Bollettino dell'AFSU
Vol. 1(1), dicembre 2018, pp. 55-74

pISSN: 2612-4084
eISSN: 2612-3630

Nuove prospettive in Algebra, Geometria e Teoria delle Decisioni. Iperstrutture Algebriche, Geometrie Join e Misure dell'Incertezza

Antonio Maturo*

***Già Professore Ordinario di Matematica per l'Economia; email antmat@libero.it**

Sunto: La teoria delle iperstrutture algebriche, sviluppatasi soprattutto negli ultimi 40 anni, generalizza il concetto di struttura algebrica, prevedendo la possibilità di avere operazioni a più risultati. Le Geometrie Join forniscono un'utile generalizzazione della Geometrie Euclidea e della Geometria Proiettiva, mettendo in risalto analogie fra diverse Geometrie. Recentemente si è visto che le Geometrie Join sono un particolare tipo di iperstruttura algebrica e ciò ha portato ad ottenere una importante unificazione dei concetti algebrici e geometrici. Un ulteriore risultato è l'interpretazione in termini di Geometrie Join delle Probabilità Soggettive Coerenti e ciò ha portato a vedere le Geometrie Join come possibili strumenti per la misura dell'incertezza e quindi per poter prendere decisioni in condizioni di incertezza. In questo lavoro si presentano le idee fondamentali di queste teorie, evidenziando come esse permettono di avere una visione unitaria di vari rami della matematica.

Parole Chiave: Iperstrutture algebriche. Geometrie Join. Decisioni in condizioni di incertezza.

1. Introduzione

La teoria delle iperstrutture algebriche è nata con il lavoro di Marty (1934) al VIII Congresso dei matematici scandinavi ed è stata sviluppata negli ultimi 40 anni.

Nel libro *Prolegomena of hypergroup theory* (Corsini, 1993) sono stati presentati tutti i risultati fondamentali sulle iperstrutture algebriche fino al 1992. Un particolare rilievo è dato al concetto di “ipergruppo” che è una iperstruttura algebrica soddisfacente a proprietà che sono una generalizzazione di quella di “gruppo” in algebra.

Una dettagliata presentazione dei risultati ottenuti fino al 2003 è in (Corsini, Leoreanu, 2003). Ulteriori risultati e approfondimenti sono in molti lavori scientifici, ad es., in (Vougiouklis, 1994, 1999, 2008).

Un approccio originale e generale allo studio della geometria, basato sul concetto di “connessione” fra coppie di punti si trova nel testo di base "Join Geometries" di Prenowitz e Jantosciak (1979), che partendo dalle idee di Euclide e poi di Hilbert, le generalizza introducendo una geometria indipendente dalla dimensione dello spazio.

Collegando le idee sulle iperstrutture algebriche con quelle delle geometrie join, che in italiano chiameremo “geometrie di connessione”, si ottiene una visione interdisciplinare di geometria e algebra, per mezzo del concetto di “spazio join”, in italiano “spazio di connessione”. Le geometrie di connessione sono definite come spazi di connessione soddisfacenti alcuni assiomi aggiuntivi.

Rientrano fra gli spazi di connessione le geometrie proiettive, nella loro definizione più generale (Beutelspacher, Rosembaum, 1998), che comprendono in particolare la geometria proiettiva basata sul piano o lo spazio euclideo e le geometrie proiettive finite.

Lo studio delle applicazioni delle iperstrutture algebriche al trattamento dell’incertezza e ai problemi decisionali in Architettura e nelle Scienze Sociali inizia con una serie di conferenze tenute, su invito di Franco

Eugeni e Antonio Maturo, presso la Facoltà di Architettura di Pescara da Giuseppe Tallini nel 1993, sulle iperstrutture algebriche da un punto di vista geometrico.

Tale tema è stato trattato in vari congressi AHA (Algebraic Hyperstructures and Applications) nonché in vari seminari e conferenze a Chieti e Pescara con Tallini e Piergiulio Corsini dal 1994 al 2014. Ad esempio, nel dicembre 1994 a Chieti e nell'ottobre 1995 a Pescara, Corsini, Eugeni e Maturo hanno organizzati due convegni su "Iperstrutture algebriche e loro applicazioni in crittografia, geometria e trattamento dell'incertezza" con cui è stato avviato lo studio sistematico delle applicazioni delle iperstrutture algebriche all'Architettura e alle Scienze Sociali.

In (Corsini, 1994) si dimostra che gli insiemi fuzzy sono particolari ipergruppi. Questo fatto ci porta ad esaminare le proprietà delle partizioni fuzzy dal punto di vista della teoria degli ipergruppi. In particolare, le classificazioni crisp e fuzzy possono essere ben rappresentate da ipergruppi.

Alcuni risultati su questo argomento e le applicazioni in Architettura si trovano nei lavori di Ferri e Maturo (1997, 1998, 1999a, 1999b, 2001a, 2001b). Applicazioni delle iperstrutture in Architettura sono anche in (Dramalidis, Vougiouklis, 2012).

Applicazioni delle iperstrutture al trattamento dell'incertezza sono in (Doria, Maturo, 1995, 1996; Maturo, 2006, 2008a, 2008b, 2009; Maturo, Squillante, Ventre, 2010), in cui sono rappresentate le probabilità coerenti e altre misure di incertezza per mezzo di spazi join.

Un nuovo trend di ricerca riguarda le applicazioni delle iperstrutture algebriche alle scienze sociali. Vougiouklis, (2009), propone le iperstrutture algebriche come modelli nelle scienze sociali; Hoskova-Mayerova e Maturo analizzano le relazioni sociali ed i comportamenti del gruppo sociale con set fuzzy e H_v-structures (2013, 2014) e introducono alcune generalizzazioni degli indici di Moreno.

2. Le iperstrutture algebriche: un ponte fra algebra e geometria

2.1 Definizioni fondamentali sulle iperstrutture algebriche

Ricordiamo alcune delle principali definizioni sulle iperstrutture algebriche, che verranno applicate in questo articolo per costruire gli spazi join e le geometrie join. Si vedrà anche come le iperstrutture algebriche possono essere utili per la rappresentazione dell'incertezza, in particolare per ottenere un originale inquadramento di alcuni concetti di logica e probabilità soggettiva e per qualche applicazione in Architettura.

Per ulteriori dettagli sulla teoria iperstrutture algebriche, rinviamo ai testi (Corsini, 1993; Corsini, Leoreanu, 2003; Vougiouklis, 1994, 1999). Una presentazione elementare della teoria, che mostra come le iperstrutture algebriche sono un ponte fra Algebra e Geometria, si trova in (Di Gennaro, Maturo, 2002; Maturo, 2008b).

Definizione 2.1 Sia H un insieme non vuoto e sia $\wp^*(H)$ la famiglia di sottoinsiemi non vuoti di H. Si definisce *iperoperazione* in H una funzione σ: $H \times H \to \wp^*(H)$, che ad ogni coppia ordinata (a, b) di elementi di H associa un sottoinsieme non vuoto di H, indicato con $a\sigma b$. La coppia (H, σ) si dice *ipergruppoide* con *supporto* H e *iperoperazione* σ. L'insieme $a\sigma b$ si dice *iperprodotto* di a e b, nell'ordine, rispetto all'iperoperazione σ oppure, brevemente, σ-iperprodotto di a e b.

Se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di H, si pone $A\sigma B = \cup \{a\sigma b: a\in A, b\in B\}$. Inoltre, $\forall a, b\in H$, si pone $a\sigma B = \{a\}\sigma B$ e $A\sigma b = A\sigma\{b\}$.

Definizione 2.2 Un ipergruppoide (H, σ) si dice:

- *Commutativo,* se $\forall a, b\in H$, $a\sigma b = b\sigma a$;
- *Associativo,* se $\forall a, b, c\in H$, $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$;

- *Riproducibile,* se $\forall a \in H$, $a\sigma H = H = H\sigma a$;
- *Idempotente*, se$\forall a \in H$, $a\sigma a=\{a\}$;
- *Aperto*, se $\forall a, b \in H$, $a \neq b$, $a\sigma b \cap \{a, b\} = \emptyset$;
- *Chiuso*, se $\forall a, b \in H$, $a\sigma b \supseteq \{a, b\}$.

L'ipergruppoide (H, σ) si dice *semi-ipergruppo* se è associativo, *quasi-ipergruppo* se è riproducibile, *ipergruppo* se è sia un *semi-ipergruppo* sia un *quasi-ipergruppo*.

Se, per ogni $a, b \in H$, $a\sigma b$ si riduce ad un singleton, allora la coppia (H, σ) si riduce ad un classico gruppoide. In particolare si riduce a un *semigruppo*, *quasigruppo* e *gruppo* se (H, σ) è, rispettivamente, semi-ipergruppo, quasi-ipergruppo, ipergruppo.

Se (H, σ) è un quasi-ipergruppo commutativo si può definire la σ-divisione come l'iperoperazione $/_\sigma : (a, b) \in H \times H \to a /_\sigma b = \{x \in H: a \in b\sigma x\}$.

2.2 Iperstrutture algebriche e spazi geometrici

Dal punto di vista geometrico, dato un ipergruppoide (H, σ), gli elementi di H si dicono *punti* e gli iperprodotti $a\sigma b$ si dicono *blocchi*. Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme di tutti i blocchi.

Si considerano le seguenti relazioni, simmetriche e riflessive, in $H \cup \mathcal{B}$:

(incidenza sinistra I_s) $\forall a, b \in H$, $\forall B, C \in \mathcal{B}$,

- $a\ I_s\ B$ se e solo se esiste $x \in H$: $a\sigma x = B$;
- $B\ I_s\ a$ se e solo se $a\ I_s\ B$;
- $a\ I_s\ b \Leftrightarrow a = b$; $B\ I_s\ C \Leftrightarrow B = C$.

(incidenza destra I_d) $\forall a, b \in H$, $\forall B, C \in \mathcal{B}$,

- $a\ I_d\ B$ se e solo se esiste $x \in H$: $x\sigma a = B$;

- B I_d a se e solo se a I_d B;
- a I_d b $\Leftrightarrow$ a = b; B I_d C $\Leftrightarrow$ B = C.

(incidenza I) $\forall$a, b$\in$H, $\forall$B, C$\in\mathcal{B}$,

- a I B se e solo se a I_s B oppure a I_d B;
- a I b $\Leftrightarrow$ a = b; B I C $\Leftrightarrow$ B = C.

Se l'ipergruppoide (H, σ) è commutativo allora $I_s = I_d = I$ coincidono. Si ottiene allora uno spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I), detto spazio *geometrico associato* a (H, σ). Inoltre, si dice che i punti a e b sono *incidenti* con il blocco aσb e viceversa il blocco aσb è incidente con a e b.

Viceversa, se (H, $\mathcal{B}$, I) è uno spazio geometrico e vale l'assioma:

(A1) dati due punti a, b distinti, esiste un solo blocco B(a, b) incidente con a e b;

allora si può definire l'iperoperazione σ: (a, b)$\in$H$\times$H $\rightarrow$ B(a, b)$\in\wp^*$(H).

Esempio 2.1. Sia H = R^n. Se poniamo

- aσb uguale al segmento aperto di estremi a e b, per a $\neq$ b;
- aσa = {a};

la coppia (H, σ) è un ipergruppo commutativo e idempotente.

In particolare:

- per a $\neq$ b, a $/_\sigma$ b è la semiretta aperta di origine a non contenente b;
- a $/_\sigma$ a = {a};
- la retta passante per due punti distinti a, b è l'unione degli insiemi, a due a due disgiunti, aσb, a $/_\sigma$ b, b $/_\sigma$ a, a $/_\sigma$ a, b $/_\sigma$ b.

Se a, b, c sono tre punti distinti di H non allineati allora $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$ è l'insieme dei punti interni del triangolo di vertici a, b, c.

Lo spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I) associato a (H, σ) si dice *spazio euclideo aperto* di dimensione n.

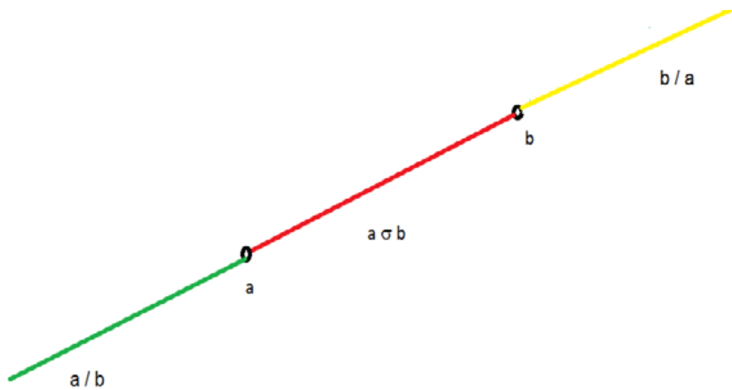

Fig. 1

<u>Esempio 2.2.</u> Sia H = R^n. Se poniamo $a\sigma b$ uguale al segmento chiuso di estremi a e b allora la coppia (H, σ) è un ipergruppo commutativo e idempotente. In particolare:

- per $a \neq b$, $a /_\sigma b$ è la semiretta chiusa di origine a non contenente b;
- $a /_\sigma a = H$;
- la retta passante per due punti distinti a, b è l'unione degli insiemi, $a\sigma b$, $a /_\sigma b$, $b /_\sigma a$, e risulta $a /_\sigma b \cap b /_\sigma a = \emptyset$; $a\sigma b \cap a /_\sigma b = \{a\}$; $a\sigma b \cap b /_\sigma a = \{b\}$;
- $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$ è l'insieme dei punti del triangolo chiuso di vertici a, b, c (degenere se i punti sono allineati).

Lo spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I) associato a (H, σ) si dice *spazio euclideo chiuso* di dimensione n.

<u>Esempio 2.3.</u> Sia H = R^n. Se poniamo

- aσb uguale alla retta passante per a e b, per a ≠ b;
- aσa = {a};

la coppia (H, σ) è un quasi-ipergruppo commutativo e idempotente.

Se a e b sono punti distinti, allora $a /_\sigma b$ = aσb, mentre $a /_\sigma a$ = H.

Se a, b, c sono tre punti distinti di H non allineati allora (aσb)σc è l’insieme dei punti del piano Π passante per a, b, c con esclusione della retta per c parallela alla retta aσb, mentre aσ(bσc) è l’insieme dei punti di Π esclusi i punti della retta per a parallela a bσc. Non vale la proprietà associativa.

Lo spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I) associato a (H, σ) è lo *spazio affine* a n dimensioni sui reali.

<u>Esempio 2.4.</u> Sia H = $R^n \cup \Pi_\infty$, dove Π_∞ è l’iperpiano formato dai punti impropri di R^n, Se poniamo

- aσb uguale alla retta passante per a e b, per a ≠ b;
- aσa = {a};

la coppia (H, σ) è un ipergruppo commutativo e idempotente.

Anche per questo ipergruppo, se a e b sono punti distinti, allora $a /_\sigma b$ = aσb. Inoltre $a /_\sigma a$ = H.

Se a, b, c sono tre punti distinti di H non allineati allora (aσb)σc = aσ(bσc) è l’insieme dei punti del piano proiettivo per a, b, c.

Lo spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I) è lo *spazio proiettivo* a n dimensioni sui reali.

2.3 Iperstrutture algebriche non commutative e spazi geometrici orientati

Se l'ipergruppoide (H, σ) non è commutativo allora le relazioni I_s e I_d non coincidono. Estendendo le notazioni anche al caso non commutativo, possiamo dire che l'ipergruppoide (H, σ) individua lo spazio geometrico orientato (H, $\mathcal{B}$, I_s, I_d), in cui ogni blocco aσb, con a $\neq$ b, ha primo estremo a e secondo estremo b.

Esempio 2.5 Sia H = R^n. Se poniamo

- aσb uguale al segmento semiaperto [a, b) di estremi a e b, per a $\neq$ b;
- aσa = {a};

lo spazio geometrico orientato associato (H, $\mathcal{B}$, I_s, I_d) è lo spazio euclideo a n dimensioni, in cui ogni segmento [a, b) è considerato orientato nel verso che va dal punto a al punto b.

Esempio 2.6 Sia H = R^n. Se poniamo

- aσb uguale alla retta passante per a e b, orientata nel verso dal punto a al punto b, per a$\neq$b;
- aσa = {a};

lo spazio geometrico orientato associato (H, $\mathcal{B}$, I_s, I_d) è lo spazio affine a n dimensioni sui reali, in cui ogni retta aσb è considerata orientata nel verso che va dal punto a al punto b.

Usualmente, considerando un ipergruppoide (H, σ) da un punto di vista geometrico, si richiede che esso sia almeno un quasi-ipergruppo commutativo e idempotente. Inoltre ogni elemento, di H o di $\mathcal{B}$, è incidente con se stesso. Preferibilmente si richiede che sia un ipergruppo, ossia che valga anche la proprietà associativa.

Se non vale la proprietà associativa, come accade per gli spazi affini, si richiede che almeno valga la seguente:

(Debole associatività) $\forall a, b \in H, (a\sigma b)\sigma c \cap a\sigma(b\sigma c) \neq \emptyset$.

Lo studio delle iperstrutture debolmente associative è stato portato avanti soprattutto da Vougiouklis in vari lavori (1994, 1999, 2008). Applicazioni di tali iperstrutture alla logica e alla probabilità sono in (Doria, Maturo, 1995, 1996).

3. Geometria Euclidea, Geometria Proiettiva e Geometria Join

3.1 Spazi join e geometrie join

I concetti su spazi join e geometrie join sono stati introdotti nel testo di base "Join Geometries" di Prenowitz e Jantosciak (1979). Successivamente, con l'avvento e la diffusione della teoria delle iperstrutture algebriche, le definizioni sono state rielaborate utilizzando la terminologia degli ipergruppoidi. Fondamentale è la seguente definizione:

<u>Definizione 3.1.</u> Un ipergruppo (H, σ) è detto *spazio join* (o *spazio di connessione*) se:

(1) (H, σ) è commutativo e idem potente;

(2) vale la seguente proprietà di incidenza:

$$\forall a, b, c, d \in H,\ a /_{\sigma} b \cap c /_{\sigma} d \neq \emptyset \Rightarrow a\, \sigma\, d \cap b\, \sigma\, c \neq \emptyset.$$

Definizione 3.2. Un join space (H, σ) è detto *geometria join* (o *geometria di connessione*) se vale anche la proprietà:

(3) ($/_\sigma$ - idempotenza) $\forall a \in H$, $a /_\sigma a = \{a\}$.

Si può verificare il seguente:

Corollario 3.1. Uno spazio join (H, σ) è una geometria join se e solo se è aperto.

La seguente definizione introduce un ordinamento:

Definizione 3.3 Diciamo che uno spazio join (H, σ) è *ordinato* se:

(4) $\forall a, b, c \in H$, $(a \in b\sigma c,\ b \in a\sigma c) \Rightarrow a = b$.

Per analogia con gli spazi euclidei un iperprodotto $a\sigma b$ di uno spazio join ordinato può essere chiamato *σ-segmento* o semplicemente *segmento* se l'iperoperazione σ è sottointesa.

Corollario 3.2. In uno spazio join ordinato gli insiemi $a\sigma b$ e $a /_\sigma b$ hanno in comune al più il punto a.

Dimostrazione. Sia $x \in a\sigma b$. Se $x \in a /_\sigma b$ allora $a \in x\sigma b$. Per la (4) segue che $a = x$.

Per il corollario precedente, la situazione opposta a quella di spazio join ordinato è data dalla seguente definizione:

Definizione 3.4 Diciamo che uno spazio join (H, σ) è *uno spazio di rette* se:

(5) $\forall a, b \in H$, $a \neq b$, $a\sigma b = a /_\sigma b$.

Per analogia con gli spazi affini e proiettivi sui reali, in uno spazio di rette l'iperprodotto $a\sigma b$ è detto *σ-retta* per i punti a, b o semplicemente *retta* se l'iperoperazione σ è sottointesa.

3.2 Gli spazi geometrici euclidei come spazi join

Lo spazio euclideo aperto

Consideriamo lo spazio euclideo aperto dell'esempio 2.1, in cui $H = R^n$, $a\sigma b$ è uguale al segmento aperto di estremi a e b, per $a \neq b$; $a\sigma a = \{a\}$. (H, σ) è commutativo e idempotente e la proprietà di incidenza ($\forall a, b, c, d \in H$, $a /_\sigma b \cap c /_\sigma d \neq \emptyset \Rightarrow a \sigma d \cap b \sigma c \neq \emptyset$) si riduce *all'assioma di Pasch,* descritto dalla seguente figura, in cui:

- $a /_\sigma b$ è la semiretta aperta di origine a non contenente b;
- $c /_\sigma d$ è la semiretta aperta di origine c non contenente d;
- $a \sigma d$ e $b \sigma c$ sono, rispettivamente, i segmenti aperti ad, bc;
- se le due semirette si incontrano in un punto x, allora i due segmenti si incontrano in un punto y.

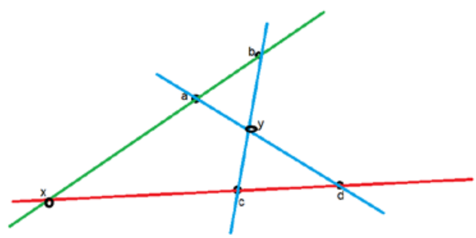

Fig. 2

L'assioma di Pasch introduce l'ordine nella geometria euclidea. La figura 3.2 si interpreta come:

"*Dato un triangolo xbc e una retta, non passante per nessun vertice del triangolo, che interseca un lato xb del triangolo internamente in un punto a, allora tale retta interseca gli altri due lati uno internamente, in un punto y e l'altro esternamente in un punto d.*"

In conclusione lo spazio euclideo aperto è uno spazio join aperto e ordinato, e, per il corollario 3.1, è una geometria join.

Lo spazio euclideo chiuso

Consideriamo lo spazio euclideo chiuso dell'esempio 2.2, in cui $H = R^n$, $a\sigma b$ è uguale al segmento chiuso di estremi a e b. Anche in questo caso (H, σ) è commutativo e idempotente e la proprietà di incidenza si riduce all'assioma di Pasch. Quindi (H, σ) è uno spazio join chiuso e ordinato. In base al corollario 3.1 non è una geometria join.

Osservazioni critiche

Le proprietà degli spazi euclidei portano a considerare gli spazi join ordinati come spazi geometrici che generalizzano gli spazi euclidei conservando le loro proprietà intuitive più importanti. Gli spazi join possono trovare applicazioni significative se si studiano geometrie ottenute con "deformazioni" dello spazio euclideo, ad esempio in contesti della Fisica o delle Scienze Sociali.

La definizione di geometria join, basata sugli spazi join aperti, sembra dare una risposta al millenario problema se è opportuno considerare aperti o chiusi i segmenti della geometria euclidea. Considerandoli aperti molte dimostrazioni si semplificano. In generale, considerando spazi join aperti sembra che le teorie si semplifichino ed inoltre si escludono casi banali di iperprodotti $a\sigma b$ che non contengono punti diversi dagli estremi.

3.3. Gli spazi proiettivi sui reali come spazi join

Consideriamo lo spazio proiettivo dell'esempio 2.4, in cui $H = R^n \cup \Pi_\infty$, dove Π_∞ è l'iperpiano formato dai punti impropri di R^n, $a\sigma b$ è uguale alla retta passante per a e b, per $a \neq b$; $a\sigma a = \{a\}$.

La coppia (H, σ) è un ipergruppo chiuso, commutativo e idempotente. Per ogni coppia (a, b) di punti distinti $a\sigma b = a \backslash_\sigma b$ è la retta passante per i punti a, b.

Vale l'assioma di incidenza che si riduce all'*assioma di Veblen-Young:*

"*Siano a, b, c, d quattro punti distinti. Se la retta ab interseca la retta cd, allora la retta ac interseca la retta bd*"

La figura 3.2 rappresenta anche l'assioma di Veblen-Young, con un diverso significato rispetto all'assioma di Pasch.

In conclusione, lo spazio proiettivo sui reali di dimensione n è uno spazio join chiuso. Non è una geometria join. Inoltre, poiché per ogni coppia (a, b) di punti distinti $a\sigma b = a \setminus_{\sigma} b$, esso è uno spazio di rette.

3.4. Gli spazi proiettivi della geometria sintetica come spazi join

Sia dato uno spazio geometrico (H, $\mathcal{B}$, I). Chiamiamo punti gli elementi di H e rette gli elementi di $\mathcal{B}$. Riprendendo le definizioni date in (Beutelspacher, Rosembaum, 1998), diamo la seguente:

Definizione 3.5 Diciamo che (H, $\mathcal{B}$, I) è uno *spazio proiettivo* se valgono i seguenti assiomi:

(A1) $\forall a, b \in H$, $a \neq b$, esiste una sola retta $r \in B$ tale che aIr, bIr, e si scrive r = ab;

(A2) (assioma di Veblen-Young) Siano a, b, c, d quattro punti distinti. Se la retta ab interseca la retta cd, allora la retta ac interseca la retta bd;

(A3) Data una retta r esistono almeno tre punti incidenti con r;

(A4) Esistono almeno due rette.

In termini di iperstrutture algebriche, dato lo spazio proiettivo (H, $\mathcal{B}$, I), resta definita una iperoperazione σ: $H \times H \rightarrow \wp^*(H)$ che ad ogni coppia (a, b) di elementi distinti di H associa la retta ab, con almeno tre punti. Ponendo $a \sigma a = \{a\}$ si ottiene che σ è una iperoperazione commutativa, riproducibile, associativa e idempotente, per cui (H, σ) è un ipergruppo commutativo idempotente. Sia $a \neq b$. Per ogni $x \in a\sigma b$ è anche $a \in b\sigma x$ e viceversa (altrimenti, in caso contrario, esisterebbero due rette passanti per x e b, una contenente a e l'altra non contenente a). Quindi, tenuto conto dell'assioma (A2), (H, σ) è uno spazio join chiuso di rette.

Come casi particolari si ottengono tutti gli spazi proiettivi finiti.

4. Probabilità soggettiva, misure di incertezza e spazi join ordinati

4.1 La coerenza di una assegnazione di probabilità

Richiamiamo alcuni concetti di probabilità soggettiva coerente e la sua rappresentazione geometrica (de Finetti, 1970; Coletti, Scozzafava, 2002; Maturo, 2003, 2006).

La coerenza di una assegnazione di probabilità $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ su una n-pla $E = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ di eventi è definita a partire da una ipotetica scommessa su una n-pla di vincite $S = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

Per ogni $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ un individuo A, lo *scommettitore*, paga la puntata p_iS_i a un individuo B, la *banca*, e, se l'evento E_i si verifica, A riceve da B la vincita S_i. If $S_i < 0$ il verso della scommessa è invertito, ossia B paga la puntata e A paga la vincita.

Il guadagno totale G_A di A è dato dalla formula:

$$G_{A,\,p,\,S} = (|E_1| - p_1)\, S_1 + (|E_2| - p_2)\, S_2 + \ldots + (|E_n| - p_n)\, S_n. \qquad (4.1)$$

dove $|E_i| = 1$ se l'evento E_i è verificato e $|E_i| = 0$ se E_i non è verificato.

Gli atomi associati all'insieme di eventi $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ sono le intersezioni $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, con $A_i \in \{E_i, -E_i\}$, differenti dall'evento impossibile $\emptyset$.

Sia At(E) l'insieme degli atomi. Allora $G_A(p, S)$ può essere interpretato come la funzione:

$G_{A,\,p,\,S}$: $a = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in At(E) \to (|E_1| - p_1)\, S_1 + (|E_2| - p_2)\, S_2 + \ldots + (|E_n| - p_n)\, S_n$. (4.2)

Definizione 4.1. Una assegnazione di probabilità $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ su una n-pla $E = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ di eventi si dice coerente se:

$\forall S = (S_1, S_2, \ldots, S_n) \in R^n$, esistono $a, b \in At(E)$ tali che $G_{A,\,p,\,S}(a) \geq 0$ and $G_{A,\,p,\,S}(b) \leq 0$.

Possiamo osservare che la precedente definizione implica una iperoperazione. Sia Λ un'algebra of contenente l'insieme E. Allora Λ contiene anche At(E) e possiamo definire l'iperoperazione α su Λ:

$$\alpha: (A, B) \in \Lambda \times \Lambda \to At(A, B). \tag{4.3}$$

4.2 Involucro convesso in un spazio join ordinato e coerenza

Sia (H, σ) uno spazio join ordinato. Dalle proprietà associativa e commutativa, per ogni $a_1, a_2, \ldots, a_n \in H$ esiste un solo blocco $a_1 \sigma\, a_2 \sigma \ldots \sigma a_n$ generato da $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ e questo blocco dipende solo dall'insieme $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e non dall'ordine degli elementi. Per l'idempotenza possiamo ridurci al caso in cui $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono distinti.

Definizione 4.2 Per ogni $A \subseteq H$, $A \neq \emptyset$, l'*involucro convesso* di A, in (H, σ), è l'insieme

$$[A]_\sigma = \{x \in H: \exists n \in N, \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in A : x \in a_1 \sigma\, a_2 \sigma \ldots \sigma a_n\}.$$

Se A è finito allora $[A]_\sigma$ si dice *politopo generato* da A.

Sia $E = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ una n-pla di eventi e sia At(E) l'insieme degli atomi associati ad E. Per ogni $a = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \in At(E)$, sia $x_i(a) = 1$ se $A_i = E_i$ e $x_i(a) = 0$ se $A_i = -E_i$. L'atomo a è identificato con il punto $(x_1(a), x_2(a), \ldots, x_n(a)) \in R^n$. Dalla definizione 4.1, si deduce il seguente teorema:

Teorema 4.1. Sia (R^n, ε) la geometria join euclidea. L'assegnazione di probabilità $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ sulla n-pla di eventi $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ è coerente se e solo se $p \in [At(E)]_\varepsilon$.

Il teorema 4.1 apre la strada all'introduzione di misure di incertezza differenti dalla probabilità, introducendo per analogia con la condizione del teorema 4.1, il concetto di coerenza rispetto ad un generico spazio join ordinato non euclideo. Precisamente possiamo introdurre la seguente definizione:

Definizione 4.3 Sia (R^n, σ) uno spazio join ordinato (in particolare una geometria join). L'assegnazione di misure di incertezza $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ sulla n-pla $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ di eventi è coerente se e solo se $p \in [At(E)]_\sigma$.

Un esempio di geometria join non euclidea è il seguente:

Esempio 4.1. Sia $H = R^n$ e sia κ l'iperoperazione che ad ogni $(a = (a_1, a_2, \dots, a_n), b = (b_1, b_2, \dots, b_n)) \in H \times H$ associa il prodotto cartesiano dei segmenti aperti I_r con estemi a_r e b_r appartenenti a (R, ε). Si può dimostrare che (H, κ) è una geometria join, detta geometria join cartesiana.

Un altro esempio di geometria join non euclidea con supporto R^n si ottiene considerando una opportuna iperoperazioni σ che ad ogni $(a, b) \in H \times H$ associa una particolare curva di estremi a, b. Il politopo $[At(E)]_\sigma$ è una deformazione di quello euclideo ottenuto sostituendo i segmenti con tali curve.

Alcune applicazioni di spazi join ordinati non euclidei a problemi di Architettura e Urbanistica si trovano in (Ferri, Maturo, 2001a, 2001b). In tali lavori il problema di un sistema di tassazione equa degli immobili porta a considerare una partizione fuzzy del territorio. Si introducono ipergruppi e spazi join associati alla partizione fuzzy che sembrano essere particolarmente significativi.

Bibliografia

Beutelspacher A., Rosembaum U. (1998). *Projective Geometry*. Cambridge University Press.

Coletti G., Scozzafava R. (2002). *Probabilistic logic in a coherent setting*. London, Kluwer Academic Publishers,.

Corsini P. (1993). *Prolegomena of hypergroup theory*, Udine, Aviani Ed..

Corsini P. (1994). *Join spaces, power sets, fuzzy sets*, Proc. of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Jasi, Romania,

Corsini P., Leoreanu L. (2003). *Applications of the Hyperstructure Theory*. London, Kluver Academic Publishers

de Finetti B. (1970). *Teoria delle Probabilità*, vol. 1 and 2, Torino, Einaudi.

Di Gennaro F., Maturo A. (2002). *La teoria delle iperstrutture: un efficace strumento per una visione unitaria di algebra e geometria*. «Periodico di Matematiche», Serie VIII, Vol 2, n. 4, 5-16.

Doria S., Maturo A. (1995). *A hyperstructure of conditional events for artificial intelligence*, in *Mathematical models for handling partial knowledge in artificial intelligence*. New York, Plenum press, pp.201-208, (1995).

Doria S., Maturo A., (1996). *Hyperstructures and geometric spaces associated to a family of events*, in «Rivista di Matematica Pura ed Applicata», N 19, 1996, pp.125-137.

Dramalidis A., Vougiouklis T., (2012). *H_v-semigroups as noise pollution models in urban areas*, «Ratio Mathematica» 23, 2012, 39-50.

Ferri B., Maturo A., (1997). *Hyperstructures as tool to compare urban projects*, in «Ratio Mathematica», 12, 1997, 79-89.

Ferri B., Maturo A., (1998). *An application of the fuzzy set theory to evaluation of urban projects*, in *New trends* in «Fuzzy Systems», pp.82-91, Singapore, Scientific Word.

Ferri B., Maturo A., (1999a). *Fuzzy Classification and Hyperstructures: An Application to Evaluation of Urban Project*, in: *Classification and Data Analysis*, 55-62, Berlin, Springer-Verlag.

Ferri B., Maturo A., (1999b). *On Some Applications of Fuzzy Sets and Commutative Hypergroups To Evaluation In Architecture And Town-Planning*, «Ratio Mathematica», 13, pp. 51-60.

Ferri B., Maturo A., (2001a). *Mathematical models based on fuzzy classification and commutative hypergroups to solve present problems of evaluation in town plannin*g, in «Fuzzy Systems & A. I»., Vol. VII, Nos. 1-3, 2001, pp. 7-15.

Ferri B., Maturo A., (2001b). *Classifications and Hyperstructures in problems of Architecture and Town-Planning*, «Journal of Interdisciplinary Mathematics», Vol 4(2001), No 1, 25-34.

Hoskova-Mayerova, S., Maturo, A. (2013). *Hyperstructures in Social Sciences*, «AWER Procedia Information Technology & Computer Science», 3(2013), 547—552, Barcelona, Spain.

Hoskova-Mayerova, S., Maturo, A. (2014). *An analysis of Social Relations and Social Group behaviors with fuzzy sets and hyperstructures*, Proceeding of AHA 2014, accepted in International Journal of Algebraic Hyperstructures and its Applications.

Marty F., (1934). *Sur une généralization de la notion de group*, IV Congres des Mathematiciens Scandinave, Stockholm.

Maturo A. (2003). *Sull'assiomatica di Bruno de Finetti per la previsione e la probabilità coerenti: analisi critica e nuove prospettive*, «Periodico di Matematiche», Serie VIII, Vol 3, n. 1, 41-54.

Maturo A., (2006). *A Geometrical Approach to the Coherent Conditional Probability and its extensions*, «Scientific Annals of the University Ion Ionescu de la Brad», Tom XLIX, Vol 2., 2006, 243-255.

Maturo A., (2008a). *Join coherent previsions*, «Set-valued Mathematics and Applications», Vol 1 No 2 (2008), 135-144.

Maturo, A., (2008b). *La moderna visione interdisciplinare di Geometria, Logica e Probabilità in Bruno de Finetti*, «Ratio Sociologica», Vol 1, No2, 39-62.

Maturo, A., (2009). *Coherent conditional previsions and geometric hypergroupoids*, «Fuzzy sets, rough sets and multivalued operations and applications», 1, N.1, 51–62.

Maturo A., Squillante M., Ventre A. G. S., (2010). *Decision making, fuzzy measures an hyperstructures*, «Advances and Applications in Statistical Sciences», Vol 2, Issue 2, 233-253.

Prenowitz W., Jantosciak J., (1979). *Join Geometries*, Springer-Verlag New York, UTM.

Vougiouklis T., (1994). *Hyperstructures and their representations*, Hadronic Press, U.S.A.

Vougiouklis T. (1999). *Fundamental Relations in hyperstructures*. «Bulletin of the Greek Mathematical Society», V.42 (1999), 113-118

Vougiouklis T. (2008). *H_v-structures: Birth and … childhood*, «J. Basic Science» 4, N.1 (2008),119-133

Vougiouklis T. (2009). *Hyperstructures as models in social sciences*, «Ratio Sociologica», V.2, N.2, 2009,21-34.