Bollettino dell'AFSU
Vol 1(1), dicembre 2018, pp. 11-54

pISSN: 2612-4084
eISSN: 2612-3630

Gli algebristi italiani del secolo XVI furono gli artefici di una rivoluzione scientifica?

Con particolare riguardo alle equazioni di terzo grado e al metodo di Viete per la loro soluzione

Franco Eugeni*

***** Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Filosofia della Scienza, Presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane; eugenif3@gmail.com

Al mio amico di sempre
Prof. Nello Russo Spena
nell'occasione del suo 70°compleanno,
ricordando le nostre disquisizioni sul tema.

Sunto

Nell'intorno del 1492, fatidica data della scoperta dell'America, sono molteplici gli intrecci culturali che si insinuano nel percorso: Umanesimo, Rinascimento, [1] rivoluzione copernicana, riforme

---

[1] L'Umanesimo si fa risalire almeno a Dante Alighieri e ai Fedeli d'Amore. Cfr. F. Eugeni, *I Fedeli d'Amore*, conferenza tenuta all'Istituto Filosofico di Napoli nel 2017: cfr. anche Franco Eugeni, *Profili di G. Bruno (1548-1600) e Cecco d'Ascoli (1257-1327)* in «Schola Pithagorica» n.2 (1916). I personaggi dell'Umanesimo più vicini al Rinascimento sono: Marsilio Ficino (1443-1499), Giovanni Pico della Mirandola (1463-1494), Pietro Pomponazzi (1462-1525), Erasmo da Rotterdam (1466-1563). Il termine "Rinascimento", che identifica l'arte e la cultura del XV e XVI secolo, fu coniato, in tempi successivi al fenomeno, dallo storico dell'arte Jacob Burckardt (1818-1897) nel suo libro *La civiltà del Rinascimento* (1860).

protestanti, 1ª rivoluzione industriale, rivoluzione americana e rivoluzione francese, illuminismo, 2ª rivoluzione industriale, Bourbakismo, 3ª rivoluzione industriale o rivoluzione informatica, post modernismo. Nel lavoro inquadriamo nel contesto una rivoluzione minore, ma non per questo meno interessante, una rivoluzione della matematica, che genera quel fecondo ed interessante avvento, di quei personaggi che furono chiamati gli Algebristi del Cinquecento. Dietro al problema dell’equazione cubica si nasconde un problema generale di grande portata, non solo, ma anche il problema lento e graduale di una rivoluzione del linguaggio e del simbolismo della matematica.

Parole chiave: equazione cubica, rivoluzione scientifica, simbolismo matematico, paradigma indiziario.

1. La rivoluzione scientifica, detta “copernicana”

La rivoluzione scientifica, che segna la nascita della scienza, è convenzionalmente datata tra la seconda metà del secolo XVI e la fine del secolo XVII, con la diffusione delle idee di Niccolò Copernico e Galileo Galilei e la divulgazione delle leggi di Isaac Newton. È questo il periodo nel quale nasce una nuova concezione della natura e delle scienze, anzi è, secondo molti, il periodo nel quale nasce la scienza! Ma è anche credibile che questa rivoluzione abbia avuto dei prodromi estremamente importanti. È parere unanime che la rivoluzione scientifica viene anticipata dalla storica spedizione di Cristoforo Colombo del 1492. Appare chiaro che la scoperta di nuove terre e di un nuovo continente ci rese edotti del fatto che gli antichi filosofi erano ben lontani dal tutto sapere e dall’aver risolto tutti i problemi.

I prodromi della rivoluzione scientifica quindi vanno ricercati in quel periodo, che abbiamo chiamato Rinascimento, che si colloca tra il 1400 e il 1500, nel quale oltre le scoperte geografiche e l’invenzione della stampa,[2] si è avuta la riforma protestante con particolare riguardo alle 95 tesi di Martin Lutero (1483-1494), l'ascesa della borghesia e infine la nascita delle monarchie nazionali. Il mutamento sociale maggiore risiede nel fatto che mentre la cultura medioevale era nelle scuole e università dominate dal clero, la nuova cultura si apre al mondo laico, non sempre legato all'interpretazione letterale della Sacre Scritture.

Lo stesso Rinascimento è stato preceduto dall'Umanesimo e dai suoi vari personaggi. Il Rinascimento vede invece uomini di cui via via parleremo, quali Bernardino Telesio, Giordano Bruno, Tommaso Campanella, Tommaso Moro, Niccolò Cusano, Niccolò Machiavelli. Il mondo della rivoluzione scientifica annovera i grandi Niccolò Copernico, Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei, Francis Bacon, per concludere con Renato Cartesio e Isaac Newton

Ma in epoca rinascimentale grandi mutamenti appaiono anche nelle Matematiche. Si è scritto che grande interesse post-medioevale, per questa disciplina nasce come vedremo dai traduttori e divulgatori delle opere antiche, greche ma anche arabe. Ma in realtà vi è molto di più di quanto non appaia a prima vista. Vi è un profondo mutamento da un atteggiamento dello studioso passivamente contemplativo, a scienziati fortemente attividai quali nascono nuove idee, nuove strade, nuovi linguaggi. Da questi i grandi innovatori quali Copernico, Keplero e

[2] L'invenzione della stampa a caratteri mobili è dovuta a Gutemberg (1390-1466) di Mainz (Magonza), nel cui Museo è conservata la prima edizione della Bibbia, prima opera da lui stampata. Si noti che nel 1481 tale Adam Burkardt (?1426-?1498), noto come Adam da Rottweill, allievo e collaboratore di Gutemberg, aprì una tipografia ad Aquila(oggi L'Aquila), che fu la prima nel Regno di Napoli e la terza in Italia dopo quelle di Venezia del 1469 e Foligno del 1470. I primi due incunaboli sono conservati nella Biblioteca Provinciale di L'Aquila.

Galilei trarranno la forza per le loro coraggiose teorie, quasi eresie, come eresia era anche il misterioso progetto di Colombo.[3]

La rivoluzione scientifica precorre la 1ª rivoluzione industriale della macchina a vapore, nella seconda metà del '700 nasce la 2ª rivoluzione industriale dell'elettricità attorno al 1870 e l'ultima la 3 ª rivoluzione industriale dell'Informatica, risalente al 1970, ma i cui prodromi sono nella creazione del primo computer meccanico utilizzante il sistema binario, opera di Gottfried Wilhelm von Leibniz (Eugeni & Mascella, 2010).

Aggiungiamo ancora che nei primi decenni del Novecento, alcuni matematici francesi, mimetizzati sotto lo pseudonimo di Nicolas Bourbaki (generale francese che partecipò alla guerra di Crimea e si occupò della riorganizzazione dell'esercito), si dedicarono al cosiddetto metodo deduttivo: dagli assiomi al particolare (Eugeni, 1992). Questo gruppo fu chiamato il *gruppo dei Bourbakisti*. L'obiettivo consisteva nel comprendere sinteticamente le diverse branche della matematica in poche strutture, molto generali e strettamente legate tra loro (Eugeni & Santarelli, 2009). [4] Questo progetto si basava su un formalismo rigido, con pochissimo spazio per il linguaggio descrittivo, non troppo variabile perché quasi affatto soggetto ad interpretazioni.

Cosa succede in Matematica, in realtà tutto parte dal desiderio di risolvere l'equazione di terzo grado, e nei gradi successivi. Ne deriva un dibattito sul linguaggio, un dibattito sui problemi di geometria da trattare con riga e compasso, la nascita dei numeri complessi, il comprendere il

---

[3] Per quanto riguarda il mistero di Cristoforo Colombo (1451-1506), alias Cristobal Colon, faremo riferimento a tre opere essenzialmente: (Taviani, 1982; Wiesenthal, 1991; Bartocci, 1995).

[4] Il volume è dedicato alla figura della filosofa Simone Weil (1909-1913), per la quale l'impersonale tende a disincantare l'ottimismo nelle fedi, ai partiti, nelle rivoluzioni , nella scienza. È interessante che la Weil frequentò e partecipò alla nascita del Bourbakismo, che ebbe come fondatore carismatico suo fratello Andrè (1906-1998).

senso delle radici in campo complesso e duecento anni dopo l'esplosione della teoria di Evariste Galois (1811-1832), il concetto di gruppo e se vogliamo la nascita di gran parte della nuova matematica che dominerà il secolo XX. L'equazione di terzo grado presenta difficoltà quando si ricorra alle classiche formule attribuite a Girolamo Cardano (1501-1576). Le difficoltà nascono quando occorra estrarre la radice cubica di un numero complesso, esattamente se non è possibile, esplicitare l'argomento del numero complesso, del quale si vuole estrarre la radice. In alcuni casi, non banali, è interessante ricorrere ad alcuni metodi non molto diffusi, dovuti al matematico ed astronomo François Viete (1504-1603), metodi che presenteremo con interessanti esemplificazioni, in questo lavoro.

2. Il problema dell'equazione cubica

Si parla spesso del grande impulso dato alla matematica dai grandi algebristi del '500. Scopo di questo scritto è mostrare che dietro questo problema della risoluzione di una equazione cubica si sia celata un vera e propria rivoluzione scientifica. Tra i grandi del tempo ricordiamo il bolognese Scipione del Ferro (1465-1526) che fu il primo risolutore di una classe di equazioni di terzo grado, il bresciano Nicolò Tartaglia[5](1499-1557), il cui metodo risolutivo, ancor oggi in uso, fu indipendente dal quello deldal Ferro e relativo ad una differente classe di equazioni cubiche. Ancora Gerolamo Cardano (1501-1557) che oltre a completare e generalizzare i metodi per le equazioni cubiche, lavorando assieme al suo allievo il bolognese Lodovico Ferrari (1522-1565), che

[5]Nicolò Fontana detto il Tartaglia, per la sua balbuzia, affrontò molte questioni di matematica pura e applicata e a lui si deve la prima traduzione italiana degli Elementi di Euclide (1543). La classe di equazioni di terzo grado da lui risolte erano del tipo x3+ x2 = q (q > 0), con linguaggio attuale, Al tempo infatti nelle formule, scritte in altro modo, non si faceva uso di numeri negativi non ancora introdotti.

era stato il solutore dell’equazione di quarto grado, decise di essere anche il grande divulgatore di quei metodi risolutivi come appare nella sua opera principale l’*Ars Magna*. In parallelo il francese François Viete diede un metodo alternativo per la soluzione dell’equazione di terzo grado, che qui presentiamo, con alcune integrazioni rispetto all’opera originale. Nel quadro generale è da citare Raffaele Bombelli (1526-1572), che è il primo ad introdurre in modo sistematico i numeri complessi, brutalmente usati dal Cardano.

Fu attorno al 1515 che il bolognese Scipione dal Ferro, scoprì una maniera per ottenere una formula risolutiva per alcune classi di equazioni di terzo grado.[6] A quel tempo tra i matematici era d’uso indire delle pubbliche disfide matematiche, durante le quali i partecipanti proponevano, l’uno contro l’altro, problemi da risolvere Spesso si assegnavano equazioni algebriche da risolvere, e il proponente di un problema doveva essere, lui stesso,in grado di fornire la soluzione, incorrendo in caso di incapacità in una “vergognosa squalifica dalla disfida". Naturalmente lo sfidante rivelava la soluzione, ma non il metodo, così, per questo motivo, la formula di Dal Ferro rimase "segreta". Era infatti, la presentazione all’avversario di una particolare equazione di terzo, un “cavallo di battaglia” utilizzato sia dal Maestro che dai suoi allievi nei casi di disfide più difficili. Dalla vittoria nelle disfide dipendeva inoltre la fama d’esser buon matematico o, al contrario in caso di sconfitta, della fama di matematico scadente. Si narra che nel 1530, tale Antonio Maria Del Fiore,[7] allievo di Dal Ferro, ebbe ad usare la formula del suo Maestro per sfidare, vittorioso, il bresciano Zuannin de

---

[6] Scipione dal Ferro trattò le equazioni che oggi scriveremmo nella forma $x^3 + p\,x = q$, nelle quali era p, $q > 0$, escludendo il cosiddetto *casus irriducibilis* (tre soluzioni distinte).

[7] Su Antonio Maria Del Fiore sappiamo solo che fu un matematico, operante tra il XV e XVI secolo, il suo contributo portato a Cardano, fu dimenticato per molto tempo, e solo di recente è stato evidenziato.

Tonini (detto il Colla). Successivamente Del Fiore, nel 1534, propose un problema di terzo grado proprio a Niccolò Tartaglia, il quale lo surclassò, risolvendo in poco tempo i problemi posti, mentre Del Fiore stesso non fu in grado di risolvere un solo problema tra quelli assegnatigli dal Tartaglia. Il Tartaglia dunque aveva trovato un metodo per la soluzione della sua ampia classe di equazioni cubiche e lo comunicò al Cardano chiedendogli l'assoluto segreto sul metodo. Ma il patto non fu rispettato, in quanto parallelamente Del Fiore rivelò al Cardano il metodo di dal Ferro, e Cardano con l'aiuto di Dal Fiore stesso e di Ludovico Ferrari generalizzò la formula, sentendosi in tal modo sciolto dalla promessa fatta a Tartaglia di non rivelare la formula, ma provocando una sua indignata reazione. Per mettere fine alla contestazione fu Ludovico Ferrari che sfidò il Tartaglia con un cartello di disfida a Milano. Ferrari, favorito dalla balbuzie di Tartaglia (la prova era orale), ma anche dal comportamento dei giudici, vinse la sfida e i diritti della formula, che portò trionfante alla scuola del Cardano.

Ricordiamo che erano diversi i problemi rimasti aperti dall'antichità, ed era oramai chiaro che essi si traducessero in equazioni. Ricordiamo quelli che furono chiamati per eccellenza "i cinque problemi classici aperti dell'antichità": la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo, la divisione della circonferenza in n parti uguali, la rettificazione della circonferenza, la quadratura del cerchio.

Erano antichi problemi di geometria, banali per via approssimata o anche per risoluzioni esatte. Tuttavia, per costume degli antichi geometri, si richiedeva che alla soluzione geometrica si pervenisse utilizzando esclusivamente la riga e il compasso, e la cosa è ben diversa dall'avere una normale soluzione. Si trattava di grande lacuna dell'antica cultura greca. Il tutto, come era ben chiaro, era legato ad equazioni. Ad esempio la duplicazione del cubo consisteva nel trovare un cubo di lato x, il cui volume x^3 fosse il doppio del cubo dato supposto unitario. Dunque l'equazione era $x^3 = 2$.

Il problema della divisione della circonferenza in parti uguali è legato alla risoluzione dell’equazione binomia $z^n = 1$, in campo complesso. La quadratura del cerchio porta all’equazione $x^2 = \pi$ e la rettificazione alla equazione $x = 2\pi$.

Si è dimostrato che *condizione necessaria a che un problema sia risolubile con riga e compasso è che l’equazione che traduce il problema abbia coefficienti nel campo di razionalità* [8] *dei dati, sia ivi irriducibile,*[9] *ed abbia per grado una potenza del 2*.

Così la duplicazione del cubo, che si traduce in $x^3 = 2$, è impossibile con riga e compasso, per essere l’equazione irriducibile e cubica. La quadratura e la rettificazione sono impossibili con riga e compasso perché le relative equazioni $x^2 = \pi$ e $x = 2\pi$, non hanno coefficienti razionali essendo π irrazionale, anzi trascendente. Naturalmente la quadratura senza riga e compasso è banale, basta prendere un quadrato avente per lato la radice di π. Quindi quando l’uomo comune domanda “ma vuoi forse quadrare il cerchio?”, si riferisce a un problema in realtà impossibile da risolvere per un verso ma banalmente risolubile per l’altro verso!

Il problema della ciclotomia è molto complesso e la sua risoluzione fu data da Johann Friedrich Carl Gauss (1777-1855), che provò che perché si possa dividere la circonferenza in *n* parti eguali *n* deve essere di una particolare forma, cioè deve essere il prodotto di una potenza del 2 per un primo di Fermat. Si conoscono solo 5 numeri come primi di Fermat che sono 3, 5, 17, 257, 65.537. Così è possibile costruire poligoni regolari , con riga e compasso, aventi numero di lati 3, 5, 17, …. 2x3, 3x5, 5x17, 3x5x17, 8x17 ecc. ad esempio.

---

[8] Insieme dei numeri ottenuti dai dati operando su essi con le quattro operazioni fondamentali. Ad esempio se il dato è il lato unitario del cubo, oppure il raggio unitario del cerchio il campo di razionalità è il campo reale.

[9] Irriducibile significa priva di soluzioni nel campo di razionalità dei dati.

Il problema della trisezione è legato alla formula trigonometrica:

$$\cos 3a = \cos^3 a - 3\cos a \qquad \text{ovvero all'equazione} \qquad x^3 - 3x = c$$

Si è provato che condizione necessaria per la trisezione è che l'equazione sia riducibile e che *c* sia algebrico.[10]

A completamento di quanto indicato sopra va ricordato che il bergamasco Lorenzo Mascheroni (1750-1800) dimostrò che *ogni problema risolubile con riga e compasso e anche risolubile con il solo compaso*[11] probabilmente anticipando le proprietà dell'inversione[12] per raggi vettori reciproci che rende banale questo problema. Durante la Campagna d'Italia del 1996, Napoleone Bonaparte (1769-1821) incontrò Mascheroni, che gli illustrò il suo libro *La geometria del compasso* che era in corso di stampa con la dedica a "*Bonaparte l'Italico*". Il libro di Mascheroni affascinò Napoleone che era interessato ai problemi risolubili con il solo compasso, il libro fu tradotto in francese e stampato dall'editore Carette nel 1798. Da notare che alcuni storici asseriscono che il famoso Teorema di Napoleone del 1825, uno dei pochissimi teoremi significativi sui triangoli, prodotti dopo i greci, sia in realtà dovuto allo stesso Mascheroni: *i baricentri dei triangoli equilateri, costruiti esternamente sui lati di un triangolo qualsiasi, formano un triangolo equilatero*.

Per tutto il '600 e il '700 i matematici si cimentarono sullo studio dell'equazione di 5° grado e gradi successivi, ma senza successo. All'inizio del nuovo secolo, nel periodo 1803/1805, un medico

[10] Cioè *c* deve essere soluzione di una equazione algebrica a coefficienti interi.

[11] Mascheroni come esoterista, essendo riga e compasso identici a squadra e compasso, ovvero esotericamente a materia e spirito, con il suo Teorema indica la superiorità dello spirito sulla materia del Maestro iniziato ai misteri esoterici.

[12] L'inversione, opportunamente usata, trasforma rette in cerchi e cerchi in cerchi, quindi trasforma una qualsiasi nota costruzione con riga e compasso in una effettiva costruzione con il solo compasso.

modenese, Paolo Ruffini (1765-1822), creò una svolta epocale. Ruffini era un medico ma anche un profondo conoscitore della matematica. Fu infatti professore di matematica applicata all'Università di Modena dal 1797 e nel 1814 ne divenne Rettore; sempre nello stesso anno fu anche Presidente della prestigiosa Accademia Nazionale delle Scienze[13] detta dei XL. Ruffini enunciò un teorema che rivoluzionò completamente il problema delle equazioni algebriche. L'asserzione di Ruffini fu lapidaria:

> Non esiste alcuna formula per esprimere le soluzioni di una generica equazione algebrica di grado superiore al quarto, che esprima mediate espressioni radico-razionali dei coefficienti della equazione, ovvero operando su essi mediante l'uso delle quattro operazioni e con quelle di estrazioni di radici quadrate, cubiche, … ennesime.[14]

Il teorema fu provato per la prima volta da Ruffini nel 1799, ma la sua dimostrazione fu generalmente ignorata. Sebbene contenesse una piccola lacuna, fu in realtà molto innovativa in quanto fa uso dei gruppi di permutazione, che saranno il punto di partenza di Galois, alcuni anni dopo. Una nuova dimostrazione, nel 1924, fu del giovane e brillante matematico norvegese Niels Herik Abel (1802-1829), così che il risultato è noto come Teorema di Ruffini-Abel. Il problema iniziale pertanto, si è spostato in due grandi direttive:

---

[13]Fondata nel 1782 da Anton Mario Lorgna (1735-1796), matematico e ingegnere, che operò tra il Ferrarese e le Provincie di Modena e Verona. Fu ufficiale del *Corpo del genio veneto* e Direttore della *Scuola Militare di Verona*. Tra i primi soci settecenteschi ebbe Alessandro Volta (1745-1827), Lazzaro Spallanzani (1729-1799), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Ruggero Boschovic (1711-1787), Leonardo Salimbeni (1752-1823). Per inciso il prof. Nello Russo-Spena, cui questo lavoro è dedicato, è membro della suddetta Accademia dei XL.

[14]Brevemente si dice che: è impossibile risolvere l'equazione di grado superiore al quarto per radicali.

- Data una equazione generale di grado superiore al quarto, dire sotto quali condizioni è possibile trovare una formula esprimente le soluzioni come espressioni radico-razionali dei coefficienti delle equazioni.
- Data una equazione generale di grado superiore al 4° trovare una formula esprimente le soluzioni con funzioni di diverso tipo dalle razionali-radicali dei coefficienti delle equazioni.

Alla prima questione ha risposto pienamente la brillante teoria di Evariste Galois, la cui risposta è molto teorica. Utilizzando la teoria dei gruppi di sostituzioni, Galois ha dato l'avvio alla cosiddetta matematica moderna, che da allora sta dominando la scena internazionale. La seconda questione ha avuto risposte molto parziali limitate alle equazioni di 5° e 6° grado.[15]

3. L'evoluzione del simbolismo matematico dopo il Cinquecento

I matematici antichi con l'avvento del Rinascimento iniziarono a comprendere che volendo osservare ed interpretare un fenomeno complesso, dal punto di vista matematico, in termini moderni volendo costruire un modello matematico di un fenomeno reale, occorrevano notazioni opportune inserite in un sistema coordinato. In realtà non fu la creazione di singoli simboli (radice quadrata, pi greco, potenza,

---

[15] Un altro aspetto da esaminare, da un punto di vista puramente epistemologico è la circostanza che nel '500 il simbolismo matematico in uso era ben diverso da quello attuale e tentare di comprenderlo ci istruisce sulle grandi difficoltà dei matematici di allora a causa di un simbolismo decisamente inadeguato. Le equazioni di 5° e 6° grado sono state risolte mediante l'uso rispettivamente di funzioni ellittiche e funzioni iperellitiche. Si veda a riguardo Zappa (1995, pp. 89-107). Nel lavoro di Zappa si danno informazioni anche sui lavori di C. Hermite, G. B. Jerrad, L. Kronecker. E. Betti.

sommatoria) che portarono alle grandi innovazioni e scoperte nel campo, fu invece la nascita del linguaggio simbolico e della cosiddetta algebra simbolica, dovute a studiosi europei, i quali combinando segni e simboli elaborarono linguaggi più idonei a trovare le relazioni tra le varie fenomenologie osservate. I seguenti casi non esauriscono la problematica ma sono esempi semplici del mutamento dei simboli che hanno condotto a costruire gli elementi principali dell'algebra simbolica.

Nel 1478 viene stampato a Treviso un libretto di aritmetica, d'autore ignoto, intitolato: *L'arte dell'abaco, per la preparazione dei giovani che intendono darsi al commercio*. I segni delle quattro operazioni non si presentavano come gli attuali in quanto si usavano i seguenti: *"et"* per la somma, *"de"* per togliere, sottrarre, *"fia"* per la moltiplicazione, *"intra"* per la divisione. Progressivamente entrano in uso le parole: più, meno, per, diviso.

Per parlare di storia dell'Algebra conviene dividere la storia in tre periodi:

1. algebra retorica, anteriore a Diofanto di Alessandria (250 d.C.), nella quale si usa esclusivamente il linguaggio naturale, senza ricorrere ad alcun segno16;
2. algebra sincopata, da Diofanto fino alla fine del XVI secolo, in cui si introducono alcune abbreviazioni per le incognite e le relazioni di uso più frequente, ma i calcoli sono eseguiti in linguaggio naturale;
3. algebra simbolica, introdotta da Viète (1540-1603), nella quale si usano le lettere per tutte le quantità e i segni per rappresentare le operazioni, si utilizza il linguaggio simbolico

[16] Oltre alle ben note vicende di Pitagora e del Pitagorismo vedasi pure (Eugeni, Bruno, Guenot, Russo-spena, Migliorato 2012). Questi lavori complessivamente rappresentano una insolita rilettura del periodo e sono corredati da altri cinque lavori di carattere esclusivamente umanistico che sono di interessante e parallelo interesse.

> non solo per risolvere equazioni ma anche per provare regole generali.

Da notare che l'Algebra nella sua evoluzione deve molto alla Trigonometria, scienza che nasce nelle scuole sacerdotali di 4000 anni fa, quindi ha origini molto antiche. Anche nei Sumeri si riscontrano conoscenze fin dal 3000 a.C. Alcuni elementi, in forma geometrica, appaiono nelle Proposizioni 12 e 13 del Libro II di Euclide. A parte Talete di Mileto (645-548 a.C.) e Pitagora di Samo (580-500 a.C), le cui opere non sono pervenute, sono da citare il *De Caeli* di Aristotile (384-322), Ippocrate di Chio (470-420 a.C.) che, a quanto afferma Proclo, fu autore di un'opera, perduta, nella quale avrebbe precorso di ben due secoli l'opera di Euclide.

Eudosso di Cnido (408-355 a.C.) misura il circolo massimo della terra in 40 mila miglia, Aristarco di Samo (310-230 a:C.) è un antesignano della teoria eliocentrica, inoltre prova che il rapporto tra la distanza della Luna-Terra e Sole Terra vale quel numero che oggi esprimeremmo come *sen 3°*, numero compreso tra 1/20 e 1/18. Eratostene di Cirene (275-194 a.C.), che misurò il meridiano terrestre in 38.400 km. (con un errore di circa 1000 km.). Ipparco di Nicea (180-125 a.C.) produsse quelle che potrebbero essere dette "tavole trigonometriche" così che i posteri la chiamarono il "*padre della trigonometria*" e risale al suo tempo la divisione della circonferenza in 360 parti. Anche se ultimo in ragione di tempo, Menelao di Alessandria (I sec. d.C.) nel suo *Sphaerica* dimostra che due triangoli sferici sono congruenti se gli angoli corrispondenti sono eguali, teorema che non ha l'equivalente nella geometria piana euclidea.[17]

---

[17] Pensate che cinquecento anni fa i segni delle quattro operazioni non erano ancora stati inventati! I segni + e -, nati nella Germania del XV secolo furono adottati in Francia nel 1550 e in Italia nel 1608, per merito del gesuita matematico Christophorus Clavius

Un breve *escursus* sul linguaggio e sui simboli in uso presso gli algebristi italiani del Rinascimento sono opportuni, specie per comprendere l’evoluzione lenta dei segni e del linguaggio simbolico, così come avviene in questo terzo periodo.

Ricordiamo:Johann Muller (1436-1476), detto Regiomontano, di Konisberg (che significa appunto montagna del Re) scrive *l’Epitomene dell’Almagesto di Tolomeo* e il *De Triangulis omnimodis* (segna la rinascita della Trigonometria) e comunque molte traduzioni provenienti da fonti arabe. Niccolò Copernico (1473-1543) nel suo *De Rivolutionibus orbium coelestium* (1543), espresse la certezza che la Terra girasse attorno al Sole scrivendo parti di trigonometria che andavano oltre le conoscenze del Regiomontano. Francesco Maurolico (1494-1575) e Federico Commandino (1509-1515) dedicarono la loro vita a tradurre opere matematiche dal greco al latino del loro tempo.

Vi è un profondo mutamento da un atteggiamento dello studioso passivamente contemplativo, a scienziati fortemente attivi dai quali

(1538 -1612) noto soprattutto per il suo contributo al calendario gregoriano.Invece la sbarretta delle frazioni era già usata dagli Arabi e da Fibonacci. In realtà le notazioni matematiche hanno avuto evoluzioni travagliate, con modifiche e motivazioni delle quali si è persa quasi ogni traccia e non è possibile farne una storia dettagliata. Le notazioni attualmente in uso hanno provenienze diverse. Molti simboli derivano da abbreviazioni di parole e sono motivati dalla opportunità di evitare, con la concisione, i lunghi giri di frase. Molte abbreviazioni sono successivamente modificate per assumere forme di maggiore evidenza. Si possono considerare anche come simboli ideografici le parentesi "( )" indicanti aggregazione, "=" per uguaglianza, i segni per *quindi* e *dato che*. Fa eccezione Leiniz che, in accordo con il suo programma finalizzato all'individuazione di un linguaggio che riducesse i ragionamenti a calcoli formali ("*Characteristica Universalis*”), utilizzò i suoi contatti personali, con i maggiori matematici del tempo, con lo scopo di individuare simboli ampiamente accettabili. Un pregio può essere la capacità di stimolare indagini che permettano generalizzazioni come nel caso dell'esponente di un qualsiasi numero, prima solo intero positivo, poi intero negativo, poi razionale, poi reale, poi ancora complesso e infine addirittura matriciale nascono nuove idee, nuove strade, nuovi linguaggi. In questo periodo l'Europa entra in possesso della maggior parte delle opere matematiche dell'antichità classica sia greche ma anche arabe, ad opera di importanti traduttori, ma in realtà muta anche l'atteggiamento degli scienziati, che diventano attivi e propositivi nei confronti delle applicazioni e della tecnologia, senza dimenticare che poco alla volta sparisce anche il timore delle condanne delle teorie che la chiesa ebbe a chiamare eretiche. Non sarebbero potute nascere, specie nelle incomplete forme iniziali, le geometrie non euclidee, la teoria di Charles Darwin, la Relatività di Albert Einstein, la teoria del Big-Bang, senza questo distaccarsi dall'oscurantismo nato sotto il dominio della Chiesa Cattolica che vedeva la scienza come mero complemento divulgativo delle sacre Scritture. È il periodo nel quale si assiste al passaggio molto lento dal Rinascimento alla rivoluzione scientifica cosiddetta copernicana e da questa la lunga trasformazione che condusse al mondo moderno, anche attraverso un cambio del linguaggio della matematica. Come si è detto all'inizio, vi è molto di più di quanto non appaia a prima vista. Ricerche attuali di Carlo Ginsburg (1979)[18] ci hanno condotto a vedere in modo diverso la stessa storia, i suoi eventi e le interpretazioni. Da un lato vi è una perdita di certezze assolute fin da allora, che culminerà con la *Teoria del pensiero debole*[19] di Gianni Vattimo e Pier Aldo Rovatti (2012).

---

[18] Nell'articolo si parla diffusamente del metodo del paradigma indiziario. Si veda pure per una descrizione del metodo in Franco Eugeni, Edoardo Ruscio (2004) l'intero par. 1.2 dell'Appendice, dedicata a Melchiorre Dalfico.

[19] L'idea di pensiero debole si inquadra come fenomeno che nasce nell'ambito del passaggio dal moderno al post-moderno, e del relativismo che sposta la sua attenzione, dal pensiero forte assoluto, ad un pensiero debole in quanto soggettivo ed individuale. Per pensiero forte si intende un pensiero che parla in nome di una imposta verità assoluta, illusoriamente protesa a fornire "fondazioni" del conoscere e dell'agire. Per pensiero debole si intende un tipo di pensiero che rifiuta le categorie forti «Ciò che conta è ripensare il senso dei saperi ed esplorare le vie per andare oltre, con i valori individuali dell'uomo».

Per tornare alla matematica del Cinquecento, presentiamo alcuni spunti illustrativi. Alla rivoluzione degli algebristi seguirà la rivoluzione copernicana[20] del 1543 che riprendeva le vecchie idee di Aristarco di Samo, di ben altra e duratura portata anche perché metaforicamente il nome "rivoluzione copernicana" si associa oggi ad ogni ribaltamento di sistemi concettuali sino ad allora universalmente accettati. Ricordiamo che Galilei pagò duramente[21] il suo appoggio alla teoria copernicana.

All’inizio del Rinascimento gli algebristi usavano le lettere per indicare sia le incognite che le operazioni da svolgere. Si noti che nell’espressione “*12LmIQp48 aequalia 144m24LpIQ”*, oggi illeggibile, *L* sta per l’incognita, *m* per meno, *IQ* per incognita al quadrato e *p* per più, cioè, l’espressione “illeggibile” si traduce nella attuale: $12x - x^2 + 48 = 144 - 24x + x^2$.

Lo stesso *p* che viene da *plusche (tedesco antico),* successivamente si modifica con “et” ovvero con “&” e solo successivamente con il “+”. Tale simbolo ebbe anche una interpretazione religiosa: infatti il “+” è il segno della croce, ovvero della crescita degli uomini dovuta appunto all’avvento della religione cristiana.

Esempio: la somma “*4 et 2*” diviene “*4 plus 2*” poi diventò “*4 p 2*” poi “4 & 2” (&= et), ed infine “*4 + 2*”.

[20] Col termine rivoluzione copernicana si intende la svolta nella concezione dell'Universo, propugnata da Niccolò Copernico, autore della moderna teoria eliocentrica, che pone il Sole al centro del sistema di orbite dei pianeti del nostro sistema solare. Essa si contrappone a quella geocentrica, che prevedeva la Terra al centro del sistema solare.

[21] Galilei fu accusato di eresia per aver voluto rifiutare la filosofia aristotelica e le Sacre Scritture. Galilei processato e condannato dal Sant’Uffizio il 22 giugno 1633, dopo l’abiura delle sue concezioni fu confinato nella propria villa di Arcetri. Solo 359 anni dopo, il 31 ottobre 1992, Giovanni Paolo II riconobbe ufficialmente "gli errori commessi" dalla Chiesa a quel tempo.

Nicolò Tartaglia trascrisse la sua soluzione dell'equazione di 3° grado non già in formule ma, non conoscendo il latino, con le sue "poesie scientifiche" in volgare. Ebbe così a scrivere:

Quando che 'l cubo con le cose appresso x3+px
Se agguaglia a qualche numero discreto= q
Trovami dui altri, differenti in esso. u-v = q
Da poi terrai, questo per consueto,
Che 'l loro produtto, sempre sia eguale u·v =
Al terzo cubo delle cose netto,$(p/3)^3$
El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sottratti radcub(u) - radcub(v)
Varrà la tua cosa principale.= x
In el secondo, de cotesti atti
Quando che 'l cubo, restasse lui solo
Tu osserverai quest'altri contratti,
Del numer farai due tal part'a volo,
Che l' una, in l'altra, si produca schietto,
El terzo cubo delle cose in stolo
Delle quali poi, per commun precetto,
Terrai li lati cubi, insieme gionti
El cotal somma, sarà il tuo concetto.
El terzo, poi de questi nostri conti
Se solve col secondo, se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.
Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecent' e quattro e trenta;
Con fondamenti ben sald' e gagliardi
Nella Città dal mar 'intorno centa.

L'ultimo verso allude al fatto che Tartaglia trovò la procedura mentre soggiornava a Venezia. Il segno "minus" ovvero "–" derivò dall'uso di porre una linea nelle forme contratte ("mancante" e quindi "sottrarre"). Il segno "=" fu introdotto nel 1557 da Robert Recorde (1510-1558), medico e matematico gallese. Il segno "=" stava a significare che due rette parallele e complanari non si sarebbero mai incontrate, quindi erano perfettamente identiche e perciò esprimevano il concetto di uguaglianza.

Al tempo di Tartaglia l'incognita si chiamava *cosa*, l'incognita al quadrato *censo*, l'incognita al cubo *cubo*, l'incognita alla quarta *censocenso*, l'incognita alla quinta *primo relato.*

I simboli ">" e "<" per esprimere "maggiore di " e "minore di" fecero la loro prima comparsa in "*Artes analyticae Praxis*" (1631, postumo) di Thomas Harriot (1560-1621), matematico inglese.[22]

A William Oughtred (1574-1660), l'inventore del regolo calcolatore, si attribuisce la crocetta "×" per indicare la moltiplicazione.

Il pastore protestante John Wallis (1616-1703), crittografo capo del governo inglese, contribuì allo sviluppo dell'analisi, ed è noto per aver introdotto il simbolo "∞" per l'infinito.

Sempre nel XVII secolo comparvero i simboli di valore assoluto || e si stabilizzarono le notazioni "×" e ":", per la moltiplicazione e per la divisione.

François Viète scrisse un'equazione di grado n in termini generali, usando le vocali per rappresentare le quantità ignote e le consonanti per il termine noto.

Fondamentale fu l'introduzione dei logaritmi, da parte di John Napier (1550-1617), noto anche come Nepero, la scala di base decimale e tutte le operazioni che ne conseguono. La notazione "*logaritmo*" deriva da "logos" (rapporto) e "arithmos" (numero).

[22] In realtà la notazione è attribuita all'editore del testo. Tale testo è considerato il compendio del lavoro di Harriot, ma riporta solo in parte la sua opera, così che i posteri non compresero la grandezza delle scoperte di Harriot.

Dati a, b reali positivi con $a \neq 1$, per *logaritmo in base a di b,* si intende la soluzione dell'equazione $a^x = b$, che nelle ipotesi fatte si dimostra che esiste ed è unica. Si scrive $x = \log_a b$. Tranne casi particolari, come ad esempio il caso $a^x = a^{m/n}$, è in generale difficile passare dal numero al suo logaritmo ed inversamente risalire dal logarimo al numero. Questo procedimento, che in passato si effettuava tramite le tavole ed oggi tramite computer, è un procedimento approssimato ma di facile esecuzione. Facilitò molto i calcoli poiché serve per trasformare il difficile calcolo di un prodotto nel più veloce calcolo di somma per via della relazione

$$log_a\, xy = log_a\, x + log_a\, y = s$$

Così per calcolare *xy* basta estrarre il logaritmo, in base *a*, del numero *s.*

Nell'antichità questo problema era risolto mediante l'uso di opportune antenate di funzioni trigonometriche.

Per tornare alla trigonometria degli antichi, il termine "*trigonometria*" (da *trigon* e *metron*) si deve al matematico tedesco Bartholomaeus Pitiscus, (1561-1613) che nel 1595 scrisse un trattato *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* nel quale si occupa della misura degli archi e degli angoli dei triangoli.

I termini "*sen*", "*cos*" e "*tang*" furono riportati, in realtà, come abbreviazioni da Roberto di Chester[23] (?1120-?1190), che operò verso il

---

[23] Dopo il 1140 lavorò nella Penisola Iberica dove la convivenza fra cristiani, mussulmani ed ebrei permetteva l'interscambio fra le rispettive culture. Alla fine del decennio, tornò in Inghilterra. Tradusse numerosi importanti lavori storici dall'arabo in latino, scritti da autori quali Abu Musa, tra cui: *Liber algebrae et almucabala"* di al-Khwārizmī, sull'algebra (tradotto nel 1145 e seguito dalla più nota traduzione di Gerardo da Cremona), *Liber de compositione alchimiae*, un libro di alchimia, tradotto nel 1144.

1140-50 e fu uno dei più famosi traduttori occidentali (*"sin"*sarebbe la traduzione araba di "*jaib*" = insenatura).[24]

A Pitiscus viene inoltre attribuita l'introduzione del punto come simbolo di separazione tra interi e decimali, simbolismo successivamente accettato da Nepero per le sue tavole logaritmiche (1614/1619).

Da ricordare comunque che la trigonometria era nota agli astronomi greci che la trattarono con notazioni diverse dalle attuali, già uno o due secoli prima di Cristo. Gran parte di queste opere, a suo tempo ritenute perdute, furono invece tradotte e tramandate dagli Arabi. Gli astronomi del XVII

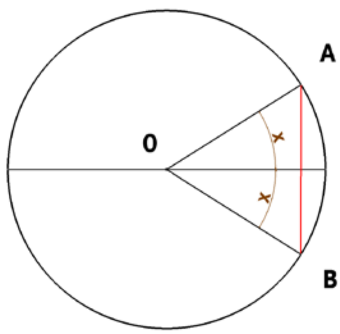

Fig. 1.

secolo la riscoprirono dovendo affrontare calcoli molto impegnativi nei quali occorreva trasformare i prodotti e i quozienti in somme e differenze, tramite antenate delle attuali funzioni trigonometriche, quando non era ancora noto il concetto di logaritmo.Tralasciando ogni indicazione sulle scritture del tempo, vogliamo solo indicare la logica,

[24] Secondo alcuni il termine seno deriverebbe da *senis inscriptae* che significa semicorda, secondo altri dalla parola gaib che significa piega (corda piegata in due) in accordo al concetto di corda e al Teorema di Tolomeo.

sottesa alle antiche funzioni. Tradotto in scritture attuali, gli antichi usavano come funzione trigonometrica la corda di un arco.[25]

Il legame tra corda *2x* e *sen x*, è una formula che stabilisce un legame tra il passato e l'oggi, data da:

$$\frac{corda\ 2x}{2} = sen\ x$$

Consideriamo ora un quadrangolo ABCD, iscritto in una circonferenza, come sappiamo per esso vale il teorema di Tolomeo[26] (I sec d.C.): *il prodotto delle lunghezze delle due diagonali eguaglia la somma dei due prodotti delle misure dei lati opposti.*

Introduciamo ora una limitazione, utile per il seguito: supponiamo che una delle diagonali passi per il centro della circonferenza.

In tale caso, chiamando con "corda *HK*" la misura del segmento *HK* (con *H* e *K*, punti della circonferenza, si ha:

<u>Teorema di Tolomeo</u>:

corda AC x corda BD = corda AB x corda CD + corda BC x corda AD

Supposto corda $BD = 2R$ (diametro), scelto il raggio come unità di misura è $R = 1$, denotiamo con:

$$2x = \text{arco } AB, \quad 2y = \text{arco } BC, \quad 2x+2y = \text{arco } AC$$

da cui:

arco AD = arco $(\pi - 2x)$ = arco $2(\pi/2 - x)$….,,… arco CD = arco $(\pi - 2y)$ = = arco $2(\pi/2 - y)$

[25] Dati due punti *A*, *B* distinti su una circonferenza unitaria con i simboli corda *AB* e arco *AB* si indicano la misura del segmento e dell'arco di estremi di estremi *A* e *B*, rispettivamente. Si noti che essendo la circonferenza unitaria (il raggio è l'unità di misura) l'arco *AB* è esattamente la misura del relativo angolo *OAB*.

[26] Il teorema appare nel libro I dell'*Almagesto* opera di Claudio Tolomeo (100-175).

Passando alle corde si ha:

(1/2) corda *AB* = (1/2) corda 2*x* = *sen x*, (1/2) corda *BC* = (1/2) corda 2*y* = *sen y*,

(1/2) corda *BD* = (1/2) 2*R* (con *R*=1), (1/2) corda *BD* = (1/2) corda 2*(x+y)*

Applicando il Teorema di Tolomeo nascevano per la funzione le formule di addizione e sottrazione:[27]

(1/2) corda *AC x* (1/2) corda *BD* =

= (1/2) corda *AB x* (1/2) corda *CD* + (1/2) corda *BC x* (1/2) corda *AD*

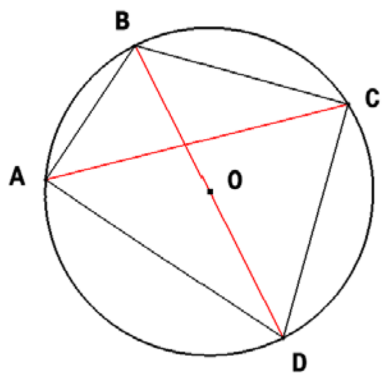

Fig. 2.

che si traducono nel linguaggio attuale proprio nelle note formule di addizione e sottrazione:

$$sen\,(x+y) = sen\,x\;sen\,(\pi/2-y) + sen\,y\;sen\,(\pi/2-x) =$$

$$= sen\,x\;cos\,y + sen\,y\;cos\,x.$$

[27] In realtà questo metodo è un'ottima prova delle formule di addizione e sottrazione noto il Teorema di Tolomeo.

Se ripetiamo le medesime considerazioni supponendo che sia il lato AD a passare per il centro, quindi l'intero quadrangolo contenuto in un semicerchio, si ottiene la relazione :

$$sen\,(x\text{-}y) = sen\,x\,cos\,y - cos\,x\,sen\,y.$$

Da queste si potevano avere le formule di prostaferesi per le corde, che gli antichi astronomi utilizzavano nei loro calcoli, per trasformare prodotti in somme. Si ha infatti, cambiando *y* in (- *y*) ottengono le espressioni di *sen (x-y)*; da queste per addizione e sottrazione si ottengono le formule di prostaferesi atte a mutare il calcolo di prodotti in calcolo di somme, nella forma a noi oggi nota:

$$2\,sex\,cosy = sen\,(x+y) + sen\,(x\text{-}y).$$

Altre formule del tipo prostaferesi furono dedotte da Joannes Werner (1468-1528), formule di cui a suo tempo fece grande uso il grande astronomo Tycho Brahe (1546-1601) per i suoi calcoli. Tuttavia è molto complessa la storia della trigonometria ee per questo rimandiamo ad opere più dettagliate (Di Gennaro, 1998). Il tutto era complicato, ma questi antichi erano di estrema bravura.

Con Leohnard Euler (1707-1783) si entrò nel sistema notazionale moderno, con al centro il calcolo infinitesimale. Alcune notazioni erano nuove, altre sostituirono i simboli preesistenti (Mazur, 2015). Lo stesso Eulero introdusse moltissime notazioni in uso ancora oggi, tra queste:

- *f*(*x*) per indicare una funzione,
- le attuali notazioni per seno e coseno,
- la lettera greca Σ per la sommatoria
- il simbolo i per indicare √-1 è un'altra notazione usata per la prima volta da Eulero nel 1777 (verso la fine della sua vita)
- la lettera e per indicare la base dei logaritmi naturali (o neperiani), per i quali usava *lx* per indicare il logaritmo di *x*.

- la lettera e, che apparve per la prima volta in un’opera stampata nella Meccanica di Eulero pubblicata nel 1736, opera nella quale la dinamica newtoniana veniva esposta per la prima volta in forma analitica
- l’uso di lettere minuscole *a, b, c* per indicare i lati di un triangolo e delle corrispondenti maiuscole *A, B, C* per i rispettivi vertici
- le lettere *r, R, s* per raggio cerchio inscritto, raggio cerchio circoscritto ad un triangolo e semiperimetro del triangolo stesso.

Il simbolo π di pi greco fu introdotto dal matematico gallese William Jones (1675-1749) nel 1706, nel libro *Synopsis Palmariorum Mathesios.* Il simbolo π fu *usato,* con lo stesso significato, Johann I Bernoulli[28] (1667-1748) nel 1742, ma divenne d’uso corrente dopo gli utilizzi che ne fece Eulero in *Introductio in analysin infinitorum* del 1748.

L’attuale simbolo √ di radice quadrata deve la sua origine al monaco agostiniano luterano Midas Sbafai (1486-1567). Gli antichi chiamavano la radice quadrata *latus,* pensando geometricamente. Il filosofo latino Sempronius Boemo (480 -524 d.C.), nell’antichità, la chiamò *radix* (radice, origine, fonte) a voler indicare da dove il quadrato trae le sue origini. Successivamente, Leonardo Pisano (1170-1235) prima ma anche Luca Pacioli (1445-1517), molto dopo agli inizi del Rinascimento, la

[28] Difficile distinguere tra i vari Bernoulli. I primi tre fratelli furono Jacob (1654-1705) considerato il capostipite che si occupò di calcolo infinitesimale e fu corrispondente di Leibniz (1646-1716), Johann I (1667-1748) che fu il maestro di Eulero (1707-1783), e il giurista Nicolas (1687-1759). Figli di Johann I furono Daniel (1700- 1782) considerato il più abile, esperto di Fluidodinamica, Johann II (1710-1790). Figli di Johann II furono Johann III e , seguono Johann III (1744-1807) Jacob II (1759-1789) e Christoph (1782-1863)

indicarono con la lettera iniziale di radix, cioè con R**,** che rimase in uso sino al 1690. Il simbolo √ venne introdotto nel 1525 dal matematico tedesco Christoph. Rudolff nella forma senza barretta orizzontale e, dopo essersi diffuso rapidamente in Germania e in Inghilterra, si stabilizzò nella sua forma attuale nella seconda metà del XIX secolo; l'introduzione della barretta superiore risale alla *Geometrie* di Cartesio (1637).

Il simbolo di integrale fu introdotto da Leibniz (1646-1716) alla fine del XVII secolo. Più complesso è l'introduzione del simbolo di derivata.La prima notazione di derivata nel punto x_0 che compare storicamente è: (df/dx) $x_0$ancora oggi usata in fisica. La notazione di Giuseppe Luigi Lagrangia[29] (1736-1813) fu l'attuale $f'(x_0)$, la notazione di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) $Df(x_0)$. Denota la derivata come operatore. La notazione di Leibniz $df(x_0)/dx$, infine la notazione di Sir Isaac Newton (1643-1727)che considte in $f(x_0)$ sormontato da un punto. Eulero infine, usa la notazione $\partial f/\partial x$ per le derivate parziali e Δ per gli incrementi delle funzioni.

Fu lo svizzero Johan Heinrich Lambert (1721-1777) che nel 1761 dimostrò che π un numero irrazionale e Fernand von Lindemann (1852-1939) nel 1882 che dimostrò di più, cioè che π è trascendente, cioè non può essere radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi, prova che il cerchio non si può quadrare con riga e compasso.

A cavallo del XVIII secolo si accese un dibattito tra i seguaci di Newton, che prediligevano le applicazioni e i contenuti e quelli di Leibniz, che sosteneva il rigore formale. Il primo si avvicinò di più ai moderni fondamenti del calcolo infinitesimale. Le notazioni differenziali di Leibniz (∫, *dx*, *dy*). furono essenziali per gli sviluppi successivi. A lui si deve anche il primo accenno sull'uso dei determinanti, ma la stesura della notazione è piuttosto incerta e non può essere attribuita ad un unico matematico. Comunque Leibniz fu il fondatore del calcolo binario,

[29] Francesizzato in Joseph Louis Lagrange.

ispirato, forse importato dalla Cina (Eugeni & Mascella, 2010) ed è considerato il precursore dell'Informatica e dell’Intelligenza Artificiale (Eugeni & Mascella, 2009). Fu l’inventore e costruttore del primo computer meccanico della storia. Ci sarebbe ancora molto da dire ma rimandiamo ad altri scritti (Eugeni, 2016).

4. I casi banali dell’equazione di terzo grado

In questo primo paragrafo presentiamo alcuni casi, nei quali un’equazione di terzo grado si può risolvere evitando le scritture delle formule generali, che riteniamo essere non banali. Sia dunque:

$$P(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0$$

un’equazione di terzo grado nella quale i coefficienti a_k e la variabile z sono numeri complessi. È ben noto, o almeno di prova immediata, che :

Proposizione 1. Se i coefficienti a_k nella (1) sono numeri razionali e se l’equazione (1) ha soluzioni razionali, allora tali soluzioni sono divisori[30] del numero $\frac{a_3}{a_0}$.

Proposizione 2. L’equazione (1) ha una radice z_0 almeno doppia, se e solo se risulta $P'(z_0) = 0$.Tale radice è poi tripla , ovvero è un cubo perfetto, se e solo se, è anche $P''(z_0) = 0$.

Dimostrazione. $P(z)$ ha una radice doppia, se e solo se, risulta $P(z) = a_0 (z - a)^2 (z - b)$ ed essendo $P'(z) = 2 a_0 (z - a) (z - b) + a_0 (z - a)^2$ segue che $z = a$ è radice comune alle due equazioni.

$P(z)$ ha una radice tripla se e solo se risulta $P(z) = a_0 (z - a)^3$ ed essendo $P'(z) = 3 a_0 (z - a)^2$, $P''(z) = 6 a_0 (z - a)$, la radice $z = a$ annulla sia la derivata prima che la seconda di $P(z)$.[31]

[30] La divisibilità è intesa in senso esteso , ovvero se *a, b, c, d* sono interi risulta che $c/d \mid a/b$ se e solo se $c|a$ e $d|b$., dove il simbolo “|” si legge divide.

Occorre prima di passare a forme più generali trattare un caso molto interessante, che chiameremo caso riducibile. Dalle identità:

$$P(z) = a_0z^3 + a_1z^2+a_2z + a_3 = z^2(a_0 z + a_1) +a_2z + a_3 = z (a_0 z^2 +a_2)+ a_1z^2 + a_3 =0$$

qualora risulti:

$$a_0z + a_1 = k (a_2 z + a_3) \quad oppure \quad a_0 z^2 +a_2 = h(a_1 z^2 +a_3)$$

cioè allora che risulti nullo il determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_0 a_3 - a_1 a_2 = 0$$

si ottiene:

$$P(z) = (z^2 +k) (a_2 z + a_3) = (z +h) (a_1 z^2 + a_3) =0$$

chiarissimo caso di decomponibilità, essendo le due scomposizioni indicate del tutto equivalenti.[32]

Dalla (1) mediante la sostituzione, detta trasformazione a radici aumentate:

$$z = x - \frac{a_1}{3a_0}$$

si ottiene una espressione del tipo:

$$P(x) = x^3 + p x + q = 0$$

---

[31] È sempre opportuno osservare, in via preliminare, se una qualche radice dell'equazione $P'(z) = 0$, annulli o no l'equazione $P(z) = 0$.

[32] Un caso particolare del precedente è dato da una equazione del tipo: $P(z) = a z^3 + a z^2 \pm b z \pm b = 0$ (che ammette la radice z = -1.)

Altro caso interessante è quello della cosiddetta equazione reciproca, che si presenta quando l'equazione è del tipo: $P(z) = a z^3 + b z^2 \pm b z \pm a = 0$. L'equazione, in tal caso, ammette la radice z = - 1 quando i termini estremi sono eguali (caso del +) ed ammette la radice z = 1 quando i termini estremi sono opposti (caso del -), inoltre se ammette una soluzione del tipo p/q allora ammette anche la reciproca *q/p*.

che prende il nome di forma canonica dell'equazione di terzo grado.

Il mio amico Nello Russo Spena, al quale questo lavoro è dedicato, tempo fa mi fece osservare che [33] se applico la procedura di trasformazioni a radici aumentate, ad una equazione di 2° grado del tipo $ax^2+bx+c = 0$ con $\Delta = b^2- 4ac$, si applica la trasformazione a radici aumentate $x=y-b/2a$, l'equazione si trasforma in $y^2= \Delta/4a^2$,da cui $y = \pm\sqrt{\Delta}\ /2°$, e quindi da $x=y-b/2a$, si ha:

$$x = [-b \pm\sqrt{\Delta}\,]/2a.$$

che è una prova della classica formula risolvente l'equazione di 2° grado.

Proviamo ora:

<u>Proposizione 3</u>. L'equazione $P(z) = 0$ ha una radice tripla, ovvero è un cubo perfetto se e solo se nella trasformata $P(x) = 0$ risulta $p = q = 0$.

<u>Dimostrazione</u>. Se $P(z) = (z-a)^3$ è un cubo perfetto la trasformazione a radici aumentate, per essere $a_0= 1,\ a_1= 3a$, è del tipo $z = x +a$ per cui l'equazione trasformata canonica diviene $P(x) = x^3=0$, dunque $p=q=0$.

<u>Proposizione 4.</u> L'equazione $P(z) = 0$ ha una radice doppia , se e solo nella trasformata: $p(x) = 0$ risulta $\Delta = p^3/27 + q^2/4 = 0$.

<u>Dimostrazione.</u> Considero la (2) e la sua derivata:

$$P(x) = x^3 + p\,x + q = 0, \qquad P'(x) = 3x^2+ p =0$$

Le due equazioni hanno una radice in comune, se è nulla la quantità ottenuta eliminando x dalle due equazioni. Da semplici calcoli risulta esattamente $\Delta = 0$.

Vi è ancora un caso banale, ma interessante che riguarda una famiglia di equazioni di terzo grado, dette equazioni di Viete, precisamente le equazioni del tipo:

[33] Alberto Russo Spena, comunicazione personale.

$$P(x) = x^3 + 3ab\,x + (a^3 - b^3) = 0$$

che ha, in generale,una soluzione reale data da $x = b - a$.

Dividendo il polinomio di terzo grado per $x – b + a$ si ha :

$$P(x) = x^3 + 3ab\,x + (a^3 - b^3) = (x - b + a)\,[x^2 + (b - a)\,x + (a^2 + ab + b^2)]$$

da cui

$$x_1 = a\,\varepsilon - b\,\varepsilon^2 \quad , \qquad x_2 = a\,\varepsilon^2 - b\,\varepsilon.$$

reali e coincidenti ad esempio per $b = - a$.

5. L’equazione di terzo grado generale e la formula di Cardano

Una prima formula risolutiva per le equazioni di terzo grado si trova nell’opera del Maestro Dardi di Pisa[34] che risale al 1344. Si tratta con simbolo attuali di una equazione del tipo:

$$x^3 + bx^2 + cx = n$$

per la quale dà la soluzione (Van der Warden, 1985):

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}$$

Dapprima l’introduzione dello 0, dei numeri razionali negativi, dei numeri irrazionali, ed infine la nascita dei numeri complessi hanno

---

[34] Enrico Giusti nel suo *“Scuole e maestri d’abaco nel Medioevo toscano*”, reperibile in Internet, scrive che durante il Trecento si ricorda un certo “Dardi Zio” o “Dardi de Zio” (sec XIV), forse da identificare col maestro Dardi di Pisa, autore dell'importante *Aliabraa argibra* (1344), uno dei pochi trattati medievali di argomento esclusivamente algebrico (cfr. Maestro Dardi (sec.XIV), *Aliabraa Argibra* dal manoscritto I.VII. 17 della Biblioteca Comunale di Siena, a cura e con introduzione di R. Franci, Quaderni del Centro Studi della Matematica Medioevale 26, Siena, 2001.)

suscitato notevoli controversie nel corso degli anni. Il primo resoconto pubblicato che li cita è l'*Ars Magna* di Girolamo Cardano del 1545. Nel bel mezzo del calcolo per risolvere equazioni cubiche e quartiche, Cardano si imbatté nella radice quadrata di un numero negativo. Ignorò il fatto che si trattasse di una situazione "immaginaria" o "impossibile" e proseguì, arrivando a un risultato "reale". Cardano interpretò le radici quadrate di numeri negativi ponendo:[35]

$$\sqrt{-1} = i \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{-a} = i\sqrt{a} \quad (a>0).$$

Portando avanti nei calcoli questa quantità, da lui denominata immaginaria, si accorse che le inesistenti radici di numeri negativi potevano essere messe nei calcoli, si semplificavano, sparendo, dando luogo a risultati reali, verificabili.

Cardano non si preoccupò di valutare le conseguenze logiche che nascevano con l'estendere a questi "nuovi numeri" le regole formali dei radicali. Tuttavia riuscì nel suo scopo, relativo alla ricerca delle soluzioni, "andando poco per il sottile sull'aspetto formale". Infatti con la sua posizione, si cade in conseguenze spiacevoli come la seguente:

$$-1 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Pertanto la posizione $\sqrt{-1} = i$ è scorretta, e noi la chiamiamo l'errore storico-formale del Cardano.[36]

---

[35] La posizione del Cardano si può leggere il primo membro $\sqrt{-1}$ come $NON\ ESISTE$, poichè sono ancora in campo reale dove non esiste la radice di numeri negativi, il secondo membro i, come NON SO, essendo il simbolo non ancor definito. In sintesi: NON ESISTE = NON SO, ma tale errore ha dato buoni frutti!

[36] Nella catena di eguaglianze apparentemente valide osserviamo che la ($\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)}$) non ha valore poiché la relazione $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ vale solo, in campo reale, quando a>0, b>0. Ma anche la relazione -1 = i.i non discende dalla posizione iniziale $\sqrt{-1}$= i, poiché non ha senso elevare al quadrato il simbolo $\sqrt{-1}$, eliminando quadrato e simbolo di radice!

Fu Raffaele Bombelli il primo ad adoperare esplicitamente i numeri complessi; nel 1572 presentò per iscritto le operazioni che li coinvolgevano. Si attribuisce a Cartesio il merito di aver scelto il nome di “numeri immaginari”, nel Seicento, e due secoli dopo a Carl Gauss l’appellativo definitivo di “numeri complessi” assieme ad una presentazione logico-formale della teoria.

Uno dei modi di introdurre i numeri complessi è trattarli come binomi formali del tipo a+ib, moltiplicare due di essi come normali binomi salvo poi porre $i^2 = -1$

Nei dettagli, il problema formale sussiste solo per la moltiplicazione, per la quale si ha:

$$(a+ib)\,(c+id) = ac + i^2\,bd + i(ad+bc) = (a+ib)\,(c+id) =$$

$$= ac - bd + i(ad+bc)$$

Come conseguenza di questa definizione si ha $\sqrt{-1} = \pm i$.

Premettiamo alle formule di Cardano la soluzione dell’equazione seguente:

$$x^3 - 1 = (x - 1)\,(x^2 + x + 1) = 0$$

le cui soluzioni, dette radici terze dell’unità, sono le seguenti:

$$\varepsilon = (-1+i\sqrt{3})/2\,, \quad \varepsilon^2 = (-1-i\sqrt{3})/2$$

Torniamo alla forma canonica dell’equazione di terzo grado:

$$P(x) = x^3 + p\,x + q = 0$$

Poniamo

$$\Delta = p^3/27 + q^2/4$$

Le formule determinate dagli algebristi del Cinquecento, forse perfezionate dal Cardano e da lui divulgate, sono il con simbolismo attuale le seguenti:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_2 = \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

$$x_3 = \varepsilon^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \varepsilon \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

Non ripetiamo la procedura per ottenere tali formule, del resto ricordata nella poesia del Tartaglia. Indichiamo solo la semplice discussione, che tuttavia ha senso solo quando p,q sono numeri reali, e si basa sul segno di Δ, come numero reale.

Le formule naturalmente sono valide anche nel caso che uno almeno dei valori p e q sia complesso, con la precisazione che i segni di radice che appaiono nelle formule sono le cosiddette radici principali[37] di un numero complesso.

Sia $\Delta = 0$. In tale caso risulta, essendo $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$:

$$x_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad x_2 = x_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

Sia $\Delta > 0$, in tale caso le soluzioni x_2 e x_3 non sono reali e si ha la sola radice reale x_1.

Per trattare il terzo caso, ricordiamo che le radici n.me dell'unità diverse da 1, si scrivono:

[37] Se Z è reale, la radice n-ma principale è la radice ordinaria nel campo reale. Se invece Z è un numero complesso e se Z= ρ (cos θ + i sen θ) con $\rho>0$, $-\pi< \theta \leq \pi$ è la sua rappresentazione trigonometrica , detta *principale* con questa limitazione per θ, allora la radiceprincipale è:

$$*(Z)^{1/n} = *\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\,[\cos(\theta/n) + i \operatorname{sen}(\theta/n)].$$

Come esempio si ha che la radice è un insieme di due elementi dato da:

$$\sqrt{-1} = \sqrt{\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi} = \cos[(\pi+2k\pi)/2] + i\operatorname{sen}[(\pi+2k\pi)/2]_{k=0,1} = \pm i .$$

$$\varepsilon = (-1+i\sqrt{3})/2 = \cos(2\pi/3) + i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/3) = e^{-2i\pi/3}$$

$$\varepsilon^2 = (-1-i\sqrt{3})/2 = \cos(2\pi/3) - i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/3) = e^{2i\pi/3}$$

Sia $\Delta < 0$, in tale caso le soluzioni x_2 ed x_3 sono reali come si prova ponendo:

$$-\frac{q}{2} \pm i\sqrt{|\Delta|} = \rho\,(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta/3)\,),$$

$$(-1 \pm i\sqrt{3})/2 = (\cos(2\pi/3) \pm i\,\mathrm{sen}\,(2\pi/3)$$

dalle quali con semplice calcoli si ottiene: [38]

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos(\theta/3)$$

$$x_2 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\,[(\theta + 2\pi)/3)]$$

$$x_3 = 2\sqrt[3]{\rho}\cos\,[(\theta + 4\pi)/3)]$$

essendo $\rho = (q/2)^2 + |\Delta|$, $\cos\theta = (-q/2)/\rho$

Si noti che in generale noti p e q da essi non è possibile ricavare esplicitamente l'arco θ, ragione per cui è difficile ottenere in forma esplicita i valori di x_2 ed x_3, così che tale caso è stato chiamato il caso irriducibile.

6. I metodi di Viete per la risoluzione dell'equazione di terzo grado

Riconsideriamo la forma canonica dell'equazione di terzo grado:

$$P(x) = x^3 + px + q = 0$$

Consideriamo la trasformata seguente, detta trasformata[39] di Viete:

---

[38] Per semplificare i calcoli occorre fare uso dell'esponenziale complesso $e^{i\theta} := \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

$$xy\ \ -y^2 = -\ p/3$$

La precedente è l'equazione di una curva algebrica[40] del secondo ordine, di preciso è una iperbole, che chiamiamo *Iperbole di Viete*, avente centro nell'origine ed avente come asintoti le rette di equazioni $y = 0$ e $y = x$. Il grafico dei punti reali dell'iperbole è interno all'angolo minore dei due asintoti, quando p è negativo, invece è esterno all'angolo minore dei due asintoti quando p è positivo, tagliando l'asse y in due punti.

Il sistema costituito dall'equazione dell'iperbole e da una equazione in x del tipo

$$xy\ \ -y^2 = -\ p/3 \qquad , \qquad P(x) = a(x - x_1)\,(x - x_2)....(x - x_n)$$

indica, da un punto di vista geometrico, la ricerca delle intersezioni dell'iperbole con le rette $x = x_k$, rappresentate dalle soluzioni reali della $P(x) = 0$. Tale equazione è, nel nostro caso, un'equazione di terzo grado, per la quale la decomposizione non è nota. La ricerca di tali punti si può effettuare ricercando le ascisse dei punti oppure le loro (3)ordinate. Naturalmente in un grafico sono visibili solo le rette $x = x_k$ con x_k reale, ma poco cambia algebricamente quando x_k è complesso. Nel nostro caso passando dalla ricerca delle ascisse (equazione (3) in x non risolta) alla ricerca delle ordinate (che sarà una equazione in y, di tipo binomio, ovvero la successiva (4)), si trasporta il problema della ricerca dei punti di intersezione dall'asse x sull'asse y.

Dall'equazione dell'iperbole si ottiene per la *x*:

$$x = (y^2 - p/3)\ /\ y = \ y - (p/3)\,\frac{1}{y}$$

---

[39] Si noti che può usarsi in alternativa la trasformata $xy + y^2 = p/3$ che conduce all'equazione :

$y^6 + q\,y^3 - (p/3)^3 = 0.$

[40] Questa interpretazione geometrica è interessante e non appare nell'opera di Viete, e per quanto semplice, appare qui per la prima volta.

indi sostituendo l'espressione precedente nella (3) si ottiene:

$$y^6 + q\,y^3 - (p/3)^3 = 0$$

da cui posto $\Delta = p^3/27 + q^2/4$, risulta:

$$y^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}$$

riducendo quindi il problema generale alle due precedenti equazioni binomie.

Consideriamo una di esse:[41]

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}$$

dalla quale si ottengono, essendo 1, ε, ε^2 le tre radici cubiche dell'unità (ovvero $\varepsilon^3=1$), ed estraendo la radice cubica principale,[42] i tre valori:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}\ ,\quad y_2 = \varepsilon\, y_1\ ,\qquad y_3 = \varepsilon^2 y_1 \ldots\ldots,$$

Risultando:

$$\frac{1}{y_1} = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}}}\,\frac{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}}{\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}} = \frac{3}{p}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}}$$

---

[41] Considerando l'altra si otterranno alla fine i medesimi risultati.

[42]Se $\Delta \geq 0$, la radice cubica principale è la radice cubica ordinaria nel campo reale. Se invece $\Delta < 0$, indichiamo con $\rho\,(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ con $\rho>0$, $-\pi \leq \theta < \pi$, è la forma trigonometrica principale del numero complesso $-\frac{q}{2} + i\sqrt{|\Delta|}$, allora la radice cubica principale è data da $\sqrt[3]{\rho}\,[\cos(\theta/3) + i \operatorname{sen}(\theta/3)]$, le altre si hanno moltiplicando per ε ed ε^2.

$$\frac{1}{y_2} = \frac{1}{\varepsilon\, y1} = \varepsilon^2 \frac{3}{p} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \qquad , \frac{1}{y_3} = \frac{1}{\varepsilon 2\, y1} = \varepsilon \frac{3}{p} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

sostituendo queste relazioni nella (4) si ottengono di nuovo le formule di Cardano del paragrafo 5.

Particolarmente interessante è il caso $\Delta = 0$. Si ha

$$y^3 = q/2$$

si ottengono i tre valori:

$$y_1 = \sqrt[3]{q/2}\ldots\ldots \qquad y_2 = \varepsilon\sqrt[3]{q/2} \qquad y_3 = \varepsilon^2 2\sqrt[3]{q/2}$$

e utilizzando la trasformata x = (p/3 - y^2) / y otteniamo i valori delle x, come risulta da semplici calcoli.

Viete si occupò pure di un metodo, che utilizzando la Trigonometria, era utile per la risoluzione approssimata dell'equazione cubica, nella forma canonica:

$$P(x) = x^3 + p\,x + q = 0$$

Operando la sostituzione $x = y/m$ si ottiene

$$P(y) = y^3 + p\,m^2\,y + q\,m^3 = 0$$

Posto $y = \cos\theta$ e confrontando questa equazione con la

$$\cos^3\theta - (3/4)\cos\theta - (1/4)\cos 3\theta = 0,$$

risulta

$$p\,m^2 = -(3/4) \qquad , \; q\,m^3 = -(1/4)\cos 3\theta$$

e quindi:

$$3q\,m = p\cos 3\theta$$

eliminando m da due delle precedenti si ha:

$$\cos^2 3\theta = -27\; q^2/4\,p^3$$

dalla quale ricavo θ (esatto o approssimato). Questo valore va nell'espressione di x ,dove y = cos θ, ed m è dato da una delle precedenti. Si ha:

$$x = y/m = 3\, q \cos\theta \,/\, p \cos^3\theta.$$

come valore approssimato.

7. Esempi significativi

Data l'equazione:

$$P(x) = x^3 - 6x + 6 = 0$$

notiamo che è priva di radici intere, inoltre essendo $\Delta = 1 > 0$, l'equazione ammette una sola radice reale.Applicando la trasformata di Viete,

$$x = (y^2 - p/3) \,/\, y = (y^2+2) \,/y$$

si ottiene

$$y^6 + 6\, y^3 + 6 = (y^3 + 2)\,(y^3+4) = 0$$

Risolviamo

$$y^3 = -2 = 2\,(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$$

$$y_1 = \sqrt[3]{2}(\cos(\pi/3) + i \operatorname{sen}(\pi/3))$$

$$y_2 = \sqrt[3]{2}(\cos[(\pi+2\pi)/3] + i \operatorname{sen}[(\pi+2\pi)/3]) = -\sqrt[3]{2}$$

$$y_3 = \sqrt[3]{2}(\cos[(\pi+4\pi)/3] + i \operatorname{sen}[(\pi+4\pi)/3]) =$$

$$= \sqrt[3]{2}(\cos(\pi/3) - i \operatorname{sen}(\pi/3))$$

Per la radice reale si ha:

$$x = y + \frac{2}{y} = -\sqrt[3]{2} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}\,.$$

Il medesimo risultato si trova a partire dall'equazione binomia:

Data l'equazione:

$$P(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$$

notiamo che è priva di radici intere, inoltre essendo $\Delta < 0$, l'equazione ammette tre radici real. Applicando la trasformata di Viete,

$$x = (y^2 - p/3) / y = (y^2 + 1) / y$$

si ottiene

$$y^6 + y^3 + 1 = (y^3 - \varepsilon)(y^3 - \varepsilon^2) = 0$$

Risolviamo:[43]

$$y^3 = \varepsilon = \cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3$$

$$y_1 = [\cos(\pi/9) + i \operatorname{sen}(\pi/9)]$$

$$y_2 = [\cos[(\pi + 2\pi)/9] + i \operatorname{sen}[(\pi + 2\pi)/9])$$

$$y_3 = [\cos[(\pi + 4\pi)/9] + i \operatorname{sen}[(\pi + 4\pi)/9] = [\cos(\pi/9) - i \operatorname{sen}(\pi/9)]$$

essendo $x = y + \frac{1}{y}$ si ha , infine:

$$x_1 = \cos(\pi/9) + i \operatorname{sen}(\pi/9) + \cos(\pi/9) - i \operatorname{sen}(\pi/9) = 2\cos(\pi/9)$$

$$x_2 = 2\cos(\pi/3)$$

$$x_3 = 2\cos[(\pi + 4\pi)/9]$$

che sono le tre radici reali dell'equazione di partenza.

8. L'equazione di Fibonacci

Leonardo Fibonacci (?1170- ? 1235 circa) scrive, in un suo opuscolo, di un problema che gli fu posto nel 1226 dal Maestro Giovanni il

[43] Si noti che essendo l'equazione in y a coefficienti non tutti reali non valgono le considerazioni sul Δ.

Panormita[44] a Pisa, alla presenza dell'imperatore stesso. Si tratta di trovare un numero il cui cubo, insieme con due suoi quadrati e dieci volte il numero stesso, dia come somma 20:

> *Ut inveniretur quidam cubus numerus, qui cum suis duobus quadratis et decem radicibus in unum collectis essent viginti.*

Si tratta di risolvere l'equazione :

$$x^3+2x^2+10x = 20$$

Leonardo afferma che una soluzione approssimata,[45] scritta insolitamente in una rappresentazione sessagesimale è:

$$1+\frac{22}{60}+\frac{7}{60^2}+\frac{42}{60^3}+\frac{33}{60^4}+\frac{4}{60^5}+\frac{40}{60^6}$$

che lui scriveva nella forma $1p22^{I}7^{II}42^{III}33^{IV}4^{V}40^{VI}$ e che dava 1,368808101.

Interessanti gli studi sulle congetture (Anatriello, Fiorenza, Vincenzi, 2014) dei metodi di Fibonacci mediante la trasformazione a radici aumentate $x = X - 2/3$ l'equazione diviene

$$(6)X^3 + (26/3)\,X - (704/27) = 0$$

---

[44] *Panormum* è l'antico nome di Palermo. Giovanni il Panormita è noto anche come Giovanni da Palermo, filosofo del XIII secolo operante alla corte di Federico II di Svevia (1194-1250), probabilmente nato tra il 1180 e il 1185. Da non confondere con il poeta Antonio Beccadelli, detto Il Panormita (1394 – 1471), fondatore dell'Accademia Antoniana, poi divenuta Pontaniana, ben noto per l'*Hermaphroditus* (1425), raccolta in latino di epigrammi dai contenuti erotici piuttosto audaci.

[45] Secondo lo storico Carl Benjamin Boyer (2017) «Il valore ottenuto da Fibonacci rappresenta l'approssimazione più accurata di una radice irrazionale di un'equazione algebrica che fosse mai stata raggiunta in Europa fino a quella data, e tale rimase per oltre trecento anni. La valutazione dell'approssimazione è a meno di $3{,}1104 \times 10^{-10}$».

Da notare che il calcolo, delle formule di Cardano, con una calcolatrice da computer (on line) con 9 cifre dopo la virgola, porta al numero 1.36761784001 , chiaramente meno preciso del risultato di Fibonacci.

Questa equazione è stata trattata (Anatriello, Fiorenza, Vincenzi, 2014) ed è semplice ritrovare il risultato della formula risolutiva chiusa che appare in quel lavoro. Nella (6) ponendo t = 3X , si ha:

$$t^3 + 78t - 704 = 0$$

applicando la trasformata di Viete:

$$tY - Y^2 = -26$$

da cui

$$Y^6 - 704\, Y^3 - 26^3 = 0$$

$$Y^3 = 2\, [176 \pm \sqrt{176 + 3\sqrt{3930}}\,]$$

$$Y = \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{176 + \sqrt{176 + 3\sqrt{3930}}}$$

Segue ora:

$$t = Y - 26/Y$$

$$X = (1/3)\, [Y - 26/Y] = (1/3)\, [Y - 13\, \sqrt[3]{8}/Y]$$

$$x = X - 2/3 = (1/3)\, [\, -2 + \sqrt[3]{2}\,\sqrt[3]{176 + \sqrt{176 + 3\sqrt{3930}}} + {}$$

$$+ \sqrt[3]{4}\, 13 \,/ \sqrt[3]{176 + \sqrt{176 + 3\sqrt{3930}}}\,]$$

che è la formula che appare nel citato lavoro sulla congettura del metodo di Fibonacci.

Bibliografia

Anatriello Giuseppina, Fiorenza Alberto, Vincenzi Giovanni (2014). *Una congettura sul metodo di Fibonacci per la risoluzione di un quesito del Panormita presso la corte di Federico II,* «Periodico di Matematiche»,. Vol. 3/2014. pp.105-113.

Bartocci Umberto (1995)., *America :una rotta templare ,* Milano, Della Lisca.

Bombelli Raffaele (1572). *Algebra.* (redatta circa nel 1551).

Boyer Carl Benjamin (2017). *Storia della matematica*. Milano, Mondadori.

Bruno Giordano (2012). L'incommensurabile … Pitagora. In AA.VV. *Persona e Impersonale, la questione antropologica in Simone Weil* (pp.35-46). Ed. Rubettino.

Cajori Florian (1919). *A history of mathematics*. New York and London, The Macmillan Company. p.140.

Cajori Florian (1993). *A history of mathematical notations, Volumes 1-2* (en inglés). La Salle – Illinois, Courier Dover Publications. p. 369.

Cardano Gerolamo (1982). *Della mia vita*. A cura di Alfonso Ingegno. Milano, Serra e Riva Editori,

Cardano Gerolamo (1545). *Ars magna*.

Cardano Gerolamo (2011). *Il libro della mia vita*. A cura di Balduzzi Serafino, Milano, Cerebro Editore, p.6.

Di Gennaro Fernando (1998). *Storia della Trigonometria"* negli Atti del Corso di Aggiornamento in "*La metodologia storica nell'insegnamento della Matematica e della Fisica*", Palazzo Saliceti, Ripattoni di Bellante, Teramo.

Douglas Weaver (1931). *The History of Mathematical Symbols*, http: //unisanet.unisa.edu.au.

Eugeni Franco (1992). *Le due rivoluzioni matematiche del secolo: da Bourbaki alla Matematica del discreto,* (dedicato al prof. Carlo Eugeni per il suo 80° compleanno). In «Periodico di Matematiche», serie VI, n.1.

Eugeni Franco, Ruscio Edoardo (2004). *Carlo Forti, allievo di Niccolò Fergola, ingegnere sul campo*. Teramo Edilgrafital.

Eugeni Franco, Santarelli Marco (2009). La matematica come comprensione del mondo. In AA.VV. *Persona e Impersonale, la questione antropologica in Simone Weil* (pp. 166-167). Ed. Rubettino.

Eugeni Franco, Mascella Raffaele (2009). Le idee della Memoria da Matteo Ricci a Godfried Leibniz. In AA.VV. *Tabularia* (pp. 193-210). A.MMIX, Academia Editrice d'Italia e San Marino, Bologna.

Eugeni Franco, Mascella Raffaele (2010). Memoria e Lingua artificiale: gli scambi tra Europa e Cina**.** In Nicotra Luca, Salina Borello Rosalma (cur.), *Il Drago e la Farfalla* (pp.70 -96). Roma, UniversItalia.

Eugeni Franco (2012). Sull'opera di Reghini relativa alla restituzione pitagorica. In AA. VV. *Pitagora, scuola iniziatica e sacralità scientifica* (pp. 65-91). Bologna, Academia Editrice d'Italia e San Marino.

Eugeni Franco (2016). *L'esoterismo nella cultura scientifica*, «ArteScienza», Anno III, n. 5, pp.9-54.

Eves Howard Whitley (1980). *Great moments in mathematics (before 1650).* USA, Mathematical Association of America.

Ginsburg Carlo (1979). Spie, radici di un paradigma indiziario. In Aldo Gargani (cur.), *Crisi della ragion*e. Torino, Einaudi.

Giusti Enrico, Freguglia Paolo, Napolitani Pier Daniele, Souffrin Pierre, (2001). *Il Rinascimento. Verso una nuova matematica.* In: Storia della Scienza Treccani.

Guenot Jacques (2012). Pensiero razionale… pensiero diversamente razionale. In AA. VV. *Pitagora, scuola iniziatica e sacralità scientifica* (pp.93-103). Bologna, Academia Editrice d'Italia e San Marino.

Ifrah Georges (1983). *Storia universale dei numeri*. Milano, Mondadori.

Mazur Joseph (2015). *Storia dei simboli matematici. Il potere dei numeri da Babilonia e Leibniz*. Milano, Il Saggiatore.

Migliorato Renato (2012). I Pitagorici. In AA. VV. *Pitagora, scuola iniziatica e sacralità scientifica* (pp. 47-63). Bologna, Academia Editrice d'Italia e San Marino.

Russo-Spena Aniello (2012). La cultura scientifica derivante dalle idee e dall'impulso della Scuola di Pitagora. In AA. VV. *Pitagora, scuola iniziatica e sacralità scientifica* (pp. 105-119). Bologna, Academia Editrice d'Italia e San Marino.

Van der Warden Bartel Leendert (1985). *A History of Algebra*. Berlin-Heidelberg, Springer.

Vattimo Gianni, Rovatti Pier Aldo (2012). *Pensiero debole*. Milano, Feltrinelli.

Viète François (1579). *Canon mathematicus*, Lutetiae, Jamet Mettayer.

Viète François (1630). *Ars Analytica*. In: F.Viète, *Opera mathematica*, a cura di F. Van Schooten. Ristampa (1970) di J. E. Hofmann, G. Ohms Verlag, New York.

Wiesenthal Simon (1991). *Operazione nuovo mondo*, Milano, Garzanti.

Taviani Paolo Emilio (1982). *La genesi della grande scoperta*. Novara, Istituto Geografico de Agostini.

Zappa Guido (1995). *Storia della risoluzione delle equazioni di quinto e sesto grado, con particolare rilievo sui contributi di Francesco*

Brioschi. In Rendiconti Seminario Matematica e Fisica, Milano, vol. LXV.

Toscano Fabio (2009). *La formula segreta: Tartaglia, Cardano e il duello matematico che infiammò l'Italia del Rinascimento*. Milano, Sironi Editore