cui ad esse, nello svolgimento dell'originale sua trattazione, si uniforma.

#### 15. — Possiamo accettare queste idee?

Io dico di no.

L'analogia fra il calcolo delle probabilità e le scienze sperimentali è soltanto apparente, ed è facile avvertire, per poco che si analizzi, che essa manca in pieno proprio nel punto più essenziale.

Quando introduciamo un postulato empirico, che cos'è che facciamo? Affermiamo che una certa categoria di fatti naturali avviene effettivamente nel modo che vorrebbe una certa teoria, o almeno che le discordanze sono praticamente trascurabili, sia per la loro piccolezza, sia per la loro scarsa importanza, sia per la loro minima probabilità. Affermiamo, dopo aver costruito, con una teoria matematica, un mondo a modo nostro, che il mondo delle nostre sensazioni si comporta, con sufficiente approssimazione, alla stessa maniera.

La funzione dei postulati empirici è bene lumeggiata dal POINCARÉ' nel paragrafo de « *La Valeur de la Science* » dedicato alla critica del nominalismo (2), ove spiega in modo chiaro e esauriente le idee che ho in breve riassunte. Qual'è, per riportare un esempio, il valore della legge di GALILEO? Secondo un nominalista, il valore sa-

---

(1) FRÉCHET-HALBWACHS, *Le calcul des probabilités à la portée de tous*, pp. IX-X e 2. Una critica in molti luoghi acuta di questa concezione (come pure della definizione basata sul computo di casi egualmente probabili) è quella di C. E. BONFERRONI, *Intorno al concetto di probabilità*, Bari, 1926; le sue conclusioni non sfuggono tuttavia alla critica che qui sviluppiamo.

(2) pp. 235 e sgg.

rebbe puramente nominale. « Quand je dis: les corps graves en chute libre parcourent des espaces proportionnels aux carrés des temps, je ne fais que donner la définition de la chute libre. Toutes les fois que la condition ne sera pas remplie, je dirais que la chute n'est pas libre, de sorte que la loi ne pourra jamais être en défaut ». Ma, osserva giustamente il POINCARÉ', « il ne me servirait à rien d'avoir donné le nom de chute libre aux chutes qui se produisent conformément à la loi de GALILÉE, si je ne savais d'autre part que, dans telles circonstances, la chute sera *probablement* libre ou à *peu près* libre. Cela alors est une loi qui peut être vraie ou fausse, mais qui ne se réduit plus à une convention ».

Se lancio un proiettile e voglio prevederne il movimento, qual'è dunque la portata della teoria? Semplicemente quella di mettere in rilievo, fra tutte le conseguenze della definizione di caduta libera, ossia di moto con accelerazione costante, quelle che mi possono interessare. Essa non dà nulla che io non abbia implicitamente ammesso nell'istante medesimo in cui ho supposto che la caduta sia libera. Ma perchè non ho fatto una supposizione diversa? Questo ha una ragione empirica. E' dall'esperienza che so che, nelle circostanze in cui effettuo il lancio, la caduta sarà libera, o meglio sarà *probabilmente press'a poco libera*. Il dubbio e l'imprecisione non possono eliminarsi, per la natura stessa di un postulato empirico. Anzitutto, nella pratica vi sono delle cause che trascuriamo, come la resistenza dell'aria, che falseranno certamente il risultato; se non ce ne fosse nota nessuna, e anche se ammettessimo che non ve ne possa essere nessuna, non potremmo tuttavia affermare che la legge sia esatta, perchè non è che una legge sperimentale, e nessuna esperienza ci consente di raggiungere l'esattezza; finalmente, anche se per impossibile l'avessimo raggiunta, sarebbe sempre dubbio se la legge verificata in passato debba valere anche oggi.

Le ragioni di dubbio sono molte, ma dov'è che si trovano? Nel seno del postulato empirico, nell'atto del collegamento della teoria coi fatti. Un matematico che voglia sviluppare la teoria ne può prescindere completamente, studiando come i fatti dovranno andare ogniquale volta certe condizioni saranno soddisfatte. E' l'atteggiamento che ebbe già ad assumere il TORRICELLI: « Che i principî della dottrina del moto siano veri o falsi, mi importa pochissimo. Poichè, se non son veri, fingansi che sian veri siccome habbian supposto, e poi prendansi tutte le altre speculazioni derivate da essi principî, non come miste (cioè applicative), ma come pure geometriche. Se poi le palle di piombo, di ferro, di pietra non os-

servano quella supposta proporzione, suo danno, diremo che non parliamo di esse ».

Abbiamo insomma una teoria per dire esattamente come i fatti dovrebbero andare (1), e un postulato empirico per dire che vanno effettivamente press'a poco così. Del postulato empirico non c'è bisogno che per le applicazioni; se voglio sapere soltanto come i fatti *dovrebbero* andare, esso non serve.

Sussiste la pretesa analogia con quanto avviene nel calcolo delle probabilità?

Ci sarebbe analogia ad esempio se il calcolo delle probabilità dicesse che, giocando a testa e croce, su 1000 prove successive 500 danno testa e 500 croce, e la pratica mostrasse che ciò è press'a poco e quasi sempre vero. Oppure se, in qualunque altro senso, il calcolo delle probabilità affermasse che un fatto dovrebbe teoricamente andare in un certo modo, e volessimo imputare all'imperfetta obbedienza del mondo empirico alle sue leggi se talvolta la pratica lo smentisce.

Invece non è così. Se l'avverarsi d'un fatto, sia pure estremamente poco probabile, straordinario, inverosimile, si volesse considerare una smentita al calcolo delle probabilità, non è alla pratica che si può dare la colpa. Potrei forse dire: se la natura avesse studiato meglio il calcolo delle probabilità, questo scherzo non me l'avrebbe giocato?! No! Se *sapessi* che la natura non produce mai dei fatti eccezionali, estremamente poco probabili, sarebbe l'unico caso in cui il calcolo delle probabilità risulterebbe indiscutibilmente falso.

L'analogia è solo apparente, dunque, e molto ma molto superficiale. Del resto, basta osservare che tutte le critiche svolte precedentemente circa il significato obbiettivo della probabilità non vertono mai su difficoltà pratiche, sulla possibilità di eseguire effettivamente un'esperienza, sul suo valore probativo, sul suo esito più o meno favorevole; esse hanno un contenuto puramente concettuale, e ciò bastava per dimostrare a priori, anche se non avessi creduto preferibile chiarirlo con ogni cura, come sia assurdo ogni tentativo

---

(1) Lungi da me ogni idea di usare tale frase in qualche senso metafisico! E' una locuzione che può essere comoda tanto per intendersi, ma che non significa nulla. Quando dico « come i fatti dovrebbero andare », devo sottintendere « nel caso che andassero nel modo che una certa teoria suppone ». A volerla prendere per se stessa, la frase esprimerebbe meglio l'idea dicendo « come i fatti potrebbero andare ».

di indulgentemente lasciar passare le criticate convinzioni nella cinta daziaria del pensiero scientifico sotto la falsa etichetta di « *verità empiriche approssimate* », esenti per lor natura dal rigore di una visita logica.

16. — Sembrerà forse che, ragionando così, dovrei necessariamente arrivare al punto diametralmente opposto a quello che mi sono prefisso: anzichè dare al calcolo delle probabilità l'importanza preponderante che gli riconoscevo, sembrerà gli voglia negare ogni valore. Non v'è, a quanto sembra, sofisma che ancor oggi sia capace di trarre in inganno come questo: o l'esperienza conferma il calcolo delle probabilità, e allora esso ha un valore empirico-sperimentale, e cioè obbiettivo, o non lo conferma, e allora non ha nessun valore. Se, come qui asserisco, non ha neppure senso parlare di conferma sperimentale del calcolo delle probabilità, tale calcolo, si penserà di concludere, non dice nulla, ed è quindi inutile.

Ecco: io dico appunto che un pensatore razionalista o positivista, per esser coerente con sè stesso, deve concludere proprio così. Così pensava infatti AUGUSTO COMTE, e, dal suo punto di vista, aveva pienamente ragione. La teoria delle probabilità è « *le type de ces recherches purement spéculatives et un peu vaines où se complait le byzantinisme de quelques savants* » (1). Ma io però non sono nè razionalista nè positivista, ed è per questo che posso dare un valore al calcolo delle probabilità.

Per comprendere e aver ragione di apprezzare il calcolo delle probabilità e di farne uso, è dunque proprio necessario, utile, e sufficiente adottare il punto di vista del relativismo?

Che sia necessario spero d'averlo dimostrato; nè il fatto che scienziati illustri abbiano trattato l'argomento in modo ammirevole senza essere di questa opinione può provare gran che. Nulla si toglie al loro merito dicendo che hanno costruito una grande teoria senza analizzarne impeccabilmente i concetti fondamentali. Ciò è sempre accaduto, ed è forse necessario che avvenga. Il concetto di limite è stato correttamente definito dopo secoli che la matematica ne faceva il suo fondamento, e considerava derivate, integrali, algoritmi infiniti. Si vuole sminuire per questo la grandezza d'EULERO?

Rimarrà il dubbio che la nostra concezione non basti a dar ragione del valore, della potenza e dei successi del calcolo delle

---

(1) Cit. in FRECHET, *op. cit.*, prefazione.

probabilità. Ho già detto che la fase negativa e demolitrice della critica lascia sempre inevitabilmente perplessi, finchè la seconda fase, la fase ricostruttiva, non interviene a dileguare i timori e chiarificare le idee, e ho riconosciuto con ciò l'importanza capitale che attribuisco a tale parte della discussione. La svolgeremo quanto prima nel modo più ampio, e, spero, esauriente.

Terzo punto: l'utilità. Quali vantaggi ci reca il punto di vista che sostengo?

Quando cerco di dimostrare che le concezioni usuali sono insostenibili, e quella che ad esse voglio sostituire è perfettamente logica, metto già in luce la prima e più notevole ragione di utilità, ma parlare di essa sarebbe qui ovviamente una ripetizione inutile. Ciò che voglio rilevare qui, è l'importanza che ha la conoscenza e la coscienza esatta del valore relativo e soggettivo della probabilità anche per chi non si voglia curare delle questioni critiche, logiche, concettuali, ma abbia la sola preoccupazione delle applicazioni pratiche. Potrà egli ritenere che il dissenso non lo interessi?

Ebbene: finchè si tratta dei dadi o delle lotterie, non ho difficoltà ad ammettere che a un pratico interessi poco distinguere se la nozione di casi ugualmente probabili abbia un senso oggettivo, o soltanto un senso soggettivo ma conforme a uno stato d'animo talmente spontaneo da potersi dire universale. Allo stesso modo un matematico può anche disinteressarsi della definizione di integrale se si tratta di quadrare una figura per cui ci sorregge la nozione intuitiva di area, o della definizione di limite se la somma di una serie si capisce inconsciamente come si deve calcolare. E' forse per questo una questione praticamente priva d'interesse sostenere che il concetto di limite ha senso soltanto quando se n'è data una precisa definizione nominale, e solo in virtù di questa definizione, o ammettere invece che esso abbia un significato metafisico di per sè, e considerare le solite definizioni come metodi per riconoscere quale effettivamente il limite è, caso per caso? Ma quale differenza fra il poter dire tranquillamente, ad es., che la serie  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  non ha una somma nel senso ordinario, perchè non convergente, ma che ha per somma  $1/2$  nel senso di CESÀRO, sapendo bene ciò che così dicendo intendiamo dire, e il vano brancolare nel buio cui saremmo condannati se ci volessimo chiedere, vedendo la questione sotto un aspetto metafisico, se la somma *esiste* o *non esiste*, e, se esiste, se *sarà* quella che otterremo col metodo di CESÀRO, o se tale *ipotesi è sbagliata!*

Nel calcolo delle probabilità — per poco che ci si allontani

dagli esempi artificiosi e schematici che mascherano ogni difficoltà concettuale — si sente chiedere tante volte se la probabilità d'un evento *esiste* o *non esiste*, e si fa l'*ipotesi* che tale probabilità abbia un certo valore  $p$ ; ipotesi che si ammette possa essere *vera* o *falsa*. Tutto ciò non ha senso, e questa congerie di pregiudizi senza senso opprime il calcolo delle probabilità come una cappa di piombo.

Nessun errore graverebbe di più: *Truth comes out of error more readily than out of confusion*, disse BACONE. Anche i pratici debbono quindi ascoltare GOETHE che ci avverte:

«Gewöhnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,  
«Es müsse sich dabei auch etwas denken lassen».

E' questo un pericolo contro cui sembra non si sia mai abbastanza in guardia. Un pericolo non solo per la purezza logica dei nostri ragionamenti, di cui uno potrebbe al postutto infischiarci, ma anche e specialmente per la capacità pratica a concludere, che ne rimarrebbe irrimediabilmente paralizzata.

Occorre insistere alquanto per prevenire un possibile tentativo di svalutazione. Nel fatto, non ho difficoltà ad ammetterlo, tutti sono più o meno convinti che il calcolo delle probabilità ha un carattere specialissimo, in quanto che, per dargli un significato, la logica e l'esperienza non bastano: è il buon senso che ha la parte più essenziale. Può essere che, stringi stringi, io non dica nulla di più, ma lo dico colla piena consapevolezza di tutte le conseguenze che una simile ammissione porta irrimediabilmente con sé. E fra le conseguenze ve n'è, come abbiamo accennato, che hanno un'importanza pratica non misconoscibile.

17. — Perché non ci si contenta di considerare la probabilità come una nozione soggettiva, quale non può non essere?

Non è questo un caso isolato di perversimento logico: non è che una manifestazione necessaria e inevitabile di un'unica malattia, di cui spero che il pensiero relativista riesca a guarire l'umanità. Dico che una cosa è bella, è giusta, è importante. Cosa voglio dire? Voglio dire che a me piace, che io l'approvo, che a me interessa. Oppure che piace alla maggioranza degli uomini, che è conforme a un certo ordinamento della società, che suscita l'interessamento del pubblico. Eppure quanti non si scandalizzerebbero a sentir dire così chiaramente pane al pane e vino al vino! Quanti non preferiscono inventare delle astrazioni mirabolanti, la Bellezza, la Giustizia, come termini immobili, assoluti, universali! Nulla di strano se, accorgendosi di provare continuamente, nella vita pratica, la sensazione di

attendere un certo fatto con maggiore o minore fiducia, queste stesse persone hanno creduto bene d'inventare la Probabilità! Se, distruggendo il mito della Probabilità oggettiva, sembra loro che io debba svuotare il calcolo delle probabilità!

L'equivoco è sempre uno: quello stesso che l'ENRIQUES argutamente rimprovera a qualche logico-matematico per cui « non c'è via di mezzo: tutto perde valore ai suoi occhi, tosto che si sia accorto che non ha significato assoluto. Come la folla del MANZONI: quando si è persuasa che taluno non merita di essere impiccato, non si ha da spendere più parole per convincerla che ha da essere portato in trionfo! » (1).

Così nel caso delle probabilità: o esse hanno un valore assoluto, obbiettivo, o non hanno che un valore *convenzionale* (!). O ha senso chiedere se una valutazione di probabilità è giusta o errata, oppure non c'è motivo che vincoli il nostro capriccio. Ma bisogna distinguere fra arbitrario e soggettivo, fra capriccio ed istinto, fra convenzione e opinione! La più parte della nostra attività mentale, specialmente nella pratica, opera su opinioni: si vuol dire che esse sono scelte a casaccio e non valgono nulla, nemmeno per chi le condivide? O si vuol proprio, quando si è convinti che un'opinione abbia valore, inventare, per giustificarla, l'esistenza di una pretesa « verità assoluta » conforme a quell'opinione?

Ho insistito fin dal principio e ripetutamente sulla necessità di non dire che quello che si sa di voler dire e che si sa che cosa vuol dire. Basta questa premessa per inibirci di fare appello ad entità misteriose, trascendenti, metafisiche. Per chi sia già sufficientemente penetrato dello spirito che anima e informa il mio pensiero sarebbe superfluo aggiungere sillaba. Ma converrà anche qui entrare nel merito della questione, sviscerare i punti che possono costituire delle difficoltà all'adozione del nuovo punto di vista, e dimostrarne l'inconsistenza.

18. — « Un joueur veut tenter un coup; il me demande conseil. Si je le lui donne, je m'inspirerai du calcul des probabilités, mais je ne lui garantirai pas le succès. C'est là ce que j'appellerai la *probabilité subjective*. Mais je suppose qu' un observateur assiste au jeu, qu' il en note les coups et que le jeu se prolonge longtemps; quand il fera le relevé de son carnet, il constatera que les événe-

---

(1) ENRIQUES, *Per la storia della Logica*, p. 204.

ments se sont répartis conformément aux lois du calcul des probabilités. C'est là ce que j'appellerais la *probabilité objective*, et c'est ce phénomène qu' il faudrait expliquer » (1).

Ecco una difficoltà che induce molti in errore: come non persuadersi — sembra loro dover concludere — che il valore della probabilità non sia soltanto soggettivo?

In tutti questi casi, in tutti i ragionamenti consimili, quello che impressiona è sempre un fatto solo: che un evento praticamente certo si è effettivamente verificato, o è prevedibile che effettivamente si verificherà. Ma c'è poi ragione d'impressionarsi? Quando dico che un evento è praticamente certo, voglio dire che mi meraviglierei molto che non si verificasse: posso poi meravigliarmi d'aver indovinato, meravigliarmi cioè che non sia avvenuto un fatto eccezionale, che m'avrebbe fatto gran meraviglia?

Dice il POINCARÉ che chi assiste al gioco « constaterà que les événements se sont répartis conformément aux lois du calcul des probabilités ». Anzitutto, potrà constatare che si sono verificate *alcune circostanze notevoli praticamente certe* (2), relative, ad esempio, alle frequenze; è impossibile che *tutti* i fatti praticamente certi si siano verificati. Basta pensare che era per certo praticamente impossibile che proprio quella successione di colpi che si è verificata si verificasse. Dobbiamo dunque fissare l'attenzione su una o poche circostanze notevoli e praticamente certe: il POINCARÉ dice che si verificheranno. Ma perchè lo dice? Perchè ne è certo; non in senso assoluto, ma però praticamente certo. E non l'abbiamo già dovuto supporre che l'evento sembri praticamente certo? Quando valuto una probabilità molto prossima ad uno esprimo per l'appunto questa mia sensazione: che, quasi senza dubbio, l'evento si verificherà. Aggiungo forse qualche cosa di più quando ripeto che, quasi senza dubbio, l'evento si verificherà? Ho forse il diritto di pensare: prima valuto una probabilità, e poi mi chiedo se posso effettivamente attendere un evento col corrispondente stato d'animo? E' questo che molti fanno, e, nei casi in cui ritengono di poter rispondere affermativamente, dicono che la probabilità ha un valore oggettivo.

Ma, valutando una probabilità, io non faccio che esprimere un mio stato d'animo, e cosa significa chiedere se io posso o non posso

(1) POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, p. 218.

(2) Cfr. LÉVY, *Calcul des Probabilités*, in più luoghi, e in particolare nel N. 35.

avere uno stato d'animo coincidente collo stato d'animo che effettivamente è il mio? Se il dubbio che qui si vorrebbe affacciare corrisponde effettivamente a qualcosa di non privo di senso e di effettivamente sentito da me, esso faceva già parte del mio stato d'animo, e ne avrò già tenuto conto nel valutare la probabilità. Ma una volta che l'ho valutata (e finchè suppongo che il mio stato d'animo non si modifichi: modificandosi, certo che potrebbe modificare la valutazione precedente!) non ha senso dubitare che la mia valutazione sia errata, perchè essa non ha alcun senso indipendentemente da me, non ha altro scopo che di esprimere quale è il mio stato d'animo.

Perchè quando un evento mi sembra praticamente certo (quando cioè ne valuto la probabilità prossima ad 1) ho il diritto di essere praticamente certo che avvenga? Perchè quando dico che un evento mi sembra praticamente certo (quando ne valuto la probabilità prossima ad 1) non dico e non posso voler dire nè più nè meno di questo: che io sono praticamente certo che avvenga.

Se è vero che « *opium facit dormire* », possiamo noi ritenere per vero che « *opium habet virtutem dormitivam* »? Ecco un altro non meno difficile e non meno profondo problema filosofico! Lo addito all'acume del lettore, che veda se il raffronto ha la menoma pecca.

19. — Sembra strano che da un concetto soggettivo seguano delle regole d'azione che in pratica poi riescono. E il POINCARÉ continua a spiegare perchè l'esplicazione soggettiva gli sembri insufficiente citando le applicazioni pratiche nel campo delle assicurazioni. « Il existe de nombreuses sociétés d'assurances qui appliquent les règles du calcul des probabilités, et elles distribuent à leurs actionnaires des dividendes dont la réalité objective ne saurait être contestée ».

In fondo, non è che il caso di prima, semplificato dal fatto che è molto chiaro qui quale sia la « circostanza notevole » di cui ci si deve occupare, ed ha un'importanza molto concreta: il dividendo. Facciamo il bilancio preventivo in modo che sia praticamente certo che gli utili raggiungano un dato importo. Naturalmente, non ha senso dire « praticamente certo » se non dico *per chi*; in questo caso dovranno essere i dirigenti, gli attuari, gli azionisti. Quando un'impresa è solida e poco rischiosa, su questa opinione è facile del resto raggiungere il consenso univiale o quasi, e non c'è nulla

in tal fatto che debba colpire, perchè è appunto per tale fatto che l'impresa si dice solida e poco rischiosa.

Non basta questo: non è solo una sensazione di dirigenti, attuari, azionisti, dirà qualcuno. Vedrai che il dividendo darà loro ragione. Che vuol dire questo? Vuol dire che questo qualcuno condivide lui pure quella sensazione, quella persuasione, quella fiducia, in cui concordano già i dirigenti, gli attuari, gli azionisti. A fine d'anno, ecco, il dividendo è distribuito regolarmente. Vedi, dirà quel tale, non era solo una mia sensazione quella certezza, doveva avere una certa radice obbiettiva. E perchè? Se lui — fosse pure per una convinzione priva d'ogni fondamento — riteneva inverosimile che il dividendo mancasse, dovrà trovare naturalissimo che il dividendo ci sia, e non avrà quindi scopo, necessità o utilità di cercare una spiegazione. Men che meno una spiegazione puramente verbale ed astratta come quella che consiste nell'inventare il « caso » e le « leggi del caso ».

Ma vediamo un po' meglio l'ufficio del calcolo delle probabilità nelle assicurazioni.

Qualunque impresa si voglia affrontare, qualunque azienda si voglia dirigere, noi ci regoliamo sempre facendo, più o meno accuratamente o inconsciamente, un bilancio preventivo, e in questo bilancio preventivo ragguagliamo la speranza dei profitti e il timore delle perdite, la speranza e il timore che i profitti e le perdite siano più o meno forti. Possiamo amare più o meno il rischio, possiamo essere redditieri prudenti o speculatori sfrenati, e le nostre preferenze saranno diverse. Potremo farci trascinare dal miraggio d'un guadagno rischioso e giocare il tutto per tutto, o preferire la modesta tranquillità di chi si sente al riparo dagli scherzi della fortuna. E' una scelta di cui siamo pienamente liberi, e che ciascuno può fare a suo modo. Il calcolo delle probabilità non può darci ragione o torto: è noto, è vero, il concetto di speranza matematica, che ha un'importanza capitale, ma il suo ufficio non è (come pur sembra a taluno) quello di vincolare in questo caso la nostra libertà di scelta. E' stata anche introdotta la speranza morale, che, oltre a non rispondere al problema, è nozione artificiosa e insignificante. Ma rimane, però, in ogni caso, che dobbiamo prospettarci tutte le alternative con le loro probabilità e i loro effetti; poi agiremo come ci sembrerà opportuno.

Nel caso di un'impresa che dev'essere solida e poco rischiosa, dovremo fare in modo, come nel caso citato delle assicurazioni, di avere un'attività magari non fantastica, ma sufficiente e praticamente

sicura. E' quel che fanno tutte le aziende non a carattere speculativo, pur senza far uso del calcolo delle probabilità, e tale certezza non è per questo smentita troppo spesso dai fatti. E non c'è nulla di strano che sia così, e ciò per un motivo lapalissiano: se queste previsioni fossero continuamente smentite, ci guarderemmo bene dal farle, e ci regoleremmo in altro modo, e sarebbe quest'altro modo che ci ispirerebbe nell'accordare maggiore o minor fiducia alle diverse alternative.

Che un evento *sia o non sia* praticamente certo, è un'*opinione*, non un *fatto*; che *io lo giudichi* praticamente certo, è un *fatto*, non un'*opinione*. Che io debba agire secondo questa opinione non è che apparentemente un corollario, perchè quest'*opinione* non esiste se non in quanto ritengo di dover regolare la mia azione in corrispondenza con essa.

20. — Questa spiegazione generalissima vale anche nel caso delle società di assicurazione. E perchè dunque in tal caso il successo dovrebbe provare il calcolo delle probabilità? Perchè il calcolo delle probabilità interviene?

Soltanto perchè il complesso delle circostanze da cui il guadagno totale dipende è di tal natura che, per valutarne la legge di probabilità, si trova opportuno partire da una valutazione di probabilità dei guadagni elementari. Le leggi di calcolo ben note ci permettono di combinare le singole probabilità, e concludere che, per essere coerenti, dobbiamo attribuire una certa probabilità — ad esempio, come supponiamo, una certezza pratica — al fatto d'avere, in complesso, un guadagno soddisfacente.

L'unico fatto nuovo è l'intervento delle operazioni aritmetiche del calcolo delle probabilità. E' di esse forse che dobbiamo dimostrare praticamente che sono giuste? No. Perchè esse si dimostrano a priori, sono rigorosamente esatte, e hanno un valore puramente formale. Sarebbe come se volessi dimostrare che 1 più 1 fa 2 misurando la lunghezza della somma di due segmenti lunghi un metro. Ma è soltanto perchè ho convenuto di misurare la lunghezza di un segmento in modo che valga la proprietà additiva e perchè so che 1 più 1 fa 2 che posso concludere che il segmento somma misura 2 metri! Ho già accennato che la dimostrazione delle leggi formali del calcolo delle probabilità è indipendente da ogni eventuale e preteso suo significato obbiettivo, e nulla abbiamo quindi da attendere, a questo riguardo, dall'esperienza.

D'altronde, se la valutazione delle probabilità elementari fosse

fatta in modo diverso, anche i risultati cui le regole di calcolo conducono sarebbero diversi, ed è ovvio che è sempre la valutazione di una probabilità, non il calcolo delle probabilità, che ci guida in una previsione. E allora, cosa resta? Resta che può essere più comodo, in certe imprese, valutare la probabilità dell'esito favorevole tutt'in blocco, vedere a colpo d'occhio se l'affare è sicuro o malcerto, e in altre è preferibile risalire a tale convinzione partendo da un'analisi dei singoli fattori che entrano in gioco. Nessuna differenza concettuale sussiste fra i due casi. Chi volesse stimare l'area d'un campo rettangolare può collo stesso diritto giudicare direttamente in ettari l'estensione, o stimare le lunghezze dei lati e fare il prodotto: ragioni di comodità, di pratica, di abitudine, faranno preferire l'uno o l'altro modo, quello che nel caso in questione ci sembra più meritevole di fiducia in relazione alla nostra capacità a giudicare, o potremo seguire tutt'e due i modi, o tentarne anche altri, e tenerli tutti presenti nel fissare definitivamente la nostra opinione in proposito. Le aree stimate coi diversi metodi sono forse grandezze di natura diversa? Se, eseguita la misurazione, trovo che la valutazione indiretta va bene, posso concludere che ciò « prova » la « regola » che dice: l'area del rettangolo è il prodotto delle lunghezze dei lati?

Così la certezza pratica ha il valore che ha, in quanto significa che *io sono* praticamente certo, comunque a tale persuasione sia pervenuto. Che ad essa possa pervenire combinando delle probabilità elementari è un fatto che si spiega a priori e non ha bisogno di conferma: è contraddittorio valutare delle probabilità in modo che non si combinino secondo i teoremi fondamentali ben noti. Il successo del concetto di certezza pratica che guida tutte le previsioni, anche nella vita economica, commerciale, industriale, è altrettanto provato nel caso che l'appello alla nozione di probabilità sia incosciente, e giunga senz'altro a una persuasione di piena fiducia, come nel caso contrario in cui si trovi utile eseguire effettivamente delle operazioni aritmetiche sulle probabilità elementari. Il successo non dipende quindi dall'uso del calcolo delle probabilità, che serve soltanto come strumento formale per la valutazione indiretta di una grandezza — la probabilità — essenzialmente soggettiva, come metodo per arrivare a una certezza pratica che, essendo conseguenza di certe premesse che rispondono al nostro stato d'animo, non possiamo rifiutarci di affermare aderente al nostro stato d'animo, e ha quindi valore in quanto effettivamente esprime il nostro stato d'animo.

Non altro è del resto l'ufficio della logica. Essa non può dirmi se le mie opinioni sono *giuste* o *sbagliate*, il che non ha senso, ma soltanto se sono coerenti o se v'è fra di esse un'intrinseca contraddizione. E il calcolo delle probabilità non è che la logica delle convinzioni d'ordine pratico, soggette a un grado di dubbio e d'incertezza più o meno grande.

21. — Abbiamo affermato che nessun'esperienza può confermare nè smentire il calcolo delle probabilità, insistendo in modo speciale che una tale conferma o smentita non si può mai attendere da determinazioni di frequenze. Ciò potrà sembrare paradossale. Sembrerà paradossale perchè si può ritenere forse, a prima vista, che allora non sia più lecito nemmeno valutare delle probabilità lasciandosi guidare dall'esperienza, esperienza che di solito, come è noto, consiste nell'osservazione di frequenze. Nella statistica, ad esempio, non si procede se non così, e non è certo a tale convinzione, a tale procedimento, che si possa rinunciare.

Certo il modo di ragionare con cui d'ordinario lo si giustifica è per noi privo di senso, ma ciò non toglie che le conclusioni siano esatte. Di solito si fanno dei ragionamenti del tipo seguente. Riguardo alla probabilità di un dato evento si possono fare diverse ipotesi; l'esperienza mi mostra quale sia la più attendibile, o, più in generale, mi indica quale sia il grado d'attendibilità di ciascuna di esse. Nel caso particolare in cui si tratti di valutare una probabilità in base alle frequenze osservate, caso in cui preciseremo, per esemplificare, il senso di tale ragionamento, si dice così. Ammettiamo che una certa classe di eventi, che diremo «prove d'un medesimo fenomeno», siano indipendenti e ugualmente probabili; sul valore comune delle loro probabilità possiamo fare diverse ipotesi, e anzi in generale possiamo supporre che sia un numero qualunque dell'intervallo  $(0, 1)$ . Ogni ipotesi avrà a priori una certa probabilità che supporremo nota; dopo osservata su un gran numero di prove la frequenza  $f$ , la probabilità delle diverse ipotesi variano (conformemente al teorema di BAYES) perchè, *a posteriori*, le ipotesi che danno a  $p$  un valore prossimo ad  $f$  risultano più attendibili. E risulta quindi che  $p$  sarà prossima ad  $f$ .

Va notato che molti Autori si fanno scrupolo di usare esplicitamente il teorema di BAYES. Ciò è vero, ma non cambia nulla, perchè concettualmente essi ragionano sempre sulla falsariga ora esplicita. Sconsigliano soltanto di tradurre in formule il loro ragionamento, sufficientemente giustificato dal buon senso. Ma quel che

v'è di essenziale nell'impostazione rimane: l'attribuzione a  $p$  di uno o un altro valore costituisce un'ipotesi di cui l'esperienza congiunta al buon senso ci può dire se sia più o meno attendibile. Un evento si è verificato press'a poco in metà di un gran numero di prove: perchè posso io prevedere che si verifichi press'a poco in metà delle prove successive? Perchè se si è verificato press'a poco in metà di un gran numero di prove è molto verosimile l'ipotesi che esso abbia probabilità  $= 1/2$ .

Ma il valore della probabilità non è un dato di fatto, non ha nessun senso obbiettivo. La frase «la probabilità è uguale a un dato numero  $p$ » non esprime nessun fatto, non è di per sè nè vera nè falsa, non può quindi costituire un'ipotesi, non si può dire che sia più o meno attendibile. C'è poi quella condizione che gli eventi siano indipendenti e ugualmente probabili che, nel caso di cui ci occupiamo, ha un senso molto più delicato e capzioso dell'ordinario, benchè la dilagante faciloneria non l'abbia mai avvertito.

Come procederemo noi?

In modo semplicissimo. Riprendendo l'esempio citato poco sopra, diremo, invertendo il ragionamento, così. Un evento si è verificato press'a poco in metà di un gran numero di prove: perchè do io il valore  $1/2$  (o circa  $1/2$ ) alla probabilità che esso si ripeta in una nuova prova? Perchè se nel passato si è verificato press'a poco in metà di un gran numero di prove, mi sembra di dover attendere che si verifichi press'a poco in metà delle prove successive.

E perchè mi sembra di dover attendere che la frequenza sia press'a poco stabile? A dir vero, chiedere il perchè non ha quasi senso. Per dir meglio, se si chiede con questo perchè una ragione oggettiva, una spiegazione filosofica, un nesso esterno di causa ed effetto, si chiede cosa del tutto priva di senso. Ha senso invece cercare il perchè in senso soggettivo, introspettivo, psicologico. Posso cercare cioè, come per tutte le questioni di probabilità, di giustificare una mia opinione mostrando che è conseguenza di altre mie opinioni che mi sembrano più immediate e più semplici. Nel caso delle probabilità valutate in base alle frequenze, un perchè, in questo senso, esiste, e su ciò ritorneremo nel prossimo capitolo. Ma, comunque una simile opinione sia giustificata o immediatamente acquisita, è il fatto solo che essa sia effettivamente una nostra opinione che interviene nel meccanismo dei ragionamenti che consentono la valutazione di una probabilità in base all'esperienza. Meccanismo semplicissimo, che si riduce al teorema delle probabilità composte. Qual'è la probabilità dell'evento  $E$  dopo che l'esperienza mi ha

fatto conoscere il complesso di circostanze A? Se, prima di conoscere l'esito del complesso di circostanze A, era  $p$  la probabilità che si verificassero l'evento E e le circostanze A, e  $q$  la probabilità che si verificassero le circostanze A, la probabilità di E subordinatamente al verificarsi delle circostanze A è  $p/q$ .

Questo elementarissimo teorema, checchè ne possa sembrare, contiene tutto quello che c'è di corretto nei ragionamenti usuali. Le assurde complicazioni che si ama introdurre non servono che a rendere i ragionamenti incomprensibili, scorretti e vuoti di senso, senza portare l'ombra d'un'idea nuova.

22. — Studiamo infatti un pò da vicino il problema praticamente più interessante e sviscerato sempre colla maggior cura: quello della valutazione della probabilità in base alla frequenza in una serie di eventi (di prove di un fenomeno, se così si vuol dire) «indipendenti e ugualmente probabili».

È facile togliere al problema tutto l'apparato metafisico di «probabilità costanti ma *incognite*», di «prove *indipendenti*», di «valori *ipotetici* delle probabilità» e impostarlo in modo perfettamente sensato. È quel che feci nella mia Memoria *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio* (1), e ne esporrò qui brevemente le idee direttive.

Dall'uso che si fa ordinariamente della nozione, concettualmente priva di senso, di «eventi indipendenti con probabilità costante ma incognita», risulta che da essa si ritiene di poter dedurre che, se sappiamo che sono state fatte  $n$  prove e  $m$  di esse sono risultate favorevoli, tutti i modi possibili in cui le prove favorevoli e sfavorevoli si possono alternare fra di loro ci appaiono ugualmente probabili. Per fare un esempio: abbiamo una moneta, e, per dirla nel vecchio linguaggio, «non sappiamo se sia perfetta o se favorisce *testa* oppure *croce*». Qualunque sia l'«attendibilità» delle diverse «ipotesi», sta il fatto che debbo ritenere ugualmente probabile, ad esempio, che le prossime 6 prove diano una qualunque delle 15 seguenti permutazioni in cui apparre 2 volte il T e 4 volte il C:

TTCCCC	CTTCCC	CCTTCC	CCCTTC	CCCCTT
TCTCCC	CTCTCC	CCTCTC	CCCTCT	
TCCTCC	CTCCTC	CCTCCT		
TCCCTC	CTCCCT			
TCCCCT				

(1) «Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei». S. 6<sup>a</sup>, Vol. IV, Fasc. V, 1930.

E analogamente sono ugualmente probabili tra loro tutte le 6 permutazioni che contengono il T una volta e il C 5 volte, tutte le 20 permutazioni con 3 T e 3 C, tutte le 15 con 4 T e 2 C, tutte le 6 con 5 T e un C. Due successioni diverse di 6 lettere T o C non possono cioè avere probabilità diverse se non quando contengono in diverso numero i T e i C. E, in generale, tutte le permutazioni contenenti  $m$  volte il T ed  $(n-m)$  volte il C hanno la stessa probabilità di verificarsi su  $n$  prove prefissate; soltanto successioni di  $n$  lettere in cui la proporzione dei T e dei C è diversa possono avere una diversa probabilità.

Ora, questa è una condizione perfettamente sensata; può darsi benissimo che la mia opinione consista nel ritenere che queste successioni siano ugualmente probabili. Di più, è anche una condizione abbastanza significativa e praticamente interessante. Lo dimostra il fatto stesso che si considerino spesso classi di eventi «indipendenti e a probabilità costante ma incognita», che, se corrispondono a un'intuizione fondata, seppure oscuramente e malamente espressa, altro non sono che classi d'eventi pei quali il nostro giudizio di probabilità soddisfa tale condizione.

Ed essa basta infatti per dedurre tutta la teoria delle probabilità a posteriori in modo impeccabilmente rigoroso.

Si ritrova anche, attraverso elevati processi d'Analisi (basati sull'inversione dell'integrale di FOURIER), la giustificazione *formale* dell'ordinaria impostazione, che rimane però sempre priva di senso. Si dimostra cioè che, facendo crescere il numero  $n$  delle prove che supponiamo di voler fare, la probabilità che la frequenza sia compresa in un intervallo assegnato  $(\xi_1, \xi_2)$  tende a un limite ben determinato. Questo limite è quello che, secondo l'ordinario modo di vedere, sarebbe la probabilità dell'ipotesi che la probabilità costante ma incognita  $p$  sia compresa nell'assegnato intervallo  $(\xi_1, \xi_2)$ . Abbiamo cioè in tal caso una legge limite che è quella che nel vecchio linguaggio si direbbe la «legge di probabilità della probabilità».

Ma ciò non toglie: primo, che l'ordinaria impostazione sia concettualmente vuota di senso; secondo, che l'esistenza della legge limite su cui si basa è questione delicatissima, e non è consigliabile assumerla come punto di partenza, ammesso pure di poter modificare l'enunciato in modo che venisse a aver senso.

L'ipotesi, o meglio la condizione, che costituisce il punto di partenza per noi, è invece chiarissima e semplicissima. Da essa scendono tutte le conclusioni dell'ordinaria teoria delle probabilità a posteriori, e in particolare quelle che permettono di valutare la

probabilità in base alla frequenza. Il cui ufficio, non sarà inopportuno ripeterlo, è questo: mostrare che la nostra disposizione d'animo di attendere che la frequenza futura non differisca molto da quella del passato — a meno che il fatto verificatosi d'aver ottenuto quella data frequenza non ci fosse apparso a priori come inverosimile ed eccezionale — è *giustificata* per quanto ha senso chiedere di giustificarla, è *spiegata* per quanto ha senso chiedere di spiegarla, se sentiamo di trovarci nello stato d'animo seguente: di giudicare due successioni di prove che non differiscono se non per l'ordinamento come ugualmente probabili.

23. — Un fatto va notato, che è stato messo giustamente in rilievo dal POINCARÈ e da altri molti dopo di lui. Nel caso ora studiato, la conclusione è quasi indipendente dall'opinione iniziale. Qualunque sia — salvo una restrizione generica — l'opinione iniziale (probabilità a priori), dopo un gran numero di prove il nostro stato d'animo è quasi completamente determinato dalla frequenza. Dei due fattori, l'opinione iniziale e l'esperienza, il secondo influisce con peso sempre maggiore, e finisce in generale col diventare del tutto preponderante quando il numero delle prove aumenta.

Come questo, vi sono altri casi, molti e importanti, dove la conclusione, cioè la valutazione d'una probabilità che praticamente c'interessa, e dipende da un'opinione iniziale, ne risulta però, a ragion veduta, pressochè indipendente. Così il POINCARÈ, per concludere che la distribuzione degli asteroidi è presumibilmente press'a poco uniforme, deve fare i calcoli partendo da un'opinione (lui dice: ipotesi) sulla distribuzione iniziale. Ma per giungere a quella conclusione era press'a poco inutile precisarla. «Je ne savais pas trop quelle hypothèse faire au sujet de la probabilité de telle ou telle distribution initiale; mais, quelle que soit l'hypothèse faite, le résultat sera le même et c'est ce qui me tire d'embarras» (1). Più noti e ormai classici sono i problemi della roulette e della mescolanza di un gioco di carte.

In questo fatto si è voluto vedere da taluni, naturalmente, un metodo per dare un valore obbiettivo alla probabilità. Ma si comprenderà subito, dopo quanto ho detto e ripetuto, che anche questo criterio non può avere una funzione diversa da tutti gli altri: dedurre la valutazione di una probabilità in un caso complesso par-

---

(1) POINCARÈ, *La Science et l'Hypothèse*, p. 231.

tendo dalle valutazioni relative a casi più semplici, e arrivare a una conclusione quantitativamente abbastanza precisa partendo da valutazioni solamente qualitative.

Questo è infatti il carattere di tutti i procedimenti utili nelle scienze empiriche: di risparmiare la misurazione diretta di una grandezza che si riesce con maggiore facilità a ricavare indirettamente, e di darla con una precisione possibilmente maggiore, o quanto meno non troppo minore, di quanta ne abbiano i dati di partenza.

Se non che tale discussione ci ha portati al limite di un campo nuovo. Finora non s'era trattato che di analizzare delle opinioni da controbattere, di esaminare delle critiche a cui la nostra concezione negava a priori ogni senso, e bastava mostrare *perchè* erano insostenibili. Le critiche di cui siamo ora condotti ad occuparci hanno invece un valore anche per noi, costituiscono anzi, per noi, l'unico punto di vista secondo cui un esame critico ha senso, è utile, e s'impone.

24. — Quello che ci si può e ci si deve chiedere è se, non essendo la probabilità che una pura nostra sensazione psicologica, sia lecito pensare di misurarla e assoggettarla a una trattazione matematica. Ho già detto, è vero, che, pur restando nel puro ambito della concezione soggettivistica, si possono stabilire dei criteri atti a misurare la probabilità mediante un numero e dimostrare che esso si combina secondo i classici teoremi ben noti, ma è ovvio che, qualunque abbia ad essere la proprietà che a tal uopo si vorrà utilizzare, essa presuppone che il nostro stato d'animo sia determinato con una precisione tale da consentirci di applicarla con profitto. Dimostrato in un modo qualunque il teorema delle probabilità totali, ne risulta immediatamente che, se lo schema dei casi ugualmente probabili si può applicare (intendendo naturalmente l'uguale probabilità in senso soggettivo), la probabilità d'un evento è il rapporto del numero dei casi favorevoli e possibili. È facile pertanto immaginare una scala di raffronto per i diversi gradi di verosimiglianza contenente tutti i valori razionali della probabilità, e, supponendo che le sensazioni di probabilità fossero tanto precise da poter sempre dire, di due probabilità, se la prima è maggiore, uguale o minore dell'altra, non vi sarebbe nessuna difficoltà per valutarla numericamente. Non è dunque il passaggio dalle proprietà qualitative alle proprietà quantitative che giustifica eccessive diffidenze, ma è nel campo stesso delle proprietà qualitative che regna l'incertezza.

È più probabile che domani piova o che la «Roma» vinca, nel prossimo anno, il campionato di calcio? È più probabile che stasera, dovendo partire, io perda il treno, o che la popolazione dell'Italia superi, nel censimento del 1951, i 50 milioni? Ricordiamo — se ancora c'è bisogno di ricordarlo perchè mai lo si dimentichi — che la probabilità non ha che un valore soggettivo, e non facciamo quindi che chiedere quale dei detti eventi ci sembri di poter attendere con maggiore fiducia. Non si tratta affatto d'un problema filosofico, non si tratta affatto di giustificare comunque un'opinione: si tratta di riconoscere se si ha o non si ha un'opinione e quale essa sia. Ma anche sotto questo aspetto, in cui sono automaticamente eliminate tutte le difficoltà pseudo-metafisiche, è bene spesso difficile una risposta: difficile nel senso che la nostra opinione è determinata con un grado d'approssimazione molto grossolano, di modo che poche gradazioni, come *moltissimo*, *molto*, *abbastanza*, *poco*, *pochissimo verosimile*, sembrano sufficienti ad esprimerla in modo non meglio precisabile.

Queste obiezioni sono fondatissime, è indiscutibile, e io non le riporto per controbatterle, ma per mettere nella sua vera luce il loro valore. È necessario conoscerle e tenerne conto per non pretendere con ingenuo ottimismo di valutare uno stato d'animo con esattezza matematica. È altrettanto necessario stabilire i limiti del loro valore teorico e pratico, per non concludere affrettatamente la condanna del calcolo delle probabilità.

Osserviamo in primo luogo che la stessa difficoltà s'incontra in tutti i casi pratici ove s'abbia a misurare una grandezza. L'approssimazione potrà essere più o meno grande, ma un certo limite c'è sempre, esso pure non bene determinato, entro cui la differenza di due grandezze è inapprezzabile. Soppensandoli colla mano, si avverte facilmente la differenza di due pesi di 11 e 13 grammi, mentre un peso di 12 grammi non si distingue nè dall'uno nè dall'altro. Con una bilancia, ciò sarà vero in una scala più ristretta, ad es. per pesi di grammi 10,1, 10,2, 10,3, con una bilancia più esatta potrà avvenire per pesi di grammi 10,01, 10,02, 10,03, ma in fondo non si cambia nulla. La proprietà fondamentale del continuo fisico sarebbe quindi (1)

$$A = B , B = C , A < C ,$$

---

(1) POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Ch. II, «La grandeur mathématique et l'expérience».

ma su di essa è ovvio che non si potrebbe basare un algoritmo utile, e, volendo applicare la matematica, bisogna per forza fingere che le grandezze misurate abbiano un valore preciso. Questa finzione è ben feconda, e tutti lo sanno; il fatto che sia solo una finzione non ne sminuisce il valore se non in quanto è da tener presente che la precisione del risultato sarà quella che potrà essere. Supposto ad esempio che l'errore sulle singole misurazioni non superi certi limiti, possiamo calcolare i limiti entro cui sarà sicuramente compreso l'errore del risultato. Ma anche se ammettiamo che la « misura esatta » non abbia senso, che non si possa non solo praticamente determinare, ma nemmeno concepire come qualcosa che abbia un significato fisico, non potrò mai rinunciare a *inventare*, ossia a definire nominalmente come entità logiche, i numeri reali, e eseguire i calcoli empirici facendone uso. Per risalire, col valido ausilio della matematica, da premesse approssimate a conclusioni pure approssimate, devo passare, sia pure considerandolo come un artificio, attraverso un algoritmo esatto. Siccome esso mi permette di tener conto dell'influenza che l'imprecisione o l'indeterminatezza delle premesse può avere, basta che io ne tenga conto, e non c'è allora motivo di diffidenza.

25. — Da questo punto di vista, il calcolo delle probabilità è effettivamente assimilabile ad una scienza sperimentale. L'analogia non è illusoria come nel caso delle frequenze, ma piena e corretta.

Nelle scienze sperimentali si sostituisce al mondo delle sensazioni un mondo fittizio in cui le grandezze abbiano un valore esattamente determinabile; nel calcolo delle probabilità sostituisco al mio stato d'animo vago e inafferrabile quello d'un individuo fittizio che non conoscesse incertezze nel giudicare le gradazioni della propria fiducia.

Torna qui opportuno riprendere l'interpretazione geometrica già più sopra illustrata. I diversi stati d'animo sarebbero le diverse prospettive secondo cui possiamo vedere l'edificio logico delle possibilità future; la nostra posizione psicologica non sarebbe che la posizione da cui lo guardiamo. Ogni punto rappresenta una diversa posizione psicologica, e dà luogo a una diversa prospettiva, a una diversa opinione. Ma, tanto per il problema geometrico che per il problema psicologico, non ha senso valutare con esattezza la nostra posizione fino a rappresentarla matematicamente con un punto. Dal punto di vista empirico, lo « spazio », il « continuo » entro cui la nostra posizione può variare è costituito, per così dire, di regioni

indiscernibili parzialmente sovrapposte: è soltanto per le necessità di un'impostazione matematica che ricorro al concetto astratto di risolvere idealmente lo spazio in un'infinità di elementi senza estensione detti punti, e interpretare di conseguenza le regioni dello spazio come classi di punti.

La mia posizione, empiricamente parlando, non è mai rappresentata da un punto, ma da una regione dello spazio; volessi anche, per raggiunger l'esattezza, dire «la posizione del centro della mia pupilla», è chiaro che non definirei così tale posizione in modo abbastanza preciso perchè abbia senso pensarla determinata fino al millesimo di millimetro. Non determino mai più che una regione dello spazio, e anzi nemmeno una regione nettamente distinta, ma solo una specie di nebulosa sfumata. Ma finchè rimango in quest'ordine di idee non potrò mai fare della geometria: gli ingegnosi tentativi dell'HJELMSLEV per una geometria intuitiva (un cerchio e una sua tangente hanno un segmento comune, ecc.) non fanno che confermare tale giudizio. Debbo immaginare idealmente risolta la nebulosa in punti, pensare cioè, in luogo della mia posizione soltanto approssimativamente definita, tutte le posizioni matematicamente precisate cui è soddisfacentemente assimilabile. Se io so di trovarmi «vicino al punto A», posso, in altre parole, studiare la prospettiva che mi si presenta come se «fossi nel punto A».

Ciò evidentemente sotto due condizioni. Che la regione su cui si espande il mio dubbio non sia troppo estesa, e che uno spostamento piccolo dalla mia posizione non porti conseguenze gravi o interessanti di prospettiva. Vedremo subito di analizzare queste due condizioni con riferimento al nostro caso.

Notiamo comunque, riassumendo, quale sia il compito del calcolo delle probabilità. È quello di studiare i vincoli, le relazioni, le interdipendenze, che debbono sussistere fra le probabilità attribuite da uno stesso individuo coerente a diversi eventi: tutte queste condizioni determinano la classe delle prospettive possibili, tra cui l'istinto è libero di scegliere. Tale scelta non si spinge all'esattezza matematica. Non scegliamo *un* punto, ma *l'intorno* d'un punto. Non scegliamo *una* prospettiva, ma *una certa idea* di prospettiva. Nel trarre una conclusione dobbiamo quindi vedere se essa non cadrebbe in difetto modificando le premesse entro i limiti in cui ci sembrano accettabili. Come avviene in tutte le scienze sperimentali.

La teoria ci dà un arma infallibile per trattare un caso idealizzato. Per fare un'applicazione qualsiasi dobbiamo idealizzare un caso pratico. Tale idealizzazione si può fare con un certo grado

d'arbitrarietà, e va osservato se la conclusione non dipenda da quello che in tale punto v'è d'arbitrario.

26. — A queste considerazioni generali dobbiamo aggiungerne, come abbiamo detto, qualche altra, che più propriamente si riferisce al calcolo delle probabilità. Non perchè vi sia in questo caso nessuna circostanza sostanzialmente nuova, ma perchè possono variare dall'uno all'altro campo le ragioni che consentono una maggiore precisione o impongono una maggiore diffidenza.

Nel calcolo delle probabilità abbiamo una circostanza nettamente sfavorevole e un'altra circostanza altrettanto nettamente favorevole. Misurare direttamente una sensazione psicologica soggettiva è certo un problema assai vagamente determinato, molto più vagamente certo che quello di misurare una qualunque grandezza fisica. No ho negato che poche e incerte gradazioni potrebbero in molti casi bastare: l'uso che se ne fa nel linguaggio comune lo dimostra anzi in modo lampante.

Ma v'è per fortuna una circostanza favorevole quale in nessun'altra scienza sperimentale si verifica: l'algoritmo del calcolo delle probabilità consente di migliorare in modo sorprendente la precisione di tali misure, deducendo da premesse d'indole qualitativa o grossolanamente approssimata delle conseguenze praticamente precise.

È l'opposto di quello che avviene usualmente: di solito gli errori si sommano, si moltiplicano, s'ingigantiscono, e dobbiamo partire da misure molto esatte per giungere a conclusioni attendibili. Se così avvenisse anche per il calcolo delle probabilità, esso non perderebbe nulla come teoria, ma in nessun caso pratico avrebbe senso una valutazione numerica o un calcolo aritmetico, se non come curiosità o come esempio.

Non più che come curiosità e come esempio può valere, per accennarne una, la seguente applicazione del BERTRAND. « Si, après avoir appelé un médecin, on évalue à  $9/10$  la probabilité pour qu' il vienne et à  $1/3$  la probabilité pour qu' il procure, s'il vient, la guérison du malade; sans discuter ces chiffres, celui qui les admet peut ajouter: La probabilité pour que le malade soit visité et guéri par le médecin est, *pour moi*,  $9/10 \times 1/3 = 3/10$ . » (1) Teoricamente, il calcolo è esattissimo; certo, se valuto le due probabilità  $9/10$  e  $1/3$ , il fatto che la valutazione di una probabilità

---

(1) BERTRAND, *Calcul des probabilités*, p. 27.

abbia sempre un senso approssimativo, non permette di dubitare che la probabilità composta differisca da  $3/10$  fosse pure per un millesimo. Ma la difficoltà è che le stesse valutazioni iniziali pretendono rappresentare uno stato d'animo con precisione maggiore di quella con cui sia determinato: anzichè dire che le due probabilità sono valutate da me uguali a  $9/10$  e a  $1/3$ , dovrò dire che sono di quell'ordine di grandezza, potrò dire ad esempio, e tanto per fissare a un dipresso il grado d'approssimazione che loro attribuisco, che sono comprese fra  $0,80$  e  $0,95$  e rispettivamente fra  $0,25$  e  $0,40$ . Vorrò dire con ciò che il mio stato d'animo è indiscernibile, è praticamente assimilabile, è sensibilmente vicino, a quello che avrei attendendo l'uscita di una palla bianca da un'urna che ne contiene da  $80$  a  $95$  di bianche su  $100$  (o da  $25$  a  $40$  su  $100$ ), quando attendessi col medesimo grado di fiducia l'uscita di una qualunque delle  $100$  palle. Oppure che, se chiamassi molte volte un medico in circostanze che mi mettessero nello stesso stato d'animo che ora sento, mi aspetterei che venisse, presumibilmente, da  $80$  a  $95$  volte su  $100$ , e che, su  $100$  volte che verrebbe, da  $25$  a  $40$  potesse guarire il malato. E allora posso concludere che la probabilità che il malato sia visitato e guarito dal medico è compresa fra

$$0,80 \times 0,25 = 0,20 \quad \text{e} \quad 0,95 \times 0,40 = 0,38,$$

e cioè il mio grado di fiducia dev'essere maggiore di quello che avrei attendendo l'estrazione di una palla bianca da un'urna in cui le palle bianche sono il  $20\%$ , e minore che se fossero il  $38\%$  (e le attendessi tutte con uguale fiducia). Oppure che, su un gran numero di volte che il fatto si ripetesse, in modo da mettermi nelle stesse condizioni soggettive di fiducia in cui ora mi trovo, mi sembrerebbe verosimile di vederlo verificato in circa il  $20-38\%$  delle prove.

Se tutti i problemi fossero come questo, la valutazione numerica di una probabilità e l'applicazione dell'aritmetica sarebbe in pratica ridicola e sterile, perchè non servirebbe che a giustificare il ragionamento intuitivo seguente: se la venuta del medico è pressochè certa, ma è abbastanza dubbio che egli possa guarire il malato, è abbastanza dubbio, c'è anzi da avere un dubbio un po' più forte del precedente, che il malato sia visitato e guarito dal medico. E non varrebbe la pena perciò di scrivere sul calcolo delle probabilità volumi e volumi.

27. — Ma non è così.

Si sa da una parte in quanti problemi una determinazione nu-

merica esatta scenda da semplici opinioni qualitative, e cioè da giudizi sull'*uguaglianza* di due probabilità. Tutte le questioni sulle lotterie, i giochi di carte, i sorteggi, rientrano in questo facilissimo caso.

La relazione fra un giudizio di probabilità e la previsione d'una frequenza facilita molto in gran numero di problemi la precisazione numerica d'un nostro giudizio. E in questo caso rientrano tutte o quasi le applicazioni statistiche.

D'altra parte, gli algoritmi che rispondono alle esigenze più essenziali del calcolo delle probabilità permettono in genere di arrivare a conclusioni notevolmente precise partendo da premesse approssimate, o soddisfacenti soltanto delle restrizioni generiche e facili. È quanto s'è accennato al N. 23, e la discussione precedente mostra nella sua vera luce l'importanza di tale fatto.

Del resto, se è vero che sul calcolo delle probabilità si sono scritti volumi e volumi, e che molti problemi sono stati matematicamente trattati, ciò vuol ben dire che in molti casi la trattazione matematica si è trovata utile. Quelle applicazioni erano ispirate a un punto di vista diverso? Non fa nulla. Chi le ha fatte intendeva che la probabilità potesse avere un valore obbiettivo, e un tale valore obbiettivo noi lo neghiamo. Ma resta il fatto che costui *sentiva* quell'opinione, e dobbiamo anzi presumere che gli fosse molto spontanea e radicata nell'animo se pensava dovesse avere un valore obbiettivo. E ciò basta a provare che si possono sentire delle opinioni — naturalmente, come ogni opinione, soggettive — alle quali ci appaia utile applicare il calcolo delle probabilità in tutto il suo rigore di costruzione matematica impeccabile.

Nulla infatti dobbiamo rigettare di quanto precedentemente è stato fatto. L'adozione del nuovo punto di vista non conduce che a precisare concettualmente il senso dell'impostazione e delle deduzioni successive, riconoscendone il valore essenzialmente e puramente soggettivo. Anche le definizioni usuali conservano il loro valore pratico, quella basata sul computo dei casi e quella ispirata alla determinazione empirica di frequenze, come qualunque altra che sia stata immaginata o che si potesse immaginare. Ma non sono più definizioni: sono soltanto criteri per aiutarci alla valutazione empirica di certe probabilità. Potranno essere utilizzabili oppure no a seconda dei casi, e saranno in certi casi più e in altri meno vantaggiosi e potenti. Non possono essere presi come definizioni perchè non se ne può afferrare il significato *prima* di sapere cos'è la probabilità, perchè non ne chiariscono il valore psicologico, e perchè

infine, indipendentemente da ogni motivo concettuale, hanno sempre un campo d'applicazione molto ristretto.

28. — Avrei finito se, alla discussione generale sul significato e il valore della nozione e del calcolo delle probabilità, non mi sembrasse opportuno aggiungere l'esame di due punti che ancora potrebbero lasciare dei dubbi.

Un'idea che — secondo le concezioni usuali — scaturisce dalle convinzioni sul significato obbiettivo della probabilità, è che una valutazione di probabilità possa avere in certi casi un valore *più grande* che in altri. Ad esempio, l'estrazione d'una palla bianca da un'urna che contiene metà palle bianche e metà palle nere ha (nelle solite ipotesi, che sottintendiamo, di uguale probabilità soggettiva delle diverse palle) probabilità =  $1/2$ ; se l'urna contiene le palle dei due diversi colori nella proporzione di 1 a 2, ma non so se siano le bianche o le nere a essere in numero doppio delle altre, e le due ipotesi sono ugualmente verosimili, la probabilità è ancora  $1/2$ , e lo stesso avviene in generale se è  $1/2$  il valore probabile della percentuale di palle bianche, quali si siano del resto, e cioè salva questa condizione, le composizioni possibili e le rispettive probabilità. In tutti questi casi la probabilità è dunque sempre uguale a  $1/2$ . Eppure sembra che nel primo caso, quando *sappiamo* cioè che le palle bianche *sono* la metà, l'affermazione che la probabilità è  $1/2$  abbia maggior valore. Non potrà naturalmente trattarsi d'un valore *più obbiettivo*, dato che di obbiettivo non può esservi mai nulla; il valore soggettivo, in quanto esprime soltanto che io sono ugualmente incerto fra palle bianche e nere, non esprime nulla di più nell'uno dei due casi piuttosto che nell'altro; d'altronde una differenza tra essi la sentiamo effettivamente, e ne abbiamo una sensazione troppo intuitiva per dubitare che si tratti di un insensato e artificioso pregiudizio metafisico. Come risolvere l'apparente contraddizione?

Il procedimento lo possiamo additare subito con facilità e sicurezza: basta analizzare in che cosa il nostro stato d'animo differisce nei due casi. E in che cosa differisce? Differisce per quella che potremmo chiamare la sua *stabilità*. Lo stato d'animo *attuale*, considerato *in sè stesso*, è effettivamente identico, e, per quanto si volesse analizzarlo, non potremmo rilevare nessuna differenza. Ma il nostro stato d'animo differisce se allarghiamo l'esame a quello che è il nostro stato d'animo in relazione ad altri eventi, dai quali potrà essere *indipendente* oppure no, e dai quali dovrà, di conseguenza,

essere o non essere modificato se avessero ad avverarsi, o se di essi comunque avessimo ad acquisire cognizione.

Così, se d'un'urna non conosco la composizione, la probabilità d'estrarre una palla bianca è il valore probabile  $p$  della percentuale di palle bianche, e tale asserzione ha per sé stessa lo stesso valore e lo stesso significato che se conoscessimo la composizione dell'urna e sapessimo che la percentuale è uguale a  $p$ . Ma vi sono molte circostanze dalle quali il nostro giudizio di probabilità in questo caso è indipendente, mentre ne dipendeva nell'altro. Nel caso che la composizione sia ignota, il mio stato d'animo può essere infatti influenzato dalla conoscenza dell'esito di estrazioni precedenti, da notizie o dicerie più o meno attendibili che potessi raccogliere sul modo con cui l'urna è stata riempita, dall'impressione visiva che avrei riuscendo a lanciare un'occhiata nell'interno dell'urna, e da tante altre circostanze che mi possano dare dei ragguagli o degli indizi, mi possano accrescere o acquetare dei dubbi, a proposito della composizione a me ignota. Mentre, se la composizione è nota, nessuna di tali circostanze me la può far conoscere meglio.

Non dobbiamo dire però che in tal caso il giudizio è *stabile*, e ha perciò un valore obbiettivo. La stabilità è *sempre* relativa, perchè vi sono *sempre* delle circostanze che ignoro la cui conoscenza modificherebbe il mio stato d'animo. La discussione di questo punto è stata già svolta nei NN. 7 ed 8, e sarebbe inutile ripeterla. Ma è ovvio che, per escludere l'esistenza di circostanze incognite, dovrei sapere *tutto*, e allora saprei anche se l'evento in questione si è o non si è verificato, o rispettivamente se avrà o non avrà a verificarsi. E allora non sarei più in condizione tale da poter parlare della probabilità: non potrei infatti misurare le gradazioni di un dubbio che non esiste più.

Per provare una sensazione di incertezza, e poter parlare quindi di una probabilità, bisogna bene che io *ignori* qualche cosa. Vi saranno dunque da distinguere, relativamente al mio attuale stato d'animo, delle circostanze *note* e delle circostanze *incognite*; ciò già si sapeva. Ma fra le circostanze incognite — è questo quel che di nuovo abbiamo ora da concludere — è importante fare una nuova distinzione. Dobbiamo, per analizzare compiutamente il nostro stato d'animo relativo a un dato evento, distinguere fra le circostanze incognite quelle da cui quel mio stato d'animo è o non è *indipendente*. In ciò consiste la *stabilità* di quella mia opinione, di quella mia fiducia: nella maggiore o minore estensione importanza accessibilità

delle circostanze la cui conoscenza la può modificare, la può rafforzare o scuotere.

Non sarà forse del tutto inutile far rilevare il significato puramente soggettivo di tale distinzione. Che due eventi siano da me giudicati *indipendenti*, significa nulla più e nulla meno di questo: che la probabilità attribuita dal mio stato d'animo al loro verificarsi (prodotto logico) è il prodotto delle probabilità che il mio stato d'animo attribuisce ai due eventi.

29. — L'altro punto che mi sembra necessario esaminare è un modo di procedere molto usato, che, a rigore, è incompatibile con quanto s'è detto finora. Tale contraddizione però, pure essendo teoricamente insanabile, non sminuisce il valore pratico di tale metodo come metodo d'approssimazione, purchè di tale carattere approssimativo si tenga il debito conto.

Avviene nella maggior parte delle applicazioni — per dirla nel linguaggio usuale — che si adotti *provvisoriamente* un certo *schema* (ad esempio di estrazioni da urne) che si ha fiducia *rappresenti* bene le *condizioni* in cui si svolge il fenomeno, salvo ad abbandonarlo se l'esperienza lo *smentisce*. Che un ragionamento simile non abbia senso l'abbiamo già dimostrato e più volte ripetuto, ma qui si tratta d'altro. Si tratta di vedere il valore pratico, approssimativo, che può avere un procedimento svolto « come se » si ragionasse così.

Per fissare le idee, ecco un caso semplicissimo, che basta però a schematizzare tutti gli altri. Gioco a testa e croce. Faccio l'*ipotesi* che, in ogni singola prova, e indipendentemente dall'esito delle altre, le due alternative siano sempre ugualmente probabili. Se però la frequenza mostrerà di favorire eccessivamente « testa », finirò presto o tardi per ammettere che la moneta è imperfetta, che la probabilità che mostri « testa » è maggiore, che quindi l'« ipotesi » è « sbagliata ».

Ciò evidentemente non ha significato alcuno, nè può supporre che lo venga ad acquisire precisando l'enunciato in senso soggettivo. Ciò bastò fare altrove; qui no, chè oltre al nonsenso c'è una contraddizione. Che in ogni singola prova, e indipendentemente dall'esito delle altre, le due alternative siano sempre ugualmente probabili è un giudizio che riflette uno stato d'animo che posso sentire o non sentire, non è un fatto che possa essere *vero* o *falso*, e non può dunque considerarsi mai come un'*ipotesi* da sottoporre a verifica sperimentale. Se lo ammetto, ossia se lo *sento*, se lo riconosco conforme al mio stato d'animo, non posso ammettere insieme che lo

modificherò nel caso che « testa » apparisse con frequenza eccessiva: è appunto lo stato d'animo che mi suggerirebbe questa modificazione che io nego ed escludo di avere quando affermo che, per me, per il mio stato d'animo, le diverse prove sono *indipendenti*. Se l'esito delle prove precedenti può modificare la mia opinione, essa ne è *dipendente*, e quindi *non* indipendente. Lapalissiano. Risulta del resto immediatamente (seppure una formula può render chiaro tal fatto più che non lo sia per la sua stessa evidenza) che, nel caso delle prove indipendenti, anche se la frequenza con cui apparirà « testa » sulle prime  $n$  prove sarà eccezionalmente piccola o grande, la probabilità dell' $(n + 1)$ -esima prova sarà ancora  $p = 1/2$ , perchè qualunque sia il numero  $m$  delle ripetizioni di « testa » finora osservate, e l'ordine in cui sono apparse, risulta sempre

$$\frac{p^{m+1} (1 - p)^{n-m}}{p^m (1 - p)^{n-m}} = p .$$

Se ammetto di poter modificare il mio giudizio di probabilità in seguito all'osservazione di frequenze, vuol dire — per definizione — che il mio giudizio sulla probabilità d'una prova non è indipendente dall'esito delle altre, e, se così è, dovrei ricorrere, per rappresentare il mio stato d'animo, per lo meno alla teoria generale dei fenomeni aleatori di cui ho parlato al N. 22. La probabilità di ottenere « testa » all' $(n + 1)$ -esimo colpo dipenderà allora dalla frequenza di « testa » negli  $n$  colpi precedenti, nel modo voluto dal teorema di BAYES.

In pratica non si ricorre a quella teoria, ma si ricorre invece allo schema citato, intrinsecamente contraddittorio: perchè?

Perchè l'impostazione esatta presuppone un'esatta analisi del nostro stato d'animo, e in molti casi non ne vale la pena. In molti casi: ma dobbiamo veder bene *quando, perchè e fino a qual punto* se ne può prescindere. Nel gioco di testa e croce, se all'apparenza la moneta non presenta nulla d'anormale, io sono press'a poco sicuro che, su un gran numero di colpi, le due faccie si presenteranno con frequenze praticamente uguali. Se però ciò non avvenisse, sento che modificherei il mio giudizio, e ciò prova che il mio stato d'animo non è quello di chi giudica tutti i colpi come indipendenti e ugualmente probabili. Vuol dire, come risulterebbe dalla teoria dei fenomeni aleatori, che dell'uguaglianza delle frequenze sono *un pò meno* sicuro.

Supponiamo tuttavia che le frequenze di « testa » e « croce » sulle prime  $n$  prove risultino press'a poco uguali: subordinatamente

a tale ipotesi la probabilità a posteriori, che, in corrispondenza ad ogni singolo valore delle frequenze, ne risulta per la prova  $(n+1)$ -esima è sempre prossima a  $1/2$ , è prossima cioè al valore che si ottiene dallo schema delle prove indipendenti e ugualmente probabili. Vuol dire che i valori forniti da quello schema corrisponderanno con sufficiente approssimazione al mio stato d'animo ogni qualvolta la frequenza rimarrà compresa fra certi limiti, e che d'altronde il fatto che la frequenza esca da quei limiti, oltre i quali l'approssimazione diviene insufficiente, è un fatto che ci sembra ben poco temibile. Nella coesistenza di queste due circostanze è tutto il valore empirico di detti schemi. Trattare la probabilità come indipendente dall'esito delle prove, e supporre quindi che la si giudichi sempre costante, fino al momento in cui, non potendo più « attribuire al caso » uno scarto eccessivo della frequenza, fossimo costretti a bruscamente modificare il nostro giudizio, è matematicamente assurdo. Una tale modificazione non può venire così d'un tratto, ma sarà la somma di molte modificazioni insensibili che avverranno in seguito all'esito d'ogni singola prova. Si tratta dunque di trascurare delle piccole modificazioni finché esse sono trascurabili. E l'importanza pratica del metodo consiste in ciò: che permette con buona approssimazione di valutare i nostri stati d'animo — fatta astrazione da quelli subordinati da qualche eventualità che giudichiamo poco temibile — partendo da valutazioni qualitative semplici e facendo uso d'un algoritmo ancora più semplice. Possiamo trascurare cioè la parte più delicata del giudizio, che è quella da cui dipendono le probabilità negli accennati casi d'eccezione, e che non abbiamo sufficiente interesse di sviscerare finché questi casi d'eccezione non si presentino.

30. — Dare a Cesare ciò che è di Cesare: ecco il concetto che m'ispirava nella discussione che ho terminato ora di svolgere. Dare alla logica ciò che è della logica, e riconoscere il carattere soggettivo di ciò che è soggettivo.

Qual'è in fondo la mia posizione? Io sono — verissimo! — un logico-matematico che si rifiuta di ragionare se non in modo impeccabile, uno scarnificatore spietato che elimina tutto ciò che non resiste al collaudo della critica più raffinata. È assurdo, è pazzesco, occuparsi con simili pretese di questioni pratiche?

Lo sarebbe di certo se volessi spiegare tutto colla logica, se volessi che i concetti pratici avessero un senso preciso come quelli che creo colle definizioni nominali, se volessi respingere come privo di valore logico tutto quello che non è obbiettivo. Se così

facessi non potrei parlare che delle verità matematiche, che sono delle pure tautologie, e tutti i ragionamenti giudizi sensazioni che provo nella vita dovrebbero perdere per me ogni valore. Ma non è così. Non intendo sminuire di nulla l'importanza di ciò che è extra-logico: affermo solo la necessità di riconoscere, in ogni ragionamento, ciò che è logico, ciò che ha un significato empirico, ciò che ha un puro valore soggettivo.

Ciò che è logico è esatto, ma non dice nulla. La logica formale non fa che insegnarci a evitare una contraddizione intrinseca fra le nostre opinioni, in quanto ci permette di riconoscere l'identità di una stessa opinione espressa sotto forme diverse. All'infuori della logica non esistono *verità* ma soltanto *opinioni* il cui valore è puramente quello d'essere effettivamente sentite come opinioni. Per immaginare che corrispondono a una « realtà esterna » dobbiamo prima inventare la « realtà esterna » immaginando un modello fisico-matematico (spazio, tempo, materia, energia) con cui rappresentare e esteriorizzare le nostre impressioni. Ciò può essere utile in molti casi, ed è per ciò che a un tale artificio siamo ricorsi al N. 5 dando un opportuno significato, per libera convenzione, al termine « realtà empirica ». Con quella definizione abbiamo convenuto di sottintendere il valore soggettivo, e quindi prescindere, per tutte quelle nostre impressioni che si interpretano usualmente come « sensazioni di fatti bruti ».

Riteniamo comodo cioè di poter dire ellitticamente: « questo lapis esiste, è rosso, è di legno », sottintendendo il soggetto « IO » che avrebbe la frase completa « io provo quella particolare sensazione di vedere, toccare, . . . che caratterizzo colla parola « lapis », e inoltre quelle che corrispondono alle parole « rosso », « di legno ». Ciò è effettivamente molto comodo, tanto che nessun inconveniente logico-pratico deriva dal fatto che, per la lunga abitudine a queste forme ellittiche, si dimentichi o addirittura si neghi il loro carattere di abbreviazione ellittica, vedendo in esse una specie di « verità », indipendente da noi, dalle nostre sensazioni, dal nostro pensiero (1). Unico inconveniente che impedisce di accettare tali idee è il paradosso logico che ho riportato in maiuscoletto al N. 2 colle parole di ADRIANO TILGHER.

---

(1) Di conseguenza non è affatto necessario condividere le mie idee sul significato soggettivo *anche* della « realtà empirica » per accettare la parte che qui mi interessa, relativa alla probabilità. Sebbene, naturalmente, la concezione integrale consenta una più piena euritmia.

Esteriorizzare una nostra impressione significa però pietrificarla. Sottintendere il soggetto « IO » vuol dire rinunciare all'esame della funzione che ha il mio pensiero. Ciò si può fare benissimo a proposito dei « fatti bruti », perchè in quelle mie impressioni che dico « sensazioni di fatti bruti » la mia coscienza non interviene che passivamente. Se, al contrario, interviene in modo attivo, esteriorizzare un'impressione significa anche mutilarla.

Così l'idea di *causa*. Ne abbiamo già parlato (NN. 1, 9), ne abbiamo approfondito alquanto valore genesi scopo. Essa è un frutto del mio stato d'animo, dal quale non posso sradicarla senza che avvizzisca e perda ogni senso. Posso osservare dei rapporti di successione più o meno costanti, magari sorprendentemente costanti, ma finchè rimango uno spettatore passivo delle mie sensazioni non ho nessun motivo di dar peso a questi rapporti di successione, nè, tanto meno, di pensare che si abbiano a ripetere anche in avvenire. L'idea di causa presuppone l'intervento attivo del mio pensiero, e non debbo pensare di attribuirle a quelle immagini delle mie sensazioni che ho inventate introducendo un modello fisico-matematico e battezzandolo « il mondo esterno ». Sarebbe come se al cinematografo pensassi che, quanto avviene sullo schermo, avvenga per causa di idee sentimenti forze passioni che agitano e trascinano le ombre umane che si muovono appunto sullo schermo.

Se è utile dimenticare in pratica il valore soggettivo delle nostre sensazioni e proiettarle su uno schermo esterno a noi (1), perchè può essere utile sottintendere il soggetto « IO » quando non ha che una parte passiva, sarebbe inopportuno dimenticare il valore soggettivo anche delle nostre opinioni, e proiettarle su uno schermo esterno a noi, lo schermo delle « verità assolute ». Perchè, le nostre opinioni, siamo noi, coscientemente noi, attivamente noi, che diamo loro vita senso esistenza. Se interpreto le mie opinioni come « verità esterne » vengo a rinunciare al loro controllo, vengo a elevare una barriera assurda fra il mio pensiero e i miei pensieri, rendendone incomprendibile il senso a me stesso che lo creo.

C'è, è vero, un secondo gradino. Vi sono delle relazioni di successione tanto costanti, tanto fisse, tanto universalmente considerate degne di nota, e che sono quindi universalmente sentite come relazioni causali, e nel senso più rigido, cioè di relazioni che c'ispi-

---

(1) Nell'unico senso in cui può dirsi « esterno », e cioè: « di cui fingiamo di dimenticare che ci è interno ».

rano una certezza pratica, di « leggi » che ci appaiono pressochè « necessarie » (1). Di tali relazioni causali possiamo bene agli effetti pratici quasi sempre dimenticare il significato soggettivo. In luogo di dire « io son certo » che tale fatto andrà così, posso dire senza inconvenienti che « dovrà » andare così. Ma a patto di non cader vittime dell'illusione di Narciso, prendendo l'immagine artificiosa d'una nostra idea per qualche cosa di preesistente e più importante della nostra stessa idea, a patto di non cadere abbagliati in adorazione davanti agli idoli forgiati dalle nostre stesse mani.

31. — Ma ammettiamo pure che uno volesse in tal caso « credere » all'« esistenza » di queste leggi, rifiutandosi di analizzare il senso, che non esiste, della parola « esistenza » che v'interviene. Ammettiamo che egli voglia mantenersi determinista, e aderire alle idee qui sostenute nel solo campo delle probabilità, dove il loro carattere di necessità è più evidente. Egli « crederebbe » all'« esistenza obbiettiva » del mondo e di leggi che lo governano, e farebbe giudizi soggettivi sulla probabilità di quegli eventi dei quali « ignora » le leggi o i dati di fatto che permetterebbero di predirne l'esito a colpo sicuro.

Che cosa salverebbe ?

Ben poco. Forse nulla.

Nella lotta contro il determinismo ci è alleata, infatti, la fisica moderna.

Dall'istante che la teoria cinetica dei gas ha aperto la breccia, il dilagare delle vedute probabilistiche nel campo della fisica non può essere più arginato e sommerge di giorno in giorno i baluardi più presuntuosi che sembravano sfidare l'eternità. Non che le moderne vedute della fisica confermino comunque le mie che ho esposte, nè che portino alcun elemento essenziale al giudizio che se ne vorrà dare: possono suscitare, però, una predisposizione d'animo favorevole. Soprattutto, rendono più incerta e indefinita la posizione di chi volesse, come ho supposto, rinunciare al valore obbiettivo della probabilità ma non al valore obbiettivo della causalità. Fra necessità e probabilità, fra causalità e casualità, dove segnerà egli il confine ?

Un secolo fa, non si sarebbe esitato ad attribuire totalmente al dominio del determinismo almeno tutto il campo dei fenomeni

---

(1) Cfr. N. 9, nota in calce.

inorganici (1), con tutte le leggi allora note, specie se semplici. Fra esse ad esempio la legge di BOYLE e MARIOTTE: a parità di temperatura, il volume di un gas è inversamente proporzionale alla pressione. Ora la legge non ha più per noi che un valore statistico: è il disordinato rapido fantastico moto delle molecole che incessantemente s'urtano rimbalzano bombardano ogni ostacolo sul loro cammino, che dalla complessità stessa del suo disordine, compensando e uniformizzando nella massa gli opposti squilibri, fa nascere l'apparenza dell'ordine più perfetto.

Ciò non vuol dire che i sostenitori della teoria cinetica siano dei negatori del determinismo. « Loin de là, ce sont les plus intransigeants des mécanistes. Leurs molécules suivent des trajectoires rigides, dont elles ne s'écartent que sous l'influence de forces qui varient avec la distance suivant une loi parfaitement déterminée. Il ne reste pas dans leur système la plus petite place pour la liberté » (2).

Però *la legge*, la *legge vera*, la *legge* nel senso del determinismo, non è più la legge di BOYLE e MARIOTTE, che è soltanto immensamente probabile: esiste ancora, ma è un'altra più nascosta. E così in tutti i punti dove la moderna fisica sostituisce a una legge imprescrittibile una legge statistica, si può sempre immaginare che una legge imprescrittibile esista ancora, ma relativa ai fenomeni elementari dall'immensità del cui numero la legge statistica trae la sua immensa probabilità.

Verissimo. Ma fissiamo tre fatti.

Primo. Che un numero sempre maggiore di leggi naturali passa, allo stato attuale del pensiero scientifico, nel novero delle leggi a carattere statistico.

Secondo. Che non abbiamo nessun criterio per escludere che alla stessa metamorfosi sia destinata una qualunque legge, che oggi ci appare sicura.

Terzo. Che è difficile conciliare la speranza di salvare il valore assoluto a checchessia nel campo delle leggi naturali, e l'applicazione che si fa della meccanica statistica ai fenomeni dell'atomo e dell'elettrone, che dovrebbero costituire l'essenza e dare la spiegazione degli altri tutti. Nè si può dire che anche in tali questioni le applicazioni probabilistiche si fanno soltanto su una grande massa

---

(1) Possiamo aggiungere incidentalmente che anche questa distinzione fra mondo organico e inorganico ha perduto ben presto il suo valore assoluto.

(2) POINCARÉ', *La Valeur de la Science*, p. 253.

di fatti elementari, nel qual caso l'obbiezione non avrebbe nessun valore. La funzione che vi hanno i concetti probabilistici è ben più profonda, tanto da far parlare dell'« animalità » dell'atomo, come ho sentito dire in un'interessante conferenza al Prof. VOGHERA (1).

Altra corrente d'idee della fisica moderna: la Relatività.

Alla lettera, non hanno torto quanti, in ALBERTO EINSTEIN, vedono un rinnovatore e un vivificatore del determinismo. Per il loro carattere perentorio di leggi inviolabili, le nuove equazioni gravitazionali equivalgono perfettamente le equazioni classiche di cui prendono il posto. Ma anche COPERNICO, ai suoi tempi, non intendeva che trasferire dalla terra al sole il privilegio della *quiete assoluta*, e la sua rivoluzione è celebre, e ha l'importanza che ha; perchè distrusse il concetto della *quiete assoluta*. Benchè la Relatività possa del tutto legittimamente apparire un'innovazione che non esorbita dal campo del determinismo, non so vedere ad essa altro sbocco che la concezione relativistica, negatrice del determinismo. Relativistico è lo spirito informatore (2), anche se inconscio, anche se nascosto, anche se rinnegato. E anche questa corrente confluisce dunque alla travolgente marea del pensiero relativista.

32. — Nè solo la fisica ha assunto quest'orientamento.

L'assalto è sferrato su tutta la fronte. La concomitanza ideale

(1) Un esempio semplice che può chiarire tale punto è il seguente.

« Gli atomi del radio esplodono in tempi successivi, cosicchè in duemila anni circa metà si sono trasformati. Così in un pezzo di radio ci sono atomi che esploderanno entro un minuto da adesso, atomi che esploderanno solo fra migliaia di secoli. I nuovi teorici affermano che non si può trovare, e anzi che non esiste, una differenza tra questi tipi di atomi che hanno una vita così diversa, e nemmeno una differenza tra le condizioni ambientali al momento della rispettiva esplosione. L'esplosione dell'uno o dell'altro è puramente casuale ».

Tale esempio è stato citato, insieme ad altri, dal CORBINO, durante la discussione sul principio di causalità che ebbe luogo a Firenze nel Congresso della « Mathesis » del 1929 in seguito a delle conferenze di FERMI e PERSICO, e che si trova riassunta nel « Periodico di Matematiche » 1930 N. 2; nello stesso fascicolo e nel precedente sono pubblicate le citate conferenze di FERMI e PERSICO.

Un'esposizione più dettagliata e approfondita delle mie idee sull'argomento si ha nella conferenza su « Le leggi differenziali e la rinuncia al determinismo » tenuta al Seminario Matematico di Roma il 5 aprile 1930-VIII.

(2) V. ad es. A. ALIOTTA, *La teoria di Einstein e le mutevoli prospettive del mondo*, il saggio su A. EINSTEIN in TILGHER *op. cit.*, e quelli, degli stessi AA., inseriti nella traduzione italiana del trattato del KOPFF.

di fenomeni all'apparenza forse disparati non può sfuggire a nessun osservatore acuto, che sotto le parole e i simboli e i fatti voglia penetrare e mettere a nudo gli spiriti. Attivismo, relativismo, fascismo, futurismo, bolscevismo: diversi aspetti d'una realtà sola, di cui tutti siamo figli: il secolo ventesimo (1). « Nell'immensa varietà delle loro manifestazioni, tutti questi fenomeni spirituali germinano da una medesima radice, traducono in domini vari una medesima intuizione del mondo e della vita, per la quale lo spirito si ribella di ammettere una verità, una giustizia, una bontà, in una parola un ordine teorico o pratico di valori che abbia esistenza in sé, indipendentemente dalla sua attività, e dinanzi al quale non gli rimanga che di inchinarsi e prenderne atto ». Così il TILGHER (2), colla solita acuta chiarezza, insistendo a ragione sulla necessità di liberarsi dalle troppo ristrette visuali, e abbracciare d'un colpo d'occhio il « movimento unico e indiviso » che caratterizza una civiltà.

« Il poeta, il filosofo, lo scienziato possono, sì, giustificare dinanzi a sé stessi ed al pubblico le loro scoperte facendo la critica dei loro predecessori, ma questa critica è posteriore alle loro intuizioni originali, le suppone e ne è condizionata. Le loro voci e visioni interiori, le loro intuizioni veramente originali essi le attingono dall'ambiente spirituale in cui sono tuffati, considerato come totalità unica e vivente, che tutto ha contribuito a trasformare ».

E' per tale fatto, di cui sono pienamente convinto, che la discussione, svolta nell'ambito più stretto dell'argomento, non m'avrebbe saputo compiutamente appagare. E ciò, non ostante che, per il loro scopo immediato, le critiche e le argomentazioni che vi si riferiscono mi sembrino impeccabili, complete, vorrei dire definitive.

Ho cominciato fin da ragazzo a comprendere che il concetto di « verità » è incomprendibile. Il fatto essenziale è questo.

E ho cercato allora di analizzare — caso per caso, più o meno inconsciamente — cos'è che in sostanza intendiamo dire quando diciamo, secondo la locuzione comune, che qualchecosa « è vero ».

Ora soltanto la mia sete di sviscerare questo problema si sente, nel fondo, appagata. Alla logica matematica (3) (in particolare: la

---

(1) Per quanto riguarda il lato più propriamente filosofico, in cui non intendo, nè potrei, addentrarmi, si vedano le opere di A. ALIOTTA, e in particolare *La reazione idealistica contro la scienza*, oppure *Le origini dell'irrazionalismo contemporaneo*, che ne è un parziale rifacimento aggiornato.

(2) *Op. cit.*, p. 49, e, per la citazione successiva, pp. 54 e 53.

(3) BURALI FORTI, *Logica Matematica*, Hoepli ed.

teoria della definizione nominale) e alla critica positivista del mondo empirico(1) — in cui trovai molte cose conformi alle mie idee, e che perciò contribuirono fortemente a svilupparle — si aggiunse recentemente, terzo e definitivo caposaldo del mio punto di vista, il probabilismo. Che corregge e integra gli altri due nei punti che non potevo accettare: quelli in cui una cosa qualunque sembrava doversi considerare dotata d'un valore assoluto, trascendente il valore psicologico che ha per me, e indipendentemente da esso. E' in questi punti che mi ravvicino alquanto al POINCARÈ, che, pur avendo tutt'altra mentalità, ha il merito di ravvivare coll'analisi psicologica delle questioni formalmente aride, e che non basta considerare dal punto di vista formale.

Ma dove con maggior furore il mio spirito si ribellava e si scagliava contro il concetto di « verità assoluta » era nel campo della politica, e non saprei dire qual parte, di certo assai grande, nello sviluppo delle mie idee, dovette avere questo senso d'insofferente rivolta. Vedersi davanti degli idoli di cartapesta, e una classe politica miserabile che avrebbe preferito in rovina l'Italia piuttosto che mancare ad essi (sacrilegio!) del dovuto ossequio! Quelle deliziose verità assolute che imbottivano i cervelli demo-liberali! Quell'impeccabile meccanica razionale del perfetto reggimento civile dei popoli, conforme ai diritti dell'uomo e altri vari nonchè immortali principî!

Ottobre del ventidue! Mi sembrava di vederli, questi Immortali Principî, cadaveri immondi nella polvere. E con quale voluttà consapevole e feroce sentivo di calpestarli, marciando ai canti del trionfo, oscura ma fedele camicia nera! (2).

Roma, 24 novembre 1929 - A. VIII.

BRUNO DE FINETTI.

---

(1) MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*.

(2) Che il fascismo rappresenti in politica l'atteggiamento relativista in contrapposto alla staticità di vuote ideologie dottrinarie è stato confermato nel modo più esplicito dallo stesso MUSSOLINI in un articolo (*Relativismo e Fascismo*, « Popolo d'Italia », 22 novembre 1921) occasionato dalla pubblicazione della più volte citata opera del TILGHER, e riportato nella IV ed. della medesima, pp. 77-78.