Università degli Studi del Sannio

Benevento

S.I.C.S.I.

- Scuola Interunivarsitaria Campana di Specializzazione all'Insegnamento -

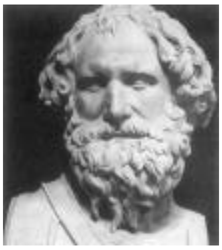
Indirizzo Scienze Naturali

Classe A059

Laboratorio di Matematica

I momenti significativi della Storia della Matematica

- Un contributo per il docente di Matematica della Scuola Secondaria di I grado -



Anno Accademico 2005/2006

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DEL SANNIO - Facoltà di Scienze

S.I.C.S.I.

Scuola Interunivarsitaria Campana di Specializzazione all'Insegnamento

Referente di Ateneo: Prof. Vittorio Colantuoni

Classe di concorso A059 - Indirizzo Scienze Naturali

Corso di "*Laboratorio di Matematica*" - Prof. Ferdinando Casolaro

I momenti significativi della Storia della Matematica

- Un contributo per il docente di Matematica della Scuola Secondaria di I grado -

Lavoro a cura degli specializzandi:

dott. Lucio G. D'Agostino

dott.ssa Annarita D'Ambrosio

dott.ssa Pina D'Angelo

dott. Damiano Fulvio

dott.ssa Rosalia Di Paola

dott.ssa Maria Fasulo

dott.ssa Renata Ferrara

dott.ssa Maria Fiorillo

dott.ssa Gianquitto Anna Luisa

dott.ssa Gabriella Giordano

dott.ssa Myriam Lucarelli

dott. Guido Lupo

dott.ssa Maria Rosaria Maglione

dott.ssa Stefania Marcucci

dott. Michele Marinaro

dott.ssa Angela Martino

dott.ssa Paola Mastantuoni

dott.ssa Caterina Mattei

dott. Massimo Mazzarella

dott.ssa Ida Montenigro

dott.ssa Cinzia Mucci

dott. Biagio Nocerino

dott.ssa Pina Paniccia

dott.ssa Sara Polcino

dott. Russo Cristoforo

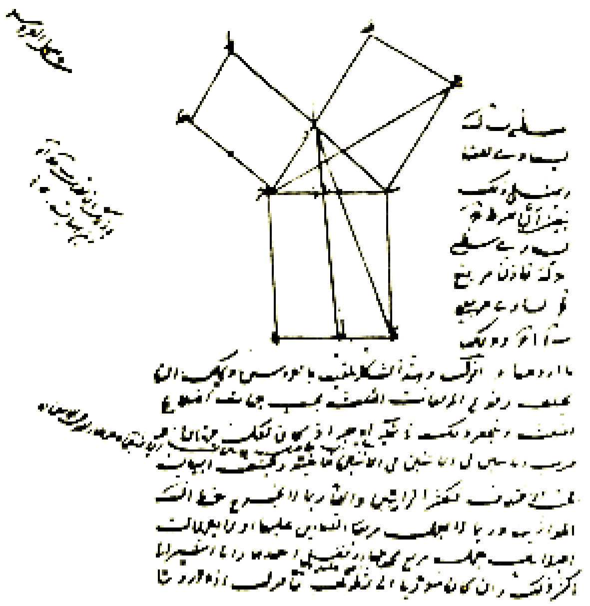
dott. Gianni Simeone

dott. Bonifacio Taddeo

dott.ssa Cinzia Tiblandi

dott.ssa Maria Pia Vitello

Indice



"La matematica, dicono i matematici, è serva e regina di tutte le scienze. E' il linguaggio che, come sosteneva Galileo, consente agli scienziati di leggere il libro della natura e, al tempo stesso, è come se vivesse pura, fuori della natura, in una realtà interamente sua. E' strumento ed essenza. E', appunto, serva e regina. In questa sua condizione duplice, eppure mai del tutto ambigua, la matematica ha accompagnato e trainato l'intera storia della scienza..."

Introduzione

Che cos'è la matematica? - Il termine in origine indicava lo studio delle grandezze, dei numeri e delle figure geometriche, nonché delle relazioni e delle operazioni logiche tra queste quantità.

La **matematica** era quindi propriamente divisa in *geometria*, o scienza delle quantità e delle dimensioni geometriche, *aritmetica*, o scienza dei numeri e del contare, e in *algebra*, cioè nella generalizzazione astratta di questi due campi.

Si può dire che la matematica sia nata con l'umanità: le prime testimonianze di alcune nozioni di geometria e dell'interesse per le forme geometriche sono state infatti individuate nei disegni del vasellame e dei tessuti, e nelle pitture rupestri d'epoca preistorica.

I sistemi di conteggio primitivi, sviluppati in seguito a esigenze pratiche, erano quasi certamente basati sull'uso delle dita di una o di entrambe le mani, come suggerito dalla predominanza del numero cinque o del numero dieci come basi degli attuali sistemi di numerazione.

La Matematica nell'antichità: dall'interesse per l'Astronomia ai primi frammenti di geometria

La matematica antica

Le prime testimonianze di una matematica avanzata e organizzata risalgono al periodo della civiltà babilonese e di quella egizia, intorno al III millennio a.C. Allora l'aritmetica e la geometria erano applicate a problemi di natura prettamente empirica, come la definizione dei confini dei campi dopo le inondazioni del Nilo, e non vi era traccia di concetti matematici astratti e complessi quali quelli di assioma e di dimostrazione. I primi testi **egizi**, elaborati intorno al 1800 a.C., rivelano che era in uso un sistema di numerazione decimale, cioè basato su simboli distinti per indicare le potenze di 10(cioè 1, 10, 100 ecc.), simile al sistema adottato in seguito dai romani.

In geometria essi giunsero alle formule corrette per il calcolo dell'area dei triangoli, dei rettangoli, dei trapezi, e del volume di figure solide some i parallelepipedi, i cilindri e, naturalmente, le piramidi.

I **babilonesi** adottarono un sistema di numerazione sessagesimale, cioè in base sessanta, che differiva notevolmente da quello egizio. Col tempo i babilonesi svilupparono un sofisticato sistema matematico mediante il quale potevano determinare le soluzioni positive di qualunque equazione quadratica e le radici di alcune equazioni di terzo grado.

Essi disponevano di un gran numero di tavole, comprese quelle per la moltiplicazione e la divisione, quelle dei quadrati e dell'interesse composto; una delle loro tavole conteneva addirittura le soluzioni intere dell'equazione $a^2+b^2=c^2$, ordinate in modo che c^2/a^2 decrescesse con continuità dal valore 2 fino a circa 4/3. Sapevano calcolare la somma di alcune serie aritmetiche e geometriche e delle successioni di quadrati, e inoltre ottennero una buona approssimazione di radice quadrata di 2.

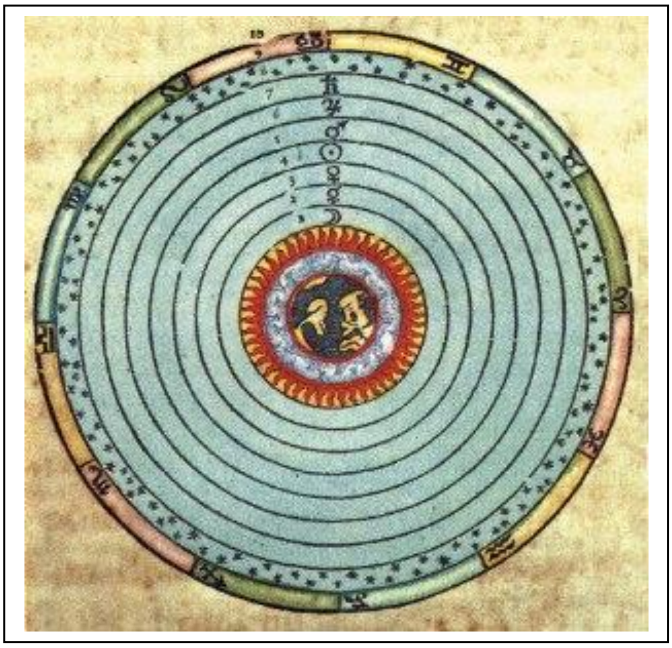
In geometria, conoscevano le formule per il calcolo dell'area di rettangolo, triangoli, trapezi, e del volume di figure solidi semplici quali parallelepipedi e cilindri, ma non giunsero mai a un'espressione corretta per il volume della piramide.

In particolare i Babilonesi e gli Egiziani portarono un primo contributo; degli egiziani, i principali documenti matematici che ci sono pervenuti sono due papiri: "il papiro di Mosca" ed "il papiro di Rhind" che risalgono entrambi al 1700 a.C..

Il papiro di Rhind contiene 85 problemi tra cui il n. 56 scritto dalla scriba Ahmes (papiro largo 30 cm e lungo 5,46 m conservato al British Museum e acquistato nel 1858 da un antiquario scozzese Henry Rhind) presenta un interesse tutto particolare per il fatto di contenere i primi rudimenti di trigonometria e una teoria dei triangoli simili. Esso chiede di determinare il valore del SEQT (rapporto fra apotema di base e altezza di una piramide) usato nella costruzione delle piramidi dove era essenziale dare una inclinazione uniforme alle facce di una piramide avente lato di base 360 cubiti e altezza 250 cubiti.(1 cubito corrispondeva a 7 mani). Nel papiro di Rhind la scrittura non è geroglifica, ma più agile basata su simboli chiamati ieratici (ossia "sacra" per distinguerla da quella più popolare).

Nel papiro di Mosca (largo 7,5 cm x 5,5 m di lunghezza), scritto da una scriba con molta accuratezza, appare l'uso delle simboli ieratici per indicare le cifre e contiene venticinque esempi di problemi tratti dalla vita pratica.

Relativamente ai Babilonesi che, come è noto, coprivano una serie di popolazioni che occuparono l'area situata tra i fiumi "Tigre" ed "Eufrate" nell'VIII sec. a.C. , la regione cadde sotto il dominio degli Assiri che non aggiunsero nulla di nuovo alla cultura matematica già esistente, ma nel secolo successivo la regione (nota come Impero Assiro) venne spartita tra i Caldeo e i Medi.



I Caldeo dimostrarono un particolare interesse per l'Astronomia e, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercarono di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studi su cui operavano era la sfera, per cui, oltre alle questioni metriche relative a lunghezze, aree e volumi utili nella pratica, i più antichi frammenti di geometria che ci sono giunti riguardano la geometria sferica.

La matematica greca

La storia greca risale al secondo millennio A. C., allorché incolti invasori calarono dalle regioni settentrionali, pronti ad assorbire la cultura degli altri popoli, complici gli scambi commerciali nel mediterraneo. I **greci** elaborarono un alfabeto con vocali e consonanti e assimilarono le conoscenze matematiche in maniera molto produttiva attingendo in parte alla matematica egizia, in parte a quella babilonese. Il fondamentale elemento di novità che essi introdussero fu l'allontanamento dall'approccio puramente empirico della matematica da loro ereditata a favore dell'invenzione di una matematica più astratta, fondata su una struttura logica di definizioni, assiomi e dimostrazioni.

Secondo testimonianze più tarde, questo sviluppo ebbe inizio nel VI secolo a.C. con Talete di Mileto (624-548 a.c. circa) uomo di intelligenza superiore, si occupò di astronomia e matematica. "*Conosci te stesso*" era il suo motto. Conobbe la cultura

Mesopotamica e si occupò di astronomia e matematica: a lui vengono attribuiti molti teoremi di geometria. Si potrebbe dire, addirittura, che la geometria è di parecchie migliaia di anni più vecchia dell'aritmetica; è stata la prima vera scienza costruita dall'uomo, la sola vera scienza dell'antica Grecia; già adulta quando la fisica, la chimica, la biologia, la geologia non erano ancora nate, quando la medicina muoveva i primissimi passi. La sola astronomia era abbastanza sviluppata: ma che cos'era l'astronomia dei caldei, degli egiziani, dei greci, se non geometria? L'Astronomia, la più antica scienza del mondo, è così vecchia che non sappiamo quando ebbe inizio.

La matematica e l'astronomia nella storia fino a Talete

In epoca preistorica sono pochi gli indizi che ci possono far pensare ad un interesse degli uomini del tempo per la misurazione delle distanze che ci separano dagli oggetti celesti. A dire il vero è probabile che gli stessi oggetti celesti non fossero identificati come oggetti essi stessi, quanto piuttosto come emanazioni divine, quindi intoccabili ed imponderabili per definizione.

D'altro canto se osserviamo bene quali tracce ci sono pervenute dalle epoche preistoriche, non possiamo non notare che circa 30.000 anni fa ci furono uomini che ebbero la coscienza del numero, e ciò è testimoniato dal ritrovamento, in quella che fu la Cecoslovacchia, di un osso di lupo che presenta serie da cinque tacche ben distinte, ed incise a mano (***C. Boyer, Storia della Matematica, 1968***). Il concetto di numero, ancorché di misurazione, dunque doveva essere in un certo qual modo presente all'interno della cultura preistorica. Ciò che probabilmente non era presente, e peraltro non abbiamo alcuna traccia che ci possa dire se vi fosse, è la comprensione che gli oggetti celesti, Sole, Luna, Stelle, fossero oggetti materiali, cioè composti di materia ponderabile. Se vi fu questa comprensione non ci è stato dato di sapere. Ciò che invece ci è stato tramandato sotto forma di enormi insediamenti megalitici è probabilmente un sistema di osservazione e di controllo della posizione sulla volta celeste degli astri principali. Alcuni insediamenti megalitici britannici, tra i quali la famosissima *Stonehenge* (2800 a.C.), o il complesso di *Carnac* in Francia (4000 - 1700 a.C.), così come le strutture *Maya* ed *Azteche* (1000 a.C.) stanno a testimoniarci dello straordinario interesse per il mondo astronomico, anche se le ragioni più profonde che portarono all'edificazione di questi monumenti, edifici e rappresentazioni pittoriche, al di là dell'intento tutto umano, di dare ordine geometrico a ciò che apparentemente non l'ha, per la computazione di calendari, rimangono oggi ancora un mistero.

Il periodo protostorico, che possiamo fare iniziare con la fondazione della città di Gerico, circa 8.000 anni prima di Cristo, ci comincia a restituire tracce sempre più evidenti di un interesse per la posizione degli astri sulla volta celeste, volta alla costruzione di un calendario sempre più preciso, in grado di fornire alla casta sacerdotale dell'epoca informazioni sempre più accurate per potergli permettere previsioni su fenomeni meteorologici, od equivalenti, legati ad essi, ricorrenti durante l'anno solare. Il Sole, la Luna, i pianeti, solo cinque noti a quel tempo, e le stelle fisse, erano studiati per la loro collocazione sulla volta celeste, e per i loro movimenti di rivoluzione. Nulla c'è stato tramandato sulla volontà di una ricerca volta al computo delle distanze astronomiche. Sicuramente l'uomo si chiese cosa fossero quegli oggetti brillanti che impunturavano il cielo notturno, e ben presto si poté comprendere che il cielo non era immutabile, anche se osservazioni in merito probabilmente si persero con i secoli, visto che Aristotele, che pure ebbe modo di ricavare molte informazioni sugli "antichi", come li chiamava, nel De Coelo, scrive che non vi furono mai evidenze di mutamenti nella sfera delle stelle fisse. Il mondo antico, quindi, fino all'avvento delle grandi civiltà mediorientali, sviluppatesi nelle regioni Mesopotamiche, o lungo il corso del Nilo, non ci ha lasciato tracce di un interesse per la conoscenza delle distanze degli oggetti celesti. Probabilmente, come vedremo in tal senso, fu determinante una concezione della propria esistenza ad un approccio alla vita che non aveva ancora sviluppato quella che noi oggi chiamiamo Filosofia Naturale. Il primo evento chiave della storia dell'uomo fu senza ombra di dubbio l'invenzione della scrittura. Come quasi ogni altra invenzione epocale dell'uomo non ebbe una partenza rapida, né la sua evoluzione ed espansione fu veloce; ma nelle zone dove prese piede contribuì notevolmente allo sviluppo delle civiltà che cominciarono a farne uso, relegando quelle che non la recepirono o non la svilupparono fuori dalla storia.

Dimostrazioni di ciò si hanno analizzando lo sviluppo delle civiltà Mesopotamiche ed Egizie. Queste civiltà regalarono all'uomo millenni di sviluppo, di relativo benessere, e di ordine sociale; lo sviluppo delle conoscenze naturali, e l'interscambio delle stesse favorite dall'utilizzo della scrittura, svilupparono una buona base di informazioni pronte per essere messe a disposizione delle generazioni future. Tavole in argilla con scrittura cuneiforme contenenti esercizi di geometria sono state datate circa 1.800 anni a.C. Tuttavia l'immagine moderna che abbiamo dell'Universo, e che ci sembra così familiare, è frutto del lavoro compiuto nell'Ellade, nella zona attualmente occupata in parte dalla Grecia e dalla Turchia, dai primi filosofi occidentali della storia dell'uomo. Sin dal VII secolo a.C., nelle regioni mediterranee orbitanti attorno a quel centro nevralgico di sviluppo culturale che fu l'antica Grecia, molti studiosi dell'epoca hanno affrontato nuovi problemi di geografia e di astronomia. Ragioni sociali, geografiche ed economiche spingono i pensatori di queste regioni a dare spiegazione degli eventi naturali mediante l'uso di misure e calcoli, rendendosi conto della Natura stessa come insieme di fenomeni puramente, appunto, naturali. E' qui e ora che l'uomo acquisisce la capacità di pensare, agire e tentare di dominare il mondo dei fenomeni coscientemente.

Già a partire dall' VIII – VII secolo a.C., i Caldei – Babilonesi, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercavano di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studio su cui operavano era la sfera.

Tutta la volta celeste sembra ruotare attorno alla terra una volta al giorno questo moto apparente è causato naturalmente dal fatto che la terra ruota sul suo asse da occidente ad oriente. Di tutti i corpi celesti, la luna è il solo dotato di un vero movimento attorno alla terra.

Noi siamo abituati a considerare questi fatti come postulati, ma all'inizio della storia dell'umanità si credeva che la terra fosse piatta ed immobile. Il sole e la luna erano adorati come dei, e l'apparizione di qualcosa di insolito nei cieli era considerato come un segno della disapprovazione divina.

I Caldei, gli egizi ed i cinesi sono generalmente considerati i primi astronomi, ma questo corrisponde solo in parte a verità; è vero che questi antichi popoli dividevano le stelle fisse in gruppi o "costellazioni" e distinguevano anche pianeti, comete ed eclissi, ma non possedevano alcuna vera conoscenza sulla natura dell'universo e nemmeno della terra stessa, sicché è difficile definirli astronomi nel vero senso della parola.

La storia comincia all'incirca nel 3000 a.C., allorché l'anno di 365 giorni fu per la prima volta adottato in Egitto ed in Cina. Questa fu anche approssimativamente l'epoca della costruzione di quella considerevole mole conosciuta come la Grande Piramide di Cheope. La piramide è ancor oggi una delle maggiori attrazioni turistiche dell'Egitto; Cheope stesso, sovrano rude e deciso, vi investì tanto denaro da rovinare il suo paese, ed anche adesso non sappiamo esattamente perché considerasse la piramide tanto importante. Dal punto di vista astronomico è interessante, poiché il suo passaggio centrale è rivolto verso quello che era allora il polo nord del cielo.

L'Egitto è ancor oggi considerato la terra del mistero. E' risaputo che la maggior parte dei misteri dell'antico Egitto furono creati a bella posta dai sacerdoti, che erano i più istruiti della loro razza e che si rendevano conto che il sistema migliore per tenere sotto controllo il popolo era di mantenerlo nell'ignoranza. Ma anche i sacerdoti avevano dei limiti ben definiti, e benché eccellessero nell'arte di eseguire esatte misurazioni, non riuscirono mai a scoprire che la terra è sferica. Essi credevano che il mondo fosse rettangolare, con l'Egitto in mezzo e deserti e mari tutt'intorno.

Sia gli antichi Egizi che i popoli della Mesopotania (in particolare i Sumeri) furono sempre stimolati da necessità pratiche come l'irrigazione di un terreno o, più in generale, l'esercizio dell'agricoltura. Tale necessità, per altro, rendevano fondamentali le osservazioni astronomiche: l'inondazione del Nilo, ad esempio, principale evento nella vita dell'Egitto, era legato all'apparizione della stella Sirio. Si capisce dunque come le previsioni di eventi astronomici, soprattutto se avevano relazioni con le precipitazioni atmosferiche, fossero di notevole importanza per quelle popolazioni. In realtà, facendo di necessità virtù, i Babilonesi portarono lo studio delle osservazioni astronomiche a livelli considerevoli e comunque, più elevati di quelli cui erano giunti gli Egizi.

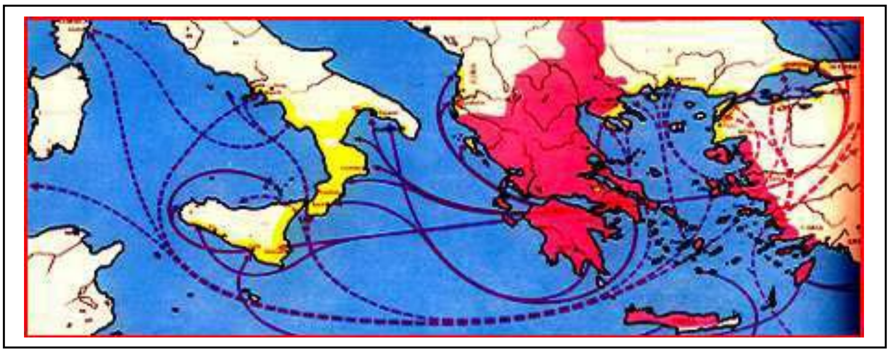
Tanto per fare qualche esempio, essi riuscirono a prevedere con notevole precisione il momento della levata e del tramonto del sole e della luna; da loro vennero identificate intorno al 400 a.C., le dodici costellazioni dello Zodiaco. Considerato però che, né presso gli Egizi, né presso i Babilonesi, era noto il concetto di misura di un angolo le osservazioni astronomiche non portarono a vere e proprie tavole trigonometriche, ma condussero a relazioni fra i lati di omologhi di triangoli simili. Comunque furono recepite ed elaborate da un popolo che, rispetto a loro, aveva un più spiccato senso della speculazione scientifica: i Greci.

Le interrelazioni tra l'astronomia nella sua vera forma e la matematica cominciò, appunto, con i greci, che non solo eseguirono delle osservazioni, ma tentarono anche di dare a queste delle spiegazioni. Con essi troviamo per la prima volta uno studio sistematico delle relazioni che legano gli angoli (al centro e alla circonferenza) di un cerchio tra loro e con le corde da essi sottese.

Il primo grande filosofo ionico di cui abbiamo informazioni è Talete di Mileto, nato attorno al 640 a.C. Talete aveva delle idee cosmologiche assai primitive, al pari di quelle di un altro grande dell'epoca: Omero. Probabilmente queste concezioni cosmologiche superficiali rispecchiavano ciò che più comunemente era creduto all'epoca. La Terra veniva, ad esempio, concepita come un cilindro appiattito che galleggiava sull'Oceano, la cui acqua era pensata come madre ed origine di ogni cosa. Talete fu il fondatore, come filosofo della Natura, di questo genere di filosofia, come scrisse Aristotele nel De Coelo. Platone lo definì un "ingegnoso inventore di tecniche", una sorta di Leonardo da Vinci ante litteram. Non è però importante ai nostri fini ricordare Talete per le sue visioni cosmologiche errate, ma per essere stato il primo "scienziato" (tra virgolette e con tutte le cautele del caso). Naturalmente, l'ottica della Filosofia Naturale faceva vedere i corpi celesti come oggetti ponderabili, collocati ad una certa distanza da noi, in moto rispetto al nostro pianeta. Come conseguenza non vi poteva mancare un tentativo di calcolarne la posizione rispetto al nostro pianeta.

Talete stesso fu forse il primo a comprendere che la Terra è un globo, ma sfortunatamente tutti i suoi scritti originali sono andati perduti. Il suo successore Anassimandro affermerà invece che la Terra è cilindrica e che è isolata nello spazio. La volta celeste visibile viene pensata come una sfera cosparsa di fori da cui penetra il fuoco esterno. Gli astri che si vedono sorgere ad oriente sono gli stessi che sono stati visti tramontare ad occidente, e durante la notte girano a fianco della Terra. Il Sole, la Luna e le stelle si trovano a diverse distanze dalla Terra, essendo il Sole il più distante e le stelle fisse le più vicine. Questa nuova concezione è la base del modello geocentrico: la Terra al centro dell'Universo e la volta celeste le ruota intorno, trascinando gli astri. Ma la prima intuizione di un sistema costituito da sfere concentriche intorno alla Terra si deve ai filosofi della scuola pitagorica i quali postularono che in natura tutto è regolato da relazioni matematiche.

Successivamente anche la navigazione ha sviluppato l'astronomia in quanto astronomia vuol dire geometria:



ecco perché gli antichi popoli navigatori del mediterraneo dovettero diventare ottimi geometri. Ma anche architettura vuol dire geometria; e soprattutto vuol dire geometria la agrimensura. Infatti, agrimensura è la traduzione letterale, in latino, del greco geo-metria: in italiano, misurazione (metria) del suolo (cioè della terra, che in greco si dice gè: ricordando Gea, la dea della Terra).

Il periodo classico: la Matematica nelle Scuole filosofiche

I Greci affrontarono il problema della conoscenza del mondo in modo diverso da tutti gli altri popoli dell'antichità: essi riconobbero che il ragionamento deve procedere sulla base di principi generali, ed è per questo che vengono unanimemente considerati i fondatori della filosofia. Diversamente dalla speculazione egizia e mesopotamica, la filosofia si accompagnò infatti ai primi passi della scienza. Il concetto di prova, di dimostrazione universalmente valida è un'invenzione peculiarmente greca ed è ciò che segna l'inizio della filosofia e della scienza in contrapposizione ai brancolamenti delle civiltà precedenti.

Inoltre, i pensatori greci furono gli unici che intraprendessero ricerche senza proporsi come fine primo l'utilità pratica, giacché cercavano di comprendere il mondo per il puro amore della conoscenza. L'origine della civiltà greca si presuppone risalga al 2800 a.C., periodo in cui i greci si stabilirono in Asia Minore, nella Grecia moderna, nell'Italia Meridionale, in Sicilia, a Creta, a Rodi, a Delo e nell'Africa Settentrionale.

La supposizione di tale origine si evince dall'Iliade e dall'Odissea di Omero e dalla decifrazione degli scritti antichi e delle ricerche archeologiche.

Dal punto di vista della "storia della matematica", la civiltà greca viene distinta in due periodi:

1. periodo classico (dal 600 al 300 a.C.)
2. periodo ellenistico (dal 300 a.C. al 600 d.C.)

Le fonti della nostra conoscenza della matematica greca sono, stranamente, meno attendibile ed autentiche di quelle di cui disponiamo per la matematica babilonese ed egizia perché non ci è pervenuto alcun manoscritto originale dei matematici greci più importanti; uno dei motivi è la deperibilità dei papiri greci contrariamente all'argilla usata nella maggior parte dei documenti babilonesi ed egiziani. Nel periodo classico, la matematica greca si sviluppò in numerosi Centri (le cosiddette Scuole) che si susseguono l'un l'altro.

La scuola ionica: Talete

La prima di queste Scuole, la Ionica, fu fondata a Mileto da Talete, considerato l'iniziatore dell'indagine scientifica, in quanto ricerca le cause dei fenomeni naturali proponendone una spiegazione razionale. Di madre fenicia, Talete nacque nella città ionica di Mileto. Esperto commerciante, intelligente e saggio uomo politico, ebbe certamente la possibilità di frequenti contatti con gli egizi, delle cui conoscenze fece presto tesoro.

In un viaggio in Mesopotamia apprese dagli astronomi di Babilonia dei loro studi sulle eclissi. Attento osservatore, intuì che le nozioni acquisite dagli astronomi babilonesi avevano una notevole validità scientifica. Si narra inoltre di una sua clamorosa previsione, nel 585 a.C., dell'eclisse solare che avvenne in quello anno a Mileto, dove viveva; ma la fondatezza storica di tale episodio è piuttosto discutibile. In ogni caso le conoscenze astronomiche apprese a Babilonia contribuirono moltissimo a infondere nei greci l'interesse per un'attenta osservazione dei fenomeni naturali. Nonostante di Talete non sia rimasto alcuno scritto, è tradizione ritenere che le sue ricerche più importanti riguardassero la geometria.

È certo che lo scienziato di Mileto abbia appreso molti dei segreti matematici degli egizi: la leggenda lo descrive mentre ai piedi delle grandi piramidi sbalordisce i sapienti sacerdoti per il modo con il quale determina l'altezza della piramide di Cheope. Fissando verticalmente un bastone nella sabbia, Talete aspettò che la sua ombra assumesse la stessa lunghezza del bastone; quindi misurò l'ombra proiettata dalla piramide e, aggiungendo a questa metà della lunghezza del lato di base, ne ottenne l'altezza (Fig. 1).

Quindi, attraverso l'ombra, accessibile, Talete misura l'inaccessibile: l'altezza della piramide, ovvero la tomba del faraone. Plutarco così lo riporta: "*[Il re] è rimasto singolarmente ben impressionato dal modo in cui hai misurato la piramide, [...], limitandoti a collocare il tuo bastone al limite dell'ombra proiettata dalla piramide stessa; formatisi, al contatto col sole, due triangoli, dimostrasti che la proporzione esistente fra la lunghezza del bastone e l'altezza della piramide era la stessa che intercorreva fra la lunghezza delle due ombre. Ciò nonostante .... ti si muove l'accusa d'avere in odio i re*". Talete viene anche ricordato per avere risolto il problema di determinare la distanza di una nave dalla costa stando sulla sommità di una torre o di una rupe.

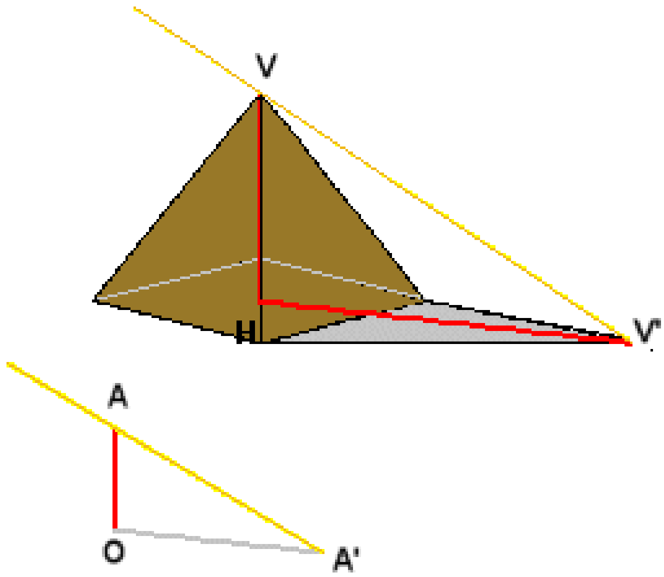


Fig. 1

I problemi descritti e risolti da Talete costituiscono un esempio di quelle trasformazioni geometriche dette ***similitudini***, la cui introduzione tradizionale inizia con un famoso teorema attribuito a Talete (Fig. 1).

Tre rette tra loro parallele determinano sulle rette trasversali *m*, *n*, *p* una corrispondenza di punti tale che "il rapporto tra due segmenti sulla retta m è uguale al rapporto tra i segmenti corrispondenti sulle rette n e p".

Se, per esempio, $A_1 B_1$ è metà di B_1C_1, anche $A_2 B_2$ è metà di B_2C_2 e A_3B_3 metà di B_3C_3. Passando cioè dalla retta *m* alla *n* e alla *p*, le immagini dei segmenti $A_1 B_1$, B_1C_1 ecc. variano di lunghezza, ma il rapporto fra loro rimane costante (Fig. 2).

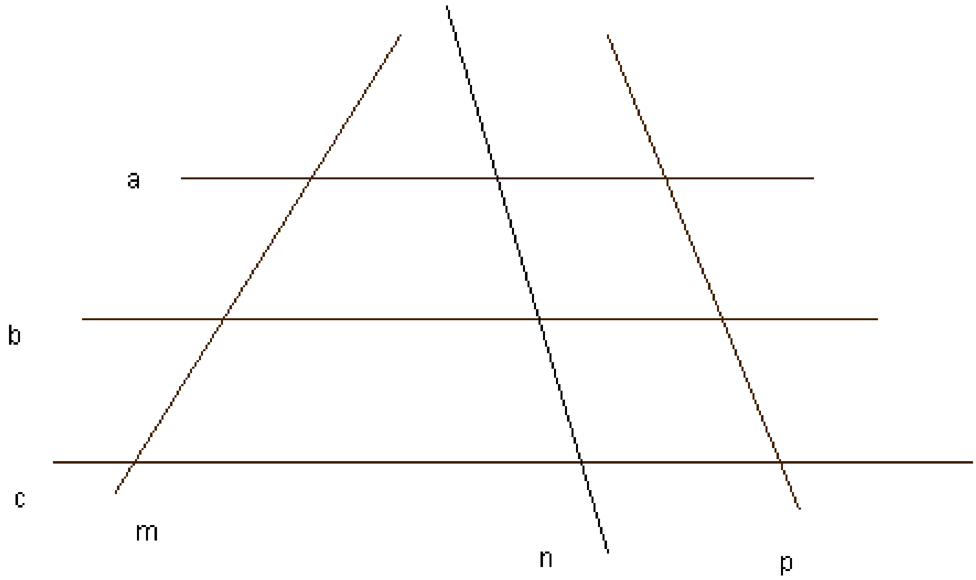


Fig. 2

Fra le altre scoperte geometriche attribuite a Talete vi è l'importante relazione tra i lati e gli angoli del triangolo isoscele: “un triangolo che ha due lati di uguale lunghezza, ha gli angoli a essi opposti di uguale ampiezza e viceversa”; per cui nel triangolo equilatero, cioè con tre lati di uguale lunghezza, gli angoli hanno tutti la stessa ampiezza. Altra scoperta attribuita a Talete riguarda “l'uguaglianza delle ampiezze degli angoli opposti al vertice determinati da due rette che si intersecano”, nonché la proprietà riguardante la somma degli angoli di un triangolo: la somma degli angoli interni è, per qualsiasi triangolo, un angolo piatto. Proprietà che può essere verificata in modo pratico ritagliando i tre angoli di un triangolo e disponendoli uno di seguito all'altro.

Sempre a Talete è attribuita la scoperta di un'altra importante proprietà geometrica: “qualsiasi triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo” (Fig. 3).

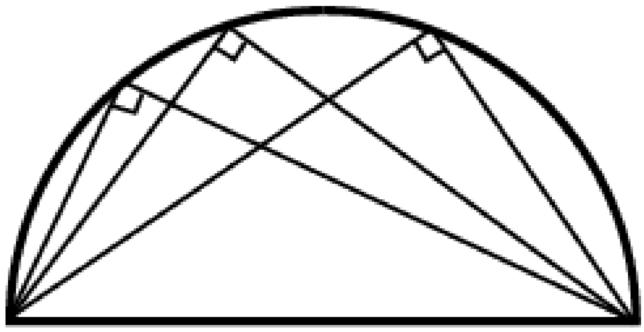


Fig. 3

Con questo teorema risulta superato il procedimento degli egizi per la costruzione dell'angolo retto (dividendo una fune in 12 lunghezze uguali e formando poi un triangolo con i lati di 3, 4 e 5 lunghezze): per ottenere un angolo di 90° basta disegnare una circonferenza e fissare gli estremi *A* e *B* di un suo diametro e un punto qualsiasi appartenente alla circonferenza; in questo ultimo si determina l'angolo retto facendo passare una fune tesa per i tre punti fissati.

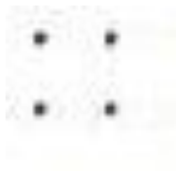
Pitagora e la sua scuola

Verso la fine del VI secolo a.C. sboccia un'altra corrente di pensiero filosofico: la Scuola pitagorica fondata da Pitagora nell'Italia Meridionale. A Pitagora fu attribuita la valenza di profeta e la sua figura sfumò presto nella leggenda. Le dottrine della scuola erano segrete e anche dopo la morte di Pitagora continuarono ad essere a lui attribuite le variazioni e le evoluzioni, immaginando che parlasse tramite la divinità: da qui nacque la famosa espressione *"ipse dixit"* ("l'ha detto lui in persona"), con la quale si indicava che ogni elaborazione non era altro che uno sviluppo delle dottrine del maestro Pitagora. Proprio per questo non sappiamo se il celebre teorema di Pitagora sia effettivamente suo o di qualcun altro a lui vicino.

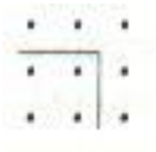
Pitagora aveva una predilezione per le scienze matematiche, che conosceva meglio di ogni altro suo contemporaneo. Fu il primo a considerare la matematica come scienza e iniziò i suoi studi avendo come base le conoscenze geometriche degli

Egizi e aritmetiche dei Fenici. Egli stabilì la dimostrazione matematica su cui adesso si basano anche tutte le altre discipline scientifiche. I Pitagorici avevano come base della loro filosofia i numeri: il numero è l'***archè***, ovvero l'elemento primordiale dell'universo.

I Greci si servivano dei **ψεφοι**, ossia di pietruzze mediante le quali i vari numeri erano rappresentati visivamente. Con questi numeri figurati è possibile costruire delle serie, per esempio quella dei numeri quadrati. Infatti, partendo dal primo numero quadrato, 4 (2x2), essenza della giustizia, raffigurato con quattro punti



Applicando lo gnomone, ossia una specie di squadra, si può ottenere il numero quadrato successivo 9 (3x3), anch'esso essenza della giustizia, in questo modo



e poi

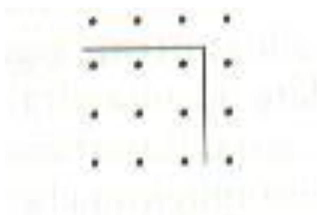


Fig. 4

ossia 16, il quadrato di quattro e così via con i numeri successivi. Da notare che i Pitagorici non conoscevano lo zero ed è anche facile capire il perchè: con le pietruzze è impossibile rappresentarlo. Questo fatto contribuisce a conferire all'uno uno statuto particolare: è un'entità indivisibile, rispetto alla quale nulla è antecedente. Più che un numero come gli altri, l'uno è la sorgente da cui nascono tutti gli altri numeri. Questi a loro volta si suddividono in pari e dispari, che i Pitagorici identificavano con l'illimitato ed il limite. L'uno veniva chiamato ***parimpari***, in quanto aggiunto ad un dispari genera un pari ed aggiunto ad un pari genera un dispari: ciò significa che l'uno deve contenere in sé sia il pari sia il dispari. Il numero Uno è un punto (una specie di atomo), il Due una retta, il Tre un piano e il Quattro un solido. Due punti individuano una retta, tre un piano e quattro un solido.

Fig. 5

L'intero Universo, quindi, è rappresentabile sotto la forma chiamata τετρακτυς (letteralmente "gruppo di quattro"): la tetrattide rappresenta, quindi, la successione delle tre dimensioni che caratterizzano l'universo fisico. Queste considerazioni mostrano come per i Pitagorici ciascun numero è dotato di una propria individualità e pertanto non tutti i numeri si equivalgono come importanza. Tra i numeri esistono λογοι, ossia *rapporti* e tra i rapporti è possibile rintracciare una *proporzione* (in greco αναλογια), ossia uguaglianze di rapporti: è la conoscenza di questo complesso universo di relazioni che costituiva per i Pitagorici il vertice dell'apprendimento.

I Pitagorici studiavano i numeri primi, le progressioni e quei rapporti e proporzioni che essi consideravano "belli". Secondo Pitagora, la perfezione numerica dipendeva dai divisori di un numero: i numeri più rari e importanti sono i ***numeri perfetti***, quelli i cui divisori, addizionati (1 compreso), danno esattamente come somma il numero in questione (es. 6=1+2+3).

Quelli che superavano la somma dei loro divisori erano chiamati ***eccessivi***, mentre quelli che non la superavano erano chiamati ***difettivi***. Due numeri erano detti ***amicali*** se ciascuno era uguale alla somma dei divisori dell'altro (es. 284 e 220).

La sezione più sviluppata era però quella dei numeri pari e dispari, il cui studio portò alla scoperta di questi teoremi:

- la somma di due numeri pari è pari (2+2=4)
- Il prodotto di due numeri dispari è dispari (3x3=9)
- Se un numero dispari divide un numero pari, divide anche la sua metà, sempre che essa non sia un numero primo (20:5=4; 10:5=2).

PARI	**DISPARI**
imperfetto	perfetto
indeterminato, illimitato, infinito (a-peiron)	determinato, limitato, finito (peras)
. . **->** . . il pari non limita: in questa raffigurazione "lascia passare" la freccia	. . **-> .** . . Il dispari invece limita, nella raffigurazione grafica "ferma" la freccia.
sinistro	destro
mosso	fermo
curvo	diritto
femminile	maschile
tenebra	luce
rettangolo	quadrato
molteplice	uno

Secondo Pitagora, fra i numeri esisteva un'aristocrazia: c'erano quelli nobili e quelli plebei. A parte il 10, la ***tetraktis***, che per i pitagorici rappresenta un'entità divina, l'1, il 2, il 3 e il 4 erano i più illustri fra tutti i numeri: la loro somma è uguale a 10 e tutti insieme formavano il divino triangolo (*Fig. 5*). "Tutte le cose che ci è dato conoscere posseggono un numero" e ogni numero ha un suo significato particolare. Secondo Pitagora l'1 rappresenta l'intelligenza, il 2 l'opinione (sempre duplice), il 4 la giustizia, il 5 il matrimonio, il 7 il tempo critico (forse perché sono sette i giorni della settimana) e così via.

I numeri, infine, posseggono qualità terapeutiche: i quadrati magici, ad esempio, usati anche nel medioevo e nel rinascimento, venivano incisi su lastre d'argento e preservavano dalla peste, dal colera e dalle malattie veneree. Tutte queste correlazioni affascinavano Pitagora, il quale provò una profonda delusione nel fare il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato e scoprire che il risultato non era un numero intero o decimale. Era stato lui stesso a scoprire il teorema che reca il suo nome: "in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti." Questo teorema era già noto ai cinesi e ai babilonesi mille anni prima, ma Pitagora fu il primo a dimostrarne la validità per ogni triangolo rettangolo.

La sfera celeste

Pitagora, insieme ai suoi discepoli, non si occupò solamente dello studio generale della matematica, ma anche di altre discipline, come l'astronomia. In questo campo, grazie ai suoi studi sui numeri, essi riuscirono a spiegare il moto degli astri e la struttura atomica dell'universo: furono i primi a sostenere la sfericità della Terra e dei corpi celesti in genere (Fig. 6).

Essi consideravano, infatti, la sfera come la più perfetta delle figure solide, in quanto tutti i suoi punti sono equidistanti dal centro e la interpretavano come immagine stessa dell'armonia. Spiegarono l'ordine dell'universo come un'armonia di corpi contenuti da un'unica sfera che si muovono secondo uno schema numerico: poiché i pitagorici rappresentavano i corpi celesti reciprocamente separati da intervalli corrispondenti alle lunghezze armoniche delle corde, essi ritenevano che il movimento delle sfere producesse un suono, l'"*armonia delle sfere*".

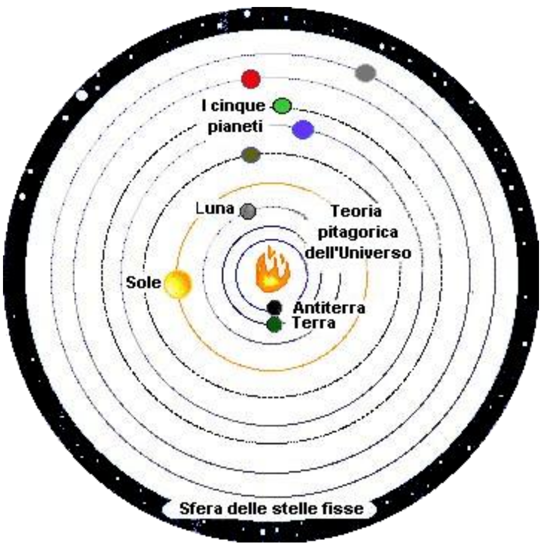


Fig. 6

Ebbero anche geniali intuizioni che li fanno riconoscere come i precursori di Copernico. Il pitagorico Filolao abbandonò per primo l'ipotesi che la Terra fosse il centro fisso del mondo, sostenuta invece da Pitagora, ammettendo che essa, come gli altri corpi, si muoveva attorno ad un fuoco centrale detto *Hestia*, "focolare o altare dell'universo", che ordina e plasma la materia circostante, dando origine al mondo.

Egli ritenne inoltre che intorno al fuoco centrale si muovono, da occidente ad oriente, dieci corpi celesti e che il cosmo fosse suddiviso in tre domini concentrici:

- **L'Olimpo**, dove hanno sede le stelle fisse;
- **Il Mondo**, dove hanno sede Saturno, Giove, Mercurio, Marte, Venere, il Sole (grande lente che raccoglie i raggi del fuoco centrale e li riflette) e la Luna;
- **Il Cielo** (che secondo i pitagorici è ciò che viene soggetto a generazione e corruzione), nel quale hanno sede la Terra e l'**Antiterra**, un decimo corpo che i pitagorici hanno aggiunto per ottenere il numero perfetto 10; questo corpo non è però visibile, perché si trova sempre in opposizione alla Terra.

La musica ed i Pitagorici

Un altro pitagorico, Ecfanto di Siracusa, fu il primo a riconoscere la rotazione della Terra intorno al proprio asse, disposto nella direzione del fuoco centrale e dell'Antiterra. Con Aristarco di Samo, l'ipotesi pitagorica del movimento della Terra si trasformò in vera e propria ipotesi eliocentrica, poiché, al posto del fuoco centrale, egli collocò il Sole, anticipando Copernico.

La sua teoria venne però sommersa da quella geocentrica di tipo aristotelico-tolemaico. Pitagora oltre a studiare i rapporti tra i numeri, era anche attratto dal nesso tra i numeri e natura. Egli capì che i fenomeni naturali sono governati da leggi e quindi descritti attraverso equazioni matematiche. Uno dei primi nessi da lui scoperti fu la relazione fondamentale tra l'armonia musicale e l'armonia dei numeri. Il più importante strumento nella musica greca e dell'età più antica era la lira a quattro corde (Fig. 7).

Fig. 7

Prima di Pitagora, i musicisti avevano notato che note particolari suonate insieme producevano un effetto piacevole e avevano accordato la lira in modo che, pizzicando due corde, potessero produrre tale armonie. Tuttavia i primi musicisti non capivano perché certe note particolari fossero armoniche e non avevano un metodo per accordare i propri strumenti (li accordavano ad orecchio finché non si produceva una condizione di armonia).

Pitagora applicò la sua nuova teoria dei rapporti musicali alla lira, esaminando le proprietà di una singola corda. Il semplice pizzicare una corda genera una nota o tono fondamentale che è prodotto da l'intera lunghezza della corda vibrante. Fissando la corda in punti particolari lungo la sua lunghezza è possibile generare altre vibrazioni e toni. Toni armonici significativi si producono solo in punti specifici.

Per esempio, se si fissa la corda in un punto esattamente alla metà della sua lunghezza si genera un tono che è di un'ottava più alto e in armonia con la nota originaria. Analogamente, fissando la corda in punti che sono esattamente 1/3, 1/4, 1/5. Della sua estensione si producono altre note armoniche. Invece fissando la corda in un punto che non è una semplice frazione della lunghezza di un'intera corda, si genera un tono che non è in armonia con gli altri toni.

Pitagora aveva scoperto la regola matematica che governava un fenomeno fisico e aveva dimostrato che, tra la matematica e la scienza della natura, c'era una relazione fondamentale. Pitagora comprese che i numeri costituivano l'essenza di tutte le cose, dall'armonia musicale alle orbite dei pianeti. La scoperta dell'esistenza di un rapporto costante fra la lunghezza delle corde e gli accordi fondamentali della musica (1/2 per l'ottava, 3/2 per la quinta, 4/3 per la quarta) lo suggestionò al tal punto da fargli credere che Dio fosse un ingegnere eccezionale e che una Legge Matematica, chiamata Armonia, avesse il compito di dirigere la natura.

L' accademia di Platone

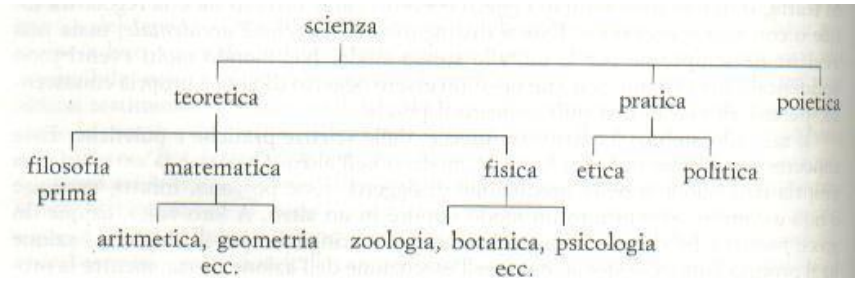
Ma la Scuola più celebre è rappresentata dall'Accademia di Platone, fondata ad Atene intorno al 347 a.C. Platone non era un matematico ma il suo entusiasmo per l'argomento e la sua convinzione dell'importanza della Matematica per la comprensione dell'Universo incoraggiava i matematici a proseguirne lo studio.

Egli affermò la necessità di una organizzazione deduttiva della conoscenza: "Il compito della Scienza è quello di scoprire la struttura della natura e di articolarla in un sistema deduttivo". Nella Scuola platonica furono migliorate le definizioni e si suppone che siano stati dimostrati anche nuovi teoremi di geometria piana. Inoltre, i platonici diedero un notevole impulso alla geometria solida, ritenuta la base per lo studio dell'Astronomia.

Così, infatti, si esprime Platone:" Prima di poter prendere in considerazione l'Astronomia, che studia il moto dei solidi, è necessaria una scienza di tali solidi. Ma questa scienza è stata finora trascurata e gli studiosi di figure solide non hanno ricevuto un adeguato aiuto dallo Stato".

Aristotele

Aristotele (il "Maestro di color che sanno") rappresenta il più famoso tra gli allievi dell'Accademia platonica. Aristotele distingue due grandi classi di scienze: quelle che hanno come oggetto il necessario e quelle che hanno come oggetto il possibile .



Le prime sono dette scienze TEORETICHE e riguardano appunto ciò che è o ciò che avviene necessariamente sempre o per lo più (in greco "**epì polù**") nello stesso modo. Per necessario intendiamo ciò che non può essere o avvenire diversamente da come è o avviene. Si tratta dunque di domini di oggetti o eventi caratterizzati da una regolarità totale o con scarse eccezioni: la matematica rientra nelle teoretiche**.** Il secondo ambito è invece costituito dalle scienze PRATICHE e POIETICHE: esse concernono ciò che può essere in un modo o nell'altro; questa è la caratteristica propria dell' azione e della produzione di oggetti : esse infatti possono avvenire o non avvenire, avvenire in un modo o in un altro.

A loro volta azione (**praxis**, da qui pratiche) e produzione (da **poieo**, da qui poietiche) si distinguono per il fatto che l'azione ha il proprio fine in se stessa, ossia nell'esecuzione dell'azione stessa, mentre la produzione ha il suo fine fuori di sé, ossia nell'oggetto che essa produce. Da quanto detto, si evince che in Aristotele la disposizione degli argomenti è sistematica e le singole discipline vengono affrontate separatamente, anche se spesso vi possono essere delle ripetizioni.

Aristotele è il filosofo che stabilisce una distinzione dei vari quadri del sapere filosofico che sarà un punto di riferimento costante per la filosofia successiva (metafisica, fisica, psicologia, etica, politica, estetica, logica). Viene così superato il progetto platonico, che consiste nel subordinare le varie scienze l'una all'altra e si passa all'autonomia delle singole scienze e alla loro indipendenza reciproca. La nuova sistemazione delle scienze avviene allora secondo l'ideale enciclopedico di unificazione del sapere, inteso come possibilità data all'uomo di possedere tutte le conoscenze e non come riduzione di tutte le scienze a pochi principi universalmente validi.

Con la Scuola di Aristotele si discute in modo profondo il concetto di definizione:

"***nome di un insieme di parole***"

che deve essere data in termini di

"***qualche cosa che è antecedente alla cosa definita***"

Aristotele fa notare che una definizione ci dice ciò che qualcosa è, ma non che qualcosa esiste. L'esistenza delle cose definite deve essere dimostrata, eccetto che per poche cose primitive (quali il punto e la retta) la cui esistenza deve essere assunta insieme con i primi principi o assiomi. A tal proposito, egli distingue gli *assiomi*, che sono verità comuni a tutte le scienze, dai *postulati*, che sono i primi principi accettabili di ogni singola scienza. Con Aristotele, inoltre, si ha il più compiuto tentativo di "metter ordine" nell'uso dell'infinito in matematica (ed in fisica e metafisica). La sua opinione sull'infinito rimarrà sostanzialmente quella prevalente fino al '600 (e per alcuni aspetti fino al secolo scorso).

Aristotele (*Fisica III, 6*) fa una chiara divisione fra:

- ***infinito in atto***, cioè un'entità infinita concepita nella sua interezza (ad esempio "l'insieme di tutti i numeri" o "la retta" come composta di infiniti punti);
- ***infinito potenziale***, cioè qualcosa che è sempre accrescibile, che non ha limite o termine, ma che non è pensabile nella sua interezza: in questa accezione si può pensare ad un *processo* infinito, ma non ad *oggetti* infiniti.

Ad esempio per Aristotele dire che i numeri sono infiniti significa solo che, qualunque numero si pensi, se ne può trovare uno maggiore, ma solo i singoli numeri finiti sono pensabili, anche se non ne esiste "il più grande".

Aristotele respinge completamente la possibilità che l'infinito in atto possa essere utilizzato in matematica:

"In realtà essi [i matematici] non hanno bisogno dell' infinito e non lo usano. Essi postulano [ad esempio] che la linea retta possa essere prolungata a piacere, tanto quanto si vuole. "

(Aristotele, *Fisica III, 7*).

Per Aristotele è la possibilità di prolungare la retta che viene usata, non l'esistenza della "retta infinita" : l'unica infinità ammessa è quella potenziale. Si nota che è con questa accezione che il concetto di retta è usato nella geometria greca (ad esempio in Euclide); nella geometria contemporanea si usa il termine *retta* per indicare un *oggetto infinito*; l'idea greca corrisponde di più a ciò che oggi si chiama *segmento*, considerato però prolungabile a piacere.

Può giovare ricordare che il termine usato allora per "infinito" è **απειρον**, che non ha proprio lo stesso significato del nostro "infinito", ma è più letteralmente traducibile con "illimitato" o "indefinito", e porta con sé un senso di "mancanza di forma" e di negatività, indeterminatezza che il nostro termine "infinito" non ha, contenendo invece anche un senso di compiutezza che è assente nel termine greco. Sempre nella *Fisica* (*III,6*), si legge:

"*L'infinito non è ciò al di fuori di cui non c'è nulla, ma ciò al di fuori di cui c' è sempre qualcosa*".

L'infinito non è quindi un Assoluto: è qualcosa che per la sua illimitatezza non può essere concepito dal nostro pensiero nella sua totalità. Per questo rimane associata all' **απειρον** una valenza negativa: un senso di potenzialità non attuata e non attuabile né concepibile, ed anche un senso di indeterminatezza, di caoticità.

In geometria le grandezze continue saranno (potenzialmente) divisibili all'infinito, senza che si possa mai giungere ad un termine di questo processo e senza che esistano degli "indivisibili" ultimi. Aristotele afferma esplicitamente che nessuna accumulazione di punti può generare una grandezza continua essendo i punti indivisibili: infatti la caratteristica della continuità è proprio quella di essere infinitamente divisibile. In modo analogo è negata la possibilità che gli intervalli di tempo siano composti da "istanti". Si approfondisce dunque la distanza fra il modo di concepire il mondo dei numeri e quello della geometria: le grandezze sono continue mentre i numeri sono discontinui ed incapaci di rappresentare la continuità:

" Il Numero è una pluralità di unità, una determinata quantità di esse. Quindi il numero si ferma [nella direzione della piccolezza] a ciò che è indivisibile [l'unità]... Invece nella direzione della grandezza è sempre possibile pensare un numero più grande... Quindi questo è un infinito potenziale,... non in atto, ma consistente in un processo di divenire, come il tempo.... Con le quantità [geometriche o fisiche] è vero il contrario. Ciò che è continuo è diviso all'infinito, mentre non c'è infinità nella direzione dell'incremento. Ogni grandezza che può essere raggiunta potenzialmente, lo può essere anche effettivamente."

(Aristotele, *Fisica, IV*).

Euclide: da “*Gli Elementi*” a “*I Fenomeni*”

La morte di Alessandro Magno aveva portato a lotte intestine tra i generali dell’esercito greco. Ma nel 306 a.C. il controllo della parte egiziana dell’impero era ormai saldamente nelle mani di Tolomeo I, e questo monarca illuminato fu cosi in grado di volgere la sua attenzione verso sforzi costruttivi. Fra i suoi primi decreti vi fu l’istituzione ad Alessandria di una scuola o accademia, nota come il Museo, che non aveva pari a quei tempi. A insegnare in questa scuola chiamò un gruppo di eminenti studiosi, tra cui l’autore del più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto: gli ***Elementi di Euclide***.

Considerata la fama di cui godettero tanto l’autore quanto il suo fortunato trattato, sorprendentemente scarse sono le notizie che abbiamo sulla vita di Euclide. La sua biografia è cosi poco conosciuta che non si sa dove sia nato. Euclide noto come Euclide di Alessandria fu chiamato in quella scuola per insegnare matematica. Egli non dava molta importanza agli aspetti pratici della sua disciplina: infatti si racconta che, quando un allievo gli chiese che utilità avesse lo studio della geometria, Euclide si rivolse al suo schiavo dicendogli di dare all'allievo una monetina "perché ha bisogno di trarre guadagno da ciò che impara".

Euclide e gli *Elementi* vengono spesso considerati come sinonimi; in realtà l'autore degli elementi era anche autore di una dozzina di trattati che coprivano vari argomenti, dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, sino a un libro sulle sezioni coniche.

Le opere esistenti di Euclide sono tra i più antichi trattati matematici greci che ci siano rimasti. E tuttavia più della metà di ciò che scrisse Euclide è andato perduto, comprese alcune delle sue opere più importanti, come un trattato sulle coniche. Cinque sono le opere pervenute fino a noi: gli *Elementi*, i *Dati*, la *Divisione delle figure*, i *Fenomen*i e l'*Ottica*. L'ultima opera citata è interessante in quanto è uno dei primi trattati sulla prospettiva, ossia la geometria della visione diretta. Gli antichi avevano diviso lo studio dei fenomeni ottici in tre punti: 1) l'ottica, o la geometria della visione diretta; 2) la catottrica, o la geometria dei raggi riflessi; 3) la diottrica o la geometria dei raggi rifratti.

Un'opera che porta il titolo *Catottrica* e che viene talvolta attribuita a Euclide è di dubbia autenticità, ed è forse opera di Teone di Alessandria, vissuto qualche secolo più tardi. L'*Ottica* di Euclide è notevole per l'esposizione di una teoria *emissiva* della visione secondo la quale l'occhio emette raggi che attraversano lo spazio fino a giungere agli oggetti; tale teoria si contrapponeva alla dottrina opposta di Aristotele seconda la quale una sorta di azione si trasmetteva attraverso un mezzo in linea retta dall'oggetto all'occhio. Si noti che i concetti matematici della prospettiva sono gli stessi qualunque sia la teoria adottata.

I *Fenomeni* di Euclide era un'opera simile alla sfera di Autolico, ossia un'opera di geometria sferica ad uso degli astronomi. Un confronto fra i due trattati ci mostra come entrambi gli autori derivassero gran parte del loro materiale dalla tradizione manualistica nota alla loro generazione. E' abbastanza probabile che la stessa cosa valga anche per gli *Elementi* di Euclide, ma in questo caso non ci è rimasta nessuna altra opera contemporanea con la quale possa essere confrontata.

La *Divisione delle Figure* di Euclide sarebbe andata perduta, se non fosse stato per l'intervento di scienziati arabi. Il testo originale greco è andato perduto, ma prima della sua scomparsa ne fu fatta una traduzione araba, la quale fu, a sua volta, tradotta in latino, ed infine nelle principali lingue moderne, come del resto è avvenuto per altre opere antiche. La *Divisione delle Figure* comprende una raccolta di trentasei proposizioni concernenti la divisione di figure piane.

Max Ernst, Euclide (1945)

Gli Elementi

L'eccelsa opera di Euclide è stata per lungo tempo considerata un modello di perfezione e i suoi *Elementi* per molti secoli hanno forse costituito, dopo la Bibbia, il libro più letto, analizzato e sviscerato. Comunque va tenuto presente che Euclide con ogni probabilità ha attinto copiosamente a quanto molti studiosi avevano già prodotto prima di lui. Gli *Elementi* di Euclide costituiscono il punto di arrivo di un periodo di elaborazione trisecolare della matematica, che si suol chiamare periodo della geometria pre-euclidea; ma gli *Elementi* rappresentano anche un punto di partenza; successori immediati di Euclide sono i sommi matematici Archimede e Apollonio. Gli *Elementi* non erano un compendio di tutte le conoscenze geometriche del tempo, ma un manuale introduttivo che abbracciava tutta la matematica elementare (ossia la teoria dei numeri), la geometria sintetica (dei punti, delle linee, dei piani, dei cerchi e delle sfere), e l'algebra (non nel senso moderno dell'algebra simbolica, ma di un equivalente in termini geometrici).

Una pagina degli Elementi di Euclide nel codice più famoso
(Oxford, Bodleian Library, Ms. d'Orville 301, f. 325 v., 888 d.C.)

Gli *Elementi* sono suddivisi in tredici libri o capitoli, dei quali i primi sei riguardano la geometria piana elementare, i tre successivi la teoria dei numeri, il Libro X gli incommensurabili, e gli ultimi tre la geometria solida. Il primo libro inizia con un elenco di ventitre definizioni.

Esempio:

- Un punto è ciò che non ha parti

- Una linea è una lunghezza senza larghezza
- Le estremità di una linea sono punti
- Le estremità di una superficie sono linee
- Una linea retta è una linea che giace uniformemente rispetto ai suoi punti.

La debolezza di questa parte sta nel fatto che per definire una definizione bisogna esprimerla in termini di concetti che vengono prima è che sono più noti delle cose definite. Dopo le definizioni, Euclide elenca cinque postulati e cinque nozioni comuni.

I postulati sono:

1. si possa tracciare una retta da un punto qualsiasi a un punto qualsiasi;
2. si possa prolungare indefinitamente una linea retta;
3. si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;
4. tutti gli angoli retti sono uguali
5. se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli inferiori a due angoli retti, le due rette, se estese indefinitamente, si incontrano da quella parte dove gli angoli sono inferiori a due angoli retti.

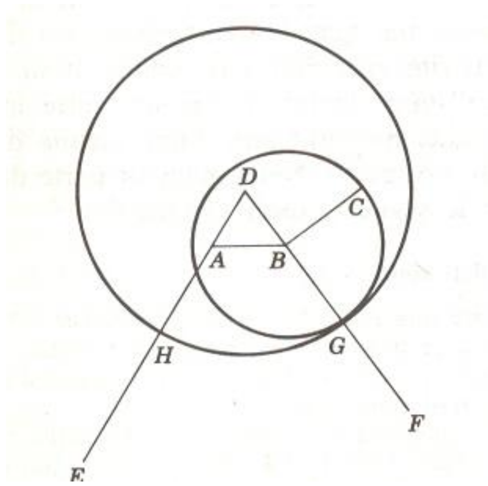
Nozioni comuni:

1. cose uguali alla medesima cosa sono uguali anche tra loro;
2. se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interni sono uguali;
3. se cose uguali vengono sottratte a cose uguali, i resti sono uguali;
4. cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;
5. l'intero è maggiore della parte.

Il postulato 3 viene interpretato in senso strettamente laterale, descritto talvolta come l'uso del compasso euclideo (pieghevole), le cui aste mantengono una apertura costante fintantoché le punte toccano la carta, ma si rinchiudono l'una sull'altra quando vengono sollevate. Ossia, il postulato non viene interpretato nel senso di permanente l'uso di un compasso rigido per segnare una distanza, uguale a un segmento rettilineo, su un altro segmento rettilineo più lungo che non sia contiguo. Nelle prime tre proposizioni del libro I si dimostra che questa ultima costruzione è sempre possibile, anche dando una interpretazione ristretta al postulato 3.

La prima proposizione giustifica la costruzione di un triangolo equilatero ABC su un segmento rettilineo AB costruendo con centro in A un cerchio che passa in B e con centro in B un altro cerchio che passa in A, e prendendo C come punto di intersezione dei due cerchi. (Viene cosi assunto tacitamente che tali cerchi si intersecano.)

La Proposizione 2, basandosi sulla proposizione 1, mostra che un punto qualsiasi A preso come estremità si può segnare un segmento rettilineo uguale ad un segmento rettilineo dato BC.



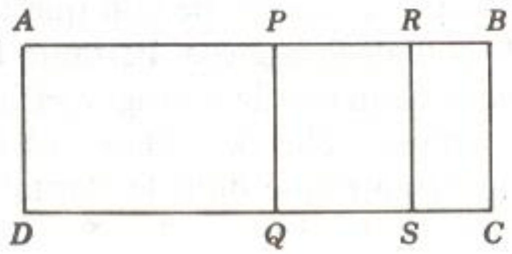
Euclide traccia innanzitutto AB, e su questo costruisce il triangolo equilatero ABC, prolungando i lati DA e DB fino a E e F rispettivamente. Con centro in B descrivere il cerchio che passa per C e che interseca BF in G; poi con centro in D traccia un cerchio che passa per G, intersecando DE in H. Si mostra allora facilmente il segmento AH é il segmento richiesto. Infine, nella Proposizione 3 Euclide fa uso della Posizione 2 per mostrare che, dati i segmenti rettilinei disuguali, è possibile tagliare via dal maggiore un segmento uguale al minore.

La maggior parte delle proposizione del Libro I degli *Elementi* sono familiare a chiunque abbia studiato geometria in scuola superiore. Esse comprendono i noti teoremi sulla congruenza dei triangoli (ma senza un assioma che giustifichi il metodo della sovrapposizione), sulle costruzioni semplici mediante riga e compasso, sulle disuguaglianze concernenti gli angoli e i lati di un triangolo, sulle proprietà di rette parallele (che portano all'affermazione che la somma degli angoli di un triangolo è uguale a due angolo retti), e sui parallelogrammi (compresa la costruzione di un parallelogrammo aventi angoli dati e di area uguale di un triangolo dato o a una figura rettilinea data).

Il Libro si chiude (Proposizione 47 e 48) con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo reciproco.

Il Libro II degli *Elementi* è breve: contiene soltanto quattordici proposizioni, nessuna delle quali compare oggi nei moderni manuali. Tuttavia al tempo di Euclide questo libro aveva grande importanza. La netta differenza tra il modo di vedere antico e quello moderno si spiega facilmente: oggi possediamo l'algebra simbolica e la trigonometria, che hanno costituito gli equivalenti geometrici della matematica greca. Per esempio la Proposizione 1 del Libro II afferma che: "Se vi sono due segmenti, e uno di essi viene tagliato in un numero qualsiasi di segmenti, il rettangolo delimitato dai due segmenti è uguale ai rettangoli delimitati dal segmento non tagliato e da ciascuno dei segmenti". Questo teorema, che asserisce che $AD(AP+PR+RB)=AD\cdot AP+AD\cdot PR+AD\cdot RB$, non è altro che l'espressione geometrica di una delle leggi fondamentali dell'aritmetica, oggi nota come la legge distributiva:

$$a(b+c+d) = ab+ac+ad.$$

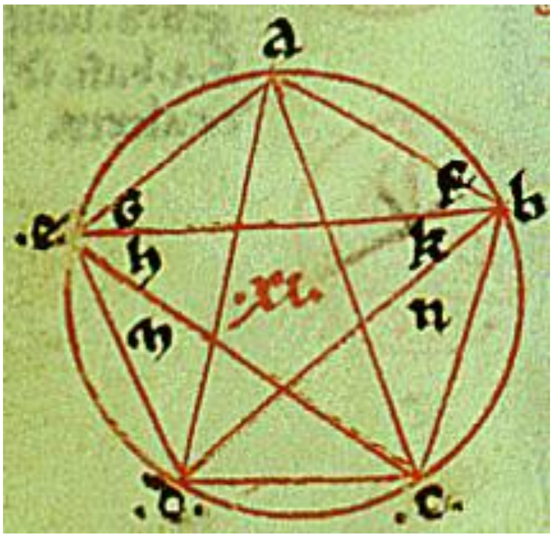


In libri successivi degli *Elementi* (il V e il VII) troviamo dimostrazioni delle proprietà commutativa e associativa per la moltiplicazione. Mentre oggi le grandezze vengono rappresentate da lettere che si intendono come numeri (noti o ignoti) su cui operiamo secondo le regole algoritmiche dell'algebra, al tempo di Euclide le grandezze venivano concepite come segmenti che soddisfacevano gli assiomi e i teoremi della geometria.

L’algebra geometrica degli antichi non era uno strumento ideale, ma era tutto altro che inefficace. L’affermazione euclidea (Proposizione 4) che: “Se un segmento viene tagliato a caso, il quadrato costruito sull’intero segmento è uguale ai quadrati costruiti sui segmenti e al doppio del rettangolo delimitato dai segmenti”, è una maniera prolissa di dire che $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, ma il suo richiamo visivo doveva essere per uno studente alessandrino molto più vivido di quando lo possa mai essere la corrispondente espressione algebrica moderna.

Si ritiene generalmente che il contenuto dei primi due libri degli *Elementi* sia in gran parte opera dei pitagorici. I libri III e IV, d’altro canto, trattano la geometria del cerchio, e qui si presume che il materiale derivi in larga misura da Ippocrate di Chio.

I due libri presentano teoremi sui cerchi simili a quelli contenuti nei manuali odierni. La prima proposizione del Libro III, per esempio, chiede di effettuare la costruzione del centro di un cerchio; e l’ultima Proposizione, la 37, contiene il noto teorema secondo il quale, se da un punto esterno a un cerchio si tracciano una tangente e una secante, il quadrato costruito sulla tangente è uguale al rettangolo formato dall’intera secante e dal suo segmento esterno. Il Libro IV contiene sedici proposizioni, in gran parte ben note agli studenti d’oggi, le quali riguardano figure inscritte o circoscritte a un cerchio. I teoremi sulla misura degli angoli sono rinviati a dopo che sia stata formulata una teoria delle proposizioni.



Fra i tredici libri degli *Elementi*, quelli che maggiormente hanno suscitato l’ammirazione dei matematici sono il V e il X, l’uno concernente la teoria generale delle proposizioni e l'altro la classificazione degli incommensurabili. La scoperta di grandezze incommensurabili aveva minacciato di aprire una crisi che metteva in dubbio dal punto di vista logico ogni dimostrazione che facesse ricorso all'idea di proporzionalità.

Il Libro IX, l'ultimo dei tre libri dedicati alla teoria dei numeri, contiene parecchi teoremi che presentano un interesse particolare. Fra questi il più famoso è la Proposizione 20: "I numeri primi sono più di una qualsiasi assegnata moltitudine dei primi". In altri termini, Euclide presenta qui la ben nota dimostrazione elementare del teorema secondo cui il numero dei numeri primi è infinito.

Il libro X degli *Elementi* era stato, prima dell'avvento dell'algebra moderna, il più ammirato e il più temuto. Esso presenta una classificazione sistematica dei segmenti incommensurabili della forma

$$a \pm \sqrt{b}\,,\ \sqrt{a} \pm b\,,\ \sqrt{a \pm \sqrt{b}}\ \text{, e }\ \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

ove a e b, quando sono della stessa dimensione, sono incommensurabili.

Gran parte del contenuto del Libro XI, che comprende trentanove proposizioni concernenti la geometria tridimensionale, sarà facile per chi abbia seguito un corso di elementi di geometria solida. Anche qui le definizioni sono facilmente criticabili: Euclide infatti definisce un solido come "ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità", e quindi ci dice che "una estremità di un solido è una superficie". Le ultime quattro definizioni riguardano quattro dei cinque solidi regolari. Non viene incluso il tetraedro, presumibilmente per il fatto che era stata precedentemente definita la piramide come "una figura solida, contenuta da piani, che è costruita partendo da un piano e da un qualsiasi punto".

L'ultimo libro è dedicato interamente alle proprietà dei cinque solidi regolari, i teoremi conclusivi rappresentano un adeguato coronamento di un trattato così eccezionale. Il loro obbiettivo è di "comprendere" o includere ciascuno dei solidi regolari contenuti nella sfera, ossia di trovare il rapporto tra il dato del solido inscritto e il raggio della sfera circoscritta.

La prima edizione a stampa degli *Elementi* uscì a Venezia nel 1482, e fu uno dei primi libri matematici stampati. Si è valutato che, da allora in poi ne sono state pubblicate migliaia di edizioni. Forse nessuno altro libro, a parte la Bibbia, può vantare così tante edizioni, e certamente nessuna opera matematica ha avuto un influsso paragonabile a quella degli *Elementi* di Euclide. Quanto appropriato era dunque l'appellativo di "Elementatore" dato a Euclide dai suoi successori!

Da Archimede a Tolomeo: due geni a cavallo della nascita di Cristo

Nei tre secoli prima della nascita di Cristo si rilevano:

- i grossi risultati nella geometria, nella meccanica e nell'ottica, di colui che è forse il più grande genio della nostra storia, **Archimede** (287-212 a.C.);
- il calcolo della lunghezza della circonferenza della Terra di **Eratostene** (284-192 a.C.), che si è rilevato non distante da quello determinato oggi con i mezzi moderni. Eratostene, oltre che matematico, era filosofo, storico, poeta, filologo;
- gli studi sulla sfera applicati all'astronomia effettuati da **Teodosio** di Bitinia.

Negli anni che risalgono ai primi due secoli d.C. , i risultati di maggior importanza sono stati quelli di Claudio **Tolomeo** (morto intorno al 168 d.C.), che dichiara di basare la sua Astronomia sui procedimenti incontrovertibili dell'Aritmetica e della Geometria, e di **Diofanto** di Alessandria, che svolse importanti studi nell'ambito dell'aritmetica. A lui si devono il sintetico simbolismo matematico oggi in uso e le equazioni diofantee.

Archimede

Per tutta l'Età Ellenistica, Alessandria era il centro degli studi matematici, tuttavia il più grande matematico di quell'età, Archimede, non era nato in quella città.

Probabilmente Archimede studiò ad Alessandria per un periodo sotto la guida dei discepoli di Euclide e continuò ad avere scambi di informazioni scientifiche con i matematici alessandrini, in particolare Eratostene, Conone di Samo e Dositeo, i cui nomi figurano nelle dediche di alcune sue opere. Visse e morì a Siracusa, dove, legato da amicizia e forse parentela a Gerone, tiranno di Siracusa, svolse la sua attività di matematico e inventore sotto la sua protezione e al servizio della città.

Le poche informazioni della sua vita possono essere ricavate dalla narrazione della vita di Marcello, generale romano che assediò Siracusa durante la Seconda Guerra Punica, scritta da Plutarco. La città di Siracusa, infatti, venne coinvolta nel conflitto tra Roma e Cartagine ed essendosi schierata dalla parte di quest’ultima venne assediata dai romani dal 214 al 212 a.C. E’ sempre Plutarco che, nei suoi scritti, racconta di ingegnose macchine belliche inventate da Archimede per difendere la sua città, come ad esempio le **catapulte** per lanciare pietre, la "**manus ferrea**", un artiglio meccanico in grado di ribaltare le imbarcazioni nemiche, oppure gli "**specchi ustori"**, lamiere metalliche che, opportunamente concave, riflettevano concentrando la luce solare sugli avversari, incendiando le imbarcazioni e gli accampamenti. Tuttavia gli specchi ustori, nel corso dei secoli, non sono mai stati realizzati, per cui si ritiene che sia una leggenda. Si suppone, altresì, che fosse in grado di muovere una nave completa di equipaggio e carico mediante una singola fune, grazie all'ausilio di **leve e verricelli**. Nonostante una difesa protrattasi per oltre tre anni, Siracusa dovette soccombere e si racconta che, proprio durante il saccheggio, un soldato romano, non rispettando gli ordini impartiti dal console Marcello, uccise il grande scienziato. Infatti anche nel comportamento Archimede era il prototipo dello scienziato: trascurato nella persona, oltremodo distratto, si dice che a volte dimenticasse persino di mangiare. E proprio la sua distrazione fu causa della sua morte: durante il saccheggio di Siracusa, Archimede, incurante di quanto stava succedendo attorno a lui, era intento ai suoi studi, completamente chiuso nel suo mondo di ricerca e di pensiero. Quando il soldato romano gli si avvicinò e gli chiese chi fosse, Archimede non gli rispose. Molto probabilmente non lo aveva sentito. Allora il soldato, irritato, non avendolo riconosciuto, lo uccise.

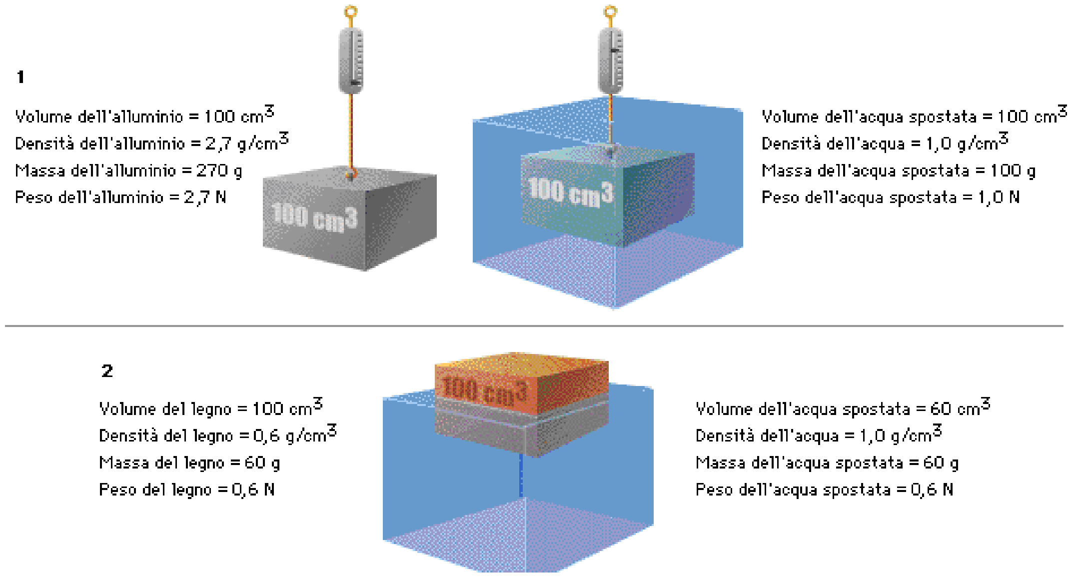
Marcello, addolorato per la morte del genio, gli fece tributare solenni onoranze funebri. Quindi, come perenne tributo alla sua mente prodigiosa, gli fece erigere una tomba sulla quale, secondo il volere dello stesso Archimede, venne posta una sfera inscritta in un cilindro con i numeri che regolano i rapporti fra questi due solidi. Poiché, a quanto viene riferito, Archimede aveva 75 anni, è molto probabile che fosse nato nel 287 a.C. I vari resoconti rimastici sulla sua vita sono d'accordo nel dipingerlo come una persona che attribuiva scarso valore ai suoi "congegni" meccanici rispetto ai prodotti della sua attività intellettuale.

Le invenzioni meccaniche di ordine pratico hanno avuto, nell'insieme dell'attività di Archimede, un ruolo episodico, come prova il fatto che nessuna delle sue opere riguarda tali invenzioni.

Le opere

Gli studi di Archimede abbracciano vasti campi della scienza, tuttavia la sua fama resta essenzialmente legata alle scoperte di geometria e alle non meno celebri scoperte di idrostatica. Tra le molte sue opere, a noi pervenute nel testo originale greco o attraverso traduzioni latine e arabe, citiamo le principali:

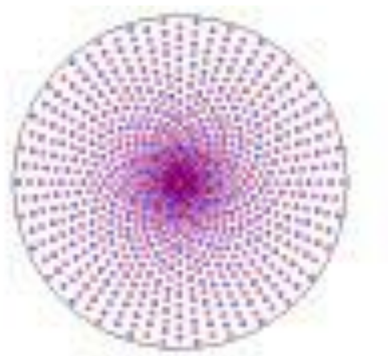
- ***Dell'equilibrio dei piani,*** trattato di statica di cui restano solo due libri, nel quale, riprendendo il metodo assiomatico utilizzato da Euclide per la geometria, determina i centri di gravità o baricentri di molte figure e stabilisce la legge di equilibrio delle leve ("*datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo*").
- Nel trattato ***Sui corpi galleggianti,*** pone le basi dell'idrostatica dimostrando il famoso principio ancor oggi legato al suo nome. Il celebre ***"principio di Archimede***" (*un corpo immerso in un fluido in equilibrio subisce una spinta diretta dal basso verso l'alto di intensità pari al peso del volume del fluido spostato*) sarebbe stato scoperto dallo scienziato in circostanze singolari. Gerone sospettava infatti che l'orefice che gli aveva fornito la corona, invece di oro massiccio avesse usato una mistura d'oro e d'argento. Il sospettoso re incaricò Archimede di scoprire la frode senza però intaccare la corona. Archimede giunse alla sua fondamentale intuizione mentre faceva il bagno; egli infatti si rese conto che il suo corpo, nell'acqua sembrava più leggero.



Questo fatto, elaborato dall'istintiva fulmineità del suo genio, gli permise di giungere immediatamente, se non alla formulazione, all'intuizione del suo principio. Narrano le cronache del tempo che il distrattissimo Archimede, preso da improvviso entusiasmo per la scoperta, uscisse nudo di casa e corresse per le vie di Siracusa, tra gli sguardi attoniti dei suoi concittadini, gridando *"Eureka! Eureka!" ("Ho trovato! Ho trovato!")*. L'opera contiene inoltre molte proposizioni relative al peso specifico e una serie di teoremi sulle condizioni di equilibrio di corpi immersi nell'acqua.

- ***Sulla misura del cerchio*** sono esposti gli studi dedicati alla geometria piana. Partendo da considerazioni sui poligoni regolari inscritti e circoscritti a un cerchio, ottenuti raddoppiando il numero dei lati di un esagono fino a novantasei, egli dimostrò che il rapporto fra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro è uguale al rapporto fra l'area del cerchio e il quadrato del raggio. Non chiamò questo rapporto π, ma fornì un procedimento per ottenerne un valore con un errore di approssimazione piccolo a piacere, e lo valutò compreso fra $3 + 1/7$ e $3 + 10/71$.

- ***Delle spirali*** descrive numerose proprietà della curva detta appunto spirale di Archimede. Un classico esempio di questa spirale è la curva descritta dalla puntina di un giradischi. Matematicamente, una spirale di Archimede è quella curva descritta da un punto la cui distanza dal centro (polo) rimane proporzionale all'ampiezza dell'angolo coperto durante lo spostamento. La sua equazione è $R = \rho\theta$.



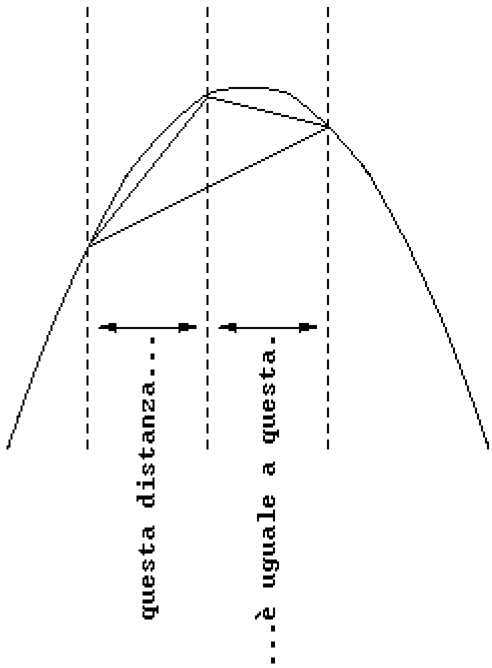
- Nel breve trattato di aritmetica "L'***arenario***, delinea un sistema di notazione per i grandi numeri, basato sulle posizioni delle cifre e lo usa per scrivere numeri sino a 10^{64}. Egli usa questo metodo per esprimere numeri comunque grandi, quale quello dei granelli di sabbia necessari per riempire l'intero globo celeste, riuscendo a evitare la difficoltà imposta al problema dal sistema di numerazione posseduto dai Greci; ciò facendo espone, in antitesi al pensiero di Aristarco, varie considerazioni sulle dimensioni dell'universo e calcola il diametro del Sole.
- ***Il metodo***, frammento di una sua opera dedicata a Eratostene, è rinvenuto nel 1906 in un palinsesto conservato a Costantinopoli. Esso ci rivela, con grande chiarezza, come Archimede, pur valendosi del metodo di esaustione per procurare alle proprie scoperte una base logicamente sicura, preferisse ricorrere a considerazioni intuitive, di carattere misto matematico e meccanico, nella fase di ricerca. Tale procedimento, analogo nell'aspetto matematico a quello che, molti secoli più tardi, verrà adottato dagli analisti del Seicento, consiste nel considerare superfici e volumi come somme di un numero infinito di elementi infinitamente sottili e nell'immaginare le figure pesanti col peso concentrabile nel loro baricentro: quest'ultimo costituisce l'aspetto meccanico del metodo archimedeo.
- Nell'opera ***Della sfera e del cilindro*** la più nota durante tutta l'antichità, sono riportati i risultati di maggior interesse. L'obiettivo del libro è quello di dimostrare che la sfera è equivalente ai 2/3 del cilindro ad essa circoscritto.

Probabilmente, Archimede si era già fatta un'idea che il rapporto doveva essere proprio 2/3. L'intuizione era corretta, ma da qui a dimostrarla occorreva un notevole apparato di postulati e proposizioni: un intero libro.

Gli studi di Archimede ebbero un'influenza notevole nella storia della scienza sia nell'antichità, quando si prese a modello soprattutto il rigore delle sue dimostrazioni, sia nel Rinascimento quando le sue opere, pubblicate in versioni o nel testo originale, furono oggetto di grande interesse per coloro che fondarono la moderna scienza sperimentale. Le opere di Archimede non ebbero un grande seguito, nemmeno nell'antichità. Lui e i suoi contemporanei probabilmente costituiscono il culmine del rigore matematico ideato dagli antichi Greci e in un certo qual senso un'anticipazione del concetto galileano di scienza basata sulla sperimentazione e riproducibilità del fenomeno.

Durante il Medioevo i matematici che erano in grado ci comprendere le opere di Archimede erano pochi e lontani uno dall'altro. Molte delle sue opere andarono distrutte nell'incendio della Biblioteca di Alessandria, e ne rimasero solo delle traduzioni in latino e in arabo.

Fu il primo, e forse l'unico, fra i matematici della antica Grecia a trattare le curve matematiche (quelle cioè tracciate da un punto nel suo moto) come soggetti degni di studio. Dimostrò che l'area racchiusa fra una parabola e una linea retta è pari a 4/3 dell'area del triangolo avente pari base ed altezza.



Durante lo studio di questo teorema, eseguì il primo esempio conosciuto di calcolo di una serie geometrica applicandolo alla frazione 1/4:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots = \frac{4}{3} \,.$$

Se il primo termine della serie è l'area del triangolo nell'illustrazione già vista, allora il secondo termine è la somma delle aree dei due triangoli le cui basi sono le due linee secanti più piccole. La serie essenzialmente sintetizza la dimostrazione. Archimede diede anche una dimostrazione completamente differente di un teorema quasi uguale per mezzo del calcolo infinitesimale. Il suo metodo meccanico, in cui per primo introduce il concetto di infinitesimo, fondamento della analisi matematica, restò sconosciuto sino al 1900 circa, quando la formalizzazione aritmetica dell'analisi matematica proposta da Karl Weierstrass (1815-1897) era già stata completata. Si possono solo fare congetture sull'influenza che il "metodo meccanico" avrebbe potuto avere sullo sviluppo dell'analisi matematica se fosse stato conosciuto dai matematici del XVI secolo e del XVII secolo.

Eratostene

Eratostene (276-194 a. C) studiò ad Atene e successivamente si trasferì ad Alessandria per dirigere la più grande biblioteca fino allora mai esistita.

La città di Alessandria era stata fondata da Alessandro Magno che aveva esteso i territori greci conquistando un immenso impero e contestualmente aveva posto le basi per l'espansione della cultura greca. Proprio ad Alessandria la cultura scientifica greca raggiunse livelli elevatissimi.

La misurazione della circonferenza terrestre

Fra le varie discipline a cui si dedicò c'è anche la cartografia, in cui si cimentò con l'ambizioso progetto di realizzare una carta geografica di tutto il mondo allora conosciuto. All'intento di rappresentare i territori nelle giuste proporzioni è legato probabilmente l'esperimento di misura del meridiano terrestre.

A quei tempi la sfericità della Terra era già tra le convinzioni dei matematici greci come pure la grande distanza che la separa dagli altri corpi celesti. Una tale convinzione derivava dal fatto che durante le eclissi di Luna, la forma dell'ombra terrestre appariva sempre come un arco di circonferenza, tuttavia a causa delle distanze enormi e dell'ostacolo che per quei tempi rappresentavano gli oceani, non si conosceva ancora la misura della Terra.

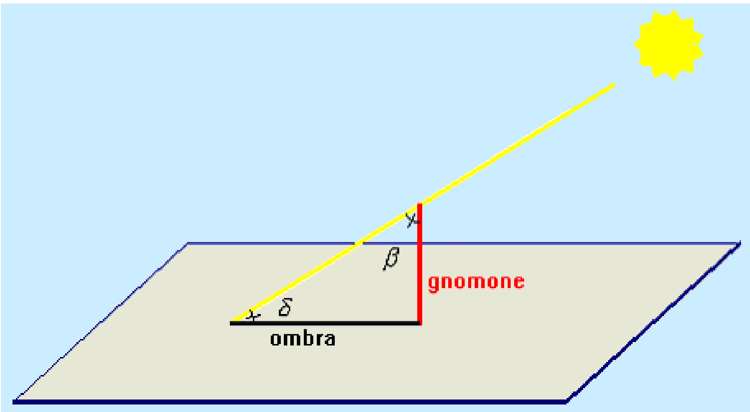
Eratostene è stato il primo ad aver misurato la circonferenza terrestre. L'esperimento eseguito da Eratostene, descritto nel suo trattato ***Sulla misurazione della Terra***, è rimasto famoso perché, partendo da alcune semplici ipotesi e utilizzando strumenti molto elementari, permise di ottenere una lunghezza della circonferenza terrestre molto vicina al valore reale.

Eratostene basò i suoi calcoli sui seguenti dati:

- la distanza fra Alessandria e Siene (oggi Assuan): Siene si trova "quasi" sul Tropico del Cancro e Alessandria si trova a nord di Siene, "quasi" sullo stesso meridiano terrestre
- la differente altezza raggiunta dal Sole a mezzogiorno del solstizio nelle due città.

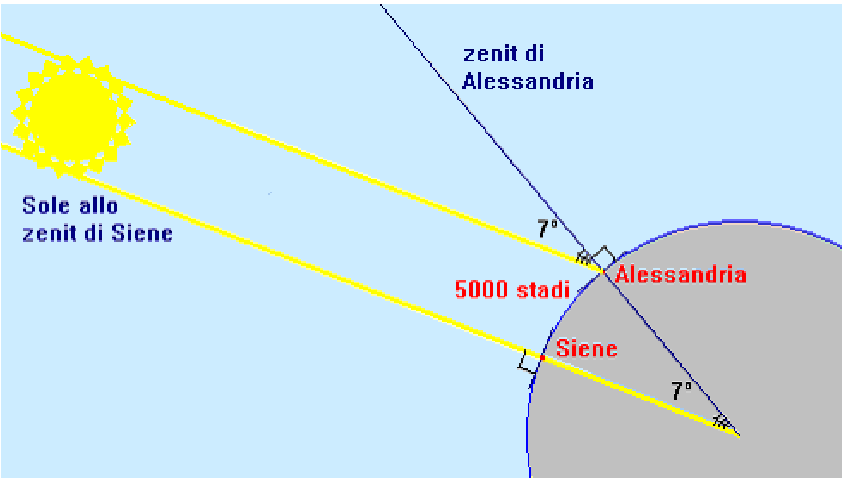
Eratostene sapeva che a Siene che si trova a circa 800 Km a sud-est di Alessandria, in un momento preciso dell'anno, il sole illuminava il fondo dei pozzi.

Questo evento si ripeteva ogni anno a mezzogiorno del solstizio d'estate e dipendeva dal fatto che i raggi del sole cadevano verticalmente. Lo strumento di cui si servì Eratostene è incredibilmente semplice, un banale bastone piantato verticalmente in un terreno perfettamente pianeggiante: lo *gnomone*.

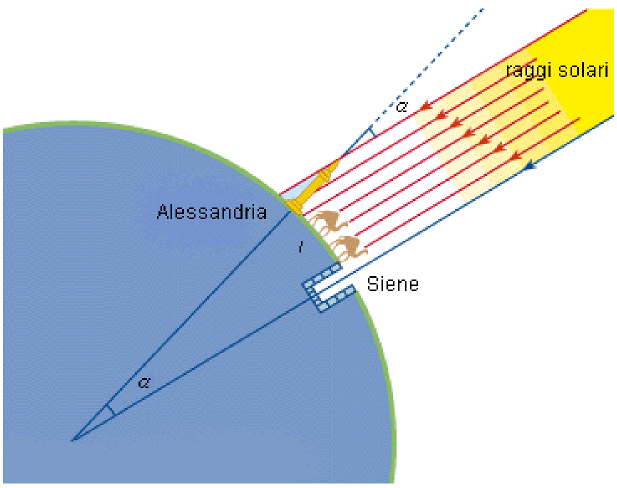


Studiando l'ombra che questo proiettava egli notò che nella città di Siene, il giorno del solstizio d'estate, a mezzogiorno, il bastone non dava ombra, ne dedusse che i raggi del Sole cadessero perpendicolarmente al terreno: il Sole si dice che è allo *zenit*, al contrario osservò che ad Alessandria, dove egli viveva, nello stesso giorno e alla stessa ora i raggi del Sole non erano perpendicolari ma formavano un angolo di 7,2° con la verticale.

Poiché in quel momento il Sole era perfettamente perpendicolare a Siene, ottenne l'angolo tra la verticale ad Alessandria e la verticale a Siene. Questo angolo è esattamente quello formato dal raggio della Terra che ha per estremo Alessandria e dal raggio che ha per estremo Siene.



Queste deduzioni si basavano sulle assunzioni corrette che la distanza del Sole dalla Terra fosse molto grande e che quindi i suoi raggi fossero praticamente paralleli quando raggiungono la superficie terrestre. Inoltre considerava che la Terra dovesse avere forma sferica.



La differenza di inclinazione di 7,2° era dovuta alla curvatura della superficie terrestre che cambia il punto di vista dal quale gli abitanti delle due città vedono il Sole.

Egli ragionò in questo modo: l'angolo di 7,2° è congruente all'angolo che ha per vertice il centro della Terra e i cui lati passano rispettivamente per Alessandria e Siene (infatti sono angoli corrispondenti). Si tratta quindi di una "distanza angolare" tra le due città, pari a un cinquantesimo dell'angolo giro. Ciò significa anche che la distanza "effettiva" tra le due città è un cinquantesimo della circonferenza terrestre.

Poiché la distanza tra le due città era misurata in 5.000 stadi (circa 800 km attuali). Eratostene stabilì la seguente relazione:

$$7° : 360° = 5.000 \text{ stadi} : x$$

da cui ricavò per la circonferenza:

$$x = 257.142 \text{ stadi}$$

pari a 40.500 km circa: un valore sorprendentemente vicino al vero (40.009 km) e quindi ricavò la **prima misura scientifica della circonferenza terrestre**.

A quel tempo la stima di distanze così grandi, misurate a passi, era sicuramente molto imprecisa; inoltre è molto difficile stabilire una corrispondenza esatta tra lo *stadio* e il metro attuale. Di conseguenza non è facile determinare il margine di errore dei risultati ottenuti da Eratostene. La lunghezza dello *stadio* greco è una misura molto incerta variando dai 154 metri ai 215 metri. Secondo le opinioni più accreditate, lo *stadio* usato da Eratostene corrispondeva a 185 metri attuali: ne risulterebbe così una circonferenza terrestre di 46.250 km, un dato che, nonostante superasse di oltre 6.000 km la misura accettata attualmente, era comunque molto buono, tenuto conto dell'imprecisione degli strumenti utilizzati e delle assunzioni di quel tempo. Secondo altri autori, Eratostene arrivò molto più vicino: lo stadio doveva essere lungo 157,5 metri e quindi la circonferenza calcolata da lui corrispondeva 39.690 km, un dato di sconcertante attualità.

Teodosio di Bitinia

La nascita di modelli astronomici assegna una forma al cosmo ed alla Terra. La conferma della validità del modello deriva allora dalla capacità dei fenomeni osservati di sottostare alla geometria della figura su cui si ipotizza che essi si realizzino. Il pensiero occidentale, a partire dall'antica Grecia ed ancora all'epoca di Copernico, fu dominato dall' Universo detto "a due sfere", che assegnava una sfera interna alla Terra ed una esterna alle stelle. Tra queste due sfere erano situati i pianeti, i cui movimenti erano oggetto di indagine. Nel corso dei secoli si sono susseguiti modelli astronomici diversi, che tentavano ogni volta di migliorare la corrispondenza con le osservazioni, ma mai nessuno abbandonò l'ipotesi di un cosmo e di una Terra sferici.

In questo modo <u>la sfera è la figura geometrica fondamentale per l'astronomia, per la geografia, per la navigazione, per l'indicazione dell'ora e per la stesura dei calendari</u>.

Le *Sferiche* di Teodosio

Nel I secolo a.C. Teodosio, astronomo e matematico greco nato in Bitinia (e per questo detto anche Teodosio di Bitinia) sulle coste dell'Asia Minore e vissuto a Tripoli sulla costa fenicia, compose gli ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΑΓ (***Sphaericorum libri tres***).

In essi egli diede una esposizione logicamente strutturata alle proprietà delle linee determinate sulla superficie di una sfera dalle intersezioni con piani, coordinando <u>una serie di proposizioni destinate a dare un fondamento teorico all'astronomia</u>.

Il testo di Teodosio fu considerato fin da principio l'esposizione fondamentale sulla geometria della sfera, che completava su questo punto le nozioni contenute negli *Elementi* di Euclide. In questo senso si parla di ***Elementi sferici*** per l'opera di Teodosio.

La funzione propedeutica delle *Sferiche* per l'astronomia contribuì alla loro fortuna. Esse, infatti, non solo ebbero una vasta circolazione manoscritta, sia nell'originale greco che attraverso le versioni arabo-latine, ma continuarono ad essere oggetto di studio e di rielaborazione ancora nei secoli XVI e XVII, come testimoniano le numerose edizioni a stampa, molto diverse tra loro e ricche di elementi originali, introdotti dai vari autori.

Oltre al valore dell'opera in sé, ciò che rende le *Sferiche* di Teodosio un testo di interesse per la storia della scienza è la possibilità di ricostruirne con precisione l'intera *traditio.* Dopo la fase antica, in cui circolò attraverso manoscritti greci, nel periodo medievale l'opera fu tramandata all'Occidente latino attraverso versioni arabo-latine. Nel XV secolo erano a disposizione degli Umanisti anche i manoscritti greci ed è significativa l'intenzione espressa da Giovanni Regiomontano nel suo *Programma editoriale* del 1474, di stampare una traduzione latina del testo greco delle *Sferiche* di Teodosio.

Siamo agli inizi dell'era tipografica. La prima opera in cui si trova una testimonianza delle *Sferiche* è il *De expetendis et fugiendis rebus* di Giorgio Valla (1501): nel quarto libro, dedicato alla geometria, l'autore presenta la traduzione latina di alcune proposizioni scelte, estratte da un manoscritto greco. Ma la vera diffusione a stampa dell'intera opera di Teodosio avviene nel XVI secolo.

L' *editio princeps* delle *Sferiche* si trova in una raccolta, stampata a Venezia nel 1518, chiaramente rivolta all'insegnamento universitario dell'astronomia.
I *Theodosii de Spheri*s, che compaiono anonimi nel volume, sono la testimonianza della tradizione arabo-latina attraverso la quale il testo era stato fino ad allora diffuso e alla quale faranno capo tutte le edizioni successive, fino al 1558. Infatti le *Sferiche* curate da Johannes Voegelin (1529) e da Francesco Maurolico (1558) si inseriscono in questo filone e, pur introducendo elementi di novità, non fanno alcun riferimento al testo greco. Il 1558 è un anno importante per la *traditio* delle *Sferiche* di Teodosio, perchè oltre alla versione "ex traditione Maurolyci", viene stampata a Parigi l'*editio princeps* del testo greco, curata da Jean Pena, che ne fece anche la traduzione latina pubblicata a fronte.

A partire da questa data inizia l'ultima fase della trasmissione dell'opera di Teodosio, inaugurata da Cristoforo Clavio (1586), che confronta le due edizioni del 1558, distinguendo le proposizioni originali di Teodosio-Pena dalle aggiunte mauroliciane e fornendo la doppia numerazione.

Tra le edizioni seicentesche è infine degna di nota quella che Pierre Herigone inserisce nel suo *Cursus mathematicus* (1644), che dipende da Clavio, ma non manca di contributi originali, primo fra tutti il metodo espositivo assolutamente originale.

Le edizioni a stampa delle *Sferiche* di Teodosio presentano tra loro analogie e diversità, che investono sia le singole proposizioni nei loro elementi costitutivi quali enunciato, dimostrazione e figura, sia l' intera struttura dell' opera. Sono frutto di scelte sia formali che tecnico-strutturali degli autori, e sono l'espressione delle correnti matematico-culturali che le hanno prodotte.

Le diverse versioni sono particolarmente utili per verificare sull' opera di Teodosio le idee generali di *traditio* di un testo matematico nei due aspetti fondamentali di:

1. trasmissione attraverso le versioni arabo-latine degli originali greci, dove il problema da affrontare è quello della comprensione e integrazione del testo;
2. riscoperta e divulgazione dei testi antichi, tenuto conto della varietà degli atteggiamenti con cui i matematici si avvicinavano ai testi dell'antichità.

Altre opere

Oltre alle ***Sphaericae***, che sono un trattato di geometria sferica semplice, di Teodosio ci sono pervenute altre due opere, ***De diebus et noctibus*** e ***De habitationibus***, in cui sono studiate le <u>variazioni nella visibilità del cielo in funzione del cambiamento di latitudine</u>.

Le opere di Teodosio appartengono ad una particolare raccolta di manoscritti antichi che gli specialisti chiamano *Piccola astronomia*. Si tratta di due trattati (naturalmente non gli originali ma copie manoscritte all'incirca un migliaio di anni dopo) che di solito si presentano associati, e spesso accompagnati da altre opere di carattere astronomico. La ragione di questo nome è data nel paragrafo dedicato a Pappo di Alessandria (IV sec. D.C.), perchè a lui è appunto dovuto il primo uso conosciuto di questa denominazione.

Ad esempio, il manoscritto ***Vaticanus graecus 204***, datato dal IX e X secolo, si compone dei seguenti elementi:

- *Sferica*, di **Teodosio di Bitinia**, del secolo I a.C. Un trattato sulla geometria della sfera che molti considerano una specie di supplemento agli *Elementi* di Euclide;
- ***Delle località geografiche***, di **Teodosio di Bitinia**, un piccolo libro in dodici proposizioni, in ciascuna delle quali è trattata l'apparenza del cielo per dodici diversi luoghi della Terra;
- ***Dei giorni e delle notti***, ancora di **Teodosio di Bitinia** , trentuno proposizioni che trattano della lunghezza di giorni e notti per diverse epoche dell'anno in un certo numero di località;
- *Della sfera mobile*, di **Autolico**;
- *Delle levate e dei tramonti*, di **Autolico**;
- *Distanze e dimensioni di Sole e Luna*, di **Aristarco di Samo**;
- *Delle ascensioni*, di **Ipsicle**, intervalli di tempo richiesti per il sorgere dei segni zodiacali;
- *Ottica* di **Euclide**;
- *Catottrica*, di **Euclide** (l'attribuzione a Euclide di quest' opera è discussa);
- *Dati*, sempre di **Euclide**.

Che siano effettivamente esistite nell'antichità delle collezioni di opere che andavano complessivamente sotto il titolo di *Piccola astronomia*, a parte il richiamo posto da Pappo all'inizio del libro VI della sua *Collezione matematica*, non è stato definitivamente provato.

La tradizione ritiene che almeno dal tempo di Pappo in poi, sia nel mondo greco-bizantino che in quello arabo uno o più dei manoscritti sopra citati abbiano avuto un largo uso nell'insegnamento preliminare dell'astronomia a studenti che non erano ancora in grado di padroneggiare opere di complessità paragonabili a quelle dell'*Almagesto* di Tolomeo.

Claudio Tolomeo

Negli anni che risalgono ai primi due secoli d.C. , i risultati di maggior importanza sono stati in Astronomia quelli di **Claudio Tolomeo** che dichiara di basare la sua Astronomia sui procedimenti incontrovertibili dell'Aritmetica e della Geometria.

Da antiche fonti si sa che Tolomeo (100 - 168 ca. d.C.), astronomo, geografo e matematico greco, trascorse la maggior parte della sua vita presso il tempio serapeo di Canopo, vicino ad Alessandria d'Egitto, svolgendo le osservazioni che costituirono la base per lo sviluppo della sua teoria astronomica.

Il contributo più importante di Tolomeo alla storia della scienza non è quello di scienziato originale ma, secondo la tendenza alessandrina sviluppatasi a partire dal II secolo a.C. , di compilatore e sistematore organico delle dottrine precedenti.

L'*Almagesto* e il "sistema tolemaico"

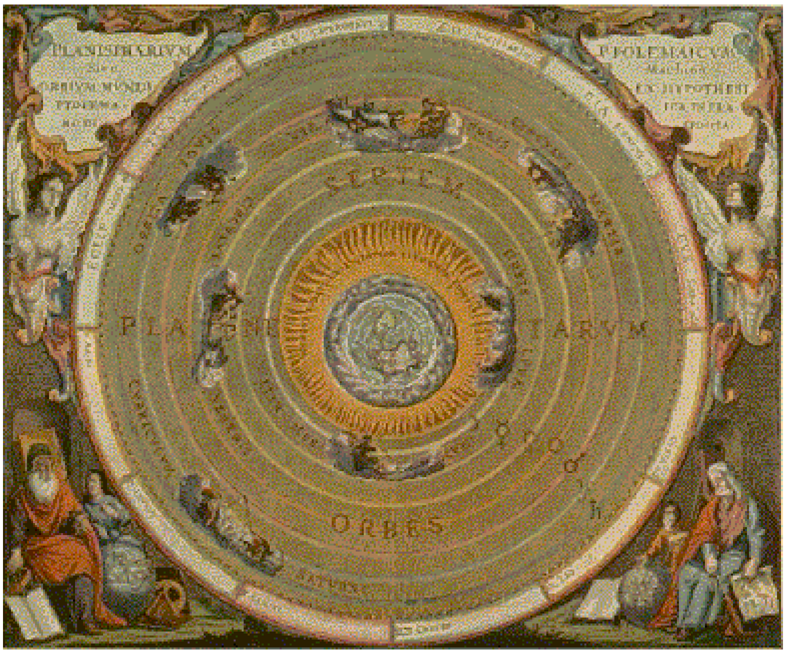
La prima e più nota opera di Tolomeo, intitolata originariamente *Megalé mathematiké sýtaxis* (Grande sistema matematico), venne tradotta in arabo col titolo di *Al-Majisti*. Le traduzioni latine eseguite in Europa nel corso del Medioevo riportarono il titolo ***Almagesto***, con il quale essa è giunta fino a noi.

Quest'opera è una grandiosa sintesi del sapere astronomico dell'antichità, incentrata su una concezione geocentrica dell'universo che dominerà incontrastata l'astronomia fino all'avvento della teoria copernicana nella prima metà del XVI secolo. Nell'*Almagesto* Tolomeo propose una teoria che, assumendo la Terra immobile e al centro dell'universo, descrive in termini geometrici e matematici i moti apparenti e le posizioni dei cinque pianeti allora conosciuti, del Sole e della Luna inglobati nella sfera delle stelle fisse.

La nozione geocentrica del cosmo (in opposizione a quella eliocentrica di Aristarco di Samo) affermatasi nel Medioevo prende proprio da Tolomeo il nome di **"sistema tolemaico"**: l'astronomo alessandrino, infatti, basandosi sugli studi precedenti e sulla speculazione stoica ad essi sottesa, descrive in forma compiuta e sistematica quel cosmo ordinato e matematicamente compiuto già individuato da Aristotele nella sua *Fisica*.

Secondo il sistema tolemaico la Terra è ferma al centro dell'universo e intorno ad essa ruotano, su sfere concentriche e in ordine di distanza, la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove, Saturno e le cosiddette stelle fisse descrivendo orbite perfettamente circolari, dette *deferenti*. Per spiegare le irregolarità osservate nei moti dei pianeti e i cambiamenti di dimensione e di luminosità dei corpi celesti, Tolomeo sostenne che solo il Sole percorresse il proprio deferente con moto uniforme, e che la Luna, e in generale gli altri pianeti, si muovessero su dei cerchi, detti *epicicli*, i cui centri si muovevano a loro volta sui relativi deferenti.

Le stelle erano fissate tutte sulla "pelle dell'universo" alla stessa distanza, senza profondità differenti, mentre i pianeti erano detti “stelle vaganti” perché a differenza delle stelle fisse, che sono attaccate sulla parete del mondo, esse vagano. Il movimento di questi pianeti é apparentemente irregolare, perché é vero che vanno in una determinata direzione, ma a velocità diverse a seconda delle occasioni (a volte si fermano o addirittura sembrano tornare indietro).



In un secondo tempo il sistema venne completato introducendo una nona sfera, per giustificare la precessione degli equinozi, e una decima sfera, o *primo mobile*, che si pensava guidasse gli altri corpi celesti.

Il sistema tolemaico con la complessa teoria degli epicicli poteva giustificare la maggior parte delle osservazioni astronomiche dell'epoca e rimase incontrastato fino al XVI secolo, quando l'astronomo polacco Niccolò Copernico rifiutò il sistema geocentrico, enunciando la rivoluzionaria teoria eliocentrica.

Una curiosità é che esso per molti secoli resterà in vigore e nessuno avanzerà obiezioni: Dante stesso lo accetterà e non si accorgerà delle incongruenze.

Altre opere

Oltre all'Almagesto Tolomeo scrisse anche altre **opere astronomiche:**

Tetrabiblo (Collezione matematica): l'opera consta di 4 libri in cui, come complemento dell'*Almagesto*, Tolomeo accosta all'astronomia la matematica (*mathematiké*), dandole forma scientifica.

***Calendario*:** perduto, era forse una tavola astronomico-zodiacale e cronografica. Infatti Tolomeo considerava che vi fosse uno stretto legame tra astronomia ed astrologia**:** tale unione, apparentemente contraddittoria per uno scienziato, risale al determinismo stoico, che Tolomeo accetta, vedendo la vita dell'uomo inevitabilmente legata al moto degli astri e dei pianeti al momento della nascita: di conseguenza Tolomeo cerca di sistematizzare l'astrologia in un complesso di norme per pronosticare il destino, secondo la tendenza diffusa all'epoca anche tra gli imperatori, come Adriano stesso, che era anche astrologo.

***Fasi*:** opera perduta, forse sulla precessione degli equinozi e sulle fasi dei pianeti.

Benché il suo contributo fondamentale sia da cercare nell'ambito dell'astronomia, Tolomeo si interessò proficuamente anche di altre discipline, quali la Geografia, la Musica e l'Ottica.

Di notevole importanza storica è l'opera intitolata ***Geografia***: **:** in 8 libri, è una descrizione, in base a criteri matematici, delle distanze tra 8.000 località. Tolomeo offre una proiezione del globo su una superficie piana in 27 cartine, dandone la misura della circonferenza in circa 180.000 stadi, contro quella di circa 250.000 stadi di Eratostene. Con il sistema di latitudine e longitudine introdotto, egli influenzò i cartografi per centinaia di anni, pur non contenendo dati affidabili; inoltre nell'opera, Tolomeo compilò elenchi con nomi di località corredati delle relative coordinate, precisò confini e diede una classificazione dei climi.

L'adozione di questo calcolo errato, dunque, inficia le misure: l'opera è tuttavia una testimonianza importante della concezione "fisica" della geografia, contrapposta a quella "descrittiva" di Strabone.

Un'altra opera geografica è il ***Planisfero***, che è andato perduto; esso doveva essere una rappresentazione piana di tutta la terra nel suo complesso.

Per quanto riguarda la musica, Tolomeo espose una teoria dei suoni tipici della musica greca in un trattato intitolato ***Armonica***. In 3 libri, trattava della musica secondo la corrente concezione scientifico-matematica degli antichi.

Nell'***Ottica*** analizzò le proprietà della luce, e in particolare i fenomeni della rifrazione e della riflessione. Di quest'opera abbiamo solo i libri II-V in traduzione latina, sugli originali cinque.

In uno stile chiaro e scorrevole, pur se naturalmente ricco di tecnicismi, Tolomeo consegna all'epoca medievale e rinascimentale la nozione non tanto di un determinato sistema astronomico, ma di un **sapere unitario**, <u>in cui le varie scienze concorrono ad elaborare una visione quanto più globale e completa possibile</u>.

Il periodo romano e l’oscurantismo culturale: dal III all’XI secolo d.C.

Dal 300 d.C. al 1100, in Europa non vi fu alcun progresso nell'ambito scientifico; si hanno solo tracce di traduttori delle opere di Euclide, Aristotele e degli antichi greci.

Il più importante traduttore fu Severino Boezio (citato da Dante nel Par. X, 125-129) che, nella sua opera, traduce le definizioni ed i teoremi di Euclide ma non ne dà le dimostrazioni; probabilmente Boezio non sempre capiva ciò che traduceva.

Le traduzioni erano tutte in latino, lingua ufficiale della Chiesa che impose il suo potere nella Cultura (nel 380, Teodosio dichiara il Cristianesimo religione ufficiale dell'Impero, proibisce i culti pagani e nel 394 abolisce le Olimpiadi), per cui il Latino diventò la lingua internazionale dell'Europa e, quindi, la lingua della Matematica e della Scienza.

Tra il 150 a.C e il 364 d.C. (il periodo più probabile è considerato intorno al 250 d.C.) è vissuto ad Alessandria un grande matematico, Diofanto, il quale raccolse e risolse problemi che compendiò in un unico trattato "l'Arithmetica" costituito da tredici libri, di cui solo sei sopravvissero agli eventi del medioevo perché gli altri sette furono distrutti dagli eventi successivi.

Infatti in tale operazione da Marc'Antonio che marciò sulla città di Pergamo dove era stata fondata una grande, durante i secoli che separano Euclide da Diofanto, Alessandria era considerata la capitale intellettuale del mondo civilizzato, ma per tutto questo periodo la città fu ripetutamente minacciata da eserciti stranieri. Il primo grande assalto si ebbe nel 47 a.C., quando Giulio Cesare cercò di abbattere il regno di Cleopatra incendiando la flotta di Alessandria, nei cui pressi era situata la Biblioteca che prese fuoco e centinaia di migliaia di volumi furono distrutti. Cleopatra decise di riportare la Biblioteca al suo antico splendore e trasportò tutti i volumi di Pergamo ad Alessandria (in Egitto).

Nei quattro secoli successivi la Biblioteca, che Cleopatra custodiva nel Tempio di Serapide, continuò ad accumulare libri finché nel 389 d.C. l'imperatore cristiano Teodosio ordinò al vescovo di Alessandria Teofilo di distruggere tutti i monumenti pagani compreso il Tempio di Serapide. I dotti pagani che cercarono di salvare sei secoli di conoscenze furono massacrati dalla plebaglia cristiana. Poche copie dei volumi più importanti che sopravvissute alla devastazione furono distrutti da un attacco mussulmano nel 642 dal califfo Omar perché alcuni ritenuti contrari al Corano ed altri ritenuti superflui. I manoscritti vennero utilizzati per alimentare le caldaie dei bagni pubblici e la matematica greca andò in fumo.

Nei mille anni successivi non si riscontra alcun interesse per la matematica in Occidente. Essa è sopravvissuta per merito degli Indiani e degli Arabi che copiarono le formule dai manoscritti greci sopravvissuti e reinventarono molti teoremi che erano stati perduti.

Dal III secolo fino all'XI secolo non si riscontra in Europa alcun risultato significativo sia nell'ambito delle scienze che nella letteratura e nella filosofia. Nel frattempo gli arabi avevano dato una struttura allo studio dell'algebra, i cui risultati si sono conosciuti in Europa dall'XI secolo in poi (periodo della rifioritura economica), per merito principalmente di Leonardo Pisani (1170-1250) detto Fibonacci perché figlio del mercante Bonacci.

Fibonacci era nato a Pisa, ma era stato educato in Africa ed aveva viaggiato in Europa ed in Asia Minore per seguire il padre; ed è durante questi viaggi che aveva racimolato manoscritti che contenevano gran parte dei risultati di algebra ottenuti dagli arabi.

Nel 1202 scrisse il Liber Abaci, di cui venne in possesso Dante Alighieri che era molto attento alla cultura scientifica del suo tempo e da bambino frequentava le lezioni di Pietro Ispano (1220-1277) dove apprende il metodo euristico nella scienza. L'interesse di Dante per la cultura scientifica è, oggi, oggetto di approfondimento da parte degli storici della Matematica che ritengono, dall'analisi dei brani della Divina Commedia, che egli sia stato un buon matematico.

Diofanto di Alessandria

La matematica greca non si mantenne sempre ad un livello elevato: al periodo glorioso del III secolo a.C. fece seguito un declino che si arrestò nel periodo che va dal 250 al 350 d.C. noto anche come “Tarda età alessandrina”, all’inizio di tale periodo troviamo il più grande algebrista greco Diofanto di Alessandria al quale viene spesso dato l’appellativo di padre dell’algebra anche se la sua opera non presenta affatto quel tipo di contenuti che formano la base dell’algebra elementare moderna e non è nemmeno simile all’algebra geometrica riscontrabile in Euclide.

Diofanto è una delle figure più enigmatiche della storia della Matematica in quanto di lui non si sa quasi nulla: si ritiene che alcuni dei suoi scritti siano: la ***Arithmetica***, i ***Porismi***, ed i ***Numeri poligonali***.

Tra queste l’opera principale di Diofanto è senza dubbio l’***Arithmetica***, un trattato originariamente in tredici libri di cui sono pervenuti soltanto i primi sei, tale opera è caratterizzata da un alto grado di raffinatezza e ingegnosità matematica. Essa rappresenta essenzialmente una nuova branca matematica e fa uso di un metodo diverso. Per il fatto che in essa non compaiono metodi geometrici, assomiglia in larga misura all'algebra dei babilonesi; tuttavia, mentre i matematici babilonesi si erano interessati prevalentemente della soluzione approssimata di equazioni determinate fino al terzo grado, la *Arithmetica* di Diofanto (così come ci è pervenuta) è quasi esclusivamente dedicata alla soluzione esatta di equazioni sia determinate che indeterminate. Per il rilievo che viene dato nell'*Arithmetica* alla soluzione di problemi indeterminati, la disciplina che tratta questo argomento, noto anche come analisi indeterminata, ha ricevuto il nome di analisi diofantea. Siccome questo tipo di ricerca fa oggi parte generalmente di corsi sulla teoria dei numeri, e non di quelli di algebra elementare, essa non costituisce una ragione per considerare Diofanto come il padre dell'algebra. V'è, però, un altro aspetto della sua opera che giustifica tale paternità. L'algebra è oggi basata quasi esclusivamente su enunciati formulati in linguaggio simbolico, e non nel linguaggio del parlar comune che era servito ad esprimere, oltre alla letteratura greca, anche la matematica greca più antica.

Nella storia dell'Algebra, seguendo il pensiero dello studioso G. H. Nesselmann, si possono individuare tre stadi distinti:

1. **Fase retorica (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d.C.):** un'Algebra verbale, tutta a parole, senza simboli.
2. **Fase sincopata (da Diofanto alla fine del secolo XVI):** vengono introdotte delle abbreviazioni per le incognite, ma i calcoli sono eseguiti tutti in linguaggio naturale.
3. **Fase simbolica (introdotta da Viète, 1540-1603):** Si usano le lettere per tutte le quantità, incognite o meno, e si "sfrutta" l'Algebra non soltanto per scoprire il valore dell'incognita, come nella seconda fase, ma per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.

Le tre fasi evidenziate segnano una crescita del pensiero algebrico. Si parte da un linguaggio del tutto verbale, senza simboli, per arrivare ad un utilizzo totale del metodo simbolico per ogni argomentazione.

La fama dell'***Arithmetica*** è principalmente legata a due argomenti:

1. Il simbolismo matematico
2. Le equazioni diofantee

Simbolismo matematico

Il sintetico simbolismo matematico oggi in uso (ad esempio, il simbolo + per l'addizione o $\sqrt{\ }$ per l'estrazione di radici, l'uso delle parentesi, le lettere per indicare quantità numeriche ecc.) è una conquista relativamente recente: non più di tre o quattro secoli rispetto ai millenni precedenti in cui la matematica è stata prevalentemente descrittiva, basata cioè sull'uso della parola.

Il cammino per giungere all'attuale simbolismo fu lento e graduale: nei primi tempi (fino a Diofanto) si usava esclusivamente il linguaggio naturale senza ricorrere ad alcun segno.

Ad esempio, nell'impostare dei calcoli, gli antichi erano costretti a ricorrere a lunghi discorsi fatti per esteso. Così, l'espressione 3x + 7 = 4x veniva enunciata (e scritta) pressappoco in questo modo: *tre volte una quantità incognita addizionate a sette unità sono eguali a quattro volte la stessa quantità incognita.*

Il primo che cerca di ideare una scrittura matematica più snella è Diofanto; è lui che introduce simboli per rappresentare gli operatori aritmetici più comuni prendendoli a prestito dall'alfabeto greco; ad esempio sostituisce l'espressione ***isoi eisin*** che in greco significa "sono eguali" , con il simbolo ***ι (iota)*** , l'incognita con il simbolo ς.

L'addizione di termini veniva rappresentata mediante l'appropriata giustapposizione dei simboli indicanti i termini e la sottrazione da una lettera collocata davanti ai termini da sottrarre. Non vi erano ulteriori segni per la moltiplicazione e la divisione. Mediante tale notazione Diofanto era in grado di scrivere polinomi a una incognita in forma quasi altrettanto concisa di quella che usiamo oggi.

Premessa sulle equazioni

Come noto, un sistema di n equazioni di primo grado in n incognite ha, generalmente, un'unica soluzione; può però non averne nessuna o infinite. Ad esempio, il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione (x = 7,y = 2), mentre il sistema

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 2y = 15 \end{cases}$$

non ammette soluzioni (come si vede immediatamente, la seconda equazione è in contrasto con la prima), e il sistema

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 2y = 18 \end{cases}$$

ne ammette infinite (infatti, la seconda equazione non aggiunge nulla alla prima). In quest'ultimo caso, il problema è *indeterminato*. Se però si aggiungono alcune opportune condizioni, il problema può cessare di essere indeterminato e può ammettere una sola (o un numero finito) di soluzioni.

Ad esempio, se al sistema indeterminato precedente si aggiungono le condizioni che delle infinite soluzioni possibili interessano soltanto quelle rappresentate da numeri interi e positivi e che x sia maggiore di 5 si hanno soltanto le tre soluzioni ($x = 6, y = 3$), ($x = 7, y = 2$), ($x = 8, y = 1$).

Equazioni diofantee

Equazioni (non necessariamente di primo grado) per le quali si cerchino come soluzioni soltanto numeri interi prendono il nome di *diofantine*, in quanto fu proprio Diofanto a dedicarsi con particolare impegno allo studio di tali equazioni, in particolare di quelle indeterminate (in realtà Diofanto non cercava soluzioni intere bensì razionali).

Le equazioni diofantine, in molti casi, ammettono un numero discreto (finito) di soluzioni, ricavabili con un numero finito di tentativi. Una tipica equazione diofantina è del tipo:

$$ax + by = c \qquad a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Si dimostra che se c è divisibile per il massimo comun divisore di a e b l'equazione è risolubile, e dà luogo a soluzioni intere discrete. Ad esempio, l'equazione $4x + 3y = 24$ dà, nel campo dei numeri interi e positivi, la sola soluzione ($x = 3, y = 4$).

Ma forse l'equazione diofantina più famosa è del tipo:

$$x^n + y^n = z^n \qquad x, y, z, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Nel caso n = 2 essa dà come soluzioni intere le cosiddette "terne pitagoriche", nel caso invece $n \geq 2$ essa ha dato il mal di testa per secoli a miriadi di matematici, come ben sanno coloro che si sono dedicati al cosiddetto "ultimo teorema di Fermat".

Il problema della tomba di Diofanto

A Diofanto si deve un famoso problema, che egli stesso volle venisse scritto sulla propria tomba sotto forma di epitaffio:

Hunc Diophantus habet tumulum qui tempora vitae illius, mira denotat arte tibi. Egit sex tantem juvenie; lanugine malas vestire hinc coepit parte duodecima. Septante uxori post haec sociatur, et anno formosus quinto nascitur inde puer. Semissem aetatis postquam attigit ille paternae, infelix subita morte peremptus obit. Quator aestater genitor lugere superstes cogitur, hinc annos illius assequere.

Traduzione:

Questa tomba rinchiude Diofanto e, (meraviglia!) dice matematicamente quanto ha vissuto. Un sesto della sua vita fu l'infanzia, aggiunse un dodicesimo perché le sue guance si coprissero della peluria dell'adolescenza. Inoltre per un settimo ebbe moglie, e dopo cinque anni di matrimonio ebbe un figlio. L'infelice morì improvvisamente quando raggiunse la metà dell'età paterna. Il genitore sopravvissuto fu in lutto per quattro anni e raggiunse infine il termine della propria vita.

La soluzione dell'enigma sta nella seguente equazione:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

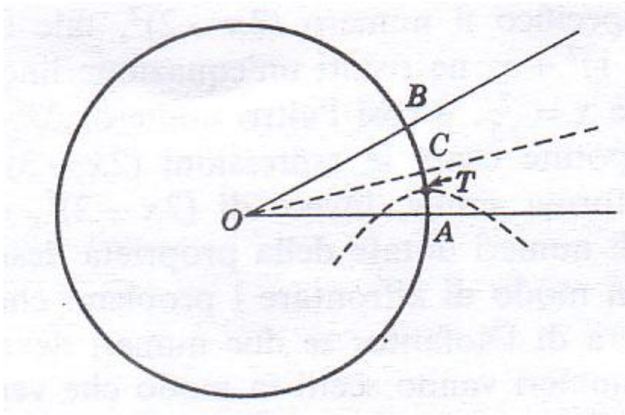
da cui si ricava l'età di Diofanto, x = 84.

Pappo di Alessandria

Compose verso il 320 d.C. un'opera dal titolo ***Collezione*** che ci fornisce una preziosa documentazione storica concernente alcuni aspetti della matematica greca che altrimenti ci sarebbero rimasti sconosciuti. Per esempio, è dal Libro V della *Collezione* che siamo venuti a sapere della scoperta di Archimede dei tredici poliedri semiregolari, noti come "solidi archimedei". La *Collezione* contiene poi anche dimostrazioni alternative e lemmi supplementari relativi a teoremi di Euclide, Archimede, Apollonio e Tolomeo. Infine, il trattato presenta nuove scoperte e generalizzazioni che non è dato trovare in nessuna opera precedente. La *Collezione*, il trattato più importante di Pappo, comprendeva originariamente otto libri, ma il primo libro e la prima parte del secondo sono andati perduti. In questo caso la perdita è meno grave di quella degli ultimi libri dell'*Arithmetica* di Diofanto: sembra infatti che i primi due libri della *Collezione* riguardassero prevalentemente i principi del sistema di tetradi introdotto da Apollonio nella numerazione greca. Dal momento che nell'*Arenario* abbiamo il corrispondente sistema di ottadi, possiamo farci un'idea abbastanza esatta di quale fosse il materiale presentato nelle parti dell'opera di Pappo che sono andate perdute.

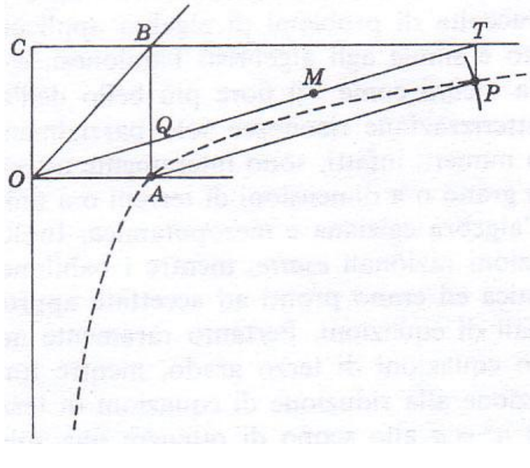
Il Libro III della *Collezione* ci mostra come Pappo condividesse pienamente il gusto per la sottigliezza e la precisione logica della geometria, caratteristico della matematica greca classica. Qui egli fa una netta distinzione tra problemi "piani", "solidi" e “lineari”: i primi sono costruibili soltanto con cerchi e rette; i secondi sono risolvibili mediante l'uso di sezioni coniche, e l'ultimo genere di problemi richiede curve diverse da rette, cerchi e coniche. Pappo descrive poi alcune soluzioni dei tre famosi problemi dell'antichità: la duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo vengono presentate come problemi del secondo tipo, ossia come problemi solidi, e la quadratura del cerchio come un problema lineare. In questo contesto Pappo afferma virtualmente che i problemi classici presentano soluzioni impossibili sotto le condizioni platoniche, giacché non appartengono alla categoria dei problemi piani. Tuttavia soltanto nel XIX secolo si giunse a dare dimostrazioni rigorose di tale fatto.

Nel Libro IV Pappo torna a insistere sul fatto che ogni problema richiede una costruzione appropriata. In altri termini, non si dovrebbero usare luoghi geometrici lineari nella soluzione di un problema solido, né luoghi geometrici solidi o lineari nella soluzione di un problema piano. Considerando la trisezione di un angolo come un problema solido, suggerisce pertanto metodi che fanno uso di sezioni coniche, mentre Archimede in un caso aveva usato una neusis ossia una costruzione del tipo di quella su cui è basato il regolo calcolatore, e in un altro caso era ricorso alla spirale, che è un luogo geometrico lineare. Una delle trisezioni presentate da Pappo viene effettuata nel modo seguente. L'angolo dato AÓB venga collocato in un cerchio con centro O, e sia OC la bisettrice dell'angolo. Si tracci l'iperbole avente A come uno dei fuochi e OC come direttrice corrispondente, e con una eccentricità uguale a 2. Allora un ramo di questa iperbole taglierà la circonferenza del cerchio in un punto T tale che l'angolo AOT è un terzo di AÓB.

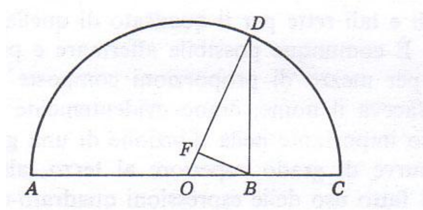


Una seconda costruzione della trisezione presentata da Pappo fa uso di una iperbole equilatera e viene effettuata nel modo seguente. Il lato OB dell'angolo dato AÓB sia la diagonale di un rettangolo ABCO, e per il punto A si tracci l'iperbole equilatera avente come asintoti i prolungamenti di BC e di OC. Facendo centro in A e con raggio doppio di OB si tracci un cerchio che interseca l'iperbole nel punto P: dal punto P si faccia cadere la perpendicolare PT sul prolungamento di CB. Si può allora facilmente dimostrare, in base alle, proprietà dell'iperbole, che la retta passante per i punti O e T è parallela ad AP, e che l'angolo AÓT è un terzo dell'angolo AÓB. Pappo non ci indica alcuna fonte per questa sua trisezione, e non possiamo fare a meno di chiederci se tale trisezione fosse nota ad Archimede.

Infatti se tracciamo il semi cerchio passante per il punto B e avente QT come diametro e M come centro, otteniamo essenzialmente la costruzione archimedea della neusis, giacché OB = QM = MT = MB.

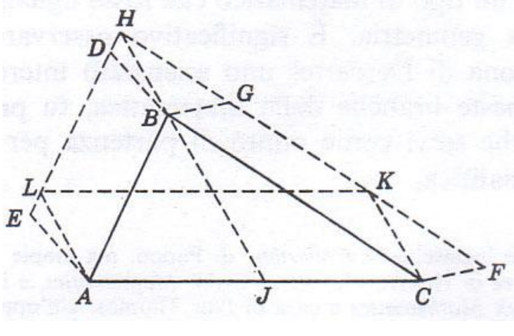


Nel Libro III Pappo espone anche la teoria delle medie e presenta una interessante costruzione che include la media aritmetica, quella geometrica e quella armonica entro un unico semicerchio. Pappo mostra che, se nel semicerchio ADC con centro O

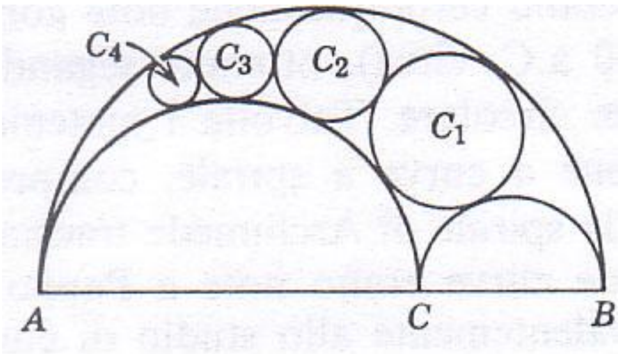


abbiamo DB perpendicolare ad AC e BF perpendicolare a OD, allora DO è la media aritmetica, DB la media geometrica e DF la media armonica delle grandezze AB e BC. Qui Pappo rivendica a se stesso soltanto la dimostrazione, mentre attribuisce la figura a un geometra di cui non fa il nome. Anche quando Pappo cita esplicitamente la fonte, questa talvolta non ci è altrimenti nota: ciò mostra quanto inadeguate siano le nostre informazioni circa i matematici del suo tempo.

La *Collezione* di Pappo contiene frammenti di interessanti informazioni e di nuovi risultati significativi. In molti casi le novità rivestono la forma di generalizzazioni di teoremi precedenti: un paio di esempi del genere compaiono nel Libro IV. Qui troviamo una generalizzazione elementare del teorema di Pitagora. Se ABC è un triangolo qualsiasi e se ABDE e CBGF sono parallelogrammi qualsiasi costruiti su due dei lati, allora Pappo costruisce sul lato AC un terzo parallelogrammo ACKL uguale alla somma degli altri due. Ciò viene effettuato facilmente prolungando i lati FG ed ED fino a che si incontrano nel punto H, tracciando poi HB e prolungandola sino a incontrare il lato AC nel punto J, e, infine, tracciando le linee AL e CK parallele alla linea HBJ. Non sappiamo se questa generalizzazione, che solitamente porta il nome di Pappo, sia stata o no originariamente proposta da quest'ultimo; è stata avanzata l'ipotesi che forse essa era già nota a Erone.



Un altro esempio di generalizzazione contenuto nel Libro IV, e anch'esso recante il nome di Pappo, è costituito da un'estensione dei teoremi di Archimede sul "coltello del ciabattino". Tale generalizzazione afferma che, se si inscrivono successivamente cerchi C1, C2, C3, C4, ... , Cn, ... come nella figura, tutti tangenti ai semicerchi costruiti su AB e su AC, e successivamente tangenti l'un l'altro, la distanza perpendicolare misurata dal centro dell'n-esimo cerchio alla base ABC è uguale a n volte il diametro dell'n-esimo cerchio ".



Il Libro V della *Collezione* era quello preferito dai commentatori posteriori, giacché sollevava la questione dell'intelligenza delle api. Dopo aver mostrato che di due poligoni regolari aventi uguale perimetro quello con il maggior numero di lati aveva l'area maggiore, Pappo concludeva che le api dimostravano un certo grado di intuizione matematica nel costruire le loro celle in forma di prismi esagonali piuttosto che come prismi quadrati o triangolari. Il libro si addentra in altri problemi di isoperimetria, compresa la dimostrazione che il cerchio possiede, per un dato perimetro, un'area maggiore di qualsiasi poligono regolare. Qui sembra che Pappo abbia seguito fedelmente un trattato Sulle figure isometriche scritto quasi mezzo millennio prima da Zenodoro (180 a.C. circa), di cui ci sono stati conservati dei frammenti da altri commenta tori posteriori. Fra i teoremi del trattato di Zenodoro v'era quello che afferma che fra tutte le figure solide con uguale superficie la sfera possiede il massimo volume; ma ne veniva data soltanto una giustificazione incompleta.

I Libri VI e VIII della *Collezione* concernono principalmente le applicazioni della matematica all'astronomia, all'ottica e alla meccanica (compreso un tentativo mal riuscito di trovare la legge del piano inclinato). Un'importanza molto maggiore per la storia della matematica riveste il Libro VII, nel quale, seguendo la sua inclinazione per la generalizzazione, Pappo giunge molto vicino al principio fondamentale della geometria analitica. Gli unici mezzi per definire curve piane riconosciuti dagli antichi erano:

1. definizione cinematiche in cui un punto si muove con due movimenti sovrapposti
2. la intersezione di una superficie geometrica, come un cono o una sfera o un cilindro, con un piano.

Fra le curve di quest'ultimo tipo vi erano certe quartiche note come sezioni spiriche, descritte da Perseo (150 a.C. circa), ottenute segando con un piano un toro o anello a sezione circolare. Talvolta i matematici greci avevano rivolto la loro attenzione a curve a spirale, compresa l'elica cilindrica e una curva analoga alla spirale di Archimede tracciata su una superficie sferica: ambedue queste curve erano note a Pappo; tuttavia la geometria greca si limitò prevalentemente allo studio di curve piane, di fatto a un numero molto ristretto di curve piane. È pertanto significativo e degno di nota il fatto che nel Libro VII della *Collezione* Pappo presenti un problema generalizzato che comporta un numero infinito di nuovi tipi di curve. Questo problema, anche nella sua forma più semplice, è noto solitamente come il "problema di Pappo"; la sua formulazione originaria, però, che comporta tre o quattro rette, sembra risalire al tempo di Euclide. All'inizio della trattazione il problema viene indicato come quello del "luogo geometrico rispetto a tre o quattro rette"; si tratta del problema che abbiamo illustrato a proposito dell'opera di Apollonio. Euclide aveva ovviamente identificato tale luogo geometrico in certi casi speciali; sembra però che sia stato Apollonio, in un'opera che non ci è pervenuta, a darne una soluzione completa. Nondimeno da Pappo si ricava l'impressione che i matematici precedenti non siano riusciti nel loro tentativo di dare una soluzione generale; egli conferma, così, implicitamente di essere stato il primo a mostrare che tale luogo geometrico è, in tutti i casi, una sezione conica.

Cosa ancor più importante, Pappo procedeva, poi, a considerare il problema analogo per più di quattro rette. Nel caso di sei rette giacenti in un piano egli riconosceva che una curva è determinata dalla condizione che il prodotto delle distanze da tre delle rette abbia un rapporto fisso con il prodotto delle distanze dalle altre tre. In questo caso una curva è definita dal fatto che un solido abbia un certo rapporto fisso con un altro solido. Pappo esitava a fare il passo avanti e giungere a casi che comportassero più di sei rette per la ragione che "non esiste nessuna cosa che sia contenuta da più di tre dimensioni". Ma continuava: "poco tempo fa alcuni matematici si sono permessi di concepire cose del genere, le quali non significano nulla di comprensibile, e hanno parlato del prodotto del contenuto di tali e tali rette per il quadrato di quella o per il contenuto di quelle altre. È comunque possibile affermare e presentare cose simili generalmente per mezzo di proporzioni composte". Questi predecessori, di cui non faceva il nome, erano evidentemente pronti a fare un passo avanti molto importante nella direzione di una geometria analitica che includesse curve di grado superiore al terzo, allo stesso modo che Diofanto aveva fatto uso delle espressioni quadrato-quadrato e cubo-cubo per indicare potenze numeriche superiori. Se Pappo avesse seguito questo suggerimento, avrebbe potuto anticipare Descartes nel dare una classificazione e una teoria generale delle curve che andava molto al di là della classica distinzione tra luoghi geometrici piani, solidi e lineari. Il fatto che egli sia giunto a riconoscere che, quale che sia il numero di rette che intervengono nel problema che porta il suo nome, ne risulta determinata una curva specifica, costituisce l'osservazione più generale sui luoghi geometrici che sia stata fatta nel corso dell'intero sviluppo della geometria antica, e le abbreviazioni dell'algebra sincopata sviluppate da Diofanto avrebbero fornito uno strumento adeguato per scoprire alcune proprietà delle curve. Ma Pappo era fondamentalmente soltanto un geometra, così come Diofanto era stato soltanto un algebrista; pertanto Pappo si limitò a osservare con sorpresa che nessuno aveva fatto una sintesi di questo problema in un qualsiasi caso che andasse al di là di quello di quattro rette. Lo stesso Pappo non approfondì ulteriormente lo studio di questi luoghi geometrici, "dei quali non si ha altra conoscenza e che vengono semplicemente chiamati curve" ". Perché potesse venir fatto un ulteriore passo avanti in questo campo era necessaria la comparsa di un tipo di matematico che fosse ugualmente interessato all'algebra e alla geometria. È significativo osservare che quando comparve nella persona di Descartes uno scienziato interessato sia all'una sia all'altra di queste branche della matematica, fu proprio questo problema di Pappo che servì come punto di partenza per l'elaborazione della geometria analitica.

Nel Libro VII della *Collezione*, oltre al problema di Pappo, vengono discussi altri importanti argomenti. Innanzitutto v'è una esposizione completa di quello che veniva chiamato il metodo analitico e viene descritta una raccolta di opere nota come il Tesoro dell'Analisi. Pappo descrive l'analisi come "un metodo consistente nel considerare come ammesso ciò che si cerca e nello sviluppare le conseguenze sino a giungere a qualcosa che viene ammesso come risultato nella sintesi. In altri termini, egli considerava l'analisi come una "soluzione alla rovescia", i cui passi andavano ripercorsi in senso inverso perché potesse costituire una dimostrazione valida. Se l'analisi porta a qualcosa che si ammette essere impossibile, anche il problema sarà impossibile, giacché una falsa conclusione implica una falsa premessa. Pappo spiega che il metodo di analisi e di sintesi viene usato dagli autori le cui opere costituiscono il *Tesoro dell'Analisi*: "Questo rappresenta un corpo di dottrine ad uso di coloro che, dopo avere studiato i soliti elementi, vogliono impadronirsi degli strumenti per risolvere problemi relativi a curve"; e fra le opere costituenti il Tesoro dell'Analisi Pappo elenca i trattati sulle coniche di Aristeo, di Euclide e di Apollonio. È dalla descrizione datane da Pappo che sappiamo che le *Coniche* di Apollonio contenevano 487 teoremi. Dal momento che i sette libri pervenutici comprendono 382 proposizioni, possiamo trarne la conclusione che il Libro VIII, andato perduto, conteneva 105 proposizioni. Circa la metà delle opere elencate da Pappo come facenti parte del *Tesoro dell'Algebra* sono andate perdute, compresa la Sezione di un rapporto di Apollonio e i trattati *Sulle medie* di Eratostene e *Sui porismi* di Euclide. È stata avanzata l'ipotesi che il porisma sia l'equivalente antico della nostra equazione di una curva o di un luogo geometrico: ciò indicherebbe che Euclide e Pappo non erano forse così lontani come generalmente si suppone da quella che chiamiamo "geometria analitica".

Il Libro VII della *Collezione* contiene la prima formulazione che si ricordi della proprietà del fuoco e della direttrice delle tre sezioni coniche. Sembra che Apollonio conoscesse le proprietà focali delle coniche a centro, ma è probabile che la proprietà del fuoco e della direttrice della parabola fosse sconosciuta prima di Pappo. Un altro teorema del Libro VII che compare qui per la prima volta è quello che solitamente viene designato con il nome di Paolo Guidino, un matematico del XVI secolo: *Se una curva piana chiusa viene fatta ruotare intorno a una retta che non attraversa la curva, il* *volume del solido così generato viene calcolato facendo il prodotto dell'area delimitata dalla curva per la distanza percorsa durante la rotazione dal centro di gravità dell'area*. Pappo era giustamente orgoglioso di questo teorema estremamente generalizzato

Esso comprendeva infatti "un gran numero di teoremi di ogni sorta con cernenti curve, superfici e solidi, i quali venivano dimostrati tutti simultaneamente mediante un'unica dimostrazione". Tale teorema è, infatti, il più generale che si conosca nell'antichità relativamente al campo dell'analisi infinitesimale. Pappo formulò anche il teorema analogo secondo il quale l'area generata dalla rotazione di una curva intorno a una retta che non interseca la curva è uguale al prodotto della lunghezza della curva per la distanza percorsa dal baricentro della curva durante la rotazione ".

La *Collezione* di Pappo è l'ultimo trattato matematico veramente significativo dell'antichità, giacché il tentativo, da lui fatto, di ridare alla geometria nuova vitalità non fu coronato dal successo. Si continuarono a scrivere opere matematiche in greco per un altro millennio circa, continuando una tradizione iniziata quasi un millennio prima, ma gli autori che vennero dopo Pappo non raggiunsero mai il suo livello. Le loro opere hanno quasi esclusivamente la forma di commento a trattati anteriori. Lo stesso Pappo è parzialmente responsabile del proliferare di commenti del genere: anch'egli aveva composto, fra l'altro, commenti agli *Elementi* di Euclide e all'*Almagesto* di Tolomeo, ma di questi ci sono pervenuti soltanto dei frammenti. Commenti posteriori, come quelli di Teone di Alessandria (attivo verso il 365) sono più utili per le informazioni storiche che contengono che non per i risultati matematici che presentano. Teone fu responsabile anche di una importante edizione degli *Elementi*, che ci è pervenuta; egli viene ricordato anche come il padre di Ipatia, una dotta giovane donna autrice di commenti a Diofanto, Tolomeo e Apollonio. Ardente ammiratrice della cultura pagana, Ipatia si attirò l'odio di una plebaglia fanatica di cristiani in mano ai quali trovò una morte crudele nel 415. La profonda impressione che la sua morte suscitò ad Alessandria indusse alcuni ad assumere tale anno per contrassegnare la fine della matematica antica; tuttavia è più appropriato farla terminare un secolo più tardi.

Proclo

Alessandria fu la patria di un altro giovane matematico, Proclo (410-485), il quale però si trasferì ad Atene dove divenne capo della scuola neoplatonica. Proclo era più un filosofo che un matematico, ma le sue osservazioni sono spesso una preziosa fonte di informazioni sulla storia dei primi sviluppi della geometria greca. Sotto questo punto di vista riveste una grande importanza il suo Commento al primo libro degli *Elementi* di Euclide, giacché, mentre lo redigeva, Proclo aveva indubbia mente in mano una copia della Storia della geometria di Eudemo, oggi perduta, nonché il *Commento agli Elementi di Pappo*, anch'esso andato in gran parte perduto. Per le nostre conoscenze sulla storia della geometria prima di Euclide dipendiamo in larga misura da Proclo, che incluse nel suo *Commento* un riassunto o una porzione sostanziale della *Storia di Eudemo*. Questo passo, che doveva diventare noto come l'*Epitome eudemiana*, può essere considerato come il principale contributo di Proclo alla matematica, anche se a lui viene attribuito il teorema secondo il quale, *se un segmento di data lunghezza si muove mantenendo i suoi punti estremi su due rette che si intersecano, un punto giacente sul segmento descriverà una porzione di ellisse*.

Negli anni in cui Proclo redigeva il suo *Commento* ad Atene, l'Impero romano si stava gradualmente sfasciando. Si pone di solito la fine dell'Impero nell'anno 476, giacché fu in tale anno che l'imperatore romano allora in carica venne detronizzato da Odoacre, re dei goti. Restava ancora in vita un po' dell'antico orgoglio senatoriale romano, ma il partito dei senatori aveva completamente perduto il potere politico.

Boezio

In tali condizioni Boezio (480-524 circa), che discendeva da un'antica illustre famiglia patrizia, si venne a trovare in una posizione difficile. Egli non era solo filosofo e matematico, ma anche statista, e forse guardava con disgusto all'affermarsi del potere degli ostrogoti. Anche se Boezio può forse essere considerato il più ragguardevole matematico prodotto dall'antica Roma, il livello delle sue opere é molto lontano da quello che aveva caratterizzato gli autori greci. Boezio compose manuali per ciascuna delle quattro discipline matematiche facenti parte delle arti liberali, ma si trattava di compendi scarni ed estremamente elementari di opere classiche precedenti: un manuale di Aritmetica, che non era altro che un compendio dell'*Introduzione di Nicomaco*; una Geometria basata su Euclide e contenente soltanto gli enunciati, senza dimostrazioni, di alcuni dei teoremi più semplici dei primi quattro libri degli Elementi; un'*Astronomia* tratta dall'*Almagesto* di Tolomeo; e un trattato di *Musica* che si rifaceva alle precedenti opere sull'argomento di Euclide, Nicomaco e Tolomeo. È molto probabile che in alcuni casi questi manuali introduttivi, largamente usati nelle scuole monastiche medievali, abbiano subito interpolazioni posteriori; è pertanto difficile determinare con precisione che cosa sia genuinamente dovuto a Boezio stesso. Nondimeno è chiaro che l'interesse dell'autore era principalmente rivolto a due aspetti della matematica: il suo rapporto con la filosofia, e la sua applicabilità a semplici problemi di misurazione. Della matematica intesa come struttura logica vi sono qui scarse tracce.

Sembra che Boezio fosse uno statista di alti ideali e di indiscutibile integrità. Egli, e dopo di lui i suoi figli, rivestirono la carica di console.

Boezio fu anche uno dei principali consiglieri di Teodorico; ma per non chiare ragioni, politiche o religiose, il filosofo cadde in disgrazia dell'imperatore. Si è fatta l'ipotesi che Boezio fosse cristiano (come forse lo era stato anche Pappo) e che avesse sostenuto concezioni trinitaristiche che gli avrebbero tolto le grazie dell'imperatore ariano. Può anche darsi però che Boezio avesse rapporti troppo stretti con elementi politici che guardavano all'Impero d'Oriente sperando di ottenerne l'aiuto per la restaurazione in Occidente dell'antico ordinamento romano. Comunque sia, Boezio venne condannato a morte nel 524 o 525 dopo un lungo periodo di prigionia. (Teodorico, sia detto per inciso, morì soltanto un anno più tardi, nel 526.) Fu in prigione che Boezio scrisse la sua opera più famosa, il *De consolatione philosophiae*. Questo saggio, scritto in prosa e in versi mentre aspettava la morte, discute il problema della responsabilità morale alla luce della filosofia aristotelica e di quella platonica.

La morte di Boezio segna la fine della matematica antica nell'Impero romano d'Occidente, così come la morte di Ipatia aveva segnato la conclusione di un periodo che aveva avuto in Alessandria il centro degli studi matematici. Tuttavia le ricerche in questo campo continuarono ancora per alcuni anni ad Atene. Non vi troviamo nessun grande matematico di qualche originalità; nondimeno il commentatore aristotelico Simplicio (attivo verso il 520) era abbastanza interessato alla geometria greca da conservarci quello che è forse il più antico frammento esistente. Aristotele nella *Fisica* aveva fatto riferimento alla quadratura del cerchio o di un segmento di cerchio: Simplicio colse questa opportunità per citare "parola per parola" quello che Eudemo aveva scritto a proposito della quadratura della lunule effettuata da Ippocrate.

L'Europa nel medioevo

L'Europa, durante il periodo in cui operò Gerberto (intorno all'anno mille), non era ancora pronta a sviluppi nel campo della matematica. L'atteggiamento dei cristiani, secondo Tertulliano, in un primo momento non era stato diverso da quello dei musulmani nei riguardi della Biblioteca di Alessandria; la ricerca scientifica, scriveva Tertulliano, era diventata superflua dopo la diffusione del Vangelo di Gesù Cristo. Al tempo di Gerberto la cultura musulmana aveva raggiunto il suo apice, ma i dotti latini contemporanei non sarebbero stati in grado di apprezzare i trattati arabi se ne fossero venuti a conoscenza. Ma fin dall'inizio del XII secolo la situazione cominciò a cambiare in una direzione che ricordava quanto si era verificato in Arabia nel IX secolo: non si può assimilare il sapere dei vicini senza conoscerne la lingua. I musulmani avevano abbattuto la barriera linguistica che li separava dalla Grecia nel IX secolo, e gli europei di lingua latina superarono la barriera linguistica che li separava dalla cultura araba nel XII secolo. All'inizio del XII secolo nessun europeo avrebbe potuto pretendere di essere un matematico o un astronomo vero e proprio, senza una buona conoscenza dell'arabo; e difatti l'Europa della prima metà del XII secolo non poteva vantare nessun matematico che non fosse un moro, o un ebreo, o un greco. Ma alla fine del secolo proprio dall'Italia cristiana doveva provenire il più eminente e originale matematico del mondo di allora.

Fu questa, in maniera così evidente, un'epoca di transizione da un vecchio a un nuovo modo di vedere che CA. Haskins intitolò la sua opera, che tratta appunto di quel periodo, *Il Rinascimento del XII secolo*. La rinascita di cui parla cominciò necessariamente con un dilagare di traduzioni. Queste in un primo tempo erano quasi esclusivamente dall'arabo in latino, ma all'inizio del XIII secolo se ne ebbero altre: dall'arabo in spagnolo, dall'arabo in ebraico, dal greco in latino, o anche dall'arabo in ebraico e poi in latino. Gli *Elementi* di Euclide furono fra le prime opere classiche di matematica ad apparire in traduzione latina dall'arabo: la versione venne fatta nel 1142 da Adelardo di Bath (1075 circa - 1160). Non è chiaro in che modo questo scienziato inglese sia venuto in contatto con la cultura musulmana. A quel tempo i tre principali collegamenti tra l'Islam e il mondo cristiano erano costituiti dalla Spagna, dalla Sicilia e dall'Impero di Oriente, e di questi il primo era quello più importante. Non sembra, però, che Adelardo sia stato fra i molti che usarono il collegamento attraverso la Spagna. Non è facile dire se le Crociate ebbero un influsso positivo sulla trasmissione della cultura; è invece molto probabile che abbiano interrotto gli esistenti canali di comunicazione più di quanto li abbiano facilitati. A ogni modo, i canali che passavano per la Spagna e per la Sicilia erano i più importanti nel XII secolo, e vennero lasciati in gran parte intatti dalle armate saccheggiatrici e distruttrici dei crociati nel periodo che va dal 1096 al 1272. La rinascita del sapere nell'Europa latina ebbe luogo durante le Crociate, ma probabilmente si verificò nonostante le Crociate.

La traduzione degli *Elementi* fatta da Adelardo esercitò uno scarso influsso per oltre un secolo, ma era tutt'altro che un fatto isolato. Adelardo aveva precedentemente (1126) tradotto le tavole astronomiche di al-Khuwarizmi dall'arabo in latino, e più tardi (nel 1155 circa) tradusse l'*Almagesto* di Tolomeo dal greco in latino. Adelardo, però, costituiva un'eccezione fra i primi traduttori per il fatto di non far parte di quel vasto gruppo che lavorava in Spagna. Colà, specialmente a Toledo, dove l'arcivescovo incoraggiava tale attività, si era sviluppata una vera e propria scuola di traduttori. La città, un tempo capitale dei visigoti e più tardi sotto il dominio dei mori per parecchi secoli prima di cadere in mano ai cristiani, era un luogo ideale per la trasmissione del sapere. Nelle biblioteche di Toledo v'era una grande quantità di manoscritti musulmani; e la popolazione, che comprendeva cristiani, maomettani ed ebrei, parlava in larga maggioranza l'arabo; il che facilitava il flusso interlinguistico di informazioni. Il carattere cosmopolita dei traduttori che svolgevano la loro attività in Spagna è evidente dal nome di alcuni di essi: Roberto di

Chester, Ermanno Dalmata, Platone di Tivoli, Rodolfo di Bruges, Gerardo da Cremona e Giovanni di Siviglia, quest'ultimo un ebreo convertito. Costoro rappresentano soltanto un numero esiguo fra i molti che a quel tempo in Spagna erano impegnati in progetti di traduzione.

Fra i traduttori attivi in Spagna, il più grande fu forse Gerardo da Cremona (1114-1187). Si era recato in Spagna per imparare l'arabo allo scopo di capire Tolomeo, ma finì per dedicare il resto della sua vita a traduzioni dall'arabo; fra queste la traduzione in latino di una versione riveduta della traduzione araba degli *Elementi* di Euclide che era stata fatta da Thabit ibn-Qurra. La traduzione di Gerardo era molto migliore di quella di Adelardo. Nel 1175 Gerardo tradusse l'*Almagesto*, e fu principalmente attraverso questa traduzione che si diffuse in Occidente la conoscenza di Tolomeo. A Gerardo da Cremona vengono attribuite le traduzioni di oltre ottantacinque opere, ma soltanto quella di Tolomeo è datata; fra le sue opere v'era anche un adattamento in latino dell'*Algebra* di al-Khuwarizmi, sebbene una precedente e più popolare traduzione dell'*Algebra* fosse stata fatta nel 1145 da Roberto di Chester. A questa traduzione, la prima che sia mai stata fatta del trattato di al-Khuwarizmi (così come era stata la prima quella del Corano, fatta pochi anni prima dallo stesso Roberto), può essere fatto risalire l'inizio dell'algebra europea.

Roberto di Chester ritornò in Inghilterra nel 1150, ma in Spagna l'attività di traduzione continuò con la stessa intensità a opera di Gerardo e di altri. Le opere di al-Khuwarizmi riguardavano evidentemente gli argomenti più conosciuti del tempo, e i nomi di Platone di Tivoli e di Giovanni di Siviglia sono associati a ulteriori adattamenti dell'*Algebra*. L'Europa occidentale si dimostrò inaspettatamente molto più aperta verso la matematica araba di quanto lo fosse mai stata verso la geometria greca; la ragione di ciò sta, forse, in parte nel fatto che l'aritmetica e l'algebra arabe erano di livello più elementare di quanto non lo fosse la geometria greca al tempo dei romani.

Tuttavia, i romani non avevano mai dimostrato grande interesse per la trigonometria greca, per quanto fosse utile ed elementare. Gli scienziati latini del XII secolo invece, divorarono la trigonometria araba contenuta in opere astronomiche.

Fu la traduzione dall'arabo di Roberto di Chester che introdusse il termine oggi comune di "seno". Gli indiani avevano dato il nome di jiva a metà della corda in trigonometria, e gli arabi avevano ereditato questo termine trasformandolo in jiba. Nella lingua araba v'è anche la parola jaib, che significa "baia" o "insenatura". Sembra che quando Roberto di Chester si trovò a dover tradurre il termine tecnico jiba, lo abbia confuso con la parola jaib (per il fatto che le vocali nelle lingue semitiche non si scrivono); pertanto ricorse alla parola latina sinus, che significa appunto "baia" o "insenatura". Talvolta veniva usata l'espressione più specifica sinus rectus, ossia "seno verticale", di qui l'espressione sinus uersus, che corrisponde al nostro "seno verso", venne applicata alla "sagitta", ossia al "seno girato sul suo lato".

Durante il periodo di traduzioni del XII secolo e durante il secolo successivo si fece una certa confusione circa il nome di al-Khuwarizmi, confusione che portò all'introduzione del termine "algoritmo", come abbiamo spiegato nel capitolo precedente. Le cifre numeriche indiane erano state spiegate ai lettori latini da Adelardo di Bath e da Giovanni di Siviglia pressappoco nella stessa epoca in cui uno schema di numerazione analogo veniva introdotto fra gli ebrei da Abraham ibn Ezra (1090 circa-1167), autore di libri di astrologia, filosofia e matematica. Come nella cultura bizantina le prime nove cifre alfabetiche greche, con l'aggiunta di un segno speciale per lo zero, avevano sostituito le cifre indiane, così Ibn Ezra usò le prime nove cifre alfabetiche ebraiche e un circoletto come simbolo per lo zero nel sistema posizionale decimale per i numeri interi. Nonostante le numerose descrizioni del sistema numerico arabo, l'abbandono del vecchio sistema numerico romano avvenne molto lentamente; ciò forse perché era abbastanza diffuso il calcolo con l'abaco, e perciò i vantaggi del nuovo sistema non erano così evidenti come nel calcolo con carta e penna soltanto. Per parecchi secoli vi fu una forte competizione tra gli "abacisti" e gli "algoristi", e questi ultimi trionfarono definitivamente soltanto nel XVI secolo.

Viene spesso affermato che nel tardo Medioevo v'erano due gruppi di matematici - quelli attivi nelle scuole ecclesiastiche o nelle università, e quelli impegnati nel commercio e negli scambi - e che fra i due gruppi fossero sorte rivalità.

Questa tesi sembra però avere scarso fondamento; è certo comunque che entrambi i gruppi contribuirono in uguale misura alla diffusione delle cifre Indo-arabiche. Autori di varia estrazione sociale e culturale contribuirono nel XIII secolo a rendere popolare "l'algoritmo". Ne ricorderemo tre in particolare: Alessandro di Villedieu (attivo verso il 1225), un francescano francese; Giovanni di Halifax (1200 circa-1256), noto anche con il nome di Sacrobosco, che era insegnante presso un'università inglese; e Leonardo Pisano (1180 circa-1250), più noto come Fibonacci o "figlio di Bonaccio", che era un mercante italiano. II *Carmen de algorismo* di Alessandro è un poema in cui vengono dettagliatamente descritte le operazioni fondamentali sui numeri interi: in esso viene fatto uso delle cifre Indo-arabiche e lo zero viene trattato come un numero. *L'Algorismus vulgaris del Sacrobosco* era un manualetto pratico di calcolo la cui popolarità fu pari a quella della sua Sphaera, un trattato elementare di astronomia usato nelle università per tutto il tardo Medioevo. II libro in cui Fibonacci descriveva il nuovo algoritmo venne completato nel 1202 e diventò un celebre classico. Esso ha però un titolo inesatto: *Liber abaci*, ossia libro dell'abaco; in realtà non tratta dell'abaco, ma discute in maniera esauriente metodi e problemi algebrici, difendendo decisamente l'uso delle cifre Indo-arabiche.

Il padre di Leonardo era un mercante pisano che aveva affari nell'Africa settentrionale, e il figlio ebbe quindi modo di studiare sotto un maestro musulmano e di viaggiare in Egitto, in Siria e in Grecia; era pertanto naturale che Fibonacci si impregnasse di metodi algebrici arabi, compresi, fortunatamente, il sistema di notazione Indo-arabico e, sfortunatamente, la forma di espressione retorica.

Il *Liber abaci* si apre con un'idea che suona quasi moderna, ma che era caratteristica del pensiero medievale sia islamico sia cristiano: e cioè che l'aritmetica e la geometria fossero connesse tra loro e si rafforzassero l'una con l'altra. Questa idea, naturalmente, ricordava l'Algebra di al-Khuwarizmi, ma veniva ugualmente accettata nella tradizione latina che faceva capo a Boezio. Nondimeno, il *Liber abaci* si interessava più dei numeri che della geometria; esso descriveva dapprima "le nove figure indiane" assieme al segno 0, "che in arabo viene chiamato zefiro". È da Zephirum e dalle sue varianti che sono derivati i nostri termini di "cifra" e "zero". La descrizione del sistema di numerazione Indo-arabica fatta da Fibonacci svolse un ruolo importante nel processo di trasmissione della cultura matematica; non fu però, come abbiamo visto, la prima descrizione del genere, né raggiunse la popolarità di cui godettero quelle posteriori, ma più elementari, di Sacrobosco e di Alessandro di Villedieu.

La sbarretta orizzontale nelle frazioni, per esempio, era usata regolarmente da Fibonacci (ed era nota nel mondo arabo prima di lui), ma fu solo nel XVI secolo che entrò nell'uso generale. (La sbarretta inclinata fu suggerita nel 1845 dal matematico inglese A. De Morgan.). La lettura del *Liber abaci* non è molto appassionante per il lettore moderno: dopo avere spiegato i soliti procedimenti algoritmici o aritmetici, compresa la estrazione di radici, si addentra in problemi relativi a transazioni commerciali, usando un complicato sistema di frazioni nel calcolo di cambi di monete. È una delle ironie della storia il fatto che il principale vantaggio della notazione posizionale ossia, la sua applicabilità alle frazioni - sia sfuggito quasi totalmente a coloro che usarono le cifre Indo-arabiche durante il primo millennio della loro esistenza. Sotto questo aspetto a Fibonacci non meno che agli altri va rimproverato il mancato uso delle frazioni decimali mentre egli usava invece tre tipi di frazioni - comuni, sessagesimali e a numeratore unitario. Di fatto, nel Liber abaci vengono largamente usati i due sistemi peggiori: le frazioni a numeratore unitario e le frazioni comuni. Inoltre vi abbondano problemi banali di questo tipo: se 1 soldo imperiale, che vale 12 danari imperiali, viene venduto per 31 danari pisani, quanti danari pisani si ottengono per 11 danari imperiali? Attraverso l'esposizione di una serie di regole pratiche viene faticosamente trovata la soluzione.

Dall'arte gotica alla geometria proiettiva, attraverso la prospettiva e la geometria analitica

Dal III secolo fino all'XI secolo non si riscontra in Europa alcun risultato significativo sia nell'ambito delle scienze che nella letteratura e nella filosofia. Nel frattempo gli arabi avevano dato una struttura allo studio dell'algebra, i cui risultati si sono conosciuti in Europa dall'XI secolo in poi (periodo della rifioritura economica), per merito principalmente di Leonardo Pisani (1170-1250) detto Fibonacci perché figlio del mercante Bonacci.

Fibonacci era nato a Pisa, ma era stato educato in Africa ed aveva viaggiato in Europa ed in Asia Minore per seguire il padre; ed è durante questi viaggi che aveva racimolato manoscritti che contenevano gran parte dei risultati di algebra ottenuti dagli arabi. Fibonacci era figlio dell'addetto alla dogana di Bogia, in Algeria, dove i Pisani avevano fiorenti traffici commerciali. Per merito del padre, apprese giovanissimo l'abaco alla maniera degli Hindi e le cifre arabe con lo zero, ancora sconosciute in Italia.

A trentadue anni pubblicò la prima edizione del "*Liber Abaci*" *(libro dell'abaco)*: un saggio che rivoluzionava i sistemi di numerazione e un manuale di calcolo mercantile. Colossale trattato che apre all'Occidente i misteri delle nove "figure" indiane e del segno sconosciuto ai greci e ai latini, "quod arabice zephirum appellantur", che indica un numero vuoto come un soffio di vento: zefito appunto, zefr, o zero. In particolare la numerazione indo-arabica, che prese il posto di quella latina semplificando notevolmente i commerci extraeuropei, fu conosciuta in Europa tramite questo libro. In tale sistema di numerazione, il valore delle cifre dipende dal posto che occupano: pertanto egli fu costretto ad introdurre un nuovo simbolo, corrispondente allo zero "0", per indicare le posizioni vacanti.

Del "*Liber Abaci*" venne in possesso Dante Alighieri che era molto attento alla cultura scientifica del suo tempo e da bambino frequentava le lezioni di Pietro Ispano (1220-1277) dove apprende il metodo euristico nella scienza. L'interesse di Dante per la cultura scientifica è, oggi, oggetto di approfondimento da parte degli storici della Matematica che ritengono, dall'analisi dei brani della ***Divina Commedia***, che egli sia stato un buon matematico. Un celebre passo con riferimento all'aritmetica si trova in Par. XV 55-57:

… … … … … … … … … … …
Tu credi che a me tuo pensier mei
da quel ch'è primo, cosi come raia
da l'un, se si conosce, il cinque e'l sei;
… … … … … … … … … … …

Sono le celebri frasi che Cacciaguida rivolge a Dante: "Tu hai ferma convinzione che il tuo pensiero discenda, si riveli direttamente a me da Dio, primo Ente e principio di ogni cosa, così come dalla conoscenza dell'unità deriva quella di tutti gli altri numeri". In tempi moderni si direbbe che, ammessa l'unità, si possono costruire i numeri naturali n, n + 1, intendendo con ciò tutti i numeri. In effetti, la notazione "n", tipica oggi del matematico, intesa ad indicare un numero qualsiasi, è assai più recente; quel "il cinque e'l sei", sta ad indicare numeri generici successivi.

Uno dei più famosi passi matematici di Dante è certo in Par. XXXIII 133-138:

... … … … … … … … …. … …
Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,
tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova;
... … … … … … … … …. … …

che fa riferimento al problema della quadratura del cerchio.

Proseguendo nella ricerca di altri passi a carattere geometrico, troviamo nella "Divina Commedia" paragoni, esempi o parafrasi per le quali, appunto, il campo di riferimento è la geometria, anche quando avrebbe potuto essere qualsiasi altro.

Per esempio, in Par. XIII 88-101 si sta discutendo il problema seguente: c'è contraddizione tra la sapienza perfetta di Adamo e di Cristo, e la sapienza di Salomone?

Riferendosi specificamente ai versi 95-102:...

... … … … … … … … …. … …

el fu re, che chiese senno
acciò che re sufficiente fosse;
non per sapere il numero in che enno
li motor di qua su, o se necesse
con contingente mai necesse fenno;
non, si est dare primum motum esse,
o se del mezzo cerchio far si pote
triangol si ch'un retto non avesse.

... … … … … … … … …. … …

Si tratta di due affermazioni, l'una tratta dalla fisica e l'altra dalla geometria:

- è possibile che vi sia un moto primo, cioè a sua volta non causato da un altro moto;
- è possibile che esista un triangolo inscritto in una semicirconferenza ma non rettangolo.

Ebbene, Dante le prende come esempi palesi di qualche cosa di falso perché contraddicono alla modalità della necessità logica:

- se c'è un moto, allora c'è anche necessariamente qualche cosa che l'ha generato, una causa;
- se un triangolo è inscritto in una semicirconferenza, allora necessariamente quel triangolo è rettangolo cioè ha un angolo retto.

Siamo ormai nel **XIII secolo**; da questo momento (e nei tre secoli successivi) l'interesse dei matematici è rivolto principalmente all'Architettura ed all'arte.

Il fondamento teorico dell'arte pittorica è universalmente considerato la ***Prospettiva***, dal termine latino ***perspectiva*** (ottica). Il metodo della ***Prospettiva***, in geometria, rientra tra quelli usati per rappresentare figure dello spazio sopra un piano.

Già in un'opera del XII secolo, tradotta dall'arabo in latino da ***Gherardo da Cremona*** (1114, 1187), ma pubblicata da ***Pietro Rama*** (1515, 1572) nel 1572, si incontra per la prima volta l'idea (in seguito ammessa da tutti) che "*da ogni punto di un corpo illuminato si dipartano raggi in tutte le direzioni, sicchè l'occhio dell'osservatore (la cui pupilla diventa centro di un cono prospettico) è centro di una stella di raggi diretti a tutti i punti dell'oggetto osservato*".

Immaginando, poi, che fra l'occhio e l'oggetto contemplato venga interposta una superficie trasparente (*quadro*) dove si individuano i punti in cui essa interseca ogni raggio luminoso, si vedrà sul quadro un insieme di punti che produrrà sull'osservatore la stessa impressione dell'oggetto considerato: questa è la ***prospettiva*** che è, dunque, "*l'arte di rappresentare gli oggetti sopra un quadro in modo da conservarne l'aspetto esteriore*" e costituisce il fondamento teorico dell'arte pittorica.

Dopo gli Arabi, l'ottica e la prospettiva nel Medioevo

I pittori, grazie ad un incontro proficuo tra l'arte, la matematica e l'ottica geometrica, trovano un nuovo modo di rappresentare la realtà attraverso la pittura e inventano la prospettiva.

Le opere arabe stimolarono l'interesse per l'ottica:

Roberto di Lincoln, Grossatesta (1175-1253): De luce; Ruggero Bacone (1214-1294): Scientia perspectiva; Giovanni Peckham (1242-1292) detto "Magister perspectivae": scrisse Perspectiva communis.

Parallelamente molti pittori si impegnarono nell'elaborazione di regole pratiche per una rappresentazione verosimile della realtà, in una prima fase attraverso la ricerca empirica. In particolare: Duccio di Boninsegna, Giotto da Bondone (1266-1337), Ambrogio Lorenzetti (attivo tra il 1319 e il 1348).

Nel XIII secolo, con l'***Architettura gotica***, si incomincia ad intravedere un principio di rappresentazione più rigorosamente razionale; *il problema principale che poneva l'Architettura gotica era quello di ottenere la massima luminosità possibile e la massima ampiezza degli ambienti con il minimo ingombro delle masse murarie e delle strutture.*

Con l'architettura gotica si è accentuato maggiormente il verticalismo e lo spazio è stato configurato in forma indefinita, in modo da offrire, attraverso la complessità delle piante a più navate con cappelle radicali, *prospettive sempre più mutevoli* sotto la varia azione della luce, spesso filtrante attraverso le vetrate colorate. Quindi, la cattedrale gotica, intorno alla quale fiorirono generazioni di costruttori e decoratori, risultò così un edificio estremamente logico nel quale sono in rilievo tutte le parti aventi reale funzione statica, quasi un fascio di forze senza materie inerte. Carattere gotico ebbero le abbazie di Fossanova e di Casamari, la chiesa dei Servi a Bologna e il San Francesco d'Assisi.

Il primo passo per il superamento della concezione medioevale si riscontra nelle opere di ***Giotto*** (Colle di Vespignano, 1266 - Firenze, 1337), di ***Duccio di Buoninsegna*** (di cui si ignora l'anno di nascita, ma dalle sue opere si evince il periodo di lavoro, a Siena, tra il 1278 ed il 1318 circa) e, qualche decennio più tardi, nelle opere di ***Ambrogio Lorenzetti*** (si ignora la nascita, ma si pensa che sia morto a Firenze o a Siena durante la peste del 1348), in cui è evidente *la ricerca per definire lo spazio contenente i vari elementi della rappresentazione*. **Inizio del XIV secolo: L'annunciazione** (Fig.1)

Con Duccio di Boninsegna c'è la chiara volontà di rappresentare lo spazio in tre dimensioni. Tuttavia alcune regole base della prospettiva non sono ancora considerate. Con Duccio siamo però ancora nella fase della perspectiva naturalis (o communis).

Giotto è un grande interprete della perspectiva naturalis. La sua ricerca della profondità non è però basata su metodi rigorosi (Fig. 2 - affreschi di Giotto nella Basilica di San Francesco)

Ma l'adozione di un preciso metodo di *prospettiva lineare geometrica* risale all'inizio del 1400 con il fiorentino ***Filippo***

Brunelleschi. (Firenze, 1377-1446), che per primo fissò le norme della ***Prospettiva*** ed aprì un'era nuova che simboleggiava l'inizio dell'età del Rinascimento. La prospettiva matematica (o lineare), consente di correlare tutte le parti della composizione artistica entro rapporti e proporzioni reciproche, all'apparenza perfettamente rispondenti alla visione effettiva. Gli artisti rinascimentali, come i navigatori e gli esploratori loro contemporanei, erano mossi da spirito d'avventura e desiderio di conoscenza: essi iniziano a pensare alla loro opera come a un osservatorio privilegiato sul mondo, che deve dunque essere raffigurato con rigore realistico. Così, ad esempio, la rappresentazione del paesaggio, incentrata nella pittura precedente sulla precisa descrizione di singoli elementi (alberi, fiori, piante, animali, costruzioni) considerati a sé stanti, da luogo a vedute articolate ma armoniche, in cui oggetti e personaggi sono coordinati tra loro dalle leggi della prospettiva. Le prime opere del Brunelleschi, intorno al 1400 circa, non lasciavano prevedere la rivoluzione che avrebbe poi messo in atto, in quanto queste opere si mantengono ancora nell'ambito della tradizione gotica, come si evince dai busti e dalle statue d'argento per l'altare di San Jacopo, nel Duomo di Pistoia, eseguiti intorno al 1400. La prima immagine prospettica di cui si abbia notizia, venne realizzata da Filippo Brunelleschi durante i lavori di costruzione della cupola di S. Maria Novella da lui stesso progettata. Brunelleschi riprodusse dal vero, su una tavola di legno, scegliendo un punto di osservazione fisso, la piazza del Battistero di fronte all'ingresso principale della chiesa, i cronisti dell'epoca riferiscono che l'effetto illusionistico ottenuto era perfetto. Di questa tavoletta non è rimasta traccia. A lui si devono anche il ritorno agli ordini classici e la nuova misura razionale dello spazio che divennero caratteri tipici delle arti rinascimentali. Il suo capolavoro, l'enorme cupola ottagonale del Duomo di Firenze (iniziata nel 1436), è considerata una delle più grandiose realizzazioni in campo artistico e ingegneristico di tutti i tempi.

Il primo esempio di rappresentazione pittorica prospetticamente corretta di cui c'è rimasta testimonianza è l'affresco della Trinità di Masaccio (Fig. 3), nella chiesa di S. Maria Novella di Firenze.

Questo famoso affresco venne eseguito nel periodo in cui Filippo Brunelleschi guidava i lavori della cupola e realizzava i primi esperimenti sulla prospettiva.

È col Crocefisso di Santa Maria Novella che si incomincia a intravedere un'opera nuova per le perfette proporzioni e per la simmetrica distribuzione delle parti, perché in quel periodo il Brunelleschi ricercava il mezzo per rendere oggettivamente rappresentabili (e quindi razionalmente conoscibili) i corpi dello spazio: questo mezzo lo trovò nella ***Prospettiva*** (la prova è nelle *vedute prospettiche* del S. Giovanni e di Palazzo Vecchio) di cui fissò le norme.

Proseguendo nella direzione indicata da Masaccio, anche Paolo Uccello e Mantenga furono particolarmente attenti alle potenzialità pittoriche della prospettiva lineare. Capolavori di Paolo Uccello sono le tre scene della Battaglia di San Romano realizzate negli anni compresi tra il 1456 e il 1460, commissionate da Cosimo de' Medici per celebrare la vittoria dei fiorentini sui senesi (1432). Capolavoro del Mantegna il Cristo morto (dipinto intorno al 1480) e la decorazione a fresco della Camera degli Sposi (1465-1474), che interessa pareti e soffitto, senza soluzione di continuità, e che elimina illusionisticamente il confine tra architettura e rappresentazione pittorica.

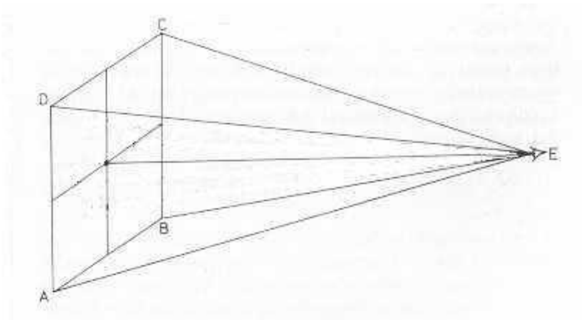
Leon Battista Alberti e la prospettiva del Rinascimento

Considerato nella sua interezza, lo sviluppo dell'arte rinascimentale comprende il periodo storico tra il XV e il XVI secolo. I principi base di questa "rinascita", descritta e celebrata da Giorgio Vasari nelle sue *Vite* (1550), furono il ritorno alle forme classiche originarie dell'antica Roma, l'adozione di un metodo "sperimentale" nello studio della natura e la rivendicazione dell'individuo come misura e centro dell'universo.

Sulla stessa linea del Brunelleschi si è espresso ***Leon Battista Alberti*** (Genova 1404 circa - 1472) che ha anche dedicato al Brunelleschi il suo trattato "***De pictura***" in cui scrisse che *nell'arte fiorentina di quegli anni si intravedeva già il* *superamento delle opere dell'antichità*. Il suo pensiero si basa sulla concezione della Prospettiva brunelleschiana, che ha riproposto in modo più chiaro e preciso, sfruttando anche le conoscenze matematiche e filosofiche, come si evince dalla grande opera architettonica "***Il Tempio malatestiano di Rimini***".

A differenza del Brunelleschi che seguiva passo passo le opere che aveva progettato, l'Alberti, convinto che l'architetto non avesse un compito artigianale, affidava ad altri la realizzazione dei suoi disegni e dei suoi progetti.

Leon Battista Alberti scrisse il breve trattato *De Pictura*, in cui fissava quelli che erano i primi fondamenti matematici della costruzione prospettica. Egli concepisce la visione come una figura piramidale nel cui vertice si trova l'occhio e i cui lati sono formati dalle linee che partono dai contorni dell'oggetto guardato (vedi figura).



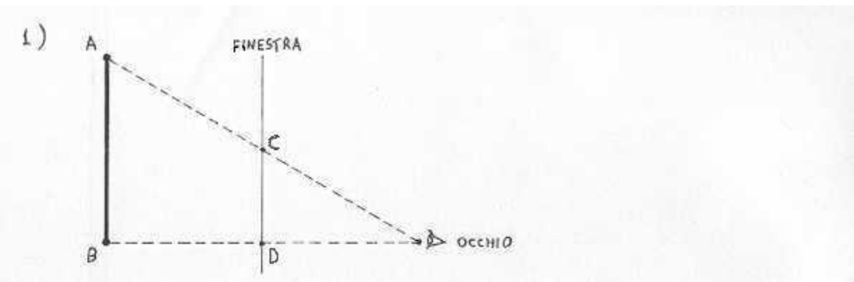
Piramide dell'Alberti. Il vertice della piramide è l'occhio che guarda la superficie di un quadrato

Secondo questa immagine geometrica il dipinto su cui riportare l'immagine è come una finestra che si trova tra l'occhio e l'oggetto osservato e sulla cui superficie è possibile riportare l'immagine stessa dell'oggetto. È evidente che se questo oggetto si allontana dall'occhio la sua immagine riportata sulla finestra sarà più piccola.

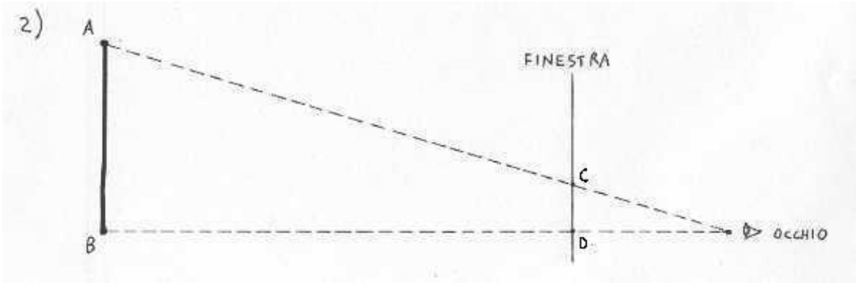
Leon Battista Alberti diffuse, tra i pittori del proprio tempo, il procedimento (forse già noto agli antichi egiziani) che consiste nell'usare un reticolato a maglie quadrate per riprodurre in altra scala un dato disegno; è un procedimento fondato sul concetto di *similitudine* ed in cui si può individuare un primo approccio alla *geometria analitica* ed alla *geometria proiettiva* che si svilupperà due secoli più tardi.

L'ingegno e la cultura dell'Alberti si manifestano anche nelle opere letterarie e pedagogiche; egli si può definire *il letterato dell'arte del XV secolo*, quasi in contrapposizione ad un altro grande artista dello stesso periodo, ***Piero della Francesca*** (Arezzo, 1415 circa - 1492), che rappresenta invece *il matematico dell'arte del XV secolo*, tanto che Giorgio Vasari (1511-1574) nelle "*Vite dei più eccellenti scultori, pittori ed architettori*", scrisse che "*Piero non si ritrasse mai dalle matematiche nelle quali era stato tenuto maestro raro, tanto che i libri meritatamente gli hanno acquistato nome del miglior geometra che fusse nei tempi suoi*". Nel decennio 1470-1480, Piero della Francesca scrisse un trattato completo di Prospettiva "*De perspectiva pingendi*" dove, applicando il concetto *albertiano* di "*prospettiva di un corpo*", si servì di alcuni procedimenti che soltanto nell'odierna geometria descrittiva trovano il loro completo svolgimento e per primo sfruttò, per tracciare la prospettiva di un solido limitato da una superficie curva, le corrispondenti sezioni di una conveniente serie di sezioni piane; di conseguenza, prima che venisse stabilito e percepito il concetto di *inviluppo di una famiglia di linee piane*, vide che tutte le curve così nascenti sono tangenti ad una determinata linea, che è la proiezione del contorno della superficie considerata.

Profondo conoscitore dell'ottica e della geometria, partendo dalle leggi sull'ottica di Euclide (grande matematico dell'antica Grecia), studiò il fenomeno secondo il quale la dimensione degli oggetti riportati sulla finestra Albertiana diminuivano con l'aumentare della distanza dal punto di vista da cui si guardavano. Definì pertanto le leggi proporzionali secondo cui avveniva questo rimpicciolimento con il mutare della distanza (vedi le figure sotto).

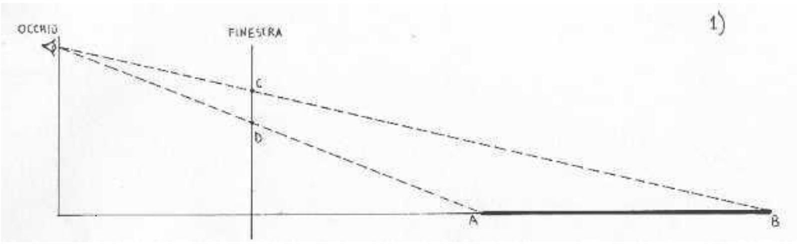


AB rappresenta un oggetto (una linea) visto dall'occhio attraverso la finestra che rappresenta il dipinto, CD è l'immagine dell'oggetto AB riportata sulla finestra

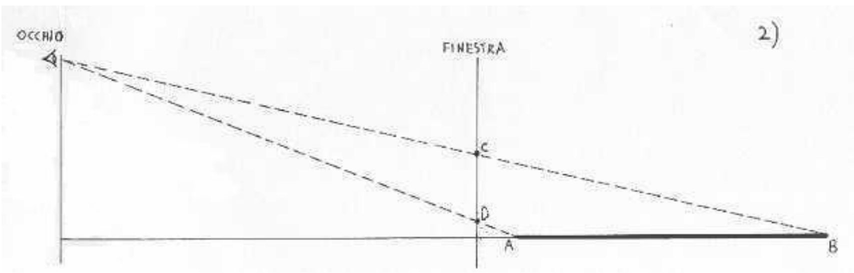


Allontanando l'oggetto di una distanza due volte maggiore dall'occhio, mantenendo però la finestra sempre alla stessa distanza dal punto di osservazione, si noterà che l'immagine CD di AB sulla finetra sarà rimpicciolita della metà rispetto a alla situazione precedente. Se provassimo a triplicare la distanza tra l'occhio e AB, l'immagine CD risulterebbe tre volte più piccola.

Piero della Francesca indagò su altre relazioni di proporzionalità legate ai cambiamenti dei punti di vista e delle distanze. Nell'esempio precedente il punto di vista è al livello del suolo, Piero della Francesca studiò anche i punti di vista rialzati rispetto al suolo e anche lì scoprì l'esistenza di relazioni di proporzionalità. Uno dei casi più importanti che studiò fu quello di un punto di vista rialzato rispetto alla linea del suolo che, attraverso la finestra del dipinto, vede una linea distesa a terra (vedi figure sotto).



In questo caso l'occhio è sollevato rispetto al suolo e vede una linea AB distesa a terra, l'immagine CD che si formerà sulla finestra del dipinto sarà di una certa grandezza.

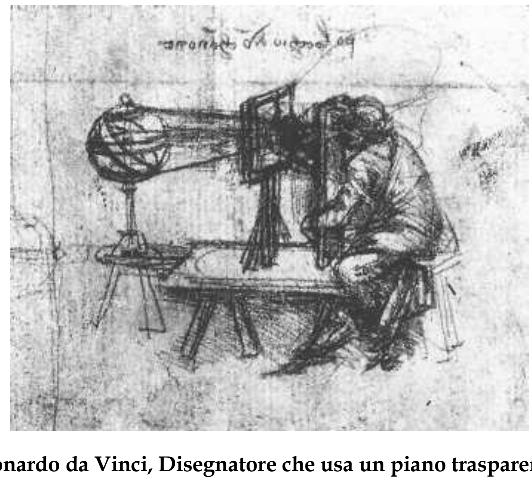


Piero della Francesca scoprì che allontanando la finestra del dipinto in direzione della linea AB ad una distanza doppia dal punto di vista, l'immagine CD della linea distesa che si formava sulla finestra raddoppiava di grandezza.

Quelli appena esposti, costituiscono alcuni degli elementi di base di una complessa elaborazione geometrica che portò Piero della Francesca a maturare, grazie alla sua profonda conoscenza delle arti matematiche, una serie di tecniche che gli permisero di realizzare disegni prospettivamente corretti di qualsiasi tipo di figura e da qualsiasi punto di vista. Il suo trattato *De Prospectiva Pingendi*, divenne un punto di riferimento teorico e pratico per tutti i pittori che dopo di lui avrebbero applicato le leggi della prospettiva per la costruzione di uno spazio pittorico che desse illusione di profondità.

In questo gruppo di eminenti *pittori-geometri* italiani emerge, poi, ***Leonardo da Vinci*** (Firenze, 1452-1519) anch'egli convinto all'idea che la pittura deve avere un fondamento scientifico come si evince nel capitolo VII della sua opera *Trattato della pittura*, in cui così si esprime: *quelli che si innamorano della pratica senza la diligenza (la scienza) sono come i nocchieri che entrano in mare sopra nave senza timone o bussola, che mai non hanno certezza dove si vadino*.

Leonardo da Vinci dedicò uno spazio notevole, tra i suoi molteplici interessi, allo studio dei fenomeni legati alla luce e alla visione. Aveva appreso pienamente la lezione della prospettiva, ed egli stesso inventò nuove tecniche per la costruzione dello spazio prospettico nella pittura, inventò anche degli strumenti per facilitare il lavoro anche a chi non conosceva la matematica necessaria per potere applicare le tecniche di Piero della Francesca e dei prospettici. Leonardo usava uno strumento analogo a quello raffigurato nella figura seguente, ma di di-



Leonardo da Vinci, Disegnatore che usa un piano trasparente.

mensioni maggiori, per riprodurre le diverse pose del corpo. Si trattava di un telaio sul quale era fissato un piano trasparente. Il pittore riproduceva sulla superficie trasparente gli oggetti, le persone o i paesaggi che venivano incorniciati dalla finestra, ponendosi da un lato del piano assumendo un punto di vista fisso che una volta scelto non doveva cambiare mai.

Per Leonardo la prospettiva non si fonda soltanto su dimostrazioni, ma anche su accurate valutazioni quantitative del mondo naturale.

La prospettiva lineare si fonda essenzialmente sul gioco sistematico di tre variabili: l'occhio, il piano dell'immagine e l'oggetto. Si può:

1. muovere l'oggetto, tenendo fermi l'occhio e il piano dell'immagine;
2. muovere il piano dell'immagine, tenendo fermi l'occhio e l'oggetto;
3. muovere l'occhio, tenendo fermi il piano dell'immagine e l'oggetto.

La legge della prospettiva lineare, secondo la quale la dimensione è inversamente proporzionale alla distanza, vale in situazioni in cui il piano dell'immagine e il piano dell'oggetto siano paralleli. La sua analisi sistematica delle relazioni esistenti tra occhio, piano dell'immagine e oggetto si estende alla prospettiva del colore, e all'evanescenza dell'oggetto al crescere della distanza << perdimento>>. Per Leonardo la prospettiva lineare è molto più di un sistema per prendere nota degli oggetti del mondo naturale: è anche uno strumento di cui egli si serve per raffigurarli nelle tre dimensioni, a vari livelli di astrazione. In questa accezione la prospettiva contribuisce a creare una gamma di possibilità che vanno dalla concretezza del mondo naturale all'astrazio-ne della matematica.

L'uso che Leonardo fa della prospettiva ai fini della visualizzazione di vari livelli di astrazione è interpretabile in termini di un programma triplice. Primo, la prospettiva serve a creare un ponte visivo tra l'oggetto organico e il suo equivalente geometrico astratto. Secondo, consente di rappresentare tridimensionalmente le figure geometriche, colmando il divario tra geometria e mondo naturale. Terzo, contribuisce a visualizzare nelle tre dimensioni concetti naturali invisibili, come la forza del vento o la concentrazione del calore.

Secondo il Vasari, Piero della Francesca e Leonardo da Vinci erano due personalità antitetiche: da un lato un Leonardo tanto "*mirabile e celeste*" quanto "*vario ed instabile*" che passa dagli affreschi agli specchi, dalle macchine all'anatomia; dall'altra invece un Piero razionale, sistematico, che *costruisce teorema dopo teorema, problema dopo problema i molti libri scritti* in cui lo stile è molto vicino a quello usato da Euclide.

Ed è sulla scia di Piero della Francesca che nel XVI secolo la prospettiva è passata dalle mani degli artisti a quelle degli scienziati grazie principalmente ai lavori di un eminente commentatore, ***Federico Commandino*** (Urbino, 1509-1575) che, in un suo trattato di *Prospettiva lineare* scritto con l'intento di stabilire i principi su cui si basa il metodo di proiezione dovuto all'astronomo greco Claudio Tolomeo (II sec. d.C.) e che oggi chiamiamo "*proiezione stereografica*", suppone di riferire tutte le figure considerate a due piani fra loro ortogonali, l'orizzontale e il verticale (con il linguaggio degli architetti la *pianta* e l'*alzato*) e di assumere per quadro un piano perpendicolare ad entrambi e per punto di vista un punto situato sopra il piano verticale; egli poi immagina che il quadro venga ribaltato sopra il piano verticale mediante rotazione attorno alla sua intersezione col piano stesso, in modo da fissare anche gli elementi uniti: *è questa una prima idea di composizione di due operazioni di prospettiva che, con lo sviluppo della geometria proiettiva, condurrà al concetto di omologia*.

Contributo alla Prospettiva degli artisti stranieri

Nel frattempo, l'insegnamento dei grandi artisti italiani, da Brunelleschi all'Alberti, da Piero della Francesca a Leonardo da Vinci, fu assimilato anche da altri pittori non italiani di cui un posto di particolare rilievo, nella storia della matematica, spetta sicuramente al tedesco *Dürer* (1471-1528) che, nel suo paese, ha insegnato molte cose relative alla Prospettiva, probabilmente imparate da Piero della Francesca durante un lungo soggiorno da lui fatto in Italia.

La diffusione della prospettiva nell'Europa centro-settentrionale fu favorita da ***Albrecht Dürer*** (1471-1528) che fu a lungo in contatto con gli ambienti veneziano e bolognese. Nel 1525 Dürer pubblicò Institutionum geometricarum Libriquatuor. Egli espose alcune costruzioni di poligoni regolari, le tecniche di rappresentazione prospettica di poliedri e i loro sviluppi piani. Affermò che la struttura prospettica di un quadro non deve essere disegnata a mano libera, ma ricavata con procedimenti matematici.

Il contributo di belgi ed olandesi alla Prospettiva è stato dato principalmente dalle opere di alcuni matematici di cui i più significativi sono ***Simone Stevin*** (Bruges 1548-Aja 1620) e ***Francesco D'Aguillon*** (Bruxelles 1566-Anversa 1617), anche se già all'inizio del XV secolo il pittore olandese, ***Giovanni Van Dick,*** (Maastricht 1385-Bruges 1440) aveva dimostrato di conoscere e di usare il *punto di fuga* di un sistema di rette parallele fra loro, ma gli altri pittori olandesi ne appresero l'esistenza soltanto due secoli dopo da scrittori italiani di Prospettiva.

Il belga Francesco D'Aguillon si è ispirato nelle sue opere ad un allievo del Commandino, ***Guido Ubaldo del Marchesi del Monte*** (Pesaro 1545-1607) autore del trattato "*Prospettiva*", scritto nel più puro stile euclideo e quindi a ragione considerata *una delle opere classiche della letteratura matematica*. Nel suo lavoro, il *del Monte* ha dimostrato che *la prospettiva di un sistema di rette parallele è un fascio di rette concorrenti*, fatto questo che era stato empiricamente constatato, ma la cui spiegazione razionale non era stata neppure tentata; in seguito, sarà la *geometria proiettiva ad utilizzare la trasformazione di un punto improprio (fascio di rette parallele) in un punto proprio (intersezione di rette concorrenti)* per caratterizzare alcune trasformazioni proiettive. Inoltre, il *del Monte* ha considerato anche alcuni casi del problema inverso della Prospettiva, come il *costruire un punto di cui si conosce la prospettiva*, o anche *determinare la posizione dell'occhio conoscendo due rette di cui una sia prospettiva dell'altra*.

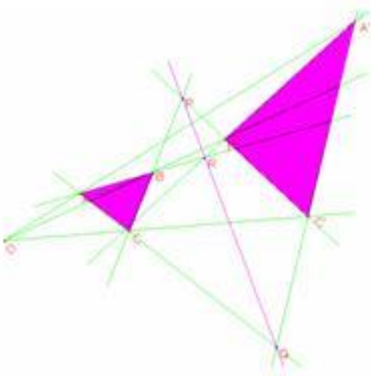
In Francia va ricordato il pittore e scultore ***Giovanni Cousin*** (1500-1590) che nel suo trattato "*Il livre de Pourtraiture*" applica alla ricerca della rappresentazione prospettica di un solido, l'artificio del mutamento del piano verticale di proiezione.

Ed è proprio in Francia, che alcuni decenni dopo, si delineano nuovi orizzonti per la geometria. In particolare, è considerato il padre del metodo generale per la *geometria descrittiva* ed il precursore della *geometria proiettiva* il matematico francese ***Girard Desargues*** (1591-1661) che, facendo uso del *metodo delle coordinate* nel periodo in cui si stava sviluppando la *geometria analitica* ad opera di ***Renè Descartes*** (1596-1650) e di ***Pierre de Fermat*** (1601-1675), suggeriva un nuovo metodo di costruzione basato sul seguente concetto: *Una figura qualsivoglia è determinata completamente nello spazio quando di ogni suo punto si conoscono le distanze dalle facce di un triedro trirettangolo (di cui in seguito indicheremo gli spigoli con OX, OY, OZ); analogamente dicasi per una figura piana; in un caso e nell'altro di tutti i punti della figura considerata si hanno le coordinate cartesiane ortogonali. Ora è noto che quando di un punto P si conoscono tali coordinate* (dai risultati di Fermat e Cartesio) *per costruirlo si porta sull'asse OX un segmento uguale alla data ascissa; poi dall'estremo del risultante segmento si conduce un segmento parallelo ad OY ed uguale alla seconda delle date coordinate; da ultimo dall'estremo di questo nuovo segmento se ne conduce uno parallelo a OZ ed uguale all'ultima delle stesse coordinate: il suo estremo sarà appunto P.*

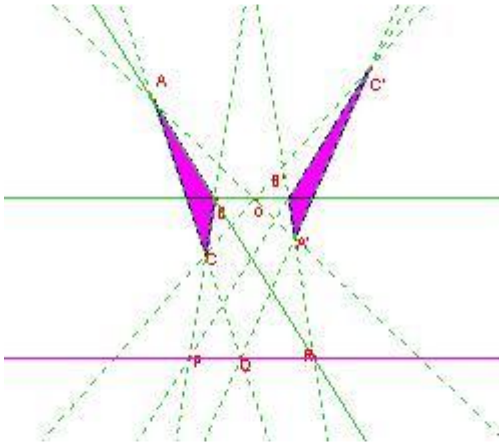
È questa la rappresentazione del metodo analitico che è alla base anche del concetto di *assonometria*.

Il Desargues completò la sua trattazione con un lavoro del 1639 in cui inaugurava il *Metodo delle proiezioni centrali*, che introduceva per la prima volta il concetto di *punto all'infinito*, mettendo le basi allo sviluppo della *geometria proiettiva*, cioè, *quella disciplina che studia le proprietà delle figure che non si alterano per proiezione* e *sezione*.

Il teorema noto come teorema di Desargues, mette in relazione due concetti: se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, allora sono in prospettiva anche rispetto ad una retta; o anche, se due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto, e se le parti dei lati corrispondenti si intersecano, allora i tre punti di intersezione sono allineati. La figura mostra due triangoli che soddisfano il teorema di Desargues.



Se due triangoli stanno in prospettiva rispetto ad una retta e se ciascuna coppia di vertici corrispondenti sono uniti per rette che si intersecano, i triangoli sono in prospettiva rispetto al punto di intersezione delle tre rette. Questo mostra un’altra configurazione del teorema di Desargues.



Ricordiamo che due triangoli sono in prospettiva rispetto ad un punto se le rette che uniscono i punti sono concorrenti. Si dice anche che due triangoli sono in prospettiva rispetto ad una retta se le coppie formate per rette corrispondenti si tagliano in punti allineati.

Ed è nella *geometria proiettiva* che è messa in risalto l'importanza dei *punti all'infinito* e l'analogia tra *punti* e *rette* espressa dal *principio di dualità*.

Contemporaneamente a parecchi matematici europei si deve l’impulso dato a settori particolari della geometria analitica a ***Renè Descartes***. In Cartesio, questo il nome comune, matematica e filosofia,classicamente antitetiche, sono intimamente connesse. La spiegazione e la conferma di ciò si ritrova nella regola espressa nel celebre *Discours de la méthode* (1637) è quindi: “Non ammettere come vero nulla che non si sia riconosciuto con evidenza per tale: cioè evitare la precipitazione e la prevenzione”. L'evidenza implica chiarezza e distinzione, cioè presenza allo spirito di una percezione e sua separazione da ogni altra. I termini che intervengono nell'evidenza sono quindi l'esperienza nella sua trasparenza e la libertà, come capacità dello spirito di separare la percezione da ogni altra. Connesso con il criterio dell'evidenza è l'esercizio metodico del dubbio, per il quale l'“io” decide di considerare come false tutte quelle verità che non siano state dimostrate senz'ombra di dubbio. Di grande rilievo è stato l'apporto di Cartesio alla geometria, in cui si propose di superare l'insufficienza dei Greci che affrontavano i problemi con procedimenti diversi caso per caso, senza un criterio sicuro per affrontare quelli nuovi. A questo scopo egli, fondando la moderna geometria analitica, comincia innanzitutto col l'introdurre simboli algebrici denotando segmenti di retta mediante lettere e formando di queste prodotti e potenze, senza preoccuparsi della loro interpretazione geometrica. Per la soluzione dei problemi geometrici egli applica poi il metodo analitico; suppone cioè il problema come risolto e trascrive le relazioni implicite fra le grandezze mediante equazioni.

L'introduzione dell'uso sistematico degli assi cartesiani permise di rappresentare entità di spazio geometrico con coppie di numeri reali.

La nascita della matematica moderna

La nascita della matematica moderna si suole far coincidere con l'affermarsi delle idee dei grandi algebristi italiani del Cinquecento, personaggi estrosi e bizzarri, rapidi a risolvere equazioni, ma altrettanto rapidi a sguainare la spada e a duellare. La storia dell'algebra ha inizio tuttavia nelle civiltà dell'antico Egitto e di Babilonia. Nel XII secolo il matematico persiano ***Omar Khayyam*** generalizzò i metodi di estrazione delle radici quadrate e cubiche alle radici di indice superiore. In algebra, ***Al-Karaji*** perfezionò l'algebra dei polinomi di ***Muhammad Al-Khwarizmi***, introducendo anche lo studio dei polinomi costituiti da infiniti termini; tra l'altro, proprio dal nome di Al-Khwarizmi deriva il termine algoritmo, e dal titolo di uno dei suoi libri è tratto il termine algebra. Alcuni geometri, tra cui ***Ibrahim Ibn Sinan***, continuarono le ricerche di Archimede sulle aree e sui volumi e ***Kamal Al-Din*** e altri applicarono la teoria delle coniche per risolvere problemi di ottica. Dalla funzione seno definita dagli indiani (vedi Trigonometria) e dal teorema di Menelao, i matematici, da ***Habas Al-Hasib a Nasir Ad-Din at-Tusi,*** crearono le discipline matematiche della trigonometria sferica e della trigonometria piana.

Alcuni matematici islamici ottennero risultati di rilievo nel campo della teoria dei numeri, mentre altri illustrarono diversi metodi numerici di risoluzione delle equazioni. L'Occidente latino acquisì gran parte di queste conoscenze nel corso del XII secolo, il secolo delle grandi traduzioni, e ciò permise il rapido sviluppo della matematica che segnò il corso del tardo Medioevo. Nel periodo tardo-medievale alcuni autori, ad esempio ***Nicole Oresme***, fecero interessanti considerazioni sul problema dell'infinito in matematica.

All'inizio del XIII secolo, ***Leonardo Fibonacci*** ottenne soluzioni matematiche, probabilmente sfruttando un metodo di approssimazioni successive di origini islamiche. Sempre in questo secolo fu elaborata una formula algebrica per la soluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, dal matematico italiano Gerolamo Cardano nella sua Ars Magna. Quest'opera attirò l'attenzione dei matematici sui numeri complessi e stimolò la ricerca delle soluzioni per le equazioni di grado superiore al quarto.

Spettò poi all'allievo di Cardano, ***Ludovico Ferrari***, il merito di aver determinato una soluzione esatta valida per le equazioni di quarto grado e, nei secoli che seguirono, l'obiettivo dei più grandi matematici fu rivolto alla ricerca di una formula generale che fornisse le radici delle equazioni di grado superiore o uguale al quinto.

Una curiosità: Gerolamo Cardaro (1501-1576), medico di gran fama venne a conoscenza del metodo per la risoluzione delle equazione di terzo grado da Nicolò Tartaglia (1500- 1557) ma gli promise di non divulgarla...invece non seppe mantenere questo segreto e ne divulgò il metodo fregando a Tartaglia il gusto delle pubblicazione, ma riconoscendone onestamente la paternità!
Nello stesso periodo Scipione del Ferro (1465- 1526) , professore di matematica a Bologna, scopri il metodo per la risoluzione delle equazioni di terzo grado, egli non pubblicò la soluzione ma prima di morire la rivelò ad un suo studente Antonio Maria Fior, un mediocre matematico che fece circolare la voce della scoperta mantenendo il segreto.

Quando si diffuse tale notizia fu organizzata una gara matematica fra Tartaglia e Fior, ciascuno dei due proponeva all'altro trenta questioni da risolvere entro un intervallo di tempo stabilito.

Quando arrivò il giorno della decisione, Tartaglia aveva risolto tutte le questione e invece Fior neppure una.

La notizia della vittoria di Tartaglia raggiunse Cardaro, che subito invitò il vincitore a casa sua con la promessa di fargli conoscere un probabile mecenate (Tartaglia era povero e aveva un difetto di parola essendo stato ferito da piccolo alla bocca da una baionetta).

Un importante sviluppo dell'algebra del XVI secolo fu l'introduzione dei simboli per indicare le incognite, le potenze algebriche e le operazioni; infatti il

Libro III della *Géometrie* (1637), del filosofo e matematico francese ***René Descartes***(1596-1650), noto comunemente come Cartesio, assomiglia a un moderno testo di algebra molto più delle opere precedenti. Il contributo più significativo che vi è riportato è l'introduzione della geometria analitica, per mezzo della quale è possibile la risoluzione di problemi geometrici in termini algebrici e, contemporaneamente, la rappresentazione geometrica di problemi di carattere algebrico. Il testo di geometria conteneva comunque anche gli elementi essenziali di un corso sulla teoria delle equazioni, inclusa la cosiddetta regola dei segni, che permette di determinare il numero delle radici positive e negative di un'equazione assegnata. Egli inoltre sviluppò come detto il sistema di coordinate per la rappresentazione grafica delle equazioni e per la visualizzazione della dimensione degli spazi.

Secondo Cartesio un ente geometrico può identificare insiemi algebrici diversi se definito su ipotesi diverse. Analizziamo le due seguenti affermazioni:

1. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta **r** e l'insieme **x** dei numeri reali che – fissato u punto **O**(origine) ed u punto **U** (unità) – associa ad ogni punto **P** un numero reale **;** viceversa**,** ad ogni numero reale **x** corrisponde un solo punto della retta **r**.*
2. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti di una retta **r** e l'insieme **x** delle coppie di numeri reali soluzioni di una equazione di I° a due incognite, tale che ad ogni punto corrisponde una coppia: viceversa, ogni coppia è corrispondente di un unico punto di **r.***

Osserviamo che la prima affermazione individua la retta **r** con l'insieme **R** dei numeri reali, mentre la seconda individua la retta **r** come sottoinsieme **IR$^{2.}$.** Pertanto, nel primo caso la retta rappresenta lo spazio euclideo unidimensionale dotato di riferimento cartesiano **Ox**, nel secondo caso, invece, la retta **r** rappresenta un iperpiano di uno spazio bidimensionale(cioè, il piano munito di riferimento cartesiano **Oxy.**

La differenza tra i due modi esposti si può evidenziare mostrando che non è possibile visualizzare la corrispondenza biunivoca tra i punti di un piano e l'insieme di **R** con un procedimento analogo a quello utilizzato per la retta. Infatti, si può osservare che, fissato nel piano l'origine **O** ed un punto **U** (unità), possiamo associare ad ogni punto **P** un solo numero reale; viceversa, però, ogni numero reale è il corrispondente degli infiniti punti del piano di una circonferenza di centro **O** e raggio **x**. Pertanto, il problema di individuare i punti del piano come enti algebrici è stato risolto tracciando rette per **O**; in tal modo si introduce il riferimento cartesiano **Oxy** che stabilisce la corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie (**x,y**). Tale corrispondenza caratterizza il piano come ente geometrico bidimensionale, allo steso modo in cui la proprietà 1) caratterizza la retta come spazio unidimensionale.

L'importanza della geometria analitica provocò una lunga disputa fra Cartesio che considerava la geometria analitica un fondamento assoluto, superiore a qualsiasi dubbio, ed il francese *Pierre Fermat* (1601-1662) il quale vedeva la geometria analitica come un metodo per dare forma algebrica.

Pierre Fermat espose nella memoria *Ad locos planos et solidos isagoge*, anteriore al 1637, i fondamenti della geometria analitica e il metodo delle coordinate a cui pervenne indipendentemente da Cartesio e che per primo estese al caso delle tre dimensioni. Uno dei maggiori apporti di Fermat. è l'elaborazione, verso il 1629, del metodo dei massimi e dei minimi che lo pone tra gli iniziatori dell'analisi infinitesimale. È considerato inoltre il fondatore della moderna teoria dei numeri: nei suoi lavori in questo campo impiegò per primo in modo sistematico il "principio della discesa infinita". Formulò tutta una serie di teoremi, di cui tralasciò o accennò sommariamente le dimostrazioni successivamente trovate da altri: in proposito interessante è il problema insoluto delle equazioni diofantee di Fermat detto anche *ultimo teorema di Fermat*. Tra i risultati conseguiti vanno ricordati: il *teorema di Fermat.*; la scoperta di alcune proprietà dei numeri $4n+1$; la dimostrazione che l'equazione $x4+y4=z2$ non ammette soluzioni intere; l'asserzione che i numeri della forma $22n+1$ sono primi per $n=0, 1, 2, 3, 4$; lo studio dei numeri perfetti, dei numeri poliedrici, dei quadrati e dei cubi magici. Con B. Pascal fondò il calcolo delle probabilità e svolse infine importanti ricerche in ottica geometrica applicando il metodo dei massimi e dei minimi allo studio della riflessione e della rifrazione della luce (principio di Fermat.).

Principio di Fermat

La traiettoria di un raggio luminoso che congiunge un punto A a un punto B, passando attraverso mezzi ottici anche diversi, è quella per cui il cammino ottico, cioè la somma dei prodotti dei tratti percorsi per i rispettivi indici di rifrazione, è minimo o massimo o stazionario. Le leggi della riflessione e della rifrazione sono direttamente deducibili da tale principio.

Principio di Fermat della discesa infinita

Se C è una classe di interi assoluti alla quale non appartiene lo zero e x è un numero diverso da zero appartenente a questa classe e se, qualunque sia x, esiste un $y<x$ appartenente a C, allora la classe C è vuota.

Ultimo teorema di Fermat

La risoluzione dell'ultimo teorema di Fermat ha rappresentato per oltre tre secoli una sfida alle più brillanti menti matematiche della nostra era e, solo nel settembre del 1994, ne è stata data la dimostrazione a opera del matematico inglese Andrew Wiles, professore presso l'Università di Princeton, nel New Jersey. L'ultimo teorema di Fermat afferma (nel linguaggio matematico attuale) che non esistono soluzioni intere non banali (cioè diverse da zero) per la famiglia di equazioni an+bn=cn, con n>2 e intero. Questa famiglia di equazioni è una generalizzazione della famosa formula di Pitagora che descrive la relazione tra i lati di un triangolo rettangolo, a2+b2=c2, che ammette invece infiniti insiemi di soluzioni intere (p. es., a=3, b=4, c=5, note come terne pitagoriche). La dimostrazione della inesistenza di soluzioni intere non banali per il caso particolare n=4 fu data direttamente da Fermat., utilizzando un metodo noto come metodo della discesa infinita. Tale metodo consiste nell'assumere che esista una certa soluzione (a=a1, b=b1, c=c1); Fermat poté dimostrare che questo implicava una soluzione più piccola (a2, b2, c2), e così via, ottenendo una sequenza discendente di soluzioni in linea di principio infinita; ma questo non è possibile, dovendo la terna (a, b, c) essere intera e quindi dovendo esistere una soluzione minima. Tale contraddizione dimostrava che l'ipotesi iniziale di esistenza della soluzione (a1, b1, c1) doveva essere falsa, dimostrando quindi l'ultimo teorema di Fermat nel caso particolare n=4. Solo cento anni dopo (1753), si ebbe il primo progresso riguardo alla soluzione dell'ultimo teorema di Fermat a opera di L. Euler che, in una lettera inviata al matematico C. Goldbach, annunciò che utilizzando lo stesso metodo del matematico francese era riuscito a dimostrare il caso particolare n=3, utilizzando però i numeri immaginari (i numeri immaginari, definiti come radice quadrata di un numero negativo, sono un'entità matematica introdotta nel sec. XVI). Le soluzioni per il caso particolare n=3 può essere facilmente generalizzata ai casi n=6, 9, 12, ..., (poiché, p. es., si può sempre scrivere a6=A3, con A=a2, e così via, e dimostrare l'ultimo teorema per l'equazione A3+B3=C3, con B=b2 e C=c2) mentre quella per il caso particolare n=4 può essere generalizzata ai casi n=8, 12, 16, ... La dimostrazione di Euler è particolarmente importante perché vale per un valore di n (n=3) che è un numero primo. Poiché tutti gli altri numeri possono essere ottenuti moltiplicando combinazioni di numeri primi, basta riuscire a dimostrare l'ultimo teorema per i numeri primi, tutti gli altri casi essendo dimostrati implicitamente. Il riconoscimento di questa proprietà è sicuramente un passo molto importante, anche se è bene ricordare che i numeri primi sono comunque ∞ e che quindi una dimostrazione generale dell'ultimo teorema di Fermat non può fondarsi su dimostrazioni per valori di n particolari.

Nel XVI secolo si verificarono in Europa grandi sviluppi di studi scientifici soprattutto nel campo dell'astronomia, scienziati come Galileo e Keplero, sulla spinta della rivoluzione copernicana, affrontarono problemi sempre più complessi riguardanti i pianeti e i loro movimenti attorno al sole. In campo economico le scoperte di Cristoforo Colombo e altri navigatori aprirono le vie alle flotte mercantili. Queste due realtà posero un problema comune: quello di determinare strumenti di calcolo sempre più efficaci oltre che tavole numeriche, trigonometriche e le carte di navigazione.

Nascono in questo periodo i moderni simboli matematici e algebrici, a questo secolo risale l'importante lavoro sulle soluzioni delle equazioni del matematico francese ***François Viète***, i cui scritti influenzarono illustri matematici del secolo successivo, tra cui Isaac Newton in Gran Bretagna.

Il XVII secolo, vede anche la scoperta dei logaritmi da parte del matematico scozzese ***John Napier***, altrimenti noto come Nepero. Gli attuali sistemi di logaritmi naturali tuttavia non utilizzano la base dei logaritmi di Napier, nonostante i logaritmi naturali vengano chiamati "logaritmi neperiani". Napier fu uno dei primi – se non il primo in assoluto – a utilizzare la virgola per esprimere le frazioni decimali in maniera sistematica e secondo il moderno sistema di numerazione decimale. Ideò anche alcuni sistemi meccanici per i calcoli matematici, che descrisse nell'opera Rabdologiae (1617).

L'utilità del risultato fu riconosciuta quasi due secoli più tardi dall'astronomo francese ***Pierre-Simon de Laplace*** che affermò come, "dimezzando il lavoro degli astronomi, il matematico scozzese ne avesse raddoppiato la vita". Si dedicò principalmente all'analisi matematica del sistema di astronomia gravitazionale elaborata da Isaac Newton: Laplace dimostrò che il moto dei pianeti è stabile e che le perturbazioni prodotte dalla mutua influenza dei pianeti o da corpi estranei quali le comete sono solo temporanee. Tentò di spiegare, mediante una teoria razionale, l'origine del sistema solare nella sua ipotesi nebulare dell'evoluzione stellare (vedi Cosmologia). Nel Trattato di meccanica celeste (5 voll., 1799-1825) ordinò sistematicamente le ricerche matematiche sulla gravitazione, mentre in Spiegazione del sistema del mondo (1796) espose brevemente la storia dell'astronomia. Egli si occupò anche di calcolo delle probabilità in Teoria analitica della probabilità (1812) e Saggio filosofico sulle probabilità (1814).

Un passo estremamente importante fu poi la nascita della teoria delle probabilità, inaugurata in un carteggio tra Pascal e Fermat a proposito di un problema di gioco d'azzardo, chiamato il problema dei punti. Questo lavoro inedito stimolò lo scienziato olandese ***Christiaan Huygens*** a pubblicare un breve trattato sulle probabilità nel gioco dei dadi, che fu in seguito riproposto dal matematico svizzero ***Jakob Bernoulli*** nel suo Arte della Congettura. Bernoulli, e anche il francese ***Abraham De Moivre,*** nell'opera Dottrina delle Possibilità del 1718, applicarono il calcolo infinitesimale di recente scoperta per compiere importanti progressi nell'ambito della teoria delle probabilità, che subito trovò numerose applicazioni.

L'evento matematico più importante del secolo XVII comunque fu senza dubbio la nascita, tra il 1664 e il 1666, del calcolo infinitesimale, differenziale e integrale, per merito di ***Newton.*** Per questa scoperta egli si avvalse dei precedenti studi dei suoi connazionali John Wallis e Isaac Barrow, e del lavoro di alcuni matematici europei come Cartesio, Francesco Bonaventura Cavalieri, Johann van Waveren Hudde e Gilles Personne de Roberval. Newton publicò le lezioni tenute da Isaac Barrow, suo docente all'UNIversità di Cambridge con il titolo di Lectiones Opticae e Lectiones Geometricae nel 1669 e nel 1670. Le lezioni di geometria contengono uno dei risultati più importanti dell'opera di **Barrow,** cioè il metodo per la determinazione delle tangenti a una curva, che dimostra come il matematico stesse lavorando sulle linee suggerite da Fermat per l'elaborazione del calcolo differenziale. Barrow è noto anche per essere stato il primo a riconoscere che l'integrazione (l'operazione per il calcolo dell'area delimitata da una curva) e la derivazione (che sta alla base del calcolo delle tangenti a una curva) sono operazioni inverse.

Dopo circa otto anni dagli studi di Newton, che tuttavia non erano ancora stati pubblicati, anche il tedesco ***Gottfried Wilhelm Leibniz*** giunse autonomamente alla teoria del calcolo infinitesimale, che pubblicò nel 1684 e nel 1686, dando inizio a una lunga disputa sulla paternità della scoperta. Alcune notazioni introdotte da Leibniz, ad esempio dx, sono tuttora usate nel calcolo infinitesimale moderno.

Dal calcolo differenziale alla Teoria della Relatività: le rivoluzioni scientifiche nella storia

Cosa è la matematica?

Il termine in origine indicava lo studio delle grandezze, dei numeri e delle figure geometriche, nonché delle relazioni e delle operazioni logiche tra queste quantità. La **matematica** era quindi propriamente divisa in *geometria*, o scienza delle quantità e delle dimensioni geometriche, *aritmetica*, o scienza dei numeri e del contare, e in *algebra*, cioè nella generalizzazione astratta di questi due campi. Verso la metà del XIX secolo questa definizione divenne sempre più inaccettabile e la matematica cominciò a essere la scienza delle relazioni, o la scienza che trae conclusioni necessarie, e a comprendere i nuovi campi della logica matematica e simbolica. Furono così introdotti nuovi simboli per dare una forma rigorosa ai processi di deduzione e di induzione oltre a definizioni, assiomi, postulati e regole per elaborare relazioni e teoremi complessi, a partire da concetti elementari e primitivi. Si può dire che la matematica sia nata con l'umanità: le prime testimonianze di alcune nozioni di geometria e dell'interesse per le forme geometriche sono state infatti individuate nei disegni del vasellame e dei tessuti, e nelle pitture rupestri d'epoca preistorica. I sistemi di conteggio primitivi, sviluppati in seguito a esigenze pratiche, erano quasi certamente basati sull'uso delle dita di una o di entrambe le mani, come suggerito dalla predominanza del numero cinque o del numero dieci come basi degli attuali sistemi di numerazione. Gli sviluppi nei secoli delle matematiche hanno dato luogo ad un succedersi di teorie che hanno permesso l'attuale status del corpus mathematicus. Lo studio dell'evoluzione storica delle problematiche e delle tematiche matematiche può quindi fornire una visione della matematica nel suo insieme (o di parti significative di essa). In questo modo l'insegnamento della Storia delle matematiche riveste un ruolo formativo essenziale per gli studi di primo livello, con l'obiettivo di dare allo studente conoscenze tecnicamente rigorose, sistematiche e basilari dei risultati storicamente più significativi della disciplina. Questo percorso di storia delle matematiche prevede la presentazione dei filoni classici (origini e primi sviluppi) della geometria, dell'algebra, dell'analisi e della meccanica. In particolare in questa fase ci occuperemo dello sviluppo storico della matematica dal XVIII secolo ad oggi.

Il XVIII e XIX secolo rappresentano il periodo in cui la matematica è stata completamente al centro della cultura. A parte le questioni filosofiche relative ai concetti di ***infinito*** e di ***infinitesimo*** che hanno condotto Leibnitz e Newton allo sviluppo del calcolo infinitesimale, i risultati dei matematici hanno contribuito non poco alle grandi rivoluzioni (prima fra tutte la ***rivoluzione industriale***); nelle stesse opere dei grandi poeti viene sottolineata la funzione che ha avuto la matematica nel corso della storia. Vogliamo citare per tutti le opere del Leopardi che nella sua prima grande opera ***"La storia dell'Astronomia"***, scritta all'età di dodici anni, fa una carrellata dei matematici e degli scienziati vissuti dal periodo ellenico fino all'inizio del XX secolo. Il Leopardi pone un problema oggi attuale: *la comunicazione della matematica in modo da renderla non difficile ed alla portata di tutti*. Nello "***Zibaldone***", il Leopardi esprime il desiderio di una maggiore conoscenza e padronanza della matematica e manifesta *il rammarico di non aver avuto bravi maestri in grado di far apprendere una disciplina così "severa"*. Sorge spontaneo a questo punto un paragone con Dante, il quale aveva trovato entusiasmo ed interesse nello studio della matematica attraverso la logica. Ma Dante era vissuto (oltre che nella grande Firenze) nel periodo dei *maestri d'abaco* (i cosiddetti "*mediocri*"), di quegli studiosi, cioè, che organizzavano e legavano, in un unico processo logico, i risultati degli altri. Il Leopardi, è vissuto nel XIX secolo (nella piccola Recanati), nel periodo dei grandi geni matematici (Gauss, Riemann, Lobackevskj, Weierstrass, Cauchy, Abel, Galois…) che, però, operavano solo nell'ambito della propria disciplina con l'obiettivo del risultato, ma non avevano alcun interesse a trasmettere le proprie conoscenze agli altri. Certamente i matematici dell'epoca dibattevano tra loro, ma sempre su argomenti specifici. Ed è per questo motivo che, intorno all'età di diciassette anni, il Leopardi si allontana dallo studio della matematica, pur essendo convinto della grossa funzione che essa ha nella formazione. Ciò si evince dallo Zibaldone in cui così si esprime:

> *"La pratica delle matematiche, del loro modo di procedere e di giungere alle conseguenze, del loro linguaggio… aiuta infinitamente le facoltà intellettive e ragionatrici dell'uomo, compendia le operazioni del suo intelletto, lo rende più pronto a concepire, più veloce e spedito nell'arrivare alla conclusione dei suoi pensieri e dell'intero suo discorso; insomma, per una parte assuefa, per l'altra facilita all'uomo l'uso della ragione!"*

Il XX secolo è stato caratterizzato dalle due grandi rivoluzioni scientifiche: ***la meccanica quantistica*** e la ***Teoria della Relatività*** che hanno modificato la concezione di interpretare l'Universo. In particolare, *la teoria della relatività* ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

E' evidente che tale congettura, associata all'***indeterminismo*** che emerge dalla meccanica quantistica, ha avuto ed ha risvolti notevoli nello sviluppo anche della Letteratura e delle altre Scienze.

Dalle origini.......

Democrito calcolò il volume della piramide e del cono, considerandoli costituiti da un numero infinito di sezioni di spessore infinitamente sottile; successivamente ***Eudosso*** ed ***Archimede*** usarono il "metodo di esaustione", per determinare l'area del cerchio, approssimandola a quella di poligoni in esso inscritti, dal numero di lati sempre maggiore.

Comunque, i problemi che insorsero nella comprensione dei numeri irrazionali e il celebre paradosso di Zenone impedirono uno sviluppo sistematico della teoria.

Nel XVII secolo ***Cavalier*i** e ***Torricelli*** svilupparono e ampliarono l'uso degli infinitesimi, mentre ***Descartes*** e ***Fermat*** determinarono le aree e definirono le tangenti a curve assegnate, sfruttando gli strumenti dell'algebra e utilizzando operazioni che equivalgono, in termini moderni, all'integrazione e alla differenziazione, ponendo delle solide basi dal quale nascono le moderne conoscenze.

Fermat e ***Isaac Barrow*** misero in luce l'esistenza di una stretta relazione tra queste due operazioni, finché ***Newton*** (dal 1660) e ***Leibnitz*** (dal 1670) dimostrarono il Teorema fondamentale del calcolo, da cui si deduce che le operazioni di differenziazione e di integrazione sono l'una l'inverso dell'altra.

Newton giunse alla scoperta del calcolo infinitesimale nell'ambito degli studi sulla teoria della gravitazione, probabilmente prima di Leibnitz, tuttavia pubblicò in ritardo i risultati cui era pervenuto; sulla paternità della teoria si scatenarono pertanto aspre dispute, che si conclusero con l'adozione della notazione introdotta da Leibnitz. Secondo alcuni lo scienziato inglese più geniale di tutti i tempi è Isaac Newton che nacque nel Lincolnshire da una famiglia di agricoltori. Newton è famoso per i suoi numerosissimi contributi scientifici in tanti campi della fisica e della matematica. Da ragazzo studiò a *Cambridge* dove conobbe il pensiero dei più famosi filosofi, quali Aristotele, Descartes, Gassendi, Boyle, Galileo, Keplero.

Sin da giovine iniziò alle elaborazione delle proprie idee partendo dai fondamenti di quello che oggi viene conosciuto come *calcolo differenziale*, della cui scoperta Newton, appunto, divide il merito con G.W. Leibnitz.

Newton lo chiamò *"calcolo delle flussioni"*, che oggi vengono chiamate comunemente "calcolo delle derivate". Esso ha rappresentato un punto cruciale nell'evoluzione della matematica, sintetizzando alcune delle disorganiche conoscenze del passato ma soprattutto ha messo a disposizione degli scienziati alcuni tra i più potenti metodi di calcolo e di analisi matematica.

Nell'opera intitolata ***Ottica*** (*Optics*) Newton passa ad occuparsi di fisica, in particolare delle proprietà della luce. E' sua l'invenzione del prisma trasparente che permette di scomporre la luce bianca nei colori dell'iride, così come pure quella del telescopio a riflessione. Passò poi ad occuparsi di meccanica celeste, cioè del moto delle stelle e dei pianeti, e partendo dalle tre leggi di Keplero giunse alla scoperta e alla formulazione della legge di gravitazione universale, valida cioè per tutti i corpi, dalla Luna alle stelle alla famosa mela. E' nell'opera di Newton che giungono a pieno compimento le idee di Copernico e Galileo. A conclusione delle sue grandi scoperte pubblicò la sua opera fondamentale, scritta in latino intitolata ***Philosophiae naturalis principia matematica***.

Nei ***Principia***, che sono a giudizio di molti il più grande lavoro scientifico di tutti i tempi, egli enuncia chiaramente le sue concezioni relativamente allo spazio e al tempo che sono per Newton 'assoluti' e senza riferimento ad alcunché di esterno. Con l'applicazione delle leggi scoperte Newton fu in grado di spiegare una serie vastissima di fenomeni, come il moto delle comete, le eclissi, le perturbazioni nel moto dei pianeti, la caduta dei corpi, il funzionamento del pendolo, la balistica e molti altri ancora. Per i suoi meriti scientifici fu per lunghi anni presidente della Royal Society e, primo scienziato al mondo, ricevette la nomina a Cavaliere dalla Regina Anna.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) , filosofo, matematico e scienziato tedesco, fu, invece, una personalità eclettica, in quanto i suoi interessi spaziarono in numerosi campi del sapere: logica, matematica, diritto, filosofia, storia, religione. Profondamente coinvolto nella vita politica e culturale del suo tempo, Gottfried Leibnitz intende far tesoro di tutte le giuste intuizioni della storia del pensiero per dar vita ad un sistema filosofico che dia ragione della ricchezza e complessità dell'universo. I suoi interessi spaziano in ogni campo del sapere. Grandi risultati vengono ottenuti anche nel campo della logica, concepita come la scienza di maggiore generalità in quanto studia ogni formula per la sua sola forma, a prescindere dal significato dato ai termini. La concezione logica più gravida di conseguenze riguarda la verità: vera è solo la proposizione che esprime ciò che è già implicito nel soggetto. Ciò non elimina tuttavia la differenza tra proposizioni necessarie (che sarebbero vere in qualsiasi mondo possibile) e contingenti (che potrebbero essere false in un diverso universo non contraddittorio). È questa distinzione che secondo Leibnitz conserva anche uno spazio per la libertà umana.

Dalla teoria della verità Leibnitz ricava la concezione della sostanza: essa deve comprendere una nozione così completa da poter derivare da essa tutti i possibili predicati veri, in altre parole tutta la sua storia, compresi i rapporti con le altre sostanze. Ciò significa che ogni sostanza (detta anche «mònade») costituisce un mondo a sé, e rispecchia le altre sostanze non perché esse esercitino un'influenza su di essa, ma piuttosto perché Dio ha prestabilito tra loro un'«armonia».

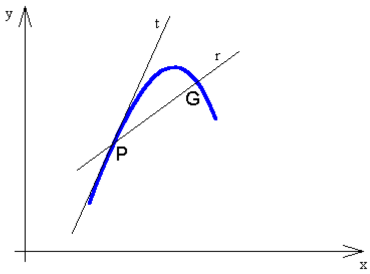
Dalle stesse premesse e suggestionato dal calcolo infinitesimale e dalle sue indagine fisiche, Leibnitz ricava anche la concezione di un universo infinitamente ricco, vivo in ogni sua infinitesima parte e pieno di energia. Il principio dell'armonia prestabilita permette d'altra parte di risolvere tanto il problema del rapporto tra corpo e anima (non ha senso cercare di determinare come interagiscano fra di loro), quanto il problema della conoscenza (ogni nozione ha in realtà origine all'interno della mente). Questa forma peculiare di innatismo viene precisata attraverso il confronto critico con John Locke .

Le ripercussioni teologiche sono forse le più celebri del pensiero di Leibnitz. Egli non solo condivide in buona parte le dimostrazioni dell'esistenza di Dio trasmesse dalla tradizione (aggiungendo di suo la prova basata sull'armonia prestabilita), ma ritiene che la teoria dei mondi possibili sia una premessa sufficiente per fondare un perfetto ottimismo: Dio non avrebbe avuto alcun motivo di creare proprio questo mondo se esso non fosse il migliore. Il male evidentemente esistente dunque va considerato quello inevitabile per non rendere il mondo contraddittorio e dunque impossibile. In questo modo l'uomo possiede a priori l'assicurazione che il suo destino ultimo supera ogni desiderio e speranza. La diatriba che lo oppose a Newton, su chi avesse, per primo, scoperto il calcolo infinitesimale, rappresentò un grave episodio di rottura dello spirito cosmopolita e universalistico della cultura dell'epoca. In realtà, entrambi avevano raggiunto lo scopo, ma per vie e con metodi diversi, anche se l'approccio di Leibnitz, e soprattutto il suo sistema di notazione, si sarebbero dimostrati più fecondi dal punto di vista degli sviluppi successivi. Nell'aritmetica, Leibnitz trattò il sistema di numerazione binaria. Fu anche un precursore, insieme a B. Pascal, del calcolo combinatorio, la cui importanza nel campo della matematica del discreto è pari a quello dell'analisi in quello del continuo.

Gian Lorenzo Bernini (1598-1680), Apollo e Dafne (particolare). L'opera di Bernini incarna bene alcune caratteristiche fondamentali dell'arte barocca: la mobilità, il senso della vita (che in questo caso sfrutta la narrazione mitologica per investire anche la pianta di alloro), soprattutto la scoperta di uno spazio infinito, non più vincolato da precise strutture ma investito dal dinamismo delle figure. È sorprendente notare come tutte queste caratteristiche si ritrovino nella contemporanea filosofia di Leibnitz. In un sistema di pensiero che si propone di raccogliere e accordare la ricerca della verità di ogni tempo viene inglobata la teorizzazione di una infinita vita che percorre l'universo. Questo è il «migliore possibile» per la presenza in esso della maggiore quantità di esistenza.

Gli sviluppi del calcolo combinatorio, ad opera di G. Boole, A. N. Whitehead e B. Russell, hanno dato forma al sogno di G. W. Leibnitz di un ragionamento simbolico universale, con la nascita di una nuova disciplina matematica, la logica simbolica.

La creazione del calcolo infinitesimale, come metodo potente, sistematico e compiuto, deve senza dubbio farsi coincidere con il momento nel quale NEWTON (1666-1669) e LEIBNITZ (1675), indipendentemente l'uno dall'altro, introdussero la nozione di *derivata* e di *differenziale* e svilupparono le relative regole di calcolo. I problemi che particolarmente diedero origine al concetto di *derivata* e costituirono perciò il punto di partenza per il nuovo calcolo, sono quello delle *tangenti* e quello della *velocità*.



Si chiama tangente ad una curva piana in un suo punto P, la posizione limite, se esiste, della retta che unisce P con un altro punto G della curva, allorché si fa avvicinare G indefinitamente a P.

L'equazione della retta tangente, passante per il punto P, deve essere della forma:

$$y-f(x_o) = m(x-x_o)$$

ove m è il **coefficiente angolare** della retta t che, come è noto, è dato da:

$$m = tg\ \boldsymbol{\alpha}$$

Il XVIII secolo, dunque, vide l'applicazione del calcolo infinitesimale in tutto il mondo, ma l'uso approssimativo delle quantità infinite e infinitesime pose in discussione i fondamenti della teoria e innescò un acceso dibattito, cui presero parte esponenti di spicco delle comunità filosofica e scientifica, tra i quali il filosofo ***Berkeley***: questo particolare ambito della matematica coinvolse infatti anche esponenti filosofici oltre che matematici.

Il XIX secolo, bensì, fu l'età d'oro della matematica.

Vennero sviluppate le *geometrie non euclidee* (***Lobacevskij, Riemann)*** e venne costruita la prima trattazione assiomatica della geometria (**Hilbert**) e della teoria degli insiemi (**Cantor**)

Altre conquiste del XIX secolo:

- Sviluppo dell'algebra moderna (**Boole, Cayley, Sylvester**)
- Sistemazione assiomatica della teoria dei numeri naturali (**Peano**)
- Sistemazione della logica (**Peano**)

Si riconosce che la matematica non è una scienza ma una creazione dell'intelletto umano.

Russel scrive che il secolo XIX si vanta della macchina a vapore e della teoria dell'evoluzione e che può anche andar fiero della scoperta della matematica pura.

Durante questo secolo l'analisi sostituì le vaghe nozioni di infiniti e infinitesimi allora esistenti con definizioni precise, formulate in termini di quantità finite: ***Bolzano*** e ***Cauchy*** definirono con precisione i limiti e le derivate, ***Cauchy*** e ***Riemann*** fecero altrettanto per gli integrali, e ***Julius Dedekind*** e ***Karl Weierstrass*** per i numeri reali.

Fu dimostrato che le funzioni differenziabili sono continue, e le funzioni continue sono integrabili, ma che per nessuna delle due affermazioni vale il teorema inverso.

Karl Weierstrass (1815-1897), matematico tedesco, diede contributi fondamentali al programma di aritmetizzazione dell'analisi che si andava delineando verso la fine dell'ottocento. In particolare egli contribuì al chiarimento dei concetti di numero reale e di limite. Fu uno degli esponenti di spicco dell'indirizzo critico della matematica, che poneva il rigore formale a fondamento di ogni ragionamento. Diede importanti contributi nello studio delle serie di potenze e ideò il procedimento noto come 'prolungamento analitico'. A lui si deve uno dei primi esempi di funzione continua in un intervallo ma non derivabile in alcun punto.

Nel 1.847 G. Boole pubblicò "l'analisi matematica della logica", in cui applicò allo studio della logica la simbologia, i concetti ed i metodi della matematica. Questi studi costituirono parte integrante della geometria proiettiva, della teoria delle strutture delle algebre astratte, dell'analisi funzionale e della teoria dei circuiti elettrici, i cui risultati furono fondamentali per la successiva rivoluzione informatica.

Dalla teoria della probabilità si giunse ad un sistema di metodi e procedimenti per il trattamento delle ipotetiche e si aprì la strada ai moderni sistemi artificiali, nei quali si utilizzano il calcolo della probabilità e la logica matematica per la definizione delle scelte comportamentali. Nacque un nuovo sistema scientifico da cui deriveranno importanti scoperte utilizzabili nell'industria e nella vita quotidiana.

Tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento, si tentò di ricostruire la logica e di riformulare la matematica, in presenza dei cosiddetti "paradossi" (Frege, Russel, Hilbert in Germania, Peano in Italia). I formalisti ritenevano che la matematica non avesse bisogno degli assiomi, ma trovasse le sue fondamenta nella logica. Poiché, secondo questi autori, i postulati della logica sono arbitrari e formali, anche la matematica è formale e priva di collegamenti con il mondo reale.

Peano creò un linguaggio formalizzato, in grado di esprimere la logica ed i risultati più importanti delle scienze matematiche (formulario del 1.894). Questo simbolismo è usato tuttora ($\in$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$, ...).

Nei primi decenni del Novecento, alcuni matematici francesi, mimetizzati sotto lo pseudonimo di N. Bourbaki (generale francese che partecipò alla guerra di Crimea e si occupò della riorganizzazione dell'esercito), si dedicarono al cosiddetto metodo deduttivo: dagli assiomi al particolare. L'obiettivo consisteva nel comprendere sinteticamente le diverse branche della matematica in poche strutture, strettamente legate tra loro. Questo progetto si basava sul formalismo rigido, con pochissimo spazio per il linguaggio descrittivo, troppo variabile perché sempre soggetto ad interpretazioni.

Queste sono le premesse per l'utilizzo degli attuali software matematici che adottano, sua come formule che come comandi, il linguaggio del "sistema delle notazioni".

Detto ciò, vediamo, ora, in particolare, come si svilupparono le geometrie euclidee e non e cosa s'intende per analisi funzionale.

Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio

E' opinione comune che la geometria euclidea sia il modello a cui si riferisce lo studio dello spazio fisico. Del resto, se duemila anni dopo che Euclide ha scritto "Gli elementi", la geometria euclidea resta ancora uno degli strumenti di logica più forte a disposizione del docente, significa che è realmente un modello quasi perfetto.

Tale concezione va però corretta secondo una revisione moderna che tiene conto dello sviluppo della Fisica nell'ultimo secolo, in quanto lo studio dell'Universo fa ipotizzare uno spazio che potrebbe non essere propriamente piatto.

Nella Fisica Classica lo spazio costituisce un sistema a cui si riferiscono tutti i fenomeni, per cui esso esiste indipendentemente dagli eventi che si verificano.

In linea di principio, la Fisica Classica non esclude la possibilità di evidenziare il moto assoluto di un punto rispetto allo spazio immobile, anche se a tale risultato non si può giungere sulla base di esperimenti di dinamica in conseguenza del principio di relatività galileiana.

La teoria della relatività ha radicalmente modificato il concetto di spazio mettendo in evidenza che non ha senso, dal punto di vista fisico, l'ammissione dell'esistenza dello spazio in assenza di fenomeni osservabili, per cui non esiste lo spazio assoluto, ma esiste uno spazio le cui proprietà sono relative allo stato di moto dei corpi.

Poiché il moto di un corpo rappresenta la variazione di posizione del corpo istante per istante, cioè nel tempo, non è possibile concepire uno spazio indipendentemente dal tempo, che rappresenta, con opportuni accorgimenti, una quarta dimensione del sistema di riferimento in cui si colloca ogni evento.

Ciò significa che l'Universo fisico non incorpora come modello privilegiato la geometria euclidea, ma tiene conto di altri modelli; infatti, secondo Einstein, l'Universo piatto (modello euclideo) è un Universo vuoto e privo di materia, in quanto la presenza di materia introduce una curvatura nello spazio.

In questo spazio curvo, i corpi, in assenza di forze non gravitazionali, percorrono la linea più breve (geodetica) in analogia al percorso rettilineo che è valido solo nello spazio piatto. Precisamente, secondo il concetto classico:

- la materia crea un campo gravitazionale e questo fa deviare i corpi;

invece secondo Einstein:

- *il campo gravitazionale va interpretato come curvatura dello spazio e tale curvatura determina la sostituzione del concetto di retta con quello di geodetica*.

Per fenomeni che avvengono all'interno del sistema solare, la *relatività generale* introduce modifiche lievi ed appena rilevabili rispetto alla teoria newtoniana. Su questa scala lo spazio è leggermente deformato, ma per distanze dell'ordine di miliardi di anni luce, la materia presente nell'Universo incide in maniera rilevante sulla natura dello spazio.

È quindi principalmente sulle grandi distanze che viene a cadere il modello euclideo. Infatti, per formulare la *teoria della relatività generale*, Einstein ha utilizzato un modello di tipo ellittico analogo al modello di *geometria non euclidea di Riemann*.

Del resto, già mezzo secolo prima di Einstein, Riemann (1826-1866), nello strutturare la sua geometria su superfici come *k-varietà* di spazi a dimensione $n > k$, giunse alla conclusione che lo spazio fisico è una varietà tridimensionale a curvatura costante.

Tale congettura si può considerare come un'anticipazione di successivi risultati (in particolare di Levi-Civita e Ricci) che ha portato alla teoria della relatività generale di Einstein.

Il problema della curvatura dell'Universo non è una questione di oggi. Già nell' VIII – VII secolo a.C., i Caldei – Babilonesi, attratti dal fascino della Volta Celeste, cercavano di approfondire le proprietà dello spazio ed il campo di studio su cui operavano era la sfera.

Gli stessi greci, parallelamente allo studio della geometria piana, provavano interesse per la geometria sferica; di ciò si è avuto notizia nel 1885, anno in cui sono stati tradotti due testi ***Sulle Sfere mobili*** ed ***Il sorgere ed il tramontare***, scritti nel III sec. a.C. da un contemporaneo di *Euclide*, *Autolico di Pitane* (sono i due testi più antichi che sono stati trovati intatti).

Nel testo "*Sulla sfera mobile*" Autolico tratta dei cerchi meridiani, dei cerchi massimi e dei paralleli; il libro presuppone dei teoremi di *geometria sferica* che dovevano perciò essere noti ai Greci di quell'epoca.

E' significativo, come nel libro *sulle sfere mobili* le proposizioni siano disposte in ordine logico; infatti, ogni proposizione viene prima enunciata in forma generale, poi ripetuta, con esplicito riferimento alla figura e infine viene data la dimostrazione. E' questo lo stile usato da Euclide, il quale pure trattò alcune questioni di *Geometria Sferica,* come si trova in uno dei suoi scritti (*I fenomeni)* di cui c'è una traduzione pubblicata nel 1916. Ne "*I fenomeni*" viene definita, per la prima volta, la superficie sferica come *superficie di rotazione di una circonferenza intorno ad un proprio diametro.*

E' interessante osservare come *l'autore dell'opera più importante della geometria piana*, abbia studiato le prime proprietà su una superficie sferica.

Il fatto, poi, che questi testi del terzo secolo a.C. siano stati tradotti nel XIX e nel XX secolo, è mia opinione, ma penso ben motivata, che questi risultati potevano avere una loro importanza, seppur di carattere storico, per far comprendere come già nell'antichità si pensasse ad un Universo non euclideo, nel periodo in cui (fine del XIX secolo) due matematici, *Tullio Levi Civita* (1873-1941) e *Gregorio Ricci-Curbastro* (1853-1925) stavano sviluppando "*la teoria dei tensori*", utilizzata da Einstein, all'inizio del secolo successivo, per lo sviluppo della "Teoria della Relatività".

Un altro matematico che ha lasciato tracce sulla *Sferica*, a parte i già citati Teodosio di Bitinia e Tolomeo, è Menelao (circa 98 d. C.), che nei suoi studi di trigonometria scrisse il trattato *Sphaerica,* che ci è pervenuto in una versione araba in tre libri (c'era anche un testo greco che, però, è andato smarrito), tradotta da F. Maurolico da Messina (1494-1575). Nel libro I, dedicato alla *geometria sferica*, si trova il concetto di triangolo sferico, cioè della figura formata da tre archi di cerchio massimo di una sfera, ciascuno dei quali è minore di un semicerchio. Lo scopo del libro è quello di provare, per i triangoli sferici, dei teoremi pressoché analoghi a quelli dimostrati da Euclide per i triangoli piani. Così, *la somma di due lati di un triangolo sferico è maggiore del terzo lato, la somma degli angoli di un triangolo è maggiore di due retti, lati uguali sottendono angoli uguali*. Menelao prova poi un teorema che non ha nessun analogo per i triangoli piani: *se gli angoli di un triangolo sferico sono rispettivamente uguali a quelli di un altro, allora i due triangoli sono congruenti*. Ci sono anche altri teoremi di congruenza e dei teoremi sui triangoli isosceli. Il libro II della *Sphaerica* è dedicato principalmente all'Astronomia e tocca solo indirettamente la geometria sferica. Il libro III tratta la *trigonometria sferica.*

In seguito hanno lasciato tracce di geometria e trigonometria sferica gli arabi *al'Battn* (858-929) e *Abu'l Wefa* (940-998), oltre al persiano *Nasir-Eddin* (1201-1274); queste opere non furono note in Europa fino alla metà del XV secolo quando gli studiosi tedeschi *George Peurbach* (Vienna, 1423-1461) ed un suo allievo *Johannes Mller*, noto come *Regiomontano* (1436-1476) iniziarono a tradurre le opere greche ed arabe. In particolare, quest'ultimo, nella sua opera *De triangulis* scritta tra il 1462 e il 1463 e pubblicata postumo nel 1533, raccolse in un sistema organico tutte le conoscenze disponibili di geometria sferica e di trigonometria sferica. Nel frattempo, però, *Johann Werner* (1468-1528) aveva migliorato le idee di Regiomontano nella sua opera *De triangulis Sphaericis* pubblicata nel 1514. In queste opere la trigonometria sferica era assillata dalla necessità di utilizzare una moltitudine di formule; ciò era dovuto al fatto che il Regiomontano e il Werner (ed anche in seguito Copernico) avevano usato soltanto le funzioni seno e coseno. Fu un allievo di *Nicolò Copernico* (1473-1543), *George Joachim Rhaeticus* (1514-1576), che usa per la prima volta tutte e sei le funzioni trigonometriche.

La trigonometria sferica venne ulteriormente sistematizzata ed in parte ampliata da *Francois Viète* (1540-1603), che riesce a dare l'insieme completo delle formule necessarie per *calcolare una parte di un triangolo sferico rettangolo in termini di due altre parti note* ed una regola pratica per ricordare questo insieme di formule che è oggi nota con il nome di regola di *Napier* (*John Napier,* 1550-1617). Nel XVII secolo, nozioni di geometria sferica vengono utilizzate (ed anche ampliate in alcuni scritti) dall'astronomo inglese *Edmund Halley* (1656-1742).

Nel XVIII secolo ha inizio, con *Eulero* (1707-1783), la trattazione moderna della trigonometria sferica tendente a derivare tutta la trigonometria da principi semplici; la generalizzazione delle formule della *trigonometria sferica* e l'interpretazione da un punto di vista superiore della *geometria sferica* è dovuta principalmente a *Gauss* (1777-1855), la cui idea di considerare *una superficie curva come spazio in se*, ha dato inizio ad uno studio generalizzato di geometrie su superfici curve: *le geometrie non euclidee*.

In realtà, all'inizio del XVIII secolo, l'interesse era rivolto principalmente alla *geometria proiettiva* e le ricerche sulla geometria non euclidea non attirarono i matematici inglesi, francesi e tedeschi, almeno fino a quando Gauss non si espresse positivamente sulla validità logica di esse e della possibilità di *individuare uno spazio fisico che risponda alle sue proprietà*.

Ciò avviene intorno al 1818, anno in cui un professore di giurisprudenza Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) inviò a Gauss un promemoria del 1816 in cui distingueva due geometrie: la *geometria euclidea* e la geometria che egli chiamava "*geometria astrale*" in quanto pensava che potesse valere nello spazio stellare.

La teoria geometrica di Schweikart ebbe l'approvazione di Gauss, che, già dal 1813 stava lavorando per lo sviluppo di una geometria che non comprendesse il postulato delle parallele; in una lettera a Olbers del 1817 egli afferma che *non è* *possibile dimostrare che la geometria euclidea sia necessaria per lo sviluppo dell'universo fisico; è quindi possibile costruire una altra geometria applicabile fisicamente*.

I teoremi provati da Gauss nei suoi lavori sono in gran parte simili a quelli che si incontrano nelle opere di *Nikolai Lobatchevsky* (1793-1856) e di *Wolfgang Bolyai* (1775-1856) [1], i due matematici a cui, insieme a *Georg Bernhard Riemann* (1826-1866), si devono i risultati più importanti sulle geometrie non euclidee.

Per la nostra trattazione, faremo riferimento allo sviluppo della *geometria ellittica* (indirizzo metrico-differenziale) di Riemann (1826-1866), di cui la *geometria sferica* è un caso particolare. Riemann, riteneva che le proprietà che distinguono lo spazio fisico da altre varietà, possono essere ricavate solo dall'esperienza; di conseguenza, egli pensava che gli assiomi della geometria euclidea potessero essere veri solo approssimativamente per lo spazio fisico e, come Lobacewscki, riteneva che sarebbe stata l'Astronomia a stabilire la geometria che meglio si adatta allo spazio fisico.

Già nel 1854, Riemann, dedusse che lo studio della geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica. In uno spazio in cui la curvatura cambia da un luogo all'altro per la presenza della materia, e da un istante all'altro per il moto della materia, le leggi della geometria euclidea non sono valide. Pertanto, egli riteneva che per determinare la vera natura dello spazio fisico, si dovesse associare fra loro *spazio e materia* (e di conseguenza il tempo). A tale scopo, così si esprimeva:

"*O la realtà soggiacente lo spazio forma una varietà discreta, oppure bisognerà cercare il fondamento delle sue relazioni metriche fuori di esso, nelle forze connettive che vi agiscono. Questo ci porta nel dominio di un'altra scienza, quella della fisica, in cui l'oggetto delle nostre ricerche non ci consente di entrare oggi*"

Questa idea, che ha condotto poi alla Teoria della relatività, fu sviluppata da William Clifford (1845-1879) il quale sosteneva che:

"*La variazione della curvatura dello spazio sia ciò che accade realmente in quel fenomeno che chiamiamo moto della materia, sia essa pesante o eterea*".

Il modello formulato nel 1854 da Riemann (*geometria ellittica)*, si può considerare una estensione della geometria differenziale di Gauss.

Riemann voleva dimostrare che gli assiomi di Euclide *sono verità empiriche* (e non verità evidenti) ed adottò l'approccio analitico proprio perché riteneva che *nelle dimostrazioni geometriche si potesse essere indotti ad assumere come verità ciò che è soltanto una nostra percezione, in quanto conosciamo lo spazio solo localmente*; da qui lo studio del comportamento locale dello spazio, cioè l'approccio *metrico-differenziale*.

Del resto, l'ortogonalità tra vettori, per come è stata definita su un iperpiano di uno spazio piatto, non ha significato su una superficie curva; il prodotto scalare tra un vettore normale alla superficie in un suo punto ed un vettore del piano tangente alla superficie in quel punto è un'approssimazione corretta della realtà solo se operiamo in un intorno del punto abbastanza piccolo da poter identificare l'elemento infinitesimo di superficie con una parte infinitesima di piano.

Nella parte finale del suo lavoro, Riemann, conclude che *lo spazio fisico è una varietà a tre dimensioni a curvatura costante.* In questa varietà, la *geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.*

Ciò porta a concludere che *la geometria non si può astrarre dall'evoluzione fisica.* Infatti, secondo la concezione classica, la geometria esprime un insieme di proprietà relative al *movimento dei corpi* ed alla *propagazione della luce,* che si ottengono facendo astrazione dal *tempo* e dalle *forze*. Quindi, con un'estensione della geometria alla cinematica (che è la teoria del movimento rispetto allo spazio-tempo) e successivamente alla dinamica (con l'introduzione delle forze) si avranno approssimazioni che ci avvicinano man mano ad un grado più concreto della realtà fisica, che troverà poi un'ulteriore correzione con la teoria della relatività generale. Con tale teoria, Einstein sollevò anche una questione più ampia rigurdanti gli effetti gravitazionali delle masse nello spazio; infatti, *le geodetiche del suo spazio-tempo sono precisamente le traiettorie degli oggetti che si muovono liberamente (come ad esempio la traiettoria della terra intorno al sole), analogamente alla legge newtoniana che ci fa individuare la retta come traiettoria descritta da un punto, non soggetto a forze, con velocità uniforme*.

Dunque, il modello newtoniano che assegna una legge per il moto libero di un punto e vi aggiunge poi una forza, risulta essere solo un'astrazione nella nuova costruzione della dinamica di Einstein.

Tale concezione sarebbe reale se la materia fosse composta da piccole masse, poste a distanza tale una dall'altra da potersi muovere senza subirne la reciproca influenza; invece *la materia si muove sotto l'influenza di altra materia che, secondo la dinamica newtoniana è la causa delle forze gravitazionali*.

Le geometrie non-euclidee

"Il carattere di necessità ascritto alle verità matematiche e anche la peculiare certezza ad esse attribuita sono un'illusione"

John Stuart Mill

Nel 1733 G.Saccheri e cinquant'anni dopo J.H.Lambert tentarono di dimostrare il quinto postulato di **Euclide** per contraddizione, cioè utilizzando il suo opposto nelle derivazioni fino ad arrivare ad una contraddizione, che mostrasse l'erroneità dell'opposto e la correttezza del quinto postulato. Non riuscirono nell'impresa ma aprirono la strada alla **geometria non-euclidea**.

Euclide stese i postulati utilizzando il linguaggio quotidiano e non un linguaggio formalizzato. Il rigore stava nei successivi passaggi delle sue dimostrazioni. I termini di '**punto**' e '**retta**' dei postulati sono sempre stati associati ai concetti di 'punto' e 'retta' usati quotidianamente, poiché non venivano definiti esplicitamente ; Euclide stesso considerava i suoi punti e rette proprio *i* punti e *le* rette del mondo reale.

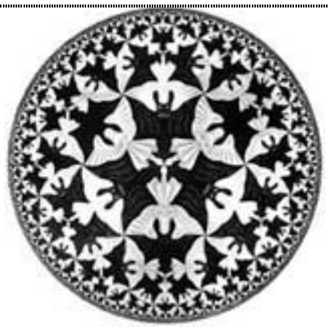
L'intuizione che portò nel 1823, separatamente ma quasi nello stesso tempo, J.Bolyai, N.Lobacevskij, A.M.Legendre e il gruppo di **Gauss** a superare **Euclide**, fu quella di non accontentarsi del significato comune dei concetti di 'punto' e 'retta', ma di accettarne altri; il loro significato *emerge* a posteriori dall'insieme delle proposizioni in cui tali concetti compaiono , ed è diverso se si accetta o si nega il quinto postulato (Hofstadter).

Consideriamo un *postulato sulle parallele* ad esso equivalente:

Data una qualsiasi retta ed un punto esterno ad essa, esiste una ed una sola retta che passa per quel punto e non interseca mai la retta data, per quanto la si prolunghi.

Se lo si accetta, siamo nella geometria euclidea ; se si afferma che tale retta non esiste, siamo nella "geometria ellittica" ; se si afferma che ne esistono almeno due, siamo nella "geometria iperbolica".

La "geometria ellittica" è visualizzabile come punti e rette su una sfera, invece che su un piano. Un 'punto' sarà costituito da due punti diametralmente opposti sulla sfera ; una 'retta' sarà un cerchio massimo sulla sfera ; non esistono dunque due 'rette' parallele.

Rappresentazioni bidimensionali dello spazio non euclideo di M.C.Escher	
Ellittica	Iperbolica
	
Limite del cerchio IV - xilografia 1960	Farfalle - xilografia 1959
Il limite, come compenetrazione di "bene" e "male", definisce una superficie infinita (l'intero piano) all'interno di un cerchio finito.	

Questa geometria è necessaria ad Einstein per passare alla "Teoria della relatività generalizzata" (che però non arriverà a compimento); la presenza dei campi gravitazionali implica la 'curvatura dello spazio ellittica, ed una concezione dello spazio relativa e non assoluta.

Le geometrie non-euclidee si basano su una diversa *interpretazione* dei concetti di 'punto' e 'retta' e del quinto postulato, mentre mantengono in comune i primi quattro postulati. Fino alla loro scoperta, non era concepibile la possibilità di interpretazione multipla in geometria ed, in generale, in matematica. L'esistenza di diverse geometrie obbliga il 'geometra' o l'osservatore a *scegliere* quale usare ed i risultati ottenuti saranno 'relativi' a questa scelta.

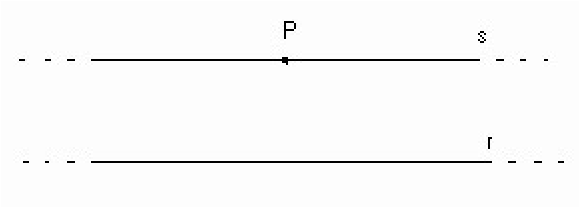
La geometria euclidea richiama alla mente vecchi ricordi di scuola, di quelle belle e familiari (almeno per qualcuno) costruzioni con riga e compasso. Forse i più diligenti si ricorderanno ancora qualche teorema imparato a scuola, come quello di Pitagora, o che la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°. Questa geometria è quanto di più naturale si possa pensare, poiché corrisponde essenzialmente all'intuizione che abbiamo dello spazio fisico che ci circonda.

Per moltissimi secoli gli Elementi di Euclide sono stati l'esposizione matematica di questa intuizione. Naturalmente, come ogni teoria che si rispetti, la geometria euclidea ha i suoi punti di partenza, i cosiddetti assiomi o postulati, dai quali si deducono poi tutte le proposizioni della teoria, dalle più evidenti a quelle meno evidenti. Euclide sceglie questi postulati in virtù della loro evidenza. Sono cioè affermazioni sulle quali possiamo essere tutti d'accordo, e che non richiedono ulteriore spiegazione. Troviamo così i concetti di punto, retta, retta tra due punti, ecc...

Tuttavia, nel sistema di Euclide c'è un postulato che ha sempre lasciato l'amaro in bocca ai matematici che studiavano la geometria. Si tratta del V postulato che, in una forma equivalente dovuta a Playfair (1748-1819), così recita:

Per un punto esterno ad una retta passa una ed una sola retta parallela alla retta data.

In figura abbiamo descritto la situazione:



La difficoltà in questo enunciato è che stiamo affermando qualcosa sul comportamento delle rette all'infinito. Come possiamo davvero essere sicuri che non si incontreranno mai?

Molto probabilmente, anche Euclide non doveva essere molto contento del suo postulato, visto che negli Elementi dimostra dapprima ben 28 proposizioni senza ricorrere ad esso. Naturalmente, nessuno dubitava della veridicità del postulato. La questione che si poneva era dunque questa: si può dimostrare il V postulato a partire dagli altri quattro?

Per secoli i matematici hanno tentato una tale dimostrazione, tuttavia si trovava sempre che erano sbagliate, o che assumevano un qualche principio in realtà equivalente al postulato che si doveva dimostrare, come la già citata versione di Playfair, o che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto.

Una strada diversa fu intrapresa dal gesuita italiano Gerolamo Saccheri (1667-1733), che tentò una riduzione all'assurdo. Egli era convinto che la geometria euclidea fosse l'unica possibile, e così pensò che assumendo una negazione del V postulato, prima o poi si sarebbe giunti ad una contraddizione, e questo avrebbe provato che il V postulato è conseguenza degli altri quattro. Tuttavia, per quanti sforzi facesse, Saccheri non riuscì a produrre una tale contraddizione. Anzi, ricavò un sacco di proprietà, alcune talmente controintuitive da sembrargli tanto ripugnanti da convincerlo ancor di più che la geometria euclidea doveva essere vera.

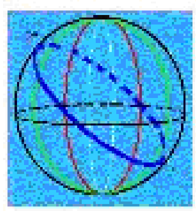
Comunque la questione rimaneva aperta. Così alcuni matematici cominciarono a prendere in considerazione la possibilità che, dalla negazione del V postulato, forse si poteva costruire un'altra geometria, altrettanto coerente di quella euclidea. Uno di questi fu Gauss (1777-1855), che studiò vari aspetti della questione , senza però mai pubblicare nulla al riguardo perchè, come diceva, temeva le "strida dei beoti". Gauss si convinse che non fosse possibile dimostrare il V postulato, e che anzi le geometrie alternative che si potevano costruire potevano essere applicate allo spazio fisico. Egli tentò addirittura una misura di un grosso triangolo sulla superficie terrestre, prendendo come vertici la vetta di tre montagne. Purtroppo però, l'errore sperimentale era tale da non poter stabilire se la somma degli angoli interni fosse proprio un angolo piatto.

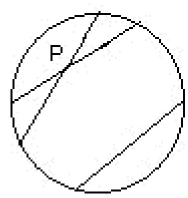
Le idee di Gauss furono poi rese esplicite indipendentemente da Lobacevskij (1793-1856) e da Bolyai (1802-1860). Il padre di quest'ultimo aveva anche lui dedicato gran parte della sua vita ai tentativi di dimostrare il postulato delle parallele. Quando seppe che il proprio figlio, ufficiale dell'esercito, voleva studiare lo stesso problema, tentò di dissuaderlo scrivendogli:

"Per amor del cielo, ti imploro di desistere dal tentativo. Il problema delle parallele è una cosa da temere ed evitare non meno delle passioni dei sensi, poiché anch'esso può rubarti tutto il tuo tempo e privarti della salute, della serenità di spirito, e della felicità."

Bolyai però non si fece scoraggiare, e, dopo vari tentativi, giunse alle stesse conclusioni di Lobacevskij e Gauss: invece di dimostrare l'impossibile, sviluppò una nuova geometria partendo da una negazione del V postulato. Spesso le idee più radicali sono difficili da far attecchire, e le geometrie non-euclidee restarono per parecchi decenni un aspetto marginale della matematica. La piena accettazione di queste idee si ebbe poi soprattutto grazie all'opera di Riemann (1826-1866), la cui geometria è una generalizzazione molto spinta di quella euclidea.

La questione della coerenza rimase però aperta per altri quarant'anni, fino a quando non si trovarono dei modelli di geometria non-euclidea all'interno della geometria euclidea. Alcuni di questi modelli furono proposti da Beltrami (1835-1900), Klein (1849-1925), Poincarè (1854-1912) . Per averne un'idea possiamo pensare alla geometria sulla superficie di una sfera, se interpretiamo le rette come cerchi massimi. In tal caso non ci sono rette parallele.





Come altro modello possiamo invece prendere la geometria in un cerchio, dove per rette intendiamo le corde del cerchio. In tal caso di rette parallele ve ne sono infinite.

Ora, l'esistenza di questi modelli ci dice che una eventuale contraddizione nelle geometrie non-euclidee si riflette automaticamente in quella euclidea. Dunque, non c'è una geometria più vera delle altre, esse hanno tutte la stessa dignità di teorie matematiche. Tutta questa matematica sviluppata nell'800, diede poi gli strumenti necessari ad Einstein (1879-1955) per poter formulare la sua teoria della relatività generale, nella quale la gravitazione è ricondotta proprio alla geometria curva dello spazio-tempo. Una geometria non-euclidea dunque. Così, la nascita delle geometrie non-euclidee non è stata soltanto un esercizio di curiosità intellettuale, ma l'indagine di uno dei problemi fisici più fondamentali: quello dello spazio.

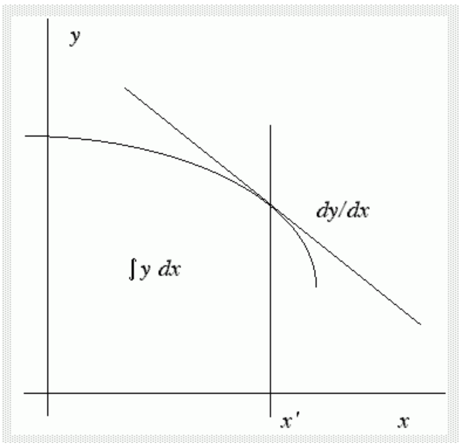
Cos'è l'analisi funzionale

Il presupposto del calcolo infinitesimale è l'elaborazione della geometria analitica da parte di Descartes, vale a dire della possibilità di tradurre problemi geometrici in problemi algebrici e viceversa. Sul piano cartesiano, infatti, ogni funzione $f(x) = y$ è rappresentata da una linea. Come è noto, i polinomi di primo grado sono rappresentati da linee rette, quelli di grado superiore e le funzioni di altro tipo da linee curve. Proprio in relazione a questo secondo caso sorgono due importanti problemi:

1. Come calcolare l'area di una figura delimitata da linee curve? Esaminiamo il caso più semplice: quello del trapezoide delimitato dai due assi, da una retta parallela all'asse delle ordinate e da una linea curva di funzione $f(x) = y$. È facile immaginare un metodo approssimato per calcolare quest'area: basta dividere il trapezoide in sottili rettangoli verticali e sommarne l'area. La base di ognuno di essi sarà parte dell'asse delle ascisse, l'altezza sarà calcolata usando la funzione $f(x)$. Ora, è evidente che quanto maggiore sarà il numero dei rettangoli, tanto più preciso sarà il calcolo dell'area. Ma come calcolare l'area esatta? Bisognerebbe dividere la figura in infiniti rettangoli e sommarne le infinitesime aree. È possibile ciò?

2. Come calcolare il coefficiente angolare della retta tangente ad un dato punto di una linea curva? Anche qui si può pensare ad un sistema approssimato. Si

può scegliere nelle vicinanze dell'ascissa data un'altra ascissa, e calcolare le ordinate corrispondenti. Dividendo la differenza delle due ordinate per la differenza delle due ascisse si avrà -- come è noto -- il coefficiente angolare della retta passante per i due punti così individuati. Non si tratta però di una tangente, perché essa attraversa la linea curva in *due* punti. Per ottenere il coefficiente della tangente bisognerebbe rendere infinitamente piccola la distanza tra le due ascisse (e di conseguenza tra le due ordinate), e calcolare il quoziente tra due infinitesimi. È possibile?



I due problemi fondamentali del calcolo infinitesimale

Qual è il coefficiente angolare della retta tangente in un punto di ascissa x' ad una curva $f(x) = y$? Qual è l'area del trapezoide delimitato dai due assi, dalla retta $x = x'$ e dalla curva $f(x) = y$?

La rappresentazione grafica di una funzione fa ormai parte della cultura comune: il grafico della temperatura in un certo posto al passare del tempo, il grafico dei profitti e delle perdite di una società, il grafico della temperatura di un malato.

Si dice che una certa grandezza y è funzione di un'altra grandezza x, se per ogni valore di x la funzione determina in modo univoco un valore di y. (fig. 1)

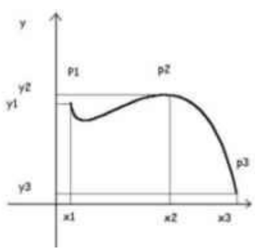


fig.1 grafico di una funzione

Lo studio delle funzioni è stato sviluppato nel calcolo infinitesimale classico da Newton, Leibnitz, Cauchy, Weierstrass.

L'Analisi Funzionale nasce alla fine del XIX secolo e si sviluppa nel XX; il nome è dovuto al matematico francese Hadamard. Tra i più celebri matematici italiani che hanno contribuito alla sua nascita è da ricordare Vito Volterra.

Questa nuova e più astratta analisi non studia le singole funzioni o un numero finito di esse bensì una famiglia infinita di funzioni. Il suo problema principale è quello di organizzare questa famiglia in maniera da poterne studiare le proprietà. Si parla perciò di *spazio funzionale*, attribuendo alla parola spazio un significato più ampio di quello comunemente inteso.

Il primo passo che bisogna compiere per organizzare lo spazio delle funzioni è quello di fissare un metodo per misurare la distanza tra una funzione e un'altra, o in modo equivalente quello di stabilire quanto una funzione si differenzia da un'altra.

Osserviamo, intanto, che il modo di misurare le distanze non è univoco. Prendiamo un esempio banale. Che distanza c'è tra Lecce e Torino? Se ne può misurare la distanza in linea d'aria ma se andiamo in automobile questa informazione non ci interessa, ci interessa sapere quanta strada bisogna percorrere per arrivare a Roma. Se invece andiamo in treno non ci interessa quanta strada il treno deve percorrere ma quanto tempo ci vuole per arrivare. Se andiamo in aereo ci interessa essenzialmente il costo del biglietto. Assegnare una distanza in senso lato significa attribuire ai due enti, Lecce e Torino nell'esempio, un numero. Questo numero ci permette di fare confronti tra le varie coppie di enti, per esempio ci può servire per confrontare Lecce-Torino con Lecce-Milano o con Palermo-Venezia.

In termini matematici parliamo di un *spazio metrico*.

In che modo possiamo misurare la distanza tra una funzione e un'altra? Un modo semplice può essere quello di considerare il massimo scarto tra le due funzioni: si considerano tutte le differenze f(x)-g(x) e si individua quella che in valore assoluto è la maggiore (fig. 2)

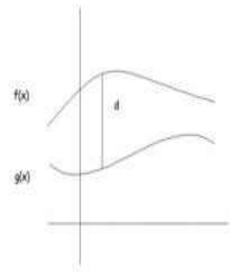


fig.2 primo esempio di distanza

Vediamo un esempio pratico: f(x) rappresenta i ricavi di un'azienda e g(x) le sue spese, la distanza in questo caso è data dal guadagno massimo registrato in un giorno.

Un altro esempio: f(x) rappresenta la temperatura di Lecce e g(x) quella di Torino; la distanza, in questo caso, è data dalla differenza massima di temperatura registrata nello stesso giorno a Lecce e a Torino.

Se invece si è più interessati a una distanza media, si deve considerare l'area racchiusa tra i due grafici (fig. 3). In questo caso sapremo per esempio la differenzia media di temperatura tra Lecce e Torino.

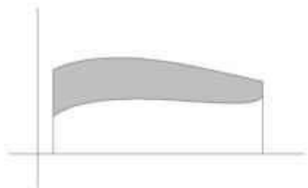


fig. 3 distanza media

E' evidente però che il modo di misurare la distanza tra due enti, pur essendo arbitraria, deve sottostare a delle limitazioni, alcune delle quali molto evidenti.

Proprietà triangolare: andare direttamente da Roma a Milano deve necessariamente essere più conveniente che passare per un'altra città; al più può essere indifferente se quest'ultima città si trova sul nostro percorso. Usando un pizzico di simbolismo

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

Una seconda proprietà, o assioma, è fin troppo ovvia per il modo usuale di ragionare. Tuttavia i matematici, abituati a snidare mostruosità logiche proprio nelle cose apparentemente ovvie, ci tengono a esplicitarla.

Un elemento ha distanza nulla da se stesso.

La terza proprietà sembra ovvia a prima vista ma riflettendoci un po' su, non lo è affatto. Si richiede infatti che *la distanza da A a B sia la stessa di quella da B a A.*

Un semplice esempio: A si trovi al livello del mare e B a 500 m di altezza. Dovendo andare in bicicletta è evidente che il percorso BA è più piacevole e più 'breve' del percorso AB.

Nel caso in cui valga quest'ultima proprietà si parla di *distanze simmetriche*, nel caso opposto si parla di *distanze asimmetriche*.

Di gran lunga più complesso è il problema di estendere il concetto di dimensione tipico dello spazio geometrico allo spazio funzionale.

Vi sono diversi modi per individuare le dimensioni di un ente geometrico. Per esempio, se siamo in autostrada possiamo andare solo avanti o indietro; questo fatto ci dice che siamo in uno 'spazio' a una dimensione. Se siamo in campagna possiamo andare avanti e indietro, a destra e a sinistra: questa doppia possibilità di scelta ci dice che siamo in uno 'spazio' a due dimensioni. Se siamo sott'acqua, o siamo in aereo, possiamo andare avanti-indietro, destra-sinistra, su - giù: tre possibilità di muoverci corrispondono a tre dimensioni.

Un altro modo è il seguente:

- Un segmento di un metro scomposto in centimetri si divide in 100 parti.
- Un quadrato di lato un metro scomposto in quadrati di lato un centimetro si divide in 100^2 parti.
- Un cubo di lato un metro scomposto in cubi di lato un centimetro si scompone in 100^3 parti.

L'esponente del numero 100 ci dice qual è il numero di dimensioni dell'oggetto considerato.

Gli spazi funzionali più interessanti dal punto di vista matematico e applicativo hanno purtroppo *dimensione infinita*. Si parla in questi casi di spazi di ***Hilbert***.

Uno spazio a una dimensione ha bisogno di una coordinata per individuare i suoi punti. Uno spazio a due dimensione ne ha bisogno di due, e così via. Uno spazio a infinite dimensioni necessita di una quantità infinita di coordinate.

In uno spazio così mostruoso l'intuizione matematica non può fare a meno di un severo controllo logico, il quale a sua volta necessità un simbolismo astratto piuttosto complesso.

Una delle applicazioni più importanti di questa branca di studi è il *calcolo delle variazioni*. Si tratta dell'estensione naturale della ricerca di massimi e minimi per una funzione. Invece di cercare i punti in cui la funzione assume valori massimi o minimi; si cercano, tra le tante possibili, quelle funzioni che rendono minima o massima una certa condizione.

Uno dei problemi classici del calcolo delle variazioni è quello delle superfici minime: assegnata una curva dello spazio, determinare la superficie di area minima avente come bordo la curva assegnata. Un altro problema classico è quello delle *geodetiche*, ossia la determinazione dei percorsi più brevi su una superficie curva.

Altre applicazioni importanti del calcolo delle variazioni riguardano la minimizzazione di costi (*teoria dell'ottimizzazione*), la minimizzazione di certi funzionali dell'energia di sistemi fisici soggetti a vincoli naturali, per esempio i cristalli liquidi, i problemi di transizione di fase nei materiali composti, problemi di omogeneizzazione e di rilassamento dei materiali.

Il calcolo differenziale e integrale

Il problema della tangente venne risolto con quello che Leibnitz chiamò «calcolo differenziale». Con esso viene ricavata dalla funzione data y una funzione dy/dx (detta «rapporto differenziale», da leggere «de ipsilon su de ics»), dove la d è un operatore che indica il «differenziale» ovvero l'«incremento infinitesimo» delle variabili. Tale funzione esprime dunque il coefficiente angolare della retta tangente al punto di ascissa x della funzione originaria. La prima regola stabilisce che il differenziale di una somma è uguale alla somma dei differenziali degli addendi: in un polinomio quindi si tratta semplicemente di differenziare separatamente ogni termine. La seconda regola indica quale sia il rapporto differenziale di un monomio. Si noti che essa è valida anche nel caso di costanti (che vanno considerati monomi di grado nullo) e di monomi con esponente negativo o frazionario. Benché la dimostrazione di queste due regole sia relativamente facile, la loro formulazione in termini così generali fu senza dubbio geniale.

Riguardo alla notazione e alla terminologia, abbiamo usato quasi esattamente quella di Leibnitz, che era sempre molto attento alla necessità di elaborare simboli comodi e coerenti. Essa è ancor oggi (con poche modifiche) usata, quantunque sia stata abbandonata la teoria intuitiva degli «infinitesimi» che le stava alla base. Il simbolo dx rimane così solo una comoda indicazione della variabile indipendente rispetto a cui bisogna differenziare la funzione (e anche un omaggio a Leibnitz). Ai termini «rapporto differenziale» e «differenziare» vengono però oggi preferiti «derivata» e «derivare», che risalgono a Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), che adoperò per primo anche il simbolo y' (oggi largamente usato) per indicare la derivata di y.

La situazione è simile per quanto riguarda il problema dell’area. Il procedimento qui introdotto venne chiamato da Leibnitz «calcolo integrale». Con esso dalla funzione data y viene ricavata una funzione Sy dx (detta «integrale», da leggere «integrale di ipsilon de ics»), in cui il simbolo S è una esse allungata che simboleggia la somma degli infiniti prodotti degli infinitesimi incrementi dell'ascissa per le ordinate corrispondenti. L’integrale dunque esprime, per ogni valore della funzione originaria, l’area del trapezoide delimitato nel modo prima descritto.

La scoperta forse più importante di Leibnitz è che i due problemi ora considerati sono strettamente legati, al punto che differenziazione e integrazione sono operazioni inverse: questo viene chiamato il «teorema fondamentale» del calcolo infinitesimale.

Questo teorema fondamentale aiuta a chiarire alcune importanti applicazioni del calcolo infinitesimale nella fisica. Data la funzione che esprime lo spostamento di un corpo in dipendenza del tempo, la derivata rappresenta la velocità, la derivata della velocità (ovvero la «derivata seconda» dello spostamento) rappresenta l'accelerazione. Inversamente, data la funzione che esprime l'accelerazione in dipendenza del tempo, l'integrale del tempo rappresenta la velocità, l'integrale della velocità rappresenta lo spostamento. La celebre formula $s = 1/2\ gt^2$ (scoperta già da Galilei) è dunque un semplice integrale secondo della funzione $f(t) = g$. Queste applicazioni fisiche furono il punto di partenza della sistemazione del calcolo infinitesimale operata da Newton. In suo onore in tali casi si usa ancora la simbologia che egli elaborò, in cui la derivata («flussione», diceva Newton) è indicata da un punto sopra la variabile.

Nella matematica contemporanea il «calcolo infinitesimale» viene per lo più spiegato prescindendo dall'idea intuitiva di «infinitesimo» e usando invece il concetto più facilmente definibile di «limite» (al nome di «calcolo infinitesimale» viene di conseguenza preferito quello di «analisi», introdotto nell'uso soprattutto da Leonhard Euler [1707-1783]). Questa diversa interpretazione, anticipata da Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) nella celebre *Encyclopédie* e resa rigorosa da Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), fa evidentemente vacillare le *conseguenze metafisiche* che Leibnitz credeva di poter trarre. Bisogna però anche ricordare che il problema del «continuo», che Leibnitz affrontò in connessione con il calcolo infinitesimale, è ancora oggi di grande attualità e per diversi aspetti insoluto. Inoltre, negli anni '60 il matematico Abraham Robinson (*Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam 1966) mostrò come fosse possibile dare un fondamento rigoroso all'idea di infinitesimo, partendo da alcuni sviluppi della teoria dei «numeri transfiniti» di Georg Cantor (1845-1918), un matematico che come Leibnitz sostenne l'esigenza di ammettere l'infinito attuale.

La logica - L'arte combinatoria

Benché le ricerche di Leibnitz nel campo della logica siano in sé molto importanti, la loro importanza storica è molto limitata: egli infatti non pubblicò praticamente nulla di ciò che scoprì, e si dovette attendere la fine dell'Ottocento perché ciò che per lui era già cosa nota venisse gradualmente riscoperto. Lo studio della logica è visto da Leibnitz in gran parte come alternativa al *Discorso sul metodo* di Descartes, giudicato troppo vago nei suoi criteri della «chiarezza e distinzione»:

> Vedo che gli uomini del nostro tempo abusano molto di quel famoso principio continuamente ripetuto: *qualsiasi cosa percepisco chiaramente e distintamente di qualcosa, è vero, ovvero può essere enunciato di essa.* Spesso infatti agli uomini che giudicano frettolosamente sembrano chiare e distinte cosa oscure e confuse. Dunque l'assioma è inutile se non vengono usati dei *criteri* del chiaro e del distinto ... e se non consta la verità delle idee. Del resto non sono da disprezzare quei criteri di verità degli enunciati che sono le regole della *logica comune*, che anche i geometri usano, che cioè nulla va ammesso come certo se non è provato da un'accurata esperienza o da una solida dimostrazione; e solida dimostrazione è quella che rispetta la forma prescritta dalla logica, non come se fossero necessari i sillogismi ordinati al modo scolastico ... , ma almeno in modo che l'argomentazione sia conclusiva in virtù della forma (come esempio di un'*argomentazione nella forma* debita potresti dire anche un qualsiasi calcolo legittimo); così né bisogna omettere qualche premessa necessaria, e tutte le premesse o devono essere già da prima dimostrate, o almeno vanno assunte a mo' d'ipotesi, nel qual caso anche la conclusione è ipotetica. Coloro che osserveranno attentamente queste norme facilmente si proteggeranno da idee ingannevoli (*Meditationes de cognitione, veritate et ideis* [G 4.422-426]).

Leibnitz non intende però semplicemente riprendere la logica antica e medioevale, ma concepisce l'idea di una sua radicale rifondazione, che viene da lui posta sotto il nome di «arte combinatoria» e che eserciterà una certa influenza anche sui posteri. In tale denominazione è implicito un netto progresso rispetto alle idee precedenti in materia:

> Chiamo arte combinatoria quella scienza (che si può dire anche in generale caratteristica, o *speciosa*), in cui si tratta di tutte le forme o formule delle cose, cioè della *qualità* in genere, o del simile e dissimile, in quanto da *a*, *b*, *c*, ecc. (che possono rappresentare quantità o altro), tra loro combinate nascono via via altre formule; essa si distingue dall'algebra che tratta delle formule applicate alla *quantità*, ovvero dell'eguale e dell'ineguale. L'algebra, pertanto, è subordinata alla combinatoria, e si serve continuamente delle sue regole, che peraltro sono di gran lunga più generali, e

valgono non solo per l'algebra soltanto, ma anche per l'arte decifratoria, per vari generi di giochi, per la stessa geometria trattata linearmente al modo degli antichi, insomma, dovunque entri in gioco la similitudine (*Sulla sintesi e l'analisi universale*, fine [G 7.292-298]).

Leibnitz concepisce insomma la logica come una scienza puramente formale, che offre una base universale per tutte le scienze. Il modello di tale scienza è offerto dalla matematica: in essa infatti il linguaggio naturale, di sua natura soggetto ad ambiguità e fraintendimenti, è abbandonato in favore di un linguaggio artificiale, che permette di effettuare la deduzione come un semplice «calcolo» di natura meccanica, cioè tramite la combinazione degli elementi del linguaggio; la stessa cosa deve avvenire nella logica, che dunque assume l'aspetto di una sorta di matematica generalizzata (e che perciò viene chiamata da Leibnitz anche «*mathesis universalis*»). Anche il nome «caratteristica» allude allo stesso fatto: la logica deve operare su simboli («caratteri») indipendentemente dal loro significato. Quest'idea, benché in parte ispirata dalla lettura di Hobbes e di Lullo, è in realtà di gran lunga più profonda; tra l'altro, essa rispecchia esattamente la concezione di logica che si affermerà nel Novecento, e che per questi motivi viene spesso chiamata «logica matematica».

La concezione della verità

Esiste una nozione logica che assume un'importanza fondamentale per l'intera filosofia di Leibniz. Si tratta del concetto di verità, evidentemente legato alla comprensione della logica come «arte combinatoria» e dunque puramente formale. Ecco uno dei numerosi testi in cui Leibnitz si pronuncia con chiarezza al riguardo:

È palese che ogni predicazione vera ha qualche fondamento nella natura delle cose, e quando una proposizione non è identica, vale a dire quando il predicato non è compreso espressamente nel soggetto, bisogna che vi sia compreso virtualmente, e questo è ciò che i filosofi chiamano *in-esse*, dicendo che il predicato è nel soggetto. Così bisogna che il termine del soggetto racchiuda sempre quello del predicato, di modo che colui che intendesse perfettamente la nozione del soggetto, giudicherebbe anche che il predicato gli appartiene. ... Dio, vedendo la nozione individuale o ecceità di Alessandro [Magno], vi vede in pari tempo il fondamento e la ragione di tutti i predicati che si possono dire di lui con verità, come per esempio che egli vincerà Dario e Poro, fino a conoscere *a priori* (e non per esperienza) se è morto di una morte naturale o avvelenato, il che noi possiamo sapere solo grazie alla storia (*Discorso di Metafisica*, 8 [G 4.427-463]).

In sintesi: la ragione della verità di una proposizione va trovata sempre e solo *all'interno* della proposizione stessa, e cioè nell'inclusione del predicato nel soggetto; questa inclusione può essere o evidente («il triangolo equilatero è un triangolo») o soltanto virtuale, nel qual caso è necessaria un'*analisi* completa del soggetto per mostrarvi la presenza del predicato, benché quest'analisi alla mente limitata dell'uomo possa risultare di fatto impossibile. Tutte le proposizioni vere hanno dunque *di per sé* la loro dimostrazione *a priori*, cioè indipendentemente dall'esperienza, anche se la maggior parte vengono conosciute dall'uomo solo *a posteriori*, e cioè dall'esperienza: che il 1º gennaio del 2000 a Roma faccia un certo tempo *di per sé* ha la sua dimostrazione *a priori*, in séguito cioè ad un'analisi del concetto di atmosfera terrestre; ma di fatto noi lo verremo a sapere solo quando giungerà quel giorno, dunque per esperienza. Tale concezione di verità non identifica però la realtà con la necessità, come avviene in Spinoza? Leibnitz rifiuta esplicitamente questa *conseguenza tirata già a suo tempo da Aristotele:*

Sembra che in questo modo sarà distrutta la differenza tra le verità contingenti e necessarie, che la libertà umana non avrà più alcun luogo, e che una fatalità assoluta regnerà su tutte le nostre azioni così come su tutti gli altri avvenimenti del mondo. ... Io dico che la connessione o conseguenza è di due tipi: una è assolutamente necessaria, e il suo contrario implica contraddizione, e questa deduzione ha luogo nelle verità eterne, come sono quelle della geometria; l'altra è necessaria solo *ex hypothesi*, e per così dire per accidente, ma essa è contingente in sé, quando il contrario non implica affatto contraddizione. E questa connessione è fondata non sulle idee del tutto pure e sul semplice intelletto di Dio, ma ancora sui suoi liberi decreti e sulla connessione dell'universo (*Discorso di Metafisica*, 13 [G 4.427-463]).

Si tratta di un punto di estrema importanza nella filosofia di Leibnitz, che dunque va ben chiarito. Le due proposizioni «il triangolo ha gli angoli interni eguali a due retti» e «Alessandro Magno vince Dario» hanno entrambe il motivo della loro verità in sé stesse, cioè i predicati sono presenti nei rispettivi soggetti. La loro differenza è chiara però quando si esaminano le proposizioni contrarie: «il triangolo *non* ha gli angoli interni eguali a due retti» e «Alessandro Magno *non* vince Dario». La prima è una proposizione certamente falsa, perché il concetto di «triangolo con gli angoli interni non eguali a due retti» è *contraddittorio*, come può essere facilmente dimostrato nella geometria euclidea. Ma il concetto di «Alessandro Magno che non vince Dario» non è in sé contraddittorio: benché nel nostro mondo esso non abbia esistenza, è immaginabile un mondo diverso in cui Alessandro Magno perda. Le verità *necessarie* (o *di ragione*) sono quindi quelle valide in *tutti i mondi possibili* (e cioè non contraddittori), le verità *contingenti* (o *di fatto*) sono quelle valide nel mondo *reale* ma non in tutti i mondi possibili. Esse sono dunque necessarie solo sulla base di una premessa (*ex hypothesi*): *dato che* questo è il mondo esistente, allora necessariamente Alessandro vince Dario. Ciò si può esprimere anche dicendo che le verità necessarie sono fondate sull'*intelletto* di Dio, che pensa tutti i mondi possibili, mentre quelle contingenti sono fondate sulla *volontà* di Dio, che ha deciso quale di questi mondi possibili creare, cioè rendere reale.

Da ciò si ricava anche che ci sono in realtà proposizioni contingenti che, contro la regola generale, non hanno una prova *a priori*, o perlomeno non nel senso in cui la posseggono le altre: le proposizioni esistenziali, che affermano se qualcosa esiste o no. Nel concetto di Alessandro Magno non è compresa la sua esistenza. Ciò avviene -- eccezione dell'eccezione -- solo nel caso di Dio.

Da questa concezione della verità discende la supremazia di due princìpi logici:

I nostri ragionamenti sono fondati su *due grandi princìpi*:

il *principio di contraddizione*, in virtù del quale giudichiamo *falso* ciò che la includa, e *vero* ciò che è opposto al contraddittorio o falso;

e il *principio di ragion sufficiente*, in virtù del quale consideriamo che nessun fatto potrebbe essere vero, o esistente, nessuna enunciazione vera, senza che vi sia una ragione sufficiente perché sia così e non altrimenti, benché queste ragioni il più delle volte possano non esserci affatto note.

... La *ragione sufficiente* si deve trovare anche nelle verità *contingenti o di fatto*, cioè nella sequenza delle cose distribuite nell'universo delle creature, dove la risoluzione in ragioni particolari potrebbe andare fino ad un dettaglio senza limiti, a causa della varietà immensa delle cose della natura e della divisione dei corpi all'infinito (*Monadologia*, 31-32; 36 [G 6.607-623]).

I due princìpi sono in gran parte complementari: se infatti il principio di contraddizione (detto anche «di non contraddizione») afferma che le proposizioni in cui il predicato è incluso nel soggetto sono vere, il principio di ragion sufficiente afferma che nelle proposizioni vere dev'esserci una ragione della loro verità, e cioè anzitutto l'inclusione del predicato nel soggetto. Leibnitz si preoccupa di far notare che questo principio si applica anche alle verità contingenti, in cui l'analisi del soggetto potrebbe dover andare all'infinito e dunque essere di fatto impossibile all'uomo (un'idea questa evidentemente ispirata dal *calcolo infinitesimale*).

Ciò non significa -- come spesso è stato affermato -- che il principio di non contraddizione riguardi solo le verità necessarie e quello di ragion sufficiente solo le verità contingenti: entrambi riguardano ogni verità. È però vero che il principio di ragion sufficiente ha un'estensione maggiore di quello di non contraddizione, perché si estende anche alle proposizioni contingenti esistenziali, sebbene mutando leggermente di significato: lì la ragion sufficiente della verità non può consistere certo nella presenza del predicato nel soggetto. Proprio quest'uso del principio di ragion sufficiente è in grado secondo Leibnitz di condurre alla *metafisica*, che s'interroga sull'esistenza delle cose e sulla sua causa.

Nel XX secolo, l'analisi legittimò finalmente l'uso degli infinitesimi, mentre lo sviluppo dei computer ampliò gli orizzonti di applicabilità del calcolo infinitesimale.

L'8 agosto del 1900 **Hilbert** fece uno storico discorso al congresso internazionale di Matematica a Parigi, ponendo 23 problemi di matematica irrisolti e urgenti, come il motto che fece scrivere sotto la sua tomba: *"noi dobbiamo sapere, noi sapremo!"*

David Hilbert (1862-1943), tedesco

Fu il principale esponente della "formalizzazione" matematica, nei diversi cambi dalla geometria alla logica.

Johann Ludwig von Neumann (1903-1957), ungherese. Uno dei teorici che ha dato un grande sviluppo alle forme più astratte della matematica, comprese le forme logiche per gli elaboratori elettronici. Tuttavia é più celebre come inventore della "teoria dei giochi" applicata all'economia.

Kurt Godel (1906), cecoslovacco. Esponente di rilievo, assieme al polacco Alfred Tarski, della scuola logico-matematica. Ha chiarito le differenze che esistono fra un senso comune e verità dimostrabili matematicamente. Kurt Godel**,** soprannominato il " signor perché" , pubblica nel 1930 uno scritto importante: "*Sulle proposizioni formalmente indecidibili nei principia mathematica e sistemi connessi*" contenenti i teoremi sulla indicibilità delle proposizioni:

1 teorema: se la teoria assiomatica è completa, esistono teoremi che non possono essere dimostrati né confutati.

2 teorema: non esiste un procedimento costruttivo che dimostri la coerenza di una teoria assiomatica.

Cercare di creare un sistema matematico completo e coerente è impossibile. basta pensare al paradosso del mentitore: ***Epimedide affermò: " io sono un mentitore":***questa affermazione non è nè vera nè falsa e Godel afferma che non ammette nessuna dimostrazione, cioè è un enunciato indecidibile. Infatti :se l'affermazione è vera, si contraddice; se è falsa allora ...contraddice la sua verità.

Indirizzi della matematica nel XX secolo:

- **logicismo**: la matematica trova le sue basi nella logica ma essa è considerata una forma di pensiero assiomatico in cui a partire da premesse arbitrarie si traggono conclusioni valide (Russel)
- **intuizionismo:** la matematica non è subordinata alla logica e deve manifestare le leggi dell'intelligenza umana.e' l'intuizione che rende evidenti i concetti e le deduzioni (Sylvester, Poincarre)
- **formalismo**: la matematica è come un gioco privo di significato in cui si gioca con contrassegni privi di significato secondo regole formali concordate in partenza. E' un'attività autonoma del pensiero (Hilbert)

Il premio Wolfshehl

Nel 1908 **Paul Wolfshehl,** un industriale tedesco appassionato di matematica e di famiglia ricchissima decise , in seguito ad una delusione amorosa di suicidarsi e preparò con cura il momento: sistemò gli affari, fece testamento e poi il giorno convenuto, per ingannare il tempo fino alla mezzanotte (ora decisa per il suicidio) si immerse nella lettura di un saggio di matematica che spiegava il lavoro di Kummer che analizzava il fallimento del tentativo di Cauychy e Lamè di dimostrare l'ultimo teorema di Fermat.Egli ,seguendo con cura il ragionamento di Kummer , si rese conto di trovare un presupposto senza giustificazione..... si chiese se aveva scoperto un grave errore o se l'assunzione di Kummer fosse invece giustificata. Wolfshehl emozionato per la scoperta ...intraprese lo sviluppo di una dimostrazione per confermare o confutare il passaggio debole trovato. All'alba la dimostrazione era completa e confermava l'asserto di Kummer...ma intanto l'ora del suicidio era passata e Paul Wolfshehl era così fiero del suo contributo che la disperazione e lo sconforto si dileguarono.

Egli morì poi nel 1908, destinando una bella quota del suo patrimonio come premio da assegnare a chiunque avesse dimostrato l'ultimo teorema di Fermat. ricompensa di 100.000 marchi (3 miliardi oggi) era il suo modo di ripagare il debito verso l'enigma che gli aveva salvato la vita. Il denaro venne affidato alla Regia società delle scienze di Gottinga che bandì il premio chiamato appunto ***premio Wolfshehl.*** Nonostante la pubblicità il premio non costituì interesse per la maggior parte dei matematici che lo consideravano una causa persa.

Andrew Willes si dedicò all'ultimo teorema di Fermat sin da studente. Decise dopo i primi fallimenti di studiare i lavori di tutti i matematici del 700 e dell' 800. Il 27 giugno 1996 **Andrew Wiles** incassò il ***premio Wolfshehl*** (cinquantamila dollari) per aver risolto ***L'ultimo teorema di Fermat***

Andrew Wiles - Riceve il Premio

Il premio Fields

Fino ad oggi il miglior riconoscimento per un matematico era il **premio Fields**: inventato nel 1924 dall'unione dei matematici. Il premio Fields ogni quattro anni assegna una medaglia a quattro fra i migliori matematici...solo che le medaglie fields sono premi fra matematici e rimangono sconosciute al grande pubblico. L'unico italiano che abbia vinto il premio Fields è **Enrico Bombelli** nel 1974.

Il premio Abel

Ora finalmente i matematici ottengono soddisfazione, non dalla Svezia (sede del Nobel) ma dalla Norvegia che a 100 anni dalla istituzione del premio Nobel ha creato il "**PREMIO ABEL**", nel nome del più importante scienziato matematico norvegese morto appena a 27 anni: **Niels Henrik Abel .**

Ogni anno saranno premiati i matematici che meglio rappresentino il progresso di questa disciplina, scelti da una giuria internazionale di colleghi. Il premio sarà di mezzo milione di dollari.

I primi passi della teoria dei quanti

Alla fine del secolo scorso il problema più scottante per la fisica teorica era quello della comprensione dei dati sperimentali sulla radiazione elettromagnetica dalle cavità isoterme. Fin dal 1859 grazie a Kirchoff si era giunti ad alcune cognizioni fondamentali sulla natura della radiazione termica: buoni assorbitori dovevano essere anche buoni emettitori di radiazione, e la radiazione nelle cavità doveva essere non polarizzata ed isotropa. Ma gli strumenti a disposizione dei fisici del tempo in questo campo verso la fine del secolo, le ormai celebrate leggi di Maxwell per l'elettromagnetismo, le leggi della termodinamica e quelle della statistica classica, avevano permesso di derivare leggi importanti sulla radiazione termica □ la legge di Stefan-Boltzmann, che descriveva la dipendenza da T della potenza irradiata dai corpi, e la legge dello spostamento di Wien, che stabiliva come la distribuzione delle lunghezze d'onda dovesse scalare come l'inverso della temperatura del corpo. La loro applicazione alla determinazione della forma funzionale della densità di energia di una cavità isoterma produceva tuttavia un insuccesso clamoroso: non solo i risultati non erano in accordo con le determinazioni sperimentali, ma la previsione teorica non poteva essere corretta, dato che prevedeva un aumento indefinito della densità di energia all'aumentare della frequenza della radiazione. Il problema della cavità isoterma fu fornita da Max Planck nel 1900: egli scoprì che se a ciascun modo normale di oscillazione veniva associata una energia media dipendente dalla frequenza, si poteva riprodurre la forma sperimentale della funzione □. Planck ipotizzò che ad ogni modo di oscillazione andasse assegnata un'energia e bisognava allora calcolare la distribuzione di queste energie tra gli oscillatori usando la statistica di Boltzmann. Planck era in accordo perfetto con tutti i dati sperimentali, e ciò gli permise anche una precisa misura della carica elementare dell'elettrone. Il valore trovato da Planck si discosta dal valore corrente per solamente il 2.3% !

Al lavoro di Planck non fu dato alcun rilievo dalla comunità fisica del tempo. La sua ipotesi di una quantizzazione dell'energia delle onde elettromagnetiche era così originale che egli stesso fu restio a dare importanza fisica al suo metodo di calcolo, cosicché invece di mettersi al lavoro sulle implicazioni della sua ipotesi si mise alla ricerca di una derivazione della sua formula mediante metodi classici □ cosa che non era riuscita a Raileigh, e che non riuscì nemmeno a lui.

Dell'ipotesi della quantizzazione dell'energia non si seppe più nulla per cinque anni, fino a quando Einstein non la utilizzò per dare spiegazione di alcuni fatti sperimentali già noti dal lavoro di Lenard sull'emissione di elettroni dai metalli illuminati da luce ultravioletta. Einstein ipotizzò che la radiazione fosse composta da un gran numero di corpuscoli, ciascuno trasportante una quantità di energia dipendente dalla frequenza della luce: E = h□□□Questa assunzione gli permise di prevedere gli aspetti essenziali dell'effetto fotoelettrico dieci anni prima che fosse possibile a Millikan di verificarne l'esattezza, e gli valse il premio Nobel. Va tuttavia notato che ancora nel 1914 c'era molto scetticismo sull'ipotesi dei quanti, se è vero che, nell'accogliere Einstein come membro onorario dell'accademia Prussiana delle Scienze, gli fu addebitata l'ipotesi dei quanti come un "passo falso". In effetti, nel 1912 la scoperta della diffrazione di raggi X dai cristalli aveva permesso a Max Von Laue una nuova evidenza della natura ondulatoria anche della radiazione più penetrante allora conosciuta.

Bibliografia

[1] F. Casolaro: *La Matematica nell'insegnamento della Fisica* - Atti del Convegno Nazionale Mathesis: "*Cento anni di matematica*". Palombi Editori - Roma,1995.

[2] F. Casolaro - L. Cirillo*: Le trasformazioni omologiche* - Atti del Congresso Nazionale Mathesis: *I fondamenti della matematica per la sua didattica e nei suoi legami con la scienza contemporanea* - Verona, 1996.

[3] F. Casolaro - R. Santarossa: *Geometrie non euclidee e geometria differenziale: note didattiche*. Atti del Congresso nazionale Mathesis: "*Attività algoritmiche e pensiero dialettico nello insegnamento della matematica*" - Caserta, 1997.

[4] F. Casolaro - R. Prosperi: *La Matematica nelle Scienze applicate: equazioni algebriche ed equazioni differenziali nei programmi degli istituti tecnici* - Atti del Congresso nazionale Mathesis - Mantova 2001, pag. 173-186.

[5] F. Casolaro - *L'insegnamento dell'analisi matematica nella scuola secondaria superiore* - Appunti del corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica 2001/2002 - Università di Napoli.

[6] Atti del corso *Disegno e Matematica: Proposte per una didattica finalizzata all'uso delle nuove tecnologie*, a cura di Cesare Cundari: Sorrento, 11-15 dicembre 1990; Roma, 6-10 maggio, 8-12 dicembre 1991 - M. P. I. e Dipartimento di Rappresentazione e Rilievo della Facoltà di Ingegneria dell'Università "La Sapienza" di Roma:

- F. Casolaro: *Il Programma di Erlangen e le Trasformazioni geometriche*; pag.101-103; 220-231.
- F. Casolaro: *Proiettività tra piani. Legge di dualità. Omografia ed omologia*; pag. 104 -118.
- F. Casolaro: *L'algebra delle matrici*; pag. 85-90.
- F. Casolaro: *La geometria Analitica: cenni storici e funzione didattica*; pag. 91-100.

[7] G. Loria: *Storia della Geometria Descrittiva: dalle origini sino ai nostri giorni*. Hoepli Editore - Milano 1921.

[8] F. Casolaro - C. Di Foggia: *La didattica breve* - Atti del convegno Nazionale "*Matematica nel 2000*" - Ortona, 22-24 aprile 1998.

[9] Morris Kline - *Storia del pensiero matematico* - Einaudi Editori.

[10] F. Casolaro: *Le trasformazioni omologiche nella Storia, nell'Arte, nella Didattica*. Convegno internazionale "*Arte e Matematica*" - Vasto, 10-12 aprile 2003.

[11] F. Casolaro: *Un percorso di geometria per la scuola del terzo millennio: dal piano cartesiano ad un modello analitico su uno spazio curvo* – Atti del Congresso nazionale Mathesis – Bergamo 2003.

[12] F. Casolaro: *Conoscenze matematiche e questioni etiche nei percorsi universitari delle lauree riformate*

[13] *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi* - a cura di Luigi Berzolari. Ed. Hoepli.

[14] Morris Kline - *Storia del pensiero matematico* - Einaudi Editori.

[15] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 1980

[16] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1996

[17] Jean Dieudonnè, *L'arte dei numeri*, Mondadori, 1995

[18] *Le forme dell'universo: dieci possibilità*, Le Scienze, N.414, febbraio 2003

[19] *Bagliori della materia oscura* , Le Scienze , N.405, ottobre 2002

[20] N.Bourbaki, *Elementi di storia della matematica,* Feltrinelli, Milano, 1963

[21] E. De Giorgi, *Sviluppi dell'Analisi Funzionale del Novecento*, in AA.VV. *Morte di un matematico napoletano*, Ubulibri, Milano, 1992.

[22] C.F.Manara e G.Giorello, *La matematica nel XX secolo,* in *Storia delle Scienze*, a cura di E.Agazzi, Città Nuova Editrice, Roma, 1984.

[23] F.Severi e F.Conforto, *Caratteri e indirizzi della matematica moderna* in *Enciclopedia delle matematiche elementari*, a cura di L. Berzolari, Hoepli, Milano, 1962.