

Periodico di Matematica

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Anno XXXIV - Serie IV – volume I (1-2)
giugno-dicembre 2019**

A cura di
Ferdinando CASOLARO – Franco EUGENI – Luca NICOTRA

Edizioni



AFSU

MATEMATICA - FISICA - INFORMATICA

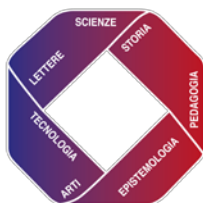
PERIODICO DI MATEMATICA

**PER
L'INSEGNAMENTO SECONDARIO**

**Fondato da Davide Besso,
continuato da Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri
e attualmente a cura di**

Ferdinando Casolaro - Franco Eugeni - Luca Nicotra

**Anno XXXIV - Serie IV - Volume I (1-2)
Giugno-Dicembre 2019**



ACCADEMIA DI FILOSOFIA DELLA SCIENZE UMANE

Comitato Direttivo

Franco Eugeni
Ferdinando Casolaro
Marco Crespi
Antonio Maturo
Fabrizio Maturo
Luca Nicotra
Raffaele Mascella
Danilo Pelusi
Renata Santarossa
Alberto Trotta

Comitato Scientifico

Giuseppe Anichini (Firenze).
Gian Italo Bischi (Urbino)
Giordano Bruno (Roma)
Roberto Buonanno (Teramo)
Ferdinando Casolaro, (Napoli)
Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
Mauro Cerasoli (L'Aquila)
Giuseppe Conti (Firenze)
Marco Crespi (Milano)
Franco Eugeni (Roseto degli
Abruzzi)
Stefano Innamorati (L'Aquila)
Antonio Maturo (Chieti)
Fabrizio Maturo (Caserta)
Manuppella Giuseppe (Teramo)
Raffaele Mascella (Teramo)
Pietro Nastasi (Palermo)
Luca Nicotra (Roma)
Canio Noce (Salerno)
Danilo Pelusi (Teramo)
Aniello Russo-Spena (L'Aquila)
Renata Santarossa (Napoli)
Ezio Sciarra (Chieti)
Luca Tallini (Teramo)
Alberto Trotta (Salerno)
Piero Trupia (Roma)
Ugo Vaccaro (Salerno)

Copertina e progetto grafico

Luca Nicotra

Direzione e redazione

Direttore responsabile:

Luca Nicotra

Direttori di redazione:

Franco Eugeni
Via Lucania 1 l.
64026 Roseto degli Abruzzi (TE)
cell. 338 9644305

eugenif3@gmail.com.

Ferdinando Casolaro
Via Camaldolilli n. 1B
80128 Napoli- cell. 347 1960693

ferdinando.casolaro@unina.it

Luca Nicotra
Via Michele Lessona 5
00134 Roma- cell. 340 5065616
luca.nicotra1949@gmail.com.

Rivista di proprietà di:

Accademia di Filosofia delle
Scienze Umane - Via Defense, 2
64026 Roseto degli Abruzzi (PE)

Copyright © 2019 Edizioni AFSU -
Teramo - ISSN Online: 2612-6745
® Registrazione n.695/2019 del 19
luglio 2019 Tribunale di Teramo

Tutti i diritti riservati

Gli scritti apparsi sulla Rivista
possono essere pubblicati altrove
purché se ne dichiari la fonte.

Segreteria di redazione:

Giovanni Catalani (Ascoli Piceno)
catalani.giovanni@libero.it
Alberto Trotta (Salerno)
albertotrotta@virgilio.it

Il Periodico di Matematica, che rinasce dopo 100 anni, si propone, oggi, come allora, di orientare i propri obiettivi di ricerca alla didattica dell'astronomia, della fisica, della matematica, aggiungendo a queste discipline il moderno campo dell'informatica. La metodologia proposta sarà quella storico-fondazionale-divulgativa, con forte interesse nelle direzioni di studi elementari da un punto di vista superiore. I saggi pubblicati, vagliati dai Referee del Comitato scientifico, saranno valutati tenendo conto dei seguenti criteri:

- originalità nella stesura del lavoro e dell'apparato critico;
- significatività didattica del tema proposto;
- correttezza scientifica e rigore metodologico;
- proprietà di linguaggio e fluidità del testo;
- approfondito apparato di riferimenti bibliografici.

I *referee* restano anonimi per un anno. Le comunicazioni, i report, i pareri e tutti i dati dei *referee* sono trattati e gestiti dal Comitato Direttivo, preposto alla redazione.

Per essere inseriti nella mailing list di coloro che, via mail, riceveranno il *Periodico di Matematica*, occorre scrivere, inviando un mini-curriculum di poche righe, al prof. Giovanni Catalani giovannicatalani@gmail.com

PEZZULLI

I pezzulli, seguendo una antica idea di Bruno de Finetti, sono piccole pillole di saperi e riflessioni, atti a riempire spazi vuoti nel testo di una rivista (ad esempio la pagina pari, o metà della stessa, di fine lavoro se vuota).

I profili biografici dei membri del Comitato Direttivo sono disponibili nel sito www.afsu.it

AVVERTENZE PER I COLLABORATORI

Gli articoli devono essere redatti con un qualunque programma di test editor (MS Word, WordPad, ecc...) rispettando le norme editoriali pubblicate nel sito www.afsu.it.

Le figure devono essere inviate separatamente dal testo, in un qualsiasi formato digitale (jpg, jpeg, tiff, bmp, png, ecc.) e in alta risoluzione (300 dpi).

All'interno del testo devono comparire SOLTANTO le didascalie nei punti ove si desidera vengano applicate le figure.

INDICE

Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Luca Nicotra <i>Editoriale</i>	7
Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni, Luca Nicotra <i>La storia del Periodico di Matematica</i>	11
Franco Eugeni <i>I movimenti e la distanza nel piano di Klein, modello di geometria iperbolica</i>	33
Raffaele Mascella <i>La possibilità non archimedea</i>	97
Danilo Pelusi <i>Logica fuzzy e calcolo delle probabilità: due facce della stessa medaglia?</i>	151
Giordano Bruno <i>Incertezza: il pensiero sistemico di Bruno de Finetti</i>	169
Fernando Casolaro <i>Una rappresentazione grafica di carattere locale per integrali non calcolabili elementarmente</i>	197
Franco Francia <i>Insiemi completi del terzo ordine</i>	205

Giuseppe Anichini, Giuseppe Conti, Alberto Trotta <i>L'uso dell'insieme delle soluzioni per risolvere i problemi al contorno e le equazioni integrali</i>	227
Alessio Giuseppe Ferraioli* e Canio Noce <i>Il paradosso di Zenone quantistico</i>	249
Franco Eugeni <i>Per una risposta alla lettera di Renata Santarossa</i>	277
Luca Nicotra <i>Computer sì, computer no?</i>	283
Renata Santarossa <i>Lettera aperta a coloro che amano la Scuola</i>	299
Recensione di Danilo Pelusi Francesco Lerda <i>Intelligenza umana e intelligenza artificiale</i>	316
Recensione di Vincenzo Di Marcello Richard Courant, Herbert Robbins <i>Che cos'è la matematica?</i>	319
Profili biografici degli autori	321
Norme per gli autori	325

Editoriale

Ferdinando Casolaro*

Franco Eugeni^

Luca Nicotra°

*Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»

^Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»

° Direttore di redazione e Direttore responsabile
del «Periodico di Matematica»

La gloriosa rivista «Periodico di Matematica» fu fondata nel 1886 a Roma da Davide Besso, che dal secondo anno fino al 1890 fu affiancato nella direzione da Aurelio Lugli, il quale poi ne proseguì da solo la direzione dal 1891 fino al 1896. Fra il 1897 e il 1918 ne curò la pubblicazione, in Livorno, Giulio Lazzeri,¹ divenendo nel 1899 l'organo di stampa ufficiale della Mathesis (Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche).

La Rivista ebbe una vita di fatto piuttosto breve, avendo pubblicato articoli per 33 anni: dal 1886 fino al 1918, in 3 diverse serie di gestione. A distanza di 100 anni, l'antica rivista risorge, nel 2019 come 34.mo anno e serie IV.

L'idea della rinascita è dovuta ad alcuni studiosi e precisamente ai professori Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni e all'ingegnere e giornalista Luca Nicotra, che dal loro mondo di divulgazione scientifica stanno riproponendo

¹Per le notizie biografiche su Davide Besso, Aurelio Lugli e Giulio Lazzeri si rimanda all'articolo *Storia del Periodico di Matematica* in questo stesso fascicolo.

interessanti problematiche di ricerca, con il fine di allargare il mondo culturale dei docenti di scuola secondaria secondo un progetto molto preciso.

Il progetto ha avuto inizio con la fondazione dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU) e del suo sito www.afsu.it.

Il secondo passo è stato quello della pubblicazione del n.1 del «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», che ha presentato lavori, molto eterogenei, che vanno dalla matematica alla fisica, alla letteratura, alla filosofia, alla sociologia e alla storia. Tuttavia, una rivista con tematiche così generali è sembrata a molti troppo dispersiva.

Allora tra noi tre, proprio nell'ambito di una discussione su un lavoro di Ferdinando Casolaro relativo alla storia della Mathesis, è emerso il ricordo di una antica idea del nostro compianto amico professor Aldo Morelli, che dedicò la sua esistenza ai docenti di scuola secondaria e ai loro allievi. Morelli ebbe l'idea di ripubblicare alcuni lavori dell'antico «Periodico di Matematica» nella rivista, dal titolo quasi simile, denominata «Periodico di matematiche» fondata da Federigo Enriques e Giulio Lazzeri nel 1921, che è tutt'oggi attiva dopo essere passata per varie direzioni: Federigo Enriques, Giulio Lazzeri, Oscar Chisini, Modesto Dedò, Carlo Felice Manara, Bruno de Finetti, Michele Pellerrey, Bruno, Francesco Speranza, Giuseppe Festa, Silvio Maracchia, Gianfranco Gambarelli, Franco Eugeni, Andrea Laforgia, Emilio Ambrisi e Antonio Maturo.

La lettura di antichi lavori presi dal «Periodico di Matematica», ad avviso di Morelli, ma anche nostro, dovrebbe

essere una fonte preziosa di arricchimento per quanti, professori e allievi, desiderino ampliare i loro saperi.

Il campo che si apre è quello delle “Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore”, campo interessante che va ampliato alla “Fisica Elementare da un Punto di Vista Superiore” unitamente alla divulgazione sia delle conoscenze astronomiche sia delle nuove frontiere della fisica quantistica.

In tempi come gli attuali, dominati in tutti gli strati della società dagli strumenti e servizi informatici, ci è parso doveroso estendere il dominio di applicazione del rinnovato «Periodico di Matematica» anche all’ “Informatica Elementare da un Punto di Vista Superiore”, con particolare attenzione alla divulgazione della protezione dell’informazione, delle sue problematiche e delle molteplici applicazioni alla vita sociale e produttiva dell’uomo.

Relativamente a tutte queste discipline occorre comprendere la critica dei fondamenti, l’epistemologia e la storia.

Così abbiamo deciso di rivitalizzare questa antica rivista, spostando di 100 anni il suo 34.mo anno di vita, dando alla nuova serie un compito molto preciso.

Giova ricordare che lo stesso compianto professor Giancarlo Rota ebbe più volte a segnalare quanto importante sia sempre stata la rilettura di antichi lavori, con lo scopo di comprenderli, riscriverli, ampliarli alla luce delle nuove conoscenze. Questo vale nella ricerca avanzata, ma anche nella ricerca didattica del genere da noi indicato.

La realtà e la sua rappresentazione

Le immagini che ci costruiamo dell'universo vivono dentro di noi, nello spazio dei nostri pensieri. Fra queste immagini - fra quello che riusciamo a ricostruire e comprendere con i nostri mezzi limitati - e la realtà della quale siamo parte, esistono filtri innumerevoli: la nostra ignoranza, la limitatezza dei nostri sensi e della nostra intelligenza, le condizioni stesse che la nostra natura di soggetti, e soggetti particolari, mette all'esperienza. Queste condizioni, tuttavia, non sono universali, come immaginava Kant, deducendone poi, evidentemente a torto, che la natura euclidea dello spazio e perfino la meccanica newtoniana dovessero essere vere a priori. Sono a posteriori dell'evoluzione mentale della nostra specie, e sono in evoluzione continua. Non solo impariamo, ma impariamo anche a cambiare gradualmente la nostra struttura concettuale, e ad adattarla a ciò che impariamo. E ciò che impariamo a conoscere, anche se lentamente e a tentoni, è il mondo reale di cui siamo parte. Le immagini che ci costruiamo dell'universo vivono dentro di noi, nello spazio dei nostri pensieri, ma descrivono più o meno bene il mondo reale di cui siamo parte. Seguiamo tracce per descrivere meglio questo mondo.

Carlo Rovelli, (*Sette brevi lezioni di fisica*,
Milano, Adelphi, 2014, pp. 73-74).

=====

Storia del Periodico di Matematica

Ferdinando Casolaro*

Franco Eugeni^

Luca Nicotra°

*Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»

^Direttore di redazione del «Periodico di Matematica»

° Direttore responsabile del «Periodico di Matematica»

Sunto: *In questo articolo viene ripercorsa la storia del «Periodico di Matematica» dalla sua fondazione nel 1896, ad opera di Davide Besso, fino alla sua rinascita nel 2019 ad opem di Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni e Luca Nicotra. Una panoramica della editoria matematica e delle nuove esigenze di conoscenza di esperienze didattiche e pedagogiche, nelle scuole secondarie dell'Italia post-unificazione, chiarisce le ragioni della nascita del «Periodico di Matematica», considerato il primo giornale italiano interamente dedicato alla matematica elementare.*

Parole Chiave: *Periodico di Matematica, matematica elementare, didattica della matematica.*

Abstract: *This article traces the history of the " Periodico di Matematica" since its foundation in 1896, by Davide Besso, until its rebirth in 2019 by Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni and Luca Nicotra. An overview of mathematical publishing and the new knowledge requirements of didactic and pedagogical experiences, in secondary schools of post-unification Italy, clarifies the reasons for the birth of the "Periodico di Matematica", considered the first Italian newspaper entirely dedicated to elementary mathematics.*

Keywords: *Periodico di Matematica, elementary mathematics, mathematics education.*

1 - La comunicazione scientifica in Italia nel secolo XIX prima dell'unificazione

Da sempre gli scienziati di tutto il mondo hanno sentito l'opportunità di rendere pubbliche le proprie scoperte scientifiche, nella forma più tradizionale delle pubblicazioni editate dalle accademie o del libro stampato. Spesso, però, hanno avvertito la necessità di una comunicazione più dinamica e interattiva, che consentisse la discussione, lo scambio di idee, a volte un aiuto per il prosieguo di una ricerca giunta a un punto di stallo. In tal senso vanno considerati gli scambi epistolari fra scienziati, di cui è ricca la storia della scienza, anche nell'Antichità classica.

ATTI
DELLA
PRIMA RIUNIONE
DEGLI SCIENZIATI ITALIANI
TENUTA IN PISA
NELL'OTTOBRE DEL 1839



REGOLAMENTO GENERALE
PER
LE ANNUALI RIUNIONI ITALIANE
DEI CULTORI
DELLE SCIENZE NATURALI

- I.
Il fine delle Riunioni dei cultori delle scienze naturali si è di giovare ai progressi ed alla diffusione di tali scienze e delle loro utili applicazioni.
A conseguir questo fine gli scienziati si adunano ogni autunno in una delle città d'Italia, per un periodo di tempo che non dovrà mai oltrepassare i quindici giorni.
- II.
Hanno diritto di essere membri della Riunione tutti gl'italiani iscritti alle principali Accademie o Società scientifiche istituite per l'avanzamento delle scienze naturali, i Professori delle scienze fisiche e matematiche, i Direttori degli alti studi o di stabilimenti scientifici dei vari Stati d'Italia, e gl'ingegneri superiori nei Corpi del Genio e dell'Artiglieria. Gli esteri compresi nelle categorie precedenti saranno pure ammessi alle Riunioni.
- III.
Ogni annua Riunione avrà un Presidente generale, due Assessori ed un Segretario generale. Nella prima adunanza si procederà alla

Fig. 1 - Atti della Prima Riunione degli Scienziati Italiani (1839) e Regolamento delle Riunioni.

La Rivoluzione Industriale aveva aumentato l'attenzione verso i progressi delle conoscenze scientifico-tecnologiche, promuovendo in molti Paesi europei la creazione di circoli e

riunioni scientifiche che si affiancarono alle tradizionali accademie.

In Italia il principale promotore¹ di queste nuove iniziative fu lo zoologo Carlo Luciano Bonaparte, (figlio di Luciano, fratello minore di Napoleone I) che, animato da fervori nazionalisti, convinse il Granduca di Toscana Leopoldo II a promuovere a Pisa dal 1° al 15 ottobre del 1839 la prima riunione della “Unione degli Scienziati Italiani”. La scelta di Pisa sembrò la più adatta, sia per il fatto di trovarsi in Toscana, dove Leopoldo II era noto per i suoi interessi scientifici, sia per il fatto di essere la città natale di Galilei, universalmente riconosciuto il padre della scienza moderna. Le riunioni si tennero con cadenza annuale fino al 1847. Successivamente ripresero nell’Italia unificata nel 1861 a Firenze con una edizione straordinaria, nel 1862 a Siena, nel 1873 a Roma e si conclusero nell’ultima del 1875 a Palermo, in occasione della quale fu approvato il regolamento della “Società Italiana per il Progresso delle Scienze” (SIPS),² la quale pertanto è da considerare il prosieguo della “Unione degli Scienziati Italiani”.

Le sezioni erano sei:

1. Fisica, chimica e scienze matematiche;
2. Geologia, mineralogia e geografia;
3. Botanica e fisiologia vegetabile;
4. Zoologia e anatomia comparativa;

¹ Gli altri furono: Vincenzo Antinori, Giovanni Battista Amici, Gaetano Giorgini, Paolo Savi e Maurizio Bufalini.

² In realtà la SIPS rimase inattiva fino al 1906, anno in cui Vito Volterra la ricostituì. Il primo congresso della SIPS si tenne a Parma nel 1907 e l’anno dopo, nel 1908, la nuova istituzione fu riconosciuta, ufficialmente con regio decreto, come ente morale nazionale.

5. Medicina;
6. Agronomia e tecnologia.

Le “Riunioni degli Scienziati Italiani” coinvolgevano scienziati di varie discipline ed erano mirate soprattutto a promuovere la ricerca, consentendo a scienziati diversi di conoscere le rispettive ricerche.



Fig. 2 - «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche». Tomo I, 1850.

Delle stesse finalità, ma orientate soltanto verso le matematiche pure e applicate in Italia, sono da considerare gli «Annali di Scienze Matematiche e Fisiche» di Barnaba Tortolini, pubblicati per la prima volta a Roma nel 1850, la cui denominazione cambierà nel 1858 in «Annali di Matematica Pura e Applicata» sotto la direzione di Enrico Betti, Francesco Brioschi, Angelo Genocchi e Barnaba Tortolini (Betti, Brioschi, Genocchi, Tortolini, 1858):

Il rapido e continuo incremento delle Scienze Matematiche in questi ultimi tempi, è dovuto principalmente alla facilità con cui le molte e varie ricerche appena intraprese, le nuove verità appena scoperte possono subito estendersi e fecondarsi da molti geometri contemporaneamente in varie parti d'Europa.

Quindi per tutte le nazioni, che vogliono cooperare a questo progresso, la necessità di periodici che diffondano con prestezza e regolarità i nuovi trovati dei loro dotti, e che agevolino il modo di seguire il generale avanzamento della Scienza.

ANNALI DI MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

PUBBLICATI DA

BARNABA TORTOLINI

Professore di Calcolo Sublime all'Università di Roma

C. Compilati da

E. BETTI a Pisa	•	A. GENOCHI a Torino
F. BRUSCHI a Pavia	•	B. TORTOLINI a Roma

(In continuazione agli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche)

TOMO II. ANNO 1859.

ROMA

PRESSO FRANCESCO BLEGGI LIBRAIO

(Via del Pò di Marone N°. 38.)

1859.

Fig. 3 - «Annali di Matematica Pura ed Applicata». Tomo II, 1859.

Anche il «Bulettno di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche», fondato a Roma nel 1868 dal principe Baldassarre Boncompagni Ludovisi, è da considerare una delle più autorevoli pubblicazioni periodiche del secolo XIX rivolte alla comunicazione scientifica a livello di ricerca, nello

specifico campo della storia delle matematiche con impostazione filologica. Cessò la pubblicazione nel 1887.

BULLETTINO
DI
BIBLIOGRAFIA E DI STORIA

DE

DELLS

SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE

RECEIVED

DA R. BONCOMPAGNI

MEMO ORIGINARIO DELL'ACCADEMIA PORTUGHESA DEI SCIENZE LINGUE,
MEMO CORRISPONDENTE DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA,
DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO, E DI ROMA, LETTURA AD ATTI DI GIUGNO
E AGOSTO, ORIGINARIO DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI PARIGI.

TOMO II.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lato Nam: 211 A.
1969

Fig. 4 - «Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e Fisiche». Tomo II, 1869.

Con un certo orientamento verso la didattica, a livello universitario, era invece il «Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiane», fondato a Napoli nel 1863 da Giuseppe Battaglini, in collaborazione con Vincenzo Janni e Nicola Trudi, tutti dell'Università "Federico II". Battaglini ne tenne la direzione per 31 anni fino alla sua morte nel 1894. Dal 1894 cambiò il nome in «Giornale di matematiche di Battaglini» e poi semplicemente in «Giornale di Battaglini» in onore del suo fondatore e più longevo direttore. A Battaglini seguirono nella direzione del suo

Giornale nomi illustri: Alfredo Capelli, Ernesto Pascal, Renato Caccoppoli e Carlo Miranda.

Lo stesso Battaglini, nella nota iniziale, da lui firmata, all'articolo di Valentino Cerruti del 1875 contenente la soluzione dei problemi proposti negli esami di licenza per i licei e gli istituti tecnici del Regno d'Italia (Cerruti,1875), segnalò la necessità di una maggiore attenzione ai problemi dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie, di cui difettava il nostro Paese:

Crediamo utile pubblicare queste soluzioni nel Giornale, in mancanza di altro Periodico, che (come praticasi in altri paesi) renda note al pubblico le questioni che si propongono per gli esami.



Fig. 5 - «Giornale di Matematiche ad Uso degli Studenti delle Università Italiane», volume I, 1863 e «Giornale di matematiche di Battaglini» volume XXXVI, 1898.

Un esame accurato dell'editoria matematica italiana dalla seconda metà del secolo XIX alla prima metà del secolo XX si trova in (Fenaroli G., Furinghetti F., Garibaldi A. C. & Somaglia A. M., 1990; Fenaroli G., Furinghetti F. & Somaglia A. M., 1991).

2 - Il giornalismo matematico a carattere elementare in Italia

L'opportunità di scambio di idee ed esperienze sull'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie fu avvertita ancor prima dell'unificazione del nostro Paese nelle "Riunioni degli Scienziati Italiani". Già nella riunione del 1845 a Napoli, per esempio, era stata nominata una commissione «per raccogliere notizie relative alla statistica della istruzione popolare in tutta l'Italia, e di ricercare quali siano i metodi da preferirsi per diffondere la istruzione medesima» (Riunione degli Scienziati Italiani, 1846). È curioso notare che in tali riunioni si trattavano i problemi dell'istruzione come se si parlasse dell'Italia unificata, pur essendo in realtà divisa in diversi stati.

Il 13 novembre 1859, il ministro dell'istruzione del Regno di Sardegna Gabrio Casati emanò un regio decreto legislativo (n. 3725) che riformava l'intero ordinamento scolastico. Esso però entrò in vigore qualche mese dopol'unificazione della Penisola come regio decreto 28 novembre 1861, n. 347 del nuovo Regno d'Italia. L'unificazione accentuò la percezione della necessità di scambi di esperienze e idee a livello didattico e pedagogico fra professori di scuole secondarie di diverse parti d'Italia.

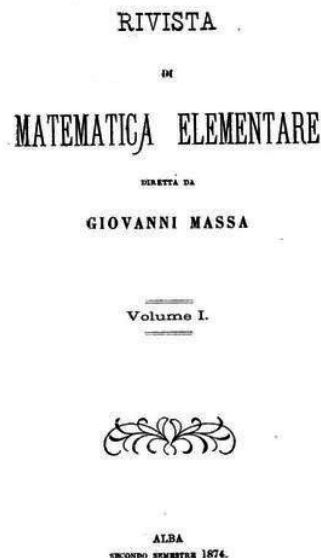


Fig. 6 - «Rivista di Matematica Elementare». Volume I, 1874.

Per facilitare la comunicazione fra i docenti del nuovo Stato, nacquero diverse riviste dedicate all'insegnamento della matematica elementare, creando una nuova forma di "giornalismo matematico a carattere elementare" (Furinghetti e Somaglia, 1992).

Nel giugno del 1873 apparve il primo numero del «Periodico di Scienze Matematiche e Naturali per l'Insegnamento Secondario» (Boncompagni, 1873, 1874, 1875), curato da Angelo Armenante, Eugenio Bertini, Davide Besso, Enrico De Montel, Luigi Pinto, Francesco Rodriguez, Leone De Sanctis. La Rivista non era dedicata esclusivamente ai problemi dell'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie. Uscirono in tutto 13 fascicoli, cessando la pubblicazione nel 1875.

La prima importante rivista italiana interamente dedicata alla matematica elementare (Candido, 1903; Cavallaro 1930) fu, invece, la *Rivista di matematica elementare*, fondata da Giovanni Massa³ in Piemonte, ad Alba, nel 1874 e continuata a Novara dal 1879 al 1885 da Francesco Gastaldi. Gli articoli, scritti per la maggior parte da professori di scuola secondaria di diverse regioni d'Italia, trattavano, in maggior numero, di algebra, aritmetica, teoria dei numeri, calcolo combinatorio e geometria. Qualche articolo era anche dedicato all'analisi matematica, alla storia e ai fondamenti della matematica. Le finalità della Rivista furono espresse chiaramente da Gastaldi quando ne assunse la direzione Gastaldi, 1879, p.3):

Procurare agli insegnanti il mezzo di conoscere i risultati degli studi fatti dagli altri nella Matematica elementare, e di rendere pubblici quelli ottenuti dai proprii studi in vantaggio dell'insegnamento secondario ...

Il 15 marzo 1883 uscì il primo numero de «Il piccolo Pitagora», fondato a Novara da Alberto Cavezzali. Il sottotitolo era: «Periodico di Matematica per gli Alunni delle Scuole Secondarie e pei Maestri Elementari». Ebbe una vita effimera, cessando le pubblicazioni nel 1884. Tuttavia, può essere considerato il primo tentativo, in Italia, di giornale dedicato alla didattica della matematica nelle scuole primarie.

³ Professore di ragioneria al Reale Istituto Tecnico di Novara. Autore di opere di computisteria, ragioneria e di eserciziari, prevalentemente di aritmetica, e di diversi lavori di contabilità.

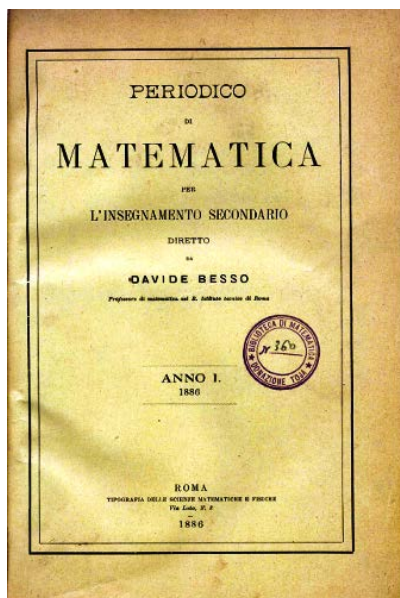


Fig. 7 – «Periodico di Matematica». Anno I, 1886.

3 - Il «Periodico di Matematica»

L'anno dopo la cessata pubblicazione della «Rivista di Matematica Elementare», nel 1886, Davide Besso (1845-1906) fondò a Roma il «Periodico di Matematica», con le medesime finalità.

A Besso si affiancò Aurelio Lugli (1853-1896), che ne sarà l'effettivo direttore e proprietario dal 1891 al 1896, anno della sua morte.

Gli successe nella direzione Giulio Lazzeri (1861-1935) dal 1896 al 1918, anno XXXIII e anche della chiusura della Rivista con la serie III.

Nel 1896 all'interno del Periodico comparve per la prima volta il «Bollettino dell'Associazione Mathesis» (istituzione fondata l'anno precedente, nel 1895, con gerente responsabile Giovanni Frattini e presidente Rodolfo Bettazzi).

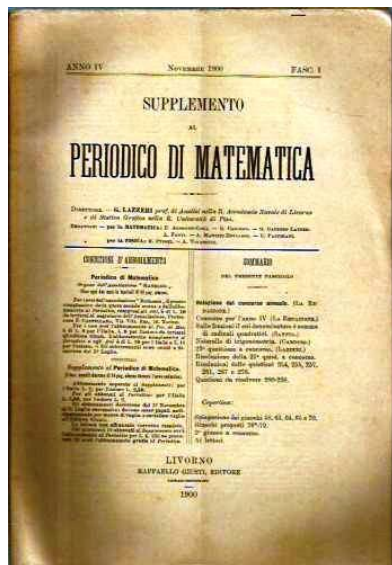


Fig. 8 - «Supplemento al Periodico di Matematica». Anno IV, Fasc. 1, 1900.

Il «Periodico di Matematica» diventò così l'organo ufficiale della Mathesis. Il «Bollettino dell'Associazione Mathesis» continuò le sue pubblicazioni fino al momento in cui l'Associazione Mathesis diventò "Mathesis, Società Italiana di Matematica" uscendo come primo numero nel suo nuovo status a Padova nel 1909.

Pur essendo dedicato all'insegnamento secondario, come esplicitamente indicato nel sottotitolo, nessuno dei direttori della prima serie del Periodico aveva indicato una precisa

linea editoriale nei riguardi della didattica della matematica. Soltanto con l'inizio della seconda serie, nel 1897, il nuovo direttore Giulio Lazzeri (1897, p.1) manifestò chiaramente l'indirizzo editoriale, scrivendo che la Rivista doveva essere «un strumento indispensabile per scolari e docenti». Per rafforzare queste indicazioni egli, nello stesso anno, affiancò al Periodico la pubblicazione del «Supplemento al Periodico di Matematica», contenente soprattutto questioni, giochi, esercizi e articoli di matematica elementare.

Negli anni immediatamente successivi alla nascita del «Periodico di Matematica» comparvero altri giornali dedicati all'insegnamento della matematica elementare, spesso curati da collaboratori della vecchia «Rivista di Matematica Elementare». Fra questi «Il Tartaglia» fondato da Pietro Caminati a Foggia nel 1898.

A distanza di 100 anni, nel 2019, l'antica rivista risorge con la medesima testata, come 34.mo anno e serie IV, per opera di alcuni studiosi - i professori Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni e l'ingegnere e giornalista scientifico Luca Nicotra - con il fine di allargare il mondo culturale dei docenti di scuola secondaria secondo una impostazione più in linea con i tempi attuali. Il campo che si apre è quello, già indicato da Federigo Enriques, delle «Matematiche Elementari da un Punto di Vista Superiore», ampliato alla «Fisica Elementare da un Punto di Vista Superiore» unitamente alla divulgazione sia delle conoscenze astronomiche sia delle nuove frontiere della fisica quantistica. In tempi come gli attuali, dominati in tutti gli strati della società dagli strumenti e servizi informatici, è parso doveroso estendere il dominio di applicazione del rinnovato «Periodico di Matematica» anche all'«Informatica».

Elementare da un Punto di Vista Superiore", con particolare attenzione alla tematica della protezione dell'informazione e alle sue molteplici applicazioni alla vita sociale e produttiva dell'uomo. Relativamente a tutte queste discipline occorre comprendere anche la critica dei fondamenti, l'epistemologia e la storia.

3.1 – Edizioni del «Periodico di Matematica»

SERIE I

1886 direzione: Davide Besso

1887-1890 direzione: Davide Besso e Aurelio Lugli

1891-1896 direzione: Aurelio Lugli

1897-1898 direzione: Giovanni Frattini e Giulio Lazzeri

SERIE II (organo della Mathesis)

1899-1903 direzione: Giulio Lazzeri

SERIE III (organo della Mathesis)

1904-1918 direzione: Giulio Lazzeri

1919-2018 la Rivista è sospesa, come organo della Mathesis e nel 1921, per opera di Federigo Enriques, viene sostituita dal «Periodico di Matematiche».

SERIE IV (rivista dell'AFSU)

2019-2020 direzione:

Ferdinando Casolaro, Franco Eugeni e Luca Nicotra.



Fig. 9 - «Periodico di Matematica», Anno XXXIV, Serie IV, Vol. I, 2019.

3.2 – Direttori storici del «Periodico di Matematica»

Davide Besso nacque a Trieste il 28 luglio 1845 da una famiglia di importanti mercanti di origine ebraica. Ebbe come fratelli Giuseppe, dirigente alle Assicurazioni Generali, Beniamino, ingegnere ferroviario, e Marco, presidente delle Assicurazioni Generali. Nipote di Davide (in quanto figlio di Giuseppe Besso) fu il famoso Michele Besso, l'amico più stretto di Albert Einstein, che gli riconobbe numerosi preziosi suggerimenti nella elaborazione della Teoria della Relatività Ristretta. Davide appartenne, quindi, a una illustre famiglia di ingegneri e matematici di prestigio internazionale. Completò le scuole secondarie a Trieste e Pavia, si laureò in

“Matematiche pure” a Pisa nel 1866. Cominciò subito a insegnare in un istituto tecnico a Perugia e poi dal 1871 al 1888 al Regio Istituto Tecnico “Leonardo da Vinci” di Roma. Nel 1886, Davide Besso fondò a Roma il «Periodico di Matematica» e nel 1888 ottenne, in seguito a concorso, la cattedra di Analisi Infinitesimale presso la Regia Università di Modena. La sua produzione scientifica è costituita da una sessantina di pubblicazioni riguardanti, per lo più, questioni didattiche, storiche, le equazioni algebriche di 5° e 6° grado e le equazioni differenziali lineari. Davide si era distinto giovanissimo per alcune ricerche di analisi matematica sul calcolo integrale, sulla teoria delle equazioni differenziali lineari e sulle equazioni di quinto e sesto grado, pubblicate su alcune importanti riviste del tempo, quali gli «Atti dell'Accademia dei Lincei», i periodici dell'«Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti» di Modena e sul «Giornale di Matematiche» di Giuseppe Battaglini. Pubblicò, fra l'altro, la traduzione dal tedesco, con note, della *Geometria popolare* di C.L. Littrow (1809) e il libro scolastico *Elementi di trigonometria piana* (1880). Nel 1869 pubblicò, sul «Giornale di matematiche», il saggio *Del concetto di funzione nell'insegnamento della geometria elementare*, che rivelava in pieno il suo interesse per la didattica, che lo condusse a operare per rendere piacevole e interessante la matematica ai giovani che ebbe come allievi diretti e indiretti. Collaborò attivamente nel periodo 1877-1884 alla «Rivista di Matematica Elementare» e all'«Annuario del Regio Istituto Tecnico Leonardo da Vinci di Roma», nei quali sono reperibili suoi articoli, collegati con le sue lezioni nelle scuole secondarie. Secondo Davide Besso era fondamentale

l'aspetto epistemologico della matematica, che avrebbe dovuto guidare ogni possibile proposta di rinnovamento, a livello sia di metodologia sia di insegnamento sia di revisione dei suoi contenuti. Lo dimostrò chiaramente nella sua rivista, il «Periodico di Matematica», pubblicandovi numerosi articoli sulla geometria elementare, sui suoi fondamenti e sull'analisi, senza dimenticare la proposta di continui e interessanti *Esercizi per la scuola*, che andavano dall'aritmetica, all'algebra e alla trigonometria. A quanto sembra, la cattedra universitaria non gli diede grandi soddisfazioni e colpito da una forma di *taedium vitae* - oggi diremmo depressione - forse per la morte della madre, nel 1896, a soli 51 anni decise di ritirarsi in un precoce pensionamento. Alberto Caracciolo ha osservato che probabilmente Davide Besso visse in quello che fu un «tormentato percorso di due o tre generazioni, fra componenti ebraiche, levantine, triestine, italiane, fra religiosità e razionalismo, fra affari e filantropia, alla ricerca di identità più sicure in un difficile mondo che stava esaltando le nazioni, la modernizzazione, il pensiero positivo».

Nel 1906 morì a Frascati a 61 anni.⁴

⁴ Fonti sulla biografia di Davide Besso: Biblioteca civica «A. Hortis», Trieste, fondo Besso; Biblioteca del Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Trieste; A. Caracciolo, Una diaspora da Trieste. I Besso nell'Ottocento, in «Quaderni storici», 1983, n. 54, pp. 897-912; V. Zudini, R. Pitacco, *Davide Besso, vita e opere di un matematico triestino*, Trieste, Assessorato alla cultura, Servizio bibliotecario urbano, 2006; L. Zuccheri, A. Caracciolo, Una diaspora da Trieste. I Besso nell'Ottocento, in «Quaderni storici», 1983, n. 54, pp. 897-912; L. Zuccheri, V. Zudini, *Animi divisi. Vicende dell'insegnamento della matematica nella*

Aurelio Lugli nacque a Modena il 6 dicembre 1853. Si laureò in "Matematiche pure" a Pisa nel 1876, dove fu allievo della "Regia Scuola Normale Superiore". Entrò subito dopo nell'insegnamento presso la Scuola Tecnica "Pietro Metastasio" di Roma dove rimase fino al 1887, per passare al Regio Istituto Tecnico "Leonardo da Vinci" di Roma dal 1888. Nel contempo, lavorò come assistente presso l' "Ufficio Centrale di Meteorologia", quale addetto alle previsioni del tempo. Si occupò dal 1887, come collaboratore di Davide Besso, della gestione del «Periodico di Matematica», per subentrargli come unico direttore nel 1891. Importante e ricordata la sua partecipazione alla fase progettuale di fondazione della Società Italiana "Mathesis", con Rodolfo Bettazzi (1861-1941) e Francesco Giudice (1855-1936), prima associazione italiana di insegnanti di matematica delle scuole secondarie. Aurelio Lugli è autore di una ventina di lavori sia di matematica elementare che nel settore, da lui molto amato, della meteorologia. Morì a Roma il 27 maggio 1896.⁵

Giulio Lazzeri nacque a Pisa il 25 marzo 1861, dove frequentò le scuole secondarie e la Regia Scuola Normale Superiore, conseguendo nel 1882 l'abilitazione alla libera

Venezia Giulia dal 1918 al 1923, Trieste, EUT, 2007, pp. 7-38; Sandra Linguerri, Raffaella Simili, *Einstein parla italiano: itinerari e polemiche*, January 1, 2008, Edizioni Pendragon; P. Dossier, Michel Besso 1873-1955, in «*Archives des Sciences*», IX, , 1956, pp. 73-76); «*Periodico di Matematica*», 22, (1907), p. 48 (G. Lazzeri); Roberto Marcolongo, Davide Besso, in «*Periodico di Matematica*», Serie III, n. 4, 1907, pp. 147-156.

⁵ Necrologio di Aurelio Lugli in «*Periodico di Matematica*», 11 (1896), pp.77-80 (E. Millosevich).

docenza con la memoria *Sulla rappresentazione delle superficie sviluppabili razionali*. Nello stesso anno fu nominato professore nell'Istituto Tecnico di La Spezia, posto che lasciò nel 1886 avendo ottenuto, per concorso, una Cattedra di matematica nella Regia Accademia Navale di Livorno. Le sue numerose memorie testimoniano la sua fervente attività scientifica per lo più dedicata a problematiche relative alle trasformazioni cremoniane e alle superficie algebriche. Molto interessante il suo libro *Elementi di Geometria* (1891), scritto assieme ad Anselmo Bassani (1856-1911). Questa opera voleva essere un completamento del libro di Riccardo De Paolis (1854-1892), caratterizzato dal presentare in forma unitaria la geometria del piano e dello spazio. L'opera, tradotta anche in tedesco, diede spunti per lunghe e animate discussioni di carattere critico ed epistemologico. In ogni caso, l'elevata competenza del Lazzeri non fu mai posta in discussione, così che fu chiamato come membro nella "Sezione Italiana della Commissione Internazionale per l'Insegnamento della Matematica". Fu anche cooptato nel "Consiglio Superiore della Istruzione Nautica" e come membro della "Società Italiana per il Progresso delle Scienze". Riconosciuto anche all'estero, fu socio onorario della Sociedad Científica "Antonio Alzate" del Mexico. A seguito della morte di Aurelio Lugli, avvenuta nel 1896, e dopo la breve direzione di Giovanni Frattini (1852-1925), nel 1897 Giulio Lazzeri fu invitato dalla "Mathesis" ad assumere la direzione del «Periodico di Matematica», In tal modo la direzione del Periodico passò da Roma a Livorno. Nello stesso anno Lazzeri fondò il «Supplemento al Periodico di Matematica», destinato principalmente agli studenti delle scuole medie. Entrambe le riviste cessarono la pubblicazione nel 1918. Nel 1908 alle

elezioni per il quinto presidente della “Mathesis”, Giulio Lazzeri fu il più eletto con 143 voti, ma rinunciò a tale prestigioso incarico perché oberato dai suoi impegni editoriali, così come rifiutò Alberto Conti⁶ (1837-1940) il secondo eletto con 130 voti. Così divenne, a seguito delle rinunce, quinto presidente della “Mathesis”, Francesco Severi (1879-1961), che era stato il terzo eletto con 129 voti.⁷

Nel 1921, assieme a Federigo Enriques (1871-1946), Lazzeri fondò la nuova rivista «Periodico di Matematiche», che gestì con l'Enriques fino alla sua morte. Giulio Lazzeri morì a Livorno il 23 settembre 1935.⁸

Giovanni Frattini nacque a Roma, l'8 gennaio 1852, dove si laureò nel 1875. Si formò alla Scuola di Giuseppe Battaglini ed Eugenio Beltrami, dei quali fu allievo. Dal 1876 insegnò Geometria Descrittiva al liceo di Caltanissetta fino al 1878, poi all'Istituto tecnico di Viterbo e dal 1881 all'Istituto tecnico “Leonardo da Vinci” di Roma dove si trasferì definitivamente.

⁶ Fu il fondatore del «Bollettino di Matematica», poi diventato «Archimede», che Alberto Conti diresse fino alla sua morte.

⁷ I presidenti della “Mathesis”, dalla sua Fondazione avvenuta nel 1896 e per tutto il tempo dell'esistenza del «Periodico di Matematica», furono R. Bettazzi (1896- 1900), G. Frattini (1900-1902), R. Bettazzi (1902-1904), E. De Amicis (1904-1908), F. Severi (1909-1910), G. Castelnuovo (1911-1914), L. Berzolari (1915-1918).

⁸ Fonti biografiche su Giulio Lazzeri: Notiziario: 1908, “Mathesis - Società Italiana di Matematica”; «Periodico di Matematica», s. 3, vol. 6, 183; «Annuario biografico del Circolo Matematico di Palermo», 1928, 68; Amedeo Agostini, Nel cinquantesimo anno di insegnamento del prof. Giulio Lazzeri, «Periodico di Matematiche», s. 4, vol. 11, (1931), pp. 170-171. - Necrologi: Giulio Lazzeri, in «Periodico di Matematiche», s. 4, vol.

Dal 1884 iniziò ad interessarsi di Teoria dei Gruppi e pubblicò tre scritti. In uno di questi, del 1885, provò un lemma definito “sottogruppo di Frattini”. Per la qualità dei suoi lavori, anche nell’ambito della Geometria Differenziale, gli fu offerta una cattedra all’Università di Napoli e successivamente un ciclo di lezioni di Algebra all’Università di Roma, ma declinò l’offerta in entrambi i casi per motivi familiari, dovendo assistere e aiutare il figlio ferito in guerra. Molto importante è stato l’apporto alla didattica con il suo contributo alla “Mathesis”, della quale fu Presidente nel periodo 1900-1902, essendo però già attivo fin dalla nascita dell’Associazione. Nel 1896, con la presidenza Bettazzi, pubblicò per la prima volta il “Bollettino dell’Associazione Mathesis” all’interno del «Periodico di Matematica». Morì a Roma il 21 luglio 1925.

Bibliografia

Betti Enrico, Brioschi Francesco, Genocchi Angelo e Tortolini Barnaba (1858). Avviso dei compilatori. *Tomo I degli Annali di Matematica pura e applicata*.

Boncompagni Baldassarre (1873). Annunci di recenti pubblicazioni, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche efisiche, 1873, tomo VI*.

Boncompagni Baldassarre (1874). Annunci di recenti pubblicazioni, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche efisiche, 1874, tomo VII*.

Boncompagni Baldassarre (1875). Annunci di recenti pubblicazioni, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche efisiche, 1875, tomo VIII*.

Candido Giacomo (1903). Il giornalismo matematico in Italia, *Atti del III Congresso fra i professori di matematica delle Scuole Medie italiane, Napoli, 85-93*, anche in *Scritti matematici*, Firenze, Marzocco, 1948, 598-606.

Cavallaro Vincenzo (1930). Storia del giornalismo matematico italiano, *Il Bollettino di Matematica, nuova serie, v. 9, XLIX-LIX*.

Cerruti Valentino (1875). Soluzione dei problemi proposti negli esami di licenza per i licei e gl'istituti tecnici del regno, *Giornale di matematiche, v. 13, (1875), 337-343*.

Fenaroli G., Furinghetti F., Garibaldi A. C. & Somaglia A. M. (1990). Women and mathematical research in Italy during the period 1887-1946, in Burton, L. (editor) *Gender and Mathematics. An International Perspective*, Cassell, London, 144-155.

Fenaroli G., Furinghetti F. & Somaglia A. M. (1991). Lavori relativi al calcolo delle probabilità pubblicati su periodici italiani tra la fine dell'Ottocento ed i primi del Novecento, in Galuzzi, M. (a cura di) *Giornate di storia della matematica* (Cetraro, 1988), Cosenza, 105-141.

Furinghetti, Fulvia, Somaglia Annamaria (1992). Giornalismo matematico 'a carattere elementare' nella seconda metà dell'Ottocento. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, 15, 815-852*.

Gastaldi Francesco (1879). Agli associati, *Rivista di matematica elementare, serie 2, volume 1, 3-4*.

Lazzeri, Giulio (1897). Ai lettori, *Periodico di Matematica, anno XII*.

Unione degli Scienziati Italiani (1846). *Atti della settima adunanza degli scienziati italiani, 1846, 434*.

I movimenti e la distanza nel piano di Klein, modello di geometria iperbolica

Franco Eugeni*

*Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU) –
eugenif3@gmail.com

*Dedicato alla Prof.ssa Luigia Berardi¹
nell'occasione del suo compleanno*

Sunto. *In questa nota riportiamo i dettagli di uno studio approfondito del piano di Klein, di fatto l'esempio più diffuso ed intuitivamente comprensibile di geometria non euclidea di tipo iperbolico. Si costruiscono, in particolare, le equazioni delle omografie che mutano un cerchio in sé, alias i movimenti del piano iperbolico di Klein. La scelta dell'argomento è legato al fatto che nel decennio 1970-80 l'argomento del piano di Klein, fu un cavallo di battaglia di Luigia Berardi e mio, nel tentativo di divulgare a vari livelli – a cominciare dai maestri e dai ragazzi di scuola secondaria – l'idea non euclidea.*

Parole chiave: *assiomi, geometrie non euclidee, modello di Klein, omografie, movimenti, distanza.*

¹ La professoressa Luigia Berardi già professore ordinario di Geometria nell'Università dell'Aquila, si è laureata a Bologna con Mario Villa con una tesi in Geometria differenziale, ha continuato l'attività come docente di ruolo di Matematica e Fisica e presso l'Università dell'Aquila, nel ruolo di professore incaricato stabilizzato. Con il primo settore di ricerca, sulla Teoria delle Funzioni aritmetiche, ottiene la cattedra da Professore Associato. Sposta i suoi interessi di ricerca nell'ambito della Matematica discreta e delle Geometrie finite, nel gruppo di ricerca del prof. Giuseppe Tallini. Successivamente ottiene la cattedra di Professore Ordinario. Le sue principali collaborazioni scientifiche sono state con Albrecht Beutelspacher, Franco Eugeni e Mario Gionfriddo.

1 - Introduzione

La nascita delle Geometrie non euclidee segnò un momento importante nella storia della scienza. Si era ritenuto che i postulati di Euclide, definenti la geometria che porta il suo nome, fossero intoccabili e di origine oseremmo dire divina. La questione che potessero esistere strutture differenti da quella euclidea, sconvolse, in un certo qual modo, la certezza, se si vuole l'arroganza degli scienziati del tempo. L'esistenza di ambienti geometrici più ampi della struttura creata da Euclide, ma nella quale l'ambiente euclideo si ritrovava come caso particolare, condusse a quel salto epistemologico che fu tipico di quella rivoluzione ottocentesca, che ebbe il merito di preludere alla scoperta fisico matematica più importante del Novecento: la teoria della relatività di Einstein, a sua volta, salto epistemologico rispetto alla teoria classica di Newton.

2 - La metodologia didattica nell'Italia post-unitaria

Nei primi anni della Scuola Media inferiore si inizia a studiare la Geometria, seguendo quella via che è stata definita "intuitivo-sperimentale" utilizzando un modello che appare essenzialmente di tipo *fisico* o se si vuole, legato ad immagini che si possono cogliere dal mondo che ci circonda. Così il punto è "ciò che non ha parti" e quindi "senza dimensioni", la retta viene resa parzialmente dall'immagine del "filo a piombo", e "non ha spessore", l'idea di piano nasce dall'osservazione "dell'acqua stagnante" ed infine lo spazio è

“ciò che ci circonda, anche oltre il cielo”. Non sono definizioni vere e proprie, sono immagini mediate dalla realtà, che creano delle percezioni della geometria, così che la disciplina, lentamente, si fa strada in noi, creando un equivalente astratto nelle nostre menti.

Alla nascita dell’Unità d’Italia si decise di estendere a tutto il territorio nazionale la legge del Ministro piemontese Gabrio Casati² (1798–1873), che fu l’ultima riforma scolastica del vecchio regno. Per le innovazioni sui programmi furono nominate apposite commissioni. Fin dall’inizio la Commissione, nella quale erano, tra gli altri, il bolognese Luigi Cremona (1830-1903) e il napoletano Giuseppe Battaglini (1826-1894), propose che per la geometria si ricorresse, fin dal ginnasio, agli *Elementi di Euclide*.

Nel 1867 viene emanata la Legge Coppino.³

Con l’Unità d’Italia, infatti escono di scena i testi stranieri, peraltro piuttosto scadenti e nei fatti imposti dal Lombardo-Veneto e dalla Francia. Inizia una produzione, tra il 1870 e il 1885, che sarà tipica della scuola italiana, produzione di elevata qualità, con testi del duo Achille Sannia (1822-1892) ed Enrico D’Ovidio⁴ (1843-1933), di Aureliano Faifofer⁵

² La legge piemontese, del Conte Gabrio Casati, datata 13 novembre 1859 n.3725, perfezionò le norme dell’istruzione secondaria esistenti. La legge Boncompagni del 1848 sull’insegnamento secondario e la legge Lanza (1857), che avevano collocato la Scuola Normale nell’ordine elementare.

³ La legge 10 ottobre 1867, fu emanata dal Ministro dell’Istruzione Michele Coppino (1822-1891).

⁴ A. Sannia e F. D’Ovidio, *Elementi di Geometria*, Ed. Pellerano, Napoli, 1869.

⁵ A. Faifofer, *Elementi di Geometria*, Tip. Emiliana, Venezia, 1878.

(1843-1909), di Riccardo De Paolis⁶ (1854-1892), del duo⁷ Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957), di Francesco Severi⁸ (1879-1961), di Riccardo De Paolis⁹ (1854-1892), tanto per citare i più significativi.

Nei primi anni della Riforma Gentile¹⁰ del 1923, lo spirito della stessa tende a considerare, ai fini della formazione culturale dei giovani, preminente l'apporto delle discipline umanistiche, trascurando le discipline scientifiche e la matematica in particolare.

Viene accentuato il carattere estetico-letterario del Liceo Classico, e per le scienze nasce il Liceo Scientifico “quadriennale”, che prende il posto di quella che fu la Sezione fisico- matematica dell'Istituto Tecnico. In ogni caso è interessante ricordare che nell’ultima classe del Liceo Classico viene dato molto spazio alla Matematica Greca, attraverso lo studio diretto dei primi quattro libri degli Elementi di Euclide,

⁶ R. De Paolis, *Elementi di Geometria*, Ed. Loescher, Torino, 1884.

⁷ F. Enriques - U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903.

⁸ Francesco Severi, *Elementi di geometria. Vol. I: pel ginnasio e pel corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: pei licei e pel corso superiore dell'istituto tecnico*, Vallecchi, Firenze, 1926-27.

⁹ R. De Paolis, *Elementi di Geometria* (1884), Torino: E. Loescher.

¹⁰La *Riforma Gentile*, pubblicata il 6 maggio 1923, è un insieme di atti normativi realizzanti una riforma organica della Scuola Italiana varata in Italia. Estensori furono il filosofo Giovanni Gentile, al tempo Ministro della Pubblica Istruzione con la collaborazione del pedagogo Giuseppe Lombardo Radice. La riforma prevedeva la formazione classica e umanistica come prevalente mezzo di istruzione per formare le future classi dirigenti fasciste, e nella quale grande importanza fu data al Liceo classico.

e della trattazione della teoria delle proporzioni, contenuta nel quinto libro degli *Elementi*.



Fig. 1 - *Elementi di Euclide*, dedicati al grande traduttore di antiche opere Federico Commandino (1509-1575)



Fig. 2 - Euclide IV/III sec. a. C.

Questo tipo di approccio aprirono una via complementare, sulla conoscenza della civiltà greca, conoscenza che andava

in parallelo con gli studi letterari ed artistici, così da dar luogo ad una visione, ben più ampia di quella cultura.

Successivamente questo fenomeno iniziale si attenua negli anni e si accettano testi¹¹ che sono semplicemente ispirati al modello greco di Euclide, che mantiene, dopo le iniziali premesse intuitivo-sperimentali, un successivo percorso pervaso da un interessante rigore scientifico. Il Trattato di Geometria di Francesco Severi¹² (1879-1961), si distingue dagli altri per l'impostazione originale: in esso è mantenuto intatto il rigore sostanziale del metodo razionale, mitigato però dalla costante preoccupazione di mostrare per ogni nuova nozione, anche il suo substrato intuitivo, e le nozioni di senso comune da cui tali concetti hanno origine, in modo che l'allievo possa meglio afferrare i significati dei vari concetti.

È nel 1903 che viene pubblicato il testo¹³ del duo Federico Enriques (1879-1961) e Ugo Amaldi¹⁴ (1875-1957), che risulterà essere il libro di maggior successo assoluto, nelle

¹¹ Vita V., *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'Unità di Italia al 1986. Rilettura storico-critica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1986. Vedi anche: Pepe L., *Per una storia degli insegnamenti matematici in Italia*, in *Giornate di Didattica, Storia ed Epistemologia della matematica in ricordo di Giovanni Torelli* a cura di S. Invernizzi, Università di Trieste, 1996, pp. 101-116.

¹² Francesco Severi, *Elementi di geometria. Vol. I: per ginnasio e per corso inferiore dell'istituto tecnico. Vol. II: per i licei e per il corso superiore dell'istituto tecnico*, Vallecchi, Firenze, 1926-27.

¹³ Federico Enriques, U. Amaldi, *Elementi di Geometria ad uso delle Scuole Secondarie superiori*, Bologna, Zanichelli, 1903.

¹⁴ Ugo Amaldi è il padre del fisico Edoardo (1908 - 1989) e nonno del fisico Ugo (1934).

scuole italiane, tanto che ha avuto ristampe continue fino al 1970.



Fig. 3 - Federigo Enriques



Fig. 4 - Ugo Amaldi

Dovremmo chiamare questa metodologia una metodologia di utilizzo, almeno per le parti iniziali, la via intuitivo-sperimentale, per stabilire i fondamenti, metodologia – mista– dato che, da un certo punto in poi, si razionalizza, e si iniziano a dimostrare i teoremi. Il punto è anche facile da trovare: è la dimostrazione del 1° Criterio di eguaglianza dei triangoli, che da sempre, nell'impostazione classica, di Enriques-Amaldi, appare come una "forzatura". Se si vuole, dopo questo "impassé", le cose vanno abbastanza lisce. Naturalmente questa è una prima forma di educazione primaria alla geometria, cercando di darne una lettura,

compatibile con quel meraviglioso mondo della natura che osserviamo e che ci circonda.

3 - La geometria diventa una scienza

Quando si inizia a ragionare razionalmente, a dimostrare teoremi, ci si accorge che la linea guida cambia e il legame non è più l'osservazione visiva ed intuitiva delle singole figure, ma entrano in gioco lo studio dei legami e delle relazioni che intercorrono tra gli enti della geometria, che in questa seconda linea guida diventano astratte. La geometria diviene una scienza. Del resto chi di noi ha mai visto un punto, una retta, un piano – direi proprio nessuno. Non esiste una frase avente come soggetto la parola “*punto*” e nella quale frase la parte rimanente ne fornisce la definizione! Gli enti di base vanno definiti per via indiretta, mediante l'acquisizione di proprietà che li caratterizzano insegnandoci ad operare con essi.

L'idea tanto cara a Platone, per il quale ogni oggetto può essere definito e che una volta definito permetta di proseguire con definizioni e dimostrazioni, nei fatti si rivela una utopia, anzi una impossibilità. Del resto è chiaro che definire un ente significa porlo in relazione con altri oggetti i quali a loro volta vanno definiti ponendoli in relazione con altri oggetti e così via. Io dò una definizione: *una circonferenza è il luogo (l'insieme) dei punti del piano che hanno ugual distanza da un punto fisso detto centro!* Ho definito una circonferenza?... Sì, se so che vuol dire punto, piano, distanza. In questa definizione (detta *esplicita*) il soggetto prende significato dagli altri termini supposti noti!

Ma definizioni esplicite (o dirette) che definiscano punto, retta e piano non ci sono, ci sono solo definizioni per lista di proprietà (o postulati), in sistemi di base, che sono lunghe liste di proprietà assegnate da noi! Queste definizioni si chiamano implicite (o indirette). Nel corso dei secoli, il nostro ragionare si è via via affinato, la cultura dell'uomo si è diretta verso l'astratto e lo ha conquistato. Così la definizione di Euclide del 300 a.C. "... il punto è ciò che non ha parti ..." - bella, piena di creatività ed intuizione - e in contemporanea priva di un qualsiasi significato logico-razionale, è stata soppiantata, da David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), nel quale assegna un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitano le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche iniziali di Euclide.



Fig. 5 - David Hilbert



Fig. 6 - *Grundlagen der Geometrie* (1889)

Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, uno studente statunitense di 19 anni, Robert Lee

Moore¹⁵ (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi del tutto equivalenti a quelli di Hilbert.

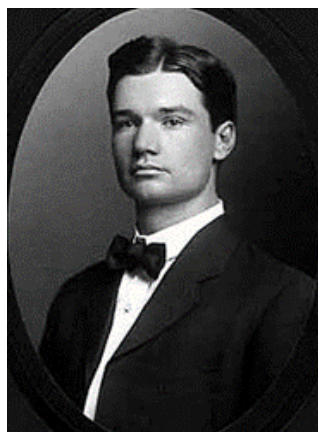


Fig. 7 - Robert Lee Moore

Dai postulati di Hilbert-Moore, nati dalla visione che ebbe a concretizzarsi circa 2.000 anni dopo Euclide, fu sviluppata una lunga serie di confronti di autori italiani di grande valore scientifico e didattico, con una lunga serie di varianti ed osservazioni, che si sono via via sovrapposte l'una all'altra, trattato sopra trattato¹⁶. Il punto nella "moderna visione" dal

¹⁵Moore fu allievo di importanti americani quali Leonard Eugen Dickson ed Oswald Veblen. Conseguì il PhD nel 1905, con una dissertazione intitolata *Sets of Metrical Hypotheses for Geometry*, sotto la supervisione di Veblen. Nel 1923 diviene *full-professor*, nel 1936-38 fu Presidente dell'*American Mathematical Society*. Presentò un metodo didattico denominato **Metodo Moore** e insegnò fino all'età di 87 anni, anche se visse e continuò a lavorare fino a 92 anni.

¹⁶ A. Chiellini, R. Giannarelli, *L'esame orale di Matematica*, Roma, Edizioni Veschi, 1962. (Nota che la conoscenza delle varie Teorie sull'eguaglianza erano tematiche presenti nei programmi per i concorsi a

1900 è “un elemento di un insieme astratto detto “spazio”, che ha certe sue parti (sottoinsiemi di punti) che si chiamano rette ed altre parti che si chiamano piani, le quali soddisfano ad un elenco di 28 postulati o proprietà, che implicitamente definiscono i termini punto - retta - piano - spazio. Naturalmente va aggiunto che ogni insieme di oggetti, che ha due famiglie di parti, che nel loro complesso soddisfano ai 28 postulati sono uno spazio euclideo.

Ma due strutture siffatte, per via delle interpretazioni numeriche (geometria analitica dello spazio) che ne evidenzia la struttura soggiacente di spazio vettoriale ci permette di asserire che se due strutture soddisfano i 28 postulati allora sono isomorfe, e ciò si estende anche agli spazi n -dimensionali ma non alle geometrie non euclidee.

Da dove vengono queste 28 proprietà? Ma naturalmente dal nostro intuito, dal nostro osservare la natura e dal nostro tentare di incapsularla, in una rigida razionalità, o come si suol dire di “formalizzarla”. Al tempo di Euclide e per i postulati di Euclide, Aristotile riteneva che essi nascessero per ispirazione divina. Sappiamo bene oggi che siamo noi a sceglierli, che possiamo sostituirli con proposizioni alternative, di fatto con condizioni necessarie e sufficienti, senza modificare la struttura di Euclide, ma anche il con la possibilità di modificarli “ad arte” facendo nascere strutture differenti da quella originale di Euclide. Le costruzioni possono essere fatte in miliardi di modi, ma la storia e i secoli hanno insegnato a scegliere tra tali alternative, poiché alla

Professori di Scuola Media, alla cui preparazione il trattato sopra indicato era dedicato).

fine le scelte devono avere un senso, ma anche un riscontro come modelli fisici.

Nascono così le geometrie non euclidee: iperboliche oppure ellittiche, le geometrie non archimedee, le banali geometrie non cantoriane, le geometrie finite, i disegni a blocchi. Di ciascuna di queste possono essere forniti tanti modelli. Ad esempio la geometria euclidea ha come modello il sistema cartesiano delle coordinate e ha la peculiarità che comunque io prenda differenti modelli, come del resto precisato sopra, questi sono sostituibili l'uno con l'altro, ovvero sono *isomorfi*. Non così per le altre. In questo lavoro presentiamo, in dettaglio, un modello di geometria piana iperbolica, denominato modello di Klein, completando dal punto di vista dimostrativo, tanti aspetti quasi sempre sottesi e sottaciuti. In particolare costruiamo i movimenti del modello di Klein che coincidono con le omografie che mutano un cerchio in sé stesso.

4 - L'indipendenza dei postulati

È ben noto il metodo assiomatico per introdurre gli enti della matematica. Uno dei primi problemi che ci si pone è che dato un qualsiasi sistema di postulati definenti una qualunque struttura matematica, occorre che, in primo luogo, sussistano le seguenti due fondamentali proprietà:

- i postulati devono essere tra loro indipendenti
- i postulati devono essere compatibili o come suole dirsi non-contraddittori.

Il problema posto è nato nel momento nel quale i matematici hanno compreso che alla base di una teoria matematica: postulati, definizioni e teoremi non riflettevano una realtà trascendente, superiore alla mente umana, come si era ritenuto in Platone (428-348 a.C.) e Aristotile (384-322 a.C.) e da Agostino d'Ipbona (354-430). Nella antica visione era escluso a priori il pericolo di incontrare contraddizioni in tutte le conseguenze logiche della "divina teoria", in quanto tutte le proposizioni erano vere in assoluto¹⁷. Era una certezza!

Ma il punto di vista, con l'avvento dei sistemi ipotetico-deduttivi brillantemente presentati in un'opera del Pieri,¹⁸ è del tutto mutato, in quanto alla base delle teorie matematiche si sono posti dei postulati, che, sia pure rispecchianti, dal punto di vista euristico, delle forme di pensiero intuitivo e degli aspetti percettivi - come piace ricordare a Bertrand Russell - sono dal punto di vista logico, proposizioni totalmente arbitrarie, così che, il garantire una forma di compatibilità diviene di interesse fondamentale.

Naturalmente la causa di questo mutamento nella Storia della Scienza ha chiara origine dalla scoperta delle geometrie non euclidee, e nasce dalla questione del postulato delle parallele. Lo stesso Euclide¹⁹ (IV-III sec a.C.), sembra avere dei dubbi su questo postulato, così che, fino a che è possibile, cerca di non farne uso. Del postulato delle parallele in realtà egli non parla fino alla prop. 26° compresa (che sarebbe il 2°

¹⁷ cfr. Carruccio [4], par. 2, pg. 315

¹⁸ Mario Pieri, (1898-99), *Della Geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, (2) 49 p.173-222.

¹⁹ cfr. E. Carruccio [4], pg. 76.

criterio di eguaglianza dei triangoli), egli utilizza il postulato delle parallele, solo nella prop. 27°, nella seguente forma:

“Se una retta cadendo tra due rette, fa gli angoli alterni uguali tra loro, le due rette saranno parallele tra loro”.

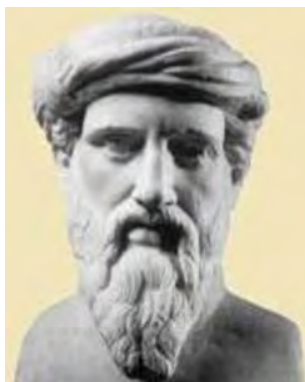


Fig. 8 – Euclide

La questione della non-contraddittorietà è piuttosto complessa, in genere si richiede la costruzione di un modello all'interno di una struttura della quale si ipotizza la non contraddittorietà. Ad esempio la non-contraddittorietà dei postulati delle geometrie non-euclidee, si basa sul fatto che ne costruiamo modelli all'interno della stessa Geometria Euclidea, supposto questa non-contraddittoria.

Ma si può basare la non contraddittorietà della geometria euclidea, tramite la sua rappresentazione numerica (spazi numerici) e quindi sulla non contraddittorietà del campo dei numeri reali, questi si riporta a sua volta al campo dei numeri razionali, questi all'anello dei numeri interi relativi, questi al semianello dei naturali, questi alla teoria elementare

(ingenua?) degli insiemi e su questi un atto di fede? Forse meglio dire una ipotesi di lavoro?

Cadiamo in pieno nella corrente dello scetticismo ed in particolare nel pensiero di Carneade di Cirene (214-129 a.C.), ambasciatore a Roma nel 155 a.C., che riteneva impossibile l'arte del dimostrare, poiché secondo lui ne nasceva un processo che dava luogo ad una forma di "*regressum in infinitum*", in quanto ogni proposizione prendeva significato da una precedente altra proposizione. Quindi le verità nelle quali si crede, poste alla base, avevano secondo Carneade, un significato incerto, forse probabile.²⁰

La questione dell'indipendenza è più semplice da trattare. Così se ci poniamo la domanda: il postulato delle parallele è indipendente dagli altri?. Si può rispondere nel modo che segue: per dimostrare che un postulato P è indipendente da altri postulati, la via maestra da seguire, è quella di costruire degli enti e quindi un modello che, pur soddisfacendogli altri i postulati, non soddisfinò il postulato P.

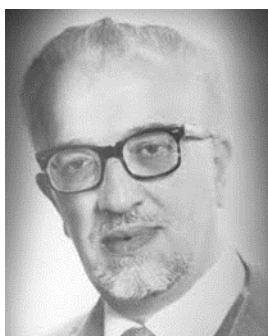


Fig. 9 - Luigi Campedelli

²⁰ Carruccio [4], pg. 67

Esiste, cioè, un modello di enti che soddisfa a tutti i postulati del sistema e non soddisfa al postulato delle parallele? Ricordiamo, a tal proposito, cosa scrive Luigi Campedelli (1903-1978) in [15], cercando di mediare tra un discorso logico-formale ed un aspetto maggiormente intuitivo:

La geometria negli studi iniziali era classificata intuitiva e sperimentale. Essa mirava ad una educazione sui concetti fondamentali cercando di coglierli nell'osservazione del mondo circostante, e di leggerli in quel gran libro dell'universo. Più tardi l'esame delle figure, dapprima verificate su modelli materiali, si deve svolgere attraverso argomentazioni di carattere logico, con ragionamenti razionalmente condotti, mediante deduzioni e ricerca di legami tra le varie proprietà. Nasce così la geometria come indagine scientifica.

5 - Il piano di Klein come modello di geometria iperbolica

Felix Christian Klein (1849- 1925), nasce il 25.04.1849, a Dusseldorf. Era affascinato dal fatto che ogni numero della sua data di nascita è il quadrato di un numero primo (rispettivamente 5, 2 e 43). Nel 1872, a soli 23 anni, Klein fu nominato professore a Erlangen.

Nonostante i grandi contributi che egli diede sia all'Algebra che alla Geometria, ebbe una enorme notorietà per una prolusione che egli fece nel 1872, in occasione della sua nomina a professore a Erlangen, prolusione oramai nota in letteratura con il nome di *Erlangen Programme* (Programma

di Erlangen), conferenza che influenzò profondamente lo sviluppo della Matematica.



Fig. 10 - Felix Klein

Il Programma di Erlangen fornì un approccio unificato e gruppendale della geometria, approccio che oggi è accettato come standard. Le trasformazioni e i loro gruppi, giocano un ruolo fondamentale in una moderna visione della geometria e Klein mostrò come le proprietà essenziali di una data geometria potevano essere rappresentate dal gruppo delle trasformazioni che conservano tali proprietà, per ogni tipo di geometria, geometria euclidea, non euclidea, proiettiva ed oltre. Così la geometria proiettiva è relativa al gruppo delle omografie, la geometria affine al gruppo delle affinità, la geometria elementare (euclidea) è relativa al gruppo delle similitudini, la geometria metrica è relativa al gruppo delle eguaglianze o congruenze. Inoltre il gruppo delle similitudini è sottogruppo di quello affine, e l'affine è sottogruppo del proiettivo. Naturalmente le proprietà del

gruppo più ampio sono proprietà anche del gruppo più piccolo. Inizialmente sembrava che la geometria metrica sfuggisse da questa catena di sottogruppi, ma oggi sappiamo che le proprietà metriche se corredate dai punti ciclici possono inquadrare la geometria metrica della geometria delle similitudini.²¹

Inoltre uno spazio proiettivo si può inquadrare in un più generale spazio topologico e gli omeomorfismi di uno spazio topologico formano un gruppo ancora più vasto. I movimenti del piano di Klein, che tratteremo in questo e nei successivi paragrafi, sono le omografie che mutano il cerchio unitario in sé, formano anche loro un sottogruppo del gruppo delle omografie, ma occorre precisare il loro comportamento rispetto alle affinità. È dovuto a Klein la presentazione di interessanti modelli topologici quali la cosiddetta *bottiglia di Klein*, riportata in figura, superficie ad una sola faccia, che in alcune sue sezioni contiene dei nastri di Möbius.

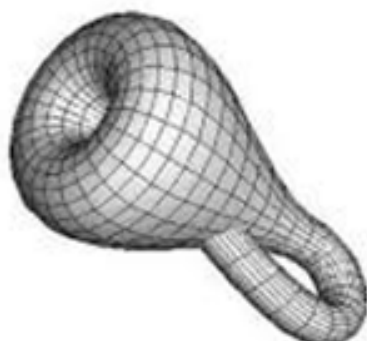


Fig. 11 - Bottiglia di Klein

²¹ Si veda Mario Villa, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, cap. VI, par.44-45.

Vorrei ricordare e condividere con voi il mio primo impatto con il modello di Klein, ritenendo questo ricordo la miglior presentazione.

Il mio professore Mario Villa, del quale parlerò nel prossimo paragrafo, andò alla lavagna e disegnò un cerchio, tracciò due corde non intersecantisi e disse:

... se restringiamo la geometria, che voi conoscete, all'interno di un cerchio, è naturale chiamare rette le corde, se l'esterno è cancellato e se il nostro mondo è l'interno del cerchio..." (Fig. 1). Ora dati un punto ed una corda AB, non appartenentesi (Fig. 2) esistono infinite corde per P che non incontrano la corda data, sono le corde interne all'angolo tra PA e PB (Fig. 3). Anche le corde PA e PB sono non secanti AB (i punti sulla circonferenza sono esclusi e sono i nostri punti all'infinito), e noi chiamiamo parallele per P ad r le due corde PA e PB.

Pensate ora al raggio che tende all'infinito e alla circonferenza che tende alla retta impropria. Quando il raggio aumenta l'angolo di PA con PB diminuisce e si restringe ad una unica retta per il raggio che tende all'infinito.... è la geometria euclidea quando il cerchio sparisce, adagiandosi sulla retta impropria del piano!

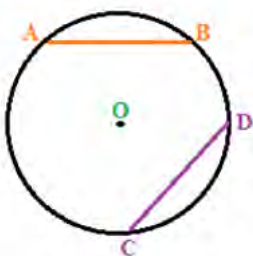


Fig. 12

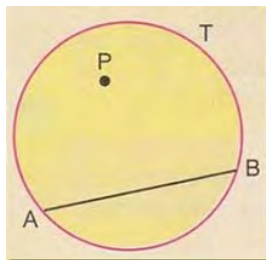


Fig. 13

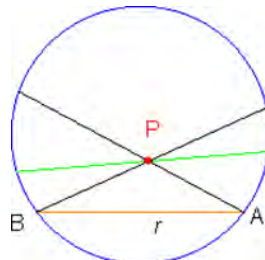


Fig. 14

L'importanza del modello. L'esistenza di una geometria dove sono validi tutti i postulati della geometria classica meno quello delle parallele (sono due e non una) prova che l'assioma dell'unicità della parallela è indipendente dai precedenti postulati!

Formalizziamo ora il modello intuitivo, passando a definire il piano di Klein, modello di geometria non euclidea, di tipo iperbolico.

Sia dato, nel piano ordinario, un cerchio Γ , detto k -piano.

Si chiamano k -punti propri quelli interni a Γ ; k -punti impropri quelli di Γ ; k -punti ideali quelli esterni a Γ . L'insieme dei k -punti propri formanti il k -piano si denota con S .

Si chiamano k -rette, le corde di Γ prive degli estremi. Sia C il loro insieme, la coppia (S, C) si chiama *piano di Klein*.

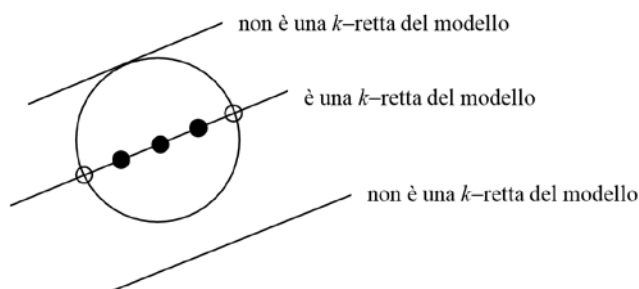


Fig. 15 - Modello di Klein

Si dice che due k -rette sono: k -parallele se hanno in comune un k -punto improprio (ovvero se come corde di Γ si incontrano in un punto di Γ); k -incidenti se si incontrano in un k -punto proprio (ovvero se come corde di Γ si incontrano

in un punto interno a Γ); k - non secanti se non sono né k -parallele né k incidenti (ovvero se come corde di Γ si incontrano in un punto (proprio o improprio) esterno a Γ). È immediato constatare che dati un k -punto P e una k -retta r non appartenentesi, dal k -punto P escono esattamente due k -rette, che sono k -parallele alla k -retta data: ci si trova di fronte, supposto di aver verificato tutti gli altri postulati, almeno per il k -parallelismo, davanti ad una ipotesi piano non-euclideo di tipo iperbolico.

Osserviamo che è abbastanza facile verificare gli assiomi dell'appartenenza, dell'ordine e della continuità, indotti sulle corde da quando avviene nello spazio euclideo per le rette.

Per quanto riguarda la verifica degli assiomi del movimento, la cosa è più complessa. Assumiamo come k -movimenti le omografie piane che mutano il cerchio Γ in sé, le equazioni di tali omografie saranno ricavate in un paragrafo successivo.

È interessante il poter definire nel piano di Klein una nozione di distanza che fornisce al piano di Klein una struttura di spazio metrico e conseguentemente una topologia.

Ricordiamo che se S è un arbitrario²² insieme di elementi, da dirsi "punti", una "distanza" (o una "metrica") è una funzione:

$$d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $\forall x, y, z \in S$

1.- $d(x, y) \geq 0$, " $= 0$, se e solo $x=y$ " *proprietà di annullamento*

²² Da tenere in conto che l'insieme S può anche essere finito. Cfr. Franco Eugeni, *Spazi pseudometrici e metrici finiti*, Annali Università degli Studi dell'Aquila, anno V, (1971), Ed. Japadre, L'Aquila pp.177-183.

2.- $d(x,y) = d(y,x)$ *proprietà simmetrica*

3.- $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *diseguaglianza triangolare.*

Una interessante metrica può essere definita nel piano di Klein, ricorrendo al concetto di birapporto di quattro punti. Il birapporto è una grandezza associata a una quaterna di punti di una retta. Si tratta di uno strumento importante in geometria proiettiva, essendo un invariante per trasformazioni proiettive. Il birapporto risulta definito anche se uno dei quattro punti è all'infinito (la retta in questione è quindi una retta ampliata, ma nella quale esiste una sottostante struttura euclidea, quindi nella quale i segmenti si misurano).

Siano A, B, C, D quattro punti allineati e propri, del piano euclideo ampliato dai punti impropri. Si fissi una orientazione ed una unità di misura sulla retta che li contiene. Il birapporto dei quattro punti nell'ordine è la quantità:²³

$$(ABCD) := (ABC)/(ABD) := (AC/BC) / (AD/BD)$$

dove il simbolo AB (e analoghi) denota la misura del segmento²⁴ orientato da A verso B . Poniamo inoltre, se D_∞ indica il punto all'infinito, della retta che contiene i quattro punti: $(ABCD) := (ABC) = (AC/BC)$.

Consideriamo ora una k -retta HK del piano di Klein, (ovvero una corda HK del cerchio unitario). Su questa k -retta

²³ La scrittura $(ABD) := AC/BC$ si chiama *rapporto semplice* di tre punti.

²⁴ La scelta iniziale dell'orientazione della retta e dell'unità di misura sono solo strumento ausiliari per il calcolo. Il birapporto è indipendente da queste scelte.

fissiamo due punti A, B (sono due punti interni alla corda) e definiamo la loro distanza nel modo che segue:

$$d(A,B) := \rho \mid \log (ABHK) \mid$$

essendo ρ un prefissato numero positivo. Proviamo che si tratta effettivamente di una distanza.

I - $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$.

Se $A=B$ è $(AAHK) = 1$, quindi $d(A,A) = 0$. Se $A \neq B$, $(ABHK) \neq 1$, dunque $d(A,B) > 0$.

II - $d(A,B) = d(B,A)$.

Dalla relazione: $(ABHK) = 1/(BAHK)$ si ha:

$\log (ABHK) = - \log /(BAHK)$, con i valori assoluti segue l'asserto.

Per la diseuguaglianza triangolare, si noti che, nel nostro caso particolare, la diseuguaglianza diviene un'eguaglianza, il che si esprime dicendo, che la struttura della metrica del piano di Klein, è una struttura *di spazio ultrametrico*. Si ha infatti:

III - $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$.

Dalle relazioni:

$$(1) \quad (ABHK) = AH \cdot BK / BH \cdot AK$$

$$(2) \quad (ACHK) = AH \cdot CK / CH \cdot AK ,$$

$$(3) \quad (CBHK) = CH \cdot BK / BH \cdot CK, \text{ si ha:}$$

$$(ACHK) \cdot (CBHK) = (ABHK)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} d(A,C) + d(C,B) &= \rho |\log (ACHK)| + \rho |\log (CBHK)| = \\ &= \rho |\log [(ACHK) \cdot (CBHK)]| = \rho |\log (ABHK)| = d(A,B). \end{aligned}$$

Osservazione 1. *La nozione di distanza è chiaramente invariante per trasformazioni proiettive essendo invariante il birapporto. In particolare sarà invariante per le omografie che mutano il cerchio in sé quali che esse siano.*

Osservazione 2. *Ogni k - semiretta (non euclidea) ha distanza infinita. Se AH è una semiretta non euclidea allora:*

$$\lim_{P \rightarrow H} d(A, P) = \infty$$

Segue da $(APHK) = AH \cdot PK / PH \cdot AK$ quantità che tende a 0 per $P \rightarrow H$, per cui il rispettivo logaritmo tende ad ∞ .

Osservazione 3. *Fissato un numero reale $r > 0$ esiste su una k -semiretta AK, un unico punto P tale che $d(A,P) = r$.*

Fissata una unità di misura ed un sistema di ascisse sulla retta euclidea che congiunge A con K, orientata da A verso K indichiamo con a, x, h, k le ascisse di A, P, H, K, si ha:

$(APHK) = AH \cdot PK / PH \cdot AK = (h-a) (k-x) / (h-x) (k-a) = r$
equazione di 1° grado in x , banalmente risolubile, se $a \neq h$,
 $a \neq k$, $h \neq k$, escluso il caso che sia $h-a = r(k-a)$, che corrisponde a P punto medio euclideo tra H e K.

Questa osservazione permette di definire un k -circonferenza (non euclidea), di centro A (non nell'origine) come il luogo dei punti P , tali che $d(A,P) = r$, r reale prefissato positivo.

Osservazione 4. Possiamo definire un k -segmento orientato (non euclideo) ponendo

$$(AB)_K := \rho \log (ABHK).$$

La nozione di k -angolo e la sua misura saranno precisate nel paragrafo successivo.

6 - Il piano di Klein numerico piano

Un modello di geometria piana euclidea, si costruisce assumendo $S = \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ è il campo reale) e fissando come "rette" i luoghi dei punti di S soddisfacenti un'equazione del tipo:

$$a x + b y + c = 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ con } (a,b) \neq (0,0)$$

Denotato con L (linee), l'insieme di tali rette, si verifica facilmente che la coppia (S,L) soddisfa tutti gli assiomi euclidei. Per il caso euclideo è stato provato che gli assiomi sono categorici, cioè che tutti i suoi modelli sono isomorfi, così che (S, L) , a meno di isomorfismi, è l'unico modello possibile.

Analogamente si costruiscono i modelli di $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, etc.

Presentiamo ora l'analogo numerico del piano di Klein prima introdotto. Iniziamo con la seguente:

Definizione 4.1. Sia $S=\mathbb{R}^3$ il ben noto modello di geometria euclidea dedotto dal piano cartesiano. Definiamo k -punti le coppie $(x,y) \in S$ tali che:

$$x^2 + y^2 < 1$$

(Pensiamo i k -punti del modello come i punti interni alla circonferenza Γ di centro l'origine e raggio unitario, quindi di equazione $x^2 + y^2 = 1$).

Definizione 4.2. Definiamo k -rette (proprie) gli insiemi delle coppie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che:

$$x^2 + y^2 < 1$$

$$a x + b y + c = 0 \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \text{ con } (a,b) \neq (0,0)$$

$$c^2 < a^2 + b^2$$

La condizione $c^2 < a^2 + b^2$ limita la considerazione delle rette euclidee solo a quelle che hanno distanza dall'origine inferiore ad 1, in modo da individuare delle corde.

Definizione 4.3. I punti all'infinito di ogni k -retta sono due (gli estremi della corda), le coppie $(x,y) \in S$ soluzioni del sistema:

$$x^2 + y^2 = 1 ,$$

$$a x + b y + c = 0 \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R} \text{ con } (a,b) \neq (0,0),$$

$$c^2 < a^2 + b^2.$$

La nozione di angolo comporta anche il riferimento alla parte numerica del piano di Klein, come vedremo. Date infatti due corde AB , CD , ovvero due k -rette del piano di Klein

intersecatesi in un punto P , il k -piano di Klein è diviso in quattro regioni che denotiamo con dei “simboli angolari”: CPB , BPD , DPA , APC , ciascuna di tali regioni si chiama un k -angolo (o angolo non euclideo). Due k -angoli come CPB e DPA si chiamano opposti al vertice.

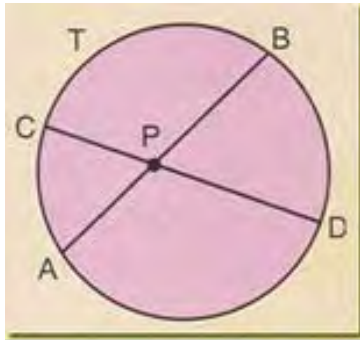


Fig. 16 - I k -angoli

Proviamo che:

Teorema. *Due k -angoli opposti al vertice sono k -congruenti.*

Dimostrazione. La dimostrazione si effettua provando che esiste un movimento che trasforma CPB in DPA e che muta il cerchio in sé.

Consideriamo l'omologia armonica di centro P ed avente per asse la retta s , polare di S rispetto alla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Sia Q il punto nel quale la retta che congiunge P con una coppia X, X' di punti corrispondenti. L'essere armonica si esplicita con la condizione $(PQXX') = -1$. La retta AC e la retta BD individuano un punto della polare e le CB e AD ne individuano un secondo. A questo punto è immediato che se X è sul cerchio, lo stesso accade per X' ed

inoltre la regione APD è chiaramente portata nella regione CPB, provando dunque l'asserto.

Ricordiamo che data una qualsiasi conica (in particolare il cerchio unitario) si può definire la polarità piana e chiamare coniugate due rette quando ciascuna di esse contiene la polare dell'altra. Nel caso della circonferenza unitaria prese le rette

$$y = m x \text{ ed } y = m' x$$

il coniugio si esprime con l'equazione $m m' = -1$.

Definizione. Se due rette euclidee contenenti due distinte k -rette, intersecantisi in P , sono coniugate rispetto alla circonferenza unitaria, si prova che i quattro angoli da esse definite sono uguali tra loro. In tale caso le due k -rette si diranno k -perpendicolari e i loro rispettivi k -angoli si diranno k -retti. La teoria si spinge ancora e porta da asserire che è unica la k -perpendicolare per un punto ad una k -retta data, mentre le parallele sono due! Tuttavia non approfondiamo la teoria angolare, che ricorre a rappresentazioni nel campo dei numeri complessi.

È molto interessante liberarci sia dell'uso del cerchio, ma anche della struttura euclidea sulla quale costruiamo il modello.

Per il primo punto è sufficiente osservare che tutto quello che si dice per il cerchio unitario si può ripetere, con calcoli leggermente più complicati, per i punti interni di una qualsiasi conica non degenera, avendosi così in relazione a ciascuna di tali coniche un esempio concreto di piano non euclideo. Si noti che costruite le omografie che mutano il

cerchio unitario in sé è sufficiente comporlo con la trasformazione del cerchio dato con la conica assegnata.

Per il secondo punto, altra questione di interesse critico, occorre liberarci dall'apparente dipendenza del modello non-euclideo dall'euclideo. Di questa dipendenza è facile liberarsi.

Osserviamo che possiamo ragionare nel modo seguente: nel piano numerico delle coppie ordinate considero l'equazione:

$$x^2 + y^2 = 1$$

(non parlo di circonferenza, ma di luogo di punti (x,y) soddisfacenti quell'equazione) e su tale equazione sviluppiamo i medesimi calcoli, parlando di trasformazioni lineari e non necessariamente di omografie e di linguaggio geometrico. Nei fatti non cambia nulla!

7 - Le omografie che mutano il cerchio in sé

La versione che presentiamo in questo paragrafo è quella che appare nel classico lavoro di Mario Villa [15], lavoro che fu pubblicato nel volume del 1963, dal titolo *Per un insegnamento moderno della Matematica*, per i tipi della Casa Editrice Patron di Bologna, curato dallo stesso Villa, per conto del Ministero della Pubblica Istruzione, volume che fu il testo di base delle cosiddette "classi pilota", classi liceali che nell'ultimo anno di corso si prepararono su questo volume, invece che su un testo classico, per il loro esame di stato.

L'esperimento servì a provare²⁵ che argomenti come la Teoria degli insiemi, le relative e varie conseguenze sull'algebra astratta e sui fondamenti della Geometria, potevano essere insegnati nella Scuola Secondaria.



Fig. 17 - Mario Villa (1907-1973)

L'opera consiste in articoli di più autori, tutti ben noti professori ordinari di università italiane: Pietro Buzano (1911-1993), Luigi Campedelli (1903-1978), Ugo Morin (1901-

²⁵ È interessante notare che la prof. Berardi, alla quale questo lavoro è dedicato, fu a suo tempo allieva del prof. Villa, con il quale fece la sua tesi di Laurea, nell'ambito delle tri-corrispondenze tra spazi di differenti dimensioni, successivamente pubblicata, per la parte originale, nella nota *Sulle corrispondenze tra un piano proiettivo e due rette proiettive* in *Annali dell'Università degli studi dell'Aquila*, Anno V, 1971, pp.185-193. La prof. Berardi nel breve periodo nel quale insegnò nella scuola secondaria, e contemporaneamente nell'Università dell'Aquila, come professore stabilizzato, cioè prima di vincere il Concorso universitario, si prodigò ad introdurre ai suoi allievi le tematiche riportate nel testo *"Per un insegnamento moderno della Matematica"*, sopra indicato.

1968), Mario Villa(1907-1973), Tullio Viola²⁶ (1904-1985), e l'ispettore Armando Chiellini (1898-1976).

È ben noto che le omografie tra piani affini, eventualmente sovrapposti (in particolare euclidei) sono rappresentate da un sistema del tipo (con determinate non nullo per l'invertibilità):

$$\begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases}$$

Se si suppone ora che una data omografia muta la circonferenza unitaria $x = \cos \varphi$, $y = \sin \varphi$ in sé;

allora risulta, per ogni reale φ :

$$\begin{aligned} (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi + c_1)^2 + (a_2 \cos \varphi + b_2 \sin \varphi + c_2)^2 = \\ = (a_3 \cos \varphi + b_3 \sin \varphi + c_3)^2 \end{aligned}$$

da cui seguono le sei condizioni:

²⁶ Anche con il prof. Tullio Viola la prof.ssa Berardi ebbe una collaborazione in occasione dell'ultimo concorso a Cattedre nazionale (1883-1885) per Matematica. Il prof. Viola era il Presidente di una Commissioni formata da 11 sottocommissioni, e la prof. Berardi gestiva una delle sottocommissioni. Facevano anche parte della Commissione (con altri): Silvio Maracchia, Bruno Rizzi, Osvaldo Ferri, Antonio Liberatore, Serafino Patrizio, Eraldo Giuli, Fabio Mercanti, colleghi con i quali si sono divisi molti momenti culturali. I concorrenti erano circa ottomila.

$$\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = 0 \\ b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 0 \\ c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = 0 \\ a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 = 0 \\ a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3 = 0 \\ b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3 = 0 \end{cases}$$

È ora possibile verificare che i coefficienti delle seguenti (1) soddisfano²⁷ le sei condizioni sopra indicate (cfr. Villa, [14]):

$$\begin{cases} x' = \frac{(a^2 - b^2 - c^2 + d^2)x + 2(bd - ac)y + a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \\ y' = \frac{2(cd - ab)x + 2(ad + bc)y - 2ab - 2cd}{(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2} \end{cases} \quad (1)$$

con a, b, c costanti reali e $\Delta = ad - bc \neq 0$.

Osservazioni.

Il Villa (cfr. [14]) asserisce che i movimenti definiti dalle (1) sono le omografie che mutano la circonferenza Γ , di equazione $x^2 + y^2 = 1$, in sé, non solo, ma mutano anche punti internia Γ in punti interni a Γ . Deduce questo asserendo che vale l'identità, la cui verifica (complessa) è lasciata al lettore:

²⁷ Da notare che Villa non ricava le (1), ma indica una via per verificarle. Il ricavarle sarebbe difficile per studenti di scuola superiore, sarà fatto da noi nel successivo paragrafo. L'obiettivo del Villa era di presentare l'argomento con metodiche comprensibili a studenti 17-enni.

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{\Delta^2 (x^2 + y^2 - 1)}{\left[(-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(bd + ac)y - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 \right]^2} \quad (2)$$

Inoltre i punti interni a Γ , di coordinate (x, y) con $x^2 + y^2 - 1 < 0$, per la (2), si trasformano in punti di coordinate (x', y') con $x'^2 + y'^2 - 1 < 0$ e viceversa. Ne segue che a punti interni a Γ corrispondono ancora punti interni a Γ .

Il Villa si dilunga invece sulle verifiche che gli enti sopra introdotti soddisfano i postulati euclidei con eccezione del postulato delle parallele. Poiché la validità dei postulati dell'appartenenza e dell'ordine può essere constatata attraverso verifiche analitiche o verifiche dirette sul modello di Klein non numerico, ci si occuperà ora dei soli postulati del movimento, che Villa sceglie tra quelli detti di tipo "gruppale" (cfr. Appendice sui postulati dove sono riportati i vari tipi di postulati del movimento).

Si osservi, innanzitutto, che i nostri movimenti, rappresentati dalle (1), formano un gruppo. A riguardo, è sufficiente verificare le seguenti due condizioni:

- a.- esiste l'inversa di una qualunque trasformazione ed essa appartiene ancora al gruppo;
- b.- il prodotto di due sue qualsiasi trasformazioni appartiene ancora al gruppo.

Sia, quindi, γ un'omografia rappresentata da:

$$\gamma: \begin{cases} x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \\ y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3} \end{cases}$$

con: $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$, e con il determinante dei coefficienti non nullo per l'invertibilità. Risulta allora possibile ricavare le incognite x ed y in funzione di x' ed y' ottenendo le equazioni dell'omografia inversa di γ .

Verifichiamo ora che il prodotto di due omografie è ancora un'omografia. Siano γ_1 e γ_2 due omografie rappresentate da:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \\ y' = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x'' = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1}{a'_3x' + b'_3y' + c'_3} \\ y'' = \frac{a'_2x' + b'_2y' + c'_2}{a'_3x' + b'_3y' + c'_3} \end{cases} \quad (4)$$

La corrispondenza prodotto, quindi, sarà rappresentata da:

$$\gamma_1 \bullet \gamma_2 : \begin{cases} x'' = \frac{a'_1 \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b'_1 \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c'_1}{a'_3 \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b'_3 \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c'_3} \\ y'' = \frac{a'_2 \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b'_2 \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c'_2}{a'_3 \left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + b'_3 \left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_3x + b_3y + c_3} \right) + c'_3} \end{cases} \quad (5)$$

che non sono altro che le equazioni di un'omografia che muta ancora la conica in sé. I movimenti, dunque, formano un gruppo.

Il secondo postulato dei movimenti è soddisfatto in quanto se un punto C di una retta si trova tra due punti A e B appartenenti alla medesima retta, allora, se A', B', C' , sono i corrispondenti punti di A, B, C , in virtù dell'omografia γ , ne segue che anche C' si trova tra A' e B' (l'omografia γ muta la conica data in sé).

Per verificare il terzo postulato bisogna provare che, dati nel piano un punto A , una retta r per A e su r una semiretta a uscente da A e nel piano un semipiano σ e similmente A', r', a', σ' , esiste uno ed un solo movimento tale che:

$$\begin{cases} A \rightarrow A' \\ a \rightarrow a' \\ \sigma \rightarrow \sigma' \end{cases}$$

Si osservi, in primo luogo, che se nel piano π introduciamo un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , con O centro della circonferenza, e se indichiamo con x' ed y' le coordinate cartesiane di un punto in un secondo piano π' , l'omografia γ è rappresentata dalle (1), avendo considerato nei due piani il medesimo riferimento cartesiano.

Il quarto postulato, come il secondo, è banalmente soddisfatto poiché, se un movimento muta una semiretta in sé stessa, allora esso muta anche ogni suo punto in sé stesso, trattandosi sempre di un'omografia.

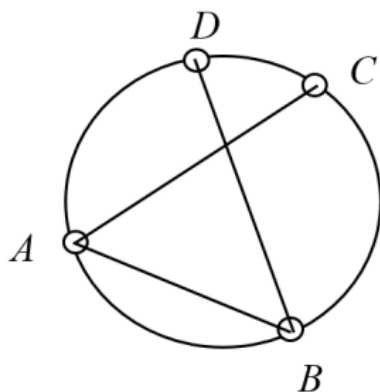


Fig. 18

Resta quindi da verificare la non validità del postulato delle parallele. Ma ciò è stato ampiamente verificato a priori nella costruzione del modello.

8 - Come ricavare le equazioni delle omografie che mutano un cerchio in se stesso

Supponiamo di operare tra due piani ampliati sovrapposti π, π' e di indicare con $(x, y, z), (x', y, z')$ le coordinate omogenee rispettive di punti corrispondenti nei due piani, dove le equazioni $z = 0, z' = 0$ sono le equazioni delle rette improprie nei due piani. Una generica omografia, *in forma omogenea*, è assegnata dalle equazioni:

$$\rho x' = a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z$$

$$\rho y' = a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z$$

$$\rho z' = a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z$$

con il $\det |a_{ij}| \neq 0$ per l'invertibilità. Chiunque abbia avuto a che fare con esercizi sulle omografie ha fatto sempre ricorso ad un metodo per scriverne le equazioni, che di fatto è legato ad un interessante e banale Lemma, dal quale discende un Corollario, che indica la via per scrivere le equazioni di una omografia o anche di una reciprocità (pensabile come omografia tra un piano punteggiato e un piano rigato (con elementi espressi mediante coordinate pluckeriane).

Lemma 1.

Se $L(x,y,z) = ax+by+cz = 0$ e $L'(x',y',z') = ax'+b'y'+c'z' = 0$ sono rette che si corrispondono nell'omografia data, esiste ρ (reale) tale che $L(x,y,z) = \rho L'(x',y',z')$.

Dimostrazione. Sostituendo nelle equazioni le coordinate di una coppia di punti corrispondenti, ovvero imponendo il passaggio per essi, si ricava ρ .

Corollario 2.

Se

$$L_1(x,y,z) = 0, L_2(x,y,z) = 0, L_3(x,y,z) = 0$$

sono tre rette non formanti fascio, e se

$$L_1'(x,y,z) = 0, L_2'(x,y,z) = 0, L_3(x,y,z) = 0,$$

sempre non formanti fascio, sono le corrispondenti in un'omografia, e se $P(x_0, y_0, z_0)$ e $P'(x_0', y_0', z_0')$ sono due punti corrispondenti nella stessa omografia e non appartenenti alle rette date, allora le equazioni della suddetta omografia, nella quale essi si corrispondono, sono le seguenti:

$$L_i'(x,y,z) = h_i L_i(x,y,z), \quad i = 1, 2, 3$$

dove le costanti h_i si determinano imponendo il passaggio per i punti P e P' . La condizione che le rette non formano fascio assicurano l'invertibilità.

Dimostrazione. Assegnare le tre rette non formanti fascio equivale a dare tre punti A, B, C non allineati e mediante le rette corrispondenti i tre punti ordinatamente corrispondenti A', B', C' sempre non allineati. Per il *teorema fondamentale*²⁸ delle proiettività (tra forme di 2° specie) è unica l'omografia (invertibile) che a 4 punti A, B, C, P , a tre a tre non allineati associa nell'ordine gli altri 4 punti A', B', C', P' , a loro volta a tre a tre non allineati.

Siamo ora in grado di svolgere la nostra operazione di determinare le equazioni dell'omografia che muta il cerchio unitario in sé, ovvero l'omografia che muta la conica $x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0$ nella conica $x^2 + y^2 = z^2$ (cioè in se stessa). Fissiamo due riferimenti:

Il primo riferimento è dato dai tre vertici $A'(-1, 0, 1)$, $B'(1, 0, 1)$, e il punto all'infinito $Y'(0, 1, 0)$ e dalle tre rette che li congiungono:

$$(A' Y'): z' + x' = 0, \quad (B' Y'): z' - x' = 0, \quad (A' B'): y' = 0$$

Il secondo riferimento è dato dai punti:

²⁸ M. Villa, *Lezioni di Geometria*, vol. II, Capitolo II, par.10, p.19.

$$A(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 1) \quad , \quad B(\cos \varphi, \sin \varphi, 1), \quad Y$$

dove Y è l'incontro delle tangenti in A e B alla circonferenza;
le tangenti hanno equazioni:

$$(AY) \quad x \cos \vartheta + y \sin \vartheta = z \quad , \quad (BY) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = z$$

essendo Y $(\sin \vartheta - \sin \varphi, \cos \varphi - \cos \vartheta, \sin(\vartheta - \varphi))$, mentre la
retta AB, ovvero la polare di Y, ha equazione:

$$(AB): (\sin \vartheta - \sin \varphi) x + (\cos \varphi - \cos \vartheta) y = \sin(\vartheta - \varphi) z$$

Posto

$$\cos \vartheta = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}, \quad \sin \vartheta = \frac{2t}{t^2 + 1} \text{ e quindi } t = \frac{d}{b}$$

E analogamente

$$\cos \varphi = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad \sin \varphi = \frac{2u}{u^2 + 1} \text{ e quindi } u = \frac{c}{a}$$

le tre rette in esame, in funzione di a,b,c,d, hanno equazioni:

$$\begin{aligned} (AY) & (d^2 - b^2)x + 2db y - (d^2 + b^2)z \\ (BY) & (c^2 - a^2)x + 2ca y - (c^2 + a^2)z \\ (AB) & (dc - ba)x + (ad + bc)y - (dc + ba)z \end{aligned}$$

I vertici del triangolo ABY hanno coordinate:

$$\begin{aligned} A & (d^2 - b^2, 2bd, d^2 + b^2) \\ B & (c^2 - a^2, 2ca, c^2 + a^2) \end{aligned}$$

$$Y (dc - ba, ad + bc, - (dc+ba))$$

Il terzo punto Y è stato trovato sia intersecando le due rette (AY) e (BY), oppure trovando il polo della retta (AB). Segue che la equazione dell'omografia è della forma:

$$\begin{aligned}\rho(z' + x') &= (d^2 - b^2)x + 2dby - (d^2 + b^2)z \\ \rho(z' - x') &= (c^2 - a^2)x + 2cay - (c^2 + a^2)z \\ \rho y' &= (dc - ba)x + (ad + bc)y - (dc + ba)z\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned}2\rho x' &= (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)x + 2(bd - ac)y + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)z = H \\ 2\rho y' &= 2(cd - ab)x + 2(ad + bc)y - 2(ab + cd)z = K \\ 2\rho z' &= (-a^2 - b^2 + c^2 + d^2)x + 2(ac + bd)y - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)z = D\end{aligned}$$

che scritte in coordinate non omogenee sono quelle presentate dal Villa, nel precedente paragrafo, che possono essere scritte ponendo $z=1$ dalle ovvie:

$$x' = H/D, y' = K/D.$$

9 - Gli assiomi della geometria euclidea

La revisione della Geometria di Euclide prese le mosse dall'opera di David Hilbert (1862-1943) con il suo *Grundlagen der Geometrie* (1889), dove presentò un insieme formale, composto da 28 assiomi, che evitarono le varie contraddizioni derivanti da quelle antiche proposte da

Euclide. Indipendentemente e contemporaneamente a David Hilbert, come già ricordato in altro paragrafo, Robert Lee Moore²⁹ (1882-1974), pubblicò un insieme di assiomi equivalenti.

9.1 - Il metodo Moore

Moore divenne molto famoso come didatta quale inventore di un importante metodo. Il metodo Moore, secondo il famoso matematico Paul Richard Halmos³⁰ (1916-2006), il metodo si può riassumere nella frase: «Il modo migliore per imparare è fare, il modo peggiore per insegnare è parlare».



Fig. 19 - Paul Halmos

²⁹ Per notizie su Moore si veda la nota 15.

³⁰ Halmos fu un matematico ebreo-ungherese, emigrato nel 1929 in USA. Si occupò di molti rami della matematica ed è molto noto per i suoi successi editoriali relativi a testi universitari e di introduzione alla ricerca. Fu molto diffuso in Italia il volume *Teoria elementare degli insiemi* (1981), Milano, Feltrinelli. Il suo *I want to be a Mathematician* (1985) è una analisi del ruolo del matematico nel XX secolo.

Si noti che Halmos, se da un lato loda il metodo Moore per la didattica, ha, al contrario, una visione differente per il matematico che si occupa di ricerca.

Halmos asserisce:

*... la matematica non è una scienza deduttiva:
quando tentiamo di dimostrare un teorema, non è che
elenchiamo le ipotesi e poi iniziamo a ragionarci su.
Quello che facciamo è una serie di prove ed errori!*

In questo Halmos sembra essere molto vicino alle idee del grande epistemologo austriaco Sir Karl Popper (1902-1994), naturalizzato inglese, ben noto per la difesa dell'idea di società aperta, contro ogni totalitarismo, per il rifiuto e la critica all'induzione, con la sua proposta della Teoria della falsificabilità, ad un tempo criterio di demarcazione tra scienza e non scienza.



Fig. 20 - Sir Karl Popper

Popper è propugnatore dell'idea che "una teoria vale fino a che non nasce al suo interno una falsificazione" ovvero un "fenomeno inspiegato". La falsificazione o l'errore conduce a formulare una nuova teoria più generale, che se porta la vecchia teoria ad essere inquadrata nella nuova produce, quella operazione denominata "salto epistemologico" come nel caso della nascita delle geometrie non-euclidee e della Teoria della relatività. Afferma Popper: «Ogni qualvolta una teoria ti sembra essere l'unica possibile, prendilo come un segno probabile che non hai capito né la teoria né il problema che si intendeva risolvere».

Tornando a Robert Moore e al suo metodo didattico, è abbastanza corretto osservare che in fondo Moore ha insegnato in piena sintonia con il pensiero del grande Socrate (469-399 a.C.), con quella idea notevole del "sapere di non sapere", che era una ignoranza intesa come consapevolezza di una non conoscenza definitiva, che diventa però movente fondamentale del desiderio di conoscere, ed anche segna la nascita di quel peculiare modo di pensare che ha consentito l'origine e lo sviluppo della riflessione astratta e razionale, che sarà il fulcro portante di tutta la successiva filosofia greca.

L'avvicinare il metodo Moore ai metodi socratici della Maieutica, appaiono chiaramente nel *Teeteto*, nel quale il suo allievo Platone³¹ (428-348 a.C.) riferisce il pensiero del Maestro Socrate:

La mia arte di maieutico in tutto è simile a quella delle levatrici, ma ne differisce in questo, che essa aiuta a far partorire uomini e non donne e provvede alle anime generanti e non ai corpi. Non solo, ma il significato più

³¹ Nulla di scritto ci è pervenuto di Socrate, le sue idee furono esposte da Platone, primo ad iniziare regolari scritti sulla filosofia del tempo.

grande di questa mia arte è ch'io riesco, mediante di essa, a discernere, con la maggior sicurezza, se la mente del giovane partorisce fantasticherie e menzogna, oppure cosa vitale e vera. E proprio questo io ho in comune colle levatrici: anche io sono sterile, sterile in sapienza; e il rimprovero che già molti mi hanno fatto che io interrogo gli altri, ma non manifesto mai, su nulla, il mio pensiero, è verissimo rimprovero. Io stesso, dunque, non sono affatto sapiente né si è generata in me alcuna scoperta che sia frutto dell'anima mia. Quelli, invece, che entrano in relazione con me, anche se da principio alcuni d'essi si rivelano assolutamente ignoranti, tutti, poi, seguitando a vivere in intima relazione con me, purché il dio lo permetta loro, meravigliosamente progrediscono, com'essi stessi e gli altri ritengono. Ed è chiaro che da me non hanno mai appreso nulla, ma che essi, da sé, molte e belle cose hanno trovato e generato.

Interessante collegare queste idee con quanto scrive³² Bruno de Finetti (1906-1985) anche rivelando il suo interesse sia per la maieutica di Socrate che per il pensiero di Luigi Pirandello (1867-1936), del quale adatta la frase seguente: i nostri concetti «*non saranno mai i protagonisti di una commedia finita, ove ciascuno ha la sua parte ... saranno sempre personaggi in cerca d'autore*».

In fondo è esattamente quanto Moore chiede ai suoi studenti. Il loro sistema di apprendimento consisteva nel fatto che essi dimostravano, da loro se stessi, i teoremi che Moore enunciava nel suo corso, magari facendo il *maieutico* sui termini di base del problema presentato e il popperiano sulle teorie.

³² B. de Finetti, (2006) *L'invenzione della verità*, Milano, Raffaello Cortina Editore. Si tratta di un'opera pubblicata postuma con introduzione di Giulio Giorcello e Giordano Bruno e una premessa della figlia Fulvia de Finetti, circa il rinvenimento dell'opera inedita.



Fig. 21 - Bruno de Finetti

Moore divideva il problema da trattare in una catena di risultati da provare e si limitava solo a spiegare le definizioni necessarie per scoprire le dimostrazioni. Il resto veniva elaborato dagli studenti stessi. I loro corsi erano competitivi perché gli studenti di solito volevano che Moore dirigesse le loro tesi di dottorato. Le prove di ognuno venivano mostrate sulla lavagna e sottoposte all'esame accurato dei suoi compagni di classe, che cercavano qualsiasi incrinatura nel ragionamento. Moore richiedeva agli studenti di non consultare alcun testo relativo al suo insegnamento in biblioteca. La ragione è ovvia, i testi avrebbero contenuto le prove dei teoremi che gli studenti dovevano elaborare da soli.

Per Moore sarebbe stata una sorta di frode accademica. Il metodo di Moore è ancora praticato in molte università in tutto il mondo e diversi testi hanno una concezione didattica simile. Inoltre alcuni insegnanti hanno progettato varianti del metodo per renderlo più cooperativo.

Il lettore può apprezzare l'enorme impatto che ha avuto Moore come insegnante visitando il link proposto nella nota: <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=286>.

9.2 - Gli assiomi di Hilbert-Moore

Sia S un insieme astratto non vuoto di oggetti, detti "punti" che indicheremo con lettere latine maiuscole:

$$S = \{A, B, C, D, \dots\}$$

siano inoltre R e P , due famiglie non vuote di parti (sottoinsiemi) di S i cui elementi (cioè le parti) chiameremo rispettivamente "rette" e "piani", denotate con lettere minuscole le rette e con lettere greche i piani.

$$R = \{r = \{A, B, \dots\}, s = \{C, D, \dots\}, \dots, t = \{E, F, \dots\}\}$$

$$P = \{\alpha = \{A, B, C, \dots\}, \beta = \{D, E, F, \dots\}, \dots, \gamma = \{G, H, L, \dots\}\}$$

Definizione 1. La coppia (S, R) ovvero la terna (S, R, P) prendono il nome di spazi geometrici, con una o più famiglie di blocchi.

Definizione 2. Uno spazio geometrico (S, R, P) è detto spazio euclideo se soddisfa i seguenti gruppi³³ di assiomi, meglio conosciuti con il nome di assiomi di Hilbert-Moore:

³³ Alcuni autori elencano solo i cinque assiomi, introdotti anticamente da Euclide. Questa via è interessante anche se lontana dagli scopi di questa nota. Per approfondire lo studio del modello di Klein, da questo punto di vista, si può consultare l'opera: S. Maracchia, (1993) *Dalla Geometria euclidea*

- Assiomi di appartenenza
- Assiomi di ordinamento
- Assiomi di congruenza
- Assioma di continuità
- Assioma delle parallele

9.2.1 – Assiomi di appartenenza

Ia - *Per due punti distinti passa una ed una sola retta.*
Dovremmo dire: due distinti elementi di S appartengono ad uno ed un sol elemento di R .

Ib - *Ogni retta ha almeno due punti; esistono tre punti non su una retta.*

Ic - *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.*

Dovremmo dire: tre distinti elementi di S , non tutti e tre su un elemento di R , appartengono ad uno ed un sol elemento di $\mathcal{P}$.

Corollario I.1. *Ogni piano contiene almeno tre punti, non allineati.*

Dimostrazione. Se ciò non fosse, il piano non conterrebbe tre punti non allineati, contro quanto richiesto da Ib.

Corollario I.2. *Un piano non può essere contenuto in una retta.*

alla geometria iperbolica: il modello di Klein, Liguori Ed. e gli interessanti ulteriori aspetti presentati dall'Autore.

Dimostrazione : ovvia, se una retta contenesse un piano, il piano non conterrebbe tre punti non allineati contro Ib.

Id - Se due punti di una retta sono su di un piano, allora la retta appartiene al piano.

Corollario I.3. *Dati una retta e un punto non appartenentisi è unico il piano che li contiene. (Conseguenza di Ie. e Id.)*

Corollario I.4. *Due rette distinte appartenenti ad un piano si incontrano in al più un punto.*

Definizione I.5. *Due rette distinte che non si incontrano, di un medesimo piano, si dicono parallele.*

N.B. Nessuna informazione è postulata sull'esistenza e sull'unicità di una parallela.

Ie - Se un punto appartiene a due piani distinti allora i due piani hanno almeno un secondo punto in comune.

Corollario I.6. *Una retta, per due punti distinti comuni a due piani distinti piani, appartiene ad entrambi i piani.*

Corollario I.7. *Due piani distinti, aventi un punto in comune, hanno esattamente una retta in comune.*

If - Esistono quattro punti non su un medesimo piano.

Corollario I.8. *Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P interseca il piano in al più un solo punto.*

Dimostrazione. La retta r non può incontrare il piano in più di un punto altrimenti la retta apparterrebbe al piano, quindi anche P vi apparterrebbe, contro l'ipotesi.

Definizione I.9. *Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, una retta r per il punto P che non interseca il piano si chiama una retta parallela al piano.*

Osservazione. Due rette possono essere complanari, allora sono o parallele o incidenti.

Definizione I.10. *Se esistono due rette che non appartengono ad uno stesso piano si diranno sghembe.*

Teorema I11. *Dati un piano α ed un punto P fuori di esso, sia r una retta per P e per un punto Q del piano. Una qualunque retta s del piano α non contenente Q , è sghemba con r .*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un piano contenente r ed s . Tale piano contenendo Q ed s coincide con α , ma contenendo r , conterrebbe anche P , e ciò è assurdo.

Da notare che una geometria che soddisfa i soli postulati dell'appartenenza può essere anche finita. Uno spazio affine su un campo di Galois(ad esempio anche sulle classi resto modulo un primo) soddisfano gli assiomi, ma non soddisfano i successivi.

9.2.2 - Assiomi di ordinamento³⁴

IIa - *Su ogni retta sono date due relazioni d'ordine totali, una l'inversa dell'altra dette precedere ($>$) e seguire ($<$) ($\Rightarrow$ "relazione stare fra" un punto C sta tra A e B se C precede A e segue B ! Ovvero $A < C < B$).*

³⁴ Euclide non enuncia gli assiomi di ordinamento, anche se implicitamente ne fa uso. Essi furono rilevati ed enunciati da Moritz Pash (1843-1930), che costruì pure interessanti geometrie critiche sugli assiomi dell'ordinamento.

IIb - *Dati due punti distinti $A \neq B$ con $A < B$, esistono almeno tre punti X, Y, Z tali che $Z < A < X < B < Y$. ($\Rightarrow$ "concetto di segmento" come insieme dei punti che stanno tra due punti dati!). Il segmento di estremi A e B , si denota con $[AB]$, dunque:*

$$[AB] = \{X \text{ t.c. } A < X < B\}$$

Corollario II.1 *Un segmento, e quindi una retta, contiene una infinità almeno numerabile di punti.*

NOTA. Un modello di retta, soddisfacente agli assiomi di appartenenza e ai due precedenti, è dato dall'insieme dei numeri razionali con il loro ordinamento naturale, $(\mathbb{Q}, <)$.

Definizione II.2 (di semiretta). *Data una retta r , si fissi su essa un punto P . Diremo che due punti A, B sono sulla medesima semiretta se P non appartiene ad $[AB]$, diremo che i punti A, B sono su semirette diverse se P appartiene ad $[AB]$.*

Definizione II.3 (costruzione di semirette). *Data una retta r ed un suo punto P si chiama semiretta destra di origine P , l'insieme dei punti Y che seguono P , si indica con (P, r) . Si chiama semiretta sinistra di origine P , l'insieme dei punti Z che precedono P , si indica con (r, P) .*

Definizione II.4 (di triangolo e di trilatero). *Da Ib- e IIb- segue la nozione di triangolo (dati tre punti, A, B, C , a due a due distinti e non allineati, detti vertici, un triangolo è l'insieme dei punti appartenenti ai segmenti aventi come estremi i vertici, detti lati del triangolo). Si chiama invece trilatero, l'insieme dei punti sulle rette che congiungono i vertici a due a due.*

IIc - *Dati tre punti su una retta uno ed uno solo di essi "sta fra" gli altri due.*

IId - *Assioma di Moritz Pash. Se una retta incontra un lato di un triangolo, allora incontra necessariamente un secondo lato, almeno.*

NOTA. (Geometria piana non pashiana). Nel 1970 il matematico Lesław W. Szczerba fornì un esempio di geometria in cui sono validi gli assiomi della geometria euclidea, ma non l'assioma di Pasch. La costruzione si basa sul fatto che esiste una soluzione discontinua³⁵ dell'equazione funzionale, posto $f(1) = 1$ del tipo $f(x + y) = f(x) + f(y)$ con $f(1) = 1$. Se si definisce una relazione di ordinamento parziale su $\mathbb{R}$, nel modo seguente: $x < y$ sse $f(x) < f(y)$, allora la quaterna $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ risulta essere un campo semi-ordinato. Se f non è continua, il piano cartesiano costruito su questo campo soddisfa gli assiomi della geometria euclidea, ma non l'assioma di Pasch. Si noti che tale dimostrazione richiede l'assioma della scelta.

Definizione II.5 (di semipiano). *Dato un piano a ed una retta r su di esso. Possiamo ripartire a in due classi a_1, a_2 , ciascuna detta semipiano, tali che due punti P, P' non appartengono alla stessa classe se sulla retta r tra essi, vi è un punto di r tra essi, appartengono alla stessa classe se ciò non accade.*

³⁵ B. Rizzi (1973) *Interpretazioni di alcune equazioni funzionali*, Periodico di Matematiche 49 (4), 33-48.

Definizione II.6 (di angolo). *Siano date due semirette a e b , di comune origine P , si fissino un punto H sulla semiretta a , ed un punto K sulla semiretta b , diversi da P . Chiamiamo angolo $[ab]$ l'insieme dei punti delle rette uscenti da P ed intersecanti $[HK]$.*

Definizione II.7 (di fascio proprio di rette). *È l'insieme delle rette di un piano, passanti per un punto P di quel piano. Possiamo analogamente definire i fasci impropri di rette, i fasci di piani propri ed impropri, le stelle di rette e di piani propri ed impropri.*

Corollario II.8 *L'ordinamento sulla retta induce un ordinamento delle rette di un fascio proprio.*

Si consideri nell'angolo ab di origine P il triangolo PHK , dove H, K sono due punti rispettivamente su a e b , diversi da P . Si fissi un ordinamento su $[HK]$, definito come segue: una retta r precede una retta s , r, s per P , se il punto R in cui r incontra $[HK]$, precede il punto S , nel quale s incontra $[HK]$.

NOTA. Un modello di spazio, soddisfacente agli assiomi di appartenenza e dell'ordine è dato dall'insieme delle terne ordinate di numeri razionali, per i quali i razionali hanno il loro ordinamento naturale, $(\mathbb{Q}, <)$ e nel quale i piani sono rappresentati dalle equazioni del tipo $ax+by+cz+d = 0$, e le rette con i sistemi costituiti da due equazioni di piani indipendenti.

9.2.3 - Assiomi di eguaglianza (congruenza o del movimento)

Negli assiomi che seguono è da notare la dualità tra la nozione di segmento e quella di angolo, i cui assiomi si integrano assieme nell'ultimo postulato. Quando l'eguaglianza si concepisce come una trasformazione, si chiama anche movimento.

Definizione III.1 Indichiamo con S l'insieme dei segmenti.

Definizione III.2 Indichiamo con Ω l'insieme degli angoli.

III.a- In S è data una relazione di equivalenza "=" detta "eguaglianza" di segmenti.

III.b- In Ω è data una relazione di equivalenza "=" detta eguaglianza di angoli.

III.c.- Dati un segmento $[AB]$ e una semiretta di origine H esiste nella semiretta un punto K tale che $[HK] = [AB]$

III.d.- Dati un angolo $[ab]$ e un fascio di origine h esiste nel fascio una retta k tale che: $[hk] = [ab]$

III.e. - $[AB] = [BA]$

III.f. - $[ab] = [ba]$

Definizione III.3. Due segmenti $[AB]$ e $[BC]$ appartenenti alla semiretta di origine A , si chiamano segmenti consecutivi se $A < B < C$. Essi determinano il segmento $[AC]$ che per definizione si indica con $[AC] = [AB] + [BC]$, detto somma disegmenti consecutivi.

Definizione III.4. Due angoli $[ab]$ e $[bc]$ appartenenti all'angolo di origine a , si chiamano angoli consecutivi se

$a < b < c$ Essi determinano l'angolo $[ac]$ che per definizione si indica con $[ac] = [ab] + [bc]$, detto somma degli angoli consecutivi.(sovrabbondante)

III.g.- (sovrabbondante) Se $[AB]$ e $[BC]$ sulla semiretta (A,r) di origine A , ed $[A'B']$ e $[B'C']$ sulla semiretta (A',r') di origine A' sono segmenti consecutivi e se $[AB] = [A'B']$ e $[BC] = [B'C']$ allora: $[AB] + [BC] = [A'B'] + [B'C']$.

III.h.- Se $[ab]$ e $[bc]$ sull'angolo di origine a , ed $[a'b']$ e $[b'c']$ sull'angolo di origine a' sono angoli consecutivi e se $[ab] = [a'b']$ e $[bc] = [b'c']$ allora: $[ab] + [bc] = [a'b'] + [b'c']$

Definizione 3.3.- Due triangoli di vertici rispettivi (A,B,C) , (A',B',C') aventi nell'ordine lati ed angoli corrispondenti eguali, si dicono eguali. Cioè sono tali che $[AB] = [A'B']$, $[BC] = [B'C']$, $[AC] = [A'C']$, $\text{ang} A = \text{ang} A'$, $\text{ang} B = \text{ang} B'$, $\text{ang} C = \text{ang} C'$

III.i. (I Criterio di eguaglianza). Due triangoli di vertici rispettivi (A,B,C) , (A',B',C') aventi nell'ordine $[AB] = [A'B']$, $[BC] = [B'C']$ e $\text{ang} B = \text{ang} B'$, sono eguali. (si dice anche congruenti).

N.B. Sui postulati dell'eguaglianza (ovvero del movimento o congruenza) vi sono numerose altre versioni, mediante gruppi di postulati del tutto equivalenti a quelli presentati sopra, che rappresentano la linea seguita da vari autori, quali oltre Hilbert e Lee Moore, sono il Veronese, il duo Enriques-Amaldi, come meglio specificato in ciò che segue. È infatti

interessante indicare almeno quali sono gli autori, che in un modo o nell'altro hanno pubblicato i loro metodi³⁶, o meglio il loro gruppo di assiomi per presentare una corretta teoria dell'eguaglianza.

Anticamente Euclide non distingueva tra eguaglianza ed equivalenza ed in realtà la specifica dei due concetti è arrivata più tardi. Le varie teorie moderne sulla eguaglianza, si possono ripartire in cinque linee di pensiero.

Una prima linea è quella di David Hilbert (1862-1943), di Robert Lee Moore (1882-1974), di Giuseppe Veronese (1854-1917), di Federigo Enriques (1871-1946) ed Ugo Amaldi (1875-1957). Il metodo di Hilbert e Lee Moore si basa in effetti sul ritenere primitivo il concetto di eguaglianza di segmenti e di angoli e di postulare il 1° criterio di eguaglianza dei triangoli, evitando di considerare dall'inizio l'idea di movimento. Anche il Veronese segue questa strada, ma tralascia la nozione di angolo. Alle idee di Hilbert si sono attenuti Enriques ed Amaldi nel loro classico trattato *Lezioni di Geometria*, che rimane sempre un nostro punto di grande riferimento. Da notare in Enriques - Amaldi, il 1° criterio di eguaglianza è apparentemente dimostrato, anche se la dimostrazione, del tutto intuitiva, equivale a dire che è vero perché è vero, quindi a usarlo come postulato.

Una seconda linea di pensiero è quella che nasce nell'operadi Moritz Pash³⁷ (1843-1930), che considera primitivo il concetto di congruenza per figure qualsiasi,

³⁶ Cfr. A. Chiellini-R. Giannarelli, op.cit., pp.399-427.

³⁷ M. Pash, (1882), *Vorlesungen uber neuere Geometrie*, Leipzig

definita con opportuni postulati, che indicano come il movimento operi sulle figure. Tale indirizzo è seguito nell'opera di Carlo Rosati (1876-1929) e Piero Benedetti³⁸ (1876-1933), in quella di Michele De Franchis (1875-1946), ed infine nel trattato di Francesco Severi (1879-1961).

La terza linea, forse la più moderna, è legata agli spazi metrici³⁹ e alla nozione di distanza. È quella seguita da Enrico Bompiani (1889-1975) e Carmelo Longo (1912-1971) che prendono in considerazione la distanza di due punti e definiscono come movimento una corrispondenza puntuale biettiva che conserva le distanze di coppie di punti corrispondenti. Questa idea è in piena sintonia con la definizione di spazio euclideo (anche n -dimensionale) definito a partire da uno spazio vettoriale di dimensione finita sui reali, e per estensione anche sui complessi, o anche per geometrie piane su campi finiti, nei quali si introduca un particolare prodotto "*interno*" e quindi una "*metrica generalizzata*", a valori in un campo di Galois, (cfr. Di Gennaro- Eugeni in [9]).

Una quarta linea si trova nelle opere⁴⁰ di Mario Villa (1907-1973), nelle quali oltre ad approfonditi studi sulle trasformazioni puntuali, appaiono in dettaglio le equazioni dei movimenti piani e spaziali, oltre alle inversioni ed alle

³⁸ Piero Benedetti operò a Pisa, prima come allievo della scuola normale superiore, poi come prolifico autore di testi scolastici.

³⁹ E. Bompiani (1963), Alcuni tipi di spazi metrici, Archimede, 6, pp. 281-288, ed F. Eugeni, Spazi metrici e pseudometrici finiti, op.cit.

⁴⁰ M. Villa, Lezioni di Geometria, vol. II, Cedam Padova, 1965.

affinità circolari e tutta una varietà di rappresentazioni analitiche dei movimenti, delle similitudini, delle affinità, dell'anello delle centro-affinità. In particolare nell'articolo⁴¹ dedicato al modello di Klein, scritto dallo stesso Mario Villa nel già citato volume *Per un insegnamento moderno della Matematica*, appaiono i movimenti del piano di Klein in sé, esattamente come riportato in questo lavoro al paragrafo 6 dove i movimenti sono indicati e verificati. In questo lavoro al paragrafo ⁷, viene data una tecnica per ricavarli, che esulava dagli scopi didattici del Villa.

Un'ultima linea, quella gruppale, appare nel testo di Michele De Franchis (1875-1946), ed è anche quella scelta dal Villa, nella sua presentazione del modello di Klein.

Quest'ultima metodologia indicata può esprimersi mediante il seguente gruppo di postulati del tutto equivalenti, come è possibile dimostrare, a quelli dell'eguaglianza che abbiamo elencato nella lista di Hilbert-Moore.

Postulati gruppali del movimento

1. I movimenti sono particolari corrispondenze biunivoche del piano che formano un gruppo.

⁴¹ Il sottoscritto autore di questo scritto si è laureato con Mario Villa nel 1963, e iniziò la sua attività come assistente incaricato presso la Cattedra del Prof. Guido Vaona dell'Università di Modena. In quel contesto ebbi l'onore di correggere le bozze di quel lavoro del prof. Villa, e fin da allora mi interessai a come ricavare i movimenti del piano di Klein, così come ho esposto in questo lavoro.

2. In un movimento, ad una retta corrisponde ordinatamente una retta, cioè l'ordine dei punti viene conservato.
3.)Siano dati nel piano un punto A ed una retta r passante per A ; sia inoltre a una delle due semirette di r uscenti da A ed α uno dei due semipiani del piano π separati da r ; dati, similmente, un secondo punto A' , una seconda retta r' ed in relazione ad r' una semiretta a' , uscente da A' , ed un secondo semipiano α' separato da r' , esiste uno ed un solo movimento che porta A in A' , a in a' e α in α' .
4. Se un movimento muta una semiretta in sé stessa, allora muta in se stesso anche ogni punto della semiretta.

9.2.4 - Assiomi di continuità

Riprendendo il completamento dei postulati di Hilbert-Moore, procediamo ad illustrare il 4° gruppo di postulati della continuità, dei quali esistono due versioni. Premettiamo alcune definizioni. Con questi postulati la retta diviene continua e il modello spaziale è quello delle terne ordinate di numeri reali, e tutto si rappresenta con i metodi della geometria analitica.

Definizione IV.1 (di classi separate di punti). Sia $[AB]$ un qualsiasi segmento (più in generale una retta); supponiamo che esso sia ripartito in due classi non vuote di punti. Tali classi si diranno classi separate e contigue di punti se:

- ogni punto di $[AB]$ (o della retta) appartiene ad una ed una sola delle due classi;

- ogni punto della prima classe precede ogni punto della seconda classe.

Se esiste un punto C (appartenente alla prima o in alternativa alla seconda classe) che segue ogni punto della prima classe e precede ogni punto della seconda (lui escluso), tale punto si dirà *punto separatore* delle due classi.

Definizione IV.2. (di classi separate di segmenti). Siano date su una retta una classe di segmenti ripartiti in due classi. Tali classi si diranno *classi separate di segmenti*:

- ogni segmento della classe appartiene ad una ed una sola delle due ripartizioni;
- ogni segmento della prima classe è minore⁴² di ogni segmento della seconda classe.

Se esiste un segmento che è maggiore di ogni segmento della prima classe e minore di ogni segmento della seconda, tale segmento si dirà *segmento separatore* delle due classi.

I versione

Si ammettono i seguenti due postulati:

IV.a.- Postulato di Cantor. *Siano date due classi separate di segmenti:*

1° classe: $[AC_1], [AC_2], \dots, [AC_n], \dots$

2° classe: $[AB_1], [AB_2], \dots, [AB_n], \dots$

⁴²Si dice che $[CD] < [AB]$ se esiste in $[AB]$ un punto C , tale che $[CD] = [AC]$.

con $[AC_h] < [AB_k]$, $\forall h, k \in \mathbb{N}$. Se accade che comunque fissato un arbitrario segmento $[EP]$ possiamo trovare almeno due segmenti $[AC_h]$, $[AB_k]$ tali che $[C_h B_k] < [EP]$, allora esiste un unico segmento $[AX]$ elemento separatore delle due classi.

IV.b.- Postulato di Eudosso-Archimede. *Presi due segmenti qualsiasi, esiste un multiplo del più piccolo che supera l'altro.*

II versione

Si ammette il seguente unico postulato:

IV.c.- Postulato di continuità di Deedekind. *Comunque dati su una retta orientata due gruppi U , V non vuoti di punti costituenti due classi separate e contigue di punti allora esiste uno ed un sol punto P che è elemento di separazione delle due classi.*

Omettiamo la dimostrazione dell'equivalenza delle due versioni di postulati, del resto reperibile in letteratura⁴³. E' importante notare che esistono *geometrie non cantoriane* (ad esempio lo spazio numerico 3-dimensionale sul campo dei numeri razionali) e *geometrie non archimedee*⁴⁴ sulle quali uno studio iniziale si deve a Veronese⁴⁵.

⁴³ A. Chiellini - R. Giannarelli, op.cit., cap21, par.II.pp.499-506.

⁴⁴ Si veda in A. Chiellini - R. Giannarelli, op.cit., cap21, par. III pp.509-510 una versione intuitiva del modello di Veronese di retta non Archimedeae. Una versione numerica del modello è dovuta a F. Eugeni - S. Furneri - F. Mercanti, *Una presentazione delle geometrie non archimedee*, Atti del Congresso Nazionale della Mathesis, Teramo (1999), vol. I, pp.101-111.

⁴⁵ Veronese G. (1897), Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161 - 167. - Veronese G. (1898), Segmenti e

Va solo aggiunto che è possibile dimostrare come conseguenza della continuità che: *se un segmento congiunge un punto interno ad una circonferenza con un punto ad essa esterno allora il segmento ha un punto sulla circonferenza.*

La dimostrazione è nella nota 42. Vogliamo notare che tale teorema non vale in un piano non cantoriano. Infatti nel piano cartesiano a coordinate razionali la circonferenza unitaria (costituita dai suoi soli punti razionali) intersecata con una retta per l'origine non ha mai intersezioni razionali.

Sulle geometrie non-archimedee è interessante indicare il complesso dei lavori di Eugeni e Mascella che portano avanti la classificazione di tutte le possibili rette non archimedee.

Sono da indicare alcuni lavori di carattere preliminare⁴⁶ culminanti in un lavoro nel quale percorrendo una strada differente da quella del matematico austriaco Hans Hahn (1879-1934) viene presentata una moderna versione⁴⁷ della classificazione gruppale⁴⁸ data da Hahn nel 1907.

numeri transfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 79 - 87. - Veronese G. (1905), La geometria non archimedea. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347 - 351. - Veronese G. (1909), La geometria non archimedea, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197 - 208.

⁴⁶ Eugeni F. e Mascella R. (2001), *La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine*, *Periodico di Matematiche*, vol. 3, pp. 45-56. - Eugeni F. e Mascella R. (2002), *Su alcuni modelli geometrici non archimedei; Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano*; entrambi in F. Eugeni (2002) (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.

⁴⁷ Eugeni F. e Mascella R. (2005), A complete characterization of non-Archi-medean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice*, Editura Academiei Romane, Bucarest, pp. 257-270.

⁴⁸ Hahn H. (1907), Über die nichtarchimedischen Grossensysteme, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse*, vol. 116, pp.601-655.

Sull'argomento è interessante un antico articolo di Levi-Civita nel quale introduce "numeri non archimedei" costituenti una differente classe⁴⁹ rispetto alle rette non archimedee del Veronese. Ancora vi è un lavoro di Eugeni e Mascella nel quale costruiscono piani non archimedei⁵⁰, trovandone due non isomorfi.

Tuttavia è fuori dubbio, come prova anche l'articolo di Mascella, in questo fascicolo, dal titolo "Possibilità non archimedee" di carattere filosofico, che occorre fare ordine in questo ambito raccogliendo magari in volume la storia e l'evoluzione di questo interessante aspetto delle geometrie non -archimedee.

9.2.5 - Assioma delle parallele

V.a. *Dati una retta ed un punto che non si appartengono, esiste nel piano che li contiene una sola retta per il punto non avente punti in comune con la retta data (assioma di Euclide o delle parallele).*

⁴⁹ Tullio Levi Civita, *Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti R. Ist. Veneto di Lett. Ed Arti, VII (4), (1893), pp.1765-1815.

⁵⁰ Eugeni F., Mascella R. (1999), *Un piano non archimedeo derivato da un piano di traslazione*, in Eugeni F. (a cura di), *Critica dei fondamenti*, Teramo, Edilgrafital.

Bibliografia

- [1] Agazzi E., Palladino D. (2014). *Le Geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Casa ed. La Scuola
- [2] Berardi L. (1994). *Algebra e teoria dei codici correttori*, Milano, Franco Angeli.
- [3] Berardi L., Beutelspacher A. (1996). *Crittologia*, Milano, Franco Angeli Ed.
- [4] Berardi L., Beutelspacher A. (2003). *Matematica Discreta*, Milano, Franco Angeli Ed.
- [5] Bolyai J. (1955). *The science of absolute space*, in Bonola R., *Non-euclidean geometry*, New York
- [6] Bonola R. (1906; ristampa 1975). *La geometria non euclidea*, Bologna, Zanichelli.
- [7] E. Carruccio (1958). *Matematica e Logica nella storia e nel pensiero contemporaneo*, Torino, Ed. Gheroni.
- [8] A. Chiellini-R. Giannarelli (1962). *L'esame orale di Matematica*, Roma, Veschi.
- [9] Di Gennaro F., Eugeni F. (1975). *Strutture pseudo-euclidee su campi di Galois*, "Le Matematiche", Volume LII, Fascicolo 1, Catania, pp.129-142.
- [10] Eugeni F. (1996). La Matematica discreta attraverso i problemi, in: *Cento Anni di Matematica (Atti Congresso Nazionale Mathesis Centenario)*, Roma, Palombi, 84-102.
- [11] Greenberg M.G. (1973). *Euclidean and non-euclidean geometries*, San Francisco.
- [12] Klein F. (1968). *Vorlesungen über nicht-Euklidische Geometrie*, Berlino.

- [13] Meschkowski H. (1963). *Noneuclidean geometry*, New York
- [14] Ministero della Pubblica Istruzione–O.C.S.E. (1963), Mario Villa (cur.), *Per un insegnamento moderno della Matematica*, Bologna, Patron-
- [15] Segre B. (1961) *Lectures on modern geometry*, Roma, Cremonese,
- [16] Spampinato N. (1950), *Lezioni di Geometria superiore*, Vol. VI, Napoli, Ed.Pironti.

*Approvato su parere favorevole di Aniello Russo-Spena
e Fernando Di Gennaro*

La possibilità non-archimedeana

Raffaele Mascella*

*Dipartimento di Scienze della Comunicazione,
Università degli Studi di Teramo - rmascella@unite.it

Sunto. *La geometria non-archimedeana è una costruzione teorica prettamente speculativa, nascendo dalla negazione del postulato di Archimede, da sempre strettamente legato al concetto di continuità. In questo articolo, la geometria non-archimedeana viene discussa rispetto alla sua consistenza logica, alla sua dignità concettuale e alla sua possibile concreta utilizzazione come geometria per la rappresentazione del nostro spazio fisico. Nel fare ciò, oltre al suo sviluppo teorico che avviene sgretolandola nozione di continuità, viene considerata la posizione ontologica ed epistemologica di matematici e filosofi che se ne occuparono a cavallo del 1900, con in primis quella del suo inventore Giuseppe Veronese.*

Parole chiave: *Fondamenti, Non-archimedeo, Continuità, Infinito, Infinitesimo, Storia della Geometria, Assiomatica.*

1 - Introduzione e premesse storiche

La possibilità di una geometria non-archimedeana, ed il suo rapporto con l'intuizione, la logica e lo spazio fisico, emerse e venne affrontata in profondità nei due decenni a cavallo del 1900. Tale discussione si deve soprattutto all'opera di

Giuseppe Veronese, ma ad essa contribuirono altri matematici e filosofi di spicco, come Peano ed Hilbert, e fu proseguita da alcuni studenti di Veronese, tra cui Levi-Civita e Bindoni.

Questi studi sono stati da quel momento dimenticati, salvo sporadici interessamenti, alcuni dei quali recenti dovuti a Hehrilch (1987, 1994, 1997), che ne hanno riproposto l'importanza anche filosofico-matematica. Sono studi che interessano innanzitutto aspetti geometrici, analitici, algebrici di teoria degli insiemi, tirando in ballo l'annosa questione della continuità, nonché i concetti di infinito e infinitesimo. In un recente articolo (Mascella 2006), peraltro, lo stesso autore ha ripercorso la questione da un'angolazione storico-critica, epistemologica e fondazionale della geometria, per chiarire i modelli di questa geometria, da quello di Veronese (1891) a quelli di più recente formulazione di Eugeni-Mascella (2002, 2005), con questi ultimi che ripropongono in chiave moderna l'incisivo risultato di Hahn (1907) sulla classificazione dei gruppi ordinati abeliani.

Il problema ed una prima esauriente formulazione del continuo geometrico si deve a Dedekind, che ne ha proposto una chiave di lettura prima dell'approfondimento stimolato da Veronese, perché prima ancora, risalendo anche all'età classica, la continuità era data in forma implicita, sfruttando postulati e proposizioni della teoria delle grandezze. La continuità, per ciò che poteva esser compreso, vista anche la difficoltà di concepire numeri e grandezze che fossero incommensurabili, era sottintesa, inevitabile.

Anche i concetti di infinito e di infinitesimo, che alla continuità sono strettamente legati, come si può evincere dalla moderna analisi matematica che affonda le radici nel calcolo infinitesimale, hanno avuto una storia lunga e piena di difficoltà. Nell'età classica vi era una certa propensione a rifiutare questi concetti, tanto da indurre Aristotele a formulare la classica e invasiva (anche nei secoli successivi) idea che essi potevano essere espressi solo in potenza, come idea astratta di processi che proseguivano in maniera indefinita, e non potevano essere attuali, cioè pensati come proprietà di particolari oggetti realmente esistenti. In fondo, in molti passaggi della matematica greca, l'idea di infinito attuale viene tirata dentro, anche se in modo nascosto e indiretto, ma è chiara la difficoltà che a quel tempo si avvertiva, rimasta intatta fino a Dedekind e Cantor, di trattare direttamente e manipolare tali oggetti, con la semplice considerazione dell'infinità come proprietà emergente di particolari insiemi.

La continuità geometrica di Euclide, prende a prestito tutta la teoria delle grandezze (attribuita da molti ad Eudosso) e formulata nel libro V degli *Elementi*. In particolare le definizioni terza «il *rapporto* è una relazione tra due grandezze dello stesso tipo» e quarta «due grandezze sono in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra» (Boyer 1980: p. 134), ma non è esente da critiche. Come si evince dalle due definizioni, infatti, c'è una sorta di circolo vizioso, per cui prima si definisce il rapporto come qualcosa che ha a che fare con grandezze omogenee, poi, dimenticando di precisare cosa siano due grandezze omogenee, richiede che le grandezze

siano in grado di superarsi con il postulato di Archimede, e dunque, con quest'ultimo che diviene la definizione di omogeneità tra grandezze. In realtà, l'omogeneità è probabilmente data per scontata dal matematico greco, così come dai suoi predecessori. Ad ogni modo, nella quarta definizione sono tirate in ballo oltre l'omogeneità delle grandezze, anche una relazione d'ordine, i multipli e sottomultipli delle grandezze, che portano a basare il concetto su numeri, e sul loro rapporto. E inoltre, con la stessa definizione, Euclide può escludere tutte quelle grandezze che hanno comportamenti atipici, ad esempio gli angoli di contingenza, che non sono "archimedei" con gli altri angoli rettilinei. Ma di ciò Euclide è ampiamente cosciente, come dimostra la proposizione 16 del libro III, in cui si precisa che in un cerchio, tracciando una linea ad angolo retto all'estremità di un diametro, questa cade fuori dal cerchio e tra questa ed il cerchio non si può tracciare nessun'altra retta e, inoltre, «l'angolo del semicerchio è più grande, ed il rimanente più piccolo, di ogni angolo rettilineo acuto». Dunque esiste un angolo indivisibile, infinitesimo rispetto ad ogni angolo rettilineo acuto.

La discussione probabilmente ha avuto inizio già prima di Euclide, perché Archimede in un passaggio della "Quadratura della parabola", dove utilizza il postulato nella forma di lemma, solo successivamente denominato "archimedeo", afferma che «Anche i geometri anteriori a noi si sono serviti di questo lemma. [...] Accade ora che dei suddetti teoremi ciascuno è considerato non meno degno di fiducia di quelli dimostrati senza quel lemma: a noi basta che venga concessa simile fiducia ai teoremi da noi qui dati.»

Come richiesta di continuità, quella degli *Elementi* appare molto debole, se si pensa che essa, così come è concettualizzata oggi, oltre al principio di Archimede, si avvale anche di quello di Cantor. O, in alternativa, è definita con il solo principio di Dedekind, che è equivalente ai due precedenti presi assieme. L'interesse per la continuità, in particolare, apre le porte all'analisi di quali e quante siano le forme che la contemplano. Dal punto di vista geometrico conosciamo assiomatizzazioni diverse che portano a geometrie continue diverse, ad esempio nel senso non-euclideo. Ma l'interesse principale, in questo caso è sulle proprietà caratteristiche che "riempiono" la struttura, sia essa algebrica o geometrica, sia nel senso della densità, sia nel senso della raggiungibilità indefinita.

Nel libro V degli *Elementi* e nei seguenti volumi dell'opera euclidea, il concetto di continuità viene spesso chiamato in causa e, visto che la definizione è lacunosa, sembra sia considerato un concetto ovvio. Ne è un esempio la dimostrazione della Proposizione 18 del libro V in cui, date tre grandezze, Euclide ammette in modo naturale che deve esistere anche la quarta grandezza proporzionale. Così anche nel metodo di esaustione, la continuità e gli infinitesimi giocano un ruolo decisivo, anche se implicito. Sono testimonianza della profonda compenetrazione di tali concetti nella cultura greca la posizione di Anassagora che, rispetto all'infinitesimo dice (Dupont, 1981, I: p. 236):

Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione»; mentre rispetto

all'infinito afferma: «Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande.

Euclide, e con lui il mondo greco dell'antichità, decidono di bandire dalla loro scienza l'uso esplicito di quantità infinitesime, ispirati dall'idea aristotelica che quantità di siffatta specie possono potenzialmente venir considerate, ma in effetti non ci sono tracce significative della loro presenza, o perlomeno, se anche piccole tracce vi sono, queste non possono alterare una costruzione sicura e completa delle grandezze numeriche e geometriche, che tale risulta anche in virtù dell'esclusione in toto di quelle quantità.

D'altronde, è difficile immaginare gli infinitesimi in atto perché una quantità possiamo concepirla o come un qualcosa che c'è, oppure come qualcosa che non c'è. Anche quando da una quantità finita procediamo alla sua riduzione, fino a che sarà possibile esplicitarla, essa è non nulla, o altrimenti se è arrivata al di sotto di ogni quantità finita, si è letteralmente annullata. Con gli infinitesimi si suppone l'esistenza di uno stato intermedio tra un qualcosa e il niente, e ciò rende difficile la loro concettualizzazione soggettiva e la visualizzazione.

Anche in seguito, la storia della geometria e della matematica ha avuto lunghe discussioni sulla possibilità dell'infinito e dell'infinitesimo attuale, con filosofi e matematici schierati tra favorevoli e contrari, alcuni con posizioni intermedie, accettando l'uno e rifiutando l'altro, alcuni indecisi. Tali discussioni hanno anche avuto un lungo periodo di arresto con il prevalere del concetto di limite, che ha fornito di nuovo una chiave di lettura potenziale

dell'infinito e dell'infinitesimo, così come aveva suggerito Aristotele, negandoli come entità in atto. D'altro canto la stessa definizione di queste entità è rimasta a lungo ambigua, non pienamente formalizzata o formulata in modo lacunoso.

Per queste ragioni, che possiamo estendere anche al problema delle parallele, fino alla fine dell'Ottocento nessuno ha mai posto in dubbio la validità della geometria euclidea, e dunque nessuno si è allontanato dai suoi assiomi, e dalla concettualizzazione greca, e pertanto non vi sono state alternative contemplate o plausibilmente contemplabili. Certamente, fin dall'antichità greca si sono susseguiti una serie di tentativi di dimostrazione del postulato delle parallele, ma è soltanto nell'Ottocento che si è sentito il bisogno di riformulare i principi della matematica e della geometria.

In matematica, la pietra miliare di quel periodo è la teoria cantoriana degli insiemi, che ha aperto uno spiraglio di luce attraverso i numeri transfiniti, in cui è trattato ed indagato l'infinito come entità a se stante, per cui viene utilizzato l'infinito attuale manon l'infinitesimo attuale. Nel considerare gli insiemi di numeri, a partire dai numeri naturali, razionali e reali, Cantor non si occupa dei numeri costituenti gli insiemi, ma degli insiemi stessi e dunque ha a che fare per la prima volta con entità cardinalmente infinite, di cui fornisce caratteristiche e gerarchie. Cantor indaga la cardinalità di insiemi infiniti, così ammettendo l'infinito attuale, ma non c'è strada nella sua teoria che porta a considerare cardinalità infinitesime, e dunque l'infinitesimo attuale.

Ma la posizione di Cantor è ancora più netta. Non soltanto non utilizza gli infinitesimi, ma anzi combatte qualunque teoria che introduca gli infinitesimi. D'altro canto, gli infinitesimi mettono in dubbio perlomeno parte dell'edificio teorico di Cantor visto che l'infinitesimo richiama necessariamente anche l'infinito: se a è infinito, allora $1/a$ è infinitesimo, e viceversa. Cantor stesso afferma, secondo Veronese (1909, p. 198), di aver trovato una dimostrazione sull'impossibilità dell'infinitesimo attuale. Tuttavia, Veronese la rigetta facendo notare come anche Stolz l'avesse messa in discussione, rilevando come tale dimostrazione non possa riguardare gli infinitesimi così come li hanno definiti lui stesso e Du Bois-Reymond. Gli infinitesimi da loro definiti, infatti, non soddisfano l'assioma archimedeo ma non sono nemmeno grandezze lineari.

In geometria, la rivisitazione dei fondamenti ha luogo con la scoperta delle geometrie non-euclidee, peraltro dovuta, almeno in parte, ad un ulteriore tentativo di dimostrazione di detto postulato, stavolta in modo diverso (attraverso la sua negazione nel tentativo di giungere ad una contraddizione) ad opera di Girolamo Saccheri. Nascono così nuove possibilità geometriche, tutte logicamente fondate, ma ancora non rivestite di quell'importanza che il lavoro di Einstein ed i successivi progressi della fisica riescono a fornire in un secondo momento alla geometria ellittica.

È in questo contesto che arrivano le due decadi prima menzionate, ed il lavoro di Veronese che ispira un'ulteriore possibilità geometrica, stavolta prendendo in esame la non validità del postulato di Archimede, trascurato fino ad allora in ambito geometrico, ma in effetti utilizzato in modo

implicito a piene mani. Se nel caso delle geometrie non-euclidee ad essere indagato e sottoposto a rivisitazione è il postulato delle parallele, nel caso delle geometrie non-archimedee ad essere indagato e rivisitato è il postulato della continuità. Dunque, da questo punto di vista, una genesi analoga.

Il problema, nella sua vera essenza, è così formulato da Veronese (1909, p. 198):

Non si trattava adunque di vedere se esistono grandezze infinite ed infinitesime, bensì se esistevano segmenti rettilinei infiniti ed infinitesimi attuali, tali da soddisfare le proprietà fondamentali della retta, eccetto l'assioma d'Archimede.

La matematica dell'Ottocento, infatti, assume esplicitamente la corrispondenza tra continuo geometrico intuitivo e continuo numerico, ritenendo che i due insiemi siano correlati biunivocamente, e dunque identificandoli anche se questi appartengono a piani di argomentazione diversi. Questa posizione ha impedito l'indagine analitica, perché il continuo geometrico, una volta identificato con l'insieme dei reali, necessariamente soddisfa anche l'assioma archimedeo trasportato implicitamente dalla struttura numerica. E allora Veronese, accorgendosi delle conseguenze, ne ripensa formulazione e prospettive. L'utilità della geometria non-archimedea sta anche nell'aver permesso di chiarire il concetto di continuità e del rettilineo continuo geometrico. Quindi non si tratta semplicemente di un assioma che viene ammesso o negato, perché la sua profondità è più ampia di quanto non si potesse ammettere, anche in relazione con lo scarso interesse storico.

In questo articolo, farò riferimento direttamente al pensiero di Giuseppe Veronese, che oltre ad essere stato l'inventore della geometria non-archimedeo è stato anche il suo ferreo sostenitore, in una sovrapposizione tra costruzione matematica e indagine filosofica, difendendo la sua possibilità logica e concettuale in un contesto peraltro ostile intorno alle sue posizioni. Ad esempio, nel difendere la sua opera, Veronese ritiene di aver risolto definitivamente la questione dell'infinitesimo attuale, attraverso la sua ricerca sul continuo lineare, e afferma (Veronese, 1905, p. 347):

Così ho risolto la secolare questione del segmento infinito e infinitesimo attuale, della quale si erano occupati insigni filosofi e matematici, non mai risolta perché non era stata mai bene posta.

2 - Il modello di Veronese e la sua critica

Veronese per primo, nel 1891, formula la possibilità di una struttura rettilinea continua che prescinda dal postulato di Archimede e definisce due assiomi distinti che insieme equivalgono all'assioma di Dedekind, uno dei quali è proprio il postulato di Archimede. Il lavoro non è di facile comprensione, e viene giudicato in modo radicalmente diverso dai suoi contemporanei.

La primigenia della geometria non-archimedeo di Veronese sta nel modello fornito, ma anche nello spiraglio aperto rispetto alla corretta formulazione dei postulati geometrici, con particolare riferimento ai postulati della continuità.

Principio di Dedekind: Se un segmento di retta AB è diviso in due parti in modo che:

- (1) ogni punto del segmento AB appartiene ad una sola delle due parti;
- (2) A appartiene alla prima parte, B alla seconda;
- (3) un punto qualunque della prima parte precede un punto qualunque della seconda, nell'ordine AB del segmento;

allora esiste un punto C del segmento AB , che può appartenere all'una come all'altra parte, tale che ogni punto di AB che precede C appartiene alla prima parte, ed ogni punto che lo segue appartiene alla seconda parte.

Veronese si accorge che viene inglobato sia il carattere della continuità che intuitivamente percepiamo, ma anche qualcosa che nasce da questioni esperienziali, che non ha nulla a che fare con il continuo. Si tratta del fatto che le grandezze geometriche possano raggiungersi reciprocamente attraverso i propri multipli, e non soltanto all'interno del nostro spazio di osservazione. Con la formulazione di Dedekind, infatti, questa proprietà è deducibile dalle premesse, e dunque Veronese pensa di dividere il postulato, da un lato prendendo il postulato archimedeo, dall'altro completando nel senso della continuità facendo riferimento a classi contigue costruite con i segmenti invece che con i punti.

Principio di Archimede: *Due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se moltiplicate, sono in grado l'una di superare l'altra.*

Principio di Cantor *Se due classi di segmenti di retta sono tali che:*

(1) *nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda;*

(2) *prefissato un segmento s piccolo a piacere, esistono un segmento della prima classe ed uno della seconda la cui differenza è minore di s*

allora esiste un segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe né maggiore di alcun segmento della seconda.

Dunque con un postulato del continuo in una nuova forma. D'altro canto l'uso di punti per spiegare la continuità sembra portare fuori strada, perché non è con i punti che il "complesso" continuo si può spiegare, non è con l'insieme dei punti che il continuo sembra potersi comporre.

Così Veronese introduce i segmenti infiniti ed infinitesimi attuali per via geometrica, rilegando in secondo piano la trattazione aritmetica, che in parte dà lui stesso, ma più in particolare demanda al suo studente Levi-Civita (1898) quando si accorge che questa differenza di approccio è giudicata diversamente dagli altri studiosi, come un'esposizione lacunosa, non chiara, confusionaria. Levi-Civita, dal suo canto, dà un contributo importante all'affermazione della concezione non-archimedeo, dando una formulazione analitica più rigorosa in luogo di quella logico-sintetica di Veronese. Egli costruisce nuovi numeri denominati *monosemii* sulla scorta dell'idea di Veronese, ma da un'angolazione analitica, costruendo peraltro una teoria più completa di Veronese.

L'esemplificazione immediata della geometria non-archimedeo è la cosiddetta *retta di Veronese*, che possiamo immaginare algebricamente nella struttura avente come dominio il prodotto cartesiano tra i numeri relativi ed i reali,

fornita della congruenza tra segmenti e della relazione d'ordine lessicografica tra i punti. Geometricamente, invece, possiamo immaginare come in fig. 1, una sequenza di linee rette parallele a distanza predeterminata e considerare l'insieme così costituito come un'unica retta, in cui si definisce un ordine dato in modo naturale se i punti sono sulla stessa linea, e considerando un punto antecedente rispetto ad un altro punto se il primo si trova su una linea antecedente rispetto alla linea dell'altro. I numeri finiti, infiniti ed infinitesimi di Veronese d'ordine finito sono espressi con le unità $1, \infty_1, \infty_1^2, \dots, \infty_1^n, \dots, 1/\infty_1, 1/\infty_1^2, \dots, 1/\infty_1^n$, e così via. Veronese stesso chiarisce la natura dei suoi numeri in una nota, con linguaggio sorprendentemente attuale (Veronese 1891: p. XXVI): «I nostri numeri infiniti ed infinitesimi sono in fondo numeri complessi speciali con infinite unità».

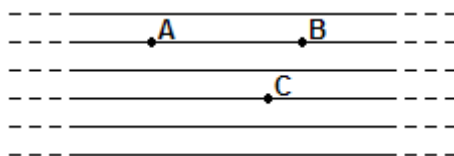


Fig. 1: I punti sono così ordinati: $A < B$, $A < C$, ma anche $B < C$

Le ragioni che in passato avevano fatto rifiutare le proposte degli infinitesimi attuali non si applicano agli infinitesimi di Veronese, ma non si applicano nemmeno alle proposte di Stolz e Du Bois-Reymond. E ciò viene così esplicitato (Veronese 1891: p. XXVII):

Sosteniamo l'infinitesimo attuale perché ne abbiamo dimostrato non solo la possibilità ma anche l'utilità nel campo geometrico; ché anzi per quanto possa essere per sé interessante una tale teoria non l'avremmo forse qui trattata senza le applicazioni geometriche che ne abbiamo fatte.

Per dare forma alla sua idea, il matematico veneziano usa un approccio originale, che ha influenzato la scuola italiana per molti anni, basato su tecniche intuitive piuttosto che su tecniche algebriche ed analitiche. Per questa scelta, come vedremo, Veronese fornisce anche motivazioni logiche e filosofiche.

Ma la proposta non viene accolta positivamente da tutti. Viene accolta ad esempio da Hilbert, che ha una reazione positiva, così come da Hans Hahn, che proseguono nel programma di ricerca: il primo che si dà il problema della consistenza di un tale sistema, il secondo che si dà quello di dare una giustificazione algebrica al “continuo intuitivo” di Veronese. Ma anche Poincaré riconosce alla geometria non-archimedeica la dignità esistenziale, e la sua possibilità logica derivante dall’indipendenza dell’assioma di Archimede (risultato, questo, riconosciuto ad Hilbert). Tuttavia, Poincaré inizialmente non sembra comprendere la differenza tra i numeri di Veronese, che formano un continuo numerico non-archimedeo, ed i numeri infiniti di Cantor che non sono affatto continui. Ma Veronese aveva da subito osservato (1891: p. XXVI): «Dai segmenti infiniti ed infinitesimi deduciamo nuovi numeri interi infiniti, i quali tanto nella somma come nella moltiplicazione sono soggetti alle leggi ordinarie, e quindi si distinguono dai numeri transfiniti di G. Cantor, i quali non si possono applicare alla costruzione dei segmenti infiniti della nostra forma fondamentale.»

Dall’altra parte, diversi matematici attaccano l’introduzione di Veronese di grandezze infinitesime attuali. Tra questi, Peano, Cantor, Killing e Schoenflies. L’aspra

critica di Peano, ad esempio, riguarda la mancanza di rigore nell'esposizione, ma anche la non giustificazione dell'uso di segmenti infiniti e infinitesimi.

Veronese rivendica e giustifica l'introduzione dei segmenti infinitesimi attuali e l'importanza fondazionale che questi rivestono, perché tali questioni vanno poste «in modo analogo a quelle relative ai postulati delle parallele e delle dimensioni dello spazio» (Veronese 1898: p. 80). E l'infinitesimo attuale, pur essendo una questione antica, non ha potuto avvalersi di una delineazione chiara del problema, anzi spesso complicata da «considerazioni filosofiche ad esso estranee» che hanno proposto orientamenti e declinato il problema in modo confuso e infruttuoso. Ciò ha probabilmente impedito la sua delineazione chiara, tanto nel senso della possibilità, quanto eventualmente dell'impossibilità logica.

È proprio la risposta che noi potremmo assegnare a questa richiesta di chiarezza, ad essere utile per delineare in profondità il legame del postulato di Archimede con gli altri postulati geometrici, e a rispondere, come conseguenza ultima, alla stessa analisi compiuta efficacemente sul postulato delle parallele, ovvero se esso può essere ottenuto deduttivamente dagli altri postulati o se invece ne è indipendente. Nei *Fondamenti* viene presentato un continuo rettilineo senza bisogno di postulati per la continuità, omettendo la proprietà archimedea e ottenendo la proprietà cantoriana attraverso una particolare definizione dei segmenti (che comunque richiama le classi contigue). In altri termini, tutta la continuità è ottenuta come proprietà degli elementi introdotti, e ciò butta luce ancora maggiore sulla

continuità, ed in riferimento al postulato di Dedekind, dal quale si ottengono i postulati di Archimede e Cantor come conseguenze.

Ciò dimostra che il postulato di Archimede sebbene possa sembrare un postulato che concede proprietà nuove alle grandezze interessate, assegnando la possibilità di superarsi a vicenda attraverso i propri multipli, va invece riguardato come una limitazione imposta a quegli stessi elementi, che invece sono vincolati all'essere "superabili" dagli altri elementi. E in definitiva è una limitazione sulla stessa ricerca scientifica, quando tale proprietà si presuppone senza eccezioni, ed a maggior ragione è limitante se interviene in modo implicito o sottinteso.

Tornando alle critiche, quella di Killing è dubbia circa i numeri transfiniti di Veronese, quella di Cantor è invece molto netta, affermando, anche se senza dimostrazione (Veronese 1905: p. 347), l'impossibilità dei segmenti infinitesimi attuali. A Cantor, che aveva introdotto con successo i numeri transfiniti, Veronese risponde che con tali numeri non è possibile costruire segmenti infinitesimi attuali e la geometria non-archimedeica, ma soprattutto che i suoi numeri transfiniti cantoriani sono diversi dai numeri di Veronese, come abbiamo anticipato poco sopra, rispetto alla mancata comprensione di Poincaré sullo stesso punto.

Poi vi è la particolare posizione di Klein, che non si pone in opposizione, ma si astiene su tutta la polemica, sia sui nuovi concetti, sia sulle risposte e critiche degli altri matematici e filosofi, e ciò gli è in fondo possibile, a suo dire, perché da essi non si sono ancora ottenuti risultati geometrici rilevanti. A Klein, Veronese però obietta la visione intorno

alla semplicità dei postulati, che per Klein devono essere in numero il più possibile ridotto, per non complicare il sistema fondazionale. Per Veronese ciò può farsi ma con alcune limitazioni, perché procedendo in quel modo su tutti i postulati geometrici, si perdono di vista gli aspetti salienti attorno a cui ruota la costruzione, su cui si lavora logicamente e deduttivamente e da cui possono scaturire anche novità future.

Alla base della difficoltà del lavoro di Veronese vi sono diverse questioni, che spaziano dalla natura dei concetti, alla natura del metodo adottato dal matematico italiano. Sulla prima tipologia di difficoltà, Veronese non utilizza nulla che possa semplificare la trattazione, ma d'altronde certe difficoltà gli paiono inevitabili come evidenza più volte. Nel 1891 (p. XXXVIII) afferma:

... in questi argomenti nulla deve essere trascurato, e che la concisione quando trascina seco la indeterminatezza dei concetti è un grave difetto. In una sola reticenza possono essere nascoste tali proprietà la cui dimostrazione richieda una radicale trasformazione dei principi medesimi.

Nel 1898 (p. 86 e seguenti) invece:

Più si discende e più difficili sono le questioni intorno ai fondamenti della scienza, di guisa che le maggiori difficoltà s'incontrano dappprincipio.

E poiché lo scopo del lavoro complessivo non è centrato sul solo postulato di Archimede, la complessità concettuale della fondazione geometrica, associata alla nuova visione e ai perfezionamenti suggeriti, non può certo renderne più

agevole la comprensione. Il metro della sua indagine, nella comprensione dello spazio e nella sua formalizzazione, parte dagli elementi di base della logica, che non hanno alcuna premessa alla loro chiara esplicitazione. Nulla viene dato per scontato, dunque è chiaro che tutta l'argomentazione di Veronese procede molto lentamente, con passaggi logico-deduttivi brevi, e con risultati parziali che evolvono in modo cauto nella costruzione dell'edificio teorico. Tanto per intenderci, Veronese difende il suo linguaggio e la sua trattazione che ha inizio dalle proposizioni più semplici che si possano immaginare, con un sapore classicheggiante e cartesiano (Veronese, 1891: p. 1): «1. Penso. 2. Penso una cosa o più cose. [...] 3. Penso prima una cosa, poi una cosa» e così via.

Applicando un metodo «basato sul puro ragionamento» (1898: p. 83), Veronese stabilisce le proprietà fondamentali della forma geometrica rettilinea, che può vivere per suo conto senza riferimento alcuno al continuo numerico. Egli utilizza i segmenti, cui assegna una nomenclatura fatta di simboli per fissare le idee, su cui prova la possibilità di effettuare le operazioni fondamentali, seguendo le leggi ordinarie, finanche al prodotto e alla divisione di segmenti. Ma il problema in questo caso non è di natura tecnica, incentrata sulle regole del calcolo aritmetico ed analitico, che si può pure derivare su tali simboli (e come aveva d'altronde fatto lo stesso Levi-Civita), quanto piuttosto sulla possibilità geometrica dell'esistenza di tali segmenti, risultanti solo dall'approccio sintetico e non attraverso il tramite dei numeri reali, con l'associazione dei punti della retta ad insiemi numerici. Dunque lo scopo di questo programma di ricerca

non consiste nell'individuazione di regole di calcolo semplici o algoritmi risolutivi per tali operazioni, ma è sulla possibilità di fondare la geometria della retta sugli infiniti e sugli infinitesimi attuali, non quali elementi analitici (come con Levi-Civita) ma come elementi propriamente geometrici. Ciò anche se la corrispondenza con i monosemi di Levi-Civita è immediata, quando si considerano i numeri di Veronese applicati non solo a valori interi, ma al completo campo dei reali. Al numero transfinito di Levi-Civita a_ν si può far comodamente corrispondere il numero di Veronese a^∞_1 , lasciando in tal modo inalterate le proprietà analitiche. Se avesse utilizzato gli strumenti analitici, le sue ricerche intorno ai principi della geometria sarebbero state «più ristrette».

La risposta del matematico veneziano alla critica fatta dalla comunità scientifica rileva da un lato i proclami che si fanno sulla giustezza, l'utilità e l'insostituibilità del metodo sintetico, dall'altro illoro procedere nella costruzione teorica in maniera diversa, utilizzando gli strumenti più semplici e più diretti, con la stessa pretesa di validità generale. Veronese afferma (1898, p. 87):

Analisti insigni, compreso Klein, insegnano che deve preferirsi per la trattazione dei principi della geometria il metodo sintetico, ma questo metodo per sé e ancora più colle nuove forme assunte dall'intuizione geometrica che urtano vecchie abitudini e radicate convinzioni, è oggidì meno seguito e riesce a molti più difficile del metodo analitico.

e ancora (Veronese, 1905, p. 350):

... mentre analisti insigni convengono che il metodo migliore per trattare i principi della geometria è quello sintetico, avviene poi che questo metodo è il più trascurato.

In molti passaggi nella Prefazione dei *Fondamenti*, sembra quasi che Veronese abbia prestato il fianco agli attacchi della sua geometria ammettendo da subito una serie di possibili critiche e dando punto per punto in anticipo le sue risposte.

Un'ultima riflessione sulla risposta di Veronese a Poincaré. Sebbene Veronese in quegli anni risponde con alcuni articoli, ed in una qualche misura fa rispondere ai suoi allievi con altri articoli che precisano contorni e rapporti tra la sua ricerca e quella di altri matematici, non può, per sua stessa ammissione, rimanere in silenzio nei confronti dei giudizi di Poincaré, che egli stima profondamente, e che è talmente noto e rispettato che i suoi giudizi si diffondono rapidamente, e sono ormai riportati anche da altri scrittori nelle loro opere. Poiché Poincaré tocca anche la questione della priorità delle geometrie non archimedee, come Veronese precisa anche nel titolo di un articolo (Veronese, 1905), la risposta appare necessaria. Poincaré in una relazione all'opera di Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* del 1899, scritta nell'occasione di un conferimento di un premio allo stesso matematico tedesco, individua nella geometria non-archimedeica la concezione più originale dell'intero volume, seppure Hilbert ha avuto un precursore in Veronese. Ma per Veronese non esistono dubbi sulla scoperta del non-archimedeo (Veronese 1905: p. 349): «La priorità poi della geometria non archimedeica debbo reclamarla intera», ma non per questo attacca l'opera di Hilbert, che invece ritiene meritevole (Veronese, 1905: p. 349) «per l'eleganza e la

semplicità della sua esposizione, per la profondità delle sue vedute filosofiche, per le conseguenze che ha tratto dall'idea fondamentale, Hilbert ha ben fatto questa sua *nuova geometria*». Ma nonostante ciò, e forse a maggior ragione rende gli onori ad Hilbert, la sua geometria è più completa di quella hilbertiana (come dimostra Bindoni nel 1902), che nella prima edizione del volume utilizza un solo assioma di continuità, cioè quello espresso nella forma di Dedekind, per poi inserire “solo” nella seconda edizione due postulati, uno dei quali è quello di Archimede.

3 - Consistenza e dignità concettuale

Costruendo un campo ordinato non-archimedeo nella seconda edizione del suo *Grundlagen*, Hilbert dimostra che una geometria non-archimedea può in effetti esistere logicamente. Per fare questo, Hilbert si serve di un procedimento costruttivo per generare un campo di numeri infiniti ed infinitesimi. Hilbert considera il dominio $\Omega(t)$ delle funzioni algebriche reali di variabile reale, che si ottengono attraverso addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estensione pitagorica (cioè l'operazione $|\sqrt{1 + \omega^2}|$, dove $\omega(t)$ è una qualunque altra funzione del dominio). Sull'insieme $\Omega(t)$ viene quindi costruita una relazione d'ordine considerando il comportamento asintotico delle funzioni, o se vogliamo per valori sufficientemente grandi oltre gli zeri (che sono in numero finito) delle funzioni. In altri termini, risulta $a(t) \leq b(t)$ se la funzione differenza $c(t) = b(t) - a(t)$ da quel punto in poi è non negativa. È facile dimostrare che la struttura $(\Omega(t), \leq)$ non soddisfa l'assioma archimedeo. Poi, una geometria tridimensionale non-

archimedeo è costruibile sul dominio $\Omega(t)^3$, con l'ordinamento lessicografico (cioè $(x, y, z) < (x', y', z')$ se $x < x'$, oppure $x = x'$ e $y < y'$, oppure $x = x'$ e $y = y'$ e $z < z'$).

Questa struttura ideata da Hilbert è essenziale per dimostrare la consistenza della geometria non-archimedeo, che non si evinceva dai lavori di Veronese e Levi-Civita. È sulla base di questo risultato, peraltro, che lo statuto del non-archimedeo geometrico acquisisce linfa vitale e strutture del genere vengono definitivamente considerate ammissibili.

A rafforzare ulteriormente i risultati di Hilbert intervengono dapprima il lavoro di Dehn (1900), poi quello di Hahn (1907). Dehn affronta il problema della possibilità logica non-archimedeo anche nel contesto di geometrie non-euclidee, accorgendosi che la proprietà archimedeo è stata utilizzata nella dimostrazione del teorema di Saccheri sugli angoli interni ad un triangolo. In particolare, Dehn prova l'esistenza di una geometria non legendriana e di una geometria semi-euclidea, nelle quali non vale il postulato euclideo, esistono infinite parallele per un punto ad una retta data, ma nel primo caso la somma degli angoli interni ad ogni triangolo è maggiore di due retti, nel secondo è invece uguale a due retti. Hahn, invece, classifica completamente le geometrie non-archimedee, in modo indiretto attraverso la classificazione completa dei gruppi abeliani ordinati.

Nello specifico, Hahn prende un gruppo linearmente ordinato abeliano G di grandezze non-archimedee. Al suo interno, si considera il comportamento reciproco degli elementi, in funzione del principio di Archimede. Se a e b si raggiungono attraverso opportuni multipli, li diremo "archimedei", o dello stesso rango, se invece non si

raggiungono per nessun multiplo, li diremo “non-archimedei”, o di rango diverso. L’uguaglianza di rango, che denotiamo con “ $\approx$ ”, è una relazione di equivalenza e permette di dividere il gruppo in classi (ottenendo l’insieme quoziente $G/\approx$), ognuna consistente di elementi aventi stesso rango, per cui le classi o coincidono o sono disgiunte. In tal modo Hahn dimostra che le quantità di G possono essere partizionate in classi di equivalenza, entro ciascuna delle quali l’assioma di Archimede è soddisfatto. D’altro canto, essendo G ordinato e non-archimedeo, esistono almeno due classi differenti in G , e la relazione “essere rango inferiore”, se vale per un elemento di una classe rispetto ad un elemento della seconda, vale nello stesso modo per tutti gli altri elementi della prima classe con rispetto a quelli della seconda classe. Dunque possiamo anche parlare di ordinamento delle classi. L’insieme $G/\approx$ ha così un ordinamento naturale indotto da G . Viceversa, Hahn prova che se abbiamo un insieme semplicemente ordinato I , allora esiste sempre un gruppo abeliano G semplicemente ordinato tale che $G/\approx$ è isomorfo all’insieme di partenza I .

Tracce dell’idea percorsa da Hahn si ritrova anche in Veronese (1909, p. 200): «[...] in un campo infinitesimo intorno ad un punto, considerando soltanto i segmenti finiti fra loro, o che soddisfano all’assioma d’Archimede, vale la geometria euclidea.»

Con la classificazione di Hahn, che completa il trittico Veronese-Hilbert-Dehn, la traiettoria logica delle geometrie non-archimedee è completa, con la dimostrazione esplicita della sua consistenza. Certamente il processo è avvenuto con meno sforzo rispetto alle geometrie non-euclidee, per la

relativa maggiore facilità del postulato messo in discussione, per le minori resistenze nei confronti della sua negazione, ma anche per aver giovato del clima di apertura creato solo qualche decennio prima dalle geometrie non-euclidee. Ma ciò non dovrebbe essere sufficiente a diminuire la sua importanza e la sua profondità concettuale, visto anche il fatto che, mentre nel caso non-euclideo si trattava di un postulato già fornito nella geometria euclidea, in questo caso l'assioma archimedeo viene sì dalla trattazione aritmetica delle grandezze, ma non aveva mai avuto in geometria un ruolo chiaro e centrale, come invece acquisisce con l'avvento di questo programma di ricerca. A mio avviso, è per questo importante soffermare la nostra attenzione sulle caratteristiche degli assiomi, per comprendere se la non-archimedeo sia plausibile degna di nota come possibilità concettuale. In questa direzione, ripartiamo dalle argomentazioni di Veronese, tendenzialmente provenienti dal lavoro pionieristico (Veronese, 1891) e dal lavoro conclusivo (Veronese, 1909) sull'argomento.

Per Veronese gli assiomi e i postulati della geometria che possiamo considerare sono innanzitutto quelli che valgono nello spazio esterno osservabile, cioè nel campo limitato d'osservazione del «filosofo empirista», dei quali non occorre fornire dimostrazioni, e quelli che estendono una proprietà anche allo spazio illimitato, dei quali occorre provarne matematicamente la possibilità. Per questa ragione non possiamo ammettere la validità dell'assioma delle parallele, dell'assioma di Archimede, o dell'assioma di Cantor come se questi fossero suggeriti dall'osservazione. Poi ci sono altre proposizioni che possono essere aggiunte, più propriamente

postulati, che invece sono geometricamente ammissibili, non contraddicendo le premesse e non contraddicendosi tra loro. Il loro scopo è quello di completare o limitare il campo geometrico formalizzato ed idealizzato, come sono ad esempio tutti gli assiomi del continuo, da Dedekind a Cantor, e l'assioma archimedeo, nonché quelli che permettono la costruzione di spazi con più dimensioni. Ciò avviene quando la geometria da scienza sperimentale diventa parte della matematica pura. Per tale ragione, le proposizioni di questa tipologia permettono logicamente nuove e diverse geometrie, quali sono le geometrie non-euclidea, non-archimedea e iperspaziale (Veronese 1905: p. 350-351).

Il problema a questo punto è sul come regolarsi nella scelta dei postulati: è totalmente arbitraria o ci sono regole da rispettare? Veronese sintetizza la questione in questo modo (1891, p. X): «Se si prova l'indipendenza dell'ipotesi dalle premesse, allora è dimostrata anche la sua possibilità». Per il matematico veneziano è dunque sufficiente la consistenza logica per rendere una geometria plausibile concettualmente e degna di considerazione, in quanto «[...] la possibilità diventa per la matematica realtà sebbene astratta, perché le forme del pensiero matematico sono vere quanto le forme della sensibilità che hanno una realtà concreta. Nessuno infatti può dubitare dell'esistenza del nostro intelletto e delle sue funzioni logiche senza contraddirsi.»

Ciò non vuol dire che possiamo concepire ipotesi in modo del tutto arbitrario. Certamente, perché un'ipotesi sia geometricamente possibile, essa non deve contraddire i principi e le operazioni logiche, più in particolare (Veronese

1891: p. XI-XII): «Per i caratteri che distinguono una geometria, un'ipotesi astratta è geometricamente possibile quando essa non contraddice agli assiomi necessari allo svolgimento teorico della geometria, che prendiamo dall'esperienza, ossia alle proprietà dell'intuizione spaziale nel campo limitato di essa». Pertanto, una teoria geometrica che affermasse che una linea è determinabile da tre punti invece che da due, sarebbe ammissibile nella matematica astratta, ma non nella geometria.

Ma in fondo la geometria, pur essendo una scienza «mista», fa parte della matematica e non della fisica (Veronese, 1891: p. VIII):

La scienza sperimentale più esatta è la geometria, perché gli oggetti fuori dal pensiero, che servono alla determinazione degli assiomi, vengono sostituiti nella nostra mente da forme astratte, e quindi le verità degli oggetti si dimostrano colla combinazione delle forme già ottenute indipendentemente da ciò che succede di fuori. E per questo che non senza qualche ragione la geometria [...] va considerata fra le matematiche pure; sebbene essa sia nella sua radice una scienza sperimentale.

D'altronde, come afferma successivamente (Veronese 1909: p. 201, il corsivo è dell'autore): «*La Geometria [...] ha la sua origine nell'osservazione diretta degli oggetti del mondo esteriore, che è lo spazio fisico, e dall'osservazione idealizzata di essi trae le sue prime e precise verità indimostrabili e necessarie al suo svolgimento teoretico, che sono gli assiomi propriamente detti [...]* Ma per essere esatta la geometria essa deve rappresentare gli oggetti forniti dall'osservazione per mezzo di forme astratte o mentali e gli assiomi con ipotesi bene determinate, indipendenti

cioè dall'intuizione spaziale cosicché la geometria diventi parte della matematica pura» in cui non c'è più bisogno di verificare ogni volta la corrispondenza dei risultati ottenuti con il mondo fisico esteriore, pur potendoci avvalere ancora dell'intuizione geometrica per la visione delle figure o per qualche altro vantaggio, finché naturalmente la corrispondenza non venga riproposta con qualche obiettivo.

Per Veronese la geometria non ha dunque natura puramente formale, né puramente sperimentale, ma è invece una scienza che raccoglie entrambe gli approcci; e tanto le sue premesse, tanto i suoi oggetti, possono essere considerati in modo duplice. Da un lato, infatti, vi è l'astrazione a partire dagli oggetti fisici osservati, dall'altro vi è la produzione di oggetti e modelli ideali che nascono nel nostro intelletto, con una chiave interpretativa di natura formale. L'astrazione dagli oggetti fisici è possibile a partire dall'intuizione, che permette di cogliere le proprietà più rilevanti, da cui noi successivamente generalizziamo nel senso della ripetizione o della estensione delle proprietà, e nel senso dell'eliminazione delle imperfezioni non significative al concetto stabilito. Dunque intuizione ed astrazione.

Scendendo più in dettaglio nella fattispecie della geometria non-archimedea, quando ci si sofferma sull'osservazione diretta, per due segmenti rettilinei l'assioma di Archimede è verificato, ma quando proviamo ad estenderlo allo spazio illimitato, la validità non è giustificata allo stesso modo. L'assioma di Archimede ha una natura empirica, dettata dalla nostra intuizione che ci fa vedere tutti gli oggetti come raggiungibili. Quando idealizziamo dei segmenti che non si possono osservare, fatti di altri punti

oltre agli estremi, non ci sono dati osservativi e non c'è un'intuizione che ci spinge a considerarli validi. E siccome un segmento infinitesimo svanisce nel nulla rispetto ad un segmento finito, «... se anche esistesse fisicamente un tale segmento, noi non potremmo vederlo».

La nostra capacità percettiva degli oggetti, in tal senso ha già in sé la possibilità di poterli afferrare e raggiungerli, dunque la validità di Archimede è in un certo senso una premessa delle nostre facoltà sensoriali. Per questa ragione l'intuizione spaziale ci suggerisce, come avevano colto già i primi geometri della storia, che tutte le grandezze fisiche che possiamo considerare a livello empirico sono perciò esse stesse grandezze archimedee: né infinite, né infinitesime. Ma non per questo la nostra intuizione si ferma ai dati empirici, con la capacità d'astrazione che generalizza globalmente proprietà intuite localmente. Se dunque non imponiamo aprioristicamente la validità dell'assioma archimedeo, la geometria che ne scaturisce rispetta l'intuizione spaziale «[...] e quindi il suo contenuto è geometricamente giustificato» (Veronese, 1909: p. 206).

Inoltre, potrebbero intervenire altre osservazioni che potrebbero migliorare le nostre ipotesi, magari andando a giustificare o a rendere più accurate le premesse. Nel caso del non-archimedeo questo difficilmente potrebbe accadere, perché da un lato l'esistenza dell'infinito e dell'infinitesimo attuale non contraddice la nostra intuizione, ma nessuna esperienza ci può mai condurre esternamente alle grandezze finite, perché in tal caso (Veronese, 1909: p. 206): «[...] se lo spazio fisico fosse infinito attuale rispetto al campo delle nostre osservazioni, nello spazio fisico finito, supposto anche

limitato, varrebbe la geometria euclidea» dove in questo caso sarebbe meglio parlare di geometria “semplicemente archimedea”, onde evitare la questione dell’esistenza di eventuali parallele.

La concettualizzazione geometrica, a partire dalle premesse intuitive, è dunque di fondamentale importanza, e nel caso non-archimedeo sembra che questo sia rispettato. Va altresì rilevato che l’intervento di una filosofia matematica nella definizione di entità geometriche può essere di grande aiuto, come risulta per lo stesso Veronese, ma può rivelarsi anche un elemento di conflittualità. In particolare, sulla non accettazione dell’infinitesimo e di altre possibilità matematiche attraverso strumenti filosofici, Veronese è dubbioso, non vedendo nell’indagine filosofica uno strumento così potente da permeare la validità delle ipotesi matematiche. È la matematica che deve indagare sulle ipotesi, e la filosofia dovrebbe nella fattispecie evitare considerazioni e spiegazioni metafisiche, per limitarsi a chiarire la genesi di tali concetti, a comprendere perché si fanno certe scelte e non altre, e ad ispirare la formazione dei concetti. La geometria, in particolare, fa parte della matematica pura e (Veronese, 1891: p. XIII):

La matematica pura non respinge ciò che è falso, e quindi per combattere un’ipotesi matematica bisogna dimostrare che è falsa, ma la dimostrazione deve essere logico-matematica non filosofica nello stretto senso della parola.

Dunque il problema dell’ammissibilità e dell’accettazione degli infinitesimi attuali è ricondotto alla sua accettazione matematica che è regina nel decretarne l’ammissibilità, e solo

in parte dipende dalla indagine filosofica. Nelle parole di Veronese (1891: p. XIII): «Se il problema matematico sui fondamenti della matematica e della geometria si spinge fino alla soglia del problema filosofico intorno all'origine delle idee matematiche e geometriche, però non la oltrepassa. Questo è certo un gran bene per la nostra scienza, perché altrimenti essa sarebbe in balia nei suoi principi delle molteplici opinioni filosofiche che si disputano la verità. Però, per timore di cadere nell'indeterminato non è neppure conveniente il ridurre la matematica e la geometria nei loro fondamenti a un puro convenzionalismo di segni, ma bensì esse vogliono essere trattate con metodo filosofico, vale a dire rendendo più chiara che è possibile la natura delle cose di cui si occupano». Ovvero, non bisogna dimenticare la genesi dei concetti, non bisogna svuotare i simboli matematici dei contenuti fattuali. Se invece della semplicità dell'equazione, è privilegiata la semplicità della descrizione, la lettura è apparentemente più complessa, ma sostanzialmente più agevole.

Quando Veronese ritorna sull'argomento nel 1909, ha le idee ancora più chiare (Veronese, 1909: p. 204-205, il corsivo è dell'autore): «[...] *le ricerche matematiche sui principi della scienza sono bene distinte e devono tenersi distinte, da quelle filosofiche intorno alla genesi delle idee matematiche [...]* La filosofia deve perciò accettare le nuove idee matematiche quando esse sieno formate definitivamente. Però se le ricerche matematiche si devono distinguere dalle filosofiche, è opportuno d'altro canto che il matematico si attenga dal giustificare i suoi concetti con considerazioni filosofiche o con finzioni che si prestano facilmente alla critica». La

chiarezza di idee è stavolta indotta da Du Bois-Reymond e Cantor, che da un lato si comportano da matematici fornendo nuove idee e costruendo strutture teoriche, dall'altro giustificano filosoficamente le loro idee, sia nel percorso della trattazione, sia a posteriori contro le teorie alternative. Il matematico, in tal senso, deve tener conto di ciò che emerge dalla sua teoria, e da ciò che emerge dalle critiche su di essa, senza trincerarsi dietro l'astratto o un inutile formalismo e senza rimanere indifferente davanti a critiche matematiche, come lui stesso cerca di fare. Occorre che *«il metodo non sia artificioso senza vita o non appaia giuoco di simboli o di parole [...] ma sia filosofico»* (Veronese, 1909: p. 205).

Infine qualche riflessione sulla questione metodologica, cui Veronese tiene in modo particolare fin dal principio, ma su cui ritorna sistematicamente dopo i violenti attacchi ricevuti sulla scarsa eleganza, lo stile incerto, i risultati approssimativi.

Il metodo adottato nell'indagine scientifica è prioritario, così come da sempre è stato riconosciuto, anche se con argomentazioni e chiavi di lettura storicamente e filosoficamente differenti. Veronese parte proprio da questa premessa per costruire l'edificio geometrico che vuole essere intuitivo, semplice e formalizzato senza invasioni di campo. Occorre ricordare che (Veronese, 1891: p. XXIV):

... la matematica ha la sua filosofia, e che in questa ha non piccola importanza il modo con cui si arriva alla verità.

La difesa del metodo adottato, come anticipato nel paragrafo precedente, fa il pari con la replica a chi ne predica

l'uso per poi comportarsi all'opposto. Hilbert ha fornito la prova della consistenza logica della geometria non-archimedeica con strumenti analitici, ma lo stesso hanno fatto anche altri matematici, sfruttando risorse non propriamente geometriche. Probabilmente è eccessivo considerare tali metodi sgradevoli, ma è questa la sensazione che si avverte nella lettura dei *Fondamenti* di Veronese abbinata con quella dei *Grundlagen* di Hilbert. Già nei *Fondamenti* Veronese afferma (1891, p. XX-XXI):

Come si può ammettere ad es. quale assioma fondamentale della geometria l'ipotesi che l'elemento lineare dello spazio sia la radice quadrata di una espressione differenziale quadratica e positiva delle coordinate; oppure che la curvatura dello spazio sia costante [...] o ancora che lo spazio sia una varietà a tre dimensioni corrispondente al continuo numerico (x, y, z) , ed altre simili? Ma dove sono i fatti intuitivi e semplici che le spiegano e le giustificano?

Sono critiche rivolte implicitamente all'impostazione di Riemann (di cui Veronese comunque apprezza il grande lavoro) che nelle sue varietà considera la curvatura, che è costante, e l'elemento lineare che "sorprendentemente" è dato da una radice quarta di un'espressione differenziale di quarto grado. Se non si sapesse il risultato preliminare del caso euclideo, in cui l'elemento lineare è dato $ds = \sqrt{\sum dx^2}$, il risultato riemanniano non verrebbe certo in mente, non essendo né geometricamente semplice, né intuitivo.

Ad ogni modo, Veronese ritiene che tutti i metodi siano ammissibili se sono in grado di condurre a risultati, ed anzi i metodi andrebbero più fruttuosamente combinati, come è successo con l'algebra e la geometria che erano rimasti limitati

fino a che erano rimaste separate ma poi, dall'unione, se ne sono giovate a vicenda verso un rapido sviluppo. Su questo aspetto non si possono adottare regole troppo rigide, occorre invece lasciar «... libere come nell'arte, tutte le manifestazioni del pensiero scientifico» (Veronese 1891: p. XXIV). Forse non potrebbe esserci modo migliore di concludere la questione, dopo le argomentazioni sulla giustezza e sulla bontà di un metodo rispetto agli altri, ovvero con un richiamo, anche se appena accennato, ad una concezione più verosimilmente anarchico-metodologica.

4 - Sulla possibilità fisica di un universo continuo non-archimedeo

Molti autori, filosofi e matematici, geometri e fisici, sono concordi nello stabilire che esistono uno spazio fisico, uno spazio percepito ed uno spazio concettuale-geometrico. Lo spazio percepito e quello concettuale derivano dalla stessa esperienza dello spazio fisico, anche se lo interpretano differentemente, cercando in entrambi i casi di semplificarlo e sistematizzarlo attraverso semplici leggi o un sistema assiomatico di definizione. Lo spazio geometrico, seppure derivi da quello percepito, nasce sulla base di principi e metodi d'astrazione, forse gli stessi che trasformano lo spazio fisico reale in quello psicologico. Poi l'interpretazione fisica trasforma una teoria geometrica pura in un sistema di ipotesi fisiche che, se vere, costituiscono una teoria della struttura dello spazio fisico (Hempel 1945: p. 14).

Come mostrano Poincaré (1902, pp. 74-78) e Schiller (1896, pp. 176-177) tra gli altri, noi formiamo la nostra nozione di

spazio reale mettendo assieme i dati ottenuti dalle sensazioni visuali, tattili e motorie. Molto spesso effettuiamo un'unificazione dei dati, facendoli convergere a risultati complementari, anche ignorando alcune differenze che emergono dai sensi, a volte correggendo le apparenze di un senso con un altro, ma sempre facendo in modo che la percezione degli oggetti sia la più completa ed affidabile. I dati oggettivi sono manipolati per percepire le cose, e ad un livello più alto un processo analogo crea lo spazio concettuale, partendo stavolta dai dati percepiti, ed ovviamente all'inizio creando la sua forma più semplice, coincidente a grandi linee con lo spazio euclideo.

Probabilmente, tutte le caratteristiche dello spazio euclideo sono costruite in questo modo. Quando ignoriamo le apparenze divergenti dei diversi sensi, per arrivare allo spazio concettuale rappresentativo, stiamo eliminando deformazioni e irregolarità, stiamo ponendo le basi che portano allo spazio omogeneo. Sono discrepanze abbastanza piccole, che si possono facilmente trascurare, ma se fossero più grandi e seguissero leggi semplici e ben definite, potrebbero suggerire una geometria diversa, ad esempio non-euclidea. Nello stesso modo, lo spazio geometrico è unico, perché deriva dalla proiezione restituita a partire dai dati percepiti, è infinito ed infinitamente divisibile, perché l'abolizione di una limitazione nel pensiero ci porta facilmente ad abolire tutte le limitazioni fisiche. Dunque la moltiplicazione infinita e la divisibilità infinita dello spazio, non appena moltiplicazione e divisione sono concepite come processi nel pensiero, si possono ripetere tutte le volte che vogliamo. E così via, generiamo lo spazio geometrico, che

appare come una costruzione dell'intelletto, procedendo con i metodi ordinari dello stesso intelletto nel raggiungimento dei suoi propositi specifici. «E non c'è nulla di nuovo o misterioso sul processo; non deve essere invocata nessuna nuova facoltà, non deve essere formulata nessuna nuova operazione mentale.» (Schiller, 1896: p. 177)

Dal punto di vista concettuale, la certezza della geometria appare soltanto come certezza del procedimento logico-deduttivo, in cui le conclusioni si ottengono logicamente da premesse non contraddittorie. Date le definizioni di ciascuna geometria, le conseguenze derivano dal processo deduttivo, per cui postulare nello spazio geometrico l'esistenza di nessuna, una o più parallele ad una retta per un punto dato, fornisce lo stesso grado di certezza alle tre possibilità che ne derivano, rispettivamente che la somma degli angoli di un triangolo è inferiore, uguale o maggiore di due angoli retti. Le tre alternative hanno, da questo punto di vista, lo stesso grado di certezza. Ciò mostra che la reale validità di una geometria non ha nulla a che fare con la consistenza logica dello stesso sistema, sebbene le procedure logiche possano fornire risultati che informano con maggiore profondità su tale questione.

Per la nostra percezione del mondo, la geometria più semplice e più efficace per spiegare i fatti e le divergenze tra risultati attuali e ideali è la geometria euclidea, e perciò la preferiamo alle altre, ma con esperienze diverse potremmo anche preferire un sistema non-euclideo. Dunque abbiamo a che fare con una scienza che non è puramente sperimentale, né puramente concettuale, ed il modello che utilizziamo non è quello "certo", ma quello "utile", cercando di concordare la

geometria astratta, svuotata da contenuti fattuali e senza riferimenti allo spazio fisico, con quella pregna di significato, in cui l'interpretazione semantica rimanda alla costruzione strutturale dello spazio fisico. Tra queste due possibilità diametralmente opposte, vi è la geometria che noi percepiamo, a cui ci riferiamo e che siamo portati ad utilizzare, deformata dalla lente dei nostri sensi in molteplici modi.

Perciò, il nostro mondo fisico non è né euclideo, né non-euclideo, in quanto entrambi sono astrazioni concettuali, la questione è piuttosto su quale sia il metodo più appropriato per calcolare fenomeni spaziali. E non possiamo equivalentemente decidere e affermare se lo spazio fisico sia archimedeo o non-archimedeo, cantoriano o non-cantoriano, perché ciò che va fatto è la disamina dei rispettivi postulati e della loro interpretazione fisica. Ma questa strada non è direttamente percorribile, in quanto alcune ipotesi non sono direttamente sperimentabili, e come nel caso dei postulati delle parallele, di Archimede e della continuità, la prova deve procedere in modo indiretto (così come in ogni altra scienza sperimentale). Dai postulati si deducono le conseguenze, e queste ultime sono sottoposte all'esame sperimentale, che conferma la teoria o la confuta. In presenza di un numero rilevante di conferme sperimentali, gli scienziati accettano la teoria "fino a prova contraria".

L'opinione di Poincaré su questo punto, nota come *convenzionalismo geometrico*, ci permette comunque di conservare una certa teoria geometrica se la riteniamo più semplice di altre, cambiando opportunamente le ipotesi fisiche, adeguando cioè lo struttura formale alla teoria

geometrica voluta. Ciò è possibile perché in ogni descrizione fisica si possono introdurre elementi fittizi, di comodo, che modificano l'edificio dedotto nel senso voluto.

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente, la concezione epistemologica di Veronese della geometria è di una scienza mista in cui «... la libertà dello spirito non è soltanto limitata dal principio di contraddizione, come nella matematica pura, ma bensì anche dai dati dell'intuizione spaziale» (Veronese 1909: p. 203). Per Veronese non si possono ammettere geometrie che vanno contro l'intuizione, in cui ad esempio non vale il teorema di Desargues, in cui una retta si determini con tre invece che con due punti, in cui una retta di un fascio non si possa sovrapporre ad un'altra retta dello stesso fascio, e così via. Se queste forme sono possibili nella geometria astratta, esse non sono ammissibili come rappresentazioni dello spazio fisico. Ma le leggi matematiche non sono che leggi generate nel nostro intelletto in seguito alla nostra intuizione, per cui anche queste, in qualche forma, sono leggi presenti nella natura. Per questo, e per l'armonia esistente fra leggi del pensiero e leggi del mondo, non possiamo aprioristicamente affermare che una concezione matematica astratta non possa fornire alcuna applicazione utile (Veronese, 1909: p. 207), e ciò basta per evitare che l'empirismo puro detti regole e preclusioni alla ricerca matematica.

La geometria fisica oggi unanimemente accettata è una generalizzazione dello spazio curvo riemanniano, cioè una geometria ellittica tridimensionale con curvatura localmente non costante, dipendente dalla distribuzione delle masse nel cosmo, ma globalmente costante. Quando fu costruita da

Riemann come teoria geometrica astratta, non esistevano possibilità concrete di una sua applicazione come scienza sperimentale dello spazio fisico. Proprio la sua storia ci insegna che, da speculazione matematica qual era inizialmente, è divenuta ad un certo punto utile, nello specifico ad Einstein, per descrivere lo spazio fisico nella sua teoria della relatività. Questo fatto getta una luce profonda sull'importanza del progresso scientifico indipendentemente dalla sua utilità diretta, sia esso foriero immediatamente di applicazioni, sia esso consistente unicamente nella speculazione matematica. E naturalmente la certezza matematica di una teoria geometrica non può essere mai raggiunta, perché o si ottiene al prezzo dello svuotamento di contenuto fattuale, o al massimo si può raggiungere sperimentalmente un alto grado di conferma. Secondo Einstein, la completa chiarezza si ottiene attraverso il passaggio della realtà dentro l'assiomatica matematica che però separa l'aspetto logico-formale dal contenuto oggettivo o intuitivo.

Non può essere, come dice Kant, che lo spazio sia una forma a priori della nostra intuizione, perché non ne è stata data alcuna prova, come non potremmo escludere a priori il postulato delle parallele perché è ciò che la nostra intuizione visiva e tattile ci suggerisce. Ma non è l'unica intuizione che possiamo avere dello spazio, perché anche la visualizzazione della geometria non-euclidea, spesso considerata una barriera per la mente, non costituisce per il nostro intelletto un compito così complicato. Come osserva Einstein (1983): «... la facoltà umana di visualizzazione non è in alcun modo costretta a capitolare di fronte alla geometria non-euclidea.»

Anche la differenza paventata da Russell di una diversità tra a priori logico e a priori psicologico non trova d'accordo Veronese perché non crede che tutti gli assiomi comuni alle tre geometrie (euclidea, ellittica, iperbolica) siano necessari per ogni esperienza. Dove la mettiamo la geometria non-archimedea? E poi, noi attingiamo dall'esperienza e dal nostro pensiero, ed è difficile dire esattamente se i dati di cui veniamo a disporre siano frutto dell'uno o dell'altro. Per il fatto che dall'osservazione, guardando oggetti imprecisi, siamo in grado di idealizzare e costruire forme precise con la costruzione teorica della matematica, ciò non implica che quegli oggetti o quelle forme siano per ciò stesse forme trascendentali del nostro spirito (Veronese, 1909: p. 208).

In particolare, le dispute sull'infinito generato dal nostro intelletto sono state molteplici nella storia e nella filosofia della matematica, anche a causa del fatto che il concetto ha avuto difficoltà a divenire chiaro, accurato ed unico. Ne sono esempi l'analisi matematica, dove l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo sono ricondotti ad affermazioni e relazioni tra grandezze finite, e la teoria degli insiemi, in cui il concetto è presente attraverso la totalità di alcuni insiemi, a cominciare dai naturali e dai reali. Ma il raggiungimento di questa chiarezza è fondamentale, seguendo Hilbert (1925, cit. in Cellucci 1967):

... la chiarificazione definitiva della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano. Una delle prime impressioni che possiamo trarre guardando il mondo, da osservatori ingenui, è proprio la continuità, data dalla permanenza delle forme e della materia degli oggetti veduti, toccati, percepiti.

Percepriamo oggetti solidi e liquidi, che danno l'idea di essere divisibili, e sappiamo che possiamo farlo anche più volte, tanto da rendere naturale l'idea che possiamo procedere nella divisione illimitatamente, avendo ogni volta pezzi più piccoli che presentano le stesse proprietà degli oggetti iniziali. Il tutto ispirato al conclamato principio leibniziano che «la natura non fa salti».

Anche per Poincaré il continuo numerico trattato dal matematico deriva con molta probabilità dalla conoscenza di una materia concepita come divisibile all'infinito, dunque è ispirato dall'esperienza, ovvero siamo (Poincaré 1902: p. 47):

.... portati a concludere che questa nozione è stata creata per intero dall'intelletto, ma che è stata l'esperienza a fornirne l'occasione.

E una simile difficoltà rimane anche con l'utilizzo di strumenti di osservazione più sofisticati, perché se anche sarà possibile guardare più in profondità le relazioni tra le grandezze, e magari renderci conto che due grandezze che ad occhio nudo apparivano uguali al microscopio appaiono diverse, la nostra esperienza rispetto al continuo si comporterà sempre nello stesso modo, presentandoci la materia sempre con tali caratteri. Se osserviamo una parte o la sua metà, esse ci appaiono omogenee se sottoposte ad un opportuno ingrandimento. Il "tutto" omogeneo alla "parte", finché si rimane in ambito finitista, è una contraddizione. Ne usciamo considerando insieme continui, e come tali formati da infiniti termini. Dunque sarebbe il nostro intelletto, per Poincaré, a formare il concetto del continuo, e ciò avviene perché è l'esperienza che glie ne dà l'occasione; poi, con la creazione di una serie di simboli, poiché subentrano anche

contraddizioni, le proposizioni che all'inizio appaiono intuitive, divengono a mano a mano più complesse, fino a raggiungere uno stadio in cui il sistema di simboli, oltre ad essere esente da contraddizioni interne, diventa anche privo di contraddizioni con le proposizioni intuitive che in tale direzione ci hanno mosso. Poi, la «potenza creatrice dell'intelletto» non si esaurisce con la creazione del continuo matematico, ma si spinge fino alle quantità infinitesimali, che aprono la strada a quantità infinite di gradi diversi, ma sono «un vano gioco intellettuale» (Poincaré 1902: p. 53). E una volta che il continuo matematico è creato ed in nostro possesso, siamo pronti anche a sostenerlo contro la nostra stessa intuizione, in quei casi dove il continuo genera situazioni ad essa contrarie (Poincaré, 1902: p. 53):

Piuttosto che cercare di conciliare l'intuizione con l'analisi, ci si è contentati di sacrificare una delle due, e, dal momento che l'analisi deve risultare impeccabile, si è dato torto all'intuizione.

Eppure, fin dall'antichità, il processo di divisione insito nel concetto di continuità portava alla fine ad aver a che fare con entità indivisibili, elementi "atomici". Oggi sappiamo che un processo infinito di tale genere non siamo in grado di compierlo, perché abbiamo stabilito un limite alle quantità indefinitamente piccole, fornito dai componenti particellari della materia, perlomeno quelli che siamo riusciti a "raggiungere" nelle profondità degli elementi della natura. Da quando la fisica della materia ha conseguito questa serie di risultati sulla composizione microscopica del mondo, i limiti alla divisibilità non sono stati più conseguenti alla

manca di sforzi o di tempo destinato all'esecuzione del processo, ma all'impossibilità conseguente alla "presunta" natura stessa delle cose. Dunque si è passati da una materia continua ad una materia fatta di atomi, da un'elettricità e in generale da onde elettromagnetiche viste come correnti fluide a onde composte da transiti di elettroni, da energie che presentavano un aspetto continuo ad energie fatte di "quanti", e via dicendo. Tenendo conto di tutto ciò, oggi è arduo affermare che la materia ed il mondo siano continui, perché al meglio delle nostre conoscenze, al meglio dell'approssimazione che abbiamo saputo e sappiamo condurre sul mondo, esso ci appare discreto e finito, perlomeno nella direzione dell'indefinitamente piccolo. Ma ovviamente su questo aspetto la discussione metafisica è aperta. Pur tuttavia, le ragioni contrarie alla continuità fisica sono probabilmente maggioritarie e la nostra esperienza sia pratica che scientifica è più forte in quella direzione. È perfino arduo pensare che esista un elemento del mondo che si presenti come continuo omogeneo, visto che tutti gli altri, finora, al meglio del nostro approfondimento, non si presentano in tal modo. Non va però dimenticato che la trattazione dei fenomeni quantistici si avvale di modelli continui, che introducono elementi di complessità ed infinità, per via delle infinite interazioni che avvengono al livello delle particelle elementari. Nelle parole di Luminet (2005: p. 141): «Gli scambi sempre più aggrovigliati tra differenti tipi di particelle virtuali tessono una sorta di rete; particelle fantasma entrano ed escono, appaiono e scompaiono in un groviglio vibrante di energia. L'infinita complessità di questa situazione sembra sfidare calcolo e comprensione.» E

situazioni inizialmente paradossali, come quella di un elettrone che nel generare un campo quantistico riceve energia infinita, sono state superate con la rinormalizzazione della materia, per cui invece di considerare le energie si considerano le differenze di energia, che permettono l'eliminazione delle quantità infinite fino a lasciare quantità finite. Un artificio matematico, ma che ben si accosta ai dati sperimentali, su cui d'altronde si basa l'intera fisica quantistica. Ma anche in questo caso, un'ultima osservazione può chiarire meglio che l'infinitamente piccolo, al solito, potrebbe esser frutto del solo nostro pensiero. Le quantità infinite della quantistica vengono fuori dall'avvicinarsi sempre di più ad una fonte di radiazione come è l'elettrone, in cui il campo energetico diventa sempre più intenso, fino all'infinito. Ma la struttura dell'universo potrebbe non essere continua bensì granulare, e questo avvicinamento potrebbe essere possibile fino ad un certo punto, ad una scala piccolissima. Dunque avremmo a che fare con quantità complessivamente finite.

La divisibilità infinita è nata come operazione del pensiero, e dopo aver tentato per secoli di riportare l'idea sul mondo, attribuendogli questa proprietà in realtà solo fisiopsicologica, siamo tornati a considerarla un'operazione che non esiste, confutata dalle osservazioni e dagli esperimenti della chimica e della fisica. Una semplice rappresentazione di un'idea, sfortunata nel suo intimo contenuto, ma molto fortunata per la scia di conoscenza che le indagini per essa condotte hanno lasciato dietro di sé.

Dall'altra parte, nella direzione dell'infinitamente grande, le cose non appaiono epistemologicamente molto diverse,

sebbene lo statuto dell'infinito presenta aspetti differenziali notevoli rispetto all'infinitesimo. Nel mondo greco era inizialmente diffusa l'idea di finitezza dell'universo, che a partire da Parmenide e Platone, veniva immaginato come una "sfera perfettamente rotonda" la cui sfera ultima conteneva tutte le stelle. Ma si tratta una finitezza che non riesce a dare risposte soddisfacenti ad alcuni paradossi, come quello attribuito ad Archita di Taranto che si chiedeva (Luminet 2005): «[...] se sono all'estremità del cielo e delle stelle fisse, posso allungare la mano o un bastone?» Pensare di non poterlo fare è assurdo, ma il poterlo fare ci introduce in una nuova porzione di spazio che è oltre la sfera celeste.

Per dare risposte soddisfacenti a questi paradossi geometrici e cosmologici, occorreranno le geometrie non-euclidee, che ad esempio con il modello ellittico della sfera ci consente di aver a che fare con un modello finito ma senza confini. Per cui posso allungare la mano o il bastone dovunque io mi trovi su di essa, senza per questo abbattere l'ipotesi della finitezza. La concezione infinitista dello spazio ha il padre riconosciuto in Giordano Bruno che, mescolando fede, immaginazione e conoscenze fisiche, critica la frontiera cosmica e dà una spiegazione logica dello spazio infinito. Una concezione che trova la sua esplicitazione e legittimazione più alta nella fisica di Newton, in cui la geometria euclidea fa da sfondo e sottostrato alla sua concezione dello spazio, che dunque è inevitabilmente infinito.

La geometria euclidea porta necessariamente allo spazio infinito, per via del postulato archimedeo e delle parallele, che postulano l'esistenza di forme rettilinee illimitate ed

infinite e di un certo comportamento che si estende all'infinito. Ma sebbene l'illimitatezza dà allo spazio la proprietà di avere sempre una sua parte oltre quella considerata, aspetto suggerito dalla nostra intuizione, esso non è incompatibile con l'ipotesi della finitezza, che giocoforza deve prodursi con una geometria differente. La teoria della relatività, e le osservazioni astronomiche che ne hanno indicato dapprima la compatibilità con le nostre conoscenze quindi ne hanno sancito il trionfo sulla geometria classica, ha portato proprio all'abbandono della geometria euclidea, che non è avvenuta per ragioni filosofiche, né per ragioni legate alla finitezza dell'universo. L'Universo proposto da Einstein è diventato finito, perché ha una dimensione precisa, un'ampiezza approssimativamente nota; ma nello stesso tempo è illimitato, perché in esso, in qualunque direzione si viaggi, non si incontrano mai ostacoli, fino a ritornare al punto di partenza da cui il viaggio può ripartire, senza soluzione di continuità. Sempre con Hilbert (1925, cit. in Cellucci 1967): «Attraverso la geometria "ellittica" la ricerca matematica fornisce il modello naturale di un universo finito». E la cosmologia relativistica ha formulato delle ipotesi per spiegare certi comportamenti del cosmo in rapporto al suo essere finito/infinito, alcune centrate sulla risoluzione del paradosso del "buio di notte". Possiamo avere uno spazio finito, o un tempo finito, oppure uno spostamento verso il rosso. In particolare, nel primo caso la cosmologia relativistica ci offre modelli tanto finiti che infiniti, mentre nel secondo caso avremmo unconfine spazio-temporale, l'*orizzonte cosmologico*, utile per spiegare anche il

nostro passato (pensando alla storia evolutiva dell'universo in espansione).

Ma la situazione attuale della cosmologia appare in bilico tra un universo mediamente ellittico o mediamente euclideo. Le possibilità non-euclidee sono esemplificabili con il valore assunto dalla costante di curvatura spaziale, che in generale potrebbe essere negativa, nulla o positiva ad indicare, rispettivamente, uno spazio iperbolico, euclideo o ellittico. Questa curvatura è calcolabile, secondo la relatività generale, attraverso la presenza (o densità) media di materia ed energia e da una costante cosmologica. Assumendo questa costante come nulla, come viene spesso fatto nella moderna cosmologia, rimane la densità della materia/energia a decretare la finitezza/infinitezza dell'universo, e ciò a seconda che venga superato o no il valore critico calcolato in 10^{-29} g/cm³, a meno di altri fattori legati all'espansione cosmica. Altre osservazioni, però, sembrano fornire valori per la costante cosmologica diversa da zero, che implicherebbe una curvatura, seppur debole, dello spazio. La questione, su questo aspetto, è ancora aperta. A seconda che i risultati osservativi forniscano risultati di un tipo o di un altro, prevarranno l'ipotesi di uno spazio finito, oppure infinito.

Al momento, sembra che l'universo, al meglio delle nostre conoscenze, e in entrambe le direzioni, verso l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, sia finito. In altri termini, se dobbiamo basare le nostre deduzioni sulle scienze fisico-chimiche moderne, siamo indotti a ritenere ancora plausibili l'infinito e l'infinitesimo "potenziali", ed inesistenti quelli "attuali".

Ma la presenza dell'infinito nelle teorie è spesso mascherato, innanzitutto per ragioni di semplicità. Oggi si tende a pensare la costante cosmologica come nulla (anche se alcuni dati dicono il contrario), a pensare ad una curvatura dell'universo nulla (che in realtà avrebbe un raggio di curvatura infinito), ad associare alla luce una velocità finita (trascurando che per portare un corpo in movimento a quella velocità occorre un'energia infinita), ad associare allo zero termico un valore finito (sebbene per portarvi un corpo occorrerebbe energia infinita). Con queste posizioni, possiamo relegare l'infinito ad un ruolo da comprimario, nascosto nelle pieghe della nostra conoscenza, ma non possiamo costringerlo in ogni caso a cedere completamente il passo, ad uscire di scena. Ce lo dicono i dati, ce lo dicono le teorie.

Dunque sembra che l'infinito non sia concretamente presente nell'universo, ma esso è presente nel nostro pensiero, che così sembra discostarsi bruscamente dalla realtà. Ed anche le strutture formali che abbiamo messo in piedi sembrano avere una doppia rilettura, in quest'ottica. Da un lato abbiamo la matematica e la logica che rispondono ad intuizioni finitiste, in cui non c'è traccia del concetto avulso di infinito, dall'altro abbiamo proposizioni che rispondono a concetti immaginati, ideali, che non hanno riscontro nell'alveo delle nostre osservazioni, ma di cui ci serviamo per riempire le lacune delle nostre teorie, per dare una forma più semplice e più comprensibile alle strutture formali. Una visione neo-aristotelica, che utilizza finzioni necessarie al pensiero, ma inesistenti nella realtà fisica.

Dunque la geometria non-archimedeo potrebbe essere semplicemente il frutto del nostro pensiero, un concetto immaginario ed ideale che non ha riscontro nelle osservazioni, e non ha riscontro nemmeno al di fuori dello spazio osservabile. Ma potrebbe anche essere il caso che l'Universo sia nel suo complesso strutturale non-archimedeo, e noi non in grado di coglierlo perché è irraggiungibile, sia verso il molto piccolo, sia verso il molto grande. Se anche possiamo immaginare fuori dalla nostra osservazione, se anche possiamo estendere il nostro raggio di osservazione, in ogni caso avremo sempre un limite oltre il quale non potremo andare. Questa sembra un'ipotesi accettabile, ma se così non fosse, cioè se tutto lo spazio fosse in linea teorica osservabile, allora lo spazio nel suo complesso sarebbe archimedeo. Ma se la nostra osservazione avesse dei limiti, se esistesse uno spazio non osservabile, allora lo spazio complessivo, includendo entrambe le parti, osservabile e non, sarebbe non-archimedeo, perché le nostre grandezze finite, che sono costruite in stretto rapporto con i nostri sensi, non potrebbero raggiungere quella parte esclusa, dando così luogo all'infinito attuale e all'infinitesimo attuale nel rispetto tra i due tipi di grandezze.

Dunque a risolvere la possibilità fisica del non-archimedeo non è né l'allargamento del nostro spazio osservativo, perché ci rimarrà probabilmente sempre una sua parte ignota, probabilmente anche più grande della parte conosciuta. Semmai è l'immaginazione che possiamo utilizzare per superare l'orizzonte dettato dalla nostra "ignoranza". Oppure è la possibilità fisica di uno spazio inaccessibile, magari perché si comporta come un universo parallelo. Se

così fosse, ci ritroveremmo grandezze non-archimedee confrontando grandezze del nostro e dell'altro universo.

In definitiva, probabilmente viviamo in una porzione di spazio fisico archimedeo, ma non sappiamo e forse non potremo mai sapere se lo spazio nel suo complesso presenti, con l'inclusione di luoghi irraggiungibili, anche la possibilità fisica non-archimedea.

Bibliografia

[1] Bindoni A. (1902). Sui numeri infiniti ed infinitesimi attuali, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XI, II sem., pp. 205-209.

[2] Bonola R. (1906). *La geometria non-euclidea*, Zanichelli, Bologna.

[3] Boyer C. B. (1968). *A History of Mathematics*; trad. it. (1980). *Storia della Matematica*, Arnoldo Mondadori, Milano.

[4] Cantù P. (2004). La concezione epistemologica di Giuseppe Veronese, in *50 anni di Veronese*, Il Leggio, Venezia, pp. 147-162.

[5] Cellucci C. (1967). *La filosofia della Matematica*, Laterza, Bari.

[6] Dehn M. (1900). Die Legendreschen Satze uber die Winkelsumme in Dreieck, *Mathematische Annalen*, vol. 53, pp. 404-439.

[7] Dupont P. (1981). *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, Cortina, Torino.

[8] Ehrlich P. (1987). The Absolute Arithmetic and Geometric Continua, in Fine A. E Machamer P. (a cura di), *PSA 19986*, vol. 2, Philosophy of Science Association, Lansing MI.

[9] Ehrlich P. (1994). *Real numbers, Generalizations of the reals, and theorems of continua*, (a cura di), Kluwer Academic Publisher,

coll. Synthese Library: Studies in epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, vol. 242.

[10] Ehrlich P. (1997). From Completeness to Archimedean Completeness: An Essay in the Foundations of Euclidean geometry, in Tauber A. e Kanamori A. (a cura di), *A Symposium on David Hilbert*, Synthese, vol. 110, n. 1, pp. 57-76.

[11] Einstein A. (1983). *Sidelights on Relativity*, Dover, Londra.

[12] Enriques, F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna.

[13] Eugeni F., (cur.), (1999). *Critica dei fondamenti*, Edigrafital, Teramo.

[14] Eugeni F. e Mascella R. (2001). La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine, *Periodico di Matematiche*, vol. 3, pp. 45-56.

[15] Eugeni F. e Mascella R. (2002a). Su alcuni modelli geometrici non archimedei; in F. Eugeni (a cura di), *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

[16] Eugeni F. e Mascella R. (2002b). Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano; in F. Eugeni (a cura di), *Critica dei fondamenti*, coll. I quaderni di Ratio Mathematica, Teramo, 2002.

[17] Eugeni F. e Mascella R. (2005). A complete characterization of non-Archimedean lines, *Memoriile Sectiilor Stiintifice*, Editura Academiei Romane, Bucarest, pp. 257-270.

[18] Eugeni F., (2018). Gli algebristi italiani del secolo XVI furono gli artefici di una rivoluzione scientifica? Bollettino dell'AFSU, Vol. 1, pp. 11-54.

[19] Fano G. (1950). Geometrie non euclidee e non archimedee; in Berzolari L., Vivanti G. e Gigli D. (a cura di), *Enciclopedia delle*

Matematiche Complementari e Complementi, vol. II, p. II, Hoepli, Milano, pp. 437-511

[20] Geymonat L. (1970). *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

[21] Gillies D., Giorello G. (1995). *La filosofia della scienza del XX secolo*, Laterza, Bari.

[22] Giorello G. (1972). Strutture non-standard della teoria dei numeri reali, *Archimede*, vol. XXIV, n. 3-4, pp. 152-163.

[23] Hahn H. (1907). Über die nichtarchimedischen Grossensysteme, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Mathematisch Naturwissenschaftliche Klasse*, vol. 116, pp. 601-655.

[24] Hempel C. G. (1945). Geometry and Empirical Science, *The American Mathematical Monthly*, vol. 52, n. 1, pp. 7-17.

[25] Hilbert D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*; trad. it. P. Canetta (1970), *Fondamenti della Geometria*, Feltrinelli, Milano.

[26] Hilbert D. (1925). Über das Unendliche, *Mathematische Annalen*, vol. 95; in C. Cellucci (1967), *La filosofia della Matematica*, Laterza, Bari.

[27] Levi-Civita T. (1893). Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici, *Atti Ist. Veneto di Sc. lett. ed arti*, t. IV, sez. VII, pp. 1765-1815.

[28] Levi-Civita T. (1898). Sui numeri transfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 113-121.

[29] Luminet J. P. e Lachièze-Rey M. (2005). *De l'infini... Mystères et limites de l'Univers*; trad. it. S. Moriggi (2006),

Finito o infinito? Limiti ed enigmi dell'Universo, Raffaello Cortina, Milano.

[30] Mascella R. (2006). La geometria non-archimedeica. Dalle premesse agli infiniti modelli Attuali, *Ratio Mathematica*, n. 17.

[31] Peano G. (1889). I Principii di Geometria logicamente esposti, in *Opere scelte* (1958), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. 11, pp. 59-78.

[32] Peano G. (1894). Sui Fondamenti della Geometria, in *Opere scelte* (1959), a cura dell'UMI, Cremonese, vol. III, pp. 115-157.

[33] Poincaré J. H. (1902). *La science et l'Hypothèse*, Flammarion, Paris; trad. it. *La scienza e l'ipotesi*, Dedalo, Bari 1989.

[34] Russell B. (1897). *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge-London; trad. it. *I Fondamenti della Geometria*, Newton Compton, Roma 1975.

[35] Schiller F. C. S. (1896). "Non-Euclidean Geometry and the Kantian a Priori", *The Philosophical Review*, vol. 5, n. 2, pp. 173-180.

[36] Veronese G. (1891). *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare*, Tipografia del Seminario, Padova.

[37] Veronese G. (1897). Sul postulato della continuità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VI, II sem., pp. 161-167.

[38] Veronese G. (1898). Segmenti e numeri trasfiniti, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. VII, I sem., pp. 79-87.

[39] Veronese G. (1905). La geometria non archimedeana. Una questione di priorità, *Rend. Reale Acc. Lincei*, vol. XIV, I sem., 347-351.

[40] Veronese G. (1909). La geometria non archimedeana, *Proceedings of IV Mathematicians International Congress*, vol. I, 197-208.

Approvato su parere favorevole di Franco Eugeni ed Ezio Sciarra

La funzione di Eulero

Dedichiamo questa pagina alla funzione φ di Eulero, la quale per ogni naturale $n > 0$, è data dal numero dei numerinaturali m , non superiori ad n e primi con esso. Se $\mathbf{N}$ è l'insieme dei numeri naturale ed $(m;n)$ denota il MCD dei due numeri, si ha:

$$\varphi(n) = \{m | m < n, (m;n) = 1, \forall m, n \in \mathbf{N}\}$$

È nota una espressione della $\varphi(n)$ in funzione dei divisori primi di n , cioè: $\varphi(n) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$.

La funzione di Eulero entra in gioco in varie questioni. Ne riportiamo due.

a.- Sia $(Z_m / (0), \cdot)$ la parte moltiplicativa dell'anello delle classi resto modulo m . Sappiamo che un elemento $a \in Z_m$ è invertibile se e solo se $(a;m) = 1$. Segue dal Teorema di Eulero sulle congruenze:

$$(a;m) = 1 \text{ implica } a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$$

che l'inversa della classe a è la classe $a^{\varphi(n)-1}$.

b.- Nella Teoria dei codici a chiave pubblica se p, q sono due primi ed $N = pq$, sappiamo che $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$, combinando le due espressioni si ha :

$$\varphi(N) = N + 1 - (p+q), N = pq$$

Il problema fondamentale dell'aggressione al codice RSA, alla base della firma elettronica è ricavare p e q supposti noti N , che lo è, e $\varphi(N)$, che allo stato attuale si ricava solo in funzione di p e q . Dunque il problema non è risolubile allo stato attuale delle conoscenze e il codice è sicuro.

Logica fuzzy e calcolo delle probabilità: due facce della stessa medaglia?

Danilo Pelusi*

*Dipartimento di Scienze della Comunicazione,
Università di Teramo – dpelusi@unite.it

Sunto: *Il seguente articolo illustra le possibili analogie e differenze tra il Calcolo delle Probabilità e la logica fuzzy. In particolare, sono messi a confronto gli insiemi tradizionali con quelli fuzzy in base alle molteplici definizioni che si possono attribuire alla probabilità di un evento.*

Parole Chiave: *Insieme fuzzy, evento, funzione di appartenenza, sottoinsiemenità.*

1 - Logica bivalente e polivalente: confronto

Fin dai tempi di Aristotele la scienza, la matematica, la logica e la cultura in generale si sono basate su una concezione del mondo abbastanza semplice, fatta di cose assolutamente bianche o nere, di affermazioni vere o false totalmente, di oggetti classificabili in insiemi ben definiti e con confini ben precisi. Una logica di natura bivalente domina e persuade la mente degli scienziati sempre più convinti di poter spiegare la natura intrinseca delle cose, i misteri più profondi della scienza con due semplici valori, 0 e 1. Tutto è riconducibile ad essi, non ci sono vie di mezzo, la verità si fonda su due unici

valori, piccoli ma capaci di spiegare e semplificare tutti i mondi in cui le varie scienze affondano le loro radici.

La logica binaria, nata e diffusasi con Aristotele, si riduce fondamentalmente ad una sola legge: A o non- A . O questo o non questo. Il cielo è blu o non blu; non può essere blu e non blu. Non può essere A e non- A . Ciononostante la fede binaria ha sempre sollevato dubbi, ha sempre prodotto reazioni, critiche, insofferenze da parte di coloro che guardavano la natura sotto altri punti di vista tesi a far emergere le innumerevoli contraddizioni nascoste in essa, fatte di cose e non cose, di A e non- A .

La filosofia ci racconta che questa forte contrapposizione alla logica binaria ebbe inizio in realtà ancora ben prima che nascesse Aristotele, cioè circa due secoli avanti con Budda, il quale diffuse in Oriente la sua dottrina basata principalmente su un unico obiettivo: quello di squarciare il velo bivalente e vedere il mondo così com'è.

In sostanza lo scontro si riduce ad una disputa fra i due più grandi capostipiti della filosofia, occidentale da una parte, e orientale dall'altra; le loro teorie hanno affascinato per secoli la mente di innumerevoli scienziati, ma la scienza stessa in generale sembra aver seguito nel corso del tempo due cammini ben differenti e contrastanti: quello occidentale e quello orientale.

Il Calcolo delle Probabilità si basa essenzialmente su una logica di natura bivalente. Infatti quando noi parliamo di probabilità non facciamo altro che attribuire ad un certo evento un numero compreso tra zero e uno che rappresenta la possibilità che l'evento stesso si verifichi; ma la sua natura è bivalente, o sì o no, o accade o non accade, non esistono scelte

intermedie. La probabilità interviene in qualsiasi situazione dove ci troviamo di fronte ad incertezza dovuta a mancanza di dati, di informazioni, ecc.; gli eventi non hanno una natura deterministica bensì sono governati dalla casualità, da forze oscure che ne impediscono la determinazione a priori.

Nella Logica fuzzy il mondo è caratterizzato da completa vaghezza, incertezza; più aumentano le informazioni, più emerge la natura fuzzy delle cose. Più dati ci aiutano a fissare la sfumatura mediante la quale gli insiemi si sovrappongono; essa elimina i confini che segnano dove una cosa cessa di essere quella cosa. La probabilità per contro si dissolve quando i dati noti diventano numerosi. Gli oggetti sono e non sono, appartengono e, allo stesso tempo, non appartengono ad un insieme, ma tutti in una certa misura.

A ciascun elemento attribuiamo un valore, sempre compreso tra zero e uno, che esprime l'appartenenza ad un determinato insieme fuzzy. Tale valore non è una probabilità, non fa riferimento al verificarsi o non dell'evento stesso, bensì rappresenta la misura di un fatto deterministico, ma "vago" in una certa misura, che non risponde ad una natura bivalente ma polivalente, con infiniti gradi di appartenenza tra 0 e 1.

Per esempio, affermare che la probabilità che una determinata mela cada domani dal ramo è del 60%, è un'affermazione probabilistica, riguardante l'evento stesso, ma pur sempre di natura bivalente (infatti la mela o cadrà o resterà attaccata al ramo). Dire invece che la stessa mela ha un grado di appartenenza all'insieme delle mele "DOLCI" del 70% (vedi figura 1), significa che per il 70% la mela appartiene all'insieme fuzzy $D = \text{DOLCE}$ e per il restante 30% all'insieme $A = \text{ACERBO}$.

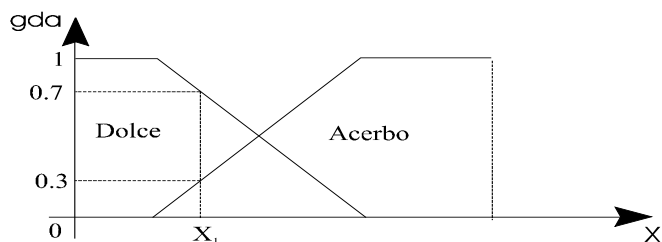


Fig. 1 - Insieme fuzzy relativo al tipo di mela.

Abbiamo a che fare con degli insiemi fuzzy in quanto non possiamo definire dei confini ben precisi in cui classificare le mele, inoltre abbiamo una logica a più valori in quanto per altre persone con gusti diversi i gradi di appartenenza potrebbero cambiare.

2 - La funzione di appartenenza e la variabile casuale

Gli insiemi fuzzy in generale sono determinati da coppie ordinate del tipo:

$$A=[(x, \mu_A(x))] \quad (1)$$

con x elemento e $\mu_A(x)$ funzione di appartenenza, cioè una funzione che a ciascun valore x associa un determinato grado di appartenenza. In generale la funzione di appartenenza ha una rappresentazione triangolare o trapezoidale, ma nulla vieta di utilizzarne altre come per esempio la gaussiana; in essa la x può assumere infiniti gradi

di appartenenza compresi tra 0 e 1, leggibili direttamente dal grafico.

La sua forma non è scelta a caso ma esemplifica in maniera chiara l'intento di rappresentare insiemi in cui ci sono elementi che vi appartengono al 100% (ad esempio in corrispondenza del vertice di una funzione triangolare o della base minore di una funzione trapezoidale) e altri che ne fanno parte in una certa misura. I valori della funzione di appartenenza crescono e decrescono "dolcemente" in maniera tale che gli insiemi si sovrappongano e le x possano cadere nelle zone d'intersezione degli intervalli di definizione dei vari insiemi.

Nel Calcolo delle Probabilità accade qualcosa di molto analogo; supponiamo infatti di avere un insieme di eventi e di farne una partizione; in base ad un determinato criterio logico assegniamo a ciascun evento un valore x_i , successivamente definiamo una variabile casuale cioè una funzione $f(x)$ che associa a ciascuna x_i un valore p_i di probabilità compreso tra 0 e 1, rispettando sempre la condizione di normalizzazione, cioè:

$$\sum p_i = 1 \quad (2)$$

Mentre nel caso di variabili casuali discrete la $f(x)$ ci fornisce la probabilità di un determinato evento, nelle variabili continue la p è definita da un integrale del tipo:

$$\int f(x) dx \quad (3)$$

infatti non esiste la probabilità in un punto, bensì in un'area.

Nella logica fuzzy invece è sempre la $f(x)$ a fornirci il grado di appartenenza e non l'area sottostante la funzione. Inoltre in questo caso la probabilità è definita in un certo intervallo infinitesimo, mentre nella logica fuzzy, il grado di appartenenza è sempre valutato in un punto ben preciso.

3 – Insiemi fuzzy e insiemi tradizionali: analogie e differenze

Nella logica fuzzy gli insiemi seguono delle regole apparentemente molto simili a quelle della logica tradizionale su cui si basa appunto il calcolo delle probabilità. Infatti volendo andare a definire le principali operazioni che possiamo compiere su di essi, abbiamo che:

- UNIONE

$$\mu_{(A \text{ OR } B, X)} = \text{MAX} (\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \quad (4)$$

- INTERSEZIONE

$$\mu_{(A \text{ AND } B, X)} = \text{MIN} (\mu_{A(x)}, \mu_{B(x)}) \quad (5)$$

- COMPLEMENTAZIONE

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_{A(x)} \quad (6)$$

Le tre espressioni precedentemente elencate sono analoghe a quelle degli insiemi tradizionali, basta andare a sostituire

alla funzione di appartenenza o *membership* $\mu_A(x)$, la funzione caratteristica che esprime appunto l'appartenenza o meno di un elemento generico a un determinato insieme. La differenza fondamentale risulta a livello grafico, dove non esiste corrispondenza tra le due logiche. Infatti supponiamo di avere il seguente insieme fuzzy P così rappresentato (figura 2):

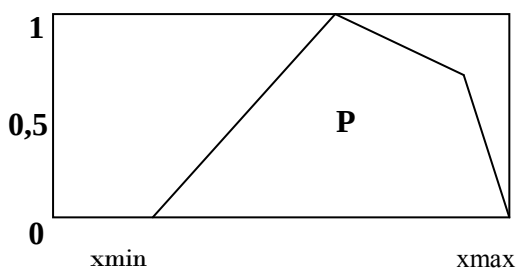


Fig.2 - Insieme fuzzy.

il complementare di P , applicando la sua definizione, risulta essere come in figura 3:

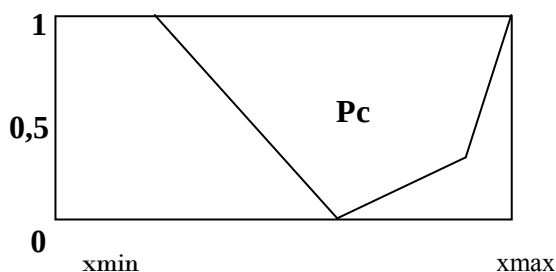


Fig.3 - Insieme complementare.

È evidente che nella logica tradizionale il risultato sarebbe stato differente, in quanto saremmo andati a prendere l'area

esterna all'insieme P (figura.2), rispettando il principio di non contraddizione il quale afferma che un elemento non può appartenere contemporaneamente ad un insieme P ed al suo complementare P^c . Nel *Calcolo delle Probabilità* si può considerare l'area di P come la probabilità del nostro evento e l'area totale come la probabilità del nostro insieme universo; si avrà quindi:

$$p(P) + p(\bar{P}) = 1 \quad (7)$$

espressione analoga a

$$\mu_{P(x)} + \mu_{\bar{P}(x)} = 1 \quad (8)$$

ma il risultato è differente in quanto, nella probabilità graficamente facciamo un discorso di aree, mentre nella *logica fuzzy* l'espressione viene applicata a ciascun punto x sulla funzione di appartenenza.

L'intersezione tra P e P^c è così rappresentata (figura.4):

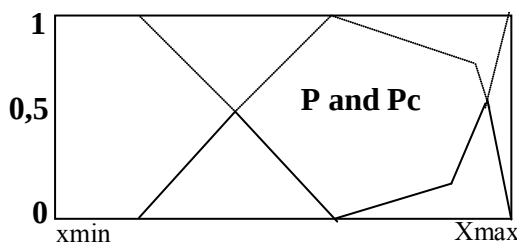


Fig. 4 - Intersezione di due insiemi fuzzy.

Si noti che tale insieme non coincide con l'insieme vuoto $\emptyset$, come si vorrebbe nella logica tradizionale, o nel Calcolo delle Probabilità, dove la probabilità dell'evento composto $P \cap \bar{P}$ è zero:

$$p(P \cap \bar{P}) = p(P) \times p(\bar{P} / P) \quad (9)$$

ma

$$p(\bar{P} / P) = 0 \quad (10)$$

in quanto sono due eventi incompatibili, cioè il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, sempre secondo il principio di non contraddizione.

L'unione tra P e P_c sarà quindi data dalla figura 5:

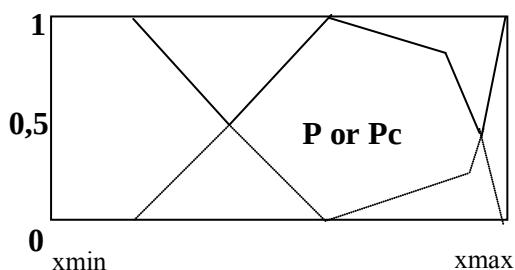


Fig.5 - Unione di due insiemi fuzzy.

anche qui osserviamo che tale insieme non corrisponde all'insieme universo Ω , quindi viene a cadere anche il principio del terzo escluso, il quale afferma che l'unione di un insieme con il suo complemento fornisce l'insieme universo.

In termini probabilistici avremo:

$$p(P \cup \bar{P}) = p(P) + p(\bar{P}) - p(P \cap \bar{P}) \quad (11)$$

ma, poiché P e $\bar{P}$ sono incompatibili, avremo:

$$p(P \cup \bar{P}) = p(P) + p(\bar{P}) = p(\Omega) = 1 \quad (12)$$

con Ω insieme universo.

4 - La frequenza relativa: un concetto fuzzy

Una delle definizioni principali di probabilità è sicuramente quella frequentista, o statistica a posteriori, in cui viene definita come rapporto tra il numero delle prove favorevoli e il totale delle prove effettuate:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f}{n} \quad \text{con } 0 \leq p \leq 1 \quad (13)$$

Condizione fondamentale è che il numero delle prove sia molto elevato, e che le stesse siano identiche ed effettuate nelle medesime condizioni. Tale probabilità la ritroviamo ad esempio nel gioco d'azzardo, o lanciando una moneta, oppure giocando ai dadi.

Se ipotizziamo di giocare a TESTA o CROCE possiamo tranquillamente costruirci il nostro insieme X di eventi totali, che rappresenta il totale dei lanci effettuati, e a sua volta

suddividerlo in due sottoinsiemi rappresentanti da una parte gli esiti favorevoli e dall'altra gli esiti sfavorevoli (figura 6):

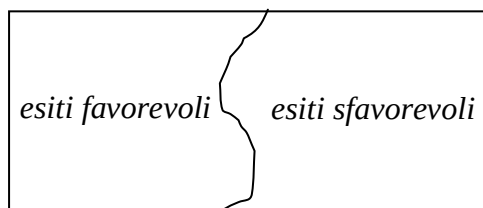


Fig. 6 - Partizione dell'insieme universo.

L'insieme dei tentativi favorevoli non interseca quello dei tentativi sfavorevoli e i due insiemi esauriscono o riempiono l'insieme universo X , cioè quello del totale delle prove. Gli eventi al loro interno sono bivalenti, o testa o croce, non esistono situazioni intermedie, non ci sono tentativi che cadono sulla linea di demarcazione, o ci si schiera da una parte o dall'altra. Il principio di non contraddizione è salvo, la legge del terzo escluso pure, l' A o non- A vale sempre.

Eppure tale diagramma nasconde un aspetto fuzzy, apparentemente difficile da scovare ma semplicissimo se si pensa al concetto di sottoinsiemità. Generalmente nella logica tradizionale siamo abituati a parlare di insiemi che ne contengono altri, o totalmente o non affatto, quindi il concetto di appartenenza continua sempre a mantenere una natura bivalente. Ma cosa succede se l'insieme non è contenuto totalmente e se a contenere non è più l'intero, o se si voglia insieme universo, bensì la parte o sottoinsieme? Ecco allora il concetto di sottoinsiemità, cioè la maniera in cui un insieme è contenuto in un altro.

Ma anche in questo caso continuiamo a non vedere nulla di buono; i due insiemi di figura 6 sono disgiunti, non si contengono affatto, mentre entrambi appartengono al 100% all'insieme universo, che cioè li contiene totalmente. Ma dov'è allora la sottoinsiemità? Semplice, nella maniera in cui la parte contiene l'intero. Sembra un concetto tanto ostico, come può infatti contenere l'intero essendo un suo sottoinsieme? L'unica eccezione è il caso in cui la parte è uguale allo stesso intero, ma in generale differisce da esso. Tuttavia essa lo contiene sempre parzialmente, lo contiene cioè in una certa misura.

Consideriamo un altro insieme non fuzzy A , sottoinsieme di X , rappresentante sempre i nostri esiti favorevoli (figura 7):

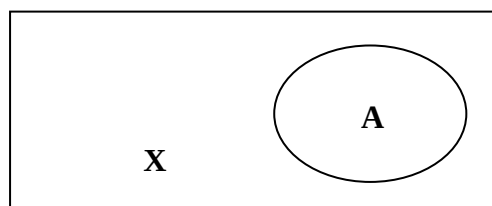


Fig. 7 - Insieme degli esiti favorevoli.

Il nostro insieme è una parte di X e non è fuzzy, non ha niente in comune con il suo opposto o complementare non- A . Supponiamo ora di ridurre A ad un punto fino a svanire nel nulla, ossia nell'insieme vuoto. In questo caso la parte non contiene l'intero, come può infatti il nulla contenere un qualcosa? Ora facciamo crescere di nuovo il nostro insieme A fino a eguagliare completamente il nostro rettangolo: in questo caso la parte contiene al 100% l'intero. Ma il passaggio non è stato immediato, la nostra parte è andata da

un'inclusione nulla, 0, a una completa inclusione, 1, passando per vie intermedie in cui ha contenuto il nostro intero in misura parziale direttamente proporzionale alla superficie che mano a mano ha occupato nel nostro diagramma.

Dunque abbiamo definito l'intero nella parte, ma in realtà cosa rappresenta? È la probabilità della parte. Volendo conoscere la probabilità di fare testa o croce, tornando al lancio della moneta, non dobbiamo far altro che osservare la misura in cui il nostro insieme di esiti favorevoli contiene l'insieme di tutti i tentativi.

In generale la probabilità di un insieme o di un evento A è uguale alla misura in cui la parte A contiene lo "spazio campionario" X .

La *sottoinsiemenità* coincide con quella che abitualmente definiamo frequenza relativa e la dimostrazione è semplicissima. Sia $S(X, A)$ la misura in cui X è un sottoinsieme di A . Poiché A è totalmente un sottoinsieme di X , $S(A, X)=1$, ma in generale l'opposta sottoinsiemenità $S(X, A)$ è compresa fra gli estremi bivalenti: $0 < S(X, A) < 1$. Supponiamo che X contenga N tentativi e A gli N_A tentativi coronati da successo. Allora il Teorema della Sottoinsiemenità implica che:

$$S(X, A) = \frac{\text{numero degli elementi in } A \cap X}{\text{numero degli elementi in } X} = N_A / N \quad (14)$$

vale a dire la frequenza relativa degli esiti positivi di tutti i tentativi.

5 - La soggettività nelle due logiche

Nella logica fuzzy prevale un certo grado di soggettività soprattutto nella parte iniziale della scelta degli insiemi, in cui bisogna andare a definire quale rappresentazione adottare e gli intervalli in cui gli stessi cadono. Tale fase è molto importante, infatti da essa dipendono i tre processi fondamentali di fuzzificazione, inferenza e defuzzificazione. È chiaro che costruire un insieme, per esempio triangolare, non è la stessa cosa di adottare una rappresentazione trapezoidale: cambiano le pendenze, stessi valori di input corrispondono a gradi di appartenenza differenti, il che vuol dire attivazione degli insiemi output in punti completamente diversi.

La scelta iniziale tuttavia non è del tutto casuale, dipende dal fenomeno che si sta studiando, spesso si ragiona anche a ritroso, cioè supponiamo di avere una determinata regola e volere per la stessa un'attivazione dell'output in un determinato punto: si costruisce l'insieme input in maniera che a un punto x stabilito del nostro intervallo corrisponda il valore di attivazione desiderato.

Molto importante è osservare come possono cambiare gli intervalli di definizione degli insiemi a seconda delle persone; supponiamo infatti di voler considerare l'insieme delle donne alte: cosa significa ALTO? Per esempio potrei scegliere di far appartenere a questo insieme le donne che superano un metro e 65cm, ma un'altra persona potrebbe ritenere alta anche una donna di un metro e 63cm, quindi intervalli differenti a seconda delle persone.

Anche nel Calcolo delle Probabilità la soggettività è presente e la ritroviamo nella definizione soggettiva. In base

ad essa ciascun individuo assegna un valore differente ad un evento che rappresenta la fiducia attribuitagli riguardo al suo verificarsi. E' tipica delle scommesse, per esempio immaginiamo di avere una corsa clandestina di otto cavalli: in base alla definizione classica ciascun cavallo avrebbe $1/8$ di probabilità di vincere; per la definizione frequentista occorrerebbe effettuare un numero di prove molto elevato e in base ai risultati attribuire in seguito le probabilità. La somma che noi scommettiamo sulla vittoria di un cavallo rapportata al totale delle scommesse rappresenta il nostro grado di fiducia.

Tuttavia mentre nel Calcolo delle Probabilità vale il criterio di coerenza, cioè ciascun giocatore deve essere disposto a scambiare la propria posizione con l'altro, il quale conferisce un carattere deterministico alla teoria, definendo in maniera univoca la probabilità, ciò non è vero nella logica fuzzy, dove la scelta degli intervalli e relativi insiemi resta un fatto del tutto soggettivo e dipende da colui che effettua lo studio.

Bibliografia

[1] Berardi L., Eugeni F., Innamorati S., (1992). *Generalized Designs, linear spaces, hypergroupoids and algebraic Cryptography*, Proceedings of 4-th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applicatins, Xanthi, Greece, pp 15-25.

[2] Berardi L., Eugeni F., Innamorati S., (1992). *Remarks on hypergroupoids and Cryptography*, Journal of Combinatorics, Information & System Sciences, vol. 17, n.3-4, pp. 217-231.

[3] Cammarata S., (1994). *Sistemi Fuzzy*, Etaslibri, Bologna

[4] Cerasoli M., Eugeni F., Rizzi B., (1983). *Sulla probabilità del k -MCD di m naturali scelti a caso*, Rend. di Matematica, v.3, serie VII, (Roma), pp. 367-379.

[5] Cicchitelli G., (1984). *Probabilità e Statistica*, Maggioli, Perugia

[6] Corsini P., (1993). *Prolegomena of hypergroup theory*, Aviani Ed. Udine.

[7] Dall'Aglio G., (1987). *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, Bologna

[8] Eugeni F., Mascella R., (2001). *La retta euclidea reale a partire da una relazione d'ordine*, Periodico di Matematiche, 3, 45-56.

[9] Eugeni F., Mascella R., (2002). *Un'assiomatica per la retta euclidea reale alla maniera di Peano*, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, pp. 37-62.

[10] Eugeni F., Mascella R., (2002). *Su alcuni modelli geometrici non archimedei*, in: Critica dei fondamenti (a cura di F. Eugeni), Edigrafital, Teramo, 63-90.

[11] Kosko B., (1995). *Il Fuzzy Pensiero. Teoria e Applicazioni della Logica Fuzzy*, Baldini e Castaldi, Milano

[12] Pelusi D. (2002). *Un modo di ragionare fuzzy a livello elementare*, Periodico di Matematiche, Serie VIII, Vol. 2, Nr. 4, pp. 23-30.

[13] Pelusi D. (2003). *Application of fuzzy logic to integrated circuits*, Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography, Volume 6, Nr. 1, pp. 109-120.

[14] Pelusi D. (2004). *A fuzzy controller for digital signals processing*, Fuzzy systems and A. I., EA, Volume 10, Nr. 3, pp. 131-138.

[15] Pelusi D., Tivegna M., Ippoliti P. (2013). *Improving the profitability of Technical Analysis through intelligent algorithms*, Journal of Interdisciplinary Mathematics, Vol. 16(2-3), pp. 203-215.

[16] Mascella R. (2006). *La geometria non-archimedeica. Dalle premesse agli infiniti modelli Attuali*, Ratio Mathematica, n. 17.

[17] Maturo, A., (2009). *Coherent conditional previsions and geometric hypergroupoids, Fuzzy sets, rough sets and multivalued operations and applications*, 1, N.1, 51-62.

[18] Maturo A., Squillante M., Ventre A.G.S., (2010). *Decision making, fuzzy measures an hyperstructures, Advances and Applications in Statistical Sciences*, Vol 2, Issue 2, 233-253

[19] Pesarin F., (1989). *Introduzione al calcolo delle probabilità*, La Nuova Italia Scientifica, Roma

[20] Prenowitz W., Jantosciak J., (1979). *Join Geometries*, Springer-Verlag UTM, New York.

[21] Vougiouklis T., (1994). *Hyperstructures and their representations*, Hadronic Press, U.S.A.

*Approvato su parere favorevole di Raffaele Mascella
ed Alberto Trotta*

Ellisse e numero d'oro

Sia data l'ellisse di semiassi a, b con $a > b$, riferita ai propri assi e quindi di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Posto $a = xb$, calcoliamo:

- L'area A dell'ellisse pari a : $A = \pi ab = \pi x b^2$.
- 'area B della corona circolare definita dai due cerchi aventi centro nell'origine e raggi rispettivi a, b pari a:

$$B = \pi(a^2 - b^2) = \pi b^2(x^2 - 1).$$

L'eguaglianza $A = B$ implica : $\pi b^2(x^2 - 1) = \pi x b^2$, da cui

$$x^2 = x + 1$$

la cui soluzione positiva è il numero d'oro. Segue:

Se in una ellisse il rapporto tra asse maggiore e minore è aureo (è cioè il numero d'oro) allora l'area dell'ellisse eguaglia l'area della corona circolare definita dai cerchi concentrici, aventi come raggi i due semiassi dell'ellisse stessa.¹

¹ La proprietà ci è stata gentilmente richiamata dal prof. Gianni Vincenzi dell'Università di Salerno che ringraziamo vivamente (F. Eugeni).

Incertezza: il pensiero sistemico di Bruno de Finetti

Giordano Bruno*

* ISIA (Istituto Superiore Industrie Artistiche); bigi@dmmm.uniroma1.it

Desideriamo la verità e troviamo in noi solo incertezza.

Blaise Pascal, Pensieri, BUR Rizzoli, 1983

Sembrerebbe pertanto naturale che i modi abituali di pensare, di ragionare, di decidere, dovessero esplicitamente e sistematicamente impennarsi sul fattore *incertezza* come sull'elemento concettualmente preminente e determinante.

Bruno de Finetti, Teoria delle probabilità, Einaudi, 1970

Sunto . *L'approccio scientifico meccanicistico, basato su principi quali quello per cui il mondo microscopico è più semplice di quello macroscopico, e che quello macroscopico può essere espresso attraverso la conoscenza precisa di infiniti dettagli, è stato messo in crisi da molte questioni, una delle quali è rappresentata dal cosiddetto "Problema dei Tre Corpi" (Barrow-Green, J., 1996). Nuovi approcci conoscitivi sono stati introdotti basati, solo per citarne qualcuno, sul ruolo teorico dell'osservatore, sulla non-linearità, su principi di incertezza, sul costruttivismo, sul punto di vista sistemico e sull'emergenza.*

Parole chiave: *Probabilità, soggettivo, oggettivo, coerenza di eventi, logica dell'incerto*

1 - Introduzione

In questo lavoro, voglio mettere in rilievo come il pensiero di Bruno de Finetti si inserisca perfettamente in questi tipi di approccio, anzi li anticipi, soffermandomi nell'evidenziare quale sia il ruolo essenziale di colui che effettua valutazioni di probabilità, che chiameremo l'osservatore.

Al contrario degli orientamenti di tipo oggettivistico, in particolare quelli che si richiamano ad una visione prettamente statistica della realtà, Bruno de Finetti ha avuto, nel secolo scorso, l'intuizione fondamentale per cui le valutazioni di probabilità espresse relativamente ad un evento non rappresentano altro se non il grado di fiducia che un individuo coerente ha nel realizzarsi di quell'evento. Tale grado di fiducia viene determinato sulla base delle informazioni che l'individuo possiede in merito a quell'evento e in tal senso l'individuo svolge il ruolo di osservatore, come accade nella moderna teoria della complessità.

Bruno de Finetti ci ha insegnato che la logica dell'incerto esplora il contesto del possibile, accettando la condizione di essere inadatta a fare predizioni, fornendo al contrario gli strumenti per assegnare probabilità agli eventi, in modo da poter effettuare previsioni e prendere decisioni.

Tradizionalmente il concetto di probabilità è stato considerato come una conseguenza della nostra *ignoranza*, delle nostre limitazioni. Nello stesso modo i principi dell'incertezza erano considerati dal pensiero meccanicistico come un limite della nostra conoscenza di infiniti dettagli.

Ora possiamo, invece, considerare la probabilità come il nostro strumento per descrivere la natura.

La metodologia seguita da de Finetti si basa sulla *coerenza* nelle assegnazioni di probabilità a singoli eventi e a famiglie di singoli eventi.

La coerenza è lo strumento essenziale che permette di effettuare valutazioni di probabilità e, in particolare, di aggiornare la valutazione di un evento quando una nuova (o supposta) informazione divenga utilizzabile (d'interesse).

Mi propongo di far vedere come il problema di un'assegnazione coerente di probabilità ad una famiglia di eventi, da parte di un osservatore, è correlata all'emergenza, nel modo in cui viene considerata nella scienza moderna.

Ricordo che l'emergenza (Corning 2002; Minati e Pessa, 2002; Pessa 1998, 2002), in questo ambito, può essere considerata come un processo di formazione di nuove entità collettive (che richiedono un livello di descrizione differente da quella usata per i singoli elementi), quali sciame, stormi, traffico, distretti industriali, mercati; effetti collettivi, quali superconduttività, ferro-magnetismo, effetto laser. Tali enti sono determinati dal comportamento coerente (così percepito da un osservatore) di componenti interagenti.

In riferimento al modello cognitivo di Anderson (1983) usato dall'osservatore, l'emergenza può essere vista come un processo che dipende soltanto dall'osservatore, considerando cioè che le proprietà collettive emergono ad un livello più alto (vale a dire più astratto) rispetto a quello da lui utilizzato per trattare i componenti. Le proprietà collettive sono rilevate dall'osservatore come nuove, in dipendenza dal modello cognitivo assunto, adatto a stabilire la presenza di coerenza.

Ma di più la concezione soggettiva della probabilità di de Finetti è tutta costruita come un sistema cognitivo logicamente

aperto. Infatti l'osservatore (il valutatore) svolge un ruolo attivo, sensibile al contesto, si muove in un ambito non oggettivistico, è orientato al processo, impara dinamicamente dall'esperienza in maniera induttiva, è parte integrante del sistema e genera la sua esistenza, infine può scegliere le regole di cui servirsi (Minati, 2004).

2 - Valutazioni qualitative della incertezza

Partirò da quest'ultimo punto per illustrare quanto detto. Nell'assegnare una misura dell'incertezza ad una famiglia di eventi, di cui non conosciamo il valore di verità, l'osservatore può seguire due strade, a seconda del contesto in cui si trova (o a cui sceglie di far riferimento).

La prima consiste nell'introdurre tra gli eventi un ordinamento naturale: se infatti supponiamo, come è lecito, che un evento confrontato con un altro possa essere o più possibile o meno possibile o ugualmente possibile di questo, egli può facilmente costruire una relazione d'ordine di non meno possibile nell'ambito della famiglia di eventi considerati.

Tale relazione gode delle seguenti proprietà:

Un evento incerto E_h della famiglia è sempre più possibile dell'evento impossibile e meno possibile dell'evento certo ed è non meno possibile di se stesso.

Se un evento E_h è non meno possibile di E_k allora non può essere E_k non meno possibile di E_h , a meno che E_h ed E_k non siano ugualmente possibili.

Se un evento E_h è non meno possibile di E_k e E_k di E_j allora E_h è non meno possibile di E_j .

Se un evento E è incompatibile con E_k e con E_j e E_k è non meno possibile di E_j allora l'unione di E con E_k risulta non meno possibile dell'unione di E con E_j .

In questo modo l'osservatore introduce una *misura qualitativa* dell'incertezza di un evento.

Si osservi, di sfuggita, che nel caso particolare in cui si abbia a che fare con una partizione dell'evento certo in casi giudicati ugualmente possibili, ne segue che l'ordinamento qualitativo introdotto si traduce immediatamente in una misura quantitativa della loro incertezza come rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili.

Se, poi, si considera un'ulteriore proprietà relativa agli eventi condizionati:

- gli eventi E_h e E_k implicino E allora $E_h \bar{\mid} E$ è non meno possibile di $E_k \bar{\mid} E$ se E_h è non meno possibile di E_k ;
- la sua introduzione insieme alle precedenti permette di sviluppare qualitativamente tutta la teoria della probabilità (de Finetti, 1937).

3 - Valutazioni quantitative

La seconda strada è quella per cui l'osservatore esprime il proprio grado di fiducia nel verificarsi di un evento per mezzo di una valutazione di tipo quantitativo.

Per operare in tal modo occorre uno strumento di misura adatto allo scopo. Bruno de Finetti ha proposto due criteri di misura equivalenti: quello della *scommessa* e quello della *penalizzazione* (de Finetti, 1974).

Richiamo qui solo quello relativo alla scommessa, che appare più naturale poiché rispecchia anche storicamente quanto avvenuto nella costruzione della teoria della probabilità.

Supponiamo di dover puntare una certa somma per vincerne un'altra nel caso che un determinato evento si verifichi. Questo è quanto comunemente accade in tutti i campi riguardanti delle scommesse.

Allora effettuare una *scommessa* su di un evento E significa che si è disposti a pagare una *parte* di una certa somma S , che possiamo indicare con pS , per ricevere S se E si verifica e 0 nel caso contrario.

Se introduciamo la funzione *guadagno* G_E relativamente a quella data scommessa, otterremo la seguente schematizzazione:

$$\begin{aligned} S-pS, & \quad \text{se } E \text{ si verifica} \\ G_E = -pS, & \quad \text{se } E \text{ non si verifica.} \end{aligned}$$

Si osservi che è del tutto evidente che in una scommessa ciascuno di noi ha un obiettivo quello di massimizzare il proprio guadagno, quindi questo fatto potrebbe portarci a distorcere la nostra valutazione; come difenderci da ciò per evitare che lo strumento scommessa divenga arbitrario e quindi inefficace allo scopo a cui deve rispondere?

Intanto bisogna garantirsi che chi scommette pS per ricevere S (dall'altro scommettitore) se E si verifica, deve analogamente essere disposto a pagare S per ricevere pS se E si verifica, cioè a scambiare i termini della scommessa con l'altro scommettitore, questo garantirà che la valutazione

effettuata dall'individuo rispecchi il proprio grado di fiducia senza essere influenzato dal desiderio di realizzare un maggiore guadagno, ch  altrimenti questo potrebbe essere realizzato dall'altro. Ad esempio, supponiamo che in una scommessa su E io valuti di poter pagare 70 per ricevere 100 nel caso in cui E si verifichi, potrei pensare di aumentare il mio ipotetico guadagno (in questo caso pari a 30), dichiarando di essere disposto a pagare 40; ma se sono disposto a scambiare le quote di scommessa con l'altro competitore allora il mio ipotetico guadagno potrebbe diminuire sensibilmente (-60)!

Ma ci  non basta, bisogna garantirsi che i possibili valori del guadagno G_E non siano entrambi dello stesso segno, perch  solo in tal caso non si avrebbe una vincita o una perdita certa, indipendentemente dal verificarsi o meno di E. Con la conseguenza che solo in tal caso un individuo accetterebbe di scommettere. Tale condizione fu opportunamente chiamata da de Finetti *coerenza*.

La coerenza in una scommessa su di un evento E porta come   ben noto a stabilire che, posto S pari a 1, (ma vale anche per $S \neq 1$) in ogni caso la quota p che un individuo   disposto a pagare per ricevere 1 se E si verifica   sempre compresa tra 0 e 1. Inoltre la stessa coerenza impone che se E   *certo* allora p deve essere necessariamente 1 e se E   *impossibile* allora p deve essere necessariamente 0.

Si osservi subito perch  $p=1$ non implica E *certo*, n  $p=0$ implica E *impossibile* (per un approfondimento in tal senso si veda de Finetti 1974).

Seguendo de Finetti quindi la probabilit  di un evento E (ovvero la misura numerica dell'incertezza su E)   la quota p

che un individuo è disposto a pagare in una *scommessa coerente* per ricevere 1 se E si verifica e 0 altrimenti.

Ma appunto una scommessa sarà coerente solo se l'osservatore (l'individuo) che valuta l'incertezza di E la renderà tale.

Esisteranno quindi, relativamente ad E infinite valutazioni coerenti, purché comprese tra 0 e 1!

Come farà allora l'osservatore a sceglierne una? Dovrà basarsi sull'*informazione* che possiede in merito ad E ed esprimere tale informazione attraverso un numero. Naturalmente quanto più l'informazione sarà *ricca* tanto più si sarà meno dubbiosi nello scegliere uno tra infiniti numeri!

Ora nel misurare l'informazione un individuo, come sempre accade, non possiede un criterio *oggettivo* di valutazione: in essa infatti interverranno le convinzioni personali, gli stati d'animo e tutte quelle caratteristiche che contribuiscono alla formazione di un giudizio. Quindi egli dovrà soltanto formulare, potremmo dire così, oggettivamente quanto valuta soggettivamente!

Così si esprime de Finetti ne *L'invenzione della verità* (2006):

Qualunque comportamento...nel senso di ritenere plausibile il verificarsi di questo o di quell'evento non dipende quindi che da un sentimento, da quello stesso sentimento che bisogna lealmente presentare come il vero punto di partenza, e che taluno preferisce invece ignorare e pudicamente nascondere dietro una barricata di congegni logici altrettanto macchinosi quanto vuoti.

4 - Valutazioni nei casi di equiprobabilità e di scambiabilità

Ovviamente in alcuni casi sarà tutto più semplice: ad esempio se un individuo giudicasse ugualmente possibile il verificarsi di E e quello della sua negazione E_c , ad entrambi assegnerà il valore di probabilità $\frac{1}{2}$ (ma siamo sicuri che il giudicare ugualmente possibili due eventi reali sia così semplice e naturale?). Mentre se giudicasse cinque volte più probabile E rispetto a E_c allora assegnerà ad E probabilità $\frac{5}{6}$ e ad E_c $\frac{1}{6}$.

In altri casi potrà fare ricorso a valutazioni che si basano sulla frequenza osservata, ma solo, come ha ben precisato de Finetti, quando l'evento E faccia parte di una famiglia di eventi scambiabili, cioè quando la valutazione della probabilità di una qualunque n-pla di eventi della famiglia considerata dipende solo dal numero degli eventi fissati e non dai particolari eventi fissati; in breve: dipende solo da quanti eventi e non da quali si considerano (de Finetti, 1974)!

Così ad esempio, nell'estrazione con restituzione di palline da un'urna di composizione incognita, cioè per la quale si conosca il numero totale di palline ma non la percentuale di quelle rosse, un individuo che volesse valutare la probabilità di ottenere pallina rossa alla n-esima estrazione, essendone state estratte $(n-1)/3$ rosse su $(n-1)$, potrebbe stimare e pari a $(n-1)/3$ la probabilità che esca pallina rossa alla n-esima estrazione, perché gli eventi della famiglia considerati sono scambiabili (ci interessa solo quante palline rosse vengono estratte). Ma se volesse valutare la probabilità di vittoria di un determinato pugile al 101-esimo incontro della sua carriera, sapendo che ne ha vinti 85 sui 100 precedenti, basterebbe ciò

per stimare tale probabilità pari a 85/100? Ovviamente no, perché potrebbe, nel caso peggiore, aver perso tutti gli ultimi 15 incontri, e il grado di fiducia nei suoi confronti... potrebbe non essere così elevato!

5 - Valutazioni relative a costituenti

Ho svolto finora considerazioni relative a singoli eventi o a famiglie di eventi analoghi. Spesso però ci imbattiamo in fenomeni aleatori, descrivibili in alcuni casi attraverso numeri aleatori. Come ad esempio il numero X di incidenti d'auto mortali in un anno relativamente a persone che non indossavano la cintura di sicurezza, per i quali si possono considerare eventi del tipo $(X = n)$. Oppure in fenomeni più complessi, rispetto ai quali possiamo essere interessati ad eventi del tipo: la quantità di pioggia caduta in una determinata città italiana nel prossimo anno sarà maggiore di quella dell'anno trascorso, oppure il grado di umidità medio sarà minore, o il livello di smog misurato sarà maggiore, o il consumo di carburante sarà uguale.

Nel primo caso, quello dei numeri aleatori, è possibile formulare diversi modelli probabilistici che ci permettono di valutare la probabilità di qualsivoglia evento relativo ad essi, ma non dobbiamo dimenticare che queste valutazioni non sono oggettive, come apparentemente possono sembrare, perché dato il modello basta applicare delle formule per ricavarle; viceversa è sempre l'osservatore che sceglie, in base alle proprie informazioni, il modello che ritiene più adatto a descrivere il fenomeno considerato.

Cosa accade, invece, nel secondo caso?

Nuovamente gli aspetti sistemici dell'impostazione adottata da de Finetti forniscono una risposta esemplare.

Ricordo che nell'approccio *classico* (comunemente utilizzato nelle applicazioni) relativo ad un fenomeno aleatorio si procede così: prima si definisce uno spazio W dei risultati o casi elementari possibili, ovvero si costruisce una partizione dell'evento certo, successivamente si attribuisce una probabilità a ciascuno di questi casi (o *costituenti*) e poiché qualunque evento riferito a quel fenomeno si può ottenere come unione di costituenti, a ciascuno di essi viene attribuita in maniera *lineare* una probabilità.

Faccio osservare che naturalmente rimane aperto il problema di come assegnare le probabilità ai costituenti!

Al contrario de Finetti basa la sua concezione sul fatto che ogni evento è singolo e per ciascuno di essi possiamo esprimere attraverso una valutazione qualitativa o quantitativa il nostro grado di fiducia. Se poi oltre a trovarci davanti ad un unico evento ed averne valutato la sua probabilità, abbiamo la necessità di assegnare delle probabilità ad ulteriori eventi come dobbiamo comportarci?

Si possono presentare diversi casi. Se si ha a che fare con una famiglia di eventi E_i che forma una partizione dell'evento certo, allora per la coerenza la somma delle probabilità dei singoli E_i deve essere uguale ad 1 e la probabilità dell'unione di n eventi incompatibili deve essere uguale alla somma delle singole probabilità.

Se, ancora sono dati n eventi ed una loro assegnazione coerente di probabilità, allora risulta determinata la probabilità di un evento che dipenda linearmente dai primi n .

Nei casi, invece, in cui tra gli eventi E_i considerati ed un nuovo evento E vi sia un legame di tipo *logico*, allora sempre per la coerenza si deve procedere in questo modo: si costruiscono i costituenti relativamente alla famiglia data (cioè tutte le intersezioni possibili tra gli eventi in modo che in ciascuna compaia uno di essi o la sua negazione, ad es. $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E^c \cup E_{h+1} \cup \dots \cup E_{n-1} \cup E_n$), poi si individuano due eventi E' ed E'' , che sono rispettivamente il massimo evento unione di tutti i costituenti implicanti E ed il minimo evento unione di tutti i costituenti implicati da E : necessariamente la probabilità di E dovrà essere compresa nell'intervallo chiuso $[P(E'), P(E'')]$. Anche in questa situazione quindi la probabilità di E non risulta univocamente determinata, può semplicemente restringersi l'intervallo $[0,1]$ all'interno del quale l'osservatore può valutarla per essere coerente.

Ma la situazione più interessante si presenta quando si ha a che fare con singoli eventi che vengono esaminati a partire dal primo e poi gli altri successivamente. A ciascuno di questi l'osservatore in base alle proprie informazioni attribuisce un valore di probabilità coerente, cioè compreso tra 0 e 1. In tal caso però tra gli eventi possono sussistere dei legami logici di cui non si è tenuto conto o di cui se ne è avuta informazione solo quando sono stati introdotti tutti gli eventi, come fare allora per verificare se la valutazione è complessivamente coerente?

Occorrerà costruire i costituenti a partire dagli eventi considerati, e poiché ciascuno di questi ultimi risulterà unione di alcuni dei costituenti ottenuti, la sua probabilità deve essere uguale alla somma delle probabilità (non ancora determinate, quindi diciamo così *incognite*) di tali costituenti. Si otterrà così

un sistema di n equazioni in s ($\leq 2^n$) incognite x_i , con i vincoli $x_1 + x_2 + \dots + x_s = 1$ e $x_i \geq 0$. Se esiste una s -pla soluzione del sistema allora la valutazione data potrà dirsi coerente.

È interessante osservare che il sistema potrebbe non ammettere soluzioni, in tal caso la valutazione sarebbe incoerente; che può ammettere un'unica soluzione, ma che possono esistere anche più soluzioni, cioè un insieme di valutazioni diverse tutte coerenti.

Chiarirò quest'ultimo interessante aspetto attraverso degli esempi. Siano dati tre eventi A, B, C ed un osservatore abbia valutato le loro probabilità al modo seguente $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/5$, $P(C) = 1/5$ (ovviamente ciascuna di esse rappresenta una valutazione coerente!). Sia noto poi che

$$ABC = \phi \text{ (dove } ABC \equiv A \wedge B \wedge C)$$

Allora i costituenti possibili sono

$$C_1 = A^c B C, C_2 = A B^c C, C_3 = A B C^c, C_4 = A B^c C^c, C_5 = A^c B C^c, C_6 = A^c B^c C, C_7 = A^c B^c C^c.$$

Per stabilire allora se, nelle condizioni date, la valutazione complessiva espressa dalla terna $P(A) = 1/2$, $P(B) = 2/5$, $P(C) = 1/5$ risulti coerente bisogna stabilire se il seguente sistema ammette almeno una soluzione:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 + x_4 = 1/2 \\ x_1 + x_3 + x_5 = 2/5 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 1/5 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7 \end{array} \right.$$

Se si pone, come è lecito fare, $x_1 = 0, x_3 = 0, x_6 = 0$, con semplici passaggi si ottiene la seguente soluzione del sistema

$x_1 = 0, x_2 = 1/5, x_3 = 0, x_4 = 3/10, x_5 = 2/5, x_6 = 0, x_7 = 1/10$, quindi le attribuzioni di probabilità assegnate agli eventi A, B, C determinano una valutazione complessiva coerente!

Si osservi, che se avessimo posto $x_2 = 0, x_3 = 0, x_6 = 0$, avremmo ottenuto una diversa soluzione del sistema

$$x_1 = 1/5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1/2, x_5 = 1/5, x_6 = 0, x_7 = 1/10$$

e anche in tal caso la valutazione complessiva sarebbe risultata coerente!

Non solo, ma se inizialmente l'osservatore avesse valutato $P(A)=1/2, P(B)=2/5, P(C)=1/5$ con la condizione $ABC = \phi$, avremmo ottenuto il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 + x_3 + x_4 = \alpha \\ x_1 + x_3 + x_5 = \beta \\ x_1 + x_2 + x_6 = \gamma \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, 7 \\ 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1 \end{array} \right.$$

Con le scelte degli $x_i = 0$, fatte nei due casi esaminati in precedenza, avremmo avuto rispettivamente le seguenti soluzioni:

1. $x_1 = 0, x_2 = \gamma, x_3 = 0, x_4 = \alpha - \gamma, x_5 = \beta, x_6 = 0, x_7 = 1 - (\alpha + \beta)$
che darebbe luogo ad una valutazione complessiva coerente,
purché sia $\beta \geq \gamma - \alpha + \beta \leq 1$.
2. $x_1 = \gamma, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \alpha, x_5 = \beta - \gamma, x_6 = 0, x_7 = 1 - (\alpha + \beta)$
che darebbe luogo ad una valutazione complessiva coerente,
purché sia $\alpha \geq \gamma - \alpha + \beta \leq 1$.

6 - Valutazioni condizionate

Passerò ora ad esaminare gli ulteriori aspetti dell'assunto iniziale, in particolare per quanto riguarda l'imparare induttivamente dall'esperienza, riferendomi agli eventi condizionati.

Ricordo che, dati due eventi E ed H qualsiasi (purché $H \neq \Phi$), si può considerare un nuovo ente E/H e, a cui viene attribuito il nome di evento condizionato, che ha il seguente significato

$E/H =$	VERO,	se H vero ed E vero
	FALSO,	se H vero ed E falso
	INDETERMINATO,	se H falso

Allora se vogliamo effettuare una scommessa (condizionata) relativamente ad E/H dovremo, secondo de Finetti¹, comportarci al seguente modo:

PAGARE p per RICEVERE	1 se H vero ed E vero
	0 se H vero ed E falso
	p se H falso

¹ de Finetti Bruno, Teoria delle probabilità, Torino, Einaudi, 1970

Da questa definizione di scommessa condizionata segue che possiamo misurare l'incertezza dell'evento E/H attraverso la quota p che un individuo coerente è disposto a pagare con gli esiti precedenti e questa misura viene chiamata probabilità condizionata e indicata con $P(E/H)$.

de Finetti prova, inoltre, come la probabilità condizionata, così introdotta, verifichi tutte le proprietà di una probabilità e, infine, come l'unica lettura possibile di $P(E/H)$ sia quella della probabilità di E supposto vero H .

In particolare, egli fa vedere come la semplice (e naturale) condizione di coerenza: il guadagno aleatorio non uniformemente negativo in un insieme di scommesse, conduca al teorema delle probabilità composte: considerati due eventi qualsiasi E ed H ($H \neq \Phi$) si ha:

$$P(E \cap H) = P(H) P(E/H);$$

ed al suo corollario, il *teorema di Bayes* (con anche $E \neq \Phi$):

$$P(H/E) = K P(H) P(E/H), \quad \text{con } K = 1/P(E), P(E) \neq 0,$$

il quale ci dice che la probabilità di H condizionatamente ad E è uguale al prodotto della probabilità di H per la probabilità di E condizionatamente ad H , a meno di un fattore di proporzionalità K non nullo.

Soffermiamoci, ora, sul *significato* del teorema di Bayes. In realtà, esso ci dice molto di più se ne diamo una *lettura* di questo tipo: sia E un evento che rappresenti l'esito di un esperimento di un dato fenomeno aleatorio e sia H una ipotesi relativa allo stesso fenomeno, allora il teorema afferma che la probabilità dell'ipotesi H condizionatamente ad E è

proporzionale alla probabilità dell'ipotesi H non condizionata moltiplicata per la probabilità di E condizionata ad H.

Per rendere più chiaro quanto espresso ricorriamo al classico esempio dell'urna di *composizione incognita*. Consideriamo cioè un'urna di cui si sappia che contiene N palline, ma delle quali non è nota la percentuale di palline rosse (potendo, quindi, essere presenti nell'urna da 0 a N palline rosse). L'evento E rappresenti un possibile risultato relativo all'estrazione di n palline dall'urna (ad es., senza reimbussolamento): h palline rosse su n, e l'evento H sia l'ipotesi: sono presenti nell'urna r palline rosse su N. Allora il teorema di Bayes ci permette di valutare la probabilità dell'ipotesi H condizionatamente all'evento E (che possiamo chiamare probabilità finale), attraverso la probabilità di H (che possiamo chiamare probabilità iniziale) e la probabilità di E/H, cioè di E supposta vera H (che può essere facilmente calcolata e che possiamo chiamare verosimiglianza), sempre a meno del fattore di proporzionalità K.

In definitiva, il teorema di Bayes ci dice come dobbiamo aggiornare una nostra valutazione di probabilità in presenza di una nuova informazione (o meglio supposto che ci divenga nota una nuova informazione): probabilità finale = K x probabilità iniziale x verosimiglianza.

Si osservi che iniziale e finale hanno, in questo contesto, il solo significato rispettivamente di prima e dopo che divenga noto (si supponga di conoscere) E.

Naturalmente, allo stesso modo può valutarsi la probabilità finale dell'ipotesi contraria H^c , risultando:

$$P(H^c/E) = K P(H^c) P(E/H^c), \text{ con } K = 1/P(E), P(E) \neq 0.$$

E, più in generale, volendo valutare la probabilità finale di m diverse ipotesi H_j , formanti una partizione dell'evento certo, si ha la seguente espressione del teorema di Bayes:

$$P(H_j/E) = K P(H_j) P(E/H_j), \quad j=1,2,\dots,m; \text{ con } K = 1/P(E),$$

$$P(E) = \sum_{j=1,2,\dots,m} P(H_j) P(E/H_j).$$

Tornando al nostro esempio, le H_j rappresenterebbero le possibili ipotesi sulla composizione dell'urna e noi dopo averne dato una valutazione iniziale, potremo attraverso il teorema di Bayes, esprimerne una finale.

In generale nelle impostazioni oggettivistiche della probabilità (quella classica e quella frequentista), poiché le valutazioni di probabilità sono essenzialmente dei rapporti numerici, l'osservatore (l'individuo che valuta) ha il solo compito di eseguire bene dei calcoli, basati su situazioni di simmetrie o su ripetizioni di un dato fenomeno (apparentemente, però, perché comunque in ogni caso sono state fatte delle precise e soggettive scelte in precedenza: i casi possibili considerati equiprobabili e le prove ripetute considerate equiprobabili ed indipendenti!). In queste concezioni il teorema di Bayes perde il suo significato ed il suo valore intrinseco e assume la veste di un risultato puramente matematico.

Nella concezione soggettivistica di Bruno de Finetti, al contrario, esprime al meglio il significato di come si può (e si deve) apprendere dall'esperienza!

È lo stesso processo logico che porta un medico, per fare un altro esempio, ad effettuare una diagnosi. Egli nel valutare la presenza o meno di una malattia in un paziente, prima lo

visita ed esprime una prima idea riguardo alla malattia, poi gli fa compiere una serie di accertamenti diagnostici-strumentali, i cui risultati utilizza per arrivare a stabilire la presenza o meno della malattia.

Si osservi, per inciso, che questa procedura sembra far parte della logica del certo, mentre viceversa più in generale riguarda l'ambito della logica dell'incerto: sempre e solo di valutazioni di probabilità si tratta, anche se fortunatamente spesso le probabilità finali di accertamento della malattia sono prossime a 1 o a 0 (si pensi solo al fatto che oltre alla valutazione personale anche i test clinici possono essere affetti da errore)! In ogni caso quando ricorriamo ad un medico, l'evento: sono affetto da una data malattia, è sempre possibile, né certo, né impossibile!

7 - Valutazioni inferenziali

Spesso nelle applicazioni per stimare il valore di qualche parametro relativo ad un dato fenomeno aleatorio, si ricorre al cosiddetto metodo della massima verosimiglianza: in breve e schematizzando si tratta di valutare i diversi valori delle probabilità di E (o la densità di probabilità, nel caso di un parametro continuo) condizionatamente alle ipotesi H_j (le verosimiglianze) e di ricavarne il valore massimo, che viene scelto come stima.

Ritornando, ancora una volta, al nostro esempio dell'urna di composizione incognita si calcolano le $P(E/H_j)$, per ogni j , e poi se ne trova quella più grande di tutte; se questa, ad esempio è la $P(E/H_3)$ si dice che l'ipotesi H_3 è una stima della vera composizione dell'urna.

Esemplificando ulteriormente, in un'urna ci siano 10 palline, di cui non è noto quante sono quelle rosse. Si effettua un campionamento, ossia un'estrazione ripetuta (con restituzione) per un totale di 5 palline e di queste se ne trovano 3 rosse e sia E questo evento. Si valutano le $P(E/H_j)$, $j=0,1,\dots,10$, ricavando

$$P(E/H_j) = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{j}{10}\right)^3 \left(\frac{10-j}{10}\right)^2;$$

e distintamente

$$P(E/H_0) = 0$$

$$P(E/H_1) = 0.0081$$

$$P(E/H_2) = 0.0512$$

$$P(E/H_3) = 0.1323$$

$$P(E/H_4) = 0.2304$$

$$P(E/H_5) = 0.3125$$

$$P(E/H_6) = 0.3456$$

$$P(E/H_7) = 0.3087$$

$$P(E/H_8) = 0.2048$$

$$P(E/H_9) = 0.0729$$

$$P(E/H_{10}) = 0$$

Quindi poiché il valore massimo è 0.3456, che si ha relativamente all'ipotesi H_6 , se ne deduce che la stima (di massima verosimiglianza) per la composizione incognita dell'urna è 6 palline rosse su 10.

Questa metodologia ha due controindicazioni, entrambe di tipo logico!

La prima è quella di effettuare una stima relativamente ad ipotesi, utilizzando le probabilità condizionate inverse $P(E/H_j)$ rispetto a quelle che più correttamente andrebbero confrontate: le $P(H_j/E)$; solo attraverso queste, in maniera logicamente inequivocabile, è possibile stabilire quale delle ipotesi di composizione dell'urna è quella più probabile, osservato (supposto di osservare) E , e prenderla come stima della composizione!

La seconda è che in tale procedura non intervengono le probabilità delle ipotesi $P(H_j)$, che possono essere sempre valutate e la cui non considerazione può essere assolutamente dannosa per le conclusioni raggiunte.

Infatti, anche nel precedente esempio, se si utilizzasse (come è necessario) il teorema di Bayes, nella valutazione delle $P(H_j/E)$ entrerebbero le $P(H_j)$, e una qualunque distribuzione di queste diversa dall'equiprobabilità, potrebbe rendere massima la probabilità finale di una delle H_j diversa da H_6 . Se, per un qualche motivo, si sapesse che è molto più probabile che siano state messe nell'urna tante palline rosse quante di un altro colore rispetto alle altre ipotesi, e cioè nel nostro caso si avesse, ad esempio $P(H_5)=0.6$, $P(H_4)=P(H_6)=0.15$, e per semplicità $P(H_0)=P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=P(H_7)=P(H_8)=P(H_9)=P(H_{10})=0.0125$, si ricaverebbe:

$$P(H_0/E) = 0$$

$$P(H_1/E) = 0.00035$$

$$P(H_2/E) = 0.00225$$

$$P(H_3/E) = 0.00581$$

$$P(H_4/E) = 0.12185$$

$$P(H_5/E) = 0.66111$$

$$P(H_6/E) = 0.18278$$

$$P(H_7/E) = 0.01357$$

$$P(H_8/E) = 0.00902$$

$$P(H_9/E) = 0.00320$$

$$P(H_{10}/E) = 0$$

E quindi l'ipotesi largamente più probabile risulterebbe H_5 .

Desidero presentare un esempio ancor più significativo, per i suoi aspetti paradossali.

Paolo non si reca ad un colloquio di lavoro presso la ditta Smile, indichiamo con E questo evento. Il dirigente del reparto assunzioni vuole capire perché e formula le seguenti ipotesi:

H_1 = Paolo ha trovato un altro lavoro

H_2 = Paolo è finito in prigione

H_3 = Paolo ha vinto la lotteria o qualunque altra ragione diversa dalle altre.

Se egli dovesse decidere sulla base delle verosimiglianze, in ogni caso dovrebbe scegliere l'ipotesi H_2 , in quanto H_2 implica E e quindi $P(E/H_2)=1$.

Mentre se si utilizza il teorema di Bayes, l'ipotesi più probabile potrebbe non essere H_2 . Infatti basta che siano $P(E/H_1)=0.6$, $P(E/H_3)=0.2$ e $P(H_1)=0.7$, $P(H_2)=0.25$, $P(H_3)=0.05$ per ottenere:

$$P(H_1/E)=0.618$$

$$P(H_2/E)=0.368$$

$$P(H_3/E)=0.014,$$

da cui si ricaverebbe che l'ipotesi più probabile è la più ragionevole!

Il teorema di Bayes, in definitiva, è l'architrave della coerenza su cui poggia l'aggiornamento delle valutazioni di probabilità. Attraverso di esso si può solo ridurre l'incertezza, mai eliminarla giungendo a conclusioni certe. Da questo punto di vista rappresenta un efficace forma di pensiero non lineare.

L'aggiornamento delle valutazioni di probabilità deve quindi seguire un solo principio: quello della coerenza; questo garantisce all'osservatore di non violare le regole nell'attribuzione di probabilità: tra ciò che aveva valutato prima (le probabilità iniziali) e ciò che valuta dopo (le probabilità finali). Di ciò si tratta quando ci si riferisce all'imparare induttivamente dall'esperienza!

In ogni caso, da tutti gli esempi illustrati, si ricava come un insieme di eventi si può trasformare in un sistema di eventi quando un osservatore faccia emergere per essi una valutazione coerente di probabilità. Come abbiamo visto, in generale, di queste valutazioni coerenti ce ne possono essere più di una, rimane quindi alla responsabilità dell'osservatore scegliere quella che ritiene rappresentare al meglio il suo stato di informazione, rispetto all'insieme di eventi considerati!

Quindi l'apertura sistemica della concezione di de Finetti esplica in tal modo tutta la sua ricchezza metodologica ed esalta il ruolo dell'osservatore, come portatore ed elaboratore di scelte consapevoli e appunto responsabili.

8 - Conclusione

Da un punto di vista sistemico si può dire che in questo tipo di logica induttiva le interazioni tra agenti (eventi in

questo caso) devono essere coerenti, invece che lineari o deducibili le une dalle altre. In tale circostanza la coerenza non è qualcosa di relativo alle regole della logica formale come nella deduzione, per il calcolo deterministico, ma è relativa all'emergenza.

La coerenza, pertanto, non è qualcosa di deterministicamente calcolato e ricavato: è progettato, appreso, sperimentato e quindi formalizzato nella più generale costruzione di modelli e nella loro simulazione, come viene anche fatto nell'ambito della logica fuzzy (Zadeh et al., 1996).

Da questo punto di vista gli elementi di un sistema sono eventi.

L'osservatore modella il sistema emergente, che è una configurazione di eventi considerata interagente con le probabilità assegnate dall'osservatore, oltre che dalle interazioni fisiche. Tale approccio sembra essere necessario per il cruciale ruolo teorico dell'osservatore nei processi di emergenza e nella loro modellizzazione.

Avendo a che fare con sistemi (quali quelli fisici, biologici e sociali) considerati emergenti a causa delle interazioni dei componenti e assumendo in modo oggettivistico che l'osservatore non faccia parte del sistema, oppure ne faccia parte ma adotti una logica incompatibile con il sistema considerato (assuma cioè una logica lineare, pensando di agire in uno spazio deterministico) si usano delle strategie, che sebbene non siano errate, sono quanto meno inefficaci.

L'approccio introdotto da de Finetti porta a considerare sistemi di probabilità, partendo da singoli eventi ed arrivando a sistemi di eventi.

In definitiva, è importante sottolineare come il linguaggio e la logica dell'incerto, sviluppati da Bruno de Finetti, abbiano un ruolo cruciale nella vita di tutti i giorni: permetterci di misurarci con la complessità e produrre discipline che interagiscano sistemicamente, in modo che vengano usati coerentemente concetti, analogie, corrispondenze ed invarianti. Strumenti che fino ad oggi ci hanno consentito di arricchire enormemente le nostre conoscenze e che se usati, come Bruno de Finetti ha fatto non solo nella costruzione della sua teoria delle probabilità ma anche riguardo alla didattica con il suo fusionismo, ancor di più ci consentiranno un incremento di tale arricchimento che si fondi sul superamento di quegli steccati disciplinari, cui egli ha sempre cercato di abituarci a diffidare.

Bibliografia

[1] Anderson, J. R., 1983, *The Architecture of Cognition*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

[2] Barrow-Green, J., 1996, *Poincaré and the Three Body Problem*. Amer. Math. Soc.

[3] Bruno, G., 2002, *Logica dell'incerto e didattica della matematica*, Atti Convegno Nazionale UMI, Loano.

[4] Bruno, G., 2004, *Logica dell'incerto: un'esperienza didattica*, Atti Convegno, Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno, Bari.

[5] Bruno, G., 2006, *Logica dell'incerto e didattica*, Periodico di matematiche, serie VIII, vol. 6, n. 3.

[6] Cerasoli M., Eugeni F., Rizzi B., 1983, Sulla probabilità del k -MCD di m naturali scelti a caso, Rendiconti di Matematica, Roma, pp. 367-379 (Generalizza un teorema di de Finetti caso $k=1$).

[7] Corning, P., 2002, *The Re-emergence of "Emergence": A Venerable Concept in Search of a Theory*, Complexity **7(6)**:18-30.

[8] Davydov, A.S., 1979, *Bioenergetics and the mechanism of muscle contraction*. International Journal of Quantum Chemistry , **16**: 5-17.

[9] de Finetti, B., 1937, *La prevision: ses lois logiques, ses sources subjectives*, Annales de l'Institut Poincaré, vol.7, fasc.1, pp.1-68.

[10] de Finetti, B., 1974, *Theory of Probability: A Critical Introductory Treatment*, 2 volumes (Translated by A. Machi and A. Smith). Wiley, London.

[11] de Finetti, B., 2006, *L'invenzione della verità*, Cortina Editore.

[12] Di Gennaro F., Eugeni F., Maturo A., 1999, Sulla probabilità di indovinare la chiave ed alterare i messaggi in sistemi di autenticazione, atti Congresso nazionale Mathesis Vol. 2, Teramo, pp. 45-54.

[13] Heisenberg, W., 1971, *Physics and Beyond*. Harper & Row, New York.

[14] Klir, G. J., and Bo, Y., 1995, *Fuzzy sets and Fuzzy Logic: Theory and applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[15] Minati, G., and Pessa, E., (eds.), 2002, *Emergence in Complex Cognitive, Social and Biological Systems*, Proceedings of the Second Conference of the Italian Systems Society, Kluwer Academic/Plenum Publishers, London.

[16] Minati, G., and Pessa, E., (eds.), 2002, *Emergence in Complex Cognitive, Social and Biological Systems*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.

[17] Pelusi D. (2002), Un modo di ragionare fuzzy a livello elementare, *Periodico di Matematiche*, Serie VIII, Vol. 2, Nr. 4, pp. 23-30.

[18] Peskin, E. M., and Schroeder, D. V., 1995, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press.

[19] Pessa, E., 1998, *Emergence, Self-Organization, and Quantum Theory*. In *Proceedings of the First Italian Conference on Systemics* (G. Minati, ed.), Apogeo scientifica, Milano, Italy.

[20] Pessa, E., 2002, *What is emergence?* In *Emergence in Complex Cognitive, Social and Biological Systems* (G. Minati and E. Pessa, eds.), Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York.

[21] Rosen, R. 1985 *Anticipatory Systems*, Pergamon, New York.

[22] Scozzafava R., 2002, *Incertezza e Probabilità*, Zanichelli.

[23] von Bertalanffy, L., 1968, *General Systems Theory*, George Braziller, New York.

[24] von Foerster, H., 2003, *Understanding Understanding: Essays on Cybernetics and Cognition*. Springer-Verlag, New York.

[25] Zadeh, L. A., Klir, G. J., (eds.), Yuan, B., (ed.), 1996, *Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, and Fuzzy Systems: Selected Papers by Lotfi A. Zadeh* (Advances in Fuzzy Systems - Applications and Theory Vol. 6). World Scientific Pub Co.

Approvato su parere favorevole di Antonio Maturo e Luca Nicotra

Il settimo problema di Hilbert

I numeri algebrici sono le soluzioni reali o complesse di equazioni algebriche a coefficienti interi. L'insieme dei numeri algebrici è numerabile, e rispetto alle ordinarie operazione costituisce un campo. L'insieme di tutti i numeri complessi, in particolare reali non è numerabile. E' noto che se a è un numero algebrico $\neq 0,1$ e b è un numero razionale allora a^b è algebrico.

Hilbert nei suoi famosi 23 problemi aperti, pose la seguente settima questione:

Se a è un numero algebrico $\neq 0,1$ e b è un numero irrazionale, allora a^b è trascendente?

La risposta è sì, e la soluzione del settimo problema è il Teorema di Gelfond (1934).

Dal Teorema discende la trascendenza di: $2^{\sqrt{2}}$ (già provata nel 1930 da Carl Siegel Wolf), e discende la trascendenza di numeri del tipo $3^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, ...etc. Sono note le trascendenze dei seguenti: e^{π} (1929, A. Gelfond), per la funzione di Riemann $\zeta(z)$, si ha: $\zeta(2) = \pi^2/6$ (Eulero 1734), $\zeta(2n)$ che un multiplo di π , e per le trigonometriche: $\sin a$, $\cos a$, $\tan a$, $\cot a$, $\sec a$, $\operatorname{cosec} a$ (a numero algebrico). La $i^{ki} = e^{ki \log i} = e^{-k\pi/2}$, (in particolare: $e^{-\pi} = i^{2i}$, $e^{\pi} = i^{-2i}$) prova che $e^{-k\pi/2}$ è trascendente. Non è noto se sono algebrici o trascendenti i seguenti Numeri: $e+\pi$, $e\pi$, π^e , e^e , π^{π} , $\zeta(3)$ (del quale è nota l'irrazionalità), $\zeta(2n+1)$, $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n) = 0,57721\ 56649 \dots$ (costante di Eulero-Mascheroni).

Una rappresentazione grafica di carattere locale per integrali non calcolabili elementarmente

Ferdinando Casolaro*

*Dipartimento di Architettura - Università di Napoli Federico II
Via Toledo 402, Napoli, Italy; ferdinando.casolaro@unina.it

Sunto. *In questo lavoro si presenta un esempio di carattere didattico di tipo grafico per individuare l'andamento locale di una funzione espressa mediante integrali non calcolabili per via elementare.*

Parole chiave: Integrali, equazioni differenziali, curve algebriche, funzioni, cubiche, esercizi per la scuola secondaria.

1 - Introduzione

L'idea di presentare un esempio di funzione continua nel suo insieme di definizione, quindi integrabile secondo Riemann ma non esprimibile mediante funzioni elementari, è nata da un quesito assegnato dal MIUR nella simulazione per la prova scritta di matematica in vista degli esami di Stato 2019:

Si consideri la funzione $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, così definita:

$$f(x) = \int_1^x \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)}{t} dt$$

Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel suo punto di ascissa 1.

Ovviamente, il quesito è semplice e si risolve immediatamente tenendo conto del teorema fondamentale del calcolo integrale (F. Casolaro 2002).

Non tutti i docenti, però, hanno interpretato correttamente la questione e si sono impegnati nella ricerca della primitiva che non è calcolabile elementarmente.

Poiché in passato ho trattato alcune questioni relative a classi di funzioni non esprimibili per via elementare (F. Casolaro 1991, F. Casolaro 1992) tra le quali la non integrabilità di

$$f(x) = \int \frac{\sin x}{x} dx,$$

sono stato contattato per un contributo all'analisi del quesito.

Questo tipo di problema si presenta spesso nell'analisi di fenomeni risolvibili con equazioni differenziali (argomento inserito oggi nelle Indicazioni nazionali del MIUR) le cui curve integrali che ne rappresentano le soluzioni non sono esprimibili mediante funzioni analitiche elementari.

Nel paragrafo che segue, attraverso un esempio relativo al problema di Cauchy, si espone un metodo elementare per la visualizzazione locale del grafico - intorno al punto iniziale - che debba soddisfare le condizioni richieste.

2 - Un esempio di carattere didattico

Si consideri, il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'=1+xy \\ y(0)=1 \end{cases} \quad (1.1)$$

Con semplici calcoli si determina l'integrale generale dell'equazione che è espresso da:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx + c \right) \quad (1.2)$$

in cui la funzione integranda non è calcolabile per via elementare.

Dal punto di vista pratico si opera con i noti teoremi di integrazione per serie dopo aver sviluppato in serie di potenze

la funzione $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (Casolaro, 1997).

Dal punto di vista operativo è sicuramente questa la scelta migliore per analizzare l'andamento locale della primitiva.

Dal punto di vista didattico, riteniamo invece che - sempre nell'ottica di fornire una cultura matematica che non sia estranea alla capacità di visualizzare geometricamente le questioni analitiche - sia interessante proporre alcune osservazioni che legano le derivate del primo e del secondo ordine della funzione da determinare alla funzione integranda, per analizzare localmente i risultati graficamente.

Ciò permette - tenendo conto delle condizioni iniziali di Cauchy - di avere un andamento approssimato della curva

integrale richiesta dal problema localmente intorno al punto iniziale. (Casolaro, Prosperi, 2011).

Sia

$$y' = f(x, y)$$

un'equazione differenziale del primo ordine, con $f(x, y)$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

L'ipotesi che y' sia di classe C^1 ci garantisce l'esistenza e la continuità rispetto a x e ad y delle derivate parziali di $f(x, y)$ e quindi l'esistenza di $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

L'equazione :

$$f(x, y) = 0 \quad [y' = 0] \quad (2.1)$$

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, cioè eventuali punti estremanti o punti di flesso orizzontale, delle curve integrali.

L'equazione:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad [f_x(x, y) + f_y(x, y) \cdot y'] = 0 \quad (2.2)$$

con $y' \neq 0$, rappresenta l'insieme dei punti a tangente non verticale, cioè dei punti di flesso obliqui con alcune eccezioni di punti estremali (F. Casolaro, 2014).

Per comprendere la questione nella sua generalizzazione, è opportuno riprendere come esempio la (1.1)

$$\begin{cases} y' = 1 + xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

con $y' = f(x, y) = 1 + xy$ di classe C^1 in un opportuno aperto del piano.

L'equazione:

$$f(x, y) = 1 + xy = 0 \quad [y' = 0]$$

cioè: $y = -\frac{1}{x}$ (figura 1)

rappresenta il luogo geometrico dei punti a tangente orizzontale, cioè eventuali punti estremali o punti di flesso orizzontale delle curve integrali.

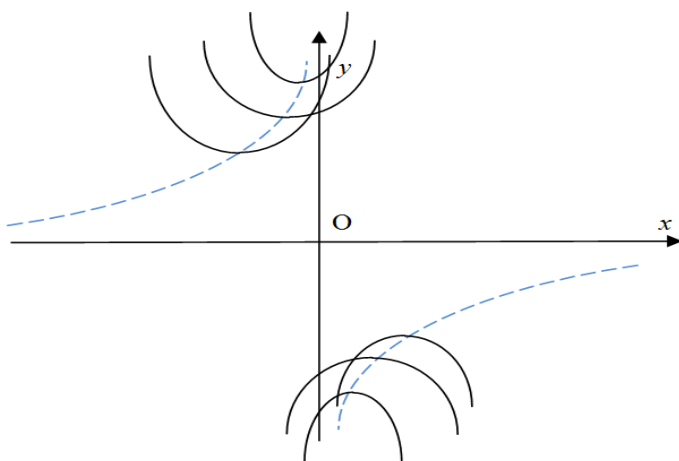


Fig. 1

La $y = -\frac{1}{x}$ è rappresentata dall'iperbole equilatera tratteggiata in fig. 2.1, su cui le varie curve integrali presentano massimi o minimi relativi (al più flessi orizzontali).

L'equazione:

$$y'' = 0 \quad \left[\frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \right] \Rightarrow y + x + x^2 y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{1+x^2}$$

con $y' \neq 0$, rappresenta il luogo dei punti a tangente non verticale, in generale punti di flesso obliquo con alcune eccezioni di punti di massimo o minimo relativi (figura 2).

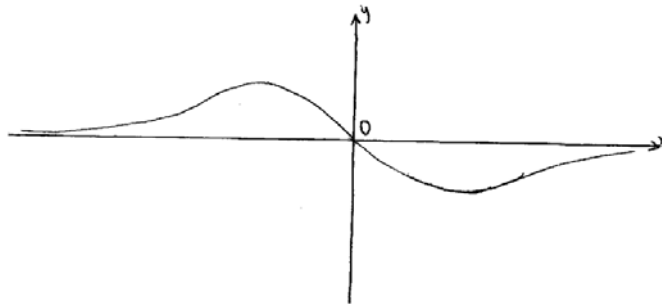


Fig. 2

$$y = -\frac{x}{1+x^2}$$

Se sono verificate opportune condizioni, in particolare se nel punto iniziale indicato dal problema, tra le derivate di ordine successive, la prima derivata diversa da zero è di ordine dispari, si osserva che:

- il grafico di figura 1 divide il piano in due regioni in cui sono situate, rispettivamente, i rami delle curve integrali crescenti ed i rami delle curve integrali decrescenti;
- il grafico di figura 2 spezza il piano in due regioni tali che in una delle quali le curve integrali volgono la concavità verso l'alto, nell'altra verso il basso.

È evidente, allora, che la curva integrale che rappresenta la soluzione del problema di Cauchy (1.1), la cui espressione analitica è la (1.2) $\text{conc} = u(0) = 1$, è localmente individuata, intorno al punto di ascissa 0, dall'analisi dei dati determinati in un opportuno intorno di tale punto (figura 3).

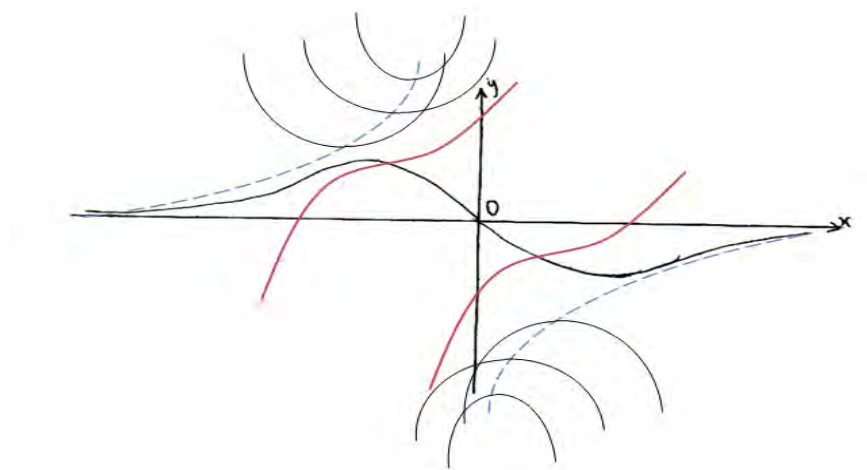


Fig. 3

Bibliografia

Casolaro F. (1991). Decisione per integrali indefiniti; funzioni non integrabili. *Atti del Convegno Nazionale Mathesis "Matematica moderna ed insegnamento"* - Cattolica 22-26 aprile 1991 – pag. 68-86.

Casolaro F. (1992). Il problema dell'integrazione indefinita. *Atti del Convegno "La Matematica applicata all'Economia ed all'Ingegneria"* - Ovindoli, 5-8 giugno 1991 - Ratio Mathematica n. 4, 1992 – pag. 29-38.

Casolaro F. (1997). *Integrali - 300 esercizi svolti sull'integrazione indefinita e integrali definiti* - Edizione Zanichelli, 1997.

Casolaro F. (2002). Dispense del Corso di Perfezionamento in Didattica della Matematica tenuto al Dipartimento di Matematica dell'Università Federico II di Napoli

Casolaro F., Prosperi R.(2011). La Matematica per la Scuola di 2° secondo grado: un contributo per il docente di Matematica. *Atti della Scuola Estiva tenutasi a Terni nel periodo 26-30 luglio 2011* - Ed. 2C Contact.

Casolaro F., (2014). Equazioni algebriche ed equazioni differenziali: Analogie e questioni didattiche - *Mathesisnazionale.it: Scuola Estiva di Matematica per i Docenti delle Scuole Secondarie di 2°Grado* - Montegrotto Terme, 22-25 luglio2014.

Di Marcello V., Eugeni F., Tonsini D. (1998). *Matematica: un approccio (corso di matematica per Agraria)*, Edigrafital, Teramo.

Eugenio F. (2018). Luoghi geometrici e curve algebriche, atti del Convegno Nazionale dell'APAV, *Nuove prospettive nella didattica e nei fondamenti della didattica e nei fondamenti della matematica*, pp. 8-15.

Approvato su parere favorevole di Renata Santarossa e Giuseppe Manuppella

Insiemi completi del terzo ordine

Franco Francia*

*franco.francia40@virgilio.it

Sunto. Il presente studio è indirizzato agli insegnanti di matematica della scuola media superiore e contiene molti problemi di geometria risolti con la teoria dei punti materiali descritta nell'articolo "Insiemi di punti materiali" di Franco Francia, pubblicato nel 1985 sul numero 1 della rivista Archimede (gennaio – marzo), Le Monnier. I problemi studiati sono quelli tipici contenuti nei testi scolastici; vengono risolti mediante insiemi completi del terzo ordine. Le nozioni introduttive sono sufficienti per comprendere le applicazioni. Questo tipo di geometria può essere inserito agevolmente nei programmi scolastici.

Parole chiave: punto materiale; insieme di punti materiali; prodotto di un punto materiale per un insieme di punti materiali; insiemi completi; insieme ridotto.

1- Insiemi completi del III ordine

Nelle prime tre pagine si accenna ad alcune proprietà elementari dei punti materiali che permettono di comprendere i procedimenti di risoluzione delle applicazioni che seguono.

Def.1 Sia $R \square S$ il prodotto cartesiano di R , insieme dei reali e S , insieme dei punti dello spazio. Un sottoinsieme finito di $R \square S$: $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_n P_n)$, è detto insieme di punti materiali di ordine n . In ogni elemento di I : $m_i P_i$, detto punto materiale, si di-

stingue, oltre al punto $P_i \in S$, l'elemento $m_i \in R$, detto massa associata a P_i . Diremo che $J = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ è l'insieme di sostegno di I .

Def.2 Prodotto di due punti materiali $(m_i P_i)$ e $(m_j P_j)$ è il numero reale ottenuto moltiplicando il prodotto delle masse dei due punti materiali per il quadrato della distanza dei relativi punti

$$(m_i P_i) \cdot (m_j P_j) = (m_i \cdot m_j) \cdot [d(P_i P_j)]^2$$

Def.3 Il prodotto di un punto materiale $(n P)$ per un insieme di punti materiali $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_n P_n)$ è la somma dei prodotti ottenuti moltiplicando $(m P)$ per ciascun elemento di I

$$(n P) \cdot I = \{n \cdot m_1 [d(PP_1)]^2 + n \cdot m_2 [d(PP_2)]^2 + \dots + n \cdot m_n [d(PP_n)]^2\}$$

Se la massa del punto P è unitaria $1 \cdot P$, conveniamo di indicare il prodotto così: $P \cdot I$.

Def.4 Se il prodotto di un qualsiasi punto P per I , con $P \in S$ e $I \in R \times S$, è costante: $P \cdot I = \text{cost.}$, allora I è detto insieme completo. Se le masse di tutti gli elementi di I sono nulle:

$(0 \cdot P_1 + 0 \cdot P_2 + \dots + 0 \cdot P_n)$, I è detto insieme completo improprio.

Def.5 Il prodotto di un numero reale r per $I = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_n P_n)$ è così definito: $r I = [(r m_1)P_1, (r m_2)P_2, \dots, (r m_n)P_n]$.

Nota E' facile dimostrare che, se I è completo, anche $I' = r I$ è completo. Gli insiemi completi I e I' sono detti equivalenti.

Def.6 Diciamo ridotto di un insieme di I , e scriviamo rid.(I), l'insieme di punti materiali ottenuti sostituendo gli elementi di I aventi stessa posizione con un unico punto materiale avente stessa

posizione e massa eguale alla somma delle masse. Nel ridotto di I sono omessi gli elementi con massa nulla.

Nota E' facile provare che se I è completo anche $\text{rid.}(I)$ è completo.

TH.1 Sia $I = (m \ A)$ l'insieme contenente un solo punto materiale: il punto A di massa m . Se I è completo, allora I è improprio.

Se I è completo, allora, qualunque sia $P \in S$, si ha:

$P \ I = m [d(P,A)]^2 = c$, essendo c una costante, con $c \in \mathbb{R}$. Poiché $[d(P,A)]^2$ varia in funzione del punto P il prodotto $m [d(P,A)]^2$ non può essere costante per qualsiasi P a meno che risulti $m = 0$. In tal caso si ha: $0 [d(P,A)]^2 = 0$. L'insieme completo I è improprio:

$$I = (0 \ A).$$

TH.2 Sia $I = (m \ A, n \ B)$ (1) un insieme contenente due punti materiali: il punto A di massa m e il punto B di massa n , con A e B non coincidenti, appartenenti alla retta r . Se I è completo, allora I è improprio.



Sia O l'origine di un sistema di coordinate ascisse sulla retta passante per A e B . Siano a e b le coordinate di A e B . Sia h l'ascissa di un qualsiasi punto H su r . Se I è completo si ha: $O \ I = H \ I$.

Sviluppando, si ha:

$$m [d(O,A)]^2 + n [d(O,B)]^2 = m [d(H,A)]^2 + n [d(H,B)]^2 \text{ da cui}$$

$$m a^2 + n b^2 = m (a+h)^2 + n (b+h)^2. \text{ Sviluppando si ha}$$

$$2h (m \cdot a + n \cdot b) + h^2 (m + n) = 0.$$

Affinché la precedente equazione sia eguale a zero al variare di h , deve risultare:

$$\begin{cases} m+n=0 \\ m \cdot a + n \cdot b = 0 \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} m = -n \\ -n \cdot a + n \cdot b = 0 \end{cases} \begin{cases} m = -n \\ n(-a+b) = 0 \end{cases}$$

Poiché $-a+b \neq 0$, deve risultare $n=0$ e quindi $m=-n=0$ da cui:

$$I = (0A, 0B)$$

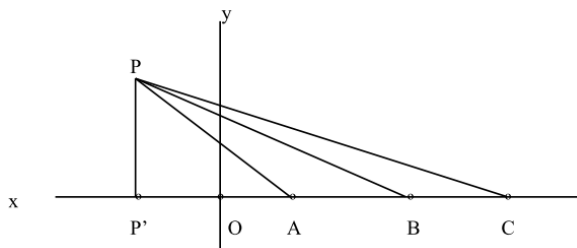
Anche in questo caso l'insieme I è completo e improprio.

TH.3 Sia (O,x,y) un qualsiasi sistema di riferimento ortonormale con l'asse x contenente una terna di punti le cui coordinate risultino:

$A = (a,0)$, $B = (b,0)$, $C = (c,0)$. Siano m, s, n le masse non nulle associate ad A, B, C . Se $I = (m A, s B, n C)$ è un insieme completo, allora sono soddisfatte le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} m+s+n=0 \\ ma+sb+nc=0 \end{cases} \quad (1)$$

e viceversa.



Se I è completo deve risultare: $O I = P I$ (2) essendo $P = (d, h)$ un qualsiasi punto del piano. Sviluppando la (2) si ha:

$$\begin{aligned} m[d(O,A)]^2 + s[d(O,B)]^2 + n[d(O,C)]^2 &= \\ = m[d(P,A)]^2 + s[d(P,B)]^2 + n[d(P,C)]^2 &\text{ da cui} \\ ma^2 + sb^2 + nc^2 &= m[(a-d)^2 + h^2] + s[(b-d)^2 + h^2] + n[(c-d)^2 + h^2] \\ ma^2 + sb^2 + nc^2 &= ma^2 + sb^2 + nc^2 - 2d(ma + sb + nc) + (d^2 + h^2)(m + s + n) \end{aligned}$$

e quindi si ha

$$-2d(ma + sb + nc) + (d^2 + h^2)(m + s + n) = 0 \quad (3)$$

Affinché la (3) sia eguale a zero, essendo d e h variabili, deve risultare: $(ma + sb + nc) = 0$ e $(m + s + n) = 0$ (4) conformemente alla tesi.

Procedendo a ritroso dalla (4) si ottiene nuovamente la (3) e quindi la (2).

OSSERVAZIONE I

1) Le masse m, s, n , da associare a ciascuno dei punti allineati A, B, C affinché l'insieme ternario $(m A, s B, n C)$ risulti completo, si possono facilmente ricavare risolvendo il sistema (1) del precedente teorema:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ ma + sb + nc = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} s = -(m + n) \\ ma - (m + n)b + nc = 0 \end{cases} \quad \text{da cui}$$

$$\begin{cases} s = -(m + n) \\ \frac{m}{n} = \frac{c-b}{b-a} \end{cases}$$

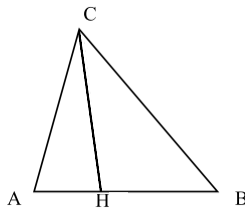
Attribuendo $K(b-a)$ alla massa n , essendo $K \in \mathbb{R}$ arbitrario, si ha: $\frac{m}{K(b-a)} = \frac{c-b}{b-a}$ da cui

$$m = K(c-b), s = -K(c-a), n = K(b-a). \quad (1)$$

Se supponiamo $c > b$ e $b > a$, B risulta appartenente al segmento $[A C]$; pertanto possiamo ricavare la regola: la massa s di B , punto interno a (A, C) , ha segno discorde rispetto alle masse di A e C . Inoltre, il modulo di ciascuna massa associata a un punto dell'insieme di sostegno J è proporzionale alla distanza dei rimanenti punti:
 $m = K \cdot d(B, C), s = -K \cdot d(A, C), n = K \cdot d(A, B) \quad (1)$

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline m = K \cdot d(B,C) & s = -K \cdot d(A,C) & n = K \cdot d(A,B) \end{array}$$

Applicazione 1. Sia H un punto della base [A, B] del triangolo P(J), essendo J = (A, B, C) l'insieme dei vertici, e risulti: $d(A, H) = 10$, $d(H, B) = 6$. Sapendo che $d(A, C) = 4\sqrt{5}$, $d(B, C) = 4\sqrt{13}$, calcolare $d(C, H)$.



Calcoliamo le masse m , s , n affinché l'insieme $(m \ A, s \ H, n \ B)$ sia completo. Utilizzando le (1) dell'osservazione I, posto $K = 1$, si ha: $m = d(H, B) = 6$, $n = d(A, H) = 10$, $s = -d(A, B) = -16$. L'insieme $(6 \ A, -16 \ H, 10 \ B)$ è completo; per la def.5 è equivalente a $I = (3 \ A, -8 \ H, 5 \ B)$. Essendo I completo si ha: $C \ I = H \ I$. (E' stato scelto il punto H in quanto H I è determinato così come risultano determinati i prodotti A I e B I). Sviluppando, si ha:

$$\begin{aligned} H \ I &= 3 [d(H, A)]^2 - 8 [d(H, H)]^2 + 5 [d(H, B)]^2 = \\ &= 3 \cdot 10^2 - 8 \cdot 0^2 + 5 \cdot 6^2 = 480. \end{aligned}$$

Eguagliando il prodotto C I, contenente la distanza incognita

$$d(C, H) = x, \text{ a } H \ I \text{ si ha: } C \ I = 480.$$

Sviluppando si ottiene:

$$3 [d(C,A)]^2 - 8 [d(C,H)]^2 + 5[d(C,B)]^2 = 480$$

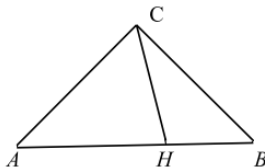
$$3(4\sqrt{5})^2 - 8x^2 + 5(4\sqrt{13})^2 = 480 \text{ da cui } x = 10 \text{ e quindi:}$$

$$d(C,H) = 10.$$

Applicazione 2. Siano A, B, C i vertici di un triangolo; H sia un punto interno ad (A, B) e risulti: $d(A, H) = 5$.

Sapendo che $d(A, C) = 3 \cdot \sqrt{5}$, $d(C, H) = 2 \cdot \sqrt{10}$, $d(C, B) = 3 \cdot \sqrt{13}$, trovare $d(H, B)$.

Ponendo $d(H, B) = x$, l'insieme completo, avente sostegno (A, H, B) , è: $I = [x A, - (x + 5) H, 5 B]$. Poiché $C \in I$, sviluppando si ha:



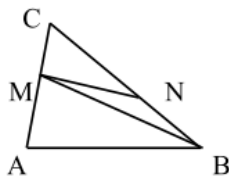
$$x [d(C,A)]^2 - (x + 5) [d(C,H)]^2 + 5 [d(C,B)]^2 = x [d(A,H)]^2 + 5 [d(B,H)]^2$$

da cui

$$x (3 \cdot \sqrt{5})^2 - (x + 5) (2 \cdot \sqrt{10})^2 + 5 (3 \cdot \sqrt{13})^2 = x 5^2 + 5 x^2$$

$$x^2 + 4x - 77 = 0. \text{ Infine si ha: } d(H, B) = 7.$$

Applicazione 3. Siano A, B, C i vertici di un triangolo. Sia M un punto sul lato (A, C) tale che $d(A, M) = 3 \cdot \sqrt{2}$, $d(M, C) = 4 \cdot \sqrt{2}$. Sia N un punto sul lato (C, B) tale che $d(B, N) = 3 \cdot \sqrt{5}$, $d(C, N) = 2 \cdot \sqrt{5}$. Sapendo che $d(A, B) = 3 \cdot \sqrt{12}$, calcolare $d(M, N)$.



Ricaviamo m, s, n affinché $(m A, s M, n C)$ sia completo. Si ha:

$(4\sqrt{2}A, -7\sqrt{2}M, 3\sqrt{2}C)$ da cui $I = (4A, -7M, 3C)$. Dall'equazione

$B \cdot I = M \cdot I$, si ottiene:

$$4[d(B,A)]^2 - 7[d(B,M)]^2 + 3[d(B,C)]^2 = 4[d(M,A)]^2 + 3[d(M,C)]^2$$

Ponendo $d(B,M) = x$, si ha:

$$4 \cdot (3 \cdot \sqrt{17})^2 - 7 \cdot x^2 + 3 \cdot (5 \cdot \sqrt{5})^2 = 4 \cdot (3 \cdot \sqrt{2})^2 + 3 \cdot (4 \cdot \sqrt{2})^2 \text{ da cui}$$

$$x^2 = 117 \text{ e } d(B,M) = 3 \cdot \sqrt{13}.$$

Analogamente, ricaviamo m', s', n' affinché $(m' B, s' N, n' C)$ sia completo. Si ha: $I' = (2 B, -5 N, 3C)$. Dall'equazione $M \cdot I' = N \cdot I'$, si ottiene:

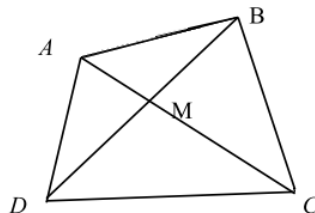
$$2[d(B,M)]^2 - 5[d(N,M)]^2 + 3[d(C,M)]^2 = 2[d(N,B)]^2 + 3[d(N,C)]^2$$

Ponendo $d(N,M) = y$, si ha:

$$2(3 \cdot \sqrt{13})^2 - 5y^2 + 3(4 \cdot \sqrt{2})^2 = 2(3 \cdot \sqrt{5})^2 + 3(2 \cdot \sqrt{5})^2 \text{ da cui}$$

$$5y^2 = 180 \text{ e } d(M,N) = 6.$$

Applicazione 4. Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A,C]$ e $[B,D]$ del quadrilatero $P(J)$, con $J=(A,B,C,D)$ e risulti: $d(A,M) = 3\sqrt{2}$, $d(C,M) = 6\sqrt{2}$, $d(B,M) = 2\sqrt{5}$, $d(D,M) = 3\sqrt{5}$. Sapendo che il modulo del lato $[A,B]$ è: $d(A,B) = \sqrt{26}$, calcolare $d(A,D)$, $d(D,C)$, $d(C,B)$.



Risultano completi gli insiemi:

$I' = (2 A, -3 M, 1 C)$ e $I'' = (3 B, -5 M, 2 D)$.

Essendo $A I'' = M I''$, si ha:

$$3 [d(A,B)]^2 - 5 [d(A,M)]^2 + 2 [d(A,D)]^2 = 3 [d(M,B)]^2 + 2 [d(M,D)]^2.$$

Posto $d(A,D) = x$, si ha:

$$3 \cdot 26 - 5 \cdot 18 + 2 x^2 = 3 \cdot 20 + 2 \cdot 45 \text{ da cui } d(A,D) = 9.$$

Essendo $D I' = M I'$, si ha:

$$2 [d(A,D)]^2 - 3 [d(D,M)]^2 + [d(C,D)]^2 = 2 [d(M,A)]^2 + [d(M,C)]^2.$$

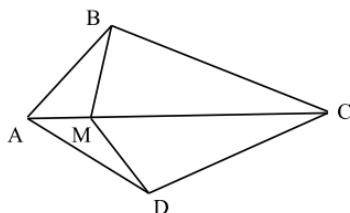
Posto $d(D,C) = y$, si ha: $2 \cdot 81 - 3 \cdot 45 + y^2 = 2 \cdot 18 + 72$ da cui $d(D,C) = 9$.

In modo analogo si ricava $d(B,C)$.

Applicazione 5. Il punto M appartenga al segmento $[A,C]$. Sono note le distanze del punto B dagli elementi di $J = (A,M,C)$:

$d(A,B) = 8\sqrt{2}$, $d(B,M) = 2\sqrt{17}$, $d(C,B) = 4\sqrt{13}$; sono note le distanze del punto D dai punti di $J = (A,M,C)$: $d(A,D) = 6\sqrt{5}$, $d(D,M) = 6\sqrt{2}$, $d(C,D) = 10$.

Calcolare le distanze $d(A,M)$ e $d(M,C)$.



Posto $d(A,M) = x$, $d(M,C) = y$, l'insieme completo avente sostegno J è:

$$I = [m A, -(m+n) M, n C] \quad (1)$$

$$\text{essendo } m = K \cdot d(C,M) = K \cdot y, \quad n = K \cdot d(A,M) = K x \quad (2)$$

Essendo $B I = D I$, sviluppando si ha:

$$m [d(A,B)]^2 - (m+n) [d(B,M)]^2 + n [d(C,B)]^2 =$$

$$= m [d(D,A)]^2 - (m+n) [d(M,D)]^2 + n [d(D,C)]^2,$$

$$\text{da cui } 52 m - 4 (m+n) - 108 n = 0 \text{ da cui } 12 m - 28 n = 0.$$

Posto $n = 3$, si ha: $m = 7$ e le (2) diventano:

$$K d(C, M) = 7 \text{ e } K d(A, M) = 3.$$

Posto $K = \frac{1}{u}$, con $u \in \mathbb{R}$, si ha: $d(M, C) = 7u$, $d(M, A) = 3u$ (3).

L'insieme (1) diviene:

$I = (7A, -10M, 3C)$. Risolvendo l'equazione $B I = M I$, si ottiene:

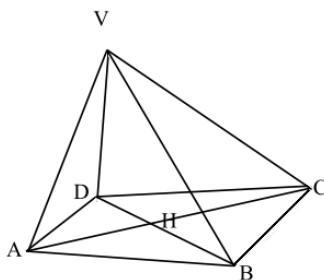
$$7[d(A, B)]^2 - 10[d(M, B)]^2 + 3[d(C, B)]^2 = \\ = 7[d(M, A)]^2 + 3[d(M, C)]^2 \text{ da cui } u = 2.$$

Sostituendo $u = 2$ nelle (3), si ha: $d(A, M) = 6$, $d(M, C) = 14$.

Applicazione 6. Sia V il vertice di una piramide avente per base un quadrilatero le cui diagonali (A, C) e (D, B) si intersechino in H e risulti $d(A, H) = \sqrt{5}$, $d(H, C) = 2 \cdot \sqrt{5}$, $d(D, H) = \sqrt{18}$, $d(H, B) = \sqrt{8}$. Siano noti i moduli dei seguenti spigoli:

$d(D, V) = \text{radice quadrata di } 24$, $d(V, C) = \text{radice quadrata di } 34$,

$d(V, B) = \text{radice quadrata di } 34$. Trovare $d(V, A)$



Calcoliamo le masse m , s , n affinché l'insieme $(m A, s H, n C)$ sia completo. Si ha:

$I' = (2A, -3H, C)$. Analogamente, calcoliamo le masse m' , s' , n' affinché l'insieme $(m' D, s' H, n' B)$ sia completo. Si ha:

$I'' = (2D, -5H, 3B)$. Calcoliamo $d(V, H)$ mediante l'equazione:

$V I'' = H I''$. Sviluppando si ha:

$$2[d(D, V)]^2 - 5[d(V, H)]^2 + 3[d(V, B)]^2 =$$

$$= 2 [d(D,H)]^2 - 5[d(H,H)]^2 + 3[d(B,H)]^2$$

Posto $d(V,H) = x$, si ha $2 \cdot 24 - 5x^2 + 3 \cdot 34 = 2 \cdot 18 - 5 \cdot 0 + 3 \cdot 8$ da cui

$d(V,H) = 2 \cdot \sqrt{29}$. Calcoliamo $d(V,A)$ mediante l'equazione

$V I' = H I'$. Sviluppando:

$$2[d(V,A)]^2 - 3 [d(V,H)]^2 + [d(V,C)]^2 =$$

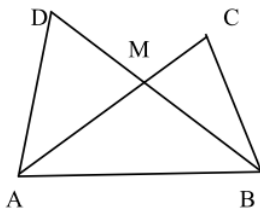
$$= 2 [d(H,A)]^2 - 3[d(H,H)]^2 + [d(H,C)]^2$$

Posto $d(V,A) = y$, si ha:

$$2y^2 - 3 \cdot 18 + 34 = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 0 + 20 \text{ da cui } d(V,A) = 5.$$

Applicazione 7. Siano $J' = (A,B,C)$ e $J'' = (A,B,D)$

i vertici di due triangoli aventi in comune il lato $[A,B]$ e M , punto di intersezione di $[A,C]$ e $[B,D]$.



Sapendo che $d(A,B) = 15$, $d(A,D) = 5\sqrt{2}$, $d(B,C) = 5$ e

$$\frac{d(B,M)}{d(M,D)} = \frac{3}{4}, \quad \frac{d(A,M)}{d(M,C)} = 3,$$

trovare $d(A,M)$ e $d(M,C)$, $d(D,M)$, $d(M,B)$.

Posto $d(M,C) = u$ e $d(M,D) = 4v$, con $u, v \in \mathbb{R}$, si ha $d(A,M) = 3u$ e $d(B,M) = 3v$. Risultano completi gli insiemi: $[u \cdot A, -4u \cdot M, 3u \cdot C]$ e $[4v \cdot B, -7v \cdot M, 3v \cdot D]$.

Moltiplicando i precedenti insiemi, rispettivamente, per $\frac{1}{u}$ e per $\frac{1}{v}$, si ottengono gli equivalenti: $I' = [A, -4M, 3C]$, $I'' = [4B, -7M, 3D]$.

Mettendo a sistema le due equazioni: $A \cdot I'' = M \cdot I'$ e $B \cdot I' = M \cdot I'$ si ha:

$$4 [d(A,B)]^2 - 7 [d(A,M)]^2 + 3 [d(A,D)]^2 = 4 [d(M,B)]^2 + 3 [d(D,M)]^2$$

$$[d(A,B)]^2 - 4 [d(B,M)]^2 + 3 [d(B,C)]^2 = [d(M,A)]^2 + 3 [d(M,C)]^2$$

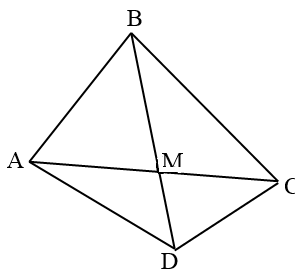
Sostituendo e svolgendo si ha:

$$\begin{cases} 21 v^2 + 28 u^2 = 350 \\ v^2 + 3 u^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} u = \pm \sqrt{5} \\ v = \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

e quindi: $d(M,C) = \sqrt{10}$, $d(A,M) = 3\sqrt{10}$, $d(D,M) = 4\sqrt{5}$, $d(B,M) = 3\sqrt{5}$

Applicazione 8. I moduli dei lati di un quadrilatero sono:

$d(A,B) = 2\sqrt{10}$, $d(A,D) = \sqrt{10}$, $d(B,C) = 4$, $d(D,C) = \sqrt{26}$. La diagonale $[B,D]$ interseca $[A,C]$ nel punto medio M. Calcolare $d(B,M)$, $d(M,D)$.



Posto $d(B,M) = x$, $d(M,D) = y$, l'insieme completo avente sostegno (B,M,D) diviene

$I' = [y \cdot B, -(x+y) \cdot M, x \cdot D]$ e si ha: $A \cdot I' = C \cdot I'$ da cui

$$y [d(A,B)]^2 - (x+y)[d(A,M)]^2 + x[d(A,D)]^2 =$$

$$= y [d(C,B)]^2 - (x+y)[d(C,M)]^2 + x[d(C,D)]^2$$

Essendo $-(x+y)[d(A,M)]^2 = -(x+y)[d(C,M)]^2$, si ha:

$$y \cdot 40 + x \cdot 10 = y \cdot 16 + x \cdot 26 \quad \text{da cui} \quad y = \frac{2}{3}x \quad \text{pertanto, posto } x = 3 \cdot u$$

si ha: $d(M,D) = 2 \cdot u$ e $d(B,M) = 3 \cdot u$.

Essendo M punto medio di [A,C], anche l'insieme $I'' = (A, -2M, C)$ è completo e si ha :

$B \cdot I'' = D \cdot I''$. Sviluppando:

$$\begin{aligned} [d(B,A)]^2 - 2 \cdot [d(B,M)]^2 + [d(B,C)]^2 &= \\ = [d(D,A)]^2 - 2 \cdot [d(D,M)]^2 + [d(D,C)]^2 \end{aligned}$$

Sostituendo si ha: $40 - 2 \cdot (3 \cdot u)^2 + 16 = 10 - 2 \cdot (2 \cdot u)^2 + 26$ da cui
 $56 - 18 \cdot u^2 = 36 - 8 \cdot u^2$ $10 u^2 = 20$.

Essendo $u = \sqrt{2}$ si ha: $d(M,D) = 2 \cdot \sqrt{2}$ e $d(B,M) = 3 \cdot \sqrt{2}$

L'unione di due insiemi completi di qualsiasi ordine è un insieme completo come risulta dalla seguente dimostrazione.

TH.4 Siano $I' = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_h P_h)$ e

$I'' = (n_1 Q_1, n_2 Q_2, \dots, n_s Q_s)$ due insiemi completi con $m_i, n_j \in \mathbb{R}$ e $P_i, Q_j \in S$. Sia H un qualsiasi punto materiale di massa unitaria; se $H \cdot I' = C_1$, $H \cdot I'' = C_2$, si ha: $H \cdot (I' \cup I'') = C$ essendo $C = C_1 + C_2$.

Sviluppando $H \cdot I'$ si ottiene:

$$H \cdot I' = m_1 [d(H, P_1)]^2 + m_2 [d(H, P_2)]^2 + \dots + m_h [d(H, P_h)]^2 = C_1$$

Analogamente si ottiene:

$$H \cdot I'' = n_1 [d(H, Q_1)]^2 + n_2 [d(H, Q_2)]^2 + \dots + n_s [d(H, Q_s)]^2 = C_2$$

Essendo $(I' \cup I'') = (m_1 P_1, m_2 P_2, \dots, m_h P_h, n_1 Q_1, n_2 Q_2, \dots, n_s Q_s)$ si ha :

$$\begin{aligned} H \cdot (I' \cup I'') &= m_1 [d(H, P_1)]^2 + m_2 [d(H, P_2)]^2 + \dots + m_h [d(H, P_h)]^2 + \\ &+ n_1 [d(H, Q_1)]^2 + n_2 [d(H, Q_2)]^2 + \dots + n_s [d(H, Q_s)]^2 = H \cdot I' + H \cdot I'' = \\ &= C_1 + C_2 = C . \end{aligned}$$

Def.7 Sia $(m \cdot A, s \cdot B)$ l'insieme contenente due punti materiali e r sia la retta contenente i punti A e B . Le masse associate ad A e B soddisfino le seguenti relazioni: $m \neq 0, s \neq 0, m + s \neq 0$. (1)

Fissato un sistema di riferimento su r siano α e β le ascisse di A e B . Il punto materiale $[-(m+s)P]$, con P individuato su r dall'ascissa $\gamma = \frac{m\alpha+s\beta}{m+s}$, è detto complementare di $(m \cdot A, s \cdot B)$

TH.5 Se $X = [-(m+s)P]$ è il complementare dei punti materiali: $Y = (m \cdot A, s \cdot B)$, allora, $I = [m \cdot A, -(m+s)P, s \cdot B]$ è un insieme completo.

Sia r la retta contenente i punti A, B, P . Fissato un riferimento di coordinate ascisse su r , i punti A, B , risultino individuati dalle rispettive ascisse: α, β ; conseguentemente l'ascissa di P è $\gamma = \frac{m\alpha+s\beta}{m+s}$. Essendo la somma delle masse di I eguale a zero, essendo $[m\alpha - (m+s)\gamma + s\beta] = m\alpha - (m+s)\frac{m\alpha+s\beta}{m+s} + s\beta = 0$, risultano soddisfatte le condizioni (1) del TH.3 pertanto I è completo.

TH.6 Se i punti dell'insieme $J = (A, B, C)$, di sostegno all'insieme completo del terzo ordine $I = (m \cdot A, s \cdot B, n \cdot C)$, non sono allineati, allora, I è un insieme completo improprio.

Se A, B, C non sono allineati la retta r contenente A e B non contiene C . Supponiamo per assurdo che sia $m \neq 0, s \neq 0, n = -(m+s) \neq 0$. Il complementare di $(m \cdot A, s \cdot B)$ è $-(m+s) \cdot X$ con $X \in r$. L'insieme

$I' = [m \cdot A, s \cdot B, -(m+s)X]$ è completo e così anche $I \cup [(-1)I']$. Sviluppando si ha:

$$I'' = I \cup [(-1)I'] = [(m \cdot A, s \cdot B, n \cdot C, -m \cdot A, -s \cdot B, (m+s)X)] =$$

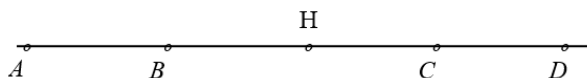
$= [n \cdot C, (m + s)X]$. Per il TH.2, l'insieme I'' , essendo del secondo ordine e completo, è improprio e quindi deve risultare:

$n = 0$ e $m + s = 0$ in antitesi con le ipotesi.

TH.7 Una quaterna di punti, A, B, C, D , appartenenti a una retta r , risultino simmetrici rispetto a un punto H . In particolare risulti:

$$d(A, H) = d(H, D) = x \text{ e } d(B, H) = d(H, C) = y.$$

Sia I un insieme completo avente sostegno (A, B, C, D) . Se le masse degli elementi di I , contenenti punti simmetrici, sono opposte, allora, qualunque sia P , si ha: $P \cdot I = 0$.



Se I è completo e le masse degli elementi contenenti punti simmetrici rispetto a H sono opposte, si ha:

$I = (m \cdot A, n \cdot B, -n \cdot C, -m \cdot D)$. Moltiplicando per H si ha:

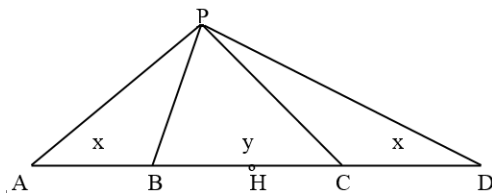
$$\begin{aligned} H \cdot I &= m \cdot [d(H, A)]^2 + n \cdot [d(H, B)]^2 - n \cdot [d(H, C)]^2 - m \cdot [d(H, D)]^2 = \\ &= m x^2 + n y^2 - n y^2 - m x^2 = 0 \end{aligned}$$

Essendo I completo, qualunque sia P , si ha: $P \cdot I = H \cdot I = 0$.

Applicazione .9 Si succedano sulla retta r i punti A, B, C, D . Sia H un punto di r , centro di simmetria delle coppie (A, D) e (B, C) .

Essendo:

$$\begin{aligned} d(P, A) &= 10, \quad d(P, B) = 2\sqrt{10}, \quad d(P, C) = 6\sqrt{2}, \quad d(P, D) = 6\sqrt{5}, \text{ calcolare} \\ d(A, B) &= d(C, D) = x \text{ e } d(B, C) = y \quad (1). \end{aligned}$$



L'insieme (A,B,C) è di sostegno all'insieme completo

$I' = [y \cdot A, -(x+y) \cdot B, x \cdot C]$. L'insieme (B,C,D) è di sostegno all'insieme completo $I'' = [y \cdot D, -(x+y) \cdot C, x \cdot B]$.

Per il TH.4, anche l'insieme $I' \cup [(-1) I'']$ è completo e si ha:

$$I' \cup [(-1) I''] = \\ = [y \cdot A, -(x+y) \cdot B, x \cdot C, -y \cdot D, (x+y) \cdot C, -x \cdot B] .$$

Riducendo si ha: $I = [y \cdot A, -(2x+y) \cdot B, (2x+y) \cdot C, -y \cdot D]$.

Poiché hanno masse opposte sia i punti (A,D) sia i punti (B,C), per

il TH.7 si ha: $P \cdot I = 0$. Sviluppando si ha: $P \cdot I = y \cdot [d(P,A)]^2 +$

$-(2x+y) \cdot [d(P,B)]^2 + (2x+y) \cdot [d(P,C)]^2 - y \cdot [d(P,D)]^2 = 0$ da cui:

$$y \cdot 100 - (2x+y) \cdot 40 + (2x+y) \cdot 72 - y \cdot 180 = 0$$

$$100y - 80x - 40y + 144x + 72y - 180y = 0 \quad 3y = 4x.$$

Posto $x = 3u$, si ha: $y = 4u$. Sostituendo in I' , si ha:

$[4u \cdot A, -7u \cdot B, 3u \cdot C]$. Dividendo per u , si ha:

$I' = [4 \cdot A, -7 \cdot B, 3 \cdot C]$. Essendo $P \cdot I' = B \cdot I'$, sviluppando si ha:

$$4 \cdot [d(P,A)]^2 - 7 \cdot [d(P,B)]^2 + 3 \cdot [d(P,C)]^2 = \\ = 4 \cdot [d(B,A)]^2 + 3 \cdot [d(B,C)]^2 .$$

Essendo $d(A,B) = x = 3u$, $d(B,C) = y = 4u$, si ha:

$$4 \cdot 100 - 7 \cdot 40 + 3 \cdot 72 = 4 \cdot 9u^2 + 3 \cdot 16u^2 \text{ da cui } u^2 = 4$$

Si ha, allora: $d(A,B) = 6$, $d(B,C) = 8$.

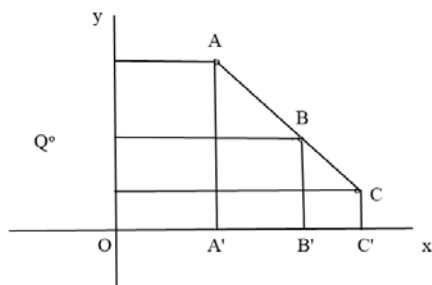
Gli insiemi di punti materiali permettono di affrontare problemi di geometria non solo per via sintetica ma anche per via analitica.

TH.8 Sia $I = (m A, s B, n C)$ un insieme completo i cui punti risultino così definiti: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ mediante un sistema ortonormale (O, x, y) . Siano $A' = (x_1, 0)$, $B' = (x_2, 0)$, $C' = (x_3, 0)$ e $A'' = (0, y_1)$, $B'' = (0, y_2)$, $C'' = (0, y_3)$ le proiezioni ortogonali dei punti A,B,C, rispettivamente, sugli assi x e y di (O, x, y) .

Essendo I completo anche gli insiemi $I' = (m A', s B', n C')$ e

$I'' = (m A'', s B'', n C'')$ sono completi e viceversa: se I' e I'' sono completi anche l'insieme I è completo pertanto, per il TH.3, si ha:

$$\begin{cases} m + s + n = 0 \\ m x_1 + s x_2 + n x_3 = 0 \\ m y_1 + s y_2 + n y_3 = 0 \end{cases}$$



Sia $Q = (d, h)$ un qualsiasi punto del piano. Calcolando separatamente $O \cdot I$ e $Q \cdot I$, si ottiene:

$$\begin{aligned} O \cdot I &= m[(x_1)^2 + (y_1)^2] + s[(x_2)^2 + (y_2)^2] + n[(x_3)^2 + (y_3)^2] \\ Q \cdot I &= m[(x_1 - d)^2 + (y_1 - h)^2] + s[(x_2 - d)^2 + (y_2 - h)^2] + n[(x_3 - d)^2 + (y_3 - h)^2] \\ &= m[(x_1)^2 + (y_1)^2] + s[(x_2)^2 + (y_2)^2] + n[(x_3)^2 + (y_3)^2] + \\ &\quad - 2d(m x_1 + s x_2 + n x_3) - 2h(m y_1 + s y_2 + n y_3) + \\ &\quad + d^2(m + s + n) + h^2(m + s + n). \end{aligned}$$

Essendo I completo deve risultare: $Q \cdot I = O \cdot I$ da cui $K = Q \cdot I - O \cdot I = 0$. Sviluppando e, tenendo conto che $(m + s + n) = 0$ (1), si ha:

$$K = -2d(m x_1 + s x_2 + n x_3) - 2h(m y_1 + s y_2 + n y_3) = 0.$$

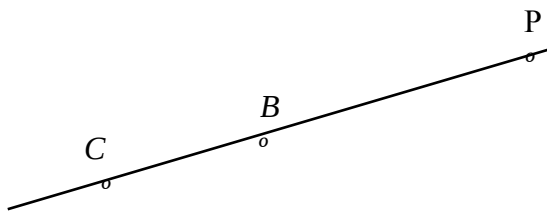
Data l'arbitrarietà di d e h , deve risultare:

$$(m x_1 + s x_2 + n x_3) = 0 \quad (2) \quad (m y_1 + s y_2 + n y_3) = 0 \quad (3) .$$

- Le condizioni 1) e 2), per il TH.3, assicurano che $(m A', s B', n C')$ sia completo;
- le condizioni (1) e (3), per il TH.3, assicurano che $(m A'', s B'', n C'')$ sia completo.

Viceversa, se I' e I'' sono completi per il TH.3 devono risultare verificate le (1), (2), (3) mediante le quali, procedendo a ritroso, risulta: $Q \cdot I = O \cdot I$.

Applicazione10. Sul piano π , sul quale è fissato un sistema ortonormale, risultino così definiti due punti: $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Trovare le coordinate di un qualsiasi punto P allineato con A e B .



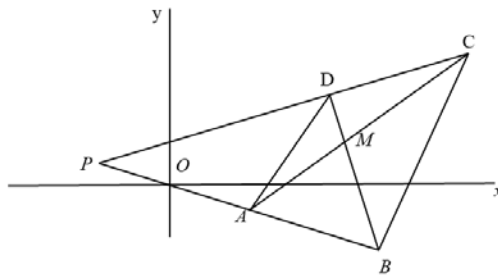
Sia $Y = [n A, -(n+1) B]$ la coppia di punti materiali con $m \in \mathbb{R}$ scelto in modo arbitrario. Il complementare di Y è $1 \cdot P$. Essendo completo l'insieme $I = [n A, -(n+1) B, P]$, posto $P = (x, y)$, per il TH.8 si ha :

$$\begin{aligned} n x_1 \begin{cases} -(n+1) x_2 + x = 0 \\ -(n+1) y_2 + y = 0 \end{cases} \text{ da cui } \begin{aligned} x &= (n+1) x_2 - n x_1 \\ y &= (n+1) y_2 - n y_1 \end{aligned} \end{aligned}$$

Applicazione .11 Sia M il punto di intersezione delle diagonali $[A, C]$ e $[B, D]$ del quadrilatero $Q(A, B, C, D)$. Risulti $\frac{d(A, M)}{d(M, C)} = \frac{3}{7}$,

$$\frac{d(B, M)}{d(M, D)} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Trovare le coordinate di P , punto di intersezione delle rette passanti, rispettivamente, per A, B e D, C essendo $A = (1, -2)$, $B = (7, -5)$



Dalle (1) si ricavano gli insiemi completi: $I_1 = (7 A, -10 M, 3 C)$,
 $I_2 = (2 B, -5 M, 3 D)$. Essendo $(-2 \cdot I_2)$ un insieme completo
 anche l'unione dei due insiemi (I_1) e $(-2 \cdot I_2)$ è un insieme
 completo: $I = I_1 \cup (-2 \cdot I_2) = (7 A, 3 C, -4 B, -6 D)$.

Il complementare di $(7 A, -4 B)$, punti materiali di I , è $(-3 X)$
 pertanto $I_3 = (-4 B, 7 A, -3 X)$ è un insieme completo.

Effettuando l'unione $I \cup (-I_3)$ si ha: $I_4 = (3 C, -6 D, 3 X)$.

Il punto X appartenendo ai due insiemi completi I_3 e I_4 deve
 risultare allineato sia con A, B sia con C, D pertanto coincide con P
 e si ha:

$$I_3 = (-4 B, 7 A, -3 P), \quad I_4 = (3 C, -6 D, 3 P)$$

Per calcolare le coordinate di P applichiamo a I_3 il TH.8.

Posto $P = (x, y)$ si ha :

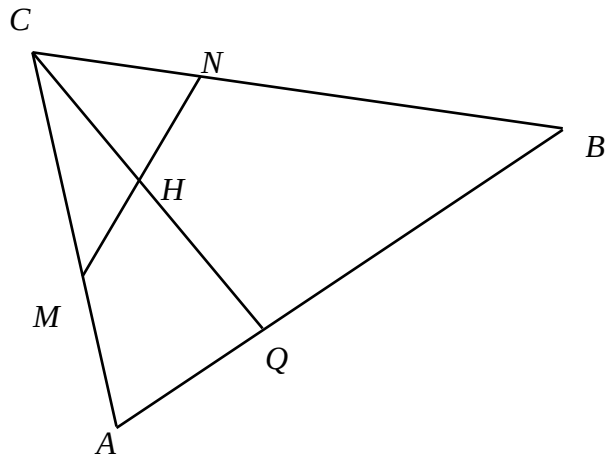
$$\begin{cases} 4 \cdot 7 - 7 \cdot 1 + 3 \cdot x = 0 \\ 4 \cdot (-5) - 7 \cdot (-2) + 3 \cdot y = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = -7, \quad y = 2.$$

Applicazione .12 I punti M e N appartengano, rispettivamente,
 ai lati $[A, C]$ e $[B, C]$ del triangolo $T(A, B, C)$ e risulti:

$$\frac{d(A, M)}{d(M, C)} = \frac{1}{3}, \quad \frac{d(B, N)}{d(N, C)} = \frac{11}{3} \quad (1)$$

$$\text{Sia } H \text{ interno a } [M, N] \text{ e risulti: } \frac{d(M, H)}{d(H, N)} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Trovare le coordinate di Q, punto di intersezione della retta passante per C e H con il segmento [A,B] essendo $A = (7,4)$, $B = (31,20)$.



Da (1) e (2) si ricavano i seguenti insiemi completi:

$$I_1 = (3A, -4M, C), I_2 = (3B, -14N, 11C), I_3 = (2M, -3H, 11N)$$

Moltiplicando I_1 per 7 e I_3 per 14 si ha:

$$I'_1 = (21A, -28M, 7C), I'_3 = (28M, -42H, 14N)$$

Effettuando l'unione degli insiemi completi I'_1, I_2, I'_3 , per il

TH.14 si ottiene l'insieme completo $I'_1 \cup I_2 \cup I'_3 =$

$$= (21A, -28M, 7C, 3B, -14N, 11C, 28M, -42H, 14N)$$

Riducendo, dividendo per 3, l'insieme $I'_1 \cup I_2 \cup I'_3$ diviene

$$I = (7A, B, 6C, -14H). \text{ Il complementare dei punti materiali}$$

$(6C, -14H)$ di I è $(8X)$ pertanto l'insieme

$I_4 = (6C - 14H, 8X)$ è completo. Anche l'insieme $I_5 = I \cup (-I_4)$ è completo e si ha: $I_5 = (7A, -8X, B)$. Poiché I_4 e I_5 sono completi

X risulta allineato sia con C,H sia con A,B pertanto coincide con il punto di intersezione Q . L' insieme I5 diviene:

$I_5 = (7A, -8Q, B)$. Posto $Q = (x,y)$, per il TH.8 applicato a I_5 si ha :

$$\begin{cases} 7 \cdot 7 - 8 \cdot x + 31 = 0 \\ 7 \cdot 4 - 8 \cdot y + 20 = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad x = 10, y = 6$$

Bibliografia

Francia Franco - *Insiemi di punti materiali* - Archimede - N.1
dell'anno 1985 - Le Monnier

Approvato su parere favorevole di Alberto Trotta e Franco Eugeni

Teorema di Hardy (1914).

Il matematico inglese Godffrey Harold Hardy (1887-1966) oltre che brillare di grande luce propria, per gli innumerevoli studi sulla Teoria dei Numeri in collaborazione, per 35 anni, con l'altro grande matematico John E. Littlewood (1885-1977), è anche noto per aver scoperto il matematico indiano Srinivasa Ramanujan (1887-1920). Un argomento di interesse è lo studio della funzione zeta di Riemann definite da :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

definite per $x > 1$, essendo $s = x + i y$. La funzione è prolingabile a tutto il campo complesso eccetto che per $s = 1$. I valori per cui la funzione si annulla sono nella striscia $0 < x < 1$. La congettura di Riemann li colloca tutti sulla retta $x = \frac{1}{2}$ del piano complesso.

Il Teorema di Hardy (1914) asserisce che sulla retta $x = \frac{1}{2}$ vi sono infiniti zeri non banali che annullano la funzione di Riemann $\zeta(s)$.

Ricordiamo anche che, se x è reale si ha :

$$\zeta(x) = \prod \frac{1}{1-p^{-x}}$$

essendo il prodotto esteso a tutti i numeri primi p .

L'uso dell'insieme delle soluzioni per risolvere i problemi al contorno e le equazioni integrali

Giuseppe Anichini*

Giuseppe Conti[^]

Alberto Trotta^o

* Università degli Studi di Firenze ; giuseppe.anichini@unifi.it

[^] Università degli Studi di Firenze; gconti@unifi.it

^o IISS Santa Caterina Amendola, Salerno; albertotrotta@virgilio.it

Sunto: Lo scopo di questo lavoro è di fare una rassegna dei risultati ottenuti nella risoluzione di vari tipi di problemi al contorno e di equazioni integrali usando il metodo dell'insieme delle soluzioni. Questa tecnica consiste nell'introdurre opportunamente nei precedenti problemi, al posto della variabile x , una funzione q , appartenente ad un determinato spazio di funzioni, e trovare in funzione di q le soluzioni del problema così ottenuto. Si determina in tal modo una funzione $\Sigma(q)$ (generalmente a più valori); gli eventuali punti fissi di Σ sono proprio le soluzioni del problema di partenza. Tale metodo ha il vantaggio che un'appropriata scelta di q permette di ottenere un problema più semplice di quello da cui siamo partiti.

Dopo avere introdotto tale metodo nel caso di problemi al contorno, mostreremo che tale tecnica può essere proficuamente usata per risolvere equazioni integrali, equazioni integrali quadratiche ed equazioni integro-differenziali.

Parole chiave: Problemi al contorno, equazioni integrali, punti fissi, spazi di Fréchet, spazi di Banach, applicazioni multivoche, compattezza.

Abstract: *The aim of the paper is to review the results achieved in solving various types of both boundary value problems and integral equations by using the method of the set of solutions. This technique consists in introducing in the given problems, a function q , belonging to a suitable space of functions, instead of the state variable x ; subsequently we are ventured to find, as a function of q , the solutions of this "new" problem. In this way a function, generally a multivalued one, is determined: so, the possible fixed points of this function are the solutions of the original problem we were looking for. This method has the profitable advantage that an appropriate choice of q makes possible to obtain a simpler problem than the one we started from. After introducing this method in the case of boundary value problems, we will show that this technique can be proficiently used to solve integral equations, quadratic integral equations and integro-differential equations*

Keywords: *Boundary value problems, integral equations, fixed points, Fréchet spaces, Banach spaces, multivalued maps, compactness.*

1 - Introduzione

Una tecnica frequentemente usata per risolvere problemi al contorno equazioni differenziali ordinarie consiste nel ridurre il problema dato alla ricerca di un punto fisso di un operatore T (generalmente non lineare) in un opportuno spazio di funzioni.

Ad esempio, per trovare le soluzioni del classico problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad t \in I \quad (1.1)$$

definite in un intervallo (limitato) I dell'insieme dei numeri reali, è sufficiente determinare i punti fissi dell'operatore

$$T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad (1.2)$$

definito nello spazio di Banach $C(I, \mathbb{R}^n)$ delle funzioni, continue e limitate in I a valori in $\mathbb{R}^n$, con la norma $\|x\| = \sup \{|x(t)|, t \in I\}$. I punti fissi dell'operatore T , definito in (1.2), forniscono le soluzioni del problema (1.1) (Giusti, 1983, pp. 83-86).

Nello studio dei problemi al contorno, il teorema di punto fisso maggiormente usato è il teorema di Schauder, il quale afferma che un operatore continuo e compatto $T : C \rightarrow C$, con C sottoinsieme non vuoto, chiuso, convesso e limitato di uno spazio di Banach X , ammette punto fisso (vedi Deimling, 1985, p. 60).

Ricordiamo che un operatore si dice compatto se trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti, cioè insiemi la cui chiusura è un compatto (Zeidler, 1986, p. 53). Osserviamo che, nel caso in cui la funzione f sia continua, l'operatore T definito da (1.2) è compatto nello spazio di Banach $C(I, \mathbb{R}^n)$ (Zeidler, 1986, p. 54).

Nel caso in cui le ipotesi del problema al contorno permette di usare il teorema delle contrazioni di Banach-Caccioppoli, oltre l'esistenza si ottiene anche l'unicità della soluzione.

Il lettore, interessato a problemi al contorno per equazioni differenziali ordinarie nei casi di condizioni sia lineari che non lineari, può consultare l'interessante articolo di Roberto Conti (Conti, 1967).

2 - Problemi al contorno

Il metodo della ricerca dei punti fissi comporta essenzialmente due tipi di difficoltà.

La prima, di tipo algebrico, riguarda principalmente la necessità di avere delle stime a priori che ci assicurino l'esistenza dell'insieme C del teorema di Schauder.

La seconda, di tipo topologico, deve assicurare la continuità e la compattezza dell'operatore T in un opportuno spazio di Banach X di funzioni (Cecchi, Furi, Marini, 1985a, 1985b).

Il maggiore ostacolo a questo procedimento consiste principalmente nell'influenza reciproca fra il procedimento algebrico e quello topologico; inoltre, la determinazione della compattezza dell'operatore T può presentare difficoltà nello spazio di Banach in cui operiamo. Per aggirare questi inconvenienti, può essere utile usare un altro procedimento. Illustriamolo con un esempio (Cecchi, Furi, Marini, 1985a).

Consideriamo il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x \in S \end{cases} \quad t \in I \quad (1.3)$$

dove S è un arbitrario sottoinsieme dello spazio $C(I, \mathbb{R}^n)$ definito in precedenza e $f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua.

Consideriamo una funzione continua $g: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $g(t, c, c) = f(t, c)$ per ogni $t \in I$ e per ogni $c \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista un sottoinsieme Q di $C(I, \mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $q \in Q$ l'equazione

$$x'(t) = g(t, x(t), q(t)), \quad t \in I \quad (1.4)$$

abbia una sola soluzione appartenente all'insieme S .

Consideriamo l'operatore $\Sigma: Q \rightarrow S \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ che ad ogni q in Q associa l'unica soluzione $x = \Sigma(q)$ di (1.4). Si può facilmente dimostrare che i punti fissi di Σ sono proprio le soluzioni del problema (1.3).

Naturalmente è necessario imporre alcune condizioni sul problema (1.3) per applicare un teorema di punto fisso (ad esempio il teorema di Schauder) all'operatore Σ . Tuttavia, occorre tenere presente che un'opportuna scelta della funzione g permette di rendere più semplice la ricerca delle soluzioni di (1.4) rispetto al problema (1.3); in questo modo possiamo anche applicare risultati già noti per lo studio della (1.4).

Quando è possibile, si cerca di rendere la (1.4) un'equazione lineare in x ; in tal caso la (1.4) si chiama anche problema al contorno "linearizzato" del problema (1.3) (Andres 2003; Anichini, Conti, 1988, 1990, 1995, 1999, 2000, 2002; Cecchi, Furi, Marini, 1985a, 1985b).

Per mostrare la tecnica dell'insieme delle soluzioni, consideriamo, a titolo di esempio, il seguente problema al contorno:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t, x(t)) \\ Lx = r \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.5)$$

dove A è una matrice sommabile in $[a, b]$, L è un'applicazione lineare e continua dallo spazio $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ in

$\mathbb{R}^n$ e $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione continua tale che
 $|f(t, x)| \leq \alpha + \beta|x|$ con α, β numeri reali non negativi.

Supponiamo che il problema

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) \\ Lx = 0 \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

abbia soltanto la soluzione nulla.

Vogliamo dimostrare che il problema (1.5) ha soluzioni per β sufficientemente piccolo.

Si $aq \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ una funzione continua e consideriamo il problema "linearizzato":

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + f(t, q(t)) \\ Lx = r \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (1.6)$$

Per le ipotesi fatte il problema (1.6) ha una ed una sola soluzione (Conti, 1967).

Ponendo $y_q(t) = f(t, q(t))$, si ha che la soluzione del problema (1.6) è data da:

$x = \Gamma y_q + Hr$, dove $\Gamma: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ è un operatore lineare e compatto e $H: \mathbb{R}^n \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ è un'applicazione lineare continua (Conti, 1967).

Sia $\Sigma: C([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([a, b], \mathbb{R}^n)$ l'operatore (univoco) che ad ogni $q \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ associa la soluzione di (1.6); quindi si ha: $\Sigma(q) = \Gamma y_q + Hr$. Sia:

$$\beta \|\Gamma\| < 1$$

e poniamo:

$$Q = \{x \in C([a, b], \mathbb{R}^n) : \|x\| \leq s\} \text{ dove } s = \frac{\alpha \|\Gamma\| - \|Hr\|}{1 - \beta \|\Gamma\|}.$$

Con semplici calcoli, si vede che $\Sigma(Q) \subset Q$.

Poiché l'operatore Σ è compatto e l'insieme Q è chiuso, convesso e limitato, per il teorema di Schauder Σ ha almeno un punto fisso; di conseguenza il problema (1.5) ha soluzioni.

Si possono fare analoghe considerazioni quando il problema (1.4) non ha una sola soluzione ma un insieme convesso (non vuoto) di soluzioni. In tal caso (Anichini, Conti, 1988) occorre applicare teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche come il teorema di Bohnenlust e Karlin, il quale afferma che, dato un sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso C di uno spazio di Banach ed un'applicazione multivoca $T : C \rightarrow C$ semicontinua superiormente, a valori non vuoti, compatti e convessi, con $T(C)$ relativamente compatto, allora T ammette un punto fisso, cioè esiste $x \in C$ tale che $x \in T(x)$ (Zeidler, 1986, p. 452). Ricordiamo che, in questo caso, un'applicazione multivoca si dice semicontinua superiormente se il suo grafico è un insieme chiuso.

Spesso, per risolvere problemi al contorno in intervalli illimitati può essere utile considerare lo spazio di Fréchet $F(I, \mathbb{R})$ delle funzioni continue $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con la topologia dell'uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di I (Zeidler, 1986, p. 784).

Ad esempio, se $I = [0, +\infty)$, allora una famiglia di seminorme dello spazio di Fréchet è data da:
 $\|x\|_n = \max \{|x(t)|, t \in [0, n]\}.$

Accade talvolta che l'operatore, del quale dobbiamo stabilire l'esistenza dei punti fissi, non sia compatto. In questi casi può essere molto utile la nozione di misura di non compattezza.

Sia X uno spazio metrico completo ed M un suo sottoinsieme limitato. Denotiamo

$$\alpha(M) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : M = \bigcup_{i=1}^n A_i, \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\}.$$

La funzione α così introdotta si chiama misura di non compattezza di Kuratowski (Banas, Goebel, 1980). Si può dimostrare che un insieme M di uno spazio metrico completo è relativamente compatto se e solo se $\alpha(M) = 0$.

Nel caso di non unicità delle soluzioni, può talvolta accadere che l'insieme delle soluzioni dell'equazione (1.4) non sia un insieme convesso. In questo caso occorre usare dei teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche, semicontinue superiormente, a valori non convessi. Fortunatamente tali teoremi esistono e riguardano applicazioni multivoche i cui valori sono proprio le soluzioni di problemi al contorno di equazioni differenziali e di equazioni integrali.

Prima di esporre questi risultati, dobbiamo fornire alcune definizioni.

Un sottoinsieme Y di uno spazio metrico X si chiama retratto assoluto se, dato un qualunque sottoinsieme chiuso A di X e una funzione continua $f : A \rightarrow Y$, esiste un'estensione continua $g : X \rightarrow Y$ di f .

Un sottoinsieme compatto F di uno spazio metrico X si chiama insieme R_δ se F è l'intersezione di una

successione decrescente $\{A_n\}$ di retratti assoluti di X (Brouder, Gupta, 1969).

In un pionieristico articolo (Aronszajn, 1942) fu dimostrato che l'insieme delle soluzioni di un problema di Cauchy in mancanza di unicità delle soluzioni (il cosiddetto "pennello di Peano") è un insieme R_δ .

Gli insiemi R_δ rientrano in una categoria più ampia di insiemi: gli **insiemi aciclici**, cioè quelli che hanno nulli tutti i gruppi di coomologia (ridotta) di Čech. Ad esempio, gli insiemi convessi e gli insiemi stellati sono aciclici. Si dimostra, inoltre, che un insieme R_δ è anche aciclico (Lasry, Robert, 1976, p. 110).

A partire da questo teorema sono stati dimostrati moltissimi altri risultati di questo tipo.

Esistono teoremi di punto fisso per applicazioni multivoche non compatte in spazi di Fréchet a valori non necessariamente convessi, che possono essere molto utili per trovare i punti fissi dell'operatore Σ che fornisce le soluzioni di (1.4). Uno di questi è il teorema il quale afferma che, dato un insieme M chiuso, convesso e limitato di uno spazio di Fréchet X , un'applicazione multivoca $T : M \rightarrow M$ semicontinua superiormente, a valori compatti e aciclici, tale che $\alpha(T(B)) < \alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset M$, con $\alpha(B) > 0$, allora T ha un punto fisso (Fitzpatrick, Petryshyn, 1974).

L'operatore che soddisfa la condizione $\alpha(T(B)) < \alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset M$, con $\alpha(B) > 0$, si chiama operatore addensante. Naturalmente, ogni operatore compatto è addensante.

Talvolta accade che l'insieme delle soluzioni $\Sigma(q)$ sia formato, al variare di q , da un numero finito di elementi (Anichini, Conti, Zecca, 1991, Anichini, Conti, 1997); in questo caso si possono applicare teoremi di punto fisso per una classe di applicazioni multivoche chiamate mappe ponderate (Darbo, 1961).

Il metodo dell'insieme delle soluzioni vale anche per problemi al contorno multivoci; ad esempio, tale procedimento è stato usato per determinare le soluzioni del seguente sistema differenziale (Carbone, Conti, Marino, 1990):

$$\begin{cases} x' \in A(t, x)x + F(t, x) \\ Lx = H(x) \end{cases}$$

dove F è un'applicazione multivoca semicontinua.

Inoltre, possiamo usare tale metodo anche nello studio di problemi al contorno in spazi di Banach (Margheri, Zecca, 1993; Margheri, Zecca, 1994; Conti, Obukhovskii, Zecca, 1996).

3 - Equazioni integrali

Il metodo dell'insieme di soluzioni si è rivelato di grande utilità per la risoluzione delle equazioni integrali di vario tipo.

Con tale tecnica (Anichini, Conti, 2008) si può determinare l'esistenza di soluzioni di equazioni integrali quadratiche del tipo:

$$x(t) = h(t) + (Tx)(t) \int_0^t k(t, s)u(t, s, x(s))ds \quad t \in I = [0, L] \quad (1.7)$$

Si ottiene che l'equazione (1.7) ha soluzioni sotto le seguenti ipotesi:

1. $u: I \times I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua tale che $|u(t, s, x)| \leq \alpha + \beta|x|$ per ogni α, β numeri reali positivi;
2. $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua;
3. T è un operatore compatto dallo spazio di Banach $C(I, \mathbb{R})$ delle funzioni reali continue definite in $[0, L]$ in sé, che soddisfa la seguente relazione:
 $|T(x)(t)| \leq a|x(t)|$ per ogni $t \in I = [0, L]$;
4. $\alpha La < 1$.

Con queste ipotesi l'operatore Σ , che ad ogni $q \in C(I, \mathbb{R})$ associa le soluzioni di

$$x(t) = h(t) + (Tq)(t) \int_0^t k(t, s) u(t, s, x(s)) ds, \text{ è un operatore}$$

multivoco da una palla di $C(I, \mathbb{R})$ in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e compatto.

Le equazioni integrali quadratiche hanno numerose applicazioni in Fisica Matematica, in Ingegneria, in Biologia e in Economia. Equazioni di questo tipo furono introdotte per lo studio del trasferimento radiativo (Chandrasekhar, 1960).

Il problema precedente può essere risolto anche nel caso di intervalli illimitati.

Consideriamo la seguente equazione integrale (Anichini, Conti, 2011):

$$x(t) = f(t) + (Ax)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds \quad t \in J = [0, +\infty) \quad (1.8)$$

In questo caso conviene operare nello spazio di Fréchet $F(J, \mathbb{R})$ delle funzioni continue $x: J \rightarrow \mathbb{R}$ con la topologia dell'uniforme convergenza sui sottointervalli compatti di J .

Supponiamo che il problema (1.8) soddisfi le seguenti condizioni:

1. $u(s, \cdot, \cdot): I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua per ogni $s \in J$;
2. $u(\cdot, t, x): J \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue per ogni $(t, x) \in J \times \mathbb{R}$;
3. $|u(t, s, x)| \leq \gamma(s) + \beta(s)|x|$ per ogni $(s, t, x) \in J \times J \times \mathbb{R}$, dove $\gamma, \beta: J \rightarrow J$ sono funzioni localmente integrabili;
4. la funzione $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua;
5. A è un operatore continuo dallo spazio di Fréchet $F(J, \mathbb{R})$ in sé tale che esiste un numero reale positivo h per cui si ha: $|(Ax)(t)| \leq h$ per ogni $t \in J$.

Con queste condizioni si dimostra che l'operatore Σ , che ad ogni $q \in F(J, \mathbb{R})$ associa soluzioni di

$$x(t) = f(t) + (Aq)(t) \int_0^t u(t, s, x(s)) ds,$$

è un operatore multivoco da $F(J, \mathbb{R})$ in sé, semicontinuo superiormente, a valori compatti aciclici, tale che $\Sigma(F(J, \mathbb{R}))$ è un insieme relativamente compatto. Di conseguenza Σ ha un punto fisso.

Notiamo che si ottiene l'esistenza di soluzioni per un'equazione integrale del tipo (1.8) con $u(s, t, x(s)) = k(t, s)F(s, x(s))$ anche supponendo che l'operatore A non sia limitato, ma soddisfi la seguente condizione: $|(Ax)(t)| \leq a|x(t)|$ per ogni $t \in J$ (Anichini, Conti, 2014).

Il metodo dell'insieme delle soluzioni può essere applicato anche nel caso di equazioni integrali quadratiche e multivoche (Anichini, Conti, 2012).

Sia data la seguente equazione integrale quadratica:

$$x(t) \in (fx)(t) \int_0^t k(t, s)F(s, x(s))ds \quad t \in I = [0, T] \quad (1.9)$$

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

1. $f: C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$ è un operatore continuo tale che $\alpha(f(B)) \leq f_0\alpha(B)$ per ogni sottoinsieme limitato $B \subset C(I, \mathbb{R}^n)$ e $|(fx)(t)| \leq \beta_0|x|$ per ogni $t \in I$ e ogni $x \in C(I, \mathbb{R}^n)$;

2. $k: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua tale che esiste una funzione limitata $w: I \rightarrow \mathbb{R}^+$ con $\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = 0$ e

$$\int_0^T |k(t_2, s) - k(t_1, s)| ds \leq w(|t_2 - t_1|) \text{ per ogni } t_2, t_1 \in I;$$

3. $F: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione multivoca, semicontinua superiormente, a valori compatti e convessi, tale che $|F(t, x)| \leq \alpha(t) + \beta(t)|x|$, con $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni continue e positive;

$$4. \quad w_0 = \sup \left\{ \int_0^T |k(t, s)| ds, t \in I \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{\beta_0 \alpha_1}, \frac{1}{f_0 \alpha_1} \right\}$$

$$\text{dove } \alpha_1 = \sup \left\{ \int_0^T \alpha(s) ds, t \in I \right\}.$$

Con queste ipotesi si dimostra che l'operatore Σ , che ad ogni $q \in C(I, \mathbb{R}^n)$ associa le soluzioni di

$$x(t) \in (fq)(t) \int_0^t k(t, s) F(s, x(s)) ds,$$

è un operatore multivoca da una palla M di $C(I, \mathbb{R}^n)$ in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e tale che

$$\alpha(\Sigma(B)) < \alpha(B)$$

per ogni sottoinsieme $B \subset M$. Quindi l'operatore Σ ha almeno un punto fisso; di conseguenza l'equazione (1.9) ha almeno una soluzione.

Consideriamo ora le equazioni integro-differenziali. Si ha il seguente risultato (Anichini, Conti, 2016).

Sia data l'equazione integro-differenziale:

$$x(t) = \int_0^t k(t, s) f(s, x(s), x'(s)) ds \quad t \in I = [0, T] \quad (1.10)$$

Per studiare tale equazione occorre considerare lo spazio di Banach $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ delle funzioni con derivate prime continue, munito della norma $\|x\|_1 = \max \{\|x\|, \|x'\|\}$, dove $\|x\| = \max \{|x(t)|, t \in [0, T]\}$ e $\|x'\| = \max \{|x'(t)|, t \in [0, T]\}$.

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. $k: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione con derivate prime continue tale che

$$\max \{|k(t, s)|, (t, s) \in I \times I\}, \max \left\{ \left| \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} \right|, (t, s) \in I \times I \right\} \leq k;$$

2. $f: I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua tale che $|f(t, x, y)| \leq a + b|x|$ con a, b numeri reali non negativi;
3. $bkT < 1$.

Allora l'equazione (1.10) ha almeno una soluzione.

Infatti, si dimostra che, con queste ipotesi, l'operatore Σ , che ad ogni $q \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ associa le soluzioni di

$$x(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), q'(s)) ds,$$

è un operatore multivoco da una palla M dello spazio di Banach $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ in sé, semicontinuo superiormente, a valori aciclici e compatto. Quindi l'operatore Σ ha almeno un punto fisso; di conseguenza l'equazione (1.10) ha almeno una soluzione.

Un risultato analogo a quello ottenuto nella (1.10) si ha anche nel caso dell'intervallo illimitato $J = [0, +\infty)$ (Anichini, Conti, 2018a). In questo caso occorre considerare lo spazio di Fréchet $F(J, \mathbb{R})$ di tutte le funzioni differenziabili con continuità in J con la seguente famiglia di seminorme: $\|x\|_{1,n} = \max\{\|x\|_n, \|x'\|_n\}$, dove $\|x\|_n = \max\{|x(t)|, t \in [0, n]\}$ e $\|x'\|_n = \max\{|x'(t)|, t \in [0, n]\}$.

Infine, consideriamo la seguente equazione integro-differenziale (Anichini, Conti, 2018b):

$$x'(t) = \int_0^t k(t,s) f(s, x(s), x'(s)) ds, \quad x(0) = 0, \quad t \in J = [0, 1] \quad (1.11)$$

Cerchiamo le soluzioni nello spazio di Banach $C^1(J, \mathbb{R}^n)$ delle funzioni con derivata prima continua. Facciamole seguenti ipotesi:

1. $f: J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione continua tale che
 $|f(s, x, y)| \leq a|x| + b|y|$, con a, b numeri reali non negativi, per ogni $(s, x, y) \in J \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;
2. $k: J \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione con derivate parziali continue tale che esiste una funzione continua e positiva $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ per cui si ha:

$$\max \left\{ |k(t, s)|, (t, s) \in I \times I \right\} \leq h(s) \text{ e}$$

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial k(t, s)}{\partial t} \right|, (t, s) \in I \times I \right\} \leq h(s);$$
3. ponendo $\bar{h} = \max \{ |h(s)|, s \in [0, 1] \}$, vale la seguente
relazione $2\bar{h}a + \bar{h}b < 1$.

Con queste ipotesi, per ogni $q \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ la seguente equazione integrale

$$y(t) = \int_0^t k(t, s) f(s, \int_0^s q(\tau) d\tau, y(s)) ds \quad t \in J = [0, 1] \quad (1.12)$$

ha soluzioni.

Sia $\Sigma: C^1(J, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1(J, \mathbb{R}^n)$ l'applicazione che ad ogni $q \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$ associa l'insieme delle soluzioni di (1.12).

Ponendo $x(t) = \int_0^t y(s) ds$ (quindi $x'(t) = y(t)$ e $x(0) = 0$),

si ottiene che i punti fissi dell'applicazione Σ sono le soluzioni dell'equazione (1.11).

Si può dimostrare che, con le ipotesi fatte, l'applicazione Σ è semicontinua superiormente, a valori aciclici, compatti e convessi; inoltre Σ è compatta ed esiste un insieme chiuso e convesso $C \subset C^1(J, \mathbb{R}^n)$ tale che $\Sigma(C) \subset C$. Perciò Σ ha punti fissi.

Bibliografia

Andres Jan (2003). *Using the integral manifolds to solvability of boundary value problems*, in "Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis", R. P. Agarwal Ž and D. O'Regan, Eds., New York, Gordon & Breach, 27-38.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1988). *Boundary-value problems with nonlinear boundary conditions*, Nonlinearity 1, 531-540.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1990). *Existence of solutions of a boundary value problem through the solution map of a linearized type problem*, Rend. Sem. Mat. Univ. e Pol. Torino Vol. 48, n. 2, 149-159.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe, Zecca Pietro (1991). *Using solutions set for solving boundary value problems for ordinary differential equations*, Nonlinear Analysis TMA, Vol. 11 (5), 465-472.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1995). *A direct approach to the existence of solutions of a boundary value problem for a second order differential equations*, Differential Equations and Dinamical Systems, Volume 3, n.1, January, 23-34.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1997). *About the existence of solutions of a boundary value problem for a Caratheodory differential system*, Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. Vol 16, n.3, 621-630.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (1999). *Boundary Value Problems for Implicit ODE's in a Singular Case*, Differential Equations and Dynamical Systems, Vol. 7, 4, October, 437-459.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2000). *How to make use of the solution set to solve boundary value problems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Vol 40, Birkhauser Verlag, Basel/Switzerland, 15-25.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2002). *Boundary Value Problems for Perturbed Differential Systems in Infinite Intervals*, International Mathematical Journal, Vol 2, no. 3, 221-236.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2008). *Existence of solutions of some quadratic integral equations*, Opuscula Mathematica4, 433-440.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2011). *Existence of solutions for quadratic integral equations on unbounded intervals*, Far East J. Math. Sci. (FJMS), 56(2), 113-122.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2012). *Existence of solutions for quadratic integral inclusions*, Libertas Mathematica, Volume 1, 57-69.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2014). *On the existence of solutions for quadratic integral equations on unbounded intervals for quasibounded maps*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Vol. 72, 3-4, 151-160.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2016). *Existence of solutions for Volterra integral equations depending on derivative*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 18(1), 45-60.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2018a). *Existence of Solutions for Volterra Integro-Differential Equations with Implicit Derivative*, International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research, 6(4), 10-15.

Anichini Giuseppe, Conti Giuseppe (2018b). *Existence of Solutions for Volterra Integro-Differential Equations in Unbounded Domains*, Pioneer Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 22(1), 53-68.

Banas Jozef, Goebel Kazimierz (1980). *Measure of noncompactness in Banach spaces*, New York & Basel, Marcel Dekker.

Browder Felix Earl, Gupta Chaitan P. (1969). *Topological degree and nonlinear mappings of analytic type in Banach spaces*, J. Math: Anal. Appl. 26, 730-738.

Carbone Antonio, Conti Giuseppe, Marino Giuseppe (1990). *A Nonlinear Boundary-Value Problem for Multivalued Differential Systems*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XXXVIII, 493-509.

Cecchi Mariella, Furi Massimo, Marini Mauro (1985a). *On continuity and compactness of some nonlinear operators associed with differential equations in noncompact intervals*, Nonlinear Anal., T. M. A., Vol. 9 (2), 171-180.

Cecchi Mariella, Furi Massimo, Marini Mauro (1985b). *About the solvability of ordinary differential equations with asymptotic Boundary conditions*, Boll. U. M. I., Analisi Funzionale e Applicazioni, Serie VI, Vol. IV-C. N. 1, 329-345.

Chandrasekhar Subrahmanyam (1960). *Radiative transfer*, New York, Dover Publications.

Conti Giuseppe, Obukhovskii Valeri, Zecca Pietro (1996). *On the topological structure of the solution sets for a semilinear differential inclusion in a Banach space*, Topology in Nonlinear Analysis, Banach Center Publ.35, Warsawa, 159-169.

Conti Roberto (1967). *Recent trends in the theory of boundaryvalue problems for ordinary differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital., XXII 3, 135-178.

Darbo Gabriele (1961). *Estensione alle mappe ponderate del teorema di Lefschetz sui punti fissi*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova 28, 46-57.

Deimling Klaus (1985). *Nonlinear Funcional Analysis*, Berlin & Heidelberg, Springer-Verlag.

Fitzpatrick Patrick M., Petryshyn Wolodymyr V. (1974). *Fixed point theorems for multivalued noncompact acyclic mappings*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 54, No. 2.

Giusti Enrico (1983). *Analisi Matematica 2*, Torino, Boringhieri.

Lasry Jean-Michel, Robert Raoul (1976). *Analyse non lineaire mutivoque*, Publ. n. 7611, Centre Rech. Math. Décision (Ceremade), Université de Paris IX (Dauphine).

Margheri Alessandro, Zecca Pietro (1993). *Solutions sets and boundary value problems in Banach spaces*, Topol. Methods Nonlin. Anal., 2, n. 1, 179-188.

Margheri Alessandro, Zecca Pietro (1994). *Solutions sets of multivalued Sturm-Liouville problems in Banach spaces*, Atti Acc. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 5, n. 2, 161-166.

Zeidler Eberhard (1986). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications. Vol. I, Fixed-Point Theorems*, Berlin & Heidelberg, Springer-Verlag.

=====

Entropia e freccia del tempo

Per ovviare alla inesistenza di una freccia del tempo nelle formulazioni della fisica classica, la Termodinamica introdusse il concetto di entropia, quale relazione tra l'ordine ed il disordine spaziale. In tal modo la freccia del tempo viene tradotta arbitrariamente in una relazione di crescita Entropica per sistemi chiusi, ..ma dato che l'ordine/disordine sono concetti relativi allo spazio e non al tempo, la freccia del tempo come entità irreversibile resta nuovamente esclusa anche alla termodinamica.

=====

Il paradosso di Zenone quantistico

Alessio Giuseppe Ferraioli*
Canio Noce#

*Università degli Studi di Salerno, Via Giovanni Paolo II, Fisciano (SA)

a.ferraioli40@studenti.unisa.it

Dipartimento di Fisica “E. R. Caianiello”, Università degli Studi di Salerno, Via
Giovanni Paolo II, Fisciano (SA) cnoce@unisa.it

Sunto: Il filosofo presocratico Zenone di Elena nei suoi paradossi mostrava come semplici assunzioni di geometria e aritmetica elementare potessero portare a conclusioni fisicamente assurde. Allo stesso modo, i fisici indiani Misra e Sudarshan hanno mostrato come le leggi della meccanica quantistica applicate allo studio di un decadimento radioattivo portano a un risultato apparentemente inspiegabile, che hanno denominato paradosso di Zenone quantistico. Nel calcolare la probabilità che un sistema quantistico instabile, come un nucleo radioattivo, decada in un intervallo di tempo finito, hanno trovato che se il sistema è sotto continua osservazione il decadimento non dovrebbe mai avvenire. Ciò è in palese contrasto con l'esperienza quotidiana, poiché i decadimenti radioattivi avvengono indipendentemente dalla presenza di un “osservatore”. Il rapporto che ha il paradosso con la teoria della misura sarà qui discusso per concludere che esso, pur essendo una caratteristica genuina della meccanica quantistica, riguarda i più svariati ambiti della fisica. Analizzeremo quali sono gli aspetti paradossali dell'effetto e il significato di una sua eventuale conferma sperimentale.

Parole chiave: Meccanica quantistica, teoria della misura, paradosso di Zenone quantistico, riduzione della funzione d'onda, decadimenti radioattivi, misure senza interazione.

1 - Introduzione

Tra i tanti problemi concettuali irrisolti della meccanica quantistica, il paradosso di Zenone quantistico, seppure noto dalla metà del secolo

scorso, non ha mai catturato l'attenzione della comunità scientifica. Per lungo tempo è stato considerato non più di un artificio matematico causato da assunzioni troppo semplicistiche riguardo la teoria della misura e confinato solo ad aree circoscritte e marginali della fisica. Solo negli ultimi venti anni l'importanza di questo fenomeno è stata rivalutata, come testimonia un crescente numero di esperimenti e pubblicazioni al riguardo. Il paradosso di Zenone è oggi considerato una caratteristica genuina della meccanica quantistica e inoltre, poiché la sua derivazione è indipendente dai dettagli del sistema in questione, riguarda i più svariati ambiti della fisica.

La prima menzione del fenomeno è dovuta ad Alan Turing, in alcune corrispondenze private con il suo collaboratore e amico Robin Gandy risalenti al 1954 (Teuscher, Hofstadter, 2004). Turing esprime nella lettera i suoi dubbi riguardo le basi concettuali della meccanica quantistica, le quali portano ad alcuni risultati apparentemente paradossali, e perciò avverte la necessità di una nuova formulazione della teoria. Trascorrono venti anni prima che ne venga formulata una prima descrizione rigorosa, ad opera di Degasperis, Fonda e Ghirardi (Degasperis, Fonda, Ghirardi, 1974). È tuttavia nel 1977 che l'argomento viene presentato nella veste in cui lo conosciamo attualmente, quando Misra e Sudarshan pubblicano un articolo intitolato "The Zeno's paradox in quantum theory" (Misra, Sudarshan, 1977), il quale costituisce ancora oggi il punto di riferimento per lo studio del fenomeno.

Il nome viene dal paradosso della freccia formulato dal filosofo presocratico Zenone di Elea nel V secolo a.C.: il moto di una freccia in volo è composto da infiniti istanti di tempo di durata nulla, in ognuno dei quali essa non compie spostamento. La freccia è, dunque, ferma in ogni istante elementare e, poiché il moto è fatto dal susseguirsi di questi istanti, non dovrebbe essere capace di avanzare. Con questa

argomentazione, Zenone voleva sottolineare come alcune assunzioni apparentemente elementari di geometria e aritmetica possono portare a conclusioni fisicamente assurde. Allo stesso modo, Misra e Sudarshan hanno utilizzato le leggi della meccanica quantistica per calcolare la probabilità che un nucleo radioattivo decada nel corso di un intervallo di tempo finito. Con grande sorpresa, la loro conclusione è stata che, se il nucleo è posto sotto osservazione continua, ovvero è presente uno strumento con lo scopo di rivelare un decadimento, esso non dovrebbe mai decadere! Nella realtà, i nuclei radioattivi sono molto meno “riservati” di quanto previsto e decadimenti vengono osservati in laboratorio quotidianamente. Questa incongruenza tra predizione teorica ed esperienza comune è ciò che costituisce il paradosso di Zenone quantistico.

Per esaminare il fenomeno partiremo dallo studio della probabilità di sopravvivenza di un sistema quantistico instabile; vedremo che nelle prime fasi del decadimento essa presenta una dipendenza dal tempo t dell'ordine t^2 . È questa dipendenza funzionale dal tempo che gioca un ruolo fondamentale nel paradosso di Zenone quantistico. Valuteremo il rapporto del paradosso con le varie teorie della misura, per concludere che esso è indipendente dalla particolare interpretazione adottata. Discuteremo quali aspetti rendono il fenomeno paradossale, dandone una definizione rigorosa. Infine, esamineremo alcune evidenze sperimentali e valuteremo se corrispondono alle nostre aspettative teoriche.

2 - Dipendenza temporale della probabilità di decadimento

Prima di studiare come varia la probabilità di decadimento di un sistema quantistico in funzione del tempo, esaminiamo il comportamento di un sistema classico. Prendiamo come esempio

l'evoluzione temporale di una reazione chimica, anche se le considerazioni che faremo sono del tutto generali. Il comportamento del sistema è descritto da una somma di termini esponenziali, ognuno rappresentante un diverso processo, che tende a una situazione di equilibrio termodinamico. I cambiamenti nelle concentrazioni in soluzione saranno proporzionali at , ovvero il tasso di cambiamento sarà indipendente dal tempo. Supponiamo che P_0 sia la concentrazione di una particolare specie chimica e che al tempot = 0sia pari a 1. La sua evoluzione è espressa dalla semplice legge

$$\frac{dP_0}{dt} = -\lambda P_0, \quad (2.1)$$

che ha come soluzione

$$P_0 = e^{-\lambda P_0}. \quad (2.2)$$

Abbiamo assunto che non ci sia rigenerazione, ovvero che una volta avvenuta la reazione non possa avvenire la reazione inversa. Questo comportamento esponenziale gode della proprietà dei semigrupp:

$$P_0(t_1 + t_2) = P_0(t_1)P_0(t_2). \quad (2.3)$$

Questo significa che un processo di decadimento che avviene per un tempot₁, seguito da un'interruzione, o una misurazione, e poi un altro periodo di decadimento fino at₂, è equivalente a un decadimento ininterrotto per un tempot₁ + t₂. Tale caratteristica è ciò che rende i processi classici concettualmente semplici da trattare e inizialmente si pensò che anche i decadimenti quantistici obbedissero alle stesse leggi. Le prime evidenze sui decadimenti radioattivi, all'inizio del '900, rivelarono un comportamento esponenziale e i successivi studi a riguardo trattarono il fenomeno con un approccio classico. Ulteriori prove empiriche e teoriche hanno rivelato che lo sviluppo è solo

approssimativamente esponenziale e, in aggiunta, il comportamento a tempi brevissimi o lunghissimi presenta caratteristiche inaspettate. Per tempi brevi, il decadimento segue solitamente una legge quadratica, mentre per tempi lunghi può assumere comportamenti vari come potenze negative e oscillazioni. La dipendenza iniziale da t^2 è la causa essenziale del paradosso di Zenone.

Lo studio del decadimento di uno stato quantistico equivale a determinare la probabilità che il sistema al tempo t sia ancora nello stato iniziale $\phi_0 \equiv \phi(t=0)$, detta probabilità di sopravvivenza. Essa equivale al modulo quadro della proiezione di ϕ_0 sullo stato al tempo t . Il sistema evolve secondo l'equazione di Schrödinger, pertanto al tempo t la funzione d'onda sarà $\phi(t) = \exp(-iHt/\hbar)\phi_0$, con H l'Hamiltoniano del sistema che supponiamo indipendente dal tempo. La probabilità di sopravvivenza è quindi:

$$P_s = |\langle \phi_0 | \phi(t) \rangle|^2 = |\langle \phi_0 | e^{-iHt/\hbar} | \phi_0 \rangle|^2. \quad (2.4)$$

Sviluppando l'esponenziale per tempi piccoli, si evidenzia la dipendenza da t^2 :

con $(\Delta H)^2 = \langle \phi_0 | H^2 | \phi_0 \rangle - (\langle \phi_0 | H | \phi_0 \rangle)^2$. Un risultato importante è la regola di Fleming (Fleming, 1973), la quale dà un limite alla velocità di crescita della probabilità di decadimento:

$$P_s \geq \cos^2(\Delta H t / \hbar) \quad \text{per } t < \hbar / 2\Delta H \quad (2.6)$$

Una semplice dimostrazione (Home, Whitaker, 1986) parte dal principio di indeterminazione generalizzato:

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} = \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}], \quad (2.7)$$

con $\hat{A}$ e $\hat{B}$ due osservabili qualsiasi e $(\Delta\hat{A})^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2$ (similmente per $\hat{B}$). Prendendo come $\hat{B}$ l'Hamiltoniano H del sistema e usando

$$i\hbar \frac{d}{dt} \langle\hat{A}\rangle = [\hat{A}, H], \quad (2.8)$$

otteniamo

$$\Delta\hat{A} \geq \frac{\hbar}{2\Delta H} \left| \frac{d}{dt} \langle\hat{A}\rangle \right|. \quad (2.9)$$

Prendendo come $\hat{A}$ il proiettore

$$\hat{A} = |\phi_0\rangle\langle\phi_0|, \quad (2.10)$$

abbiamo

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\hat{A}^2\rangle = P_s(t), \quad (2.11)$$

avendo sfruttato la proprietà di idempotenza. Possiamo riscrivere la (1.9) come

$$(P_s - P_s^2)^{1/2} \geq \frac{\hbar}{2\Delta H} \left| \frac{dP_s}{dt} \right|. \quad (2.12)$$

Integrando ambo i membri:

$$\int_1^{P_s} \frac{dP'_s}{(P_s - P_s'^2)^{1/2}} \leq \frac{2\Delta H}{\hbar} t, \quad (2.13)$$

ricaviamo la regola di Fleming (2.6) la quale ci dice che la probabilità di decadimento cresce al massimo come $\text{il } \cos^2(\Delta H t / \hbar)$.

La regola d'oro di Fermi, una legge che definisce la probabilità di transizione da uno stato quantistico all'altro, è spesso considerata incompatibile con la dipendenza t^2 . La probabilità di passare da uno

stato m un insieme di stati k caratterizzata da una densità di stati ρ_k sotto una perturbazione V è (Home, Whitaker, 1986):

$$P(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\langle m|V|k \rangle|^2 \rho_k \frac{\sin^2\left(\frac{E_k - E_m - \hbar\omega}{2\hbar} t\right)}{\left(\frac{E_k - E_m - \hbar\omega}{2\hbar}\right)^2} dE_k \quad (2.14)$$

L'approccio usuale a questa espressione consiste nel considerare che il termine $\sin^2 \alpha / \alpha^2$ è piccolo tranne che per un ristretto range di α ed è dunque possibile considerare $|\langle m|V|k \rangle|^2 \rho_k$ costante su questo range. Si ottiene così la forma nota della regola d'oro:

$$P(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle m|V|k \rangle|^2 \rho_k t, \quad (2.15)$$

in cui compare la dipendenza lineare da t come nel caso classico. Tuttavia, le approssimazioni effettuate sono intrinsecamente per tempi lunghi, perché minore è t , più ampio è il range in cui l'integrando rimane grande e perciò $|\langle m|V|k \rangle|^2 \rho_k$ non può essere considerato costante. Un'approssimazione adeguata per tempi brevi è data da:

$$P(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |\langle m|V|k \rangle|^2 \rho_k dE_k \right] t^2, \quad (2.16)$$

in cui naturalmente compare la dipendenza da t^2 .

Nonostante la terminologia di decadimento e sopravvivenza sia legata ai fenomeni radioattivi, i risultati ottenuti sono generali e tale comportamento è la norma per i sistemi quantistici instabili. Ad esempio (Home, Whitaker, 1997), consideriamo una particella con $\text{spin} \frac{1}{2}$, come un neutrone, all'interno di un campo magnetico B_z diretto lungo l'asse z . Il neutrone può assumere due orientazioni di spin: χ_+ e χ_- . Supponiamo che esista la possibilità di inversione dello spin a causa di un campo magnetico B_x orientato lungo l'asse x . Se a $t = 0$ la particella si trova nello stato χ_+ , possiamo identificare questo come stato non decaduto ϕ_s e χ_- come stato decaduto ϕ_d . La funzione d'onda del

neutrone sarà la loro combinazione lineare, con dei coefficienti dipendenti dal tempo:

$$\phi(t) = a_s(t)\phi_s + a_d(t)\phi_d \quad (2.17)$$

L'equazione che descrive l'evoluzione temporale del sistema è

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_s \\ a_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & V \\ V & -\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ a_d \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

avendo posto $\varepsilon = |\mu|B_x/2$ e $V = |\mu|B_z/2$, con μ momento magnetico di spin. I coefficienti $a_s(t)$ e $a_d(t)$ risultano:

$$a_s(t) = \cos(\omega_0 t) - \frac{i\varepsilon}{\hbar\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (2.19a)$$

$$a_d(t) = -\frac{iV}{\hbar\omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (2.19b)$$

con

$$\omega_0 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\varepsilon^2 + V^2}. \quad (2.20)$$

La probabilità di decadimento è il modulo quadro del coefficiente $a_d(t)$:

$$P_d(t) = \frac{V^2}{\hbar^2 \omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t), \quad (2.21)$$

che per tempi piccoli mostra chiaramente la dipendenza da t^2 , senza la presenza di termini lineari in accordo con la regola di Fleming:

$$P_d(t) = \frac{V^2}{\hbar^2} t^2 + \dots \quad (2.22)$$

Anche se la dipendenza da t^2 si basa su assunzioni molto generali, non può essere considerata universale. Nello sviluppo della probabilità per tempi piccoli abbiamo implicitamente assunto che ΔH sia finito; possono esistere casi in cui viene ottenuto un comportamento esponenziale per ogni t (Nakazato, Namiki, Pascasio, 1994). Ciononostante, la dipendenza iniziale da t^2 deve essere considerata la norma ed è su di essa che si basa il paradosso di Zenone quantistico.

3 - Paradosso di Zenone quantistico

Abbiamo visto che la probabilità che in un intervallo di tempo avvenga un decadimento è proporzionale a t^2 nei primi istanti del processo. La probabilità di sopravvivenza, ovvero che all'istante t il decadimento non sia ancora avvenuto è banalmente il suo complementare:

$$P_s(t) = 1 - kt^2 \quad (3.1)$$

Supponiamo che al tempo $t/2$ venga effettuata una misura per verificare lo stato del sistema. La probabilità che venga trovato non decaduto è ovviamente

$$P_s(t/2) = 1 - k(t/2)^2 \quad (3.2)$$

Se la misura ha evidenziato che la transizione di stato non è ancora avvenuta, utilizzando il postulato di riduzione riportiamo la funzione d'onda allo stato iniziale, di fatto azzerando il processo di decadimento. La probabilità di ottenere nuovamente un decadimento al tempo t sarà

$$P_s'(t) = \left[1 - k(t/2)^2\right]^2 = 1 - k t^2/2 + k^2(t/2)^4. \quad (3.3)$$

Per tempi piccoli possiamo trascurare il termine in t^4 . Confrontando allora la (3.3) con la (3.1) notiamo che l'atto di misura ha dimezzato la probabilità di decadimento rispetto al sistema non osservato. Se

nell'intervallo di tempo t vengono effettuate n misure, la probabilità diminuisce di $n - 1$ volte. Facendo tendere n all'infinito, cioè effettuando infinite misure istantanee, la probabilità di decadimento si annulla e il sistema non evolve mai. Un sistema osservato continuamente non dovrebbe mai decadere. Questo è il fenomeno noto come **paradosso di Zenone quantistico** come definito da Misra e Sudarshan. La dipendenza t^2 è la causa del rallentamento del decadimento, oltre al fatto che le misure siano del primo tipo; infatti, nel caso classico, in cui abbiamo una dipendenza lineare:

$$\tilde{P}_s(t) = 1 - kt, \quad (3.4)$$

la probabilità di sopravvivenza non è influenzata da una misura al tempo $t/2$, ma resta invariata:

$$P'_s(t) = [1 - k(t/2)]^2 \cong 1 - kt, \quad (3.5)$$

avendo trascurato i termini di grado superiore. In generale, per una probabilità dipendente da t^m , del tipo:

$$\tilde{P}_s(t) = 1 - kt^m, \quad (3.6)$$

per $m > 1$ le misure causano un rallentamento del decadimento, per $m = 1$ non lo influenzano e per $m < 1$ lo velocizzano. Non sono note situazioni in cui quest'ultima condizione è soddisfatta, ma questo esempio fa capire l'imprescindibilità della dipendenza da t^2 (o in generale da t^m con $m > 1$, anche se solo il caso $m = 2$ è stato osservato).

4 - Il paradosso di Zenone quantistico è indipendente dal postulato di riduzione

Seguendo la trattazione originale, per introdurre il paradosso abbiamo usato il postulato di riduzione, condizione sufficiente ma non necessaria. Tuttavia, per molti anni è stato generalmente accettato che il paradosso fosse legato intrinsecamente al postulato: negare l'uno significava negare l'altro e viceversa. Questa era la posizione di Ballentine (Ballentine, 1990), sostenitore delle teorie ad ensemble, il quale vedeva nel paradosso di Zenone un metodo per smentire empiricamente l'ipotesi di riduzione. È interessante anche la posizione presa in uno studio di Inagaki (Inagaki, Namiki, Tajiri, 1992), dove vengono analizzate due differenti modalità di rilevazione di spin-flip di neutroni, allo scopo di mostrare come il paradosso sia legato al postulato di riduzione. Il primo processo presenta la riduzione della funzione d'onda ad ogni step, mentre il secondo no. Gli autori, contrariamente alle loro aspettative, non hanno evidenziato nessuna differenza tra i risultati dei due metodi. Più recentemente, si è diffusa sempre più la convinzione che il postulato non sia necessario. Riportiamo ad esempio le argomentazioni di Home e Whitaker (Home, Whitaker, 1997), che partono da interpretazioni della misura che non richiedono collasso, come la teoria a molti mondi o a ensemble. Questo approccio consiste nell'includere nella funzione d'onda studiata anche quella dell'apparato di misura. Consideriamo il caso già accennato dello spin-flip di un neutrone in un campo magnetico. Esso può assumere due stati ϕ_s e ϕ_d , con rispettive energie E_s e E_d . Prendiamo come zero dell'energia il valor medio $(E_s + E_d)/2$, e definiamo $E_s = -E_d = \varepsilon$ rispetto al nuovo zero. La funzione d'onda iniziale (prima di una misura) è

$$\Psi(t) = \{a_s(t)\phi_s + a_d(t)\phi_d\}; \psi, \quad (4.1)$$

con ψ che rappresenta l'apparato di misura. Se $at = 0$ la particella si trova nello stato ϕ_s , ovvero $a_s(0) = 1$ e $a_d(0) = 0$, l'evoluzione temporale è descritta dalle (2.18) e (2.19). Se si lascia evolvere il sistema indisturbato per un tempo $2\tilde{t}$, si ottengono due contributi allo sviluppo di a_s . Il primo è dovuto all'evoluzione di a_s conformemente alla (2.18), pari a $[a_s(\tilde{t})]^2$. Il secondo tiene conto della possibilità di spin-flip inverso e possiamo chiamarlo "termine di rigenerazione"; si ricava risolvendo la (2.18) con condizioni iniziali $a_s(0) = 0$ e $a_d(0) = 1$ e risulta essere $[a_d(\tilde{t})]^2$. La probabilità è quindi:

$$P_s(2\tilde{t}) = 1 - \frac{V^2}{\hbar^2} (2\tilde{t})^2 + \dots \quad (4.2)$$

Ciò è coerente con il risultato che avremmo avuto semplicemente sostituendo $2\tilde{t}$ nella probabilità di decadimento calcolata precedentemente (2.22) e facendone il complementare. In altri termini, ciò significa che:

$$[a_s(\tilde{t})]^2 + [a_d(\tilde{t})]^2 = a_d(2\tilde{t}), \quad (4.3)$$

com'è facile verificare dalla (2.19). Se per qualche motivo il termine di rigenerazione non è presente, la probabilità diventa

$$P'_s(2\tilde{t}) = |a_s(\tilde{t})|^4 = 1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{\hbar^2} (2\tilde{t})^2 + \dots \quad (4.4)$$

La probabilità di decadimento viene dimezzata, come previsto dal paradosso di Zenone quantistico. Ma in che modo può venir rimosso il termine di rigenerazione? La soppressione della rigenerazione può essere effettuata separando gli stati ϕ_s e ϕ_d all'istante $\tilde{t}$. Un'alternativa è usare il postulato di riduzione, il quale è perciò uno strumento semplice

e veloce per spiegare l'effetto, anche se non è l'unico. In altre situazioni la separazione può avvenire naturalmente: ad esempio, nell'analisi di un decadimento radioattivo, questi stati sono effettivamente separati se si include nella funzione d'onda anche quella dell'apparato:

$$\Psi(\tilde{t}) = a_s(\tilde{t})\phi_s\psi_s + a_d(\tilde{t})\phi_d\psi_d. \quad (4.5)$$

Qui ψ_s e ψ_d rappresentano l'apparecchio dopo la misura, rispettivamente in cui non ha registrato un decadimento e in cui lo ha registrato. Poiché alla registrazione corrisponde l'annerimento permanente di un punto dello schermo, è chiaro che il secondo termine della somma non può più rappresentare lo stato non decaduto. La rigenerazione è ineffettiva e viene ottenuto l'effetto di Zenone. Queste argomentazioni sono valide per il caso di un nucleo radioattivo; da un punto di vista più generale, possiamo vedere invece come la (4.5) evolve per tempi successivi:

$$\begin{aligned} \Psi(2\tilde{t}) = & [a_s(\tilde{t})]^2\phi_s\psi_s + a_s(\tilde{t})a_d(\tilde{t})\phi_d\psi_s \\ & + a_d(\tilde{t})a_s^*(\tilde{t})\phi_d\psi_d + [a_d(\tilde{t})]^2\phi_s\psi_d \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tutti questi termini sono mutuamente ortogonali, grazie al fatto di aver incluso esplicitamente la funzione d'onda dell'apparato. Possiamo quindi considerare individualmente il contributo di ogni termine. Il primo contribuisce alla probabilità con un fattore di ordine dell'unità, il secondo e il terzo con ordinet^2 e il quarto con ordinet^4 . Possiamo trascurare dunque l'ultimo termine, il quale costituirebbe il termine di rigenerazione (il sistema è nello stato sopravvissuto dopo che il rivelatore ha segnalato un decadimento) e dunque ottenere una probabilità del tipo (4.4). Queste argomentazioni servono a mostrare che il paradosso di Zenone quantistico è indipendente dalla particolare teoria della misura utilizzata, ma è una conseguenza delle leggi

standard della meccanica quantistica e pertanto va considerato come un elemento essenziale della teoria.

5 - Effetto Zenone quantistico generalizzato

Finora abbiamo rimarcato più volte che la dipendenza² è il punto fondamentale nel rallentamento del decadimento ad opera delle misurazioni. Dopo la prima fase², la probabilità segue uno sviluppo approssimativamente esponenziale. Se fosse esattamente esponenziale, come nel caso classico, la misura non avrebbe nessun effetto su di esso. Alcuni autori, tra cui Whitaker (van der Merwe, Selleri, Tarozzi, 1992), definiscono un'effetto Zenone generalizzato come qualsiasi modifica del decadimento causato da una deviazione dallo sviluppo identicamente esponenziale. L'influenza sul decadimento da parte di un sistema macroscopico di misura sarebbe dunque presente in ogni fase del processo, seppur non sempre facilmente apprezzabile. Recentemente, Koshino e Shimizu hanno analizzato l'effetto Zenone nel contesto di misure reali, a differenza delle misure ideali trattate nella formulazione tradizionale (Koshino, Shimizu, 2003). Secondo questi studi, una misura reale potrebbe causare una modifica nell'evoluzione temporale anche nel caso di un'esponenziale esatto. L'occorrenza di questo effetto sarebbe dunque ancor più ampia di quanto assunto in precedenza.

6 - Cosa c'è di paradossale?

Cerchiamo ora di capire cosa ha di tanto strano e peculiare questo fenomeno da meritare il nome di paradosso. Misra e Sudarshan hanno applicato le leggi standard della meccanica quantistica per calcolare la probabilità che avvenga un decadimento in un intervallo di tempo finito. La straordinaria quanto bizzarra conclusione è stata che un sistema sotto continua osservazione non dovrebbe decadere mai. Ciò è fisicamente inaccettabile e in totale contrasto con l'esperienza, perché un nucleo radioattivo prima o poi decade, che sia presente o no un rivelatore. Di conseguenza, se le probabilità sono ricavate correttamente, bisogna concludere che la meccanica quantistica è una teoria **incompleta**, perché non riesce a fornire un metodo di calcolo adeguato di queste probabilità. Molti hanno liquidato banalmente la questione asserendo che il fenomeno non ha nulla di paradossale, ma è semplicemente causato dall'interazione continua dello strumento di misura sull'oggetto quantistico (Peres, 1993). Se così fosse, l'effetto non presenterebbe alcuna difficoltà concettuale, ma sarebbe facilmente spiegabile in termini classici. Il fatto realmente paradossale è che un sistema microscopico sembra essere influenzato dalla mera presenza di un apparato di misura macroscopico, posto a distanza macroscopica da esso. Innanzitutto, questo effetto è non locale. Dai lavori sul paradosso EPR siamo abituati alla possibilità di non località in meccanica quantistica (Bell, 1964). In questo caso, però, l'interazione è tra un sistema microscopico e uno macroscopico, separati fra loro e senza alcuna storia precedente di interazione che possa giustificare una correlazione. La misurazione è bensì effettuata con una modalità a risultato negativo: l'esito sperimentale è ottenuto non dal verificarsi di un evento fisico, ma dalla sua assenza. Prendiamo un atomo eccitato, che emette un fotone quando torna allo stato fondamentale. Se si monitora il processo con un fotorivelatore, quest'ultimo non riporta

nessun segnale finché il decadimento non avviene. Si può concludere che l'atomo è ancora nello stato eccitato dal fatto che all'apparato "non succede nulla" e per questo una tale misura viene detta a risultato negativo. La difficoltà concettuale di questi esperimenti sta nella possibilità che la misura modifichi la funzione d'onda del sistema senza alcuna interazione fisica tra apparato e oggetto osservato. Questo è ciò che succede nel paradosso di Zenone quantistico, in cui il decadimento è arrestato per la presenza di un rivelatore, il quale però rimane infinitamente "in attesa" di percepire una particella senza interagire con l'atomo. Anche nel caso meno radicale in cui il decadimento viene rallentato invece che congelato, la presenza dello strumento di misura influenza il sistema prima di scambiare qualsiasi interazione, ritardando il momento in cui il fotone viene espulso. Home e Whitaker definiscono il paradosso di Zenone quantistico come qualsiasi rallentamento del decadimento di un sistema quantistico causato da una misura senza interazione e non locale (Home, Whitaker, 1997). Riserviamo il nome di paradosso solo ai casi in cui siano soddisfatte queste precise condizioni. Qualsiasi altro fenomeno in cui il rallentamento avviene a causa dell'interazione con uno strumento di misura, come quelli considerati da Peres, non ha difficoltà concettuali e possiamo chiamarlo "effetto Zenone quantistico". Gli studi sull'effetto Zenone quantistico sono di grande interesse come prova dell'esistenza della regionet², ma sono più simili al cosiddetto "effetto cane da guardia" (Kraus, 1981), per il quale l'evoluzione temporale è alterata dall'interazione continua con l'ambiente.

Parlando di misure senza interazione sorgono diverse perplessità riguardo la possibilità di considerarle continue. Diverse argomentazioni sia tecniche che concettuali suffragano l'idea che una misura non possa durare un tempo nullo e non possa essere ripetuta con frequenza infinita. Questo è sicuramente il caso di una misura a risultato positivo,

a causa del tempo finito necessario all'interazione. Dopo aver prodotto un risultato, l'apparato rimane ineffettivo per un certo tempo in cui è incapace di rivelare una nuova particella. Non è chiaro però per quale motivo in una misura a risultato negativo, in cui l'apparato passivamente "aspetta" che arrivi una particella, debba esistere un limite alla continuità dell'osservazione. Se il dispositivo non rivela niente all'istante t , non ha molto senso immaginare che sia seguito da un "tempo morto" in cui una eventuale particella sfuggirebbe alla misura. A causa del ruolo passivo dell'osservatore, ci si può domandare se il concetto di misura sia applicabile: se lo sperimentatore non fa nulla, è ancora possibile parlare di misura? Questa domanda si riconduce alla questione di cosa costituisce una misura e il ruolo dell'osservatore; purtroppo non c'è nessun consenso generale al riguardo.

Home e Whitaker hanno proposto dei procedimenti senza interazione "pro-attivi", cioè che richiedono una partecipazione attiva e volontaria dello sperimentatore (Home, Whitaker, 1986). In questo modo, possiamo momentaneamente scacciare il disagio provocato da domande fondamentali come "che cos'è una misura?" e concentrarci sul paradosso. L'esperimento mentale proposto posiziona il sistema in decadimento al centro di una sfera, le cui pareti interne sono dei perfetti rivelatori. Quando una particella giunge alla sfera, si crea un annerimento macroscopico e permanente. Si suppone che la sfera sia costituita di un materiale perfettamente estendibile e contraibile, come un pallone di gomma, e che la sua dimensione sia controllata dallo sperimentatore. Il pallone viene mantenuto esteso, con un raggio molto maggiore di λ , dove λ è il tempo passato dall'inizio del decadimento e v è la velocità a cui viaggiano le particelle prodotte. In questo stato nessun decadimento può essere captato dallo strumento. Per effettuare una misura, lo sperimentatore contrae velocemente il pallone fino a che sia

piccolissimo, per poi di nuovo espanderlo e riportarlo istantaneamente nella situazione iniziale (assumiamo che il pallone possa muoversi molto più velocemente dei prodotti di decadimento). In questo modo le pareti avranno catturato qualsiasi particella prodotta da un decadimento avvenuto in un istante compreso tra 0 e $\tilde{t}$. Allo stesso modo, il procedimento può essere utilizzato per effettuare più misure, ai tempi $\tilde{t}/n, 2\tilde{t}/n, 3\tilde{t}/n$ ecc... L'intera procedura può essere ripetuta per n e, a causa del paradosso di Zenone quantistico, si prevede che le statistiche di decadimento dipendano da n . Questo è un esempio di misura a risultato non negativo a intervalli discreti. Seppure l'aspetto che ha più attirato l'attenzione è il totale congelamento della funzione d'onda per misure continue, anche una serie di misure discrete dovrebbe avere effetti apprezzabili sul decadimento. Non ci sono eppure chiare evidenze che la vita media di un sistema sia influenzata da questo tipo di misure e ulteriori studi sono necessari.

Misra e Sudarshan hanno studiato il fenomeno assumendo che le misure siano ideali, cioè dotate di range di sensibilità infinito e con errore nullo. Negli esperimenti reali, in cui queste condizioni sono tutt'altro che soddisfatte, la teoria alla base del paradosso di Zenone potrebbe essere fortemente modificata, fino a giungere a conclusioni drasticamente nuove. Nel XXI secolo molti studi sono stati indirizzati all'indagine del paradosso in questo contesto. In particolare, ci si chiede in che modo diversi procedimenti di misura possano portare a diversi effetti. Di grande rilevanza è il lavoro di Hotta e Morikawa che tratta il paradosso di Zenone per misure senza interazione (Hotta, Morikawa, 2004). Lo studio conclude che a seguito di alcune assunzioni – che gli autori sostengono essere comunemente soddisfatte nelle misure reali – il paradosso di Zenone non si verifica e non è atteso nessun rallentamento, in accordo con l'esperienza comune. Contemporaneamente, Koshino e Shimizu hanno mostrato delle

condizioni per misure reali sotto le quali il paradosso si verificherebbe (Koshino, Shimizu, 2005). Nell'articolo viene citato anche il lavoro di Hotta e Morikawa, sostenendo che si basi su ipotesi diverse e che quindi non c'è incompatibilità tra i due studi. L'analisi del paradosso di Zenone in relazione alle misure reali resta un argomento di grande interesse ed ancora grandemente inesplorato.

7 - Evidenze sperimentali

Molti degli esperimenti che hanno trattato fenomeni identificabili come paradosso di Zenone quantistico in realtà non soddisfano la definizione che abbiamo dato nel precedente paragrafo. Questi comprendono i casi in cui l'alterazione del decadimento del sistema può essere spiegata classicamente tramite l'interazione con l'apparato di misura. Tali fenomeni, che abbiamo chiamato effetto Zenone quantistico, non presentano nulla di paradossale o concettualmente difficile. Ciononostante, sono di grande interesse perché provano l'esistenza della regione di dipendenza². Seppure sia concettualmente semplice mostrarne l'esistenza, è difficile stimare quanto duri e ancor più difficile osservarla poiché solitamente si esaurisce in tempi brevissimi. Serot ad esempio ha stimato la durata della regione² per un decadimento α per il ^{212}Po a circa 10^{-21} s (Serot, Carjan, Strottman, 1994). In particolare, la dipendenza² esiste per un tempo particolarmente breve nei fenomeni di transizioni spontanee, rendendo perciò molto difficile studiarli (Ghirardi, Omero, Weber, 1979). Per questo i primi esperimenti sull'effetto Zenone si sono concentrati su transizioni indotte. Il più famoso è di certo l'esperimento di Itano del 1990, presentato in un articolo intitolato semplicemente "Quantum Zeno effect" (Itano et al., 1990). L'esperimento esamina le transizioni indotte

tra due livelli di struttura iperfine del ${}^9\text{Be}^+$. Indicando con 1 il livello fondamentale, esiste uno stato 2 meta-stabile e uno stato 3 eccitato. Non è possibile nessuna transizione tra gli stati 2 e 3, ma solo tra 1 e 3. Viene considerata trascurabile qualsiasi transizione spontanea tra 1 e 2. Applicando un impulso laser di particolare frequenza, è possibile creare uno stato di sovrapposizione $1 + 2$. A questo punto, un secondo laser viene attivato per produrre la riduzione della funzione d'onda allo stato 1 oppure 2. Nel primo caso, lo ione comincia ad oscillare tra i livelli 1 e 3 emettendo fotoni, finché la stimolazione non viene interrotta. Nel secondo caso, invece, lo ione rimane nel livello 2 e nulla succede. Questa seconda alternativa è quella che Itano considera come misura a risultato negativo, condizione prevista per il paradosso di Zenone quantistico. Nonostante lo strumento di misura non rilevi effettivamente nessun fotone, ciò non basta a qualificare l'esito come paradossale. L'interazione del laser è ciò che in questo caso costituisce la vera misura e, includendo essa nell'Hamiltoniano del sistema è possibile spiegare il risultato da un punto di vista realista (Frerich, Schenzle, 1991). I risultati ottenuti sono in ottimo accordo con quelli previsti dall'effetto Zenone quantistico, il che mostra che la matematica della dipendenza t^2 è corretta, ma l'esperimento non getta alcuna luce sugli aspetti paradossali riscontrati da Misra e Sudarshan. L'esperimento di Itano è stato sviluppato ulteriormente da Plenio, il quale ha elaborato un modo per esaminare il decadimento in processi atomici spontanei invece che indotti (Plenio, Knight, Thompson, 1996). Il metodo si basa sull'estendere la durata della regione t^2 , inizialmente di 10^{-16} s, fino a otto ordini di grandezza. La misura è effettuata con modalità simili a quelle di Itano, tramite l'interazione con un laser e perciò anche in questo caso i risultati possono essere spiegati con argomentazioni semiclassiche.

Gli esperimenti finora esaminati non soddisfano i criteri per un autentico paradosso di Zenone quantistico poiché presentano un rallentamento dovuto all'interazione tra apparato e sistema osservato. Sono però di considerevole importanza perché evidenziano la dipendenza dat^2 e recentemente effetti di questo tipo sono stati sfruttati per scopi pratici. Nel campo dell'informatica quantistica, Kalb ha messo a punto un metodo per ridurre gli errori osservando continuamente il sistema (Kalb et al., 2016). L'unità fondamentale dell'informatica quantistica è il qubit, che, a differenza del bit classico, può assumere oltre che i valori 0 e 1 anche uno stato di sovrapposizione dei due. Ciò permette capacità di calcolo e velocità irrealizzabili con la tecnologia tradizionale. Tuttavia, un qubit è per sua natura molto fragile e costantemente può evolvere in modo incontrollato a causa di interazioni non volute con l'ambiente, causando errori di calcolo. Il team di ricercatori è riuscito a diminuire gli errori tramite l'effetto Zenone quantistico. Osservando continuamente i qubit, codificati nello spin di atomi di diamante, le trasformazioni di stato non volute vengono inibite.

Un altro interessante esperimento è quello di Kwiat (Kwiat et al., 1995) che ha lo scopo di sfruttare l'effetto Zenone per migliorare l'efficacia di misure EV senza interazione (Elitzur e Vaidman, 1993). Lo schema di misura EV si basa sull'utilizzo di un interferometro Mach-Zehnder, uno strumento in cui il raggio incidente viene sdoppiato da un beam splitter e guidato lungo due percorsi tramite degli specchi fino a giungere a due uscite, A e B, dove sono presenti rivelatori. Il sistema è arrangiato in maniera tale che un fotone incidente uscirà con certezza dalla porta A e mai dalla porta B. Se in un braccio dell'interferometro viene però posto un oggetto perfettamente assorbente si crea una situazione differente: esiste ora una probabilità non nulla che il fotone esca dalla porta B. Questa differenza di comportamento è dovuta alla

doppia natura del fotone, che in assenza dell'oggetto si comporta come onda, facendo interferenza, altrimenti come particella. L'esistenza dell'oggetto può essere dunque accertata dal fatto che viene rilevato un fotone nella porta B. La misura è senza interazione, perché se il fotone avesse interagito con l'oggetto sarebbe stato assorbito da esso. Possiamo immaginare anche, come suggerisce Kwiat, di sostituire l'oggetto perfettamente assorbente con una sensibilissima bomba, pronta ad esplodere se percepisce anche un solo fotone. Un fotone rilevato in B sarebbe in questo modo una prova della presenza della bomba senza però aver interagito con essa, poiché non è stata innescata l'esplosione. La limitazione delle misure EV è che la probabilità che un fotone esca dalla porta B è al più 50%, mentre i casi in cui esca dalla porta A non danno nessuna informazione riguardo alla presenza della bomba. Kwiat ha dunque messo a punto un sistema molto ingegnoso per affinare a piacere l'efficienza della misura. Egli sostiene che, misurando un numero arbitrariamente grande di volte lo stato del fotone nell'interferometro, l'effetto Zenone può inibire la transizione verso la porta A. L'apparato di Kwiat consiste in una serie di N interferometri EV. Ogni interferometro ha una certa riflettanza, così che il fotone viene un po' alla volta trasferito verso l'uscita A (i.e. nella sua funzione d'onda diventa maggiore il termine riferito all'uscita A). Se però in ogni interferometro viene posto un rivelatore, il trasferimento all'uscita A viene ostacolato. Maggiore il numero di interferometri, maggiore è la probabilità che il fotone esca dalla porta B, fino a ottenere la certezza assoluta nel caso in cui N tenda all'infinito. La matematica dietro l'esperimento di Kwiat è molto simile a quella del paradosso di Zenone; anche in questo caso, infatti, il termine di rigenerazione viene reso inefficace e ciò causa una diminuzione della probabilità di un fattore che dipende dal numero di misure effettuate. Home e Whitaker sostengono però che la fisica coinvolta è completamente diversa da

quella di Zenone (Home, Whitaker, 1997). I rivelatori non hanno nessun ruolo nel monitorare il fotone e il loro unico scopo è quello di bloccarlo per evitare un suo ulteriore sviluppo. La stessa soppressione potrebbe avvenire in molti altri modi, come ad esempio rimuovendo gli specchi o variando il cammino ottico in modo da rendere inefficace il termine di rigenerazione. Per questo motivo l'effetto sfruttato dall'esperimento non solo non ha a che fare con Zenone quantistico, ma è anche "classico nel senso che un fisico del diciannovesimo secolo non avrebbe nessuna difficoltà a comprendere e spiegare il risultato sulla base della fisica del diciannovesimo secolo".

Nel 2015, Peise ha eseguito un esperimento basato su quello di Kwiat, ma con alcune modifiche che, a detta degli autori, lo renderebbero "[...] la prima osservazione dell'effetto Zenone quantistico con una misura continua, indiretta e a risposta negativa, condizioni considerate come le più stringenti da [Koshino e Shimizu, i quali si basano sulla definizione di Home e Whitaker]" (Peise et al., 2015). In questo studio, vengono effettuate delle misure EV su un condensato di Bose-Einstein. Nel sistema, i bosoni aventi spin 1 sono preparati tramite un campo magnetico in modo da avere s_z inizialmente pari a 0. Due particelle possono urtarsi, convertendosi in una coppia in cui un bosone ha $s_z = +1$ e l'altro -1 . L'analogo dell'assorbitore EV è realizzato da un laser risonante, il quale causa una diminuzione effettiva di particelle al livello -1 . Per il paradosso di Zenone quantistico, la presenza del laser previene la formazione di coppie di particelle per urti di spin. Una misura EV della presenza del laser può essere dunque effettuata senza interazione contando il numero di atomi nel livello $+1$: se il risultato è zero, la presenza del laser è confermata senza alcuna interazione con esso. Seppure il lavoro di Peise è stato citato come punto di riferimento nello studio delle dinamiche di spin in condensati di Bose-Einstein (Li et al., 2016; Szigeti et al., 2017), non esistono ancora evidenze che

discutano la genuinità dell'effetto secondo i criteri da noi osservati. Il campo di ricerca è dunque ancora aperto e ulteriori studi devono essere condotti.

8 - Conclusioni

Applicando le leggi standard della meccanica quantistica nello studio di un decadimento radioattivo, Misra e Sudarshan arrivarono alla conclusione paradossale che un nucleo osservato continuamente non dovrebbe mai decadere. Abbiamo mostrato che questo effetto, chiamato paradosso di Zenone quantistico, non dipende dalla particolare teoria della misura adottata (postulato di riduzione, teoria ad ensemble, ecc..) ma è una caratteristica genuina della meccanica quantistica, coerentemente con il fatto che non esiste modo di distinguere empiricamente le varie interpretazioni. Abbiamo visto che il paradosso di Zenone quantistico si basa sulla dipendenza² della probabilità di transizione di stato nei primi istanti del processo ed esaminato alcune prove sperimentali di questo effetto. Abbiamo rimarcato il fatto che l'effetto, seppure studiato inizialmente per decadimenti radioattivi, è del tutto generale perché basato su principi comuni alla maggior parte dei sistemi che presentano una transizione di stato, come atomi eccitati, neutroni in un campo magnetico, condensati di Bose-Einstein e così via. Ogni rallentamento dello sviluppo della funzione d'onda causato dalla misura può essere identificato come effetto Zenone quantistico, tuttavia il nome di paradosso viene riservato solo ai fenomeni che soddisfano le seguenti condizioni: il paradosso di Zenone quantistico è un effetto non locale in cui un apparato di misura macroscopico, tramite una misura a risultato negativo, inibisce o rallenta lo sviluppo di un sistema microscopico, posto a una distanza macroscopica da esso e senza alcuna interazione. Un effetto del genere è realmente particolare e una sua

conferma sperimentale susciterebbe un grande interesse. Al momento non esiste un'evidenza chiara e condivisa che getti luce sugli aspetti paradossali di questo fenomeno, seppure negli ultimi anni l'argomento ha suscitato un crescente interesse. L'effetto descritto da Misra e Sudarshan resta ancora un elemento dubbioso, sconcertante e, per l'appunto, paradossale della meccanica quantistica. Negli ultimi anni è stata ridotta la convinzione generale che fosse solo una conseguenza artificiosa di qualche assunzione affrettata o che fosse solo confinato ad aree ristrette della fisica. Il paradosso di Zenone quantistico è invece di interesse trasversale nei vari ambiti e il suo studio ha rilevanza per le basi teoriche della meccanica quantistica. Come sostenuto da Misra e Sudarshan, se fosse provato che le probabilità calcolate dalle leggi standard quantistiche non rispecchiano la realtà fisica, si ammetterebbe che la meccanica quantistica è una teoria incompleta. Il paradosso di Zenone quantistico occupa quindi un posto rilevante nella folta schiera di problemi concettuali riguardo i fondamenti della meccanica quantistica.

Bibliografia

Ballentine Leslie (1990), *Quantum Mechanics, A Modern Development*, New Jersey, Prentice Hall.

Degasperis Antonio, Fonda Luciano, Ghirardi Gian Carlo (1974), *Does the lifetime of an unstable system depend on the measuring apparatus?*, Il Nuovo Cimento A. 21 (3).

Bell John Stewart (1964), *On the Einstein Podolsky Rosen Paradox*, Physics. 1 (3): 195-200.

Bell John Stewart (1987), *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge, Cambridge Univ. Press.

Elitzur Avshalom, Vaidman Lev (1993), *Quantum mechanical interaction-free measurements*, Found. Phys. 23, 987.

Fleming Gordon (1973), *A Unitary Bound on the Evolution of Nonstationary States*, Il Nuovo Cimento, A 16, 232.

Frerichs V., Schenzle Axel (1991), *Quantum Zeno effect without collapse of the wave packet*, Phys. Rev. A 44, 1962.

Ghirardi Gian Carlo, Omero C., Weber Tullio (1979), *Quantum vs. classical laws for sequential-decay processes*, Il Nuovo Cimento 52A, 421.

Griffiths David Jeffrey (1994), *Introduction to Quantum Mechanics*, New Jersey, Prentice Hall.

Inagaki Shigeru, Namiki Mikio, Tajiri Takeyoshi (1992), *Hindered decay of an unstable system: a quantum Zeno effect*, Phys. Lett. A 166, 5.

Home Dipankar, M. A. B. Whitaker (1986), *Reflections on the quantum Zeno paradox*, J. Phys. A: Math. Gen. 1986, 1847.

Home Dipankar, Whitaker M. A. B. (1997), *A conceptual analysis of Quantum Zeno; paradox, measurement, and experiment*, Annals of Physics 258, 237-285.

Hotta Mitsuru, Morikawa Hitoshi (2004), *Impossibility of distant indirect measurements of the quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A 69, 052114.

Itano Wayne M., Heinzen Daniel J., Bollinger John J., Wineland David Jeffrey, *Quantum Zeno effect*, Phys. Rev. A 41, 2295, 1990.

Kalb Norbert, Cramer Julia, Twitchen Daniel J., Markham M. L., Hanson R., Taminiau T. H. (2016), *Experimental creation of quantum Zeno subspaces by repeated multi-spin projections in diamond*, Nature Communications 7, 13111.

Koshino Kazuki, Shimizu Akira (2003), *Quantum Zeno Effect for Exponentially Decaying Systems*, Phys. Rev. A 67 042101.

Kraus Karl (1981), *Measuring processes in quantum mechanics I. Continuous observation and the watchdog effect*, Foundations of Physics, 11 (7-8): 547-576.

Kwiat Paul, Weinfurter Harald, Herzog Thomas, Zeilinger Anton, KasevichMark A. (1995), *Interaction-free measurements*, Phys. Rev. Lett. 74,4763.

Li Dong, Gard Bryan T., Gao Yanh, Yuan Chun-Hua, Zhang Weiping, Lee Hwang, Dowling Jonathan P. (2016), *Phase sensitivity at the Heisenberg limit in an $SU(1,1)$ interferometer via parity detection*, Phys. Rev. A 94, 063840.

Misra Biswapriya Biswavas, Sudarshan Ennackal Chandy George, *The Zeno's paradox in quantum theory*, Journal of Mathematical Physics 18, 756, 1977.

Nakazato Hiromichi, Namiki Mikio, Pascazio Saverio, *Exponential behaviour of a quantum system in a macroscopic medium*, Phys. Rev. Lett. 73, 1063, 1994.

Peise Jan, Lücke Bernd, Pezzè Luca, Deuretzbacher Frank, Ertmer Wolfgang, Arlt Jochen, Smerzi Augusto, Santos Luis, Klempt Carsten (2015), *Interaction-free measurements by quantum Zeno stabilization of ultracold atoms*, Nature Communications volume 6, 6811.

Peres Asher (1993), *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Dordrecht, Kluwer.

Plenio Martin Bodo, Knight Peter L., Thompson Richard C. (1996), *Control of spontaneous emission in the presence of collisions*, Opt. Comm. 123, 278.

Serot O, Carjan Nicolae, Strottman Daniel (1994), *Transient behaviour in quantum tunneling: time-dependent approach to alpha decay*, Nucl. Phys. A 569, 562.

Szigeti Stuart S., Lewis-Swan Robert J., Haine Simon A. (2017), *Pumped-Up $SU(1,1)$ Interferometry*, Phys. Rev. Lett. 118, 150401.

Teuscher Christof, Hofstadter Douglas (2004), *Alan Turing: Life and Legacy of a Great Thinker*, Berlino, Springer.

Whitaker M. A. B., in A. van derMerwe Alwyn, Selleri Franco, Tarozzi Giuseppe (1992), *Bell's Theorem and the Foundations of Modern Physics*, Singapore, World Scientific.

von Neumann John (1955), *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New Jersey, Princeton University Press.

Per una risposta alla lettera di Renata Santarossa

Franco Eugeni*

* Curatore del «Periodico di Matematica» e già Professore Ordinario di Filosofia
della Scienza - Università di Teramo; eugenif3@gmail.com

All'inizio vi erano le macchine settecentesche di Pascal e Leibnitz: il salto tra queste macchine e il futuro è stato enorme, fin dal primo momento. Un essere vulcanico, anticipatore, geniale come l'inglese Charles Babbage (1791 - 1871), che coltivava amicizie anche salottiere con i matematici coetanei John Herschel (1792-1871) e George Peacock (1791-1858) e con il più giovane naturalista in ascesa Charles Darwin (1809-1882). Babbage era un uomo imprevedibile nei suoi interessi. L'idea della programmazione, presa a prestito dai telatipoi Jacquard, fu una idea che condusse alla programmazione. L'idea fu, come noto della sua giovanissima collaboratrice Ada Byron Lovelace (1815-1852. Ada figlia di Lord Byron era anche la figlia di una matematica. Ada molto capace fu una collaboratrice e anche co-inventrice di tutte le idee di Babbage. La loro progettazione creò l'idea di due macchine di alta e nuova concezione, le quali anche se non realizzate segnano un passo avanti molto spinto. A Babbage è legato il nome dello svedese Georg Scheutz (1785-1873), un

manifatturiero molto esperto che iniziò a studiare l'opera di Babbage, per pervenire ad una progettazione e realizzazione. Progettazione in realtà realizzata dal figlio Edward Scheutz (1821-1881).

Se questo fu l'inizio costruttivo dopo Leibnitz, tra 1700 e 1900, il grande impulso di questa disciplina, se volete la rivoluzione informatica risale ai primi anni '80 del 1900, quando sono stati creati e principalmente diffusi i personal computer, perfettamente aderenti a quel modello che venne chiamato "*architettura di Von Neumann*" (memoria, schermo, tastiera stampante ed altre periferiche). La memoria sempre più ampia i processori sempre più potenti, la capacità di calcolo sempre maggiore ci ha condotto all'attuale situazione.

L'informatica, intesa come informazione automatica, si è brillantemente inserita in tutti i campi dello scibile umano. Potreste oggi fare un biglietto di viaggio, una transazione finanziaria, una colonoscopia, una iscrizione ad un corso di formazione, senza l'apporto di un computer? Sapremmo operare nella attuale società senza un computer o senza un telefono cellulare?

Vi sono ancora coloro che fanno a meno: si chiamano gli analfabeti informatici!

Il futuro prossimo ci riserva un aumento pauroso della velocità operativa dei computer, se non proprio una nascita di computer quantici, sicuramente una nascita di computer quasi quantici con l'uso di nuovi miracolosi tipi di micro processori. Tuttavia dietro tutto questo vi è l'uomo sempre più specializzato nella comprensione, uso, progettazione, realizzazione di nuove tecnologie. Se non esistono più i

venditori di acqua, gli arrotini con le loro biciclette, gli ombrellai, le mondine, i lattai, i lampionai, le centraliniste, gli stagnini ambulanti, i facchini nelle stazioni, esistono al loro posto riparatori di telefonini, i tecnici del computer, progettisti di siti, banche, assicurazioni, agenzie tutistiche on-lineI Business Builder, Analisti informatici dei Big Data, Responsabili dell'organizzazione della vita digitale del singolo, progettisti della organizzazione della vita del singolo, gli avvocati virtuali, i medici virtuali a distanza, i Bocker del tempo libero, il chirurgo per il potenziamento della memoria, l'Agricoltore verticale ed infine, nella piena tematica che stiamo trattando i cosiddetti Manager degli Avatar per l'insegnamento virtuale! (alias Presidi e professori di nuova generazione).

La rete e' sempre più attiva, l'uomo della strada fa da solo i suoi bonifici, acquista on -line libri, scarpe, abiti, oggetti di ogni genere, e l'e-commerce non è più un optional per aziende al passo con i tempi.

Personalmente negli ultimi la mia carriera si è svolta dal 1963 al 2009. La mia tesi di Laurea fu scritta a macchina, con copie in carta carbone e simboli matematici a penna, (1963), negli anni '70 mi servivo di una dattilograa, poi venne una macchina elettica con pallina cambiabile per i simboli, poi arrivò la fotocopiatrice (forse72-73) , ci si scriveva con i corrispondenti stranieri e le notizie viaggiavano in settimana, nei primi anni '80 un primo computer IBM compatibile e principalmente il fax. Il personal si evolveva: processore 286 e programma di scrittura word star, processore 386 e programma di scrittura chi-writer, scrissi il mio libro di geometria e algebra, era perfetto. La ricerca ormai fruttava

molto, i collegamenti e le notizie schizzavano, nei Convegni eravamo andati dalle lavagne con il gesso all'uso della lavagna luminosa. Non la usavamo a lezione, ma per i convegni sì. Sulla fine degli anni '80 creammo Ratio Mathematica, il primo numero facemmo le copie con la fotocopiatrice. Uscì il programma Ventura, primo programma riconoscimento testi, e oramai imperava il word di Bill Gates. Arrivò anche la posta elettronica e il fax andò in pensione. Internet è stato il regalo degli anni '90, e quando nel '96 mi sono trasferito da Roma tre alla mia città di Teramo fui pronto grazie ad alcuni colleghi informaticamente più avanti di me a creare dei Master per insegnanti svoltisi totalmente on line su una piattaforma Moodle. Come pro-rettore alla didattica, partecipai alla rivoluzione del *tre-più due*, riuscendo a mettere informatica in tutti i corsi di laurea e a sviluppare il settore tramite un associato e un ricercatore, trasformatisi in un Ordinario e due associati. Oggi in pensione assieme a colleghi, anche loro in pensione, con l'aiuto di colleghi ancora in servizio, gestiamo ben sette riviste telematiche, tra le quali questa dove scrivo. Come telefoni, nel 1990 avevo già un portatile e sono andato avanti con i cambiamenti di telefono che abbiamo vissuto fino ai più recenti. Oggi alla soglia degli 80 anni, Il mio attuale computer entra con facilità in una parte del mio zaino e mi ha seguito a bordo delle navi e nelle mie permanenze all'estero.

Questo per dire che non si può dire che io non abbia fatto uso dell'informatica, e sono cosciente che l'insegnamento telematico è presente nella società attuale, avendone io stesso fatto grande uso.

Tuttavia ho qualche dubbio su una istruzione totalmente computerizzata per le scuole secondarie, specie per i primi anni. La figura dei Manager di Avatar per l'insegnamento mi è ancora difficile da capire, pur comprendendone l'ineluttabilità. Non mi ritengo un grande esperto di insegnamento primario, tuttavia credo ancora che è importante il confronto fisico con i genitori, i maestri e le maestre lì vivo ancora come sostituti genitoriali e non dimentico i dubbi per la soppressione della maestra unica, un tempo sostituta della madre. La rete è piena di insidie, specie per i molto giovani, ritengo importantissimo ed estremamente valido l'uso del computer e dell'auto-istruzione, ma occorre – a mio avviso – l'aiuto e il controllo di un adulto esperto di tematiche dell'età evolutiva. La figura del docente dovrebbe mutare, non più unica ed onniscente detentore dei saperi, sarebbe oramai impossibile, ma saggia guida per il ragazzo. Potrà un Avatar fare tutto questo? E' facile finire in siti porno, è facile impadronirsi di una carta di credito di un genitore ed usarla per acquisti impropri, è dilagante l'uso dei social, non sempre al massimo della correttezza. Il problema è anche che, un ragazzo in giovane età, può da un lato isolarsi in un mondo parallelo molto lontano dalla realtà, ed anche scatenarsi verso ambienti ove il controllo necessario a quell'età sfugge.

Viviamo momenti di grande transizione, forse occorre una maggior preparazione al mondo informatico, corsi per i genitori? Lotta all'analfabetismo informatico? Lotta all'informatica trasgressiva, per la quale il più asino degli studenti si rivela di colpo genio?

Ho indicato solo tre aspetti per i quali la società di oggi si dovrebbe corazzare. Per il resto, un ragazzo acquisita una capacità di giudizio sull'uso del materiale informatico, non vedo contro indicazioni per forme di auto-apprendimento da computer, salvo quelle che potrebbero danneggiare lo sviluppo nell'età evolutiva. Sono i controlli da potenziare, la popolazione dovrebbe, per essere collaborativi con la meravigliosa Polizia postale, acquisire quelle conoscenze e dimestichezze così da poter aiutare assieme a delle nuove figure di docenti i propri figli e le nuove generazioni ad una crescita sana ed equilibrata!

Computer si, computer no?

Luca Nicotra*

* Presidente dell'Associazione "Arte e Scienza" e Direttore responsabile del
«Periodico di Matematica»; luca.nicotra1949@gmail.com.

1 - Un contatto ravvicinato con l'informatica

Mi sono laureato all'Università "La Sapienza" di Roma (allora si chiamava così) in ingegneria meccanica con il massimo dei voti e una tesi sperimentale di ricerca in fisica tecnica, pubblicata qualche anno dopo su una prestigiosa rivista internazionale statunitense. Ma, a parte una breve esperienza in una società dell'ENI, fin dai primi anni dopo la laurea mi sono occupato di informatica, presso una delle industrie militari più prestigiose, non solo a livello nazionale ma anche internazionale: l'Elettronica S.p.A. di Roma. Per la mia mentalità più matematica e teorica che pragmatica, costituiva un naturale polo di attrazione la nascente informatica degli anni Settanta del secolo scorso. I computer come noi oggi li conosciamo non esistevano. Non esisteva ancora il personal computer, che poi ha portato l'informatica nelle case di tutti. Erano i tempi in cui per poter utilizzare per 10 minuti l'elaboratore elettronico della Facoltà di Ingegneria de "La Sapienza", occorreva prenotarsi anche un mese prima. I computer erano i mastodontici mainframe, il cui costo e mantenimento erano permessi soltanto a enti pubblici e grandi società. Ho iniziato la mia carriera all'Elettronica S.p.A. come analista-

programmatore nella Divisione Integrazione Sistemi, che sviluppava il software di sistema per gli apparati di guerra elettronica di cui la società romana di via Tiburtina era (ed è) leader mondiale. Si applicavano le tecnologie di *real time processing* e di *software engineering* allora pressoché sconosciute in Italia. Il mio primo lavoro è stato lo sviluppo del modulo Goniometria, per un sistema di guerra elettronica installato sull'incrociatore Garibaldi della Marina Militare Italiana. Per ragioni di minimizzazione dell'occupazione di memoria e di rapidità di esecuzione, il software fu sviluppato nel linguaggio assembler del microprocessore militarizzato TMS 9900 della Texas, un linguaggio molto vicino al linguaggio macchina, - il solo comprensibile da un elaboratore elettronico - fatto di sequenze delle cifre binarie 0 e 1. Programmare in assembler è una esperienza molto formativa per comprendere quanto diverso sia il modo di "ragionare" del computer rispetto a quello dell'uomo.

Più in generale è molto formativa, sotto diversi punti di vista, tutta l'attività di analisi e programmazione che rende possibile la creazione di un programma software. Ponendosi dal punto di vista dell'uomo, questo utilizzo del computer può essere detto "attivo", in quanto è l'uomo che lavora: il computer non fa altro che eseguire le sue decisioni e istruzioni. Creare un programma richiede una conoscenza duplice: quella profonda dell'argomento e quella del linguaggio di programmazione utilizzato. Vedere che in pochi secondi o minuti il programma risolve un problema complesso, fornendo correttamente tutti i risultati programmati, riempie di una autentica gioia, molto simile a quella di un bambino. Ma forse ancora più intrigante è il caso in cui, per qualche errore di programmazione, questo non avviene. A questo punto si apre la caccia all'errore, la fase di *debugging*, che in casi di

software complesso può impegnare anche giorni e far arrovellare veramente il cervello, mettendo a dura prova tutta la pazienza, l'esperienza, la capacità logica, la fantasia e l'intuizione dello sviluppatore, il quale viene a ricoprire un ruolo di vero e proprio investigatore.

L'uso attivo del computer da parte dello sviluppatore di software presenta aspetti educativi di grande pregio, una esperienza che in forma necessariamente ridotta sarebbe molto utile introdurre anche nell'insegnamento scolastico. Tuttavia, tali aspetti sono limitati, in quanto legati tutti ai particolari requisiti richiesti per ben sviluppare un software: sviluppo della fantasia, della creatività, della pazienza, della precisione, dello spirito di ricerca nella fase di debugging e altro ancora. In altri termini, lo spettro di capacità educative del computer utilizzato in modo attivo dallo sviluppatore è soltanto una piccola parte di quello dell'educatore-uomo. Di questa precisazione sarà bene tenere conto più avanti, quando parlerò della funzione educatrice del docente.

Successivamente ho lavorato come *scientist junior* presso la divisione di ricerca e sviluppo dell'Elettronica, la DAS, Divisione Analisi di Sistema, dove ho continuato a occuparmi di informatica, sviluppando software non più di sistema ma applicativo. In particolare ho sviluppato varie simulazioni software per i sistemi di guerra elettronica, con linguaggi ad alto livello (Fortran 77).

L'acquisto da parte dell'Elettronica S.p.A. del sistema di progettazione meccanica assistita dal computer (CAD) della Dassault Systemes, CATIA, fu per me un'ottima occasione per riavvicinarmi alle mie radici di ingegnere meccanico, potendo però mettere a frutto le mie esperienze di informatico. Da allora le tecnologie di informatica industriale (CAD, CAE, CAM, CAT, PDM

ecc.) sono diventate la mia specializzazione, lavorando successivamente dalla parte dei fornitori di queste tecnologie e non più come utente. In questa nuova veste professionale ha lavorato a lungo per l'IBM in società sue business partner. Non accennerò nemmeno ai grandi benefici portati dall'informatica alla progettazione e produzione meccanica e manifatturiera in generale, anzi all'intero ciclo di sviluppo di un prodotto manifatturiero, in quanto ben fuori dalle motivazioni del presente articolo.

2 - Il computer non ha intelligenza creativa

Ho voluto rapidissimamente accennare a parte delle mie esperienze lavorative, per far capire quale sia stato e sia ancora il mio rapporto con l'informatica e il computer, che mi ha dato una visione chiara dei tanti pregi ma anche dei limiti nell'uso del computer sia a livello professionale sia a livello di semplice fruitore.

Chiunque abbia una esperienza "ravvicinata" con l'elaboratore elettronico (è questo il termine più corretto, in quanto esso svolge compiti che vanno ben oltre quelli più limitati del computare, ma per comodità continuerò a usare il più diffuso termine "computer") sa bene che esso non ha alcuna intelligenza propria e nessuna forma di creatività paragonabile a quella dell'uomo: esegue alla perfezione soltanto tutto ciò per cui l'uomo lo ha programmato, molto meglio ed enormemente più rapidamente di quanto lui possa fare.

Settori come quelli dei Sistemi Esperti e dell'Intelligenza Artificiale possono far dubitare di questa mia affermazione. Sarebbe troppo lungo e fuori tema impegnarsi in questa sede in una discussione più esaustiva. Credo, invece, che qualche breve

osservazione sia sufficiente a sgombrare il campo almeno dai dubbi più grossolani.

Nel passato ho ribadito più volte che un attento esame dei casi storici di molti geni creativi, sia del campo umanistico-artistico sia del campo scientifico, dimostra che la creatività ha le stesse origini sia nell'artista sia nello scienziato: il subconscio e l'inconscio (Nicotra, 2008). Diceva Bruno de Finetti (1974) a proposito:

Purtroppo, un falso pudore vieta di menzionare la parte del processo della scoperta che si svolge più o meno nella sfera dell'inconscio, o del subconscio, per esibire soltanto la dimostrazione fossilizzata nella sua forma scheletrica di logica freddamente deduttiva e formalistica.

È soltanto lo sviluppo successivo dell'atto creativo che si differenzia nell'artista e nello scienziato.

Il computer non ha né una coscienza né un inconscio e un subconscio: già per questo gli è negato l'atto creativo più autentico.

3 - Educare e insegnare

Questo mio scritto non è, però, per parlare genericamente dei "benefici" e "malefici" del computer, bensì vuole tentare di essere una risposta e un contributo alla questione sollevata dalla professoressa Renata Santarossa sul posto del computer nell'insegnamento scolastico ai giorni nostri, che sembra relegare sempre più il docente a un ruolo secondario e marginale.

I risultati della ricerca Lenovo sono molto interessanti e validi ma, a mio giudizio, dovrebbero essere inseriti e interpretati "all'interno di una impostazione corretta del ruolo della scuola". Tutti i timori di un declassamento del ruolo del docente e di una

“invasione di campo” da parte del computer nell’insegnamento scolastico derivano unicamente dall’aver perso il vero senso della missione della scuola, di cui fin dagli inizi del secolo scorso fu strenuo e appassionato difensore Federigo Enriques, che si battè per affermare la prevalenza della funzione formativa su quella meramente informativa della scuola. La lotta al nozionismo è stata strenuamente portata avanti da molti educatori e pedagogisti, ma sembra essere tutt’oggi un tema quasi di “frontiera” a giudicare dal comportamento di molti insegnanti. La sostituzione del computer al posto del docente non farebbe altro che rendere definitivo il trionfo del nozionismo nella scuola.

Se ligi all’insegnamento dell’Enriques (che fu anche di molti altri intellettuali dell’epoca) poniamo al primo posto la funzione formativa nell’insegnamento scolastico - ma per varie ragioni la estenderei anche a quello universitario - risulta immediato capire che quei timori di invasione di campo da parte del computer, fin quasi a rendere plausibile l’idea che possa sostituire il docente, sono totalmente infondati, in quanto l’uso del computer nell’insegnamento scolastico è di tipo passivo e fa quindi riferimento soltanto alle capacità informative che, come detto, sono ben diverse da quelle educative. Ma anche se fosse introdotto nella forma attiva dello sviluppatore di SW già accennata, la funzione educativa del computer sarebbe sempre molto limitata rispetto a quella del docente-uomo, sarebbe soltanto un aiuto.

Santarossa è fin troppo diligente nell’elencare, in una dettagliata lista, tutto ciò che soltanto un insegnante-uomo può elargire e che invece nessun insegnante-computer può. Tutte le attività citate da Santarossa si possono sinteticamente definire tipiche dell’ “educare”, che è qualcosa di molto più complesso e profondo dell’ “insegnare”.

Per chi volesse comprenderne a fondo la differenza, consiglio vivamente la lettura, sempre attuale, del bellissimo libro di Paolo Crepè *La gioia di educare* (Torino, Einaudi, 2008). «Educare significa tirare fuori il talento di ognuno, il suo grado di libertà, la strada per apprendere davvero», ammonisce l'illustre psichiatra e sociologo. E io aggiungo: si insegna a risolvere una equazione, a calcolare un integrale, ma si "educa" al gusto matematico «dell'essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire», per dirla con un nostro illustre matematico, Alessandro Padoa. Si insegna una poesia, ma si "educa" ad amare la poesia. Si insegna la fisica, la chimica, ma si "educa" al bruniano «dubio de riveder le stelle» (Bruno, 1585, Parte I dialogo 5) ovvero allo spirito critico della scienza. Si insegna la storia della filosofia, ma si "educa" al filosofare. Si insegna a suonare uno strumento musicale, ma si "educa" alla sensibilità musicale. Insomma, si possono insegnare nozioni, procedure e tecniche particolari, la storia in tutte le sue molteplici forme, le conquiste della scienza, della filosofia, i capolavori della letteratura, il solfeggio musicale, le tecniche pittoriche e quant'altro, ma tutto ciò che è un "atteggiamento" dell'intelletto e dell'animo, tutto ciò che è un modo di porsi di fronte alle cose e di approcciarle non si può insegnare: è il regno dell'educare, che è un "*e ducere*", trarre fuori capacità potenziali ancora nascoste o inesprese. Spesso, però, l'educare è anche un "portare dentro" lo studente cose che non gli sono congenite: in tal caso, per simmetria con l'*e ducere* latino, si dovrebbe parlare di "*in ducere*" inventando un neologismo: "inducare".

Tutte le attività dell'educare-inducare (nel seguito soltanto "educare") implicano capacità di analisi psicologica e scelta che il computer non può avere, perché riguardano la sfera tipicamente

umana fatta di inconscio, subconscio, sensibilità, istinto, intuizione, di esperienza che nessun sistema di Intelligenza Artificiale può possedere. Il docente-umano rimane l'unico valido regista della formazione di un giovane, che deve essere intesa in senso globale: formazione dell'intelletto ma anche psicologica, emozionale, caratteriale.

Educare significa stabilire una relazione emotiva con lo studente. Crepè insiste molto su questo aspetto dell'educare, richiamando la nostra attenzione sui più recenti risultati delle neuroscienze che «dimostrano sempre più che le emozioni attivano circuiti neurali arcani e sofisticati nel loro funzionamento. Tutto quello che è emotivo va ad interferire attivamente con i nostri pensieri e la nostra parte cognitiva». Educare significa accendere la passione, senza la quale non vi può essere vera conoscenza. Certamente il computer non può stabilire una relazione emotiva con lo studente, né accendere in lui la passione, né passeggiare fra i banchi dispensando carezze ai bambini delle scuole elementari, come consiglia Crepè e come anche fra studenti più adulti viene fatto, con risultati eccellenti, da alcuni docenti stranieri. E non può, il computer, nemmeno indicare un metodo, una via, essendo l'educare – come osserva acutamente Salvatore Natoli – «suscitare, liberare questo istinto di razionalità, perché è dell'istinto capire. Questo istinto non può essere liberato se non c'è lo sforzo e la pazienza del *methodos*» (Natoli, 2004, p. 50).

4 - Il ruolo del computer nel progetto educativo dei giovani

Assodato tutto questo, quale può essere il ruolo dell'utilizzo (in senso passivo) del computer nell'ambito del progetto educativo

del giovane? A mio avviso, un ruolo notevole ma subordinato e funzionale a quello del docente, il quale rimane insostituibile per la funzione educatrice vera e propria.

Vorrei elencare sinteticamente quelli che considero “vantaggi” nell’uso del computer da parte degli studenti, riferendomi ai risultati della ricerca Lenovo:

- potere “liberatorio” nei confronti dei genitori;
- rende gli studenti più indipendenti;
- rende più facile conoscere questioni attuali e problematiche sociali;
- consente un apprendimento attivo e immersivo, non confinato entro le mura di un’aula.

4.1 - Potere liberatorio del computer nei confronti dei genitori

Relativamente a questo punto, mi sembra che tutto o quasi sia stato evidenziato dai risultati della ricerca Lenovo. Non mi meravigliano i risultati, molto al di sopra di quelli di altri Paesi, relativi all’India, dove lo sviluppo dell’informatica è ai massimi livelli mondiali. Inoltre sono ben note le spiccate vocazioni matematiche degli indiani.

4.2 - Il computer rende gli studenti più indipendenti

Questo secondo punto merita qualche ulteriore commento.

Prima dell’avvento di Internet le fonti di apprendimento di uno studente erano soltanto gli insegnanti e i libri scolastici. C’era quindi una inevitabile forma di dipendenza da queste fonti che

certamente non incitava al lavoro di ricerca personale e di emancipazione culturale. Le enormi possibilità di trovare sulla Rete notizie, nozioni e “spiegazioni” alternative e complementari a quelle fornite dai canali classici (insegnante e libro) possono dare adito a giudizi molto diversi sulla loro utilità e opportunità.

Da una parte possono risultare troppo dispersive e rischiare di “disorientare” lo studente, incoraggiando uno sfrenato nozionismo a discapito di un più “ragionato” e “organico” apprendimento. Inoltre, essendo Internet un “l enorme ibero serbatoio di cose buone e cattive”, c’è , come tutti ben sanno, il pericolo di accedere anche a informazioni non corrette o addirittura false. D’altro canto, invece, le fonti accessibili sulla Rete costituiscono un ottimo strumento per sottrarsi a una dipendenza, a volte eccessiva e “dittatoriale”, dall’insegnamento libresco e da quello orale dell’insegnante, favorendo lo sviluppo di capacità di ricerca e critiche che emergono in forma naturale dal confronto di diverse fonti di informazione. Il buon docente dovrebbe incoraggiare l’uso di Internet da parte degli studenti, mettendoli in guardia sui pericoli accennati, accettando però la “sfida” di discutere con gli studenti sulla attendibilità delle fonti. La tentazione – cui in realtà nessuno resiste – del “copia e incolla” di frasi e interi brani di scritti, trovati su Internet, dovrebbe costituire per il docente un’ottima opportunità per una “necessaria” ma purtroppo invece sempre elusa, lezione di deontologia e onestà intellettuale e civica per lo studente. Il docente dovrebbe “educare” lo studente a un uso corretto delle citazioni di scritti altrui, indicandogli esplicitamente le due possibilità corrette: riportare fra virgolette l’intero brano copiato da Internet, oppure parafrasarne il contenuto con parole proprie, riportando in entrambi i casi la fonte completa. Questo

comportamento non è soltanto deontologico ma ha anche un significato culturale profondo. L'abituare a riportare la fonte di notizie o pensieri attinti da scritti di altri non è soltanto un doveroso riconoscimento della proprietà letteraria e del copyright, ma ha anche un valore scientifico in quanto coinvolge altri studiosi, ovvero colloca il lavoro dello studente in un ambiente culturale allargato alla comunità degli studiosi citati. Abituata, quindi, lo studente a uscire dall'isolamento del proprio ego e, sia pure in forma indiretta, al lavoro di gruppo, tipico della ricerca dei nostri tempi. È innegabile la straordinaria possibilità offerta da Internet nell'accedere a informazioni di svariati tipi, altrimenti negata o irta di enormi difficoltà.

Libri, riviste, atti congressuali, conferenze, fotografie, filmati, documenti originali disponibili in forma digitale e musica di tutti i generi sono ormai facilmente accessibili su Internet, anche a persone che non hanno una particolare competenza informatica.

L'accedere - permesso da Internet - direttamente alle fonti primarie piuttosto che il "sentirne parlare" sui libri è certamente molto formativo in quanto abitua a consultare le fonti più attendibili, e non quelle secondarie, terziarie o n-arie, spesso tendenziose e portatrici di errori. In questi casi, non si tratta di spingere gli studenti ad affidarsi alle nuove tecnologie per l'auto-apprendimento, bensì si tratta di abituarli ad accedere alle fonti primarie: un atto educativo di grande valore scientifico.

Su Internet è possibile accedere a molte librerie digitali, che contengono testi (libri e articoli) disponibili gratuitamente come e-book o come file pdf.

Una delle più diffuse è <https://www.liberliber.it/> contenente oltre 3.300 libri e 9.000 brani musicali. Si trovano digitalizzati libri antichi classici della scienza e della letteratura. Su altre biblioteche

digitali sono disponibili in forma digitale anche antichi manoscritti.

Tutto questo è meraviglioso, straordinario: poter accedere da casa in qualunque ora del dì e della notte a testi famosi, addirittura ad antichi manoscritti. Prima dell'avvento di Internet ciò avrebbe richiesto la presenza fisica dello studente nella biblioteca dove sono custoditi. Inoltre, i libri antichi e rari, e ancor più i manoscritti, si trovano custoditi soltanto in particolari biblioteche di città molto probabilmente diverse da quella di residenza dello studente. Accedere ad essi, prima dell'avvento delle librerie digitali, significava quindi dover fare un viaggio per recarsi nella biblioteca dove si trovano e ottenere i permessi per la lettura, non concessi a tutti. Dunque tempo e spese soltanto per una lettura limitata nel tempo. Se poi avessimo voluto portarci a casa qualche pagina, avremmo dovuto pagare le fotografie delle singole pagine, perché i libri antichi non vengono fotocopiati per motivi di conservazione del testo. Tutto questo accadeva fino a pochi anni fa, quando ancora non esistevano le biblioteche digitali. Oggi uno studente qualunque, senza permessi e senza nessuna spesa, può non soltanto leggere dal suo computer ma scaricarsi gratuitamente per esempio il *De Divina Proportione* di Luca Pacioli nell'edizione del 1509 stampata da Paganino Paganini con le celebri incisioni di Leonardo da Vinci.

4.3 - Il computer rende più facile conoscere questioni attuali e problematiche sociali

È fuor di dubbio che la navigazione in siti orientati alle problematiche sociali (spesso dotati di un *forum* e di un *blog*) e in siti di quotidiani e riviste on-line dà allo studente più facilmente la

possibilità di conoscere questioni attuali e problematiche sociali, sopperendo alla funzione una volta espletata dai quotidiani cartacei. C'è da dire, anzi, che le molteplici e spesso opposte presentazioni di questioni attuali e problematiche sociali su Internet sollecita lo studente a un esame critico delle diverse "versioni" dei fatti.

4.4 - Il computer consente l'apprendimento attivo e immersivo

Certamente la navigazione entro siti quali quelli citati al numero precedente consente allo studente un apprendimento attivo e di tipo immersivo.

Ancor più, sotto questo punto di vista, è efficace YouTube, che offre sempre di più la possibilità di assistere a video-lezioni e conferenze tenute da studiosi di chiara fama, quali Carlo Rubbia, Carlo Rovelli, Piergiorgio Odifreddi, Giovanni Battimelli (cito soltanto qualche nome del campo scientifico, che mi è più congeniale). Sempre YouTube dà la possibilità di ascoltare interpretazioni storiche di brani di musica classica e leggera altrimenti accessibili a pochissimi appassionati. Si tratta spesso di esecuzioni musicali del passato che veramente rendono possibile "immergersi" in un passato non altrimenti esperibile. Per esempio, si possono ascoltare canzoni della prima metà del secolo scorso cantate da Alberto Rabagliati o dal Trio Lescano, sinfonie e opere liriche dirette da Arturo Toscanini, del quale io stesso ho potuto vedere un filmato delle prove della NBC Hell Orchestra¹ dalle quali risultava inequivocabilmente il "caratteraccio" del grande direttore d'orchestra.

¹ <https://www.youtube.com/watch?v=Cxh-o9ENW5o>

L'intervento del docente è sempre necessario, non soltanto per discutere – come già detto - della validità delle fonti, ma anche per abituare lo studente a valutare criticamente ciò che ha letto, sentito o visto su Internet. Nel caso citato delle prove di Toscanini, per esempio, si sentono addirittura pesanti insulti ai professori d'orchestra. Senza un intervento del docente, lo studente si formerebbe l'idea di un Toscanini privo di ogni forma di educazione e rispetto. Sarà il docente a cogliere l'occasione per illustrare la grande opera di ricostruzione filologica delle partiture musicali e di riforma del modo di rappresentare le opere liriche compiuta da Toscanini (fu lui, per esempio che introdusse l'abitudine di spegnere le luci nel teatro durante le esecuzioni) facendo capire allo studente che Toscanini non transigeva di deviare dalla volontà del compositore e di non rispettare la partitura. Proprio per queste sue qualità era apprezzato in tutto il mondo e venerato dagli stessi professori d'orchestra che apostrofava così duramente, preso dalla sua furia di perfezionismo.

Bibliografia

Bruno Giordano (1585). *De gli eroici furori*.

Crepè Paolo (2008). *La gioia di educare*, Torino, Einaudi.

de Finetti Bruno (1974). *Interventi al Convegno della C.I.I.M.*, Viareggio 24-25 ottobre 1974.

Natoli Salvatore (2004). *Parole della filosofia*, Milano, Feltrinelli.

Nicotra Luca (2008). L'immaginazione creatrice nell'arte e nella scienza. In *Atti della conferenza "Caos e immaginazione nell'arte e nella scienza"* – Monte Compatri 15 maggio 2008, Tinello Borghese, Monte Compatri, Edizioni Notizie in...Controluce.

Identità didattica di lezione e di ripetizione

La lezione non è un singolo atto educativo, ma un ciclo di atti. Quando una volta è spiegata, anche colla più grande freschezza e vivacità, non è però ancora compiuta. Si compie nelle ripetizioni, che sono né più né meno che lezioni nuove, nelle quali gli stessi problemi si ripresentano, atteggiandosi diversamente dalla prima volta, perché la mente degli scolari è meglio disposta dalla sua recente preparazione.

La libera lettura come unificatrice della cultura

V'è poi una considerazione importante sul valore delle letture individuali, che a noi pare anzi essenziale. Il segreto della collaborazione fra i vari insegnanti, e della fusione dei vari insegnamenti è, per molta parte, in essa. Più si esce dal sapere grettamente scolastico, manualistico, e meno le varie discipline di insegnamento hanno fra di loro barriere.

Giuseppe Lombardo Radice

(*Lezioni di didattica*, Firenze, Remo Sandron, 1963, pp. 143 e 159).

=====

Lettera aperta a coloro che amano la Scuola

*Commenti di Jocelyn Brewer, Dilip Bhatia,
Renata Santarossa, Alberto Trotta, Franco Eugeni,
Luca Nicotra, Giovanni Catalani, Luigi Giannicola*

Renata Santarossa*

* già Dirigente scolastico e membro AFSU

Carissimi amici e colleghi,

in indirizzo ho individuato una stretta cerchia di amici, particolarmente sensibili alle problematiche dell'apprendimento e quindi al ruolo della scuola, affinché si possa riflettere su questa questione che comincia ad avere numerosi proseliti, soprattutto a livello politico. Sembrerebbe un modo per sbarazzarsi del problema educativo che costa impegno e soldi allo stato.

Potrebbe essere un tema di discussione da portare avanti nelle nostre riviste a che si possa tentare di invertire le tendenze, ed è questo il motivo per il quale ho deciso assieme agli altri membri dell'AFSU di pubblicare questa mia lettera.

Inizio, prima del mio commento a presentare il comunicato ufficiale dell'Azienda Lenovo, con i risultati della ricerca.

1- Comunicato stampa dell'azienda "Lenovo"

Una nuova ricerca presentata oggi da Lenovo mostra come l'educazione a livello mondiale sia stata trasformata positivamente grazie alle tecnologie intelligenti, che hanno portato a una generazione in grado di studiare e apprendere in modo indipendente e di affrontare e risolvere situazioni problematiche.

La ricerca ha coinvolto un campione di 15.000 persone a livello globale ed è stata condotta in Brasile, Cina, Francia, Germania, Giappone, India, Italia, Messico, Regno Unito e Stati Uniti, rivelando che tre genitori su quattro (il 75%) sono convinti che i loro figli siano più propensi ad approfondire un argomento online piuttosto che chiedere loro aiuto quando si tratta di compiti a casa. I Paesi in cui questa tendenza è prevalente sono l'India (89%) e la Cina (85%), che hanno anche visto crescere, negli ultimi anni, il numero di genitori che utilizzano la tecnologia per assistere i loro figli nell'apprendimento. La percentuale più bassa, il 54%, si è registrata in Germania dove, secondo la ricerca condotta da Lenovo, si nota in generale una maggiore cautela verso la tecnologia, soprattutto in classe. Ma l'adozione della tecnologia si sta diffondendo maggiormente in Germania grazie a un'iniziativa governativa del 2018 volta a dotare oltre 40.000 scuole dei computer e del software più all'avanguardia.

Anche i genitori si affidano sempre di più alla tecnologia

D'altro canto, anche il 60% dei genitori afferma di avere effettuato ricerche online, almeno una volta, per aiutare i figli nei compiti a casa. La tendenza si è rivelata maggiore per quanto riguarda le materie STEM quali matematica (45%) e scienze (38%), oltre a geografia (36%) e lingue straniere (35%).

La grande maggioranza del campione (83%) concorda sul fatto che i progressi tecnologici abbiano trasformato positivamente l'apprendimento aiutando gli studenti a ottenere risultati migliori a scuola. Analogamente, l'84% dei genitori che lavorano afferma che le nuove tecnologie

consentono a un numero maggiore di genitori di continuare a lavorare con i vantaggi personali che ciò comporta permettendo di essere ancora più connessi con le rispettive famiglie.

Questa tendenza si manifesta soprattutto in Cina e India con il 95% del campione nei due Paesi che afferma di essere convinto che la tecnologia lo aiuti a bilanciare carriera e responsabilità genitoriale, seguiti dal Brasile all'89%. I Paesi che si sono mostrati meno d'accordo con questo punto di vista sono stati la Germania con il 68% e l'Italia con il 71%, indicazione che forse la tecnologia è meno un fattore decisivo nella scelta dei genitori sul rimanere a lavoro.

La tecnologia abilita una nuova generazione di studenti indipendenti

Anche se la tecnologia ha molti lati positivi nel supportare l'apprendimento (l'utilizzo di connessioni Internet veloci, strumenti di traduzione automatizzati e funzioni di accessibilità), il 72% dei genitori afferma di nutrire preoccupazioni sulla possibilità che crei dipendenze, con potenziali effetti sulla socializzazione dei ragazzi.

Di contro, il 73% dei genitori afferma di fidarsi della tecnologia come aiuto nell'apprendimento indipendente da parte dei ragazzi e nella loro capacità di problem solving. Questa affermazione ha trovato minore riscontro negli Stati Uniti (59%) e massimo consenso in India con il 91%, fatto che potrebbe essere legato alla crescente tendenza di questo Paese ad affidarsi alla tecnologia nell'istruzione delle generazioni più giovani. Una recente ricerca ha mostrato che la maggior parte delle madri indiane utilizza lo smartphone nelle interazioni con i figli e che otto su dieci sono convinte che gli smartphone rendano più facile essere genitori. Questo dato suggerisce che i genitori di questo Paese riconoscono il potere della tecnologia di trasformare la scuola, per esempio attraverso l'adozione della realtà virtuale per creare ambienti di apprendimento inclusivi e immersivi, sostenendo gli studenti con disabilità fisiche, sociali o cognitive.

Per quanto riguarda i giovani, i millennial e gli appartenenti alla cosiddetta Gen Z in generale pensano che la

tecnologia abbia avuto un ruolo positivo nella loro formazione, con il 41% che concorda sul fatto che essa rende più facile conoscere questioni attuali e problematiche sociali che stanno loro a cuore. Quest'opinione è condivisa da tutto il campione, con il 49% che è convinto dell'“estrema importanza” della tecnologia nel risolvere le sfide future dell'educazione.

2 - Commento di Jocelyn Brewer, psicologa fondatrice di Digital Nutrition

Non solo è stata aggiornata e rinnovata negli ultimi anni buona parte dei curriculum a livello mondiale ma sono cambiate anche la pedagogia e le modalità di apprendimento. Molti genitori si considerano male equipaggiati nell'aiutare i propri figli se non per dare loro supporto morale e incoraggiarli a livello emotivo a dare il meglio di sé.

Essere genitori in un mondo digitalmente maturo può porre nuove sfide alle famiglie moderne, perché le tecnologie per la didattica possono sembrare estranee alle loro esperienze di apprendimento e socializzazione. I genitori si possono sentire confusi circa il sostegno da dare ai loro figli per aiutarli a sviluppare le competenze accademiche, sociali ed emotive che li aiuteranno ad avere una vita soddisfacente e di successo. Cercano supporto pratico e positivo per bilanciare il valore delle tecnologie che aiutano l'apprendimento evitando fonti di distrazione.

3 - Commento di Dilip Bhatia, Vice President of User and Customer Experience, Lenovo

Non vi sono dubbi che il settore education si stia trasformando grazie alle tecnologie intelligenti, dando ai ragazzi l'opportunità di imparare in maniera coraggiosa e indipendente e di trovare da sé le risposte più corrette. Come sempre, è importante trovare il giusto equilibrio fra online e offline, ma la tecnologia può essere una forza che unisce le famiglie. È inoltre importante ricordare che alcuni genitori hanno maggiori competenze rispetto ad altri nel fornire risposte ai propri figli e che questo dato varia da Paese a Paese.

Tuttavia, le nostre soluzioni tecnologiche consentono agli studenti di sperimentare un apprendimento attivo e immersivo, che non sia confinato alle quattro mura di un'aula. È chiaro quindi che, a livello mondiale, la tecnologia consente di ridurre le differenze, permettendo a un numero sempre maggiore di bambini di accedere a molteplici fonti di informazione invece di fare esclusivo affidamento sulle competenze degli adulti che sono nelle loro immediate vicinanze.

4 - Commento di Renata Santarossa

Penso piuttosto che sarebbe il caso di scrivere qualche articolo sull'attuale ruolo del docente, affinché sia chiaro che l'attuale ruolo del docente induce gli studenti, inevitabilmente, ad affidarsi alle nuove tecnologie per l'auto-apprendimento.

Attualmente l'insegnante rischia di diventare una figura di mero diffusore di sapere in forma verbale; ipoteca inoltre molto del suo tempo per funzioni di sorveglianza e valutazione.

Il docente dovrebbe invece utilizzare le conoscenze disciplinari per fini ben più nobili, quali:

- collocare nel tempo e nello spazio, ossia avere consapevolezza della dimensione storica e della collocazione spaziale di eventi considerati;
- comunicare ed individuare forme e strumenti di espressione orale, scritta, grafica o iconica per trasmettere un messaggio;
- cogliere i significati di un messaggio ricevuto, costruire ragionamenti, organizzare il proprio pensiero in modo logico e consequenziale; --esplicitare il proprio pensiero attraverso esemplificazioni, argomentazioni e dimostrazioni;
- formulare ipotesi e congetture, intuire gli sviluppi di processi analizzati e di azioni intraprese;
- generalizzare, individuare regolarità e proprietà in contesti diversi;
- astrarre caratteristiche generali e trasferirle in contesti nuovi;
- inventare e costruire 'oggetti' anche simbolici rispondenti a determinate proprietà;
- porre in relazione e stabilire legami tra fatti, dati, termini;
- porre problemi e progettare possibili soluzioni;
- riconoscere situazioni problematiche per stabilire le strategie e le risorse necessarie per la loro soluzione;

- rappresentare e scegliere forme di presentazione simbolica per rendere evidenti relazioni esistenti tra fatti, dati, termini;
- utilizzare forme diverse di rappresentazione affinché si acquisisca la capacità di passaggio dall'una all'altra.

Quanti docenti sono formati e disposti a lavorare affinché gli studenti sappiano tirar fuori queste capacità?

Allora, forse è più semplice indottrinare...!

5 - Commento di Alberto Trotta

Non vi è alcun dubbio che le tecnologie intelligenti stiano fornendo ai ragazzi una notevole opportunità di imparare in maniera coraggiosa e indipendente e di trovare da sé le risposte più corrette.

Ma non va dimenticato però la dimensione umana, quella che più di tutti è in grado di leggere le sfumature e percepire le difficoltà.

È pertanto opportuno che i ragazzi abbiano di fronte anche dei mediatori della conoscenza come ad esempio i docenti.

Ritengo infatti che solo un giusto equilibrio tra online e offline permetta di acquisire le competenze che oggi sono richieste.

Inoltre credo che ai fini della formazione sia molto rilevante il metodo da ciascuno di noi usa nella trasmissione dei concetti.

È opportuno che ai fini di una buona formazione si faccia uso di un metodo che stimoli i giovani a riflettere e che

consenta di generare una forma di pensiero flessibile, logico e anche consequenziale.

Aggiungo che lo strumento telematico può essere utile anche per gli addetti alla formazione per lo scambio di idee e opinioni come avviene ad esempio durante i convegni.

Tante volte però parteciparvi risulta oneroso per molti sia in termini di tempo sia dal punto di vista economico.

6 - Commento di Franco Eugeni

Vedi l'articolo di Franco Eugeni, *Per una risposta alla lettera di Renata Santarossa* in questo stesso fascicolo.

7 - Commento di Luca Nicotra

Vedi l'articolo di Luca Nicotra, *Computer si, computer no?* in questo stesso fascicolo.

8 - Commento di Giovanni Catalani, docente di materie tecniche

Carissimi Colleghi,

Ho letto con attenzione la lettera con le indicazioni di Renata e ti invio un mio pensiero in proposito, la scuola, gli insegnanti, i giovani di oggi e il loro avvenire.

Sono d'accordo che non siamo nemici della telematica, anzi, ma certamente occorre dare a tale disciplina la giusta valenza didattica e comunicativa, *"la passata esperienza nostra docet!"*

È vero che l'educazione a livello mondiale sia stata trasformata positivamente grazie alle tecnologie intelligenti, che hanno portato a una generazione in grado di studiare e apprendere in modo indipendente e di affrontare e risolvere situazioni problematiche, ma per coloro che sanno già selezionare bene le informazioni, valutarne l'attendibilità e la validità ai singoli casi da adottare.

(In proposito un aneddoto di un maturando in una scuola tecnica che insisteva nel sostenere che i pannelli solari vanno orientati verso Nord. L'ho letto su internet! Ma trascurava un dettaglio, il caso dal giovane individuato riguardava un progetto realizzato in Australia: dalle nostre parti invece l'equatore è verso sud!)

Leggo che il 72% dei genitori afferma di nutrire preoccupazioni sulla possibilità che crei dipendenze, con potenziali effetti sulla socializzazione dei ragazzi.

Inoltre aggiungo per diretta esperienza che anche i ragazzi più bravi e preparati, bravi con le tecnologie ed anche nei contenuti sostanziali, hanno spesso difficoltà ad esprimersi oralmente sia con il linguaggio verbale ed anche non verbale, con proprietà espressiva ed equilibrata sicurezza di sé, senza eccessiva timidezza ma nemmeno arroganza, saper guardare il proprio interlocutore negli occhi. Tutto ciò sarà indispensabile nella vita, per affrontare un colloquio di lavoro, i futuri clienti e tutte le relazioni umane.

L'insegnante non può diventare una figura di mero diffusore passivo di sapere in forma verbale; spendendo molto del suo tempo per funzioni di sorveglianza e valutazione. Deve essere "il preparatore e allenatore" dei giovani che dovranno affrontare e vincere la partita della vita.

Il seguente COMMENTO, pur non essendo un diretto Commento alla lettera della Preside Renata Santarossa, è particolarmente adatto ad essere inserito tra i COMMENTI alla lettera!

9 - Commento alla conferenza dell'Ing. Luigi Vannicola (AFSU) sulle nuove professioni

Nell'ambito delle conferenze: *"Il martedì di cultura"* organizzate dalla Proloco di Roseto degli Abruzzi in collaborazione con Uni3 (Università della terza età) e AFSU (Accademia di Filosofia delle Scienze umane), il giorno 27.08.2019 l'ing. Luigi Vannicola, membro dell'AFSU, che ha operato in varie aziende meccaniche, nella scuola, ma anche come tecnico di Enti pubblici, ha tenuto la 4° conferenza del programma, con il titolo: *Le nuove professioni per i giovani: prospettive ed indicazioni*

L'ing. Vannicola ha iniziato precisando di rivolgersi ai giovani che desiderano prepararsi per entrare in una Azienda moderna ai fini di indicare loro su quali competenze devono indirizzare la loro preparazione.

I lavori del futuro: ecco le figure professionali più richieste sul mercato. Vediamo come il mondo del lavoro e le esigenze delle imprese sono cambiate nel corso degli anni, andando alla ricerca di nuovi specialisti.

Le tecnologie abilitanti. Da uno studio di Boston Consulting emerge che la quarta rivoluzione industriale si centra sull'adozione di alcune tecnologie definite abilitanti; alcune di

queste sono “vecchie” conoscenze, concetti già presenti ma che non hanno mai sfondato il muro della divisione tra ricerca applicata e sistemi di produzione veri e propri; oggi, invece, grazie all’interconnessione e alla collaborazione tra sistemi, il panorama del mercato globale sta cambiando portando alla personalizzazione di massa, diventando di interesse per l'intero settore manifatturiero.

Le 9 tecnologie abilitanti definite da Boston Consulting sono:

1. *Advanced manufacturing solution*: sistemi avanzati di produzione, ovvero sistemi interconnessi e modulari che permettono flessibilità e performance. In queste tecnologie rientrano i sistemi di movimentazione dei materiali automatici e la robotica avanzata, che oggi entra sul mercato con irobotcollaborativi ocobot.
2. *Additive manufacturing*: sistemi di produzione additiva che aumentano l'efficienza dell'uso dei materiali.
3. *Realtà aumentata*: sistemi di visione con realtà aumentata per guidare meglio gli operatori nello svolgimento delle attività quotidiane.
4. *Simulazioni*: simulazione tra macchine interconnesse per ottimizzare i processi.
5. *Integrazione orizzontale e verticale*: integrazione e scambio di informazioni in orizzontale e in verticale, tra tutti gli attori del processo produttivo.
6. *Industrial internet*: comunicazione tra elementi della produzione, non solo all'interno dell'azienda, ma anche all'esterno grazie all'utilizzo di internet.
7. *Cloud*: implementazione di tutte le tecnologie cloud come l'archiviazione online delle informazioni, l'uso del *cloud computing*, e di servizi esterni di analisi dati, ecc. Nel *cloud* sono contemplate anche le tecniche di gestione di grandissime quantità di dati attraverso sistemi aperti.

8. *Sicurezza informatica*: l'aumento delle interconnessioni interne ed esterne aprono la porta a tutta la tematica della sicurezza delle informazioni e dei sistemi che non devono essere alterati dall'esterno.
9. *Big Data Analytics*: tecniche di gestione di grandissime quantità di dati attraverso sistemi aperti che permettono previsioni o predizioni.

A queste si aggiungono le seguenti:

10. *Caregiver Familiari* - Il numero degli anziani sta crescendo e crescerà sempre di più. Per questo motivo tra i lavori sempre più richiesti nel futuro ci saranno quelli legati alla cura degli anziani. Non solo c'è bisogno di più medici in Italia, in vista dei tanti pensionamenti in programma. C'è bisogno anche di infermieri, operatori sanitari e badanti, in grado di prestare cura ed assistenza agli anziani. Inoltre ci sarà sempre più bisogno di professionisti in grado di offrire nuove soluzioni in ambito farmaceutico, psichiatrico, protesico ed alimentare. Lavori del futuro che già sono presenti tra di noi ed andranno ad acquistare sempre più rilievo.
11. *Interior Designer* - L'Interior Designer si occupa della progettazione in diversi ambiti: primo fra tutti è l'ambito abitativo nel senso tradizionale, includendo spazi abitativi privati e collettivi. Vi sono gli spazi pubblici, dai non-luoghi di transito (aeroporti, porti, stazioni), ai luoghi pubblici di servizi (banche, uffici postali, ospedali, scuole, spazi e allestimenti museali); i luoghi del consumo (negozi, bar, hotel) e infine gli spazi aperti (piazze, cortili e spazi per il gioco). Un insieme complesso di elementi che costruiscono la qualità della relazione tra gli individui e lo spazio che vivono di cui dimensione, arredi, luci, colori, suoni, rappresentano solo alcuni degli elementi che un progetto di interni deve saper modulare e comporre.

12. *Fashion Designer* - Oggi un fashion designer deve conoscere l'intero processo che porta alla traduzione dell'idea in un prodotto moda. Fondamentale è la conoscenza di codici e linguaggi del sistema moda, inteso come insieme di dinamiche economiche, logiche produttive industriali, strategie di marketing e comunicazione. Ci sono poi diverse aree di specializzazione, quali il Fashion Designer (specializzato nella progettazione e realizzazione di collezioni uomo/donna, bambino, maglieria, streetwear & jeanswear); il Textile Designer (specializzato nella ricerca legata ai nuovi materiali e alle tecnologie produttive); Il Product Manager (specializzato nella gestione dei processi di creazione e produzione del prodotto moda); l'Accessories Designer (specializzato nella progettazione di borse, scarpe, piccola pelletteria, ecc).
13. *Graphic Designer* - Il Graphic Designer è il professionista in grado di operare sia sugli strumenti e i media tradizionali – dalla grafica editoriale all'identità visuale di aziende ed enti, dal packaging alla identità di brand, dall'annuncio pubblicitario alla progettazione dell'allestimento di una mostra – sia in tutti i modi e con tutti i linguaggi legati ai nuovi media e alle tecnologie digitali: il web in tutte le sue articolazioni, i dispositivi mobili (smartphone, tablet), l'editoria digitale, la motion graphic per video e televisione. La sua cultura progettuale deve essere trasversale, coprendo aspetti teorici e competenze tecniche più specifiche.

Occorre inoltre, come minimo linguistico un inglese fluente che vada oltre le certificazioni standard per essere in grado di partecipare ai workshop telematico e una conoscenza del tedesco tecnico.

Dove si acquisiscono parte di queste conoscenze, almeno nelle Marche e negli Abruzzi.

Per essere un Esperto di programmi avanzati di progettazione macchine di produzione a controllo numerico occorre essere disinvolti con i seguenti programmi informatici:

- Autocad: disegno
- CAD-CAM: disegno macchine a controllo numerico
- Rhinoceros-modellazione
- CATIA v5: CAD-CAM avanzato-disegno 3d-lavorazione prodotti con macchine a controllo numerico (più completo, qualificato, ricercato)
- Corsi per tali programmi sono presso società, on line brevi, annuali, esami universitari, test per autodidatta (ricerca in internet).
- La conoscenza del tedesco permette uso e studio con manuali di alto livello
- Note: il lavoro in questi settori sono fortemente richiesti nel centro-nord Italia, in Germania. Da ricercare in internet <cerca lavoro>

Corsi di formazione post diploma: ITS-Istituto Tecnico Superiore.

Gli ITS sono istituti tecnici superiori triennali, con elevate e specifiche specializzazioni di attività esistenti nell'area industriale di riferimento, cofinanziati dalle stesse industrie locali e a numero chiuso, allo scopo di immettere nelle loro aziende la totalità degli iscritti.

- ITS – Ortona: tecnici per trasporto e logistica
- ITS – Lanciano: automazione e sistemi mecatronici – industria 4.0

- ITS – Marche: (1- settore moda2- settore agroalimentare3 – settore calzaturiero)
- Enti interessati: ITS montani - confindustria Fermo - CCIAA fermoregione Marche - provincia Fermo - gli IFTS sono istituti professionali superiori - IFTS calzaturiero professionale – aziende Fermo

9.1 - Il commento della platea

L'ing. Roberto Santicchia, presidente della proloco di Roseto, e Chairman della serata, precisando che per anni ha lavorato presso l'aviazione e successivamente in varie aziende, come consulente, ha trovato la relazione in perfetta linea con le esigenze attuali aziendali ed ottime indicazioni per i giovani.

L'ing. Aurelio Formicone della proloco, ricordando la sua lunga esperienza presso l'IBM ha precisato che oggi le attività sono state classificate come web1.0 (diti statici), web 2.0 (siti interattivi e piattaforme), web 3.0 (web come database), web 4.0 (macchine che gestiscono macchine, in perfetta linea con quanto detto dall'ing Vannicola). Ma avverte che al più tra un triennio anche questi programmi diverranno parzialmente obsoleti con il web 5.0 (computer quantici) che per l'aumento terrificante delle velocità opereranno in pochi secondi calcoli che oggi richiedono molti giorni, mettendo in crisi tutto il sistema delle transazioni on line. Occorre lavorare molto, per un futuro che vedrà una rivoluzione che andrà ben oltre il pensabile.

La prof.ssa Maria Concetta Nicolai, scrittrice e professoressa di lettere, si dimostra altamente critica nei

confronti dell'Informatica. Pur dichiarando che fa uso di internet per accedere a svariati archivi ed alla posta elettronica, ritiene che la formazione non può che passare dal latino, dal greco, dall'analisi logica, dalla memorizzazione dei classici, insomma da quello che fu il progetto Gentile, sia pur rivisitato più volte dagli esperti del ministero.

Il prof. Aladino De Paolis, vicepresidente AFSU, anche lui professore sia di lettere sia di storia e Filosofia, tenta una mediazione, spiegando che forse per un tecnico la preparazione gentiliana può essere meno sostenuta di quanto chiede la Professoressa.

Il prof. Franco Eugeni, presidente dell'AFSU, interviene spiegando che la diatriba si risolve osservando che la formazione di cui parla la Nicolai e quella di cui parla l'ing Vannicola agiscono su piani del sapere totalmente differenti. La formazione, per così dire gentiliana, opera su studenti della scuola media e dei Licei, se uno studente che fa questo percorso decide poi di prendere una strada tecnica si iscriverà ad Ingegneria, informatica o matematica e costruirà un sapere nuovo, che se si deve esplicitare presso una azienda, non può che essere quello indicato dal Conferenziere. Differente è il piano del sapere di un ragazzo che si iscrive dopo la scuola media unica ad un istituto tecnico o professionale. Niente latino e greco, più materie tecniche e poi il sogno di essere un tecnico di elevato profilo in aziende di vario tipo. Del resto se confrontiamo la cultura impartita dalle nostre scuole con quelle dell'Inghilterra, Germania, Stati Uniti vedremmo, ben lontano da loro, ogni vecchio sogno dell'antico autore della Riforma Gentile.

L'ing Vincenzo Casolani, è sostanzialmente in pieno accordo con il relatore, la sua esperienza presso Aziende e all'interno della Regione, anzi, gli fanno affermare che mentre per il nord il programma Vannicola è indispensabile per il centro-sud ci sono ancora ampi margini per assumere operai specializzati invece che tecnici di alto profilo.

Si conclude in tal modo la serie degli interventi che vanno da un'informatica accelerata di Formicone, ad una informatica frenata della Nicolai, mentre l'intervento del conferenziere si colloca esattamente nel mezzo, indicando quindi una precisa via del sapere.

RECENSIONI

Francesco Lerda, *Intelligenza umana e intelligenza artificiale* (*Est modus in Rebus*), Catanzaro, Rubettino Scientifica, 2002.

Recensione a cura di Danilo Pelusi (Università di Teramo)

In corrispondenza agli straordinari sviluppi dell'informatica degli ultimi decenni, sono iniziati numerosi tentativi per trasferire sulle "macchine" la capacità di eseguire operazioni "intelligenti". L'insieme delle ricerche effettuate per conseguire tale scopo va sotto il nome di "Intelligenza Artificiale". Questi studi seguono due differenti vie: la manipolazione simbolica e l'approccio connessionista o neuronale. La prima parte dal presupposto che l'intelligenza consista nella manipolazione di simboli secondo ben definite regole formali. Nella seconda si costruiscono dispositivi organizzati in modo da simulare la struttura ed il comportamento del cervello umano.

Entrambi gli approcci hanno contribuito, seppur in differenti periodi, all'ampliamento delle ricerche sull'intelligenza artificiale. In particolare tra la fine degli anni '60 e la metà degli anni '80, la manipolazione simbolica ha avuto il sopravvento grazie alla cosiddetta Ipotesi Forte dell'intelligenza artificiale (IFIA). In base a quest'ultima tutta l'attività mentale umana sarebbe programmabile su computer. Di conseguenza, in tale contesto, è di fondamentale rilevanza l'elaboratore elettronico che è venuto ad assumere il ruolo di "modello del cervello", soprattutto da un punto di vista software.

Una nozione di fondamentale importanza, quando si parla di intelligenza artificiale, è quella di algoritmo. Da un punto di vista intuitivo, per algoritmo si intende una descrizione completamente definita di una data elaborazione. In particolare esso deve indicare, in maniera univoca, il primo passo da compiere, e dopo aver compiuto i passi (con i intero positivo qualsiasi), quale deve essere l' $(i+1)$ -esimo passo da compiere. Preciso il concetto di algoritmo è possibile definire l'IFIA con termini precisi: l'intelligenza umana è totalmente algoritmica.

L'ipotesi forte dell'intelligenza artificiale costituisce un punto cruciale nel dibattito sui rapporti fra intelligenza artificiale ed intelligenza umana. La comunità degli studiosi è profondamente divisa sull'accettazione o meno di tale ipotesi. Generalmente gli argomenti a favore o contro l'IFIA sono, o quantomeno intendono essere, di natura strettamente "scientifica", con richieste di accentuata rigosità. Tuttavia, i rapporti tra intelligenza umana ed intelligenza artificiale non costituiscono un "problema scientifico rigoroso" in senso stretto, infatti essi coinvolgono anche aspetti filosofici e psicologici.

Il pensiero filosofico, rispetto al pensiero scientifico, è molto meno "specificato" e contiene, in certi casi, incomprensioni scioccanti.

Il pensiero psicologico è di particolare importanza in relazione al problema dei rapporti tra intelligenza umana e computer. Infatti, la Psicologia studia il modo di fare dell'uomo in base alle esperienze acquisite e all'ambiente in cui si muove. Un programma che funziona su un determinato

hardware, invece, fornirà gli stessi risultati indipendentemente dall'ambiente in cui lavora.

Pare proprio che la filosofia e la psicologia non rafforzino l'IFIA!

Ulteriori considerazioni possono essere sviluppate confrontando la creatività dell'uomo e la pura attività algoritmo-computazionale. Infatti non esiste alcun metodo logico che ci permetta di avere nuove idee: queste possono essere raggiunte soltanto tramite l'intuizione.

Il rapporto tra l'intelligenza umana e quella artificiale è allo studio di molti scienziati matematici, informatici e fisici e di numerosi filosofi. Ognuno di essi opera con metodologie differenti in base alla formazione ricevuta dagli studi effettuati. Tuttavia, è accaduto che dei filosofi abbiano cercato di rendere più rigorose le loro analisi utilizzando procedimenti propri del metodo scientifico. Alla stessa maniera parecchi scienziati hanno avuto la necessità di oltrepassare le rigidità del metodo scientifico mediante una ricerca più "libera". Con tale atteggiamento sia gli scienziati che i filosofi hanno finito per assumere dei comportamenti simili e similmente inconcludenti.

Indice

Prologo p. 5

Introduzione 7

1. La mente umana è governata da un programma? 17
2. L'infinito, il continuo, il platonismo in matematica 19
3. Una umanità senza aperture sul nonformale 23
4. Sistemi fisici a sistemi informative 29
5. Filosofia, psicologia, scienza 33
6. Arte a letteratura. Musica; teatro; arti figurative; architettura; letteratura; poesia 41

7. La creatività	51
8. Quo usque tandem	55
Epilogo	63
Conclusione	65
Appendice	71
Bibliografia	79
Indice analitico	83
Indice dei nomi	87

Richard Courant , Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Torino, Bollati Boringhieri, 2000. Traduzione di Liliana Ragusa Gilli, riveduta da Laura Servidei.

Recensione a cura di Vincenzo Di Marcello

Che cos'è la matematica ? è un classico, una collezione di sfavillanti gemme matematiche, creata per contrastare l'idea che " la matematica sia solo un sistema di risultati derivati da definizioni e postulati, che deve essere coerente, ma altrimenti dipendente solo dalla volontà del matematico. (dalla prefazione di Ian Stewart giugno 1995) .

Concepito per principianti e scienziati, per studenti e insegnanti, per filosofi e ingegneri, offre una illustrazione brillante e accessibile del mondo matematico. Scritto in ordine sistematico, il libro può essere letto anche per gruppi di capitoli (i vari capitoli sono largamente indipendenti tra loro) a seconda delle esigenze conoscitive e didattiche, e in ogni caso l'esposizione gradua sempre opportunamente le difficoltà. Gli insegnati delle scuole superiori potranno trovare materiale utile per esercitazioni o seminari di studenti nei capitoli sulle costruzioni geometriche e sui massimi e minimi. Questa seconda edizione interamente riveduta, Ian

Stewart ha aggiunto commenti e integrazioni in varie parti del testo e un intero capitolo dedicato ai recenti sviluppi della matematica (la congettura di Goldbach e i primi gemelli; l'ultimo teorema di Fermat; il teorema dei quattro colori; ecc.).

Indice

15	Premessa
17	Prefazione del curatore alla seconda edizione
21	Prefazione alla seconda edizione
23	Prefazione alle edizioni rivedute
	Che cos'è la matematica ?
27	Come si usa questo libro
29	Che cos'è la matematica ?
35	1. I numeri naturali
	Introduzione, 35
	§ 1. Il calcolo con i numeri interi, 36
	1. Le leggi dell'aritmetica, 36
	2. La rappresentazione dei numeri interi, 39
	3. Calcolo in sistemi non decimali, 42
	§ 2. L'infinità del sistema numerico. Induzione
	matematica, 45
	1. Il principio di induzione matematica, 45
	2. Progressioni aritmetiche, 47
	3. Progressioni geometriche, 49
	4. La somma dei primi n quadrati, 50
	5. Un'importante disuguaglianza, 51
	6. il teorema del binomio, 52
	7. Osservazioni sul principio di induzione
	matematica, 55
58	Supplemento al capitolo 1. La teoria dei numeri
	Introduzione, 58
	§1 I numeri primi, 58
	1. Proprietà fondamentali, 58.

Profili biografici degli Autori

Giuseppe Anichini (Firenze) - giuseppe.anichini@unifi.it - Professore Ordinario di Analisi Matematica, già Direttore del Dipartimento “U.Dini”, Università di Firenze, già Segretario Nazionale UMI (Unione Matematica Italiana).

Giordano Bruno (Roma) - gibrun84@gmail.com

Docente di Sistemica presso l'ISIA di Roma. Ha insegnato Analisi Matematica e Calcolo delle probabilità e statistica nella Facoltà di Ingegneria dell'Università “Sapienza” di Roma. Successivamente è stato Direttore dell'Istituto Superiore delle Industrie Artistiche della sede di Roma e di quella di Pescara. È Presidente della Fondazione “MORFE”, che si occupa di diffondere la cultura del design e favorisce la creazione di start-up. È presidente onorario dell'associazione “Arte e Scienza” e direttore onorario del periodico «ArteScienza». Esperto e divulgatore della Teoria dei Sistemi, ha organizzato mostre e convegni nei settori della matematica applicata e del design.

Ferdinando Casolaro (Napoli) - ferdinando.casolaro@gmail.com

Professore a contratto di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Architettura dell'Università “Federico II” di Napoli e presso il Dipartimento D.E.M.M. dell'Università del Sannio. E' autore di oltre 100 pubblicazioni scientifiche e vari libri. Fa parte dell'Editorial Board (Comitato Editoriale/Scientifico) della rivista “Science & Philosophy”, e Socio fondatore del “Periodico di Matematica” nella sua nuova rinascita 100 anni dopo la sospensione del 1918. E' Presidente della sezione di Napoli della Mathesis, Società di Matematica e Fisica, di cui è stato Segretario nazionale ed ha fatto parte del Consiglio Direttivo nel periodo 2003-2014.

Franco Eugeni (Teramo) – eugenif3@gmail.com

Coordinatore PHD. Già professore ordinario di Discipline Matematiche e di Logica e Filosofia della Scienza in varie Università (Modena, L'Aquila, Chieti, Milano, Roma). È stato presidente nazionale della Società Italiana di Matematica e Fisica "Mathesis", direttore di dipartimento e delegato rettorale per la Didattica. È membro onorario della "Romanian Society for Fuzzy Systems" a Iasi. Direttore dei periodici telematici «Ratio Mathematica», «Eiris (Epistemologia dell'Informatica e Ricerca Sociale)», «SEM Bollettino dell'AFSU, Vol. I (1), 2018.(Skills for Economic Management)», «Divulgazione della Scienza e della Filosofia». È stato Presidente dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV, fondata nel 1598). È presidente dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). È condirettore dei periodici «Science & Philosophy» e «Bollettino dell'AFSU» ed è fondatore della rinata rivista "Periodico di Matematica", dopo 100 anni dalla sua chiusura nel 1918. È membro dei Consigli Scientifici delle Riviste «Italian J. of Applied Mathematics» e «J.of Interdisciplinary Mathematics». È stato membro dei Consigli Scientifici dei «Rendiconti di Matematica» e del «Journal of Optimization and Economic Science». È Commendatore della Repubblica e professore onorario nell'Università A. Cuza di Iasi (Romania). Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Raffaele Mascella (Teramo) – rmascella@unite.it

PHD e Docente PHD. Matematico e dottore di ricerca. Già borsista, professore di Matematica nella scuola secondaria, Ricercatore di Informatica e Professore Associato di Filosofia della Scienza. È stato vicepresidente di facoltà e presidente di corso di laurea. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Luca Nicotra (Roma) – luca.nicotra1949@gmail.com

Ingegnere meccanico e giornalista pubblicista. Autore di circa 300 articoli, tecnici e di divulgazione scientifica, e di vari libri fra cui Bruno de Finetti: un matematico scomodo, la prima biografia mondiale del grande scienziato. Ha svolto attività di ricerca nel campo della trasmissione del calore e nel settore dei sistemi di guerra elettronica. Esperto di sistemi computerizzati per la progettazione e produzione meccanica. È Presidente

dell'Associazione Culturale "Arte e Scienza", membro onorario dell'Accademia Piceno Aprutina dei Velati (APAV) e dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU), membro del comitato scientifico della rivista «Science & Philosophy», fondatore e direttore responsabile dei periodici «ArteScienza», «Bollettino dell'Accademia di Filosofia delle Scienze Umane», «Periodico di Matematica». Direttore editoriale della casa editrice UniversItalia. Per le ricerche si veda il sito Research Gate.

Canio Noce (Salerno) - canio@fisica.unisa.it

Professore Associato di Istituzioni di Fisica Teorica, già Coordinatore del collegio dei docenti per il Dottorato di Ricerca in Fisica, Università di Salerno.

Danilo Pelusi (Teramo) - dpelusi@unite.it

Fisico, PHD e docente PHD. Dopo l'esperienza triennale di gestione del laboratorio di elettronica dell'Osservatorio Astronomico di Teramo, ottenne una borsa di dottorato, poi una borsa di ricerca. E' stato per alcuni anni professore di Matematica e Informatica nella scuola secondaria, poi vincitore per un posto da Ricercatore e successivamente divenuto, per idoneità, professore associato di Informatica nell'Università di Teramo. Per le ricerche vedasi il sito Research Gate.

Renata Santarossa (Napoli) - santarossa.renata@gmail.com

Laureata in matematica e specializzata in "Teorie e tecniche per l'impiego dei calcolatori elettronici" (Politecnico di Napoli). È stata docente di matematica e fisica, dal 2001 è stata supervisore alla SISS per l'abilitazione all'insegnamento della matematica e fisica dell'Università di Napoli. Ha fatto parte della Commissione MIUR per le Indicazioni Nazionali (2000), e coautrice del testo La matematica per il cittadino. Dal 2009 dirigente scolastico in regione Lombardia e nello stesso ruolo ha tenuto corsi di formazione per il MIUR. Docente a contratto presso le università della Calabria e Napoli. I suoi articoli su riviste scientifiche internazionali riguardano problematiche di didattica della matematica.

Alberto Trotta (Salerno) - albertotrotta@virgilio.it

Professore di Matematica e Fisica nelle Scuole Secondarie. Ha partecipato, specialmente come relatore a numerosi congressi nazionali indetti dalla Società Italiana di Matematica e Fisica “Mathesis”, della quale è stato presidente di sezione. Membro dell’Accademia di Filosofia delle Scienze Umane (AFSU). – Segretario di Redazione.

Norme per gli autori

Vengono qui riportate le principali norme editoriali che devono essere applicate dagli Autori per la redazione degli articoli. Una versione dettagliata ed esauriente è consultabili nel sito dell'AFSU.

VIRGOLETTE

A) Si scrivono tra virgolette basse o caporali all'interno del testo (« ») (« si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 174 sul tastierino numerico; » si ottiene mantenendo premuto Alt e componendo 175 sul tastierino numerico) :

- le citazioni quando non troppo lunghe (da valutarsi caso per caso) e inserite in modo tale da integrare lo stesso testo (parole fatte proprie dall'Autore);
- i discorsi diretti;
- le testate di periodici («L'Espresso»).

Ricordiamo che il punto fermo va generalmente fuori dalle virgolette (».), anche se all'interno c'è già un punto interrogativo, esclamativo o i puntini di sospensione; va invece all'interno delle virgolette quando la citazione o il discorso diretto (specie in narrativa) non è introdotto dai due punti, ovvero quando la citazione o la frase è preceduta da un punto.

B) Si scrivono tra virgolette alte o doppi apici (" "):

- le citazioni all'interno di citazioni. Esempio: Platone scrisse: «Un giorno Socrate disse: "Questo è un uomo"»;
- le parti pensate quando vanno distinte dal discorso diretto. Esempio: "Devo andare via" pensò Luigi tra sé e sé mentre intanto le diceva: «Resta, parliamo ancora»;
- le parole o frasi evidenziate in quanto:
- usate in senso ironico o prescindendo dal loro significato letterale (esempio: i "poveri" statunitensi possiedono soltanto un'automobile ciascuno);
- usate per esprimere un concetto particolare (il concetto di "rinascita", l'idea del "bello");
- di uso comune alle quali si vuole dare una particolare enfasi (da usare con moderazione);
- espressioni figurate o gergali (sciopero "a singhiozzo");
- le testate dei quotidiani ("la Repubblica");
- titoli di capitoli o parti di libri citati (nel capitolo "Aristotele nel Medioevo" parleremo di...);
- titoli di convegni, seminari, conferenze o interventi;

- denominazioni aggiunte a scuole, associazioni, musei, ecc. (il Conservatorio di Musica “Giuseppe Verdi”, il Circolo culturale “Cesare Pavese”, il liceo statale “Giacomo Leopardi”, l’ospedale “Sandro Pertini”, ecc.; ma: l’Accademia di Brera, il Teatro alla Scala).

C) Le virgolette singole o apici semplici (‘ ’) non si usano mai, a eccezione della citazione all’interno di un discorso già tra apici doppi o di una scelta specifica e coerente in se stessa da parte dell’autore, specie se esperto di italianistica o linguistica.

D) Per esprimere minuti e secondi si usano le stanghette dritte (Bartali giunse a 1'45" da Coppi).

E) Per gli apici doppi e l’apice singolo (quest’ultimo ricorrente prevalentemente come apostrofo o elisione) utilizzare quelli tipografici o aggraziati, e non le stanghette dritte (“ ” e non " "; ‘ e non ').

SOTTOLINEATO

Il sottolineato non si usa mai; se c’è va sostituito con il corsivo. Non utilizzare mai insieme corsivo e sottolineato.

GRASSETTO

Il grassetto non si usa mai nel corpo testo, eventualmente soltanto nei titoli.

CORSIVO

Si scrivono in corsivo:

- i titoli di libri (italiani o stranieri), articoli di giornale e di rivista, brani poetici, racconti, opere d'arte, brani musicali, film, trasmissioni radiofoniche e televisive;
- le parole straniere quando non sono di uso comune nella lingua italiana (esempi: *Weltanschauung*, *cherchez la femme*; ma: film, festival, computer (da notare che la punteggiatura che segue il corsivo resta in tondo!);
- le denominazioni scientifiche delle scienze naturali;
- in alcuni contesti particolari, termini tecnici o specialistici;
- i titoli di brani musicali, tranne l'indicazione strumentale e il numero d'opera. Esempi: Sonata in la minore per pianoforte K. 310; Quinta Sinfonia in do minore op. 67; Sonata quasi una fantasia in do minore Al chiaro di luna per pianoforte n. 14 op. 27 n. 2 (N.B.: i vari elementi del titolo seguono sempre l'ordine indicato in questi esempi). I sottotitoli e le arie vanno in corsivo con l'iniziale maiuscola quando non sono quelli originali. Esempi: Patetica, La donna è mobile;
- i nomi propri di aeroplani, navi e divisioni militari.

PAROLE STRANIERE

Le parole straniere entrate nell'uso comune vanno in tondo e non prendono la desinenza del plurale. Esempi: i film, i box, i pub e non: i films, i boxes, i pubs.

CONGIUNZIONI "E", "ED"

Si usa sempre "e" ma si usa "ed" davanti a parola che inizia con "e".

PREPOSIZIONI "A" "AD"

Si usa sempre "a" ma si usa "ad" soltanto davanti a parola che inizia con "a".

RIFERIMENTI A NOTE

I numeri di rimando alle note devono essere scritti come apici di seguito al termine cui si riferiscono se non vi sono segni di punteggiatura. In caso contrario, devono essere scritti come apici di seguito al segno di punteggiatura. Esempi:

coltura¹

coltura;¹

coltura,¹

coltura:¹

coltura.¹

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

I riferimenti bibliografici seguono lo standard APA (Autore, anno di pubblicazione). I riferimenti bibliografici nel testo comprendono entro la parentesi tonda il cognome dell'autore e l'anno di pubblicazione:

(Eugeni & Ruscio, 2004)

Nella bibliografia posta a fine articolo, invece:

Eugeni Franco, Ruscio Edoardo (2004). *Carlo Forti, allievo di Niccolò Fergola, ingegnere sul campo*. Teramo, Edilgrafital.

Lo standard APA prevede, nella bibliografia, l'indicazione del cognome dell'autore seguito dalla iniziale puntata del nome. Per evitare casi di omonimia (per es. Raffaele Bombelli, Rocco Bombelli) e per maggiore informazione nelle ricerche bibliografiche che si intendessero seguire, preferiamo indicare per esteso anche i nomi degli autori come nell'esempio sopra riportato..

Per maggiori dettagli si rimanda alle norme di citazioni bibliografiche APA consultabile nel sito dell'AFSU.