Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019 pp. 151-168

Logica fuzzy e calcolo delle probabilità: due facce della stessa medaglia?

Danilo Pelusi*

*Dipartimento di Scienze della Comunicazione,
Università di Teramo – dpelusi@unite.it

Sunto*: Il seguente articolo illustra le possibili analogie e differenze tra il Calcolo delle Probabilità e la logica fuzzy. In particolare, sono messi a confronto gli insiemi tradizionali con quelli fuzzy in base alle molteplici definizioni che si possono attribuire alla probabilità di un evento.*

Parole Chiave: *Insieme fuzzy, evento, funzione di appartenenza, sottoinsiemità.*

1 - Logica bivalente e polivalente: confronto

Fin dai tempi di Aristotele la scienza, la matematica, la logica e la cultura in generale si sono basate su una concezione del mondo abbastanza semplice, fatta di cose assolutamente bianche o nere, di affermazioni vere o false totalmente, di oggetti classificabili in insiemi ben definiti e con confini ben precisi. Una logica di natura bivalente domina e persuade la mente degli scienziati sempre più convinti di poter spiegare la natura intrinseca delle cose, i misteri più profondi della scienza con due semplici valori, 0 e 1. Tutto è riconducibile ad essi, non ci sono vie di mezzo, la verità si fonda su due unici valori, piccoli ma capaci di spiegare e semplificare tutti i mondi in cui le varie scienze affondano le loro radici.

La logica binaria, nata e diffusasi con Aristotele, si riduce fondamentalmente ad una sola legge: A o non-A. O questo o non questo. Il cielo è blu o non blu; non può essere blu e non blu. Non può essere A e non-A. Ciononostante la fede binaria ha sempre sollevato dubbi, ha sempre prodotto reazioni, critiche, insofferenze da parte di coloro che guardavano la natura sotto altri punti di vista tesi a far emergere le innumerevoli contraddizioni nascoste in essa, fatte di cose e non cose, di A e non-A.

La filosofia ci racconta che questa forte contrapposizione alla logica binaria ebbe inizio in realtà ancora ben prima che nascesse Aristotele, cioè circa due secoli avanti con Budda, il quale diffuse in Oriente la sua dottrina basata principalmente su un unico obiettivo: quello di squarciare il velo bivalente e vedere il mondo così com'è.

In sostanza lo scontro si riduce ad una disputa fra i due più grandi capostipiti della filosofia, occidentale da una parte, e orientale dall'altra; le loro teorie hanno affascinato per secoli la mente di innumerevoli scienziati, ma la scienza stessa in generale sembra aver seguito nel corso del tempo due cammini ben differenti e contrastanti: quello occidentale e quello orientale.

Il Calcolo delle Probabilità si basa essenzialmente su una logica di natura bivalente. Infatti quando noi parliamo di probabilità non facciamo altro che attribuire ad un certo evento un numero compreso tra zero e uno che rappresenta la possibilità che l'evento stesso si verifichi; ma la sua natura è bivalente, o si o no, o accade o non accade, non esistono scelte intermedie. La probabilità interviene in qualsiasi situazione dove ci troviamo di fronte ad incertezza dovuta a mancanza di dati, di informazioni, ecc.; gli eventi non hanno una natura deterministica bensì sono governati dalla casualità, da forze oscure che ne impediscono la determinazione a priori.

Nella Logica fuzzy il mondo è caratterizzato da completa vaghezza, incertezza; più aumentano le informazioni, più emerge la natura fuzzy delle cose. Più dati ci aiutano a fissare la sfumatura mediante la quale gli insiemi si sovrappongono; essa elimina i confini che segnano dove una cosa cessa di essere quella cosa. La probabilità per contro si dissolve quando i dati noti diventano numerosi. Gli oggetti sono e non sono, appartengono e, allo stesso tempo, non appartengono ad un insieme, ma tutti in una certa misura.

A ciascun elemento attribuiamo un valore, sempre compreso tra zero e uno, che esprime l'appartenenza ad un determinato insieme fuzzy. Tale valore non è una probabilità, non fa riferimento al verificarsi o non dell'evento stesso, bensì rappresenta la misura di un fatto deterministico, ma "vago" in una certa misura, che non risponde ad una natura bivalente ma polivalente, con infiniti gradi di appartenenza tra 0 e 1.

Per esempio, affermare che la probabilità che una determinata mela cada domani dal ramo è del 60%, è un'affermazione probabilistica, riguardante l'evento stesso, ma pur sempre di natura bivalente (infatti la mela o cadrà o resterà attaccata al ramo). Dire invece che la stessa mela ha un grado di appartenenza all'insieme delle mele "DOLCI" del 70% (vedi figura 1), significa che per il 70% la mela appartiene all'insieme fuzzy D = DOLCE e per il restante 30% all'insieme A = ACERBO.

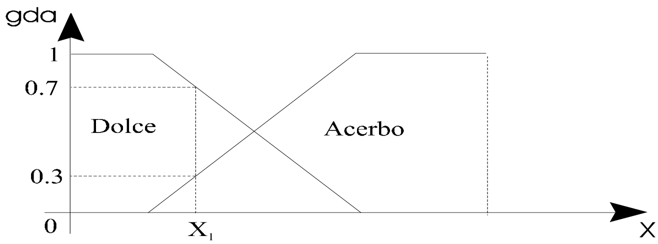

Fig. 1 - Insieme fuzzy relativo al tipo di mela.

Abbiamo a che fare con degli insiemi fuzzy in quanto non possiamo definire dei confini ben precisi in cui classificare le mele, inoltre abbiamo una logica a più valori in quanto per altre persone con gusti diversi i gradi di appartenenza potrebbero cambiare.

2 - La funzione di appartenenza e la variabile casuale

Gli insiemi fuzzy in generale sono determinati da coppie ordinate del tipo:

$$A=[(x,\mu_{A(x)})] \tag{1}$$

con x elemento e $\mu A(x)$ funzione di appartenenza, cioè una funzione che a ciascun valore x associa un determinato grado di appartenenza. In generale la funzione di appartenenza ha una rappresentazione triangolare o trapezoidale, ma nulla vieta di utilizzarne altre come per esempio la gaussiana; in essa la x può assumere infiniti gradi di appartenenza compresi tra 0 e 1, leggibili direttamente dal grafico.

La sua forma non è scelta a caso ma esemplifica in maniera chiara l'intento di rappresentare insiemi in cui ci sono elementi che vi appartengono al 100% (ad esempio in corrispondenza del vertice di una funzione triangolare o della base minore di una funzione trapezoidale) e altri che ne fanno parte in una certa misura. I valori della funzione di appartenenza crescono e decrescono "dolcemente" in maniera tale che gli insiemi si sovrappongano e le x possano cadere nelle zone d'intersezione degli intervalli di definizione dei vari insiemi.

Nel Calcolo delle Probabilità accade qualcosa di molto analogo; supponiamo infatti di avere un insieme di eventi e di farne una partizione; in base ad un determinato criterio logico assegniamo a ciascun evento un valore xi, successivamente definiamo una variabile casuale cioè una funzione f(x) che associa a ciascuna xi un valore pi di probabilità compreso tra 0 e 1, rispettando sempre la condizione di normalizzazione, cioè:

$$\sum p_i=1 \tag{2}$$

Mentre nel caso di variabili casuali discrete la f(x) ci fornisce la probabilità di un determinato evento, nelle variabili continue la p è definita da un integrale del tipo:

$$\int f(x)dx \tag{3}$$

infatti non esiste la probabilità in un punto, bensì in un'area.

Nella logica fuzzy invece è sempre la f(x) a fornirci il grado di appartenenza e non l'area sottostante la funzione. Inoltre in questo caso la probabilità è definita in un certo intervallo infinitesimo, mentre nella logica fuzzy, il grado di appartenenza è sempre valutato in un punto ben preciso.

3 – Insiemi *fuzzy* e insiemi tradizionali: analogie e differenze

Nella logica fuzzy gli insiemi seguono delle regole apparentemente molto simili a quelle della logica tradizionale su cui si basa appunto il calcolo delle probabilità. Infatti volendo andare a definire le principali operazioni che possiamo compiere su di essi, abbiamo che:

- UNIONE

$$\mu_{(A\ OR\ B,\ X)} = MAX\ (\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \tag{4}$$

- INTERSEZIONE

$$\mu_{(A\ AND\ B,\ X)} = MIN\ (\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \tag{5}$$

- COMPLEMENTAZIONE

$$\mu_{\bar{A}\ (x)} = 1 - \mu_{A(x)} \tag{6}$$

Le tre espressioni precedentemente elencate sono analoghe a quelle degli insiemi tradizionali, basta andare a sostituire alla funzione di appartenenza o *membership* μA(x), la funzione caratteristica che esprime appunto l'appartenenza o meno di un elemento generico a un determinato insieme. La differenza fondamentale risulta a livello grafico, dove non esiste corrispondenza tra le due logiche. Infatti supponiamo di avere il seguente insieme fuzzy P così rappresentato (figura 2):

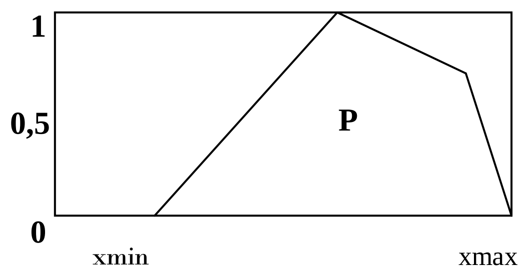

Fig.2 - Insieme fuzzy.

il complementare di P, applicando la sua definizione, risulta essere come in figura 3:

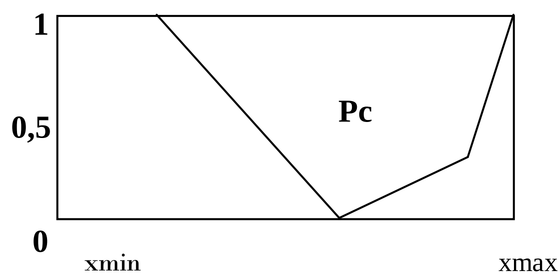

Fig.3 - Insieme complementare.

È evidente che nella logica tradizionale il risultato sarebbe stato differente, in quanto saremmo andati a prendere l'area esterna all'insieme P (figura.2), rispettando il principio di non contraddizione il quale afferma che un elemento non può appartenere contemporaneamente ad un insieme **P** ed al suo complementare **Pc**. Nel *Calcolo delle Probabilità* si può considerare l'area di **P** come la probabilità del nostro evento e l'area totale come la probabilità del nostro insieme universo; si avrà quindi:

$$p(P)+p(\overline{\mathbf{P}}) = 1 \qquad (7)$$

espressione analoga a

$$\mu_{P(x)}+\mu_{\overline{P}(x)} = 1 \qquad (8)$$

ma il risultato è differente in quanto, nella probabilità graficamente facciamo un discorso di aree, mentre nella *logica fuzzy* l'espressione viene applicata a ciascun punto x sulla funzione di appartenenza.

L'intersezione tra P e Pc è così rappresentata (figura.4):

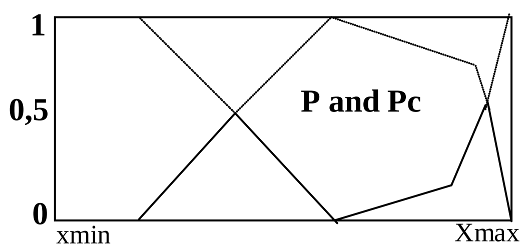

Fig. 4 - Intersezione di due insiemi fuzzy.

Si noti che tale insieme non coincide con l'insieme vuoto ∅, come si vorrebbe nella logica tradizionale, o nel Calcolo delle Probabilità, dove la probabilità dell'evento composto $\mathbf{P} \cap \overline{\mathbf{P}}$ è zero:

$$p(\mathbf{P} \cap \overline{\mathbf{P}}) = p(\mathbf{P}) \times p(\overline{\mathbf{P}} / \mathbf{P}) \qquad (9)$$

ma

$$p(\overline{\mathbf{P}} / \mathbf{P}) = 0 \qquad (10)$$

in quanto sono due eventi incompatibili, cioè il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, sempre secondo il principio di non contraddizione.

L'unione tra P e Pc sarà quindi data dalla figura 5:

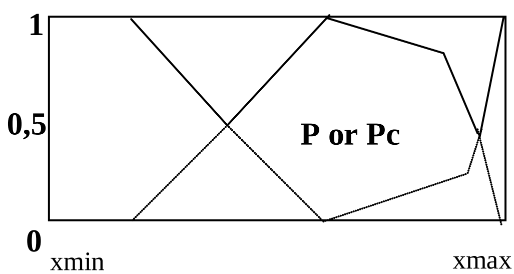

Fig.5 - Unione di due insiemi fuzzy.

anche qui osserviamo che tale insieme non corrisponde all'insieme universo Ω, quindi viene a cadere anche il principio del terzo escluso, il quale afferma che l'unione di un insieme con il suo complemento fornisce l'insieme universo.

In termini probabilistici avremo:

$$p(P \cup \overline{P}) = p(P)+p(\overline{P})- p(P \cap \overline{P}) \qquad (11)$$

ma, poiché P e $\overline{P}$ sono incompatibili, avremo:

$$p(P \cup \overline{P}) = p(P)+p(\overline{P}) = p(\Omega) = 1 \qquad (12)$$

con Ω insieme universo.

4 - La frequenza relativa: un concetto fuzzy

Una delle definizioni principali di probabilità è sicuramente quella frequentista, o statistica a posteriori, in cui viene definita come rapporto tra il numero delle prove favorevoli e il totale delle prove effettuate:

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{n} \qquad \text{con} \quad 0 \le p \le 1 \qquad (13)$$

Condizione fondamentale è che il numero delle prove sia molto elevato, e che le stesse siano identiche ed effettuate nelle medesime condizioni. Tale probabilità la ritroviamo ad esempio nel gioco d’azzardo, o lanciando una moneta, oppure giocando ai dadi.

Se ipotizziamo di giocare a TESTA o CROCE possiamo tranquillamente costruirci il nostro insieme X di eventi totali, che rappresenta il totale dei lanci effettuati, e a sua volta suddividerlo in due sottoinsiemi rappresentanti da una parte gli esiti favorevoli e dall'altra gli esiti sfavorevoli (figura 6):

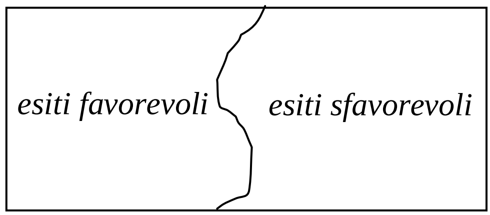

Fig. 6 - Partizione dell'insieme universo.

L'insieme dei tentativi favorevoli non interseca quello dei tentativi sfavorevoli e i due insiemi esauriscono o riempiono l'insieme universo X, cioè quello del totale delle prove. Gli eventi al loro interno sono bivalenti, o testa o croce, non esistono situazioni intermedie, non ci sono tentativi che cadono sulla linea di demarcazione, o ci si schiera da una parte o dall'altra. Il principio di non contraddizione è salvo, la legge del terzo escluso pure, l'A o non-A vale sempre.

Eppure tale diagramma nasconde un aspetto fuzzy, apparentemente difficile da scovare ma semplicissimo se si pensa al concetto di sottoinsiemità. Generalmente nella logica tradizionale siamo abituati a parlare di insiemi che ne contengono altri, o totalmente o non affatto, quindi il concetto di appartenenza continua sempre a mantenere una natura bivalente. Ma cosa succede se l'insieme non è contenuto totalmente e se a contenere non è più l'intero, o se si voglia insieme universo, bensì la parte o sottoinsieme? Ecco allora il concetto di sottoinsiemità, cioè la maniera in cui un insieme è contenuto in un altro.

Ma anche in questo caso continuiamo a non vedere nulla di buono; i due insiemi di figura 6 sono disgiunti, non si contengono affatto, mentre entrambi appartengono al 100% all'insieme universo, che cioè li contiene totalmente. Ma dov'è allora la sottoinsiemità? Semplice, nella maniera in cui la parte contiene l'intero. Sembra un concetto tanto ostico, come può infatti contenere l'intero essendo un suo sottoinsieme? L'unica eccezione è il caso in cui la parte è uguale allo stesso intero, ma in generale differisce da esso. Tuttavia essa lo contiene sempre parzialmente, lo contiene cioè in una certa misura.

Consideriamo un altro insieme non fuzzy A, sottoinsieme di X, rappresentante sempre i nostri esiti favorevoli (figura 7):

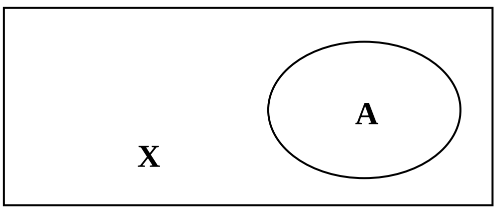

Fig. 7 - Insieme degli esiti favorevoli.

Il nostro insieme è una parte di X e non è fuzzy, non ha niente in comune con il suo opposto o complementare non-A. Supponiamo ora di ridurre A ad un punto fino a svanire nel nulla, ossia nell'insieme vuoto. In questo caso la parte non contiene l'intero, come può infatti il nulla contenere un qualcosa? Ora facciamo crescere di nuovo il nostro insieme A fino a eguagliare completamente il nostro rettangolo: in questo caso la parte contiene al 100% l'intero. Ma il passaggio non è stato immediato, la nostra parte è andata da un'inclusione nulla, 0, a una completa inclusione, 1, passando per vie intermedie in cui ha contenuto il nostro intero in misura parziale direttamente proporzionale alla superficie che mano a mano ha occupato nel nostro diagramma.

Dunque abbiamo definito l'intero nella parte, ma in realtà cosa rappresenta? È la probabilità della parte. Volendo conoscere la probabilità di fare testa o croce, tornando al lancio della moneta, non dobbiamo far altro che osservare la misura in cui il nostro insieme di esiti favorevoli contiene l'insieme di tutti i tentativi.

In generale la probabilità di un insieme o di un evento A è uguale alla misura in cui la parte A contiene lo "spazio campionario" X.

La *sottoinsiemità* coincide con quella che abitualmente definiamo frequenza relativa e la dimostrazione è semplicissima. Sia S(X, A) la misura in cui X è un sottoinsieme di A. Poiché A è totalmente un sottoinsieme di X, S(A,X)=1, ma in generale l'opposta sottoinsiemità S(X,A) è compresa fra gli estremi bivalenti: $0<S(X,A)<1$. Supponiamo che X contenga N tentativi e A gli NA tentativi coronati da successo. Allora il Teorema della Sottoinsiemità implica che:

$$S(X,A) = \frac{\textit{numero}\deg\textit{li elementi in } A \cap X}{\textit{numero}\deg\textit{li elementi in } X} = N_A / N \qquad (14)$$

vale a dire la frequenza relativa degli esiti positivi di tutti i tentativi.

5 - La soggettività nelle due logiche

Nella logica fuzzy prevale un certo grado di soggettività soprattutto nella parte iniziale della scelta degli insiemi, in cui bisogna andare a definire quale rappresentazione adottare e gli intervalli in cui gli stessi cadono. Tale fase è molto importante, infatti da essa dipendono i tre processi fondamentali di fuzzificazione, inferenza e defuzzificazione. È chiaro che costruire un insieme, per esempio triangolare, non è la stessa cosa di adottare una rappresentazione trapezoidale: cambiano le pendenze, stessi valori di input corrispondono a gradi di appartenenza differenti, il che vuol dire attivazione degli insiemi output in punti completamente diversi.

La scelta iniziale tuttavia non è del tutto casuale, dipende dal fenomeno che si sta studiando, spesso si ragiona anche a ritroso, cioè supponiamo di avere una determinata regola e volere per la stessa un'attivazione dell'output in un determinato punto: si costruisce l'insieme input in maniera che a un punto x stabilito del nostro intervallo corrisponda il valore di attivazione desiderato.

Molto importante è osservare come possono cambiare gli intervalli di definizione degli insiemi a seconda delle persone; supponiamo infatti di voler considerare l'insieme delle donne alte: cosa significa ALTO? Per esempio potrei scegliere di far appartenere a questo insieme le donne che superano un metro e 65cm, ma un'altra persona potrebbe ritenere alta anche una donna di un metro e 63cm, quindi intervalli differenti a seconda delle persone.

Anche nel Calcolo delle Probabilità la soggettività è presente e la ritroviamo nella definizione soggettiva. In base ad essa ciascun individuo assegna un valore differente ad un evento che rappresenta la fiducia attribuitagli riguardo al suo verificarsi. E' tipica delle scommesse, per esempio immaginiamo di avere una corsa clandestina di otto cavalli: in base alla definizione classica ciascun cavallo avrebbe 1/8 di probabilità di vincere; per la definizione frequentista occorrerebbe effettuare un numero di prove molto elevato e in base ai risultati attribuire in seguito le probabilità. La somma che noi scommettiamo sulla vittoria di un cavallo rapportata al totale delle scommesse rappresenta il nostro grado di fiducia.

Tuttavia mentre nel Calcolo delle Probabilità vale il criterio di coerenza, cioè ciascun giocatore deve essere disposto a scambiare la propria posizione con l'altro, il quale conferisce un carattere deterministico alla teoria, definendo in maniera univoca la probabilità, ciò non è vero nella logica fuzzy, dove la scelta degli intervalli e relativi insiemi resta un fatto del tutto soggettivo e dipende da colui che effettua lo studio.

Bibliografia

[1] Berardi L., Eugeni F., Innamorati S., (1902). *Generalized Designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic Cryptography,* Proceedings of 4-th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applicatins, Xanthy, Greece, pp 15-25.

[2] Berardi L., Eugeni F., Innamorati S., (1992). *Remarks on hypergroupoids and Cryptography,* Journal of Combinatorics, Information &System Sciencies, vol. 17, n.3-4, pp. 217-231.

[3] Cammarata S., (1994). *Sistemi Fuzzy*, Etaslibri, Bologna

[4] Cerasoli M., Eugeni F., Rizzi B., (1983). *Sulla probabilità del k-MCD di m naturali scelti a caso*, Rend. di Matematica, v.3, serie VII, (Roma), pp. 367-379.

[5] Cicchitelli G., (1984). *Probabilità e Statistica*, Maggioli, Perugia

[6] Corsini P., (1993). *Prolegomena of hypergroup theory,* Aviani Ed. Udine.

[7] Dall'Aglio G., (1987). *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, Bologna

[8] Eugeni F., Mascella R., (2001). *La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine*, Periodico di Matematiche, 3, 45-56.

[9] Eugeni F., Mascella R., (2002). *Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano*, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, pp. 37-62.

[10] Eugeni F., Mascella R., (2002). *Su alcuni modelli geometrici non archimedei*, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, 63-90.

[11] Kosko B., (1995). *Il Fuzzy Pensiero. Teoria e Applicazioni della Logica Fuzzy*, Baldini e Castaldi, Milano

[12] Pelusi D. (2002). *Un modo di ragionare fuzzy a livello elementare*, Periodico di Matematiche, Serie VIII, Vol. 2, Nr. 4, pp. 23-30.

[13] Pelusi D. (2003). *Application of fuzzy logic to integrated circuits,* Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography, Volume 6, Nr. 1, pp. 109-120.

[14] Pelusi D. (2004). *A fuzzy controller for digital signals processing, Fuzzy systems and A. I.*, EA, Volume 10, Nr. 3, pp. 131-138.

[15] Pelusi D., Tivegna M., Ippoliti P. (2013). *Improving the profitability of Technical Analysis through intelligent algorithms*, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol. 16(2-3), pp. 203-215.

[16] Mascella R. (2006). *La geometria non-archimedea. Dalle premesse agli infiniti modelli Attuali*, Ratio Mathematica, n. 17.

[17] Maturo, A., (2009). *Coherent conditional previsions and geometric hypergroupoids, Fuzzy sets, rough sets and multivalued operations and applications*, 1, N.1, 51–62.

[18] Maturo A., Squillante M., Ventre A.G.S., (2010). *Decision making, fuzzy measures an hyperstructures, Advances and Applications in Statistical Sciences*, Vol 2, Issue 2, 233-253

[19] Pesarin F., (1989). *Introduzione al calcolo delle probabilità*, La Nuova Italia Scientifica, Roma

[20] Prenowitz W., Jantosciak J., (1979). *Join Geometries,* Springer-Verlag UTM, New York.

[21] Vougiouklis T., (1994). *Hyperstructures and their representations*, Hadronic Press, U.S.A.

Approvato su parere favorevole di Raffaele Mascella
ed Alberto Trotta

==

Ellisse e numero d'oro

Sia data l'ellisse di semiassi a, b con a >b, riferita ai propri assi e quindi di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Posto $a = xb$, calcoliamo:

- L'area A dell'ellisse pari a : $A = \pi ab = \pi x b^2$.
- 'area B della corona circolare definita dai due cerchi aventi centro nell'origine e raggi rispettivi a, b pari a:

$$B = \pi(a^2 - b^2) = \pi b^2(x^2-1).$$

L'eguaglianza $A = B$ implica : $\pi b^2(x^2-1) = \pi x b^2$. , da cui

$$x^2 = x + 1$$

la cui soluzione positiva è il numero d'oro. Segue:

Se in una ellisse il rapporto tra asse maggiore e minore è aureo (è cioè il numero d'oro) allora l'area dell'ellisse eguaglia l'area della corona circolare definita dai cerchi concentrici, aventi come raggi i due semiassi dell'ellisse stessa.[1]

==

[1] La proprietà ci è stata gentilmente richiamata dal prof. Gianni Vincenzi dell'Università di Salerno che ringraziamo vivamente (F. Eugeni).