

CAPITOLO I

LA TEORIA INGENUA DEGLI INSIEMI ED ELEMENTI DI LOGICA

Non sappiamo dove cominciare la nostra
analisi del mondo. La tradizione
scientifica non ce lo dice. Ci dice solo
dove e come hanno cominciato altri, e
dove sono arrivati.

KARL POPPER

La teoria degli insiemi costituisce la materia prima per ogni argomentazione di carattere matematico. Essa, oltre a permettere di definire e descrivere i concetti matematici rapidamente e con il loro giusto rigore, consente di realizzare con una certa efficacia quella che è sempre stata una delle caratteristiche tipiche dei matematici: la generalizzazione degli argomenti studiati e, al tempo stesso l'unificazione di modelli a prima vista tra di loro anche molto lontani.

1. SIMBOLISMO e NOMENCLATURA

La teoria degli insiemi nasce e si sviluppa soprattutto per meglio comprendere l'infinito e l'astratto in Matematica. Tale teoria è inizialmente opera di George

CANTOR 1845-1918) con le sue fondamentali Memorie risalenti agli inizi del 1880. Si aprono in tale modo nuove vie al pensiero umano e tutto l'edificio logico delle matematiche si rafforza sempre maggiormente. Si toccano dei veri culmini con il movimento Bourbakista (Nicolas Bourbaki e' un pseudonimo sotto cui un gruppo di Matematici a partire dal 1940 sta pubblicando una serie di volumi cosituenti un trattato generale della matematica). Lo scopo del movimento e' la revisione da un punto di vista assiomatico e astratto di tutta la matematica. Sono apparsi circa una trentina di volumi dell'opera bourbakisa : *Elements de Mathematique*. Ancora un risultato esaltante nel terreno dei fondamenti della Matematica : la prova di Godel (1931) che asserisce l'impossibilita' di provare la non contraddittorieta' di un sistema razionale con i mezzi offerti dal sistema stesso.

In generale, dare una definizione significa introdurre un concetto nuovo mediante altri gia' noti (cioe', definiti in precedenza). Quando si afferma ad esempio : *un numero naturale si dice primo se non ha alcun divisore oltre a uno ed a se stesso*, si definisce il concetto di numero primo mediante i concetti di *numero naturale* e di *divisore*, che devono essere gia' noti. Ogni definizione, dunque, presuppone altre definizioni ad essa precedenti. E' evidente, allora, che debba esserci un "qualcosa" (uno o piu' concetti) che non si definisce e che serve quale "punto di partenza" per tutte le definizioni successive. Quando un ente non si definisce (perche' "punto di partenza") si dice

che e' un ente *primitivo*. Se ci si pensa, non siamo in grado di scrivere frasi (definizione esplicite) nelle quali, il soggetto unico, incognito, sia la parola punto, retta, piano : sono concetti primitivi. Per essi occorre ricorrere o ad una via assiomatica oppure alla via intuitiva o ingenua.

Riterremo il concetto di insieme un concetto primitivo e come tale non suscettibile di una definizione.

Indicheremo gli insiemi con lettere latine maiuscole

A, B, C, ...

e gli oggetti di un insieme con lettere latine minuscole:

a, b, c,

Riterremo assegnato un insieme quando per ogni suo oggetto, si sa dire se esso "appartiene" o "non appartiene" all'insieme considerato. Supporremo dunque dato un criterio mediante il quale dati a ed A è possibile una ed una sola delle alternative

$a \in A$ (a è elemento di A)

$a \notin A$ (a non è elemento di A)

In particolare un insieme si riterrà' dato quando si conosca l'elenco dei suoi elementi . Ad es. $A = \{a, b, c, \}$ è l'insieme composto dagli oggetti a, b, c .

Un insieme può essere descritto in altro modo indicando una proprietà, che non dia luogo ad equivoci, che accomuni gli elementi che gli appartengono. La descrizione o definizione dell'insieme viene simbolicamente racchiusa tra due parentesi graffe e si adoperano "idue punti" (si legge «tale che ») per segnare la corrispondenza tra punti e proprietà. In simboli

$$A = \{x : P(x) \text{ è vera}\}$$

significa che A è l'insieme di tutti gli elementi x per cui vale la proprietà P(x).

Non useremo mai frasi coinvolgenti la totalità Ω di tutti gli insiemi, la quale, se considerata a sua volta come un insieme, dà luogo a difficoltà di carattere logico. A questo riguardo riportiamo il seguente famoso **paradosso di Russel**. Consideriamo le seguenti famiglie di insiemi:

a) quelli che contengono se stessi come elemento che diciamo *anormali* (per esempio l'insieme dei pensieri che è un pensiero);

b) quelli che non contengono se stessi come elemento che diciamo *normali* (ad esempio i numeri naturali).

L'insieme ξ degli insiemi normali è normale ?

Supponiamo ξ anormale. Allora, per ipotesi, tra i suoi elementi c'è ξ stesso. Dunque tra gli elementi di ξ c'è un insieme (ξ stesso) che contiene se stesso come elemento e questo è contro la definizione di ξ (che contiene solo insiemi normali), un assurdo.

Supponiamo ξ normale. Dunque tra gli elementi di ξ vi è ξ stesso essendo ξ l'insieme degli insiemi normali; ciò significa che ξ èanormale, un assurdo.

E' dunque meglio non usare frasi come "la totalità degli insiemi tali che...". In queste frasi può nascondersi l'insidia del paradosso. L'enigma sconcertante è costituito dal fatto che le usuali regole della logica non sono applicabili a classi di proposizioni o insiemi qualsiasi. Le

costruzioni vanno limitate. se non si vuole cadere nel paradosso.

Un usuale metodo per aggirare l'ostacolo consiste nel fissare un insieme, diciamo di lavoro, nel quale pensare tutti gli oggetti e gli insiemi con i quali si opera in un determinato concetto. Denoteremo questo insieme con Ω e lo chiameremo universo o ambiente.

Non useremo mai, perche' equivoche, espressioni del tipo " l'insieme dei giochi divertenti", o "l'insieme dei libri gradevoli", adoperate di frequente nel linguaggio comune. Esse non definiscono insiemi nel senso suddetto: infatti, esse non permettono di stabilire con esattezza quali sono gli elementi dell'insieme e quali non lo sono.

- osserviamo che, se non si fissa l'insieme Ω , una espressione del tipo $\{x : P(x)\}$ puo' non rappresentare un insieme. Proviamo cio' con un esempio. Sia $P(x)$ la proprieta' " $x \notin x$ " e si supponga che $A = \{x : x \notin x\}$ sia un insieme. Puo' capitare che allora che l'oggetto A sia elemento dell'insieme A , oppure no. Se $A \in A$, allora A verifica la proprieta' $P(x)$, dunque $A \notin A$. Se $A \notin A$, allora A non e' un elemnto che verifica la proprieta' $P(x)$, dunque $A \in A$. In ogni caso si ha una contraddizione. Si conclude che $A = \{x : x \notin x\}$ non e' un insieme. Questa osservazione e' solo un modo diverso di leggere l'antinomia di Russel.

- A parte queste considerazioni, e' evidente che l'indicazione dell'insieme Ω puo' essere a volte

sottointesa, specie quando la sua determinazione e' ovvia o e' stata prefissata, una volta per tutte all'inizio dell'argomento che si sta trattando.

2. QUESTIONI DI LOGICA E SIMBOLISMO LOGICO

Gli errori fatali della vita non sono davanti al fatto che l'uomo sia un essere irragionevole: un momento di irragionevolezza puo' essere il nostro momento piu' alto. Gli errori sono dovuti al fatto che l'uomo e' un essere logico.

Oscar Wilde, De Profundis.

Il linguaggio matematico, come ogni altro linguaggio, fa uso di "espressioni", dette *proposizioni*. Per evitare *ambiguita'*, non accettabili in un linguaggio rigoroso, il linguaggio matematico prende in considerazione soltanto proposizioni alle quali si possa dare con precisione un *valore di verita'*. Naturalmente si possono concepire logiche con piu' valori di *verita'*. Noi accetteremo in matematica solo quelle proposizioni che hanno esattamente due valori di *verita'* vero e falso. Queste proposizioni sono quelle che Aristotele, l'Euclide della Logica, chiama i giudizi.

Sono di questo tipo le proposizioni:

A: " 3 e' un numero dispari "; B: " 4 e' divisibile per 3";
C: " Ogni triangolo a 4 lati " ; D: " Il leone e' un animale".

(A, D sono proposizioni vere; B, C sono proposizioni false).

Non sono del tipo suddette le proposizioni :

E : " Piovera' domani! "; F : " Studiare non mi piace! "

L'affermare che una certa proposizione P e' vera (o che ha il valora di verita' v) o che e' falsa (o che ha il valore di verita' f) precisa semplicemente il nostro atteggiamento riguardo a P stessa, sia che per dare ad esempio il valore v occorra postularlo cioe' richiederlo, sia che cio' scaturisca da una precedente considerazione.

Ci interesseremo per ora di due legami tra proposizioni. Uno di questi e' considerare, data una proposizione P , la proposizione $\neg P$, che si dice la negazione di P e che si definisce come la proposizione che ha il valore v quando P ha il valore f e viceversa, secondo lo schema:

P	$\neg P$
v	f
f	v

Tra i simboli adoperati nel linguaggio matematico, figurano spesso i due *quantificatori*:

\forall , \exists .

Il simbolo \forall si legge "per ogni ...", e prende il nome di *quantificatore universale*. Il simbolo \exists si legge "*esiste almeno un ...*" e viene detto *quantificatore esistenziale*. Essi vengono adoperati soprattutto quanto si debba esprimere che una certa proprieta' $P(x)$ e' vera per *tutti* gli elementi di un dato insieme A (\forall), o che (Px) e' vera per *almeno uno* degli elementi $x \in A$ (\exists).

Ad esempio se $N^* = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \}$, si puo' scrivere:
 $\mathcal{P} : " \forall x \in N^* , x^2 + 1 > 0 "$; $\mathcal{Q} : " \exists x \in N^* : x < 10 "$;
 ottenendo due proposizioni vere (infatti per ogni intero
 positivo x risulta sempre $x^2 + 1 > 0$; esiste, inoltre,
 almeno un intero positivo x , ad esempio $x = 5$, minore di
 10).

Se si scrive, invece,

$\mathcal{R} : " \forall x \in N^* , x^2 - 4 > 0 "$; $\mathcal{S} : " \exists x \in N^* : 1 + x < 0 "$;
 si ottengono due proposizioni false (non e' vero che per
tutti gli interi positivi x si ha $x^2 - 4 > 0$, e non e'
 vero che esiste un intero positivo x tale che risulti
 $1 + x < 0$).

Puo' capitare a volte di dovere scrivere la negazione di
 una proposizione in cui compaiono i due quantificatori \forall , \exists

Se $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ e

$$\mathcal{P} : " \forall x \in A , x > 3 " ,$$

evidentemente \mathcal{P} e' una proposizione falsa: essa afferma che
 tutti gli elementi dell'insieme A sono maggiori di 3 . La
 sua negazione $\neg \mathcal{P}$ e' "non e' vero che tutti gli elementi di
 A sono maggiori di 3", ossia "esiste almeno un elemento di
 A non maggiore di 3":

E' grave errore pensare che la negazione dell'espressione \mathcal{P}
 sia "tutti gli elementi di A non sono maggiori di 3" (se
 cosi' fosse \mathcal{P} e $\neg \mathcal{P}$ sarebbero entrambe false!). Si ha invece:

$$\neg \mathcal{P} : " \exists x \in A , x \leq 3 "$$

In modo analogo, se si considera l'espressione (falsa)

$$\mathcal{Q} : " \exists x \in A : x < 0 " ,$$

la sua negazione $\neg Q$ e' "non e' vero che esiste almeno un elementodi A negativo ", ossia "tutti gli elementi di A sono non negativi":

$$\neg Q : " \forall x \in A , x \geq 0 " .$$

In generale, date le proposizioni (vere o false che siano) .

$\mathcal{P} : " \forall x \in A , P(x) \text{ e' vera} " ,$

$Q : " \exists x \in A : P(x) \text{ e' vera} " ,$

$\neg \mathcal{P} \text{ e' } : " \exists x \in A : P(x) \text{ non e' vera} "$

$\neg Q \text{ e' } : " \forall x \in A , P(x) \text{ non e' vera} " .$

Esempi

1) Sia $\mathcal{P} : \text{tutti i triangolo sono isosceli}$ (falso). E' $\neg \mathcal{P}$ non e' vero che tutti i triangoli sono isosceli", ossia "esiste almeno un triangolo isoscele". E' sbagliato ritenere che $\neg \mathcal{P}$ sia "tutti i triangoli non sono isosceli".

2) Sia $A = \{1,2,3,4,5\}$. Se \mathcal{P} significa "esiste almeno un elemento di A multiplo di 2 " (vero) , si puo' scrivere $\mathcal{P} : " \exists x \in A : x \text{ multiplo di } 2 " .$ La negazione di \mathcal{P} e' $\forall x \in A , x \text{ non e' multiplo di } 2 "$, ossia " nessun elemento di A e' multiplo di 2"(falso).

Altri simboli adoperati sono : $\Rightarrow , \Leftrightarrow$. Il primo viene detto *simbolo di implicazione*. Un'espressione del tipo $P \Rightarrow Q$ si legge " P implica Q ", o "da P segue Q ", o anche "se P allora Q ".

L'implicazione si definisce formalmente come una nuova proposizione soddisfacente il seguente schema:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
v	v	v
f	v	v
f	f	v
v	f	f

e cioè' come una proposizione vera quando P e Q sono entrambe vere oppure se P e' falsa. Comunque in matematica si usano implicazioni nelle quali in genere P e' vera o supposta tale.

Se, ad esempio, P significa "x e' un numero maggiore di 8" e Q significa "x e' un numero positivo", l'espressione $P \Rightarrow Q$ e' vera: essa sta a significare che "se x e' un numero maggiore di 8, allora x e' un numero positivo". Si osservi che l'espressione $Q \Rightarrow P$ e' falsa (da $x > 0$ non segue necessariamente $x > 8$).

Il simbolo \Leftrightarrow si chiama *simbolo di equivalenza* o anche *doppia implicazione*. Un'espressione del tipo $P \Leftrightarrow Q$ si legge "P equivale a Q": essa sta a significare che "da P segue Q" e che "da Q segue P" (cioe' $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow P$). Ad esempio, se P significa "x e' un triangolo con i lati tutti uguali" e Q "x e' un triangolo con gli angoli tutti uguali", allora

$$P \Leftrightarrow Q.$$

Nei nostri ragionamenti faremo uso della proprieta' transitiva della implicazione la quale ci dice che:

$$(P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

Questo sostanzialmente lo schema che si adopera nel

ragionamento deduttivo.

Così ad esempio si debba provare che "date due parallele ed una trasversale gli angoli α e β siano opposti al vertice allora sono uguali". Si ha:

$P =$ (Gli angoli α e β sono opposti al vertice)

$R =$ (Gli angoli α e β sono uguali).

Per provare che $P \Rightarrow R$ si ragiona nel modo seguente:

$P \Rightarrow \alpha$ e β sono supplementari di uno stesso angolo $\Rightarrow R$.

Spesso ci troveremo invece davanti alle dimostrazioni così dette per assurdo. Dimostrare per assurdo una implicazione :

$$P \Rightarrow Q$$

consiste nel provare invece dell'implicazione data la seguente altra implicazione:

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

che, come è facile convincersi, ha i medesimi valori di verità della proposizione da provare come risulta da:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
v	v	v	f	f	v
f	f	v	v	v	v
v	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v

Ancora a titolo di esempio consideriamo le due proposizioni relative ad un insieme E di numeri naturali seguenti :

$P = (E \text{ e' limitato})$, $Q = (E \text{ ha massimo}).$

Per provare che $P \Rightarrow Q$ proviamo che $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Amnesso $\neg Q$, si ha che E "non" ha massimo e quindi per ogni n in E esiste almeno un m in E tale che $m > n$, dunque E non e' limitato e quindi vale $\neg P$. Nel ragionamento deduttivo tra $\neg Q$ e $\neg P$ si e' inserita la proposizione:

$R = (\text{per ogni } n \text{ in } E \text{ esiste almeno un } m \text{ in } E \text{ tale che } m > n)$

e si e' seguito lo schema :

$\neg Q \Rightarrow R$, $R \Rightarrow \neg P$ dunque $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Giova ora rimarcare che nel precedente ragionamento , si sono trovate circostanze relative ad oggetti di un insieme: "per ogni oggetto in E ... esiste almeno un oggetto di E tale che ... " queste locuzioni sono molto frequenti in Matematica .

Nel seguito useremo i simboli:

\forall per indicare: "per ogni", "quale che sia", "quale che siano"

\exists per indicare: "esiste almeno un ..."

che prendono il nome di quantificatori universali. Sottolineiamo pure che spesso una implicazione del tipo:

$P \Rightarrow Q$

si legge anche dicendo che "P e' condizione sufficiente per Q" oppure che "Q e' condizione necessaria per P" a

seconda di quale sia la proposizione che si desidera chiamare condizione.

Così ad esempio se dati i naturali m ed n :

$$P = (m \text{ divide } n)$$

$$Q = (m < n)$$

si ha come noto che:

$$P \Rightarrow Q$$

e può dirsi che:

Condizione necessaria per P è Q , ovvero: Condizione necessaria a che m divida n è che $m < n$. Questa condizione permette di dire di colpo che 3 non divide 2, (mentre non altrettanto semplice è giustificare che 2 non divide 3). Si noti che l'appellativo condizione è stato riservato a quella delle due proposizioni il cui valore è operativamente più semplice da stabilire.

Infine se accade che due proposizioni P e Q sono tali che

$$P \Rightarrow Q \text{ e } Q \Rightarrow P$$

scriveremo:

$$P \Leftrightarrow Q$$

che si legge "P implica Q ed è implicata da Q". Si può anche dire che P (oppure Q) è condizione necessaria e sufficiente per Q (oppure P).

È il caso tipico del classico Teorema di Pitagora. È dato un triangolo ABC avente un lato CB più grande di entrambi i rimanenti AC e AB , e sia γ l'angolo opposto al lato CB . Consideriamo le proposizioni:

$$P: (\gamma \text{ è retto}), \quad Q: CB^2 \cong AC^2 + AB^2$$

Il teorema di Pitagora afferma che:

$$P \Rightarrow Q$$

ma vale anche l'implicazione:

$$Q \Rightarrow P$$

implicazione certo meno nota ma non meno importante. Tale implicazione e' conosciuta con il nome di Teorema inverso di Pitagora. E' utile esercizio darne la semplice dimostrazione.

E' dunque dato un triangolo con un lato CB maggiore di entrambi i rimanenti AC e AB, sia γ l'angolo opposto al terzo lato CB e sia per ipotesi $CB^2 \cong AC^2 + AB^2$. Costruiamo sui lati di due semirette ortogonali due segmenti A'C' e A'B' rispettivamente uguali ad AC e AB.

Resta individuato allora un triangolo rettangolo di ipotenusa C'B' = CB in forza dell'ipotesi fatta. Tale triangolo e' chiaramente uguale a quello dato. Segue che γ e' retto.

Si noti che e' il Teorema inverso che spesso viene usato nella pratica. Così' se disponendo di tre aste si vuole costruire un angolo retto, basta tagliarle a misura di 3, 4, 5 unita' di misura scelte e disporle a triangolo: poiche' $5^2 = 3^2 + 4^2 = 1$

Riassumendo, abbiamo introdotto i seguenti simboli:

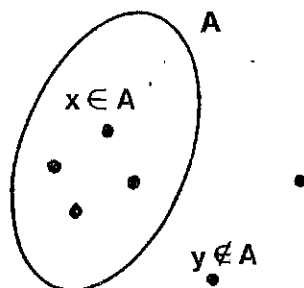
\forall quantificatore universale: si legge «per ogni»;

\exists quantificatore esistenziale: si legge «esiste»;

\Rightarrow implicazione materiale: si legge «implica»;

\Leftrightarrow doppia implicazione: si legge «implica ed è implicato» oppure «se e solo se».

Nel seguito ci sara' a volte utile rappresentare un insieme con una figura chiusa, gli elementi dell'insieme con i punti interni e al piu' del contorno di tale figura, mentre gli elementi non dell'insieme sono rappresentati dai punti esterni alla figura. (In accordo con la figura!)



Questo schema, detto diagramma di Eulero- Venn, si utilizza anche per insiemi finiti, elencando entro il contorno gli elementi Alcuni insiemi numericinotevoli sono i seguenti:

- \mathbb{N} = insieme dei numeri naturali;
- \mathbb{Z} = insieme dei numeri interi relativi;
- \mathbb{Q} = insieme dei numeri razionali;
- \mathbb{R} = insieme dei numeri reali;
- \mathbb{C} = insieme dei numeri complessi.

Gli stessi simboli "indiciati" con lo zero (ad.es. \mathbb{Z}_0) rappresentano ancora i suddetti insiemi privati dello zero. Consideriamo, tra gli altri insiemi, il simbolo:

\emptyset

che chiameremo "insieme vuoto" e che penseremo

intuitivamente come "un insieme privo di elementi". In effetti l'utilizzo di questo "insieme" e' una mera convenzione; spesso utile. Ci capitera' spesso di porre definizioni aggiuntive per estendere proprieta' anche all'insieme vuoto .

Per chi volesse approfondire le problematiche della Logica Matematica si rimanda alla appendice I di questo capitolo.

3.- SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME, IL CASO FINITO: LE COMBINAZIONI

Sicche' dunque - disse PINOCCHIO sempre piu' sbalordito - se sotterrassi in quel campo i miei cinque zecchini quanti ne troverei la mattina dopo?

E' un conto facilissimo - disse LA VOLPE - poni che ogni zecchino faccia un grappolo di 500 zecchini, moltiplica il 500 per 5 e avrai 2500 zecchini lampanti e sonanti!

COLLODI

Dati gli insiemi A e B, si dice che A e' sottoinsieme di B o che A e' una parte di B, se ogni elemento di A e' anche elemento di B. Si scrive in tale caso:

$$A \subseteq B$$

che si legge " A e' contenuto o coincidente in B".

Si dice che A e' un sottoinsieme proprio di B se oltre alla proprieta' che ogni elemento di A e' anche elemento di B, puo'asserirsi che esiste almeno un elemento di B che non e' in A.

Scriveremo in tal caso:

$$A \subset B$$

che si legge A e' contenuto (strettamente) in B.

In simboli si ha:

$$A \subseteq B \iff (\forall a \in A \Rightarrow a \in B)$$

$$A \subset B \iff (\forall a \in A \Rightarrow a \in B, \exists b \in B \text{ t.c. } b \in A).$$

Converremo per l'insieme vuoto che, quale che sia l'insieme B :

$$\emptyset \subseteq B \quad \text{valendo il segno } = \iff B = \emptyset .$$

Tra le parti di un insieme $B \neq \emptyset$ vi sono dunque le parti proprie che sono le parti contenute strettamente in B, mentre riserveremo il nome di parti improprie all'insieme vuoto \emptyset e all'insieme B stesso pensato come A parte di se stesso. E' semplice verificare che il simbolo \subseteq gode delle tre proprieta', relative a terne di insiemi:

- a) $A \subseteq A$ (riflessiva)
- b) $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisimmetrica)
- c) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (transitiva).

Essendo evidente la a), la b) segue dall'osservare che : $A \subseteq B$ vuol dire che $\forall a \in A$ risulta $a \in B$ e la $B \subseteq A$ vuol dire che $\forall b \in B$ risulta $b \in A$, dunque gli oggetti di A e B sono gli stessi. La c) e' lasciata per esercizio.

Notiamo una certa analogia con il $<$ tra numeri, tuttavia il $<$ gode anche della proprieta' (di tricotomia):

$$d) \forall a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a < b \text{ oppure } b < a \text{ oppure } a = b.$$

Una analoga proprieta' non sussiste tra insiemi, ed e' sufficiente per questo considerare come controesempio due insiemi con la proprieta' che nessuno di essi contiene l'altro:

Se a e' elemento di un insieme A , l'insieme $\{a\}$ e' un sottoinsieme di A . L'elemento a e l'insieme $\{a\}$ hanno natura diversa e devono quindi considerarsi distinti. Si scrive:
 $a \in A$, $\{a\}$.

Per chiarire meglio la differenza tra $a \in \{a\}$, si pensi ad una molecola A monoatomica: Se a e' l'unico atomo di A , si puo' scrivere $A = \{a\}$: gli "enti" a ed $A = \{a\}$ sono strutturalmente diversi, a e' un atomo, $\{a\}$ e' una molecola. Ancora, se A e' una scuola formata da una sola classe avente un solo alunno a , a rappresenta l'alunno, $\{a\}$ la classe, $A = \{\{a\}\}$ la scuola, dunque

$$a \neq \{a\} \neq \{\{a\}\}.$$

Spesso considereremo, dato un insieme A , il nuovo insieme che indichiamo con $\mathcal{P}(A)$ i cui elementi sono le parti di A proprie ed improprie. L'insieme $\mathcal{P}(A)$, si chiama insieme delle parti ed e' un primo esempio di insieme di insiemi. Si ha:

$$\forall H \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow H \subseteq A.$$

Ad esempio essendo: $\emptyset \subseteq A$, \emptyset e A sono elementi di $\mathcal{P}(A)$, se $A = \{a, b, c\}$, e' $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \dots\}$.

Sia A un insieme finito, indicheremo con $\# A$ il numero degli elementi di A .

Sia dunque $\# A = n$ e sia $0 < k < n$.

Consideriamo ora una qualsiasi parte di A avente k elementi, tale parte si dice una combinazione (semplice) degli n elementi di A a k a k .

Indichiamo con $A(n, k)$ l'insieme delle combinazioni e cioe' delle parti di A aventi k elementi.

Si osservi che e' $\binom{0}{0} = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$, inoltre ogni elemento e' la somma dei elementi immediatamente superiori (per la formula di Stiefel) e quindi si tratta proprio del triangolo di Tartaglia.

Per dimostrare ora una semplice formula combinatoria, che esprime il numero delle combinazioni di n elementi a k a k, occorre enunciare il cosi' detto Principio di Induzione Matematica al quale spesso e' indispensabile fare ricorso, quando si ha a che fare con una infinita' di teoremi dipendenti da un naturale n..

Principio di Induzione Matematica

Sia P_n una proposizione dipendente dall'intero n e si supponga che il naturale n descriva l'intero insieme dei naturali. Se si suppone vera la proposizione P_0 e se inoltre si suppone vera l'implicazione $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ allora il principio di induzione afferma che la proposizione P_n vale per ogni naturale n .

Proviamo che:

TEOREMA. Il numero delle combinazioni di n elementi a k a k e' $\binom{n}{k}$.

$$\# A(n, k) = \binom{n}{k}.$$

DIMOSTRAZIONE. Proviamo ora il teorema T_n sul numero delle combinazioni $A(n,k)$, ragionando per induzione sul numero n (e quindi $0 \leq k \leq n$).

Proviamo T_0 . Supponiamo $A = \emptyset$, esiste allora un solo sottoinsieme: quello vuoto e dunque:

$$: \# A(0,0) = 1 = \binom{0}{0}.$$

Ammettiamo ora T_{n-1} e come conseguenza ricaviamo T_n . Consideriamo un insieme B di $n-1$ oggetti e supponiamo che:

$$\# A(n-1,h) = \binom{n-1}{h} \quad \text{con} \quad 0 < h < n-1.$$

Sia x un oggetto con $x \notin B$ e sia A l'insieme avente gli $n-1$ oggetti di B e l'oggetto x . In B vi sono esattamente $\binom{n-1}{h-1}$ parti aventi $h-1$ oggetti ed $\binom{n-1}{h}$ parti aventi h oggetti. Dunque in A vi sono $\binom{n-1}{h-1}$ parti aventi h oggetti di cui $h-1$ in B piu' l'oggetto x ed $\binom{n-1}{h}$ parti aventi h oggetti tutti in B . In totale in A vi sono:

$$\binom{n-1}{h-1} + \binom{n-1}{h} = \binom{n}{h} = \# A(n,h)$$

parti aventi esattamente h oggetti e dunque il teorema vale per ogni naturale n .

Una ulteriore, ma piu' semplice, dimostrazione per induzione connessa a questo ordine di idee e' la prova della formula del binomio di Newton che puo' scriversi nella forma:

$$(a + b)^n = \sum \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Si ragiona osservando intanto che la formula vale per $n = 0$. Cio' premesso ammettiamola per $n = m-1$, cioe' sia :

$$\begin{aligned}
 (a+b)^m &= (a+b)(a+b)^{m-1} = (a+b) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m-1}{k} a^{m-1-k} b^k = \\
 &= b \left[\binom{m-1}{0} a^{m-1} + \binom{m-1}{1} a^{m-2} b + \dots + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \binom{m-1}{m-2} a b^{m-2} + \binom{m-1}{m-1} b^{m-1} \right] = \\
 &= a^m + \left[\binom{m-1}{1} + \binom{m-1}{0} \right] a^{m-1} b + \left[\binom{m-1}{2} + \binom{m-1}{1} \right] a^{m-2} b^2 + \dots + \\
 &+ \dots + \left[\binom{m-1}{m-1} + \binom{m-1}{m-2} \right] a b^{m-1} + b^m = \\
 &= \binom{m}{0} a^m + \left[\binom{m}{1} \right] a^{m-1} b + \dots + \left[\binom{m}{m-1} \right] a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m,
 \end{aligned}$$

e quindi l'asserto.

Possiamo allora dedurre che : se A e un insieme finita con n elementi cioe se e $\# A = n$, allora il numero delle parti di A e' dato da:

$$\# \mathcal{P}(A) = 2^n.$$

Infatti per ogni fissato k con $0 \leq k \leq n$ l'insieme A contiene $\binom{n}{k}$ sottoinsiemi con k elementi. Quindi in totale si avra' :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

4. - OPERAZIONI TRA INSIEMI

Il segno \in assieme ai simboli \cup ed \cap e la distinzione di elemento dall'insieme avente un solo elemento sono dovuti a Giuseppe PEANO (1858-1923).

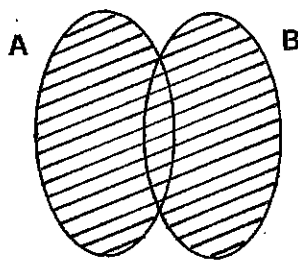
Vogliamo ora definire due importanti operazioni tra insiemi di cui faremo spesso uso : l'unione e l'intersezione di insiemi.

L'*unione* di due insiemi A e B è la collezione dei punti che appartengono ad A oppure a B oppure ad entrambi; si scrive

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A, \text{ con } A \text{ vuoto o no.}$$

Con riferimento ai diagrammi di Venn, si può visualizzare l'operazione:



$$A \cup B$$

L'operazione di unione, quali che siano gli insiemi A, B, C di un insieme universo Ω , gode delle seguenti proprietà:

1) Commutativa: $A \cup B = B \cup A$,

2) Associativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

3) Idempotenza: $A \cup A = A$,

La semplice verifica delle proprietà è lasciata al

lettore.

L'*intersezione* di due insiemi A e B è la collezione dei punti che appartengono sia ad A che a B oppure ad entrambi; si scrive

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \& \ x \in B\}$$

e ponendo:

$$A \cap \emptyset := \emptyset \cap A := \emptyset ,$$

$A \cap B := \emptyset$, se A e B non hanno elementi in comune.
(insiemi disgiunti).

L'operazione di intersezione gode, quali che siano gli insiemi A,B,C di un insieme universo Ω , delle seguenti proprietà:

- 1) Commutativa: $A \cap B = B \cap A$,
- 2) Associativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- 3) Idempotenza: $A \cap A = A$.

Le operazioni di \cup e \cap sono distributive l'una rispetto all'altra. Cioè, quali che siano gli insiemi A,B,C di un insieme universo Ω , si hanno le:

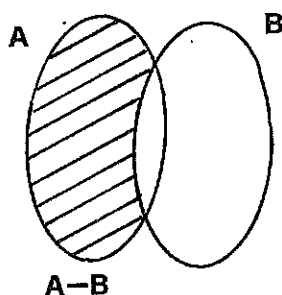
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Si definisce insieme differenza di due insiemi A,B = 0 e si indica con A-B l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B.

In simboli si ha:

$$A-B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$$



L'operazione differenza gode delle seguenti proprietà:

- 1) $A-B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$,
- 2) $A-B = B-A \Leftrightarrow A = B$,
- 3) $A-B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$,

quali che siano gli insiemi di A e B; la verifica delle proprietà suddette è ovvia.

Dato un insieme A sottoinsieme proprio di un insieme fissato Ω , si definisce complementare di A l'insieme $\Omega - A$.

In simboli il complementare di un insieme e si indica in vario modo con A^c oppure con $\complement A$. Si ha:

$$A^c := \complement A := \{x \text{ t.c. } x \in \Omega, x \notin A\}.$$

Si conviene inoltre che $\complement \emptyset = \Omega$; $\complement \Omega = \emptyset$.

Le principali proprietà di questa operazione sono, quali che siano gli insiemi A e B:

- 1) $\complement(\complement A) = A$,
- 2) $A \cap \complement A = \emptyset$,
- 3) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$,
- 4) $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$,

Le formule 3) e 4) si dicono "Formule di de Morgan".

Nei casi in cui B è sottoinsieme di A, l'insieme A-B si dice il complementare di B rispetto ad A e si indica con

$C_A B$. Si ha:

$$C_A B = \{x \in A : x \notin B\}$$

ESEMPIO. Se $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d\}$, $C_A B = \{a, b, e\}$.

Ritorniamo ora sulle proposizioni. Si possono definire due operazioni tra proposizioni che sono del tutto analoghe a quelle degli insiemi. Esse sono l'operazione di disgiunzione di proposizione indicata con il simbolo \vee (dal latino "vel") e l'operazione di congiunzione di proposizione indicata con il simbolo \wedge . Nel linguaggio comune il simbolo \vee (vel) e' quello che si legge "o anche" cioe' un "o" non esclusivo come ad esempio nelle frasi: "Cercasi segretaria o dattilografa" " $A \cup B$ e' l'insieme degli x tali che $(x \in A) \vee (x \in B)$ " etc. Il simbolo di congiunzione \wedge e' quello che si legge "e", come ad esempio nelle frasi: "vado all'universita' e studio", " $A \cap B$ e' l'insieme degli x tali che $(x \in A) \wedge (x \in B)$ ".

Notiamo che, come si puo' verificare con i valori di verita', se si applica l'operazione di negazione:

$$\neg (P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q \qquad \neg (P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

che storicamente sono le "vere" formule di De Morgan, dunque analoghe a quelle viste per unione, intersezione e complementare di insiemi.

E' interessante rimarcare che la totalità degli insiemi di Ω , Ω compreso, allora che ci si limiti alla considerazione delle relazioni \subseteq e \supseteq e delle operazioni \cap ed

\cup e passaggio al complementare soddisfa alla seguente ovvia:

Legge di dualità Booleiana:

Per ogni relazione vera tra insiemi nella quale compaiono i soli simboli di \cup , \cap , \subseteq , \supseteq , C , risulta essere vera una seconda relazione detta la duale ottenuta dalla precedente mutando tra loro \emptyset (il vuoto) con Ω (il pieno), \cup con \cap , \subseteq con \supseteq e lasciando inalterata l'operazione C .

A volte occorre considerare insiemi i cui elementi sono ancora insiemi. Si parlerà allora di famiglie di insiemi.

Per assegnare una famiglia \mathcal{F} di insiemi si fissa un insieme I e $\forall i \in I$ si assegna un insieme dipendente da i che denoteremo con A_i ; si adopera il simbolismo:

$$\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in I\} = \{A_i\}_{i \in I}$$

Per es. I può essere un insieme di interi $1, 2, \dots, n$ ed allora

$$\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.$$

Si noti che non è detto a priori che ad indici diversi di I corrispondano insiemi distinti. Quando ciò accade \mathcal{F} si chiama una famigliapropria.

Le definizioni di intersezione ed unione si estendono anche a più di due insiemi ed anche ad una famiglia di insiemi.

5. - RELAZIONI

Passiamo ora ad illustrare, nella loro forma più generale, i legami funzionali o più in generale relazionali. Premettiamo la nozione di prodotto cartesiano.

Il prodotto cartesiano di due insiemi A e B è la collezione di tutte le coppie ordinate (a,b) con $a \in A$ e $b \in B$; si adopera il simbolismo

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

La definizione si completa ponendo:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset \times \emptyset = \emptyset .$$

Se $A = \{ a, b, c \}$ e $B = \{ 1, 2 \}$, si ha:

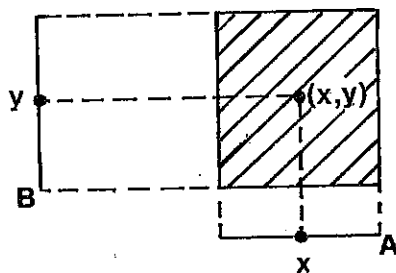
$$A \times B = \{ (a,1) , (a,2) , (b,1) , (b,2) , (c,1) , (c,2) \};$$

$$B \times A = \{ (1,a) , (1,b) , (1,c) , (2,a) , (2,b) , (2,c) \}.$$

L'esempio più classico di prodotto cartesiano è il prodotto di due copie dell'insieme \mathbb{R} dei numeri reali, che, come noto, è l'insieme con il quale si costruiscono le coordinate cartesiane del piano con riferimento a questo esempio e per visualizzare si può dare una definizione formale di copia ordinata nel modo seguente:

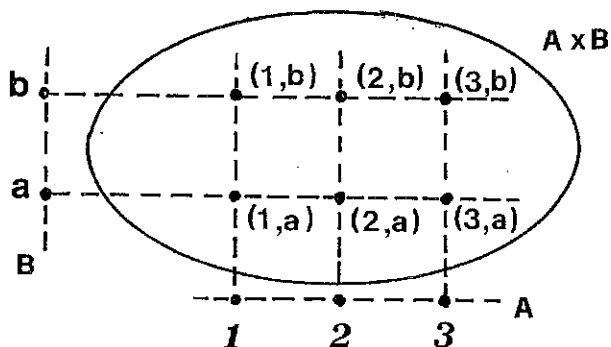
per $x \neq y$

Può essere utile rappresentare l'insieme $A \times B$ nel modo indicato nella figura. Si conviene di rappresentare A e B con



Due linee rette, una orizzontale, l'altra verticale. Presi $x \in A$ e $y \in B$, si considerano la parallela per x a B e la parallela per y ad A . Il punto di intersezione di tali rette rappresenta la coppia ordinata $(x, y) \in A \times B$. L'insieme prodotto $A \times B$ viene così ad essere "visualizzato" con un rettangolo.

Se gli insiemi A e B sono rispettivamente $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, il prodotto $A \times B$ può essere rappresentato come segue:



Capita spesso nella pratica di trovarsi di fronte a situazioni in cui è necessario fare una certa distinzione tra i due elementi che formano una coppia $\{x, y\}$. Ad esempio, se si vuole scrivere il risultato di una partita di calcio, non è la stessa cosa scrivere $x-y$ o $y-x$ (insiemisticamente $\{x, y\}$, $\{y, x\}$), per $x \neq y$. Inoltre, quando una partita finisce in parità si scrive $x-x$ e non x (mentre insiemisticamente è $\{x, x\} = \{x\}$). In casi del genere è necessario far ricorso alle *coppie ordinate*: (x, y) può indicare il risultato di una partita di calcio, dove x è il punteggio di una delle due squadre (in genere quella "ospitante") e y quello dell'avversaria.

Una frazione a/b puo' considerarsi una coppia ordinata (a, b) , dove a e' il numeratore, b il denominatore (se $a=8$ e $b=2$, $8/2=4$, $2/8=1/4$).

Se v e' una via a senso unico che collega due incroci a e b , nel verso che va da a a b , v puo' essere individuata mediante la coppia ordinata (a,b) ((b,a) rappresenterebbe la medesima via considerata nel verso opposto).

Si puo' dare una definizione formale di coppia ordinata, derivandola da nozioni puramente insiemistiche, come segue:

Dati due elementi x,y , si dice coppia ordinata (x,y) , l'insieme avente per elementi gli insiemi $\{x\}$ e $\{x,y\}$: $(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\}$.

Nel caso $x=y$, risulta $(x,x) = \{\{x\}, \{x,x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$.

Come si puo' ben osservare, si ha per $x \neq y$:

$$(x,y) = \{\{x\}, \{x,y\}\} \neq (y,x) = \{\{y\}, \{y,x\}\}.$$

Nel seguito, data la coppia ordinata, (x,y) , elemento x del Singleton si dira' primo elemento della coppia, l'altro l'elemento y secondo elemento della coppia.

In modo analogo si possono definire le *terne ordinate*, le *quaterne ordinate*,...

Il prodotto cartesiano, come e' facile convincersi, a meno che gli insiemi dati non siano coincidenti, non e' ne' associativo ne' commutativo.

Piu' in generale definiremo, se A_1, A_2, \dots, A_n sono insiemi, il prodotto cartesiano di n insiemi, che indicheremo con:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A$$

l'insieme delle n -ple ordinate (x_1, x_2, \dots, x_n) tali che

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n.$$

Da un punto di vista intuitivo, "dare una relazione" tra due insiemi A e B significa dare un "qualcosa" che associ elementi di A con elementi di B . Ad un elemento di A puo' associarsi un elemento di B , o piu' d'uno, o nessuno. Una definizione rigorosa di "relazione" puo' essere data nel modo seguente.

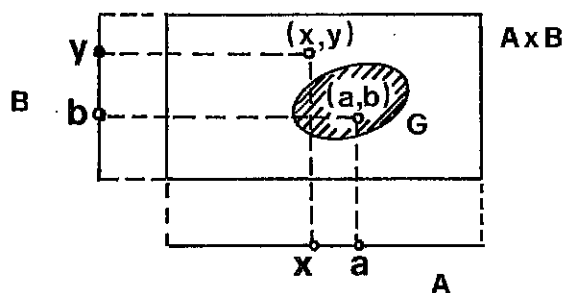
Chiamasi relazione R tra A e B una qualsiasi scelta di coppie in $A \times B$. L'insieme $G = G(R)$ delle coppie scelte prende il nome di grafico della relazione. Effettuata una scelta di elementi di $A \times B$, rimane cosi' determinata il grafico:

$$G \subseteq A \times B.$$

ed assegnare il grafico o assegnare la relazione sono fatti equivalenti. Se $A=B$, si dice che R e' una "relazione in A ". Se e' fissato $G \subseteq A \times B$ e $(a,b) \in G$ scriveremo, detta R la relazione definita da G :

$$a R b \quad \text{in luogo di} \quad (a,b) \in G.$$

Per indicare che (x,y) è una coppia scelta si dice che « x è in relazione con y » oppure che « y è corrispondente di x secondo R ».



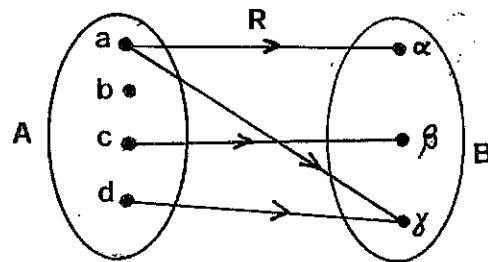
$$(a,b) \in G \Rightarrow aRb$$

$$(x,y) \notin G \Rightarrow x \not R y$$

A volte, anzi quasi sempre, per "abuso di linguaggio", si confonderà R con G stesso così che si scriverà:

$$\begin{array}{lll} (a,b) \in R & \text{volendo dire} & (a,b) \in G, \\ R \subseteq A \times B & \text{volendo dire} & G \subseteq A \times B. \end{array}$$

Spesso una relazione R o il suo grafico G sarà individuata da una proprietà che caratterizza l'insieme G . Se si rappresentano gli insiemi A e B con dei diagrammi di Venn, una relazione $R \subseteq A \times B$ può essere visualizzata collegando, mediante delle "freccie", gli elementi $x \in A$ con quegli elementi $y \in B$ ad essi associati nella R .



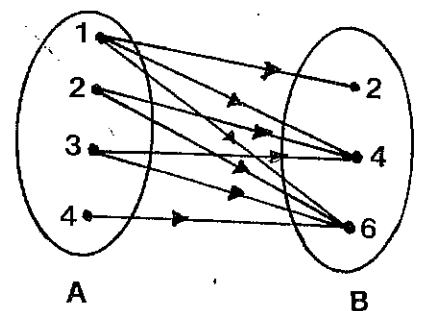
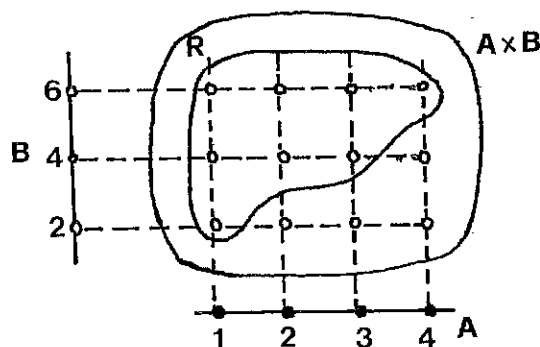
Nella figura è $aR\alpha$, $aR\gamma$, $cR\beta$, $dR\gamma$, mentre è $a \text{ non } R \beta$, ...

Esempi di relazioni $R \subseteq A \times B$, con $A \neq B$.

1) Dati $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6\}$, sia R la relazione formata da tutte le coppie $(x,y) \in A \times B$ tali che $x < y$.

Risulta:

$$R = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,4), (2,6), (3,4), (3,6), (4,6)\}.$$



2) Dati gli insiemi $S = \{ I = \text{Inter}, M = \text{Milan}, R = \text{Roma} \}$, $C = \{ a = \text{azzurro}, r = \text{rosso}, n = \text{nero}, g = \text{giallo} \}$, sia T la relazione formata da tutte le coppie $(x,y) \in S \times C$ tali che "x ha tra i suoi colori sociali y" .

Risulta $T = \{(I,a), (I,n), (M,r), (M,n), (R,r), (R,g)\}$.

Si rappresenti T nei due modi indicati nell'es. 1) .

3) Se $A = \{ R = \text{Roma}, V = \text{Vienna}, P = \text{Parigi} \}$, $B = \{ I = \text{Italia}, F = \text{Francia}, S = \text{Spagna}, G = \text{Grecia} \}$, sia $T \subseteq A \times B$ tali che risulti "x capitale di y" .

Si ha $T = \{(R,I), (P,F)\}$.

Si rappresenti la relazione nei due modi indicati nell'es. 1).

Esempi di relazioni $R \subseteq A \times A$

4) Sia $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$. Se R_1 e' la realizzazione definitiva in A e formata da tutte le coppie $(x,y) \in A \times A$ tali che " $x < y$ " (relazione di "minore o uguale"; risulta:

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$.

Se R_2 e' la relazione in A formata da tutte le coppie $(x,y) \in A \times A$ tali che sia "x multiplo di y", si ha

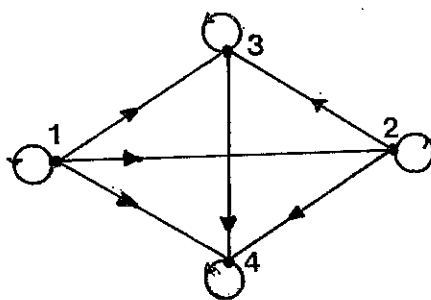
$R_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)\}$.

Se R_3 e' la relazione formata da tutte le coppie $(x,y) \in A \times A$ tali che " $y=2x$ " , si ha:

$R_3 = \{(1,2), (2,4)\}$.

Il lettore per esempio rappresenti le relazioni R_1, R_2

, R_3 nei due modi indicati in 1) Se R e' una relazione definita tra gli elementi di un insieme A (come le R_1, R_2, R_3 di 4), la rappresentazione "per frecce" di R puo' essere resa piu' semplice, tracciando prima gli elementi x, y, z, \dots di A , e poi le "frecce" $x \rightarrow y, x \rightarrow z, \dots$ a seconda che sia xRy, xRz, \dots . Ad esempio, la R_1 di 4 puo' essere rappresentata come segue:



Una tale rappresentazione prende il nome di grafo associato alla R_1 .

Si chiama dominio di una relazione R tra A e B l'insieme $\mathcal{D}(R) \subseteq A$ costituito dagli elementi a di A per i quali esiste almeno un b con $a R b$. Si chiama codominio di una relazione R tra A e B l'insieme $\mathcal{C}(R) \subseteq B$ costituito dagli elementi b di B per i quali esiste almeno un a di A tale che sia $a R b$.

Data una relazione R tra A e B chiamiamo relazione inversa di R , la relazione che indichiamo con R^{-1} tra B ed A tale che:

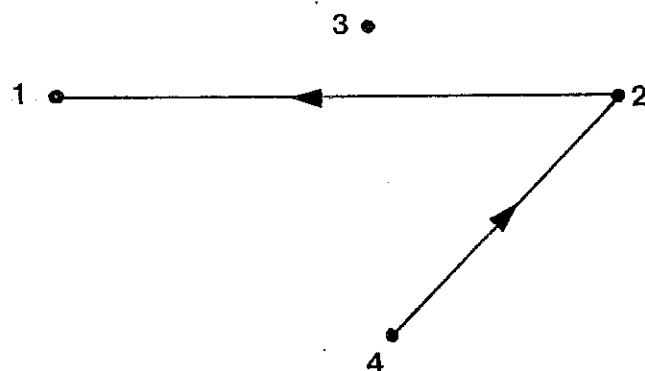
$$b R^{-1} a \iff a R b.$$

La visualizzazione di una relazione inversa si ha "invertendo il verso delle "freccie".

E' utile esercizio per il lettore individuare negli esempi 1) ...4) dominio, codominio e relazione inversa.

Cioe' ad esempio:

$D(R_3) = \{1,2\}$, $C(R_3) = \{2,4\}$. E' il grafo associato alla relazione inversa di R_3 e'



Quindi e' un grafo "sconnesso" nel senso che esistono elementi (come 3) non in relazione con alcun altro.

Nel prossimo paragrafo e nei successivi tratteremo di alcune relazioni speciali, precisamente quelle che in letteratura si chiamano:

applicazioni o funzioni,
relazioni di equivalenza,
relazioni d'ordine.

6 APPLICAZIONI O FUNZIONI

Dati due insiemi A e B , sia $R \subseteq A \times B$ una relazione di A in B .

Fissato un elemento $x \in A$, puo' capitare che ad esso la relazione R associ un solo elemento di B , o che ne associ piu' di uno, o anche che non ne associ alcuno, come si vede da esempi.

Se ad ogni elemento di A la relazione R associa un solo elemento di B , allora essa prende il nome di applicazione (o funzione) di A in B . Si comprende dunque che le applicazioni sono casi particolari delle relazioni. Anzi puo' dirsi che affinche' una relazione sia un'applicazione deve accadere che:

- 1) Nessun elemento di A abbia due o piu' corrispondenti in B ;
- 2) Nessun elemento di A sia privo di corrispondenti in B .

Dal punto di vista della visualizzazione intuitiva - mediante frecce - alla quale a volte facciamo riferimento, l'essere una relazione o una applicazione equivale al fatto che " da ogni elemento di A parte una ed una sola freccia verso B ".

Una applicazione sara' di preferenza indicata con una lettera latina minuscola, ad esempio $f \subseteq A \times B$ (in luogo di R), tuttavia per enfatizzare il concetto si usa di preferenza uno dei due simboli seguenti :

$$f: A \rightarrow B$$

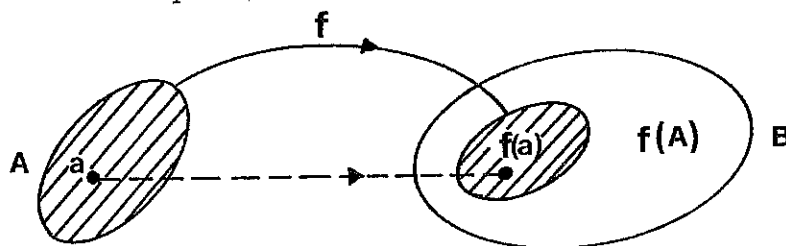
oppure

$$y = f(x) \quad \text{con } x \in A, \text{ ed } y \in B.$$

Notiamo esplicitamente che la relazione f^{-1} , quando f e' una applicazione, in generale non e' una applicazione. Cioe':

f e' una applicazione non \Rightarrow f^{-1} e' una applicazione.

Il dominio ed il codominio di una applicazione f vengono anche indicati rispettivamente con $dom f$ e $codom f$.



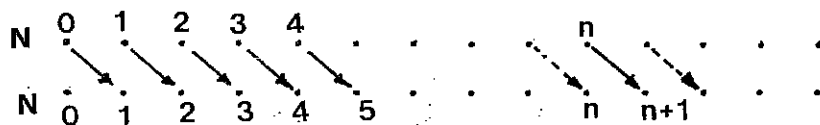
Un esempio importante e' quello delle funzioni trigonometriche.

Ad esempio la relazione inversa della funzione

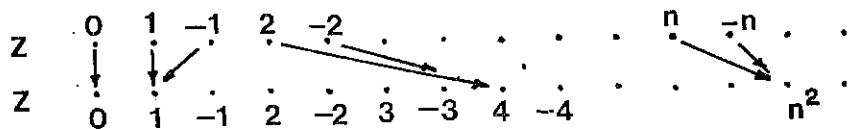
$$y = \text{sen } x \quad \text{con } x \in \mathbb{R}, y \in [-1, 1],$$

non e' una applicazione. Quando la $x = \arcsen y$ si considera come applicazione, e cio' accade spesso in Analisi, cio' corrisponde al limitare ad esempio i valori x all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ o $[0, \pi]$ in modo da avere una funzione invertibile a tratti.

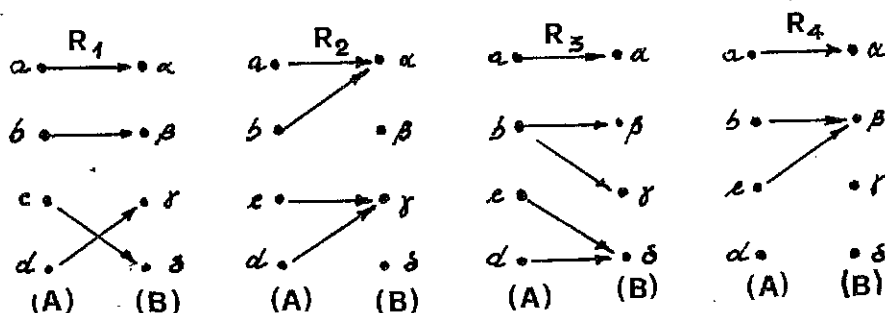
Es. 1) La relazione $R \subseteq N \times N$ che ad ogni $n \in N$ associa $n+1 \in N$ e' una applicazione di N in N : ad ogni $n \in N$ essa associa un solo elemento di N [$n+1$].



Es.2) La relazione $R \subseteq Z \times Z$ che ha $x \in Z$ associa il suo quadrato e' un'applicazione di Z . Ogni elemento x di Z ha un solo corrispondente in Z : il suo quadrato x^2 .



Es.3) Dati $A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ \alpha, \beta, \gamma, \delta \}$, si considerino le seguenti relazioni di A in B :



Le relazioni R_1 e R_2 sono applicazioni. La R_3 non e' un'applicazione (l'elemento $b \in A$ ha due corrispondenti in B). Anche la R_4 non e' un'applicazione (l'elemento $d \in A$ non ha alcun corrispondente in B). Si ha inoltre :

$$\text{codom } R_1 = B, \text{ codom } R_2 = \{ \alpha, \gamma \}.$$

Nella definizione di applicazione gli elementi di A hanno ruolo "prioritario" rispetto a quelli di B . Data una relazione $R \subseteq A \times B$, per sapere se essa e' un'applicazione bisogna "indagare" sugli elementi di A e vedere, per ognuno di essi quanti corrispondenti ha in B (uno, piu' di uno, nessuno).

Sia $f : A \rightarrow B$ un'applicazione di A in B .

Si dice che l'applicazione f è iniettiva se per ogni coppia di elementi distinti x_1, x_2 , appartenenti ad A , risulta $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Si può affermare, in modo equivalente, che la f è iniettiva se non esistono elementi distinti di A con la medesima immagine in B .

L'applicazione dell'es. 1 è iniettiva: infatti se $n' \neq n''$, per $n', n'' \in \mathbb{N}$, si ha pure $n' + 1 \neq n'' + 1$.

L'applicazione dell'es. 2 non è iniettiva. Esistono infatti elementi distinti del dominio Z aventi la medesima immagine [ad esempio 2 e -2 hanno per immagine 4].

La R_1 dell'es. 3 è iniettiva, mentre la R_2 non lo è (a è immagine sia di a che di b).

Si dice che l'applicazione f è suriettiva se tutti gli elementi di B sono immagini di elementi di A : cioè la $f(A) = B$.

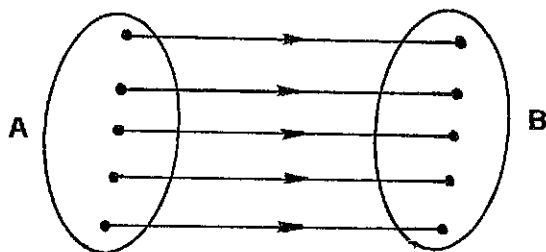
Le applicazioni iniettive vengono anche dette iniezioni, mentre quelle suriettive vengono dette suriezioni.

L'applicazione dell'es. 1 non è suriettiva (nell'insieme di "arrivo" c'è l'elemento 0 che non è immagine di alcun elemento del dominio). Anche l'applicazione dell'es. 2 non è suriettiva (-1, 2, -3 ... non sono immagini di elementi del dominio). La R_1 dell'es. 3 è suriettiva; non lo è la R_2 .

Come si può vedere dagli esempi, esistono applicazioni che non sono né iniettive, né suriettive (es. 2), applicazioni iniettive ma non suriettive (es. 1), applicazioni sia iniettive che suriettive (es. 3. R_1). Si

possono trovare anche esempi di applicazioni suriettive ma non iniettive: se $A = \{a,b\}$, $B = \{a\}$, la relazione che agli elementi di A associa a e' un'applicazione suriettiva ma non iniettiva.

Se l'applicazione $f: A \rightarrow B$ e sia iniettiva che suriettiva essa viene detta biunivoca. Le applicazioni biunivoche vengono anche dette biiezioni. Le applicazioni biunivoche sono applicazioni abbastanza particolari: in esse, ogni elemento di B e' immagine (suriettivita') di un solo (iniettivita') elemento di A .

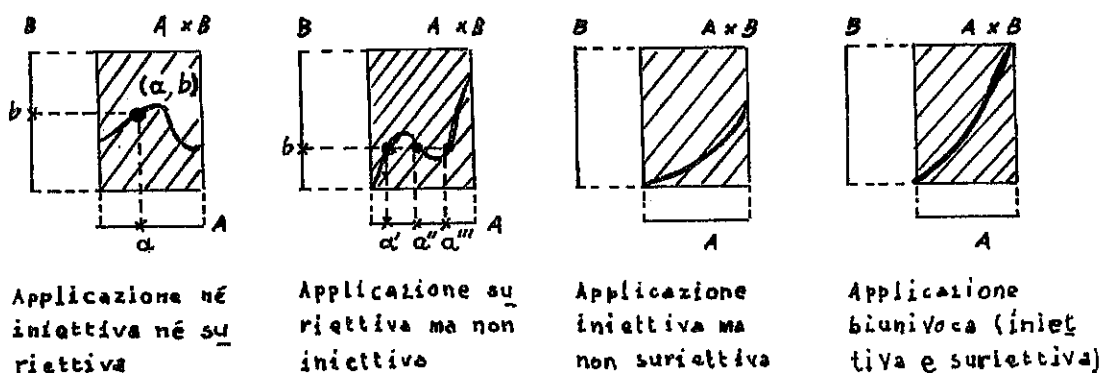


L'applicazione R_1 dell'es. 3 e' biunivoca.

Se $P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, la relazione $R \subseteq \mathbb{N} \times P$ che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $2n \in P$ e' un'applicazione biunivoca. Essa e', infatti, iniettiva poiche' se $n' \neq n''$ allora anche per i corrispondenti si ha $2n' \neq 2n''$, ed inoltre ogni elemento di P e' immagine di un elemento di \mathbb{N} .

Nella figura seguente sono rappresentati vari tipi di applicazione di A in B (gli insiemi A e B sono rappresentati con delle linee, una verticale, l'altra orizzontale, come si e' fatto in precedenza per le relazioni). Trattandosi di applicazioni, in ogni dei casi rappresentati, ogni verticale passante per un punto di A deve incontrare la f in un solo

punto. Nel caso di applicazioni suriettive, ogni orizzontale passante per un punto B deve incontrare la f in almeno un punto. Nel caso di applicazioni iniettive, le orizzontali passanti per i punti di B o non incontrano la f o la incontrano in un solo punto.



Osservazione

Se la $f: A \rightarrow B$ è un'applicazione non suriettiva, vuol dire che esistono in B elementi che non sono immagini di alcun elemento di A . Se si considera come insieme d'"arrivo" $f(A)$, anziché B è evidente che l'applicazione f diviene suriettiva. Pertanto, c'è un'applicazione $f: A \rightarrow B$ non è suriettiva, si può sempre renderla tale considerandola come $f: A \rightarrow f(A)$. [A rigore, però, l'applicazione $f: A \rightarrow f(A)$ è diversa dalla $f: A \rightarrow B$, avendo diverso l'insieme d'"arrivo"].

L'applicazione R_2 dell'es. 3 non è suriettiva. Se si prende, però, come insieme d'"arrivo" $\{\alpha, \gamma\}$, la $R_2: A \rightarrow \{\alpha, \gamma\}$ è suriettiva. Si osservi come in tale "operazione" ad essere eliminati sono degli elementi inutili, che non intervengono cioè nelle "corrispondenze".

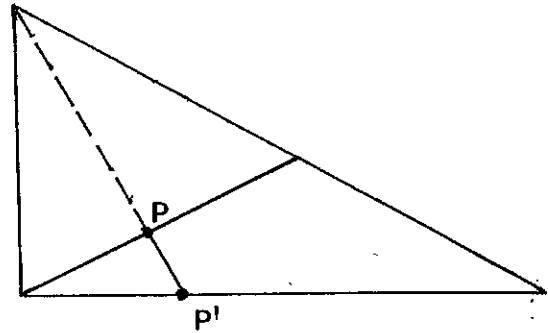
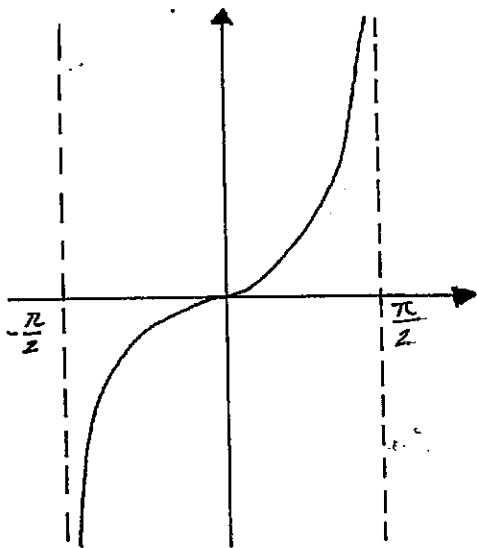
Dalle definizioni date, si desume anche che:

TEOREMA. Le applicazioni biettive sono tutte e sole le applicazioni le cui relazioni inverse sono ancora applicazioni.

DIMOSTRAZIONE. Sia infatti $f:A \rightarrow B$ una applicazione biettiva, allora l'applicazione $g:B \rightarrow A$ che ad ogni elemento b di B associa l'elemento a di A di cui e' corrispondente in f e' proprio la relazione inversa di f .

Inversamente sia $f:A \rightarrow B$ tale che la relazione f e' una applicazione di A in B . Allora f e' suriettiva poiche' se $b \in B$, esso e' l'immagine di $f^{-1}(b)$, ed f e' iniettiva poiche' se fosse $x \neq x'$ con $b = f(x) = f(x')$, l'elemento b avrebbe due corrispondenti secondo f^{-1} che non sarebbe una applicazione.

Quando si considerano applicazioni tra insiemi infiniti, si possono presentare situazioni in apparente contrasto con le idee che ci siamo formati operando con insiemi finiti. Se ho un insieme finito e' abbastanza intuitivo il fatto che l'intero insieme non si puo' porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria. Cio' non accade piu' quando si opera con insiemi infiniti. Ad esempio due segmenti di diversa lunghezza si possono facilmente porsi in corrispondenza biunivoca, utilizzando semplici costruzioni geometriche.



La corrispondenza ottenuta proiettando P su P' è una applicazione biettiva. È facile anche costruire una applicazione biettiva tra un segmento aperto e tutta la retta, basta considerare il segmento aperto $]-\pi/2, \pi/2[$ e la funzione $y = \operatorname{tg} x$ che lo trasforma nell'asse y .

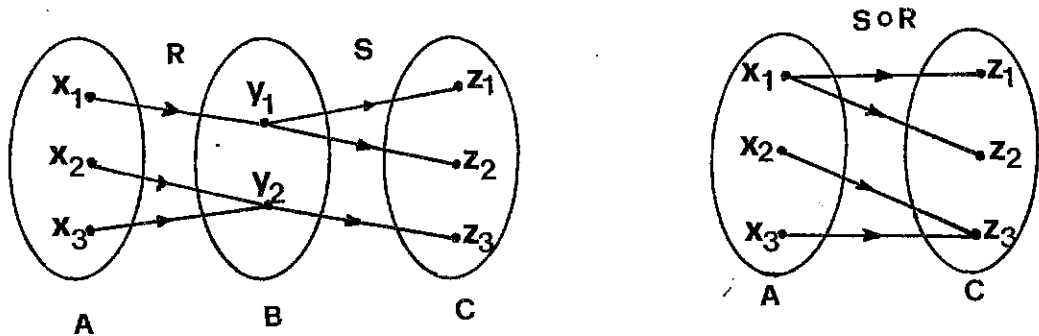
7. COMPOSIZIONE DI RELAZIONI E DI APPLICAZIONI

Siano $R \subseteq A \times B$ ed $S \subseteq B \times C$ due relazioni, nelle quali insieme d'"arrivo" della R coincide con l'insieme di "partenza" della S .

Si dice "composizione R per S ", e si indica con $S \circ R$, la relazione che associa elementi di A con elementi di C nel modo seguente: « $x \in A$ è in relazione $S \circ R$ con $z \in C$ se esiste un $y \in B$ tale che risulti :

$$x \text{ in relazione } R \text{ con } y$$

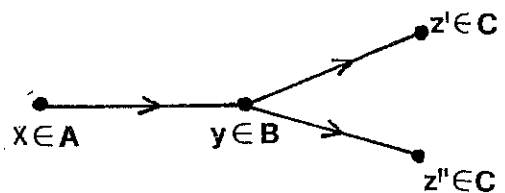
y in relazione S con z »



La relazione $S \circ R$ e' anche detta *relazione prodotto* o *relazione composta*.

Gli elementi dell'insieme intermedio B si comportano come dei veri e propri "ripetitori".

Si pensi ad un "segnale" che parte da un $x \in A$. Esso viene "ricevuto" da $y \in B$ e "trasmesso", ad esempio a z' ,

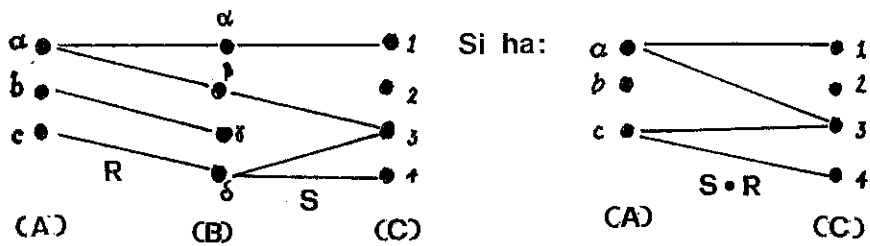


$z'' \in C$. Il risultato di questa operazione e' che il segnale trasmesso da $x \in A$ puo' essere ricevuto da $z', z'' \in C$. Chiaramente, se non c'e' un $y \in B$ che riceva da $x \in A$ e trasmetta a z', z'' ; nessun segnale trasmesso da x puo' arrivare a z' e z'' .

Esempi

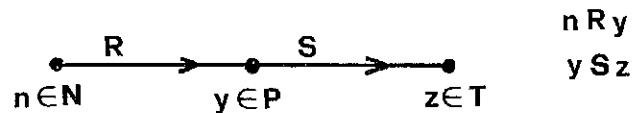
1) Sia $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$.

Se $R \subseteq A \times B$ ed $S \subseteq B \times C$ sono cosi' definiti:



2) Se $P = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, $T = \{0, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$,
 sia R la relazione che a $n \in N$ associa $2n \in P$, S la
 relazione che a $m \in P$ associa $m^2 \in T$.

E' $R \subseteq N \times P$, $S \subseteq P \times T$. La relazione $S \circ R$ associa a $n \in N$
 l'elemento $4n^2 \in T$. Infatti fissati $n \in N$, $z \in T$, risulta "n
 in relazione $S \circ R$ con z" se esiste un $y \in P$ tale che

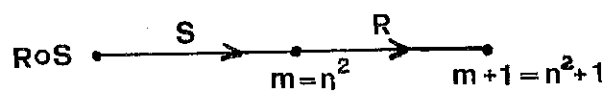
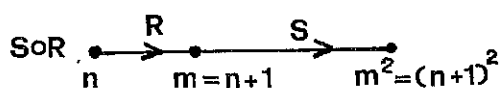


Ma "n in relazione R con y" significa $y = 2n$, "z in
 relazione S con y" significa $z = y^2$, e quindi segue
 $z = y^2 = (2n)^2 = 4n^2$.

Nel caso che R ed S siano due relazioni definite entrambe
 in un insieme A , ci si puo' chiedere se i prodotti $S \circ R$ e R
 o S sono uguali. Si vede facilmente che in generale e'
 $S \circ R \neq R \circ S$. Si pensi, ad esempio, alle relazioni R , ed S
 cosi' definite in N :

R associa a $n \in N$ l'elemento $n + 1 \in N$

S associa a $n \in N$ l'elemento $n^2 \in N$



La relazione $S \circ R$ a $n \in N$ associa $(n+1)^2$, la relazione $R \circ S$ a $n \in N$ associa n^2+1 .

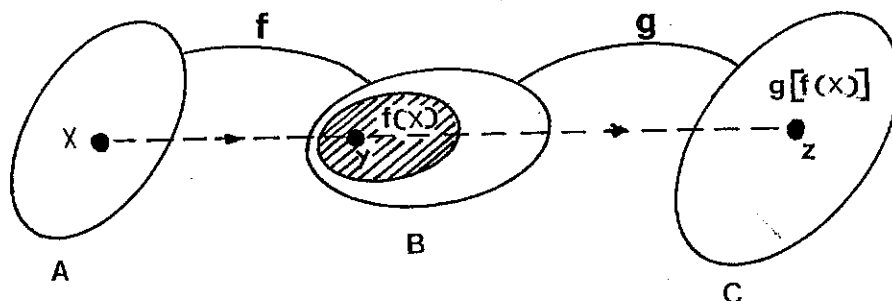
Per $n \neq 0$ e' $(n+1)^2 \neq n^2+1$, e dunque $S \circ R \neq R \circ S$.

Si vede facilmente che se R ed S sono due applicazioni anche se $S \circ R$ e' un'applicazione.

Infatti, in tal caso la R ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $y \in B$. La S a questo elemento $y \in B$ associa un solo elemento $z \in C$. Pertanto la $S \circ R$ ad ogni elemento $x \in A$ associa un solo elemento $z \in C$. Dunque $S \circ R$ e' un'applicazione.

Si ha quindi:

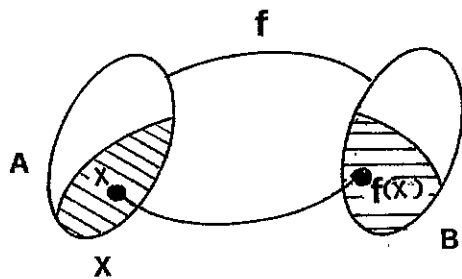
date le applicazioni $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, la loro relazione composta (detta anche funzione composta o funzione di funzione) e l'applicazione $g \circ f : A \rightarrow C$ che ad ogni $x \in A$ associa l'elemento $g[f(x)] \in C$.



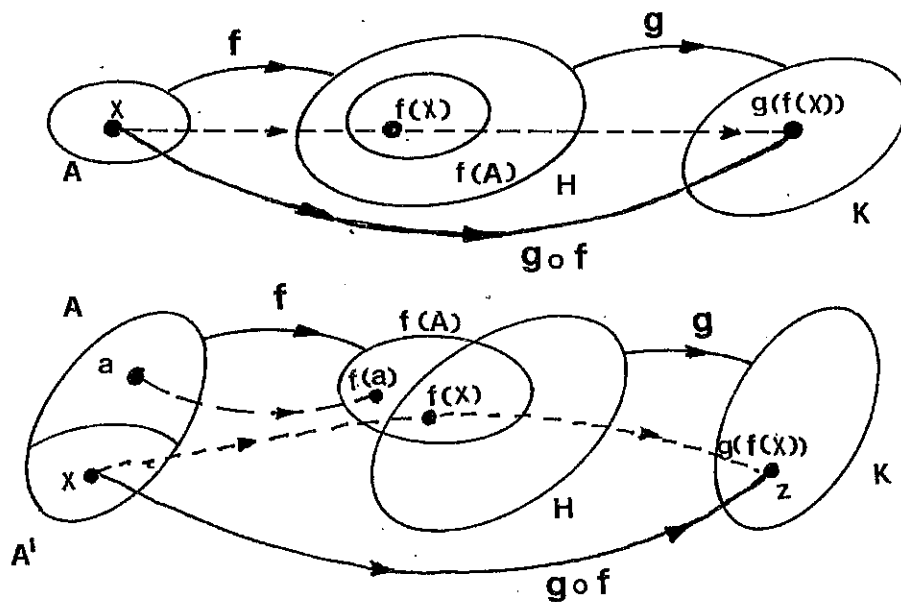
Infatti, se $x \in A$ e $z \in C$, z e' l'immagine di x secondo la $g \circ f$, se esiste un $y \in B$ tale che $y = f(x)$, $z = g(y)$. Da cui $z = g[f(x)]$.

Nelle considerazioni precedenti e' essenziale il fatto che $f(A) \subseteq \text{dom } g = B$. Cio' permette di trovare un corrispondente in C del tipo $g[f(x)]$, per ogni $x \in A$. La condizione $f(A) \subseteq \text{dom } g$ e' assicurata dal fatto che l'insieme "d'arrivo" della f e' uguale all'insieme di "partenza" della g . Si puo', tuttavia, definire una legge del tipo $g[f(x)]$ anche nei casi in cui non e' $f(A) \subseteq \text{dom } g$ purché sia $f(A) \cap \text{dom } g \neq \emptyset$.

Si chiama *restrizione* della f a x , e si indica con f/x , l'applicazione f "considerata" solo nell'insieme x , anziché in tutto A . Puo' esattamente, la *restrizione di f a x* e l'applicazione $f/x: x \rightarrow B$ che ad ogni $x \in X$ associa $f(x)$.



Siano $f: A \rightarrow B$ e $g: H \rightarrow K$ due applicazioni tali che $f(A) \cap H \neq \emptyset$. Se $f(A) \subseteq H$, il prodotto di composizione $g \circ f$ esiste sia $f(A) \subseteq H$, con $f(A) \cap H \neq \emptyset$.



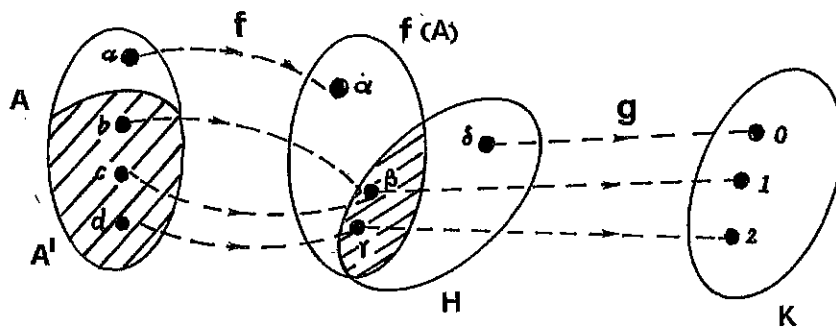
Se $A' = \{x \in A: f(x) \in H\}$ per ogni $x \in A'$ e' possibile determinare $g[f(x)]$. E' anche evidente che, se $a \in A$ ma $a \notin A'$, essendo $f(a) \notin H$, non esiste $g[f(x)]$.

Se $f: A \rightarrow B$, $g: H \rightarrow K$ sono due applicazioni tali che $f(A) \cap H \neq \emptyset$, per applicazione composta $g \circ f$ si intende l'applicazione che ha per dominio $A' = \{x \in A: f(x) \in \text{dom } g\}$ e che ad ogni $x \in A'$ associa quell'elemento $z \in K$ tale che $z = g[f(x)]$.

Nel caso $f(A) \cap H = \emptyset$ non e' possibile (evidentemente) fare alcuna composizione tra f e g .

Esempi

Siano A , H , K , f , g quelli descritti nella figura seguente.



Si ha $A' = \{ x \in A : f(x) \in \text{dom } g = H \} = \{ b, c, d \}$. La $g \circ f$ è definita in A' e si ha:

$$g \circ f(b) = g[f(b)] = g(B) = 1$$

$$g \circ f(c) = g[f(c)] = g(B) = 1$$

$$g \circ f(d) = g[f(d)] = g(\gamma) = 2$$

Sia $A, B \neq \emptyset$. Sia $f: A \rightarrow B$ un'applicazione biettiva e sia $f^{-1}: B \rightarrow A$ la sua inversa indichiamo rispettivamente con $I d_A$ e $I d_B$ le applicazioni $\forall x \in A$ normale ovvero $\forall y \in B$ associno l'elemento stesso l'applicazioni identiche su un insieme allora:

$$f \circ f^{-1} = I d_B, \quad f^{-1} \circ f = I d_A.$$

8. PARTICOLARI RELAZIONI $R \subseteq A \times A$

Sia R una relazione definita in un insieme A ossia $R \subseteq A \times A$.

Introduciamo una speciale nomenclatura si dice R è riflessiva se ogni elemento $x \in A$ è, nella R , in relazione con se stesso:

$\forall x \in A, x R x.$

La relazione di "inclusione" \subseteq tra i sottoinsiemi di un insieme X e' riflessiva: risulta infatti $Y \subseteq Y, \forall Y \subseteq X.$

La relazione di "perpendicolarita'" \perp tra le rette di un piano non e' riflessiva.

La relazione di "minore o uguale" \leq in Q e' riflessiva. Si dice che R e' simmetrica se tutte le volte che un elemento

$x \in A$ e' in relazione R con un $y \in A$, risulta anche y in relazione R con x : $\forall x, y \in A \quad x R y \quad y R x.$

La relazione di "inclusione" \subseteq (tra i sottoinsiemi di un insieme X) e di "minore o uguale" \leq (in Q) non sono simmetriche: da $A \subseteq B$ non segue necessariamente $B \subseteq A$, come anche da $x \leq y$ non segue $y \leq x.$

La relazione di "perpendicolarita'" \perp tra rette e' simmetrica:

se $r \perp s$, allora e anche $s \perp r.$

Si dice che R e' transitiva se tutte le volte che un $x \in A$ e' relazione R con un $y \in A$ e y e' in relazione R con un $z \in A$, risulta anche x in relazione R con z :
 $\forall x, y, z \in A (x R y, y R z) \quad x R z.$

La relazione di minore o uguale \leq in Q e' transitiva. La relazione di "inclusione" \subseteq tra i sottoinsiemi di un insieme e' transitiva. La relazione di perpendicolarita' \perp tra rette non e' transitiva: se $r \perp s$ e $s \perp t$ non e' $r \perp t.$

Si dice che R e' antisimmetrica se per ogni coppia di elementi distinti $x, y \in A$ non e' mai contemporaneamente " x in relazione R con y " e " y in relazione R con x ":

$\forall x, y \in A, x \neq y$ non e' " $x R y$ e $y R x$ " contemporaneamente.

In modo equivalente si puo' dire che R e' antisimmetrica se per ogni coppia di elementi $x, y \in A$ tali che xRy e yRx , risulta necessariamente $x = y$.

Le relazioni di "inclusione" \subseteq e di "minore o uguale" \leq sono antisimmetriche. Infatti, siano Y e Z due sottoinsiemi qualsiasi di un insieme X ; se $Y \subseteq Z$, e $Z \subseteq Y$, segue $Y = Z$. In modo analogo, in \mathbb{Q} , se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$.

La relazione di "perpendicolarita'" \perp tra rette non e' antisimmetrica: esistono infatti rette distinte tali che $r \perp s$ se $s \perp r$.

Si dice che R e' totale se per ogni coppia di elementi $x, y \in A$ si verifica almeno una delle condizioni xRy , yRx .

Si dice, anche, che R e' totale se tutti gli elementi di A sono tra di loro "confrontabili", intendendo con questo dire che non si verifica mai che xRy e yRx , contemporaneamente.

La relazione di "minore o uguale" \leq e' totale: comunque si prendano due numeri x e y , e' vero che o $x \leq y$, o $y \leq x$ (se $x = y$ si verificano entrambe).

La relazione di inclusione \subseteq tra i sottoinsiemi di un insieme non e' totale. Infatti se $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b\}$, $Z = \{b, c\}$, Y e Z sono due sottoinsiemi di X per i quali non e' vero ne' $Y \subseteq Z$, ne' $Z \subseteq Y$.

9. RELAZIONE DI EQUIVALENZA .

Sia A un insieme astratto di elementi.

Gli elementi di A a seconda dell'aspetto che si vuole enfatizzare si diranno oggetti, elementi, punti, segmenti e molte altre cose come ad esempio alternative di situazioni concrete ad esempio economiche, finanziarie, gestionali, politiche, logistiche.

Una relazione su A può o no verificare alcune condizioni fondamentali e a seconda che una relazione abbia o no determinati requisiti può essere sviluppata o meno una particolare teoria.

Una prima classe di relazioni sono le relazioni di equivalenza onnipresenti in Matematica. Una relazione R sull'insieme A si dice che è una relazione di equivalenza se essa gode delle seguenti tre proprietà:

1. $\forall x \in A \Rightarrow x R x$ (proprietà riflessiva)
2. $\forall x, y \in A, x R y \Rightarrow y R x$ (proprietà simmetrica)
3. $\forall x, y, z \in A, x R y, y R z \Rightarrow x R z$ (proprietà transitiva)

I) Sia α un piano qualsiasi. Due rette r ed s di α si dicono "*parallele*" ($r // s$) se coincidono ($r \equiv s$) oppure se non hanno alcun punto in comune ($r \cap s = \emptyset$). Nell'insieme delle rette del piano la relazione di "parallelismo" è una relazione di equivalenza. (Infatti è $r // r$, per ogni retta $r \in \alpha$; inoltre se $r // s$, è pure $s // r$; ed infine se

$r // s, s // t$, allora segue $r // t$).

II) Nell'insieme $Z \times Z^* = \{(m,n) : m \in Z, n \in Z, n \neq 0\}$, sia R la relazione così definita: $(m,n) R (p,q)$ se risulta $m \cdot q = n \cdot p$. Ad esempio è $(4,5) R (8,10)$ [$4 \cdot 10 = 5 \cdot 8$], $(2,-3) R (6,-9)$. La relazione R è una relazione di equivalenza: infatti è $(m,n) R (m,n)$ per ogni (m,n) ; inoltre se $(m,n) R (p,q)$ allora è $(p,q) R (m,n)$; infine se $(m,n) R (p,q)$ e $(p,q) R (r,s)$, allora risulta $(m,n) R (r,s)$ (⁸).

III) Se C è l'insieme delle città italiane, la relazione R che ad ogni città A associa le città B tali che "A appartiene alla medesima regione di B" è una relazione di equivalenza (verificare).

IV) Se K è l'insieme dei calciatori delle squadre italiane, la relazione R che ad ogni calciatore $x \in K$ associa tutti i calciatori $y \in K$ tali che "x appartiene alla medesima squadra di y" è una relazione di equivalenza.

Le relazioni di equivalenza talvolta si indicano con il simbolo \simeq . La scrittura $x \simeq y$ si legge "x equivalente a y".

Sia A un insieme ed R una relazione di equivalenza su A . Per ogni $x \in A$ denotiamo con A_x l'insieme di tutti gli $y \in A$ tali che $y R x$. Poniamo cioè:

$$A_x = \{y : y \in A, y R x\}$$

Si ha subito che :

$$(a) \quad x R x' \implies A_x = A_{x'}$$

$$(b) \quad x \text{ non } R x' \implies A_x \cap A_{x'} = \emptyset$$

La proprietà (a) è banale, per la (b) si supponga per assurdo l'esistenza di un elemento $y \in A_x \cap A_{x'}$. Segue da 2. e 3. $x R x'$ contro l'ipotesi.

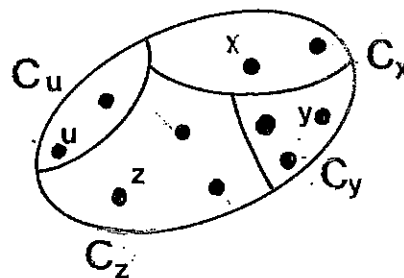
Segue dunque che la famiglia degli insiemi A_x tra loro disgiunti, detti le classi di equivalenza formano una partizione di A cioè una famiglia di insiemi a due a due disgiunti la cui riunione è l'insieme A, detta appunto partizione in classi di equivalenza.

È piuttosto evidente che una equivalenza può essere assegnata, assegnando una partizione; anzi non vi è dubbio che questa è la via più semplice per assegnare una relazione di equivalenza.

Infatti data una partizione \mathcal{P} di A diremo che $x R y$ solo se x ed y appartengono ad una stessa classe di \mathcal{P} . Una tale R si dice \mathcal{P} -derivata.

Le classi di equivalenza "partizionano" l'insieme dove sono definite: esse lo suddividono

in "regioni" o "classi" che non hanno parti in comune e che "coprono" tutto l'insieme. Le classi di equivalenza si possono essere utilizzate per introdurre nuovi concetti.



Ad esempio, la nozione di "direzione" di una retta r in un piano α , può essere

riguardata come la classe di equivalenza che comprende tutte le rette di α parallele ad r (cfr. es. I). Ancora un "numero razionale" $\frac{m}{n}$ puo' essere riguardato come la classe di equivalenza nella quale stanno tutte le coppie (p, q) equivalenti a (m, n) (cfr. es. II): Ad esempio: $\frac{2}{3}$ non e' altro che la classe di equivalenza $\{(2, 3), (4, 6), (8, 12), (-2, -3), \dots\}$.

Anche nella vita di tutti i giorni si fa largo uso delle classi di equivalenza (piu' o meno incoscientemente). Le "classi di leva" sono classi di equivalenza nell'insieme di tutti gli individui [x e y sono equivalenti se nati nello stesso anno: ogni classe di equivalenza comprende individui della stessa classe di leva]; la classificazione del mondo animale e' ancora una partizione in classi di equivalenza; la suddivisione di un continente in "stati" (o quella di uno stato in "regioni") e' una ripartizione del continente in classi di equivalenza; ...

Sia A un insieme e sia $\mathcal{P} = \{A_x\}_{x \in I}$ una partizione di A . L'insieme \mathcal{P} a volte si denota con A/R e si chiama insieme quoziente. La considerazione di questo insieme nasce allora che si desidera fissare la nostra attenzione sulle classi di equivalenza, riguardandole come oggetti.

A partire da A e' dunque determinato un nuovo insieme i cui oggetti sono le classi di equivalenza rispetto a R . L'applicazione (suriettiva e in generale non iniettiva):

$$p: A \rightarrow A/R$$

definita $\forall x \in A$ ponendo:

$$p(x) = A_x$$

si chiama proiezione canonica di A nel suo quoziente.

Usualmente quando si passa da un insieme A al suo quoziente A/R rispetto ad una relazione R si passa da un concetto astratto ad un nuovo concetto astratto, ma che porta ad una astrazione maggiore.

È importante fissare la nostra attenzione sui seguenti esempi.

a) *Le direzioni*. Se A è l'insieme delle rette dello spazio ed R è il parallelismo si passa all'insieme quoziente delle direzioni.

b) *Le forme delle figure*. Se A è l'insieme delle forme spaziali ed R è l'equivalenza geometrica allora A/R è l'insieme delle forme delle figure.

c) *Le frazioni*. Se A è l'insieme delle frazioni (coppie di interi m/n con $n \neq 0$) ed R è l'eguaglianza in croce allora A/R è l'insieme dei numeri razionali.

d) *I numeri naturali, nella definizione di Russel*. Premettiamo la nozione di insiemi equipotenti.

Due insiemi A e B finiti o infiniti si dicono della stessa potenza (equipotenti) o di egual numero cardinale finito o infinito se e' possibile stabilire una corrispondenza biunivoca fra gli elementi dei due insiemi, in altre parole A e B sono equi- potenti se esiste una applicazione $f : A \rightarrow B$ biettiva. Si scrive allora:

$$A \cong B$$

Proviamo che l'equipotenza e' una relazione d'equivalenza su una qualsiasi famiglia Ω di insiemi.

Si prova subito la proprietà riflessiva: $A \cong A$ (per questo è sufficiente considerare l'applicazione identica su A , cioè quella che ad ogni elemento di A , associa l'elemento stesso).

Per provare la proprietà simmetrica notiamo che se $A \cong B$ allora esiste $f: A \rightarrow B$ biettiva, questo implica che $f^{-1}: B \rightarrow A$ è anche biettiva e quindi che $B \cong A$.

Infine per dimostrare la proprietà transitiva si supponga che $A \cong B$ e $B \cong C$. Ciò significa che esistono le applicazioni $f: A \rightarrow B$ $g: B \rightarrow C$ biettive e da esse si costruisce la loro composizione $g \circ f: A \rightarrow C$, biettiva di A verso C : dunque $A \cong C$. Il quoziente della totalità degli insiemi finiti rispetto alla equipotenza fornisce "per astrazione" il concetto di cardinalità. Il quoziente è dunque l'insieme delle Cardinalità o potenze degli insiemi ovvero dei numeri naturali cardinali.

In questo ordine di idee Bertrand Russel partendo dagli insiemi concreti ha costruito una teoria di numeri naturali definiti come cardinali di insiemi concreti. Senza addentrarsi in queste questioni, l'idea base è una simulazione del comportamento di un bambino nell'età prescolare; egli confronta 3 dita, 3 caramelle, 3 palline e conquista la relativa cardinalità alla quale, con intervento esterno, l'adulto attribuisce nominalmente il simbolo di 3.

e) *I numeri transfiniti.* La stessa relazione di equipotenza trattata sopra può estendersi ovviamente anche agli insiemi infiniti. Allora le classi di equivalenza in

ciascuna delle quali si pongono insiemi infiniti diversi, ma per i quali esistono biezioni dell'uno nell'altro, danno luogo al concetto di cardinalita' degli insiemi infiniti. L'insieme delle cardinalita' degli insiemi infiniti detto anche insieme dei numeri trasfiniti costituisce un interessante capitolo della matematica.

Per entrare nei dettagli, diamo alcune definizioni, e per cominciare la definizione formale di insieme infinito.

*Un insieme A si dice **infinito** se e' equipotente ad un suo sottoinsieme proprio. In caso contrario A si dice **finito**.*

Evidentemente gli insiemi \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} , sono infiniti. L'insieme dei naturali \mathbb{N} e' equipotente, ad esempio, all'insieme dei numeri pari $\mathbb{P} = \{0, 2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$. (L'applicazione che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $2n \in \mathbb{P}$ e' una biiezione di \mathbb{N} in \mathbb{P}). Ma l'insieme \mathbb{N} e' anche equipotente come vedremo sia a \mathbb{Z} che a \mathbb{Q} . La classe di equivalenza di \mathbb{N} si chiama *potenza del numerabile* e si denota con X_0 (leggi aleph-zero). Segue che: *Un insieme A si dice numerabile se e' equipotente a \mathbb{N} .*

Il fatto che A sia numerabile, ossia che esiste una corrispondenza biunivoca tra A ed \mathbb{N} , significa che gli elementi di A possono essere scritti nel modo seguente:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

cioe' assegnando un indice $n \in \mathbb{N}$ ad ognuno di essi.

Ad esempio per provare che l'insieme \mathbb{Z} e' numerabile, basta osservare che l'applicazione $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ definita da:

$$\varphi(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{se } n \text{ e' pari} \\ \frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ e' dispari} \end{cases}$$

e' biunivoca (essa porta 0 in 0, 1 in 1, 2 in -1, 3 in 2, 4 in -2 e cosi' via).. Anche Q e' un insieme numerabile. E' sufficiente per questo provare che Q e' contenuto in un insieme numerabile visto che contiene Z che e' numerabile. Per questo basta osservare che l'insieme delle coppie di interi e' numerabile. Tale insieme si numera nel modo seguente

(0,0)
 (0,1) (1,1)
 (0,2) (1,2) (2,2)

 (=,n) 1,n) (n-1,n) (n,n)

Cancellando la coppia (0,0) e le coppie (a,b) di elementi a e b non primi tra loro si ha una biiezione tra N e Q.

Due esempi di numeri transfiniti sono la cardinalita' del numerabile, cioe' la classe di equipotenza determinata dall'insieme dei numeri naturali, che si indica appunto con X_0 (leggi aleph-zero) e la cardinalita' del continuo, cioe' la classe di equipotenza determinata dall'insieme dei numeri reali che si indica con X_1 (leggi aleph-uno). Si sa che il numerabile e' minore del continuo (cioe' i naturali sono equipotenti ad una parte propria dei reali ma non e' possibile rispondere alla domanda se tra questi due cardinalita' o numeri transfiniti ve ne siano di intermedie. Questo e' uno dei grossi enigmi della matematica

noto sotto il nome di ipotesi del continuo.

Piu' precisamente spostandoci nell'ambito della logica si sa che sono costruibili due diverse matematiche del trasfinito in ciascuna delle quali puo' risponderci SI esistono oppure NO non esistono.

f) *La temperatura di un corpo ed il principio zero della Termodinamica.*

E' interessante notare che in trattazioni moderne di termodinamica si introduce sperimentalmente la relazione "essere in equilibrio termico" e cio'avviene quando due corpi messi a contatto non cedono l'uno calore all'altro. Questa relazione e' riflessiva e simmetrica e si ammette il cosiddetto:

Principio zero della termodinamica: la relazione "essere in equilibrio termico" e' una relazione transitiva.

L'insieme quoziente che cosi' nasce e' l'insieme delle temperature.

La temperatura T di un corpo e' astrattamente dunque il "quid" di comune a tutti i corpi che sono in equilibrio termico tra di loro.

Gli esempi indicati provano la onnipresenza delle relazioni di equivalenza nel ragionamento qualitativo o nelle astrazioni che si fanno. Dagli esempi visti emerge inoltre molto bene come il procedimento di passaggio al quoziente codifica, generalizzandolo, quel processo che

normalmente l'uomo compie quando dal concreto passa all'astratto, dandone una definizione puramente nominale atto ad indicare il "quid" di astratto che accomuna oggetti "equivalenti". Si pensi alla parola «cane» ad esempio. Prendo gli animali e costruisco partizioni, una di queste classi è quella del «cane» intesa come classe di tutti i «cani concreti», ma pensata come astratto nominale.

Potrebbe intuitivamente dirsi che il ragionare per relazioni di equivalenza e' l'arte di chiamare eguali cose diverse ma che sotto certi aspetti diverse non sono.

10. RELAZIONI DI ORDINE

Vogliamo ora considerare un altro tipo di relazioni sempre su un insieme, non meno importante delle relazioni di equivalenza. Si tratta delle cosiddette relazioni d'ordine.

Una relazione R su un insieme A , cioè una relazione definita da una parte di $A \times A$ si dice una relazione d'ordine se sono per esse verificate i seguenti

1. $\forall x \in A \Rightarrow x R x$ (proprietà riflessiva)
2. $\forall x, y \in A, x R y \text{ e } y R x \Rightarrow x=y$ (proprietà antisimmetrica)
3. $\forall x, y, z \in A, x R y, y R z \Rightarrow x R z$ (proprietà transitiva)

Una relazione d'ordine differisce da quella di equivalenza per la proprietà 2) che può anche enunciarsi nella forma:

$$2') a R b, a \neq b \Rightarrow b \text{ non-}R a.$$

Una relazione d'ordine si dice totale se vale la ulteriore proprieta' di tricotomia:

4) $\forall a, b \in A$ con $a \neq b$ risulta $a R b$ oppure $b R a$.

Una relazione d'ordine non totale si dice parziale.

Esempi di relazioni d'ordine sono:

- a) *L'ordinamento totale dei numeri reali o razionali o interi*
- b) *L'ordine parziale " \leq " delle parti di un insieme.*
- c) *La divisibilita' " $|$ " nei naturali, come ordine parziale.*

E' facile pensare che l'inclusione e' parziale, infatti due insiemi distinti o con una parte propria in comune sono inconfrontabili.

La divisibilita' necessita di ulteriori spiegazioni. Sia $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\forall a, b \in N$:

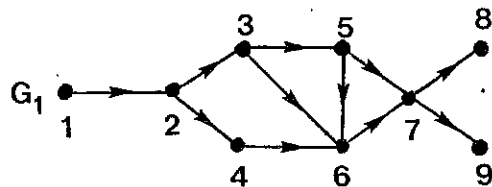
$$a/b \Leftrightarrow \exists K \in N : b = K a.$$

Sia la a/a essendo $a = 1 \cdot a$, a/b e b/a risulta $b = K a$ e $a = h b$ onde $hk = 1$, cioe' $h = k = 1$ (in N). Infine la a/b e b/c cioe' se $b = K a$ e $c = h b$ allora $c = (h k)a$, ovvero a/c . Tuttavia la relazione e' d'ordine parziale perche' 2 o 3 non sono confutabili, due primi diversi non sono confutabili, due interi aventi due primi diversi non sono confutabili etc. etc..

Non e' difficile costruire ulteriori esempi.

Esempio 1:

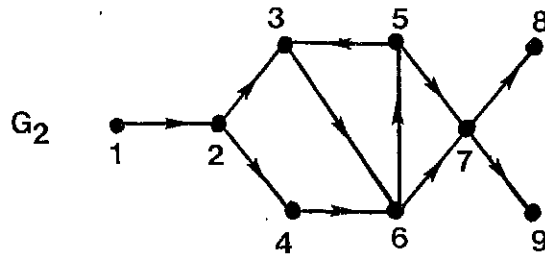
Se $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$, sia G_1 il seguente grafo definito su A :



Sia R la relazione definita in A come segue: « un elemento $x \in A$ è in relazione R con un $y \in A$ se esiste un "percorso orientato" che va da x a y ». La relazione R è una relazione d'ordine. Infatti: 1) ogni elemento è in relazione con se stesso (da x si può andare a x); 2) è facile verificare che per ogni coppia di elementi distinti x, y non sono vere entrambe le condizioni $x R y$, $y R x$ (se da x si può andare a y non è vero che da y si può andare a x , e viceversa); 3) se esiste un percorso che va da x a y e uno che va da y a z , allora si può affermare che esiste un percorso che va da x a z .

La relazione R non è però una relazione d'ordine totale (perché?).

La medesima relazione, considerata nel grafo G_2 (definito sempre su A e nel quale rispetto a G_1 è cambiato soltanto il verso della linea che congiunge 3 con 5), non è più una relazione d'ordine (perché?) (7).



Esempio 2:

Sia la Q^* , l'insieme dei razionali primitivi ridotti ai numeri termini, in simboli:

$$Q^* = \left\{ \frac{a}{b} : \frac{a}{b} \in Q^* \quad , \quad (a;b) = 1 \right\}.$$

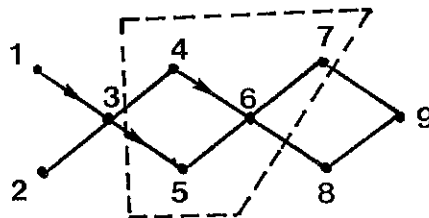
Definiamo la relazione Q^* :

$$\frac{a}{b} \Big| \frac{m}{n} \Leftrightarrow a \mid m \quad , \quad b \mid n \quad \text{in } N.$$

E' facile verificare che si tratta di un ordine parziale.

Esempio 3:

Si consideri la relazione d'ordine associata al grafo definito su $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ [ossia $x \leq y$ se esiste un percorso orientato che permetta di andare da x a y]. La relazione \leq e' d'ordine totale? Posto $B = \{4,5,6,7\}$, si determinino gli eventuali maggioranti di B , minoranti, estremo superiore, massimo estremo inferiore, minimo. Dire se l'insieme B e' limitato superiormente o inferiormente.



Esempio 4 : (Ordine lessicografico)

Siano $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ed (y_1, y_2, \dots, y_n) due n -ple o vettori di un insieme ordinato (A, \leq) . Diciamo che

$$\begin{aligned} \underline{x} \leq \underline{y} \Leftrightarrow & \begin{aligned} & x_1 < y_1 && \text{oppure} \\ & x_1 = y_1, x_2 < y_2 && \text{oppure} \\ & x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 < y_3 && \text{oppure} \\ & \dots && \dots \\ & x_1 = y_1, \dots, x_{n-1} = y_{n-1}, x_n < y_n \end{aligned} \end{aligned}$$

Il lettore verifichi che tale relazione e' una relazione d'ordine parziale detto ordine lessicografico.

Esempio 5: (Dominanza vettoriale)

Nello stesso ambiente precedente diciamo che:

$$\underline{x} \leq \underline{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Questo tipo di ordinamento parziale prende il nome di dominanza vettoriale.

In generale, una relazione d'ordine viene indicata con il simbolo \leq . La scrittura $x \leq y$ si legge "x precede y". Se \leq e' una relazione d'ordine definita in A , la coppia (A, \leq) si chiamera' un insieme parzialmente ordinato (poset) o totalmente ordinato a seconda che tale sia la relazione \leq .

Sia (A, \leq) un insieme parzialmente ordinato e sia $B \subseteq A$.

Un elemento $L \in A$ si dice **maggiorante** di B se tutti gli elementi di B "precedono" L . Un elemento $l \in A$ si dice

minorante di B se l precede tutti gli elementi di B :

L maggiorante di $B \Leftrightarrow \forall x \in B, x \leq L$

l minorante di $B \Leftrightarrow \forall x \in B, l \leq x$

Sia $B = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq 4\}$. L'elemento $5 \in \mathbb{Q}$ e' un maggiorante di B , l'elemento $-1 \in \mathbb{Q}$ e' un minorante di B . Anche $4, 6, 9$ sono maggioranti di B , cosi' come $1, 0, -3$ sono minoranti di B .

Un $L \in A$ si dice **massimo** [risp. **minimo**] di B se L e' maggiorante [risp. minorante] di B ed inoltre $L \in B$:

$$L \text{ massimo di } B \Leftrightarrow \begin{cases} 1) L \text{ maggiorante di } B \\ \text{(minimo)} & \text{(minorante)} \\ 2) L \in B \end{cases}$$

Si scrive $L = \text{Max } B$ [Min B].

Se B e' l'insieme sopra descritto si puo' osservare che 4 e' l'elemento massimo di B (4 e' maggiorante di B , ed inoltre $4 \in B$); non esiste invece un elemento che sia minimo di B .

Sia (A, \leq) un insieme principalmente ordinato, quali che siano $a, b \in A$ denotiamo con $l(a)$ ed $l(b)$ rispettivamente gli insiemi dei minoranti di a e di quelli di b , puo' accadere che $l(a) \cap l(b) \neq \emptyset$ e che questo insieme abbia minimo e massimo, allora diremo **minimo comune** e **massimo comune** minuyente.

Analogamente se $L(a)$ ed $L(b)$ sono l'insieme dei maggioranti di a e b ed $L(a) \cap L(b) \neq \emptyset$ si possono definire il **minimo comune** maggiorante ed il **massimo comune**

maggiorante.

Esempi:

In (Ω, \subseteq) il minimo comune minimante di due e' una A e B e' l'insieme vuoto mentre il minimo come minuente e' l'intersezione dei due insiemi. Il minimo come minuente e' $A \cup B$ mentre il minimo comun maggiorante e' sempre Ω .

In $(N, |)$ il minimo comune minuente di a e b e' 1 mentre il massimo comun minuente e' il massimo comun divisore $(a; b)$. inoltre il minimo comun maggiorante e' minimo comune multiplo $[a, b]$ mentre non esiste il massimo comun maggiorante.

Un $L \in A$ si dice **estremo superiore** di B se L e' maggiore di B ed inoltre L precede tutti i maggioranti di B . Un $l \in V$ si dice **estremo inferiore** di B se l e' minorante di B ed inoltre tutti i minoranti di B precedono l :

$$L \text{ estremo superiore di } B \Leftrightarrow \begin{cases} 1) L \text{ maggiorante di } B \\ 2) L \leq y, \forall y \text{ maggiorante di } B \end{cases}$$

$(L = \sup B)$

$$l \text{ estremo inferiore di } B \Leftrightarrow \begin{cases} 1) l \text{ minorante di } B \\ 2) y \leq l, \forall y \text{ minorante di } B \end{cases}$$

$(l = \inf B)$

Per l'insieme B di prima si ha: $4 = \sup B$, $1 = \inf B$.

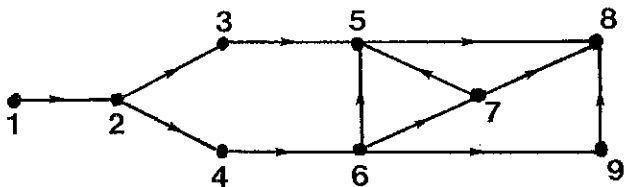
Si verifica facilmente che i maggioranti di B sono tutte le $x \geq 4$, mentre i minoranti di B sono tutte le $x \geq 1$.

Dalle definizioni precedenti segue che, detti M_B l'insieme di tutti i maggioranti di B ed N_B l'insieme di tutti i minoranti di B , allora

$$\sup B = \min M_B, \quad \inf B = \max N_B$$

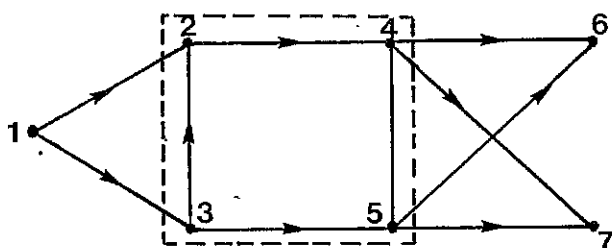
Esempi:

1) Si consideri l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ed il seguente grafo su di esso definito:



in A e' definita una relazione d'ordine \leq ($x \leq y$ significa "e' possibile andare da x a y "). Se $B = \{3, 4, 5, 6\}$, si ha $M_B = \{5, 8\}$, $N_B = \{1, 2\}$. Risulta $5 = \max B$, mentre non esiste $\min B$. Si ha inoltre $5 = \sup B$, $2 = \inf B$. Si osservi che gli elementi $7, 9$ non sono maggioranti di B .

2) Sia $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Si consideri il seguente grafo definito su A e la relativa relazione d'ordine \leq :



Si verifica facilmente che B non ha ne' massimo, ne' estremo superiore: l'insieme dei suoi maggioranti e' $M_B = \{6, 7\}$

Si dice che un insieme $B \subseteq A$ e' limitato superiormente [risp. inferiormente] se esiste un $L \in A$ maggiorante [risp. minorante] di B .

Un insieme $B \subseteq A$, che risulti limitato sia superiormente che inferiormente, si dice limitato.

L'insieme $B_1 = \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x < 8\}$ e' limitato (superiormente e inferiormente). L'insieme $B_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 2\}$ e' limitato inferiormente, ma non superiormente. L'insieme $B_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \leq 5\}$ e' limitato superiormente, ma non inferiormente.

Dimostriamo le seguenti proprieta' nelle quali $(A \leq)$ e' sempre un insieme ordinato $B \subseteq A$.

Prop. 1 Se B ha estremo superiore (inferiore), questo e' unico.

Dim. Siano $L = \text{Sup } B$, $M = \text{Sup } B$. L ed M sono entrambi maggioranti di B . Inoltre, poiche' l'estremo superiore di un insieme precede tutti i maggioranti dell'insieme segue

$L = \sup B \leq M$ (maggiorante)

$M = \sup B \leq L$ (maggiorante)

Per la proprietà antisimmetrica risulta $L = M$. ■

Prop. 2 Sia $L = \sup B$. Se L appartiene a B , allora L è massimo di B (Analogamente, se $l = \inf B$ e $l \in B$, allora l è minimo di B).

Dim. Facilmente, se $L = \sup B \in B$, L è un maggiorante di B che appartiene all'insieme B . Dunque $L = \max B$. ■

Prop. 3 Se L è massimo (minimo) di B , allora L è estremo superiore (inferiore) di B .

Dim. Se $L = \max B$, allora L è maggiorante di B . Inoltre, poiché $L \in B$, L precede tutti i maggioranti di B . Segue $L = \sup B$.

Dalle Prop. 1 e 3 si ha :

Prop. 4 Se B ha massimo (minimo), questo è unico.

si ha ancora:

Prop. 5 Se L è estremo superiore di B e $L \notin B$, allora B non ha massimo. (analogamente, se $l = \inf B$ e $l \notin B$, B non ha minimo).

Dim. Se $M = \max B$, per definizione di massimo si ha $M \in B$, e per il teorema T.8.3 $M = L$ che non appartiene a B . ■

11.- LE PERMUTAZIONI E LE DISPOSIZIONI SEMPLICI

Sia ora $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un insieme finito.

Ogni ordinamento totale costruibile su A si chiama una permutazione su A . Si puo' provare che detto P_n il numero delle permutazioni su n oggetti, si ha:

$$P_n = n! = n (n-1) (n-2) \dots 1.$$

Si ha subito che $P_1 = 1 = 1!$, $P_2 = 2 = 2!$.

Supponiamo dunque di ammettere che:

$$P_{n-1} = (n-1)!$$

dunque un insieme B di $n-1$ elementi si puo' ordinare in $(n-1)!$ modi.

Sia α un oggetto con $\alpha \notin B$. Per ogni ordinamento dato l'elemento α si puo' collocare davanti ad a_1 , tra a_1 ed a_2 e cosi' via fino all'ultimo posto, si puo' collocare cioe' in n modi.

Dunque da ogni ordinamento di B se ne ottengono n di $B \cup \{\alpha\}$. Dunque:

$$P_n = n P_{n-1} = n!$$

Se l'insieme $A = (1, 2, \dots, n)$ precede l'ordine naturale, una permutazione (a_1, a_2, \dots, a_n) di A si dice di classe pari o dispari a seconda che per ristabilire l'ordine precedente si debbano eseguire un numero pari o dispari di scambi.

Naturalmente poiche' operando su A con uno scambio alla volta si passa dal pari al dispari, le permutazioni di classe pari e di alcune dispari sono in egual numero e sono quindi per $n > 2$ pari a $n!/2$.

Si chiamano disposizioni (semplici) di n oggetti ad h ad

h, gli ordinamenti che possono farsi su una qualsiasi parte di h oggetti.

Indicato con $D_{n,h}$ il numero delle disposizioni, si ha che essendovi $\binom{n}{h}$ possibili parti e ciascuna di esse si può ordinare in $h!$ modi allora:

$$D_{n,h} = \binom{n}{h} h! = n(n-1) \dots (n+h-1).$$

Proviamo ora che:

TEOREMA. Sia $0 \leq k \leq n$. Allora ad ogni disposizione di n elementi ad h ad h è associata una applicazione iniettiva del k- insieme $\{1, 2, \dots, k\}$ in un n-insieme e viceversa.

DIMOSTRAZIONE. Sia dato un n-insieme A e sia $B = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ un sottoinsieme ordinato di A.

Allora l'applicazione $f : B \rightarrow A$ tale che $f(i) = a_i$, $\forall a_i \in B$ è una applicazione iniettiva di $\{1, 2, \dots, k\}$ in A. Inversamente data una applicazione iniettiva di $\{1, 2, \dots, k\}$ in A resta fissato in A l'insieme ordinato $(f(1), f(2), \dots, f(k))$.

Come caso particolare una partizione di un n-insieme A è una biezione tra $\{1, 2, \dots, n\}$ ed A.

Esempi:

1) Un allenatore di una squadra di calcio ha 7 attaccanti cui affidare le "maglie" n.7, n.8, n.9, n.10, n.11. Quanti possibili attacchi può schierare?

Bisogna determinare $D_{7,5}$: ossia il numero delle cinque ordinate che si possono formare con i 7 attaccanti. Si ha

$$D_{7,5} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520.$$

2) Quanti tricolori si possono formare con i colori rosso, blu, verde, giallo? Si ha $D_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

3) In quanti modi si possono sistemare tre libri A, B, C uno accanto all'altro su uno scaffale?

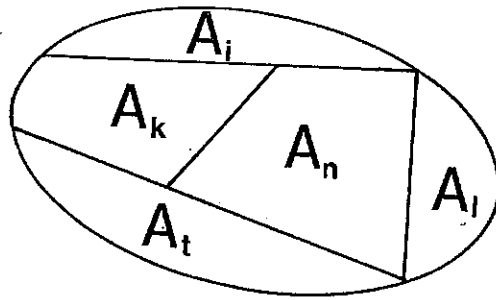
$$\text{Si ha } P_3 = 3! = 6:$$

A, B, C ; B, A, C ; C, A, B
A, C, B ; B, C, A ; C, B, A

12. LA RELAZIONE DI PREFERENZA - INDIFFERENZA -

Siamo giunti ora definire una relazione che e' in un certo qual senso una generalizzazione della nozione di ordine parziale. Sia A un insieme non vuoto i cui elementi nell'ambito dell'Economia Matematica si dicono le alternative. Supponiamo che su A siano definite due relazioni P ed I definite come segue:

a) I e' una relazione di equivalenza su A che determina su A una partizione $\tilde{\pi}$ in classi che diremo «classi di indifferenza».



Se e' $x \sim y$ leggeremo (l'alternativa x e' indifferente all'alternativa y).

b) $\forall x, y \in A$ con $x \not\sim y$ risulta $x P y$ oppure $y P x$ (proprietà diconnessione (tra le classi di indifferenza)).

Se e' $x P y$ leggeremo « x e' preferito ad y ».

c) $\forall x, y, z \in A : x P y, y P z \Rightarrow x P z$ (proprietà transitiva di P).

La « relazione » composta mediante la coppia di relazioni (P, I) dicesi « relazioni di preferenza - indifferenza ».

Taluni autori invece della coppia di relazione (P, I) usano una notazione unica \leq . Il simbolo \leq e' definito ponendo,

$\forall x, y \in A$

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x \sim y \\ x P y \end{cases} \quad \text{altrimenti}$$

Si noti inoltre che se le classi di indifferenza si riducono ad un solo elemento la relazione \leq e' una relazione d'ordine totale.

Altresi' una relazione di preferenza - indifferenza puo'

essere pensata come un ordine parziale in cui i singleton sono « esplosi » in vaste classi di indifferenza.

Un modo costruttivo per assegnare una preferenza può essere il seguente:

a) Fissato A si dia una partizione di A in classi (classi di indifferenza).

b) Si dia una relazione d'ordine totale τ nel quoziente A/I .

c) Quali siano $x, y \in A$ con x ed y non indifferenti diremo che $x P y \Leftrightarrow A_x \tau A_y$.

E' anche evidente che la coppia (P^{-1}, I^{-1}) e' ancora una preferenza - indifferenza quando lo e' la coppia (P, I) .

Sia A un'insieme e sia (P, I) una preferenza - indifferenza su A .

Chiamiamo ambiente di alternative $S \subseteq A$ ogni sottoinsieme finito di A . La restrizione di (P, I) ad S e' una relazione di preferenza - indifferenza su S . Essendo S finito tra le classi determinate da I su S ne esiste una che e' minima nel senso che i suoi elementi, indifferenti tra loro, sono preferiti ai rimanenti. Questa classe minima si denotera' con

$$C(S)$$

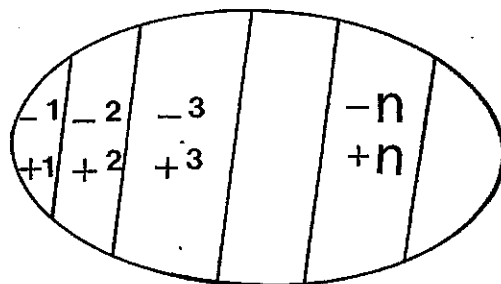
e si dira' insieme delle alternative scelte.

La legge C che ad ogni alternativa S associa l'insieme $C(S)$ si chiama funzione di scelta.

Esempio 1:

Sia Z_0 l'insieme degli interni relativi privati dello zero.

Consideriamo la partizione costituita dagli insiemi del tipo
 $\{-n, +n\}$,



Presi $a, b \in \mathbb{Z}$ diciamo che $a | b$ in $\mathbb{Z} \Leftrightarrow |a| \mid |b|$ in \mathbb{N} .
 La relazione " $|$ " e' un esempio di preferenza - indifferenza.

Esempio 2:

Sia $A[x]$ insieme dei polinomi in una variabile del tipo:

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Diciamo equivoluti due polinomi quando differiscono per una costante moltiplicativa.

Diciamo che due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ sono tali che $p(x) | q(x)$

se esiste un polinomio $k(x)$ tale che $|q(x) k(x) = q(x)$.

La relazione " $|$ " e' una preferenza- indifferenza.