Franco Eugeni

Le due rivoluzioni matematiche del secolo: da Bourbaki alla Matematica del discreto

Dedicato al Prof. Carlo EUGENI, mio padre,
nel giorno del suo ottantesimo compleanno (*)

INTRODUZIONE E DIVAGAZIONI

Al di là della verità della Matematica non ci
sono altre verità. Nella vita tutto è falso.
PITTIGRILLI

Da alcuni anni coloro che si interessano delle problematiche dell'insegnamento assistono ad un fermento intellettuale che forse non ha l'eguale nel passato. Probabilmente il modo nuovo di far circolare l'informazione attraverso i mass-media ha creato, nelle nuove generazioni, una situazione di ricettività del tutto nuova che sembra scostare l'Allievo medio da tutti gli schemi tradizionali.

Si dice, e forse non è un luogo comune, che al giorno d'oggi il sapere umano raddoppia, più o meno, ogni quarto di secolo. Ne segue che in un immediato futuro soltanto coloro che raggiungeranno una adeguata preparazione saranno in grado di fruire delle enormi possibilità offerte dall'aumento (da taluni detto progresso, e da taluni no...) dei prodotti tecnologici. Non vi è dubbio alcuno che la conoscenza delle tecnologie più avanzate è fonte di potere e di comodità senza precedenti. Così, si discriminano tra loro Nazioni e all'interno di esse restano culturalmente discriminate intere fasce sociali. Mentre l'Europa tiene il passo non è possibile instaurare alcun confronto tra paesi del terzo mondo e alcune realtà, ad esempio, negli Stati Uniti o nel Giappone.

Dunque in un futuro sempre più ricco di apparati sofisticati, occorrerà, qualora si desideri fruire degli stessi, dedicare sem-

(*) Questo articolo è dedicato a mio padre: il Prof. Carlo Eugeni. Egli opera dal 1930 circa in Abruzzo nel settore dell'Atletica Leggera ed è tuttora, all'età di 80 anni in attività.

Vedasi in appendice un breve profilo dal quale emerge la sua figura di Educatore e Studioso.

pre più tempo ed energie all'apprendimento. I depositari della nuova cultura, ricchi del potere della conoscenza, e sicuramente solo loro, formeranno la classe dei dirigenti di domani.

Purtroppo esistono fascie sociali che sono raggiunte dalla cultura solo attraverso la Scuola, ed a volte neanche da questa. Si pensi ad esempio alle scuole di borgata, ovvero di quartieri dove è quasi disonorevole il sapere.

L'istruzione scolastica oggi non è l'unica via del sapere. Per questo è sufficiente osservare che i nostri ragazzi, si sono autoistruiti dal punto di vista informatico, conoscono le lingue ed il mondo meglio di noi perché viaggiano più di quanto noi abbiamo potuto fare, forse leggono meno.

Il sessantotto è stato l'inizio di una nuova era, ma anche dal sessantotto e dai successivi periodi di ripensamenti, sono venuti tanti luoghi comuni dai quali ci è ancora difficile liberarci. Anche la Matematica ha avuto le sue rivoluzioni, ricordiamo la rivoluzione della Teoria degli Insiemi e la più recente rivoluzione Informatica.

Credo di essere convinto che nell'ambito degli sviluppi tecnologici futuri, la Matematica e l'Informatica giocheranno un ruolo fondamentale e veramente di primo piano. Così l'ottica con la quale sono portato a guardare la Didattica in genere e la Didattica della Matematica in particolare, è in un certo qual senso mirata o potrei dire dedicata, a quegli Allievi più fortunati di altri, che per loro capacità, per nascita, per la loro storia personale si trovino collocati nella fascia medio-alta della loro categoria. Questo articolo è dedicato principalmente a loro e ai loro Professori. Con questo non voglio creare malintesi, è chiaro che vi è un grande bisogno di studi di Didattica a vari livelli. Tuttavia ognuno di noi ha il diritto ed il dovere di interessarsi di quei settori per i quali ha in realtà maggiore interesse. Parafrasando Bruno Rizzi, anche io sono convinto che i ritardati mentali vanno aiutati, ma non occorre insegnare loro la Teoria della Relatività.

Una delle motivazioni che mi conduce a cercare proseliti nella fascia medio-alta è anche la convinzione che è molto importante far crescere i professori per farne crescere gli allievi. Tutti noi ricordiamo le patetiche resistenze passive di alcuni Professori all'avvento della Teoria degli Insiemi. Esse inesorabilmente ricadevano sui loro Allievi.

Nei più recenti Concorsi a Cattedre Regionali per le Superiori, ho notato una tendenza a mio avviso ancor più preoccupante. Da un lato i giovani laureati non hanno più esitazioni davanti a parole come: applicazione, gruppo, probabilità e magari sono anche in grado di mettere in piedi un vago discorso illustrativo sulla complessità computazionale. Ma il fatto fortemente negativo, a mio avviso, è che ormai hanno perso completamente di vista la Critica dei Principi. Ancora peggio, a domande quali: congruenza in Geometria, ovvero similitudine ovvero equivalenza oppure su metodologie introduttive delle classi numeriche essi ci guardano increduli come si fosse chiesto loro di illustrare i fondamenti della filosofia buddista.

Eppure un po' di Critica dei Principi, peraltro centro dei programmi ministeriali dei Concorsi stessi, non guasta. In questo sono certamente carenti le nostre strutture Universitarie; i corsi di Matematiche Complementari andrebbero potenziati ed introdotti, con opportuni adattamenti, anche in altri corsi di Laurea (ad esempio in tutti i Corsi di Laurea della Facoltà di Scienze, visto che tutti poi insegnano Matematica e magari anche agli Ingegneri. Questi ultimi sono ormai i nostri Professori di Matematica Applicata, disciplina che nelle secondarie è sinonimo di Matematica Finanziaria). A mio parere comunque si tratta solo di carenze conoscitive e non di decadenza culturale. I neolaureati, mi sembra, sanno parlare molto bene di quello che conoscono bene.

Credo che una adeguata informazione abbia la forza di mutare una mentalità. Al riguardo vorrei concludere questa lunga introduzione con un raccontino vero. Alcuni anni fa, Presidente ad una Maturità, avevo bisogno di un Commissario di Geografia. Non essendoci molta disponibilità locale proposi un mio amico geologo che da qualche anno insegnava Matematica e collaborava con un Matematico dell'Università di Roma. Il mio amico, diciamo il Geologo pentito, accettò la nomina. Esordì con la domanda: « *definizione di fiume e sue principali proprietà* ».

Nei paragrafi seguenti sarà presentata una carrellata di questioni varie che a mio avviso sono adatte a suscitare interessi e curiosità nonché desiderio di successivi approfondimenti. Per questo saranno dati riferimenti bibliografici e consigli di lettura ove se ne presenti l'occasione.

2. LA SCUOLA DI BOURBAKI: IL MATEMATICO CHE NON È MAI ESISTITO

Diversi anni orsono, all'Ecole Polytechnique di Parigi, alcuni studenti misero in piedi una farsa in grande stile. Annunciarono, ovunque tappezzando di avvisi, la conferenza di un grande scienziato russo: il «crante» matematico Nicolas Bourbaki, cultore di Logica Matematica e Matematiche Superiori. All'ora prevista, davanti ad un folto e scelto pubblico si presentò un uomo irsuto e mal vestito, stravagante di certo tutti pensarono, il quale tenne una erudita lezione audace mescolio di Analisi e Geometria di Algebra semi seria e Logica inesistente. Alcuni del pubblico compresero subito, ed accettarono in modo sornione il gioco, altri membri dell'eterogeneo uditorio non capirono subito. Il gioco andò avanti per un pò' tra il serio ed il faceto. Si rise, si applaudì, si mandò via il Conferenziere burlone ma il nome rimase!

Nicolas Baurbaki era il nome di un omonimo generale francese, ben noto, di provenienza greca. Non è chiaro molto il perché ma nel 1934-35 si costituì un gruppo di Matematici, giovani Professori, che nel loro progetto iniziale, si proposero di scrivere un nuovo libro di Analisi, forse in antitesi con il trattato di Goursat, che allora imperava in Francia. Invece che molti nomi sulla testata dei loro libri, essi scelsero uno pseudonimo, appunto Nicolas Bourbaki.

Bourbaki matematico dunque non è propriamente un soggetto fisico ma il nome assunto da un gruppo di dieci Matematici d'avanguardia. Il gruppo di tanto in tanto perdeva un elemento che si scostava per dissenzi ideologici o semplicemente perché se ne andava. E' una leggenda, ma si dice che quando uno di essi mostrava segni di senescenza gli altri gli sottoponessero un problema complesso ed insidioso. Se la prova non era superata il Bourbakista era eliminato e sostituito con uno più giovane.

Tra i fondatori troviamo nomi ormai leggendari: Andre Weyl, Charles Ehresmann, Jacques Delsarte, Henri Cartan, Jean Dieudonné, Claude Chevalley, il logico Jacques Herbrand (morto in un incidente a 23 anni), anche lo zio di Benoit Mandelbrot fu tra i primi Bourbakisti ed anche René Thom. Mandelbrot invece, per motivi ideologici, non fu dei loro. Del resto il concetto di Frattale si inquadra in una filosofia di rottura rispetto alla scuola Bourbakista, come del resto tutta l'Informatica e oserei dire tutta la matematica del discreto.

Lo stile del Bourbaki segna una nuova era: impostazione il più generale possibile, poi definizioni, proposizioni, lemmi, teoremi, corollari. Dal 1948 esiste il Seminare Bourbaki che è un preciso punto di riferimento.

In realtà l'opera nata inizialmente come testo per gli studenti, con il titolo Éléments de Mathématique, per rimarcare l'unitarietà della Matematica, è per gli sudenti troppo complessa, pur rimanendo una delle più belle costruzioni assiomatiche che possediamo.

> ...on sait ou jourd'hui qu'il è possibilede faire dériver presque toute la mathématique actuelle d'une source unique, la Théorie des Ensembles...

La filosofia bourbakista fa perno sullo studio formale della Matematica. Quando si tratta di scrivere o leggere un testo poco importa quale sia il significato dei simboli e dei termini, importa solo la corretta deduzione ovvero l'osservazione corretta delle regole della sintassi. Uno stesso calcolo algebrico può servire a risolvere problemi di chilogrammi, denaro, parabole o moti accelerati. Una volta stabiliti i teoremi della Topologia Generale essi possono essere applicati a piacere allo spazio ordinario, agli spazi Hilbertiani e a molti altri ancora. In tal modo si è spinti a studiare in una teoria proprietà tradizionalmente trascurate in un particolare modello, ma significative in un altro modello. Così se tra due campi si nota una analogia, allora si ricerca una teoria generale che le comprenda entrambe. Così a ritroso si costruiscono alcune strutture madri che il matematico può usare sia per analizzare strutture complesse sia per inventare strutture nuove. (Senza tuttavia esagerare con invenzioni, ovvero illusioni di ricerca e sempre ricordando che Bourbaki non ha mai detto che non si debba sapere la Matematica tradizionale !). Si può, volendo, approfondire questo argomento.

Un simpatico articolo del Bourbakista J. Dieudonne, in inglese, può essere utile allo scopo (cfr. [10]).

Attorno agli anni '60, e fino alla metà degli anni '70, vi fu in Italia grande disaccordo a proposito dell'introduzione della Teoria degli Insiemi. I più giovani, freschi dei loro studi e delle astrazioni felicemente conquistate, fecero di questa teoria la bandiera per vincere il loro complesso di Edipo nei confronti dei più esperti colleghi, che non avevano studiato la Teoria degli Insiemi. Anche tra i modernisti, vi era disaccordo in merito alla estensione da dare a tali conoscenze ed alle modalità didattiche da seguire.

Dunque « Matematica Moderna... contro... Matematica tradizionale,. l'una contro l'altra armate ». I modernisti avevano il toccasana e non volevano « consigli su come fare », i tradizionalisti la certezza di « sapere bene cosa fare senza quelle porcherie ». In realtà nessuno voleva studiare « più di quel tanto » ed allora era nato il falso ideologico delle Due Matematiche. Un comodo falso problema che doveva essere poi spazzato via dalla terza generazione, del post Corsi Abilitanti.

Ricordo, da buon modernista pertito, le polemiche durante i Corsi Abilitanti, nei quali venni a trovarmi ora in veste di coordinatore del corso ora in veste di Presidente.

3. IL DISCRETO FASCINO DEL DISCRETO: IL PRINCIPIO DEL CASSETTO

La Matematca Discreta o anche Combinatorica secondo altri è oggi una grossa disciplina indipendente. Tra le sue sottodiscipline compaiono branche vastissime quali ad esempio la Geometria Combinatoria, la Teoria dei Grafi e la Teoria dei Disegni di Blocchi. Al suo interno si può inquadrare sia l'Analisi Algebrica che alcune parti della Teoria dei Numeri. Non mancano ampi collegamenti con discipline maggiormente applicate. La Matematica Discreta ha capitoli e problematiche comuni con discipline quali Calcolo delle Probabilità, Statistica, Ricerca Operativa, Ottimizzazione Combinatoria, Crittografia e con tutto quel settore nuovo della Matematica Applicata che si occupa delle transazioni finanziarie per via elettronica (cf. [1]).

Ma poco importano i nomi, la Matematica Discreta si occupa molto a grosse linee di quei fenomeni degli insiemi finiti o al più numerabili, che non possono essere studiati facendo ricorso ad una più generale teoria del continuo magari governata da equazioni differenziali.

Da un punto di vista elementare ne vogliamo presentare una piccola parte, si spera dilettevole e curiosa, precisamente quella parte così elementare da potersi collocare subito dopo il più che scontato calcolo combinatorio.

Rivisitiamo rapidamente due semplici concetti: le combinazioni e le permutazioni semplici.

Sia A un insieme con n elementi o come si suole dire un n-insieme. Sia k un numero naturale con $0 \leq k \leq n$.

Si chiama *combinazione di n elementi a k a k* o *k-combinazione* un qualsiasi k-sottoinsieme di un fissato n-insieme.

La famiglia di tutte le parti di un n-insieme A, ivi compreso l'insieme vuoto e A stesso (il pieno) e la famiglia di tutti i k-sottoinsiemi di A, si denotano rispettivamente con:

$$2^A \qquad , \qquad \binom{A}{k} \qquad .$$

Se desideriamo contare il numero degli elementi di ciascuno di questi insiemi otteniamo le ben note classiche formule:

$$\# \text{ } k\text{-parti di } A = \binom{n}{k} = n\,! \;/\; k\,!\,(n-k)\,!$$

$$\# \text{ parti di } A = \quad 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

dalle quali deduciamo formalmente l'interessante relazione tra insiemi:

$$2^A = \bigcup_{k=0}^{n} \binom{A}{k}$$

Le *permutazioni* di un n-insieme A in se sono riguardate come le funzioni biettive di A in se ovvero come un qualsiasi ordinamento dell'insieme. Il loro numero è $n! = n(n-1)\ldots 1$, come ben noto. Le *disposizioni* (semplici) si possono riguardare come i k-sottoinsiemi ordinati di un n-insieme, ed allora è facile calcolare il loro numero. Possiamo anche trattare il caso delle ripetizioni, usando multi insiemi, ma per questo rimandiamo a [6].

Vogliamo ora occuparci del cosiddetto *principio del cassetto* (detto anche *pigeonhole principle*) e di qualche sua applicazione. Anche se molto semplice l'uso di questo principio esprime molto bene il modo di ragionare della Matematica Discreta.

Spesso per illustrare con una rapida battuta il modo di ragionare della Combinatorica si parla del *principio del pecoraio*: « se vuoi contare le pecore del gregge, conta le zampe e dividi per quattro ». La battuta è sicuramente di buon effetto, esprime il fatto che si può contare anche in modi impensabili.

Nelle applicazioni spesso si ricorre al principio del cassetto noto anche come pigeonhole principle.

Il nome *pigeonhole principle* deriva dal fatto che se un certo numero m di piccioni vogliono appollaiarsi sopra n trespoli (o entrare in n cassetti) e se $n < m$, allora almeno su un trespolo ci saranno due piccioni. La validità del principio è dunque ovvia, e nulla deve essere provato.

Formalizziamo ed esemplifichiamo.

Siano dati due insiemi A e B. Chiamiamo *oggetti* gli elementi di A e scatole (o *cassetti*) gli elementi di B. Una *distribuzione* degli oggetti nelle scatole è una funzione f di A in B:

$$f : A \longrightarrow B$$

Naturalmente la funzione f può essere *iniettiva*, ed allora ogni scatola riceve al più un oggetto ovvero può essere *suriettiva* ed allora ogni scatola riceve almeno un oggetto. Se il numero degli oggetti è maggiore del numero dei cassetti, allora qualche cassetto contiene più oggetti.

Abbiamo così formalizzato questo principio molto semplice. Le applicazioni non sono semplici perché spesso è difficile stabilire quali sono gli oggetti e quali sono le scatole.

E' immediato che:

— In ogni insieme di 13 o più persone, almeno due compleanni cadono nello stesso mese. In altre parole entro 366 persone due sono nate lo stesso giorno. Se dico un qualsiasi numero maggiore di 366, ad esempio « in questa scuola vi sono 823 alunni, allora almeno 4 hanno lo stesso compleanno, forse 5 ».

— In ogni insieme di un milione di persone, almeno due hanno lo stesso numero di capelli.

Vogliamo ora fare un esercizio: *provare che in ogni insieme di 12 interi distinti ne esistono almeno due la cui differenza è divisibile per 11.*

Siccome il resto della divisione di un numero positivo per 11 è un numero tra 0 e 10, almeno due dei numeri dati hanno lo stesso resto. Se il numero è negativo si può ricorrere alla divisione con resto positivo di un intero negativo per un intero positivo. (Siano a, n interi positivi con $a > n$. Dividendo con resto si ha la decomposizione $a = qn + r$, essendo la coppia (q, r) unica quando $0 \leq r < n$. Passando al negativo si ottiene:

$$-a = (-q)n - r = (-q-1)n + (n-r)$$

Anche questa decomposizione con quoziente negativo (se è positivo il divisore, positivo altrimenti) e resto positivo tra 0 ed n è unica. Segue l'asserto.

L'esercizio seguente è più complesso. *Provare che se P è un qualsiasi insieme di persone, ci sono in P almeno due persone che hanno lo stesso numero di amici in P.* (Si suppone, forse forzatamente, che la relazione « essere amico di... » è simmetrica, ma non riflessiva).

Consideriamo $\forall\, x \in P$ la funzione f, definita indicando con $f(x)$ il numero degli amici di x. Se P ha m elementi, i possibili valori assunti da $f(x)$ sono $0, 1, 2, \ldots, m-1$, questo naturalmente assumendo che x non è amico di se stesso.

Assumiamo come secondo insieme $B = \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Poiché P e B sono equicardinali, il principio del cassetto sembrerebbe non potersi applicare. Osserviamo allora che l'immagine $f(P)$ *non può contenere come elemento sia il valore* 0 *che il valore* $m-1$. Per convincersi di ciò si supponga che un fissato $e \in P$ abbia $m-1$ amici, cioè sia amico di tutti, cioè che tutti siano amici suoi, cioè che $f(P)$ non contenga 0. Analogamente se esistesse un $q \in P$ privo di amici, ciascuna persona della comunità P averbbe al più $m-2$ amici, non essendo q amico di p per ipotesi e di se stesso per definizione

Dunque abbiamo provato che $f(P) \subset B$, quindi il principio del cassetto è applicabile, quindi esistono in P almeno due elementi x ed x' con $f(x) = f(x')$, cioè con lo stesso numero di amici.

Lasciamo al lettore il simpatico compito di vedere se il teorema vale ancora quando le persone che compongono P sono ciascuna amica di se stessa.

Possiamo generalizzare un po'. Supponiamo di avere n insiemi, a due a due disgiunti $A_1, A_2, \ldots, A_n$, allora:

$$(3.1) \qquad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n| .$$

Se ciascuno degli insiemi considerato ha una cardinalità costante r, allora si può enunciare il principio del cassetto nella forma generalizzata: *Se* m *oggetti sono distribuiti in* n *scatole ed è* m > nr, *allora almeno una scatola contiene almeno* r + 1 *oggetti.*

Un esercizio che il lettore può fare da solo è il seguente: provare che in ogni insieme di sei persone o ci sono tre persone che si conoscono a due a due o ci sono tre persone che a due a due non si conoscono.

Sia x una delle 6 persone. Con le altre formiamo due scatole, quelli che conoscono x in 1 e quelli che non conoscono x nella 2. Essendo $5 > 2 \cdot 2$, in una delle scatole ci sono almeno 3 persone...).

Continuando a generalizzare il nostro principio del cassetto, ricorriamo ad un esempio ormai classico (cfr. [3]), che mostra quale possa essere la potenzialità nascosta dietro questa semplice idea.

Supponiamo che un giocatore di tennis (o scacchi o ping-pong ecc.) debba giocare per g giorni consecutivi, giocando almeno una partita al giorno per un totale di t partire, con la condizione che $g < t < 2g$. Allora per ogni $i \leq 2g - t - i$ esiste un gruppo di giorni consecutivi nei quali, complessivamente, il giocatore giochi esattamente i partite.

Molte problematiche di tipo combinatorio possono essere presentate in modo salottiero anche quando la Matematica sottogiacente è men che semplice. Può essere interessante leggere il lavoro [13] che è un magnifico esempio di questo tipo di problematiche. Molti problemi possono reperirsi in [3], [5], [6].

4. BELLEZZA, INUTILITÀ ED UTILITÀ DELLE BELLE FORMULE: IL PRINCIPIO DI INCLUSIONE ED ESCLUSIONE E IL DOPPIO CONTEGGIO

Chiunque si sia interessato di divulgazione matematica conosce il magico potere che hanno le formule sul pubblico non specialistico. Naturalmente queste formule devono avere alcune caratteristiche:

— devono essere brevi;

— i simboli che intervengono in esse devono essere di ovvia traduzione (codice universale);

— devono presentare un giusto equilibrio tra la simmetria perfetta (di per se noiosa) e la completa casualità (non attraente e addirittura fastidiosa all'occhio).

In altre parole una « bella formula » fa sempre il suo effetto. Naturalmente bella esteticamente parlando, quasi come un disegno di Echer: anche se in un disegno quasi tutto si vede con l'occhio mentre in una formula parte si vede con l'occhio e parte con la mente.

Un prototipo di bella formula può essere la *formula folkloristica* che fornisce il rapporto empirico, giudicato ottimale, in una coppia prossima a nozze

$$\frac{U}{2} + 9 = D \tag{4.2}$$

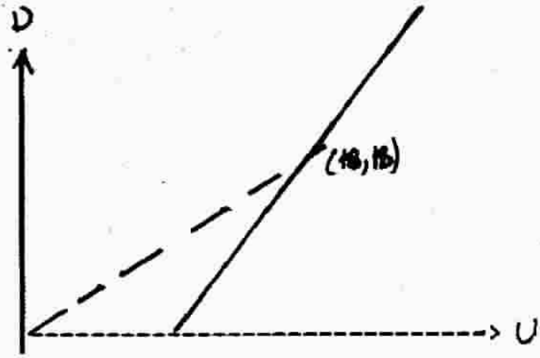
essendo U e D le età dell'uomo e della donna rispettivamente.

La formula non ha prova, al posto di 9 si può mettere da 7 a 11 a seconda delle idee personali, l'idea di base è sempre la stessa.

Provate ad esporla in una Conferenza e vedrete molte penne uscire dalle tasche per trascrivere la formula peraltro di nessuna utilità e priva di ogni fondamento diverso da quello di una battuta popolare.

Naturalmente accettata la formula si può teorizzare e commentare con un po' di Geometria Analitica.

U	D
12	15
14	16
16	17
18	18
20	19
30	24
40	29
50	34
60	39
70	44



La bisettrice (tratteggiata) si può chiamare linea d'inversione, le femministe possono cambiare questa retta, ma la formula è comunque simpatica.

La Matematica di tanto in tanto ci mostra formule insolitamente belle. Nella Matematica Discreta le « belle formule » sono molto frequenti. Una di queste, maestosa sia nella sua simmetria che nella sua casualità è quella esprimente il Principio di Inclusione ed Esclusione.

A differenza del precedente principio del cassetto questo va dimostrato (cfr. [6]). Si ha a che fare con il principio di inclusione ed esclusione quando nella (3.1) lasciamo cadere l'ipotesi che gli insiemi in esame siano a due a due disgiunti.

E' ben noto, ed anche di facile verifica, il caso di due insiemi per i quali la (3.1) corretta, diviene:

$$(4.1) \qquad |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| .$$

In generale il principio di inclusione-esclusione è espresso dalla formula seguente, nota in letteratura come formula di Da Silva:

$$(4.2) \qquad |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + \ldots + (-1)^n S_n$$

$$S_k := \sum_{|T|=k} \left| \bigcap_{i \in T} A_i \right|.$$

La prova, per induzione, è reperibile su molti testi. Vediamo una apparentemente complicata applicazione.

In un gruppo di 73 studenti, 52 sanno suonare il piano, 25 il violino e 14 il flauto. Inoltre 17 sanno suonare piano e violino. 12 piano e flauto, 7 violino e flauto. Infine 1 solo sa suonare tutti e tre gli strumenti. Quanti dei 73 non sanno suonare alcuno strumento ?

Indichiamo con P, V, F gli insiemi di studenti che sanno suonare piano, violino e flauto rispettivamente. Si ha:

$$|P \cup V \cup F| = S_1 - S_2 + S_3 = \{|P| + |V| + |V|\} -$$

$$- \{|P \cap V| + |P \cap F| + |V \cap F|\} + \{|P \cap V \cap F|\} =$$

$$= (52+25+24) - (17+12+7) + 1 = 66.$$

Dunque $73-66=7$ studenti non sanno suonare.

Concludiamo il paragrafo con un ultimo principio noto con il nome di *principio del doppio conteggio.*

Dati due insiemi finiti A e B, vogliamo contare gli elementi di una parte $R \subseteq A \times B$. Possiamo contare per questo il numero N delle coppie di R nei seguenti due modi diversi:

1) Si fissi $x \in A$. Denotiamo con $N(x, -)$ il numero delle coppie di R, aventi x al primo posto. Allora

$$N = \Sigma_{x \in A} N(x, -)$$

2) Si fissi $y \in B$. Denotiamo con $N(-, y)$ il numero delle coppie di R, aventi y al secondo posto. Allora

$$N = \Sigma_{y \in B} N(-, y).$$

Vediamo alcuni esempi applicativi.

a) Calcolare il numero dei lati di un cubo tridimensionale. Sia F l'insieme delle 6 facce ed S l'insieme degli spigoli di cui si vuole trovare il numero. Definiamo R come insieme di coppie faccia-spigolo appartenentesi. Risulta

$$N(x, -) = 4, \qquad N(-, y) = 2, \qquad |F| = 6$$

dunque

$$6.4 = 2.|S| \quad , \quad |S| = 12 .$$

b) Vertici e spigoli di un dodecaedro.
Il dodecaedro ha 12 facce pentagonali. Procedendo come sopra:

$$N(x, -) = 5, \qquad N(-, y) = 2, \qquad |F| = 12$$

dunque

$$12 \cdot 5 = |S| \quad , \quad |S| = 30 .$$

Sia V l'insieme dei vertici. Contiamo le coppie vertice-spigolo appartenentisi. Per ogni vertice passano tre spigoli, oppure tre facce. Allora:

$$|V|\,3 = |S| = 12 \cdot 5 \quad , \quad |V| = 20 .$$

c) Il caso del pallone da Football.
Su un pallone da football ci sono disegnati pentagoni ed esagoni. Ogni pentagono ha un lato comune con un esagono. Ogni esagono ha tre pentagoni e tre esagoni adiacenti. Sapendo che sul pallone ci sono 12 pentagoni, vogliamo sapere il numero degli esagoni. (Si ha per le coppie penta-esa-adiacenti $N(x, -) = 5$ e $N(-, y) = 3$, da cui $12 \cdot 5 = 3.e$, $e = 20$).

5. ED ADESSO CI METTIAMO PURE A COMBINARE MATRIMONI: I GRAFI

Vogliamo ora parlare di un Teorema di natura combinatoria, dimostrato da Philip Hall nel 1936 che risponde al seguente problema, noto in letteratura come *problema dei matrimoni.*

Sia M un insieme finito di ragazzi ed F un insieme finito di ragazze. Supponiamo che il generico ragazzo, indicato con m, conosca un certo gruppo $F(m)$ di ragazze dell'insieme F.

Sotto quali condizioni possiamo sposare tutti i ragazzi in modo che ogni ragazzo sposi una ragazza che conosce?

Ad esempio se vi sono tre ragazzi m, m', m'' e sei ragazze a, b, c, d, e, f e se la distribuzione delle conoscenze è data da:

$$F(m) = \{a, b, c\} \quad F(m') = \{a, e, f\} \quad F(m'') = \{c, d\}$$

il problema è chiaramente risolubile.

Ma non sempre le cose vanno bene, come si vede subito con esempi. Anche un occhio non esperto nota che se si prende un qualsiasi sottoinsieme di, ciascuno, k ragazzi il numero delle ragazze da questi complessivamente conosciuto deve essere almeno k, altrimenti qualche ragazzo rimane certamente « spaiato ».

[Esempio. Se $F(m) = a$, $F(m') = a$, $F(m'') = b, c$, allora o m oppure m' rimangono spaiati].

Tutto questo è ovvio. Quello che non è tanto ovvia è che questa evidente condizione necessaria è anche sufficiente. Sussiste infatti il

Teorema di Philip Hall. *Condizione necessaria e sufficiente a che il problema dei matrimoni sia possibile è che il numero complessivo delle ragazze conosciute da ciascun gruppo di* **k** *ragazzi sia almeno* k. *Cioè:*

$$\left| \bigcup_{m \in H} F(m) \right| \geq |H| \qquad \forall H \subseteq M .$$

La condizione necessaria è dunque banale. La dimostrazione della sufficienza è facile ed interessante. Si può fare ragionando per induzione sul numero totale m dei ragazzi.

Supponiamo $m = 1$, allora o la ragazza ci sta, magari con qualche amica di scorta o non ci sta, così il teorema è vero.

Supponiamo $m > 1$. Distinguiamo due casi:

a) k ragazzi di un qualsiasi gruppo conoscono complessivamente almeno $k + 1$ ragazze.

b) esiste almeno un insieme di k ragazzi i quali complessivamente conoscono esattamente k ragazze.

Nel caso a) scegliamo un ragazzo a caso e lo sposiamo ad una ragazza anche lei scelta a caso tra le ragazze che lo conoscono (quanto siamo cinici !). Rimangono $m - 1$ ragazzi k qualsiasi dei quali conoscono almeno k ragazze e per l'ipotesi induttiva il teorema è vero.

Nel caso b) se esiste un gruppo di k ragazzi che conoscono esattamente k ragazze e ciascuno di essi ne conosce almeno una allora ognuno di essi ne conosce esattamente una, non potendone conoscere di più, direbbe il Signor di La Palisse. Ognuno ne conosce una ed una sola, come su un'isola deserta, ed allora la sposa ! Rimangono $m - k$ ragazzi, fortunati scapoli, ma ancora per poco, la fine (del teorema naturalmente) è prossima. Ogni gruppo g di questi $m - k$ ragazzi conosce almeno g ragazze, altrimenti riunito il riunibile (cioè l'attuale con i k sposi di prima) qualche gruppo conoscerebbe meno di $g + k$ ragazze e ciò è contro l'ipotesi. Segue allora il teorema per l'ipotesi di induzione.

Il Teorema dei Matrimoni può (e deve) essere riletto in termini di Teoria dei Grafi. Senza addentrarci nella teoria stessa diremo che una coppia $G = (V, \mathscr{L})$ è un grafo se $\mathscr{L}$ è una famiglia di 2-insiemi, cioè se $\mathscr{L} \subset \binom{V}{2}$. Un grafo si dice *bipartito* se esistono due insiemi V' e V'' tali che $V = V' \cap V''$ essendo $V' \cap V'' = \varnothing$ ed $\mathscr{L} \subset V' \times V''$. E' il caso del nostro problema quando $V' = M$, $V'' = F$ e la coppia $(m, f) \in \mathscr{L}$ quando m ed f si conoscono. Un *accoppiamento completo* in un grafo bipartito è una iniezione di V' in V'' con la condizione che una coppia di elementi corrispondenti nella iniezione è in $\mathscr{L}$.

Il problema dei matrimoni equivale al problema degli accoppiamenti completi nei grafi bipartiti.

Per meglio comprendere come in ambito discreto problemi apparentemente lontani sono in realtà lo stesso problema, purché si individui, dopo aver intuito come stanno le cose, la giusta tecnica del « mutatis mutandis », diamo un altro sguardo al Teorema dei Matrimoni di Hall.

In generale sia P un insieme non vuoto di elementi detti punti. Sia $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ una famiglia di parti di P, che diremo blocchi.

La coppia $(P, \mathcal{B})$ si chiama « in gergo » uno spazio geometrico.

Un sottoinsieme T di P si dice un *trasversale* di $(P, \mathcal{B})$ se:

(1) $|T \cap B| = 1 \quad , \quad \forall B \in \mathcal{B}$

(2) $|T| = m$.

Il Teorema di Hall si può allora rileggere nel modo seguente:
TEOREMA (dei matrimoni di Hall, rivisitato).

Uno spazio geometrico $(P, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ ha un trasversale se e solo se l'unione di k qualsiasi elementi della famiglia $\mathcal{B}$ contiene almeno k elementi ($1 \leq k \leq$ m).

Dimostrazione. Si assuma $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ come insieme dei ragazzi e assumiamo $P = F$ come insieme delle ragazze. Quale che sia il ragazzo $i \in M$ assumiamo che l'insieme delle ragazze conosciute da i sia B_i. Si applichi ora il Teorema di Hall.

ESEMPIO. Nell'esempio visto all'inizio del paragrafo abbiamo l'insieme $P = \{a, b, c, d, e, f\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e la famiglia di parti $\mathcal{B} = \{ \{1, 2, 3\}, \{3, 4\} \}$. L'insieme $\{2, 4, 5\}$ è un trasversale.

PROFILO DEL PROF. CARLO EUGENI

Il Prof. Carlo Eugeni sta attualmente curando la II edizione del suo libro "30 e più anni di Atletica Leggera in Abruzzo". Si tratta di un libro di statistiche, primati, foto che nella precedente Edizione andava dalle origini al 1970, ora fino al 1990.

Carlo EUGENI, nato ad Ascoli Piceno nel 1911, si diploma a Roma presso l'Accademia Superiore di Educazione Fisica «La Farnesina» nel 1932. Nel 1931 aveva trascorso un periodo di formazione e studio di otto mesi negli Stati Uniti, seguendo un programma ben più sofisticato che non l'attuale «Erasmus». Dopo un breve periodo di insegnamento presso la stessa Accademia come Assistente è richiamato in Artiglieria, come Tenente prima e come Capitano poi. Negli anni tra le due guerre, a parte la parentesi della guerra d'Africa, quale Professore di Educazione Fisica e Vice Comandante della Gioventù Italiana del Littorio inizia quella che sarà l'interesse principale di tutta la sua carriera: l'insegnamento di massa. Inizia Appunto in quel periodo ad occuparsi di saggi, parate, campi estivi, premilitari, attività giovanili etc. etc.

Fin da allora Colleghi ed allievi lo hanno chiamato «Il Professore» identificando appunto l'uomo con l'educatore. Nel dopoguerra l'attività continua spasmodica tra campestri e i raduni che ora si chiamano «meeting». Ottiene anche alcuni riconoscimenti di grosso rilievo. Ricordiamo ad esempio che nella metà degli anni '50 fu per lungo tempo uno dei cinque Membri della Commissione Tecnica Nazionale per l'Atletica Leggera. Nel '60 come Presidente della Giuria lanci alle Olimpiadi Romane si diverte con il suo inglese.

Notevole la sua presa di posizione nei confronti dell'americano Al Cantello. Nonostante Al Cantello fosse il n. 1 e nonostante «Il Professore» fosse notoriamente filo-americano i lanci discutibili furono annullati con decisione. Altro grande riconoscimento ottiene nel 1986, precisamente la «stella d'oro» massimo riconoscimento per dirigenti sportivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Berardi - B. Rizzi, La funzione di Eulero torna alla ribalta nei nuovi codici a chiave pubblica: uno sguardo a questo settore, Per. di Mat. 4 (1987), 3-22.

[2] A. Beutelspacher, Einfuhrung in die endliche Geometrie I, II, Wissenshaftsverlag 1982, Mannheim/Wien/Zurich.

[3] N. L. Biggs - E. K. Lloyd - R. J. Wilson, Graph theory 1736-1936, Oxford University Press 1976.

[4] N. Bourbaki, Elemests de Mathematique, 39 volumi, Paris, 1939/1982.

[5] R. A. Brualdi, Introductory Combinatorics, North-Holland, New York, 1977.

[6] M. Cerasoli - F. Eugeni - M. Protasi, Elementi di Matematica Discreta, Zanichelli, Bologna 1988.

[7] M. Gionfriddo, Istituzioni di Matematiche, Tringale Editore, Catania 1985.

[8] M. Gionfriddo - C. Mammana, Matematica Discreta: la ricorrenza, Nuova Secondaria, Novembre 1989.

[9] J. Dieudonné, The work of Nicholas Bourbaki, Amer. Math. Montly, 77 (1970).

[10] D. Segre (Pitigrilli), Sette delitti, Sonzogno 1956.

[11] F. Speranza - D. Medici Caffarra - P. Quattrocchi, Insegnare la Matematica nella Scuola Elementare, Zanichelli, Bologna 1986.

[12] G. Tallini, Spazi di rette e Geometrie Combinatorie, Quaderno Seminario di Geometrie Combin. n. 3 (1977), Univ. Roma « La Sapienza ».

[13] M. Tallini Scafati, Il problema del cocktail party, Quaderno Seminario di Geometrie Combin. n. 81 (1988), Univ. Roma « La Sapienza ».

[14] R. J. Wison, Introduzione alla Teoria dei Grafi, Cremonese, Roma 1973.

Giuseppe Festa

Informatica e Creatività[1]

Quando si parla di creatività la mente corre subito ai grandi geni, specialmente nel campo dell'arte e della scienza, perché questi hanno dimostrato una creatività al di fuori del comune. Ma se per creatività si intende una capacità inventiva della ragione o della fantasia, non solo tutti gli uomini sono, in qualche misura, creativi ma questa capacità può essere sviluppata mediante un appropriato tipo di insegnamento divergente.

"Il fanciullo vive una stagione della vita in cui tutto è per lui «nuovo», e tutto viene assimilato entro schemi interpretativi e valutativi che si vanno attivamente costruendo: vi è pertanto in lui un notevole potenziale creativo che non deve esser nè represso nè frustrato, ma neppure dev'essere esaurito o dissipato. Una educazione rigida come una facilistica e permissiva sono ugualmente dannose alla creatività, che si alimenta anche di prove affrontate e di ostacoli superati."[2]

Una mente creativa ha una capacità costante di rinnovare, di ristrutturare, di reinterpretare i dati secondo rapporti e funzioni diverse.

Si ritiene che siano importanti aspetti della creatività l'originalità, la rapidità di pensiero, vale a dire la rapidità di parola, di associazione (produzione di sinonimi) di espressione (produzione di

(1) Precedono questo articolo "Informatica e scuola", P.d.M. n. 1-1991 e "Informatica e apprendimento", P.d.M. n. 4-1991.

(2) M/ LAENG, Lessico pedagogico, II ed., La Scuola, Brescia, 1984 (I ed.).

frasi), di una grande varietà di idee (possibili usi non comuni di oggetti comuni; assegnare un titolo ad un racconto), la cosiddetta flessibilità spontanea; la flessibilità all'adattamento, che facilita la risoluzione di situazioni problematiche.

Quantunque non sia stato provato che persone creative rifuggano dal conformismo, anche morale (genio e sregolatezza ...), tuttavia sembra che le persone più creative siano quelle più aperte, flessibili e non convenzionali; quelle che preferiscono la via nuova a quella vecchia, ad onta del proverbio; che scelgono carriere meno "sicure", al contrario di quelle meno creative.

I procedimenti per promuovere la creatività devono promuovere l'intelligenza? Per quanto la risposta sembrerebbe scontata, è bene riflettere un momento sul fatto che tutti i test di intelligenza sono di tipo convergente, a risposta unica, e che quindi non possono servire per accertare la creatività, per la quale occorrono test divergenti.

Di fatto non è possibile distinguere la creatività dall'intelligenza: esse sembrano essere strettamente correlate, anche se l'essere creativo implica qualche cosa in più rispetto ad essere "comunemente" intelligente.

Se si usa un tipo di insegnamento che produce una mentalità di tipo riproduttivo, se si insegnano soltanto nozioni, tecniche, procedimenti standardizzati, l'insegnamento procede su binari sicuri ma l'alunno è frustrato perché si comprime la sua spontaneità e la sua capacità di rinnovamento.

Chiaramente non si pretende che un alunno dimostri la sua creatività con un'opera geniale: basta dimostrare di saper affrontare una situazione problematica nota in modo nuovo. Tanto per rimanere nel tema, la personalizzazione di un programma di informatica, cioè l'adattamento di un programma ai propri bisogni, è una dimostrazione di creatività.

Nel parlare di informatica e creatività si può ripetere ciò che si può dire di qualunque altra disciplina: tutto dipende dal modo in cui si insegna e da che cosa si insegna.

Programmi didattici rigidi, in cui sono previste soltanto situazioni problematiche a risposta unica, possono frenare l'originalità e la creatività.

L'INTELLIGENZA ARTIFICIALE

I calcolatori sono generalmente chiamati macchine intelligenti, perché il loro comportamento simula in qualche modo l'intelligenza umana. Di fatto un calcolatore è una macchina stupida: ciò che la fa sembrare intelligente è il programma che una persona intelligente ha scritto per lui. I calcolatori, per quanto possano funzionare intelligentemente, non fanno altro che ricordare delle istruzioni ed eseguirle pedissequamente e velocemente.

L'intelligenza artificiale studia la produzione di programmi per la risoluzione di problemi, da parte di un elaboratore, che se fossero risolti dall'uomo avrebbero bisogno di un comportamento intelligente.

Questa definizione, in fondo, non è molto restrittiva: se non ci mettiamo d'accordo su che cosa è l'intelligenza, qualunque macchina calcolatrice, anche meccanica, può ritenersi intelligente.

Non tenteremo di dare una definizione di intelligenza, ma porteremo alcuni esempi che, forse, serviranno a chiarire il nostro pensiero.

Insegnare ad un calcolatore a risolvere dei problemi standard (mediante opportuni programmi) non è difficile. Ma con questo l'elaboratore non dà una manifestazione di intelligenza perché i compiti ripetitivi che si possono automatizzare non sono considerati comportamenti molto intelligenti nemmeno nell'uomo. Se un calcolatore vuole dimostrare di essere intelligente, dovrebbe poter risolvere un problema che presenti anche una pur minima differenza da uno per il quale è stato programmato. Deve, perciò, essere capace di seguire un ragionamento, sia pure elementare.

Già una ventina di anni fa fu scritto l'ormai famoso programma ELIZA, di cui si trovano in circolazione versioni per quasi tutti i computer, che simula un colloquio tra un paziente ed uno psicanalista. In effetti si tratta di un programma che, riprendendo alcune parole dell'intervistato, ripropone altre domande, col risultato di simulare la comprensione delle risposte del paziente.

Un piccolo programma, come il seguente (scritto in BASIC), dà un'idea, sia pure molto vaga, della tecnica usata:

```
10 INPUT "COME TI CHIAMI"; A$
20 PRINT "CIAO, "A$";:"INPUT"DOVE VAI"; B$
30 IMPUT "PERCHÉ "A$", VAI "B$
ecc.
```

Il dialogo tra uomo e macchina può essere il seguente:

- COME TI CHIAMI?
- GIUSEPPE
- CIAO, GIUSEPPE, DOVE VAI?
- A MILANO
- PERCHÉ, GIUSEPPE, VAI A MILANO?

ecc.

Il calcolatore non fa altro che immettere in stringhe A$, B$, ... le risposte e le utilizza, per ulteriori domande. Ovviamente, un programma come ELIZA è capace di analizzare le risposte date dall'utente e di trovarvi dei riferimenti da poter ripetere nelle domande.

Altri comportamenti di elaboratori intelligenti sono esemplificati da giochi come gli scacchi, di cui vi sono programmi fatti tanto bene che il computer viene battuto soltanto da maestri. Al profano non fa tanto impressione di essere battuto,n quanto il fatto del come il calcolatore riesca a rispondere adeguatamente alle sue mosse, dato che è impossibile prevederle tutte.

In verità il programma è redatto in modo tale da valutare le mosse possibili, sulla base delle regole immesse in memoria per il movimento dei vari pezzi, e fa quella con il punteggio più alto. Tanto per fare un esempio, se in un programma è stabilito che il valore di un cavallo è maggiore di quello di un alfiere, quando il computer si trova a dover fare una scelta, "mangerà" il cavallo.

Un ottimo programma di scacchi decide una mossa da fare, non solo valutando il valore dei pezzi ma anche le possibili risposte dell'avversario e le mosse successive, fino ad un certo livello.

Questo è già un esempio, anche se modesto, di intelligenza artificiale, ma il problema è aperto su altre possibili Applicazioni: la comprensione del linguaggio naturale; la traduzione automatica; la risoluzione di problemi non standard; la dimostrazione automatica dei teoremi; ecc.

Tuttavia, qualche altro buon esempio di elementare intelligenza artificiale c'è già adesso: i cosiddetti "sistemi esperti" dispongono di un programma di deduzione col quale, sulla base di alcune premesse e conclusioni, redatte da persona esperta in un dato campo e immagazzinate in memoria, e di risposte date dall'intervistatore, si possono risolvere delle situazioni problematiche molto interessanti, come questi in apparecchiature sofisticate e persino la diagnosi di malattie.

Supponiamo, tanto per fare un esempio facile, che il sistema sia esperto in triangoli e sia capace di individuare la specie di cui si tratta. Il programma comincerà col porre alcune domande e deciderà sulla base delle risposte avute. Ad esempio:

- HA I TRE LATI UGUALI?
- NO
- HA DUE LATI UGUALI?
- SI'
- HA UN ANGOLO RETTO?
- NO
- HA UN ANGOLO OTTUSO?
- SI'
- ALLORA E' UN TRIANGOLO ISOSCELE OTTUSANGOLO.

Il dialogo così come è stato presentato, è piuttosto rigido. Tuttavia è già possibile predisporre sistemi esperti "user friendly", che consentono un dialogo libero con l'utente e che, pertanto, sono meglio accettati dall'uomo.

Ma siamo ancora all'inizio...

Emilio Ambrisi

Economizzare nelle operazioni

Se x è un numero, in genere reale, x^n è per definizione:

$$x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots$$

n fattori tutti uguali ad x;

Calcolare x^4 significa dunque, in base alla definizione, effettuare:

$$x \cdot x = x^2$$
$$x^2 \cdot x = x^3$$
$$x^3 \cdot x = x^4$$

In totale, tre moltiplicazioni.
Più rapidamente, con due sole moltiplicazioni;

$$x \cdot x = x^2$$
$$x^2 \cdot x^2 = x^4$$

Per x^{16}, invece delle 15 moltiplicazioni suggerite dalla definizione, basta fare:

$$x \cdot x = x^2$$
$$x^2 \cdot x^2 = x^4$$
$$x^4 \cdot x^4 = x^8$$
$$x^8 \cdot x^8 = x^{16}$$

sono sufficienti cioè solo 4 moltiplicazioni; con una economia non indifferente di calcolo.

Riflettere sul numero di operazioni non è solo un problema di aritmetica computazionale ma equivale ad avviare un'attività matematica molto ricca in cui le proprietà delle potenze e le altre operazioni fondamentali sui numeri naturali sono messe particolarmente a frutto.

Ad esempio poiché $6 = 2 \cdot 3$ è:

$$x^6 = (x^3)^2 = x^3 \cdot x^3$$

ma anche

$$x^6 = (x^2)^3 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$$

quindi

$x \cdot x$ una moltiplicazione
$x^2 \cdot x$ due moltiplicazioni
$x^3 \cdot x^3$ tre moltiplicazioni

o anche:

$x \cdot x$
$x^2 \cdot x^2$
$x^3 \cdot x^3$ sempre 3 moltiplicazioni

La differenza tra le due procedure consiste nel fatto che per la prima occorre memorizzare la x in ingresso, nella seconda la x^2.

A questo punto, ci si potrebbe interrogare se esiste un metodo che dia subito il numero più piccolo di moltiplicazioni per valutare una potenza x^n.

In effetti *esistono più metodi ma nessuno di essi dà sempre il numero minimo di operazioni da effettuare*. Uno di questi metodi è appunto quello della fattorizzazione dell'esponente.

Metodo dei fattori

Il metodo dei fattori si basa dunque sulla fattorizzazione dell'esponente n. Se $n = p \bullet q$ dove p è il più piccolo fattore primo di n e $q > 1$, si può calcolare x^n calcolando prima x^p ed elevando poi questa quantità alla q-esima potenza. Se n è primo si calcola x^{n-1} e si moltiplica per x. L'applicazione ripetuta di queste regole dà una procedura per valutare x^n per ogni dato n.

Sia ad esempio da calcolare x^{15}. Poiché $15 = 3 \bullet 5$ occorre calcolare $y = x^3$ e $x^{15} = y^5 = (x^3)^5$

$x^3 = x^2 \bullet x$	due moltiplicazioni
$y^5 = (y^2)^2 \bullet y$	tre moltiplicazioni

In totale cinque moltiplicazioni.

Metodo binario

Un metodo molto più antico e semplice (D.E. KNUTH[1] lo attribuisce addirittura alla matematica indù) si basa sulla scrittura binaria del numero n che è una successione di "*1*" e di "*0*".

Il metodo consiste nel sostituire alla cifra "*1*", *QX* e alla cifra "*0*" *Q*, e cancellando il primo *QX*.

Il risultato è una regola per calcolare x^n se si interpreta "*Q*" come "quadrato" e *X* come "moltiplicazione per x".

Consideriamo la potenza x^{15}; poiché 15 = 1111 si ha:

QX QX QX QX

e cancellando il primo *QX* a sinistra

QX QX QX

---

(1) Donald E. Knuth, **the Art of Computer programming**, Addison-Wesley 1969, vol. 2, pag. 398 e seguenti.

ovvero
quadrare - moltiplicare per x - quadrare - moltiplicare per x - quadrare - moltiplicare per x

$$\begin{array}{ll} x \cdot x = x^2 & \text{una moltiplicazione} \\ x^2 \cdot x = x^3 & \text{due moltiplicazioni} \\ (x^3)^2 = x^6 & \text{tre} \quad '' \\ x^6 \cdot x = x^7 & \text{quattro} \quad '' \\ (x^7)^2 = x^{14} & \text{cinque} \quad '' \\ x^{14} \cdot x = x^{15} & \text{sei} \quad '' \end{array}$$

Per x^{15} operando con il metodo binario occorre una moltiplicazione in più che operando con il metodo dei fattori. C'è da osservare che 15 è *il più piccolo esponente* per cui ciò capita e che per tutti gli $n < 15$ i due metodi forniscono lo stesso numero di operazioni. Per $n = 33$ però la situazione si inverte; è il metodo dei fattori a richiedere una operazione in più e 33 è *il minimo intero per cui ciò accade.*

Infatti, con il metodo dei fattori $x^{33} = (x^3)^{11}$; per valutare

$$\begin{array}{ll} y = x^3 = x^2 \cdot x & \text{due moltiplicazioni} \\ y^{11} = (y^2)^5 \cdot y & \text{cinque moltiplicazioni} \end{array}$$

in quanto

$$\begin{array}{ll} z = y^2 = y \cdot y & \text{una moltiplicazione} \\ z^5 = (z^2)^2 \cdot z & \text{tre moltiplicazioni} \\ z^5 \cdot z & \text{una moltiplicazione} \end{array}$$

In totale 7 moltiplicazioni.

Con il metodo binario 33 = 100001 quindi

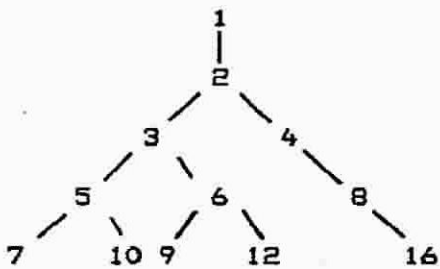
$$\begin{array}{l} QX\ Q\ Q\ Q\ Q\ QX \quad \text{ovvero} \\ \quad\;\; Q\ Q\ Q\ Q\ QX \end{array}$$

cioè solo sei operazioni.

E' opinione di più autori che il metodo dei fattori, in media, funzioni meglio, ma il metodo binario è molto più facile e rapido. Didatticamente poi si rileva ancor più incisivo perché fornisce un'applicazione della stessa scrittura binaria dei numeri.

L'albero della potenza

Un altro modo per economizzare sul numero di moltiplicazioni occorrenti per calcolare una potenza è quello di far riferimento all'ALBERO POTENZA riportato in figura:



Per calcolare x^n, basta trovare n sull'albero; il numero di passi dall'origine ad n, dà il numero necessario di moltiplicazione e i numeri che si incontrano nei successivi "nodi" rappresentano la sequenza di esponenti di cui bisogna tener conto nel calcolo.

L'albero potenza non risulta comodo da utilizzare specie per valori non piccoli di n e ciò soprattutto per la sua costruzione. Comunque può riuscire certamente utile, se non addirittura un divertente esercizio, conoscere ed applicare la regola di formazione dei successivi nodi fino ad un certo punto della arborescenza. Per la costruzione della linea $(k + 1)$-esima si procede da sinistra a destra come segue:
al primo nodo n della riga k-esima si congiungono, nell'ordine, i nodi

$$n + 1, n + a_1, ..., n + a_k = 2n$$

dove $1, a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k$ sono i nodi che si intercettano nel cammino dalla radice dell'albero ad n. Non si riportano, però, come nodi, quei numeri che già compaiono nell'albero.

Per la costruzione ad esempio della sesta riga dell'albero riportato in figura si parte dal numero 7. Si ottengono:

$$7+1, 7+2, 7+3, 7+5, 7+7$$

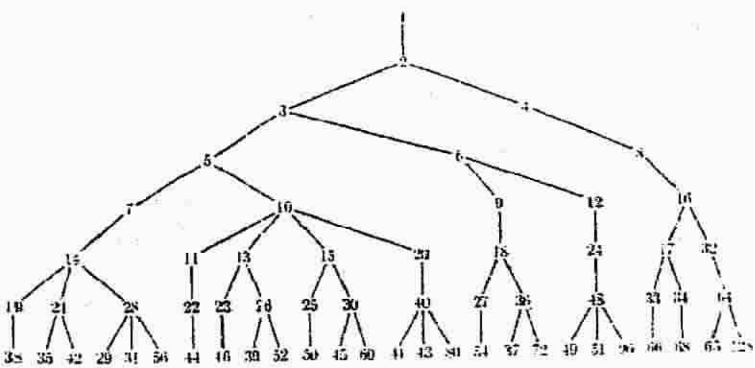
Poiché 8, 9 10 e 12 già figurano nell'albero, l'unica filiazione di 7 è il nodo 14.

Per il nodo successivo a destra, 10, si ottengono:

$$10+1, 10+2, 10+3, 10+5, 10+10$$

Escluso 12, si hanno i nodi, nell'ordine, 11, 13, 15, 20.

L'albero fino all'ottava riga è quello della figura seguente:



In molti casi comunque l'albero potenza dà risultati migliori sia del metodo binario sia del metodo dei fattori e $n = 23$ è *il più piccolo n per cui ciò accade.*

Il problema del calcolo di una potenza è patrimonio dei primi anni di scolarità ed il fatto che non esiste una risposta univoca alla determinazione del numero minimo di operazioni da compiere ma che questo dipenda dal metodo utilizzato ha certamente una grossa rilevanza didattica e formativa. Rilevanza che diviene ancor più incisiva se si nota che una tale risposta esiste per l'analogo problema del calcolo del valore di un polinomio $P(x)$ per un dato x. In questo caso la risposta è determinata dall'algoritmo di Ruffini-Horner[2] che consiste nello scrivere il polinomio

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}\,x + a_n$$

nella forma:

$$(....((a_0x + a_1)x + a_2)\,x + ... + a_{n-1})\,x + a_n$$

che, vale la pena di notarlo, richiede, con una sola posizione di memoria esattamente n moltiplicazioni ed n addizioni (una addizione in meno per ogni coefficiente nullo) per valutare $P(x)$ per un determinato valore di x. E.G. Belaga (nel 1958) e V.Ya Pan (nel 1962) hanno dimostrato, rispettivamente, che n è il numero **minimo** di addizioni e di moltiplicazioni necessario per calcolare $P(x)$ di grado n e con coefficienti generali.[3]

---

(2) Paolo Ruffini pubblicò la regola nel 1804 (nelle Memorie della Società Italiana delle Scienze, Modena) e G.W. Horner successivamente nel 1819 negli atti della Royal Society of London utilizzò la regola nella discussione di un metodo per valutare $P(x+c)$. Essa è ora universalmente nota come algoritmo di Ruffini-Horner (la priorità di Ruffini fu riconosciuta esplicitamente da F. Cajori solo nel 1911) anche se più di cento anni prima di Ruffini era stata data da I. Newton e addirittura, secondo J.L. Coolidge, era probabilmente già patrimonio della matematica cinese dal tredicesimo secolo.

(3) G. Geymonat, **Lezioni di Matematica**, Levrotto & Bella 1981, vol. 1, pag. 216. Un inserimento del problema nei testi scolastici è stato operato da C. Sbordone nella sua **Algebra** per il biennio superiore, ed. Loffredo, Napoli 1988.

Dore Augusto Clemente* - Alberto Giannone**

Applicazioni del calcolo numerico a problemi di Chimica Generale.

1. Introduzione

L'insegnamento della Chimica Generale nei corsi propedeutici, utilizza di norma il ragionamento euristico, per una semplificazione di particolari problemi di calcolo chimico, necessaria al fine didattico di rendere agevole la risoluzione mediante formule od algoritmi usuali.

La qualità dei risultati però, sarebbe migliore se un ragionamento più rigoroso obbligasse all'uso di metodi matematici più fini e disponibili per i calcolatori.

I programmi in Basic (trasformabili in Fortran) che si trovano in questa nota, sono usati dagli autori nella risoluzione di due noti problemi, quello sulle soluzioni tampone e quello sulla soluzione formata da due acidi.

I risultati, confrontati con quelli ottenuti con le formule classiche, sono esposti nelle tabelle in seguito riportate.

Essi necessitano solo di un piccolo calcolatore tascabile programmabile in Basic o meglio in Fortran o di una normale calcolatrice con almeno sei posizioni di memoria.

* Dip. Scienze dei Materiali, Univ. LE

** Dip. Scienze Biologiche, Univ. LE

I vantaggi a livello didattico sono enormi, nelle esercitazioni dei corsi specifici di calcolo chimico.[1]

Per programmi più evoluti, per fini di ricerca, cfr. [1], [2], [3], [4].

2. Il procedimento dei Chimici, per determinare la concentrazione $[H_3\,O^+]$ dello ione idrossonio in una soluzione tampone, è quello ben noto, (cfr. [6]): Un sistema non lineare di equazioni algebriche, viene opportunamente semplificato mediante approssimazioni su alcune delle concentrazioni di Specie chimiche presenti in soluzione.[2]

Si ottiene facilmente la formula:

$$[H_3\,O^+] = K_a \cdot C_a / C_b$$

con K_a, C_a, C_b costanti note.[3]

Lo stesso sistema, invece, può ricondursi, senza congetture di alcun tipo, ad una equazione algebrica, di terzo grado in

$x = [H_3\,O^+]$:

$$F(x) = x^3 + (C_b + K_a)\,x^2 - (K_a\,C_a + K_w)\;x - K_a\,K_w = \emptyset$$

con K_w costante, uguale al prodotto ionico dell'acqua ($K_w = 10^{-14}$ a 25° C).

La risoluzione può ottenersi col noto metodo delle tangenti[4] per la ricerca degli zeri di una funzione continua assieme alle sue derivate, prima e seconda, applicato tramite programma in Basic:

$$F(x_i) + (x - x_i)\,F'(x_i) = \emptyset$$

1 Ad esempio, Stechiometria o Calcoli Chimici in Chimica e Chimica Industriale.

2 Si ritengono "trascurabili" e perciò poste uguali a zero, alcune concentrazioni incognite, che "a priori" sono valutate molto più piccole di altre. In una trattazione con metodi non-standard, esse sarebbero uguali a numeri "infinitesimi" (cfr. [7]).

3 K_a costante di dissociazione dell'acido monobasico di concentrazione analitica C_a; C_b concentrazione analitica della base coniugata. Normalmente, nei laboratori sperimentali si incontra il problema inverso (cfr. [5]).

La soluzione:

$$x = x_i - F(x_i) / F'(x_i)$$

denotata con x_{i+1}, viene utilizzata per ottenere una soluzione più accurata x_{i+2} e così di seguito sino a precisione desiderata.

La lista del programma è:

```
ØØ   REM : PH-TAMPONE
1Ø   KA = 1.8E-Ø5
2Ø   KW = 1.ØE-14
3Ø   INPUT "CA="; CA
4Ø   INPUT "CB="; CB
5Ø   A = 1.Ø
6Ø   B = KA+CB
7Ø   C = -(KA*CA+KW)
8Ø   D = -KA*KW
9Ø   REM : DEF.STARTING POINT
1ØØ  X = KA*(CA/CB)
11Ø  N = Ø
12Ø  N = N+1
13Ø  F = ( (A*X+B)*X+C )*X+D          "calcolo della F(x)"
14Ø  FD = ( 3*A*X+2*B )*X+C           "calcolo della F'(x)"
15Ø  DX= F/FD
16Ø  XN=X-DX
17Ø  X =XN
18Ø  PRINT " CICLO= " ; N
19Ø  PRINT X
2ØØ  IF(ABS(DX) > 1.0E-08) THEN GOTO 12Ø
21Ø  END
```

4 Tale metodo è più noto nella letteratura chimica e cristallografica come metodo di Newton-Raphson, (cfr. [4]).

3. In alternativa, si utilizza il procedimento di Tartaglia Cardano, per un altro programma in Basic.[4]

Sia

$$a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_o = \emptyset \ . \qquad 1)$$

Posto,

$$p = \frac{3a_1 / a_3 - (a_2 / a_3)^2}{3},$$

$$q = \frac{2(a_2 / a_3)^3 - 9a_1\, a_2 / a_3^2 + 27a_0 / a_3}{27}$$

la 1) ha tre radici reali se

$$DT = q^2 / 4 + p^3 / 27 \leq \emptyset \ .$$[5]

In tal caso, le radici sono:

$$x_1 = z \cdot \cos\,(\Theta / 3) - a_2/3a_3$$

$$x_2 = z \cdot \cos\,\left(\frac{\Theta + 2\pi}{3}\right) - a_2/3a_3$$

$$x_3 = z \cdot \cos\,\left(\frac{\Theta + 4\pi}{3}\right) - a_2/3a_3$$

dove $\quad z = 2 \cdot \sqrt{-P/3} \quad$ e $\quad \Theta = arccos(-q/2 \sqrt{-p^3/27})$

5 Se $DT > \emptyset$, la 1) ha una sola radice reale, che non si riporta perché, tale caso non è stato incontrato.

Nei casi dei problemi qui proposti, solo x_1 ha significato chimico, le altre due radici risultano negative.

La lista del programma in Basic è la seguente:

```
ØØ  : REM ROOTS OF THE CUBIC EQUATION FOR BUFFER SOLS
1Ø  : RADIAN
2Ø  : DIM X(3), Y(3)
3Ø  : KA = 1.8E -Ø5
4Ø  : KW = 1.ØE -14
5Ø  : INPUT "CA="; CA
6Ø  : INPUT "CB="; CB
7Ø  : A3 = 1.Ø
8Ø  : A2 = CB + KA
9Ø  : A1 = -(KA*CA + KW)
1ØØ : AØ = -KA*KW
11Ø : IF (ABS(A3) < 1.ØE-12) THEN GOTO 44Ø
12Ø : A = AØ/A3
13Ø : B = A1/A3
14Ø : C = A2/A3
15Ø : P = (3*B - C ∧ 2)/3
16Ø : Q = (2*C ∧ 3 -9*B*C + 27*A) /27
17Ø : U = Q ∧ 2/4
18Ø : V = - (P ∧ 3 /27)
19Ø : DT = U - V
2ØØ : IF (DT < Ø) THEN GOTO 29Ø
21Ø : IF (DT > Ø.Ø1) THEN GOTO 26Ø
22Ø : REM Ø.Ø < DT < Ø.Ø1 E' CONSIDERATO ESSERE ZERO.
23Ø : CT = SGN(-Q)
24Ø : GOTO 3ØØ
25Ø : REM DT > Ø.Ø1        CI SONO DUE RADICI IMMAGINARIE.
26Ø : PRINT DT
27Ø : GOTO 46Ø
```

```
28Ø : REM IF DT < Ø            CI SONO TRE RADICI REALI.
29Ø : CT = (-Ø.5*Q) / SQR (V)
3ØØ : TH = ACS (CT)
31Ø : Z   = 2*SQR(-P/3)
32Ø : T3 = TH/3
33Ø : REM Y(I) : TRE RADICI REALI
34Ø : FOR I = 1 TO 3
35Ø : Y(I) = Z*COS(T3+2.Ø94395102*(I-1))
36Ø : NEXT I
37Ø : C3 = C/3
38Ø : FOR I = 1 TO 3
39Ø : X(I) = Y(I) - C3
4ØØ : PRINT X(I)
41Ø : NEXT I
42Ø : REM                 VA A LEGGERE UN NUOVO CA & CB
43Ø : GOTO 5Ø
44Ø : REM A3 PICCOLO
45Ø : PRINT "A3 =" ; A3
46Ø : END
```

4. Per il confronto dei risultati, nella seguente tabella sono riportati i valori di $[H_3\,O^+]$ in moli/litro per una soluzione tampone di acido acetico ed acetato sodico (CA = concentrazione analitica dell'acido acetico, CB = concentrazione analitica di acetato sodico).

I valori della colonna 1 sono ottenuti con la formula classica, mentre quelli delle colonne 2, 3, sono ottenuti rispettivamente, col metodo delle tangenti e col metodo di Tartaglia-Cardano.

I risultati della colonna 3 sono ottenuti con il programma Fortran "CUBT"[6], scritto in DOPPIA PRECISIONE (IMPLICIT

6 Il programma Fortran "CUBT" (radici di un'equazione di 3° grado con il metodo Tartaglia-Cardano) può essere richiesto direttamente agli autori di questa nota.

DOUBLE PRECISION (A-H, O-Z)).
Necessita tale precisione quando il $DT = U-V$ diventa troppo piccolo. Infatti, quando $U \equiv V$, si può ottenere il $DT > Ø.Ø$ come risultato degli errori di arrotondamento, anche se in realtà DT è minore di zero. Per esempio, nel caso di $CA = 10^{-6}$ e $CB = 10^{-1}$, usando il Basic dello SHARP-PC-1402, che è in semplice precisione, si ottiene:

$$DT = + 1.Ø\,E - 18$$

e quindi

$$[H_3\,O^+] = 10^{-10},$$

invece che il risultato esatto:

$$DT = - 0.662D\text{-}23$$

e quindi

$$[H_3\,O^+] = 1.435 \bullet 10^{-9}.$$

Per questi motivi, si preferisce il metodo di Newton-Raphson. Anche se "metodo approssimato", esso permette una programmazione più semplice, meno soggetta agli errori di arrotondamento del calcolatore.

TABELLA A ——————[$H_3\,O^+$]——————

CA	CB	1	2	3
10^{-1} M	10^{-1} M	1.8 10^{-5}	1.799 10^{-5}	1.799 10^{-5}
10^{-4}	10^{-1}	1.8 10^{-8}	1.810 10^{-8}	1.810 10^{-8}
10^{-5}	10^{-1}	1.8 10^{-9}	2.799 10^{-9}	2.522 10^{-9}
10^{-6}	10^{-1}	1.8 10^{-10}	5.226 10^{-9}	1.435 10^{-9}
10^{-1}	10^{-4}	1.8 10^{-2}	1.284 10^{-3}	1.284 10^{-3}
10^{-1}	10^{-5}	1.8 10^{-1}	1.328 10^{-3}	1.328 10^{-3}
10^{-1}	10^{-6}	1.8	1.332 10^{-3}	1.332 10^{-3}

Le colonne 2 e 3 non sono perfettamente uguali a causa della precisione usata col metodo delle tangenti: se nella frase 2ØØ, si sostituisce 1.ØE-Ø8 con 1.Ø*E* - 1.Ø, si ottengono esattamente gli stessi risultati del metodo di Tartaglia-Cardano.

Infine, i risultati $[H_3\,O^+]$ della colonna 1, sono precisi solo in un certo range di valori di *CA* e *CB*.

5. L'altro problema, relativo alla determinazione delle concentrazioni $x = [H_3\,O^+]$ in una soluzione acquosa di due acidi *HA* e *HB*, con costanti di acidità K_1 e K_2 e concentrazioni analitiche C_1 e C_2 rispettivamente[7], viene risolto dai Chimici semplificando un sistema di equazioni algebriche (cfr. nota 2), e riconducendo la risoluzione a quella di un'equazione di 2° grado.

Si ottiene così facilmente la formula

$$[H_3\,O^+] = \sqrt{K_1\,C_1 + K_2\,C_2}. \qquad 2)$$

Se invece, non si fanno approssimazioni di alcun tipo, lo stesso sistema può ricondursi ad una equazione algebrica di quarto grado in *x*:

$$F(x)=x^4+(K_1+K_2)x^3+(K_1K_2-K_1C_1-K_2C_2-K_w)x^2-$$
$$(K_1K_w+K_2K_w+K_1K_2C_1+K_1K_2C_2)x-K_1K_2K_w = Ø. \qquad 3)$$

La lista del programma in Basic, per la risoluzione di tale equazione col metodo di Newton, è la seguente[8]:

7 Anche di tale problema, normalmente nei laboratori sperimentali, si risolve l'inverso. Con riferimento alla tabella B, $K_1 = 1.8\ 10^{-5}$, $K_2 = 2.0\ 10^{-2}$.

8 La 3) può essere risolta anche con il noto metodo "esatto" di L.L. Ferrari, mediante un'equazione di 3° grado, "risolvente di 3)".

```
ØØ  REM PH-HA-HB
1Ø  KW = 1.ØE-14
2Ø  K1 = 1.8E-Ø5
3Ø  INPUT "C1="; C1
4Ø  K2 = 2.ØE-Ø2
5Ø  INPUT "C2="; C2
6Ø  A = 1.Ø
7Ø  B = K1+K2
8Ø  C = K1*K2-K1*C1-K2*C2-KW
9Ø  D = -K1*KW-K2*KW-K1*K2*C1-K1*K2*C2
1ØØ E = -K1*K2*KW
11Ø REM : STARTING POINT
12Ø X = SQR(K1*C1+K2*C2)
13Ø N = Ø
14Ø N = N+1
15Ø F = ( ((A*X+B)*X+C )*X+D)*X+E          "calcolo della F(x)"
16Ø FD = (( 4*A*X+3*B )*X+2*C)*X+D         "calcolo della F'(x)"
17Ø DX= F/FD
18Ø XN=X-DX
19Ø X =XN
2ØØ PRINT " CICLO= " ; N
21Ø PRINT X
22Ø PH = -LOG(X)
23Ø PRINT PH
24Ø IF(ABS(DX) > 1.ØE-1Ø) THEN GOTO 14Ø
25Ø END
```

I risultati ottenuti usando questo programma, sono riportati nella seguente tabella, colonne 3 e 4, mentre i risultati ottenuti con la formula classica 2) si trovano nelle colonne 1 e 2.

TABELLA B		1	2	3	4
C_1	C_2	$[H_3O^+]$	PH	$[H_3O^+]$	PH
10^{-1} M	10^{-1} M	$4.474\ 10^{-2}$	1.35	$3.586\ 10^{-2}$	1.44
10^{-2}	10^{-1}	$4.472\ 10^{-2}$	1.35	$3.583\ 10^{-2}$	1.45
10^{-1}	10^{-2}	$1.421\ 10^{-2}$	1.85	$7.509\ 10^{-3}$	2.12
10^{-1}	$8\ 10^{-3}$	$1.272\ 10^{-3}$	1.90	$6.354\ 10^{-3}$	2.20
10^{-1}	$5\ 10^{-3}$	$1.009\ 10^{-3}$	2.00	$4.484\ 10^{-3}$	2.35
10^{-1}	10^{-3}	$4.669\ 10^{-3}$	2.33	$1.869\ 10^{-3}$	2.73
10^{-1}	$5\ 10^{-4}$	$3.435\ 10^{-3}$	2.46	$1.586\ 10^{-3}$	2.80

La formula 2) copre un ampio range di valori ma non è precisa nella zona di concentrazioni in cui $[H_3O^+] \cong K_2$.

6. Altri metodi per la ricerca degli "zeri" di una funzione, non sono qui proposti: poiché le esercitazioni stechiometriche possono essere svolte con un calcolatore tascabile, il metodo di Newton-Raphson è preferito sia per semplicità che per precisione.

Con un calcolatore come il VAX-2000, si utilizzano, invece, altri programmi (cfr. [2]).

Si rileva infine, che il metodo di Tartaglia-Cardano, pur essendo migliore da un punto di vista teorico, necessita di risorse di calcolo superiori rispetto al metodo Newton-Raphson e quindi una scelta tra i due metodi può diventare una scelta personale dettata dalle circostanze.

BIBLIOGRAFIA

[1] Jenkins, M.A. (1975) - Algorithm 493: Zeroes of a real polynomial, ACM Transactions on Mathematical Software 1, 178-189.

[2] ZPLRC / DZPLRC - Routine to find the Zeroes of a polynomial with real coefficents using Laguerre's method, 761-764, Libreria Matematica dell'IMSL, Houston, Texas.

[3] NEQNJ / DNEQNJ - Routine to solve a system of non linear equations using the Levenberg-Marquardt algorithm 780-783, Libreria Matematica dell'IMSL, Houston, Texas.

[4] W.H. Press, B.P. Flannery, S. A. Teukolsky, W.T. Vetterling - Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing - Cambridge University Press.

[5] Gans P, Vacca A. Sabatini A. - Inorganica Chimica Acta, 1976, 18, 237. Miniquad program for calculating formation costants of metal complexes.

[6] Clemente, D.A. - Chimica, Scuola di Specializzazione in Scienze dei Materiali, Brindisi, 1990.

[7] Giannone, A. - Probabilità non σ-additive e Analisi Non-Standard Rend. Mat. (1) 1982, Vol. 2, Serie VII, 47-58.

Ferdinando Casolaro

Risoluzione del tema di matematica

Concorso a cattedre D. M. 23/3/1990
Classe di concorso LXXXV - Scienze Matematiche, fisiche e naturali

1. - Sia data, in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, la parabola γ di equazione $y = x^2 - 2x$ e la retta r di equazione $x + 4 = 0$.

Detti T e R le proiezioni di un punto P di γ rispettivamente su r e sull'asse delle ascisse, si studi come varia il rapporto tra il perimetro del rettangolo di lati PT e PR e quello del quadrato di lato OR al variare del punto P sulla parabola, specificando in particolare le posizioni di P in cui detto rapporto:
- perde il suo significato geometrico;
- assume valore 3.

La parabola γ rappresenta una proporzione quadratica. Si trovi la costante di proporzionalità.

Illustrare metodi didattici per l'introduzione della proporzionalità diretta, inversa e quadratica nella scuola media.

2. - Sia V un punto esterno ad un piano α e H la sua proiezione ortogonale sul medesimo piano.

Detta r la retta congiungente un punto P di α con il punto V, siano P' l'intersezione di r con un piano β parallelo ad α e passante per un punto H' interno al segmento VH e P'' la proiezione ortogonale di P' su α.

Si dimostri che se P descrive una circonferenza $\mathbb{C}$ a cui H è esterno, anche P'' descrive una circonferenza $\mathbb{C}''$, tale che le due rette per H tangenti a $\mathbb{C}$ sono tangenti anche a $\mathbb{C}''$.

Tra le trasformazioni lineari che mutano $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}''$, si determini quella che al punto P fa corrispondere il punto P'' individuandone in particolare gli elementi uniti, e, scelto nello spazio un opportuno riferimento cartesiano, se ne determinino le equazioni.

Si parli della trasformazione ottenuta, illustrando anche le modalità didattiche per un approccio significativo ad essa da parte di alunni della scuola media.

SVOLGIMENTO DEL 1° QUESITO

La parabola γ di equazione $y = x^2 - 2x$ ha come asse la retta di equazione $x = 1$ (parallela all'asse delle ordinate), interseca l'asse delle ascisse nei punti 0(0,0) ed A (2,0), ha come vertice il punto $V(1,-1)$, come fuoco il punto $F\left(1, -\frac{3}{4}\right)$, come direttrice la retta di equazione $y = -\frac{5}{4}$ e la concavità rivolta verso l'alto (fig. 1).

La retta di equazione $x + 4 = 0$ è parallela all'asse delle ordinate.

Diciamo $P(x, x^2 - 2x)$ un generico punto della parabola; i punti T ed R, proiezioni di P su r e sull'asse delle ascisse sono i punti $T(-4, x^2 - 2x)$, $R(x,0)$.

Il perimetro del rettangolo di lati PT e PR è:

$$2p = 2|x + 4| + 2|x^2 - 2x|;$$

Il perimetro del quadrato di lato OR è:

$$2p' = 4\,|x|;$$

Il rapporto tra i perimetri dei due rettangoli è, pertanto, la funzione di x

$$f(x) = \frac{|x+4| + |x^2 - 2x|}{2\,|x|}$$

che ha come dominio $R - \{0\}$.

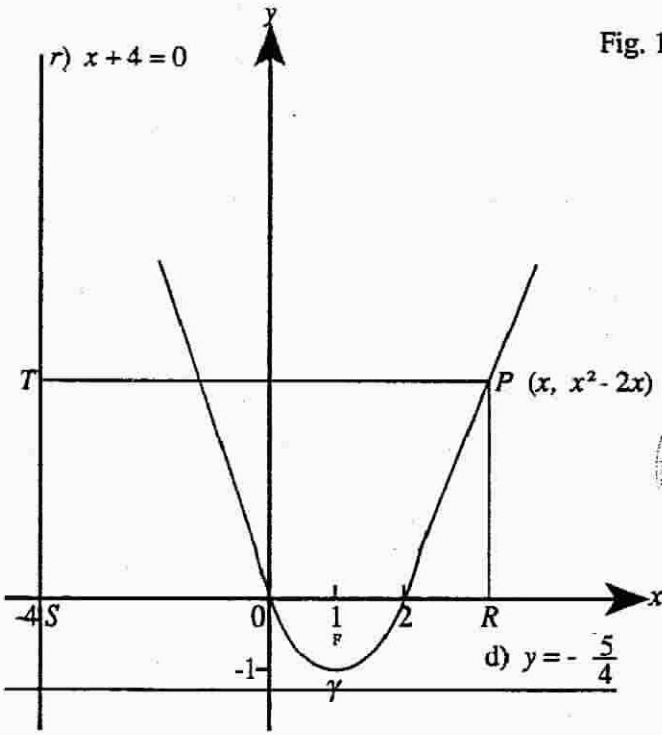


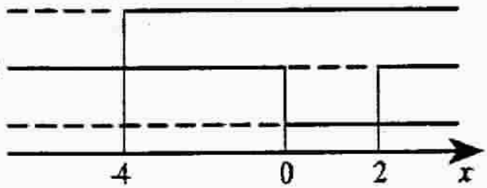
Fig. 1

Dalla discussione dei valori assoluti:

$x+4>0 \Rightarrow x>-4$

$x^2-2x>0 \Rightarrow x<0; x>2$

$x>0 \Rightarrow x>0$



risulta:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+3x+4}{2x} & \text{in }]-\infty, -4]. \\ \dfrac{-x^2+x-4}{2x} & \text{in }]-4, 0[. \\ \dfrac{-x^2+3x+4}{2x} & \text{in }]0, 2]. \\ \dfrac{x^2-x+4}{2x} & \text{in }]2, \infty[. \end{cases}$$

Il grafico della funzione è situato nel semipiano delle ordinate positive e non interseca gli assi; infatti:
- $f(x)$ non è definita per $x = 0$;
- $f(x) > 0, \ \forall x \in R - \{0\}$.

E' facile verificare che $f(x)$ è continua in tutto il dominio; si ha:

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \lim_{x \to -4^+} f(x) = 3 = f(-4);$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \frac{3}{2} = f(2);$$

inoltre:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Pertanto, nel punto di ascissa 0 la funzione presenta una discontinuità di seconda specie; l'asse delle ordinate è asintoto verticale.

2. Determinazione degli asintoti.

Rimangono da determinare gli asintoti obliqui immediatamente suggeriti dall'espressione della funzione.

Si ha:

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x^2 + 3x + 4}{2x^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$p = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{-x^2 + 3x + 4}{2x} + \frac{1}{2}x\right] = \frac{3}{2}.$$

per cui la retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ è l'asintoto obliquo a sinistra.

Direttamente, si può arrivare al risultato osservando che:

$$\frac{-x^2 + 3x + 4}{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x},$$

pertanto, per $x \to -\infty$, il comportamento della funzione è quello della retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; in più, l'ansitoto è al di sopra del grafico della funzione, in quanto per $x < 0$ è definitivamente:

$$\frac{-x^2 + 3x + 4}{2x} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{2}{x} < -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Analogamente si ha:

$$m' = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 4}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$p' = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2 - x + 4}{2x} - \frac{1}{2}x\right] = -\frac{1}{2},$$

per cui la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ è l'ansitoto obliquo a destra.

Direttamente si osserva che:

$$\frac{x^2 - x + 4}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$$

pertanto, per $x \to +\infty$, il comportamento della funzione è quello della retta di equazione $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; in più, l'ansitoto è al di sotto del grafico della funzione in quanto, per $x > 0$, è:

$$\frac{x^2 - x + 4}{2x} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{2}{x} > \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

3. Studio della derivata prima: monotonia della funzione.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2 - 4}{2x^2} & \text{in }]-\infty, -4[; \\[2ex] \dfrac{-x^2 + 4}{2x^2} & \text{in }]-4, 0[; \\[2ex] \dfrac{-x^2 - 4}{2x^2} & \text{in }]0, 2]; \\[2ex] \dfrac{x^2 - 4}{2x^2} & \text{in }]2, +\infty[. \end{cases}$$

Il calcolo della derivata di $f(x)$ ed il segno di $f'(x)$ si possono semplificare osservando che: in $]-\infty, -4[$ e in $]0, 2[$ si ha immediatamente:

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4}{2x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} < 0$$

ossia $f(x)$ è strettamente decrescente in tali intervalli.

In $]-4, 0[$ risulta:

$$f'(x) = \frac{-x^2+4}{2x^2} > 0 \quad \text{nell'intervallo }]-2,\ 0[,$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{nell'intervallo }]-4,\ -2[,$$

$$f'(x) = 0 \text{ per } x = -2.$$

Pertanto $f(x)$ è strettamente crescente in $]-2, 0[$, strettamente decrescente in $]-4, -2[$ e presenta un minimo relativo nel punto M $\left[-2, \frac{5}{2}\right]$ in quanto $f(-2) = \frac{5}{2}$.

Infine, in $]2, +\infty[$, si ha:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} > 0, \ \forall\, x > 2,$$

per cui $f(x)$ è strettamente crescente in tale intervallo.

I punti di ascissa -4 e 2 sono punti di discontinuità di prima specie per la derivata prima.

Si ha:

$$f'(-4^-) = -\frac{5}{8}; \qquad f'(-4^+) = -\frac{3}{8};$$

$$f'(2^-) = -1; \qquad f'(2^+) = 0;$$

per cui, in - 4, si hanno le rette tangenti di equazioni;

$$y - 3 = -\frac{5}{8}(x+4); \qquad 5x + 8y - 4 = 0;$$

$$y - 3 = -\frac{3}{8}(x+4); \qquad 3x + 8y - 12 = 0;$$

nel punto di ascissa 2, le rette tangenti hanno equazioni:

$$y - \frac{3}{2} = -1\ (x - 2); \qquad\qquad 2x + 2y - 7 = 0;$$

$$y - \frac{3}{2} = 0; \qquad\qquad 2y - 3 = 0.$$

Il punto di ascissa 2 è anche il minimo assoluto per la funzione. Infatti si ha:

$$f\,(2) = \frac{3}{2}; \qquad\qquad f\,(-4) = 3;$$

e quindi il punto $T\left(2,\ \frac{3}{2}\right)$ ha ordinata minore del punto di minimo relativo $M\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$.

4. Studio della derivata seconda: concavità e convessità.

Dal calcolo della derivata seconda:

$$f''\,(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^3}, & \text{in }]-\infty, -4[\ \cup\ ]0, 2[\ \cup\ ]2, +\infty[\\ \\ -\dfrac{4}{x^3}, & \text{in }]-4, 0[\end{cases}$$

si deduce subito che $f\,(x)$ è strettamente convessa nell'intervallo $[-4, 0[$ (in cui per $x < 0$ risulta $f''\,(x) > 0$) e negli intervalli 10,2] e $]2, +\infty[$ (in cui risulta $x > 0$, $f''\,(x) > 0$), è strettamente concava nell'intervallo $]-\infty\ -4[$ in cui da $x < 0$ risulta $f''\,(x) < 0$.

La funzione non presenta flessi.

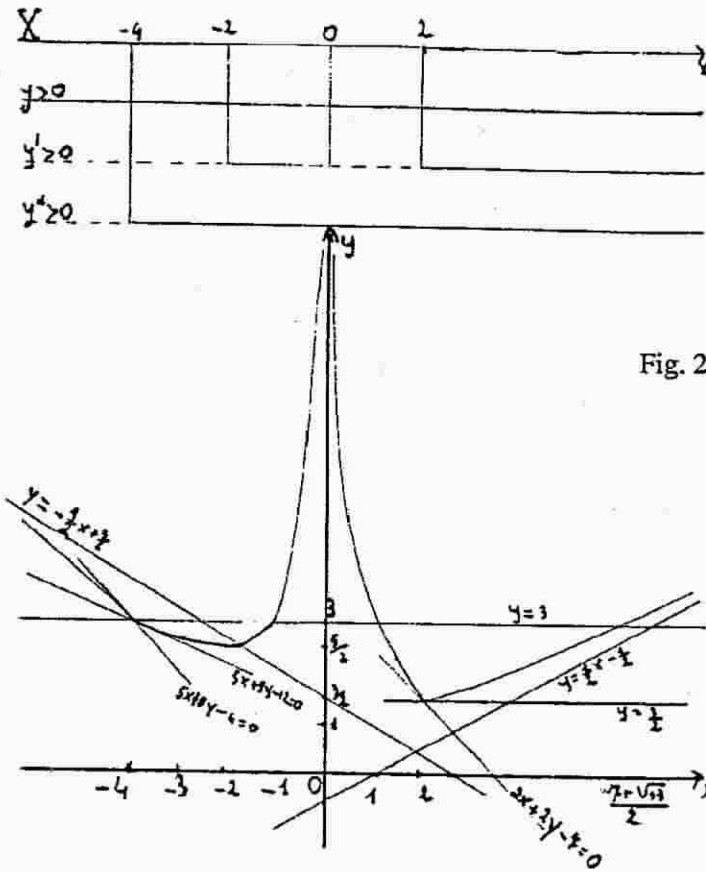


Fig. 2

E' ovvio che $f(x)$ perde di significato geometrico quando $P \equiv O$ (fig. 1); in tal caso $T \equiv S$, $R \equiv 0$; il rettangolo "degenera" nel segmento SO ed il quadrato si "riduce" al punto 0.

Il rapporto assume valore 3 in corrispondenza alle soluzioni delle equazioni:

1) $\dfrac{-x^2 + 3x + 4}{2x} = 3,\qquad$ in $]-\infty, -4[\, \cup\,]0, 2[$,

2) $\dfrac{-x^2+x-4}{2x}=3,\qquad$ in $]-4, 0[$,

3) $\dfrac{x^2-x+4}{2x}=3,\qquad$ in $]2, +\infty[$.

Si perviene alle soluzioni:
$x=-4;\qquad x=-1;\qquad x=+1;\quad x=\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}$ (l'altra soluzione dell'equazione 3), $x=\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}$ è al di fuori dell'intervallo).

Ovviamente, il rapporto diviene 3 in corrispondenza alle intersezioni della $y=f(x)$ con la $y=3$.

In particolare, per $x=-4$, il punto P diviene il punto $P(-4, 24)$ ed il rettangolo degenera.

Per $x=-1$ si ha il punto $P(-1, 3)$ ed il rettangolo diventa un quadrato di lato 3.

Per $x=1$ e per $x=\dfrac{7+\sqrt{33}}{2}$ non si evidenziano particolari osservazioni geometriche.

Per la trattazione dell'ultimo punto è opportuno esprimere l'equazione della parabola in forma canonica. Ponendo:

$$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y+1 \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y-1 \end{cases}$$

la $y=x^2-2x$ si trasforma nella:

$$Y-1=(X+1)^2-2(X+1),$$

cioè:

$$Y=X^2.$$

Si omette la trattazione delle metodologie didattiche.

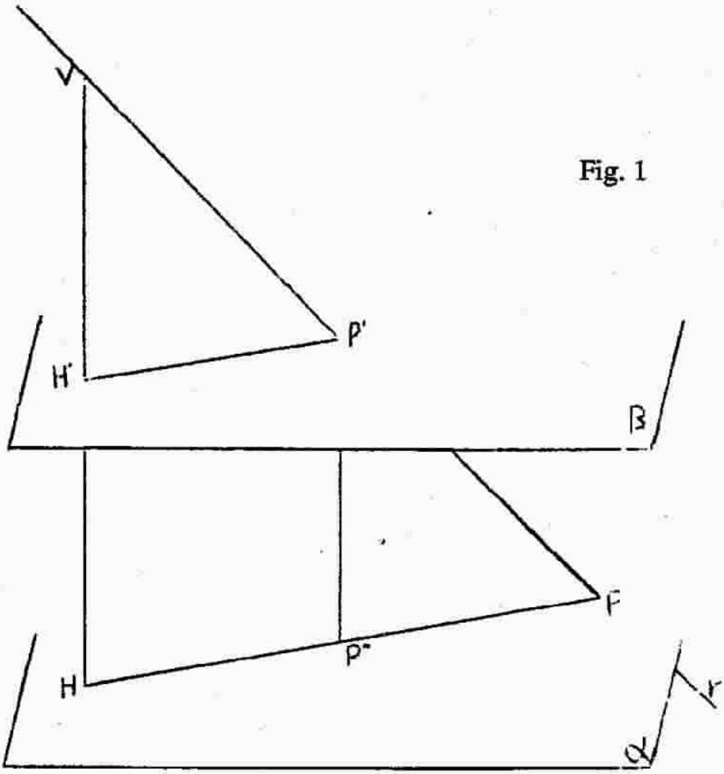


Fig. 1

SVOLGIMENTO DEL 2° QUESITO*

Sia γ il piano individuato da V, H, $\dot{P}$. Poiché H' e P' appartengono a γ, risulta:

$$H'P' \; // \; HP$$

in quanto segmenti complanari giacenti su piani paralleli (fig. 1).

Pertanto, su γ, i triangoli VHP e $VH'P'$ sono simili e - indicato con k il rapporto di similitudine - si ha: $\dfrac{VH'}{VH} = \dfrac{H'P'}{HP} = k$. (1)

Inoltre il quadrilatero $H\,P''\,P'\,H'$ è un parallelogramma, per cui

* Nell'ambito del Nucleo di Ricerca Didattica di Napoli.

$HP'' = H'\,P'$, e quindi:

$$\frac{HP''}{HP} = k\,;$$

è evidente poi, che P'' appartiene alla retta $HP = \alpha \cap \gamma$ ed al punto H corrisponde H stesso.

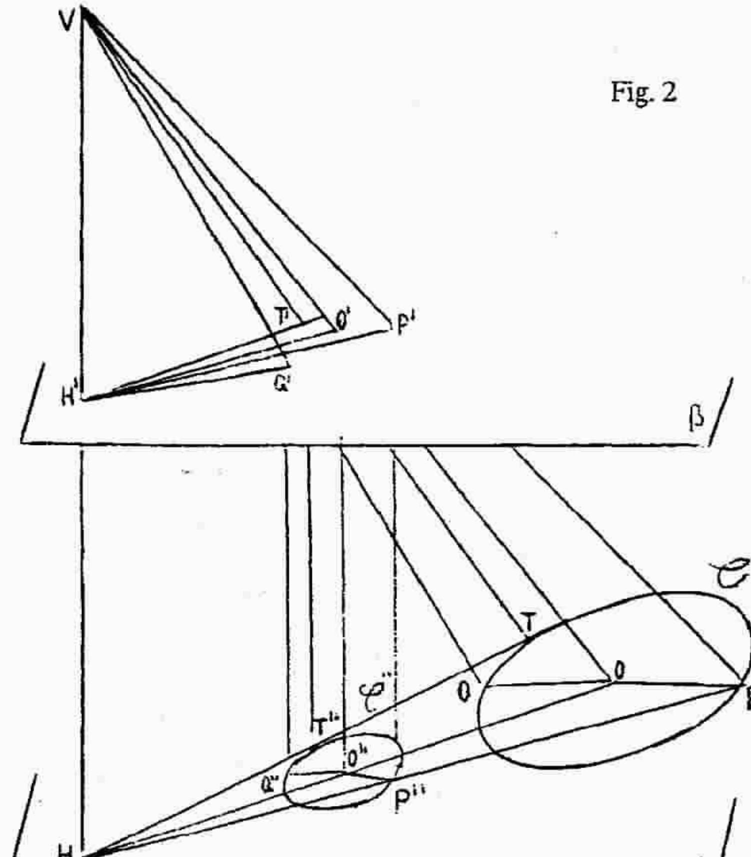


Fig. 2

Volendo seguire l'ordine della traccia, diciamo O un punto del piano α distinto da P (fig. 2); congiungendo P con O ed indicato con O' ed O'', rispettivamente, l'intersezione di OV con β e la proiezione ortogonale di O' su α, si ha ovviamente:

$$\frac{VH'}{VH} = \frac{H'O'}{HO} = \frac{HO''}{HO} = k = \frac{HP''}{HP}$$

con O'' appartenente alla retta HO, per cui i triangoli HOP ed $HO''P''$ sono simili per il secondo criterio di similitudine, e risulta:

$$\frac{O''P''}{OP} = k.$$

A qualsiasi altro punto Q, tale che $OQ = OP$ (cioè appartenente alla circonferenza $\mathbb{C}$ di centro O e raggio OP), corrisponde un punto Q'' tale che:

$$\frac{O''Q''}{OQ} = \frac{O''P''}{OP} = k;$$

da $OQ = OP$ risulta: $O''Q'' = O''P''$, cioè Q'' appartiene alla circonferenza $\mathbb{C}''$ di centro O'' e raggio $O''P''$.

Dunque, la circonferenza $\mathbb{C}$ è trasformata nella circonferenza $\mathbb{C}''$.

Indicato con σ questa trasformazione, nella quale $\mathbb{C}$ va in $\mathbb{C}''$, e con r una delle due rette tangenti per H alla circonferenza $\mathbb{C}$ (che esiste in quanto H è esterno a $\mathbb{C}$), sia T il punto di contatto di r con $\mathbb{C}$ (fig. 2); il punto T'' corrispondente di T in σ appartiene, ovviamente, alla circonferenza $\mathbb{C}''$ e risulta essere l'unico punto comune ad r e $\mathbb{C}''$; infatti, se r intersecasse $\mathbb{C}''$ in un ulteriore punto $S'' \neq T''$, tale punto dovrebbe essere il corrispondente di un punto S

($\neq T$) appartenente a $\mathbb{C} \cap r$, contro l'ipotesi di tangenza di r a $\mathbb{C}$ in T''.

Le trasformazioni lineari che mutano circonferenze in circonferenze sono le *similitudini* del piano α; in particolare, la trasformazione σ in oggetto è un'*omotetia di centro H e caratteristica k*. Infatti, H è l'unico punto proprio unito della trasformazione (è unica la perpendicolare da un punto ad un piano), punti corrispondenti P e P'' sono allineati con H, ed $\dfrac{HP''}{HP} = k$.

Le altre similitudini che portano $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}''$ si hanno componendo l'omotetia σ con una qualsiasi isometria di α che muta $\mathbb{C}$ in sè (rotazioni di centro O'' e simmetrie assiali rispetto alle rette per O''). Sono uniti il punto H e i punti impropri. Le retta unite sono invece le rette per H e la retta impropria.

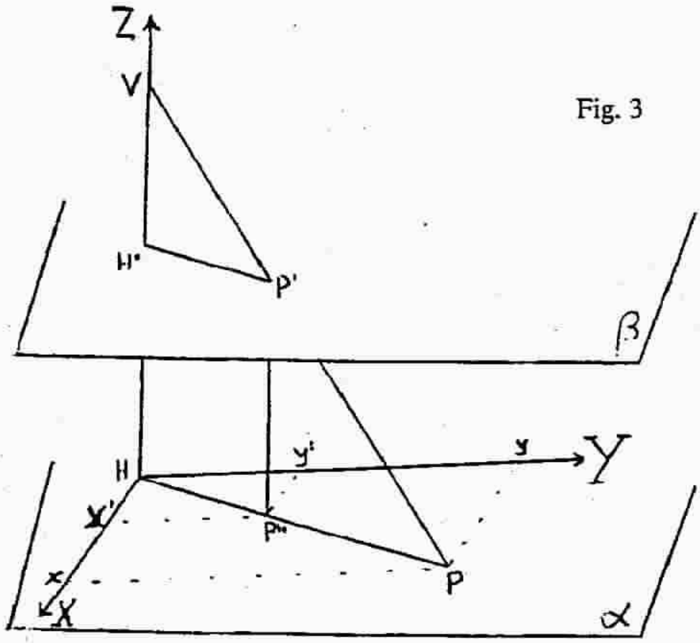


Fig. 3

Pertanto, una circonferenza $\mathbb{C}$ con centro in H si trasforma in una circonferenza $\mathbb{C}''$ con centro in H; quindi, fissato nello spazio un riferimento cartesiano R $(HXYZ)$, consideriamo il riferimento da esso subordinato sul piano HXY; indicato con $P(x, y,)$ e $P''(x', y')$ due punti corrispondenti (fig. 3), da:

$$\frac{HP''}{HP} = k;$$

risulta:

$$\frac{x'}{x} = k; \qquad \frac{y'}{y} = k.$$

cioè:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \qquad (2)$$

che rappresentano le equazioni dell'omotetia di centro H e caratteristica k.

Del resto, le equazioni di una similitudine sono del tipo:

$$\begin{cases} x' = k\,(x\cos\alpha - y\,sen\alpha) + p \\ y' = k\,(x\,sen\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases} \qquad (3)$$

dove $\alpha = r\hat{}r'$, con r ed r' corrispondenti in σ.

Poiché un'omotetia trasforma una retta in se stessa (o in una retta ad essa parallela), risulta:

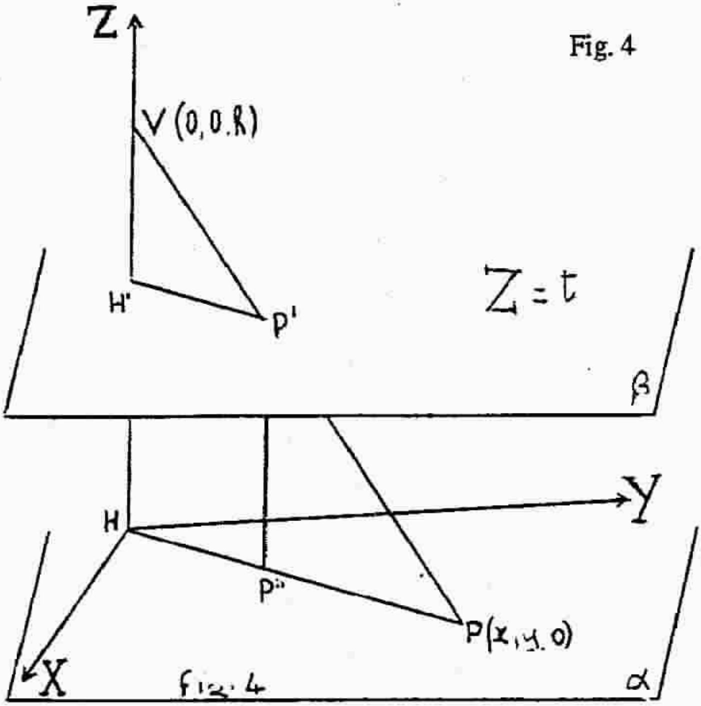
$$r\hat{}r' = 0; \qquad sen\, r\hat{}r' = 0; \qquad \cos r\hat{}r' = 1.$$

Pertanto, dalle (3), si ha:

$$\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$$

Tali relazioni devono essere verificate anche assegnando ad (x, y), e (x', y') le coordinate del punto unito $H(0, 0)$, per cui risulta: $p = q = 0$, da cui le (2).

Fig. 4



Possiamo pervenire alle equazioni della corrispondenza utilizzando anche il riferimento dello spazio (fig. 4). Diciamo $(0, 0, h)$ le coordinate di V e indichiamo con $(x, y, 0)$ le coordinate di P. L'equazione della retta VP nello spazio è:

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z - h}{-h}$$

Se $Z = t$ è l'equazione del piano β, le coordinate del punto P' si ottengono intersecando β con la retta VP:

$$\begin{cases} \dfrac{X}{x} = \dfrac{Z-h}{-h} \\[2ex] \dfrac{Y}{y} = \dfrac{Z-h}{-h} \\[2ex] Z = t \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} X = \dfrac{t-h}{-h}x \\[2ex] Y = \dfrac{t-h}{-h}y \\[2ex] Z = t \end{cases}$$

cioè: $P'\left(\dfrac{t-h}{-h}x,\ \dfrac{t-h}{-h}y,\ t\right)$, e quindi: $P''\left(\dfrac{t-h}{-h}x,\ \dfrac{t-h}{-h}y,\ 0\right)$

Pertanto la corrispondenza σ, nel riferimento subordinato sul piano (X, Y), è rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{t-h}{-h}x \\[2ex] y'' = \dfrac{t-h}{-h}y \end{cases}$$

che sono le equazioni della omtetia di centro H e caratteristica $k = \dfrac{t-h}{-h}$.

N. B. - Nell'esposizione del tema ci siamo attenuti rigorosamente all'ordine della traccia, che fa ritenere di dover risolvere il problema con dimostrazioni di carattere geometrico elementare, o di

contenuto analitico, per poi passare all'analisi della trasformazione. Ma possiamo fare anche delle osservazioni di carattere proiettivo che rendono particolarmente semplice la stesura del problema.
La corrispondenza ω_1 fra α e β che a P fa corrispondere P' è la prospettività di centro V in cui tutti i punti impropri sono uniti. La corrispondenza ω_2 fra β e α che a P' fa corrispondere P'' è un'altra prospettività con centro nel punto improprio C_∞ delle rette perpendicolari ad α e β, ed ogni punto improprio è ancora unito.
La corrispondenza del piano α che a P fa corrispondere P'' è una proiettività, prodotto delle due prospettività ω_1 e ω_2, precisamente un'omologia, avente per asse la retta impropria e centro il punto H che è intersezione di α con la congiungente i due centri (che sono V e C_∞) di ω_1 e ω_2.
Si tralascia l'analisi dell'ultimo punto del tema, perché di carattere teorico.

Ciro D'Aniello

Risoluzione del tema di matematica
Concorso a cattedre D. M. 23/3/1990
Classe di concorso XLIII - Matematica

3) In un piano euclideo riferito ad un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine O, considerare la trasformazione h che al punto $M\ (x, y)$ associa $M'\ (X, Y)$ tale che:

$$\begin{cases} X = x - y + 1 \\ Y = x + y \end{cases}.$$

Mostrare che h è una similitudine piana diretta della quale si preciseranno gli elementi.

Studiare la conica C di equazione $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0$.

- Determinare l'equazione cartesiana della curva C', immagine della curva C data dalla trasformazione h; trovare le caratteristiche (fuoco, direttrice, vertice) e rappresentare le curve C e C'.

Considerare la funzione $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x - t}}\,dt$, essendo $f(t)$ una funzione definita sull'insieme dei numeri reali. Trovare il dominio di definizione e studiare la continuità e la derivabilità di $F(x)$.

Determinare il comportamento di $F(x)$ per x tendente a più infinito, quando si suppone l'esistenza di $L = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Trattare le ipotesi del continuo.

SVOLGIMENTO

Le $\begin{cases} X = x - y + 1 \\ Y = x + y \end{cases}$ (1)

sono le equazioni di una trasformazione h del piano Π in sè

$$h : M(x,y) \in \Pi \rightarrow M'(X,Y) \in \Pi$$

che risulta una similitudine piana diretta. Infatti la matrice A della trasformazione (1) risulta $A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ e quindi $\det A = 2 > 0$;

inoltre, detti a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ gli elementi della matrice A, sono verificate le $\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 \\ a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} = 0 \end{cases}$

Il rapporto di similitudine K, risulta essere $k = \sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2} = \sqrt{2}$.

Dalle (1) si ricava inoltre che le equazioni della trasformazione inversa h^{-1}, sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(X + Y - 1) \\ y = \frac{1}{2}(-X + Y + 1) \end{cases} ; \qquad (2)$$

inoltre, posto nelle (1) (o nelle (2)) $x = X$, $y = Y$, ne consegue $x=0$, $y=1$, onde il punto $P(0,1)$ è l'unico punto unito della h.

La conica C di equazione $x^2 + y^2 - 2xy + x - 3y = 0$ è una parabola in quanto la sua equazione può scriversi nella forma $(x - y)^2 + x - 3y = 0$. L'equazione mostra pertanto che la C è tangente alla retta impropria nel punto improprio delle rette

$x - y + k = 0$, ossia $(1,1,0)$; inoltre la C passa per 0 $(0,0)$ con tangente la retta $x - 3y = 0$.

Tenendo conto delle (2), si vede che la similitudine h trasforma la parabola C nella curva C' di equazione

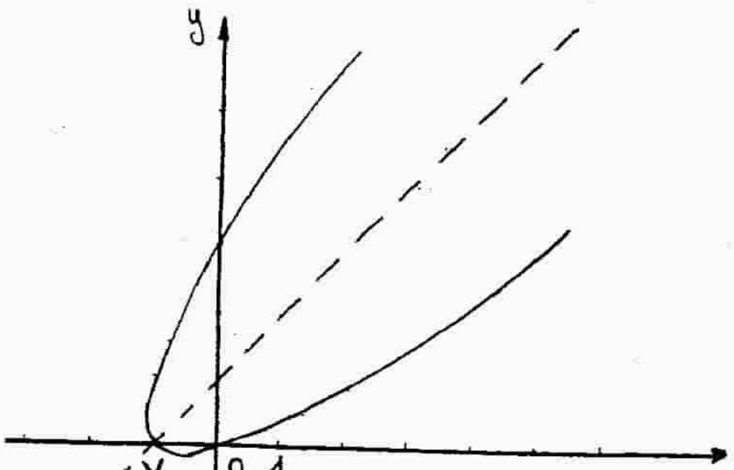
$$\left[\frac{1}{2}(X+Y-1)-\frac{1}{2}(-X+Y+1)\right]^2+\frac{1}{2}(X+Y-1)-\frac{3}{2}(-X+Y+1)=0,$$

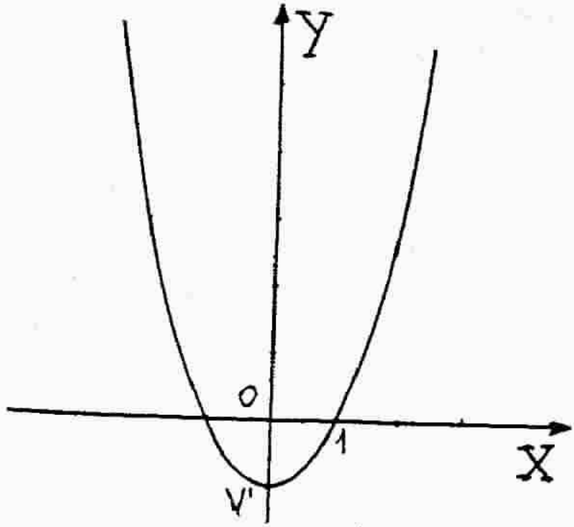
da cui, dopo semplici passaggi algebrici, si ricava

$$Y = X^2 - 1 \qquad (3)$$

Risulta quindi che la curva C' è una parabola avente per asse la retta $X = 0$, vertice V' $(0; -1)$, fuoco F' $(0; -3/4)$ e direttrice di equazione $Y = -5/4$; tenendo conto delle (2) si ricava di conseguenza che la parabola C ha per asse la retta $y = x + 1$, vertice $V(-1 ; 0)$, fuoco $F\left(-\frac{7}{8}; \frac{1}{8}\right)$ e direttrice di equazione $y = -x - 5/4$.

I grafici della parabola C e C' sono i seguenti:



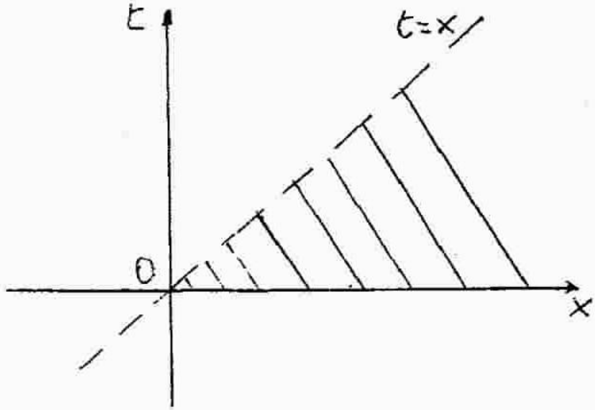


Considerando la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\, dt \qquad (4)$$

con $f(t)$ definita in R (che considereremo di classe C^0 e quando occorrerà di classe C^1), si ha che la funzione integranda $g(x, t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ è definita nei punti del piano (x, t) soddisfacenti la $t < x$.

Pertanto, in base ai limiti di integrazione della $F(x)$, deve risultare $0 \leq t < x$, e quindi la $F(x)$ ha significato solo se la $g(x, t)$ viene considerata nella parte (x, t) definita dalle limitazioni $0 \leq t < x$, ossia



La $F(x)$ risulta quindi definita tramite un integrale improprio, in quanto la $g(x, t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{x - t}}$ non è definita per $t = x$; ne segue che, per definizione, risulta

$$F(x) = \lim_{z \to x} \int_0^z \frac{f(t)}{\sqrt{x - t}}\, dt \qquad (5)$$

risultando $0 \leq t < z < x$.

Si nota subito che, essendo $f(t)$ definita in R e $g(x, t)$ un infinito (per $t \to x$) di ordine $p = 1/2 < 1$, il limite (5) esiste finito, e pertanto, potendosi porre per definizione $F(0) = 0$, ne consegue che il dominio della $F(x)$ è $X = [0, +\infty[$.

Inoltre, considerata che sostituzione $x - t = u^2$, da cui $t = x - u^2$, $dt = -2udu$, $t = 0 \to u = \sqrt{x}$, $t = z \to u = \sqrt{x - z}$, la (5) diventa

$$F(x) = \lim_{z \to x} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x - z}} \frac{f(x - u^2)}{u} (-2udu) =$$

$$= \lim_{z \to x} 2 \int_{\sqrt{x-z}}^{\sqrt{x}} f(x - u^2)\, du = 2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x - u^2)\, du \qquad (6)$$

da cui segue che se $f(t)$ è continua in R, allora $f(x - u^2)$ è continua nel dominio del piano (x, u) definito dalle limitazioni $x \geq 0$, $0 \leq u < \sqrt{x}$ e pertanto la $F(x)$ è continua in $X = [\, 0, + \infty \,[$.

Se ora la $f(t)$ si suppone di classe C^1, la $f(x - u^2)$ risulta derivabile parzialmente rispetto alla x e risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{t = x - u^2} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{t = x - u^2}.$$

Ne consegue dalla (6),

$$F'(x) = 2 \left[\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\partial f}{\partial x}\, du + [f(x - u^2]_{u = \sqrt{x}} \cdot \frac{d}{dx} \sqrt{x} \right] =$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{x}} \left(\frac{df}{dt} \right)_{t = x - u^2} du + \frac{f(0)}{\sqrt{x}} \qquad (7)$$

da cui segue che la $F(x)$ non è derivabile in $x = 0$, ma è derivabile in $X' =]\, 0, + \infty \,[$

Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{t} = L = + \infty$, se ne deduce che la $f(t)$ è un infinito di ordine $p' > 1$ (rispetto all'infinito campione t) ed inoltre esisterà certamente un $\bar{t}$ tale che $\forall \;\; \bar{t} > t$ si abbia $f(t) > 0$; ne consegue che

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x - t}}\, dt = + \infty,$$

risultando la funzione integranda $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ un infinito di ordine $p > \frac{1}{2}$.

Il ragionamento è analogo se $L = -\infty$ e risulta $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$.

Se L è un numero finito, con $L \neq 0, f(t)$ è un infinito di ordine $p' = 1$, $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ è un infinito di ordine $p = \frac{1}{2}$ e quindi risulta

$$\lim F(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$$

Nulla può dirsi in generale se $L = 0$; tuttavia si possono considerare i seguenti casi:

a) $L = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(t) = +\infty$; in questo caso $f(t)$ è un infinito di ordine p' con $0 < p' < 1$ e la $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ è un infinito di ordine $p = p' - \frac{1}{2}$ se $\frac{1}{2} < p' < 1$, $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ è un infinitesimo di ordine $p = \frac{1}{2} - p'$ se $0 < p' < \frac{1}{2}$ ed infine $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ non risulta né un infinitesimo, né un infinito se $p' = \frac{1}{2}$ ma risulterà in ogni caso limitata; in ogni caso si avrà $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

b) Se $L = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(t) = -\infty$, stesso ragionamento del caso a) e risulta $\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$

c) Se $L = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = l \neq 0$, allora $\frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}$ è un infinitesimo di ordine $p = \frac{1}{2}$ e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 0 \\ -\infty & \text{se } l < 0 \end{cases}$$

d) Se $L = 0$ e $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$, con $f(t)$ infinitesimo di ordine p', allora $\dfrac{f(t)}{\sqrt{x - t}}$ è un infinitesimo di ordine $p = p' + \dfrac{1}{2}$; pertanto $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ esisterà finito se $p' + \dfrac{1}{2}$ risulta non inferiore ad un numero maggiore di 1, ossia se p' è non inferiore ad un numero maggiore di $\dfrac{1}{2}$.

Si omette la trattazione dell'ultimo punto, essendo di carattere teorico.

La Vita delle Sezioni*

a cura di Livia Tonolini

SEZIONE DI FIRENZE

La sezione di Firenze ci ha fatto pervenire il suo "Programma degli incontri" per l'anno 1991-92, realizzato in collaborazione con l'IRRSAE della Toscana. Lo riassumiamo qui di seguito:

- Cinque lezioni su "**Guida alla lettura dei nuovi programmi per il triennio**", tenute da Dorotea De Luca dell'Università di Firenze, ed un incontro sul medesimo tema organizzato dal Nucleo Ricerche Didattiche di Firenze.

- Quattro conferenze dal titolo:

• "**Il metodo delle coordinate: storia e didattica**" (relatrice Maria Giuditta Campedelli dell'Università di Firenze).

• "**Alcuni problemi tratti da Diffide matematiche del '500**" (relatrici Silvana Bianchini e Rosalia Velardi del Nucleo Ricerche Didattiche di Firenze).

• "**Babbage e le sue macchine da calcolo**" (relatrice Carla Simonetti del Nucleo Ricerche Didattiche di Firenze).

• "**Algebristi italiani dell'ottocento: Betti, Brioschi, Faà di Bruno, Capelli**" (relatore Guido Zappa dell'Università di Firenze).

* Le notizie vanno inviate a: Livia Tonolini - via Arrigo Boito, 1 - 24047 Treviglio (BG)

SEZIONE DI TREVIGLIO

Il giorno 16-1-1992 si è costituita a Treviglio una nuova sezione Mathesis.

Nella loro prima assemblea gli iscritti hanno eletto il Consiglio Direttivo: Lidia Bencetti, Guja Colleoni (segretaria), Franco Fassi (vicepresidente), Anna Manenti, Livia Tondini (presidente). Hanno inoltre steso il canovaccio delle attività per il 1992: diverse conferenze di ampio respiro culturale e la Gara di Matematica da realizzare in collaborazione con la vicina Sezione di Bergamo.

Il primo incontro con il pubblico è avvenuto il 24-1-92, in occasione della brillantissima conferenza tenuta dal Prof. Bruno d'Amore dal titolo: "**La presenza della matematica nella Divina Commedia**". Alla manifestazione hanno partecipato tantissime persone, e soprattutto giovani studenti.

L'iniziativa è stata accolta con calorosa simpatia e molta soddisfazione da parte di tutti.

UNA MOSTRA DI "MACCHINE MATEMATICHE E ALTRI OGGETTI"

La sezione di Mathesis di Bologna ci ha inviato il seguente avviso relativo ad una mostra molto originale organizzata a Modena nel marzo 1992.

La pubblichiamo con molto piacere, anche se pensiamo che per motivi tecnici arriverà sul tavolo dei lettori a mostra ormai conclusa. Riteniamo infatti che le informazioni contenute possano risultare interessanti ed utili anche a "lavori ultimati".

AVVISO

Nel mese di marzo 1992 si terrà a Modena nella Sala Mostre del Palazzo Municipale (Piazza Grande) una mostra di *Macchine matematiche e altri oggetti*, organizzata dal Nucleo di Ricerca in Storia e Didattica della Matematica dell'Università di Modena in collaborazione con gli Assessorati alla Cultura e alla Pubblica Istruzione del Comune di Modena. Saranno esposti:

- oltre cento modelli di macchine per lo studio di problemi geometrici, ricostruite sulla base di documenti storici di diversi periodi, dalla Grecia antica all'Europa del sei e del settecento fino alla seconda metà del secolo scorso;
- una serie di audiovisivi e di films di animazione su coniche, trasformazioni geometriche e teoremi classici.

Il materiale è stato realizzato da insegnanti ed allievi nell'ambito di un progetto di innovazione dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore, in corso da una decina d'anni presso il Liceo Scientifico A. Tassoni di Modena, con finanziamenti del M.P.I., del M.U.R.S.T., del C.N.R. e del Comune di Modena.

La mostra è particolarmente rivolta agli insegnanti delle scuole di ogni ordine e grado e agli studenti delle ultime classi delle scuole secondarie superiori, per i quali è prevista la possibilità di alcune visite guidate.

Nel periodo di apertura della mostra e nei mesi successivi si svolgeranno a Modena diverse iniziative culturali (conferenze e proposte di lettura nelle biblioteche comunali) su temi collegati. La mostra sarà presentata con un pubblico dibattito a cui parteciperanno il prof. Umberto Bottazzini, docente di Storia della Matematica presso l'Università di Palermo e il prof. Alberto Conte docente di geometria presso l'Università di Torino: il dibattito si svolgerà il 28 febbraio 1992 alle ore 17 presso la Camera di Commercio, via Ganaceto 134, Modena). Sarà disponibile il catalogo della mostra e altro materiale illustrativo.

Per informazioni telefonare allo 059.206783 (Comune di Modena - Settore Pubblica Istruzione).

La collega Prof. Francesca Galasso, presidente della Sezione Mathesis di Gioia del Colle, ci ha comunicato che le Olimpiadi di Matematica, organizzate dalle sezioni della Puglia l'anno scorso, ha riscosso un vivissimo interesse ed ha coinvolto nell'attività tantissimi studenti di ogni ordine e grado, docenti, direttori didattici e presidi, genitori.

Tutti hanno manifestato il loro entusiasmo e l'auspicio che tale manifestazione si ripeta con regolarità annuale e possa estendersi su tutto il territorio del nostro Paese. Questo vuole quindi essere un invito, rivolto a tutte le sezioni, a coordinare in un prossimo futuro una Gara Nazionale.

Ci complimentiamo per la brillante iniziativa e speriamo l'invito venga accolto.

La Galasso fa anche presente che la messa a punto delle olimpiadi è stata un'occasione per incontrare e conoscere tante persone interessate ad attività scientifiche e didattiche, anche non operanti direttamente nel settore della scuola. Tutto ciò ha spinto il direttivo della Sezione di Gioia del Colle ad organizzare incontri e conferenze di tipo divulgativo, che mirassero a coinvolgere la partecipazione di un pubblico sempre più vasto.

Quello che segue è l'elenco dei vincitori delle Olimpiadi nelle loro diverse fasi:

Vincitori della fase provinciale di Bari, Taranto, Brindisi

DE SIMONE GIUSEPPE	1° ELEMENTARE	- CAROVIGNO
PUTIGANO ANGELA	2° EL. "POSITANO"	- NOCI
TOSCANO DOMINIQUE	2° EL. "COLLODI"	- ACQUAVIVA
CAMPANELLA MARIA	4° EL. "MINZELE"	- PUTIGNANO
BALDINI MARIANGELA	5° EL. 3° CIRCOLO	- BISCEGLIE
GIOVINAZZI ADRIANA	4° EL. 1° CIRCOLO	- TURI
CIOCIOLA CHIARA	3° EL. 1° CIRCOLO	- GIOIA

PARADISI FEDERICA	4° EL. 1° CIRCOLO	- GINOSA
GIANNUZZI LEONARDO	1° MEDIA	- GINOSA
VACCARO GIOACCHINO	1° MEDIA "LATERZA"	- BARI
DEL BUONO MARCELLO	3° MEDIA "RESTA"	- TURI
PLANTAMURA ANTONELLO	2°LICEO	- GIOIA
CAPODIFERRO FRANCESCO	2°LICEO	- GIOIA
CARIATI VALENTINA	2°LICEO	- GIOIA
GRECO MICHELE	4°LICEO "FERMI"	- BARI
LAERA LUCA	5°LICEO	- PUTIGNANO

Vincitori della fase regionale: 1° ciclo

1° TANCORRA TINA	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
2° GASPARRE GIUSEPPE	1° CIR. "MAZZINI"	- GIOIA
2° MANZARI VALENTINA	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
2° BIFERNO CLAUDIO	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
2° SERRA MARCO	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
2° TOSCANO DOMINIQUE	2° CIR. "COLLODI"	- ACQUAVIVA
2° GUGLIELMI FRANCESCA	1° CIR. "MINZELE"	- PUTIGNANO
2° DE SIMONE GIUSEPPE	1° CIRCOLO	- CAROVIGNO
3° GIANNUZZI GABRIELLA	CIR. "DIAZ"	- LECCE
3° MAGGIANO ANNALISA	CIR. "DIAZ"	- LECCE
3° PETRELLI CARLA	2° CIR. "COLLODI"	- ACQUAVIVA
3° PETRELLI ANNALISA	2° CIR. "COLLODI"	- ACQUAVIVA
3° MAGGI ANGELO	1° CIR. "BOSCO"	- GINOSA
3° GIANNUZZI PIERO	1° CIR. "BOSCO"	- GINOSA
3° SPORTELLI CESARE	1° CIR. "MAZZINI"	- GIOIA
3° LANZILOTTI PASQUALE	1° CIRCOLO	- CAROVIGNO
3° MONTUOSI GIUSI	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
3° MILANO FEDELE	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA

Vincitori della fase regionale: 2° ciclo

1° VALENTE MAURO	1° CIR. "DE AMICIS"	- BISCEGLIE
2° GALASSO VITO ANTONIO	3° CIRCOLO	- CONVERSANO
3° FESTINO GIANNI	2° CIRCOLO	- CASTELLANA

3° LEREDE FABRIZIO	2° CIR. "MAZZINI"	- GIOIA
3° PERNIOLA NUNZIO	2° CIR. "UMBERTO I"	- SANTERAMO
3° CAPODIFERRO SAVERIO	1° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
3° LOPOPOLO ANTONIO	1° CIR. "DE AMICIS"	- BISCEGLIE
3° MARZIO ANTONIO	1° CIRCOLO	- CAROVIGNO
3° FARINA MARINA	2° CIR. "S. FILIPPO"	- GIOIA
3° CASSANELLI CLAUDIO	3° CIRCOLO	- BISCEGLIE
3° GRECO MADDALENA	1° CIR. "DE AMICIS"	- BISCEGLIE
3° AMOROSO NICOLA	3° CIR.	- BISCEGLIE
3° NETTI APOLLONIA	2° CIRCOLO	- NOCI
3°CIFALDI ROSSELLA		- FOGGIA

Vincitori della fase regionale: Medie Inferiorie

1° PACELLI VINCENZO	S. M. "VITERBO"	- CASTELLANA
2° STIFANELLI CRISTIAN	S. M. "GALATONE"	- LECCE
2° LEOPIZZI ANDREA	S. M. "GALATONE"	- LECCE
2° PRESICCI LUIGI	S. M. "MASSARI"	- BARI
2° ANDRIANI MARCELLO	S. M. "MASSARI"	- BARI
2° SCARAMUZZI DOMENICO	S. M. "SANTOMAURO"	- BARI
3° DEL RE ADRIANO	S. M. "BALDACCHINI"	- BARLETTA
3° TRIPOLI GAETANO	S. M. "SANTOMAURO"	- BARI
3° PISCITELLI GIULIO	S. M. "SANTOMAURO"	- BARI
3° SONANTE FILIPPO	S. M. "VITERBO"	- CASTELLANA
3° ENRIQUEZ MAURO	S. M. "SANTOMAURO"	- BARI
3° SPERANZA DEBORA	S. M. "CARANO"	- GIOIA
3° DEL BUONO MARCELLO	S. M. "RESTA"	- TURI
3° DE PALO ALESSANDRO	S. M. "BALDASSARRE"	- TRANI
3° MAGGIPINTO MICHELE	S. M. "FIORE"	- BARI
3° RICCIARDI ERASMO	S. M. "NETTI"	- SANTERAMO
3° PARADISO VITO MICHELE	S. M. "BOSCO"	- SANTERAMO
3° CARDANOBILE NICOLA	S. M. "BALDASSARRE"	- TRANI
3° OSTUNI GIANVITO	S. M. "LUCARELLI"	- ACQUAVIVA
3° BONASSISA ORNELLA	S. M. "PIO XII"	- FOGGIA
3° CORSI FABRIZIO	S. M. "MURIALDO"	- FOGGIA

3° CAPUANO GIUSEPPE	SCUOLA MEDIA	- ACCADIA
3° POTENA GIUSEPPINA	S. M. "RODARI"	- APRICENA
3° DEL FUOCO BATTISTA	S. M. "RODARI"	- APRICENA

Vincitori della fase regionale: Medie Superiori

1° CARIATI VALENTINA	LICEO SCIENTIFICO	- GIOIA
2° SQUICCIMARRO CESARE	I.T.C. "DELL'OLIO"	- BISCEGLIE
2° ANTONIO GIRARDI	LICEO SCIENTIFICO	- GIOIA
2° GIUSEPPE ROMANAZZI	LICEO SCIENTIFICO	- PUTIGNANO
2° NATILE FRANCESCO	LICEO SCIENTIFICO	- PUTIGNANO
2° LAERA LUCA	LICEO SCIENTIFICO	- PUTIGNANO
2° GIORDANO FILIPPO	LICEO SCIENTIFICO	- GIOIA
2° ROMANO ANGELA	I.T.C. "DELL'OLIO"	- CASTELLANA