SUL SIGNIFICATO SOGGETTIVO DELLA PROBABILITÀ

In: «*Fundamenta Mathematicae*», Warszawa, 1931, T. XVII, pp. 298-329

Sul significato soggettivo della probabilità.

Memoria di

Bruno de Finetti (Roma).

Sunto.

Si spiega come si possa con tutto rigore introdurre il concetto di probabilità e dimostrarne le proprietà fondamentali ben note attenendosi esclusivamente al punto di vista soggettivo. Dopo aver indicato un modo di procedere di natura quantitativa, che particolarmente si presta alla trattazione analitica, se ne analizzano criticamente i principi dimostrando che sono di natura puramente qualitativa e elementare.

---

1. Scopo del presente lavoro è di chiarire e approfondire il significato e il valore psicologico che hanno — prescindendo da ogni loro eventuale possibile interpretazione oggettiva — il concetto di probabilità e i fondamenti della teoria delle probabilità, e di provare come questa si possa dedurre e ricostruire con tutto rigore basandosi esclusivamente su tale interpretazione e impostazione psicologica. Cercheremo di vedere in quale senso delle valutazioni di probabilità possano essere incoerenti, ossia intrinsecamente contraddittorie, e della nozione di coerenza analizzeremo il significato, il valore, la portata. Ne dedurremo le regole della logica probabilistica, che — come quelle della logica formale nel campo delle proposizioni — ci insegnano a ragionare nel campo delle valutazioni di probabilità mantenendo intatta la coerenza del pensiero con se stesso.

Tale ricerca assume un'importanza indubbiamente e incomparabilmente più grande per chi condivida la concezione soggettiva della probabilità: la concezione per cui ogni valutazione di probabilità non ha nè può avere che un valore essenzialmente e esclusivamente psicologico. Dimostrare, come faremo, che la teoria delle probabilità si può con tutto rigore costruire rimanendo nel più puro ambito di tale punto di vista, significa allora infatti provare la validità di tutta una teoria basata fino ad oggi su presupposti inaccettabili e privi di senso.

Ma anche per chi volesse attribuire alla probabilità, in un qualche problema e in un qualche senso, un valore oggettivo, la questione di cui intendo occuparmi ha un significato preciso e un'importanza innegabile: il nostro modo di prospettare e impostare i fondamenti del calcolo delle probabilità consente infatti di separare ciò che in ogni problema vi è di logico e quanto ha natura e valore puramente empirici. E'appunto tale distinzione che occorre stabilire in una qualunque teoria matematica per poterne approfondire utilmente la critica dei principi, ed è questa distinzione che mancava finora nel calcolo delle probabilità, ancora perciò tanto lontano dal rigore formale ormai forse raggiunto in tutti gli altri campi delle matematiche. Chiarito questo punto, di ogni problema si potrà dire se è logicamente determinato o è indeterminato, togliendo così di mezzo tanti dubbi e incertezze che tuttora sussistono [1]). Il nostro proposito è, in sostanza, quello di caratterizzare l'insieme delle opinioni formalmente ammissibili, senza curarci se esistano ragioni d'un qualche altro ordine che possano far ritenere più o meno giusta una qualunque di esse. Tali ragioni esulano infatti dall'aspetto puramente logico del problema, di cui solo la matematica può e deve interessarsi, e sembra quindi opportuna e necessaria una netta divisione delle due fasi: caratterizzazione delle opinioni non incoerenti, fase formale, da trattare matematicamente; scelta di una fra tali opinioni possibili, da lasciare alla pratica, al buon senso, al criterio d'ogni singolo individuo. Unica differenza fra chi segue il punto di vista soggettivo e quello oggettivo è che, mentre tale scelta è per il primo libera e arbitraria, per il secondo può in sol modo essere giusta. Per questo, la nostra impostazione consisterebbe nell'artificio di considerare, insieme all'unica valutazione di probabilità obbiettivamente giusta, anche quelle che, pur essendo errate, non sono per se stesse contraddittorie. Per le ragioni sopra brevemente accennate, appare chiaramente come la distinzione introdotta, anche a non volerne considerare che l'aspetto formale di utile accorgimento d'impostazione, giustifichi pienamente l'interesse della presente ricerca.

[1]). Cf. la mia nota *Problemi determinati e indeterminati nel calcolo delle probabilità*, „Rend. R. Acc. Naz. Lincei", 1930, 2° sem.

2. Ma anche il suo interesse concettuale dev'essere, almeno in parte, riconosciuto ed ammesso pur da chi non condivida il punto di vista soggettivo. La sua fiducia nell'esistenza di un valore obbiettivo della probabilità non potrà infatti sussistere che in un certo campo più o meno ristretto; saranno soltanto gli eventi di un certo tipo più o meno schematico e artificioso cui egli attribuirà una probabilità oggettiva, mentre che nella vita pratica sarà egli stesso continuamente condotto o pensare e dire che un certo evento è facile, è probabile, è verosimile, e su tali giudizi baserà dei ragionamenti e delle decisioni, anche in campi che secondo la sua concezione andrebbero fatalmente preclusi alla teoria delle probabilità. Per giustificare tali giudizi e ragionamenti è allora necessaria una trattazione conforme al punto di vista soggettivo, il cui campo di validità non è soggetto a limitazione alcuna.

Le previsioni e supposizioni che andiamo continuamente facendo costituiscono, ben più dei rarissimi giudizi logicamente certi, l'oggetto abituale del nostro pensiero in tutte le circostanze pratiche della nostra vita. Sull'attendibilità di tali previsioni e supposizioni ci sentiamo di fare, a seconda dei casi, un certo grado maggiore o minore di affidamento. E nel combinare questi giudizi sul grado di attendibilità delle diverse nostre previsioni e supposizioni sta di fatto che ragioniamo, sia pure inconsciamente e grossolanamente, secondo il calcolo delle probabilità.

Uno degli esempi più suggestivi è quello delle indagini poliziesche o giudiziarie, dove si procede sempre per indizi e induzioni, dove non si lavora mai sul certo, ma sempre e soltanto sul probabile. Supponiamo ad esempio: uno sconosciuto ha commesso un delitto; alcune traccie fanno ritenere tre individui come fortemente indiziati. Il Commissario che attribuisce un certo grado d'attendibilità a ciascuna di queste tre ipotesi, quale fiducia può avere che le indagini siano bene avviate, e cioè che una delle tre ipotesi sia la vera? Sostanzialmente, se non numericamente, egli applica senza dubbio il teorema delle probabilità totali. E allo stesso modo applicherà il teorema delle probabilità composte se vorrà valutare con quale probabilità, ossia se penserà con quale fiducia, egli possa attendere di identificare in uno dei tre indiziati il colpevole e trarlo in arresto. E sempre applicando inconsciamente questi teoremi ragioniamo in tutte le circostanze della vita in cui ci regoliamo su delle probabilità: se giudichiamo della probabilità che piova per deciderci a prendere o lasciare a casa l'ombrello o della probabilità di arrivare a tempo in ufficio a piedi per decidere se prendere o non prendere il tram o il taxi, o della probabilità che i vari spettacoli annunciati per questa sera siano più o meno interessanti, per decidere se e dove andare.

E'giustificato questo modo di pensare? e, se si, è imposto da esigenze logiche, o soltanto suggerito da motivi psicologici?

Negli esempi considerati nessuno certo penserà che si tratti di una probabilità oggettiva, o che il caso rientri comunque nell'ordinario calcolo delle probabilità. Che non potrà, quindi, rispondere alle nostre domande.

Invece nel modo che seguiremo il problema avrà uno svolgimento perfettamente intonato, una risposta precisa e esauriente, perchè vi si opera direttamente sul grado psicologico di affidamento di un certo individuo rispetto a una certa supposizione. E'appunto quel grado affatto soggettivo di affidamento che nel linguaggio corrente si designa col nome di probabilità, e la mia opinione è proprio questa: che il concetto espresso dal linguaggio ordinario abbia una volta tanto, un valore assolutamente superiore a quello dei matematici, che da secoli si affaticano inutilmente per vedervi un significato che non esiste.

Il lettore non è d'accordo? Fa niente. Ritiene che in un certo tipo di problemi questo significato esista? Gli concedo che esista in tutti i casi che vuole (e saranno, a seconda dei suoi gusti, quello dei giochi d'azzardo, o della statistica, o della fisica molecolare, o non importa quali ancora). In altri casi, come negli esempi riportati, si tratta evidentemente di una pura sensazione psicologica. Ebbene: nel seguito dimostreremo come e perchè anche in questi casi valgano i teoremi del calcolo delle probabilità, giustificando così uno dei più importanti nostri modi empirici di raziocinio.

E'a questo punto di vista provvisorio e spassionato, direi quasi agnostico, che mi atterrò, e su questo terreno chiunque potrà seguirmi, purchè ne abbia la pazienza, senza nulla sacrificare delle sue convinzioni.

Non mi si potrà obbiettare che costruisco la teoria delle probabilità su presupposti falsi; tutt'al più, chi volesse credere alla probabilità oggettiva, può dire che trascuro dei presupposti veri. E questa non è un'accusa. Forse che chi fosse convinto della natura euclidea dello spazio fisico dovrebbe diffidare di una dimostrazione solo perchè indipendente dal postulato delle parallele, e cioè perchè risulta vera anche in una geometria non euclidea?

Forse che chi credesse all'esistenza di un sistema in „quiete assoluta" dovrebbe ripudiare un teorema di cinematica valido *anche* per i moti relativi?

La probabilità, in quanto sensazione psicologica di un individuo, è soggetta a certe leggi. Se un evento ha una probabilità oggettiva, di tutti gli individui che vi uniformeranno la loro posizione psicologica si potrà dire che giudicano correttamente, e degli altri che sono in errore; a parte ciò, le leggi sono le stesse per tutti, e valgono quindi in particolare per le probabilità oggettive.

Sull'esistenza delle quali lascio ogni facoltà di pensare, caso per caso, ciascuno a suo modo; quanto a me, ci tengo a ripeterlo un'ultima volta, ho in proposito un'opinione molto semplice e radicale: la probabilità oggettiva non esiste mai.

Le ragioni con cui sostengo e provo tale mia convinzione sono esaurientemente esposte nel mio saggio sul „*Probabilismo*" [1]), le obbiezioni e le difficoltà che si possono sollevare sono ivi ribattute. Tutte, tranne una, e una delle maggiori, che sarà smontata dal presente lavoro. Una delle maggiori difficoltà per accettare una concezione estremamente soggettivistica come questa, sta certo infatti nell' impressione che se tutto è soggettivo tutto debba essere arbitrario e nessuna legge possa valere. Non v'è, a tale obbiezione, risposta più convincente che quella dei fatti, che presto raggiungeremo: quella cioè consistente nel provare che tutto il calcolo delle probabilità si può costruire, seguendo tale punto di vista, con tutto rigore.

3. Si tratta ora di *misurare* la probabilità soggettiva, ossia di tradurre nella determinazione di un numero il nostro grado di incertezza relativamente ad un dato giudizio; è questo il primo problema che ci si presenta volendo fondare il calcolo delle probabilità secondo la concezione soggettivistica.

Fra i diversi metodi che si potrebbero seguire mi sembra meriti indubbia preferenza quello che difatti ho adottato, e che si basa essenzialmente su un'osservazione che risale al Bertrand [2]). Se un individuo giudica ugualmente probabili due eventi, cioè se si sente

[1]) In „Logos", 1931.

[2]) Bertrand, *Calcul des Probabilités*, p. 27.

di fronte ad essi nell'identico stato d'animo, nell'identico grado di dubbio, d'incertezza, di convincimento, potrebbe scambiare indifferentemente i timori o le speranze, i vantaggi o gli incovenienti derivanti dall'effettuazione dell'uno, con le conseguenze, supposte identiche, dell'altro. Ora, questi effetti, o piuttosto forse questi aspetti, di un giudizio di probabilità sono evidentemente assai meglio accessibili a un procedimento di misura, e rispondono quindi perfettamente al nostro scopo.

Anche nel linguaggio ordinario, con modo di dire abbastanza usuale, si esprime il grado di fiducia che abbiamo nel verificarsi di un dato evento mediante le condizioni a cui ci si potrebbe scommettere: tanto è intuitivo che per uno stesso guadagno si possono accettare condizioni più o meno gravose a seconda che più o meno se ne speri probabile la vincita. Lo stesso criterio, debitamente precisato e approfondito, ci condurrà alla definizione su cui fonderemo la teoria delle probabilità.

Seguiremo in un primo momento un metodo diretto che conduce per la via più immediata allo scopo, ma che può lasciare qualche impressione di dubbio, potendo la sua semplicità apparire artificiosa. E vedremo in un secondo tempo che nel meccanismo essenziale del ragionamento non intervengono, sostanzialmente, se non delle considerazioni qualitative molto semplici e spontanee; precisare l'impostazione nel modo che dapprima facciamo non costituisce un'effettiva restrizione: non serve che a condurre rapidamente ed evitando questioni d'indole critica ai risultati praticamente interessanti. In sostanza: si usa un'impostazione quantitativa per giungere immediatamente a risultati quantitativi; è possibile invece partire da un'impostazione qualitativa, che conduce a risultati qualitativi, e mostrare poi che questi sono suscettibili d'esprimersi in forma quantitativa.

La prima impostazione cui alludevo è basata in sostanza sulla nozione di speranza matematica. E'noto che su questo concetto molto si è discusso, e molte obiezioni e diffidenze si sono levate; sembra ormai acquisito però che — come in tutti i casi del genere — si trattava di una questione senza senso, chè altro è giudicare se una scommessa sia *equa*, altro giudicare della convenienza che può avere un dato individuo, in un dato momento, in date circostanze, ad accettarla. Convenienza che, per di più, sarà valutata in modo diversissimo a seconda del carattere di ciascuno e del suo amore pel rischio. C'è una differenza essenziale fra il caso di una scommessa sporadica e ben delimitata, e la situazione di un soggetto che fosse disposto sistematicamente e illimitatamente a scommettere.

4. Il senso preciso di questa distinzione apparirà chiaramente dal seguito.

Per misurare numericamente il grado di fiducia che un dato soggetto 0 sente di avere nell'avverarsi di un evanto E dobbiamo supporre, per metterci dal punto di vista più semplice in cui si utilizza la speranza matematica, che egli potesse esser obbligato a *tenere un banco* di scommesse pro o contro un certo numero di eventi, fra cui *l'* evento E. Pensiamo, per dare un esempio, che si tratti di una gara cui partecipano n concorrenti, e gli eventi $E_1, E_2 \ldots, E_n$ su cui 0 è impegnato ad accettare le scommesse siano la vittoria del concorrente numero $1, 2, \ldots, n$. Le regole della scommessa siano fissate nel modo seguente: è in facoltà del soggetto 0 che tiene il banco di stabilire il prezzo p di un buono, o obbligazione, che dà diritto a riscuotere una lira nel caso che un dato evento E si verifichi; ciò fatto, egli si impegna a vendere o comprare a tale prezzo quanti di tali buoni il pubblico vorrà. Qualunque competitore si presenti al banco di 0 e voglia scommettere per l'evento E, è cioè in facoltà di comprare al prezzo pS un'obbligazione che gli dà diritto, se vince la scommessa (e cioè se E si verifica), a esigere una somma generica S. (O inversamente, se vuole scommettere contro l'evento E, può impegnarsi a pagare la somma generica S, se perde la scommessa, e cioè se E si verifica, esigendo la riscossione della somma pS. Caso questo che rientra nel precedente se si considerano valori di S negativi).

Il numero p è evidentemente tanto più grande quanto maggiore è la fiducia di 0 nell'avverarsi di E: per lo stesso guadagno di una lira si potrà accettare una condizione tanto più gravosa, e cioè un prezzo p tanto più elevato, quanto più se ne speri probabile la vincita, e cioè quanto più sembri probabile l'evento E. E diremo allora *per definizione* il numero p: „*probabilità dell'evento E secondo il soggetto* 0". Quando ci s'intenda riferire sempre a uno stesso determinato soggetto, o quando tutti gli individui che si vogliono considerare avessero la medesima opinione, l'indicazione del soggetto potrà essere sottintesa, e si potrà parlare semplicemente della „probabilità dell'evento E".

Secondo un modo più comune di scommettere si dice che un dato evento *si dà a h contro k* (ad es. a 3 contro 2, a 1 contro 4, ecc.). La scommessa è regolata allora in modo che se E si verifica uno dei due competitori vince k lire, mentre se non si verifica l'altro ne vince h. La differenza è soltanto nella forma: tanto fa dire che il primo paga h lire, e ne vince $(h+k)$ se E si verifica; risulta che dev'essere $h = p(h+k)$, ossia $p = h:(h+k)$. Chi dà un evento a 3 contro 2, a 1 contro 4,..., gli attribuisce ad es. la probabilità $p = 3/5 = 0{,}60$, $p = 1/5 = 0{,}20$, ecc.

5. A tal punto è ancora giustificata un'impressione di diffidenza che le considerazioni che seguiranno, mettendo nella loro vera luce il valore e il senso di quella definizione, varranno a dissipare. Può sembrare infatti che nell'atto di stabilire le condizioni di una scommessa influiscano su di noi piuttosto l'amore e il timore del rischio o simili circostanze del tutto estranee che non quel grado di fiducia che corrisponde alla nozione più o meno intuitiva di probabilità, e che noi ci proponiamo di misurare.

Ciò sarebbe evidentemente vero se si trattasse di fare una scommessa singola e ben determinata; non lo è più invece se ci mettiamo nelle condizioni supposte: di un individuo che debba tenere un banco di scommesse su dati eventi, accettando alle stesse condizioni qualunque scommessa nell'uno o nell'altro senso. Vedremo che egli è costretto allora a rispettare certe restrizioni, che sono i teoremi del calcolo delle probabilità. Altrimenti egli pecca di *coerenza*, e perde *sicuramente*, purchè l'avversario sappia sfruttare il suo errore.

Un individuo che non commette un tale errore, che valuta cioè delle probabilità in modo da non mettere in grado i competitori di vincere *a colpo sicuro*, lo diremo *coerente*. E il calcolo delle probabilità non è allora se non *la teoria matematica che insegna ad essere coerenti*.

6. Precisiamo questi concetti matematicamente.

Riferiamoci da prima, per fissare le idee, ad un esempio, e cioè all'esempio già sopra accennato di una gara. Fra i concorrenti ve ne siano due di italiani, e precisamente i concorrenti A e B. Quale è la probabilità di una vittoria italiana?

Si tratta di dimostrare il teorema delle probabilità totali. L'evento „vittoria italiana" è la somma logica dei due eventi incompatibili „vittoria del concorrente A" e „vittoria dei concorrente B"; si verifica, in altre parole, quando e sol quando si verifica l'una o l'altra di queste due ipotesi, che si escludono a vicenda. Il teorema delle probabilità totali dice allora che la probabilità p di una vittoria italiana è la somma delle probabilità p_A e p_B della vittoria di A e rispettivamente di B, ossia $p = p_A + p_B$

Si vede facilmente come tale conclusione scenda immediatamente dal concetto ora spiegato della *coerenza*. Supponiamo che l'individuo 0 che tiene il banco valuti uguale a 0,60 la probabilità di vittoria del concorrente A e a 0,20 la probabilità del concorrente B, e cioè, secondo l'altra terminologia richiamata, che dia A vincente a 3 contro 2, e B vincente a 1 contro 4. Allora è necessario che valuti la probabilità di vittoria italiana uguale a 0,80, ossia che dia l'Italia vincente a 4 contro 1. Infatti, un competitore che compri a 60 lire un buono che vince 100 lire se vince A, e un buono a 20 lire che vince 100 lire se vince B, spende 80 lire, e ha un insieme di due buoni che vince 100 lire nel caso di vittoria italiana. L'individuo che tiene il banco, e ha valutato uguale a 0,60 e 0,20 le probabilità di vittoria di A e di B, e si è cioè impegnato ad accettare scommosse col pubblico su queste basi, si è con ciò implicitamente impegnato ad accettare scommesse sulla vittoria italiana sulla base di una probabilità uguale a $0,20 + 0,60 = 0,80$, ha cioè implicitamente valutato uguale a 0,80 la probabilità di vittoria italiana. Cosa succederebbe se egli non lo comprendesse, e, senza rispettare il teorema delle probabilità totali, valutasse poi la probabilità di vittoria italiana uguale a 0,75 (desse cioè la vittoria italiana a 3 contro 1)? Accadrebbe questo: che se un competitore scommettesse 100 lire per la vittoria italiana, 100 lire contro la vittoria di A, 100 lire contro la vittoria di B, e cioè pagasse 75 lire per un buono che vince 100 lire nel caso di vittoria italiana, e riscuotesse 60 lire e 20 lire impegnandosi a versare 100 lire rispettivamente se vincono A e B, in definitiva avrebbe intascato 5 lire, e sarebbe libero da ogni altro impegno, perchè le eventuali vincite e perdite si compensano in ogni caso.

E'tale circonstanza che intendevo assumere nel numero precedente a caretterizzare la coerenza, quando dicevo che chi non la rispetta mette i suoi competitori in grado di vincere a colpo sicuro.

E'poi ovvio che la probabilità di un evento certo o impossibile è uguale a 1 e rispettivamente a 0, mentre per un evento possibile ma non certo è compresa nell'intervallo (0, 1) (estremi inclusi). Infatti, per una vincita impossibile non si dà nulla, per vincere di certo 100 lire, ossia per ricevere 100 lire, non si può che dare 100 lire, mentre che per vincere 100 lire in un caso dubbio non si potrà che pagare una somma non superiore a 100 lire.

Inversamente, ogni valutazione di probabilità soddisfacente queste condizioni è coerente, come tosto dimostreremo. Nel caso precedente, ogni individuo che attribuisca alle probabilità p_A, p_B, p dei valori non negativi e non superiori ad 1 e tali che $p_A + p_B = p$ è coerente; tutte le ∞^2 opinioni diverse soddisfacenti queste restrizioni sono per se stesse ugualmente legittime. Di modo che il valore della probabilità è soggettivo (tranne ove si ammettesse che una certa opinione abbia una ragione speciale di essere sostenuta, e la si voglia di conseguenza dire „obbiettivamente vera"), e tuttavia le leggi di calcolo sono pienamente determinate (qui: il teorema delle probabilità totali). Avremo altri rilievi interessanti da fare, che chiariranno ancor meglio il valore della definizione della probabilità e della coerenza che qui abbiamo date; conviene però dapprima riprendere e completare le dimostrazioni precedenti traducendole in simboli precisi. Avverto comunque che tale parte (numeri dal 7 al 9 inclusi) potrà essere saltata senza danno per chi non ama le formule matematiche e il simbolismo logico.

7. Un evento E è una proposizione, un'affermazione, che non sappiamo ancora se sia vera o falsa; come casi limite si possono considerare l'evento certo e l'evento impossibile. Ad esempio, quando si scommetteva sulla vittoria dell'uno o l'altro fra i concorrenti a una gara, gli eventi considerati erano le proposizioni; $E_A =$ „La gara sarà vinta da A", $E_B =$ „La gara sarà vinta da B", $E =$ „La gara sarà vinta da un italiano". L'evento E è, nell'esempio, la *somma logica* di E_A e E_B (e scriveremo $E = E_A + E_B$) [1]. In generale

[1] La notazione di **Peano**, **Russell**, ecc. è $E_A \cup E_B$ per la somma logica e $E_A \cap E_B$ per il prodotto logico. Nel nostro caso non c'è il pericolo d'ambiguità che in altri campi rende necessario l'uso di simboli diversi, e potremo quindi, per comodità tipografica, indicare la somma logica col $+$ e il prodotto logico col punto

diremo *somma logica* degli eventi E' ed E'' l'evento $E'+E''$ che è *vero* quando è vero E' o E'', ed è *falso* quando sono falsi tanto E' che E''. Diremo *prodotto logico* degli eventi E' ed E'', e indicheremo $E' \cdot E''$, l'evento che è *vero* quando sono veri tanto E' che E'', *falso* quando è falso E' o E''. Se $E' \cdot E''$ è impossibile, gli eventi E', E'' si dicono *incompatibili* (come lo sono gli eventi E_A ed E_B dell'esempio: $E_A \cdot E_B$ significa che tanto A che B vincono la gara, ciò che è contradditorio). Con $-E$ si indica poi il contrario o la *negazione* di E, e cioè quell'evento che è vero o falso a seconda che E è falso o vero. Cosi $-E_A$ significa: il concorrente A non vincerà la gara. Non sarà forse inutile rilevare cosa significhi dire che due eventi sono uguali. E' è uguale a E'', $E' = E''$, se dire che si verifica E' equivale a dire che si verifica E'', e cioè non è possibile che uno solo di essi risulti vero e l'altro falso.

Formalmente, il problema che ci siamo proposti è il seguente. L'opinione di un individuo, lo stato d'animo in cui si trova nell'attesa di certi eventi futuri, è caratterizzato dalle probabilità che egli loro attribuisce, e cioè, detta $P(E)$ la probabilità con cui egli attende il verificarsi dell'evento E, da una funzione numerica $P(E)$ degli eventi E dell'insieme che egli considera. Si debbono caratterizzare analiticamente quelle funzioni $P(E)$ che corrispondono a stati d'animo coerenti. e cioè a valutazioni di probabilità non intrinsecamente contradditorie.

Vediamo subito cosa ciò significhi in termini precisi. Valutare la probabilità dell'evento E uguale a p significa, per chi tiene il supposto banco di scommesse, dichiararsi disposto ad accettare ogni scommessa con un competitore qualunque che è libero di fissare a suo piacimento la puntata S (positiva o negativa) in modo che il guadagno G (positivo o negativo) del competitore risulti

$$G(E) = (1-p)\,S$$
$$G(-E) = -p\,S$$

nei due casi E e $-E$, e cioè nell'ipotesi che l'evento E si verifichi o rispettivamente non si verifichi. Un individuo è coerente nel valutare le probabilità di certi eventi se, qualunque gruppo di puntate $S_1, S_2, \ldots, S_n$ un competitore faccia su un insieme qualunque di eventi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ fra quelli che egli ha considerato, non è possibile che il guadagno G del competitore risulti *in ogni caso positivo*.

Quando si tratti di scommesse su un unico evento E, si vede subito che condizione necessaria e sufficente per la coerenza è di attribuire a $P(E)$ un unico valore non negativo e non maggiore di 1. Se in particolare l'evento E è certo o impossibile, allora è necessario, per la coerenza, valutarne la probabilità uguale rispettivamente a 1 o a 0.

Dimostriamolo. Se E è certo, E è l'unico caso possibile, e l'unico guadagno possibile è

$$G(E) = (1 - p)S.$$

Se $1 - p \neq 0$ è possibile scegliere S tale che $G(E) > 0$, e la condizione $p = 1$ è necessaria. Se invece $p = 1$, è sempre $G(E) = 0$, ciò che assicura la coerenza. E la condizione è anche sufficente.

Analogamente: Se E è impossibile, l'unico caso possibile è $-E$, e l'unico guadagno possibile $G(-E) = pS$. Per la coerenza è necessario e sufficente che sia $p = 0$.

Se non siamo in grado di escludere a priori nessuna delle due eventualità, sono effettivamente possibili i due casi E e $-E$, e i due guadagni possibili sono

$$G(E) = (1 - p)\,S,$$
$$G(-E) = -p\,S.$$

Supponiamo allora di attribuire alla probabilità di E due valori distinti p' e p''; ciò significa che si è disposti ad accettare scommesse tanto sulla base della prima che della seconda valutazione, con puntate S' ed S'' in facoltà del competitore. Avremo allora i due gaudagni possibili

$$G(E) = (1 - p')\,S' + (1 - p'')\,S''$$
$$G(-E) = -p'\,S' - p''\,S''.$$

Se è

$$\begin{vmatrix} 1 - p' & 1 - p'' \\ -p' & -p'' \end{vmatrix} = p' - p'' \neq 0$$

è sempre possibile determinare S' e S'' in modo che $G(E)$ e $G(-E)$ assumano valori prefissi, in particolare valori entrambi positivi, ciò che è assurdo nell'ipotesi della coerenza. Un individuo coerente non può attribuire alla probabilità di un dato evento che un unico valore, che deve essere compreso fra 0 e 1 (estremi inclusi). Se fosse $p<0$

sarebbe $1-p>1>0$, e, pur di prendere $S>0$, si renderebbero positivi tanto $G(E)$ che $G(-E)$; lo stesso accadrebbe se $p>1$, e quindi $1-p<0$, pur di prendere $S<0$. Condizione necessaria perchè la valutazione della probabilità di un singolo evento indeterminato sia coerente è dunque che a tale probabilità si dia un valore univocamente determinato p, e sia $0 \leqslant p \leqslant 1$. Dimostriamo che la condizione è anche sufficente. Basta osservare che, comunque si scelga S, è sempre

$$p\,G(E)+(1-p)\,G(-E)=p(1-p)\,S-(1-p)\,p\,S=0;$$

se $0 \leqslant p \leqslant 1$ è $p \geqslant 0$, $1-p \geqslant 0$, e quindi $G(E)$ e $G(-E)$ non possono mai, comunque si scelga S, risultare entrambe positive.

8. Passiamo a dimostrare il teorema delle probabilità totali.

Siano $E_1, E_2, \ldots, E_n$ eventi incompatibili; si tratta di dimostrare che

$$P(E_1+E_2+\ldots+E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_n);$$

sarà allora in particolare

$$P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_n)=1$$

se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ è una classe *completa* di eventi incompatibili, e cioè se è certo che l'uno o l'altro di essi deve verificarsi (l'evento $E_1+E_2+\ldots+E_n$ è *certo*). Basta del resto dare la dimostrazione limitatamente a quest'ultimo caso perchè, seppure $E_1, E_2, \ldots, E_n$ non constituisce una classe completa, lo è sempre la classe $E_0, E_1, \ldots, E_n$ dove $E_0=-(E_1+E_2+\ldots+E_n)$, ottenuta aggiungendo alle alternative precedenti l'ultima alternativa: che nessuna di esse si verifichi. Supposto allora che la somma delle probabilità di una classe completa di eventi incompatibili debba dare 1, si ha da una parte

$$P(E_0)+P(E_1)+\ldots+P(E_n)=1$$

e d'altronde

$$P(E_0)+P(E_1+E_2+\ldots+E_n)=1$$

perchè anche la classe dei due eventi incompatibili E_0 ed $(E_1+E_2+\ldots+E_n)$ è completa, e ne risulta

$$P(E_1+E_2+\ldots+E_n)=P(E_1)+P(E_2)+\ldots+P(E_n).$$

E' ovvio poi che basta limitarsi al caso in cui gli eventi sono tutti possibili; quelli che fossero eventualmente impossibili si possono infatti trascurare senza alterare nulla. Se E_1 fosse impossibile sarebbe ad esempio $P(E_1)=0$, $E_1+E_2+\ldots+E_n=E_2+\ldots+E_n$, e la relazione precedente equivarrebbe a $P(E_2)+\ldots+P(E_n)=$ $=P(E_2+\ldots+E_n)$.

Si tratta dunque di dimostrare che se $E_1, E_2, \ldots, E_n$ è una classe completa di eventi possibili incompatibili, le loro probabilità, che indicheremo $p_1, p_2, \ldots, p_n$, hanno somma uguale ad 1. Chi facesse su tali eventi le puntate $S_1, S_2, \ldots, S_n$, avrebbe, corrispondentemente ai diversi casi possibili $E_1, \ldots, E_n$, i guadagni $G_1=G(E_1)$, $G_2=G(E_2), \ldots, G_n=G(E_n)$ dati da

$$\begin{gathered} G_1=S_1-\sum_1^n{}_i\, p_i S_i \\ G_2=S_2-\sum_1^n{}_i\, p_i S_i \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ G_n=S_n-\sum_1^n{}_i\, p_i S_i . \end{gathered}$$

Supposte assegnate $G_1, G_2, \ldots, G_n$, questo è un sistema d'equazioni lineari in $S_1, S_2, \ldots, S_n$ il cui determinante è

$$\begin{vmatrix} 1-p_1, & -p_2, \ldots, & -p_n \\ -p_1, & 1-p_2, \ldots, & -p_n \\ \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot \\ -p_1, & -p_2, \ldots, & 1-p_n \end{vmatrix} = 1-(p_1+p_2+\ldots+p_n);$$

a meno che non sia $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$ è dunque sempre possibile determinare le S in modo che le G assumano valori prefissi, e in particolare valori tutti positivi. (E bastava del resto osservare che, prendendo $S_1=S_2=\ldots=S_n=S$, risulta $G_1=G_2=\ldots=G_n=$ $=(1-p_1-p_2-\ldots-p_n)\,S$, e quindi tutte le G risulterebbero >0 pur di prendede $S>0$ o rispettivamente $S<0$ a seconda che la somma delle probabilità fosse minore o maggiore di 1: è questo in sostanza il ragionamento intuitivo svilippato nel num. 6). Per la coerenza è dunque necessario che valga il teorema delle probabilità totali.

E' anche sufficente. Moltiplicando $G_1, G_2, \ldots, G_n$ per $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e sommando si ha tosto

$$\sum_1^n{}_h p_h G_h = \sum_1^n{}_h p_h (S_h - \sum_1^n{}_i p_i S_i) = \sum_1^n{}_h p_h S_h - (\sum_1^n{}_h p_h) \sum_1^n{}_i p_i S_i =$$
$$= (1 - \sum_1^n{}_h p_h) \sum_1^n{}_i p_i S_i$$

e quindi se $\sum_1^n{}_i p_i = 1$ risulta sempre $\sum_1^n{}_h p_h G_h = 0$ quali si siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Le p_1 essendo tutte $\geqslant 0$, la relazione assicura che le G_n non possono essere mai tutte positive.

Un individuo coerente può dunque valutare le probabilità di n eventi incompatibili constituenti una classe completa, e cioè di n eventi di cui se ne deve verificare necessariamente uno e uno solo, in tutti e soli gli ∞^{n-1} modi ottenuti attribuendo ad esse n valori non negativi $p_1, p_2, \ldots, p_n$ di somma uguale ad 1. La scelta dell'uno o dell'altro fra questi sistemi di valori per se stessi ugualmente legittimi dipende dall'opinione dell'individuo, ed è soggettiva. O comunque, se pur si volesse attribuire un valore oggettivo alle ragioni di questa scelta, sta il fatto che non dipende dalle condizioni di coerenza.

Aggiungiamo ancora, come corollari, le due osservazioni seguenti.

Le probabilità di due eventi contrari E e $-E$ sono complementari (a uno): $P(-E) = 1 - P(E)$. Infatti E e $-E$ costituiscono una classe finita e completa di eventi incompatibili.

Se E implica E', cioè se E' è una conseguenza necessaria di E, o, in simboli, se $E - E'$ è impossibile, allora la probabilità di E è non maggiore della probabilità di E': $P(E) \leqslant P(E')$.

Abbiamo infatti $E' = E + (E' - E)$, e i due eventi sono incompatibili. Allora $P(E') = P(E) + P(E' - E) \geqslant P(E)$.

9. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme (finito o infinito) degli eventi E che un dato individuo considera. e di cui valuta le probabilità $P(E)$. Per la coerenza sappiamo che è necessario che la funzione $P(E)$ goda delle due proprietà seguenti:

1) qualunque sia l'evento E di $\mathcal{S}$ risulta $0 \leqslant P(E) \leqslant 1$;

2) quali si siano gli eventi incompatibili E_1, E_2 di $\mathcal{S}$ risulta

$$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2).$$

Inoltre, naturalmente, dev'essere $P(E) = 1$ e $P(E) = 0$ quando E è certo o rispettivamente impossibile.

Dimostriamo che queste condizioni sono altresì sufficenti.

Per evitare questioni, per se interessanti, ma che sarebbe qui troppo lungo sviluppare[1], supporremo che l'insieme $\mathcal{E}$ sia tale che contenga sempre la somma e il prodotto di due suoi elementi, e il contrario di ogni suo elemento. Tale cioè che, se E è un evento di $\mathcal{E}$, lo è pure l'evento $-E$, e se E' e E'' sono eventi di $\mathcal{E}$, lo sono ancora $E' + E''$ ed $E' \cdot E''$. Ciò implica che un evento esprimibile mediante un numero finito di eventi $E_1, \dots E_n$ di $\mathcal{E}$ e i segni di negazione, somma e prodotto logico appartiene ancora ad $\mathcal{E}$; un insieme $\mathcal{E}$ che non sodisfa inizialmente queste condizioni può sempre ridursi a sodisfarle aggiungendo gli eventi che sono in tal modo esprimibili mediante un numero finito di eventi di $\mathcal{E}$.

Dobbiamo dimostrare, per provare che le dette condizioni sono sufficenti per la coerenza, che, se la funzione $P(E)$ le sodisfa, un competitore non può scegliere nessun sistema di scommesse e di puntate sugli eventi $\mathcal{E}$ in base alla funzione di probabilità $P(E)$ in modo da assicurarsi un guadagno in qualunque caso. La dimostrazione è immediata. Supponiamo che scommettendo colle puntate $S_1, S_2, \dots, S_n$ sugli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ di $\mathcal{E}$ il guadagno sia sicuro. Gli eventi $E_1, E_2, \dots, E_n$ si possono esprimere come somme di *costituenti* (e cioè degli eventi ottenuti dal prodotto logico $E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n$ cambiando un numero qualunque dei fattori nell'evento contrario) che costituiscono una classe completa di eventi incompatibili $C_1, C_2, \dots, C_m$ in numero finito ($m = 2^n$, contando anche gli eventuali eventi impossibili). Se E_1 è somma logica degli h costituenti $C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_h}$, una scommessa su E_1 con puntata S_1 equivale ad h scomesse, tutte con puntata S_1, sugli h eventi $C_{i_1}, \dots, C_{i_h}$ (in entrambi i casi, detta p la probabilita di E_1, si ha $G(E_1) = (1-p) S_1$, $G(-E_1) = -pS_1$). Un sistema di scommesse su $E_1, \dots, E_n$ equivale dunque sempre a un sistema di scommesse sui costituenti $C_1, C_2, \dots, C_m$, che costituiscono una classe incompatibile completa, e sappiamo che se $P(C_1) + P(C_2) + \dots + P(C_m) = 1$ e le $P(C_i)$ sono tutte $\geqslant 0$ un tale sistema di scommesse non può mai dare luogo a un guadagno sicuro. Ma la proprietà additiva per due eventi incompatibili implica ovviamente la stessa proprietà per un numero finito qualunque di eventi incompatibili. E ciò prova l'asserto.

[1]) **Cfr. la nota cit. ai Lincei.**

Il senso di questa e delle precedenti dimostrazioni si potrebbe riassumere e rendere intuitivo in due parole se si potesse fin d'ora ammettere una conoscenza sia pure elementarissima della teoria delle variabili casuali. Il teorema delle probabilità totali assicura che per la speranza matematica (o valor medio) di una variabile casuale vale la proprietà distributiva: $\mathcal{M}(X+Y)=\mathcal{M}(X)+\mathcal{M}(Y)$; in una scommessa equa la speranza matematica è nulla, e quindi i valori possibili del guadagno non possono essere tutti positivi (una media ponderata di valori positivi essendo positiva); di conseguenza anche in un sistema di scommesse eque la speranza matematica del guadagno (che è somma di guadagni parziali a speranza matematica nulla) ha speranza matematica nulla, e i valori possibili non possono essere tutti positivi.

Osserviamo incidentalmente, non essendo questo il luogo per trattare tali questioni, che per una classe infinita di eventi incompatibili (sia pure numerabile) non è necessario che sussista la proprietà analoga della proprietà additiva. La probabilità della somma logica di infiniti eventi incompatibili è cioè non necessariamente uguale, ma uguale *o maggiore* della somma delle probabilità (limite superiore delle somme di termini in numero finito).

10. Riprendiamo ora la trattazione, interrotta un momento per precisare col dovuto rigore logico-formale i risultati e gli stessi problemi.

Ci proponiamo anzitutto di dedurre dalla definizione data dei criteri praticamente più utili, per l'effettiva valutazione numerica di una probabilità, che non l'applicazione diretta e immediata dello schema delle scommesse. Questi criteri non sono che quelli ordinariamente assunti a definire la probabilità; vedremo però che essi non possono sostenere tale ufficio, perchè hanno senso soltanto quando si abbia preventivamente dimostrata la proprietà fondamentale della teoria delle probabilità. Che si ricava appunto nel modo più semplice seguendo la trattazione ora svolta, ma di cui metteremo meglio in luce il vero carattere cercando cosa rimanga di veramente essenziale nel nostro modo di procedere e di ragionare quando ci si svincoli dallo schema indicato di scommesse.

Quando possiamo distinguere n casi (costituenti una classe completa) che ci appaiono ugualmente probabili, e di cui cioè non sapremmo attendere l'uno con maggiore o minor fiducia di un altro qualsiasi, la probabilità di ciascuno di essi è $1/n$. E la probabilità della somma logica di m fra tali casi, e cioè di un evento E cui m casi sono favorevoli ed $(n - m)$ sfavorevoli, è m/n. Questa proprietà, generalmente assunta come definizione, è corollario immediato della proprietà additiva: se n numeri uguali hanno per somma 1, il loro valore comune è $1/n$, e la somma di m tra essi è m/n.

L'importanza di questo risultato non sta solo nelle larghe applicazioni che consente ai problemi di giochi, di lotterie, di sorteggi, dove si hanno appunto dei casi possibili in numero finito che per ragioni di simmetria molto spontanee sono ugualmente probabili per tutti o quasi gli individui; esso è importante perchè dà la possibilità di valutare numericamente, e cioè quantitativamente, una probabilità, in base a sole considerazioni qualitative. Basta ammettere di saper sempre dire, delle probabilità di due eventi, se sono uguali o se l'una è maggiore o minore dell'altra, per riuscire completamente a misurare una qualunque probabilità. E' facile infatti costruire una scala di raffronto contenente tutti i valori razionali della probabilità: se $p = m/n$, p è la probabilità di estrarre una palla bianca da un'urna contenente m palle bianche su n, quando tutti i casi si giudicano ugualmente probabili; a seconda che un evento E ci ispira maggiore o minore od uguale fiducia di tale estrazione, la probabilità che noi gli attribuiamo è maggiore, minore od uguale a p. E un numero reale è univocamente determinato quando, essendo r un generico numero razionale, sappiamo sempre dire quale sussista delle tre alternative: $p = r$, $p < r$, $p > r$.

Per la nostra analisi critica, l'importanza fondamentale di questo risultato sta in ciò: che essa prova come lo schema di scommesse su cui si basa la nostra definizione ci porti effettivamente a misurare la probabilità, a misurare cioè il grado di fiducia che sente un individuo, e non è influenzato, come avverrebbe per una scommessa singola, dall'amore o il timore del rischio o da altre circostanze parassite. Si poteva dubitare ad esempio che un individuo, pur giudicando ugualmente probabili n casi, di cui m sono favorevoli ed $(n - m)$ sfavorevoli a un certo evento E, potesse poi non esser disposto, per amore o timore del rischio cui s'esporrebbe, a scommettere per l'evento E in base alla probabilità $p = m/n$, ma potesse invece essere soltanto disposto a scommettere in base a un valore p più grande o più piccolo. Per un individuo coerente, in seguito a quanto ora s'è visto, ciò non può mai accadere.

Poichè la misurazione di una probabilità si può raggiungere mediante sole considerazioni qualitative, viene spontaneo di pensare che la definizione stessa si potrebbe sostituire con altra a puro carattere qualitativo. Arriveremo appunto a tale conclusione, come avevamo del resto già preannunciato; lo vedremo nei prossimi numeri.

11. Ci si può chiedere se era lecito porre a priori, convenzionalmente, uguale ad m/n la probabilità che si attribuisce a un evento quando m ed $n-m$ casi incompatibili che gli sono rispettivamente favorevoli e contrari sono giudicati ugualmente probabili. Se lecita, questa convenzione sarebbe sufficente, come abbiamo osservato, a definire completamente il metodo usuale di misurare numericamente una probabilità (sia razionale che irrazionale), purchè s'intenda acquisito il significato psicologico dell'affermazione: „l'evento E_1 è, per me, più probabile dell'evento E_2", o, in altre parole, „ho maggior fiducia che si verifichi E_1 piuttosto che E_2", „mi sembra più facile l'avverarsi di E_1 che di E_2", o altre locuzioni equivalenti. Che di una convenzione assolutamente libera non possa trattarsi si vede subito osservando che essa, per raggiungere lo scopo che ogni metodo di misura si prefigge, deve effettivamente attribuire valori maggiori alle probabilità degli eventi „più probabili": una qualunque misura numerica che si voglia introdurre per la probabilità di un evento dev'essere una funzione numerica $P(E)$ sodisfacente la condizione che la disuguaglianza

$$P(E_1) \leqslant P(E_2)$$

equivalga a dire, secondo il senso che già si suppone acquisito, che, „E_2 è non meno probabile di E_1".

Il metodo usuale di definire la probabilità come rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quelli possibili (supposti ugualmente probabili) non può dunque legittimamente enunciarsi se non dopo aver dimostrato che se un evento E_1 ha m_1 casi favorevoli su n_1 possibili e ugualmente probabili, e un altro evento E_2 ha m_1 casi favorevoli su n_2 possibli e ugualmente probabili, l'evento E_1 è non meno probabile di E_2 se $m_1 n_2 \geqslant m_2 n_1$, e inversamente. Se non cioè, per chiarire bene questo punto tanto essenziale, dopo aver analizzati, spiegati e riconosciuti esaurienti i motivi logici per cui un individuo che abbia di fronte due urne A_1 e A_2, contenenti rispettivamente n_1 e n_2 palle, di cui m_1 e m_2 bianche, è costretto, *per mantenersi coerente*, a ritenere che sia più probabile l'estrazione di una palla facendo una estrazione dall'urna in cui la percentuale delle palle bianche è maggiore, *qualora egli ritenga ugualmente probabile l'estrazione di una qualunque palla di ciascuna delle due urne.*

La condizione così espressa non è molto significativa, perchè pochissimo significativo e molto banale è il metodo ordinario di definire la probabilità mediante un rapporto del tipo indicato. Ma essa equivale in sostanza (come sarebbe facile far vedere, e come risulta pressochè intuitivo dal seguito) a un'altra condizione di significato notevolissimo e fondamentale, che è la vera ed unica base logica del calcolo delle probabilità.

12. Per giungere nel modo più intuitivo a vederne il significato, supponiamo dapprima di conoscere già la trattazione precedentemente svolta, e cerchiamo quale sarebbe il modo più generale di misurare una probabilità, nel senso detto poc'anzi. Vedremo in secondo luogo che le condizioni cui si giunge, che hanno carattere puramente e essenzialmente qualitativo, si possono giustificare direttamente nel modo più spontaneo, e che partendo da esse si può ricostruire il calcolo delle probabilità nella sua forma usuale, con tutto rigore. Esso rimarrà con ciò completamente giustificato indipendentemente dallo schema di scommesse su cui ci siamo in un primo momento basati.

Sia $P(E)$ la probabilità di un evento E nel senso usuale, che abbiamo già prima giustificato. La più generale funzione reale $Q(E)$ che rappresenti una misura possibile della probabilità dovrà essere tale, per quanto detto, che dall'essere $P(E') \leqslant P(E'')$ risulti $Q(E') \leqslant$ $\leqslant Q(E'')$, e inversamente. Ne risulta che, posto $P(E) = x$, è $\xi = Q(E) = \varphi(x)$ con $\varphi(x)$ funzione crescente di x. E avremo $x = \varphi^{-1}(\xi)$, ove φ^{-1}, inversa di φ, è ancora una funzione crescente. Ci limiteremo in seguito al caso più interessante in cui la φ (e quindi la φ^{-1}) è continua: osserviamo che lo è necessariamente se si vuole che tutti i valori dell'intervallo (ω, τ), ove $\omega = \varphi(0)$, e $\tau = \varphi(1)$ sono la probabilità $Q(E)$ rispettivamente di un evento impossibile o certo, siano valori capaci di rappresentare una probabilità $Q(E)$.

Sia ora

$$x + y = z;$$

ne scende

$$\varphi(x + y) = \varphi(z),$$

e, posto

$$\varphi(x)=\xi, \quad \varphi(y)=\eta, \quad \varphi(z)=\zeta,$$

si ha

$$\zeta=\varphi[\varphi^{-1}(\xi)+\varphi^{-1}(\eta)].$$

Il teorema delle probabilità totali si traduce allora, per la funzione Q, nell'esistenza di una legge d'addizione più generale: se una funzione Q è capace di rappresentare la probabilità, esiste una funzione S di due variabili tale che, se per due eventi incompatibili E' e E'' essa assume i valori $Q(E')=\xi$, e $Q(E'')=\eta$, risulta necessariamente

$$Q(E'+E'')=S(\xi, \eta).$$

La funzione S gode evidentemente delle proprietà seguenti (nell l'intervallo in cui basta supporla definita, e cioè fra ω e τ):

1) è *simmetrica*: quali si siano ξ, η si ha sempre $S(\xi, \eta)= = S(\eta, \xi)$;
2) ω è *nullo rispetto ad* S: quando una delle variabili assume il valore ω, la S assume il valore dell'altra variabile:
$$S(\omega, \xi)=\xi \quad \text{(e quindi } S(\xi, \omega)=\xi);$$
3) è funzione *crescente* delle due variabili; in particolare, è sempre $S(\xi, \eta)>\xi$ e $S(\xi, \eta)>\eta$ (a meno che ξ o η non sia $=\omega$);
4) è *continua*;
5) è *associativa*: quali si siano ξ, η, ζ, si ha
$$S[S(\xi, \eta), \zeta]=S[\xi, S(\eta, \zeta)] \quad \text{(e quindi } =S[\eta, S(\xi, \zeta)], \text{ ecc.)};$$
6) è *archimedea*: nel senso che, comunque piccolo (comunque vicino a destra di ω) si scelga ξ, calcolando $\xi_2=S(\xi, \xi)$, $\xi_3=S(\xi_2, \xi), \ldots, \xi_{n+1}=S(\xi_n, \xi)$, dopo un numero finito di operazioni (che danno evidentemente dei numeri sempre maggiori) si ottiene un valore maggiore di τ.

Queste proprietà sono una traduzione di proprietà analoghe della somma: $x+y=y+x$; $x+0=x$; $x+y>x+z$ se $y>z$; $(x+y)+z=x+(y+z)$; $nx>1$, per piccolo che si sia fissato $x>0$, pur di prendere n sufficentemente grande. E' importante riconoscere che le condizioni sopraelencate sono anche sufficenti, ossia che, assegnata una funzione S che le sodisfi, e un numero τ

che renda sodisfatta la (6), si può sempre determinare una funzione $Q(E)$ atta a misurare le probabilità che si attribuiscono a degli eventi E, e per cui la legge d'addizione sia data da S. Anzi, la $Q(E)$ è univocamente determinata; è infatti univocamente determinata la funzione crescente $\varphi(x)$ tale che $S(\xi, \eta) = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$ ed è allora $Q(E) = \varphi\{P(E)\}$.

Poniamo

$$\psi_2(\xi) = S(\xi, \xi), \quad \psi_3(\xi) = S(\psi_2(\xi), \xi), \ldots, \quad \psi_{n+1}(\xi) = S(\psi_n(\xi), \xi), \ldots;$$

si osservi, per non perdere di vista il significato, che $\psi_n(\xi)$ è la probabilità della somma logica di n eventi incompatibili di probabilità uguale a ξ. Dalle proprietà enunciate scende facilmente che le ψ_n costituiscono una successione crescente di funzioni crescenti: è $\psi_n(\omega) = \omega$, e, per $\xi > \omega$, $\xi < \psi_2(\xi) < \psi_3(\xi) < \ldots < \psi_n(\xi) < \ldots$; essendo $\omega \leqslant \xi \leqslant \tau$ esiste sempre uno e un solo valore η, $\omega \leqslant \eta \leqslant \tau$, radice dell'equazione $\psi_n(\eta) = \xi$; indicheremo con $\psi_{\frac{1}{n}} = \psi_n^{-1}$ l'operazione inversa di ψ_n, così che si potrà esprimere $\eta = \psi_{\frac{1}{n}}(\xi)$. La (5) mostra che si può porre $\psi_{\frac{m}{n}}(\xi) = \psi_m[\psi_{\frac{1}{n}}(\xi)]$ (il secondo membro risultando funzione crescente e continua del rapporto m/n), e risulta, essendo r, s due razionali qualunque $\psi_r[\psi_s(\xi)] = \psi_{rs}(\xi)$, $S[\psi_r(\xi), \psi_s(\xi)] = \psi_{r+s}(\xi)$.

Per la continuità, rimane definita la funzione $\psi_x(\xi)$ per x reale qualunque, ed è funzione reale continua che cresce da ω a ξ al variare di x tra 0 e 1; in particolare, per $\xi = \tau$, la funzione $\psi_x(\tau)$ cresce da ω a τ al variare di x tra 0 e 1. Poniamo $\varphi(x) = \psi_x(\tau) = \xi$ ed $x = \varphi^{-1}(\xi)$; risulta tosto che, se $\xi = \varphi(x)$, $\eta = \varphi(y)$, si ha

$$S(\xi, \eta) = S[\varphi(x), \varphi(y)] = S[\psi_x(\tau), \psi_y(\tau)] = \psi_{x+y}(\tau) = \varphi(x+y) = \\ = \varphi[\varphi^{-1}(\xi) + \varphi^{-1}(\eta)]$$

e risultano sodisfatte tutte le proprietà che ci occorrevano [1]).

[1]) Un esempio semplice si ha ponendo $S(\xi, \eta) = \xi + \eta + a\xi\eta$: può avere interesse accennare a questo caso perchè è stato studiato dal Medolaghi come una possibile *correzione* da apportare al teorema delle probabilità totali. Siamo in grado di escludere ora che una tale innovazione modifichi il significato di un teorema qualsisia del calcolo delle probabilità: tutto si riduce a misurare col numero $\xi = \frac{1}{a}\left(e^{ax} - 1\right)$ quel grado di probabilità che nel modo ordinario è misurato

13. Nella forma ordinaria del calcolo delle probabilità, abbiamo visto che la proprietà fondamentale è il teorema delle probabilità totali. Esso dipende però dal particolare metodo di rappresentare la probabilità mediante numeri reali che corrisponde appunto alla convenzione usuale. Convenzione che è certo la più comoda, ma null'altro che la più comoda fra infinite altre ugualmente legittime. Quel che esso contiene di veramente e essenzialmente significativo è ciò che non dipende da questa convenzione: per riconoscere e separare questa parte essenziale da tutto ciò che è accessorio, abbiamo proceduto, nel numero precedente, cercando cosa rimaneva di immutato per qualunque altro metodo di misura possibile. Ed era, abbiamo visto or ora, l'esistenza di una legge d'addizione, che dia la probabilità della somma logica di due eventi incompatibili in funzione delle probabilità di questi eventi. Si è proceduto, per fare un'analogia, come si fa spesso per mostrare il significato assoluto di qualche risultato geometrico: mostrando che sussiste per ogni sistema di coordinate. C'è però anche un altro metodo: quello di studiare il problema indipendentemente da ogni sistema di coordinate, per via assiomatica e intrinseca. E' questo anzi il metodo più conclusivo, ed esso seguiremo qui per mettere più chiaramente in luce qual'è la proprietà qualitativa fondamentale su cui tutto il calcolo delle probabilità si basa. Nell'esposizione di questo numero ci limiteremo al solo aspetto formale; vedremo in seguito di sviscerare il significato effettivo di quelli che considereremo qui come dei postulati, e di riconoscere che esso basta a giustificarli.

Supponiamo acquisita la nozione della relazione „*è non meno probabile di*" tra eventi; e indichiamo colla notazione $E' \geqslant E''$ la

dal numero x. A questo risultato si giunge facilmente osservando che in tal caso l'equazione funzionale

$$\varphi(x+y) = S[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x) + \varphi(y) + a\,\varphi(x)\,\varphi(y)$$

equivale all'equazione differenziale $d\varphi = k(1 + a\varphi)\,dx$. La costante α dipende dal valore $\varphi(1) = \tau$ con cui si vuol misurare la probabilità di un evento certo, ed è precisamente $\alpha = \log(1 + a\tau)$.

La trasformazione dell'equazione funzionale originaria in un'equazione differenziale è ovviamente sempre possibile quando la S è derivabile. Posto $\frac{\partial}{\partial\eta} S(\xi, \eta) = f(\xi, \eta)$ si ha allora infatti $d\varphi = k \cdot f(\varphi, \omega)\,dx$ con $k = \varphi'(o)$.

frase (proposizione) „E' è non meno probabile di E''“. La relazione „$\geqslant$“ sodisfi i postulati seguenti:

1) *dati due eventi* E', E'', *è sempre* $E' \geqslant E''$ *oppure* $E'' \geqslant E'$; se è insieme $E' \geqslant E''$ e $E'' \geqslant E'$ si scrive $E' \cong E''$, e si dice che E' e E'' sono identicamente probabili (è sempre dunque, in particolare, $E \cong E$); se è $E' \geqslant E''$ ma non $E'' \geqslant E'$ si scrive $E' > E''$;

2) *se* A *è un evento certo e* B *un evento impossibile, per ogni evento* E *possibile (nè certo nè impossibile) si ha* $A > E > B$;

3) *se si ha* $E' \geqslant E$, $E \geqslant E''$, *è anche* $E' \geqslant E''$ (proprietà transitiva); ne scende in modo ovvio che $E' \cong E$, $E \cong E''$ implica $E' \cong E''$;

4) *se* E_1 *e* E_2 *sono due eventi incompatibili con un evento* E, *ed è*

$$E_1 \geqslant E_2$$

è anche

$$E + E_1 \geqslant E + E_2,$$

e inversamente.

$E + E_1$ è cioè $>$, $\cong$, $<$ di $E + E_2$ a seconda che E_1 è $>$, $\cong$, $<$ di E_2.

Da questo postulato si deduce facilmente [1]) una proprietà analoga ma più generale, e cioè

[1]) Osserviamo intanto che la (4) rientra come caso particolare nella (4′) quando $E = E'$. Supponiamo poi, per fare una prima estensione, che E, E_1, E', E'_1 siano quattro eventi incompatibili, e sia

$$E \geqslant E', \quad E_1 \geqslant E'_1;$$

la (4) dà subito

$$E + E_1 \geqslant E + E'_1 \geqslant E' + E'_1$$

e quindi per la (3)

$$E + E_1 \geqslant E' + E'_1$$

mentre se fosse $E' > E$, $E'_1 > E_1$ si otterrebbe analogamente

$$E' + E'_1 > E + E_1.$$

Passiamo ora al caso generale, e scriviamo

$$E = EE' + E(-E'), \quad E_1 = E_1 E'_1 + E_1(-E'_1),$$
$$E' = EE' + E'(-E), \quad E'_1 = E_1 E'_1 + E'_1(-E_1);$$

avremo

$$E + E_1 = (EE' + E_1 E'_1) + E(-E') + E_1(-E'_1),$$
$$E' + E'_1 = (EE' + E_1 E'_1) + E'(-E) + E_1(-E_1).$$

4′) se E, E_1 sono incompatibili, ed E', E'_1 sono incompatibili, perchè sia $(E+E_1) \geqq (E'+E'_1)$ è necessario che sussista una almeno delle due condizioni $E \geqq E'$, $E_1 \geqq E'_1$, ed è sufficente che sussistano entrambe.

I primi tre postulati hanno un significato tanto banale che non occorrerà qui parlarne; la proprietà essenziale è data dalla (4), o meglio anzi dalla (4′), ed è quella appunto che si era incontrata precedentemente sotto altre forme. Essa dice infatti in particolare che se (nelle stesse ipotesi) è $E \cong E'$, $E_1 \cong E'_1$, è anche $(E+E_1) \cong \cong (E'+E'_1)$, e cioè che la probabilità della somma di eventi incompatibili è „funzione" delle probabilità degli eventi stessi; la disuguaglianza dice poi che è funzione „crescente"; ed è immediato infine che la proprietà analoga sussiste anche nel caso di n addendi.

Possiamo dedurre senz'altro che è possibile misurare le probabilità nel modo usuale. Abbiansi n casi possibili $E_1\, E_2 \ldots E_n$ (una classe completa di eventi incompatibili) identicamente probabili, e sia E la somma di m tra essi; abbiansi del pari n' casi possibili $E'_1 E'_2 \ldots E'_{n'}$ identicamente probabili (ancora una classe completa), e sia E' la somma di m' tra essi. Pongasi $nn' = N$, $mn' = M$, $m'n = M'$, e imaginiamo una classe completa di N eventi incompatibili identicamente probabili $A_1, A_2 \ldots A_N$; sia poi A una somma di N, A' una somma di N' tra essi. Vedremo che $E \cong A$, $E' \cong A'$, e $A' > A$, $A' \cong A$ o $A > A'$ a seconda che $N < N'$, $N = N'$, $N > N'$. E quindi E' è più o meno o identicamente probabile di E a seconda che m'/n' è maggiore, minore od uguale ad m/n.

Dividiamo infatti gli eventi $A_1, A_2, \ldots, A_N$, in n classi di n' eventi ciascuna; le loro somme logiche $B_1 \ldots B_n$ costituiscono una classe di eventi incompatibili identicamente probabili (per la (4)) e sono anche identicamente probabili degli $E_1, \ldots, E_n$. Supponiamo

---

Se è $E = EE' + E(-E') \geqq E' = EE' + E'(-E)$, la (4) dà subito $E(-E') \geqq E'(-E)$, e analogamente se $E_1 \geqq E'_1$ si deduce $E_1(-E'_1) \geqq \geqq E'_1(-E_1)$. I quattro eventi $E(-E')$, $E'(-E)$, $E_1(-E'_1)$, $E'_1(-E_1)$ sono manifestamente incompatibili, e la dimostrazione precedente permette di concludere dalle disuguaglianze ottenute che è anche

$$E(-E') + E_1(-E'_1) \geqq E'(-E) + E'_1(-E_1).$$

Applicando ancora una volta direttamente la (4), e ricordando la precedente scomposizione di $E+E_1$ e $E'+E'_1$, si vede subito che è $E+E_1 \geqq E'+E'_1$, c. d. d.

E analogamente per la reciproca.

per assurdo che non sia $B_1 \cong E_1$, sia ad es. $B_1 > E_1$; allora si avrebbe anche $B_2 > E_2, \ldots, B_n > E_n$. Ma è $(B_1 + \ldots + B_n) \cong$ $\cong (E_1 + \ldots + E_n)$, essendo entrambi eventi certi, e ciò non è possibile (per la (4')) se non è $E_i \gtrdot B_i$ per nessun i. E rimane così provato l'asserto.

Le proprietà già usate assicurano anche che E (somma di m eventi E_i) è identicamente probabile di A (somma di mn' eventi A_t, che può sempre considerarsi come somma di m eventi B_i). Allo stesso modo si dimostra che sono identicamente probabili E' ed A'.

Abbiamo dimostrato ora in sostanza la possibilità di ridursi „a un denominatore comune", come dev'essere appunto il caso se la rappresentazione frazionaria delle probabilità rimane giustificata dai postulati (1)—(4). Non rimane se non dimostrare ora che, essendo i denominatori uguali, la probabilità „cresce al crescere del numeratore". Traducendo questo linguaggio aritmetico, che non può avere altro valore che di richiamo a concetti noti, in altro più adeguato, si tratta di dimostrare che una somma A di M eventi identicamente probabili di una classe incompatibile completa $A_1 \ldots A_n$ è più probabile che una somma A' di M' tra essi se $M > M'$.

Sappiamo già che tutte le somme di un ugual numero di A_i sono identicamente probabili, e possiamo dunque supporre che A' sia somma di M' fra gli M eventi contenuti in A. Supponiamo allora per assurdo che sia $A' \gtrdot A$; avremmo $A' + (-A) \gtrdot A + (-A)$ dove a secondo membro è un evento certo, e al primo un evento che non è certo (mancano $M - M'$ casi possibili). Ciò è assurdo, e il teorema è quindi dimostrato.

Resta così provato che i postulati (1)—(4) assicurano la legittimità della convenzione usuale: di misurare la probabilità di un evento mediante la funzione $P(E)$ definita come segue. In primo luogo, se E è identicamente probabile alla somma di m fra n eventi identicamente probabili costituenti una classe completa, è $P(E) = m/n$; in generale, è poi $P(E) = x$, se per un qualunque evento E' a probabilità razionale y definita nel modo precedente, si ha $E' < E$ quando $y < x$ ed $E < E'$ quando $x < y$.

Si vede facilmente che $P(E) \gtrdot P(E')$ implica $E \gtrdot E'$; ma non inversamente. Se ad esempio si hanno due eventi A e B, il primo impossibile e il secondo possibile ma con probabilità nulla, si ha $P(A) = P(B) = 0$, ed è tuttavia $A < B$, per la (2). I postulati (1)—(4) darebbero alla graduatoria (classe ordinata) delle probabilità una struttura non archimedea. Si riesce però a misurare in modo sodisfacente le probabilità mediante numeri, e cioè rendendo archimedea tale struttura, in quanto si trascurano le probabilità „infinitamente piccole“: tali cioè che moltiplicate (nel senso usuale, la cui definizione è ovvia in base a quanto precede) per un numero n comunque grande non tendono mai alla certezza, ossia, in altre parole, che sono sempre minori della probabilità $1/n$ di uno fra n eventi incompatibili identicamente probabili costituenti una classe completa. Osserviamo che la locuzione „identicamente probabile“ che avevamo introdotto senza cercare se fosse necessaria, lo è dunque effettivamente. Due eventi identicamente probabili ($E' \cong E''$) sono sempre ugualmente probabili ($P(E') = P(E'')$), ma non viceversa.

14. Perchè le considerazioni ora svolte possano effettivamente costituire un metodo su cui fondare il calcolo delle probabilità, non rimane a questo punto che chiarirne il valore e il significato psicologico, e mostrare che, per questo stesso significato, quelli che abbiamo assunti ora come postulati sono delle asserzioni che dobbiamo effettivamente ritenere soddisfatte da un individuo coerente.

Per poter godere, nel caso che E si verifichi, di un certo vantaggio V, di qualunque natura esso sia, siamo disposti a sostenere dei sacrifici tanto più gravi quanto più ci sembri probabile E; è questa l'osservazione che ci ha permesso già in altro modo di definire la probabilità, traducendolo in forma quantitativa precisa. Dobbiamo ora mostrare che, pur lasciandogli il carattere puramente qualitativo in cui è ora enunciato, esso basta a spiegere l'intima ragione per cui debbono valere i postulati del numero precedente, dai quali scende senz'altro, come già s'è dimostrato, la legittimità del calcolo delle probabilità nella sua forma usuale.

Lo scopo di tutte queste considerazioni è in fondo di spiegare cosa sia e cosa significhi la coerenza: lo avevamo detto richiamandoci a uno schema preciso che poteva però sembrare artificioso, e vogliamo ora vedere più chiaramente l'essenza di questa nozione. Potremo subito concludere in modo molto sodisfacente che la coerenza può essere definita in base a sole considerazioni qualitative dicendo che un individuo è coerente se valuta, non più il grado di probabilità di certi eventi, ma soltanto le disuguaglianze fra questi gradi di probabilità, in modo da non contradire certi principi, e cioè precisamente i postulati (1)—(4). Esaminiamo un momento la loro portata. Il primo in pratica non dice nulla; in pratica basta dire che ci si limita a considerare la probabilità di quegli eventi per cui sappiamo sempre dire se uno è più o meno o ugualmente probabile d'un altro. E cioè se, per godere di un certo vantaggio V subordinatamente al verificarsi dell'uno, ci sembri varrebbe la pena di sostenere sacrifici maggiori, minori od uguali di quelli che varrebbe la pena di sostenere per goderne subordinatamente al verificarsi dell'altro. Il secondo e il terzo limitano effettivamente la libertà di giudizio di un individuo che voglia rimanere coerente: egli non può ritenere un evento qualunque più probabile d'un evento certo o meno probabile di un evento impossibile, e non può giudicare un evento E_1 più probabile di un secondo E_2, questo più probabile di un terzo E_3, e il terzo più probabile del primo. Queste restrizioni sono tuttavia ben ovvie. Per poter godere di un certo vantaggio V subordinatamente al verificarsi di un evento problematico nessuno sarà disposto a far sacrifici maggiori che per assicurarsi il vantaggio V incondizionatamente, nè potrà fare sacrifici minori che non facendone nessuno, come se il vantaggio V fosse impossibile. E un individuo che per godere in un certo vantaggio V subordinatamente al verificarsi di E_2 ritiene di poter fare, e a maggior ragione, ogni sacrificio che sarrebbe disposto a sostenere per goderne subordinatamente a E_1, e che per goderne subordinatamente a E_3 ritiene valga la pena, e a maggior ragione, di fare ogni sacrificio che varrebbe la pena di fare per goderne subordinatamente a E_2, non può, senza intima contradizione, non essere disposto a sostenere, e a maggior ragione, per godere del vantaggio V subordinatamente al verificarsi di E_3, ogni sacrificio che farebbe per goderne subordinatamente ad E_1.

Un po' più a lungo ci dobbiamo fermare sull'ultimo postulato, il quarto, che è quello essenziale. Esso dice, in sostanza, che le disuguaglianze fra probabilità si possono *comporre*, nel modo usuale, operando addizioni logiche di eventi incompatibili. Per dare un esempio, se un individuo giudica, all'inizio del campionato di calcio, che la Roma abbia maggiore probabilità dell'Ambrosiana di aggiudicarsi il titolo, e che la Lazio abbia maggiore probabilità del Milan, egli deve anche pensare, perchè la sua opinione non sia intrinsecamente incoerente, che è più probabile che il titolo sia conquistato da una squadra romana che da una squadra milanese. In questo esempio abbiamo quattro eventi incompatibili: la vittoria finale di una delle quattro squadre nominate, e li indicheremo colle iniziali R, A, L, M. Abbiamo supposto che un individuo ritenga $R > A$, $L > M$, e abbiamo detto che, per sodisfare il postulato quarto, egli deve allora ritenere $R + L > A + M$; egli deve infatti ritenere $R + L > A + L > A + M$. Un ragionamento così semplice è qui consentito per la circostanza semplificatrice che tutti e quattro gli eventi sono tra loro incompatibili, ma a questo caso elementare ci si può ridurre anche in generale (v. p. 321, nota [1]), e basta quindi dimostrare l'enunciato più semplice della (4) anzichè quello della (4'). Dimostrare cioè che se A è un evento incompatibile con B e con C, è $A + B > A + C$ se $B > C$, e inversamente.

Sia dunque A un evento qualunque, e B un evento incompatibile con A; per poter godere di un certo vantaggio V subordinatamente al verificarsi di A siamo disposti a sostenere un certo gruppo S di sacrifici, di quale natura non interessa spacificare: per poterne godere anche subordinatamente al verificarsi di B saremmo disposti a sostenere, oltre a quelli del gruppo S, ancora altri sacrifici constituenti un gruppo S'; ciò significa che per poter godere del vantaggio V subordinatamente al verificarsi di $A + B$ siamo disposti a sostenere un gruppo di sacrifici $S + S'$. Ma se C è un altro evento incompatibile con A, e lo giudichiemo non meno probabile di B, dopo aver sostenuto i sacrifici S per assicurarci il vantaggio V nel caso che si verifichi A, saremo ancora disposti a sostenere in più i sacrifici S' per poterne godere anche nel caso che si verifichi C; siamo ancora disposti quindi, in definitiva, a sostenere il gruppo di sacrifici $S + S'$ per poter godere del vantaggio V subordinatamente al verificarsi di $A + B$. Ossia, giudichiamo $A + C$ non meno probabile di $A + B$, come appunto volevamo dimostrare.

Queste argomentazioni non pretendono d'essere precise e rigorose: sono anzi volutamente vaghe, perchè in una questione di tal natura merita maggior diffidenza il ragionamento matematicamente più preciso, di cui sfugge necessariamente la maggiore o minore aderenza al processo psicologico, per sua natura inevitabilmente impreciso e vago. Mi sembra però che per questa via si raggiunga lo scopo prefissoci: di individuare nella sua radice l'essenza delle ragioni che guidano un individuo *coerente*, e gli impongono di sodisfare certi principi perchè la sua opinione sulla probabilità di certi eventi non gli appaia intrinsecamente contraditoria.

15. Possiamo ora ritornare alla definizione primitiva, basata sulla speranza matematica. Le ricerche degli ultimi numeri hanno rimosso i dubbi che essa poteva sollevare: abbiamo visto infatti che delle condizioni qualitative di significato immediato e manifestamente rispondenti al concetto intuitivo della probabilità conducono a una definizione perfettamente equivalente. Questa definizione ponetra più intimanente nel significato psicologico della probabilità, ma non dà che un criterio *descrittivo* per la valutazione numerica delle probabilità; dato un evento singolo E, essa non dà la possibilità, sia pure astratta e teorica, di valutarne la probabilità, se non indirattamente, mediante la considerazione di altri eventi e in relazione con essi.

Cerchiamo di chiarire mediante un'analogia. Si può definire la temperatura di un corpo cominciando col definire la disuguaglianza fra due temperature: di due corpi A e B si dirà a temperatura maggiore quello che, messi i due corpi a contatto, cede calore all'altro. Precisando poi in base ad analoghe esperienze qualitative quale di due dislivelli di temperatura debba ritenersi maggiore, ammesse delle proprietà sperimentali, che si considereranno come postulati, da cui scenda che le temperature hanno il carattere di grandezze e si può definire per esse l'addizione, rimarrà infine definita anche la misura di una temperatura in centigradi quando si aggiunga che $t=0$ e $t=100$ misurano rispettivamente la temperatura di congelamento e di ebollizione dell'acqua. Ma se uno volesse arrivare effettivamente a misurare la temperatura di un corpo seguendo questa via, dovrebbe disporre di una serie sufficentemente numerosa di corpi ad altre temperature che gli permettessero di verificare tutte le disuguaglianze che gli occorrono per giungere a una conclusione. Se dico invece: la temperatura è il numero segnato dal termometro, ne do una definizione che mi permette immediatamente di misurare la temperatura di un corpo, direttamente, senza aver bisogno d'altri corpi a temperatura diversa come termini di riferimento, purchè naturalmente disponga di un termometro.

Questo „termometro", nel caso delle probabilità, è data dal criterio della speranza matematica. E non è nemmeno un termometro privo di significato immediato, come quello delle temperature, che chi non ne conosce il funzionamento potrebbe leggere senza avvertire che misura il caldo ed il freddo. Esso si basa ancora sul concetto intuitivo; non fa che manipolarlo in modo che può apparire artificioso e può dar luogo perciò a qualche dubbio. Dimostrato, come s'è fatto ormai ampiamente, che di artificioso non c'è che l'apparenza, che quel criterio equivale, nei risultati, all'altro più intuitivo, non c'è più ragione di diffidarne.

16. Dimostrate le proprietà fondamentali del calcolo classico delle probabilità, ne scende che tutti i risultati di tale calcolo non sono che *conseguenze* della definizione che abbiamo data della *coerenza*. Un individuo che nel giudicare delle probabilità di certi eventi contradice un teorema del calcolo delle probabilità non è coerente: un competitore potrebbe scommettere con lui assicurandosi la vincita a colpo sicuro. Fra l'altre conseguenze, le note relazioni fra probabilità e frequenza, che sarà però utile illustrare in modo più conforme al nostro punto di vista. Tale argomento sarà trattato in altro lavoro.

Si sarà poi osservato che qui non s'è fatto mai cenno delle probabilità subordinate (probabilità che un evento si verifichi quando un altro evento si supponga verificato), del relativo teorema delle probabilità composte, e del concetto che ne deriva di eventi indipendenti. Gli è che quelle nozioni sono assai più delicate che non le si giudichi ordinariamente, e che non è affatto necessario introdurle al primo momento. Si può, ed è anzi consigliabile, se si vogliono render ben chiari i concetti, sviluppare in un primo tempo la teoria delle probabilità di un evento, teoria di cui abbiamo dato qui tutti i fondamenti, e lasciare a un secondo tempo l'estensione del calcolo delle probabilità agli eventi subordinati, estensione che abbisogna di premesse, di definizioni e di spiegazioni del tutto e anche concettualmente nuove e interessanti.

Anche questo argomento farà oggetto d'altro lavoro. Osserviamo però sin d'ora che, volendosi contentare di una definizione priva di contenuto psicologico, quali si danno usualmente, avremmo già tutti gli elementi per definire „formalmente“ la probabililità subordinata, ponendo „*probabilità di E subordinatamente ad E'*“ $= \frac{P(E \cdot E')}{P(E')}$. Da essa risulterebbe immediatamente il *teorema delle probabilità composte*:

$$P(E \cdot E') = P(E') \times P\left(\frac{E}{E'}\right),$$

ove si indichi $P\left(\frac{E}{E'}\right)$ la probabilità di E subordinatamente a E';

tale teorema non sarebbe però che una definizione dissimulata del simbolo $P\left(\frac{E}{E'}\right)$. Nel modo di procedere che svilupperemo e abbiamo qui preannunciato, si darà invece una definizione psicologica diretta della probabilità subordinata, grazie alla quale il teorema delle probabilità composte (e quindi la defizizione „formale" qui indicata) discende come conseguenza necessaria della solita definizione della coerenza. Ed è questo l'unico modo di procedere conforme al nostro punto di vista.

Roma, 4 giugno 1930-A/VIII.