Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019, pp. 33-96

I movimenti e la distanza nel piano di Klein, modello di geometria iperbolica

Franco Eugeni*

*Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU) – eugenif3@gmail.com

Dedicato alla Prof.ssa Luigia Berardi[1]
nell'occasione del suo compleanno

Sunto. *In questa nota riportiamo i dettagli di uno studio approfondito del piano di Klein, di fatto l'esempio più diffuso ed intuitivamente comprensibile di geometria non euclidea di tipo iperbolico. Si costruiscono, in particolare,le equazioni delle omografie che mutano un cerchio in sé, alias i movimenti del piano iperbolico di Klein. La scelta dell'argomento è legato al fatto chenel decennio 1970-80 l'argomento del piano di Klein, fu un cavallo di battaglia di Luigia Berardi e mio, nel tentativo di divulgare a vari livelli – a cominciare dai maestri e dai ragazzi di scuola secondaria – l'idea non euclidea.*

Parole chiave: *assiomi, geometrie non euclidee, modello di Klein, omografie,movimenti, distanza.*

---

[1] La professoressa Luigia Berardi già professore ordinario di Geometria nell'Università dell'Aquila, si è laureata a Bologna con Mario Villa con una tesi in Geometria differenziale, ha continuato l'attività come docente di ruolo di Matematica e Fisica e presso l'Università dell'Aquila, nel ruolo di professore incaricato stabilizzato. Con il primo settore di ricerca, sulla Teoria delle Funzioni aritmetiche, ottiene la cattedra da Professore Associato. Sposta i suoi interessi di ricerca nell'ambito della Matematica discreta e delle Geometrie finite, nel gruppo di ricerca del prof. Giuseppe Tallini. Successivamente ottiene la cattedra di Professore Ordinario. Le sue principali collaborazioni scientifiche sono state con Albrecht Beutelspacher, Franco Eugeni e Mario Gionfriddo.

1 - Introduzione

La nascita delle Geometrie non euclidee segnò un momento importante nella storia della scienza. Si era ritenuto che i postulati di Euclide, definenti la geometria che porta il suo nome, fossero intoccabili e di origine oseremmo dire divina. La questione che potessero esistere strutture differenti da quella euclidea, sconvolse, in un certo qual modo, la certezza, se si vuole l'arroganza degli scienziati del tempo. L'esistenza di ambienti geometrici più ampi della struttura creata da Euclide, ma nella quale l'ambiente euclideo si ritrovava come caso particolare, condusse a quel salto epistemologico che fu tipico di quella rivoluzione ottocentesca, che ebbe il merito di preludere alla scoperta fisico matematica più importante del Novecento: la teoria della relatività di Einstein, a sua volta, salto epistemologico rispetto alla teoria classica di Newton.

2 - La metodologia didattica nell'Italia post-unitaria

Nei primi anni della Scuola Media inferiore si inizia a studiare la Geometria, seguendo quella via che è stata definita "intuitivo-sperimentale" utilizzando un modello che appare essenzialmente di tipo *fisico* o se si vuole, legato ad immagini che si possono cogliere dal mondo che ci circonda. Così il punto è "ciò che non ha parti" e quindi "senza dimensioni", la retta viene resa parzialmente dall'immagine del "filo a piombo", e"non ha spessore", l'idea di piano nasce dall'osservazione "dell'acqua stagnante" ed infine lo spazio è "ciò che ci circonda, anche oltre il cielo". Non sono definizioni vere e proprie, sono immagini mediate dalla realtà, che creano delle percezioni della geometria, così che la disciplina, lentamente, si fa strada in noi, creando un equivalente astratto nelle nostre menti.

Alla nascita dell'Unità d'Italia si decise di estendere a tutto il territorio nazionale la legge del Ministro piemontese Gabrio Casati[2] (1798–1873), che fu l'ultima riforma scolastica del vecchio regno. Per le innovazioni sui programmi furono nominate apposite commissioni. Fin dall'inizio la Commissione, nella quale erano, tra gli altri, il bolognese Luigi Cremona (1830-1903) e il napoletano Giuseppe Battaglini (1826-1894), propose che per la geometria si ricorresse, fin dal ginnasio, agli *Elementi di Euclide*.

Nel 1867 viene emanata la Legge Coppino.[3]

Con l'Unità d'Italia, infatti escono di scena i testi stranieri, peraltro piuttosto scadenti e nei fatti imposti dal Lombardo-Veneto e dalla Francia. Inizia una produzione, tra il 1870 e il 1885, che sarà tipica della scuola italiana, produzione di elevata qualità, con testi del duo Achille Sannia (1822-1892) ed Enrico D'Ovidio[4] (1843-1933), di Aureliano Faifofer[5]

---

[2] La legge piemontese, del Conte Gabrio Casati, datata 13 novembre 1859 n.3725, perfezionò le norme dell'istruzione secondaria esistenti. La legge Boncompagni del 1848 sull'insegnamento secondario e la legge Lanza (1857), che avevano collocato la Scuola Normale nell'ordine elementare.

[3] La legge 10 ottobre 1867, fu emanata dal Ministro dell'Istruzione Michele Coppino (1822-1891).

[4] A. Sannia e F. D'Ovidio, *Elementi di Geometria*, Ed. Pellerano, Napoli, 1869.

[5] A. Faifofer, *Elementi di Geometria*, Tip. Emiliana, Venezia, 1878.

(1843-1909), di Riccardo De Paolis[6] (1854-1892), del duo[7] Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957), di Francesco Severi[8] (1879-1961), di Riccardo De Paolis[9] (1854-1892), tanto per citare i più significativi.

Nei primi anni della Riforma Gentile[10] del 1923, lo spirito della stessa tende a considerare, ai fini della formazione culturale dei giovani, preminente l'apporto delle discipline umanistiche, trascurando le discipline scientifiche e la matematica in particolare.

Viene accentuato il carattere estetico-letterario del Liceo Classico, e per le scienze nasce il Liceo Scientifico "quadriennale", che prende il posto di quella che fu la Sezione fisico- matematica dell'Istituto Tecnico. In ogni caso è interessante ricordare che nell'ultima classe del Liceo Classico viene dato molto spazio alla Matematica Greca, attraverso lo studio diretto dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide,

---

[6] R. De Paolis, *Elementi di Geometria*, Ed. Loescher, Torino, 1884.

[7] F. Enriques - U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903.

[8] Francesco Severi, *Elementi di geometria. Vol. I: pel ginnasio e pel corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: pei licei e pel corso superiore dell'istituto tecnico*, Vallecchi, Firenze, 1926-27.

[9] R. De Paolis, *Elementi di Geometria* (1884), Torino: E. Loescher.

[10]La *Riforma Gentile*, pubblicata il 6 maggio 1923, è un insieme di atti normativi realizzanti una riforma organica della Scuola Italiana varata in Italia. Estensori furono il filosofo Giovanni Gentile, al tempo Ministro della Pubblica Istruzione con la collaborazione del pedagogista Giuseppe Lombardo Radice. La riforma prevedeva la formazione classica e umanistica come prevalente mezzo di istruzione per formare le future classi dirigenti fasciste, e nella quale grande importanza fu data al Liceo classico.

e della trattazione della teoria delle proporzioni, contenuta nel quinto libro degli *Elementi*.

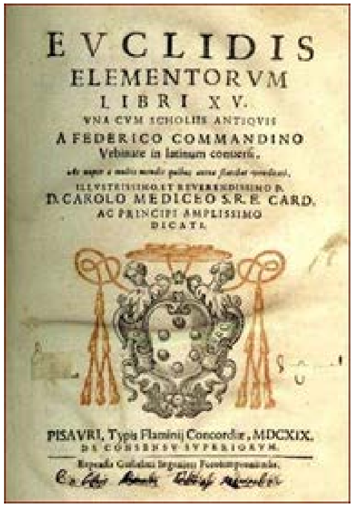
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi,
ILLVSTRISSIMO ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.
PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.

Fig. 1 - *Elementi di Euclide,* dedicati al grande traduttore di antiche opere Federico Commandino (1509-1575)

Fig. 2 - Euclide IV/III sec. a. C.

Questo tipo di approccio aprirono una via complementare, sulla conoscenza della civiltà greca, conoscenza che andava in parallelo con gli studi letterari ed artistici, così da dar luogo ad una visione, ben più ampia di quella cultura.

Successivamente questo fenomeno iniziale si attenua negli anni e si accettano testi[11] che sono semplicemente ispirati al modello greco di Euclide, che mantiene, dopo le iniziali premesse intuitivo-sperimentali, un successivo percorso pervaso da un interessante rigore scientifico. Il Trattato di Geometria di Francesco Severi[12] (1879-1961),si distingue dagli altri per l'impostazione originale: in esso è mantenuto intatto il rigore sostanziale del metodo razionale, mitigato però dalla costante preoccupazione di mostrareper ogni nuova nozione, anche il suo substrato intuitivo, ele nozioni di senso comune da cui tali concetti hanno origine,in modo che l'allievo possa meglio afferrare i significati dei vari concetti.

È nel 1903 che viene pubblicato il testo[13] del duo Federico Enriques (1879-1961) e Ugo Amaldi[14] (1875-1957), che risulterà essere il libro di maggior successo assoluto, nelle

---

[11] Vita V., *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'Unità di Italia al 1986. Rilettura storico-critica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1986. Vedi anche: Pepe L., *Per una storia degli insegnamenti matematici in Italia*, in *Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della matematica in ricordo di Giovanni Torelli* a cura di S. Invernizzi, Università di Trieste, 1996, pp. 101-116.

[12] Francesco Severi, *Elementi di geometria.Vol. I:* pel ginnasio e pel corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: pei licei e pel corso superiore dell'istituto tecnico, Vallecchi, Firenze, 1926-27.

[13] Federigo Enriques, U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903.

[14] Ugo Amaldi è il padre del fisico Edoardo (1908 - 1989) e nonno del fisico Ugo (1934).

scuole italiane, tanto che ha avuto ristampe continue fino al 1970.

Fig. 3 - Federigo Enriques

Fig. 4 - Ugo Amaldi

Dovremmo chiamare questa metodologia una metodologia di utilizzo, almeno per le parti iniziali, la via intuitivo-sperimentale, per stabilire i fondamenti, metodologia –mista– dato che, da un certo punto in poi, si razionalizza, e si iniziano a dimostrare i teoremi. Il punto è anche facile da trovare: è la dimostrazione del 1° Criterio di eguaglianza dei triangoli, che da sempre, nell'impostazione classica, di Enriques-Amaldi, appare come una "forzatura". Se si vuole, dopo questo "impasse", le cose vanno abbastanza lisce. Naturalmente questa è una prima forma di educazione primaria alla geometria, cercando di darne una lettura, compatibile con quel meraviglioso mondo della natura che osserviamo e che ci circonda.

3 - La geometria diventa una scienza

Quando si inizia a ragionare razionalmente, a dimostrare teoremi, ci si accorge che la linea guida cambia e il legame non è più l'osservazione visiva ed intuitiva delle singole figure, ma entrano in gioco lo studio dei legami e delle relazioni che intercorrono tra gli enti della geometria, che in questa seconda linea guida diventano astratte. La geometria diviene una scienza. Del resto chi di noi ha mai visto un punto, una retta, un piano – direi proprio nessuno. Non esiste una frase avente come soggetto la parola "*punto*" e nella quale frase la parte rimanente ne fornisce la definizione! Gli enti di base vanno definiti per via indiretta, mediate l'acquisizione di proprietà che li caratterizzano insegnandoci ad operare con essi.

L'idea tanto cara a Platone, per il quale ogni oggetto può essere definito e che una volta definito permetta di proseguire con definizioni e dimostrazioni, nei fatti si rivela una utopia, anzi una impossibilità. Del resto è chiaro che definire un ente significa porlo in relazione con altri oggetti i quali a loro volta vanno definiti ponendoli in relazione con altri oggetti e così via. Io dò una definizione: *una circonferenza è il luogo (l'insieme) dei punti del piano che hanno ugual distanza da un punto fisso detto centro*! Ho definito una circonferenza?... Sì, se so che vuol dire punto, piano, distanza. In questa definizione (detta *esplicita*) il soggetto prende significato dagli altri termini supposti noti!

Ma definizioni esplicite (o dirette) che definiscano punto, retta e piano non ci sono, ci sono solo definizioni per lista di proprietà (o postulati), in sistemi di base, che sono lunghe liste di proprietà assegnate da noi! Queste definizioni si chiamano implicite (o indirette). Nel corso dei secoli, il nostro ragionare si è via via affinato, la cultura dell'uomo si è diretta verso l'astratto e lo ha conquistato. Così la definizione di Euclide del 300 a.C. "… il punto è ciò che non ha parti …" - bella, piena di creatività ed intuizione - e in contemporanea priva di un qualsiasi significato logico-razionale, è stata soppiantata, da David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), nel quale assegna un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitano le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche iniziali di Euclide.

Fig. 5 - David Hilbert

FESTSCHRIFT

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT.

LEIPZIG,

Fig. 6 - *Grundlagen der Geometrie* (1889)

Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, uno studente statunitense di 19 anni, Robert Lee

Moore[15] (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi del tutto equivalenti a quelli di Hilbert.

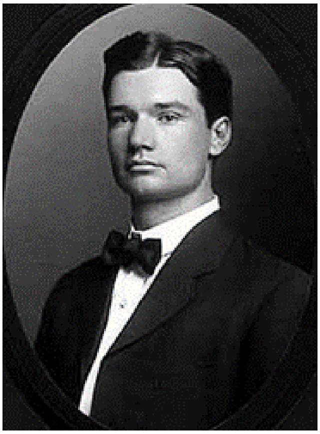

Fig. 7 - Robert Lee Moore

Dai postulati di Hilbert-Moore, nati dalla visione che ebbe a concretizzarsi circa 2.000 anni dopo Euclide, fu sviluppata una lunga serie di confronti di autori italiani di grande valore scientifico e didattico, con una lunga serie di varianti ed osservazioni, che si sono via via sovrapposte l'una all'altre, trattato sopra trattato16. Il punto nella "moderna visione" dal

[15]Moore fu allievo di importanti americani quali Leonard Eugen Dickson ed Oswald Veblen. Conseguì il PhD nel 1905,con una dissertazione intitolata *Sets of Metrical Hypotheses for Geometry,* sotto la supervisione di Veblen.Nel 1923 diviene *full-professor*,nel 1936-38 fu Presidente dell'*American Mathematical Society*. Presentò un metodo didattico denominato **Metodo Moore** e insegnò fino all'età di 87 anni, anche se visse e continuò a lavorare fino a 92 anni.

[16] A. Chiellini, R. Giannarelli, *L'esame orale di Matematica*, Roma, Edizioni Veschi, 1962. (Nota che la conoscenza delle varie Teorie sull'eguaglianza erano tematiche presenti nei programmi per i concorsi a

1900 è "un elemento di un insieme astratto detto "spazio", che ha certe sue parti (sottoinsiemi di punti) che si chiamano rette ed altre parti che si chiamano piani, le quali soddisfano ad un elenco di 28 postulati o proprietà, che implicitamente definiscono i termini punto – retta – piano – spazio. Naturalmente va aggiunto che ogni insieme di oggetti, che ha due famiglie di parti, che nel loro complesso soddisfano ai 28 postulati sono uno spazio euclideo.

Ma due strutture siffatte, per via delle interpretazioni numeriche (geometria analitica dello spazio) che ne evidenzi la struttura soggiacente di spazio vettoriale ci permette di asserire che se due strutture soddisfano i 28 postulati allora sono isomorfe, e ciò si estende anche agli spazi n-dimensionali ma non alle geometrie non euclidee.

Da dove vengono queste 28 proprietà? Ma naturalmente dal nostro intuito, dal nostro osservare la natura e dal nostro tentare di incapsularla, in una rigida razionalità, o come si suol dire di "formalizzarla". Al tempo di Euclide e per i postulati di Euclide, Aristotile riteneva che essi nascessero per ispirazione divina. Sappiamo bene oggi che siamo noi a sceglierli, che possiamo sostituirli con proposizioni alternative, di fatto con condizioni necessarie e sufficienti, senza modificare la struttura di Euclide, ma anche il con la possibilità di modificarli "ad arte" facendo nascere strutture differenti da quella originale di Euclide. Le costruzioni possono essere fatte in miliardi di modi, ma la storia e i secoli hanno insegnato a scegliere tra tali alternative, poiché alla

Professori di Scuola Media, alla cui preparazione il trattato sopra indicato era dedicato).

fine le scelte devono avere un senso, ma anche un riscontro come modelli fisici.

Nascono così le geometrie non euclidee: iperboliche oppure ellittiche, le geometrie non archimedee, le banali geometrie non cantoriane, le geometrie finite, i disegni a blocchi. Di ciascuna di queste possono essere forniti tanti modelli. Ad esempio la geometria euclidea ha come modello il sistema cartesiano delle coordinate e ha la peculiarità che comunque io prenda differenti modelli,come del resto precisato sopra, questi sono sostituibili l'uno con l'altro, ovvero sono *isomorfi*. Non così per le altre. In questo lavoro presentiamo, in dettaglio, un modello di geometria piana iperbolica, denominato modello di Klein, completando dal punto di vista dimostrativo, tanti aspetti quasi sempre sottesi e sottaciuti. In particolare costruiamo i movimenti del modello di Klein che coincidono con le omografie che mutano un cerchiò in sé stesso.

4 - L'indipendenza dei postulati

È ben noto il metodo assiomatico per introdurre gli enti della matematica. Uno dei primi problemi che ci si pone è che dato un qualsiasi sistema di postulati definenti una qualunque struttura matematica, occorre che,in primo luogo, sussistano le seguenti due fondamentali proprietà:

- i postulati devono essere tra loro indipendenti
- i postulati devono essere compatibili o come suole dirsi non-contraddittori.

Il problema posto è nato nel momento nel quale i matematici hanno compreso che alla base di una teoria matematica: postulati, definizioni e teoremi non riflettevano una realtà trascendente, superiore alla mente umana, come si era ritenuto in Platone (428-348 a.C.) e Aristotile (384-322 a.C.) e da Agostino d'Ippona (354-430).Nella antica visione era escluso a priori il pericolo di incontrare contraddizioni in tutte le conseguenze logiche della "divina teoria", in quanto tutte le proposizioni erano vere in assoluto[17]. Era una certezza!

Ma il punto di vista, con l'avvento dei sistemi ipotetico-deduttivi brillantemente presentati in un'opera del Pieri,[18] è del tutto mutato, in quanto alla base delle teorie matematiche si sono posti dei postulati, che, sia pure rispecchianti, dal punto di vista euristico, delle forme di pensiero intuitivo e degli aspetti percettivi - come piace ricordare a Bertrand Russell - sono dal punto di vista logico, proposizioni totalmente arbitrarie, così che, il garantire una forma di compatibilità diviene di interesse fondamentale.

Naturalmente la causa di questo mutamento nella Storia della Scienza ha chiara origine dalla scoperta delle geometrie non euclidee, e nasce dalla questione del postulato delle parallele. Lo stesso Euclide[19] (IV-III sec a.C.), sembra avere dei dubbi su questo postulato, così che, fino a che è possibile, cerca di non farne uso. Del postulato delle parallele in realtà egli non parla fino alla prop. 26°compresa (che sarebbe il 2°

---

[17] cfr. Carruccio [4], par. 2, pg. 315

[18] Mario Pieri, (1898-99), *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, Memorie della R. Acc. delled Scienze di Torino, (2) 49 p.173-222.

[19] cfr. E. Carruccio [4], pg. 76.

criterio di eguaglianza dei triangoli), egli utilizza il postulato delle parallele, solo nella prop. 27°, nella seguente forma:
"Se una retta cadendo tra due rette, fa gli angoli alterni uguali tra loro, le due rette saranno parallele tra loro".

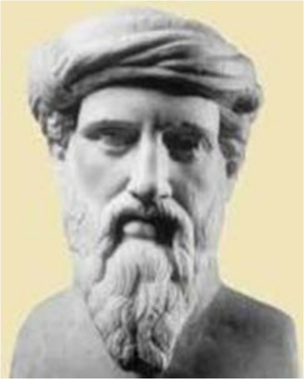

Fig. 8 – Euclide

La questione della non-contraddittorietà è piuttosto complessa, in genere si richiede la costruzione di un modello all'interno di una struttura della quale si ipotizza la non contraddittorietà. Ad esempio la non-contraddittorietà dei postulati delle geometrie non-euclidee, si basa sul fatto che ne costruiamo modelli all'interno della stessa Geometria Euclidea, supposto questa non-contraddittoria.

Ma si può basare la non contraddittorietà della geometria euclidea, tramite la sua rappresentazione numerica (spazi numerici) e quindi sulla non contraddittorietà del campo dei numeri reali, questi si riporta a sua volta al campo dei numeri razionali, questi all'anello dei numeri interi relativi, questi al semianello dei naturali, questi alla teoria elementare

(ingenua?) degli insiemi e su questi un atto di fede? Forse meglio dire una ipotesi di lavoro?
Cadiamo in pieno nella corrente dello scetticismo ed in particolare nel pensiero di Carneade di Cirene (214-129 a.C.), ambasciatore a Roma nel 155 a.C., che riteneva impossibile l'arte del dimostrare, poiché secondo lui ne nasceva un processo che dava luogo ad una forma di "*regressum in infinitum*", in quanto ogni proposizione prendeva significato da una precedente altra proposizione. Quindi le verità nelle quali si crede, poste alla base, avevano secondo Carneade, un significato incerto, forse probabile.[20]

La questione dell'indipendenza è più semplice da trattare. Così se ci poniamo la domanda: il postulato delle parallele è indipendente dagli altri?. Si può rispondere nel modo che segue: per dimostrare che un postulato P è indipendente da altri postulati, la via maestra da seguire, è quella di costruire degli enti e quindi un modello che, pur soddisfacendogli altri i postulati, non soddisfino il postulato P.

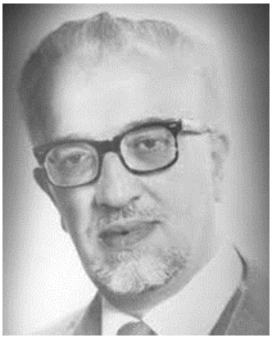

Fig. 9 - Luigi Campedelli

[20] Carruccio [4], pg. 67

Esiste, cioè, un modello di enti che soddisfa a tutti i postulati del sistema e non soddisfa al postulato delle parallele?Ricordiamo, a tal proposito, cosa scrive Luigi Campedelli (1903-1978) in [15], cercando di mediare tra un discorso logico–formale ed un aspetto maggiormente intuitivo:

> *La geometria negli studi iniziali era classificata intuitiva e sperimentale. Essa mirava ad una educazione sui concetti fondamentali cercando di coglierli nell'osservazione del mondo circostante,e di leggerli in quel gran libro dell'universo. Più tardi l'esame delle figure, dapprima verificate su modelli materiali, si deve svolgere attraverso argomentazioni di carattere logico, con ragionamenti razionalmente condotti, mediante deduzioni e ricerca di legami tra le varie proprietà. Nasce così la geometria come indagine scientifica.*

5 - Il piano di Klein come modello di geometria iperbolica

Felix Christian Klein (1849- 1925), nasce il 25.04.1849, a Dusseldorf. Era affascinato dal fatto che ogni numero della sua data di nascita è il quadrato di un numero primo (rispettivamente 5, 2 e 43). Nel 1872, a soli 23 anni, Klein fu *nominato* professore a Erlangen.

Nonostante i grandi contributi che egli diede sia all'Algebra che alla Geometria, ebbe una enorme notorietà per una prolusione che egli fece nel 1872, in occasione della sua nomina a professore a Erlangen, prolusione oramai nota in letteratura con il nome di *Erlangen Programme* (Programma di Erlangen), conferenza che influenzò profondamente lo sviluppo della Matematica.

Fig. 10 - Felix Klein

Il Programma di Erlangen fornì un approccio unificato e gruppale della geometria, approccio che oggi è accettato come standard. Le trasformazioni e i loro gruppi, giocano un ruolo fondamentale in una moderna visione della geometria e Klein mostrò come le proprietà essenziali di una data geometria potevano essere rappresentate dal gruppo delle trasformazioni che conservano tali proprietà, per ogni tipo di geometria, geometria euclidea, non euclidea, proiettiva ed oltre. Così la geometria proiettiva è relativa al gruppo delle omografie, la geometria affine al gruppo delle affinità, la geometria elementare (euclidea) è relativa al gruppo delle similitudini, la geometria metrica è relativa al gruppo delle eguaglianze o congruenze. Inoltre il gruppo delle similitudini è sottogruppo di quello affine, e l'affine è sottogruppo del proiettivo. Naturalmente le proprietà del gruppo più ampio sono proprietà anche del gruppo più piccolo. Inizialmente sembrava che la geometria metrica sfuggisse da questa catena di sottogruppi, ma oggi sappiamo che le proprietà metriche se corredate dai punti ciclici possono inquadrare la geometria metrica della geometria delle similitudini.[21]

Inoltre uno spazio proiettivo sipuò inquadrare in un più generale spazio topologico e gli omeomorfismi di uno spazio topologico formano un gruppo ancora più vasto.I movimenti del piano di Klein, che tratteremo in questo e nei successivi paragrafi, sono le omografie che mutano il cerchio unitario in sé, formano anche loro un sottogruppo del gruppo delle omografie, ma occorre precisare il loro comportamento rispetto alle affinità. È dovuto a Klein la presentazione di interessanti modelli topologici quali la cosiddetta *bottiglia di Klein*, riportata in figura, superficie ad una sola faccia, che in alcune sue sezioni contiene dei nastri di Möbius.

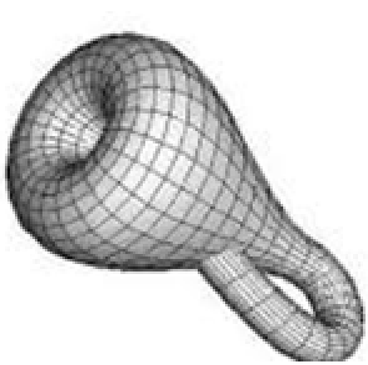

Fig. 11 - Bottiglia di Klein

[21] Si veda Mario Villa, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, cap. VI, par.44-45.

Vorrei ricordare e condividere con voi il mio primo impatto con il modello di Klein, ritenendo questo ricordo la miglior presentazione.

Il mio professore Mario Villa, del quale parlerò nel prossimo paragrafo, andò alla lavagna e disegnò un cerchio, tracciò due corde non intersecantisi e disse:

> *… se restringiamo la geometria, che voi conoscete, all'interno di un cerchio, è naturale chiamare rette le corde, se l'esterno è cancellato e se il nostro mondo è l'interno del cerchio…" (Fig. 1). Ora dati un punto ed una corda AB, non appartenentesi (Fig. 2) esistono infinite corde per P che non incontrano la corda data, sono le corde interne all'angolo tra PA e PB (Fig. 3). Anche le corde PA e PB sono non secanti AB (i punti sulla circonferenza sono esclusi e sono i nostri punti all'infinito), e noi chiamiamo parallele per P ad r le due corde PA e PB.*
>
> *Pensate ora al raggio che tende all'infinito e alla circonferenza che tende alla retta impropria. Quando il raggio aumenta l'angolo di PA con PB diminuisce e si restringe ad una unica retta per il raggio che tende all'infinito…. è la geometria euclidea quando il cerchio sparisce, adagiandosi sulla retta impropria del piano!*

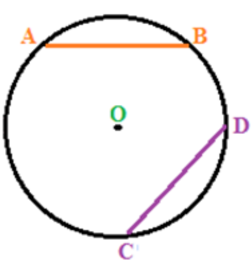

Fig. 12

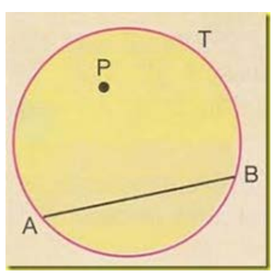

Fig.13

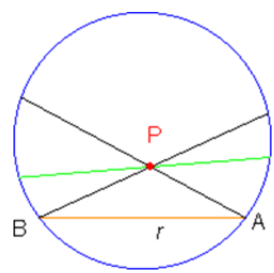

Fig. 14

L'importanza del modello. L'esistenza di una geometria dove sono validi tutti i postulati della geometria classica meno quello delle parallele (sono due e non una) prova che l'assioma dell'unicità della parallela è indipendente dai precedenti postulati!

Formalizziamo ora il modello intuitivo, passando a definire il piano di Klein, modello di geometria non euclidea, di tipo iperbolico.

Sia dato, nel piano ordinario, un cerchio Γ, detto k-piano.

Si chiamano k–punti propri quelli interni a Γ; k–punti impropri quelli di Γ; k–punti ideali quelli esterni a Γ L'insieme dei k–punti propri formanti il k-piano si denota con S.

Si chiamano k–rette, le corde di Γ prive degli estremi. Sia C il loro insieme, la coppia (S, C **)** si chiama *piano di Klein.*

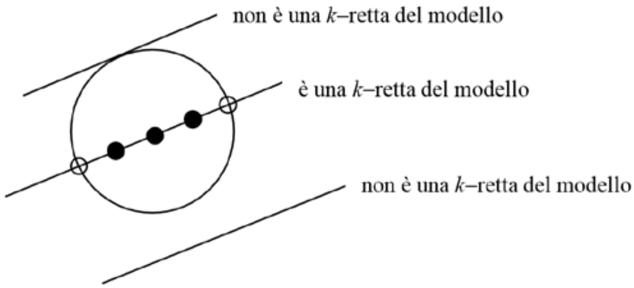

Fig. 15 – Modello di Klein

Si dice che due k–rette sono: k-parallele se hanno in comune un k–punto improprio (ovvero se come corde di Γ si incontrano in un punto di Γ); k-incidenti se si incontrano in un *k*–punto proprio (ovvero se come corde di Γ si incontrano in un punto interno a Γ); k- non secanti se non sono né k-parallele né k incidenti (ovvero se come corde di Γ si incontrano in un punto (proprio o improprio) esterno a Γ). È immediato constatare che dati un *k*–punto P e una k-retta r non appartenentesi, dal *k*–punto P escono esattamente due *k*–rette, che sono k-parallele alla *k*–retta data: ci si trova di fronte, supposto di aver verificato tutti gli altri postulati, almeno per il k- parallelismo, davanti ad una ipotesi piano non–euclideo di tipo iperbolico.

Osserviamo che è abbastanza facile verificare gli assiomi dell'appartenenza, dell'ordine e della continuità, indotti sulle corde da quando avviene nello spazio euclideo per le rette.

Per quanto riguarda la verifica degli assiomi del movimento, la cosa è più complessa. Assumiamo come k-movimenti le omografie piane che mutano il cerchio Γ in sé, le equazioni di tali omografie saranno ricavate in un paragrafo successivo.

È interessante il poter definire nel piano di Klein una nozione di distanza che fornisce al piano di Klein una struttura di spazio metrico e conseguentemente una topologia.

Ricordiamo che se S è un arbitrario[22] insieme di elementi, da dirsi "punti", una "distanza"(o una "metrica") è una funzione:

$$d: S \times S \rightarrow R$$

tale che $\forall x, y, z \in S$

1.- $d(x,y) \geq 0$, "= 0, se e solo x=y" *proprietà di annullamento*

---

[22] Da tenere in conto che l'insieme S può anche essere finito. Cfr. Franco Eugeni, *Spazi pseudometrici e metrici finiti*", Annali Università degli Studi dell'Aquila, anno V, (1971), Ed. Japadre, L'Aquila pp.177-183.

2.- d(x,y) = d(y,x) *proprietà simmetrica*
3.- d(x,y) ≤ d(x,z) + d(z,y) *diseguaglianza triangolare*.

Una interessante metrica può essere definita nel piano di Klein, ricorrendo al concetto di birapporto di quattro punti. Il birapporto è una grandezza associata a una quaterna di punti di una retta. Si tratta di uno strumento importante in geometria proiettiva, essendo un invariante per trasformazioni proiettive. Il birapporto risulta definito anche se uno dei quattro punti è all'infinito (la retta in questione è quindi una retta ampliata, ma nella quale esiste una sottostante struttura euclidea, quindi nella quale i segmenti si misurano).

Siano A,B,C, D quattro punti allineati e propri, del piano euclideo ampliato dai punti impropri. Si fissi una orientazione ed una unità di misura sulla retta che li contiene. Il birapporto dei quattro punti nell'ordine è la quantità:[23]

$$(ABCD) := (ABC)/(ABD) := (AC/BC) / (AD/BD)$$

dove il simbolo AB (e analoghi) denota la misura del segmento[24] orientato da A verso B. Poniamo inoltre, se D∞ indica il punto all'infinito, della retta che contiene i quattro punti:(ABCD): = (ABC) = (AC/BC).

Consideriamo ora una k-retta HK del piano di Klein, (ovvero una corda HK del cerchio unitario). Su questa k-retta

[23] La scrittura (ABD) := AC/BC si chiama *rapporto semplice* di tre punti.

[24] La scelta iniziale dell'orientazione della retta e dell'unità di misura sono solo strumento ausiliari per il calcolo. Il birapporto è indipendente da queste scelte.

fissiamo due punti A, B (sono due punti interni alla corda) e definiamo la loro distanza nel modo che segue:

$$d(A,B) := \rho \mid \log (ABHK) \mid$$

essendo ρ un prefissato numero positivo. Proviamo che si tratta effettivamente di una distanza.

I - d(A,B) = 0 se e solo se A = B.
Se A=B è (AAHK) = 1, quindi d(A,A) = 0. Se A $\neq$ B, (ABHK) $\neq$ 1, dunque d(A,B) > 0.

II - d(A,B) = d(B,A).
Dalla relazione: (ABHK) = 1/(BAHK) si ha:
log (ABHK) = - log /(BAHK), con i valori assoluti segue l'asserto.

Per la diseguaglianza triangolare, si noti che, nel nostro caso particolare, la diseguaglianza diviene un'eguaglianza, il che si esprime dicendo, che la struttura della metrica del piano di Klein, è una struttura *di spazio ultrametrico.* Si ha infatti:

III - d(A,B) = d(A,C) + d(C,B).

Dalle relazioni:

(1) (ABHK) = AH · BK / BH · AK
(2) (ACHK) = AH · CK / CH · AK ,
(3) (CBHK) = CH · BK / BH · CK,si ha:

$$(ACHK) \cdot (CBHK) = (ABHK)$$

e quindi:

$$d(A,C) + d(C,B) = \rho\ |\log(ACHK)| + \rho\ |\log(CBHK)| =$$
$$= \rho\ |\log[(ACHK) \cdot (CBHK)]| = \rho\ |\log(ABHK)| = d(A,B).$$

Osservazione 1. *La nozione di distanza è chiaramente invariante per trasformazioni proiettive essendo invariante il birapporto.* In particolare sarà invariante per le omografie che mutano il cerchio in sé quali che esse siano.

Osservazione 2**.** *Ogni k- semiretta (non euclidea) ha distanza infinita.* Se AH è una semiretta non euclidea allora:

$$\lim_{P-H} d(A,P) = \infty$$

Segue da $(APHK) = AH \cdot PK \ / \ PH \cdot AK$ quantità che tende a 0 per P→H, per cui il rispettivo logaritmo tende ad ∞.

Osservazione 3. *Fissato un numero reale* r >0 *esiste su una k-semiretta* AK*, un unico punto* P *tale che* d(A,P) = r.

Fissata una unità di misura ed un sistema di ascisse sulla retta euclidea che congiunge A con K, orientata da A verso K indichiamo con a, x, h, k le ascisse di A,P,H,K, si ha:

$(APHK) = AH \cdot PK \ / \ PH \cdot AK = (h-a)\ (k-x) \ / \ (h-x)\ (k-a) = r$ equazione di 1° grado in x, banalmente risolubile, se $a \neq h$, $a \neq k$, $h \neq k$, escluso il caso che sia $h-a = r(k-a)$, che corrisponde a P punto medio euclideo tra H e K.

Questa osservazione permette di definire un k-circonferenza (non euclidea), di centro A (non nell'origine) come il luogo dei punti P, tali che d(A,P) = r, r reale prefissato positivo.

Osservazione 4. Possiamo definire un k-segmento orientato (non euclideo) ponendo

$$(AB)_K := \rho \ \log (ABHK).$$

La nozione di k-angolo e la sua misura saranno precisate nel paragrafo successivo.

6 - Il piano di Klein numerico piano

Un modello di geometria piana euclidea, si costruisce assumendo $S = R^2$ (R è il campo reale) e fissando come "rette" i luoghi dei punti di S soddisfacenti un'equazione del tipo:

$$a\,x + b\,y + c = 0 \qquad \forall\, a, b, c \in R \text{ con } (a,b) \neq (0,0)$$

Denotato con L (linee), l'insieme di tali rette, si verifica facilmente che la coppia (S,L) soddisfa tutti gli assiomi euclidei. Per il caso euclideo è stato provato che gli assiomi sono categorici, cioè che tutti i suoi modelli sono isomorfi, così che (S, L), a meno di isomorfismi, è l'unico modello possibile.

Analogamente si costruiscono i modelli di R^3, R^4, etc.

Presentiamo ora l'analogo numerico del piano di Klein prima introdotto. Iniziamo con la seguente:

Definizione 4.1. Sia $S=R^3$ il ben noto modello di geometria euclidea dedotto dal piano cartesiano. Definiamo *k–punti* le coppie $(x,y) \in \mathbf{S}$ tali che:

$$x^2 + y^2 < 1$$

(Pensiamo i *k–punti* del modello come i punti interni alla circonferenza Γ di centro l'origine e raggio unitario, quindi di equazione $x^2 + y^2 = 1$).

Definizione 4.2**.** Definiamo k–rette (proprie) gli insiemi delle coppie $(x,y) \in R^2$ tali che:

$x^2 + y^2 < 1$
$a x + b y + c = 0 \quad \forall\, a,b,c \in R$ con $(a,b) \neq (0,0)$
$c^2 < a^2 + b^2$

La condizione $c^2 < a^2 + b^2$ limita la considerazione delle rette euclidee solo a quelle che hanno distanza dall'origine inferiore ad 1, in modo da individuare delle corde.

Definizione 4.3. I punti all'infinito di ogni k–retta sono due (gli estremi della corda), le coppie $(x,y) \in S$ soluzioni del sistema:

$x^2 + y^2 = 1$,
$a x + b y + c = 0 \qquad \forall\, a,b,c \in R$ con $(a,b) \neq (0,0)$,
$c^2 < a^2 + b^2$.

La nozione di angolo comporta anche il riferimento alla parte numerica del piano di Klein, come vedremo. Date infatti due corde AB, CD, ovvero due k-rette del piano di Klein intersecatesi in un punto P, il k-piano di Klein è diviso in quattro regioni che denotiamo con dei "simboli angolari": CPB, BPD, DPA, APC, ciascuna di tali regioni si chiama un k-angolo (o angolo non euclideo). Due k-angoli come CPB e DPA si chiamano opposti al vertice.

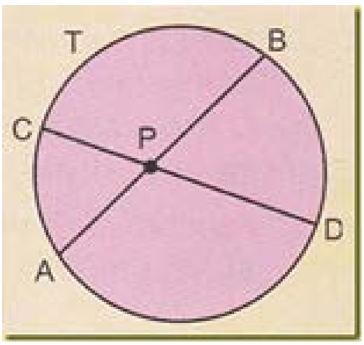

Fig. 16 – I k-angoli

Proviamo che:
Teorema. *Due k-angoli opposti al vertice sono k-congruenti.*

Dimostrazione. La dimostrazione si effettua provando che esiste un movimento che trasformaCPB in DPA e che muta il cerchio in sé.

Consideriamo l'omologia armonica di centro P ed avente per asse la retta s, polare di S rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, Sia Q il punto nel quale la retta che congiunge P con una coppia X,X' di punti corrispondenti. L'essere armonica si esplicita con la condizione (PQXX') = -1. La retta AC e la retta BD individuano un punto della polare e le CB eAD ne individuano un secondo. A questo punto è immediato che se X è sul cerchio, lo stesso accade per X' ed inoltre la regione APD è chiaramente portata nella regione CPB, provando dunque l'asserto.

Ricordiamo che data una qualsiasi conica (in particolare il cerchio unitario) si può definire la polarità piana e chiamare coniugate due rette quando ciascuna di esse contiene la polare dell'altra. Nel caso della circonferenza unitaria prese le rette

$$y = m\,x \quad \text{ed} \quad y = m'\,x$$

il coniugio si esprime con l'equazione $m\,m' = -1$.

Definizione. Se due rette euclidee contenenti due distinte k-rette, intersecantisi in P, sono coniugate rispetto alla circonferenza unitaria, si prova che i quattro angoli da esse definite sono uguali tra loro. In tale caso le due k-rette si diranno k-perpendicolari e i loro rispettivi k-angoli si diranno *k-retti.*La teoria si spinge ancora e porta da asserire che è unica la k-perpendicolare per un punto ad una
k-retta data, mentre le parallele sono due! Tuttavia non approfondiamo la teoria angolare, che ricorre a rappresentazioni nel campo dei numeri complessi.

È molto interessante liberarci sia dell'uso del cerchio, ma anche della struttura euclidea sulla quale costruiamo il modello.

Per il primo punto è sufficiente osservare che tutto quello che si dice per il cerchio unitario si può ripetere, con calcoli leggermente più complicati, per i punti interni di una qualsiasi conica non degenere, avendosi così in relazione a ciascuna di tali coniche un esempio concreto di piano non euclideo. Si noti che costruite le omografie che mutano il cerchio unitario in sé è sufficiente comporlo con la trasformazione del cerchio dato con la conica assegnata.

Per il secondo punto, altra questione di interesse critico, occorre liberarci dall'apparente dipendenza del modello non-euclideo dall'euclideo. Di questa dipendenza è facile liberarsi.

Osserviamo che possiamo ragionare nel modo seguente: nel piano numerico delle coppie ordinate considero l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(non parlo di circonferenza, ma di luogo di punti (x,y) soddisfacenti quell'equazione) e su tale equazione sviluppiamo i medesimi calcoli, parlando di trasformazioni lineari e non necessariamente di omografie e di linguaggio geometrico. Nei fatti non cambia nulla!

7 - Le omografie che mutano il cerchio in sè

La versione che presentiamo in questo paragrafo è quella che appare nel classico lavoro di Mario Villa [15], lavoro che fu pubblicato nel volume del 1963, dal titolo *Per un insegnamento moderno della Matematica*, per i tipi della Casa Editrice Patron di Bologna, curato dallo stesso Villa, per conto del Ministero della Pubblica Istruzione, volume che fu il testo di base delle cosiddette "*classi pilota*", classi liceali che nell'ultimo anno di corso si prepararono su questo volume, invece che su un testo classico, per il loro esame di stato.

L'esperimento servì a provare[25] che argomenti come la Teoria degli insiemi, le relative e varie conseguenze sull'algebra astratta e sui fondamenti della Geometria, potevano essere insegnati nella Scuola Secondaria.

Fig. 17 - Mario Villa (1907-1973)

L'opera consiste in articoli di più autori, tutti ben noti professori ordinari di università italiane:.Pietro Buzano (1911-1993), Luigi Campedelli (1903-1978), Ugo Morin (1901-

[25] È interessante notare che la prof. Berardi, alla quale questo lavoro è dedicato, fu a suo tempo allieva del prof. Villa, con il quale fece la sua tesi di Laurea, nell'ambito delle tri-corrispondenze tra spazi di differenti dimensioni, successivamente pubblicata, per la parte originale, nella nota *Sulle corrispondenze tra un piano proiettivo e due rette proiettive* in Annali dell'Università degli studi dell'Aquila, Anno V, 1971, pp.185-193. La prof. Berardi nel breve periodo nel quale insegnò nella scuola secondaria, e contemporaneamente nell'Università dell'Aquila, come professore stabilizzato, cioè prima di vincere il Concorso universitario, si prodigò ad introdurre ai suoi allievi le tematiche riportate nel testo "*Per un insegnamento moderno della Matematica*", sopra indicato.

1968), Mario Villa(1907-1973), Tullio Viola[26] (1904-1985), e l'ispettore Armando Chiellini (1898-1976).

È ben noto che le omografie tra piani affini, eventualmente sovrapposti (in particolare euclidei) sono rappresentate da un sistema del tipo (con determinate non nullo per l'invertibilità):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \\ y' = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \end{cases}$$

Se si suppone ora che una data omografia muta la circonferenza unitaria $x = \cos\varphi,\ y = \sin\varphi$ in sé;
allora risulta, per ogni reale φ:

$$\left(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi + c_1\right)^2 + \left(a_2 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi + c_2\right)^2 = \\ = \left(a_3 \cos\varphi + b_3 \sin\varphi + c_3\right)^2$$

da cui seguono le sei condizioni:

[26] Anche con il prof. Tullio Viola la prof.ssa Berardi ebbe una collaborazione in occasione dell'ultimo concorso a Cattedre nazionale (1883-1885) per Matematica. Il prof. Viola era il Presidente di una Commissioni formata da 11 sottocommissioni, e la prof. Berardi gestiva una delle sottocommissioni. Facevano anche parte della Commissione (con altri): Silvio Maracchia, Bruno Rizzi, Osvaldo Ferri, Antonio Liberatore, Serafino Patrizio, Eraldo Giuli, Fabio Mercanti, colleghi con i quali si sono divisi molti momenti culturali. I concorrenti erano circa ottomila.

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 0 \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 - a_3 c_3 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 - b_3 c_3 = 0 \end{cases}$$

È ora possibile verificare che i coefficienti delle seguenti (1) soddisfano[27] le sei condizioni sopra indicate (cfr. Villa, [14]):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\left(a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)x + 2\left(bd - ac\right)y + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{\left(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)x + 2\left(bd + ac\right)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \\ y' = \dfrac{2\left(cd - ab\right)x + 2\left(ad + bc\right)y - 2ab - 2cd}{\left(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)x + 2\left(bd + ac\right)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \end{cases} \qquad (1)$$

con a, b, c costanti reali e $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Osservazioni.

Il Villa (cfr. [14]) asserisce che i movimenti definiti dalle (1) sono le omografie che mutano la circonferenza Γ, di equazione $x^2 + y^2 = 1$, in sé, non solo, ma mutano anche punti internia Γ in punti interni a Γ. Deduce questo asserendo che vale l'identità, la cui verifica (complessa) è lasciata al lettore:

---

27 Da notare che Villa non ricava le (1), ma indica una via per verificarle. Il ricavarle sarebbe difficile per studenti di scuola superiore, sarà fatto da noi nel successivo paragrafo. L'obiettivo del Villa era di presentare l'argomento con metodiche comprensibili a studenti 17-enni.

$$x'^2+y'^2-1=\frac{\Delta^2\left(x^2+y^2-1\right)}{\left[\left(-a^2-b^2+c^2+d^2\right)x+2\left(bd+ac\right)y-a^2-b^2-c^2-d^2\right]^2} \qquad (2)$$

Inoltre i punti interni a Γ, di coordinate (x, y) con $x^2+y^2-1<0$, per la (2), si trasformano in punti di coordinate (x′,y′)con $x'^2+y'^2-1<0$ e viceversa. Ne segue che a punti interni a Γ corrispondono ancora punti interni a Γ.

Il Villa si dilunga invece sulle verifiche che gli enti sopra introdotti soddisfano i postulati euclidei con eccezione del postulato delle parallele. Poiché la validità dei postulati dell'appartenenza e dell'ordine può essere constatata attraverso verifiche analitiche o verifiche dirette sul modello di Klein non numerico, ci si occuperà ora dei soli postulati del movimento, che Villa sceglie tra quelli detti di tipo "gruppale" (cfr. Appendice sui postulati dove sono riportati i vari tipi di postulati del movimento).

Si osservi, innanzitutto, che i nostri movimenti, rappresentati dalle (1), formano un gruppo. A riguardo, è sufficiente verificare le seguenti due condizioni:

a.- esiste l'inversa di una qualunque trasformazione ed essa appartiene ancora al gruppo;

b.- il prodotto di due sue qualsiasi trasformazioni appartiene ancora al gruppo.

Sia, quindi, γ un'omografia rappresentata da:

$$\gamma:\begin{cases} x'=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_3x+b_3y+c_3} \\[2ex] y'=\dfrac{a_2x+b_2y+c_2}{a_3x+b_3y+c_3} \end{cases}$$

con: a_i , b_i , $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,3,$ e con il determinantedei coefficienti non nullo per l'invertibilità. Risulta allora possibile ricavare le incognite x ed y in funzione di x' ed y' ottenendo le equazioni dell'omografia inversa di γ .

Verifichiamo ora che il prodotto di due omografie è ancora un'omografia. Siano γ_1 e γ_2 due omografie rappresentate da:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x' = \dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \\ y' = \dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x'' = \dfrac{a_1' x' + b_1' y' + c_1'}{a_3' x' + b_3' y' + c_3'} \\ y'' = \dfrac{a_2' x' + b_2' y' + c_2'}{a_3' x' + b_3' y' + c_3'} \end{cases} \qquad (4)$$

La corrispondenza prodotto, quindi, sarà rappresentata da:

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 : \begin{cases} x'' = \dfrac{a_1' \left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + b_1' \left(\dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + c_1'}{a_3' \left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + b_3' \left(\dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + c_3'} \\ y'' = \dfrac{a_2' \left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + b_2' \left(\dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + c_2'}{a_3' \left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + b_3' \left(\dfrac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \right) + c_3'} \end{cases} \qquad (5)$$

che non sono altro che le equazioni di un'omografia che muta ancora la conica in sé. I movimenti, dunque, formano un gruppo.

Il secondo postulato dei movimenti è soddisfatto in quanto se un punto C di una retta si trova tra due punti A e B appartenenti alla medesima retta, allora, se A', B', C', sono i corrispondenti punti di A, B, C, in virtù dell'omografia γ, ne segue che anche C' si trova tra A' e B' (l'omografia γ muta la conica data in sé).

Per verificare il terzo postulato bisogna provare che, dati nel piano un punto A, una retta r per A e su r una semiretta a uscente da A e nel piano un semipiano σ e similmente A', r', a', σ', esiste uno ed un solo movimento tale che:

$$\begin{cases} A \to A' \\ a \to a' \\ \sigma \to \sigma' \end{cases}$$

Si osservi, in primo luogo, che se nel piano π introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, con O centro della circonferenza, e se indichiamo con x' ed y' le coordinate cartesiane di un punto in un secondo piano π', l'omografia γ è rappresentata dalle (1), avendo considerato nei due piani il medesimo riferimento cartesiano.

Il quarto postulato, come il secondo, è banalmente soddisfatto poiché, se un movimento muta una semiretta in sé stessa, allora esso muta anche ogni suo punto in sé stesso, trattandosi sempre di un'omografia.

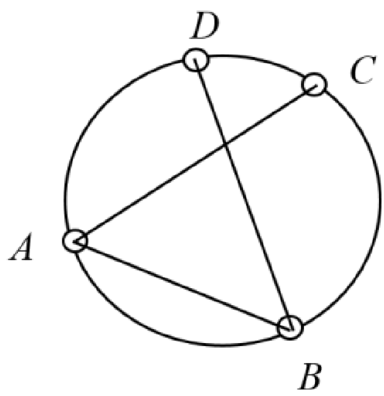

Fig. 18

Resta quindi da verificare la non validità del postulato delle parallele. Ma ciò è stato ampiamente verificato a priori nella costruzione del modello.

8 - Come ricavare le equazioni delle omografie che mutano un cerchio in se stesso

Supponiamo di operare tra due piani ampliati sovrapposti π, π' e di indicare con (x,y,z), (x',y,z')le coordinate omogenee rispettive di punti corrispondenti nei due piani, dove le equazioni $z=0$, $z'=0$ sono le equazioni delle rette improprie nei due piani. Una generica omografia,*in forma omogenea,* è assegnata dalle equazioni:

$$\rho\, x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z$$
$$\rho\, y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z$$
$$\rho\, y' = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z$$

con il det $|a_{ij}| \neq 0$ per l'invertibilità. Chiunque abbia avuto a che fare con esercizi sulle omografie ha fatto sempre ricorso ad un metodo per scriverne le equazioni, che di fatto è legato ad un interessante e banale Lemma, dal quale discende un Corollario, che indica la via per scrivere le equazioni di una omografia o anche di una reciprocità (pensabile come omografia tra un piano punteggiato e un piano rigato(con elementi espressi mediante coordinate pluckeriane).

<u>Lemma 1.</u>
Se $L(x,y,z)= ax+by+cz = 0$ e $L'(x',y',z') = ax'+b'y'+c'z' = 0$ sono rette che si corrispondono nell'omografia data, esiste ρ(reale) tale che $L(x,y,z)= \rho L'(x',y',z')$.
<u>Dimostrazione</u>. Sostituendo nelle equazioni le coordinate di una coppia di punti corrispondenti, ovvero imponendo il passaggio per essi, si ricava ρ.

<u>Corollario 2.</u>
Se

$$L_1(x,y,z) = 0,\ L_2(x,y,z) = 0,\ L_3(x,y,z) = 0$$

sono tre rette non formanti fascio, e se

$$L_{1'}(x,y,z) = 0,\ L_{2'}(x,y,z) = 0,\ L_3(x,y,z) = 0,$$

sempre non formanti fascio, sono le corrispondenti in un'omografia, e se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $P'(x_{0'}, y_{0'}, z_{0'})$sono due punti corrispondenti nella stessa omografia e non appartenenti alle rette date, allora le equazioni della suddetta omografia, nella quale essi si corrispondono, sono le seguenti:

$$L_{i'}(x,y,z) = h_i\, L_i(x,y,z), \quad i = 1,2,3$$

dove le costanti $h_i$si determinano imponendo il passaggio per i punti P e P′. La condizione che le rette non formano fascio assicurano l'invertibilità.

Dimostrazione. Assegnare le tre rette non formanti fascio equivale a dare tre punti A,B,C non allineati e mediante le rette corrispondenti i tre punti ordinatamente corrispondenti A′,B′,C′ sempre non allineati. Per il *teorema fondamentale*[28] delle proiettività (tra forme di 2° specie) è unica l'omografia (invertibile) che a 4 punti A,B,C, P, a tre a tre non allineati associa nell'ordine gli altri 4 punti A′,B′,C′,P′, a loro volta a tre a tre non allineati.

Siamo ora in grado di svolgere la nostra operazione di determinare le equazioni dell'omografia che muta il cerchio unitario in sé, ovvero l'omografia che muta la conica $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$ nella conica $x^2 + y^2 = z^2$ (cioè in se stessa).Fissiamo due riferimenti:

Il primo riferimento è dato dai tre vertici A′(-1,0,1), B′(1,0,1), e il punto all'infinito Y′(0,1,0) e dalle tre rette che li congiungono:

$$(A'\,Y'):\ z' + x' = 0\ ,\ (B'\,Y'):\ z' - x' = 0\,,\ (A'B'):\ y' = 0$$

Il secondo riferimento è dato dai punti:

[28] M. Villa, *Lezioni di Geometria*, vol. II, Capitolo II, par.10, p.19.

$$A\,(\cos\vartheta, \sin\vartheta, 1) \quad , \quad B(\cos\varphi, \sin\varphi, 1), \qquad Y$$

dove Y è l'incontro delle tangenti in A e B alla circonferenza; le tangenti hanno equazioni:

$$(AY) \quad x\cos\vartheta + y\sin\vartheta = z \quad , \quad (BY) \ x\cos\varphi + y\sin\varphi = z$$

essendo Y $(\sin\vartheta - \sin\varphi, \cos\varphi - \cos\vartheta, \sin(\vartheta - \varphi))$, mentre la retta AB, ovvero la polare di Y, ha equazione:

$$(AB): \ (\sin\vartheta - \sin\varphi)\,x + (\cos\varphi - \cos\vartheta)\,y = \sin(\vartheta - \varphi)\,z$$

Posto

$$\cos\vartheta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \ sen\vartheta = \frac{2t}{t^2 + 1} \text{ e quindi } t = \frac{d}{b}$$

E analogamente

$$\cos\varphi = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, sen\varphi = \frac{2u}{u^2 + 1} \text{ e quindi } u = \frac{c}{a}$$

le tre rette in esame, in funzione di a,b,c,d, hanno equazioni:

$$(AY) \ \left(d^2 - b^2\right)x + 2dby - \left(d^2 + b^2\right)z$$
$$(BY) \ \left(c^2 - a^2\right)x + 2cay - \left(c^2 + a^2\right)z$$
$$(AB) \ \left(dc - ba\right)x + \left(ad + bc\right)y - \left(dc + ba\right)z$$

I vertici del triangolo ABY hanno coordinate:

$$A\,(d^2 - b^2, 2bd, d^2 + b^2)$$
$$B\,(c^2 - a^2, 2ca, c^2 + a^2)$$

Y (dc - ba, ad + bc, - (dc+ba))

Il terzo punto Y è stato trovato sia intersecando le due rette (AY) e (BY), oppure trovando il polo della retta (AB). Segue che la equazione dell'omografia è della forma:

$$\rho(z' + x') = \left(d^2 - b^2\right)x + 2dby - \left(d^2 + b^2\right)z$$
$$\rho(z' - x') = \left(c^2 - a^2\right)x + 2cay - \left(c^2 + a^2\right)z$$
$$\rho\, y' = (dc - ba)x + (ad + bc)y - (dc + ba)z$$

da cui:

$$2\rho x' = \left(a^2 - b^2 - c^2 + d^2\right)x + 2(bd - ac)y + \left(a^2 - b^2 + c^2 - d^2\right)z = \mathrm{H}$$
$$2\rho y' = 2(cd - ab)x + 2(ad + bc)y - 2(ab + cd)z = \mathrm{K}$$
$$2\rho z' = \left(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2\right)x + 2(ac + bd)y - \left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)z = \mathrm{D}$$

che scritte in coordinate non omogenee sono quelle presentate dal Villa, nel precedente paragrafo, che possono essere scritte ponendo z= 1 dalle ovvie:

$$x' = H/D,\ y' = K/D.$$

9 - Gli assiomi della geometria euclidea

La revisione della Geometria di Euclide prese le mosse dall'opera di David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), dove presentò un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitarono le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche proposte da

Euclide. Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, come già ricordato in altro paragrafo, Robert Lee Moore[29] (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi equivalenti.

9.1 - Il metodo Moore

Moore divenne molto famoso come didatta quale inventore di un importante metodo. Il metodo Moore, secondo il famoso matematico Paul Richard Halmos[30] (1916-2006),il metodo si può riassumere nella frase: «Il modo migliore per imparare è fare, il modo peggiore per insegnare è parlare».

Fig. 19 - Paul Halmos

---

[29] Per notizie su Moore si veda la nota 15.

[30] Halmos fu un matematico ebreo-ungherese, emigrato nel 1929 in USA. Si occupò di molti rami della matematica ed è molto noto per i suoi successi editoriali relativi a testi universitari e di introduzione alla ricerca. Fu molto diffuso in Italia il volume *Teoria elementare degli insiemi* (1981), Milano, Feltrinelli. Il suo *I want to be a Mathematician (1985) è una analisi del* ruolo del matematico nel XX secolo.

Si noti che Halmos, se da un lato loda il metodo Moore per la didattica, ha, al contrario,una visione differ nte per il matematico che si occupa di ricerca.
Halmos asserisce:

> *… la matematica non è una scienza deduttiva: quando tentiamo di dimostrare un teorema, non è che elenchiamo le ipotesi e poi iniziamo a ragionarci su. Quello che facciamo è una serie di prove ed errori!*

In questo Halmos sembra essere molto vicino alle idee del grande epistemologo austriaco Sir Karl Popper (1902-1994), naturalizzato inglese, ben noto per la difesa dell'idea di società aperta, contro ogni totalitarismo, per il rifiuto e la critica all'induzione, con la sua proposta della Teoria della falsificabilità, ad un tempo criterio di demarcazione tra scienza e non scienza.

Fig. 20 - Sir Karl Popper

Popper è propugnatore dell'idea che "una teoria vale fino a che non nasce al suo interno una falsificazione" ovvero un "fenomeno inspiegato". La falsificazione o l'errore conduce a formulare una nuova teoria più generale, che se porta la vecchia teoria ad essere inquadrata nella nuova produce, quella operazione denominata "salto epistemologico" come nel caso della nascita delle geometrie non-euclidee e della Teoria della relatività. Afferma Popper: «Ogni qualvolta una teoria ti sembra essere l'unica possibile, prendilo come un segno probabile che non hai capito né la teoria né il problema che si intendeva risolvere».

Tornando a Robert Moore e al suo metodo didattico, è abbastanza corretto osservare che in fondo Moore ha insegnato in piena sintonia con il pensiero del grande Socrate (469-399 a.C.), con quella idea notevole del "sapere di non sapere", che era una ignoranza intesa come consapevolezza di una non conoscenza definitiva, che diventa però movente fondamentale del desiderio di conoscere, ed anche segna la nascita di quel peculiare modo di pensare che ha consentito l'origine e lo sviluppo della riflessione astratta e razionale, che sarà il fulcro portante di tutta la successiva filosofia greca.

L'avvicinare il metodo Moore ai metodi socratici della Maieutica, appaiono chiaramente nel *Teeteto*, nel quale il suo allievo Platone[31] (428-348 a.C.) riferisce il pensiero del Maestro Socrate:

> *La mia arte di maieutico in tutto è simile a quella delle levatrici, ma ne differisce in questo, che essa aiuta a far partorire uomini e non donne e provvede alle anime generanti e non ai corpi. Non solo, ma il significato più*

[31] Nulla di scritto ci è pervenuto di Socrate, le sue idee furono esposte da Platone, primo ad iniziare regolari scritti sulla filosofia del tempo.

> *grande di questa mia arte è ch'io riesco, mediante di essa, a discernere, con la maggior sicurezza, se la mente del giovane partorisce fantasticheria e menzogna, oppure cosa vitale e vera. E proprio questo io ho in comune colle levatrici: anche io sono sterile, sterile in sapienza; e il rimprovero che già molti mi hanno fatto che io interrogo gli altri, ma non manifesto mai, su nulla, il mio pensiero, è verissimo rimprovero. Io stesso, dunque, non sono affatto sapiente né si è generata in me alcuna scoperta che sia frutto dell'anima mia. Quelli, invece, che entrano in relazione con me, anche se da principio alcuni d'essi si rivelano assolutamente ignoranti, tutti, poi, seguitando a vivere in intima relazione con me, purché il dio lo permetta loro, meravigliosamente progrediscono, com'essi stessi e gli altri ritengono. Ed è chiaro che da me non hanno mai appreso nulla, ma che essi, da sé, molte e belle cose hanno trovato e generato.*

Interessante collegare queste idee con quanto scrive[32] Bruno de Finetti (1906-1985) anche rivelando il suo interesse sia per la maieutica di Socrate che per il pensiero di Luigi Pirandello (1867-1936), del quale adatta la frase seguente: i nostri concetti «*non saranno mai i protagonisti di una commedia finita, ove ciascuno ha la sua parte … saranno sempre personaggi in cerca d'autore*».

In fondo è esattamente quanto Moore chiede ai suoi studenti. Il loro sistema di apprendimento consisteva nel fatto che essi dimostravano, da loro se stessi, i teoremi che Moore enunciava nel suo corso, magari facendo il *maieutico* sui termini di base del problema presentato e il popperiano sulle teorie.

---

[32] B. de Finetti, (2006) *L'invenzione della verità*, Milano, Raffaello Cortina Editore. Si tratta di un'opera pubblicata postuma con introduzione di Giulio Giorello e Giordano Bruno e una premessa della figlia Fulvia de Finetti, circa il rinvenimento dell'opera inedita.

Fig. 21 - Bruno de Finetti

Moore divideva il problema da trattare in una catena di risultati da provare e si limitava solo a spiegare le definizioni necessarie per scoprire le dimostrazioni. Il resto veniva elaborato dagli studenti stessi. I loro corsi erano competitivi perché gli studenti di solito volevano che Moore dirigesse le loro tesi di dottorato. Le prove di ognuno venivano mostrate sulla lavagna e sottoposte all'esame accurato dei suoi compagni di classe, che cercavano qualsiasi incrinatura nel ragionamento. Moore richiedeva agli studenti di non consultare alcun testo relativo al suo insegnamento in biblioteca. La ragione è ovvia, i testi avrebbero contenuto le prove dei teoremi che gli studenti dovevano elaborare da soli.

Per Moore sarebbe stata una sorta di frode accademica. Il metodo di Moore è ancora praticato in molte università in tutto il mondo e diversi testi hanno una concezione didattica simile. Inoltre alcuni insegnanti hanno progettato varianti del metodo per renderlo più cooperativo.

Il lettore può apprezzare l'enorme impatto che ha avuto Moore come insegnante visitando il link proposto nella nota.http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=286.

9.2 - Gli assiomi di Hilbert-Moore

Sia S un insieme astratto non vuoto di oggetti, detti "punti" che indicheremo con lettere latine maiuscole:

$$S = \{A,B,C, D, \ldots\}$$

siano inoltre R e P, due famiglie non vuote di parti (sottoinsiemi) di S i cui elementi(cioè le parti)chiameremo rispettivamente "rette" e"piani", denotate con lettere minuscole le rette e con lettere greche i piani.

$R = \{r =\{A,B, \ldots\}, s =\{C,D, \ldots\}, \ldots, t = \{E,F,\ldots\}\}$
$P = \{\alpha = \{A,B,C, \ldots\},\beta = \{D,E,F, \ldots\}, \ldots,\gamma = \{G,H,L\ldots\}\}$

<u>Definizione 1</u>. La coppia (S, R) ovvero la terna (S, R, P) prendono il nome di spazi geometrici, con una o più famiglie di blocchi.

<u>Definizione 2.</u> Uno spazio geometrico (S, R, P) è detto spazioeuclideo se soddisfa i seguenti gruppi[33] di assiomi, meglio conosciuti con il nome di assiomi di Hilbert-Moore:

---

[33] Alcuni autori elencano solo i cinque assiomi, introdotti anticamente da Euclide. Questa via è interessante anche se lontana dagli scopi di questa nota. Per approfondire lo studio del modello di Klein, da questo punto di vista, si può consultare l'opera: S. Maracchia, (1993) *Dalla Geometria euclidea*

- Assiomi di appartenenza
- Assiomi di ordinamento
- Assiomi di congruenza
- Assioma di continuità
- Assioma delle parallele

9.2.1 – Assiomi di appartenenza

Ia - *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.* Dovremmo dire: due distinti elementi di S appartengono ad uno ed un sol elemento di R.

Ib - *Ogni retta ha almeno due punti; esistono tre punti non su una retta.*

Ic - *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.*

Dovremmo dire: tre distinti elementi di S, non tutti e tre su un elemento di R, appartengono ad uno ed un sol elemento dinP.

Corollario I.1. *Ogni piano contiene almeno tre punti, non allineati.*

Dimostrazione. Se ciò non fosse, il piano non conterrebbe tre punti non allineati, contro quanto richiesto da Ib.

Corollario I.2. *Un piano non può essere contenuto in una retta.*

---

alla geometria iperbolica: il modello di Klein, Liguori Ed. e gli interessanti ulteriori aspetti presentati dall'Autore.

Dimostrazione : ovvia, se una retta contenesse un piano, il piano non conterrebbe tre punti non allineati contro Ib.

Id - *Se due punti di una retta sono su di un piano, allora la retta appartiene al piano*.

Corollario I.3. *Dati una retta e un punto non appartenentisi è unico il piano che li contiene*. (Conseguenza di Ie. e Id.)

Corollario I.4. *Due rette distinte appartenenti ad un piano si incontrano in al più un punto*.

Definizione I.5. *Due rette distinte che non si incontrano, di un medesimo piano, si dicono parallele*.

N.B. Nessuna informazione è postulata sull'esistenza e sull'unicità di una parallela.

Ie - *Se un punto appartiene a due piani distinti allora i due piani hanno almeno un secondo punto in comune*.

Corollario I.6. *Una retta, per due punti distinti comuni a due piani distinti piani, appartiene ad entrambi i piani*.

Corollario I.7. *Due piani distinti, aventi un punto in comune, hanno esattamente una retta in comune.*

If - *Esistono quattro punti non su un medesimo piano.*

Corollario I.8. *Dati un piano a ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P interseca il piano in al più un solo punto.*

Dimostrazione. La retta r non può incontrare il piano in più di un punto altrimenti la retta apparterrebbe al piano, quindi anche P vi apparterrebbe, contro l'ipotesi.

Definizione I.9. *Dati un piano a ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P che non interseca il piano si chiama una retta parallela al piano.*

Osservazione. Due rette possono essere complanari, allora sono o parallele o incidenti.

Definizione I.10. *Se esistono due rette che non appartengono ad uno stesso piano si diranno sghembe.*

Teorema I11. *Dati un piano a ed un punto P fuori di esso, sia r una retta per P e per un punto Q del piano. Una qualunque retta s del piano a non contenente Q, è sghemba con r.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un piano contenente r ed s. Tale piano contenendo Q ed s coincide con α, ma contenendo r, conterrebbe anche P, e ciò è assurdo.

Da notare che una geometria che soddisfa i soli postulati dell'appartenenza può essere anche finita. Uno spazio affine su un campo di Galois(ad esempio anche sulle classi resto modulo un primo) soddisfano gli assiomi, ma non soddisfano i successivi.

9.2.2 - Assiomi di ordinamento[34]

IIa - *Su ogni retta sono date due relazioni d'ordine totali, una l'inversa dell'altra dette precedere (>) e seguire (<) (⇒ "relazione stare fra" un punto C sta tra A e B se C precede A e segue B ! Ovvero A < C B).*

[34] Euclide non enuncia gli assiomi di ordinamento, anche se implicitamente ne fa uso. Essi furono rilevati ed enunciati da Moritz Pash (1843-1930), che costruì pure interessanti geometrie critiche sugli assiomi dell'ordinamento.

IIb - *Dati due punti distinti $A \neq B$con $A < B$, esistono almeno tre punti X, Y, Ztali che $Z < A < X < B < Y$. ($\Rightarrow$ "concetto di segmento" come insieme dei punti che stanno tra due punti dati!).* Il segmento di estremi A e B, si denota con [AB], dunque:

$$[AB] = \{X \text{ t.c. } A < X < B\}$$

<u>Corollario II.1</u> *Un segmento, e quindi una retta, contiene una infinità almeno numerabile di punti.*

NOTA. Un modello di retta, soddisfacente agli assiomi di appartenenza e ai due precedenti, è dato dall'insieme dei numeri razionali con il loro ordinamento naturale, (Q, <).

<u>Definizione II.2</u> (di semiretta). *Data una retta r, si fissi su essa un punto P. Diremo che due punti A,B sono sulla medesima semiretta se P non appartiene ad [AB], diremo che i punti A,B sono su semirette diverse se P appartiene ad [AB].*

<u>Definizione II.3</u> (costruzione di semirette*). Data una retta r ed un suo punto P si chiama semiretta destra di origine P, l'insieme dei punti Y che seguono P, si indica con (P,r). Si chiama semiretta sinistra di origine P, l'insieme dei punti Z che precedono P, si indica con (r,P).*

<u>Definizione II.4</u> (di triangolo e di trilatero*). Da Ib- e IIb- segue la nozione di triangolo (dati tre punti, A,B,C, a due a due distinti e non allineati, detti vertici, un triangolo è l'insieme dei punti appartenenti ai segmenti aventi come estremi i vertici, detti lati del triangolo). Si chiama invece trilatero, l'insieme dei punti sulle rette che congiungono i vertici a due a due.*

IIc - *Dati tre punti su una retta uno ed uno solo di essi "sta fra" gli altri due.*

IId -Assioma di Moritz Pash. *Se una retta incontra un lato di un triangolo, allora incontra necessariamente un secondo lato,almeno.*

NOTA. (Geometria piana non pashiana). Nel 1970 il matematico Lesław W. Szczerba fornì un esempio di geometria in cui sono validi gli assiomi della geometria euclidea, ma non l'assioma di Pasch. La costruzione si basa sul fatto che esiste una soluzione discontinua35 dell'equazione funzionale, posto f(1) = 1 del tipo f(x + y)=f(x) + f (y) con f (1) = 1. Se si definisce una relazione di ordinamento parziale su R, nel modo seguente:x < y sse f(x) < f(y), allora la quaterna (R,+ ,·,<) risulta essere un campo semi-ordinato. Se f non è continua, il piano cartesiano costruito su questo campo soddisfa gli assiomi della geometria euclidea, ma non l'assioma di Pasch. Si noti che tale dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

<u>Definizione II.5</u> (di semipiano). *Dato un piano a ed una retta r su di esso. Possiamo ripartire a in due classi a1, a2, ciascuna detta semipiano, tali che due punti P, P′ non appartengono alla stessa classe se sulla retta P, P′vi è un punto di r tra essi, appartengono alla stessa classe se ciò non accade.*

[35] B. Rizzi (1973) *Interpretazioni di alcune equazioni funzionali*, Periodico di Matematiche 49 (4), 33-48.

Definizione II.6 (di angolo). *Siano date due semirette a e b, di comune origine P, si fissino un punto H sulla semiretta a, ed un punto K sulla semiretta b, diversi da P. Chiamiamo angolo* [ab] *l'insieme dei punti delle rette uscenti da P ed intersecanti [HK].*

Definizione II.7 (di fascio proprio di rette). *È l'insieme delle rette di un piano, passanti per un punto P di quel piano.Possiamo analogamente definire i fasci impropri di rette, i fasci di piani propri ed impropri, le stelle di rette e di piani propri ed impropri.*

Corollario II.8 *L'ordinamento sulla retta induce un ordinamento delle rette di un fascio proprio.*

Si consideri nell'angolo ab di origine P il triangolo PHK, dove H,K sono due punti rispettivamente su a e b, diversi da P. Si fissi un ordinamento su [HK], definito come segue: una retta r precede una retta s, r,s per P, se il punto R in cui r incontra [HK], precede il punto S, nel quale s incontra [HK].

NOTA. Un modello di spazio,soddisfacente agli assiomi di appartenenza e dell'ordine è dato dall'insieme delle terne ordinate di numeri razionali,per i quali i razionali hanno il loro ordinamento naturale, (Q, <) e nel quale i piani sono rappresentati dalle equazioni del tipo ax+by+cz+d = 0, e le rette con i sistemi costituiti da due equazioni di piani indipendenti.

9.2.3 - Assiomi di eguaglianza (congruenza o del movimento)

Negli assiomi che seguono è da notare la dualità tra la nozione di segmento e quella di angolo, i cui assiomi si integrano assieme nell'ultimo postulato. Quando l'eguaglianza si concepisce come una trasformazione, si chiama anche movimento.

Definizione III.1 Indichiamo con S l'insieme dei segmenti.

Definizione III.2 Indichiamo con Ω l'insieme degli angoli.

III.a- In S è data una relazione di equivalenza"="detta "eguaglianza" di segmenti.

III.b- In Ω è data una relazione di equivalenza "=" detta eguaglianza di angoli.

III.c.- Dati un segmento [AB] e una semiretta di origine H esiste nella semiretta un punto K tale che [HK] = [AB]

III.d.- Dati un angolo [*ab*] e un fascio di origine *h* esiste nel fascio una retta *k* tale che: [*hk*] = [*ab*]

III.e. - [AB] = [BA]

III.f. - [ab] = [ba]

Definizione III.3. Due segmenti [AB] e [BC] appartenenti alla semiretta di origine A, si chiamano segmenti consecutivi se A<B<C. Essi determinano il segmento [AC] che per definizione si indica con [AC] = [AB] + [BC], detto somma disegmenti consecutivi.

Definizione III.4. Due angoli [ab] e [bc] appartenenti all'angolo di origine a, si chiamano angoli consecutivi se

$a<b<c$ Essi determinano l’angolo [ac] che per definizione si indica con [ac] = [ab] + [bc], detto somma degli angoli consecutivi.(sovrabbondante)

III.g.- (sovrabbondante) Se[AB] e [BC] sulla semiretta (A,r) di origine A, ed [A′B′] e [B′C′] sulla semiretta (A′,r′) di origine A′ sono segmenti consecutivi e se [AB] = [A′B′] e [BC] = [B′C′] allora: [AB] + [BC] = [A′B′] + [B′C′].

III.h.- Se [ab] e [bc] sull’angolo di origine a, ed [a′b′] e [b′c′] sull’angolo di origine a′ sono angoli consecutivi e se[ab] = [a′b′] e [bc] = [b′c′] allora: [ab] + [bc] = [a′b′] + [b′c′]

Definizione 3.3.- Due triangoli di vertici rispettivi (A,B,C), (A′,B′,C′) aventi nell’ordine lati ed angoli corrispondenti eguali, si dicono eguali. Cioè sono tali che [AB] =[A′B′], [BC]= [B′C′], [AC] =[A′C′], angA = ang A′, ang B = ang B′, ang C = ang C′

III.i. (I Criterio di eguaglianza). Due triangoli di vertici rispettivi (A,B,C), (A′,B′,C′) aventi nell’ordine[AB] =[A′B′], [BC]= [B′C′] e ang B = ang B′, sono eguali. (si dice anche congruenti).

N.B. Sui postulati dell’eguaglianza (ovvero del movimento o congruenza) vi sono numerose altre versioni,mediante gruppi di postulati del tutto equivalenti a quelli presentati sopra, che rappresentano la linea seguita da vari autori, quali oltre Hilbert e Lee Moore, sono il Veronese, il duo Enriques-Amaldi, come meglio specificato in ciò che segue. È infatti interessante indicare almeno quali sono gli autori, che in un modo o nell'altro hanno pubblicato i loro metodi[36] , o meglio il loro gruppo di assiomi per presentare una corretta teoria dell'eguaglianza.

Anticamente Euclide non distingueva tra eguaglianza ed equivalenza ed in realtà la specifica dei due concetti è arrivata più tardi. Le varie teorie moderne sulla eguaglianza, si possono ripartire in cinque linee di pensiero.

Una prima linea è quella di David Hilbert (1862-1943), di Robert Lee Moore (1882-1974), di Giuseppe Veronese (1854-1917), di Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957). Il metodo di Hilbert e Lee Moore si basa in effetti sul ritenere primitivo il concetto di eguaglianza di segmenti e di angoli e di postulare il 1° criterio di eguaglianza dei triangoli, evitando di considerare dall'inizio l'idea di movimento. Anche il Veronese segue questa strada, ma tralascia la nozione di angolo. Alle idee di Hilbert si sono attenuti Enriques ed Amaldi nel loro classico trattato *Lezioni di Geometria,* che rimane sempre un nostro punto di grande riferimento. Da notare in Enriques - Amaldi, il 1° criterio di eguaglianza è apparentemente dimostrato, anche se la dimostrazione, del tutto intuitiva, equivale a dire che è vero perché e vero, quindi a usarlo come postulato.

Una seconda linea di pensiero è quella che nasce nell'operadi Moritz Pash[37] (1843-1930), che considera primitivo il concetto di congruenza per figure qualsiasi,

[36] Cfr. A. Chiellini-R. Giannarelli, op.cit., pp.399-427.
[37] M. Pash, (1882), *Vorlesungen uber neuere Geometrie*, Leipzig

definita con opportuni postulati, che indicano come il movimento operi sulle figure.Tale indirizzo è seguito nell'opera di Carlo Rosati (1876-1929) e Piero Benedetti[38] (1876-1933), in quella di Michele De Franchis (1875-1946), ed infine nel trattato di Francesco Severi (1879-1961).

La terza linea, forse la più moderna, è legata agli spazi metrici[39] e alla nozione di distanza. È quella seguita da Enrico Bompiani(1889-1975) e Carmelo Longo (1912-1971) che prendono in considerazione la distanza di due punti e definiscono come movimento una corrispondenza puntuale biettiva che conserva le distanze di coppie di punti corrispondenti. Questa idee è in piena sintonia con la definizione di spazio euclideo (anche n-dimensionale) definito a partire da uno spazio vettoriale di dimensione finita sui reali, e per estensione anche sui complessi, o anche per geometrie piane su campi finiti, nei quali si introduca un particolare prodotto "*interno*"e quindi una "metrica generalizzata", a valori in un campo di Galois, (cfr. Di Gennaro- Eugeni in [9]).

Una quarta linea si trova nelle opere[40] di Mario Villa (1907-1973), nelle quali oltre ad approfonditi studi sulle trasformazioni puntuali, appaiono in dettagli le equazioni dei movimenti piani e spaziali, oltre alle inversioni ed alle

---

[38] Piero Benedetti operò a Pisa, prima come allievo della scuola normale superiore, poi come prolifico autore di testi scolastici.

[39] E. Bompiani (1963), Alcuni tipi di spazi metrici, Archimede, 6, pp. 281-288, ed F. Eugeni, Spazi metrici e pseudometrici finiti, op.cit.

40 M. Villa, Lezioni di Geometria, vol. II, Cedam Padova, 1965.

affinità circolari e tutta una varietà di rappresentazioni analitiche dei movimenti, delle similitudini, delle affinità, dell'anello delle centro-affinità. In particolare nell'articolo41 dedicato al modello di Klein, scritto dallo stesso MarioVilla nel già citato volume *Per un insegnamento moderno della Matematica*, appaiono i movimenti del piano di Klein in sé,esattamente come riportato in questo lavoro al paragrafo 6 dove i movimenti sono indicati e verificati. In questo lavoro al paragrafo [7], viene data una tecnica per ricavarli, che esulava dagli scopi didattici del Villa.

Un'ultima linea, quella gruppale, appare nel testo di Michele De Franchis (1875-1946), ed è anche quella scelta dalVilla, nella sua presentazione del modello di Klein.

Quest'ultima metodologia indicata può esprimersi mediante il seguente gruppo di postulati del tutto equivalenti, come è possibile dimostrare, a quelli dell'eguaglianza che abbiamo elencato nella lista di Hilbert-Moore.

Postulati gruppali del movimento

1. I movimenti sono particolari corrispondenze biunivoche del piano che formano un gruppo.

---

41 Il sottoscritto autore di questo scritto si è laureato con Mario Villa nel 1963, e iniziò la sua attività come assistente incaricato presso la Cattedra del Prof. Guido Vaona dell'Università di Modena. In quel contesto ebbi l'onore di correggere le bozze di quel lavoro del prof. Villa, e fin da allora mi interessai a come ricavare i movimenti del piano di Klein, così come ho esposto in questo lavoro.

2. In un movimento, ad una retta corrisponde ordinatamente una retta, cioè l'ordine dei punti viene conservato.
3.)Siano dati nel piano un punto Aed una retta r passante per A; sia inoltre a una delle due semirette di r uscenti da A ed α uno dei due semipiani del piano π separati da r; dati, similmente, un secondo punto A', una seconda retta r' ed in relazione ad r' una semiretta a', uscente da A', ed un secondo semipiano α' separato da r', esiste uno ed un solo movimento che porta A in A', a in a' e α in α'.
4. Se un movimento muta una semiretta in sé stessa, allora muta in se stesso anche ogni punto della semiretta.

9.2.4 - Assiomi di continuità

Riprendendo il completamento dei postulati di Hilbert-Moore, procediamo ad illustrare il 4° gruppo di postulati della continuità, dei quali esistono due versioni. Premettiamo alcune definizioni. Con questi postulati la retta diviene continua e il modello spaziale è quello delle terne ordinate di numeri reali, e tutto si rappresenta con i metodi della geometria analitica.

Definizione IV.1 (di classi separate di punti). Sia [AB] un qualsiasi segmento (più in generale una retta);supponiamo che esso sia ripartito in due classi non vuote di punti. Tali classi si diranno classi separate e contigue di punti se:

- ogni punto di [AB] (o della retta) appartiene ad una ed una sola delle due classi;

- ogni punto della prima classe precede ogni punto della seconda classe.

Se esiste un punto C (appartenente alla prima o in alternativa alla seconda classe) che segue ogni punto della prima classe e precede ogni punto della seconda (lui escluso), tale punto si dirà *punto separatore* delle due classi.

Definizione IV.2. (di classi separate di segmenti**).** Siano date su una retta una classe di segmenti ripartiti in due classi. Tali classi si diranno *classi separate di segmenti*se:

- ogni segmento della classe appartiene ad una ed una sola delle due ripartizioni;
- ogni segmento della prima classe è minore[42]di ogni segmento della seconda classe.

Se esiste un segmento che è maggiore di ogni segmento della prima classe e minore di ogni segmento dellaseconda, tale segmento si dirà *segmento separatore* delle due classi.

I versione

Si ammettono i seguenti due postulati**:**

IV.a.- Postulato di Cantor.*Siano date due classi separate di segmenti:*

1° classe: $[AC_1], [AC_2],\ldots, [AC_n],\ldots..$
2° classe: $[AB_1], [AB_2],\ldots, [AB_n], \ldots..$

[42]Si dice che [CD] < [AB] se esiste in [AB] un punto C, tale che [CD] =[AC].

con $[AC_h] < [AB_k]$, $\forall h, k \in N$. *Se accade che comunque fissato un arbitrario segmento* [EP] *possiamo trovare almeno due segmenti* $[AC_h]$, $[AB_k]$ *tali che* $[C_h B_k] < [EP]$, *allora esiste un unico segmento* [AX] *elemento separatore delle due classi.*

IV.b.- Postulato di Eudosso-Archimede. *Presi due segmenti qualsiasi, esiste un multiplo del più piccolo che supera l'altro.*

II versione

Si ammette il seguente unico postulato:

IV.c.- Postulato di continuità di Deedekind. *Comunque dati su una retta orientata due gruppi U, V non vuoti di punti costituenti due classi separate e contigue di punti allora esiste uno ed un sol punto P che è elemento di separazione delle due classi.*

Omettiamo la dimostrazione dell'equivalenza delle due versioni di postulati,del resto reperibile in letteratura[43]. E' importante notare che esistono *geometrie non cantoriane* (ad esempio lo spazio numerico 3-dimensionale sul campo dei numeri razionali) e *geometrie non archimedee*[44]sulle quali uno studio iniziale si deve a Veronese[45].

---

[43] A. Chiellini - R. Giannarelli, op.cit., cap21, par.II.pp.499-506.

[44] Si veda in A. Chiellini - R. Giannarelli, op.cit., cap21, par. III pp.509-510 una versione intuitiva del modello di Veronese di retta non Archimedea. Una versione numerica del modello è dovuta a F. Eugeni – S. Furneri - F. Mercanti, *Una presentazione delle geometrie non archimedee*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Teramo (1999), vol. I, pp.101-111.

[45] Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161 - 167. - Veronese G. (1898), Segmenti e

Va solo aggiunto che è possibile dimostrare come conseguenza della continuità che: *se un segmento congiunge un punto interno ad una circonferenza con un punto ad essa esterno allora il segmento ha un punto sulla circonferenza.*

La dimostrazione è nella nota 42. Vogliamo notare che tale teorema non vale in un piano non cantoriano. Infatti nel piano cartesiano a coordinate razionali la circonferenza unitaria (costituita dai suoi soli punti razionali) intersecata con una retta per l'origine non ha mai intersezioni razionali.

Sulle geometrie non-archimedee è interessante indicare il complesso dei lavori di Eugeni e Mascella che portano avanti la classificazione di tutte le possibili rette non archimedee.

Sono da indicare alcuni lavori di carattere preliminare[46] culminanti in un lavoro nel quale percorrendo una strada differente da quella del matematico austriaco Hans Hahn (1879-1934) viene presentata una moderna versione[47]. della classificazione gruppale[48] data da Hahn nel 1907.

---

numeri transfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 79 - 87. - Veronese G. (1905), La geometria non archimedea. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347 - 351. - Veronese G. (1909), La geometria non archimedea, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197 - 208.

[46] Eugeni F. e Mascella R. (2001), *La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine*, Periodico di Matematiche, vol. 3, pp. 45-56. - Eugeni F. e Mascella R. (2002), *Su alcuni modelli geometrici non archimedei; Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano*; entrambi in F. Eugeni (2002) (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.

[47] Eugeni F. e Mascella R. (2005), A complete characterization of non-Archi-medean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice*, Editura Academiei Romane, Bucarest, pp. 257-270.

[48] Hahn H. (1907), Uber die nichtarchimedischen Grossensysteme, Sitzungs berichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 116, pp.601-655.

Sull'argomento è interessante un antico articolo di Levi-Civita nel quale introduce "numeri non archimedei" costituenti una differente classe[49] rispetto alle rette non archimedee del Veronese. Ancora vi è un lavoro di Eugeni e Mascella nel quale costruiscono piani non archimedei[50], trovandone due non isomorfi.

Tuttavia è fuori dubbio, come prova anche l'articolo di Mascella, in questo fascicolo, dal titolo "Possibilità non archimedee" di carattere filosofico, che occorre fare ordine in questo ambito raccogliendo magari in volume la storia e l'evoluzione di questo interessante aspetto delle geometrie non –archimedee.

9.2.5 - Assioma delle parallele

V.a. *Dati una retta ed un punto che non si appartengono, esiste nel piano che li contiene una sola retta per il punto non avente punti in comune con la retta data* (*assioma di Euclide o delle parallele*).

[49] Tullio Levi Civita, *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti R. Ist. Veneto di Lett. Ed Arti, VII (4), (1893), pp.1765-1815.

[50] Eugeni F., Mascella R. (1999), *Un piano non archimedeo derivato da un piano di traslazione*, in Eugeni F. (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.

Bibliografia

[1] Agazzi E., Palladino D. (2014). *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Casa ed. La Scuola

[2] Berardi L. (1994). *Algebra e teoria dei codici correttori*, Milano, Franco Angeli.

[3] Berardi L.,Beutelspacher A. (1996). *Crittologia*, Milano, Franco Angeli Ed.

[4] Berardi L.,Beutelspacher A. (2003). *Matematica Discreta*, Milano, Franco Angeli Ed.

[5] Bolyai J. (1955).*The science of absolute space, in Bonola R., Non–euclidean geometry*, New York

[6] Bonola R. (1906; ristampa 1975). *La geometria non euclidea*, Bologna, Zanichelli.

[7] E.Carruccio (1958). *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, Ed. Gheroni.

[8] A.Chiellini-R.Giannarelli (1962). *L'esame orale di Matematica*, Roma, Veschi.

[9] Di Gennaro F., Eugeni F. (1975).*Strutture pseudo–euclidee su campi di Galois, "Le Matematiche"*, Volume LII, Fascicolo 1, Catania, pp.129-142.

[10] Eugeni F. (1996). La Matematica discreta attraverso i problemi, in: *Cento Anni di Matematica (Atti Congresso Nazionale Mathesis Centenario)*, Roma, Palombi, 84-102.

[11] Greenberg M.G. (1973). *Euclidean and non–euclidean geometries*, San Francisco.

[12] Klein F. (1968).*Vorlesungen über nicht–Euklidische Geometrie*, Berlino.

[13] Meschkowski H. (1963). *Noneuclidean geometry*, New York

[14] Ministero della Pubblica Istruzione–O.C.S.E. (1963), Mario Villa (cur.), *Per un insegnamento moderno della Matematica*, Bologna, Patron-

[15] Segre B. (1961) *Lectures on modern geometry*, Roma, Cremonese,

[16] Spampinato N. (1950), *Lezioni di Geometria superiore*, Vol. VI, Napoli, Ed.Pironti.

Approvato su parere favorevole di Aniello Russo-Spena
e Fernando Di Gennaro