Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019 pp. 197-204

Una rappresentazione grafica di carattere locale per integrali non calcolabili elementarmente

Ferdinando Casolaro*

*Dipartimento di Architettura - Università di Napoli Federico II
Via Toledo 402, Napoli, Italy; ferdinando.casolaro@unina.it

Sunto. *In questo lavoro si presenta un esempio di carattere didattico di tipo grafico per individuare l'andamento locale di una funzione espressa mediante integrali non calcolabili per via elementare.*

Parole chiave: Integrali, equazioni differenziali, curve algebriche, funzioni, cubiche, esercizi per la scuola secondaria.

1 - Introduzione

L'idea di presentare un esempio di funzione continua nel suo insieme di definizione, quindi integrabile secondo Riemann ma non esprimibile mediante funzioni elementari, è nata da un quesito assegnato dal MIUR nella simulazione per la prova scritta di matematica in vista degli esami di Stato 2019:

Si consideri la funzione f : (0, +∞) →**R**, così definita:

$$f(x)=\int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t}\,dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

Ovviamente, il quesito è semplice e si risolve immediatamente tenendo conto del teorema fondamentale del calcolo integrale (F. Casolaro 2002).

Non tutti i docenti, però, hanno interpretato correttamente la questione e si sono impegnati nella ricerca della primitiva che non è calcolabile elementarmente.

Poiché in passato ho trattato alcune questioni relative a classi di funzioni non esprimibili per via elementare (F. Casolaro 1991, F. Casolaro 1992) tra le quali la non integrabilità di

$$f(x)=\int \frac{sen\,x}{x}\,dx\,,$$

sono stato contattato per un contributo all'analisi del quesito.

Questo tipo di problema si presenta spesso nell'analisi di fenomeni risolvibili con equazioni differenziali (argomento inserito oggi nelle Indicazioni nazionali del MIUR) le cui curve integrali che ne rappresentano le soluzioni non sono esprimibili mediante funzioni analitiche elementari.

Nel paragrafo che segue, attraverso un esempio relativo al problema di Cauchy, si espone un metodo elementare per la visualizzazione locale del grafico - intorno al punto iniziale - che debba soddisfare le condizioni richieste.

2 - Un esempio di carattere didattico

Si consideri, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

Con semplici calcoli si determina l'integrale generale dell'equazione che è espresso da:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \right) \qquad (1.2)$$

in cui la funzione integranda non è calcolabile per via elementare.

Dal punto di vista pratico si opera con i noti teoremi di integrazione per serie dopo aver sviluppato in serie di potenze la funzione $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Casolaro, 1997).

Dal punto di vista operativo è sicuramente questa la scelta migliore per analizzare l'andamento locale della primitiva**.**

Dal punto di vista didattico, riteniamo invece che - sempre nell'ottica di fornire una cultura matematica che non sia estranea alla capacità di visualizzare geometricamente le questioni analitiche - sia interessante proporre alcune osservazioni che legano le derivate del primo e del secondo ordine della funzione da determinare alla funzione integranda, per analizzare localmente i risultati graficamente.

Ciò permette - tenendo conto delle condizioni iniziali di Cauchy - di avere un andamento approssimato della curva integrale richiesta dal problema localmente intorno alpunto iniziale. (Casolaro, Prosperi, 2011).

Sia

$$y' = f(x, y)$$

un'equazione differenziale del primo ordine, con $f(x, y)$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

L'ipotesi che y' sia di classe C^1 ci garantisce l'esistenza e la continuità rispetto a x e ad y delle derivate parziali di $f(x, y)$ e quindi l'esistenza di $\frac{d^2y}{dx^2}$.

L'equazione :

$$f(x, y) = 0 \qquad [y' = 0] \qquad (2.1)$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, cioè eventuali punti estremanti o punti di flesso orizzontale, delle curve integrali.

L'equazione:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad \left[f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y' \right] = 0 \qquad (2.2)$$

con y' ≠ 0, rappresenta l'insieme dei punti a tangente non verticale, cioè dei punti di flesso obliqui con alcune eccezioni di punti estremali (F. Casolaro, 2014).

Per comprendere la questione nella sua generalizzazione, è opportuno riprendere come esempio la (1.1)

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

con y′ = f (x, y) = 1 + x ydi classe C1in un opportuno aperto del piano.

L'equazione:

$$f(x, y) = 1 + x\,y = 0 \qquad [y' = 0]$$

cioè : $y = -\dfrac{1}{x}$ (figura 1)
rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, cioè eventuali punti estremali o punti di flesso orizzontale delle curve integrali.

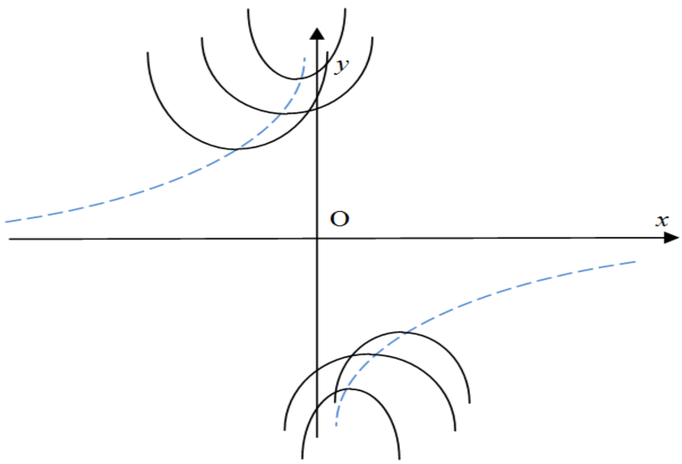

Fig. 1

La $y = -\dfrac{1}{x}$ è rappresentata dall'iperbole equilatera tratteggiata in fig. 2.1, su cui le varie curve integrali presentano massimi o minimi relativi (al più flessi orizzontali).

L'equazione:

$$y'' = 0 \quad \left[\frac{d^2y}{dx^2} = 0\right] \quad \Rightarrow \quad y + x + x^2 y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{x}{1+x^2}$$

con y' ≠ 0, rappresenta il luogo dei punti a tangente non verticale, in generale punti di flesso obliquo con alcune eccezioni di punti di massimo o minimo relativi (figura 2).

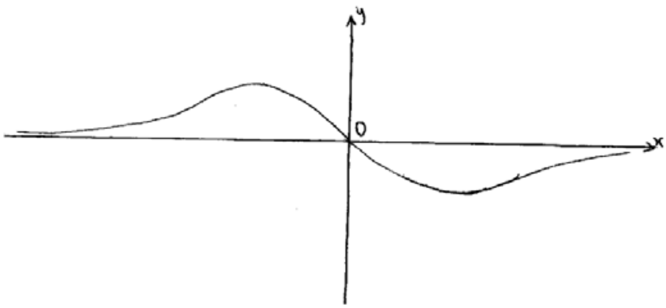

Fig. 2

$$y = -\frac{x}{1+x^2}$$

Se sono verificate opportune condizioni,in particolare se nel punto iniziale indicato dal problema, tra le derivate di ordine successive, la prima derivata diversa da zero è di ordine dispari, si osserva che:

- il grafico di figura 1 divide il piano in due regioni in cui sono situate, rispettivamente, i rami delle curve integrali crescenti ed i rami delle curve integrali decrescenti;

- il grafico di figura 2 spezza il piano in due regioni tali che in una delle quali le curve integrali volgono la concavità verso l'alto, nell'altra verso il basso.

È evidente, allora, che la curva integrale che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (1.1), la cui espressione analitica è la (1.2) conc = u (0) = 1, è localmente individuata, intorno al punto di ascissa 0, dall'analisi dei dati determinati in un opportuno intorno di tale punto (figura 3).

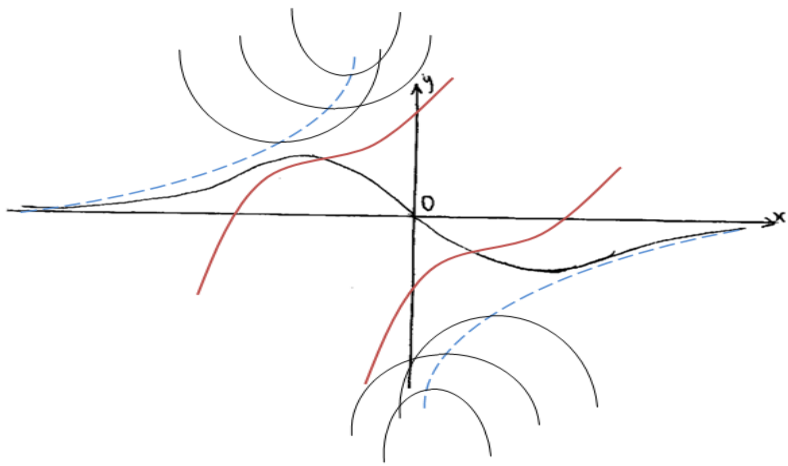

Fig. 3

Bibliografia

Casolaro F. (1991). Decisione per integrali indefiniti; funzioni non integrabili. *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Matematica moderna ed insegnamento"* - Cattolica 22-26 aprile 1991 – pag. 68-86.

Casolaro F. (1992). Il problema dell'integrazione indefinita. *Atti del Convegno "LaMatematica applicata all'Economia ed all'Ingegneria"* - Ovindoli, 5-8 giugno 1991 - Ratio Mathematica n. 4, 1992 – pag. 29-38.

Casolaro F. (1997). *Integrali - 300 esercizi svolti sull'integrazione indefinita e integrali definiti* - Edizione Zanichelli, 1997.

Casolaro F. (2002). Dispense del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica tenuto al Dipartimento di Matematica dell'Università Federico II di Napoli

Casolaro F., Prosperi R.(2011). La Matematica per la Scuola di 2° secondo grado: un contributo per il docente di Matematica. *Atti della Scuola Estiva tenutasi a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011* - Ed. 2C Contact.

Casolaro F., (2014). Equazioni algebriche ed equazioni differenziali: Analogie e questioni didattiche - *Mathesisnazionale.it: Scuola Estiva di Matematica per i Docenti delle Scuole Secondarie di 2°Grado* - Montegrotto Terme, 22-25 luglio2014.

Di Marcello V., Eugeni F., Tonsini D. (1998). *Matematica: un approccio (corso di matematica per Agraria),* Edigrafital, Teramo.

Eugeni F. (2018). Luoghi geometrici e curve algebriche, atti del Convegno Nazionale dell'APAV, *Nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della didattica e nei fondamenti della matematica*, pp. 8-15.

Approvato su parere favorevole di Renata Santarossa e Giuseppe Manuppella