Periodico di Matematica (IV) Vol. I (1-2), giugno-dicembre 2019, pp. 227-248

L'uso dell'insieme delle soluzioni per risolvere i problemi al contorno e le equazioni integrali

Giuseppe Anichini*
Giuseppe Conti^
Alberto Trotta°

* Università degli Studi di Firenze ; giuseppe.anichini@unifi.it
^ Università degli Studi di Firenze; gconti@unifi.it
o IISS Santa Caterina Amendola, Salerno; albertotrotta@virgilio.it

Sunto: *Lo scopo di questo lavoro è di fare una rassegna dei risultati ottenuti nella risoluzione di vari tipi di problemi al contorno e di equazioni integrali usando il metodo dell'insieme delle soluzioni. Questa tecnica consiste nell'introdurre opportunamente nei precedenti problemi, al posto della variabile x, una funzione q, appartenente ad un determinato spazio di funzioni, e trovare in funzione di q le soluzioni del problema così ottenuto. Si determina in tal modo una funzione* $\Sigma(q)$ *(generalmente a più valori); gli eventuali punti fissi di* Σ *sono proprio le soluzioni del problema di partenza. Tale metodo ha il vantaggio che un'appropriata scelta di q permette di ottenere un problema più semplice di quello da cui siamo partiti.*

Dopo avere introdotto tale metodo nel caso di problemi al contorno, mostreremo che tale tecnica può essere profiquamente usata per risolvere equazioni integrali, equazioni integrali quadratiche ed equazioni integro-differenziali.

Parole chiave: *Problemi al contorno, equazioni integrali, punti fissi, spazi di Fréchet, spazi di Banach, applicazioni multivoche, compattezza.*

Abstract: *The aim of the paper is to review the results achieved in solving various types of both boundary value problems and integral equations by using the method of the set of solutions. This technique consists in introducing in the given problems, a function q, belonging to a suitable space of functions, instead of the state variable x; subsequently we are ventured to find, as a function of q, the solutions of this "new" problem. In this way a function, generally a multivalued one, is determined: so, the possible fixed points of this function are the solutions of the original problem we were looking for. This method has the profitable advantage that an appropriate choice of q makes possible to obtain a simpler problem than the one we started from.After introducing this method in the case of boundary value problems, we will show that this technique can be proficiently used to solve integral equations, quadratic integral equations and integro-differential equations*

Keywords: *Boundary value problems, integral equations, fixed points, Fréchet spaces, Banach spaces, multivalued maps, compactness.*

1 - Introduzione

Una tecnica frequentemente usata per risolvere problemi al contorno equazioni differenziali ordinarie consiste nel ridurre il problema dato alla ricerca di un punto fisso di un operatore T (generalmente non lineare) in un opportuno spazio di funzioni.

Ad esempio, per trovare le soluzioni del classico problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \qquad\qquad t \in I \end{cases} \tag{1.1}$$

definite in un intervallo (limitato) I dell'insieme dei numeri reali, è sufficiente determinare i punti fissi dell'operatore

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(s, x(s)\right) ds \quad (1.2)$$

definito nello spazio di Banach$C(I,\mathbb{R}^n)$ delle funzioni, continue e limitate in$I$ a valori in$\mathbb{R}^n$, con la norma $\|x\| = \sup\left\{|x(t)|, t \in I\right\}$ I punti fissi dell'operatore T, definito in (1.2), forniscono le soluzioni del problema (1.1) (Giusti, 1983, pp. 83-86).

Nello studio dei problemi al contorno, il teorema di punto fisso maggiormente usato è il teorema di Schauder, il quale afferma che un operatore continuo e compatto$T : C \to C$,con *C* sottoinsieme non vuoto, chiuso, convesso e limitato di uno spazio di Banach*X*,ammette punto fisso (vedi Deimling, 1985, p. 60).

Ricordiamo che un operatore sidice compattose trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti, cioè insiemi la cui chiusura è un compatto (Zeidler,1986, p.53). Osserviamo che, nel caso in cui la funzionef sia continua, l'operatoreT definito da (1.2) è compatto nello spazio di BanachC(I,$\mathbb{R}$ n) (Zeidler,1986, p.54).

Nel caso in cui le ipotesi del problema al contorno permette di usare il teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli, oltre l'esistenza si ottiene anche l'unicità della soluzione.

Il lettore, interessato a problemi al contorno per equazioni differenziali ordinarie nei casi di condizioni sia lineari che non lineari, può consultare l'interessante articolo di Roberto Conti (Conti, 1967).

2 - Problemi al contorno

Il metodo della ricerca dei punti fissi comporta essenzialmente due tipi di difficoltà.

La prima, di tipo algebrico, riguarda principalmente la necessitàdi avere delle stime a priori che ci assicurino l'esistenza dell'insiemeCdel teorema di Schauder.

La seconda, di tipo topologico, deve assicurare la continuità e la compattezza dell'operatoreT in un opportuno spazio di BanachXdi funzioni(Cecchi, Furi, Marini, 1985a, 1985b).

Il maggiore ostacolo a questo procedimento consiste principalmente nell'influenza reciproca fra il procedimento algebrico e quello topologico; inoltre, la determinazione della compattezza dell'operatoreT può presentare difficoltà nello spazio di Banach in cui operiamo.Per aggirare questi inconvenienti, può essere utile usare un altro procedimento. Illustriamolo con un esempio (Cecchi, Furi, Marini, 1985a).

Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) & \\ x \in S & t \in I \end{cases} \tag{1.3}$$

dove$S$ è un arbitrario sottoinsieme dello spazio$C(I, \mathbb{R}^n)$ definito in precedenza e$f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$una funzione continua.

Consideriamo una funzione continua a$g: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$tale che$g(t, c, c) = f(t, c)$ per ogni $t \in I$ e per ogni$c \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista un sottoinsieme$Q$ di$C(I, \mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $q \in Q$ l'equazione

$$x'(t) = g(t, x(t), q(t)), \quad t \in I \tag{1.4}$$

abbia una sola soluzione appartenente all'insieme *S*.

Consideriamo l'operatore $\sum: Q \to S \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ che ad ogni q in Q associa l'unica soluzione $x = \Sigma(q)$ di (1.4). Si può facilmente dimostrare che i punti fissi di Σ sono proprio le soluzioni del problema (1.3).

Naturalmente è necessario imporre alcune condizioni sul problema (1.3) per applicare un teorema di punto fisso (ad esempio il teorema di Schauder) all'operatore Σ. Tuttavia, occorre tenere presente che un'opportuna scelta della funzione *g* permette di rendere più semplice la ricerca delle soluzioni di (1.4) rispetto al problema (1.3);in questo modo possiamo anche applicare risultati gìà noti per lo studio della (1.4).

Quando è possibile, si cerca di rendere la (1.4) un'equazione lineare in *x*; in tal caso la (1.4) si chiama anche problema al contorno "linearizzato" del problema (1.3) (Andres 2003; Anichini, Conti, 1988, 1990, 1995, 1999, 2000, 2002; Cecchi, Furi, Marini, 1985a, 1985b).

Per mostrare la tecnica dell'insieme delle soluzioni, consideriamo, a titolo di esempio, il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \\ Lx = r \qquad\qquad t \in [a,b] \end{cases} \tag{1.5}$$

dove A è una matrice sommabile in $[a,b]$, L è un'applicazione lineare e continua dallo spazio $C([a,b], \mathbb{R}^n)$ in

$\mathbb{R}^n$e$f\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$una funzione continua tale che $|f(t,x)| \leq \alpha + \beta |x|$ con α , β numeri reali non negativi.

Supponiamo che il problema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ Lx = 0 \qquad\qquad t \in [a,b] \end{cases}$$

abbia soltanto la soluzione nulla.

Vogliamo dimostrare che il problema (1.5) ha soluzioni per β sufficientemente piccolo.

Si a$q \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ una funzione continua e consideriamo il problema "linearizzato":

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t, q(t)) \\ Lx = r \qquad\qquad t \in [a,b] \end{cases} \tag{1.6}$$

Per le ipotesi fatte il problema (1.6) ha una ed una sola soluzione (Conti,1967).

Ponendo $y_q(t) = f(t, q(t))$, si ha che la soluzione del problema (1.6) è data da:

$x = \Gamma y_q + Hr$, dove $\Gamma\colon C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$ è un

operatore lineare e compatto e$H\colon \mathbb{R}^n \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$è un'applicazione lineare continua (Conti, 1967).

Sia$\Sigma\colon C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$l'operatore (univoco) che ad ogni$q \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$associa la soluzione di (1.6); quindi si ha: $\Sigma(q) = \Gamma y_q + Hr$. Sia:

$\beta \|\Gamma\| < 1$

e poniamo:

$$Q = \{x \in C([a,b],\mathbb{R}^n) : \|x\| \leq s\} \text{ dove } s = \frac{\alpha\|\Gamma\| - \|Hr\|}{1-\beta\|\Gamma\|}.$$

Con semplici calcoli, si vede che $\Sigma(Q) \subset Q$.

Poiché l'operatore Σ è compatto e l'insieme Q è chiuso, convesso e limitato, per il teorema di Schauder Σ ha almeno un punto fisso; di conseguenza il problema (1.5) ha soluzioni.

Si possono fare analoghe considerazioni quando il problema (1.4) non ha una sola soluzione ma un insieme convesso (non vuoto) di soluzioni. In tal caso (Anichini, Conti, 1988) occorre applicare teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche come il teorema di Bohnenlust e Karlin, il quale afferma che, dato un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso C di uno spazio di Banach ed un'applicazione multivoca $T : C \to C$ semicontinua superiormente, a valori non vuoti, compatti e convessi, con $T(C)$ relativamente compatto, allora T ammette un punto fisso, cioè esiste $x \in C$ tale che $x \in T(x)$ (Zeidler, 1986, p. 452). Ricordiamo che, in questo caso, un'applicazione multivoca si dice semicontinua superiormente se il suo grafico è un insieme chiuso.

Spesso, per risolvere problemi al contorno in intervalli illimitati I può essere utile considerare lo spazio di Fréchet $F(I,\mathbb{R})$ delle funzioni continue $x: I \to \mathbb{R}^n$ con la topologia dell'uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di I (Zeidler, 1986, p. 784).

Ad esempio, se $I = [0,+\infty)$, allora una famiglia di seminorme dello spazio di Fréchet è data da: $\|x\|_n = \max\{|x(t)|, t \in [0,n]\}$.

Accade talvolta che l'operatore, del quale dobbiamo stabilire l'esistenza dei punti fissi, non sia compatto. In questi casi può essere molto utile la nozione dimisura di non compattezza.

Sia$X$ uno spazio metrico completo ed M un suo sottoinsieme limitato. Denotiamo

$$\alpha(M) = \inf\left\{ \varepsilon > 0 : M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \mathrm{diam}(A_i) < \varepsilon \right\}.$$

La funzione α così introdotta si chiama misura di non compattezza di Kuratowski (Banas, Goebel, 1980). Si può dimostrare che un insieme$M$ di uno spazio metrico completo è relativamente compattose e solo se $\alpha(M) = 0$.

Nel caso di non unicità delle soluzioni, può talvolta accadere che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (1.4) non sia un insieme convesso. In questo caso occorre usare dei teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche, semicontinue superiormente, a valori non convessi. Fortunatamente tali teoremi esistono e riguardanoapplicazioni multivoche i cui valori sono proprio le soluzioni di problemi al contorno di equazioni differenziali e di equazioni integrali.

Prima di esporre questi risultati, dobbiamo fornire alcune definizioni.

Un sottoinsieme$Y$ di uno spazio metrico X si chiama retratto assoluto se, dato un qualunque sottoinsieme chiusoA di$X$ e una funzione continua $f : A \to Y$, esiste un'estensione continua $g : X \to Y$ di f.

Un sottoinsieme compattoF di uno spazio metricoX si chiama chiama insieme R_δ se F è l'intersezione di una

successione decrescente $\{A_n\}$ di retratti assoluti di X (Brouder, Gupta, 1969).
In un pioneristico articolo (Aronszajn, 1942) fu dimostrato che l'insieme delle soluzioni di un problema di Cauchy in mancanza di unicità delle soluzioni (il cosiddetto "pennello di Peano") è un insieme R_δ.

Gli insiemi R_δ rientrano in una categoria più ampia di insiemi: gli **insiemi aciclici**, cioè quelli che hanno nulli tutti i gruppi di coomologia (ridotta) di Cech. Ad esempio, gli insiemi convessi e gli insiemi stellati sono aciclici. Si dimostra, inoltre, che un insieme R_δ è anche aciclico (Lasry, Robert, 1976, p. 110).

A partire da questo teorema sono stati dimostrati moltissimi altri risultati di questo tipo.

Esistono teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche non compatte in spazi di Fréchet a valori non necessariamente convessi,che possono essere molto utili per trovare i punti fissi dell'operatore Σ che fornisce le soluzioni di (1.4). Uno di questi è il teorema il quale afferma che, dato un insieme M chiuso, convesso e limitato di uno spazio di Fréchet X, un'applicazione multivoca $T : M \to M$ semicontinua superiormente, a valori compatti e aciclici, tale che $\alpha(T(B)) < \alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset M$, con $\alpha(B)>0$, allora T ha un punto fisso (Fitzpatrick, Petryshyn, 1974).

L'operatore che soddisfa la condizione $\alpha(T(B)) < \alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset M$, con $\alpha(B)>0$, si chiamao peratore addensante. Naturalmente, ogni operatore compatto è addensante.

Talvolta accade che l'insieme delle soluzioni $\Sigma(q)$ sia formato, al variare di q, da un numero finito di elementi (Anichini, Conti, Zecca, 1991, Anichini, Conti, 1997); in questo caso si possono applicare teoremi di punto fisso per una classe di applicazioni multivoche chiamate mappe ponderate (Darbo, 1961).

Il metodo dell'insieme delle soluzioni vale anche per problemi al contorno multivoci; ad esempio, tale procedimento è stato usato per determinare le soluzioni del seguente sistema differenziale (Carbone, Conti, Marino, 1990):

$$\begin{cases} x' \in A(t,x)x + F(t,x) \\ Lx = H(x) \end{cases}$$

dove F è un'applicazione multivoca semicontinua.

Inoltre, possiamo usare tale metodo anche nello studio di problemi al contornoin spazi di Banach (Margheri, Zecca, 1993; Margheri, Zecca, 1994; Conti, Obukhovskiĭ, Zecca, 1996).

3 - Equazioni integrali

Il metodo dell'insieme di soluzioni si è rivelato di grande utilità per la risoluzione delle equazioni integrali di vario tipo.

Con tale tecnica(Anichini, Conti, 2008) si può determinare l'esistenza di soluzioni di equazioni integrali quadratiche del tipo:

$$x(t) = h(t) + (Tx)(t)\int_0^t k(t,s)u(t,s,x(s))ds \qquad t \in I = [0,L] \quad (1.7)$$

Si ottiene che l'equazione (1.7) ha soluzioni sotto le seguenti ipotesi:

1. $u: I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$è una funzione continua tale che $|u(t,s,x)| \leq \alpha + \beta|x|$ per ogni $\alpha,\ \beta$ numeri reali positivi;
2. $h: I \to \mathbb{R}$è una funzione continua;
3. T è un operatore compatto dallo spazio di Banach $C(I,\mathbb{R})$ delle funzioni reali continue definite in $[0,L]$in sé, che soddisfa la seguente relazione: $|T(x)(t)| \leq a|x(t)|$ per ogni $t \in I = [0,L]$;
4. $\alpha La < 1$.

Con queste ipotesi l' operatoreΣ, che ad ogni$q \in C(I,\mathbb{R})$associa le soluzioni di

$$x(t) = h(t) + (Tq)(t)\int_0^t k(t,s)u(t,s,x(s))ds$$, è un operatore

multivoco da una palla di$C(I,\mathbb{R})$in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e compatto.

Le equazioni integrali quadratiche hanno numerose applicazioni in Fisica Matematica, in Ingegneria, in Biologia e in Economia. Equazioni di questo tipo furono introdotte per lo studio del trasferimento radiativo (Chandrasekhar, 1960).

Il problema precedente può essere risolto anche nel caso di intervalli illimitati.

Consideriamo la seguente equazione integrale (Anichini, Conti, 2011):

$$x(t) = f(t) + (Ax)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds \qquad t \in J = [0,+\infty) \qquad (1.8)$$

In questo caso conviene operare nello spazio di Fréchet $F(J,\mathbb{R})$ delle funzioni continue $x: J \to \mathbb{R}$ con la topologia dell'uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di$J$.

Supponiamo che il problema (1.8) soddisfi le seguenti condizioni:

1. $u(\boldsymbol{s},\cdot,\cdot): \boldsymbol{I} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$è una funzione continua per ogni $s \in J$;
2. $u(\cdot,t,x): J \to \mathbb{R}$è una funzione misurabile secondo Lebesgue per ogni$(t,x) \in J \times \mathbb{R}$;
3. $|u(t,s,x)| \le \gamma(s) + \beta(s)|x|$ per ogni$(s,t,x) \in J \times J \times \mathbb{R}$, dove$\gamma,\ \beta : J \to J$ sono funzioni localmente integrabili;
4. la funzione$f: J \to \mathbb{R}$è una funzione continua;
5. Aè un operatore continuo dallo spazio di Fréchet$F(J,\mathbb{R})$ in sé tale che esiste un numero reale positivo$h$ per cui si ha: $|(Ax)(t)| \le h$ per ogni $t \in J$.

Con queste condizioni si dimostra che l'operatoreΣ, che ad ogni$q \in F(J,\mathbb{R})$associale soluzioni di

$$x(t) = f(t) + (Aq)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds,$$

è un operatore multivoco da $F(J,\mathbb{R})$ in sé, semicontinuo superiormente, a valori compatti aciclici, tale che $\sum\big(F(J,\mathbb{R})\big)$ è un insieme relativamente compatto. Di conseguenza Σ ha un punto fisso.

Notiamo che si ottiene l'esistenza di soluzioni per un'equazione integrale del tipo (1.8) con $u(s,t,x(s)) = k(t,s)F(s,x(s))$ anche supponendo che l'operatore A non sia limitato, ma soddisfi la seguente condizione: $|(Ax)(t)| \le a|x(t)|$ per ogni $t \in J$ (Anichini, Conti, 2014) .

Il metodo dell'insieme delle soluzioni può essere applicato anche nel caso di equazioni integrali quadratiche e multivoche (Anichini, Conti, 2012).

Sia data la seguente equazione integrale quadratica:

$$x(t) \in (fx)(t)\int_0^t k(t,s)F(s,x(s))ds \qquad t \in I = [0,T] \quad (1.9)$$

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $f : C(I,\mathbb{R}^n) \to C(I,\mathbb{R}^n)$ è un operatore continuo tale che $\alpha(f(B)) \le f_0\alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset C(I,\mathbb{R}^n)$ e $|(fx)(t)| \le \beta_0|x|$ per ogni $t \in I$ e ogni $x \in C(I,\mathbb{R}^n)$;

2. $k: I \times I \to \mathbb{R}^n$è una funzione continua tale che esiste una funzione limitata$w: I \to \mathbb{R}^+$con $\lim_{t \to 0} w(t) = 0$ e
$$\int_0^T \left| k(t_2, s) - k(t_1, s) \right| ds \le w\left(\left| t_2 - t_1 \right| \right) \text{ per ogni } t_2,\, t_1 \in I\,;$$
3. $F: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$è un'applicazione multivoca, semicontinua superiormente, a valori compatti e convessi, tale che $\left| F(t,x) \right| \le \alpha(t) + \beta(t) \left| x \right|$, con$\alpha, \beta: I \to \mathbb{R}$funzioni continue e positive;
4. $$w_0 = \sup \left\{ \int_0^T \left| k(t,s) \right| ds \text{ , } t \in I \right\} \le \min \left\{ \frac{1}{\beta_0 \alpha_1}, \frac{1}{f_0 \alpha_1} \right\}$$
   dove $\alpha_1 = \sup \left\{ \int_0^T \alpha(s)\, ds \text{ , } t \in I \right\}$.

Con queste ipotesi si dimostra che l'operatoreΣ, che ad ogni $q \in C(I, \mathbb{R}^n)$associa le soluzioni di

$$x(t) \in (fq)(t) \int_0^t k(t,s) F(s, x(s)) ds\,,$$

è un operatore multivocoda una palla M di $C(I, \mathbb{R}^n)$in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e tale che

$$\alpha(\Sigma(B)) < \alpha(B)$$

per ogni sottoinsieme $B \subset M$ .Quindi l'operatore $\sum$ ha almento un punto fisso; di conseguenza l'equazione (1.9) ha almeno una soluzione.

Consideriamo ora le equazioni integro-differenziali. Si ha il seguente risultato (Anichini, Conti, 2016).

Sia data l'equazione integro-differenziale:

$$x(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds \qquad t \in I = [0,T] \quad (1.10)$$

Per studiare tale equazione occorre considerare lo spazio di Banach $C^1(J, \mathbb{R}^n)$delle funzioni con derivate prime continue, munito della norma$\| x\|_1 = \max\{\| x\|, \| x'\|\}$, dove $\|x\| = \max\{|x(t)|, t \in [0,T]\}$ e $\|x'\| = \max\{|x'(t)|, t \in [0,T]\}$.

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. $k: I \times I \to \mathbb{R}^n$è una funzione con derivate prime continue tale che
   $$\max\{|k(t,s)|, (t,s) \in I \times I\}, \max\left\{\left|\frac{\partial k(t,s)}{\partial t}\right|, (t,s) \in I \times I\right\} \le k;$$
2. $f: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$è una funzione continua tale che $|f(t,x,y)| \le a + b|x|$ con$a$, b numeri reali non negativi;
3. $bkT < 1$.

Allora l'equazione (1.10) ha almeno una soluzione.

Infatti, si dimostra che, con queste ipotesi, l'operatore Σ, che ad ogni$q \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$associa le soluzioni di

$$x(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), q'(s)) ds \ ,$$

è un operatore multivoco da una palla$M$ dello spazio di Banach$C^1(I, \mathbb{R}^n)$in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e compatto. Quindi l'operatore Σ ha almento un punto fisso; di conseguenza l'equazione (1.10) ha almenno una soluzione.

Un risultato analogo a quello ottenuto nella (1.10) si ha anche nel caso dell'intervallo illimitato $J = [0, +\infty)$ (Anichini, Conti, 2018a). In questo caso occorre considerare lo spazio di Fréchet $F(J, \mathbb{R})$di tutte le funzioni differenziabili con continuità in$J$ con la seguente famiglia di seminorme: $\|x\|_{1,n} = \max\{\|x\|_n, \|x'\|_n\}$, dove$\|x\|_n = \max\{|x(t)|, t \in [0,n]\}$ e $\|x'\|_n = \max\{|x'(t)|, t \in [0,n]\}$.

Infine, consideriamo la seguente equazione integro-differenziale (Anichini, Conti, 2018b):

$$x'(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds, \quad x(0) = 0, \quad t \in J = [0,1] \qquad (1.11)$$

Cerchiamo le soluzioni nello spazio di Banach $C^1(J, \mathbb{R}^n)$delle funzioni con derivata prima continua. Facciamole seguenti ipotesi:

1. $f: J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$è una funzione continua tale che $\left| f\left(s,x,y\right)\right| \le a\left|x\right| + b\left|y\right|$, con$a$, b numeri reali non negativi, per ogni$(s, x, y,) \in J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
2. $k: J \times J \to \mathbb{R}^n$è una funzione con derivate parziali continue tale che esiste una funzione continua e positiva$h: J \to \mathbb{R}$per cui si ha:
   $\max\left\{\left|k\left(t,s\right)\right|, (t,s) \in I \times I\right\} \le h(s)$ e
   $\max\left\{\left|\frac{\partial k\left(t,s\right)}{\partial t}\right|, (t,s) \in I \times I\right\} \le h\left(s\right)$;
3. ponendo $\bar{h} = \max\left\{\left|h(s)\right|, s \in \left[0,1\right]\right\}$, vale la seguente relazione $2\bar{h}a + \bar{h}b < 1$.

Con queste ipotesi, per ogni$q \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ la seguente equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t k(t,s)\, f(s, \int_0^s q\left(\tau\right) d\tau, y(s)) ds \quad t \in J = \left[0,1\right] \text{(1.12)}$$

ha soluzioni.

Sia$\Sigma: C^1(J, \mathbb{R}^n) \to C^1(J, \mathbb{R}^n)$l'applicazione che ad ogni $q \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$associa l'insieme delle soluzioni di (1.12).

Ponendo $x(t) = \int_0^t y\left(s\right) ds$ (quindi $x'(t) = y\left(t\right)$ e $x(0) = 0$),

si ottiene che i punti fissi dell'applicazione Σ sono le soluzioni dell'equazione (1.11).

Si può dimostrare che, con le ipotesi fatte, l'applicazione Σ è semicontinua superiormente, a valori aciclici, compatti e convessi; inoltre Σ è compatta ed esiste un insieme chiuso e convesso $C \subset C^1(J, \mathbb{R}^n)$ tale che $\Sigma(C) \subset C$. Perciò Σ ha punti fissi.

Bibliografia

Andres Jan (2003). *Using the integral manifolds to solvability of boundary value problems*, in ''Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis'', R. P. Agarwal Ž and D. O'Regan, Eds., New York, Gordon & Breach, 27-38.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1988). *Boundary-value problems with nonlinear boundary conditions*, Nonlinearity 1, 531-540.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1990). *Existence of solutions of a boundary value problem through the solution map of a linearized type problem*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Pol. Torino Vol. 48, n. 2, 149-159.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe, Zecca Pietro (1991). *Using solutions set for solving boundary value problems for ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis TMA, Vol. 11 (5), 465-472.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1995). *A direct approach to the existence of solutions of a boundary value problem for a second order differential equations,* Differential Equations and Dinamical Systems, Volume 3, n.1, January, 23-34.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1997). *About the existence of solutions of a boundary value problem for a Caratheodory differential system*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. Vol 16, n.3, 621-630.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1999). *Boundary Value Problems for Implicit ODE's in a Singular Case*,Differential Equations and Dynamical Systems, Vol. 7, 4, October, 437-459.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2000). *How to make use of the solution set to solve boundary value problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 40,Birkauser Verlag, Basel/Switzerland, 15-25.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2002). *Boundary Value Problems for Perturbed Differential Systems in Infinite Intervals*, International Mathematical Journal, Vol 2, no. 3, 221-236.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2008). *Existence of solutions of some quadratic integral equations*, Opuscola Mathematica4, 433-440.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2011).*Existence of solutions for quadratic integral equations on unbounded intervals*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 56(2), 113-122.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2012). *Existence of solutions for quadratic integral inclusions*, Libertas Mathematica, Volume 1, 57-69.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2014). *On the existence of solutions for quadratic integral equations on unbounded intervals for quasibounded maps*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 72, 3–4, 151-160.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2016). *Existence of solutions for Volterra integral equations depending on derivative*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 18(1), 45-60.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2018a). *Existence of Solutions for Volterra Integro-Differential Equations with Implicit Derivative*, International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research, 6(4),10-15.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2018b). *Existence of Solutions for Volterra Integro-Differential Equations in Unbounded Domains*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 22(1), 53-68.

Banas Jozef, Goebel Kazimierz (1980). *Measure of noncompactness in Banach spaces,* New York & Basel, Marcel Dekker.

Browder Felix Earl, Gupta Chaitan P. (1969). *Topological degree and nonlinear mappings of analytic type in Banach spaces,* J. Math: Anal. Appl. 26, 730-738.

Carbone Antonio, Conti Giuseppe, Marino Giuseppe (1990). *A Nonlinear Boundary-Value Problem for Multivalued Differential Systems,* Atti Sem.Mat. Fis. Univ. Modena, XXXVIII, 493-509.

Cecchi Mariella, Furi Massimo, Marini Mauro (1985a).*On continuity and compactness of some nonlinear operators associed with differential equations in noncompact intervals,* Nonlinear Anal., T. M. A., Vol. 9 (2), 171-180.

Cecchi Mariella, Furi Massimo, Marini Mauro (1985b).*About the solvability of ordinary differential equations with asymptotic Boundary conditions,* Boll. U. M. I., Analisi Funzionale e Applicazioni, Serie VI, Vol. IV-C. N. 1, 329-345.

Chandrasekhar Subrahmanyan (1960). *Radiative transfer,* New York, Dover Publications.

Conti Giuseppe, Obukhovskiĭ Valeri, Zecca Pietro (1996). *On the topological structure of the solution sets for a semilinear differential inclusion in a Banach space,* Topology in Nonlinear Analysis, Banach Center Publ.35, Warsawa, 159-169.

Conti Roberto (1967). *Recent trends in the theory of boundaryvalue problems for ordinary differential equations,* Boll. Un. Mat. Ital., XXII 3, 135-178.

Darbo Gabriele (1961). *Estensione alle mappe ponderate del teorema di Lefschetz sui punti fissi,* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 28, 46-57.

Deimling Klaus (1985). *Nonlinear Funcional Analysis,* Berlin & Heidelberg, Springer-Verlag.

Fitzpratrick Patrick M., Petryshyn WolodymyrV.(1974). *Fixed point theorems for multivalued noncompact acyclic mappings,* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 54, No. 2.

Giusti Enrico (1983). *Analisi Matematica 2,* Torino, Boringhieri.

Lasry Jean-Michel, Robert Raoul (1976). *Analyse non lineaire mutivoque,* Publ. n. 7611, Centre Rech. Math. Décision (Ceremade), Université de Paris IX (Dauphine).

Margheri Alessandro, Zecca Pietro (1993). *Solutions sets and boundary value problems in Banach spaces,* Topol.Methods Nonlin. Anal., 2, n. 1, 179-188.

Margheri Alessandro, Zecca Pietro (1994). *Solutions sets of multivalued Sturm-Liouville problems in Banach spaces,* Atti Acc. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 5, n. 2, 161-166.

Zeidler Eberhard (1986). *Nonlinear Funcional Analysis and its Applications.Vol. I, Fixed-Point Theorems,* Berlin &Heidelberg, Springer-Verlag.

==

Entropia e freccia del tempo

Per ovviare alla inesistenza di una freccia del tempo nelle formulazioni della fisica classica, la Termodinamica introdusse il concetto di entropia, quale relazione tra l'ordine ed il disordine spaziale. In tal modo la freccia del tempo viene tradotta arbitrariamente in una relazione di crescita Entropica per sistemi chiusi, ..ma dato che l' ordine/disordine sono concetti relativi allo spazio e non al tempo, la freccia del tempo come entita' irreversibile resta nuovamente esclusa anche alla termodinamica.

==