Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019 pp.205-226

Insiemi completi del terzo ordine

Franco Francia*

*franco.francia40@virgilio.it

Sunto. *Il presente studio è indirizzato agli insegnanti di matematica della scuola media superiore e contiene molti problemi di geometria risolti con la teoria dei punti materiali descritta nell'articolo ''Insiemi di punti materiali'' di Franco Francia, pubblicato nel 1985 sul numero 1 della rivista Archimede (gennaio – marzo), Le Monnier. I problemi studiati sono quelli tipici contenuti nei testi scolastici; vengono risolti mediante insiemi completi del terzo ordine. Le nozioni introduttive sono sufficienti per comprendere le applicazioni. Questo tipo di geometria può essere inserito agevolmente nei programmi scolastici.*

Parole chiave: *punto materiale; insieme di punti materiali; prodotto di un punto materiale per un insieme di punti materiali; insiemi completi; insieme ridotto.*

1- Insiemi completi del III ordine

Nelle prime tre pagine si accenna ad alcune proprietà elementari dei punti materiali che permettono di comprendere i procedimenti di risoluzione delle applicazioni che seguono.

Def.1 Sia R □S il prodotto cartesiano di R, insieme dei reali e S, insieme dei punti dello spazio. Un sottoinsieme finito di R □S: I = (m1 P1, m2 P2 , · · · , mn Pn), è detto insieme di punti materiali di ordine n. In ogni elemento di I: mi Pi, detto punto materiale, si distingue, oltre al punto $Pi \in S$, l'elemento $mi \in R$, detto massa associata a P_i. Diremo che $J= (P_1, P_2, \cdot \cdot \cdot, P_n)$ è l'insieme di sostegno di I.

Def.2 Prodotto di due punti materiali (mi Pi) e (mj Pj) è il numero reale ottenuto moltiplicando il prodotto delle masse dei due punti materiali per il quadrato della distanza dei relativi punti
$(mi\ Pi) \cdot (mj\ Pj) = (mi \cdot mj) \cdot [d(Pi\ Pj)]^2$

Def.3 Il prodotto di un punto materiale (n P) per un insieme di punti materiali $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \cdot \cdot \cdot, m_n P_n)$ è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando (m P) per ciascun elemento di I
$(n\ P) \cdot I = \{n \cdot m_1 [d(PP_1)]^2 + n \cdot m_2 [d(PP_2)]^2 + \cdot \cdot \cdot + n \cdot m_n [d(PP_n)]^2\}$
Se la massa del punto P è unitaria $1 \cdot P$, conveniamo di indicare il prodotto così: $P \cdot I$.

Def.4 Se il prodotto di un qualsiasi punto P per I, con $P \in S$ e $I \in R \times S$, è costante: P I = cost., allora I è detto insieme completo. Se le masse di tutti gli elementi di I sono nulle:
$(0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + \cdot \cdot \cdot + 0 \cdot P_n)$, I è detto insieme completo improprio.

Def.5 Il prodotto di un numero reale r per $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \cdot \cdot \cdot, m_n P_n)$ è così definito: $r\ I = [(r\ m_1)P_1, (r\ m_2)P_2, \cdot \cdot \cdot, (r\ m_n)P_n)$.

Nota E' facile dimostrare che, se I è completo, anche I' = r I è completo. Gli insiemi completi I e I' sono detti equivalenti.

Def.6 Diciamo ridotto di un insieme di I, e scriviamo rid.(I), l'insieme di punti materiali ottenuti sostituendo gli elementi di I aventi stessa posizione con un unico punto materiale avente stessa

posizione e massa eguale alla somma delle masse. Nel ridotto di I sono omessi gli elementi con massa nulla.
Nota E' facile provare che se I è completo anche rid.(I) è completo.

TH.1 Sia I = (m A) l'insieme contenente un solo punto materiale: il punto A di massa m. Se I è completo, allora I è improprio.

Se I è completo, allora, qualunque sia $P \in S$, si ha:
$P\ I = m\ [d(P,A)]^2 = c$, essendo c una costante, con $c \in R$. Poiché $[d(P,A)]^2$ varia in funzione del punto P il prodotto $m\ [d(P,A)]^2$ non può essere costante per qualsiasi P a meno che risulti m = 0. In tal caso si ha: $0\ [d(P,A)]^2 = 0$. L'insieme completo I è improprio:

$$I = (0\ A).$$

TH.2 Sia I = (m A, n B) (1) un insieme contenente due punti materiali: il punto A di massa m e il punto B di massa n , con A e B non coincidenti, appartenenti alla retta r. Se I è completo, allora I è improprio.

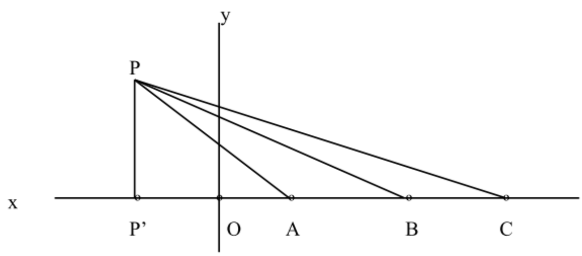
Sia O l'origine di un sistema di coordinate ascisse sulla retta passante per A e B. Siano a e b le coordinate di A e B. Sia h l'ascissa di un qualsiasi punto H su r. Se I è completo si ha:
O I = H I.
Sviluppando, si ha:
$m\ [d(O,A]^2 + n\ [d(O,B]^2 = m\ [d(H,A]^2 + n\ [d(H,B]^2$ da cui
$m\ a^2 + n\ b^2 = m\ (a+h)^2 + n\ (b+h)^2$. Sviluppando si ha
$2h\ (m \cdot a + n \cdot b) + h^2(m + n) = 0$.
Affinché la precedente equazione sia eguale a zero al variare di h, deve risultare:

$\begin{cases} m + n = 0 \\ m \cdot a + n \cdot b = 0 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} m = -n \\ -n \cdot a + n \cdot b = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} m = -n \\ n(-a + b) = 0 \end{cases}$

Poiché – a + b ≠ 0, deve risultare n = 0 e quindi m = – n = 0 da cui:
I = (0 A , 0 B)
Anche in questo caso l'insieme I è completo e improprio.
TH.3 Sia (O,x,y) un qualsiasi sistema di riferimento ortonormale con l'asse x contenente una terna di punti le cui coordinate risultino:
A = (a,0), B= (b,0),C = (c,0). Siano m, s, n le masse non nulle associate ad A, B, C. Se I = (m A, s B, n C) è un insieme completo, allora sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ ma + s\,b + n\,c = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

e viceversa.



Se I è completo deve risultare: O I = P I (2) essendo P = (d, h) un qualsiasi punto del piano. Sviluppando la (2) si ha:
$m[d(O,A)]^2 + s[d(O,B)]^2 + n[d(O,C)]^2 =$
$= m[d(P,A)]^2 + s[d(P,B)]^2 + n[d(P,C)]^2$ da cui
$ma^2 + sb^2 + nc^2 = m[(a – d)^2 + h^2] + s[(b – d)^2 + h^2] + n[(c – d)^2 + h^2]$
$ma^2 + sb^2 + nc^2 = ma^2 + sb^2 + nc^2 – 2\,d(ma + sb + nc) + + (d^2 + h^2)(m + s + n)$ e quindi si ha
$- 2\,d(ma + sb + nc) + (d^2 + h^2)(m + s + n) = 0$ (3)

Affinché la (3) sia eguale a zero, essendo d e h variabili, deve risultare: (ma + sb + nc) = 0 e (m + s + n) = 0 (4) conformemente alla tesi.

Procedendo a ritroso dalla (4) si ottiene nuovamente la (3) e quindi la (2).

OSSERVAZIONE I

1) Le masse m, s, n, da associare a ciascuno dei punti allineati A, B, C affinché l'insieme ternario (m A, s B, n C) risulti completo, si possono facilmente ricavare risolvendo il sistema (1) del precedente teorema:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ m\,a + s\,b + n\,c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} s = -\,(m + n) \\ m\,a - (m + n)\,b + n\,c = 0 \end{cases} \quad \textit{da cui}$$

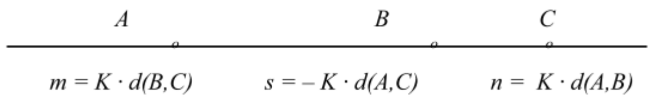
$$\begin{cases} s = -\,(m + n) \\ \dfrac{m}{n} = \dfrac{c-b}{b-a} \end{cases}$$

Attribuendo K (b – a) alla massa n , essendo K □R arbitrario, si ha: $\frac{m}{K\cdot(b-a)} = \frac{c-b}{b-a}$ da cui

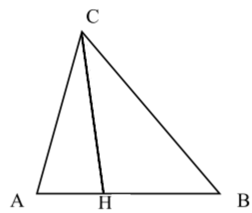
m = K (c – b), s = – K (c – a), n = K (b – a). (1)

Se supponiamo c > b e b > a, B risulta appartenente al segmento [A C]; pertanto possiamo ricavare la regola: la massa s di B, punto interno a (A,C), ha segno discorde rispetto alle masse di A e C. Inoltre, il modulo di ciascuna massa associata a un punto dell'insieme di sostegno J è proporzionale alla distanza dei rimanenti punti:

m = K · d(B,C), s = – K · d(A,C), n = K · d(A,B) (1)



Applicazione 1. Sia H un punto della base [A, B] del triangolo P(J), essendo J = (A, B, C) l'insieme dei vertici, e risulti: d(A, H) = 10, d(H, B) = 6. Sapendo che $d(A, C) = 4\sqrt{5}$, $d(B, C) = 4\sqrt{13}$, calcolare d(C,H) .



Calcoliamo le masse m, s, n affinché l'insieme (m A, s H, n B) sia completo. Utilizzando le (1) dell'osservazione I, posto K = 1, si ha: m = d(H, B) = 6, n =d(A, H) = 10, s = – d(A,B) = – 16.
L'insieme (6 A , –16 H , 10 B) è completo; per la def.5 è equivalente a I =(3 A, – 8 H, 5 B). Essendo I completo si ha: C I = H I. (E' stato scelto il punto H in quanto H I è determinato così come risultano determinati i prodotti A I e B I) . Sviluppando, si ha:

$$H\,I = 3\,[d(H,A)]^2 - 8\,[d(H,H)]^2 + 5[d(H,B)]^2 =$$
$$= 3\;10^2 - 8\;0^2 + 5\;6^2 = 480.$$

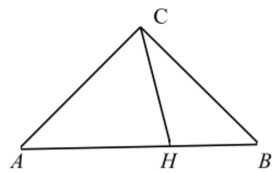
Eguagliando il prodotto C I, contenente la distanza incognita

d(C,H) = x, a H I si ha: C I = 480.

Sviluppando si ottiene:

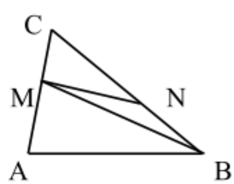
$3\,[d(C,A)]^2 - 8\,[d(C,H)]^2 + 5[d(C,B)]^2 = 480$
$3(4\sqrt{5})^2 - 8\,x^2 + 5(4\sqrt{13})^2 = 480$ da cui x = 10 e quindi:
d(C,H) = 10.

Applicazione 2. Siano A,B,C i vertici di un triangolo; H sia un punto interno ad (A,B) e risulti: d(A,H) = 5.
Sapendo che $d(A,C) = 3 \cdot \sqrt{5}$, $d(C,H) = 2 \cdot \sqrt{10}$, $d(C,B) = 3 \cdot \sqrt{13}$, trovare d(H,B).
Ponendo d(H,B) = x, l'insieme completo, avente sostegno (A,H,B), è: I = [x A,– (x + 5) H,5 B]. Poiché C I = H I, sviluppando si ha:



$x\,[d(C,A)]^2 - (x + 5)\,[d(C,H)]^2 + 5\,[d(C,B)]^2 = x\,[d(A,H)]^2 + 5\,[d(B,H)]^2$
da cui
$x\,(3 \cdot \sqrt{5})^2 - (x + 5)\,(2 \cdot \sqrt{10})^2 + 5\,(3 \cdot \sqrt{13})^2 = x\,5^2 + 5\;x^2$
$x^2 + 4\,x - 77 = 0$. Infine si ha: d(H,B) = 7.

Applicazione 3. Siano A, B, C i vertici di un triangolo. Sia M un punto sul lato (A,C) tale che $d(A,M) = 3 \cdot \sqrt{2}$, $d(M,C) = 4 \cdot \sqrt{2}$. Sia N un punto sul lato (C,B) tale che $d(B,N) = 3 \cdot \sqrt{5} d(C,N) = 2 \cdot \sqrt{5}$.
Sapendo che $d(A,B) = 3 \cdot \sqrt{12}$, calcolare d(M,N).



Ricaviamo m, s, n affinché (m A, s M, n C) sia completo. Si ha: ($4\sqrt{2}$A , – $7\sqrt{2}$M , $3\sqrt{2}$C) da cui I = (4A , – 7M , 3C). Dall'equazione B·I = M·I, si ottiene:

$4[d(B,A)]^2 - 7[d(B,M)]^2 + 3[d(B,C)]^2 = \; = 4[d(M,A)]^2 \; + 3[d(M,C)]^2$

Ponendo d(B,M) = x , si ha:

$4 \cdot (3 \cdot \sqrt{17})^2 - 7 \cdot x^2 + 3 \cdot (5 \cdot \sqrt{5})^2 = 4 \cdot (3 \cdot \sqrt{2})^2 + 3 \cdot (4 \cdot \sqrt{2})^2$ da cui

$x^2 = 117$ e $d(B,M) = 3 \cdot \sqrt{13}$.

Analogamente, ricaviamo m', s', n' affinché (m' B, s' N, n' C) sia completo. Si ha: I' = (2 B, – 5 N, 3C). Dall'equazione M·I' = N·I', si ottiene:

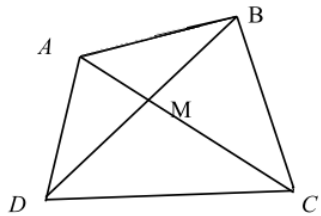
$2[d(B,M)]^2 - 5[d(N,M)]^2 + 3[d(C,M)]^2 = 2[d(N,B)]^2 + 3[d(N,C)]^2$

Ponendo d(N,M) = y, si ha:

$2\,(3 \cdot \sqrt{13})^2 - 5\,y^2 + 3\,(4 \cdot \sqrt{2})^2 = 2\,(3 \cdot \sqrt{5})^2 + 3\,(2 \cdot \sqrt{5})^2$ da cui

$5\,y^2 = 180$ e d(M,N) = 6.

<u>Applicazione 4.</u> Sia M il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero P(J), con J=(A,B,C,D) e risulti: $d(A,M) = 3\sqrt{2}$, $d(C,M) = 6\sqrt{2}$, $d(B,M) = 2\sqrt{5}$, $d(D,M) = 3\sqrt{5}$. Sapendo che il modulo del lato [A,B] è: $d(A,B) = \sqrt{26}$, calcolare d(A,D), d(D,C), d(C,B).



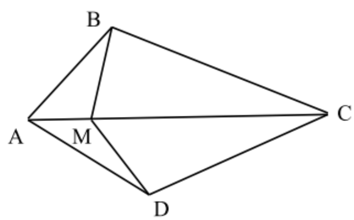
Risultano completi gli insiemi:

I' = (2 A, – 3 M, 1 C) e I'' = (3 B , – 5 M , 2 D).

Essendo A I'' = M I'', si ha:

$3\ [d(A,B)]^2 - 5\ [d(A,M)]^2 + 2\ [d(A,D)]^2 = 3\ [d(M,B)]^2 + 2\ [d(M,D)]^2$.
Posto d(A,D) = x, si ha:
$3\ 26 - 5\ 18 + 2\ x^2 = 3\ 20 + 2\ 45$ da cui d(A,D) = 9 .
Essendo D I' = M I', si ha:
$2\ [d(A,D)]^2 - 3\ [d(D,M)]^2 + [d(C,D)]^2 = 2\ [d(M,A)]^2 + [d(M,C)]^2$.
Posto d(D,C) = y, si ha: $2\ 81 - 3\ 45 + y^2 = 2\ 18 + 72$ da cui d(D,C) = 9.
In modo analogo si ricava d(B,C).

<u>Applicazione 5.</u> Il punto M appartenga al segmento [A,C]. Sono note le distanze del punto B dagli elementi di J = (A,M,C):
$d(A,B) = 8\sqrt{2}$, $d(B,M) = 2\sqrt{17}$, $d(C,B) = 4\sqrt{13}$; sono note le distanze del punto D dai punti di J = (A,M,C): $d(A,D) = 6\sqrt{5}$, $d(D,M) = 6\sqrt{2}$, d(C,D) = 10.
Calcolare le distanze d(A,M) e d(M,C).

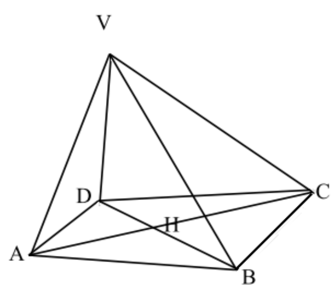


Posto d(A,M) = x, d(M,C) = y, l'insieme completo avente sostegno J è:
$I = [m\,A, -(m + n)\,M, n\,C]$ (1)
essendo $m = K\ d(C,M) = K \cdot y$, $n = K\,d(A,M) = K\,x$ (2)
Essendo B I = D I, sviluppando si ha:

$m\ [d(A,B)]^2 - (m + n)\ [d(B,M)]^2 + n\ [d(C,B)]^2 =$
$= m\ [d(D,A)]^2 - (m + n)[d(M,D)]^2 + n\ [d(D,C)]^2$,
da cui $52\,m - 4\,(m + n) - 108\,n = 0$ da cui $12\,m - 28\,n = 0$.

Posto n = 3, si ha: m = 7 e le (2) diventano:
K d(C,M) = 7 e K d(A,M) = 3.
Posto $K = \frac{1}{u}$, con u ∈ R, si ha: d(M,C) = 7 u , d(M,A) = 3 u (3).
L'insieme (1) diviene:
I = (7 A, – 10 M, 3 C). Risolvendo l'equazione B I = M I, si ottiene:
7 $[d(A,B)]^2$ – 10 $[d(M,B)]^2$ + 3 $[d(C,B)]^2$ =
= 7 $[d(M,A)]^2$ + 3 $[d(M,C)]^2$ da cui u = 2.
Sostituendo u = 2 nelle (3), si ha: d(A,M) = 6, d(M,C) = 14.

Applicazione 6. Sia V il vertice di una piramide avente per base un quadrilatero le cui diagonali (A,C) e (D,B) si intersechino in H e risulti $d(A,H) = \sqrt{5}, d(H,C) = 2 \cdot \sqrt{5}, d(D,H) = \sqrt{18}, d(H,B) = \sqrt{8}$
Siano noti i moduli dei seguenti spigoli:
d(D,V)= radice quadrata di 24, d(V,C)= radice quadrata di 34,
d(V,B)= radice quadrata di 34. Trovare d(V,A)



Calcoliamo le masse m, s, n affinché l'insieme (m A, s H, n C) sia completo. Si ha:
I' = (2 A, – 3 H, C). Analogamente, calcoliamo le masse m', s', n' affinché l'insieme (m' D, s' H, n' B) sia completo. Si ha:
I'' = (2 D, – 5 H, 3 B). Calcoliamo d(V,H) mediante l'equazione:
V I'' = H I''. Sviluppando si ha:
2$[d(D,V)]^2$ – 5 $[d(V,H)]^2$ + 3$[d(V,B)]^2$ =

$= 2\,[d(D,H)]^2 - 5[d(H,H)]^2 + 3[d(B,H)]^2$

Posto d(V,H) = x, si ha $2\ 24 - 5\ x^2 + 3\ 34 = 2\ 18 - 5\ 0 + 3\ 8$ da cui d(V,H) = $2 \cdot \sqrt{29}$. Calcoliamo d(V,A) mediante l'equazione V I' = H I'. Sviluppando:

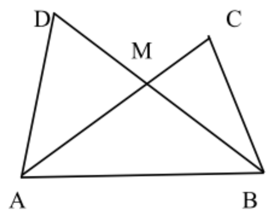
$2[d(V,A)]^2 - 3\,[d(V,H)]^2 + [d(V,C)]^2 =$

$= 2\,[d(H,A)]^2 - 3[d(H,H)]^2 + [d(H,C)]^2$

Posto d(V,A) = y, si ha:

$2\ y^2 - 3\ 18 + 34 = 2\ 5 - 3\ 0 + 20$ da cui d(V,A) = 5.

<u>Applicazione 7.</u> Siano J' = (A,B,C) e J'' = (A,B,D) i vertici di due triangoli aventi in comune il lato [A,B] e M, punto di intersezione di [A,C] e [B,D].



Sapendo che d(A,B) = 15, d(A,D) = $5\sqrt{2}$, d(B,C) = 5 e

$\frac{d(B,M)}{d(M,D)} = \frac{3}{4}, \ \frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 3,$

trovare d(A,M) e d(M,C), d(D,M), d(M,B).

Posto d(M,C) = u e d(M,D)= 4 v, con $u,v \in R$, si ha d(A,M) = 3u e d(B,M) = 3v. Risultano completi gli insiemi: [u · A,– 4u · M , 3u · C] e [4v · B, –7v · M ,3v · D].

Moltiplicando i precedenti insiemi, rispettivamente, per $\frac{1}{u}$ e per $\frac{1}{v}$, si ottengono gli equivalenti: I' = [A, – 4 M, 3 C] , I'' = [4 B, –7 M ,3 D] . Mettendo a sistema le due equazioni: A · I'' = M · I'' e B · I' = M · I' si ha:

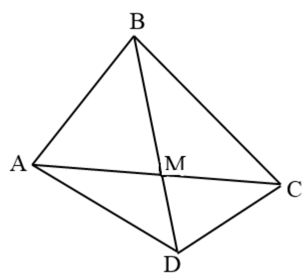
$$4\,[d(A,B)]^2 - 7\,[d(A,M)]^2 + 3\,[d(A,D)]^2 = 4\,[d(M,B)]^2 + 3\,[d(D,M)]^2$$
$$[d(A,B)]^2 - 4\,[d(B,M)]^2 + 3\,[d(B,C)]^2 = [d(M,A)]^2 + 3\,[d(M,C)]^2$$

Sostituendo e svolgendo si ha:

$$\begin{cases} 21\,v^2 + 28\,u^2 = 350 \\ v^2 + 3\,u^2 = 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} u = \pm\sqrt{5} \\ v = \pm\sqrt{10} \end{cases}$$

e quindi: $d(M,C) = \sqrt{10}$,$d(A,M) = 3\sqrt{10}$,$d(D,M) = 4\sqrt{5}$, $d(B,M) = 3\sqrt{5}$

<u>Applicazione 8.</u> I moduli dei lati di un quadrilatero sono: $d(A,B) = 2\sqrt{10}$, $d(A,D) = \sqrt{10}$, $d(B,C) = 4$, $d(D,C) = \sqrt{26}$. La diagonale [B,D] interseca [A,C] nel punto medio M. Calcolare d(B,M), d(M,D).



Posto d(B,M) = x, d(M,D) = y, l'insieme completo avente sostegno (B,M,D) diviene

$I' = [y \cdot B, -(x + y) \cdot M\,,\, x \cdot D]$ e si ha: $A \cdot I' = C \cdot I'$ da cui

$y\,[d(A,B)]^2 - (x + y)[d(A,M)]^2 + x[d(A,D)]^2 =$
$= y\,[d(C,B)]^2 - (x + y)[d(C,M)]^2 + x[d(C,D)]^2$

Essendo $-(x + y)[d(A,M)]^2 = -(x + y)[d(C,M)]^2$, si ha:

$y\cdot 40 + x\cdot 10 = y\cdot 16 + x\cdot 26$ da cui $y = \frac{2}{3}x$ pertanto, posto $x = 3 \cdot u$ si ha: $d(M,D) = 2 \cdot u$ e $d(B,M) = 3 \cdot u$.

Essendo M punto medio di [A,C], anche l'insieme I'' = (A ,–2M, C) è completo e si ha :
B · I'' = D · I''. Sviluppando:

$$[d(B,A)]^2 - 2 \cdot [d(B,M)]^2 + [d(B,C)]^2 =$$
$$= [d(D,A)]^2 - 2 \cdot [d(D,M)]^2 + [d(D,C)]^2$$

Sostituendo si ha: $40 - 2 \cdot (3 \cdot u)^2 + 16 = 10 - 2 \cdot (2 \cdot u)^2 + 26$ da cui
$56 - 18 \cdot u^2 = 36 - 8 \cdot u^2$ $\quad 10 u^2 = 20$.
Essendo $u = \sqrt{2}$ si ha: d(M,D) = $2 \cdot \sqrt{2}$ e d(B,M) = $3 \cdot \sqrt{2}$

L'unione di due insiemi completi di qualsiasi ordine è un insieme completo come risulta dalla seguente dimostrazione.

<u>TH.4</u> Siano I' = $(m_1 P_1, m_2 P_2, \cdots , m_h P_h)$ e
I'' = $(n_1 Q_1, n_2 Q_2, \cdots , n_s Q_s)$ due insiemi completi con m_i , $n_j \in R$ e P_i , $Q_j \in S$. Sia H un qualsiasi punto materiale di massa unitaria;
se H · I' = C_1 , H · I'' = C_2 , si ha: H · (I' ∪ I'') = C essendo
$C = C_1 + C_2$.

Sviluppando H · I' si ottiene:
$H \cdot I' = m_1 [d(H,P_1)]^2 + m_2 [d(H,P_2)]^2 + \cdots + m_h [d(H,P_h)]^2 = C_1$
Analogamente si ottiene:
$H \cdot I'' = n_1 [d(H,Q_1)]^2 + n_2 [d(H,Q_2)]^2 + \cdots + n_s [d(H,Q_s)]^2 = C_2$
Essendo (I' ∪ I'') = $(m_1 P_1, m_2 P_2, \cdots , m_h P_h, n_1 Q_1, n_2 Q_2, \cdots , n_s Q_s)$ si ha :
$H \cdot (I' \cup I'') = m_1 [d(H,P_1)]^2 + m_2 [d(H,P_2)]^2 + \cdots + m_h [d(H,P_h)]^2 +$
$+ n_1 [d(H,Q_1)]^2 + n_2 [d(H,Q_2)]^2 + \cdots + n_s [d(H,Q_s)]^2 = H \cdot I' + H \cdot I'' =$
$= C_1 + C_2 = C$.

<u>Def.7</u> Sia ($m \cdot A$, $s \cdot B$) l' insieme contenente due punti materiali e r sia la retta contenete i punti A e B . Le masse associate ad A e B soddisfino le seguenti relazioni: $m \neq 0$, $s \neq 0$, $m + s \neq 0$. (1)
Fissato un sistema di riferimento su r siano α e β le ascisse di A e B. Il punto materiale [– (m +s)P], con P individuato su r dall'ascissa $\gamma = \frac{m\alpha+s\beta}{m+s}$, è detto complementare di ($m\cdot A$, $s\cdot B$)

<u>TH.5</u> Se X = [– (m +s)P] è il complementare dei punti materiali: Y = ($m\cdot A$, $s\cdot B$), allora, I = [m A , – (m + s) P, s B] è un insieme completo.

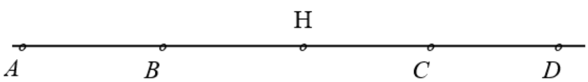
Sia r la retta contenente i punti A, B, P. Fissato un riferimento di coordinate ascisse su r, i punti A , B , risultino individuati dalle rispettive ascisse: α , β; conseguentemente l'ascissa di P è $\gamma = \frac{m\alpha+s\beta}{m+s}$. Essendo la somma delle masse di I eguale a zero, essendo $[m\,\alpha - (m + s)\,\gamma + s\,\beta] = m\,\alpha - (m + s)\frac{m\alpha+s\beta}{m+s} + s\,\beta = 0$, risultano soddisfatte le condizioni (1) del TH.3 pertanto I è completo.

<u>TH.6</u> Se i punti dell'insieme J = (A,B,C), di sostegno all'insieme completo del terzo ordine I = (m A , s B, n C), non sono allineati, allora, I è un insieme completo improprio.

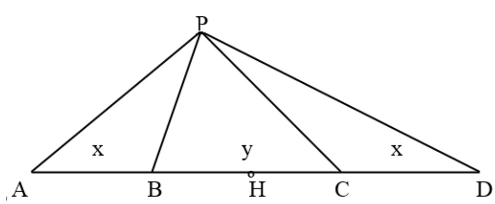
Se A,B,C non sono allineati la retta r contenente A e B non contiene C. Supponiamo per assurdo che sia $m \neq 0$, $s \neq 0$, $n = -(m + s) \neq 0$. Il complementare di (m A, s B) è $-(m + s)\cdot X$ con $X \in r$. L'insieme
I' = [m A , s B,– (m + s)X] è completo e così anche $I \cup [(-1)\ I']$. Sviluppando si ha:
$I'' = I \cup [(-1)\ I'] = [(m\,A , s\,B, n\,C , -m\,A , -s\,B, (m + s)X] =$

= [n C , (m + s)X] . Per il TH.2, l'insieme I'', essendo del secondo ordine e completo, è improprio e quindi deve risultare:
n = 0 e m + s = 0 in antitesi con le ipotesi.

<u>TH.7</u> Una quaterna di punti, A,B,C,D, appartenenti a una retta r, risultino simmetrici rispetto a un punto H. In particolare risulti:
d(A,H) = d(H,D) = x e d(B,H) = d(H,C) = y.
Sia I un insieme completo avente sostegno (A,B,C,D) . Se le masse degli elementi di I, contenenti punti simmetrici, sono opposte, allora, qualunque sia P, si ha: P · I = 0.



Se I è completo e le masse degli elementi contenenti punti simmetrici rispetto a H sono opposte, si ha:
I = (m · A , n · B , – n · C , – m · D) . Moltiplicando per H si ha:
$H \cdot I = m\cdot [d(H,A)]^2 + n\cdot [d(H,B)]^2 - n\cdot [d(H,C)]^2 - m\cdot [d(H,D)]^2 =$
$= m x^2 + n y^2 - n y^2 - mx^{2.} = 0$
Essendo I completo, qualunque sia P, si ha: P · I = H · I = 0.
<u>Applicazione .9</u> Si succedano sulla retta r i punti A,B,C,D. Sia H un punto di r , centro di simmetria delle coppie (A,D) e (B,C) .
Essendo:
$d(P,A) = 10$, $d(P,B) =2\sqrt{10}$, $d(P,C) =6\sqrt{2}$, $d(P,D) =6\sqrt{5}$, calcolare
d(A,B) = d(C,D) = x e d(B,C) = y (1) .



L'insieme (A,B,C) è di sostegno all'insieme completo
$I' = [y \cdot A, -(x+y) \cdot B, x \cdot C]$. L'insieme (B,C,D) è di sostegno all'insieme completo $I'' = [y \cdot D, -(x+y) \cdot C, x \cdot B]$.
Per il TH.4, anche l'insieme $I' \cup [(-1) I'']$ è completo e si ha:

$$I' \cup [(-1) I''] =$$
$$= [y \cdot A, -(x+y) \cdot B, x \cdot C, -y \cdot D, (x+y) \cdot C, -x \cdot B] .$$

Riducendo si ha: $I = [y \cdot A, -(2x+y) \cdot B, (2x+y) \cdot C, -y \cdot D]$.
Poiché hanno masse opposte sia i punti (A,D) sia i punti (B,C), per il TH.7 si ha: $P \cdot I = 0$. Sviluppando si ha: $P \cdot I = y \cdot [d(P,A)]^2 +$
$-(2x+y) \cdot [d(P,B)]^2 + (2x+y) \cdot [d(P,C)]^2 - y \cdot [d(P,D)]^2 = 0$ da cui:

$$y \cdot 100 - (2x+y) \cdot 40 + (2x+y) \cdot 72 - y \cdot 180 = 0$$
$$100y - 80x - 40y + 144x + 72y - 180y = 0 \qquad 3y = 4x.$$

Posto $x = 3u$, si ha: $y = 4u$. Sostituendo in I', si ha:
$[4u \cdot A, -7u \cdot B, 3u \cdot C]$. Dividendo per u, si ha:
$I' = [4 \cdot A, -7 \cdot B, 3 \cdot C]$. Essendo $P \cdot I' = B \cdot I'$, sviluppando si ha:

$$4 \cdot [d(P,A)]^2 - 7 \cdot [d(P,B)]^2 + 3 \cdot [d(P,C)]^2 =$$
$$= 4 \cdot [d(B,A)]^2 + 3 \cdot [d(B,C)]^2 .$$

Essendo $d(A,B) = x = 3 \cdot u$, $d(B,C) = y = 4u$, si ha:

$$4 \cdot 100 - 7 \cdot 40 + 3 \cdot 72 = 4 \cdot 9u^2 + 3 \cdot 16u^2 \text{ da cui } u^2 = 4$$

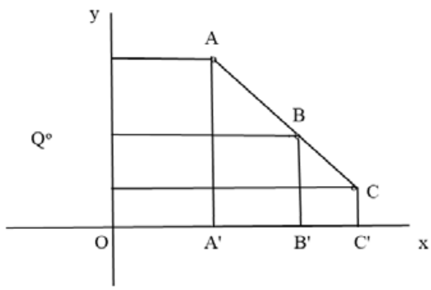
Si ha, allora: $d(A,B) = 6$, $d(B,C) = 8$.

Gli insiemi di punti materiali permettono di affrontare problemi di geometria non solo per via sintetica ma anche per via analitica.

TH.8 Sia $I = (m\,A, s\,B, n\,C)$ un insieme completo i cui punti risultino così definiti: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ mediante un sistema ortonormale (O,x,y). Siano $A' = (x_1, 0)$, $B' = (x_2, 0)$, $C' = (x_3, 0)$ e $A'' = (0, y_1)$, $B'' = (0, y_2)$, $C'' = (0, y_3)$ le proiezioni ortogonali dei punti A,B,C , rispettivamente, sugli assi x e y di (O,x,y).
Essendo I completo anche gli insiemi $I' = (m\,A', s\,B', n\,C')$ e

I'' = (m A'', s B'', n C'') sono completi e viceversa: se I' e I'' sono completi anche l'insieme I è completo pertanto, per il TH.3, si ha:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ m\,x_1 + s\,x_2 + n\,x_3 = 0 \\ m\,y_1 + s\,y_2 + n\,y_3 = 0 \end{cases}$$



Sia Q = (d,h) un qualsiasi punto del piano. Calcolando separatamente $O \cdot I$ e $Q \cdot I$, si ottiene:

$$O \cdot I = m[(x_1)^2 + (y_1)^2] + s[(x_2)^2 + (y_2)^2] + n[(x_3)^2 + (y_3)^2]$$

$$Q \cdot I = m[(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2] + s[(x_2 - d)^2 + (y_2 - h)^2] + n[(x_3 - d)^2 + (y_3 - h)^2] = m[(x_1)^2 + (y_1)^2] + s[(x_2)^2 + (y_2)^2] + n[(x_3)^2 + (y_3)^2] + - 2d(m\,x_1 + s\,x_2 + n\,x_3) - 2h(m\,y_1 + s\,y_2 + n\,y_3) + d^2 (m+s+n) + h^2 (m+s+n).$$

Essendo I completo deve risultare: $Q \cdot I = O \cdot I$ da cui $K = Q \cdot I - O \cdot I = 0$. Sviluppando e, tenendo conto che

$(m+s+n) = 0$ (1), si ha:

$$K = - 2d(m\,x_1 + s\,x_2 + n\,x_3) - 2h(m\,y_1 + s\,y_2 + n\,y_3) = 0.$$

Data l'arbitrarietà di d e h, deve risultare:

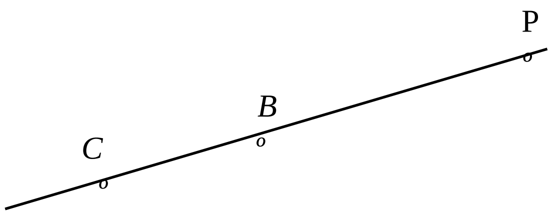
$$(m\,x_1 + s\,x_2 + n\,x_3) = 0 \quad (2) \qquad (m\,y_1 + s\,y_2 + n\,y_3) = 0 \quad (3) \quad .$$

a) Le condizioni 1) e 2), per il TH.3, assicurano che (m A' , s B', n C') sia completo;

b) le condizioni (1) e (3), per il TH.3, assicurano che (m A'', s B'', n C'') sia completo.

Viceversa, se I' e I'' sono completi per il TH.3 devono risultare verificate le (1), (2), (3) mediante le quali, procedendo a ritroso, risulta: Q $\cdot$ I = O $\cdot$ I.

<u>Applicazione10.</u> Sul piano π, sul quale è fissato un sistema ortonormale, risultino così definiti due punti: A = (x1,y1), B = (x2,y2) .Trovare le coordinate di un qualsiasi punto P allineato con A e B .



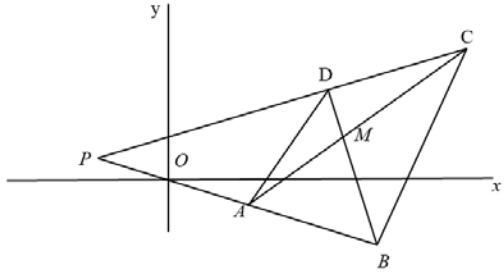
Sia Y = [n A , – (n + 1) B] la coppia di punti materiali con m ∈ R scelto in modo arbitrario . Il complementare di Y è 1 ·P. Essendo completo l'insieme I = [n A ,– (n +1) B , P] , posto P = (x,y) , per il TH.8 si ha :

$$\begin{cases} n\,x_1 - (n+1)\,x_2 + x = 0 \\ n\,y_1 - (n+1)\,y_2 + y = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} x = (n+1)\,x_2 - n\,x_1 \\ y = (n+1)\,y_2 - n\,y_1 \end{cases}$$

Applicazione .11 Sia M il punto di intersezione delle diagonali [A,C] e [B,D] del quadrilatero Q(A,B,C,D) . Risulti $\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{3}{7}$,

$\frac{d(B,M)}{d(M,D)} = \frac{3}{2}$ (1)

Trovare le coordinate di P, punto di intersezione delle rette passanti, rispettivamente, per A,B e D,C essendo A = (1 , – 2), B = (7 , – 5)



Dalle (1) si ricavano gli insiemi completi: I_1 = (7 A , – 10 M , 3 C), I_2 = (2 B , – 5 M , 3 D) . Essendo (– 2 · I_2) un insieme completo anche l'unione dei due insiemi (I_1) e (– 2 · I_2) è un insieme completo: I = $I_1 \cup$ (– 2 · I_2) = (7 A , 3 C , – 4 B , – 6 D).
Il complementare di (7 A , – 4 B), punti materiali di I, è (– 3 X) pertanto I_3 = (– 4 B, 7 A ,– 3 X) è un insieme completo.
Effettuando l'unione I $\cup$ (– I_3) si ha: I_4 = (3 C ,– 6 D,3 X).
Il punto X appartenendo ai due insiemi completi I3 e I4 deve risultare allineato sia con A,B sia con C,D pertanto coincide con P e si ha:
I_3 = (– 4 B, 7 A ,– 3 P), I_4 = (3 C ,– 6 D,3 P)
Per calcolare le coordinate di P applichiamo a I_3 il TH.8.
Posto P = (x,y) si ha :

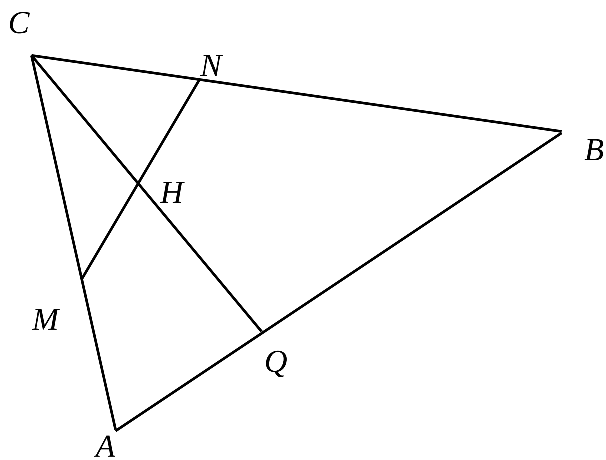
$$\begin{cases} 4 \cdot 7 - 7 \cdot 1 + 3 \cdot x = 0 \\ 4 \cdot (-5) - 7 \cdot (-2) + 3 \cdot y = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad x = -7 \quad , \quad y = 2 .$$

<u>Applicazione .12</u> I punti M e N appartengano, rispettivamente, ai lati [A,C] e [B,C] del triangolo T(A,B,C) e risulti:

$$\frac{d(A,M)}{d(M,C)} = \frac{1}{3}, \frac{d(B,N)}{d(N,C)} = \frac{11}{3} \qquad (1)$$

Sia H interno a [M,N] e risulti: $\frac{d(M,H)}{d(H,N)} = \frac{1}{2}$ (2)

Trovare le coordinate di Q, punto di intersezione della retta passante per C e H con il segmento [A,B] essendo A = (7,4), B = (31 ,20).



Da (1) e (2) si ricavano i seguenti insiemi completi:

I_1 = (3 A, – 4 M , C), I_2 = (3 B, –14 N , 11 C), I_3 = (2M, – 3 H ,11 N)
Moltiplicando I_1 per 7 e I_3 per 14 si ha:
I'_1 = (21 A, – 28 M , 7 C), I'_3 = (28M, –42 H , 14N)
Effettuando l'unione degli insiemi completi I'_1, I_2, I'_3, per il TH.14 si ottiene l'insieme completo $I'_1 \cup I_2 \cup I'_3$ =
= (21 A, – 28 M , 7 C , 3 B, –14 N , 11 C , 28M, –42 H , 14N)
Riducendo, dividendo per 3, l'insieme $I'_1 \cup I_2 \cup I'_3$ diviene

I = (7 A , B , 6 C , – 14 H). Il complementare dei punti materiali

(6 C , – 14 H) di I è (8 X) pertanto l'insieme
I_4 = (6 C – 14 H , 8 X) è completo. Anche l'insieme $I_5 = I \cup (-I_4)$ è completo e si ha: I_5 = (7 A , – 8 X , B). Poiché I_4 e I_5 sono completi

X risulta allineato sia con C,H sia con A,B pertanto coincide con il punto di intersezione Q . L' insieme I5 diviene:

$I_5 = (7\,A\,, -8\,Q\,, B)$. Posto $Q = (x,y)$, per il TH.8 applicato a I_5 si ha :

$$\begin{cases} 7 \cdot 7 - 8 \cdot x + 31 = 0 \\ 7 \cdot 4 - 8 \cdot y + 20 = 0 \end{cases} \qquad \text{da cui} \quad x = 10\,,\ \ y = 6$$

Bibliografia

Francia Franco - *Insiemi di punti materiali*' - Archimede - N.1 dell'anno 1985 - Le Monnier

Approvato su parere favorevole di Alberto Trotta e Franco Eugeni

==

Teorema di Hardy (1914).

Il matematico inglese Godffrey Harold Hardy (1887-1966) oltre che brillare di grande luce propria, per gli innumerevoli studi sulla Teoria dei Numeri in collaborazione, per 35 anni, con l'altro grande matematico John E. .Littlewood (1885-1977), è anche noto per aver scoperto il matematico indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Un argomento di interesse è lo studio della funzione zita di Riemann definite da :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definite per $x>1$, essendo $s = x + i\,y$. La funzione è prolingabile a tutto il campo complesso eccetto che per $s = 1$. I valori per cui la funzione si annulla sono nella striscia $0 < x < 1$. La congettura di Riemann li colloca tutti sulla retta $x = ½$ del piano complesso.

Il Teorema di Hardy (1914) asserisce che sulla retta $x = ½$ vi sono infiniti zeri non banali che annullano la funzione di Riemann $\zeta(s)$.

Ricordiamo anche che, se x è reale si ha :

$$\zeta(x) = \prod \frac{1}{1-p^{-x}}$$

essendo il prodotto esteso a tutti i numeri primi *p*.

==